

UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA

JULIANE DONADEL

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DOS SISTEMAS DINÂMICOS
NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO**

Ijuí (RS)

Março de 2008.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

JULIANE DONADEL

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DOS SISTEMAS DINÂMICOS
NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática – Área de concentração da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marat Rafikov

Ijuí (RS)

Março de 2008

UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
DeFEM – DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA
DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação

**“MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DOS SISTEMAS DINÂMICOS
NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO”**

Elaborada por

JULIANE DONADEL

Como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marat Rafikov – DeFEM (Orientador)

Prof^a. Dra. Diomar Cristina Mistro - UFSM

Prof. Dr. Luis Alberto Díaz Rodrigues – UFSM

Ijuí, RS, 10 de março de 2008.

*Aos meus pais, Pedro e Loreni,
e ao mano Rogério, pelo apoio incondicional
e pela força nos momentos difíceis.*

Agradecimentos

A Deus, pela conquistas alcançadas e principalmente pela vida.

Aos meus pais, Pedro e Loreni, pela confiança, incansável apoio e incentivo nos momentos difíceis.

Ao mano Rogério, pela amizade e companheirismo.

Ao professor Orientador Dr. Marat Rafikov, pela amizade, dedicação e confiança que depositaste em mim e neste trabalho.

Aos professores do Mestrado pelos conhecimentos transmitidos, pelas amizades formadas, em especial ao professor Dr. Antonio Carlos Valdiero, pelo interesse e empenho fora da sala de aula.

Aos colegas e amigos pelos momentos de que compartilhamos ao longo destes dois anos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro através da Bolsa de Mestrado.

Às funcionárias do DeFEM, principalmente a Geni, pela disponibilidade e carinho com que exercem seu trabalho.

E a todos que de alguma maneira contribuíram para que hoje eu estivesse aqui.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo o estudo dos sistemas dinâmicos não-lineares de tempo discreto e a aplicação do controle ótimo linear *feedback* nesses modelos. Para a formulação da teoria de controle ótimo demonstra-se um teorema que garante, dentro das suposições feitas, a estabilidade do sistema. A vantagem desse estudo é que os mapas são, em geral, mais simples de se analisar, devido à facilidade e agilidade para a implementação dos mesmos, além de reproduzirem de maneira mais realística a dinâmica de populações. Os modelos populacionais estudados são: o Mapa Logístico, o Mapa de Ricker e o Modelo de Nicholson-Bailey. Outro modelo caótico que também é estudado é o Mapa de Henon. Através das simulações, verifica-se o comportamento caótico dos mapas, e também a eficiência do controle que estabiliza os modelos em uma trajetória desejada. Assim, mostra-se que o controle linear *feedback* pode ser aplicado em sistemas não-lineares de tempo discreto para quaisquer valores dos parâmetros, e ainda, pode-se concluir que o Mapa de Ricker é um bom modelo para descrever e controlar o crescimento de aguapés para uma melhor eficiência nas lagoas poluídas.

ABSTRACT

This dissertation has as objective the study of discrete-time nonlinear dynamical systems and feedback optimal control application in these models. For the formulation of the theory of optimal control a theorem is demonstrated that guarantees, with suppositions made, the stability of the system. The advantage of this study is that in general the maps are simpler to analyze, due to facility and agility for its implementation, beyond to reproduce in the more realistic way the populations dynamic. The populations models studied are: the logistic map, the Ricker map and the Nicholson-Bailey Model. Another chaotic model also studied is the Henon map. By simulations verify the maps chaotic behavior, and also the efficient control that stabilize the models in a desired trajectory. In this way, it shows that the linear feedback control can be applied in discrete time nonlinear systems to any parameters values. Its possible to conclude that Ricker map is a good model to describe and to control the water hyacinth for a better efficiency in the polluted lakes.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 – Diagramas Teia de Aranha para o Mapa Logístico..... | 20 |
| Figura 2.2 – Diagrama Teia de Aranha para o Mapa Logístico: caso caótico | 21 |
| Figura 2.3 – Diagrama de bifurcação | 21 |
| Figura 2.4 – Diagramas Teia de Aranha para o Mapa de Ricker | 23 |
| Figura 2.5 – Diagrama Teia de Aranha para o Mapa de Ricker: caso caótico..... | 23 |
| Figura 2.6 – Diagrama de Bifurcação para modelo de Ricker | 24 |
| Figura 2.7 – Trajetória Temporal do Modelo de Nicholson-Bailey | 29 |
| Figura 2.8 – Atrator Estranho do Mapa de Henon | 32 |
| Figura 2.9 – Diagrama de bifurcação para o Mapa de Henon..... | 33 |
| Figura 2.10 – Trajetória Temporal do Mapa de Henon sem controle | 34 |
| Figura 4.1 – Trajetória Temporal do Mapa de Logístico (a) com ponto fixo estável sem controle, (b) controlado. | 55 |
| Figura 4.2 – Trajetória Temporal do Mapa de Logístico. (a) Com ciclo limite sem controle, (b) controlado. | 56 |
| Figura 4.3 – Trajetória Temporal do Mapa de Logístico (a) com comportamento caótico, (b) controlado..... | 57 |
| Figura 4.4 – Trajetória Temporal do Mapa de Ricker (a) com ponto fixo estável sem controle, (b) controlado. | 58 |
| Figura 4.5 – Trajetória Temporal do Mapa de Ricker (a)com ciclo de período-2, (b) controlado..... | 59 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.6 – Trajetória Temporal do Mapa de Ricker (a) com comportamento caótico, (b) controlado..... | 60 |
| Figura 4.7 – Trajetória Temporal do modelo (a) sem controle e (b) com aplicação do controle ótimo..... | 65 |
| Figura 4.8 – Modelo de Nicholson-Bailey controlado | 69 |
| Figura 4.9 – Trajetórias Temporais do Mapa de Henon controlado..... | 71 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 2.1 – Valores de r para os quais nascem órbitas periódicas..... | 19 |
|--|----|

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO | 1 |
| 1 SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO..... | 7 |
| 1.1 EQUAÇÕES A DIFERENÇAS NÃO-LINEARES | 8 |
| 1.1.1 Solução de Equilíbrio..... | 9 |
| 1.1.2 Estabilidade | 10 |
| 1.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS NÃO-LINEARES | 12 |
| 1.2.1 Solução de Equilíbrio..... | 12 |
| 1.2.2 Estabilidade | 13 |
| 2 MODELOS CLÁSSICOS DE TEMPO DISCRETO..... | 17 |
| 2.1 MODELOS POPULACIONAIS | 17 |
| 2.1.1 Mapa Logístico | 17 |
| 2.1.2 Mapa de Ricker | 22 |
| 2.1.3 Modelo de Nicholson-Bailey | 24 |
| 2.2 MAPA DE HENON..... | 30 |
| 3 CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO . | 35 |
| 3.1 CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS LINEARES DE TEMPO DISCRETO..... | 35 |
| 3.1.1 Sistema Linear Regulador de Estado de Tempo Discreto..... | 39 |
| 3.1.2 Sistema Regulador de Estado..... | 41 |
| 3.2 CONTROLE ÓTIMO LINEAR PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO | 42 |
| 4 APLICAÇÕES DO CONTROLE LINEAR PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO..... | 48 |
| 4.1 CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS POPULACIONAIS..... | 48 |
| 4.1.1 Controle Ótimo do Mapa Logístico..... | 53 |
| 4.1.2 Controle Ótimo do Mapa de Ricker | 57 |
| 4.1.3 Controle do crescimento de Aguapés através do Mapa de Ricker | 60 |

| | |
|--|-----------|
| 4.1.4 Controle Ótimo do Modelo de Nicholson-Bailey..... | 65 |
| 4.2 CONTROLE ÓTIMO DO MAPA DE HENON..... | 69 |
| CONCLUSÕES..... | 73 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 76 |

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata do problema de controle ótimo linear *feedback* aplicado em sistemas não-lineares de tempo discreto. Existem várias razões para se estudar esses sistemas do ponto de vista do seu comportamento dinâmico. A simplicidade para a sua análise e a variabilidade de seu comportamento são algumas dessas razões, pois, com uma pequena mudança no valor dos parâmetros ou na condição inicial, o mapa pode mudar completamente seu desempenho e, além disso, em muitos casos, os modelos de tempo discreto modelam de maneira mais realística o comportamento dos sistemas populacionais. Os mapas populacionais utilizados são: o Mapa Logístico, o Mapa de Ricker e o modelo de Nicholson-Bailey, sendo que o Mapa de Ricker foi aplicado na modelagem de crescimento de aguapés nas lagoas de estabilização para o tratamento de águas residuárias produzidas pela criação de suínos no Brasil e o modelo de Nicholson-Bailey no controle biológico de pragas. Além dos modelos populacionais, o controle ótimo também foi aplicado no Mapa de Henon, um dos exemplos de sistemas dinâmicos que exhibe comportamento caótico mais estudado.

Existem fenômenos biológicos, onde a modelagem é mais apropriada quando feita através de modelos discretos. Estes modelos são aplicados em espécies que não têm sobreposição de gerações, ou seja, os adultos morrem e são substituídos por seus descendentes em intervalos fixos de tempo. Organismos que sofrem mudanças abruptas ou têm estágios discretos de ciclo de vida também podem ser descritos por equações a diferenças. (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Modelos populacionais com gerações discretas são interessantes para os matemáticos, pois um caso simples pode conduzir a modelos matemáticos desafiadores, entre eles os que apresentam comportamento caótico. Esses modelos populacionais reproduzem os padrões dinâmicos complexos observados com frequência em populações de insetos, na propagação anual de plantas e em populações de vertebrados e mamíferos. A formulação de modelos de tempo discreto é feita utilizando equações a diferenças. (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Segundo Ferrara e Prado (1995), um modelo de tempo discreto, também conhecido como mapa, é um sistema dinâmico que evolui no tempo de forma discreta. Os mapas considerados são os compostos por uma equação ou um sistema de equações a diferenças não-lineares de tempo discreto. Em geral, os mapas são originados de um fluxo contínuo através

da utilização de seções de Poincaré. Uma seção de Poincaré é um dispositivo inventado por Poincaré cuja finalidade é reduzir o estudo de um fluxo contínuo num espaço de fases de dimensão n para o estudo de um mapa num espaço de fases de dimensão $n-1$ (MONTEIRO, 2006).

Os mapas são, em geral, mais simples para se analisar do que sistemas de equações diferenciais que lhes deram origem, além de reproduzirem de maneira mais realística a dinâmica de populações. Outra vantagem do estudo de modelos discretos é a facilidade e a agilidade em implementá-los e, desse modo, reproduzir o comportamento dos modelos contínuos para vários parâmetros e condições iniciais. Por isso a importância da análise do comportamento desses modelos (SEIDEL E RODRIGUES, 2005).

Um mapa geralmente depende de um ou mais coeficientes, chamados parâmetros de controle. À medida que esses parâmetros são variados, os pontos fixos ou órbitas periódicas descrevem trajetórias no espaço de fases. Uma mudança quantitativa dos parâmetros que leva a mudança qualitativa das propriedades do sistema é chamada de bifurcação. Neste caso, novos pontos estacionários podem aparecer e outros, anteriormente estáveis, podem se tornar instáveis e vice-versa. A ocorrência de bifurcações pode conduzir ao caos.

Não existe uma definição de consenso para o caos. Porém, o caos determinístico está essencialmente ligado à dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, sistemas determinísticos cuja evolução temporal conduz assintoticamente a atratores estranhos apresentam dinâmica caótica. A dependência acima mencionada resulta das não-linearidades presentes no sistema, as quais amplificam pequenas diferenças nas condições iniciais.

Segundo Monteiro, (2006), um conjunto fechado de pontos A , no espaço de fases de um sistema dinâmico, é definido como atrator se:

- A é um conjunto invariante, ou seja, qualquer trajetória $x(t)$ que começa em A , permanece em A por todo o tempo;
- A atrai um conjunto aberto de condições iniciais, isto é, há um hipervolume B , que contém A , tal que para qualquer condição inicial $x(0)$ pertencente a B , então a distância entre a trajetória $x(t)$ e A tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado bacia de atração de A ;

- A é mínimo, ou seja, não há subconjunto de A que satisfaça as duas condições anteriores.

Um atrator também pode ser definido intuitivamente como um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo. Um atrator contém uma órbita densa, que se torna arbitrariamente fechada para cada ponto do atrator (ALLIGOOD et al. 1997). No caso de um atrator estranho, também denominado atrator caótico, trajetórias que partem de condições iniciais vizinhas, além de permanecerem confinadas numa certa região do espaço de fases, devem ainda se distanciar exponencialmente com o passar do tempo. O mecanismo responsável por isso envolve repetidos esticamentos e dobras das trajetórias (FERRARA E PRADO, 1995).

O fluxo responsável pela geração de um atrator estranho normalmente contrai um volume de condições iniciais numa direção e estica-o na outra, levando a sensibilidade às condições iniciais (MONTEIRO, 2006).

Caos pode existir em sistemas clássicos, que são os modelos matemáticos, ou sistemas da vida real. É difícil definir precisamente o que é caos. Na verdade, existem várias definições, sendo mais fácil listar as propriedades de um sistema que apresenta comportamento caótico.

Banks et al. (1992) apresenta a definição de Devaney sobre caos. Segundo ele, tem-se que considerar X um espaço métrico. Um mapa contínuo $f : X \rightarrow X$ é dito caótico em X se: f é transitiva, ou seja, escolhendo dois pontos quaisquer do domínio de f , existe uma órbita que passa tão próximo quanto se queira desses dois pontos; os pontos periódicos de f são densos em X e f tem uma dependência sensível às condições iniciais.

A sensibilidade às condições iniciais é avaliada através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, o que caracteriza os sistemas caóticos. Diz-se que um sistema é sensível às condições iniciais se um expoente de Lyapunov for positivo (MONTEIRO, 2006).

O expoente de Lyapunov é usado para avaliar a evolução da distância de órbitas vizinhas que, no caso unidimensional, é obtido da seguinte maneira. Sejam x_0 e $x_0 + \delta_0$ duas condições iniciais vizinhas, separadas por uma pequena distância δ_0 . Após N iterações do mapa $x_{t+1} = f(x_t)$, com $N \rightarrow \infty$, a distância entre esses dois pontos é δ_N . Se δ_N relaciona-se

com δ_0 por: $|\delta_N| \approx |\delta_0| e^{\Lambda N}$ então Λ é o expoente de Lyapunov procurado e, após algumas considerações pode ser escrito como (MONTEIRO, 2006):

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_t} .$$

O comportamento caótico dos sistemas populacionais nem sempre é bem-vindo na natureza, pois uma explosão de determinada praga pode causar danos irreparáveis em uma lavoura ou uma floresta, por exemplo. Isso conduz a uma pergunta: é possível estabilizar esses sistemas em torno de uma trajetória desejada?

A resposta está na teoria de controle ótimo, que será estudada neste trabalho. O termo controle de caos é usado para denotar as relações entre a teoria do controle e a teoria de sistemas dinâmicos não-lineares que estuda o comportamento irregular caótico de sistemas determinísticos (RAFIKOV E BALTHAZAR, 2004). Segundo Naidu (2000), o principal objetivo do controle ótimo é determinar funções de controle que causem um processo para satisfazer algumas condições físicas e que, ao mesmo tempo, extremize (maximize ou minimize) um critério de desempenho escolhido (funcional de custo ou índice de desempenho).

A formulação do problema de controle ótimo requer:

- 1) uma descrição matemática (ou modelo) do processo a ser controlado (geralmente em forma de variável de estado);
- 2) uma especificação do índice de desempenho; e
- 3) uma declaração das condições de fronteira e das condições físicas dos estados e/ou controles.

A principal razão para a modelagem de dinâmica populacional é entender o princípio que controla as características da população e ser capaz de prever o provável padrão de desenvolvimento conseqüente de uma mudança nos parâmetros ambientais (MURRAY, 1993).

As metas da biologia de população são entender e prever a dinâmica populacional (HASTINGS, 1997). Para entender, explicar e prever as dinâmicas populacionais biológicas faz-se necessário o uso de modelos matemáticos que expressam em linguagem matemática o que acontece na realidade. Esses modelos devem avaliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo.

Conforme Ferreira apud Rafikov (2005), dinâmica de Populações é uma poderosa síntese matemática que permite identificar, transferir e interfertilizar diversas teorias da Biologia Teórica, desde o nível molecular em processos físico-químicos, passando pelo nível celular em fisiologia, e chegando até a Epidemiologia e a Sociobiologia de organismos superiores, o que inclui naturalmente as sociedades humanas. Neste caso, o modelo matemático tem como finalidade descrever a evolução temporal do sistema a partir de cada dado inicial, onde as informações biológicas são transformadas em hipóteses básicas que alimentam o modelo.

O objetivo final da Dinâmica de Populações é a descrição do número de indivíduos ao longo do tempo, sendo que este pode ser uma variável discreta ou contínua (FERREIRA apud RAFIKOV, 2005).

A formulação de modelos matemáticos para representar fenômenos da natureza é uma tarefa muito complexa, especialmente quando a modelagem diz respeito à dinâmica de populações. Neste caso, para o sistema descrever de forma mais realística o comportamento de uma população, deve levar em consideração as sutilezas e complexidades dos modelos ecológicos. Para tanto, utilizam-se sistemas dinâmicos de tempo discreto, que são representados por equações a diferenças. Essas equações são estudadas com profundidade em diversos campos da matemática, mostrando-se uma área fascinante pela riqueza de comportamentos que seus modelos apresentam (MURRAY, 1993).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 é apresentada a teoria de sistemas de tempo discreto, incluindo a solução de equilíbrio e as condições de estabilidade dos mesmos. No capítulo 2 apresentam-se os modelos clássicos de tempo discreto, dividindo-se em dois grupos: os modelos populacionais, compostos pelo mapa Logístico, Mapa de Ricker e modelo do Nicholson-Bailey; e, fora desse grupo, o Mapa de Henon. No capítulo 3 apresenta-se a teoria de controle ótimo linear e não-linear de tempo discreto. A aplicação do controle ótimo linear em sistemas não-lineares de tempo discreto encontra-se no capítulo 4.

Além disso, este capítulo apresenta o controle do crescimento de aguapés através do mapa de Ricker. E, no capítulo 5, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

1 SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo é apresentada a teoria de sistemas de tempo discreto, incluindo a solução de equilíbrio e condições de estabilidade dos mesmos, além da justificativa do uso dos modelos discretos.

Uma razão para esse interesse em modelos de tempo discreto é que eles podem modelar representações realísticas dos ecossistemas, quando equações diferenciais falham nesta questão. Um exemplo disso ocorre na modelagem de populações adultas de uma única espécie, sem sobreposição de gerações, em que a dinâmica apresenta um ciclo limite de período dois. A equação diferencial análoga não poderia ter um comportamento oscilatório. (GOH, 1980).

Um modelo de tempo discreto deve estabelecer uma dinâmica que relacione a população no tempo $t+1$, denotada por N_{t+1} , com a população na geração t , N_t (EDELSTEIN-KESHET, 1988). Este cenário de variações discretas leva à construção de modelos governados por equações a diferenças da forma

$$N_{t+1} = f(N_t). \quad (1.1)$$

A solução pode ser sempre obtida recursivamente, dependendo da condição inicial N_0 , ou seja, $N_1 = f(N_0)$, $N_2 = f(N_1)$ e assim sucessivamente.

A equação a diferenças linear mais simples ocorre quando $f(N_t) = \lambda N_t$. Assim,

$$N_{t+1} = \lambda N_t, \quad \lambda > 0 \quad (1.2)$$

O parâmetro λ pode ser interpretado como o fator de reprodução da população.

Supondo inicialmente que uma população tem N_0 indivíduos, da equação (1.2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \lambda N_0 \\
N_2 &= \lambda N_1 = \lambda(\lambda N_0) = \lambda^2 N_0 \\
N_3 &= \lambda N_2 = \lambda(\lambda^2 N_0) = \lambda^3 N_0 \\
&\vdots \\
N_t &= \lambda^t N_0
\end{aligned}$$

Assim, na geração t , tem-se:

$$N_t = \lambda^t N_0. \quad (1.3)$$

Portanto, a solução da equação (1.2) é dada pela expressão (1.3), indicando que a população cresce ou decai geometricamente. Isto depende do valor de λ ; se $\lambda > 1$ a população cresce geometricamente. Se $0 < \lambda < 1$ a população decresce com as gerações sucessivas, e ainda, se $\lambda = 1$, a população permanece constante nas gerações seguintes.

1.1 EQUAÇÕES A DIFERENÇAS NÃO-LINEARES

As considerações acima são válidas para equações a diferenças lineares de primeira ordem. Uma equação a diferença não-linear apresenta a função recursiva f , que depende de combinações não-lineares de seus argumentos. Uma equação a diferenças não-linear é escrita da forma:

$$N_{t+1} = f(N_t) = N_t F(N_t). \quad (1.4)$$

Esta forma é frequentemente usada para enfatizar a existência de um estado de equilíbrio igual a zero, ou seja, a existência de um ponto fixo trivial.

A habilidade para modelar a dinâmica de crescimento de uma população específica depende da determinação apropriada de $f(N)$ para refletir observações conhecidas ou fatos sobre a espécie em questão. Para fazer isso com confiança, é preciso entender os efeitos nas

soluções, das mudanças da forma de $f(N)$ e seus parâmetros, além dos resultados práticos (MURRAY, 1993).

A importância de se estudar equações a diferenças não lineares se deve, principalmente, ao fato de que os processos biológicos são realmente não lineares. Exemplos que ilustram essa não linearidade são: o crescimento auto-regulado de uma população ou as interações entre espécies.

Em geral, não é possível obter soluções analíticas para equações a diferenças não-lineares. Entretanto, é possível obter informações sobre o comportamento qualitativo das soluções com o auxílio de métodos computacionais.

1.1.1 Solução de Equilíbrio

Segundo Edelstein-Keshet, (1988) no contexto de equações a diferenças, uma solução de equilíbrio, ou ponto fixo N^* , é dada pelo valor que satisfaz a relação:

$$N_{t+1} = N_t = N^*. \quad (1.5)$$

Ou seja, não ocorrem mudanças no sistema com relação ao tempo e a equação (1.1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$N^* = f(N^*) \quad (1.6)$$

Estas soluções são particularmente importantes no modelo, porque se nas gerações sucessivas a população aproxima-se de um limite, então tal limite deve ser uma solução de equilíbrio.

Conhecidos os pontos de equilíbrio do sistema, analisa-se o comportamento qualitativo dessas soluções, ou seja, avalia-se a estabilidade da solução, que é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem a sua vizinhança.

Define-se ponto de equilíbrio assintoticamente estável se todas as trajetórias N_t , cujas condições iniciais estão contidas numa “esfera” de raio δ com centro em N^* , tendem para

N^* conforme o tempo passa. Assim, para qualquer perturbação na condição inicial $N(0) = N^*$ que não retire o sistema de dentro dessa esfera, tem-se que a trajetória $N(t) = N^*$ quando $t \rightarrow \infty$ (MONTEIRO, 2006).

Define-se N^* como um ponto de equilíbrio instável se não existe esfera de raio δ centrada em N^* tal que todas as trajetórias, cujas condições iniciais pertencem a essa esfera, ficassem confinadas no interior de uma segunda esfera de raio ε com centro em N^* . Os métodos para avaliação da estabilidade de um ponto de equilíbrio são apresentados na próxima seção.

Definição: Um ponto fixo p é chamado ponto periódico de período k para um mapa f , se $f^k(p) = p$, onde k é o menor inteiro positivo. A órbita $O(p)$ é chamada de órbita de período- k e consiste de k pontos.

Uma órbita caótica é uma órbita não periódica que exibe dependência sensível às condições iniciais (ALLIGOOD et al. 1997).

1.1.2 Estabilidade

Em algumas situações biológicas muitas vezes é significativo avaliar a estabilidade dos pontos fixos, pois quando estes são instáveis, grandes flutuações populacionais podem acontecer, podendo, por exemplo, levar uma população à extinção.

Determinado o ponto fixo, é importante analisar qual será o comportamento, em relação ao tempo, de uma solução próxima a um ponto fixo, ou seja, é preciso avaliar a sua estabilidade. Um ponto fixo pode ser estável, assintoticamente estável ou instável. Para estudar a estabilidade, considera-se uma pequena perturbação δ_t em torno da solução. Assim tem-se,

$$N_t = N^* + \delta_t. \quad (1.7)$$

É preciso determinar se a perturbação δ_t cresce ou decresce. Das equações (1.6) e (1.7) tem-se

$$\delta_{t+1} = N_{t+1} - N^* = f(N_t) - N^* = f(N^* + \delta_t) - N^*. \quad (1.8)$$

Considerando que δ_t é quantidade pequena, o valor de f será aproximado por expansão em série de Taylor

$$f(N^* + \delta_t) = f(N^*) + \left(\frac{df}{dN} \Big|_{N^*} \right) \delta_t + O(\delta_t^2). \quad (1.9)$$

Onde $O(\delta_t^2)$ representa os termos de ordem superior, os quais são desprezados.

Esta aproximação resulta no cancelamento de termos em (1.8), que pode ser escrito da seguinte maneira

$$\delta_{t+1} \approx f(N^*) - N^* + \left(\frac{df}{dN} \Big|_{N^*} \right) \delta_t. \quad (1.10)$$

Podendo reescrevê-la como

$$\delta_{t+1} = a\delta_t \quad (1.11)$$

onde $a = \left(\frac{df}{dN} \Big|_{N^*} \right)$.

Portanto, pode-se concluir que, se $|a| < 1$, a solução de (1.11) tende a zero e, então, o ponto de equilíbrio é dito estável. Assim, tem-se a condição de estabilidade para equações a diferenças não lineares:

N^* é estável se $\left| \frac{df}{dN} \Big|_{N^*} \right| < 1$.

E ainda, se $0 < a < 1$, a distância entre as sucessivas iteradas diminui monotonicamente. Se $-1 < a < 0$, essa distância diminui, mas de maneira oscilante; neste caso, o processo de aproximação ao ponto fixo chama-se flip (FERRARA e PRADO, 1995).

A estabilidade dos pontos fixos pode ser analisada utilizando o método gráfico, também conhecido como Diagrama de Lamerey ou “Teia de Aranha”. Constroem-se no mesmo plano, o gráfico de N_{t+1} como uma função de N_t e o gráfico da reta bissetriz $N_{t+1} = N_t$. As intersecções do gráfico da função f com a diagonal são as soluções de equilíbrio da equação $N_{t+1} = f(N_t)$. A partir do valor inicial N_0 é traçada uma reta vertical até interceptar o gráfico da função f , obtendo-se $N_1 = f(N_0)$. Este ponto é refletido no eixo das abscissas através da reta bissetriz e, em seguida, utilizado de maneira análoga para determinar N_2 . A evolução do sistema pode ser acompanhada pela repetição sucessiva deste procedimento (MURRAY, 1993).

1.2 Sistemas de equações a diferenças não-lineares

As interações entre duas espécies podem ser modeladas por intermédio de um sistema de equações a diferenças. A dinâmica de um sistema não-linear de equações a diferenças apresenta algumas propriedades: o sistema não segue o princípio de superposição de gerações, pode ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados e pode exibir propriedades como ciclos limites, bifurcações e caos.

Em geral, a interação entre duas espécies N e outra P pode ser descrita por um sistema de equações a diferenças do tipo:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} &= g(N_t, P_t), \end{aligned} \tag{1.12}$$

onde f e g são funções não-lineares que dependem de N_t e P_t .

1.2.1 Solução de Equilíbrio

As soluções de equilíbrio satisfazem a relação

$$\begin{aligned} N^* &= f(N^*, P^*) \\ P^* &= g(N^*, P^*) \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2.2 Estabilidade

Igualmente à seção 1.1, os métodos desenvolvidos para uma equação a diferenças podem ser estendidos a sistemas de duas equações não-lineares. Sendo assim, analisa-se a estabilidade explorando o que acontece com pequenas perturbações em torno da solução de equilíbrio.

Deste modo, consideram-se soluções próximas às soluções de equilíbrio:

$$\begin{aligned} N_t &= N^* + \delta_t \\ P_t &= P^* + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde δ_t e ε_t são pequenas perturbações. Substituindo no sistema (1.12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta_{t+1} &= f(N^* + \delta_t, P^* + \varepsilon_t) - N^* \\ \varepsilon_{t+1} &= g(N^* + \delta_t, P^* + \varepsilon_t) - P^*. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Para se obter uma aproximação linear, deve-se usar séries de Taylor para as funções de duas variáveis, f e g .

$$\begin{aligned} f(N^* + \delta_t, P^* + \varepsilon_t) &= f(N^*, P^*) + \frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{(N^*, P^*)} \delta_t + \frac{\partial f}{\partial P} \Big|_{(N^*, P^*)} \varepsilon_t + O(\dots) \\ g(N^* + \delta_t, P^* + \varepsilon_t) &= g(N^*, P^*) + \frac{\partial g}{\partial N} \Big|_{(N^*, P^*)} \delta_t + \frac{\partial g}{\partial P} \Big|_{(N^*, P^*)} \varepsilon_t + O(\dots), \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde $O(\dots)$ representa os termos de ordem superior.

Substituindo estas expressões em (1.15), obtém-se o seguinte sistema linear para as perturbações δ_t e ε_t :

$$\begin{aligned}\delta_{t+1} &= a_{11}\delta_t + a_{12}\varepsilon_t \\ \varepsilon_{t+1} &= a_{21}\delta_t + a_{22}\varepsilon_t,\end{aligned}\tag{1.17}$$

onde

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{(N^*, P^*)}, & a_{12} &= \frac{\partial f}{\partial P} \Big|_{(N^*, P^*)}, \\ a_{21} &= \frac{\partial g}{\partial N} \Big|_{(N^*, P^*)}, & a_{22} &= \frac{\partial g}{\partial P} \Big|_{(N^*, P^*)}\end{aligned}\tag{1.18}$$

em notação matricial:

$$X_{t+1} = AX_t,\tag{1.19}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é denominada matriz Jacobiana do sistema de equações (1.19) e

$$X = \begin{pmatrix} \delta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

O problema está reduzido a um sistema de equações lineares próximo da solução de equilíbrio. As soluções desse sistema são da forma (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

$$X_t = \lambda^t v.\tag{1.20}$$

Substituindo esta expressão na equação (1.19), tem-se:

$$\begin{aligned}\lambda^{t+1}v &= A\lambda^t v, \\ Av &= \lambda v, \\ (A - \lambda I)v &= 0.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Para que exista solução não-trivial, é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes $(A - \lambda I)$ seja igual a zero:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1.22)$$

Daí segue a equação:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \beta = 0, \quad (1.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau &= a_{11} + a_{22} \\ \beta &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

sendo τ , o traço da matriz A e β , o determinante da matriz A .

A equação quadrática é conhecida como equação característica, que determina os autovalores da matriz A , que são as raízes dessa equação, ou seja,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\beta}}{2} \quad (1.25)$$

são os autovalores de A .

Para determinar a estabilidade de sistemas de equações a diferenças, inicialmente é preciso determinar se os autovalores da matriz A têm magnitude menor do que 1, ou seja,

$$|\lambda_1| < 1 \quad e \quad |\lambda_2| < 1. \quad (1.26)$$

Observa-se que as raízes da equação (1.25) são equidistantes do valor $\frac{\tau}{2}$. Assim, é necessário que este ponto médio esteja no intervalo $(-1, 1)$:

$$-1 < \frac{\tau}{2} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\tau}{2} \right| < 1. \quad (1.27)$$

Além disso, é necessário que a distância de $\frac{\tau}{2}$ às raízes seja menor que a distância ao ponto extremo do intervalo. Isto implica que

$$1 - \left| \frac{\tau}{2} \right| > \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\beta}}{2}. \quad (1.28)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação (1.28) e efetuando as simplificações necessárias, obtém-se a seguinte desigualdade:

$$1 + \beta > |\tau|. \quad (1.29)$$

Para raízes reais, $\beta < \frac{\tau^2}{4}$. Mas $\frac{\tau^2}{4} < 1$, logo $\beta < 1$.

Portanto, o critério de estabilidade para as soluções de equilíbrio de sistemas de equações a diferenças de primeira ordem é dado pela inequação:

$$2 > 1 + \beta > |\tau|. \quad (1.30)$$

Neste caso, pode-se concluir que pequenas perturbações do estado de equilíbrio decaem, isto é, o equilíbrio é estável.

2 MODELOS CLÁSSICOS DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo é feita a análise dos seguintes modelos populacionais discretos: o Mapa Logístico, o Mapa de Ricker e o modelo de Nicholson-Bailey. Estes modelos serão aplicados em problemas de controle nos próximos capítulos.

2.1 MODELOS POPULACIONAIS

O primeiro modelo de crescimento populacional foi proposto por Thomas Malthus em 1798. Ele observou que, na ausência de restrições ambientais, a população humana aumentaria numa proporção fixa. O crescimento populacional previsto pelo modelo é explosivo, ou seja, a população cresce exponencialmente com o tempo.

No entanto, a taxa de crescimento populacional não é constante, como supôs Malthus, mais cedo ou mais tarde o esgotamento dos recursos disponíveis imporá limites à expansão. O matemático Pierre Verhulst propôs, em 1838, uma generalização do modelo de Malthus que leva em conta essas restrições ambientais. No modelo de Verhulst, ou também chamado modelo Logístico, a taxa relativa de crescimento populacional diminui com o aumento da população, chegando a zero se uma dada população-limite for alcançada. Essa população-limite pode ser determinada pelos recursos disponíveis no ambiente ou outras restrições.

2.1.1 Mapa Logístico

O mapa Logístico foi amplamente estudado, devido à riqueza do comportamento que ele exhibe, conforme varia o valor do parâmetro r . Em 1976, um artigo publicado por Robert May tornou esse mapa amplamente conhecido. O título do artigo sintetiza o caráter desse trabalho: “*Simple mathematical models with very complicated dynamics*” (MAY,1976). Porém, o modelo Logístico foi originalmente introduzido como um modelo demográfico por Pierre François Verhulst.

A equação Logística de tempo discreto é dada da forma

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{k}\right), \quad (2.1)$$

onde $r > 0$ representa a taxa de crescimento intrínseco, k é a capacidade de suporte do ambiente, $0 < N < k$ e $1 \leq r \leq 4$, pois para $r > 4$, obtém-se, em alguma iteração, um valor negativo para N , o que é biologicamente inviável. O intervalo $0 < r \leq 4$ é onde comportamentos interessantes ocorrem, quando se determina a evolução das sucessivas iterações desse mapa.

Admite-se que a taxa de reprodução diminua quando a população torna-se grande. Com efeito, efetuando-se a multiplicação na equação (2.1), tem-se uma equação com dois termos: o primeiro termo (rN_t), corresponde à Lei Maltusiana, e o segundo, $\left(-\frac{rN_t^2}{k}\right)$ que é dominante para valores grandes de N , contribui para a redução relativa da população.

Os pontos fixos para o Mapa Logístico são:

$$N^* = 0 \quad e \quad N^* = k - \frac{k}{r}. \quad (2.2)$$

A complexidade do mapa Logístico é percebida quando se varia o parâmetro de controle, neste caso, o parâmetro r .

O ponto fixo $N_1^* = 0$ representa ausência de população, sendo assim, a estabilidade é analisada somente para o segundo ponto. Da condição de estabilidade mostrada anteriormente, tem-se que o ponto $N_2^* = k - \frac{k}{r}$ é estável para $1 < r < 3$. A convergência para N_2^* é monótona para $1 < r < 2$, e oscilatória para $2 < r < 3$, (MONTEIRO, 2006).

Portanto, para $r \leq 3$ qualquer população inicial evolui em direção a um único ponto de equilíbrio estável, que se encontra na intersecção da bissetriz com $f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right)$, conforme mostra o diagrama teia de aranha na figura 2.1. Em $r = 3$, a derivada de f no ponto fixo vale -1 , o que implica ocorrência de uma bifurcação flip, ou seja, o equilíbrio

bifurca por uma duplicação de período, resultando num ciclo limite de período-2 (FERRARA E PRADO, 1995).

Para valores de r entre 3 e 3,5699, aproximadamente, a população pode oscilar entre 2 valores, 4, 8, 16, 32, e assim sucessivamente, formando uma cascata de duplicações. Isto quer dizer que o ciclo se bifurca continuamente até adquirir comportamento caótico. Para $r_{\infty} = 3,5699\dots$, a dinâmica caótica entrelaça-se com janelas de periodicidade, que podem ser vistas em diagramas de bifurcação (HILKER AND WESTERHOFF, 2005; EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Os valores de r para os quais nascem órbitas de período 2^k podem ser visto na tabela 1.

Tabela 2.1 – Valores de r para os quais nascem órbitas periódicas

| k | r_k | Nasce o período 2^k |
|----------|-------------|-----------------------|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 3,449490... | 4 |
| 3 | 3,544090... | 8 |
| 4 | 3,564407... | 16 |
| 5 | 3,568759... | 32 |
| 6 | 3,569692... | 64 |
| 7 | 3,569891... | 128 |
| 8 | 3,569934... | 258 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ∞ | 3,569946... | 2^{∞} |

Fonte: Monteiro (2006)

A figura 2.1 mostra, através do método gráfico, a convergência oscilatória para $r = 2,8$ e órbitas de período 4 para $r = 3,4495$.

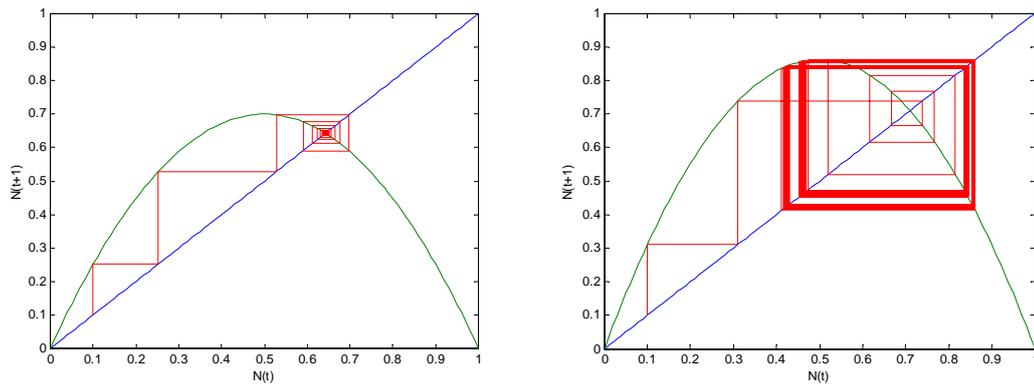


Figura 2.1 – Diagramas Teia de Aranha para o Mapa Logístico

O diagrama à esquerda da Figura 2.1, ilustra o caso em que o Mapa Logístico é estável, ou seja, neste caso, $r = 2,8$. Para o diagrama à direita, o valor do parâmetro é $r = 3,4495$, o qual resulta no comportamento oscilatório de período-4.

Os diagramas são construídos considerando a condição inicial, $N_0 = 0,2$ e a capacidade suporte $k = 1$.

Existe um valor crítico do parâmetro, r_c , para o qual aparece um conjunto de instabilidades, ou seja, para $r > r_c$ ciclos atratores que eram periódicos tornam-se atratores estranhos.

Este valor crítico r_c acontece quando uma solução de período-3 é possível. Neste caso, a partir de $r_c \approx 3,5699$ aproximadamente, existem soluções não periódicas ou caóticas, ou seja, para $3,56 < r < 4$ aproximadamente, o sistema apresenta comportamento caótico entremado por janelas de periodicidade, visto na figura 2.3.

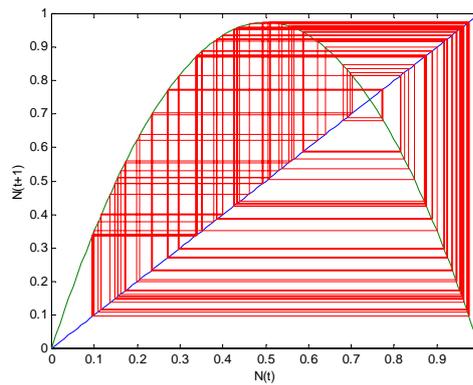


Figura 2.2 – Diagrama Teia de Aranha para o Mapa Logístico: caso caótico

O valor de r escolhido para o diagrama é de $r = 3,9$, o que significa que depois de duplicar, as soluções periódicas formam uma cascata de duplicações e adquirem comportamento caótico.

Como o mapa muda continuamente o comportamento qualitativo, ocorrem várias bifurcações, e isto pode ser visualizado no diagrama de bifurcações. Para cada valor do parâmetro r , a densidade populacional é simulada para 400 gerações, eliminando-se as 200 primeiras porque a população pode não ter alcançado o comportamento assintótico. Neste diagrama são plotados o vetor de estado versus a variação do parâmetro, neste caso, N em função de r .

As bifurcações do mapa Logístico são mostradas na figura 2.3.

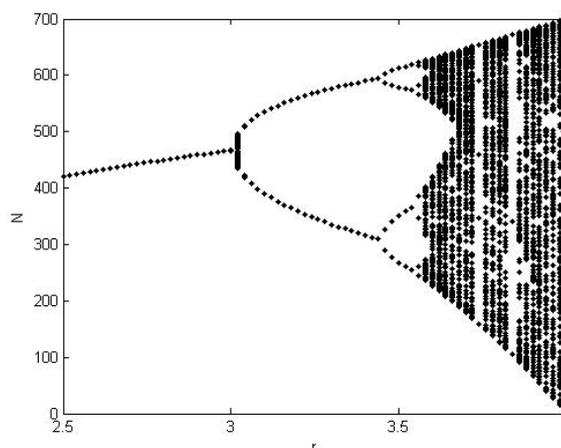


Figura 2.3 – Diagrama de bifurcação

No próximo capítulo será aplicada a teoria de controle ótimo para estabilizar as trajetórias caóticas do Mapa Logístico.

2.1.2 Mapa de Ricker

O mapa de Ricker é frequentemente usado em administração de pescas e foi introduzido em 1954 por W. Ricker (MAHAFFY, 2001).

Trata-se de um modelo populacional discreto que expressa o número de indivíduos N_{t+1} na geração $t+1$ como uma função do número de indivíduos da geração anterior:

$$N_{t+1} = N_t \exp \left[r \left(1 - \frac{N_t}{k} \right) \right], \quad (2.3)$$

onde $r > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca e k é a capacidade suporte do ambiente.

Os pontos fixos do modelo são:

$$N_1^* = 0 \quad e \quad N_2^* = k. \quad (2.4)$$

Analisando a estabilidade segundo as condições apresentadas no capítulo 1, pode-se afirmar que o ponto de equilíbrio trivial é estável para $r < 0$, o que contradiz a condição de que $r > 0$. Logo, o ponto N_1^* é instável.

Da condição de estabilidade, o ponto $N_2^* = k$ é assintoticamente estável para $0 < r < 2$.

Em $r = 2$, o sistema sofre uma duplicação de período, chamada de bifurcação flip, para uma órbita de período-2, para $r = 2,5$ dobra novamente para uma órbita de período-4, e assim sucessivamente, formando uma cascata de duplicações. A seqüência de valores de r converge para $r_c = 2,6924$, o que provoca o comportamento caótico. Para $r > 2,7$, existem algumas regiões onde a dinâmica retorna para um ciclo limite, por exemplo, para $r = 3,15$ surge uma órbita de período-3. (SHAROV, 2001).

O diagrama Teia de Aranha na figura 2.4 mostra alguns dos comportamentos mencionados acima.

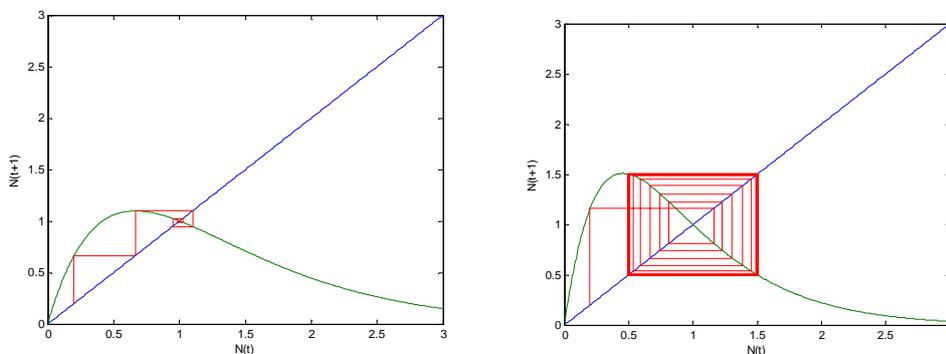


Figura 2.4 – Diagramas Teia de Aranha para o Mapa de Ricker

Os diagramas são construídos considerando a condição inicial $N_0 = 0,2$ e $k = 1$. O gráfico à esquerda mostra o comportamento estável do mapa de Ricker para $r = 1,5$. A convergência para N_2^* é monótona para $0 < r < 1$ e oscilatória para $1 < r < 2$. O diagrama à direita exibe uma órbita periódica de período-2 para $r = 2,2$. O comportamento caótico pode ser visto pelo diagrama Teia de Aranha abaixo, onde o parâmetro usado é $r = 2,9$:

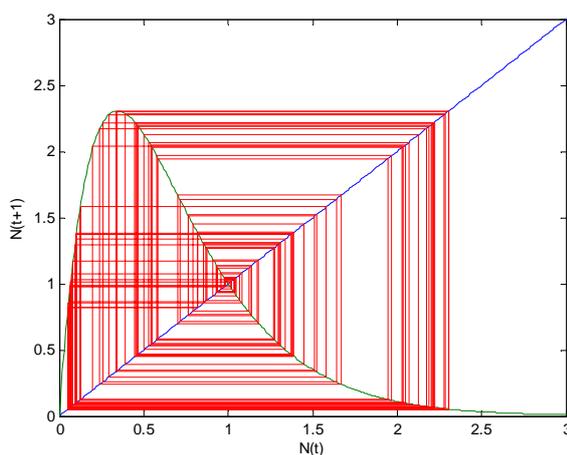


Figura 2.5 – Diagrama Teia de Aranha para o Mapa de Ricker: caso caótico.

Os sucessivos valores de bifurcação para a duplicação de período se tornam progressivamente mais próximos, o que resulta em uma grande sensibilidade da solução para pequenas variações no valor de r .

As bifurcações do modelo de Ricker, bem como o comportamento caótico, podem ser vistos no diagrama de bifurcação na figura 2.6:

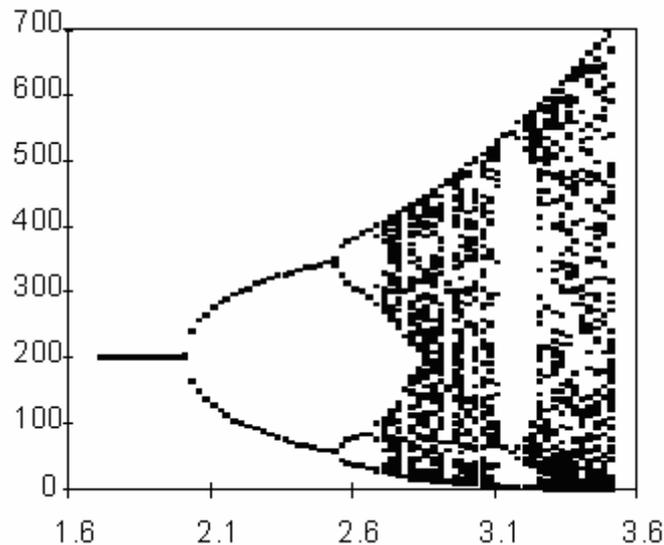


Figura 2.6 – Diagrama de Bifurcação para modelo de Ricker

O diagrama de bifurcação é plotado para ajudar a visualizar todas as dinâmicas geradas pelo modelo de Ricker. Para cada valor do parâmetro r , a densidade populacional é simulada para 200 gerações, eliminando-se as 125 primeiras porque a população pode não ter alcançado o comportamento assintótico (SHAROV, 2001).

2.1.3 Modelo de Nicholson-Bailey

O modelo de Nicholson-Bailey foi desenvolvido em 1930 para descrever a dinâmica populacional de um sistema parasitóide-hospedeiro, usando equações a diferenças para descrever o crescimento populacional de ambas as espécies.

Os parasitóides são espécies de insetos cuja larva se desenvolve como parasita em outra espécie de inseto. Esses inimigos naturais são geralmente insetos que colocam seus ovos sobre ou dentro de larvas de (em geral) insetos-praga. A larva do parasitóide normalmente mata seu hospedeiro, considerando que os parasitóides adultos são insetos livres. A maioria das espécies de parasitóides é vespa ou mosca.

Os parasitóides e seus hospedeiros freqüentemente têm seus ciclos de vida sincronizados, ou seja, ambos têm uma geração por ano. Os parasitóides são usados como agentes de controle biológico.

Um modelo que descreve a interação entre parasitóides e hospedeiros tem as seguintes hipóteses: (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

1. Hospedeiros parasitados vão aumentar a próxima geração de parasitóides.
2. Hospedeiros não parasitados vão aumentar a população de sua própria espécie.
3. A fração de hospedeiros que é parasitada depende da taxa de encontro das duas espécies, em geral essa fração deve depender da densidade de uma ou de ambas as espécies.

Para formulação do modelo, são definidas as seguintes variáveis e parâmetros:

N_t = número de hospedeiros na geração t ;

P_t = números de parasitóides na geração t ;

$f(N_t, P_t)$ = fração de hospedeiros que não foram parasitados;

λ = taxa de reprodução de hospedeiros;

c = número médio de ovos depositados pelo parasitóide em um único hospedeiro.

Pelas hipóteses tem-se:

N_{t+1} = número de hospedeiros na geração anterior x fração de hospedeiros não parasitados x taxa de reprodução (λ).

P_{t+1} = número de hospedeiros parasitados na geração anterior x fecundidade do parasitóide (c).

Nota-se que $1 - f$ é a fração de hospedeiros que são parasitados, assim obtém-se

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \lambda N_t f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} &= c N_t [1 - f(N_t, P_t)], \end{aligned} \tag{2.5}$$

o modelo hospedeiro-parasitóide de tempo discreto na forma geral.

Nicholson e Bailey (1935) apresentaram mais duas hipóteses, além das já apresentadas, para o número de encontros e a taxa de parasitismo do hospedeiro:

1. Os encontros dos parasitóides e hospedeiros são aleatórios. O crescimento da população de parasitóides não está relacionado estritamente à habilidade com que eles põem seus ovos, mas à taxa de encontro com seus hospedeiros. O número de encontros N_e é proporcional às suas densidades.

$$N_e = aN_t P_t, \quad (2.6)$$

onde a é uma constante que representa a eficiência de pesquisa do parasitóide.

2. Apenas o primeiro encontro entre parasitóide e hospedeiro é significativo. Quando o hospedeiro é parasitado, ele dá origem a uma nova geração de parasitóides.

O modelo considera que o parasitóide não consegue distinguir se o hospedeiro está ou não parasitado. A distribuição mais adequada para este modelo é a de Poisson. Considerando a probabilidade de r eventos ocorrerem, tem-se:

$$p(r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!}, \quad (2.7)$$

onde μ é o número médio de eventos no intervalo de tempo considerado, ou seja:

$$\mu = \frac{N_e}{N_t}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.6), tem-se:

$$\mu = aP_t. \quad (2.9)$$

Hospedeiros não parasitados durante toda vida equivale a zero encontro, ou seja, $p(0)$, então, tem-se:

$$f(N_t, P_t) = p(0) = \frac{e^{-aP_t}}{0!} (aP_t)^0 = e^{-aP_t} \quad (2.10)$$

que representa a fração que escapa do parasitismo .

Considerando todas as hipóteses, obtém-se o modelo de Nicholson-Bailey:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} &= cN_t(1 - e^{-aP_t}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Uma solução de equilíbrio (N^*, P^*) , segundo a teoria do capítulo 2, é obtido fazendo

$$\begin{aligned} N^* &= \lambda N^* e^{-aP^*} \\ P^* &= cN^*(1 - e^{-aP^*}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tem-se dois pontos de equilíbrio, o trivial

$$(N^*, P^*) = (0, 0) \quad (2.13)$$

onde há ausência de população ou ambas as espécies foram para extinção e o equilíbrio não trivial

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{\lambda \ln \lambda}{ac(\lambda - 1)}, \frac{\ln \lambda}{a} \right). \quad (2.14)$$

Observa-se que $\lambda > 1$, caso contrário as populações no ponto de equilíbrio não trivial seriam negativas.

A estabilidade nos pontos de equilíbrio é analisada com o auxílio da matriz Jacobiana.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda e^{-aP_t} & -a\lambda N_t e^{-aP_t} \\ c(1 - e^{-aP_t}) & acN_t e^{-aP_t} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Para o ponto fixo não trivial, tem-se

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -aN^* \\ c(1-\frac{1}{\lambda}) & \frac{caN^*}{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

A equação característica do sistema linearizado tem a seguinte forma:

$$\bar{\lambda}^2 - \tau\bar{\lambda} + \beta = 0 \quad (2.17)$$

onde

$$\tau = a_{11} + a_{22} = 1 + \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} \quad (2.18)$$

e

$$\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda - 1}. \quad (2.19)$$

Para que a estabilidade seja satisfeita, tem-se:

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &< 1. \\ |\bar{\lambda}_{1,2}| &< 1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Isto é possível quando:

$$2 > 1 + \beta > |\tau|. \quad (2.21)$$

Para o modelo de Nicholson-Bailey, $\beta > 1$. Para mostrar isso é necessário verificar que $\lambda(\ln \lambda)/(\lambda - 1) > 1$ ou $S(\lambda) \equiv \lambda - 1 - \lambda \ln \lambda < 0$. Observa-se que $S(1) = 0$, $S'(\lambda) = 1 - \ln \lambda - \lambda(1/\lambda) = -\ln \lambda$. Portanto, $S'(\lambda) < 0$ para $\lambda \geq 1$. Logo, $S(\lambda)$ é uma função decrescente de λ e conseqüentemente $S(\lambda) < 0$ para $\lambda \geq 1$. Assim, verifica-se que $\beta > 1$, o que viola a condição de estabilidade. Então o estado de equilíbrio (N^*, P^*) é instável.

Pequenas perturbações das duas espécies conduzem a oscilações que aumentam rapidamente sua amplitude.

O modelo de Nicholson-Bailey é usado para descrever a interação entre duas espécies: o parasitóide *Encarsia formosa*, usado como agente de controle biológico contra o *Trialeurodes vaporariorum*, o hospedeiro. (JOHNSON, 2000)

A trajetória temporal desse sistema pode ser observada na figura abaixo:

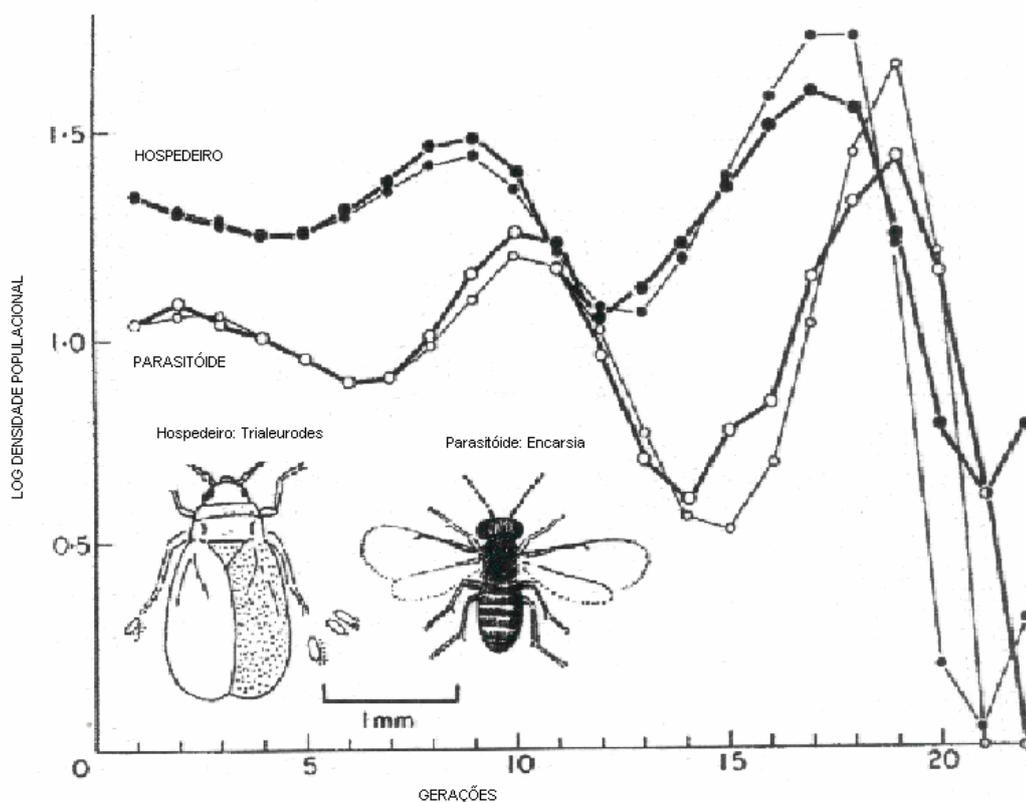


Figura 2.7 – Trajetória Temporal do Modelo de Nicholson-Bailey

A figura 2.7 mostra os resultados observados e calculados através do modelo de Nicholson-Bailey na interação entre hospedeiros e parasitóides, mostrada nas linhas mais escuras e os dados observados, conforme as linhas mais claras, respectivamente. Os parâmetros usados são $a = 0,068$, $\lambda = 2$ e $c = 1$. A condição inicial para a densidade de hospedeiros é $N_0 = 25$ e para os parasitóides é $P_0 = 11$, dados obtidos em laboratório. (JOHNSON, 2000).

2.2 Mapa de Henon

O mapa de Henon foi introduzido por Michel Henon como um modelo simplificado da seção de Poincaré do modelo de Lorenz. Assim, é composto por propriedades similares às obtidas por Lorenz, porém de forma simplificada e de computação numérica mais precisa e detalhada. Para tanto, é feita a redução da dimensão do sistema (de 3 para 2), a partir da introdução de uma seção de Poincaré. É então definido, já em duas dimensões, um mapa que apresenta uma evolução com tempo discreto que deve reproduzir muitas das propriedades do sistema original. Este mapa chamado $T(A)$, é também conhecido como mapa de Poincaré. (HENON, 1976).

Para a construção desse mapa Henon (1976) procedeu da seguinte maneira: ao invés de se considerar as trajetórias no espaço tridimensional, são consideradas sucessivas intersecções com uma superfície bidimensional de secção S . Define-se um mapa T de S como segue: dado um ponto A de S , segue-se a trajetória originada em A até interceptar S novamente. Este novo ponto é $T(A)$.

A construção das equações de $T(A)$ se baseou em algumas propriedades centrais do sistema de Lorenz. As principais são:

- Existência de um atrator para onde as diferentes condições iniciais convergem;
- Divergente constante e negativo;
- Processo de estiramento e dobra.

Henon define, então, as seguintes transformações que, quando aplicadas a um conjunto de pontos próximos da origem, resultam nas propriedades desejadas

$$\begin{aligned}
 T' : \\
 x' &= x, \\
 y' &= y + 1 - ax^2,
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

o que provoca um estiramento em torno dos pontos do eixo y . O processo de dobra é descrito por:

$$\begin{aligned}
T'' : \\
x'' &= bx', \\
y'' &= y',
\end{aligned} \tag{2.23}$$

com $b < 1$. Define-se, ainda, um terceiro mapa que retorna a orientação ao longo do eixo x

$$\begin{aligned}
T''' : \\
x''' &= y'', \\
y''' &= x''.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

O mapa T do modelo desejado deve conter todas essas propriedades e é definido como o produto $T = T'''(T''(T'))$. Obtém-se, então, o mapa de Henon

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= y_t + 1 - ax_t^2 \\
y_{t+1} &= bx_t.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

O mapa de Henon tem dois parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $|b| < 1$. Ao longo deste capítulo, b é fixo sendo $b = 0,3$ e a é o parâmetro com valor $a = 1,4$. Para esses valores dos parâmetros tem-se o mapa de Henon canônico, onde um ponto inicial do plano se aproximará a um conjunto de pontos conhecidos como o atrator estranho de Henon, ou divergente para o infinito. O atrator de Henon é um fractal. Além de ser gerado pela repetição de um mesmo processo recursivo, os fractais apresentam auto-semelhança, ou seja, a simetria através das escalas, onde cada pequena porção do fractal pode ser vista como uma réplica do todo, e complexidade infinita.

Calculando o Jacobiano desse mapa, verifica-se que $\det J = -b$, que confirma que o sistema é dissipativo, ou seja, se considerar um determinado volume de condições iniciais num espaço de fases e esse volume se contrai com o passar do tempo, então o sistema é dissipativo (MONTEIRO, 2006; SOLORIO et al. 2002). Essas transformações descritas até o momento representam, portanto, cada uma das propriedades desejadas e que resultam no mapa de Henon.

Calculando os pontos fixos do mapa de Henon, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, & y_1^* &= bx_1^* \\
 x_2^* &= \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, & y_2^* &= bx_2^*
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Esses pontos são reais para $a > (1-b)^2/4$. Neste caso, o ponto (x_2^*, y_2^*) é instável para $a > -(1-b)^2/4$ e o ponto (x_1^*, y_1^*) é assintoticamente estável para $-(1-b)^2/4 < a < 3(1-b)^2/4$ (MONTEIRO, 2006).

O mapa depende de dois parâmetros a e b . Conforme a variação desses parâmetros, o mapa de Henon pode ser caótico, intermitente ou convergente para uma órbita periódica. Para $b = 0,3$, uma órbita de período-2 nasce em $a \approx 0,3675$. Há um único ponto fixo para $a = 0,3$, um ciclo-2 para $a = 0,7$, um ciclo-4 para $a = 1,0$ e assim sucessivamente até o ponto de acumulação onde $a_\infty \approx 1,058$. Fixam-se os valores dos parâmetros $a = 1,4$ e $b = 0,3$, a partir dos quais o mapa apresenta comportamento caótico.

Para esses valores o mapa de Henon apresenta um atrator estranho, como é mostrado na figura 2.8 (VOCKE, 2001):

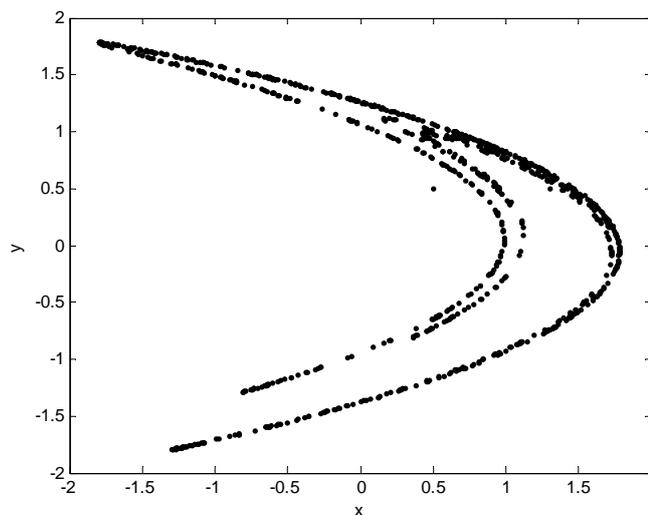


Figura 2.8 – Atrator Estranho do Mapa de Henon

Um atrator, em casos mais simples, pode ser um ponto, quando se trata de um ponto de equilíbrio estável ou uma curva fechada, conhecida como ciclo limite. Mas, em alguns casos, um atrator pode ter uma estrutura mais complexa, onde as trajetórias “vagam” de maneira irregular, e ainda, é altamente sensível as condições iniciais. Neste caso, tem-se um atrator estranho. Segundo Monteiro (2006), num atrator estranho, além de ocupar um volume finito no espaço de fases, trajetórias que partem de condições iniciais vizinhas devem se distanciar exponencialmente com o passar do tempo. O mecanismo responsável por essas duas condições envolve repetidos esticamentos e dobras das trajetórias. Esse processo indica a possibilidade de comportamento caótico.

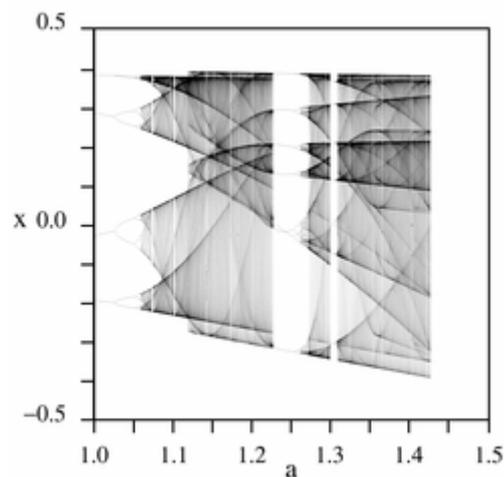


Figura 2.9 – Diagrama de bifurcação para o Mapa de Henon

A figura 2.9 é obtida da literatura (WIKIPEDIA, 2007). A complexidade do comportamento do Mapa de Henon está explícita no diagrama de bifurcação, onde se fixa o parâmetro $b = 0,3$ e plota-se x em função de a . A parte mais densa do gráfico indica o crescimento da probabilidade da variável x adquirir outro valor para um dado parâmetro a .

O comportamento caótico do mapa pode ser visto pelas trajetórias temporais, as quais são apresentadas na figura 2.10:

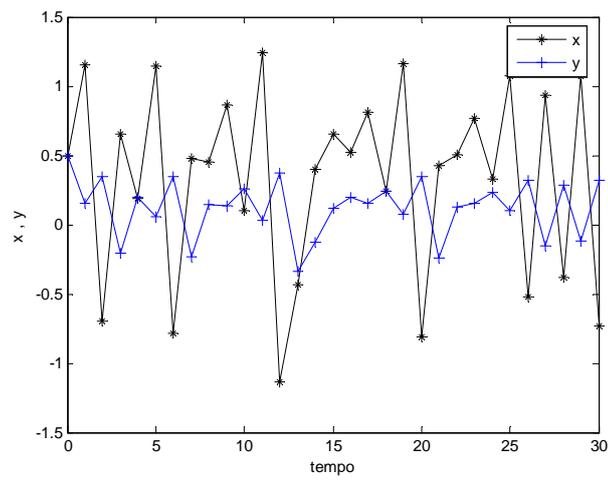


Figura 2.10 – Trajetória Temporal do Mapa de Henon sem controle

Os parâmetros usados para a trajetória temporal da figura 2.10 são: $a=1,4$ e $b=0,3$. Os expoentes de Lyapunov para o atrator de Henon são: $\Lambda_1 = 0,42$ e $\Lambda_2 = -1,62$ o que confirma a ocorrência de caos no modelo.

3 CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo, primeiramente faz-se uma explanação da teoria de controle linear feedback para sistemas lineares de tempo discreto, conforme proposto por Naidu (2000). Em seguida, demonstra-se um teorema que afirma que o controle linear feedback, sob as condições estipuladas, é ótimo para sistemas não-lineares de tempo discreto.

3.1 Controle Ótimo de Sistemas Lineares de Tempo Discreto

Considera-se um sistema linear de tempo discreto com controle descrito por Naidu (2000):

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (3.1)$$

onde $t = t_0, t_1, \dots, t_f - 1$, x_t é um vetor de estado de n -ésima ordem, u_t é o vetor de controle de r -ésima ordem e $A(t)$ e $B(t)$ são matrizes de dimensão $n \times n$ e $n \times r$, respectivamente, com a seguinte condição inicial:

$$x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

O funcional de custo é dado por

$$J = J(x(t_0), u(t_0), t_0) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F(t_f) x(t_f) + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)], \quad (3.3)$$

onde $F(t_f)$ e $Q(t)$ são matrizes simétricas semi-definidas positivas, e $R(t)$ é matriz simétrica definida positiva de ordem $r \times r$.

Conforme Naidu (2000) a metodologia para o problema de controle ótimo linear quadrático está baseada nos seguintes passos:

1) Índice de desempenho (funcional) aumentado: formula-se um funcional de custo aumentado juntando o funcional de custo original (3.3) com a condição (3.1), usando multiplicador de Lagrange $\lambda(t+1)$, como

$$J_a = \frac{1}{2} x^T(t_f) F(t_f) x(t_f) + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] + \lambda(t+1) [A(t)x(t) + B(t)u(t) - x(t+1)]. \quad (3.4)$$

2) Lagrangiano: define-se uma nova função, chamada Lagrangiana, da seguinte forma:

$$L(x(t), u(t), x(t+1), \lambda(t+1)) = \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + \lambda^T(t+1) [A(t)x(t) + B(t)u(t) - x(t+1)]. \quad (3.5)$$

3) Equação de Euler-Lagrange: aplica-se a função de Euler-Lagrange nesta nova função L , e obtém-se:

$$\frac{\partial L(x^*(t), x^*(t+1), u^*(t), \lambda^*(t+1))}{\partial x^*(t)} + \frac{\partial L(x^*(t-1), x^*(t), u^*(t-1), \lambda^*(t))}{\partial x^*(t)} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L(x^*(t), x^*(t+1), u^*(t), \lambda^*(t+1))}{\partial u^*(t)} + \frac{\partial L(x^*(t-1), x^*(t), u^*(t-1), \lambda^*(t))}{\partial u^*(t)} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial L(x^*(t), x^*(t+1), u^*(t), \lambda^*(t+1))}{\partial \lambda^*(t)} + \frac{\partial L(x^*(t-1), x^*(t), u^*(t-1), \lambda^*(t))}{\partial \lambda^*(t)} = 0 \quad (3.8)$$

E, condição final de fronteira:

$$\left[\frac{\partial L(x(t-1), x(t), u(t-1), \lambda(t))}{\partial x(t)} + \frac{\partial S(x(t), t)}{\partial x(t)} \right]^T \delta x(t) \Big|_{t=0}^{t=t_f} = 0, \quad (3.9)$$

onde, de (3.3) segue que:

$$S(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F(t_f) x(t_f). \quad (3.10)$$

4) Hamiltoniano: procede-se à dedução em termos do Hamiltoniano, definido como:

$$\begin{aligned} H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t+1)) &= \frac{1}{2} x^{*T}(t) Q(t) x^*(t) + \frac{1}{2} u^{*T}(t) R(t) u^*(t) + \\ &\lambda^T(t+1) [A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, o Lagrangiano e o Hamiltoniano se relacionam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L(x^*(t), x^*(t+1), u^*(t), \lambda^*(t+1)) &= \\ H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t+1)) - \lambda^*(t+1)x^*(t+1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando a relação (3.12) no conjunto de equações de Euler-Lagrange (3.6) a (3.8), obtêm-se as condições para o extremo em termos do Hamiltoniano, como segue:

$$\lambda^*(t) = \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t+1))}{\partial x^*(t)}, \quad (3.13)$$

$$0 = \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t+1))}{\partial u^*(t)}, \quad (3.14)$$

$$x^*(t) = \frac{\partial H(x^*(t-1), u^*(t-1), \lambda^*(t))}{\partial \lambda^*(t)}. \quad (3.15)$$

A equação (3.15) pode ser escrita em termos do próximo estágio, ou seja:

$$x^*(t+1) = \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t+1))}{\partial \lambda^*(t)}. \quad (3.16)$$

Para o sistema inicial (3.1) e o índice de desempenho (3.3), têm-se as relações (3.16), (3.13) e (3.14) para as variáveis de estado, adjunta e de controle, transformando-se respectivamente em

$$x^*(t+1) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad (3.17)$$

$$\lambda^*(t) = Q(t)x^* + A^T(t)\lambda^*(t+1), \quad (3.18)$$

$$0 = R(t)u^*(t) + B^T(t)\lambda^*(t+1). \quad (3.19)$$

5) Controle ótimo de malha aberta: o controle ótimo é dado por (3.19), ou seja:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t+1) \quad (3.20)$$

onde a definição positiva de R assegura sua inversão.

Usando o controle ótimo (3.20) na equação de estado (3.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} x^*(t+1) &= A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t+1) = \\ &= A(t)x^*(t) - E(t)\lambda^*(t+1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde

$$E(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \quad (3.22)$$

Assim, o Hamiltoniano (3.18) e o sistema de estado (3.21) são apresentados da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x^*(t+1) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -E(t) \\ Q(t) & A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t+1) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

3.1.1 Sistema Linear Regulador de Estado de Tempo Discreto

Considere o controle do sistema linear de tempo discreto descrito em (3.1) e índice de desempenho (3.3), com condição inicial (3.2) e final dada por

$$x(t_f) \text{ livre, e } t_f \text{ fixo.} \quad (3.24)$$

Então o controle ótimo (3.20) e as equações de estado e Hamiltoniano (3.23) são escritas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^*(t+1) \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} x^*(t+1) &= A(t)x^*(t) - E(t)\lambda^*(t+1), \\ \lambda^*(t) &= Q(t)x^*(t) + A^T(t)\lambda^*(t+1), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $E(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t)$, e a relação final de custo é dada por:

$$\lambda(t_f) = F(t_f)x(t_f) \quad (3.27)$$

Para obter o controle ótimo de malha fechada, ou seja, controle ótimo feedback, é preciso expressar a função adjunta $\lambda^*(t+1)$ em (3.25) em termos da função de estado $x^*(t)$. A condição final (3.27) conduz a

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t) \quad (3.28)$$

onde $P(t)$ está a ser determinado. Esta transformação linear é chamada transformação de Riccati. Usando esta transformação nas equações (3.26) e (3.27), tem-se:

$$P(t)x^*(t) = Q(t)x^*(t) + A^T(t)P(t+1)x^*(t+1), \quad (3.29)$$

e

$$x^*(t+1) = A(t)x^*(t) - E(t)P(t+1)x^*(t+1). \quad (3.30)$$

Resolvendo esta equação em, $x^*(t+1)$ tem-se:

$$x^*(t+1) = [I + E(t)P(t+1)]^{-1} A(t)x^*(t). \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.29) e isolando $P(t)$, tem-se:

$$P(t) = A^T(t)P(t+1)[I + E(t)P(t+1)]^{-1} A(t) + Q(t) \quad (3.32)$$

Esta relação é chamada matriz de equação a diferença de Riccati. A condição final para resolver (3.32) é obtida de (3.27) e (3.28) como

$$\lambda(t_f) = F(t_f)x(t_f) = P(t_f)x(t_f) \quad (3.33)$$

Assim,

$$P(t_f) = F(t_f) \quad (3.34)$$

Como $Q(t)$ e $F(t_f)$ são matrizes semidefinidas positivas, então a matriz de Riccati $P(t)$ é definida positiva. Para obter o controle *feedback*, elimina-se $\lambda^*(t+1)$ em (3.25) e (3.27) usando a relação (3.28), o que conduz à seguinte relação de controle ótimo de malha fechada:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)A^{-T}(t)[P(t) - Q(t)]x^*(t). \quad (3.35)$$

Onde A^{-T} é a inversa da matriz transposta A^T . Ou ainda, pode-se reescrever o controle ótimo da seguinte maneira:

$$u^*(t) = -L(t)x^*(t) \quad (3.36)$$

onde

$$L(t) = R^{-1}(t)B^T(t)A^{-T}(t)[P(t) - Q(t)] \quad (3.37)$$

A matriz $L(t)$ é o chamado “ganho de Kalman”. Assim, o estado ótimo é o seguinte:

$$x^*(t+1) = (A(t) - B(t)L(t))x^*(t). \quad (3.38)$$

3.1.2 Sistema Regulator de Estado

Neste caso, considera-se t_f tendendo para ∞ . Isto conduz ao seguinte sistema linear:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.39)$$

E índice de desempenho dado por:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{\infty} [x^{*T}(t)Qx^*(t) + u^{*T}(t)Ru^*(t)] \quad (3.40)$$

como o tempo final tende para o infinito, a matriz de Riccati $P(t)$ atinge o valor de equilíbrio \bar{P} em (3.32), ou seja, $P(t) = P(t+1) = \bar{P}$. Isto resulta na equação algébrica de Riccati

$$\bar{P} = A^T \bar{P} [I + BR^{-1}B^T \bar{P}]^{-1} A + Q \quad (3.40)$$

onde $E = BR^{-1}B^T$. O controle ótimo *feedback* torna-se

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{P} - Q] x^*(t) = -\bar{L}x^*(t) \quad (3.41)$$

onde $\bar{L} = R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{P} - Q]$.

Na próxima seção mostra-se que o controle ótimo linear feedback, formulado neste capítulo para sistemas lineares de tempo discreto, pode ser aplicado para sistemas não-lineares de tempo discreto.

3.2 CONTROLE ÓTIMO LINEAR PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo, apresenta-se a formulação do controle ótimo linear *feedback* para sistemas não lineares de tempo discreto e a aplicação do mesmo nos modelos já mencionados. O Teorema formulado é uma extensão para sistemas discretos do Teorema proposto para sistemas contínuos (RAFIKOV, BALTHAZAR, 2004, 2008).

O controle feedback, ou de malha fechada, é um mecanismo básico, pelo qual sistemas mecânicos, elétricos ou biológicos, mantêm o seu equilíbrio. Este tipo de controle pode ser definido como o uso de sinais de diferença, determinados pela comparação dos valores atuais das variáveis do sistema com os valores desejados, como um meio de controlar o sistema.

Considera-se o sistema linear de tempo discreto:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.42)$$

Com o funcional:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] \quad (3.43)$$

Formulação do problema: encontrar o controle ótimo feedback $u(t)$, $t = 1, 2, \dots, \infty$, que transfere o sistema (3.42) da condição inicial:

$$x(0) = x_0 \quad (3.44)$$

para condição final:

$$x(\infty) = 0 \quad (3.45)$$

minimizando o funcional (3.45).

Conforme Naidu (2000), o controle ótimo que resolve o problema acima formulado é

$$u(t) = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A x(t) \quad (3.46)$$

onde a matriz P é definida positiva e é solução da seguinte equação algébrica de Riccati

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q \quad (3.47)$$

O valor ótimo do funcional (3.43) neste caso é:

$$J[u^*] = x^T(0) P x(0) \quad (3.48)$$

Tem-se como objetivo investigar se o controle (3.46) pode controlar o sistema não linear

$$x(t+1) = Ax(t) + G(x(t))x(t) + Bu(t) \quad (3.49)$$

onde $G(x(t))$ é uma matriz limitada.

Se for possível, surgem duas perguntas:

- 1) Quais são as condições quando isto é possível?
- 2) Qual é o funcional que é minimizado, neste caso?

Então se tem o seguinte problema: dado o sistema (3.49) e o controle (3.46) e (3.47), encontrar as condições suficientes que permitem ao controle transferir o sistema (3.49) do estado inicial (3.44) ao estado final (3.45) e também encontrar o funcional que este controle minimiza, neste caso. Este tipo de problema é chamado *problema inverso de controle ótimo*.

O seguinte teorema apresenta um resultado importante.

Teorema: Se existem matrizes Q e R definidas positivas, sendo Q simétrica, tais que a matriz

$$\tilde{Q} = Q - A^T P G - G^T P A - G^T P G + G^T P B M + M^T B^T P G \quad (3.50)$$

seja definida positiva, então o controle linear feedback (3.46) é ótimo para transferir o sistema não linear (3.49) do estado inicial (3.44) ao estado final (3.45), minimizando o funcional

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(t) \tilde{Q} x(t) + u^T(t) R u(t) \right] \quad (3.51)$$

onde P é matriz simétrica definida positiva sendo solução da equação algébrica de Riccati (3.47).

Prova: Considera-se o controle linear feedback (3.46) que transfere o sistema não linear (3.49) do estado inicial (3.44) ao estado final (3.45), minimizando o funcional (3.51), onde a matriz \tilde{Q} é a determinar.

Conforme a Programação Dinâmica, se a trajetória é ótima então é satisfeita a seguinte equação de Bellman (HADDAD, CHELLABOINA, 1996):

$$V(x(t)) = \min_{u(t)} \left[x^T(t) \tilde{Q} x(t) + u^T(t) R u(t) + V(x(t+1)) \right] \quad (3.52)$$

onde V é chamada função do Bellman.

Considera-se esta função na forma da seguinte função de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \quad (3.53)$$

onde P é matriz simétrica definida positiva e satisfaz a equação de Ricatti (3.47).

Para o controle ótimo (3.46), a equação de Bellman (3.52) tem a seguinte forma:

$$x^T(t)\tilde{Q}x(t) + u^T(t)Ru(t) + V(x(t+1)) - V(x(t)) = 0 \quad (3.54)$$

Designando o controle (3.46) como:

$$u(t) = -Mx(t) \quad (3.55)$$

onde

$$M = (R + B^T PB)^{-1} B^T PA \quad (3.56)$$

E, levando em conta (3.53), é possível reescrever (3.54) como:

$$\begin{aligned} x^T(t)\tilde{Q}x(t) + u^T(t)Ru(t) + x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)Px(t) &= 0 \\ \text{ou} & \\ x^T(t)\tilde{Q}x(t) + x^T(t)M^T RMx(t) + x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)Px(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Levando em conta (3.55), pode-se escrever (3.49) como:

$$x(t+1) = (A + G - BM)x(t) \quad (3.58)$$

Então substituindo $x(t+1)$ em (3.57) tem-se:

$$\begin{aligned} x^T(t)\tilde{Q}x(t) + x^T(t)M^T RMx(t) + x^T(t)(A^T + G^T - M^T B^T)P(A + G - BM)x(t) - x^T(t)Px(t) &= 0 \\ \text{ou} & \\ x^T(t)\left[\tilde{Q} + M^T RM + (A^T + G^T - M^T B^T)P(A + G - BM) - P\right]x(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Logo que (3.59) é satisfeita para quaisquer valores x_t , segue que:

$$P = M^T R M + (A^T + G^T - M^T B^T) P (A + G - B M) + \tilde{Q} \quad (3.60)$$

Fazendo multiplicações, tem-se:

$$P = M^T R M + A^T P A + A^T P G - A^T P B M + G^T P A + G^T P G - G^T P B M - M^T B^T P A - M^T B^T P A - M^T B^T P G + M^T B^T P B M + \tilde{Q} \quad (3.61)$$

É óbvio que a soma dos termos

$$M^T R M - M^T B^T P A + M^T B^T P B M = 0 \quad (3.62)$$

Para demonstrar isso, a equação anterior é reescrita da seguinte maneira:

$$M^T (R M - B^T P A + B^T P B M) = M^T [(R + B^T P B) M - B^T P A] =$$

Levando em conta (3.56), tem-se:

$$= M^T [(R + B^T P B)(R + B^T P B)^{-1} B^T P A - B^T P A] = 0$$

o que confirma (3.62).

Levando em conta (3.62) e (3.56) a equação (3.61) fica

$$P = A^T P A + A^T P G - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + G^T P A + G^T P G - G^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P G + \tilde{Q} \quad (3.63)$$

Da equação de Ricatti (3.47) tem-se:

$$A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = P - Q \quad (3.64)$$

Levando (3.64) na equação (3.63), tem-se:

$$\begin{aligned} P = P - Q + A^T P G + G^T P A + G^T P G - G^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A - \\ A^T P B \left((R + B^T P B)^{-1} \right)^T B^T P G + \tilde{Q} \end{aligned} \quad (3.65)$$

De onde se obtém:

$$\tilde{Q} = Q - A^T P G - G^T P A - G^T P G + G^T P B M + M^T B^T P G \quad (3.66)$$

Nota-se que para a matriz \tilde{Q} definida positiva de (3.66), a diferença entre

$$V(x(t+1)) - V(x(t)) = -x^T(t) \tilde{Q} x(t) - u^T(t) R u(t) < 0 \quad (3.67)$$

é definida negativa, então o sistema com controle (3.49) é assintoticamente estável.

4 APLICAÇÕES DO CONTROLE LINEAR PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES DE TEMPO DISCRETO

Neste capítulo será aplicada a teoria de controle ótimo linear *feedback* em sistemas discretos não-lineares. Primeiramente, faz-se o controle dos sistemas populacionais analisados no capítulo 2, em seguida o controle é aplicado para o Mapa de Henon. Como exemplos de aplicação do controle para sistemas populacionais foram considerados o controle biológico de pragas com base no modelo de Nicholson-Bailey e o controle do crescimento de aguapés em lagoas de estabilização de águas residuais com base no modelo de Ricker.

4.1 CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS POPULACIONAIS

O controle e administração de dinâmica populacional é um dos principais objetivos da modelagem matemática na ecologia. O alcance de taxas ótimas de colheita, por exemplo, na pesca ou silvicultura, garante um desenvolvimento sustentável e ótimos rendimentos. Outros exemplos incluem o controle de espécies de praga na agricultura, epidemias, invasões de espécies exóticas ou organismos geneticamente modificados que podem causar catástrofes ambientais, bem como danos econômicos ou grandes ameaças para a saúde. (HILKER AND WESTERHOFF, 2005).

Existem quatro categorias principais de métodos de controle de espécies invasoras em sistemas populacionais, são eles: controle mecânico, químico, biológico e ambiental. O primeiro método refere-se ao uso de ferramentas mecânicas para o corte de plantas invasoras. O controle químico consiste no uso de produtos químicos para o controle de espécies exóticas invasoras, ou seja, usam-se herbicidas, graminicidas e outros venenos. O controle ambiental refere-se à restauração das condições ambientais do meio para dar-lhe maior resistência aos processos de invasão. Isso envolve replantio de espécies nativas, descompactação de solos, entre outras técnicas. E, por último, o controle biológico, ao qual é dado ênfase neste trabalho. (INSTITUTO HÓRUS DE DESENVOLVIMENTO E CONSERVAÇÃO AMBIENTAL, 2007).

A partir da década de 40 do século XX, acreditava-se que a proteção das lavouras estaria assegurada com o lançamento de um defensivo químico de largo espectro, embora altamente tóxico. Mas, apesar disso, a infestação das lavouras persistia e agora agravada pela resistência cada vez maior das pragas aos agrotóxicos. Outro aspecto negativo do uso de defensivos químicos é o fato de que estes podem comprometer a cadeia de seus predadores naturais, diminuindo a diversidade biológica e facilitando o desequilíbrio em favor das próprias pragas. Neste contexto, o controle biológico surge como alternativa no combate às pragas, levando em conta que a maioria dos insetos tem como alimentação preferencial, outros insetos. (BASSANEZI, 2004).

Conforme DeBach (1974), controle biológico é a ação de inimigos naturais (parasitóides, predadores ou patógenos), mantendo a densidade de população de um outro organismo (praga) abaixo do nível médio que ocorreria na ausência deles. Entende-se por parasitóide um inseto que parasita somente os estágios imaturos, matando o hospedeiro durante o seu processo de desenvolvimento e, quando adulto, o parasitóide passa a viver livre.

Van den Bosch et al. (1982) definiram controle biológico aplicado como a manipulação de inimigos naturais pelo homem para controlar pragas. Uma espécie é considerada como uma praga se sua densidade populacional ultrapassa o nível de danos econômicos.

Existem três tipos de controle biológico de pragas: o primeiro trata da conservação dos inimigos naturais, neste caso, o homem é responsável pelo melhoramento das condições ambientais para favorecer os inimigos naturais. O segundo tipo de controle é conhecido como controle biológico clássico, que se refere à introdução intencional de organismos exóticos (não nativos a um ecossistema ou país), para o controle em longo prazo de uma determinada praga. O terceiro método trata do aumento dos inimigos naturais que conta com a possibilidade de aumentar artificialmente a população do inimigo natural através da liberação de espécies criadas em laboratório (BEVILACQUA et al. 2003).

Modelos matemáticos que levem em conta a biodiversidade de um ecossistema podem ser impraticáveis, tanto biológica quanto matematicamente. Segundo Bassanezi (2004), um modelo matemático deve ser razoável, não tão simples que comprometa qualquer interpretação nem tão complexo que impossibilite obter qualquer informação prática.

O controle biológico usa inimigos naturais da espécie invasora para manter baixo o nível populacional da espécie e, dessa forma, reduzir o dano e tornar a presença da espécie tolerável. Esse tipo de controle não leva à erradicação de espécie invasora, mas serve para manter a população num nível controlado.

Em vários problemas de controle ótimo das populações, os regimes desejados do sistema são conhecidos. Por exemplo, no controle de pragas é conhecido o valor limiar de danos econômicos que determina a quantidade de pragas que não causa danos econômicos à lavoura. A quantidade de inimigos naturais que sustenta as pragas nesse limiar pode ser fornecida por especialistas de controle biológico. Para estes problemas pode ser encontrado o controle feedback que estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada. (RAFIKOV, 2005).

Neste trabalho, o modelo de Nicholson-Bailey é utilizado, nas próximas seções, para descrever a interação entre duas espécies, o parasitóide *Encarsia formosa* usado como agente de controle biológico contra o *Trialeurodes vaporariorum*, o hospedeiro.

Agora, a teoria de controle ótimo, formulada no capítulo anterior, é aplicada nos sistemas populacionais de tempo discreto que são o Mapa Logístico, de Ricker e o modelo de Nicholson-Bailey, e também para o Mapa de Henon.

Conforme Rafikov (2005), existem dois tipos de controle: o controle de malha aberta, onde a função $u(t)$ é encontrada como uma função do tempo, e o controle de malha fechada, onde a função de controle $u(t, x)$ depende do tempo e de variáveis de estado. Para o controle de malha aberta, a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada. Já o controle de malha fechada, ou também chamado de feedback ou controle com realimentação, pode ser aplicado para qualquer condição inicial. Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo com realimentação estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado.

Um modelo de tempo discreto controlado pode ser escrito na seguinte forma:

$$N_{t+1} = N_t F(N_t) + U, \quad (4.1)$$

onde N_t representa a densidade populacional no tempo t e $U \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, que consiste em duas partes:

$$U = \tilde{u} + u_t. \quad (4.2)$$

A parte \tilde{u} do vetor de controle mantém o sistema controlado na trajetória desejada (feedforward) e pode ser escrita na forma:

$$\tilde{u} = \tilde{N}_{t+1} - \tilde{N}_t F(\tilde{N}_t) \quad (4.3)$$

e \tilde{N} é a trajetória desejada. Como a trajetória desejada neste trabalho é um valor constante, simplifica-se a notação escrevendo \tilde{N} ao invés de N_t .

O vetor de controle u_t é quem estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada (feedback) e é definido por:

$$u_t = Bu, \quad (4.4)$$

onde B é uma matriz constante.

Substituindo (4.3) em (4.1), e fazendo alguns ajustes, tem-se:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t F(N_t) + \tilde{N}_{t+1} - \tilde{N}_t F(\tilde{N}_t) + u_t \\ \text{ou} \\ N_{t+1} - \tilde{N}_{t+1} &= N_t F(N_t) - \tilde{N}_t F(\tilde{N}_t) + u_t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Introduzindo uma nova variável y_t , que caracteriza os desvios do mapa considerado da trajetória desejada, tem-se:

$$y_t = N_t - \tilde{N}. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) na equação (4.5), tem-se:

$$y_{t+1} = N_t F(N_t) - \tilde{N} F(\tilde{N}) + u_t. \quad (4.7)$$

Supondo que as condições iniciais estejam próximas ao da trajetória desejada \tilde{N} , isto permite linearizar a função aplicando séries de Taylor da seguinte forma:

$$f(N_t) = N_t F(N_t) \cong \tilde{N} F(\tilde{N}) + \left[F(\tilde{N}) + \tilde{N} \frac{\partial F}{\partial N_t} \Big|_{\tilde{N}} \right] (N_t - \tilde{N}) + \dots \quad (4.8)$$

Levando em conta (4.8), o sistema (4.7) torna-se:

$$y_{t+1} = A y_t + u_t, \quad (4.9)$$

onde $A = f'(\tilde{N})$, ou seja, este é o sistema linearizado em desvios.

Para encontrar o controle feedback u , é aplicada a teoria do controle ótimo linear descrita por Naidu (2000). Neste caso, pode ser formulado o seguinte problema de controle ótimo:

Encontrar a função de controle u , que transfere o sistema (4.1) do estado inicial:

$$y(0) = N_0 - \tilde{N} \quad (4.10)$$

ao estado final:

$$y(\infty) = 0 \quad (4.11)$$

minimizando o funcional:

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} \left[y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t) \right] \quad (4.12)$$

onde Q e R são matrizes definidas positivas que representam valores de ponderação.

Para o problema acima formulado o controle ótimo tem a seguinte forma:

$$u(t) = -\left(R + B^T P B\right) B^T P A y(t) \quad (4.13)$$

onde P é matriz simétrica e satisfaz a equação de Riccati:

$$P = A^T P A - A^T P B \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A + Q \quad (4.14)$$

na qual Q e R são matrizes constantes, definidas positivas, sendo Q simétrica.

4.1.1 Controle Ótimo do Mapa Logístico

O mapa Logístico tem a seguinte forma:

$$N_{t+1} = r N_t \left(1 - \frac{N_t}{k}\right), \quad (4.15)$$

onde N_t representa a densidade populacional no momento t , o coeficiente r é o parâmetro de controle e k a capacidade de suporte do ambiente.

Seja $U = \tilde{u} + u_t$ o vetor de controle, o mapa logístico controlado é escrito na seguinte forma:

$$N_{t+1} = r N_t \left(1 - \frac{N_t}{k}\right) + \tilde{u} + u_t. \quad (4.16)$$

A parte do controle que mantém o sistema em torno da trajetória desejada é escrito da seguinte forma:

$$\tilde{u} = \tilde{N} - f(\tilde{N}) = \tilde{N} \left[1 - r \left(1 - \frac{\tilde{N}}{k}\right)\right]. \quad (4.17)$$

Escreve-se o modelo controlado na forma de desvios como visto na seção anterior:

$$y_{t+1} = Ay_t + u_t \quad (4.18)$$

onde

$$A = f'(N) \Big|_{\tilde{N}} = r(1 - 2\tilde{N}). \quad (4.19)$$

O problema em questão pode ser formulado como o seguinte problema do controle ótimo: encontrar a função de controle u que transfere o sistema (4.18) do estado inicial:

$$y(0) = N_0 - \tilde{N} \quad (4.20)$$

ao estado final:

$$y(\infty) = 0 \quad (4.21)$$

minimizando o funcional:

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} [y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)] \quad (4.22)$$

onde Q é uma matriz definida positiva.

Escolhendo $Q = [1]$, $R = [1]$, condição inicial $N_0 = 0,3$ e a trajetória desejada $\tilde{N} = 0,6$, pode-se resolver a equação algébrica de Riccati (4.14) através da função *dare* do *software* MATLABTM. A matriz P , encontrada através da equação de Riccati, é $P = [1,14]$. Assim, é possível encontrar o controle u e a trajetória temporal do mapa controlado.

De (4.13) e (4.14), a função de controle encontrada é dada por:

$$u_t = -0,2775 y_t. \quad (4.23)$$

A equação com a aplicação do controle torna-se:

$$y_{t+1} = (A - 0,2775) y_t.$$

Primeiramente é controlado o mapa com ponto de equilíbrio estável. A figura 4.1 mostra as trajetórias sem controle e com a aplicação do controle ótimo.

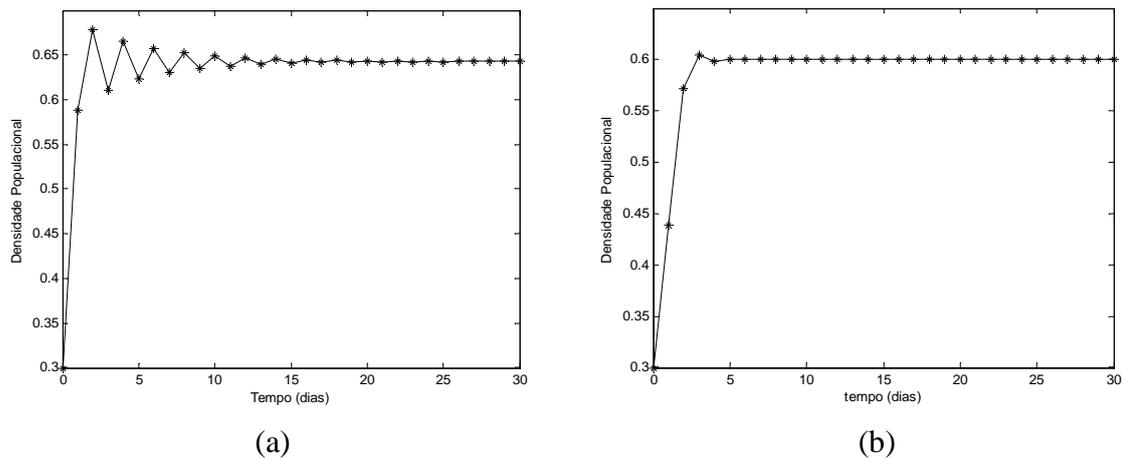


Figura 4.1 – Trajetória Temporal do Mapa de Logístico (a) com ponto fixo estável sem controle, (b) controlado.

Pelos gráficos, pode-se ver que o sistema se estabiliza em torno do ponto desejado. Os parâmetros usados são $r = 2,6$ e $k = 1$.

Para estabilizar o modelo com comportamento oscilatório de período-4, são usados os mesmos valores das matrizes Q e R e da condição inicial. O que muda é o valor do parâmetro de controle que passa a ser $r = 3,45$, para caracterizar o ciclo limite. Resolvendo igualmente a equação de Riccati, obtém-se $P = [1, 27]$. Assim, a função de controle obtida é a seguinte:

$$u_t = -0,3855 y_t. \quad (4.24)$$

O modelo controlado tem a forma:

$$y_{t+1} = (A - 0,3855) y_t.$$

A figura 4.2 mostra o gráfico do modelo sem controle, à esquerda, e o modelo controlado, à direita.

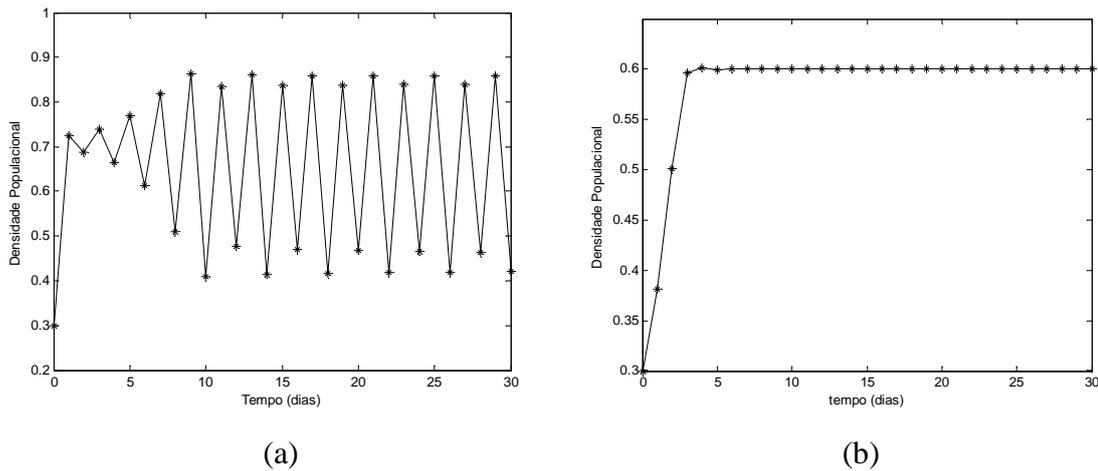


Figura 4.2 – Trajetória Temporal do Mapa de Logístico. (a) Com ciclo limite sem controle, (b) controlado.

Assim, o sistema oscilatório se estabiliza no ponto desejado.

Finalmente é estabilizado o comportamento caótico do mapa. Para isso o valor do parâmetro de controle é $r = 3,9$. O restante dos parâmetros são os mesmos. Resolvendo novamente a equação de Riccati, obtém-se $P = [1, 35]$. A função de controle é a seguinte:

$$u_t = -0,448 y_t \quad (4.25)$$

O modelo controlado tem a forma:

$$y_{t+1} = (A - 0,448) y_t.$$

Analogamente ao caso anterior, a figura 4.3 mostra o modelo sem controle e controlado.

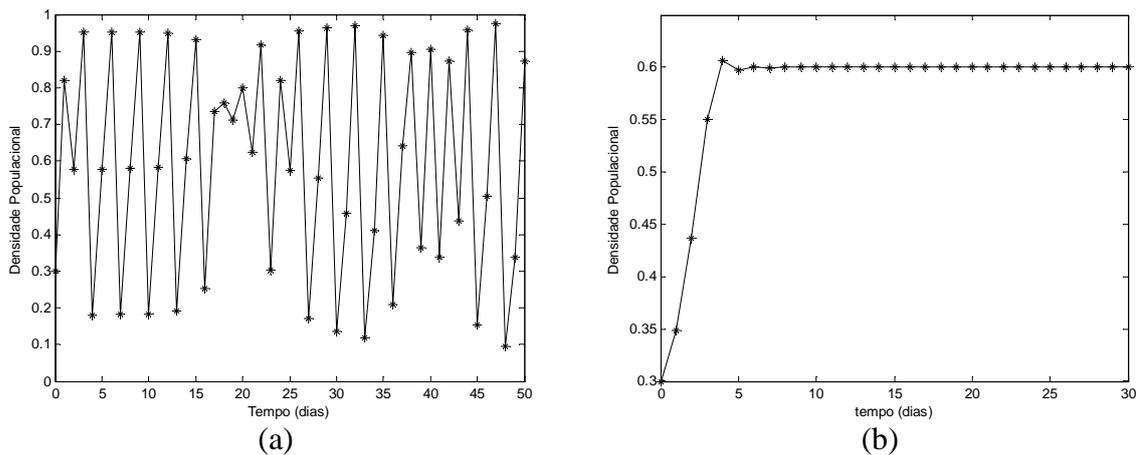


Figura 4.3 – Trajetória Temporal do Mapa de Logístico (a) com comportamento caótico, (b) controlado.

Observando o conjunto de figuras acima é possível concluir que a teoria de controle ótimo linear feedback, aplicado a sistemas discretos não lineares, apresenta um resultado satisfatório, estabilizando o sistema em torno do ponto desejado para qualquer valor do parâmetro de controle.

4.1.2 Controle Ótimo do Mapa de Ricker

O mapa de Ricker controlado é descrito pela seguinte equação de tempo discreto:

$$N_{t+1} = N \exp \left[r \left(1 - \frac{N}{k} \right) \right] + \tilde{u} + u_t \quad (4.26)$$

Pode-se escrever o modelo controlado na forma de desvios, conforme o que foi apresentado no capítulo 3.

$$y_{t+1} = Ay_t + u_t \quad (4.27)$$

onde

$$A = f'(N)|_{\tilde{N}} = \left[1 - \frac{\tilde{N}r}{k} \right] \exp \left[r \left(1 - \frac{\tilde{N}}{k} \right) \right]. \quad (4.28)$$

O problema em questão pode ser formulado como o problema do controle ótimo igual ao caso do mapa logístico.

A parte feedforward do controle é dada pela seguinte equação:

$$\tilde{u} = \tilde{N} - f(\tilde{N}) = \tilde{N} \left(1 - e^{r \left(1 - \frac{\tilde{N}}{k} \right)} \right) \quad (4.29)$$

Escolhendo $Q = [100]$, $R = [1]$, condição inicial $N_0 = 0,2$ e a trajetória desejada $\tilde{N} = 1,2$, pode-se resolver a equação algébrica de Riccati (4.14) para encontrar a matriz $P = [100,25]$, e então calcular a função de controle ótimo dada por:

$$u_t = -0,4951y_t \quad (4.30)$$

A figura abaixo mostra a aplicação do controle no ponto de equilíbrio estável.

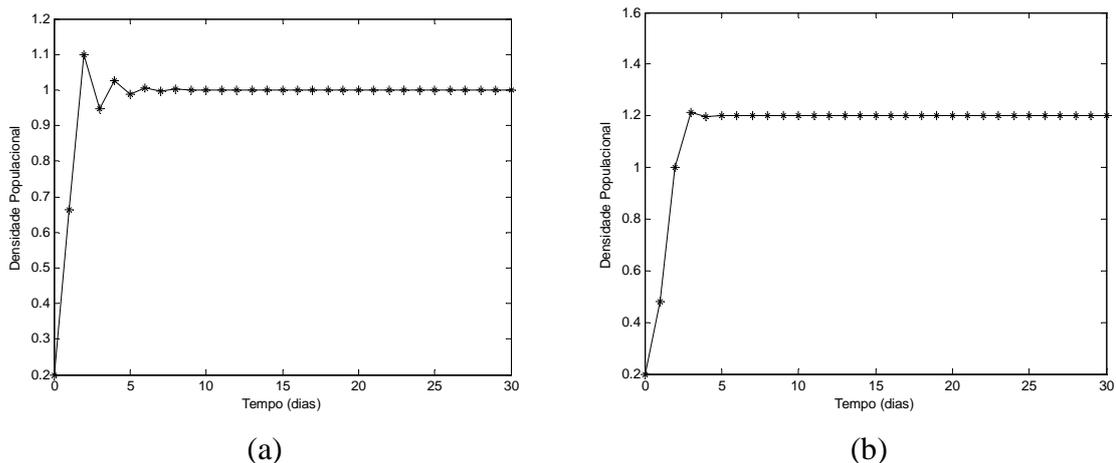


Figura 4.4 – Trajetória Temporal do Mapa de Ricker (a) com ponto fixo estável sem controle, (b) controlado.

O valor do parâmetro, para o qual o mapa apresenta comportamento estável, é $r = 1,5$. Pelos gráficos, pode-se ver que o sistema se estabiliza em torno do ponto desejado.

Para estabilizar o modelo com comportamento oscilatório de período-2, são usados os mesmos valores das matrizes Q e R e da condição inicial. O que muda é o valor do parâmetro de controle, que passa a ser $r = 2,2$, para caracterizar o ciclo limite, e a trajetória desejada que passa a ser $\tilde{N} = 1$. Resolvendo igualmente a equação de Riccati, obtém-se $P = [101,42]$. A função de controle é a seguinte:

$$u_t = -1,1883y_t \quad (4.31)$$

Pela figura a seguir, é possível observar a eficiência do controle ótimo.

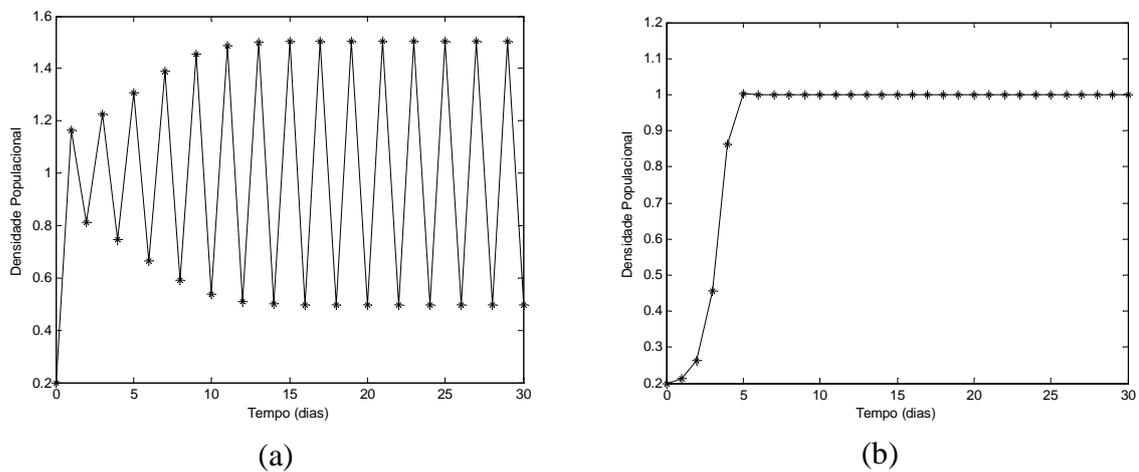


Figura 4.5 – Trajetória Temporal do Mapa de Ricker (a) com ciclo de período-2, (b) controlado.

Assim, o sistema oscilatório estabiliza-se no ponto desejado.

Finalmente é estabilizado o comportamento caótico do mapa. Para isso, o valor do parâmetro de controle é $r = 2,9$. O restante dos parâmetros são os mesmos. Resolvendo novamente a equação de Riccati, obtém-se $P = [103,57]$.

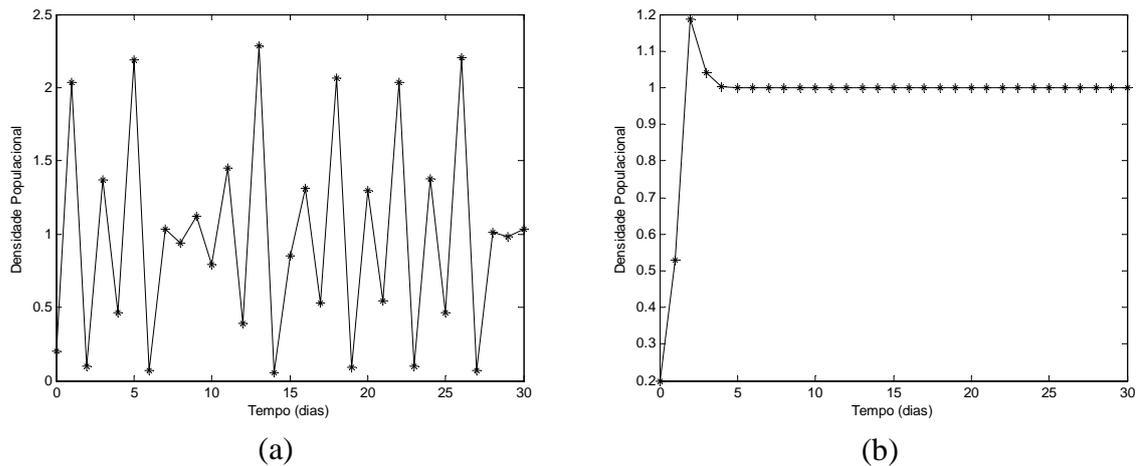


Figura 4.6 – Trajetória Temporal do Mapa de Ricker (a) com comportamento caótico, (b) controlado.

O valor do parâmetro usado para o controle de caos é de $r = 2,9$.

Analogamente ao mapa logístico, pode-se observar que, conforme o conjunto de figuras acima, a teoria de controle ótimo aplicado a sistemas discretos, apresenta um bom resultado, estabilizando o sistema em torno do ponto desejado para qualquer valor do parâmetro de controle. Porém, com uma restrição para as condições iniciais, pois estas devem estar relativamente próximas da trajetória desejada. No entanto, pode-se perceber que o Mapa de Ricker permite aplicar o controle para condição inicial mais afastada da trajetória desejada do que o Mapa Logístico, ou seja, os desvios podem ser maiores para o Mapa de Ricker.

Tanto para o Mapa Logístico, como para o Mapa de Ricker, foi possível estabilizar o sistema no nível desejado para diferentes valores dos parâmetros (incluindo para aqueles que correspondem aos regimes caóticos), porém com uma restrição para as condições iniciais, pois estas devem estar relativamente próximas da trajetória desejada. Porém, pode-se perceber que o Mapa de Ricker permite aplicar o controle para condição inicial mais afastada da trajetória desejada do que o Mapa Logístico, ou seja, os desvios podem ser maiores para o Mapa de Ricker.

4.1.3 Controle do crescimento de Agupés através do Mapa de Ricker

Neste trabalho é feito o controle no crescimento de aguapés em lagoas de estabilização de águas residuárias da criação de suínos. A importância deste trabalho está no fato de que as águas provenientes de atividades agropecuárias são agentes de poluição de grande parte dos corpos d'água no Brasil. Os dejetos de animais são considerados substâncias indesejáveis e de difícil manejo, independentemente de suas características e dos benefícios que podem trazer. (OLIVEIRA et. al., 2000). Além disso, a utilização do aguapé em conjunto com lagoas de estabilização, proporciona uma maneira não só econômica como ecológica para tratamento de esgotos em pequenas comunidades, lançando seus efluentes com alto padrão de qualidade, sem prejuízos aos corpos receptores.

Aguapé é a denominação popular de algumas espécies de plantas aquáticas da família *Pontederiaceae*. São plantas flutuantes e rizomatosas, que têm preferência por rios de fluxo lento ou lagoas de água doce. Reproduzem-se rapidamente por meios vegetativos, mas, ainda assim, produzem frutos e sementes em abundância. O aguapé prolifera-se abundantemente durante todo o ano e sua biomassa aumenta rapidamente a uma velocidade de 1 tonelada por hectare/dia. (WIKIPEDIA, 2007).

A espécie de aguapé mais conhecida é *Eichornia crassipes*, popularmente chamada no Brasil de gigoga. É considerada uma planta daninha em canais de irrigação, represas, rios e lagoas. Possui uma alta tolerância a poluentes como metais pesados, e por isso também é uma planta infestante de sistemas fluviais e lacunares urbanos. Em seu local de origem, os rios da Amazônia, é predada por peixes e mamíferos aquáticos herbívoros.

Na ausência desses animais, o aguapé se reproduz com muita facilidade, entupindo rapidamente corpos d'água, canais e saídas de esgoto. Sua introdução nos sistemas de águas das cidades brasileiras deve-se, principalmente, à sua característica de absorver e acumular poluentes, filtrando a água. Porém, quando em abundância, impede a proliferação de algas responsáveis pela oxigenação da água, causando a morte de organismos aquáticos (WIKIPEDIA, 2007).

O aguapé é uma planta aquática originária da região tropical da América Central, sendo hoje distribuída por mais de 50 países do mundo. Devido ao seu grande potencial de proliferação, sérios problemas operacionais têm sido provocados nos sistemas hídricos onde esta planta foi introduzida, sendo considerada “praga da água”. Até a década de 40, a planta era vista somente como uma praga. Suas propriedades começaram a ser descobertas por pesquisadores da NASA, que pretendiam encontrar uma forma de liberar seus canais

fluviais, então tomados de aguapé, para transporte de equipamentos (PINTO; GUIMARÃES, 2007). A imagem negativa foi alterada pelas várias pesquisas realizadas nos últimos anos, em que ficou demonstrado que há boa perspectiva de utilização do aguapé para remoção de materiais poluidores.

Conforme Oliveira et al., (2003), as águas residuárias domésticas de concentração forte possuem demanda bioquímica de oxigênio (DBO) próxima a 300 mg por litro, enquanto dejetos de suínos manejados em fossas de retenção chegam a apresentar a demanda bioquímica de oxigênio de 50000 mg por litro. Essa demanda tem sido um dos parâmetros aplicados no dimensionamento em unidades de tratamento de dejetos de suínos e na legislação ambiental para lançamento de efluentes em corpos de água.

Um sistema de tratamento de água residuária é composto, na maioria das vezes, por unidades de tratamento seqüencialmente dispostas, nas quais ocorrem a separação e a transformação dos constituintes presentes. Sendo assim, a utilização do aguapé mostra-se vantajosa no tratamento dessas águas.

O aguapé extrai os nutrientes necessários para sua sobrevivência e despoua os corpos d'água, filtrando o material particulado através de suas raízes, além de absorver metais pesados como prata, chumbo, mercúrio, cádmio e outros. Também promove a oxigenação do corpo hídrico, que é feita tanto pela parte aérea quanto pela ação bioquímica das bactérias que compõem o complexo ecossistema das raízes. Os estudos da relação entre produtividade e remoção de nutrientes da lagoa de aguapé mostraram que a produtividade líquida da biomassa representa o parâmetro mais adequado para avaliar a eficiência na remoção de nutrientes (WIKIPEDIA, 2007).

Segundo Pinto e Guimarães, (2007), o aguapé possui propriedades de grande interesse e, se bem manejado, torna-se um importante aliado. O uso do mesmo para tratar esgotos e corpos de água poluídos tem como vantagens, o custo, que é inferior ao sistema normal, a remoção de substâncias tóxicas e metais pesados simultaneamente; além disso, segundo a pesquisadora Carmem Lúcia apud Pinto e Guimarães, (2007), a planta também pode ser usada na geração de energia: por queima direta em fornos para a secagem de grãos e para a geração de biogás.

Além disso, o aguapé também pode ser utilizado nas lagoas de estabilização para o tratamento de águas residuárias produzidas pela criação de suínos no Brasil. Esse tipo de

tratamento tem recebido atenção especial devido à sua significativa capacidade assimiladora de alguns tipos de substâncias poluidoras, além de seus baixos custos de capital e operacional. (RAFIKOV, 2005).

Porém, quando o aguapé ultrapassa uma determinada densidade na lagoa, sua taxa de crescimento tende a decrescer e, conseqüentemente, diminuem suas atividades biológicas relacionadas à assimilação de substâncias presentes no meio líquido. Do ponto de vista operacional da lagoa, é necessário efetuar um controle constante da quantidade de aguapé para manter melhor rendimento na eficiência de tratabilidade do sistema. Matematicamente, o problema de minimização de poluentes pode ser formulado como um problema de safra máxima de plantas de aguapé (RAFIKOV, 2003).

A fim de se determinar a quantidade de aguapé necessária para o funcionamento da lagoa de forma eficiente, é formulado o problema de controle ótimo de aguapé nas lagoas de estabilização. O modelo utilizado é o Mapa de Ricker.

O mapa de Ricker é descrito pela seguinte equação de tempo discreto:

$$N_{t+1} = N \exp \left[r \left(1 - \frac{N}{k} \right) \right] \quad (4.32)$$

Onde N_t representa a densidade de aguapé no momento t , medida em gramas de peso seco por metro quadrado (g/m^2). O coeficiente r é a taxa de crescimento intrínseco e k a capacidade de suporte da lagoa de aguapés e designa a capacidade máxima de seu crescimento. Os parâmetros do modelo de Ricker foram obtidos através de um ajuste de curvas dos valores da função proposta por Kawai e Grieco (1983), que calcula a densidade de aguapés diariamente.

Seja U a função de controle dada por:

$$U = \tilde{u} + u_t. \quad (4.33)$$

Então, o sistema controlado tem a seguinte forma:

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)\right) + \tilde{u} + u_t. \quad (4.34)$$

A parte \tilde{u} da função de controle mantém o sistema em torno da trajetória desejada, ou seja, representa a quantidade de aguapés que deve ser retirada diariamente após a aplicação da parte feedback do controle. O controle \tilde{u} pode ser calculado da seguinte forma:

$$\tilde{u} = \tilde{N} - f(\tilde{N}) = \tilde{N} \left(1 - \exp\left(r\left(1 - \frac{\tilde{N}}{k}\right)\right)\right). \quad (4.35)$$

Pode-se escrever o modelo controlado na forma de desvios, conforme visto anteriormente:

$$y_{t+1} = Ay_t + u_t \quad (4.36)$$

onde

$$A = f'(N)|_{\tilde{N}} = \left[1 - \frac{\tilde{N}r}{k}\right] \exp\left[r\left(1 - \frac{\tilde{N}}{k}\right)\right]. \quad (4.37)$$

Para encontrar o controle feedback u_t , é usada a fórmula (4.13), a qual é dada por:

$$u(t) = -\left(R + B^T P B\right) B^T P A y(t). \quad (4.38)$$

Assim, escolhendo $Q = [100]$, $R = [1]$, condição inicial $N_0 = 600$, a capacidade suporte sendo $k = 700$ e a trajetória desejada $\tilde{N} = 350$, pode-se resolver a equação algébrica de Riccati (4.14), através do *software* MATLABTM para encontrar o controle u . A matriz P , encontrada através da equação de Riccati, é $P = [100,7972]$.

Calculando a função de controle, obtém-se:

$$u_t = -0.8885y_t \quad (4.39)$$

Os gráficos abaixo mostram as trajetórias do modelo sem aplicação do controle, à esquerda, e do modelo controlado, à direita.

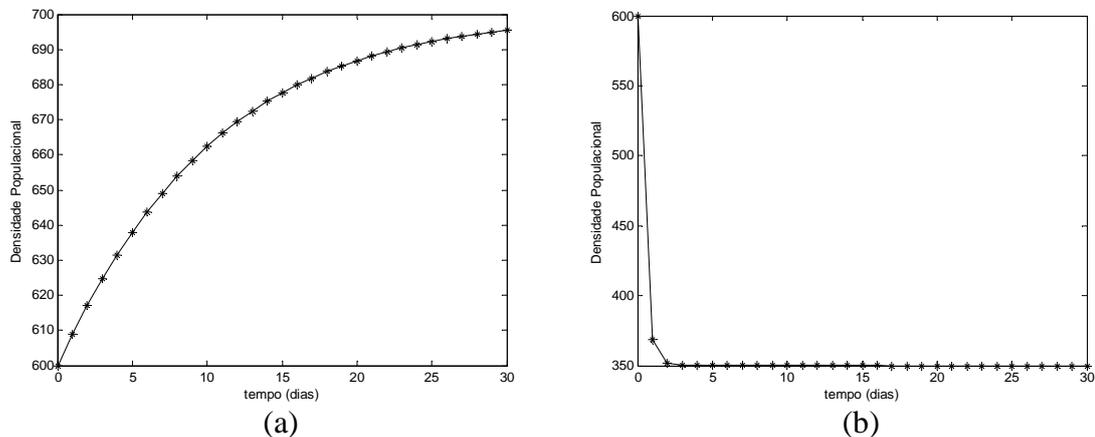


Figura 4.7 – Trajetória Temporal do modelo (a) sem controle e (b) com aplicação do controle ótimo

O parâmetro usado na figura 4.7 é $r = 0,1027$, encontrado através da regressão não linear.

A quantidade de aguapés foi estabilizada no nível de $350,2 \text{ g/m}^2$ em um período de três dias após o início da aplicação do controle ótimo. Isto significa que a quantidade de aguapés que deve ser recolhida diariamente depois deste período é de $\tilde{u} = 18,4 \text{ g/m}^2$, conforma e equação 4.35.

4.1.4 Controle Ótimo do Modelo de Nicholson-Bailey

O controle biológico comercial da mosca branca em estufas através da liberação do parasitóide *Encarsia formosa* é usado em aproximadamente 5000 hectares na maioria dos países com produção em estufas. Embora outros inimigos naturais da mosca sejam conhecidos, a liberação desses parasitóides é a mais acessível economicamente. Em alguns casos, um único descendente de *Encarsia formosa* pode matar mais moscas-brancas por unidade de tempo que uma fêmea da mosca possa se reproduzir. Já em outros casos, o desenvolvimento da mosca-branca é tão rápido que a liberação inoculativa sazonal não é

suficiente para o controle seguro e liberações inundativas têm que ser feitas. Isso pode depender do clima da estufa e da estrutura da planta em questão, embora, muitos estudos são realizados em plantações de tomates (LENTEREN et al.,1995, ROERMUND et al., 1997).

O sistema de Nicholson-Bailey com controle tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} &= cN_t(1 - e^{-aP_t}) + U. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A função de controle U é dividida em duas partes:

$$U = \tilde{u} + u. \quad (4.41)$$

A parte \tilde{u} mantém o sistema controlado na trajetória desejada e a parte u estabiliza o sistema em torno do ponto de equilíbrio desejado. Como o nível desejado é o ponto de equilíbrio do sistema, então $\tilde{u} = 0$.

Para estabilizar o sistema no ponto de equilíbrio desejado utiliza-se o controle introduzindo parasitóides no sistema.

O controle \tilde{u} pode ser encontrado pela equação:

$$\tilde{u} = P^* - cN^*(1 - e^{-aP^*}), \quad (4.42)$$

onde P^* é a população de parasitóides necessária para manter a população de hospedeiros no nível desejado N^* .

O valor P^* pode ser encontrado do sistema:

$$\begin{aligned} \lambda e^{-aP^*} &= 1 \\ P^* &= cN^*(1 - e^{-aP^*}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considerando o sistema (4.40), supondo que as condições iniciais estão próximas do ponto de equilíbrio e utilizando séries de Taylor, é possível linearizar o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(N, P) &\approx f(\tilde{N}, \tilde{P})(N - \tilde{N}) + f'_N(\tilde{N}, \tilde{P})(N - \tilde{N}) + f'_P(\tilde{N}, \tilde{P})(P - \tilde{P}) + \dots \\ g(N, P) &\approx g(\tilde{N}, \tilde{P})(P - \tilde{P}) + g'_N(\tilde{N}, \tilde{P})(N - \tilde{N}) + g'_P(\tilde{N}, \tilde{P})(P - \tilde{P}) + \dots \end{aligned} \quad (4.44)$$

Introduzindo o vetor de desvios como:

$$y_t = \begin{bmatrix} N_t - \tilde{N} \\ P_t - \tilde{P} \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

pode-se escrever o sistema controlado em desvios da seguinte forma:

$$y_{t+1} = Ay_t + Bu \quad (4.46)$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} f'_N(\tilde{N}, \tilde{P}) & f'_P(\tilde{N}, \tilde{P}) \\ g'_N(\tilde{N}, \tilde{P}) & g'_P(\tilde{N}, \tilde{P}) \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

A matriz A é conhecida como matriz Jacobiana do sistema.

O problema de controle ótimo do sistema linear (4.46) com funcional quadrático pode ser formulado como: encontrar a função u que transfere o sistema (4.46) do estado inicial

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_{10} \\ y_2(0) &= y_{20} \end{aligned} \quad (4.48)$$

ao estado final:

$$\begin{aligned} y_1(\infty) &= \tilde{y}_1 \\ y_2(\infty) &= \tilde{y}_2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

que minimiza o funcional:

$$J = \sum [y^T(t)Qy(t) + u^T Ru]. \quad (4.50)$$

A função de controle ótimo u e a matriz P , que satisfaz a equação de Ricatti, podem ser encontradas através das equações (4.13) e (4.14), apresentadas na seção anterior.

Considerando que as trajetórias desejadas para o modelo de Nicholson-Bailey sejam os pontos de equilíbrio do sistema, e escolhendo $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $R = [1]$, calcula-se a matriz P , analogamente aos casos anteriores, através da função *dare* do *software* MATLAB™. Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 2,37 & -1,91 \\ -1,91 & 3,67 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

A função de controle é a seguinte:

$$u_t = 0,0213y_1 - 1,4121y_2. \quad (4.52)$$

A figura mostra as trajetórias do sistema controlado:

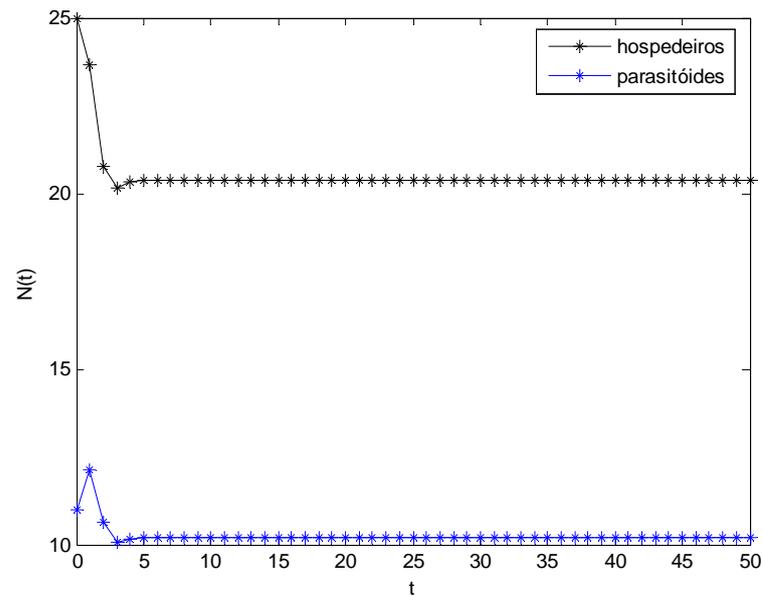


Figura 4.8 – Modelo de Nicholson-Bailey controlado

O gráfico do sistema controlado na figura 4.8, mostra que o controle ótimo encontrado estabiliza o sistema não-linear no nível desejado de hospedeiros.

4.2 Controle Ótimo do Mapa de Henon

Conforme a variação dos parâmetros, o mapa de Henon pode apresentar pontos fixos estáveis, órbitas de período-2, período-4, formando uma cascata de duplicações que conduz ao caos. Os valores dos parâmetros para os quais o mapa apresenta comportamento caótico são: $a = 1.4$ e $b = 0.3$.

A teoria de controle ótimo linear feedback é aplicada para a estabilização do mapa de Henon. No entanto, primeiramente o mapa é escrito em desvios.

O sistema (2.25) com controle pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_t + 1 - ax_t^2 \\ bx_t \end{bmatrix} + \tilde{u} + Bu \quad (4.53)$$

onde os vetores u e \tilde{u} são de dimensão 2×1 e B é matriz constante 2×2 . O vetor \tilde{u} é a parte do controle que mantém o sistema em torno da trajetória desejada (feedforward), e a parte u estabiliza o sistema no ponto de equilíbrio desejado (feedback).

Como, neste caso, a trajetória desejada é o ponto de equilíbrio do sistema, então $\tilde{u} = 0$.

Introduzindo novas variáveis z_t e w_t , que caracterizam os desvios do sistema considerado da trajetória desejada, tem-se:

$$\begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t - \tilde{x} \\ y_t - \tilde{y} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Substituindo (4.54) em (4.53) e fazendo alguns ajustes, obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_t - a(x_t^2 - \tilde{x}^2) \\ bz_t \end{bmatrix} + Bu \quad (4.55)$$

Mas $x_t^2 + \tilde{x}^2 = (z_t + \tilde{x})^2 - \tilde{x}^2 = z_t^2 + 2\tilde{x}z_t$. Logo, o sistema em desvios é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ w_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix} + G_t + Bu \quad (4.56)$$

onde $A = \begin{bmatrix} -2a\tilde{x} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $G_t = \begin{bmatrix} -az_t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz G representa a parte não linear do sistema (5.5), cujos elementos dependem de x e \tilde{x} .

Para encontrar o vetor de controle u formula-se o problema de controle ótimo conforme o capítulo 3.

Para as simulações numéricas do controle ótimo linear feedback para o mapa de Henon foi desenvolvido no *software* MATLABTM um programa para a resolução numérica do modelo.

Escolhendo,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R = [1],$$

obtem-se:

$$P = \begin{bmatrix} 26,3 & -12,6 \\ -12,6 & 7,3 \end{bmatrix} \text{ e } u_t = -2,7551z + 1,4620w$$

A matriz P é obtida resolvendo-se a equação discreta não linear de Ricatti, através da função *dare* do MATLABTM.

As trajetórias do sistema controlado com condições iniciais $(0,5;0,5)$ e o ponto de equilíbrio (x_1^*, y_1^*) estão na figura 5.9.

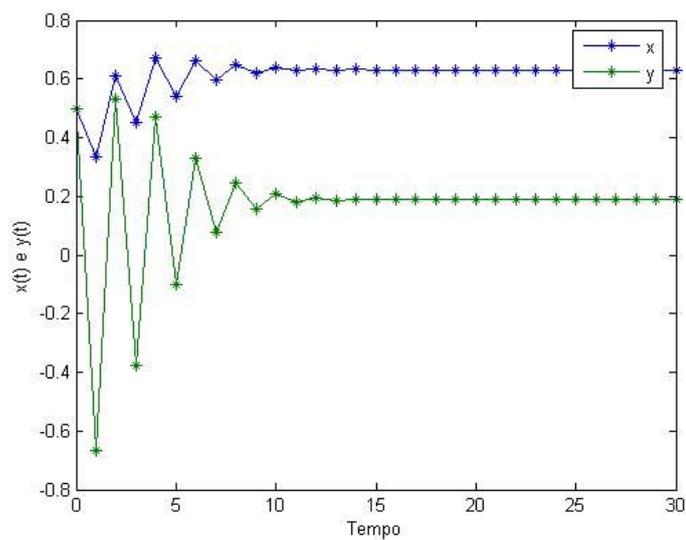


Figura 4.9 – Trajetórias Temporais do Mapa de Henon controlado

O controle ótimo formulado estabilizou o mapa de Henon em uma trajetória desejada, que neste caso, é o ponto de equilíbrio do mapa. Portanto, o controle ótimo linear feedback apresenta resultados satisfatórios no controle de sistemas caóticos.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram estudados os sistemas dinâmicos não-lineares de tempo discreto, com o objetivo de mostrar a variabilidade de seu comportamento por uma pequena mudança no valor dos parâmetros ou da condição inicial e também aplicar a teoria de controle ótimo linear feedback em sistemas não-lineares de tempo discreto. Além disso, os sistemas não-lineares de tempo discreto são usados para modelar a dinâmica de populações por serem mais simples de se analisar e reproduzirem de maneira mais realística o comportamento de algumas populações.

No capítulo 1 fez-se uma revisão sobre sistemas de tempo discreto, incluindo os pontos fixos e as condições de estabilidade dos mesmos. A partir, daí pode-se ver a variabilidade desses sistemas, pois esses podem mudar de comportamento com uma pequena variação dos parâmetros, podendo apresentar soluções de equilíbrio estáveis, ciclos periódicos e até o caos. Isto já analisado no capítulo 2, o qual também apresenta os gráficos Teia de Aranha, que mostram os comportamentos dos sistemas e os diagramas de bifurcação para cada modelo apresentado.

No capítulo 3, primeiramente é explanada a teoria de controle linear feedback para sistemas lineares de tempo discreto. Após, foram reveladas as condições, através de um teorema, que permitem utilizar o controle linear feedback para sistemas não-lineares de tempo discreto.

Após a formulação do controle aplica-se, o mesmo para os modelos clássicos de tempo discreto apresentados. Para isso, primeiramente escrevem-se os modelos em forma de desvios, após são usados algoritmos feitos no software MATLAB™, onde foram feitas simulações para vários valores dos parâmetros que influenciam na dinâmica do sistema e então foi aplicado o controle.

As simulações computacionais mostraram que a metodologia proposta para o controle linear aplicado em sistemas não-lineares de tempo discreto permite estabilizá-los em torno da trajetória desejada, transferindo um sistema não-linear do estado inicial ao estado final, minimizando os desvios das trajetórias. Tanto para o Mapa Logístico, como para o Mapa de Ricker, foi possível estabilizar o sistema no nível desejado para diferentes valores dos parâmetros (incluindo para aqueles que correspondem aos regimes caóticos), porém com uma restrição para as condições iniciais, pois estas devem estar relativamente próximas da trajetória desejada. Porém, pode-se perceber que o Mapa de Ricker permite aplicar o controle para condição inicial mais afastada da trajetória desejada do que o Mapa Logístico, ou seja, os desvios podem ser maiores para o Mapa de Ricker.

No caso do Modelo de Nicholson-Bailey, tanto os parâmetros quanto as condições iniciais são dados retirados da literatura que modela a interação entre parasitóides e hospedeiros, neste caso, o parasitóide *Encarsia formosa*, usado como agente de controle biológico contra o *Trialeurodes vaporariorum*, o hospedeiro. De acordo com as simulações mostra-se que ao acrescentar os inimigos naturais, é possível transferir a densidade populacional de pragas ao nível abaixo do que causa danos econômicos, seguindo a teoria do controle ótimo linear *feedback* aplicado em sistemas não-lineares de tempo discreto.

O Mapa de Ricker também foi usado para controlar o crescimento de aguapés nas lagoas de estabilização de águas residuárias, pois, quando o aguapé ultrapassa uma determinada densidade na lagoa, sua taxa de crescimento tende a decrescer, e conseqüentemente, diminuem suas atividades biológicas. Sendo assim, é necessário efetuar um controle constante da quantidade de aguapé para manter melhor rendimento da tratabilidade do sistema. Assim, o problema da minimização de poluentes é formulado como o problema da safra máxima de aguapés. Portanto, os resultados obtidos, após a aplicação o controle, afirmam que, através da utilização da teoria de controle ótimo, foi encontrada a quantidade de plantas necessária, para maximizar a remoção de poluentes, e a estratégia ótima para mantê-la neste nível, ou seja, foi determinada a estratégia ótima de tratamento das lagoas de aguapé.

Outra conclusão relevante é a eficácia do controle ótimo linear *feedback* para sistemas caóticos como o Mapa de Henon. O comportamento deste mapa é caótico, porém, com a aplicação do controle foi possível estabilizá-lo, levando as órbitas instáveis para o ponto de equilíbrio.

Finalmente, conclui-se que o controle ótimo linear feedback que direcionou os sistemas de uma trajetória caótica a qualquer órbita desejada ou ponto de equilíbrio, formulado para sistemas não-lineares de tempo discreto que exibem caos, apresenta resultados satisfatórios, alcançando os objetivos propostos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, C.E. *Modelos Populacionais*. Material Didático impresso, Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro.

Aguapé. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Aguap%C3%A9>>. Acesso em: 25 set. 2007.

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York, 1997.

BANKS, J.; BROOKS, J.; CAIRNS, G.; DAVIS, G., STACEY, P. *On Devaney's Definition of Chaos*. The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No.4, p. 332-334, Melbourne, 1992.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, São Paulo, 2004.

BEVILACQUA, J. S.; RAFIKOV, M.; GUEDES, C. L. C. *Modelagem em Biomatemática*. Minicurso: XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC, São Paulo, 2003.

DE BACH, P. *Optimal Control: an Introduction to the Theory and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York, 1988.

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C. *Caos, Uma Introdução*. Edgard Blücher, São Paulo, 1995.

GOH, B. S. *Management and Analysis of Biological Populations*. Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1980.

HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. S. *Discrete-time Nonlinear Analysis and Feedback Control with Nonquadratic Performance Criteria*. The Franklin Institute, Elsevier Science. Vol. 333B, No. 6, pp. 849-860, 1996.

HASTINGS, A. *Population Biology: Concepts and Models*. 1 ed. Springer, 1997.

Henon Map. Disponível em: < en.wikipedia.org/wiki/Henon_map>. Acesso em: 14 out. 2007.

HENON, M. *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. Communications in Math. Physics 50, pg: 69-77, Springer-Verlag, Nice, 1976.

HILKER, F. M.; WESTERHOFF, F. H. *Control of chaotic population dynamics: Ecological and economic considerations*. Beiträge des Instituts für Umweltsystemforschung, No. 32, Osnabrück, 2005.

Instituto Hórus de Desenvolvimento e Conservação Ambiental, *Métodos de Controle de Espécies Exóticas Invasoras*, 2007

JOHNSON, M. W. *Biological Control of Pests*. Hawaii, 2000

LENTEREM, J., C; ROERMUND, H. J. W.; SÜTTERLIN, S. Biological Control of Greenhouse Whitefly (*Trialeurodes vaporariorum*) with the Parasitoid *Encarsia Formosa*. *Biological Control*, Netherlands, V. 6, p: 1-10, jul. 1995.

MAHAFFY, J. M. *Math 121 – Calculus for Biology I*. Spring Semester, Product Rule, 2001.

Disponível em:

<www.rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html>.

Acesso em: 19 mai. 2007.

MAY, R. M. *Simple Mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, v. 261, pg: 459-467, 1976.

MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 2 Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2006.

MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

NAIDU, D. S. *Optimal Control Systems*. CRC-Press LLC, Florida, 2000.

OLIVEIRA, R. A. et al. *Gestão e Controle Ambiental: Redução da demanda bioquímica do oxigênio de águas residuárias da suinocultura com o emprego da macrófita aquática*. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, V.4, n.1, p.81-86, 2000.

PINTO, C. L. R.; GUIMARÃES, L.R. *Aguapé: Tratamento de efluentes e biomassa*. Disponível em: <viversustentavel.wordpress.com/2007/07/01/aguape-tratamento-de-efluentes-e-biomassa/>. Acesso em: 25 set. 2007.

RAFIKOV, M.; BATHAZAR, J. M. *On Control and Synchronization in Chaotic and Hyperchaotic Systems*. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, v. 13, pp. 1246-1255, 2008.

RAFIKOV, M.; BATHAZAR, J. M. *Síntese do Controle ótimo Linear feedback para Sistemas que exibem Caos*. In: III “Congresso Temático de Dinâmica e Controle e Aplicações. Anais... SBMAC”, pp.619-633, Ilha Solteira, 2004.

RAFIKOV, M. *Modelagem e Controle Ótimo de Sistemas Populacionais*. Ijuí, UNIJUÍ, 2005. Monografia (Matemática), Modelagem e Controle Ótimo de Sistemas Populacionais, 2005.

RAFIKOV, M. *Notas do Minicurso: Aplicação dos modelos matemáticos no controle de populações*. Minicurso da Escola de Verão, Departamento de Matemática/ UFSC, 2003.

ROERMUND, H. J. W.; LENTEREN, J. C.; RABBINGE, R. Biological Control of Greenhouse Whitefly with Parasitoid Encarsia Formosa on Tomato: An Individual Based Simulation Approach. *Biological Control*, Netherlands ,v. 9, p. 25-47, mai. 1997.

SEIDEL, D. J.; RODRIGUES, L. A. D. Formação de padrões biológicos através de modelos discretos de reação-difusão. Anais CNMAC www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd_xxviii_cnmac/resumos%20estendidos/denilson_seidel_ST2.pdf

SHAROV, A. *Quantitative, Population Ecology*. Disponível em: <www.gypsymoth.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol/popccol.html>. Acesso em: 08 jan. 2001.

SHAROV, A. *Stability, Oscillations and Chaos in Population Dynamics*. Disponível em: <www.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol/lec9/quant.html>. Acesso em: 12 dez. 2007.

SOLORIO, J. M. S.; PISARCHIK, A. M.; ABOITES, V. *Shift of saddle-node bifurcation points in modulated Henon Map*. Revista Mexicana de Física 48 (4) 290-294, 2002.

VAN DEN BOSH, R.; MESSENGER, P. S.; GUTIERREZ, A. P. *An Introduction to Biological Control*. Plenum Press, New York, 1982.

VOCKE, T. *On the control the nonlinear dynamical system*. München, 2001. Dissertação, Zentrum Mathematik, Technische Universität München, 2001.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)