

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto Coppead de Administração

**Simone Paiva Daumas**

**Análise do Risco de Carteiras de Títulos Prefixados  
da Dívida Pública Federal**

Dissertação de Mestrado em Administração

Orientador: Prof. André Luiz Carvalhal da Silva  
(COPPEAD / UFRJ)

**Rio de Janeiro**

**2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Daumas, Simone Paiva.

Análise do risco de carteiras de títulos prefixados da dívida pública federal /  
Simone Paiva Daumas. – Rio de Janeiro, 2007.

72 f.: il

Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto COPPEAD de Administração, 2007.

Orientador: André Luiz Carvalho da Silva.

1. Renda fixa. 2. Risco de taxa de juros. 3. Imunização. 4. Administração – Teses. I. Silva, André Luiz Carvalho da (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto COPPEAD de Administração. III. Título.

## **Análise do Risco de Carteiras de Títulos Prefixados da Dívida Pública Federal**

**Simone Paiva Daumas**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Pós -  
Graduação e Pesquisa em Administração – COPPEAD,  
da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como  
parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de  
Mestre em Administração.

Aprovada por:

\_\_\_\_\_  
Prof. André Luiz Carvalho da Silva, D. Sc. (COPPEAD/UFRJ) Orientador

\_\_\_\_\_  
Prof. Eduardo Facó Lemgruber, Ph. D. (COPPEAD/UFRJ)

\_\_\_\_\_  
Prof. Octavio Manuel Bessada Lion, D. Sc. (BACEN)

**Rio de Janeiro**

**2007**

A meus pais, por seu exemplo, apoio e  
afeto, sempre constantes em minha vida.

## AGRADECIMENTOS

A toda minha família, pelo incentivo, apoio e carinho.

À minha filha Taís, pelo seu amor e compreensão.

Ao Prof. André Luiz Carvalhal da Silva, pela orientação segura, precisa e sempre tranquilizadora.

Ao Banco Central do Brasil, pelo patrocínio institucional.

A Sergio Goldenstein, Ivan Luís de Oliveira Lima e Ruben Almeida Galvão, pelo apoio e aprovação de meu afastamento para dedicação exclusiva ao mestrado.

A André de Oliveira Amante, meu orientador técnico pelo Banco Central, pelo incentivo, pelas sugestões para o tema da dissertação e por contribuições para o aprimoramento do trabalho.

Aos colegas do Demab, em especial a Juan Pablo Paschoa, Flávio Príncipe Pires e Mário Jorge Dourado, pelo auxílio na coleta de dados utilizados neste trabalho.

A todos os colegas da Dichel, pela amizade e alegre convívio, durante os últimos 9 anos.

A todos os professores e funcionários do Coppead, pelo seu profissionalismo e dedicação, que tornam esta escola excelente e acolhedora.

Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo e convivência quase diária durante esta jornada.

## RESUMO

DAUMAS, Simone Paiva. **Análise do Risco de Carteiras de Títulos Prefixados da Dívida Pública Federal**. Rio de Janeiro, 2007. Dissertação (Mestrado em Administração) – Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Para promover o fortalecimento e crescimento do mercado de títulos públicos prefixados, almejado pela Secretaria do Tesouro Nacional, é importante que haja melhor compreensão e administração do risco de taxas de juros por parte dos investidores. Este trabalho apresenta diversas estratégias de imunização de risco de carteiras de renda fixa, abordando medidas clássicas de risco, tais como duração, convexidade e dispersão, além de medidas mais modernas, como o VaR (*value-at-risk*) e o CVaR (*conditional value-at-risk*). Para avaliar o desempenho das diferentes estratégias, são realizados estudos empíricos de otimização de carteiras com títulos brasileiros prefixados, dos mercados da dívida pública interna e externa. Os resultados indicaram que não é recomendável utilizar a convexidade como instrumento de escolha de carteiras, pois em mercados líquidos ela provavelmente já está precificada. A estratégia de seleção da carteira de dispersão mínima revelou-se a melhor para o mercado de títulos da dívida externa. Os critérios de escolha segundo o menor VaR e CVaR, com graus de confiança elevados, mostraram-se satisfatórios em ambos mercados.

### Palavras-chave

Renda fixa, Risco de Taxa de Juros, Imunização, Duração, Convexidade, Dispersão, VaR, Títulos Prefixados, Dívida Pública.

## ABSTRACT

DAUMAS, Simone Paiva. **Risk Analysis of Brazilian Non-indexed Bond Portfolios**. Rio de Janeiro, 2007. Dissertation (Master in Business Administration) – Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

In order to foster the strength and growth of the market of non-indexed government bonds, aimed by the National Treasury Secretariat, it is important that investors understand and manage the interest rate risk well. This study presents various risk immunization strategies, including not only classical measures like duration, convexity and dispersion but also modern measures such as VaR (value-at-risk) and CVaR (conditional value-at-risk). For the purpose of evaluating the performance of portfolio optimization strategies, empirical tests are conducted on the Brazilian domestic and international debt market. The results show that it is not recommended to use convexity for portfolio selection because probably it is already priced in liquid markets. The minimum dispersion portfolio strategy had the best performance in the international debt market. The choice criteria based on minimum VaR and CVaR, with high confidence levels, achieved satisfactory results in both markets.

### Keywords

Fixed Income, Interest Rate Risk, Immunization, Duration, Convexity, Dispersion, VaR, Bonds, Public Debt.

## SUMÁRIO

1	Introdução.....	9
2	Gestão da Dívida Pública Mobiliária Federal.....	13
3	Revisão de Literatura.....	16
3.1	Estrutura Temporal de Taxas de Juros .....	16
3.2	Duração.....	19
3.3	Convexidade .....	22
3.4	Medidas de Dispersão .....	25
3.5	Imunização do Risco de Taxas de Juros.....	27
4	Teste Empírico.....	41
4.1	Carteiras com títulos da dívida pública interna.....	41
4.1.1	Metodologia .....	43
4.1.2	Análise dos Resultados .....	51
4.2	Carteiras com títulos da dívida pública externa.....	53
4.2.1	Metodologia .....	54
4.2.2	Análise dos resultados .....	62
5	Conclusão.....	66
6	Referências Bibliográficas .....	69
7	Anexos.....	72
	Anexo 1.....	72

## 1 Introdução

As várias crises econômicas que afetaram o Brasil, desde o plano Real, implicaram em expressivas desvalorizações da moeda (fevereiro de 1999) e/ou em aumentos significativos na taxa de curto prazo (Selic) para contenção da inflação. Como uma grande parcela da dívida é indexada a essa taxa, o efeito resultante é o aumento do serviço da dívida pública e, conseqüentemente, da relação desta com o PIB.

A percepção de uma volatilidade elevada da taxa de juros de curto prazo pelos diversos agentes do mercado financeiro induz a certa aversão ao risco de títulos prefixados, reduzindo sua demanda ou aumentando o prêmio de risco exigido.

Conseqüentemente, em momentos econômicos desfavoráveis, o Tesouro faz uso dos títulos indexados à taxa Selic para o gerenciamento do risco de rolagem da dívida, buscando um alongamento do prazo médio de seu vencimento e a redução do montante a vencer no curto prazo (Garcia, 2002). Dados divulgados pelo Banco Central do Brasil (BCB) demonstram que isto ocorreu ao final de 2002, quando a proporção da dívida pública interna indexada a esta taxa passou de 52,9%, em setembro, para 60,8%, em dezembro (BCB, 2006).

Segundo Haugen (2001, p.385-386), uma das medidas mais utilizadas para a avaliação da exposição de uma carteira de títulos prefixados ao risco de variação da taxa de juros é a sua duração (*duration*). Esta medida avalia a sensibilidade do valor do investimento a variações na taxa de juros e, para uma carteira de títulos prefixados sem cupom de juros, como é o caso das Letras do Tesouro Nacional (LTN), confunde-se com o cálculo do prazo médio de seus vencimentos. À medida

que este aumenta, maior se torna a exposição da carteira a variações nas taxas de juros.

Naturalmente, num ambiente de maior incerteza e aversão ao risco, investidores e agentes do mercado financeiro relutam em adquirir títulos prefixados de longo prazo. Conseqüentemente, a Secretaria do Tesouro Nacional (STN), responsável pela gestão da dívida pública mobiliária federal, pode enfrentar dificuldades para obter maior participação de prefixados em sua composição e, ao mesmo tempo, conseguir o alongamento de seu prazo médio.

Esta tarefa torna-se particularmente difícil devido à predominância de fundos de renda fixa de curto prazo no Brasil. Os gestores destes fundos, como resquício de um passado recente de hiperinflação, ainda procuram oferecer rentabilidade positiva a seus cotistas, com liquidez diária e variabilidade mínima no valor das cotas. Em função disso, há uma clara preferência por ativos mais líquidos e com menor exposição às variações de taxas de juros, resultando num balanceamento da carteira mais favorável à manutenção de aplicações *overnight* ou de curto prazo do que em posições mais arriscadas e mais longas no mercado de títulos (Garcia, 2002).

Porém, nos últimos 3 anos, com a melhora do quadro macroeconômico brasileiro, a emissão de títulos públicos federais prefixados de médio e longo prazo vem crescendo sistematicamente, tornando maior a participação destes títulos na dívida pública brasileira (STN, 2006a).

Este trabalho ressalta a importância da imunização do risco de taxa de juros para investimentos de renda fixa, apresentando várias estratégias que podem ser adotadas pelos gestores de investimentos. Além de abordar medidas clássicas de risco, tais como duração, convexidade e dispersão, abrange também medidas mais

recentemente usadas como o VaR (*value-at-risk*) e o CVaR (*conditional value-at-risk*). O objetivo é analisar de que forma essas medidas podem ser usadas como parâmetros indicadores da carteira ótima e como elas se relacionam entre si.

Com o intuito de avaliar as diferentes estratégias de imunização do risco de taxa de juros, realiza-se um estudo empírico de otimização de carteiras de títulos públicos prefixados, pioneiro no Brasil, semelhante ao estudo de Mato (2005) com títulos do Tesouro americano.

Primeiramente, analisa-se o mercado brasileiro de títulos prefixados da dívida pública mobiliária federal interna (DPMFi), que não oferece tanta diversidade e liquidez quanto o mercado americano. Neste mercado predominam as Letras do Tesouro Nacional (LTN), títulos sem cupom de juros, de curto prazo, em geral inferior a 2 anos, semelhantes às *Treasury Bills* americanas. Somente em dezembro de 2003, foram lançadas pela primeira vez as Notas do Tesouro Nacional – Série F (NTN-F), títulos prefixados de médio e longo prazo (atualmente, até 8 anos), com pagamentos de juros semestrais, assim como as *Treasury Notes* americanas.

Adicionalmente, é feita abordagem do mercado de títulos da dívida pública mobiliária federal externa (DPMFe), mas apenas dos novos títulos denominados em dólar americano, chamados genericamente de *Globals*.<sup>1</sup> Neste mercado, há maior diversidade de títulos, tanto no que concerne a prazos quanto a diferentes taxas de cupons de juros, o que propicia um estudo mais semelhante à realidade americana. Entretanto, a maioria das emissões ocorreu após o ano 2000, limitando o tamanho das séries históricas.

---

<sup>1</sup> Após a conclusão da renegociação da dívida externa brasileira, o governo brasileiro efetuou novas emissões soberanas em 1995, nos mercados japonês e alemão. Em 1997, iniciou a emissão de *Globals* no mercado americano. No ano 2000, emitiu o título de prazo mais longo (40 anos), o Global 2040. Em abril de 2006, o governo extinguiu o estoque de *Brady Bonds*, por meio de resgate antecipado.

Os resultados do estudo devem possibilitar um melhor entendimento das diferentes estratégias de imunização de carteiras de renda fixa e avaliação de sua eficácia. Neste sentido, este trabalho visa a contribuir para uma melhor administração do risco de mercado de títulos prefixados por parte de investidores e gestores de fundos de investimento, estimulando sua demanda.

O interesse pela abordagem de títulos prefixados explicase por três motivos: são o instrumento mais eficaz para a transmissão da política monetária; são fundamentais para a construção de uma estrutura a termo de taxa de juros, servindo de balizamento para os preços de outros ativos da economia; e principalmente porque apresentam vantagens para a gestão da dívida pública, com a redução da variabilidade dos fluxos de pagamentos.

Este primeiro capítulo descreve a relevância e o objetivo do trabalho. O segundo capítulo comenta fatos recentes relativos à gestão da dívida pública. No capítulo três são apresentados conceitos teóricos sobre risco de taxa de juros e imunização de carteiras de renda fixa, além de uma revisão de estudos mais recentes sobre o tema. No capítulo quatro, são descritos os testes empíricos realizados no mercado brasileiro e discutidos seus resultados. O quinto e último capítulo apresenta as conclusões e limitações do trabalho, bem como sugestões para pesquisas futuras.

## 2 Gestão da Dívida Pública Mobiliária Federal

A Secretaria do Tesouro Nacional (STN), em função dos recentes progressos na área macroeconômica, tem obtido sucesso na administração da dívida, tendo cumprido seus principais objetivos relacionados à melhoria da composição da dívida pública mobiliária federal interna (DPMFi), anunciados no Plano Anual de Financiamento de 2005 (STN, 2004). Como avanços significativos, podemos citar a redução expressiva da participação dos títulos com remuneração atrelada à variação cambial e a elevação da participação dos títulos prefixados. Entretanto, ainda restam alguns desafios importantes a serem enfrentados: maior redução da participação dos títulos indexados à taxa Selic e aumento do prazo médio da dívida.

Os dados da DPMFi, de dezembro de 2005, divulgados pelo BCB, mostram que as principais metas anunciadas naquele plano, relativas à composição da dívida foram alcançadas (BCB, 2006). O percentual de títulos prefixados passou de 20,09%, em dezembro de 2004, para 27,86%, em dezembro de 2005. Quanto à parcela da dívida indexada à taxa Selic, embora tenha retrocedido aos níveis verificados no ano de 2001, ainda é bastante elevada, representando mais da metade da DPMFi, ao final de 2005.

Entretanto, com relação ao aumento do prazo médio da dívida, a meta não foi alcançada. Em dezembro de 2004, o prazo médio era de 28,13 meses. A meta para 2005 era atingir um valor entre 28 e 34 meses, mas ao final do ano o prazo médio era de 27,37 meses. Esta diminuição está relacionada com o aumento no volume de títulos prefixados, emitidos com prazos inferiores ao prazo médio da dívida.

Em 2005, houve novos lançamentos de NTN-F com prazos de aproximadamente 5 e 7 anos. Em maio de 2006, ocorreu outra emissão de NTN-F,

com vencimento em janeiro de 2014. Estas iniciativas da STN demonstram sua estratégia voltada para a diversificação e alongamento dos títulos prefixados, visando ao crescimento e fortalecimento deste mercado.

Com relação à dívida externa soberana, desde 2005, as operações com títulos no mercado internacional deixaram de ser atribuição do Banco Central. Assim, a STN passou a administrar a dívida externa em conjunto com a interna, de forma integrada, visando à redução de seus custos e riscos. Sua atuação no mercado internacional atende às seguintes diretrizes: criação de preços de referência nos principais mercados de títulos emergentes; suavização da estrutura de maturação da DPMFe, por meio de novas emissões e operações de administração de passivo; e manutenção de relacionamento com a comunidade financeira internacional, visando à ampliação da base de investidores.<sup>2</sup>

Em 2005, foram captados US\$8 bilhões no mercado externo, sendo que muitas operações corresponderam à reabertura de títulos já emitidos anteriormente, a taxas inferiores às originais. Estas reaberturas visam a minimizar custos e dar maior liquidez a esses títulos, fortalecendo o mercado secundário.

O risco Brasil reduziu-se em 2005, tendo passado de 387 pontos, no início do ano para 306 pontos ao final, traduzindo uma percepção de melhora das condições macroeconômicas do país, especialmente de maior controle fiscal e monetário. Desta forma, também foi possível naquele ano, a emissão do primeiro título da dívida externa brasileira denominado em reais, o Global 2016, cuja captação correspondeu a US\$1,5 bilhões (STN, 2006b).

---

<sup>2</sup> A Resolução nº 20/2004 do Senado Federal estabelece o limite de US\$75 bilhões para a emissão de títulos soberanos brasileiros e autoriza operações de resgate antecipado, permuta de títulos e uso de derivativos, permitindo maior flexibilidade na administração da dívida do Tesouro Nacional.

O cenário macroeconômico favorável se manteve em 2006 e tudo indica que a STN cumprirá facilmente as metas estabelecidas em seu Plano Anual de Financiamento (PAF) de 2006 (STN, 2006a).

Em outubro de 2006, os dados da DPMFi, divulgados pelo BCB (2006), mostram que a dívida interna atingiu o valor de R\$1,06 trilhão. O percentual de títulos prefixados correspondeu a 32,85%, dentro do intervalo de 28% a 37%, estabelecido pelo PAF. Isto se constitui uma recuperação surpreendente, dado que este percentual atingiu um valor mínimo de 2,19%, em dezembro de 2002. A participação de títulos indexados à taxa Selic continuou majoritária, representando 41,2% do total. Para estes títulos, o plano estabeleceu a faixa de 39% a 48%. Com relação aos títulos atualizados por índice de preços, sua parcela representou 22,13%, dentro do intervalo programado, de 18% a 24%.

Caso prevaleça nos próximos anos um ambiente macroeconômico estável, de controle fiscal e monetário, predominará a tendência de queda gradual da taxa de juros. Portanto, os títulos prefixados e indexados pela inflação poderão se tornar mais atrativos para o mercado, o que facilitará o aumento de sua participação na composição da dívida pública interna, almejado pela STN.

### 3 Revisão de Literatura

Dentre os riscos financeiros a que um investidor está sujeito, o risco de mercado destaca-se por ser um dos mais prováveis e corriqueiros. Segundo Jorion (2003, p.14), o risco de mercado é oriundo de movimentos nos níveis ou nas volatilidades dos preços de mercado, podendo ser mensurado em termos absolutos, pela perda potencial de valores expressos em moeda ou em termos relativos, pela comparação com um índice de referência.

Em carteiras de renda fixa, o risco de mercado está associado a oscilações nas taxas de juros vigentes para diferentes prazos, ou seja, está relacionado com mudanças na estrutura temporal das taxas de juros.

#### 3.1 Estrutura Temporal de Taxas de Juros

Haugen (2001, p.347) define a estrutura temporal de taxas de juros (ETTJ) como sendo a relação entre o prazo de maturidade de um título e seu rendimento, ou seja, seu retorno até o vencimento (*yield to maturity*). Para ser válida, esta relação deve considerar títulos de mesmo risco de crédito e idêntico tratamento tributário. Nos Estados Unidos, a ETTJ é construída a partir dos títulos do Tesouro Americano (*U.S. Treasury Bonds*).

No Brasil, costuma-se adotar como ETTJ as taxas referenciais da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) de swap DI x Pré, obtidas a partir da interpolação dos preços de ajuste de contratos futuros de DI.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Contratos futuros de DI têm como objeto de negociação a taxa de juros efetiva até o vencimento do contrato, obtida pela acumulação das taxas médias diárias de depósitos interfinanceiros de um dia (Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2001).

Os preços de mercado de títulos prefixados refletem a ETTJ vigente, ou seja, a taxa de juros usada para o desconto dos fluxos de pagamento do título prefixado, que representa o rendimento exigido pelo investidor, deve ser semelhante à taxa média em vigor no mercado de futuros de taxas de juros.

Berger (2002) demonstra ser viável construir um modelo de previsão da taxa exigida na compra de uma LTN de 6 meses, com base nas taxas efetivas vigentes de DI futuro, com prazos de 1 mês e 3 meses. Seu trabalho empírico indica haver uma relação direta entre as taxas de juros dos títulos prefixados de 6 meses e as taxas de juros de curto prazo, o que de certa forma confirma a teoria das expectativas para a ETTJ, ou seja, de que a taxa de juros longa é formada pela média geométrica das taxas de juros curtas esperadas para o futuro.

O Gráfico 3.1 exibe a curva de rendimento formada a partir da ETTJ, em 01/06/2005. Os pontos destacados representam a relação entre o prazo médio dos títulos prefixados (LTN e NTN-F) e seu rendimento, calculado segundo preços de mercado verificados naquela data. Fica evidente a aderência do rendimento dos títulos às taxas de juros praticadas no mercado de futuros.

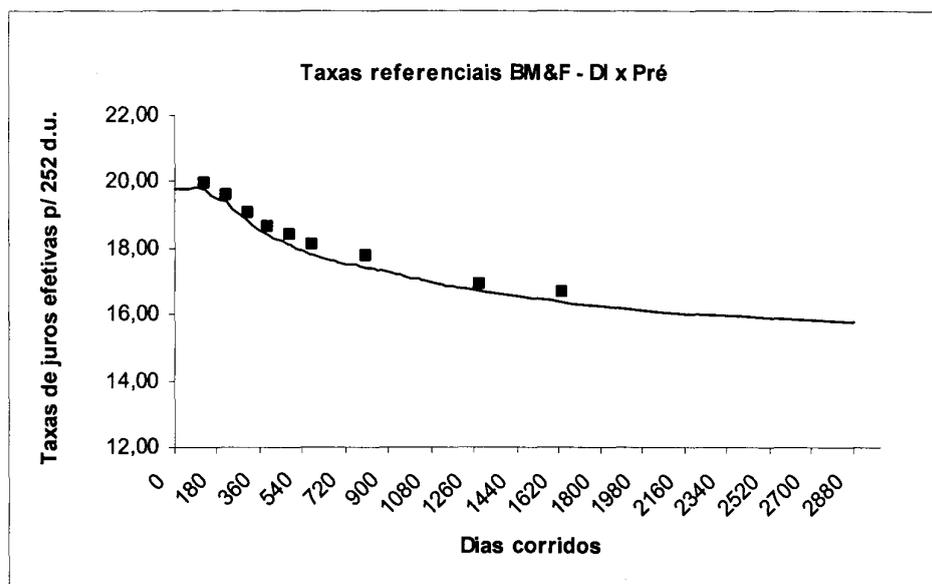


Gráfico 3.1. Estrutura temporal das taxas de juros vigente em 01/06/2005.

O mercado financeiro nacional, por convenção, representa a taxa de juros na forma de taxa efetiva anual, com base em um ano de 252 dias úteis.<sup>4</sup> Sendo assim, o preço de um título prefixado, no Brasil, pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$P = \sum_{i=1}^n \left( \frac{F_i}{(1 + y_i)^{t_i/252}} \right) \quad (3.1)$$

onde

$F_i$  representa o  $i$ -ésimo fluxo de pagamento do título;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamento do título;

$t_i$  é o número de dias úteis até a data do pagamento do  $i$ -ésimo fluxo;

$y_i$  é a taxa de juros efetiva anual correspondente a um prazo de  $t_i$  dias úteis.

<sup>4</sup> A taxa média de operações de financiamento por um dia (Selic), divulgada diariamente pelo Banco Central do Brasil, é expressa desta forma, assim como a taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia (DI), divulgada pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (Cetip) e usada pela BM&F como referência para os contratos futuros de DI.

### 3.2 Duração

A variação no preço dos títulos prefixados decorre da simples passagem do tempo ou de mudanças na ETTJ. A duração (*duration*) de um título é uma medida tradicional do risco de taxas de juros, pois mede a sensibilidade do preço a pequenas mudanças no nível das taxas de juros.

Segundo Hull (1998, p.109), a duração de um título representa o tempo médio em que seu detentor recebe seus pagamentos. Em outras palavras, é o prazo médio para recuperar o investimento realizado.

A duração de Macaulay (1938) considera que o nível da taxa de juros é constante, para qualquer prazo, ou seja, assume que a curva de rendimento é plana. Portanto, considerando o rendimento de um título prefixado como uma taxa de juros efetiva anual  $y$ , seu preço  $P$  corresponde ao somatório do valor presente de seus fluxos de pagamentos e pode ser representado por:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+y)^{t_i}} \quad (3.2)$$

onde

$F_i$  representa o  $i$ -ésimo fluxo de pagamento do título;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamento do título;

$t_i$  é o tempo, em anos até a data do pagamento do  $i$ -ésimo fluxo.

Neste caso, a duração  $D$  de um título com pagamentos periódicos será calculada pela seguinte fórmula:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ t_i \times \frac{F_i}{(1+y)^{t_i}} \right]}{P} \quad (3.3)$$

onde

$P$  é o preço atual do título.

A duração, portanto, é a média ponderada do tempo em que os pagamentos são recebidos, sendo que os pesos correspondem à proporção do valor presente dos pagamentos em relação ao valor presente total do título.

Hull (1998, p.109-110) também observa que a derivada parcial do preço  $P$  em relação ao rendimento relaciona-se com a duração.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - \sum_{i=1}^n \left[ t_i \times \frac{F_i}{(1+y)^{t_i+1}} \right] \quad (3.4)$$

A partir da equação (3.3), pode-se reescrever a equação (3.4) como:

$$D = - \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) \times (1+y) \quad (3.5)$$

Após efetuar uma aproximação da mudança infinitesimal  $\frac{\partial P}{\partial y}$  pela variação  $\frac{\Delta P}{\Delta y}$  e um rearranjo na equação (3.5), obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-D \times \Delta y}{(1+y)} \quad (3.6)$$

Desta forma, considerando pequenas variações nas taxas de juros e, conseqüentemente, na curva de rendimento, os preços dos títulos sofrerão variação proporcional à sua duração. Ou seja, a mudança percentual no preço do título pode ser calculada em função de sua duração e da variação ocorrida na taxa de juros. Por este motivo, Haugen (2001, p.396-397) afirma que podemos considerar a duração como uma medida aproximada da elasticidade do preço do título a variações nas taxas de juros. Desta característica decorre a importância da duração para a imunização do risco de taxas de juros.

Supondo a existência de um passivo de renda fixa a ser pago num prazo  $t$ , em anos, a imunização baseada na duração de Macaulay consiste em investir num título de mesmo valor presente, cuja duração seja igual a  $t$ , idêntica à do passivo. Desta forma, se houver uma mudança no nível da taxa de juros, o efeito no preço do

ativo (lucro ou prejuízo) será compensado por um efeito contrário no valor presente do passivo, tornando possível efetuar o pagamento do mesmo com o dinheiro obtido com a venda do título, a preço de mercado, sem risco de perdas.

A duração de uma carteira de ativos pode ser calculada considerando todos os fluxos de pagamento dos títulos que a compõem. Primeiramente, deve-se calcular o rendimento da carteira, ou seja, a taxa de juros efetiva que iguala o valor presente de seus fluxos de caixa ao seu valor de mercado. Em seguida, computa-se a duração como a média ponderada do tempo em que os pagamentos são recebidos, sendo que os pesos correspondem à proporção do valor presente desses pagamentos em relação ao valor total da carteira (Haugen, 2001, p.403-405).

Portanto, de maneira análoga, é possível imunizar uma carteira de passivos de renda fixa, segundo sua duração, investindo numa carteira de ativos de renda fixa de mesma duração. Assim, variações pequenas nas taxas de juros provocam lucro (ou perda) com ativos que são compensados por perda (ou lucro) com passivos. Entretanto, esta imunização só é válida para pequenas variações no nível da taxa de juros, supondo uma estrutura temporal plana (Hull, 1996, p.137).

A partir da constatação de que as taxas de juros variam conforme o prazo, a duração de Fisher-Weil (1971) permite considerar mudanças nas taxas futuras de juros. Desta forma, considerando  $y_i$  como a taxa efetiva anual à vista (*spot*), para o prazo  $t_i$ , a fórmula da duração de Fisher-Weil é:

$$D_{FW} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ t_i \times \frac{F_i}{(1+y_i)^{t_i}} \right]}{P} \quad (3.7)$$

onde

$F_i$  representa o fluxo de pagamento do título no  $i$ -ésimo ano;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamentos anuais;

$t_i$  é o tempo, em anos até a data do pagamento do  $i$ -ésimo fluxo.

$P$  é o preço atual do título, calculado segundo a fórmula:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + y_i)^{t_i}} \quad (3.8)$$

Portanto, quando se usa a duração de Fisher-Weil para imunizar uma carteira, é necessário considerar as taxas de juros vigentes para os prazos correspondentes a cada fluxo de pagamento da carteira. Neste caso, a imunização é válida para pequenos choques na taxa de juros, que afetam igualmente todas as taxas, independentemente do prazo, ou seja, supõe-se que a curva de rendimento apresenta movimentos paralelos.

### 3.3 Convexidade

Hull (1998, p.114) adverte que quando ocorrem mudanças moderadas ou grandes nas taxas de juros, torna-se importante considerar, além da duração, um fator conhecido como convexidade.

A fórmula da convexidade, análoga à duração de Macaulay, ou seja, considerando  $y$  como a taxa de juros efetiva anual e constante, é:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ t_i \times (t_i + 1) \times \frac{F_i}{(1 + y)^{t_i + 2}} \right]}{P} \quad (3.9)$$

onde

$F_i$  representa o fluxo de pagamento do título no  $i$ -ésimo ano;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamentos anuais;

$t_i$  é o tempo, em anos até a data do pagamento do fluxo;

$P$  é o preço atual do título.

A convexidade relaciona-se com a segunda derivada parcial do preço  $P$  em relação ao rendimento  $y$ , expressa pela seguinte fórmula:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n \left[ t_i \times (t_i + 1) \times \frac{F_i}{(1+y)^{t_i+2}} \right] \quad (3.10)$$

A partir das equações (3.9) e (3.10), verifica-se que:

$$C = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \quad (3.11)$$

Enquanto a duração está relacionada com a inclinação da curva determinada pela função preço *versus* rendimento de um título, a convexidade mede sua curvatura.

Kahn & Lochoff (1990) ressaltam que, quando a volatilidade das taxas de juros aumenta, faz -se necessário usar a convexidade, além da duração, para corrigir a estimativa da alteração de valor de uma carteira, em função de mudanças nas taxas de juros.

Pela expansão da série de Taylor, até os termos de segunda ordem, podemos estimar o novo preço  $P_1$  pela seguinte fórmula:

$$P_1 = P + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \Delta y^2 \quad (3.12)$$

onde

$P$  representa o preço inicial;

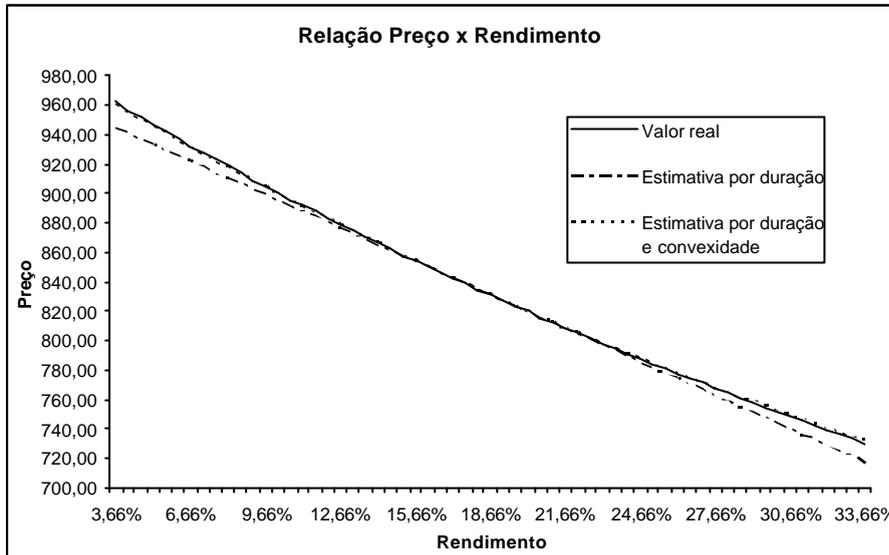
$\Delta y$  corresponde à variação na taxa de juros.

Substituindo as igualdades (3.5) e (3.11) na equação (3.12), estima-se o novo preço, a partir da duração e da convexidade, pela seguinte equação:

$$P_1 = P \times \left[ 1 - \frac{D \times \Delta y}{(1+y)} + \frac{1}{2} C \times \Delta y^2 \right] \quad (3.13)$$

O Gráfico 3.2 mostra a função preço *versus* rendimento do título para uma LTN com vencimento em 03/07/2006, cujo preço em 01/06/2005 era R\$830,81. A reta tangente representa a estimativa do preço baseada apenas na duração.

Também é mostrada a correção da estimativa do valor, pelo acréscimo da convexidade. Fica evidente que ela é significativa, principalmente para grandes variações na taxa de juros.



**Gráfico 3.2. Relação Preço x Rendimento, em 01/06/2005, de uma LTN com vencimento em 03/07/2005. Além da função preço, são exibidas as estimativas do preço, baseadas na duração e na duração mais convexidade.**

Entretanto, Livingston & Zhou (2005), argumentam que a estimativa tradicional, baseada na duração mais convexidade, tende a superestimar o valor dos ativos após subidas significativas nas taxas de juros. Propõem uma nova medida, chamada duração exponencial, baseada no logaritmo do preço, alegando que este é mais adequado para avaliar mudanças percentuais em preços em função de variações nas taxas de juros.

Derivando a função logarítmica do preço, em relação à taxa de juros, obtém-se a equação seguinte:

$$\frac{\partial(\ln P)}{\partial y} = \left(\frac{1}{P}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \quad (3.15)$$

Supondo que a taxa de juros  $y$  tem capitalização contínua, o termo  $(1+y)$  da equação (3.5) desaparece da fórmula da duração. Substituindo a fórmula resultante na equação acima e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\Delta(\ln P) = -D \times \Delta y \quad (3.16)$$

Da equação (3.16), deduz-se que:

$$\ln P_1 - \ln P_0 = \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) = -D \times \Delta y \quad (3.17)$$

Portanto, o novo preço ( $P_1$ ) pode ser estimado por:

$$P_1 = P_0 \times e^{-D \times \Delta y} \quad (3.18)$$

Conseqüentemente, a variação percentual no preço será dada por:

$$\frac{\Delta P}{P} = (e^{-D \times \Delta y} - 1) \quad (3.19)$$

Os autores demonstram que a duração exponencial provê uma estimativa bastante precisa para o valor do ativo e ligeiramente inferior ao valor real, o que é mais adequado para investidores avessos ao risco.

### 3.4 Medidas de Dispersão

A medida de imunização de risco  $M^2$  (dispersão quadrática) foi introduzida por Fong e Vasicek (1984) para superar a limitação da teoria tradicional de imunização formalizada por Fischer e Weil (1971).

Os autores demonstraram que a variação percentual no preço de uma carteira imunizada pela duração, ou seja, cuja duração é igual ao horizonte de investimento, é limitada inferiormente pela medida quadrática de dispersão ( $M^2$ ) dos fluxos de caixa em torno do horizonte. Para tanto, considera-se que a derivada das taxas de

juros instantâneas futuras, em relação ao prazo, tem um limite superior, denotado por  $K$ .

Seu teorema é expresso pela seguinte inequação:

$$\frac{\Delta P}{P} \geq -\frac{1}{2} K \times M^2 \quad (3.20)$$

onde

$P$  representa o preço projetado para o final do horizonte de investimento;

$\Delta P$  representa a variação ocorrida no preço ao final do horizonte de investimento;

$K$  representa o limite superior da mudança na inclinação da ETTJ, ou seja, a inflexão máxima na curva de rendimento;

$M^2$  é a dispersão quadrática, podendo ser expressa por:

$$M^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ (t_i - H)^2 \times \frac{F_i}{(1 + y_i)^{t_i}} \right]}{P} \quad (3.21)$$

onde

$F_i$  representa o  $i$ -ésimo fluxo de pagamento do título;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamentos;

$t_i$  é o prazo, em anos, até a data do pagamento do  $i$ -ésimo fluxo;

$H$  representa o horizonte de investimento, em anos;

$y_i$  é a taxa efetiva anual à vista para o prazo  $t_i$ ;

$P$  é o preço atual do título.

Como não é possível antecipar as mudanças na ETTJ e, conseqüentemente o valor de  $K$ , resta ao investidor averiguar o  $M^2$  de possíveis carteiras imunizadas pela duração, buscando reduzir sua variação de preço, determinada pela expressão (3.20).

A dispersão  $M^2$  pode ser considerada uma medida de risco para uma carteira imunizada, tendo em vista que determina sua exposição a mudanças arbitrárias nas taxas de juros. Desta forma, minimizar o  $M^2$  significa minimizar o risco de imunização.

Mais recentemente, uma nova medida de risco de imunização foi sugerida por Balbás e Ibáñez (1998). Esta medida é a dispersão linear ( $\tilde{N}$ ) dos fluxos de caixa em torno do horizonte  $H$  de investimento e pode ser expressa por:

$$\tilde{N} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ |t_i - H| \times \frac{F_i}{(1 + y_i)^{t_i}} \right]}{P} \quad (3.22)$$

A dispersão linear foi desenvolvida considerando o conjunto de choques em que a diferença entre quaisquer dois choques nas taxas de juros instantâneas futuras obedece a um limite superior. Assim, minimizar o  $\tilde{N}$  também significa reduzir o risco de imunização, ou seja, o efeito do pior choque é minimizado (Balbás et al., 2002).

### 3.5 Imunização do Risco de Taxas de Juros

Mato (2005) afirma que as medidas clássicas de duração e convexidade, relacionadas ao risco de taxa de juros, sempre foram muito utilizadas no gerenciamento de carteiras de renda fixa. A imunização de carteiras com base nestas medidas baseia-se em obter carteiras com duração idêntica ao prazo do investimento. Dentre as possíveis carteiras de mesma duração, deve-se escolher a que possui maior convexidade, pois esta carteira comporta-se melhor quando ocorrem mudanças mais significativas nas taxas de juros, maximizando retornos e minimizando perdas. Entretanto, a utilização destas medidas para a imunização de carteiras apresenta deficiências, uma vez que se assume o pressuposto irreal de

que a estrutura a termo da taxa de juros movimenta-se sempre paralelamente, em função de mudanças nas taxas de juros correntes.

Assim, medidas de dispersão foram propostas como alternativas para medir a sensibilidade de uma carteira a mudanças nas taxas de juros. A dispersão procura medir a variância dos fluxos de caixa da carteira em torno do horizonte de investimento. Para a redução do risco de taxa de juros, deve-se escolher, dentre as carteiras com duração igual ao horizonte de investimento, aquela que minimiza a dispersão, seja ela quadrática ( $M^2$ ) ou linear ( $\tilde{N}$ ).

Kahn e Lochoff (1990) estudaram a convexidade, buscando verificar sua possível relação com retornos extraordinários. Observaram que, na teoria, quanto maior a convexidade (curvatura) de um título ou carteira, melhor seu desempenho após mudanças paralelas nas taxas de juros. Sendo assim, carteiras de alta convexidade seriam sempre melhores do que carteiras de baixa convexidade de mesma duração e rendimento, sofrendo menores perdas de valor quando as taxas de juros sobem e maiores ganhos quando elas caem.

Desenvolveram estudo empírico, utilizando a técnica de análise de fatores de retornos (*return attribution analysis*), com dados do mercado de títulos do governo dos EUA. Utilizaram séries de retornos mensais de *Treasury bonds*, *notes* e *bills*, no período de janeiro de 1980 a outubro de 1986.

Para analisar a hipótese de que a convexidade pode gerar retornos em excesso, fizeram uma análise dos retornos de títulos baseada em três fatores: rendimento (*yield*), duração e convexidade. Assim, o retorno do fator convexidade correspondia ao retorno da carteira cuja duração e rendimento eram iguais às da carteira de mercado, mas cuja convexidade estava um desvio-padrão acima da

convexidade do mercado. Esta carteira deveria apresentar retorno superior ao retorno da carteira de mercado.

Fizeram regressões para estimar os retornos dos fatores em relação aos retornos do mercado e seus resultados indicaram que a convexidade não gerava retornos em excesso no mercado de títulos norte-americanos.

Os resultados indicaram que os movimentos não paralelos na ETTJ eram suficientemente significativos para invalidar o uso da convexidade como instrumento para a escolha de carteiras.

Lacey e Nawalkha (1993) também investigaram a hipótese de que alta convexidade poderia gerar retornos maiores. Os autores acreditavam que isto era incompatível com o equilíbrio do mercado de títulos, pois possibilitaria ganhos de arbitragem por meio da compra de uma carteira do tipo *barbell* (alta convexidade) e venda a descoberto de uma carteira *bullet* (baixa convexidade) ou de uma carteira com convexidade igual a zero. Num mercado em equilíbrio, não deveria ser possível auferir ganhos de arbitragem e, portanto, a convexidade deveria estar precificada.

Os autores realizaram um teste empírico para verificar a relação entre a convexidade de títulos e retornos *ex ante* dos mesmos. Utilizaram preços de *U.S. Treasury notes*, no período de janeiro de 1976 até novembro de 1987. O período de 11 anos foi dividido em 71 sub-períodos de 2 meses. Em cada sub-período, consideraram todos os títulos disponíveis, exceto aqueles em que ocorreria pagamento de cupom no período. Assim, não fizeram rebalanceamento durante o horizonte de investimento, que foi fixado em 2 meses.

Efetuaram regressões considerando o período inteiro (11 anos) e outros 7 períodos escolhidos, de 5 anos cada. Na regressão, a variável dependente era o excesso de retorno, ou seja, a diferença entre o retorno do título em um horizonte de

2 meses e o retorno de um título sem cupom, com a mesma maturidade; e as variáveis explicativas eram a duração e a convexidade. O coeficiente associado à convexidade mostrou-se negativo em 7 dos 8 subperíodos analisados, entretanto isto teve significância em apenas 2 períodos. Portanto, a hipótese de que alta convexidade gera retornos mais altos foi rejeitada.

O resultado do estudo foi compatível com críticas anteriores ao modelo de duração tradicional e forneceu alguma evidência de que a convexidade seria precificada pelo mercado.

Os autores também investigaram a relação entre a convexidade e o risco de imunização, que é diretamente proporcional à dispersão  $M^2$ , em carteiras imunizadas pela duração.

Foram construídas 11 carteiras, com máxima diversificação, em cada subperíodo, com diferentes níveis de convexidade (variando de -50 a +50) e duração idêntica ao horizonte de 2 meses. Em seguida, foram calculados os desvios-padrão dos retornos em excesso (diferença entre o retorno da carteira e o retorno de um título sem cupom). As carteiras de maior convexidade (positiva ou negativa) apresentaram maiores desvios-padrão do que as de menor convexidade. Os resultados indicaram que havia uma relação direta entre a magnitude da convexidade e o risco de imunização, reforçando a idéia de que a convexidade não seria um bom critério para escolha de carteiras.

Bierwag et al. (1993) investigaram a medida de dispersão  $M^2$ , com o intuito de verificar a real eficácia de seu uso para imunização do risco de taxa de juros.

Primeiramente, demonstraram que a estratégia de minimizar o  $M^2$  em carteiras imunizadas pela duração equivale à estratégia de imunização baseada no processo de dois fatores de Fisher-Weil (1971).

Em seu artigo, expressam a dispersão  $M^2$  e a duração  $D$  de uma carteira imunizada pelas seguintes equações:

$$M^2 = \sum_{t=1}^n [(t-H)^2 \times w_t] \quad (3.23)$$

$$D = \sum_{t=1}^n t \times w_t = H \quad (3.24)$$

onde

$w_t$  representa o valor presente do fluxo de caixa a ser recebido em  $t$ , como percentual do valor inicial da carteira.

Definem a duração de segunda ordem do processo de Fisher-Weil como:

$$D_2 = \sum_{t=1}^n t^2 \times w_t \quad (3.25)$$

Expandindo a equação (3.23), verifica-se que:

$$M^2 = \sum_{t=1}^n t^2 \times w_t - 2H \times \sum_{t=1}^n t \times w_t + H^2 \times \sum_{t=1}^n w_t \quad (3.26)$$

Usando as igualdades (3.24) e (3.25) na equação acima:

$$M^2 = D_2 - 2H^2 + H^2 \times \sum_{t=1}^n w_t \quad (3.27)$$

Como o somatório dos percentuais  $w_t$  é igual a 1:

$$M^2 = D_2 - H^2 \quad (3.28)$$

Ou seja, concluem que minimizar o  $M^2$ , tornando-o igual a zero, em carteiras cuja duração é igual ao horizonte ( $D=H$ ), é o mesmo que usar a estratégia de dois fatores de Fisher-Weil, de tal forma que a duração de segunda ordem ( $D_2$ ) seja igual ao quadrado do horizonte de investimento ( $H$ ).

Ressalvam, entretanto, que se a ETTJ não for governada por este processo estocástico específico, minimizar  $M^2$  não significa ter a melhor carteira imunizada. Uma estratégia alternativa, que consiste em incluir na carteira um título cuja

maturidade coincide com o horizonte (*maturity-matching*), pode ter melhor desempenho do que uma carteira com  $M^2$  igual a zero.

Em seguida, mostram que uma carteira *bullet* com dois títulos será a carteira cujo  $M^2$  é mínimo se e somente se, para o conjunto de títulos considerados, a função  $M^2$  é convexa em relação à duração  $D$ , ou seja, sua segunda derivada é positiva ( $\partial^2 M^2 / \partial D^2 > 0$ ).<sup>5</sup>

Realizaram um estudo empírico para testar a hipótese de que a ETTJ segue um processo estocástico de Fisher-Weil de 2 fatores e que, portanto, o  $M^2$  mínimo garantiria a melhor imunização. Além disso, para testar a convexidade de  $M^2$ , verificando se a carteira *bullet* apresenta o  $M^2$  mínimo e a carteira *barbell*, o  $M^2$  máximo.

Utilizaram preços médios mensais de títulos do governo canadense, informados por *dealers* do mercado, divulgados pelo *Bank of Canada*, no período de janeiro de 1963 até setembro de 1986.

Testaram as 5 estratégias seguintes:

- carteira *bullet*: 2 títulos com duração mais próxima do horizonte;
- carteira *barbell*: 2 títulos com a menor e a maior duração possíveis;
- carteira *maturity barbell*: 2 títulos, sendo que um tem a mesma maturidade que o horizonte e o outro tem 20 anos de maturidade;
- carteira *maturity bullet*: 2 títulos, sendo que um tem a mesma maturidade que o horizonte e o outro tem a duração um pouco maior e bem próxima do horizonte;
- carteira com mínimo  $M^2$ : 2 títulos de forma a minimizar o  $M^2$  da carteira.

---

<sup>5</sup> Bierwag et al. (1993) estudaram carteiras de estruturas específicas denominadas *bullet* e *barbell*. Um *bullet portfolio* consiste em uma carteira em que as *durations* dos títulos estão concentradas em torno de um ponto e um *barbell portfolio* é uma carteira em que as *durations* dos títulos estão concentradas em dois extremos (a mais curta e a mais longa).

Em todas as estratégias, as carteiras são imunizadas por duração, ou seja, a duração da carteira é idêntica ao horizonte de investimento que, em seu estudo, foi fixado em 5 anos. Ocorrem rebalanceamentos duas vezes ao ano, de forma que a duração da carteira seja igual ao período remanescente do horizonte de investimento. Consideram que todos os fluxos de caixa são reinvestidos nos mesmos títulos da carteira.

Calcularam o valor de cada carteira ao final de 5 anos para obter o retorno real (efetivo) como a taxa interna de retorno (TIR) do investimento, a partir de seu valor inicial. O retorno alvo (esperado) do investimento foi calculado com base no retorno esperado para um título sem cupom de 5 anos, no início do período. Para medir o desempenho de cada estratégia em cada período, usaram o quadrado da diferença entre o retorno esperado e o retorno efetivo.

Para aumentar o número de observações, reiniciaram cada estratégia todo mês, porém devido à falta de alguns dados, o número de períodos (com superposição) considerados variou entre 181 e 187. Também foi considerada uma amostra reduzida de 24 períodos de 5 anos, evitando superposição.

A condição de convexidade de  $M^P$  não se verificou na prática, pois nem sempre a carteira *bullet* foi a de menor  $M^2$ . A carteira de  $M^2$  mínimo teve desempenho um pouco melhor do que a *bullet*, mas as carteiras *maturity barbell* e *maturity bullet* tiveram os melhores desempenhos, embora apresentassem maior  $M^2$ .

Argumentaram que este resultado era coincidente com outras pesquisas que indicaram que a inclusão de um título com maturidade igual ao horizonte melhorava a imunização. Segundo sua teoria, isto sugere que o processo que determina os preços dos títulos não é consistente com o processo de 2 fatores de Fisher-Weil.

Bierwag et al. (1993) concluíram que, ao contrário do que afirmaram Fong e Vasicek (1984), a estratégia de minimizar  $M^n$  não é independente do processo estocástico que determina as taxas de juros, sendo consistente apenas com o processo de 2 fatores de Fisher-Weil. Desta forma, caso o processo estocástico seja diferente, esta não será a melhor estratégia de imunização. Ela apresentou pior desempenho do que a estratégia de inclusão de um título de mesma maturidade que o horizonte, indicando que esta última ajuda a controlar o risco do processo estocástico.

Balbás et al. (2002) realizaram um estudo empírico, com títulos de renda fixa do mercado espanhol, para testar o uso das medidas de dispersão como estratégia de imunização do risco de taxas de juros.

Utilizaram dados mensais, divulgados pelo *Banco de España*, de preços de títulos cujas maturidades variavam desde 1, 2 e 6 meses até 15 anos. Neste estudo, foram conduzidos 12 testes com períodos escolhidos entre 16 de abril de 1993 e 18 de dezembro de 1995, para um horizonte de investimento de 3 anos. Foram escolhidos os 12 períodos para os quais havia um título de maturidade igual ao horizonte (*maturity-matching* ou *m-m*). Todos os títulos tinham pagamento anual de cupom de juros e cada carteira era composta por dois títulos. Cada carteira foi rebalanceada sempre que houve pagamento de cupom, ou seja, aproximadamente duas vezes ao ano.

Foram comparadas 3 estratégias. A primeira consistia em minimizar as medidas de dispersão  $M^n$ , variando o expoente  $n$  de 0,5 até 2,5, em intervalos de 0,5, para carteiras imunizadas por duração.<sup>6</sup> A segunda consistia em minimizar as mesmas medidas de dispersão em carteiras que incluíam um título *m-m*. A terceira

---

<sup>6</sup> A dispersão linear ( $\tilde{N}$ ) é a medida de dispersão  $M^n$ , onde  $n$  é igual a 1, ou seja,  $M^1$ .

testava o desempenho de uma carteira *bullet*, uma carteira *m-m bullet* e uma carteira *m-m barbell*. Estas são as mesmas carteiras que foram estudadas por Bierwag et al. (1993).

Consideraram o erro médio quadrático (*Mean Square Error ou MSE*) como medida de desempenho das carteiras.<sup>7</sup>

Sua conclusão final é que carteiras selecionadas segundo a estratégia de minimizar a dispersão linear ( $\tilde{N}$ ) geralmente incluem um título de mesma maturidade que o horizonte de investimento (*m-m*) e têm melhor desempenho do que aquelas que minimizam a dispersão quadrática ( $\tilde{M}$ ). Além disso, carteiras com restrição de maturidade (*m-m barbell* e *m-m bullet*), como sugeridas por Bierwag et al. (1993) também têm bom desempenho, confirmando estudos anteriores realizados nos mercados americano e canadense.

Soto (2004) comparou o desempenho de várias estratégias alternativas de imunização de carteiras, baseadas em modelos de duração, de fator único ou de múltiplos fatores, utilizando títulos públicos da Espanha.

Segundo a autora, há vários diferentes modelos baseados em duração (*duration models*) para medir e gerenciar o risco de taxa de juros em carteiras de renda fixa. Todos os modelos tentam medir a sensibilidade dos preços dos títulos a mudanças nas taxas de juros, mas diferem na pressuposição sobre o comportamento da estrutura a termo de taxas de juros (ETTJ).

O objetivo de seu estudo foi verificar se havia diferenças significativas entre os diversos modelos que são usualmente empregados pelos gestores de risco e se elas eram relativas ao modelo escolhido ou ao número de fatores de risco

---

<sup>7</sup> Média dos quadrados das diferenças entre o retorno real e o esperado dos 12 períodos analisados.

considerados. Os modelos analisados cobrem praticamente todos os aspectos da gestão de risco de taxa de juros.

Foram utilizados os preços médios diários dos títulos públicos negociados no mercado espanhol e as taxas de juros médias de operações compromissadas, divulgados pelo *Banco de España*, durante o período de janeiro de 1992 até dezembro de 1999. A ETTJ da Espanha mudou drasticamente no período analisado, tornando o estudo mais interessante para medir o desempenho de estratégias de imunização, em um contexto de alta volatilidade.

A partir dos rendimentos de títulos sem cupom (*zero-coupon bond yields*) foram obtidas séries de metas de retornos (*target returns*). Foram considerados horizontes de investimento de 1, 2 e 3 anos e permitidas vendas a descoberto (*short sales*), caso contrário seria inviável a análise de alguns modelos e o número de carteiras seria muito reduzido.

Para a formação das carteiras, foram escolhidos os títulos de maior liquidez. Devido à existência de poucos títulos de curto prazo, seria difícil formar carteiras de duração curta, igual ao horizonte de investimento. Assim, foi incluído em cada carteira um *maturity bond*, ou seja, um título de maturidade um pouco maior (no máximo um mês de diferença) do que o horizonte. De acordo com vários autores, a inclusão de um *maturity bond* melhora a imunização, compensando uma possível menor liquidez. Para assegurar a imunização em múltiplos períodos, as carteiras são rebalanceadas a cada trimestre e sempre que um pagamento de cupom ocorre.

O estudo comparou o desempenho de uma série de estratégias de imunização de carteiras: modelos simples e independentes de duração, como o que consiste em escolher o título de menor dispersão linear ( $\tilde{N}$ ); modelos simples baseados em duração, como aqueles que recomendam carteiras *m-m bullet* e *m-m*

*barbell*; e modelos mais sofisticados baseados em duração como os modelos polinomiais (de 1 até 5 fatores) e exponenciais (de 1 até 4 fatores).

Também testou 2 tipos de modelos não paramétricos, cujos fatores de risco foram determinados por estimação. O primeiro tipo utilizou como fatores as taxas de juros de curto prazo (3 meses) e médio prazo (5 anos). O segundo obteve 3 fatores aplicando a técnica de análise de componentes principais.

Esses modelos foram estimados de duas formas. A primeira consistiu em estimar os parâmetros e variáveis com base em todo o período de 1992 a 1999. A outra, mais realista, consistiu em imunizar um trimestre com base nas estimativas calculadas sobre o ano precedente. Segundo a autora, estas escolhas (amostra de um ano e frequência trimestral) coincidem com as recomendações mínimas do *Bank for International Settlements* (BIS), para cômputo do risco de mercado.

A medida usada para avaliar o desempenho de cada carteira foi a diferença absoluta entre o retorno efetivo anualizado e a taxa de juros de um título sem cupom, vigente na data inicial em que a carteira foi construída. Esta medida penaliza igualmente variações positivas e negativas entre o retorno alvo e o retorno efetivo.

Verificou-se que em estratégias de múltiplos fatores, à medida que se aumenta o número de fatores considerados, até um máximo de 3 fatores, o desempenho da imunização melhora.

A estratégia *m-m bullet* teve o melhor desempenho dentre todas, em todos os horizontes considerados. As estratégias de menor dispersão linear ( $\tilde{N}$ ) e *m-m barbell* também tiveram bom desempenho, assim como as estratégias em que foram considerados 3 fatores.

Os resultados mostraram que: a imunização tradicional, que só considera a duração como fator de risco, é facilmente superada por estratégias relativamente

simples, em que mais fatores são considerados ou em que se escolhem carteiras de estrutura específica como a *m-m bullet*, o número de fatores considerados tem maior influência sobre o resultado do que o modelo escolhido e; estratégias de imunização com base em três fatores, como nível, inclinação e curvatura da ETTJ, oferecem o melhor desempenho.

Mato (2005) argumenta que as medidas clássicas de risco (duração, convexidade e dispersão) não consideram o comportamento real das taxas de juros, verificado em séries históricas. Medidas mais modernas como o VaR (*value-at-risk*), ao trabalhar com distribuições de retornos de séries históricas ou obtidas por simulação, tentam superar esta limitação.

Segundo Jorion (2005), o VaR representa o valor absoluto (em moeda) ou relativo (em percentual) da pior perda que se pode obter, sob condições normais de mercado, num dado intervalo de tempo, com um certo grau de confiança ( $\alpha$ ). A carteira ótima, em função desta medida, é aquela cujo VaR é mínimo, com o grau de confiança desejado.<sup>8</sup>

Entretanto, embora bastante popular e largamente utilizado por órgãos reguladores, o VaR também tem sido muito criticado por assumir que a distribuição dos retornos é normal. Sabe-se que esta suposição não é verdadeira e que a distribuição dos retornos pode ser assimétrica e possuir “caudas gordas”. Além disso, o VaR não é uma medida de risco coerente, conforme demonstrado por Artzner et al. (apud Mato, 2005).

Para sanar estas deficiências, uma nova medida chamada CVaR (*conditional value-at-risk*), foi proposta por Uryasev e Rockafellar (2002). Esta medida representa o valor esperado da perda quando o VaR é excedido, ou seja, baseia-se nos valores

<sup>8</sup> O Banco Central do Brasil adota o VaR para a apuração do patrimônio líquido exigido para cobertura do risco decorrente de operações remuneradas por taxas prefixadas de juros (BCB, 2000).

extremos da distribuição, que ocorrem com probabilidade inferior a  $(1-\alpha)$ . A otimização, segundo o CVaR, recomenda a escolha da carteira com o menor valor, correspondendo a menor risco.<sup>9</sup>

Para comparar o uso dessas medidas de risco e das tradicionais para a otimização de carteiras de renda fixa, Mato (2005) realizou um estudo empírico com títulos do Tesouro americano (*U.S. Treasury bonds*).

Foram selecionados 11 títulos com diversos prazos de vencimento (1, 2, 3, 5, 7, 10 e 20 anos) e diferentes taxas de cupom de juros. Foram formadas 24 carteiras pela combinação de dois títulos, de forma que a duração resultante fosse igual ao horizonte de investimento, estabelecido como 5 anos, a exemplo de estudos anteriores sobre imunização de carteiras.

Para o cálculo das medidas VaR e CVaR foram obtidas séries históricas, fornecidas pelo *Fed (Federal Reserve)*, de retornos (*yields to maturity*) semanais de títulos com a mesma maturidade dos títulos em análise, possibilitando a avaliação correta dos movimentos das taxas de juros. Foram utilizadas 2 séries, com 177 observações semanais em cada, correspondentes aos seguintes períodos: outubro de 1993 a fevereiro de 1997 e janeiro de 2000 a maio de 2003. Escolheu-se o método histórico para o cálculo do VaR e do CVaR, com graus de confiança iguais a 90%, 95% e 99%.

As medidas clássicas de risco, convexidade e dispersão ( $M^2$  e  $\tilde{N}$ ), foram calculadas para as 24 carteiras, assim como o VaR histórico e o CVaR, nos dois períodos, com o objetivo de comparar a carteira ótima indicada por cada estratégia.

---

<sup>9</sup> O  $CVaR_k$  (conditional value-at risk) corresponde ao valor esperado das perdas que excedem o  $VaR_k$ , sendo  $k$  o nível de confiança considerado. Para variáveis contínuas, o  $CVaR_k$  coincide com o  $k$ -expected shortfall (ES), conceito introduzido por Embrechts, Küppelberg e Mikosch, em 1997 (Szegö, 2002).

Os resultados obtidos demonstraram não haver uma relação direta entre as medidas de risco, ou seja, a carteira ótima indicada pelas medidas clássicas de risco difere da carteira recomendada pelas medidas modernas VaR e CVaR. Observou-se que carteiras compostas por títulos com menores taxas de cupom apresentaram menor CVaR do que carteiras equivalentes, nas quais apenas as taxas de cupom eram maiores. Em contrapartida, carteiras com as maiores taxas de cupom apresentaram maior convexidade. Com relação à dispersão, as duas carteiras que apresentaram as menores medidas continham, em grande proporção, um título de maturidade idêntica ao prazo de cinco anos. Este resultado confirma a afirmação de Balbás et al. (2002) de que carteiras com dispersão mínima geralmente contêm um título de maturidade coincidente com o horizonte de investimento.

A carteira indicada pelo CVaR mínimo coincidiu com a carteira indicada pelo menor VaR para o grau de confiança de 99%. Verificou-se também que a carteira ótima obtida pela otimização do VaR era instável, variando conforme o grau de confiança utilizado, nos dois períodos analisados. O mesmo não ocorreu com o CVaR, que apresentou uma estabilidade razoável em relação ao grau de confiança, indicando ser uma medida mais confiável para a otimização de carteiras.

Embora tenha servido para ilustrar a utilização de diversas medidas de risco para otimização de carteiras, este estudo não investigou o desempenho real das carteiras, a fim de testar a eficácia de estratégias alternativas de imunização.

## 4 Teste Empírico

Para avaliar as diferentes medidas de risco de taxa de juros, foi realizado um estudo empírico de otimização de carteiras de títulos públicos federais prefixados, semelhante ao realizado por Mato (2005) com títulos do Tesouro americano. Porém, neste caso, buscou-se medir o desempenho das estratégias de imunização das carteiras ao longo do tempo, tal como no estudo de Balbás et al. (2002).

Optou-se por conduzir dois estudos separadamente. O primeiro abordou o mercado de títulos prefixados da dívida interna, que ainda possui pouca diversidade de títulos, prazos curtos e baixa liquidez. O segundo analisou o mercado de títulos da dívida externa soberana, denominados em dólar americano. Este mercado oferece maior diversidade de títulos, no que se refere a maturidades e taxas de cupons de juros, assemelhando-se mais à realidade americana.

### 4.1 Carteiras com títulos da dívida pública interna

No mercado brasileiro de títulos da dívida interna só existem dois tipos de título com rendimento prefixado: LTN (Letras do Tesouro Nacional), que são títulos de curto prazo que não pagam cupom de juros, semelhantes às *T-bills* americanas e NTN-F (Notas do Tesouro Nacional Série F), títulos de médio prazo, lançados ao final de 2003, que pagam cupons semestrais de 10% ao ano, semelhantes às *T-notes* americanas (bônus com prazo igual ou inferior a dez anos).

O período analisado é de 01/06/2005 até 31/05/2006. A data inicial corresponde à terceira emissão de NTN-F, com vencimento em 02/01/2012. A data final corresponde a 1 ano de análise. Foram obtidas séries de preços de mercado dos títulos, que correspondem aos preços divulgados pela Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro (Andima) para o mercado secundário de títulos,

com base em pesquisa com *dealers* de mercado aberto e outras instituições atuantes neste mercado. Embora muitos títulos tenham liquidez reduzida, as instituições informam preços considerados justos para realização de negócios e estas informações recebem tratamento estatístico com o intuito de corrigir eventuais desvios (Andima, 2006).

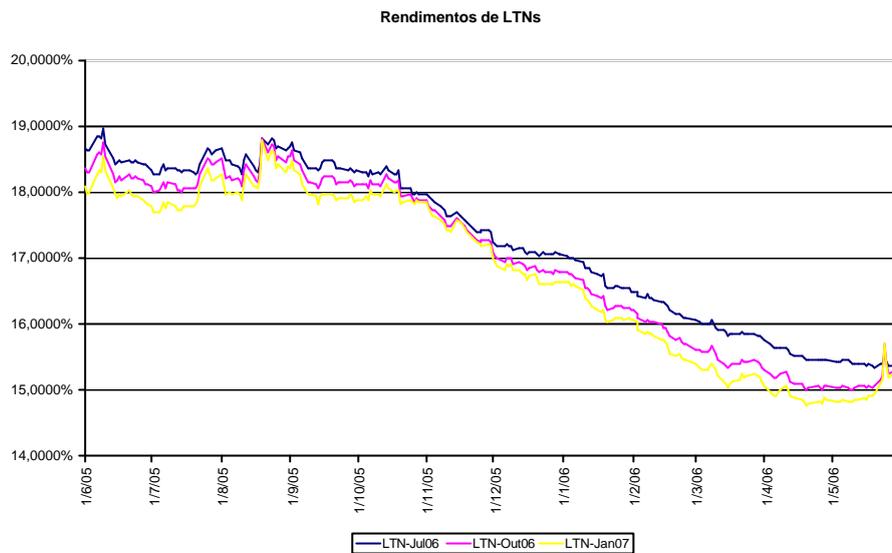
Em 01/06/2005, havia três diferentes vencimentos para NTN-F: janeiro de 2008, 2010 e 2012. Foram formadas 18 carteiras, compostas por uma NTN-F e uma LTN, cujos prazos aproximados eram os seguintes: 4, 7, 10, 13, 16 e 19 mes es. As características dos títulos estão descritas na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1. Características dos títulos prefixados da DPMFi.**

<b>Título</b>	<b>Vencimento</b>	<b>Emissão</b>	<b>Cupom</b>
LTN	1/10/2005	3/3/2004	-
LTN	1/1/2006	3/3/2004	-
LTN	1/4/2006	11/2/2005	-
LTN	1/7/2006	27/10/2004	-
LTN	1/10/2006	17/2/2005	-
LTN	1/1/2007	11/2/2005	-
NTN-F	1/1/2008	19/12/2003	10%
NTN-F	1/1/2010	2/2/2005	10%
NTN-F	1/1/2012	1/6/2005	10%

Fonte: Banco Central do Brasil

No período analisado, as taxas de juros estiveram predominantemente em queda, com títulos de curto prazo apresentando rendimentos maiores do que títulos um pouco mais longos, como se verifica no Gráfico 4.1.



**Gráfico 4.1. Rendimentos de LTNs, no período de 01/06/2005 a 31/05/2006.**

#### 4.1.1 Metodologia

Primeiramente, foram calculados o rendimento até o vencimento (*yield to maturity*), a duração, em dias úteis, e a convexidade de cada título, considerando 01/06/2005 como a data inicial.

O rendimento  $y$  do título foi obtido pelo método de Newton-Raphson, a fim de satisfazer a seguinte igualdade:

$$P = \sum_{i=1}^n \left( \frac{F_i}{(1+y)^{d_i/252}} \right) \quad (4.1)$$

onde

$F_i$  representa o  $i$ -ésimo fluxo de pagamento do título;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamentos;

$d_i$  é o prazo, em dias úteis, até a data do pagamento do  $i$ -ésimo fluxo;

$P$  é o preço atual do título.

A duração e a convexidade foram calculadas e convertidas para dias úteis, segundo as seguintes fórmulas:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d_i}{252} \times \frac{F_i}{(1+y)^{\frac{d_i}{252}}} \right]}{P} \times 252 \quad (4.2)$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d_i}{252} \times \left( \frac{d_i}{252} + 1 \right) \times \frac{F_i}{(1+y)^{\frac{d_i+2}{252}}} \right]}{P} \times 252^2 \quad (4.3)$$

onde

$y$  é o rendimento do título, na forma de taxa anual com base em 252 dias úteis, como calculado anteriormente.

Em seguida, foram calculadas as medidas de dispersão, considerando um horizonte de investimento de 2 anos (504 dias úteis), a partir de 01/06/2005.

As medidas de dispersão, linear ( $\tilde{N}$ ) e quadrática ( $M^2$ ), são representadas pelas equações a seguir:

$$\tilde{N} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ |H - d_i| \times \frac{F_i}{(1+y)^{\frac{d_i}{252}}} \right]}{P} \quad (4.4)$$

$$M^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ (H - d_i)^2 \times \frac{F_i}{(1+y)^{d_i/252}} \right]}{P} \quad (4.5)$$

onde

$H$  representa o horizonte de investimento, em dias úteis.

A Tabela 4.2 apresenta o rendimento previsto e as medidas de risco de taxas de juros, para cada título, considerando o dia 01/06/2005 como data inicial para o investimento.

**Tabela 4.2. Medidas de risco para um investimento de 504 dias úteis, desde 01/06/2005.**

Título	Vencimento	YTM	Duração	Convexidade	Ñ	M <sup>2</sup>
LTN	1/10/2005	19,99%	87	20484	417	173889
LTN	1/1/2006	19,60%	149	41767	355	126025
LTN	1/4/2006	19,08%	212	69366	292	85264
LTN	1/7/2006	18,66%	273	101791	231	53361
LTN	1/10/2006	18,38%	337	141641	168	28224
LTN	1/1/2007	18,09%	398	185524	106	11236
NTN-F	1/1/2008	17,75%	557	350137	170	37626
NTN-F	1/1/2010	16,91%	884	846833	505	297677
NTN-F	1/1/2012	16,67%	1129	1412500	757	754581

Para a formação das carteiras, usou-se o critério de duração idêntica ao horizonte de investimento, que foi estipulado como 504 dias úteis ou 2 anos, devido à maturidade curta dos títulos existentes. Para cada carteira, foram calculadas as seguintes medidas de risco: convexidade, dispersão quadrática e linear.

A Tabela 4.3 exibe as características das 18 carteiras consideradas, em 01/06/2005, com destaque para as de maior convexidade e menor dispersão.

Verifica-se que a carteira de maior convexidade é aquela formada pela combinação da NTN-F mais longa (vencimento em 2012) com a LTN mais curta (4 meses), ou seja, corresponde ao tipo *barbell*. A carteira de menor dispersão, tanto

quadrática quanto linear, é aquela formada pela NTN-F mais curta (vencimento em 2008) com a LTN mais longa (19 meses), cujo prazo é mais próximo do horizonte de investimento, que podemos classificar como *bullet*.

Tabela 4.3. Características das carteiras, com duração de 504 dias úteis, em 01/06/2005.

Carteira	LTN	NTNF	%		YTM	Convex.	Ñ	M <sup>2</sup>
			Título1	Título2				
1	1/10/2005	1/1/2008	11,29%	88,71%	18,00%	312931	198	53005
2	1/1/2006	1/1/2008	13,00%	87,00%	17,99%	310045	194	49119
3	1/4/2006	1/1/2008	15,38%	84,62%	17,96%	306968	189	44950
4	1/7/2006	1/1/2008	18,68%	81,32%	17,92%	303753	181	40565
5	1/10/2006	1/1/2008	24,11%	75,89%	17,90%	299871	170	35359
6	1/1/2007	1/1/2008	33,36%	66,64%	17,86%	295230	<b>149</b>	<b>28823</b>
7	1/10/2005	1/1/2010	47,67%	52,33%	18,37%	452895	463	238665
8	1/1/2006	1/1/2010	51,69%	48,31%	18,29%	430663	428	208943
9	1/4/2006	1/1/2010	56,54%	43,46%	18,13%	407245	385	177577
10	1/7/2006	1/1/2010	62,19%	37,81%	17,99%	383515	335	145745
11	1/10/2006	1/1/2010	69,46%	30,54%	17,93%	356978	271	110504
12	1/1/2007	1/1/2010	78,18%	21,82%	17,83%	329790	193	73724
13	1/10/2005	1/1/2012	59,96%	40,04%	18,65%	<b>577781</b>	553	406370
14	1/1/2006	1/1/2012	63,76%	36,24%	18,53%	538519	501	353813
15	1/4/2006	1/1/2012	68,14%	31,86%	18,31%	497254	440	298491
16	1/7/2006	1/1/2012	73,00%	27,00%	18,12%	455671	373	242684
17	1/10/2006	1/1/2012	78,90%	21,10%	18,02%	409754	292	181463
18	1/1/2007	1/1/2012	85,49%	14,51%	17,88%	363545	201	119087

Para a imunização das carteiras, foram feitos rearranjos nos percentuais de cada título (rebalanceamentos), somente nas datas de pagamento de cupom ou de vencimento de título, de forma a atingir a duração igual ao tempo remanescente do prazo inicial de 504 dias úteis. Não foram permitidas vendas a descoberto (*short sales*) e sempre que houve resgate de um título (no caso, LTN), buscou-se substituí-lo por outro de prazo semelhante ao inicial.

Posteriormente, foram calculados o VaR histórico e paramétrico e o CVaR, para os seguintes graus de confiança: 90%, 95% e 99%.

Para o cálculo do VaR das carteiras, foi necessário primeiramente calcular o rendimento y dos títulos, para cada dia, com base em seu preço de mercado,

segundo a equação (4.1). Em seguida, o rendimento foi convertido em taxa de juros diária contínua, pela seguinte fórmula:

$$y_{dc} = \frac{\ln(1 + y)}{252} \quad (4.6)$$

Foram calculados os rendimentos diários de cada carteira como uma média ponderada dos rendimentos diários dos títulos ( $y_{dc}$ ), com pesos que representavam sua participação na carteira.

O próximo passo foi calcular a variação na taxa de juros diária, sendo esta simplesmente a diferença entre o rendimento (taxa) do dia em questão e o rendimento (taxa) do dia anterior.

A volatilidade das taxas de juros, base para o cálculo do VaR paramétrico, foi obtida a partir do desvio-padrão desta série de variações diárias na taxa de juros. A mesma série foi usada para obter o VaR histórico, a partir do percentil, segundo cada grau de confiança analisado.

Foi necessário assumir que as taxas eram válidas para um período de 2 anos (504 dias úteis), para que se pudesse transformar os valores obtidos em função de variações nas taxas de juros, em VaR sob a forma de variação percentual no preço, significando a perda potencial diária de valor no investimento.

Portanto, o VaR paramétrico e o VaR histórico foram calculados segundo as seguintes fórmulas, respectivamente:

$$VaR_p = DESVPAD(S_{\Delta y}) \times INV.NORMP(gc) \times 504 \quad (4.7)$$

$$VaR_h = PERCENTIL(S_{\Delta y}; gc) \times 504 \quad (4.8)$$

onde

$S_{\Delta y}$  representa a série de variações diárias na taxa de juros;

$gc$  representa o grau de confiança considerado;

$DESVPAD$  representa o desvio-padrão de uma série de valores;

$PERCENTIL$  representa um dado percentil de uma série de valores;

$INV.NORMP$  representa o inverso da distribuição normal padrão acumulada para uma certa probabilidade.

O CVaR foi calculado a partir da média das variações diárias que excederam o percentil correspondente ao grau de confiança considerado. Desta forma, pode-se representar o CVaR pela seguinte expressão:

$$CVaR = MÉDIA(S_{\Delta y} | \Delta y > PERCENTIL(S_{\Delta y}; gc)) \times 504 \quad (4.9)$$

Devido à série ser muito recente, só foi possível calcular o VaR e o CVaR com base em um período de 252 dias úteis, a partir de 01/06/2005.

A Tabela 4.4 exibe o VaR histórico, o VaR paramétrico e o CVaR das 18 carteiras analisadas, com destaque para os valores mínimos.

Tabela 4.4. VaR histórico, VaR paramétrico e CVaR, desde 01/06/2005 até 31/05/2006.

Carteira	VaR histórico			VaR paramétrico			CVaR		
	90%	95%	99%	90%	95%	99%	90%	95%	99%
1	0,167%	0,250%	0,642%	0,250%	0,321%	0,454%	0,361%	0,502%	0,954%
2	0,167%	0,256%	0,640%	0,249%	0,320%	0,452%	0,361%	0,504%	0,962%
3	0,159%	0,253%	0,603%	0,257%	0,329%	0,466%	0,364%	0,512%	0,947%
4	0,167%	0,251%	0,660%	0,253%	0,325%	0,460%	0,370%	0,519%	0,983%
5	0,172%	0,265%	0,638%	0,262%	0,337%	0,476%	0,379%	0,536%	1,021%
6	0,161%	0,280%	0,596%	0,259%	0,333%	0,471%	0,378%	0,534%	0,987%
7	0,121%	0,193%	0,379%	0,182%	0,234%	0,330%	0,240%	0,319%	0,497%
8	0,120%	0,196%	0,378%	0,179%	0,230%	0,325%	0,245%	0,331%	0,524%
9	0,130%	0,220%	0,420%	0,240%	0,308%	0,435%	0,287%	0,400%	0,725%
10	0,124%	0,206%	0,463%	0,189%	0,243%	0,343%	0,279%	0,388%	0,629%
11	0,136%	0,237%	0,482%	0,217%	0,279%	0,395%	0,316%	0,449%	0,768%
12	0,141%	0,273%	0,503%	0,230%	0,295%	0,418%	0,339%	0,479%	0,821%
13	<b>0,107%</b>	0,155%	<b>0,268%</b>	0,161%	0,206%	0,292%	<b>0,179%</b>	<b>0,224%</b>	<b>0,342%</b>
14	0,108%	<b>0,154%</b>	0,287%	<b>0,156%</b>	<b>0,200%</b>	<b>0,283%</b>	0,188%	0,241%	0,368%
15	0,118%	0,198%	0,382%	0,236%	0,303%	0,428%	0,244%	0,335%	0,619%
16	0,113%	0,159%	0,407%	0,162%	0,208%	0,295%	0,233%	0,322%	0,518%
17	0,120%	0,209%	0,436%	0,199%	0,255%	0,361%	0,287%	0,404%	0,697%
18	0,139%	0,266%	0,473%	0,218%	0,280%	0,396%	0,322%	0,451%	0,777%

A carteira 13, indicada como ótima pelo critério de maior convexidade, apresentou o menor VaR histórico, para os níveis de confiança de 90% e 99%, além do menor CVaR, em todos os graus de confiança analisados. Contudo, a carteira 14, segunda colocada em termos de convexidade, apresentou o menor VaR histórico, para o grau de confiança de 95%, além do menor VaR paramétrico.

Por último, buscou-se comparar o rendimento real das carteiras com o previsto, no período de um ano (252 dias úteis). Infelizmente, não foi possível medir o desempenho ao longo de todo o horizonte de investimento (504 dias úteis), devido à série histórica ser muito recente (início em 01/06/2005) e, portanto, inferior a 2 anos.

A projeção de rentabilidade da carteira foi calculada como a média ponderada dos rendimentos dos títulos, segundo sua participação na composição da mesma. Considerou-se como rentabilidade real ( $y_r$ ) a média dos rendimentos diários da

carteira, desde 01/06/2005 até 31/05/2006, convertida para taxa anual pela seguinte fórmula:

$$y_r = \exp(252 \times \bar{y}_{dc}) - 1 \quad (4.10)$$

onde

$\bar{y}_{dc}$  representa a média dos rendimentos diários da carteira.

Calculou-se também, para cada carteira, o erro quadrático, ou seja, o quadrado da diferença entre a rentabilidade projetada e real, que pode ser considerado como uma medida de desempenho da estratégia de imunização.

A Tabela 4.5 exibe as projeções de rentabilidade, a rentabilidade real e o erro quadrático para cada carteira, além da média dos erros quadráticos (*Mean Square Error*) de todas as carteiras.

**Tabela 4.5. Rentabilidade prevista e real, desde 01/06/2005 até 31/05/2006.**

Carteira	LTN	NTNF	% Título1	% Título2	Rentabilidade Prevista	Rentabilidade Real	Erro Quad.
1	1/10/2005	1/1/2008	11,29%	88,71%	18,00%	16,78%	0,0149%
2	1/1/2006	1/1/2008	13,00%	87,00%	17,99%	16,75%	0,0156%
3	1/4/2006	1/1/2008	15,38%	84,62%	17,96%	16,71%	0,0155%
4	1/7/2006	1/1/2008	18,68%	81,32%	17,92%	16,69%	0,0153%
5	1/10/2006	1/1/2008	24,11%	75,89%	17,90%	16,65%	0,0158%
6	1/1/2007	1/1/2008	33,36%	66,64%	17,86%	16,62%	0,0155%
7	1/10/2005	1/1/2010	47,67%	52,33%	18,37%	17,12%	0,0155%
8	1/1/2006	1/1/2010	51,69%	48,31%	18,29%	17,01%	0,0166%
9	1/4/2006	1/1/2010	56,54%	43,46%	18,13%	16,90%	0,0151%
10	1/7/2006	1/1/2010	62,19%	37,81%	17,99%	16,82%	<b>0,0138%</b>
11	1/10/2006	1/1/2010	69,46%	30,54%	17,93%	16,71%	0,0148%
12	1/1/2007	1/1/2010	78,18%	21,82%	17,83%	16,64%	0,0140%
13	1/10/2005	1/1/2012	59,96%	40,04%	<b>18,65%</b>	<b>17,30%</b>	0,0183%
14	1/1/2006	1/1/2012	63,76%	36,24%	18,53%	17,14%	0,0193%
15	1/4/2006	1/1/2012	68,14%	31,86%	18,31%	17,02%	0,0167%
16	1/7/2006	1/1/2012	73,00%	27,00%	18,12%	16,90%	0,0149%
17	1/10/2006	1/1/2012	78,90%	21,10%	18,02%	16,76%	0,0157%
18	1/1/2007	1/1/2012	85,49%	14,51%	17,88%	16,67%	0,0145%
						<b>MSE</b>	<b>0,0156%</b>

#### 4.1.2 Análise dos Resultados

Verifica-se que a rentabilidade prevista variou entre 17,83% e 18,65%, sendo a maior para a carteira 13. Esta carteira foi efetivamente a que obteve a maior rentabilidade no período, igual a 17,30%, enquanto a carteira 6 obteve a menor, igual a 16,62%. Ressalta-se, entretanto, que nesta análise são desconsiderados quaisquer custos de transação.

Se a carteira ótima fosse escolhida inicialmente pelo critério de maior convexidade, a carteira 13 seria selecionada e o resultado seria ótimo e superior ao critério de menor dispersão, que indicaria a carteira 6, cujo rendimento real foi o menor no período analisado. O critério de menor VaR histórico e CVaR também levaria à escolha da carteira 13. Porém, há uma discrepância quando se considera o VaR paramétrico, pois este indicaria a carteira 14, que também apresentou o menor VaR histórico, para o grau de confiança de 95%. Esta carteira também teve ótimo desempenho, apresentando a segunda maior rentabilidade real.

Se considerarmos o erro quadrático como medida de desempenho das carteiras e da estratégia de imunização, comparando o rendimento previsto com o realizado em um ano, constataremos que as carteiras 13 e 14 tiveram baixo desempenho, apresentando erros quadráticos superiores à média e iguais a 0,0183% e 0,0193%, respectivamente. A carteira 10 foi a que obteve o melhor desempenho, com erro quadrático igual a 0,0138%. Esta carteira, entretanto, não seria ótima segundo nenhuma das estratégias avaliadas.

Neste teste empírico, a escolha da carteira ótima segundo o critério de maior convexidade mostrou-se superior à estratégia que considera a menor dispersão. Além disso, o critério de escolha segundo o menor CVaR mostrou-se mais estável do que o de menor VaR histórico, pois este varia segundo o grau de confiança

considerado. Entretanto, ambas estratégias tiveram desempenho similar e satisfatório.

Neste estudo houve coincidência quanto à escolha da carteira ótima pelos critérios de convexidade, VaR histórico e CVaR, contrastando com os resultados de Mato (2005), em que houve total discrepância entre as medidas de risco analisadas.

Em relação ao desempenho real, verificou-se que a carteira de maior convexidade obteve o melhor desempenho, diferindo dos resultados dos testes de Kahn e Lochoff (1990) e de Lacey e Nawalkha (1993), que rejeitaram a convexidade como instrumento para escolha de carteiras.

## 4.2 Carteiras com títulos da dívida pública externa

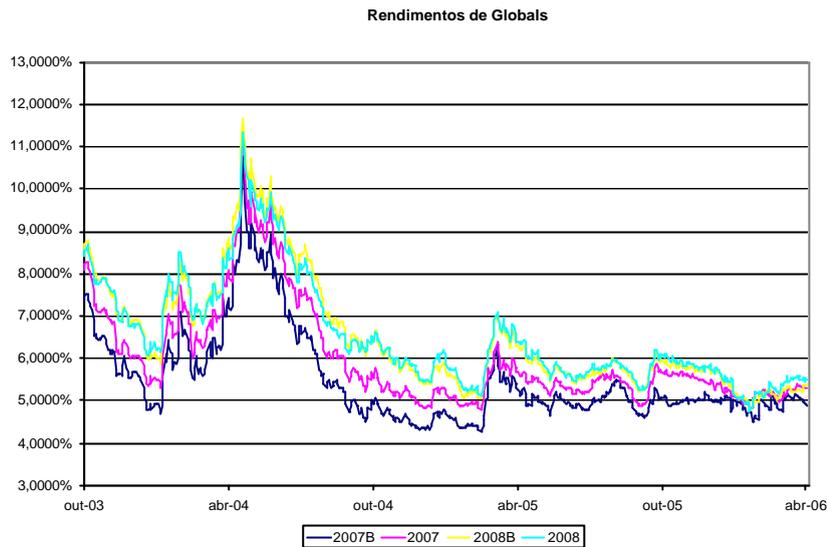
Foi feita uma análise dos títulos da dívida externa soberana, em dólar americano, genericamente denominados de *Globals*. Desta vez, o período analisado é de 22/10/2003 até 24/04/2006. A data inicial corresponde à data de emissão do título Global 2010N, com vencimento em 22/10/2010. Alguns meses antes, foram emitidos os títulos Global 2013 e Global 2011, em 17/06/2003 e 07/08/2003, respectivamente. A data final é arbitrária e corresponde a um período de 2,5 anos. As séries de preços foram obtidas na *Bloomberg* e correspondem ao preço final do dia.

Foram selecionados para o estudo 13 títulos existentes em 22/10/2003, com diferentes vencimentos e taxas de cupom de juros, exibidos na Tabela 4.6.

**Tabela 4.6. Características dos títulos (*Globals*) da DPMFe.**

Título	Vencimento	Emissão	Cupom
Global 2007 B	16/1/2007	6/5/2003	10,000%
Global 2007	26/7/2007	26/7/2000	11,250%
Global 2008 B	12/3/2008	12/3/2002	11,500%
Global 2008	7/4/2008	7/4/1998	9,375%
Global 2010 N	22/10/2010	22/10/2003	9,250%
Global 2011	7/8/2011	7/8/2003	10,000%
Global 2012	11/1/2012	11/1/2002	11,000%
Global 2013	17/6/2013	17/6/2003	10,250%
Global 2020	15/1/2020	26/1/2000	12,750%
Global 2024	15/4/2024	22/3/2001	8,875%
Global 2027	15/5/2027	9/6/1997	10,125%
Global 2030	6/3/2030	6/3/2000	12,250%
Global 2040	17/8/2040	17/8/2000	11,000%

As taxas de juros apresentaram alta volatilidade no período analisado, como é possível observar no gráfico 4.2, que apresenta os rendimentos dos títulos de prazo inferior a 5 anos.



**Gráfico 4.2. Rendimentos de Globais, no período de 22/10/2003 a 24/04/2004.**

#### 4.2.1 Metodologia

Inicialmente, foram calculados o rendimento até o vencimento (*yield to maturity*), a duração, em anos, e a convexidade de cada título, em 22/10/2003.

O rendimento  $y$  do título foi calculado com base no preço, já descontado do valor de cupom acumulado desde o último pagamento, pelo método de Newton-Raphson, a fim de satisfazer a seguinte igualdade:<sup>10</sup>

$$P = \frac{100}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{d/180}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{100 \times \frac{c}{2}}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{d_i/180}} \right) - \left( 100 \times \frac{c}{2} \times \frac{duc}{180} \right) \quad (4.11)$$

onde

$c$  representa a taxa anual de cupom de juros do título;

<sup>10</sup>Os preços negociados e divulgados pela Bloomberg já são descontados de cupom acumulado ("cupom-limpo").

$n$  corresponde à quantidade de pagamentos semestrais de cupom desde a data de referência até a data de vencimento do título;

$d_i$  é o prazo, em dias, desde a data de referência até a data do pagamento do  $i$ -ésimo cupom;

$duc$  é o prazo transcorrido, em dias, desde a data do último pagamento de cupom até a data de referência;

$dr$  é o prazo, em dias, desde a data de referência até a data do resgate;

$P$  é o preço, na data de referência, do título cujo valor nominal é 100;

e todos os prazos em dias são calculados segundo a convenção de ano com 360 dias.

As fórmulas seguintes representam o cálculo da duração e da convexidade, convertidas para base anual:<sup>11</sup>

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d_i}{180} \times \frac{F_i}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{\frac{d_i}{180}}} \right]}{P} \times \frac{1}{2} \quad (4.12)$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d_i}{180} \times \left( \frac{d_i}{180} + 1 \right) \times \frac{F_i}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{\frac{d_i}{180} + 2}} \right]}{P} \times \frac{1}{2^2} \quad (4.13)$$

onde

$F_i$  representa o  $i$ -ésimo fluxo de pagamento do título;

$n$  corresponde à quantidade de fluxos de pagamentos;

$d_i$  é o prazo, em dias, até a data do pagamento do  $i$ -ésimo fluxo;

$P$  é o preço atual do título;

<sup>11</sup> Estas fórmulas produzem o mesmo resultado que as fórmulas fechadas apresentadas por Smith (1998), reproduzidas no Anexo 1.

$y$  é o rendimento do título, na forma de taxa anual com base em ano de 360 dias, como calculado anteriormente.

As medidas de dispersão, linear ( $\tilde{N}$ ) e quadrática ( $M^2$ ), considerando um horizonte de investimento de 5 anos, a partir de 22/10/2003, foram calculadas segundo as seguintes equações:

$$\tilde{N} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ H - \frac{d_i}{360} \right] \times \frac{F_i}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{d_i/180}}}{P} \quad (4.14)$$

$$M^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \left( H - \frac{d_i}{360} \right)^2 \times \frac{F_i}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{d_i/180}} \right]}{P} \quad (4.15)$$

onde

$H$  representa o horizonte de investimento, em anos.

A Tabela 4.7 apresenta o rendimento previsto e as medidas de risco dos títulos, para um investimento de 5 anos, a partir de 22/10/2003.

**Tabela 4.7. Medidas de risco para um investimento de 5 anos, desde 22/10/2003.**

Título	YTM	Maturidade	Duração	Convexidade	$M^2$	$\tilde{N}$
Global 2007 B	7,38%	3,23	2,79	9,27	5,66	2,21
Global 2007	8,09%	3,76	3,13	11,61	4,73	1,87
Global 2008 B	8,58%	4,39	3,57	14,96	3,75	1,43
Global 2008	8,42%	4,46	3,75	16,09	3,14	1,25
Global 2010 N	9,39%	7,00	5,30	32,71	5,22	2,08
Global 2011	9,72%	7,79	5,50	36,64	7,52	2,53
Global 2012	9,82%	8,22	5,55	38,16	8,76	2,73
Global 2013	9,79%	9,65	6,19	48,64	13,55	3,35
Global 2020	11,16%	16,23	7,43	79,88	36,01	4,78
Global 2024	10,88%	20,48	8,87	115,63	60,46	5,86
Global 2027	11,01%	23,56	8,51	116,46	65,24	5,91
Global 2030	11,33%	26,37	8,62	119,34	67,72	5,84
Global 2040	11,41%	36,82	8,95	138,67	85,98	6,21

Para a formação das carteiras, usou-se o critério de duração idêntica ao horizonte de investimento, que foi estipulado em 5 anos, à semelhança de outros estudos. Foram compostas carteiras com um título de duração curta (menor do que 5 anos) e outro de duração mais longa (maior do que 5 anos) e não foram permitidas vendas a descoberto (*short sales*). Desta forma, os 4 primeiros títulos listados na Tabela 4.7 foram combinados com os 9 títulos restantes, resultando num total de 36 carteiras.

Para a imunização das carteiras, foram feitos rearranjos sempre que havia pagamento de cupom de um título da carteira. Então, a composição da carteira era alterada para que a duração resultante fosse igual ao tempo remanescente do horizonte de investimento.

A Tabela 4.8 exhibe as características e as medidas de risco das 36 carteiras formadas, destacando as de maior convexidade e menor dispersão.

Tabela 4.8. Características das carteiras, com duração de 5 anos, em 22/10/2003.

Carteira	Global		% Título1	% Título2	YTM	Convex.	M <sup>2</sup>	N
1	2007 B	2010 N	11,88%	88,12%	9,15%	29,92	5,28	2,09
2	2007 B	2011	18,49%	81,51%	9,28%	31,58	7,18	2,47
3	2007 B	2012	19,83%	80,17%	9,34%	32,43	8,15	2,62
4	2007 B	2013	34,97%	65,03%	8,95%	34,87	10,79	2,95
5	2007 B	2020	52,40%	47,60%	9,18%	42,88	20,11	3,43
6	2007 B	2024	63,64%	36,36%	8,65%	47,94	25,58	3,54
7	2007 B	2027	61,40%	38,60%	8,78%	50,64	28,66	3,64
8	2007 B	2030	62,12%	37,88%	8,88%	50,97	29,17	3,58
9	2007 B	2040	64,13%	35,87%	8,83%	<b>55,69</b>	34,47	3,64
10	2007	2010 N	13,72%	86,28%	9,21%	29,81	5,16	2,05
11	2007	2011	21,11%	78,89%	9,37%	31,35	6,93	2,39
12	2007	2012	22,59%	77,41%	9,43%	32,16	7,85	2,53
13	2007	2013	38,81%	61,19%	9,13%	34,27	10,13	2,78
14	2007	2020	56,50%	43,50%	9,43%	41,31	18,34	3,14
15	2007	2024	67,37%	32,63%	9,00%	45,55	22,91	3,17
16	2007	2027	65,23%	34,77%	9,11%	48,06	25,77	3,28
17	2007	2030	65,92%	34,08%	9,20%	48,32	26,19	3,22
18	2007	2040	67,83%	32,17%	9,16%	52,48	30,86	3,27
19	2008 B	2010 N	17,27%	82,73%	9,25%	29,64	4,97	1,97
20	2008 B	2011	26,00%	74,00%	9,42%	31,00	6,54	2,25
21	2008 B	2012	27,70%	72,30%	9,48%	31,73	7,37	2,37
22	2008 B	2013	45,43%	54,57%	9,24%	33,34	9,10	2,47
23	2008 B	2020	63,03%	36,97%	9,53%	38,96	15,67	2,67
24	2008 B	2024	73,05%	26,95%	9,20%	42,09	19,03	2,62
25	2008 B	2027	71,12%	28,88%	9,28%	44,27	21,50	2,72
26	2008 B	2030	71,74%	28,26%	9,36%	44,45	21,82	2,67
27	2008 B	2040	73,46%	26,54%	9,33%	47,79	25,57	2,70
28	2008	2010 N	19,18%	80,82%	9,20%	29,52	<b>4,83</b>	<b>1,92</b>
29	2008	2011	28,55%	71,45%	9,35%	30,77	6,27	2,17
30	2008	2012	30,34%	69,66%	9,39%	31,46	7,06	2,28
31	2008	2013	48,63%	51,37%	9,12%	32,81	8,49	2,33
32	2008	2020	65,97%	34,03%	9,35%	37,80	14,33	2,45
33	2008	2024	75,50%	24,50%	9,02%	40,47	17,18	2,38
34	2008	2027	73,69%	26,31%	9,10%	42,49	19,48	2,48
35	2008	2030	74,27%	25,73%	9,17%	42,65	19,75	2,43
36	2008	2040	75,89%	24,11%	9,14%	45,64	23,11	2,45

Verifica-se que a carteira 9, de maior convexidade, é formada pela combinação dos títulos de menor e maior duração, correspondendo ao tipo *barbell*. A carteira 28, de menor dispersão, é formada pelos títulos de duração mais próxima do horizonte de investimento, podendo ser classificada como *bullet*.

Em seguida, foram calculados o VaR histórico e paramétrico e o CVaR, para os graus de confiança de 90%, 95% e 99%.

Para o cálculo do VaR das carteiras, após calcular, segundo a equação (4.11), o rendimento anual  $y$  dos títulos, para cada dia, com base em seu preço de mercado, este foi convertido em taxa de juros diária contínua, pela seguinte fórmula:<sup>12</sup>

$$y_{dc} = \frac{\ln(1 + y)}{262} \quad (4.16)$$

A partir daí, foram calculados os rendimentos diários de cada carteira como uma média ponderada dos rendimentos diários dos títulos ( $y_{dc}$ ), segundo sua participação na carteira.

Os passos seguintes foram análogos aos adotados para fins de cálculo de VaR e CVaR das carteiras de títulos da dívida interna. A série considerada corresponde ao primeiro ano, de 22/10/2003 até 22/10/2004, abrangendo 262 dias de negociação.

Também foi necessário assumir que as taxas eram válidas para um período de 5 anos (aproximadamente 1310 dias de negociação), para que se pudesse transformar os valores obtidos em função de variações nas taxas de juros, em VaR sob a forma de variação percentual no preço. Portanto, nas fórmulas (4.7), (4.8) e (4.9), o valor 504 foi substituído por 1310.

Na Tabela 4.9 são exibidos o VaR histórico, o VaR paramétrico e o CVaR das 36 carteiras, com destaque para os menores valores.

---

<sup>12</sup> Verificou-se que, em média, havia 262 dias de negociação em um ano.

Tabela 4.9. VaR histórico, VaR paramétrico e CVaR, desde 22/10/2003 até 22/10/2004.

Carteira	VaR histórico			VaR paramétrico			CVaR		
	90%	95%	99%	90%	95%	99%	90%	95%	99%
1	0,908%	1,502%	2,928%	1,125%	1,444%	2,042%	1,754%	2,324%	3,212%
2	0,854%	1,474%	2,609%	1,111%	1,426%	2,017%	1,732%	2,302%	3,383%
3	0,886%	1,413%	2,853%	1,132%	1,453%	2,055%	1,747%	2,383%	3,341%
4	0,952%	1,463%	3,153%	1,138%	1,461%	2,066%	1,757%	2,380%	3,495%
5	0,838%	1,229%	3,454%	1,187%	1,523%	2,154%	1,804%	2,587%	3,831%
6	0,831%	1,253%	3,418%	1,192%	1,529%	2,163%	1,808%	2,591%	3,985%
7	0,831%	1,328%	3,450%	1,209%	1,551%	2,194%	1,821%	2,601%	4,008%
8	0,832%	1,231%	3,582%	1,210%	1,553%	2,197%	1,842%	2,630%	3,970%
9	0,841%	1,308%	3,472%	1,201%	1,542%	2,181%	1,824%	2,571%	3,970%
10	0,961%	1,500%	2,752%	1,112%	1,427%	2,019%	1,744%	2,303%	3,047%
11	0,878%	1,435%	2,495%	1,097%	1,408%	1,992%	1,716%	2,292%	3,005%
12	0,958%	1,351%	2,910%	1,115%	1,431%	2,024%	1,746%	2,356%	3,062%
13	0,909%	1,499%	2,872%	1,111%	1,426%	2,017%	1,732%	2,346%	3,099%
14	0,866%	1,210%	3,131%	1,148%	1,473%	2,084%	1,774%	2,507%	3,297%
15	0,834%	1,306%	3,234%	1,150%	1,476%	2,087%	1,770%	2,502%	3,395%
16	0,894%	1,368%	3,199%	1,157%	1,484%	2,099%	1,795%	2,506%	3,391%
17	0,890%	1,350%	3,163%	1,175%	1,508%	2,133%	1,802%	2,537%	3,404%
18	0,844%	1,372%	3,189%	1,164%	1,494%	2,113%	1,773%	2,484%	3,396%
19	0,946%	1,528%	2,686%	1,116%	1,433%	2,027%	1,752%	2,322%	3,025%
20	0,914%	1,431%	2,626%	1,102%	1,415%	2,001%	1,730%	2,261%	<b>2,962%</b>
21	0,917%	1,342%	2,795%	1,124%	1,442%	2,040%	1,761%	2,375%	3,128%
22	0,942%	1,451%	2,609%	1,120%	1,437%	2,033%	1,753%	2,354%	3,027%
23	0,952%	1,500%	2,839%	1,152%	1,478%	2,091%	1,804%	2,461%	3,290%
24	0,943%	1,373%	2,795%	1,146%	1,471%	2,080%	1,782%	2,440%	3,212%
25	0,964%	1,351%	2,807%	1,152%	1,478%	2,091%	1,790%	2,468%	3,173%
26	0,924%	1,415%	2,867%	1,168%	1,499%	2,120%	1,815%	2,493%	3,263%
27	0,880%	1,336%	2,818%	1,148%	1,473%	2,083%	1,768%	2,454%	3,241%
28	0,900%	1,461%	2,582%	1,061%	1,362%	1,927%	1,701%	2,239%	3,118%
29	0,810%	1,389%	<b>2,371%</b>	1,033%	1,326%	1,875%	1,668%	<b>2,194%</b>	3,062%
30	0,891%	1,465%	2,625%	1,048%	1,344%	1,902%	1,680%	2,263%	3,103%
31	0,817%	1,282%	2,515%	<b>1,033%</b>	<b>1,326%</b>	<b>1,875%</b>	1,669%	2,249%	3,194%
32	0,791%	1,245%	2,781%	1,053%	1,352%	1,912%	1,679%	2,359%	3,515%
33	0,785%	1,209%	2,666%	1,037%	1,330%	1,882%	1,650%	2,313%	3,510%
34	0,764%	1,212%	2,666%	1,044%	1,340%	1,895%	1,659%	2,338%	3,534%
35	0,797%	1,266%	2,623%	1,057%	1,356%	1,918%	1,675%	2,350%	3,531%
36	<b>0,763%</b>	<b>1,199%</b>	2,634%	1,038%	1,333%	1,885%	<b>1,635%</b>	2,311%	3,500%

Quanto ao VaR histórico, a carteira 36 apresentou os menores valores para os graus de 90% e 95% de confiança, assim como o menor CVaR para o grau de confiança de 90%. A carteira 29 apresentou o menor VaR histórico, a um nível de confiança de 99%, além do menor CVaR, para o grau de confiança de 95%. O

menor VaR paramétrico foi obtido pela carteira 31 e o menor CVaR, a 99% de confiança, verificou-se na carteira 20.

Finalmente, buscou-se comparar o rendimento previsto com o rendimento real das carteiras nos períodos de 1 ano e 2,5 anos. Por insuficiência de dados, não foi possível medir o desempenho ao longo do horizonte de investimento de 5 anos, pois a série histórica iniciou-se em 22/10/2003.

A rentabilidade real ( $y_r$ ) foi obtida pela média dos rendimentos diários da carteira, desde 22/10/2003 até 22/10/2004 (para 1 ano) ou 24/04/2006 (para 2,5 anos), convertida para taxa anual pela seguinte fórmula:

$$y_r = \exp(262 \times \bar{y}_{dc}) - 1 \quad (4.17)$$

onde

$\bar{y}_{dc}$  representa a média dos rendimentos diários da carteira.

Na Tabela 4.10, são exibidas as rentabilidades previstas e reais, para 1 ano e 2,5 anos, bem como os erros quadráticos correspondentes. As médias dos erros quadráticos (*mean square error*), de todas as carteiras, aparecem no final.

Tabela 4.10. Rentabilidade prevista e real para um ano e 2,5 anos, desde 22/10/2003.

Carteira	Global		Rentabilidade				
			Prevista	Real 1 a.	Erro Quad.	Real 2,5 a.	Erro Quad.
1	2007 B	2010 N	9,15%	8,44%	0,0050%	7,06%	0,0440%
2	2007 B	2011	9,28%	8,46%	0,0068%	7,07%	0,0493%
3	2007 B	2012	9,34%	8,47%	0,0076%	7,08%	0,0509%
4	2007 B	2013	8,95%	8,12%	0,0069%	6,85%	0,0438%
5	2007 B	2020	9,18%	7,98%	0,0143%	6,77%	0,0581%
6	2007 B	2024	8,65%	7,59%	0,0113%	6,47%	0,0475%
7	2007 B	2027	8,78%	7,65%	0,0128%	6,50%	0,0523%
8	2007 B	2030	8,88%	7,71%	0,0136%	6,57%	0,0532%
9	2007 B	2040	8,83%	7,66%	0,0137%	6,54%	0,0525%
10	2007	2010 N	9,21%	8,52%	0,0048%	7,12%	0,0439%
11	2007	2011	9,37%	8,61%	0,0059%	7,18%	0,0480%
12	2007	2012	9,43%	8,59%	0,0071%	7,17%	0,0511%
13	2007	2013	9,13%	8,31%	0,0067%	6,99%	0,0457%
14	2007	2020	9,43%	8,27%	0,0135%	6,96%	0,0608%
15	2007	2024	9,00%	7,95%	0,0110%	6,73%	0,0518%
16	2007	2027	9,11%	8,01%	0,0121%	6,75%	0,0557%
17	2007	2030	9,20%	8,06%	0,0130%	6,80%	0,0573%
18	2007	2040	9,16%	8,02%	0,0131%	6,79%	0,0564%
19	2008 B	2010 N	9,25%	8,62%	<b>0,0039%</b>	7,18%	0,0431%
20	2008 B	2011	9,42%	8,71%	0,0051%	7,22%	0,0486%
21	2008 B	2012	9,48%	<b>8,75%</b>	0,0053%	<b>7,25%</b>	0,0496%
22	2008 B	2013	9,24%	8,57%	0,0046%	7,12%	0,0450%
23	2008 B	2020	<b>9,53%</b>	8,59%	0,0088%	7,12%	0,0581%
24	2008 B	2024	9,20%	8,37%	0,0069%	6,97%	0,0499%
25	2008 B	2027	9,28%	8,42%	0,0073%	6,99%	0,0527%
26	2008 B	2030	9,36%	8,46%	0,0081%	7,03%	0,0541%
27	2008 B	2040	9,33%	8,42%	0,0082%	7,01%	0,0538%
28	2008	2010 N	9,20%	8,57%	0,0040%	7,16%	0,0416%
29	2008	2011	9,35%	8,63%	0,0052%	7,19%	0,0464%
30	2008	2012	9,39%	8,66%	0,0054%	7,21%	0,0476%
31	2008	2013	9,12%	8,46%	0,0043%	7,09%	<b>0,0411%</b>
32	2008	2020	9,35%	8,46%	0,0079%	7,09%	0,0511%
33	2008	2024	9,02%	8,25%	0,0060%	6,95%	0,0431%
34	2008	2027	9,10%	8,31%	0,0063%	6,97%	0,0455%
35	2008	2030	9,17%	8,33%	0,0071%	7,00%	0,0470%
36	2008	2040	9,14%	8,29%	0,0071%	6,98%	0,0466%
				<b>MSE</b>	<b>0,0081%</b>		<b>0,0496%</b>

#### 4.2.2 Análise dos resultados

A rentabilidade prevista variou entre 8,65% e 9,53%, sendo que a carteira 23 apresentou a maior. A carteira 21, segunda colocada em termos de rentabilidade prevista, foi efetivamente a que obteve a maior rentabilidade nos períodos de 1 ano

e 2,5 anos, igual a 8,75% e 7,25%, respectivamente. Entretanto, nesta análise são desconsiderados quaisquer custos de transação.

Caso o critério de maior convexidade fosse adotado, a carteira 9 seria selecionada e o rendimento real (7,66% e 6,54%) seria bem aquém do esperado, nos dois períodos considerados. Seus erros quadráticos, iguais a 0,0137% e 0,0525%, foram muito superiores aos erros mínimos, além de maiores do que as médias (0,0081% e 0,0496%).

A carteira 28, indicada como ótima pelo critério de menor dispersão, obteve um rendimento real bem superior ao da carteira 9 e mais próximo do esperado (8,57% e 7,16%), apresentando baixos erros quadráticos (0,0040% e 0,0416%) nos dois períodos, bem inferiores às médias. Neste estudo, esta é a carteira que mais se assemelha a uma carteira *m-m bullet*, pois ela é composta pelo título de maturidade mais próxima ao horizonte e pelo título cuja duração é ligeiramente superior ao mesmo. Isto confirma a afirmação de Balbás et al. (2002) de que minimizar a dispersão linear significa, na maioria das vezes, incluir na carteira um título *m-m*. Também confirma a importância da carteira *m-m bullet* para fins de imunização, verificada em pesquisas anteriores.

A carteira 36, que apresentou o menor VaR histórico, nos graus de confiança 90% e 95% e menor CVaR com 90% de confiança, teve desempenho razoável, com erros quadráticos (0,0071% e 0,0466%) um pouco inferiores às médias, nos dois períodos considerados.

A carteira 31, indicada pelo menor VaR paramétrico, teve rentabilidade real superior à da carteira 36 nos dois períodos e erros quadráticos menores, iguais a 0,0043% e 0,0411%. A carteira 29, de menor VaR histórico a 99% e menor CVaR a 95%, também superou a carteira 36, em termos de maior rentabilidade real e

menores erros quadráticos, nos 2 períodos considerados. A carteira 20, indicada pelo menor CVaR a 99%, foi a segunda colocada em rentabilidade real nos dois períodos e teve desempenho similar ao da carteira 29, em termos de erros quadráticos.

Considerando o erro quadrático como medida de desempenho da imunização das carteiras, verifica-se que a carteira 31, de menor VaR paramétrico, apresentou o menor erro quadrático, para um período de 2,5 anos. Embora não tenha sido indicada como ótima por nenhum dos critérios considerados, a carteira 19 apresentou o melhor desempenho, para o período de 1 ano, com erro quadrático igual a 0,0039%.

Neste teste empírico, a estratégia de escolha da carteira ótima segundo a menor dispersão mostrou-se preferível à escolha segundo a maior convexidade. Embora, em geral, as carteiras escolhidas segundo os critérios de VaR e CVaR tenham tido desempenho inferior ao da carteira de menor dispersão, todas tiveram bom desempenho, com rentabilidade satisfatória e erros quadráticos inferiores às médias. Verificou-se que, tanto para o VaR histórico como para o CVaR, quanto maior o grau de confiança considerado, melhor o desempenho da carteira escolhida.

Como no estudo de Mato (2005), a carteira ótima segundo o critério de menor dispersão em torno do horizonte de investimento não coincidiu com a carteira imunizada de maior convexidade. Verificou-se que à medida que aumenta a duração de um dos títulos da carteira, sua convexidade também aumenta. Assim, carteiras que se aproximam do tipo *barbell*, com durações extremas, tendem a ter convexidade elevada. Ao contrário, carteiras que se aproximam do tipo *m-m bullet* tendem a apresentar a menor dispersão.

Também não houve coincidência entre as carteiras indicadas pelas medidas clássicas e aquelas escolhidas pelos critérios de menor VaR e CVaR. Além disso, em nosso estudo não houve consistência do VaR histórico nem do CVaR, nos diferentes níveis de confiança analisados. Ao contrário do que ocorreu nos testes realizados por Mato (2005), aqui o CVaR não mostrou-se mais estável do que o VaR, nos diferentes graus de confiança. Porém, houve uma coincidência na escolha da carteira ótima segundo o menor VaR a 99% e CVaR a 95%. O mesmo ocorreu para a carteira de menor VaR e CVaR a 90%, sugerindo haver alguma relação entre estas medidas.

## 5 Conclusão

O fortalecimento do mercado de títulos prefixados e o alongamento de seu prazo médio são objetivos muito importantes para o aprimoramento da atuação do Banco Central do Brasil no mercado aberto e para o sucesso da Secretaria do Tesouro Nacional na administração da dívida pública federal. Para que estes objetivos sejam alcançados, é necessário que haja melhor compreensão e administração do risco de taxas de juros, por parte dos gestores de investimentos.

Neste contexto, este trabalho apresenta diversas estratégias de imunização de risco para carteiras de renda fixa, permitindo a verificação de sua eficácia e comparação de seu desempenho.

Primeiramente, constatou-se que os critérios de maior convexidade e menor dispersão são sempre discrepantes, indicando carteiras ótimas distintas. Em geral, carteiras do tipo *barbell* apresentam maior convexidade, enquanto que carteiras de menor dispersão assemelham-se ao tipo *m-m bullet*. Provavelmente, esta diferença deve-se ao fato de que a otimização de carteiras com base na combinação de duração e convexidade parte do pressuposto irreal de que a estrutura a termo da taxa de juros move-se paralelamente. As medidas de dispersão representam um contraponto em relação a esta limitação.

O teste empírico com títulos da dívida externa mostrou que não é possível adotar o critério de maior convexidade para a escolha da carteira ótima, pois tudo indica que, em mercados mais líquidos, a convexidade já está precificada, não podendo, portanto, gerar retornos em excesso, como já foi verificado em pesquisas anteriores. O fato de esse critério ter sido bom para o caso do mercado interno sugere que a convexidade pode não estar bem precificada nesse mercado. A

liquidez ainda incipiente pode ser um dos motivos para o surgimento de imperfeições no processo de formação de preços. No mercado de títulos da dívida externa, pela sua maior abrangência geográfica, existe maior diversidade de títulos, no que se refere a prazos e pagamentos de cupom, configurando mais alternativas de investimento em renda fixa.

Quanto ao critério de escolha segundo a menor dispersão, este se mostrou mais eficaz para o mercado de títulos da dívida externa, num período em que as taxas de juros apresentaram alta volatilidade. Mais uma vez, constatou-se, neste estudo, a importância da carteira *m-m bullet* para fins de imunização de risco, pois esta carteira revelou-se a de menor dispersão, tendo obtido ótimo desempenho neste mercado.

Em relação ao VaR e ao CVaR, verificou-se que representam uma boa alternativa para a gestão do risco. A vantagem é que para sua adoção, tal como para a dispersão, não é necessário assumir movimentos paralelos na ETTJ, uma vez que se baseiam no comportamento histórico das taxas de juros.

Nos dois mercados analisados, as carteiras escolhidas segundo estas medidas, tiveram ótimo desempenho. Entretanto, observou-se que tanto o VaR quanto o CVaR não são estáveis em relação a diferentes graus de confiança e que o desempenho da carteira melhora quando graus de confiança maiores são considerados. Portanto, é preferível a adoção do VaR com o grau de confiança mais elevado, como 99%, ou a adoção do CVaR, com grau de confiança de, no mínimo, 95%.

É necessário ressaltar que neste estudo não foi possível medir o VaR e o CVaR em período anterior ao horizonte de investimento, devido às séries históricas serem muito curtas e recentes.

De uma maneira geral, pudemos constatar que a estratégia de escolha de carteiras segundo o VaR e o CVaR mínimo teve bons resultados, nos dois testes realizados. Porém, considerando os resultados do teste com títulos da dívida externa, pode-se dizer que o critério de menor dispersão fica em primeiro lugar.

Com relação ao critério de maior convexidade, embora tenha obtido sucesso no teste com títulos da dívida interna, verificou-se o contrário no mercado da dívida externa e em vários outros estudos prévios. Portanto, a convexidade não deve ser utilizada isoladamente como instrumento de escolha de carteiras.

Por fim, devemos ressaltar as limitações deste estudo. O mercado de títulos prefixados da dívida interna, antes limitado a títulos sem cupom de curtíssimo prazo (LTN), ainda está num estágio inicial de desenvolvimento. Os títulos de médio prazo, com cupom de 10% ao ano (NTN-F), foram lançados pela primeira vez ao final de 2003. Este mercado ainda é muito recente, pouco diversificado e de baixa liquidez, o que pode ter influenciado os resultados encontrados.

Quanto ao mercado da dívida externa, embora constituído de maior variedade de títulos, no que diz respeito a taxas de cupom e prazos de vencimento, também é bastante recente, pois a primeira emissão de *Global* ocorreu em 1997 e a maioria se deu durante ou após o ano 2000. Portanto, as séries históricas disponíveis eram muito curtas, prejudicando, de certa forma, a realização dos testes.

Portanto, sugerimos que novos estudos de imunização de risco de carteiras de títulos públicos brasileiros sejam realizados futuramente, quando houver séries históricas mais longas e os mercados estiverem mais maduros.

## 6 Referências Bibliográficas

**Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro.** Anexo VI - Títulos Públicos Federais: Metodologia de Precificação e de Cálculo. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: [http://www.andima.com.br/comites/arqs/com\\_anexo\\_6.pdf](http://www.andima.com.br/comites/arqs/com_anexo_6.pdf). Acesso em: 12 dez. 2006.

**Balbás, A. e Ibáñez, A.** When can you immunize a bond portfolio? *Journal of Banking and Finance*, Vol. 22, No. 12 (1998), pp. 1571-95.

**Balbás, A., Ibáñez, A. e López S.** Dispersion measures as immunization risk measures. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26 (2002), pp. 1229-44.

**Berger, P. L.** A Gestão da Dívida Pública Brasileira no Período 1995-2002. Dissertação de mestrado. Universidade Cândido Mendes. Rio de Janeiro, 2002.

**Bierwag, G. O.; Fooladi, I.; Roberts, G. S.** Designing an immunized portfolio: Is M-squared the key? *Journal of Banking and Finance*, Vol. 27 (1993), pp. 1147-1170.

**Banco Central do Brasil.** Notas econômico-financeiras para a imprensa. Dívida Pública Mobiliária Federal Interna e Mercado Aberto. Séries Históricas - Prazo Médio da DPMFi em Poder do Público por Modalidade e Composição da DPMFi em Poder do Público por Tipo de Rentabilidade. Brasília, 2006. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/?ECOIMPMAB>. Acesso em: 12 dez. 2006.

\_\_\_\_\_. Circular 2972/2000. Brasília, 2000. Disponível em: <http://www5.bcb.gov.br/normativos/detalhamentocorreio.asp?N=100050338&C=2972&ASS=CIRCULAR+2.972>. Acesso em: 12 dez. 2006.

Excluído: ¶

**Bolsa de Mercadorias & Futuros.** Especificações do Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. São Paulo, 2001. Disponível em: [http://www.bmf.com.br/portal/pages/frame.asp?idioma=1&area=contratos&link\\_char=financeiro13](http://www.bmf.com.br/portal/pages/frame.asp?idioma=1&area=contratos&link_char=financeiro13). Acesso em: 12 dez. 2006.

**Fisher, L.; Weil, R. L.** Coping with the risk of interest rate fluctuations. *Journal of Business* (1971), pp. 408-431.

**Fong, H.G. e Vasicek, O.A.** A risk minimizing strategy for portfolio immunization. *Journal of Finance*, Vol. 39, (1984), pp. 1541-6.

**Garcia, M. G. P.** Public Debt Management, Monetary Policy and Financial Institutions. Rio de Janeiro: PUC-Rio. Departamento de Economia (Texto para discussão, n. 464), 2002.

**Haugen, R. A.** Modern Investment Theory. New Jersey: Prentice Hall. 5th ed., 2001.

**Hull, J.** Introdução aos Mercados Futuros e de Opções. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros & Cultura Editores Associados. 2ª edição rev. e ampl., 1996.

\_\_\_\_\_. Opções, Futuros e Outros Derivativos. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros & Cultura Editores Associados. 3ª edição, 1998.

**Jorion, P.** Value at Risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros. 2ª edição, 2003.

**Kahn, R. N.; Lochoff, R.** Convexity and exceptional return: An application of return attribution analysis to fixed-income management. *Journal of Portfolio Management*, Winter 1990, 16,2, pp. 43-47.

**Lacey, N. J.; Nawalkha, S. K.** Convexity, Risk and Returns. *The Journal of Fixed Income*, December 1993, pp. 72-79.

**Livingston, M.; Zhou L.** Exponential duration: a more accurate estimation of interest rate risk. *The Journal of Financial Research*, Vol. XXVIII, No.3, Fall 2005, pp. 343-361.

**Macaulay, F. R.** Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856. New York: National Bureau of Economic Research, 1938.

**Mato, M. A. M.** Classic and modern measures of risk in fixed-income portfolio optimization. *The Journal of Risk Finance*, Vol. 6, No. 5 (2005), pp. 416-423.

**Secretaria do Tesouro Nacional.** Dívida Pública: Plano Anual de Financiamento 2005. Brasília, 2004. Disponível em: [http://www.stn.fazenda.gov.br/hp/downloads/resultado/paf\\_2005.pdf](http://www.stn.fazenda.gov.br/hp/downloads/resultado/paf_2005.pdf). Acesso em: 12 dez. 2006.

\_\_\_\_\_. Dívida Pública: Plano Anual de Financiamento 2006. Brasília, 2006a. Disponível em: [http://www.stn.fazenda.gov.br/hp/downloads/resultado/PAF\\_2006.pdf](http://www.stn.fazenda.gov.br/hp/downloads/resultado/PAF_2006.pdf). Acesso em: 12 dez. 2006.

\_\_\_\_\_. Relatório Anual da Dívida Pública 2005. Brasília, 2006b. Disponível em: [http://www.stn.fazenda.gov.br/divida\\_publica/downloads/Relatorio\\_Divida\\_2005.pdf](http://www.stn.fazenda.gov.br/divida_publica/downloads/Relatorio_Divida_2005.pdf). Acesso em: 12 dez. 2006.

**Smith, D. J.** A Note on the Derivation of Closed-Form Formulas for Duration and Convexity Statistics On and Between Coupon Dates. *The Journal of Financial Engineering*, Vol. 7, No. 2 (1998), pp.177-193.

**Soto, G. M.** Duration Models and IRR Management: A question of dimensions? *Journal of Banking and Finance*, 28 (2004), pp.1089-1110.

**Szegö, G.** Measures of risk. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26 (2002), pp. 1253-72.

**Uryasev, S. e Rockafellar, R.T.** Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26 (2002), pp. 1443-71.

## 7 Anexos

### Anexo 1

Smith (1998) apresentou fórmulas fechadas, para o cálculo da duração e convexidade de títulos, bastante interessantes pela praticidade de seu uso.

A duração (DUR) e a convexidade (CONV) de um título, com pagamentos periódicos, podem ser representadas pelas seguintes equações:

$$DUR_0 = \frac{1+i}{i} - \frac{1+i + [N \times (c-i)]}{[c \times ((1+i)^N - 1)] + i}$$

$$DUR = DUR_0 - \frac{t}{T}$$

$$CONV_0 = \frac{\left[ 2 \times c \times (1+i)^2 \times \left( (1+i)^N - \frac{1+i + (i \times N)}{1+i} \right) \right] + [N \times (N+1) \times i^2 \times (i-c)]}{i^2 \times (1+i)^2 \times \{ [c \times ((1+i)^N - 1)] + i \}}$$

$$CONV = CONV_0 - \left( \frac{t/T}{(1+i)^2} \right) \times \left[ (2 \times DUR_0) + \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \right]$$

onde

$t/T$  representa a fração do período equivalente ao tempo decorrido desde a última data de pagamento de cupom de juros;

$i$  representa o rendimento do título (*yield*) por período;

$c$  corresponde à taxa de cupom de juros por período, ou seja, é o valor do cupom dividido pelo valor nominal do título;

$N$  é o número de períodos remanescentes ou a quantidade de pagamentos até o vencimento do título.

As medidas são calculadas com base em sua periodicidade, ou seja, caso os pagamentos de cupons sejam semestrais, a duração e a convexidade estarão expressas em base semestral.

Para anualizar a duração e a convexidade, pode-se usar as seguintes fórmulas:

$$DUR_{anual} = \frac{DUR}{per}$$

$$CONV_{anual} = \frac{CONV}{per^2}$$

onde

*per* representa o número de períodos por ano, ou seja, para pagamentos semestrais *per* é igual a 2.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)