

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO COPPEAD DE ADMINISTRAÇÃO

Jaqueline Terra Moura Marins

Ensaio sobre a Aplicação de
Técnicas de Redução de Variância em Simulação Monte Carlo
para a Avaliação de Opções e de Risco de Crédito

Rio de Janeiro

Março de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Jaqueline Terra Moura Marins

**Ensaaios sobre a Aplicação de
Técnicas de Redução de Variância em Simulação Monte Carlo
para a Avaliação de Opções e de Risco de Crédito**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto
Coppead de Administração, Universidade
Federal do Rio de Janeiro, como parte dos
requisitos necessários à obtenção do título de
Doutor em Administração

Orientador: Eduardo Saliby
Ph.D. em Pesquisa Operacional
(University of Lancaster, Reino Unido)

Rio de Janeiro

Março de 2006

ENSAIOS SOBRE A APLICAÇÃO DE
TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE VARIÂNCIA EM SIMULAÇÃO MONTE CARLO
PARA A AVALIAÇÃO DE OPÇÕES E DE RISCO DE CRÉDITO

Jaqueline Terra Moura Marins

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Administração do Instituto COPPEAD de Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Administração.

Aprovada por:

_____ - Orientador
Presidente, Prof. Eduardo Saliby, Ph.D. (University of Lancaster)

_____ -
Prof. Eduardo Facó Lemgruber, Ph.D. (University of California)

_____ -
Prof. Régis da Rocha Motta, Ph.D. (Royal School of Mines)

_____ -
Prof. Gastão Coelho Gomes, D.Sc. (COPPE/UFRJ)

_____ -
Prof. Octavio Manuel Bessada Lion, D.Sc. (COPPE/UFRJ)

Rio de Janeiro
Março, 2006

Marins, Jaqueline Terra Moura

Ensaio sobre a Aplicação de Técnicas de Redução de Variância em Simulação Monte Carlo para a Avaliação de Opções e de Risco de Crédito / Jaqueline Terra Moura Marins. - - Rio de Janeiro: UFRJ / Coppead, 2006. 156 f.

Orientador: Eduardo Saliby

Tese (Doutorado em Administração) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Coppead de Administração, 2006.

1. Técnicas de Redução de Variância. 2. Derivativos e Risco de Crédito 3. Simulação – Teses. I. Saliby, Eduardo (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Coppead de Administração. III. Título.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus-Pai, agradeço pela proteção.

A meu marido, André, pelo incentivo e à minha filha, Beatriz, por quem tenho um amor incondicional e infinito.

A meus pais, pelo apoio e compreensão.

Ao amigo e Professor Eduardo Saliby, não apenas pela brilhante orientação, mas também pela confiança e companheirismo.

À amiga, colega de curso e parceira de trabalho, Joséte Florêncio dos Santos, pela troca de boas idéias e pelas horas divertidíssimas que tivemos.

Aos colegas de curso, por terem proporcionado um ambiente agradável e intelectualmente saudável.

Aos funcionários do Coppead, pela simpatia e presteza.

RESUMO

MARINS, Jaqueline Terra Moura. **Ensaio sobre a Aplicação de Técnicas de Redução de Variância em Simulação Monte Carlo para a Avaliação de Opções e de Risco de Crédito**. Rio de Janeiro, 2006. Orientador: Eduardo Saliby. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPEAD, 2006. Tese de Doutorado em Administração.

Esse estudo utiliza a simulação Monte Carlo para a avaliação de opções e a estimação do risco de crédito de carteira de ativos de renda fixa. Várias técnicas de redução de variância são aplicadas ao processo de simulação, em especial a Amostragem por Importância e a Amostragem Descritiva. É efetuada uma análise comparativa dos desempenhos de cada técnica, no que se refere à precisão das estimativas obtidas por simulação. O estudo está dividido em três ensaios, cada qual desenvolvendo exercícios específicos de simulação.

No primeiro ensaio, o objeto de simulação consiste em opções européias de compra do tipo *plain-vanilla*, formadas teoricamente. As técnicas de redução de variância empregadas são a Amostragem Descritiva e, quando as opções tornam-se fora-do-dinheiro, a Amostragem por Importância.

No segundo ensaio, o objeto de simulação consiste em opções asiáticas de compra, também formadas teoricamente. Desta vez, um conjunto maior de técnicas redutoras de variância é aplicado: Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva, Quasi-Monte Carlo e, quando as opções tornam-se fora-do-dinheiro, Amostragem por Importância. Nos dois primeiros ensaios, o uso das técnicas de simulação mostrou-se bastante vantajoso em relação ao método padrão de simulação, com destaque para a Variável de Controle e a Amostragem Descritiva. O emprego da Amostragem por Importância nas regiões fora-do-dinheiro das opções também apresentou resultados proveitosos.

No terceiro ensaio, o objeto simulado é o risco de crédito de uma carteira teórica formada por ativos de renda fixa. O modelo de simulação de risco de crédito utilizado baseia-se numa versão simplificada, porém bastante utilizada, da metodologia *CreditMetrics*, na qual somente o risco de *default* é considerado. Dada a raridade dos eventos de *default*, a Amostragem por Importância é utilizada como técnica de simulação neste último ensaio, para se tentar obter estimativas mais

precisas do risco de crédito. Esta técnica também é associada à Amostragem Descritiva, na tentativa de se gerar ganhos adicionais de precisão. O uso da Amostragem por Importância, seja na sua forma pura ou na forma combinada com a Amostragem Descritiva, mostrou-se bastante vantajoso em relação ao método amostral padrão de simulação.

ABSTRACT

MARINS, Jaqueline Terra Moura. **Ensaio sobre a Aplicação de Técnicas de Redução de Variância em Simulação Monte Carlo para a Avaliação de Opções e de Risco de Crédito**. Rio de Janeiro, 2006. Orientador: Eduardo Saliby. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPEAD, 2006. Tese de Doutorado em Administração.

This work uses Monte Carlo Simulation to evaluate option's price and to estimate fixed income portfolio credit risk. Many variance reduction techniques are applied to the simulation process, especially Importance Sampling and Descriptive Sampling. A comparative analysis of each technique's performance is conducted. This work is split in three essays, each one develops specific simulation exercises.

On the first essay the simulated object is theoretical plain-vanilla european calls. The variance reduction techniques applied are Descriptive Sampling and, when the calls become out-of-the-money, Importance Sampling.

On the second essay, theoretical asian calls are simulated. A major set of techniques is implemented this time: Antithetic Variates, Control Variate, Latin Hypercube Sampling, Descriptive Sampling, Quasi-Monte Carlo and, for out-of-the-money calls, Importance Sampling. Along the first two essays, the mentioned variance reduction techniques were very advantageous compared to the standard simulation method, especially Control Variate and Descriptive Sampling techniques. Importance Sampling applied to out-of-the-money options also presented useful results.

On the third essay the simulated object is the credit risk of a theoretical fixed income portfolio. The credit risk simulation model used here is based on a simplified, but very known, version of CreditMetrics methodology, where only the risk of default is considered. Since defaults are rare events, Importance Sampling technique is applied in this last essay, in order to try to obtain more precise credit risk estimates. Importance Sampling combined with Descriptive Sampling was also used in order to improve precision. Importance Sampling, either in its standard form or combined with Descriptive Sampling, was very advantageous compared to the standard sampling simulation method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1.1 – Síntese dos dados considerados nas simulações	15
Tabela 1.1 - Prêmios das opções de compra européias obtidos pelo modelo de Black e Scholes e estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS). Diferentes valores de preços de exercício (K) e de dimensionalidade foram considerados. Em cada corrida de simulação, foram geradas 1000 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento totalizou 40 corridas. Os demais parâmetros de simulação encontram-se no Quadro 1.1. Também é apresentado o erro-padrão das estimativas dos prêmios.....	18
Tabela 1.2 - Probabilidades de exercício das opções de compra européias obtidas pelo modelo de Black e Scholes e estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS). Diferentes valores de preços de exercício (K) e de dimensionalidade foram considerados. Em cada corrida de simulação, foram geradas 1000 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento totalizou 40 corridas. Os demais parâmetros de simulação encontram-se no Quadro 1.1. Também é apresentado o erro-padrão das estimativas das probabilidades de exercício.....	18
Gráfico 1.1- Prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 55 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 3,7090.....	20
Gráfico 1.2 - Probabilidades de exercício das opções de compra européias estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 55 e a correspondente probabilidade de Black e Scholes (Nd2) é de 47,97%.	20

Tabela 1.3 - Razão entre os erros-padrão das estimativas de prêmio obtidas por simulação com o uso da Amostragem Descritiva e da Amostragem Aleatória Simples, para diferentes dimensionalidades (Dim) e preços de exercício (K). Quanto menor o valor da razão, maior o ganho de precisão obtido com a utilização da Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples..... 21

Gráfico 1.3 - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 35 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 20,18..... 22

Gráfico 1.4 - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 55 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 3,7090..... 23

Gráfico 1.5 - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 75 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 0,1251..... 23

Gráfico 1.6a - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função do preço de exercício (K). Foram utilizadas 50 dimensões. 25

Gráfico 1.6b - Erro-Padrão das probabilidades de exercício das opções de compra européias estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função do preço de exercício (K). Foram utilizadas 50 dimensões. 26

Gráfico 1.7a - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Probabilidade de Exercício de Black e Scholes ($N(d_2)$). Foram utilizadas 50 dimensões.....	27
Gráfico 1.7b - Erro-Padrão das probabilidades de exercício das opções de compra européias estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Probabilidade de Exercício de Black e Scholes ($N(d_2)$). Foram utilizadas 50 dimensões.	27
Gráfico 1.8 - Coeficiente de Variação dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função do Preço de Exercício K. Foram utilizadas 50 dimensões.....	29
Gráfico 1.9 - CV em Função do Preço de Exercício K (Dimensão = 100)	30
Quadro 1.2: Parâmetros de simulação usados no experimento	43
Tabela 1.4: Prêmios estimados das opções européias de compra, usando a Amostragem por Importância padrão (AI+AAS). O erro-padrão das estimativas e a solução de Black e Scholes (B&S) também são apresentados.	48
Tabela 1.5: Prêmios estimados das opções européias de compra, usando a Amostragem por Importância em conjunto com a Amostragem Descritiva (AI+AD). O erro-padrão das estimativas e a solução de Black e Scholes (B&S) também são apresentados.	48
Gráfico 1.10: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ ? para as três opções européias (Dimensão = 5).....	49

Gráfico 1.11: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ para as três opções europeias (Dimensão = 10).....	50
Gráfico 1.12: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ para as três opções europeias (Dimensão = 20).....	50
Gráfico 1.13: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ ? para as três opções europeias (Dimensão = 100)	51
Quadro 2.1 – Síntese dos dados considerados nas simulações	61
Tabela 2.1 - Prêmios das opções de compra do tipo asiáticas obtidos pela simulação-parâmetro (Monte Carlo tradicional de 10.000 corridas) e obtidos segundo o modelo de Black & Scholes, com as respectivas diferenças algébricas entre os métodos.	75
Tabela 2.2 - Prêmios das opções de compra do tipo asiáticas estimados por simulação, segundo os métodos indicados. Em cada corrida de simulação, foram geradas 1023 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento totalizou 40 corridas. Também são apresentados a variância e o erro quadrático médio dos prêmios estimados.....	78
Tabela 2.3 - Variação percentual do erro-padrão dos prêmios de opções de compra asiáticas estimados por simulação segundo os métodos indicados, em relação ao erro-padrão do prêmio estimado pelo método Amostragem Aleatória Simples.	79
Tabela 2.4 - Tempo de processamento dos scripts de 40 corridas de simulação dos prêmios, desenvolvidos para os métodos indicados. Também foram apresentados tempos de processamento de scripts de 1.000 corridas de simulação para alguns métodos. O tempo de processamento está apresentado em segundos.	80

Tabela 2.5: Probabilidades de Exercício e Prêmios das opções de compra do tipo asiáticas obtidos pela Simulação-Parâmetro (10.000 corridas de tamanho 1.000 cada) para diversos valores de preço de exercício K.....	90
Tabela 2.6: Prêmios e Erros-Padrão das opções de compra do tipo asiáticas estimados por AI+AAS e AI+AD, para vários valores do parâmetro de deslocamento μ e vários valores do preço de exercício K.....	91
Gráfico 2.1 – Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AAS e AI+AD em relação aos obtidos por AAS, para vários valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).	93
Tabela 2.7: Prêmios e Erros-Padrão das opções de compra do tipo asiáticas estimados por AI+AAS+VC e AI+AD+VC, para alguns valores do parâmetro de deslocamento μ e vários valores do preço de exercício K.....	94
Tabela 2.7 (cont.): Prêmios e Erros-Padrão das opções de compra do tipo asiáticas estimados por AI+AAS+VC e AI+AD+VC, para alguns valores do parâmetro de deslocamento μ e vários valores do preço de exercício K.....	95
Gráfico 2.2 - Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AAS e AI+AAS+VC em relação aos obtidos por AAS para um conjunto reduzido de valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).	97
Gráfico 2.3 - Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AD e AI+AD+VC em relação aos obtidos por AAS para um conjunto reduzido de valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).	98

Gráfico 2.4 - Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AAS+VC e AI+AD+VC em relação aos obtidos por AAS para um conjunto reduzido de valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).	99
Figura 3.1: Ilustração do cálculo da Distância-Para-Default (DD)	108
Tabela 3.1: Matriz de probabilidades de transição em 1 ano da KMV, baseada em classes não coincidentes de Freqüências Esperadas de <i>Default</i>	110
Figura 3.2: Avaliação de um ativo de fluxo único de caixa sujeito a risco de <i>default</i>	111
Figura 3.3: Estrutura para a avaliação de risco segundo a metodologia CreditRisk+.....	114
Tabela 3.1: Notações do modelo <i>CreditRisk+</i> para o agrupamento das exposições	116
Tabela 3.2: Notações do modelo <i>CreditRisk+</i> para o agrupamento das exposições (cont.)	117
Figura 3.4 Estrutura da metodologia <i>CreditMetrics</i> para a avaliação do risco de crédito de uma carteira.	125
Tabela 3.3: Matriz de probabilidades de transição para três empresas emissoras, com os seguintes <i>ratings</i> iniciais: Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.....	126
Figura 3.5: Distribuição dos retornos financeiros de um instrumento, com a identificação dos limites de mudança de <i>rating</i> de crédito do seu emissor.	130
Tabela 3.4: Probabilidades conjuntas de migração de <i>rating</i> para dois emissores, com <i>rating</i> inicial de BB e A respectivamente.	131

Figura 3.6: Distribuição do valor futuro de uma carteira formada por dois títulos.....	133
Tabela 3.5: Cenários de retornos correlacionados de instrumentos emitidos por 3 empresas. Os <i>ratings</i> iniciais são Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.	135
Tabela 3.6: Mapeamento dos cenários de retornos correlacionados em cenários de <i>rating</i> de crédito para instrumentos emitidos por 3 empresas. Os <i>ratings</i> iniciais são: Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.....	136
Tabela 3.7: Avaliação dos cenários de <i>rating</i> de crédito. Os <i>ratings</i> iniciais são: Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.....	137
Figura 3.7: Distribuição de frequência dos valores futuros da carteira.....	138
Figura 3.8: Distribuição das perdas futuras (L) de uma carteira teórica formada por títulos e empréstimos emitidos por m diferentes emissores.	141
Tabela 3.8: Estimativas da probabilidade de perdas totais da carteira superiores ao valor-limite ($\text{Prob}(L>35)$), obtidas por diferentes métodos de simulação (AAS, AI+AAS e AI+AD). Foram considerados dois tipos de dependência entre os emissores. A média e o erro-padrão das estimativas foram calculados para 40 corridas de simulação, cada qual contendo 1000 observações.	150

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1	
1.1 Relevância e Objetivos da Pesquisa	1	
1.2 Delimitação da Pesquisa	2	
1.3 Organização da Tese	3	
ENSAIO 1 – PRIMEIRA PARTE		
AMOSTRAGEM DESCRITIVA NO APREÇAMENTO DE OPÇÕES		
EUROPÉIAS POR MEIO DE SIMULAÇÃO <i>MONTE CARLO</i> : O EFEITO DA		
DIMENSIONALIDADE E DA PROBABILIDADE DE EXERCÍCIO NO GANHO		
DE PRECISÃO		8
1 INTRODUÇÃO	10	
2 METODOLOGIA	11	
2.1 Opções Europeias	11	
2.2 O Modelo de Simulação de <i>Monte Carlo</i>	13	
2.3 Técnicas de Amostragem Utilizadas.....	15	
3 RESULTADOS E SUA ANÁLISE	17	
4 CONCLUSÕES	30	
ENSAIO 1 - SEGUNDA PARTE		
AVALIAÇÃO DE OPÇÕES EUROPÉIAS FORA-DO-DINHEIRO POR		
SIMULAÇÃO MONTE CARLO: O USO CONJUNTO DA AMOSTRAGEM POR		
IMPORTÂNCIA E DA AMOSTRAGEM DESCRITIVA		33
1 Introdução	35	

2	Metodologia.....	38
2.1	Opções Europeias e a Solução de Black e Scholes	38
2.2	O Modelo de Simulação de <i>Monte Carlo</i>	40
2.3	Amostragem Aleatória Simples (AAS).....	43
2.4	Técnicas de Redução de Variância	44
2.4.1	Amostragem por Importância Padrão (AI+AAS).....	44
2.4.2	Amostragem por Importância com Amostragem Descritiva (AI+AD).....	45
3	RESULTADOS	46
4	CONCLUSÕES	52

ENSAIO 2 – PRIMEIRA PARTE

	APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE VARIÂNCIA NA SIMULAÇÃO POR MONTE CARLO DO PRÊMIO DE OPÇÕES DE COMPRA DO TIPO ASIÁTICA	54
1	INTRODUÇÃO	56
2	METODOLOGIA	57
2.1	Opções Asiáticas	57
2.2	Escolha do Parâmetro para os Prêmios Estimados.....	58
2.3	O Modelo de Simulação de <i>Monte Carlo</i>	59
2.4	Amostragem Aleatória Simples (AAS).....	62
2.5	Técnicas de Redução de Variância	62
2.5.1	Variáveis Antitéticas (VA)	62
2.5.2	Variável de Controle com Amostragem Aleatória Simples (VC com AAS).....	64

2.5.3	Hipercubo Latino (HCL).....	68
2.5.4	Amostragem Descritiva (AD).....	69
2.5.5	Variável de Controle com Amostragem Descritiva (VC com AD).....	71
2.5.6	Quasi-Monte Carlo usando Seqüência de <i>Sobol</i> (QMC <i>Sobol</i>) ...	71
3	ANÁLISE DOS RESULTADOS	74
3.1	Avaliação da Precisão das Técnicas em Relação ao Método Padrão.....	74
3.2	Avaliação do Tempo de Processamento	80
4	CONCLUSÕES	81

ENSAIO 2 – SEGUNDA PARTE

	APLICAÇÃO DA AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA À SIMULAÇÃO MONTE CARLO DE OPÇÕES ASIÁTICAS FORA-DO-DINHEIRO.....	84
1	INTRODUÇÃO	85
2	METODOLOGIA	86
2.1	Amostragem por Importância Padrão com Variável de Controle (AI+AAS+VC).....	87
2.2	Amostragens por Importância e Descritiva com Variável de Controle (AI+AD+VC).....	88
3	RESULTADOS	88
4	CONCLUSÕES	99

ENSAIO 3

A AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA APLICADA À SIMULAÇÃO POR MONTE CARLO DO RISCO DE CRÉDITO DE UMA CARTEIRA DE ATIVOS DE RENDA FIXA	101
1 INTRODUÇÃO	103
2 REVISÃO TEÓRICA.....	104
2.1 Modelo KMV	104
2.1.1 Estimação do Valor dos Ativos e da Volatilidade dos Retornos dos Ativos	106
2.1.2 Cálculo da Distância-para- <i>Default</i>	107
2.1.3 Tradução da Distância-para- <i>Default</i> para Frequência Esperada de <i>Default</i>	109
2.1.4 Obtenção da Matriz de Probabilidades de Transição e do VaR de Crédito	109
2.2 CreditRisk +	113
2.3 Credit Portfolio View	120
2.4 CreditMetrics.....	123
2.4.1 Bloco 1: VaR de Crédito para um Único Instrumento	125
2.4.2 Bloco 2: Correlações e Distribuição Conjunta de Probabilidade de Migração.....	128
2.4.3 Bloco 3: Exposição.....	138
3 METODOLOGIA	139
3.1 O Modelo de Simulação <i>Monte Carlo</i> de Risco de Crédito	139
3.2 Técnicas de Redução de Variância	143

3.2.1	Amostragem por Importância para o Caso de Emissores Independentes	144
3.2.2	Amostragem por Importância para o Caso de Emissores com Forte Dependência.....	147
4	RESULTADOS	148
5	CONCLUSÕES	151
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	152
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	154

INTRODUÇÃO

1.1 Relevância e Objetivos da Pesquisa

A simulação Monte Carlo é uma abordagem de estudo bastante utilizada atualmente em diferentes áreas de conhecimento. Esta abordagem possibilita a solução de problemas complexos, cuja alternativa de resolvê-los de forma analítica acabaria constituindo-se numa tarefa impossível ou bastante difícil.

Uma das maiores vantagens do uso da simulação como método de solução de problemas é a obtenção da distribuição de probabilidades dos inúmeros resultados possíveis do problema. Isso permite a aplicação da teoria estatística ao modelo, além de possibilitar a realização de uma análise de sensibilidade sobre o mesmo.

O uso da simulação Monte Carlo em Finanças tem se tornado cada vez mais freqüente, já que, muitas das vezes, o comportamento de importantes variáveis financeiras tem sido modelado probabilisticamente e, conseqüentemente, suas estimativas obtidas de forma mais simples por meio da simulação.

Uma desvantagem da simulação Monte Carlo é a baixa precisão das estimativas obtidas. Esta imprecisão advém, em grande parte, do método amostral tradicionalmente utilizado em experimentos de simulação, a Amostragem Aleatória Simples. Este fato justifica utilizar as chamadas técnicas de redução de variância no processo de simulação, que, em sua maioria, visam impor métodos amostrais mais controlados, permitindo assim obter estimativas mais precisas, sem um correspondente aumento do esforço de amostragem. A aplicação das técnicas de redução de variância nas simulações financeiras não é muito explorada atualmente.

Esse estudo utiliza a simulação Monte Carlo para a precificação de derivativos do tipo opções e para a avaliação do risco de crédito de carteiras de

ativos. Técnicas de redução de variância são aplicadas ao processo de simulação e uma análise comparativa dos desempenhos de cada técnica no que se refere à precisão das estimativas obtidas por simulação é efetuada.

1.2 Delimitação da Pesquisa

Pode-se classificar uma simulação em¹:

- determinística ou probabilística;
- estática ou dinâmica;
- discreta ou contínua.

Os ensaios empíricos de simulação aqui realizados consistem em modelos probabilísticos, uma vez que os modelos contêm variáveis aleatórias. Além disso, são considerados dinâmicos e discretos. Dinâmicos pois estudam comportamentos ao longo do tempo. Discretos pois a marcação do tempo é feita de forma pontual.

São aqui empregadas as principais técnicas de redução de variância: Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva, Amostragem por Importância e Quasi-Monte Carlo por seqüência de Sobol.

A simulação Monte Carlo aqui realizada restringe-se à área de Finanças, mais especificamente aos instrumentos derivativos e de risco de crédito. Os derivativos analisados são opções europeias e asiáticas de compra. O modelo simulado de risco de crédito refere-se apenas a uma carteira formada por títulos e empréstimos, não considerando instrumentos derivativos que eventualmente necessitariam de

¹ Saliby, 1989.

hipóteses mais complexas para o modelo (tais como curvas de taxas forward estocásticas²).

1.3 Organização da Tese

Este estudo realiza três ensaios empíricos de simulação. No ensaio 1, o instrumento avaliado é uma opção básica do tipo europeia, criada hipoteticamente. Cabe notar que, embora o uso de simulação para precificar opções europeias dentro das premissas do Modelo de Black e Scholes (1973) seja desnecessária, por se dispor de uma solução analítica, é justamente este fato que faz deste problema um referencial na simulação aplicada ao estudo de opções, permitindo que o erro de simulação seja bem computado.

No ensaio 1, primeiramente é empregada a Amostragem Descritiva (Saliby, 1990) como técnica de redução de variância, por ser esta uma técnica que vem apresentando melhores resultados do que a abordagem tradicional da Amostragem Aleatória Simples (Moreira, 2001; Araújo, 2001; Saliby e Moreira, 2002).

O ensaio 1 aborda o problema da dimensionalidade do modelo de simulação, já que este é um aspecto bastante pertinente à simulação Monte Carlo na área de Finanças, porém pouco explorado. A dimensionalidade do modelo, ou equivalentemente o seu nível de dimensão, corresponde à quantidade de componentes aleatórios que o modelo possui. Exemplos de dimensionalidade são o número de etapas (passos) em que é simulada a trajetória temporal dos preços do ativo-objeto de uma opção e a quantidade de ativos financeiros componentes de uma carteira. Problemas estudados por meio de simulação muitas vezes necessitam

² Este tipo de hipótese a respeito das taxas forward também faz com que o risco de crédito seja analisado independentemente do risco de mercado, o que acaba sendo uma outra limitação do modelo.

de modelos probabilísticos envolvendo um elevado número de dimensões. Mesmo em simples avaliações, como no caso da precificação de uma única opção, a dimensionalidade do problema pode assumir níveis muito elevados. Assim sendo, é objetivo deste ensaio entender os efeitos da dimensionalidade na precisão dos resultados obtidos pelas técnicas de simulação Monte Carlo.

Este ensaio também avalia o que ocorre com a qualidade das estimativas de simulação quando diferentes probabilidades de exercício são consideradas. Como se observa uma queda na qualidade das estimativas dos prêmios das opções com baixa probabilidade de exercício (opções fora-do-dinheiro), mesmo com o uso da Amostragem Descritiva, emprega-se também a Amostragem por Importância ao final do ensaio 1, que, genericamente, é uma técnica de simulação apropriada para tornar eventos raros cada vez menos raros (Charnes, 2000).

A fim de ser avaliado se o padrão de comportamento das opções europeias (tipo mais simples de opção) notado no ensaio 1 também se observa em outros tipos de opções, foi considerada uma opção exótica no ensaio 2. Trata-se de uma opção de compra do tipo asiática cuja precificação, desta vez, não possui solução analítica. No ensaio 2, além da Amostragem Descritiva, outras técnicas de redução de variância são avaliadas. Nota-se, como no caso da opção europeia, que todas as técnicas empregadas perdem eficiência na redução de variância à medida que diminui a probabilidade de exercício das opções, o que também leva à aplicação da Amostragem por Importância no caso da opção asiática.

No ensaio 3, um outro exercício de simulação em Finanças é realizado. Trata-se de uma avaliação por simulação do risco de crédito de uma carteira hipotética de ativos. Existem diversos modelos de risco de crédito de carteira em estudo (Crouhy et. al., 2000 e Gordy, 2000), todavia o ensaio em questão não se

destina a entrar no mérito de avaliar os diferentes modelos quanto a sua capacidade de gerar consistentes medidas de risco. Neste ensaio, elege-se o *CreditMetrics* proposto pelo JP Morgan (*CreditMetrics – Technical Document*, 1997) como modelo de simulação de VaR (*Value-at-Risk*) de crédito.

A metodologia proposta pelo *CreditMetrics*, em sua versão simplificada, baseia-se na estimação da distribuição futura de perdas de uma carteira, formada por títulos e empréstimos, decorrentes de eventos de default dos respectivos emissores.

Diferentemente da metodologia de VaR de mercado (risco de mercado), não se pode admitir que a distribuição de probabilidades dos retornos da carteira no caso do VaR de crédito seja Normal. De fato, o formato esperado desta vez é altamente assimétrico à esquerda, porque os retornos de crédito são caracterizados por uma grande probabilidade de se obter pequenos lucros e uma pequena chance de se perder muito com os eventos de *defaults*. Assim, os percentis desta nova distribuição não mais podem ser estimados a partir da sua média e do seu desvio padrão apenas. O cálculo do VaR de crédito requer uma simulação da distribuição das perdas futuras da carteira em decorrência de default dos emissores dos títulos componentes dessa carteira. Isto é feito no ensaio 3 e as estimativas de VaR de crédito conseqüentemente obtidas são submetidas a técnicas de redução de variância para também se verificar a possibilidade de ganho de precisão.

Cada ensaio é iniciado com uma revisão teórica dos pontos pertinentes. No caso do ensaio 1, apresenta-se um breve relato do modelo de simulação Monte Carlo para avaliação de opções européias e das técnicas de redução de variância lá utilizadas (Amostragem Descritiva e Amostragem por Importância). Já no ensaio 2, a revisão trata do modelo de simulação Monte Carlo para avaliação de opções

asiáticas e do restante das técnicas de simulação empregadas (Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Quasi-Monte Carlo e Amostragem por Importância). Finalmente, no ensaio 3, faz-se uma revisão dos modelos mais conhecidos de risco de crédito.

Ao final de cada ensaio, são discutidos os resultados, apresentadas as conclusões e feitas sugestões para pesquisas futuras.

Considerações finais sobre os três ensaios são feitas ao final da Tese de forma consolidada, onde são apresentadas conclusões gerais e contribuições esperadas do estudo. As referências bibliográficas dos três ensaios são apresentadas ao final da tese.

ENSAIO 1

PRIMEIRA PARTE: AMOSTRAGEM DESCRITIVA NO APREÇAMENTO DE OPÇÕES EUROPÉIAS POR MEIO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO: O EFEITO DA DIMENSIONALIDADE E DA PROBABILIDADE DE EXERCÍCIO NO GANHO DE PRECISÃO

SEGUNDA PARTE: AVALIAÇÃO DE OPÇÕES EUROPÉIAS FORA-DO-DINHEIRO POR SIMULAÇÃO MONTE CARLO: O USO CONJUNTO DA AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA E DA AMOSTRAGEM DESCRITIVA

ENSAIO 1 – PRIMEIRA PARTE

AMOSTRAGEM DESCRITIVA NO APREÇAMENTO DE OPÇÕES

EUROPÉIAS POR MEIO DE SIMULAÇÃO *Monte Carlo*: O EFEITO DA

DIMENSIONALIDADE E DA PROBABILIDADE DE EXERCÍCIO NO GANHO DE

PRECISÃO

RESUMO

Esta primeira parte do ensaio 1 avalia o efeito da dimensionalidade e da probabilidade de exercício de opções europeias no ganho de precisão obtido com o uso da Amostragem Descritiva para o apreçamento destas opções por meio de simulação *Monte Carlo*, em lugar da abordagem tradicional da Amostragem Aleatória Simples. Os resultados mostram que a eficiência estatística das duas técnicas não é afetada pelo aumento da dimensionalidade do problema. Contudo, em relação ao preço de exercício, embora a Amostragem Descritiva seja mais eficiente do que a Amostragem Aleatória Simples, observa-se uma redução do ganho de precisão à medida que a probabilidade de exercício diminui.

ABSTRACT

This essay evaluates the effect of dimensionality and probability of exercise of an European call on the precision improvement obtained by the usage of Descriptive Sampling on a Monte Carlo Simulation to price such derivative, as opposed to the use of traditional Simple Random Sampling. The results show that the statistical efficiency of both techniques is not affected by an increase of dimensionality. However, as to the exercise price, although Descriptive Sampling proved to be more

efficient than Simple Random Sampling, the improvement subdues as the option's exercise probability reduces.

1 INTRODUÇÃO

O apreçamento de opções por meio de simulação foi inicialmente proposto por Boyle, 1977, que sugeriu um modelo de *Monte Carlo* para simular o processo de geração de preços do ativo-objeto, baseado na premissa de neutralidade ao risco. Esta modelagem, bem como suas sucessoras, manteve como base a abordagem tradicional da simulação *Monte Carlo*, utilizando-se da Amostragem Aleatória Simples para a geração dos componentes aleatórios do modelo.

Uma reconhecida consequência desta abordagem amostral é o baixo nível de precisão das estimativas, que pode ser em parte contornada com o uso das técnicas de redução de variância (Charnes, 2000). Vista como uma técnica de redução de variância de caráter geral em simulação de *Monte Carlo*, a Amostragem Descritiva (Saliby, 1990) tem proporcionado melhores resultados, tanto do ponto de vista da precisão estatística como da velocidade de obtenção das estimativas, em relação àqueles obtidos através das demais técnicas de redução de variância e, conseqüentemente, em relação àqueles obtidos por meio da abordagem tradicional: Amostragem Aleatória Simples (Moreira, 2001; Araújo, 2001; Saliby e Moreira, 2002).

Cabe notar que, embora o uso de simulação para apreçar opções européias dentro das premissas do Modelo de Black e Scholes (1973) seja desnecessária, por se dispor de uma solução analítica, é justamente este fato que faz deste problema um referencial na simulação aplicada ao estudo de opções, da mesma forma que o modelo de filas M/M/1 é utilizado como referência na simulação de filas de espera.

Este ensaio tem por finalidade comparar o desempenho da técnica da Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples no que diz respeito à precisão das estimativas de prêmio obtidas por simulação, diante de

alterações na dimensionalidade do problema. Conseqüentemente, o mesmo modelo de precificação de opções europeias é simulado para diferentes níveis de dimensão (ou equivalentemente em diferentes quantidades de etapas), a fim de que seja avaliado o efeito da dimensionalidade sobre a precisão das estimativas obtidas segundo a Amostragem Descritiva e a Amostragem Aleatória tradicional. Na verdade, uma outra vantagem do uso da simulação para se precificar opções europeias é que a trajetória do ativo-objeto, modelada segundo um movimento geométrico browniano, pode ser gerada em diferentes quantidades de passos ou eventos, permitindo assim variar a dimensionalidade do problema de simulação, ainda que preservando o mesmo caso em estudo.

Os efeitos de alterações na probabilidade de exercício das opções sobre a qualidade das estimativas de simulação também é examinado.

Foi estudado o caso de uma opção de compra europeia, com a expectativa de que o mesmo padrão de comportamento também se observe em outros tipos de opções.

O ensaio está organizado da seguinte forma: a segunda seção descreve a metodologia utilizada, apresentando as técnicas de amostragem empregadas; na seção 3, são apresentados e discutidos os principais resultados obtidos. Por fim, na seção 4, são apresentadas as principais conclusões do estudo.

2 METODOLOGIA

2.1 Opções Europeias

Uma opção de compra europeia apresenta uma função *payoff* bastante simples, definido pelo máximo entre zero e a diferença entre o preço do ativo-objeto na data de exercício e o preço de exercício da opção:

$$\text{Payoff} = \max(0; S_T - K) = (S_T - K)^+ \quad (1)$$

Onde: S_T = preço do ativo-objeto na data de vencimento da opção;

K = preço de exercício da opção.

O preço de uma opção de compra europeia, também chamado de prêmio, representa o valor presente do *payoff* esperado; ele pode ser estimado por simulação de *Monte Carlo* através da média dos *payoffs* simulados trazidos a valor presente. Como as opções de compra europeias dispõem de uma solução analítica fechada para os seus prêmios, dada pelo Modelo de Black e Scholes (1973), esta solução será usada para verificar as estimativas de prêmios obtidas por simulação. O modelo também fornece a probabilidade de exercício, que será usada para verificar as probabilidades de exercício também estimadas por simulação. A fórmula de Black e Scholes para o prêmio de uma opção de compra europeia (c) é:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-R_f T/252} N(d_2) \quad (2)$$

Onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f + \frac{s^2}{2}\right) \cdot T/252}{s \sqrt{T/252}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f - \frac{s^2}{2}\right) \cdot T/252}{s \sqrt{T/252}} = d_1 - s \sqrt{T/252};$$

c = prêmio da opção europeia de acordo com a solução de Black e Scholes;

R_f = taxa de juro livre de risco anual;

T = prazo de vencimento da opção em dias úteis ($T/252$ é o prazo em anos, já que foi considerado 1 ano com 252 dias úteis);

$N(d_i)$ = área sob a curva normal padrão à esquerda de d_i , $i=1$ e 2 ;

S_0 = o preço do ativo no instante inicial;

s = volatilidade anual do ativo-objeto.

A probabilidade de exercício da opção, sob este modelo, é fornecida pela expressão $N(d_2)$.

2.2 O Modelo de Simulação de *Monte Carlo*

Para se obter uma estimativa do prêmio de uma opção europeia, utilizou-se um modelo de simulação de *Monte Carlo* para a geração da trajetória do preço do ativo-objeto ao longo de um período de tempo. Assim como no modelo de Black e Scholes (1973), admitimos que a trajetória de preços do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano, representado pela equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = m dt + s dW \quad (3)$$

Onde:

S = preço do ativo;

m = retorno do ativo;

s = volatilidade do ativo;

dW = processo de *Wiener*.

Com a discretização da Equação (3), a adoção da hipótese de neutralidade ao risco (retorno do ativo sendo igual à taxa de juros livre de risco) e o uso do Lema de Itô, é possível chegar à seguinte expressão para o preço do ativo na data t , considerando o intervalo de tempo dt^1 :

¹ A dedução da equação encontra-se em Hull, 2005.

$$S_t = S_{t-1} e^{[(R_f - s^2 / 2) * dt + s * \sqrt{dt} * z_t]} \quad (4)$$

Onde:

S_t = preço do ativo na data t ;

S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;

dt = intervalo de tempo;

z_t = variável aleatória normal padrão referente à data t .

Os preços do ativo-objeto foram simulados para 42 dias, com base na expressão (4). O intervalo de tempo dt foi obtido pela divisão do prazo de vencimento da opção (42 dias) pela quantidade de passos simulados por trajetória, ou equivalentemente, pela quantidade de dimensões aleatórias (variando de 1 a 100). Em cada corrida de simulação, foram geradas 1000 trajetórias para o preço do ativo-objeto. Para cada valor de dimensionalidade considerado, o experimento de simulação totalizou 40 corridas. Dessa forma, em cada corrida, obteve-se uma estimativa de prêmio, dada pela média dos 1000 *payoffs* trazidos a valor presente por capitalização contínua. O prêmio final estimado em cada experimento foi dado pela média das 40 estimativas e o erro-padrão foi o desvio padrão das 40 estimativas. Esses mesmos cálculos foram feitos para se estimar a probabilidade de exercício das opções, cuja solução analítica dentro do modelo de Black e Scholes é dada pelo termo $N(d_2)$ na Equação (2).

As simulações foram desenvolvidas utilizando o *software* MATLAB 6.5. Os demais parâmetros utilizados em (4) são listados no Quadro 1.1:

Quadro 1.1 – Síntese dos dados considerados nas simulações

S_0	Preço inicial do ativo-objeto da opção (em $t=0$)	\$55
R_f	Taxa anual de juros livre de risco	3%
K	Preços de exercício (\$)	5, 15, 25, ..., 85
s	Volatilidade anual do ativo	40%;
Dim	Nº de dimensões aleatórias	1, 2, ..., 100
T	Prazo de vencimento das opções (dias úteis)	42
dt	Intervalo de tempo	$(T/252)/Dim$
n	Nº de observações por corrida (trajetórias)	1000
m	Nº de corridas	40

Cada valor de K , combinado com os demais parâmetros, define uma única opção europeia a ser apreçada. Foi empregada a mesma semente de números aleatórios em todas as combinações de K consideradas.

2.3 Técnicas de Amostragem Utilizadas

A simulação de *Monte Carlo* utiliza a Amostragem Aleatória Simples como método padrão amostral. Em geral, mas não necessariamente, a Amostragem Aleatória Simples faz uso do método da transformada inversa para gerar valores aleatórios para uma determinada distribuição de probabilidade, a partir de valores gerados segundo uma distribuição uniforme padrão $U(0,1)$ (Banks, Carson e Nelson, 1996).

A Amostragem Descritiva, proposta por Saliby, 1990, diferencia-se da Amostragem Aleatória Simples por não mais utilizar a geração aleatória (ou pseudo-aleatória) dos valores uniformes. Ela se baseia numa seleção totalmente determinística dos valores amostrais das variáveis aleatórias de entrada do modelo, de modo a não se incorrer em erros amostrais desnecessários no processo de simulação. Esses valores, uma vez deterministicamente selecionados, são permutados aleatoriamente. No processo de seleção dos valores, os momentos das amostras de entrada são determinados de modo a serem praticamente iguais aos respectivos valores teóricos, não mais variando entre diferentes corridas. Dado que a variação de conjunto e a variação de seqüência são as fontes de variabilidade das estimativas de simulação (Saliby, 1989), este procedimento de amostragem elimina uma destas fontes: o conjunto, identificado como espúrio pelo proponente, levando assim a estimativas mais precisas.

A fórmula usada para a geração do conjunto de valores descritivos, a serem depois permutados aleatoriamente, é:

$$xd_i = F^{-1}\left(\frac{i-1+0.5}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i-0.5)}{n}\right] \quad (5)$$

Onde:

n = tamanho da amostra descritiva;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$;

xd_i = i -ésimo elemento do conjunto de valores da amostra descritiva;

F^{-1} = inversa da função de distribuição acumulada da variável de entrada X .

No caso de problemas multidimensionais com k dimensões, a variável de entrada passa a ser um vetor de tamanho k . Neste caso, para a composição da amostra descritiva, será necessário gerar k conjuntos descritivos, segundo a expressão (5), usando a inversa da função de probabilidade acumulada apropriada a

cada dimensão. Em seguida, cada conjunto de valores descritivos x_{d_i} é permutado aleatoriamente de forma separada e independente da permutação dos demais $(k-1)$ conjuntos. O j -ésimo valor da variável de entrada será o vetor formado pelos j -ésimos valores de cada conjunto permutado.

3 RESULTADOS E SUA ANÁLISE

As Tabelas 1.1 e 1.2 apresentam os valores analíticos dos prêmios e das probabilidades de exercício das opções estudadas, obtidos pela solução de Black e Scholes (B&S), assim como a média e os respectivos erros-padrão das estimativas dos prêmios e das probabilidades de exercício, obtidos pelos dois métodos de amostragem testados: Amostragem Aleatória Simples e Amostragem Descritiva. Salienta-se que, tanto nas Tabelas 1.1 e 1.2 quanto nos gráficos apresentados adiante, o erro-padrão para a Amostragem Descritiva no caso de uma dimensão é zero pois, neste caso, a permutação dos valores de entrada não altera o resultado da corrida de simulação. De fato, até 5 dimensões, observa-se esse efeito da permutação dos valores de entrada não alterar muito o resultado das corridas, o que faz com que os erros-padrão para essas dimensões mais baixas sejam também muito baixos.

Tabela 1.1 - Prêmios das opções de compra européias obtidos pelo modelo de Black e Scholes e estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS). Diferentes valores de preços de exercício (K) e de dimensionalidade foram considerados. Em cada corrida de simulação, foram geradas 1000 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento totalizou 40 corridas. Os demais parâmetros de simulação encontram-se no Quadro 1.1. Também é apresentado o erro-padrão das estimativas dos prêmios.

K	B&S	Dimensão = 1						Dimensão = 50						Dimensão = 100					
		AAS			AD			AAS			AD			AAS			AD		
		Prêmio	Erro Padrão		Prêmio	Erro Padrão		Prêmio	Erro Padrão		Prêmio	Erro Padrão		Prêmio	Erro Padrão		Prêmio	Erro Padrão	
5	50,0249	50,0861	0,2928	50,0239	-		50,1122	0,3121	50,0199	0,0317		49,9992	0,2991	50,0330	0,0325				
15	40,0748	40,1359	0,2928	40,0738	-		40,1621	0,3121	40,0698	0,0317		40,0490	0,2991	40,0829	0,0325				
25	30,1247	30,1858	0,2928	30,1237	-		30,2119	0,3121	30,1197	0,0317		30,0989	0,2991	30,1328	0,0325				
35	20,1800	20,2411	0,2922	20,1786	-		20,2663	0,3112	20,1750	0,0327		20,1548	0,2980	20,1879	0,0341				
45	10,6254	10,6783	0,2702	10,6240	-		10,7051	0,2867	10,6186	0,0616		10,6010	0,2679	10,6336	0,0712				
55	3,7090	3,7272	0,1967	3,7076	-		3,7525	0,2035	3,7005	0,1016		3,7050	0,1795	3,7365	0,0999				
65	0,8216	0,8232	0,0972	0,8201	-		0,8264	0,0937	0,8143	0,0673		0,8264	0,0853	0,8448	0,0669				
75	0,1251	0,1250	0,0377	0,1236	-		0,1267	0,0361	0,1269	0,0266		0,1226	0,0375	0,1334	0,0277				
85	0,0145	0,0136	0,0107	0,0131	-		0,0144	0,0098	0,0182	0,0082		0,0143	0,0106	0,0146	0,0091				

Tabela 1.2 - Probabilidades de exercício das opções de compra européias obtidas pelo modelo de Black e Scholes e estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS). Diferentes valores de preços de exercício (K) e de dimensionalidade foram considerados. Em cada corrida de simulação, foram geradas 1000 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento totalizou 40 corridas. Os demais parâmetros de simulação encontram-se no Quadro 1.1. Também é apresentado o erro-padrão das estimativas das probabilidades de exercício.

K	B&S	Dimensão = 1						Dimensão = 50						Dimensão = 100					
		AAS			AD			AAS			AD			AAS			AD		
		Probabilidade	Erro Padrão		Probabilidade	Erro Padrão		Probabilidade	Erro Padrão		Probabilidade	Erro Padrão		Probabilidade	Erro Padrão		Probabilidade	Erro Padrão	
5	100,000%	100,000%	0,000%	100,000%	-		100,000%	0,000%	100,000%	0,000%		100,000%	0,000%	100,000%	0,000%				
15	100,000%	100,000%	0,000%	100,000%	-		100,000%	0,000%	100,000%	0,000%		100,000%	0,000%	100,000%	0,000%				
25	100,000%	100,000%	0,000%	100,000%	-		99,998%	0,016%	100,000%	0,000%		100,000%	0,000%	100,000%	0,000%				
35	99,670%	99,660%	0,177%	99,700%	-		99,683%	0,163%	99,655%	0,183%		99,640%	0,223%	99,683%	0,166%				
45	88,057%	88,178%	1,231%	88,100%	-		88,233%	0,820%	88,275%	0,883%		87,990%	1,096%	88,058%	0,824%				
55	47,965%	48,340%	1,392%	48,000%	-		48,540%	1,552%	48,338%	0,949%		47,708%	1,515%	47,950%	0,855%				
65	14,141%	14,243%	1,102%	14,100%	-		14,190%	1,093%	14,038%	0,813%		14,363%	1,020%	14,353%	0,807%				
75	2,557%	2,588%	0,648%	2,600%	-		2,563%	0,523%	2,590%	0,507%		2,518%	0,495%	2,720%	0,461%				
85	0,330%	0,323%	0,190%	0,300%	-		0,325%	0,160%	0,280%	0,149%		0,335%	0,182%	0,328%	0,143%				

Observa-se ainda que, para os dois métodos analisados e em quaisquer das dimensões consideradas, os prêmios estimados por simulação apresentam um padrão de comportamento semelhante. Para valores baixos de K (5, 15 e 25), nos quais a probabilidade de exercício é praticamente 100%, os valores dos prêmios diferem de uma constante, a qual corresponde ao valor presente da variação de K , ou seja, $9.95 = 10 \cdot \exp(-42/252 \cdot 0.03)$. Isso acontece porque, para esses valores baixos de K , as opções serão sempre exercidas e, para os demais casos, nem sempre haverá exercício. Vale ressaltar que, nos dois métodos de simulação usados e em todas as dimensões consideradas, as trajetórias geradas para os preços do ativo-objeto são as mesmas, independentemente do valor do preço de exercício. Esse efeito da constante sobre as estimativas dos prêmios determina uma repetição dos valores da variância, ou equivalentemente, do erro-padrão no caso dos preços de exercício mais baixos nos dois métodos analisados.

Os resultados mostram que as estimativas de prêmio e da probabilidade de exercício das opções foram muito próximas dos respectivos valores teóricos, independentemente da dimensionalidade ou do preço de exercício considerado, conforme ilustram os Gráficos 1.1 e 1.2 referentes ao caso do preço de exercício $K = 55$.

Gráfico 1.1- Prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 55 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 3,7090.

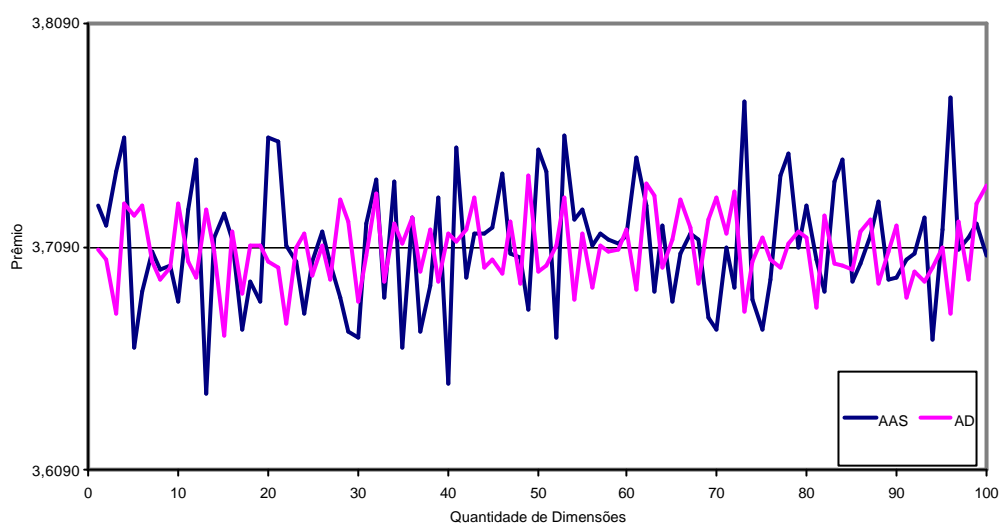
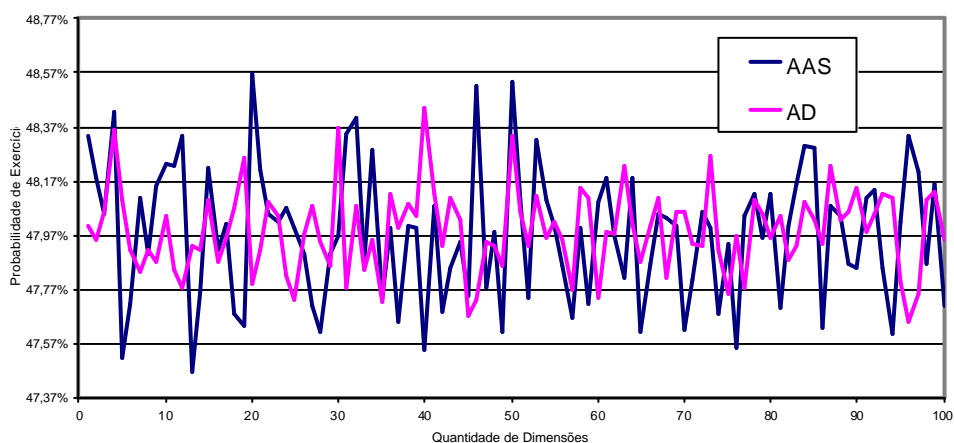


Gráfico 1.2 - Probabilidades de exercício das opções de compra européias estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 55 e a correspondente probabilidade de Black e Scholes (Nd2) é de 47,97%.



Para melhor avaliar o ganho de precisão obtido com a utilização da Amostragem Descritiva em relação ao obtido com a Amostragem Aleatória Simples, comparou-se o erro-padrão das estimativas obtidas em cada um dos dois métodos, conforme apresentado na Tabela 1.3. Quanto menor o valor da razão apresentado nesta tabela, maior o ganho de precisão do método Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples, que é o método Monte Carlo tradicional. Considerando-se, assim, o efeito conjunto da dimensionalidade e da probabilidade de exercício nos ganhos obtidos com o uso da Amostragem Descritiva, nota-se que tais ganhos são aproximadamente estáveis com a variação da dimensionalidade, porém caem com a redução da probabilidade de exercício (ou equivalentemente o aumento de K).

Tabela 1.3 - Razão entre os erros-padrão das estimativas de prêmio obtidas por simulação com o uso da Amostragem Descritiva e da Amostragem Aleatória Simples, para diferentes dimensionalidades (Dim) e preços de exercício (K). Quanto menor o valor da razão, maior o ganho de precisão obtido com a utilização da Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples.

K	Dim = 1	Dim = 10	Dim = 25	Dim = 50	Dim = 75	Dim = 100
5	-	0,1185	0,1237	0,1015	0,0994	0,1088
15	-	0,1185	0,1237	0,1015	0,0994	0,1088
25	-	0,1185	0,1237	0,1015	0,0994	0,1088
35	-	0,1235	0,1286	0,1051	0,1038	0,1146
45	-	0,2710	0,2351	0,2150	0,2161	0,2657
55	-	0,4786	0,5949	0,4994	0,4651	0,5563
65	-	0,7745	1,0260	0,7181	0,7370	0,7838
75	-	0,9015	1,1001	0,7365	1,2163	0,7392
85	-	0,6734	1,0183	0,8344	1,0801	0,8580

Já nos Gráficos 1.3, 1.4 e 1.5 são apresentados os erros-padrão das estimativas dos prêmios das opções para três diferentes preços de exercício (K): 35,

55 e 75, correspondentes às respectivas probabilidades de exercício *Black* e *Scholes* ($N(d_2)$): 99.67%, 47.96% e 2.56%. Esses gráficos, mais uma vez, evidenciam que o erro-padrão das estimativas não é influenciado pelo aumento da dimensionalidade. Nota-se ainda que a Amostragem Descritiva gera melhores estimativas do que a Amostragem Aleatória Simples; porém, este ganho torna-se cada vez menor à medida que K aumenta, sendo praticamente nulo para os casos mais extremos, $K \geq 75$.

Gráfico 1.3 - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 35 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 20,18.

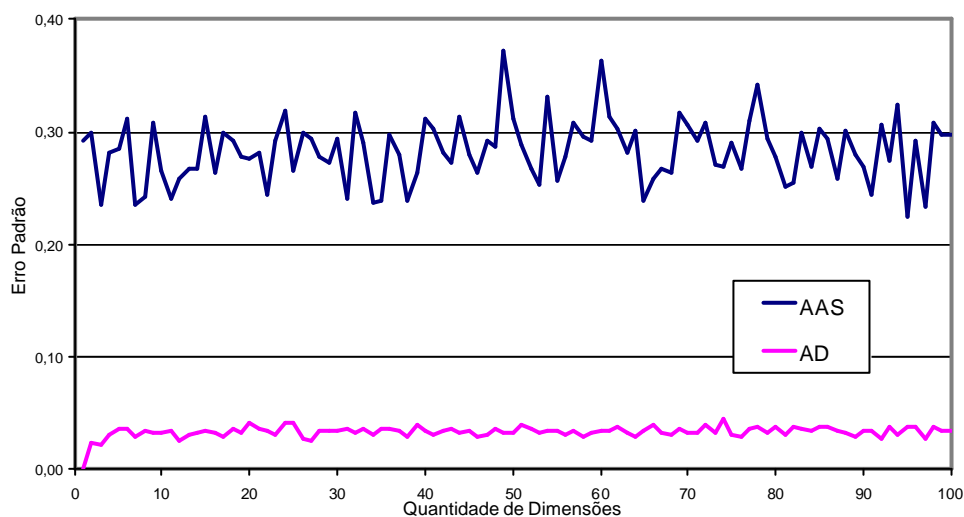


Gráfico 1.4 - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 55 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 3,7090.

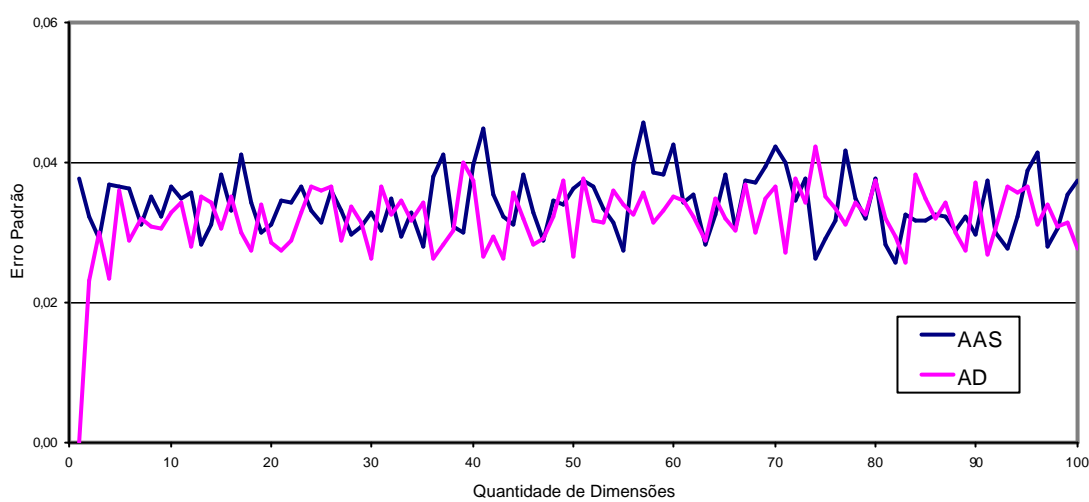
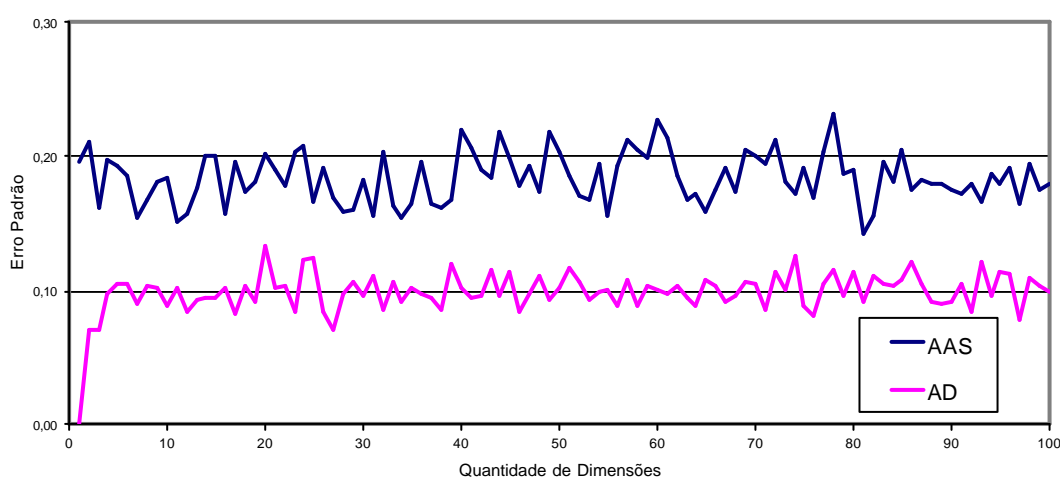


Gráfico 1.5 - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Dimensionalidade. O preço de exercício (K) utilizado foi de \$ 75 e o correspondente prêmio de Black e Scholes é de \$ 0,1251.



Uma melhor visualização deste efeito é proporcionada pelo Gráfico 1.6a, que mostra a influência do preço de exercício na precisão das estimativas de prêmio para o caso com 50 dimensões (resultados similares são também observados para outros níveis de dimensionalidade). Já o Gráfico 1.6b apresenta o erro-padrão das estimativas da probabilidade de exercício de *Black* e *Scholes* ($N(d_2)$) para os diferentes preços de exercício.

Os Gráficos 1.7a e 1.7b são semelhantes aos anteriores, porém, desta vez, relacionando os erros-padrão com as probabilidades de exercício de *Black* e *Scholes* ($N(d_2)$), em lugar do preço de exercício K . Cabe notar que as opções com preços de exercício de 5, 15, 25 e 35 têm probabilidades de exercício virtualmente iguais a 100%, confundindo-se num único ponto nestes gráficos.

Nos Gráficos 1.6b e 1.7b, pode ser visto que tanto para valores baixos ou elevados de K , ou equivalentemente, para probabilidades de exercício elevadas ou baixas, as estimativas da probabilidade de exercício são mais precisas, com os erros-padrão para ambas as técnicas amostrais convergindo em valor. Também pode ser observado nos Gráficos 1.6a e 1.7a que, com o aumento do valor de K , ou equivalentemente, com a redução da probabilidade de exercício, o erro-padrão das estimativas do prêmio também se reduz para ambos os métodos amostrais. Isso ocorre porque o *payoff* de uma opção não exercida é zero e, à medida que a probabilidade de exercício se reduz, eleva-se a proporção de *payoffs* nulos no cálculo da média usada como estimativa do prêmio. Este aumento do número de *payoffs* nulos tende a tornar a estimativa do prêmio independente do método de amostragem utilizado; no limite, para valores muito altos de K e, conseqüentemente, probabilidades de exercício muito reduzidas, a variância das estimativas tende a

zero. No entanto, efeito similar não se observa no caso de valores muito baixos de K , com probabilidades de exercício de praticamente 100%. Neste caso, embora ambas as técnicas de amostragem produzam estimativas de igual precisão para a probabilidade de exercício, as distribuições dos preços finais para o ativo-objeto geradas com a Amostragem Descritiva são bem mais estáveis e precisas do que as obtidas com o uso da Amostragem Aleatória Simples.

Gráfico 1.6a - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função do preço de exercício (K). Foram utilizadas 50 dimensões.

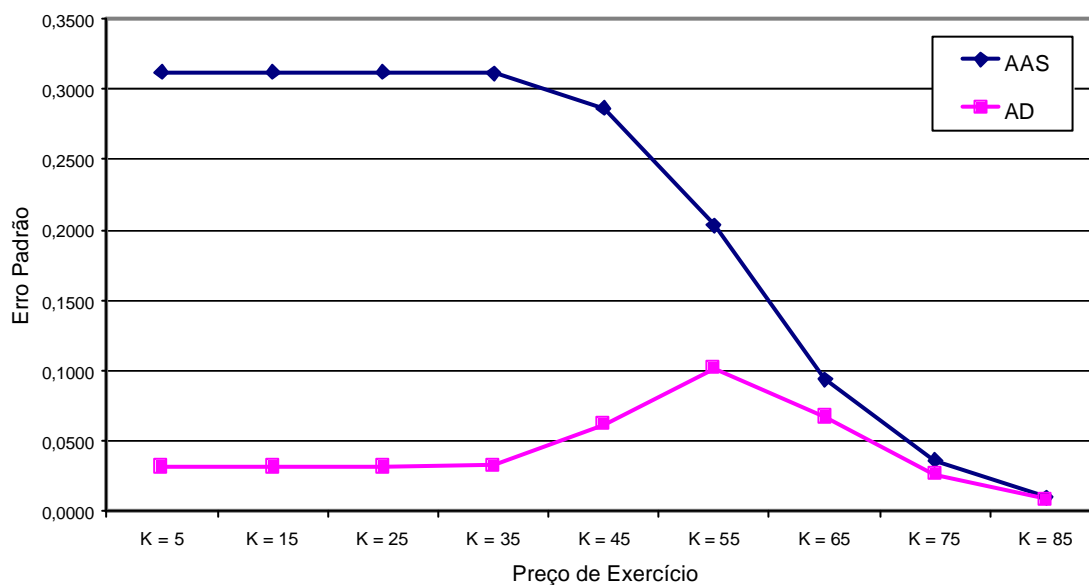
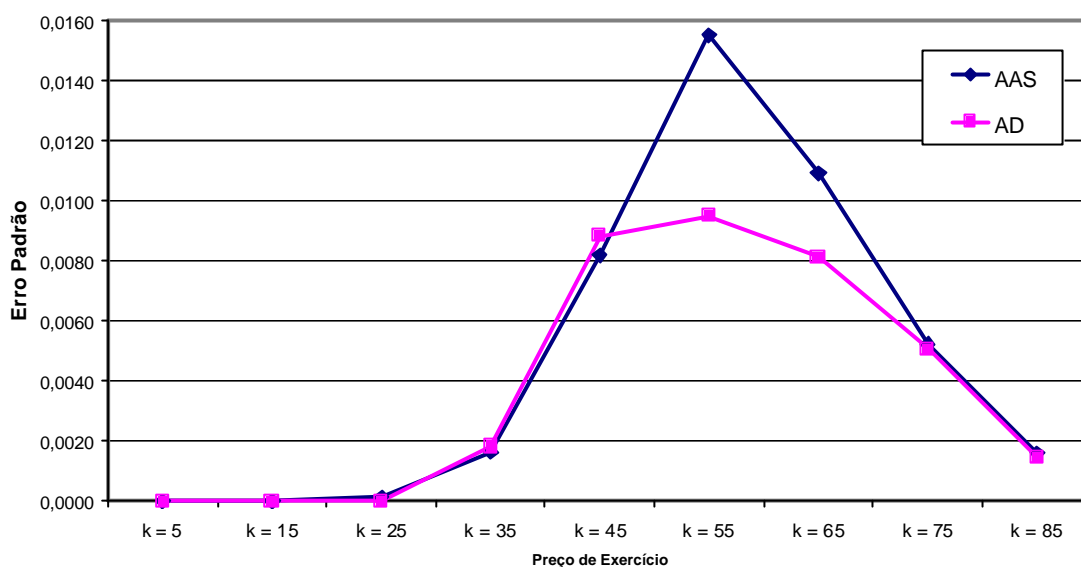


Gráfico 1.6b - Erro-Padrão das probabilidades de exercício das opções de compra europeias estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função do preço de exercício (K). Foram utilizadas 50 dimensões.



Na verdade, para se avaliar de forma mais adequada o efeito do aumento do preço de exercício K sobre o erro-padrão das estimativas de prêmio, torna-se necessário considerar uma medida relativa de precisão. Isso porque, apesar de o erro-padrão das estimativas se reduzir com a elevação de K , o prêmio estimado também se reduz (Tabela 1.1 e Gráfico 1.6a). Tanto o Gráfico 1.6a quanto a Tabela 1.1 mostram que, conforme o preço de exercício K aumenta, o erro-padrão das estimativas diminui. Contudo, é necessário observar que o prêmio também cai fortemente com o aumento do preço de exercício, tornando mais adequada uma medida de precisão relativa.

Gráfico 1.7a - Erro-Padrão dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Probabilidade de Exercício de Black e Scholes ($N(d_2)$). Foram utilizadas 50 dimensões.

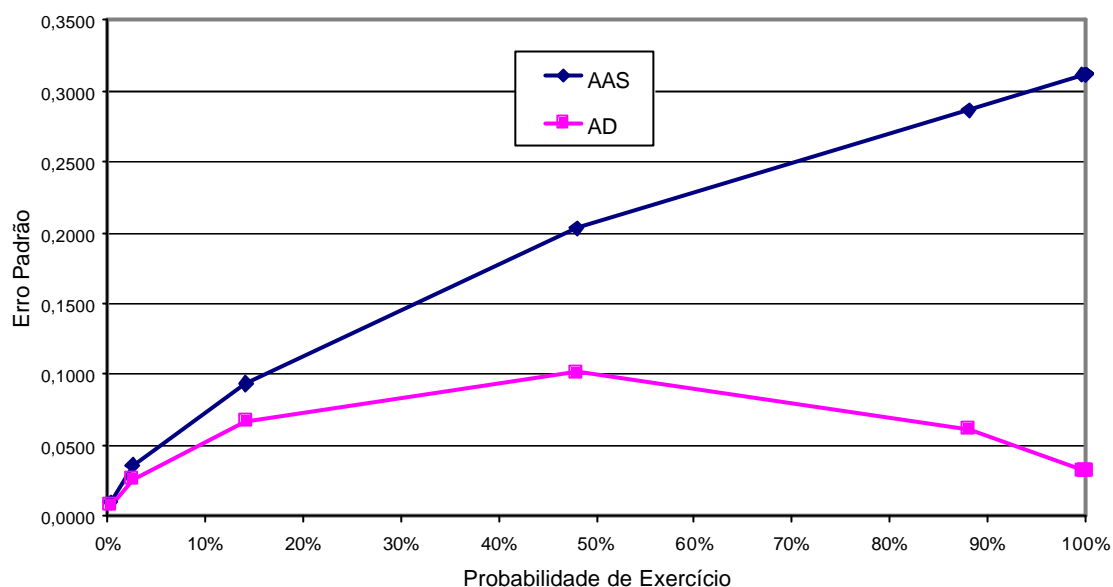
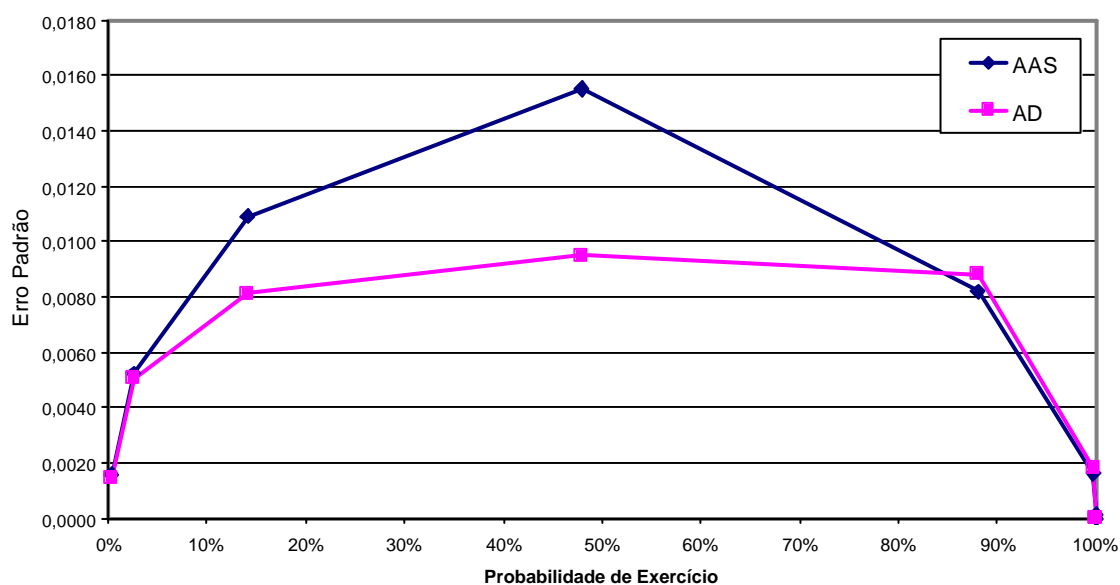


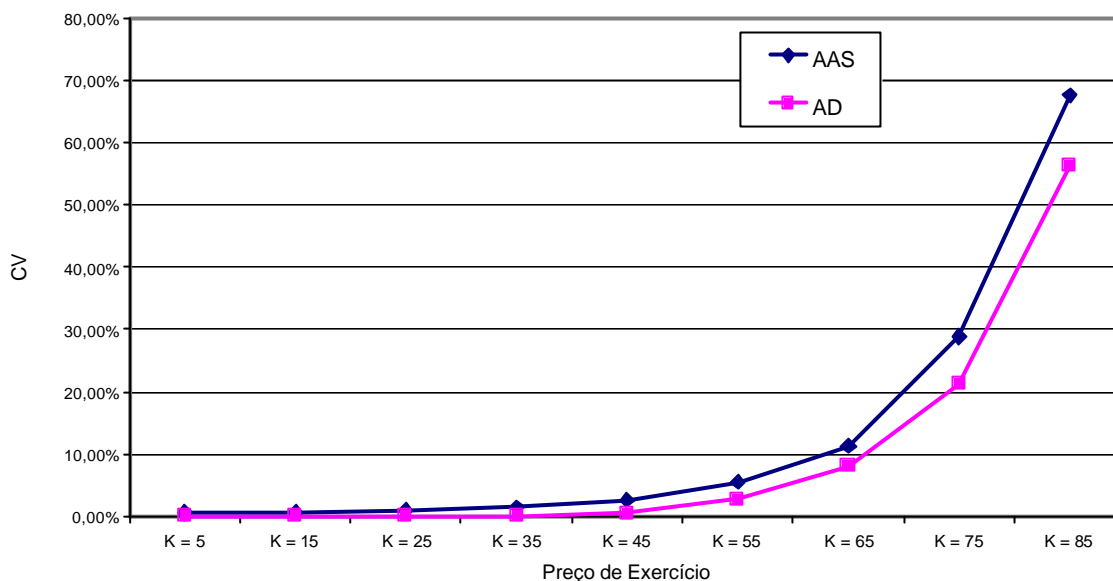
Gráfico 1.7b - Erro-Padrão das probabilidades de exercício das opções de compra européias estimadas por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função da Probabilidade de Exercício de Black e Scholes ($N(d_2)$). Foram utilizadas 50 dimensões.



Para melhor se avaliar a conveniência desta medida relativa, consideremos um erro-padrão da ordem de \$ 0.10. Este erro poderia ser aceitável na compra de uma opção com valor da ordem de \$ 10.00, mas não o seria na compra de uma opção com valor da ordem de \$ 1.00. Por exemplo, ao se negociar \$ 1.000.000 da opção de \$ 10.00, uma precisão da ordem de 1% acarretaria num prejuízo potencial da ordem de \$ 10.000, ao passo que, uma precisão de 10% envolveria um prejuízo potencial da ordem de \$ 100.000. Esta conseqüência não é facilmente notada com medidas absolutas de erro. Como alternativa, uma medida adequada seria dada pelo coeficiente de variação dos prêmios estimados, definido aqui como a razão entre o erro-padrão das estimativas de prêmio e o valor do prêmio calculado analiticamente.

O Gráfico 1.8 apresenta o coeficiente de variação dos prêmios estimados em função do preço de exercício das opções para a modelagem com 50 dimensões (resultados similares são observados para outros níveis de dimensionalidade). Este gráfico evidencia que a precisão relativa cai com o aumento do preço de exercício, intensificando a queda a partir de $K = \$ 55$ (ou probabilidade de exercício menor ou igual a 50%).

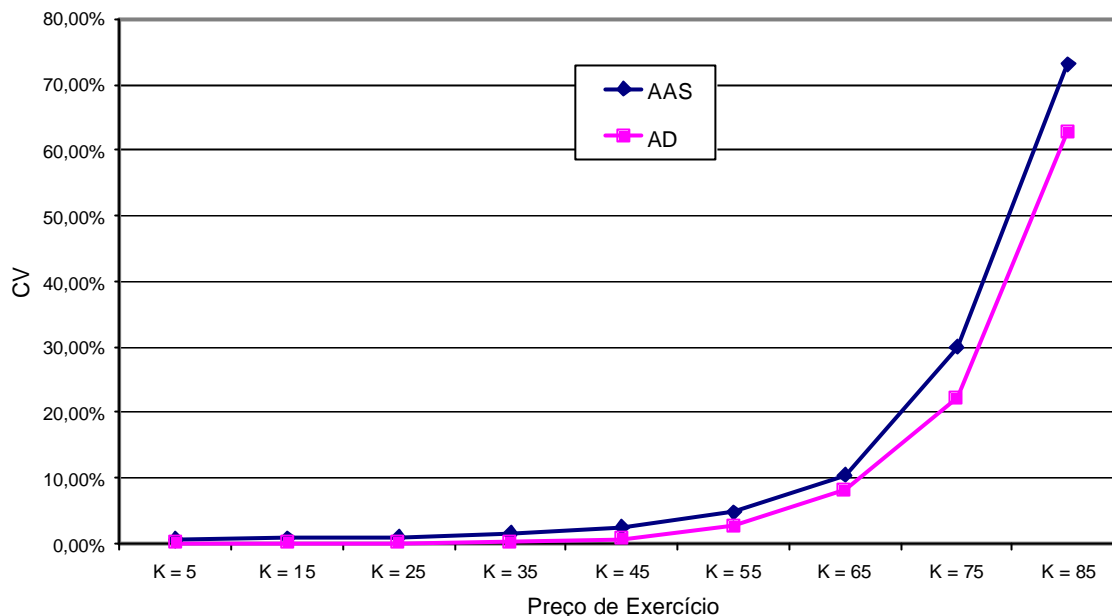
Gráfico 1.8 - Coeficiente de Variação dos prêmios das opções de compra européias estimados por simulação Monte Carlo utilizando Amostragem Descritiva (AD) e Amostragem Aleatória Simples (AAS) em função do Preço de Exercício K. Foram utilizadas 50 dimensões.



Finalmente, o Gráfico 1.9 ilustra, de uma forma mais condensada, o ganho de precisão das estimativas de prêmio obtidas por simulação com o uso da Amostragem Descritiva em relação ao uso da Amostragem Aleatória Simples. Foi calculada a razão entre a média dos erros-padrão de cada dimensão obtidos pela Amostragem Descritiva e pela Amostragem Aleatória Simples para cada um dos preços de exercício considerados, ou equivalentemente para cada uma das probabilidades de exercício de *Black e Scholes* $N(d_2)^2$. Quanto maior a razão, menor o ganho médio de precisão obtido com o uso da Amostragem Descritiva.

² Para ser eliminado o já mencionado efeito das modelagens com dimensões mais baixas sobre a precisão das estimativas, conforme mencionado ao fim do primeiro parágrafo da seção 3, a média dos erros-padrão foi calculada a partir da dimensão 6.

Gráfico 1.9 - CV em Função do Preço de Exercício K (Dimensão = 100)



Os ganhos médios de precisão das estimativas de prêmio obtidas por simulação com o uso da Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples dependem de forma aparentemente linear da probabilidade de exercício de *Black e Scholes*, sendo maiores à medida que esta probabilidade aumenta. Uma explicação para este comportamento é o fato de que, à medida que a probabilidade de exercício diminui, são utilizados menos pontos da amostra de preços finais gerados e, com isso, perde-se a vantagem do controle do conjunto que a Amostragem Descritiva proporciona. Neste caso, a taxa de perda de valores finais e a redução da probabilidade de exercício estão diretamente relacionadas, ou seja, com 50% de probabilidade de exercício só são utilizados 50% dos valores finais simulados.

4 CONCLUSÕES

Embora o uso de técnicas de redução de variância seja fortemente recomendado no apreçamento de opções por Monte Carlo (Charnes, 2000),

desconhecemos estudos objetivando uma melhor compreensão de como estas técnicas de fato atuam e, principalmente, em que condições o seu uso é mais favorável. Neste aspecto, o presente estudo, considerando os parâmetros de simulação do Quadro 1.1, chegou a dois importantes resultados que julgamos inéditos no caso de técnicas voltadas para o controle amostral, como é o caso da AD e da Amostragem por Hipercubos Latinos (HCL):

- a dimensionalidade do problema, exceto no caso mais simples com uma dimensão, não afeta os ganhos decorrentes do uso de técnicas que impõem um maior controle amostral, como é o caso da Amostragem Descritiva e, por extensão, da Amostragem por Hipercubos Latinos (Saliby, 1997);
- por outro lado, a probabilidade de exercício da opção tem forte influência no ganho de precisão a ser obtido com o uso destas técnicas de redução de variância, proporcionando elevados ganhos quando esta probabilidade é elevada (>0.50), porém com ganhos pouco expressivos quando esta probabilidade é baixa. Embora não relatado no presente ensaio, podemos antecipar que este comportamento se estende a outras opções que não as européias *plain-vanilla*, como, por exemplo, as com barreiras e as asiáticas.

Desta forma, já sabemos que o uso das técnicas de redução de variância é vantajoso quando a probabilidade de exercício é elevada, mas o que fazer quando isto não ocorre?

Esta é uma nova linha de investigação a seguir, mas sabe-se que situações envolvendo eventos de baixa probabilidade ou mesmo raros são

propícias ao uso de um outro tipo de técnica de redução de variância: a Amostragem por Importância, que direciona o esforço amostral aos pontos de maior interesse, forçando a ocorrência destes eventos e depois corrigindo adequadamente o resultado. Incidentalmente, é possível combinar o uso da Amostragem por Importância com a Amostragem Descritiva (Saliby e Gomes, 1994), proporcionando assim “o melhor dos dois mundos”. Esta linha de investigação será objeto de trabalhos futuros.

ENSAIO 1 - SEGUNDA PARTE

**AVALIAÇÃO DE OPÇÕES EUROPÉIAS FORA-DO-DINHEIRO POR
SIMULAÇÃO MONTE CARLO: O USO CONJUNTO DA AMOSTRAGEM POR
IMPORTÂNCIA E DA AMOSTRAGEM DESCRITIVA**

RESUMO

Como em qualquer aplicação Monte Carlo, a avaliação de opções por simulação fornece estimativas imprecisas. Nesse tipo de aplicação, a Amostragem Descritiva (AD) provou ser uma poderosa Técnica de Redução de Variância. Entretanto, o seu desempenho se deteriora à medida que a probabilidade de exercício da opção diminui. No caso de opções fora-do-dinheiro, a solução é usar a Amostragem por Importância (AI). Dentro deste contexto, o uso conjunto da AI com a AD merece atenção. Aqui, calculamos e comparamos os benefícios de se usar o método padrão da AI com o uso conjunto da AI com a AD. Também investigamos a influência do problema da dimensionalidade na redução de variância alcançada. Embora a combinação AI+AD tenha mostrado ganhos em relação à implementação padrão da AI, os benefícios no caso de opções fora-do-dinheiro advieram principalmente do efeito da AI. Por outro lado, o problema da dimensionalidade não afetou os ganhos. Possíveis razões para tais resultados são discutidas.

ABSTRACT

As in any Monte Carlo application, simulation option valuation produces imprecise estimates. In such an application, Descriptive Sampling (DS) has proven to

be a powerful Variance Reduction Technique. However, this performance deteriorates as the probability of exercising an option decreases. In the case of out-of-the-money options, the solution is to use Importance Sampling (IS). Following this track, the joint use of IS and DS is deserving of attention. Here, we evaluate and compare the benefits of using standard IS method with the joint use of IS and DS. We also investigate the influence of the problem dimensionality in the variance reduction achieved. Although the combination IS+DS showed gains over the standard IS implementation, the benefits in the case of out-of-the-money options were mainly due to the IS effect. On the other hand, the problem dimensionality did not affect the gains. Possible reasons for such results are discussed.

1 INTRODUÇÃO

Um ponto fraco bem conhecido da simulação *Monte Carlo* é a baixa precisão das suas estimativas. Naturalmente, esse problema também ocorre no caso da precificação de opções por simulação. Técnicas de Redução de Variância (TRV) geralmente são recomendadas para minimizar este problema, como sugerido em Bratley, Fox e Schrage, 1987 e Charnes, 2000. Uma dessas técnicas, a Amostragem Descritiva (Saliby, 1990), provou ser muito eficiente quando comparada com outras técnicas diretas de amostragem. Por amostragem direta queremos dizer a abordagem usual na qual as amostras são diretamente retiradas das distribuições do modelo, diferentemente do caso mais comum no qual as amostras são retiradas de distribuições transformadas, como a Amostragem por Importância (AI). A AD é uma TRV relativamente nova e não muito conhecida, baseada em uma seleção totalmente determinística dos valores amostrais e na sua permutação. Em geral, a AD produz estimativas mais precisas do que o método *Monte Carlo* padrão e outros esquemas amostrais diretos tais como o Hipercubo Latino (HCL), como reportado em Saliby, 1997. Portanto, a AD é uma boa escolha para a simulação de prêmio de opções. Entretanto, no caso de opções fora-do-dinheiro, nas quais a probabilidade de exercício é muito baixa, todos os métodos amostrais diretos, inclusive a AD, deterioram-se. Nesse caso, a solução é usar a Amostragem por Importância (AI). O uso conjunto da AI com a AD também pode ser proveitoso. Este ensaio avalia e compara os benefícios de se usar a técnica padrão da AI, a qual faz uso da Amostragem Aleatória Simples (AAS), com o uso conjunto da AI com a AD. Investigamos também a influência do problema da dimensionalidade na redução de variância alcançada.

Opções europeias podem ser analiticamente precificadas pelo modelo bastante conhecido de Black e Scholes (1973). Porém, a simulação *Monte Carlo* também pode ser usada para precificar opções europeias, principalmente por servir como uma referência quando o procedimento de simulação é estendido para outros tipos de opções que não possuem solução analítica conhecida. Uma outra vantagem da avaliação por simulação de opções europeias, especificamente para os propósitos deste estudo, é a possibilidade de variação da dimensionalidade do problema, isto é, o número de passos simulados no tempo, sem mudar as respostas e as estimativas que estão sendo estudadas.

Embora não exista nenhum grande apelo em simular opções europeias, já que uma solução fechada é disponível, espera-se que muitas características de simulação neste caso padrão possam provavelmente ser estendidas a outros casos, tais como opções que dependam da trajetória de preços do ativo-objeto (*Path-dependent*) e outros tipos de opções exóticas.

Um caso particular de interesse diz respeito a opções fora-do-dinheiro do tipo opções europeias, com preços de exercício muito mais altos do que o preço corrente do ativo-objeto. Neste caso, como já mencionado, a precisão das estimativas se deteriora quando se usa qualquer método amostral direto; isto se aplica a métodos amostrais básicos tais como Amostragem Aleatória Simples (AAS), assim como a esquemas amostrais mais controlados; por exemplo, HCL, AD e Quasi *Monte Carlo* (QMC). Isso ocorre porque, quando a probabilidade de exercício é muito baixa e métodos amostrais diretos são usados, o problema torna-se um caso de simulação de evento raro com muitos payoffs simulados sendo nulos e, conseqüentemente, muito poucos valores positivos de payoff resultarão. Já que a distribuição do payoff é um tipo misto de distribuição, isto é, discreta para valores nulos e contínua e

assimétrica para valores positivos, o preço justo da opção será precariamente estimado quando os dois tipos de resultado estiverem presentes de forma desequilibrada nos payoffs simulados. A fim de melhorar a qualidade das estimativas simuladas quando eventos raros são relevantes, o uso da Amostragem por Importância é, em princípio, uma boa escolha.

A Amostragem por Importância é uma Técnica de Redução de Variância que altera os parâmetros do problema original de forma que os eventos originais raros não sejam mais raros e, após ajustes apropriados, fornece estimativas não viesadas e mais precisas. No caso presente, os parâmetros são modificados a fim de aumentar substancialmente a probabilidade de exercício da opção, de forma que a opção transformada não mais seja fora-do-dinheiro. Em princípio, os ganhos da AI sobre a AAS e sobre outras TRV's são maiores à medida que eventos raros se tornam mais prováveis. De fato, o uso da AI em tais casos é sugerido por Charnes, 2000 e Staum, 2003 entre outros.

Uma outra TRV aqui usada, a AD, pode ser vista como um aprimoramento sobre a amostragem por Hipercubo Latino, como descrito em Saliby, 1997. A única diferença prática entre ambos os métodos é a seleção determinística dos valores amostrais dentro de cada estrato no caso da AD, em vez de uma seleção aleatória no caso do HCL. Um ponto-chave relacionado à eficiência da AD é o problema da dimensionalidade, isto é, o número de variáveis aleatórias do modelo de simulação. No caso trivial de uma dimensão ($\text{dim}=1$), a AD produz resultados determinísticos, sendo geralmente uma boa aproximação numérica da solução teórica. Isso ocorre porque, em tal caso, a permutação aleatória dos valores de entrada é irrelevante para as estimativas finais de simulação. Um exemplo disso é a precificação de opções de compra ou venda européias, nas quais o preço final do ativo-objeto pode

ser gerado em um só passo no tempo. Entretanto, quando a $\dim > 1$, a permutação aleatória do vetor de valores de entrada variará as estimativas de simulação entre diferentes corridas, mesmo com um conjunto fixo de valores de entrada. Portanto, à exceção do caso trivial de $\dim = 1$, no qual o ganho da AD é 100%, uma pergunta a ser respondida é como o problema da dimensionalidade pode afetar o desempenho da AD nos casos em que $\dim > 1$.

A fim de investigar a influência da probabilidade de exercício na eficiência da AI, com e sem a AD, foram simuladas três diferentes opções européias bem fora-do-dinheiro. A dimensionalidade também foi alterada nos três casos, por meio do uso de diferentes quantidades de passos para se gerar o preço final do ativo-objeto. A qualidade das estimativas foi avaliada pela redução percentual do erro-padrão sobre o método amostral padrão de *Monte Carlo* (a AAS) juntamente com a redução da Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) baseada na solução de Black e Scholes. As rotinas de simulação foram desenvolvidas no *software* MATLAB 6.1.

O restante deste ensaio está organizado da seguinte forma: a Seção 2 descreve a metodologia, apresentando brevemente as TRV's aqui usadas; a Seção 3 apresenta os principais resultados dos experimentos de simulação; finalmente, a Seção 4 conclui com uma pequena discussão das principais descobertas.

2 METODOLOGIA

2.1 Opções Européias e a Solução de Black e Scholes

Uma opção de compra européia apresenta uma função *payoff* bastante simples, dada por:

$$Payoff = \max(0; S_T - K) \quad (1)$$

Onde: S_T = preço do ativo-objeto na data de vencimento da opção;

K = preço de exercício da opção.

Uma opção de compra europeia está fora-do-dinheiro quando o preço do ativo-objeto está abaixo do preço de exercício. Quanto mais alto estiver o preço de exercício, mais baixa será a probabilidade de a opção ser exercida. Quando esta probabilidade estiver muito baixa, a opção é dita estar muito fora-do-dinheiro.

O preço de uma opção europeia é definido pelo valor presente do seu *payoff* esperado. O modelo de Black e Scholes (B&S) apresenta uma solução fechada para este preço:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-R_f T/252} N(d_2) \quad (2)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f + \frac{s^2}{2}\right) \cdot \frac{T}{252}}{s\sqrt{\frac{T}{252}}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f - \frac{s^2}{2}\right) \cdot \frac{T}{252}}{s\sqrt{\frac{T}{252}}} = d_1 - s\sqrt{\frac{T}{252}},$$

c = prêmio da opção europeia de acordo com a solução de Black e Scholes;

S_0 = preço do ativo no instante inicial;

R_f = taxa de juro livre de risco anual;

s = volatilidade anual do ativo-objeto;

T = prazo de vencimento da opção em dias úteis ($T/252$ é o prazo em anos, já que foi considerado 1 ano com 252 dias úteis);

K = preço de exercício da opção;

$N(d_i)$ = área sob a curva normal padrão à esquerda de d_i , $i=1$ e 2 .

2.2 O Modelo de Simulação de *Monte Carlo*

Um modelo de simulação *Monte Carlo* é implementado para gerar trajetórias para o preço do ativo-objeto e assim obter estimativas para o payoff de uma opção de compra europeia. A média dos payoffs estimados é então calculada e trazida a valor presente com o uso da taxa de juros livre de risco como taxa de desconto. Neste ensaio, os preços finais simulados foram gerados em passos, definidos pelo número de dimensões utilizadas. Como no modelo de Black e Scholes, assumimos que a trajetória dos preços do ativo-objeto segue um movimento browniano geométrico, definido por uma equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = \mathbf{m}dt + \mathbf{s} dW \quad (3)$$

Onde:

dS = variação do preço do ativo-objeto durante o intervalo de tempo dt ;

\mathbf{m} = retorno do ativo;

\mathbf{s} = volatilidade do ativo;

dW = processo de *Wiener*.

Reescrevendo a Equação (3) em tempo discreto, adotando a hipótese de neutralidade ao risco (retorno do ativo iguala a taxa de juros livre de risco) e usando

o Lema de Ito obtém-se a seguinte equação para o preço do ativo-objeto no tempo t (Hull, 2005):

$$S_t = S_{t-1} e^{[(R_f - s^2/2)*dt + s*\sqrt{dt}*Z_t]} \quad (4)$$

Onde:

S_t = preço do ativo na data t ;

S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;

dt = prazo de vencimento da opção ($T/252$) / número de dimensões (dim);

z_t = variável aleatória normal padrão referente ao instante t .

Em estudos empíricos, cada trajetória foi simulada até a data T de vencimento da opção ao 252º dia, baseado na Equação (4) e de acordo com o número de dimensões (dim) escolhido. O número de dimensões variou de 5 a 100. Por exemplo, quando foram escolhidas 15 dimensões, cada trajetória foi simulada em 15 passos no tempo. Em cada corrida de simulação, $n = 1000$ trajetórias foram geradas para o preço do ativo-objeto. O experimento de simulação para cada combinação de parâmetro compreendeu $m = 40$ corridas de simulação. Em representação matricial, o experimento é descrito a seguir:

Para $j = 1$ a m corridas:

$$j^{th} \text{ Matriz de Aleatórios } (Z^j) = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \cdots & Z_{1,dim} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1} & \cdots & Z_{n,dim} \end{bmatrix},$$

$$j^{\text{th}} \text{ Matriz de Preços do Ativo- Objeto } (S^j) = \begin{bmatrix} S_{1,1} & \cdots & S_{1,\text{dim}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n,1} & \cdots & S_{n,\text{dim}} \end{bmatrix},$$

$$j^{\text{th}} \text{ Vetor de Payoffs} = \begin{bmatrix} \text{Max}[0; (S_{1,\text{dim}} - K)] \\ \vdots \\ \text{Max}[0; (S_{n,\text{dim}} - K)] \end{bmatrix},$$

$$j^{\text{th}} \text{ Vetor de Valor Presentes dos Payoffs} = \begin{bmatrix} \text{Payoff}_1 * \exp(-R_f * T/252) \\ \vdots \\ \text{Payoff}_n * \exp(-R_f * T/252) \end{bmatrix}.$$

A j -ésima estimativa de preços é a média dos 1000 componentes do j -ésimo vetor de Valor Presente dos Payoffs. A estimativa final do preço da opção de compra é a média das 40 estimativas de preços da opção. O erro-padrão é dado pelo desvio-padrão das 40 estimativas de preço da opção.

Outros parâmetros da simulação, como usados no experimento, são apresentados no Quadro 1.2.

Quadro 1.2: Parâmetros de simulação usados no experimento

S_0	Preço inicial do ativo-objeto da opção (em $t=0$)	\$100
R_f	Taxa anual de juros livre de risco	5%
K	Preços de exercício (\$)	\$160, \$180, \$200
s	Volatilidade anual do ativo	20%;
Dim	Nº de dimensões	de 5 a 100 (incremento de 5)
T	Data de vencimento das opções	252 ^o
dt	Intervalo de tempo	$(T/252)/Dim$
n	Nº de observações por corrida (trajetórias)	1000
m	Nº de corridas	40

Cada diferente valor de K acima definiu uma opção de compra européia fora-do-dinheiro a ser precificada, com probabilidade teórica de exercício de 1.390% ($K=160$), 0.264% ($K=180$) e 0.046% ($K=200$) respectivamente. Foi empregada a mesma semente de números aleatórios em todas as combinações de K consideradas.

2.3 Amostragem Aleatória Simples (AAS)

A simulação por AAS foi uma implementação direta, baseada na técnica da Transformada Inversa, que gerou valores aleatórios para Z_i na Equação (4).

Técnicas de Redução de Variância do tipo que foram usadas neste ensaio estão baseadas em diferentes esquemas amostrais.

2.4 Técnicas de Redução de Variância

2.4.1 Amostragem por Importância Padrão (AI+AAS)

Quando as observações de simulação são geradas diretamente, como no caso da AAS, muitas delas podem cair em regiões de pouco ou até mesmo nenhum interesse como, por exemplo, um payoff nulo. A presença de eventos raros relevantes pode afetar a precisão das estimativas.

Ao se lidar com opções fora-do-dinheiro, poucas trajetórias de preços com payoffs positivos serão simuladas, embora seus prêmios sejam calculados pela combinação de ambos os resultados: payoffs nulos e não nulos. Este conjunto desequilibrado de resultados leva a estimativas imprecisas. O objetivo do AI é restaurar este equilíbrio, fazendo uso de uma modificação apropriada do problema.

Como tal, a AI geralmente altera os parâmetros do problema de simulação, mas não o modelo, de forma que a opção não fique mais fora-do-dinheiro. Esta idéia aplicada ao caso de precificação de opções é descrita em Boyle, Broadie e Glasserman, 1997. Após a mudança, a abordagem usual do AI é continuar usando o método padrão de *Monte Carlo* para o problema modificado. Neste ensaio, um aumento de *drift* foi aplicado por meio do aumento da taxa de retorno do ativo, deslocando assim a distribuição de preços do ativo para a direita. Portanto, em vez de se usar valores aleatórios Z_t da distribuição normal padrão, valores Z'_t são retirados aleatoriamente da distribuição normal deslocada com média m e desvio-padrão unitário. Ao final do processo, o payoff simulado é então ajustado de forma a dar respostas que

dizem respeito ao problema original. Isto foi feito multiplicando-se cada resultado simulado pela razão de verossimilhança, dada por³ :

$$Raz\tilde{a}o = e^{-0,5 * \left[\sum_{i=1}^{dim} Z_i^2 - \sum_{i=1}^{dim} \left(Z_i - \frac{m}{s} * \sqrt{a_i} \right)^2 \right]}, \quad (5)$$

onde:

$$Z'_i \sim N(\mathbf{m}, 1),$$

dim = dimensionalidade do problema ou quantidade de passos da trajetória de preços.

2.4.2 Amostragem por Importância com Amostragem Descritiva (AI+AD)

Em vez de se retirar aleatoriamente valores Z_i , esta técnica incorpora AD na análise da AI, de forma que os valores Zd'_i sejam escolhidos deterministicamente da distribuição normal deslocada. Devido a este procedimento de seleção, os momentos amostrais das variáveis de entrada do modelo de simulação são fixos e muito próximos dos seus respectivos valores teóricos, portanto não mais apresentando variabilidade entre diferentes corridas.

O procedimento de seleção determinística consistiu em estratificar a distribuição acumulada da normal deslocada $N(\mathbf{m}, 1)$ em n partes de igual probabilidade e em usar a mediana de cada estrato. Os n elementos selecionados comporão o conjunto de valores descritivos, os quais serão permutados aleatoriamente a fim de gerar uma amostra descritiva univariada.

³ Suponha $E(.)$ = Valor Esperado, a ser calculado por simulação *Monte Carlo*; $h(.)$ = função payoff; $f(.)$ = função densidade de probabilidade da Normal Padrão; e $g(.)$ = função densidade de probabilidade Normal deslocada. A idéia por trás desta razão está resumida na expressão abaixo:

$$E(h(x)) = \int h(x) f(x) dx = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = E\left(h(y) \frac{f(y)}{g(y)} \right)$$

Este método garante que todos os estratos da distribuição normal $N(\mu, 1)$ estarão representados na amostra. No caso multi-dimensional, o conjunto de valores descritivos será o mesmo para cada dimensão ou passo da trajetória de preços, mas a ordem em que esses valores aparecerão será diferente.

Assim, o conjunto de valores descritivos (aqui identificado como Z_{di} , em vez de Z_i), antes da permutação, é dado por:

$$Z_{di} = F^{-1}\left(\frac{i-1+0.5}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i-0.5)}{n}\right], \quad (6)$$

onde:

n = tamanho da amostra descritiva,

$i = 1, 2, 3, \dots, n$,

Z_{di} = i -ésimo valor do conjunto descritivo,

F^{-1} = transformada inversa da função distribuição acumulada da variável de entrada; inversa da distribuição Normal acumulada neste ensaio.

Vale a pena notar que os métodos da Amostragem Descritiva e de Quasi-Monte Carlo estão ambos baseados em uma seleção amostral determinística. Entretanto, diferentemente do Quasi-Monte Carlo no qual as seqüências amostrais são também fixas, a AD está baseada em uma permutação aleatória dos valores do conjunto, resultando assim em estimativas diferentes para cada corrida de simulação.

3 RESULTADOS

A Tabela 1.4 apresenta os preços simulados das três opções européias fora-do-dinheiro consideradas neste ensaio, usando AI na simulação *Monte*

Carlo. A Tabela 1.5 incorpora AD na análise do AI. Vários valores de deslocamento (m) foram considerados e quatro níveis de dimensão (dim) foram apresentados (5, 10, 20 e 100). Os erros-padrão dos preços simulados também são apresentados. Na Tabela 1.4, a coluna $\mu = 0$ corresponde ao uso padrão da AD, também sem nenhum deslocamento. As tabelas também apresentam os preços analíticos das três opções europeias de acordo com a solução de Black e Scholes.

Tabela 1.4: Prêmios estimados das opções européias de compra, usando a Amostragem por Importância padrão (AI+AAS). O erro-padrão das estimativas e a solução de Black e Scholes (B&S) também são apresentados.

Dim 5	K	B&S	m																
			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
Média	160	0.1590	0.1640	0.1674	0.1560	0.1592	0.1582	0.1592	0.1580	0.1592	0.1566	0.1549	0.1580	0.1626	0.1930	0.1143	0.1127	0.0355	
	180	0.0286	0.0294	0.0313	0.0270	0.0291	0.0281	0.0285	0.0287	0.0286	0.0286	0.0287	0.0285	0.0283	0.0323	0.0298	0.0422	0.0205	
	200	0.0048	0.0056	0.0054	0.0044	0.0049	0.0047	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0056	0.0056	
Erro Padrão	160	-	0.0573	0.0348	0.0151	0.0109	0.0059	0.0055	0.0052	0.0057	0.0080	0.0142	0.0275	0.0534	0.1393	0.2368	0.2590	0.1205	
	180	-	0.0244	0.0117	0.0055	0.0028	0.0017	0.0013	0.0009	0.0009	0.0011	0.0016	0.0027	0.0050	0.0101	0.0234	0.0618	0.0654	
	200	-	0.0105	0.0043	0.0019	0.0010	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0005	0.0009	0.0016	0.0041	0.0113	
Dim 10			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
	Média	160	0.1590	0.1693	0.1585	0.1567	0.1564	0.1601	0.1592	0.1591	0.1575	0.1597	0.1571	0.1540	0.1480	0.1805	0.1672	0.0556	0.0291
		180	0.0286	0.0311	0.0289	0.0284	0.0288	0.0288	0.0288	0.0288	0.0289	0.0287	0.0289	0.0289	0.0288	0.0291	0.0306	0.0300	0.0270
200		0.0048	0.0038	0.0055	0.0049	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0052	0.0052	0.0025
Erro Padrão	160	-	0.0681	0.0300	0.0116	0.0080	0.0065	0.0040	0.0051	0.0075	0.0082	0.0165	0.0274	0.0467	0.1465	0.2864	0.1104	0.1415	
	180	-	0.0249	0.0113	0.0050	0.0026	0.0018	0.0013	0.0010	0.0012	0.0014	0.0021	0.0025	0.0054	0.0111	0.0270	0.0425	0.0724	
	200	-	0.0070	0.0047	0.0019	0.0011	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0009	0.0013	0.0033	0.0065	
Dim 20			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
	Média	160	0.1590	0.1626	0.1561	0.1585	0.1601	0.1575	0.1590	0.1587	0.1598	0.1607	0.1597	0.1530	0.1566	0.1345	0.1723	0.0723	0.1703
		180	0.0286	0.0306	0.0305	0.0278	0.0293	0.0279	0.0286	0.0286	0.0287	0.0287	0.0290	0.0283	0.0282	0.0285	0.0224	0.0317	0.0779
200		0.0048	0.0053	0.0054	0.0044	0.0044	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0045	0.0089
Erro Padrão	160	-	0.0544	0.0292	0.0178	0.0092	0.0075	0.0058	0.0051	0.0082	0.0111	0.0152	0.0270	0.0483	0.0908	0.3222	0.1712	0.5926	
	180	-	0.0238	0.0111	0.0049	0.0032	0.0018	0.0013	0.0010	0.0011	0.0012	0.0018	0.0033	0.0044	0.0090	0.0167	0.0632	0.2368	
	200	-	0.0090	0.0043	0.0015	0.0010	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0009	0.0018	0.0044	0.0158	
Dim 100			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
	Média	160	0.1590	0.1483	0.1628	0.1620	0.1572	0.1594	0.1591	0.1594	0.1593	0.1600	0.1588	0.1636	0.1487	0.1316	0.1902	0.0946	0.0051
		180	0.0286	0.0244	0.0296	0.0295	0.0281	0.0282	0.0288	0.0288	0.0285	0.0285	0.0284	0.0288	0.0285	0.0272	0.0303	0.0331	0.0036
200		0.0048	0.0030	0.0050	0.0048	0.0048	0.0047	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0053	0.0043	0.0021
Erro Padrão	160	-	0.0469	0.0219	0.0169	0.0085	0.0081	0.0054	0.0052	0.0054	0.0113	0.0124	0.0224	0.0410	0.1047	0.3582	0.2459	0.0108	
	180	-	0.0225	0.0092	0.0051	0.0027	0.0017	0.0012	0.0013	0.0012	0.0014	0.0019	0.0028	0.0059	0.0102	0.0212	0.0666	0.0072	
	200	-	0.0078	0.0035	0.0017	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0010	0.0020	0.0039	0.0036	

Tabela 1.5: Prêmios estimados das opções européias de compra, usando a Amostragem por Importância em conjunto com a Amostragem Descritiva (AI+AD). O erro-padrão das estimativas e a solução de Black e Scholes (B&S) também são apresentados.

Dim 5	K	B&S	m																
			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
Média	160	0.1590	0.1600	0.1589	0.1596	0.1593	0.1593	0.1595	0.1584	0.1594	0.1615	0.1590	0.1555	0.1584	0.1456	0.7899	0.0071		
	180	0.0286	0.0276	0.0311	0.0285	0.0285	0.0290	0.0283	0.0287	0.0285	0.0288	0.0286	0.0288	0.0291	0.0293	0.0286	0.0324	0.0049	
	200	0.0048	0.0039	0.0060	0.0049	0.0047	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0042	0.0048	0.0027
Erro Padrão	160	-	0.0556	0.0240	0.0123	0.0074	0.0047	0.0047	0.0056	0.0051	0.0083	0.0131	0.0258	0.0556	0.1089	0.2476	3.1664	0.0218	
	180	-	0.0226	0.0100	0.0057	0.0021	0.0017	0.0010	0.0009	0.0008	0.0013	0.0017	0.0025	0.0053	0.0101	0.0214	0.0523	0.0146	
	200	-	0.0068	0.0038	0.0018	0.0007	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005	0.0010	0.0015	0.0045	0.0073	
Dim 10			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
	Média	160	0.1590	0.1624	0.1591	0.1591	0.1600	0.1584	0.1577	0.1597	0.1585	0.1614	0.1555	0.1646	0.1602	0.1488	0.0895	0.0599	0.0778
		180	0.0286	0.0248	0.0271	0.0293	0.0283	0.0286	0.0284	0.0288	0.0288	0.0288	0.0285	0.0287	0.0261	0.0291	0.0267	0.0277	0.0409
200		0.0048	0.0040	0.0039	0.0052	0.0046	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0047	0.0048	0.0059
Erro Padrão	160	-	0.0662	0.0268	0.0140	0.0069	0.0054	0.0036	0.0048	0.0055	0.0069	0.0119	0.0278	0.0574	0.0979	0.1190	0.1327	0.3515	
	180	-	0.0279	0.0104	0.0042	0.0022	0.0011	0.0010	0.0011	0.0008	0.0013	0.0018	0.0029	0.0048	0.0098	0.0168	0.0501	0.1740	
	200	-	0.0127	0.0031	0.0017	0.0009	0.0004	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0008	0.0019	0.0038	0.0131	
Dim 20			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
	Média	160	0.1590	0.1462	0.1549	0.1619	0.1586	0.1587	0.1591	0.1587	0.1595	0.1605	0.1601	0.1598	0.1532	0.1749	0.1856	0.7557	0.0405
		180	0.0286	0.0248	0.0271	0.0306	0.0281	0.0288	0.0289	0.0288	0.0289	0.0288	0.0287	0.0281	0.0276	0.0272	0.0268	0.0312	0.0250
200		0.0048	0.0029	0.0048	0.0050	0.0045	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0049	0.0047	0.0048	0.0048	0.0049	0.0046	0.0048	0.0055	0.0096
Erro Padrão	160	-	0.0555	0.0252	0.0112	0.0064	0.0048	0.0050	0.0063	0.0060	0.0079	0.0147	0.0268	0.0578	0.1770	0.3881	2.3157	0.0881	
	180	-	0.0194	0.0109	0.0047	0.0021	0.0014	0.0011	0.0010	0.0011	0.0010	0.0014	0.0026	0.0046	0.0092	0.0196	0.0569	0.0516	
	200	-	0.0057	0.0048	0.0020	0.0008	0.0004	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0009	0.0018	0.0043	0.0158	
Dim 100			0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	
	Média	160	0.1590	0.1582	0.1578	0.1593	0.1585	0.1583	0.1581	0.1588	0.1604	0.1590	0.1587	0.1618	0.1640	0.1788	0.1230	0.0808	0.0320
		180	0.0286	0.0279	0.0271	0.0284	0.0291	0.0287	0.0284	0.0287	0.0289	0.0288	0.0289	0.0281	0.0280	0.0287	0.0258	0.0317	0.0197
200		0.0048	0.0047	0.0037	0.0046	0.0049	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048	0.0049	0.0047	0.0048	0.0048	0.0042	0.0073	
Erro Padrão	160	-	0.0604	0.0231	0.0144	0.0075	0.0046	0.0041	0.0054	0.0057	0.0067	0.0115	0.0234	0.0529	0.1360	0.2700	0.2592	0.1064	
	180	-	0.0243	0.0089	0.0055	0.0023	0.0014	0.0012	0.0011	0.0009	0.0012	0.0014	0.0024	0.0047	0.0086	0.0169	0.0795	0.0624	
	200	-	0.0076	0.0026	0.0015	0.0009	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005					

Pode-se observar que, conforme esperado e desejado, os prêmios simulados estão em concordância com seus respectivos prêmios analíticos, qualquer que seja o valor do deslocamento μ . Ambas as variações da Amostragem por Importância (AI+AAS e AI+AD), com uma escolha adequada do valor do deslocamento μ , foram também Técnicas de Redução de Variância muito eficientes. Quanto mais a opção se tornava fora-do-dinheiro (ou equivalentemente, quanto mais alto seu preço de exercício, K), maior era a redução do erro-padrão.

Para ambas as variações da AI, a questão da calibração do melhor valor do deslocamento é importante; uma abordagem empírica é sugerida. Os Gráficos 1.10 a 1.13 mostram a variação da REQM usando a AI padrão (AI+AAS) em relação à SMC padrão (AAS), para diferentes valores μ , aqui indo até $\mu = 1.20$. Cada gráfico se refere a uma dimensionalidade particular ((5, 10, 20 e 100) e mostra a variação relativa da REQM para as três opções em estudo ($K=160, 180$ e 200).

Gráfico 1.10: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ , para as três opções européias (Dimensão = 5)

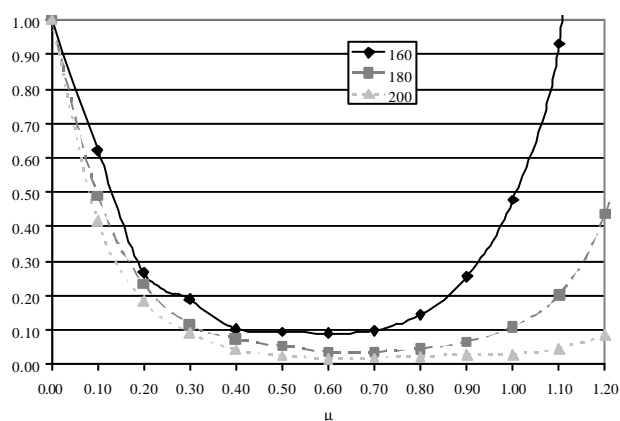


Gráfico 1.11: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ para as três opções europeias (Dimensão = 10)

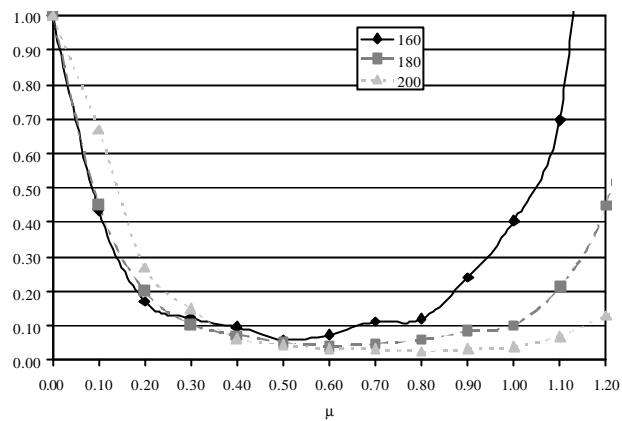


Gráfico 1.12: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ para as três opções europeias (Dimensão = 20)

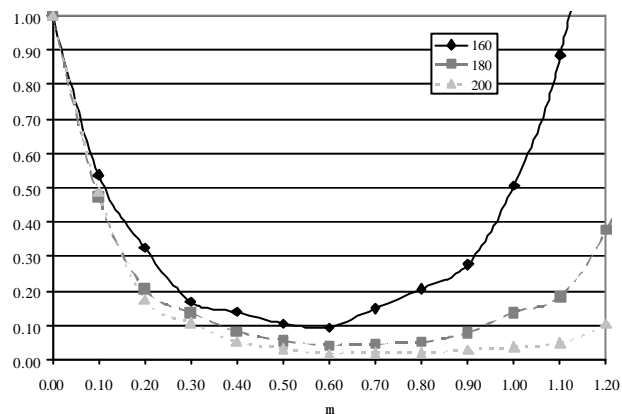
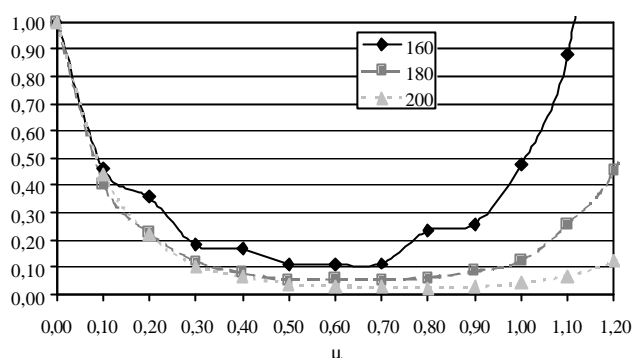


Gráfico 1.13: Variação relativa da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) usando AI, em função do deslocamento μ para as três opções europeias (Dimensão = 100)



Como pode ser visto, independentemente do valor de K (160, 180 ou 200), existem ganhos substanciais por se usar a Amostragem por Importância em vez da Amostragem Aleatória Simples. Também pode ser observado que tais ganhos são maiores à medida que a opção se torna muito fora-do-dinheiro com o aumento de K . Finalmente, à medida que K aumenta, o valor ótimo de μ também aumenta, o que pode ser explicado pela necessidade de manter a probabilidade de exercício da opção após o deslocamento em um nível muito mais alto, geralmente em torno de 70%. Em relação ao problema da dimensionalidade, parece que a quantidade usada de passos para se gerar a trajetória de preços não afetou as conclusões acima.

Embora o benefício da AI tenha sido notável, os ganhos obtidos com a AD sobre a implementação padrão da AI foram apenas marginais. Será necessário gerar mais resultados para melhor avaliar os ganhos da combinação AI+AD, mas com a consciência de que tais ganhos serão provavelmente irrelevantes em termos práticos.

4 CONCLUSÕES

Embora o uso de técnicas de redução de variância na precificação de opções por *Monte Carlo* seja uma prática comum, os benefícios do uso conjunto de tais técnicas não é bem explorado, em especial da AI e AD. Nesse contexto, a segunda parte deste primeiro ensaio apresenta alguns resultados inovadores:

- como esperado, foi vantajoso usar a AI como uma técnica de redução de variância para precificar opções europeias fora-do-dinheiro;
- quanto maior o preço de exercício considerado, i.e. quanto menor a probabilidade de que a opção seja exercida, mais alto o ganho obtido com a AI;
- a dimensionalidade do problema de simulação não afetou os ganhos alcançados com a AI;
- por outro lado, o uso combinado da AI+AD somente produziu ganhos marginais sobre a implementação padrão da AI. Uma possível razão para tal resultado, a ser ainda confirmada, é que a AI também impõe um controle sobre os valores amostrais de entrada, o qual é o propósito da AD.

Estas conclusões dizem respeito a opções europeias fora-do-dinheiro, definidas conforme os parâmetros de simulação do Quadro 1.2. Contudo, provavelmente são extensivas a outros tipos de opção, especialmente àquelas que são difíceis de serem precificadas. Etapas futuras desta pesquisa podem ocorrer nesta direção, em particular, no caso do estudo de opções exóticas, tais como asiáticas e com barreiras.

ENSAIO 2

PRIMEIRA PARTE: APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE VARIÂNCIA NA SIMULAÇÃO POR MONTE CARLO DO PRÊMIO DE OPÇÕES DE COMPRA DO TIPO ASIÁTICA

SEGUNDA PARTE: APLICAÇÃO DA AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA À SIMULAÇÃO MONTE CARLO DE OPÇÕES ASIÁTICAS FORA-DO-DINHEIRO

ENSAIO 2 – PRIMEIRA PARTE

APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE VARIÂNCIA NA

SIMULAÇÃO POR MONTE CARLO DO PRÊMIO DE OPÇÕES DE COMPRA DO

TIPO ASIÁTICA

RESUMO

A opção asiática é um tipo de opção exótica, cujo payoff pode ser definido com base na média da trajetória dos preços do ativo ao longo da vida da opção, ou com base na média dos preços de exercício. Em quaisquer dos dois casos, uma forma de avaliação da opção é por meio da simulação de *Monte Carlo*, que utiliza o método da Amostragem Aleatória Simples como padrão. Entretanto, diversas técnicas de redução de variância têm sido usadas, objetivando uma maior eficiência amostral. O presente ensaio apresenta uma avaliação empírica das principais técnicas de redução de variância aplicadas à simulação *Monte Carlo* de prêmios de opções de compra asiáticas, no que se refere à precisão das estimativas e ao tempo de processamento. As opções estudadas levaram em conta três situações distintas quanto ao seu exercício: fora do dinheiro, dentro do dinheiro e em cima do dinheiro. As técnicas utilizadas foram Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Quasi-Monte Carlo. Foi também avaliada a combinação das técnicas Variável de Controle com a Amostragem Descritiva. Para todas as técnicas consideradas, foram obtidas estimativas mais precisas do que com o método de *Monte Carlo* simples, sobressaindo-se, com pequena vantagem em relação aos demais métodos, a combinação Variável de Controle com Amostragem Descritiva. A técnica da Amostragem Descritiva apresentou o menor tempo de processamento

das simulações, enquanto que o Quasi-Monte Carlo, em função de sua maior complexidade operacional, resultou no maior tempo de processamento e, portanto, mais dispendioso em termos computacionais.

ABSTRACT

The asian option is a kind of exotic option, whose payoff is dependent on the path of the asset prices, or on the average of the exercise prices. In both cases, the option price can be estimated using Monte Carlo simulation, which has Simple Random Sampling as the standard sampling method. However, many variance reduction techniques have been used to obtain better efficiency. This paper compares the performance of the main variance reduction techniques, applied to Monte Carlo simulation for the valuation of Asian calls, in terms of estimates accuracy and processing time. Three different option situations are considered: out of the money, in the money and at the money. The techniques used here were: Antithetic Variates, Control Variate, Latin Hypercube, Descriptive Sampling and Quasi-Monte Carlo. A combination of techniques, Control Variate with Descriptive Sampling, was also tested. All the examined techniques lead to more accurate estimates than the ones obtained with traditional Monte Carlo. Moreover, a small advantage is reported for the combination Control Variate with Descriptive Sampling. As far as processing time is concerned, Descriptive Sampling was the most efficient. On the other hand, due to its higher operational complexity, Quasi-Monte Carlo was the most time-consuming procedure, therefore less efficient in computational terms.

1 INTRODUÇÃO

A precificação de opções por meio de simulação foi inicialmente utilizada por Boyle, 1977, que desenvolveu um modelo de *Monte Carlo* para simular o processo de geração de preços do ativo-objeto, baseado na premissa de neutralidade ao risco. Esta técnica de simulação tradicionalmente utiliza a Amostragem Aleatória Simples como método amostral. No entanto, o emprego de técnicas redutoras de variância na simulação de *Monte Carlo* tem apresentado resultados mais robustos, do ponto de vista da precisão e da velocidade de obtenção das estimativas, do que os obtidos pelo método tradicional (Moreira, 2001; Araújo, 2001; Saliby e Pacheco, 2002).

Neste sentido, o objetivo deste ensaio é comparar os desempenhos de algumas das principais técnicas de redução de variância quando aplicadas à simulação *Monte Carlo* de prêmios de opções de compra asiáticas, no que se refere ao ganho de precisão e ao tempo de processamento das estimativas. As opções asiáticas fazem parte da família das opções exóticas, cujos *payoffs* dependem da média da trajetória dos preços do ativo ao longo da vigência da opção. Foram utilizadas as técnicas Variáveis Antitéticas, Variáveis de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Quasi-Monte Carlo. Também foi testada a combinação de técnicas Variável de Controle com Amostragem Descritiva.

Este ensaio está organizado da seguinte forma: a segunda seção descreve a metodologia utilizada, identificando-se o tipo de opção asiática e o parâmetro das estimativas que serão considerados, além da apresentação das técnicas de redução de variância empregadas. Na seção 3, estão apresentados os principais resultados obtidos pelas simulações. Por fim, na seção 4, são mostradas as conclusões.

2 METODOLOGIA

Alguns artigos tratam do emprego de técnicas de redução de variância na simulação de *Monte Carlo* para precificar derivativos. A aplicação de técnicas dessa natureza torna a utilização do método de *Monte Carlo* mais atrativa, pois diminui uma grande desvantagem da simulação, que é a necessidade de uma enorme quantidade de replicações para obter resultados precisos. No presente ensaio, foram utilizadas as técnicas Variáveis Antitéticas, Variáveis de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Quasi-Monte Carlo na simulação do prêmio de opções de compra asiáticas, além da combinação da técnica Variável de Controle com a Amostragem Descritiva. As simulações utilizaram como ferramenta o *software* MATLAB 6.1.

2.1 Opções Asiáticas

Existem diversas variações de opções de compra do tipo asiática. Tais variações incluem: a possibilidade ou não de exercício antecipado; a média da trajetória dos preços do ativo como sendo, na função *payoff*, o preço do ativo-objeto ou o preço de exercício da opção; e o cálculo dessa média em bases aritméticas ou geométricas. (*Milevsky e Posner, 1998; Hansen e Jorgensen, 1997*).

A forma mais comum de negociação desse tipo de opção considera que o *payoff* da opção será o máximo entre zero e a diferença entre a média aritmética dos preços do ativo da data atual à data de vencimento da opção e o seu preço de exercício. O preço da opção asiática (prêmio) é a média dos valores presentes dos *payoffs* gerados. Neste ensaio, foi considerada esta forma de *payoff*, que pode ser representada pela seguinte expressão:

$$Payoff = \max(0; \bar{S} - K) \quad (1)$$

Onde: \bar{S} = média aritmética dos preços do ativo-objeto da opção entre a data atual e a data de vencimento da opção;

K = preço de exercício da opção.

2.2 Escolha do Parâmetro para os Prêmios Estimados

As opções asiáticas definidas em bases aritméticas, como as consideradas neste ensaio, não possuem uma solução analítica fechada para os seus prêmios. Isso se deve, principalmente, ao fato de seu *payoff* depender da soma de variáveis lognormais correlacionadas, representadas pelos preços do ativo-objeto em datas diferentes, a qual não é lognormal e não possui nenhuma função de distribuição de probabilidade reconhecível (*Milevsky e Posner, 1998 e Neave e Ye, 2000*). Assim, para o caso das opções asiáticas definidas em bases aritméticas, somente existem soluções aproximadas para o valor do prêmio. Um procedimento padrão utilizado em casos como esse é realizar um experimento de simulação de *Monte Carlo* com um número elevado de corridas, para ser empregado como parâmetro das estimativas. Neste ensaio, a simulação a ser usada como parâmetro envolveu um total de 10.000 corridas e será denominada como simulação-parâmetro de agora em diante.

Cabe ressaltar que, para o caso das opções asiáticas em bases geométricas, existe uma solução analítica que segue as premissas do modelo de *Black e Scholes*. Segundo *Hull, 2005*, essa solução é uma boa aproximação para o prêmio de opções asiáticas definidas em bases aritméticas. Porém, aqui ela não será utilizada como parâmetro, para se evitar viés nas estimativas. Seu uso se restringirá à técnica redutora de variância chamada Variável de Controle, a ser apresentada adiante.

2.3 O Modelo de Simulação de *Monte Carlo*

Para se obter uma estimativa do prêmio de uma opção asiática, utilizou-se um modelo de simulação de *Monte Carlo* de geração da trajetória do preço do ativo-objeto ao longo de um período de tempo. Assim como *Black* e *Scholes* (1973), admitimos neste ensaio que a trajetória de preços do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano, representado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = m dt + s dW \quad (2)$$

Onde:

S_t = preço do ativo no instante t ;

m = retorno do ativo;

s = volatilidade do ativo;

dW = processo de *Wiener*.

Com a discretização da Equação (2), a adoção da hipótese de neutralidade ao risco (retorno do ativo sendo igual à taxa de juros livre de risco) e o uso do Lema de Itô, é possível chegar à seguinte equação para o preço do ativo na data t , considerando o intervalo de tempo de 1 dia¹:

$$S_t = S_{t-1} e^{[(R_f - s^2/2) * 1/252 + s * \sqrt{1/252} * Z_t]} \quad (3)$$

Onde:

S_t = preço do ativo na data t ;

S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;

Z_t = variável aleatória normal padrão referente à data t .

¹ A obtenção da equação encontra-se em Hull, 2005.

Os preços do ativo-objeto foram simulados para 42 dias², com base na Equação (3). Em cada corrida de simulação, foram geradas 1023 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento de simulação realizado neste ensaio totalizou 40 corridas. Em termos matriciais, tal experimento pode ser apresentado da seguinte forma:

Para $j = 1$ a 40 corridas:

$$j\text{-ésima matriz de Aleatórios}(Z^j) = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & Z_{1,3} & \dots & Z_{1,42} \\ Z_{2,1} & \cdot & \cdot & \dots & Z_{2,42} \\ Z_{3,1} & \cdot & \cdot & \dots & Z_{3,42} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \dots & \vdots \\ Z_{1023,1} & \cdot & \cdot & \dots & Z_{1023,42} \end{pmatrix}$$

$$j\text{-ésima matriz de Preços dos Ativos}(S^j) = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \dots & S_{1,42} \\ S_{2,1} & \cdot & \cdot & \dots & S_{2,42} \\ S_{3,1} & \cdot & \cdot & \dots & S_{3,42} \\ \dots & & & & \dots \\ S_{1023,1} & \cdot & \cdot & \dots & S_{1023,42} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \bar{S}_1 \\ \rightarrow \bar{S}_2 \\ \rightarrow \bar{S}_3 \\ \dots \\ \rightarrow \bar{S}_{1023} \end{matrix}$$

↓

Médias Aritméticas

$$j\text{-ésimo vetor dos Payoffs} = \begin{pmatrix} \text{Máx} [0; (\bar{S}_1 - K)] \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_2 - K)] \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_3 - K)] \\ \dots \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_{1023} - K)] \end{pmatrix}$$

² Admitiu-se que o vencimento das opções se dá no 42º dia.

$$j\text{-ésimo vetor dos valores Presentes dos Payoffs} = \begin{pmatrix} \text{Payoff}_1 * \exp(-R_f * T/252) \\ \text{Payoff}_2 * \exp(-R_f * T/252) \\ \text{Payoff}_3 * \exp(-R_f * T/252) \\ \dots \\ \text{Payoff}_{1023} * \exp(-R_f * T/252) \end{pmatrix}$$

Estimativa j do Prêmio = Média dos 1023 componentes do j -ésimo Vetor dos Valores Presentes dos *Payoffs*.

Prêmio Final Estimado = Média das 40 estimativas obtidas.

Os demais parâmetros da Equação (3) são assumidos constantes, conforme o Quadro 2.1:

Quadro 2.1 – Síntese dos dados considerados nas simulações

S_0	Preço inicial ativo-objeto da opção (em $t=0$)	\$55
R_f	Taxa anual de juros livre de risco	3%
K	Preços de exercício	\$30, \$35, \$40, \$45, \$50, \$55 e \$60
s	Volatilidade anual do ativo	20%, 30% e 40%;
t	Pontos da Trajetória (dias úteis)	1, 2, ..., 42
T	Prazo de vencimento das opções (dias úteis)	42
n	Nº de observações por corrida (trajetórias)	1023
m	Nº de corridas	40

Os vários valores de K e s definiram 21 combinações possíveis dos dois parâmetros, cada qual consistindo em uma opção asiática a ser precificada.

2.4 Amostragem Aleatória Simples (AAS)

A simulação de *Monte Carlo* tradicionalmente utiliza a Amostragem Aleatória Simples como método amostral. A aplicação deste método consistiu primeiramente em sortear aleatoriamente valores para função distribuição acumulada normal padrão. Em seguida, aplicou-se a técnica da Transformada Inversa sobre os valores sorteados da função distribuição acumulada normal padrão e, assim, obteve-se uma amostra de valores para a variável aleatória Z_t da Equação (3).

Apesar de a AAS ser o método de amostragem mais utilizado em simulação, sabe-se que é possível obter estimativas mais precisas, sem um correspondente aumento do esforço de amostragem, por meio do emprego de técnicas de redução de variância (Saliby, 1989). As técnicas que foram utilizadas neste ensaio são apresentadas a seguir.

2.5 Técnicas de Redução de Variância

2.5.1 Variáveis Antitéticas (VA)

Esta técnica propõe uma redução de variância por meio da introdução de uma correlação negativa entre as estimativas (Bratley, Fox e Schrage, 1987). Seja X_1 uma variável aleatória definida como uma função f da variável u : $X_1 = f(u)$.

Define-se uma outra variável aleatória X_2 baseada na mesma função f , porém da variável simétrica $-u$, conforme expressão a seguir: $X_2 = f(-u)$. Observa-se que X_1 e X_2 assim definidas têm mesma distribuição, sendo porém negativamente correlacionadas. Gerando-se n valores aleatórios para a variável u , é possível obter

amostras de tamanho n para as duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 . Com base nessas amostras, pode-se dizer que:

$$Var[\bar{X}] = \frac{Var[X_1] + Var[X_2] + 2 * Cov[X_1, X_2]}{4} = \dots = \frac{Var(X)}{2} * (1 + r) \quad (4)$$

Onde: \bar{X} - média aritmética entre os pares de observações de X_1 e X_2 ;

$$Var(X) = Var[X_1] = Var[X_2];$$

r - coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 .

Pela Equação (4), nota-se que a média aritmética entre as duas variáveis aleatórias definidas acima terá variância menor do que a da variável aleatória original devido à correlação negativa introduzida.

A aplicação desta técnica ao caso da precificação de opções asiáticas abordado neste estudo, consiste na geração de valores aleatórios para a variável Z_t da Equação (3) e na obtenção de valores correspondentes à variável $-Z_t$. Se Z_t possui distribuição normal padrão, então $-Z_t$ também possui. A estimativa do prêmio da opção é então calculada pela média entre as duas estimativas intermediárias de prêmio criadas, uma dependente de Z_t e a outra de $-Z_t$. A variância dessa nova estimativa, calculada pela média das estimativas intermediárias, é reduzida, já que a covariância entre as estimativas intermediárias é negativa (Charnes, 2000).

Para a aplicação dessa técnica, a matriz de aleatórios Z de cada corrida de simulação foi redefinida, de modo que sua primeira metade fosse igual à primeira metade da matriz Z original e sua segunda metade fosse igual ao simétrico da segunda metade da matriz original Z . A partir disso, novas matrizes de preços do

ativo-objeto, de *payoffs* e de valores presentes foram geradas de forma correspondente em cada corrida. A matriz abaixo ilustra esse procedimento³:

$$j\text{-ésima matriz de Variáveis Antitéticas } (Z_{AV}^j) = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & \cdots & Z_{1,42} \\ Z_{2,2} & \cdots & Z_{2,42} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{512,1} & \cdots & Z_{512,42} \\ -Z_{513,1} & \cdots & -Z_{513,42} \\ -Z_{514,1} & \cdots & -Z_{514,42} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -Z_{1024,1} & \cdots & -Z_{1024,42} \end{pmatrix}$$

2.5.2 Variável de Controle com Amostragem Aleatória Simples (VC com AAS)

Apesar de existirem diferentes metodologias para o emprego desta técnica, sua forma usual é a substituição do problema em análise, que não dispõe de solução analítica, por um similar mais simplificado, que possua esse tipo de solução. A solução analítica do problema simplificado é então usada para aumentar a precisão da solução de simulação do problema complexo.

Mais especificamente, é promovido um ajuste no valor estimado por simulação do problema sem solução analítica, ao se aplicar nele um coeficiente da diferença entre o valor analítico e o valor estimado por simulação do problema com solução analítica. Essa diferença é chamada de erro de simulação. Dessa forma, o erro de simulação serve como um controle na estimação por simulação do problema sem solução analítica. Pode ser mostrado que o coeficiente do erro de simulação que minimiza a variância da variável ajustada é o coeficiente angular da regressão entre o valor estimado por simulação do problema sem solução analítica e o valor estimado por simulação do problema com solução analítica. Os valores simulados

³ Nesta técnica, foram geradas 1024 observações, em vez de 1023, para que uma divisão exata pudesse ser feita.

usam como método amostral a Amostragem Aleatória Simples. (Bratley, Fox e Schrage, 1987).

Esta idéia está resumida abaixo:

$$Var[X - k * Y] = Var[X] + k^2 * Var[Y] - 2 * k * Cov[X, Y] \quad (5)$$

Onde: X - valor estimado por simulação do problema sem solução analítica;

Y - variável de controle, dada pela diferença entre o valor analítico e o valor estimado por simulação do problema com solução analítica;

k - coeficiente angular da regressão entre o valor estimado por simulação do problema sem solução analítica e o valor estimado por simulação do problema com solução analítica.

Neste estudo, o emprego da técnica da Variável de Controle com Amostragem Aleatória Simples aplica a diferença entre o prêmio obtido analiticamente para o caso da opção de compra asiática geométrica e o prêmio geométrico estimado por simulação ao prêmio aritmético estimado por simulação. Os prêmios simulados são obtidos usando-se como método amostral a Amostragem Aleatória Simples. Esta técnica será, daqui em diante, chamada simplesmente de Variável de Controle. Dessa forma, para a aplicação da técnica da Variável de Controle ao caso das opções de compra asiáticas em estudo, tem-se que:

$$PA_{VC} = PA + b(C - PG) \quad (6)$$

Onde:

PA_{VC} = prêmio aritmético estimado por Variável de Controle;

PA = prêmio aritmético estimado por simulação usando AAS;

PG = prêmio geométrico estimado por simulação usando AAS.

b = coeficiente angular da regressão entre PA e PG ;

C = prêmio obtido analiticamente para o caso geométrico.

A solução analítica aqui utilizada para o prêmio geométrico é a apresentada em Kemna e Vorst, (1990). Esta solução analítica, por ter sido obtida dentro das premissas do modelo de *Black e Scholes*, será chamada aqui de solução de *Black e Scholes* para opções asiáticas geométricas. A Equação (7) abaixo apresenta esta solução⁴.

$$C = S_0 * e^{((-a)*(T/252))} N(d_1) - K * e^{(-R_f * T/252)} * N(d_2) \quad (7)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (a + 0.5s_a^2)T / 252}{s_a \sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - s_a \sqrt{T / 252}$$

$$a = 0.5 * (R_f + s^2 / 6) \quad s_a = s / \sqrt{3}$$

Onde: C = prêmio justo da opção asiática de compra;

S_0 = preço do ativo-objeto da opção no instante zero;

R_f = taxa anual de juros livre de risco;

s = volatilidade anual do ativo-objeto;

T = prazo de vencimento da opção em anos (252 dias úteis);

K = preço de exercício da opção;

$N(d_1)$ = valor da função de distribuição acumulada Normal Padrão no ponto

d_1 ;

⁴ A derivação encontra-se em Kemna A. e Vorst A. (1990), pg.123.

$N(d_2)$ = valor da função de distribuição acumulada Normal Padrão no ponto d_2 .

O prêmio geométrico estimado por simulação, equivalente à variável PG na Equação (6), é obtido a partir da geração de um novo vetor de *payoffs* para cada corrida, calculado com base na média geométrica dos preços do ativo-objeto ao longo do tempo. Em seguida, em cada corrida, deve ser calculado um vetor de valores presentes dos novos *payoffs*, cuja média dos seus componentes corresponderá a uma estimativa do prêmio geométrico. Finalmente, a média das estimativas resultantes de cada corrida corresponderá ao prêmio geométrico estimado. As matrizes abaixo ilustram esse procedimento:

Para $j = 1$ a 40 corridas:

$$\begin{array}{c}
 j\text{-ésima matriz de Preços do Ativo}(S^j) = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \cdots & S_{1,42} \\ S_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdots & S_{2,42} \\ S_{3,1} & \cdot & \cdot & \cdots & S_{3,42} \\ \cdots & & & & \cdots \\ S_{1023,1} & \cdot & \cdot & \cdots & S_{1023,42} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \bar{S}_1 \\ \rightarrow \bar{S}_2 \\ \rightarrow \bar{S}_3 \\ \cdots \\ \rightarrow \bar{S}_{1023} \end{array} \\
 \\
 \downarrow \\
 \text{Médias Geométricas} \\
 \\
 j\text{-ésimo vetor dos Payoffs Geométricos} = \begin{pmatrix} \text{Máx}[0; (\bar{S}_1 - K)] \\ \text{Máx}[0; (\bar{S}_2 - K)] \\ \text{Máx}[0; (\bar{S}_3 - K)] \\ \cdots \\ \text{Máx}[0; (\bar{S}_{1023} - K)] \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$j\text{-ésimo vetor de Valor Presente dos Payoffs Geométricos} = \begin{pmatrix} \text{PayoffGeo}_1 * \exp(-R_f * T / 252) \\ \text{PayoffGeo}_2 * \exp(-R_f * T / 252) \\ \text{PayoffGeo}_3 * \exp(-R_f * T / 252) \\ \dots \\ \text{PayoffGeo}_{1023} * \exp(-R_f * T / 252) \end{pmatrix}$$

Estimativa j do Prêmio Geométrico = Média dos 1023 componentes do j -ésimo Vetor dos Valores Presentes dos *Payoffs* Geométricos.

Prêmio Geométrico Estimado = Média das 40 estimativas obtidas.

2.5.3 Hipercubo Latino (HCL)

A amostragem por Hipercubo Latino propõe a estratificação da distribuição acumulada de probabilidade das variáveis de entrada do modelo de simulação em n partes de igual probabilidade e, em seguida, a escolha aleatória de um elemento dentro de cada estrato. Os n elementos assim escolhidos formarão o primeiro conjunto de valores hipercúbicos, os quais serão depois permutados aleatoriamente para compor a amostra hipercúbica. O método assim garante que todos os extratos estarão representados na amostra (McKay, Beckman e Conover, 1979).

No caso da variável de entrada ter mais de uma dimensão (K -dimensional), a composição da amostra hipercúbica exigirá que o processo de estratificação seguido de permutação aleatória seja repetido K vezes.

A fórmula usada para a geração de cada conjunto de valores hipercúbicos, a serem depois permutados aleatoriamente, é:

$$xh_i = F^{-1}\left(\frac{i-1 + Rand_i}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i - Rand_i)}{n}\right] \quad (8)$$

Onde:

n = tamanho da amostra hipercúbica;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$;

xh_i = i -ésimo elemento do conjunto de valores da amostra hipercúbica;

F^{-1} = inversa da função de distribuição acumulada da variável de entrada X ;

$Rand_i$ = i -ésimo número aleatório entre 0 e 1.

O emprego do método de amostragem por Hipercubo Latino neste ensaio consistiu em estratificar a função distribuição acumulada da variável aleatória Z_t normal padronizada em 1023 partes de igual probabilidade e, em seguida, sortear aleatoriamente um valor dentro de cada estrato. A transformada inversa da função acumulada da normal padrão foi aplicada sobre esses valores. Finalmente, uma permutação aleatória dos valores foi implementada e a amostra por Hipercubo Latino para a data t foi, então, obtida. Esse procedimento foi executado para cada um dos 42 dias da trajetória de preços do ativo e repetido em cada uma das 40 corridas de simulação.

Dessa forma, a matriz de aleatórios Z da Equação (3) foi redefinida de modo a conter valores amostrados por Hipercubo Latino e não mais por Amostragem Aleatória Simples.

2.5.4 Amostragem Descritiva (AD)

A Amostragem Descritiva se baseia numa seleção totalmente determinística e intencional dos valores das variáveis de entrada do modelo de simulação. Esses valores, uma vez selecionados, serão permutados aleatoriamente. No processo de seleção dos valores, os momentos das amostras de entrada são fixados de modo a serem praticamente iguais aos respectivos valores teóricos, não mais variando entre diferentes corridas. No caso da variável de entrada ter mais de uma dimensão (K -dimensional), a composição da amostra descritiva exigirá que a permutação aleatória do mesmo conjunto de valores descritivos seja repetida K vezes. Dado que

a variação de conjunto e a variação de seqüência são as fontes de variabilidade das estimativas de simulação, esse procedimento de amostragem consegue eliminar o primeiro efeito de variabilidade e, assim, levar a estimativas mais precisas (Saliby, 1989).

Cabe ressaltar que a diferença entre os métodos Hipercubo e Descritiva está na forma de seleção dos valores dentro de cada estrato. Enquanto o Hipercubo Latino faz um sorteio aleatório para a seleção dos valores, a Amostragem Descritiva seleciona o ponto médio de cada estrato (Saliby, 1989, 1990 e 1997).

A fórmula usada para a geração do conjunto (único) de valores descritivos, a serem depois permutados aleatoriamente, é:

$$xd_i = F^{-1}\left(\frac{i-1+0.5}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i-0.5)}{n}\right] \quad (9)$$

Onde:

n = tamanho da amostra descritiva;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$;

xd_i = i -ésimo elemento do conjunto de valores da amostra descritiva;

F^{-1} = inversa da função de distribuição acumulada da variável de entrada X .

O uso do método da Amostragem Descritiva na precificação das opções do presente ensaio consistiu, assim como no método do Hipercubo Latino, em estratificar a função distribuição acumulada da variável aleatória Z_t normal padronizada em 1023 partes de igual probabilidade. A partir daí, a aplicação do método Amostragem Descritiva é semelhante a do Hipercubo. Contudo, na Amostragem Descritiva, observa-se que é possível trabalhar com um mesmo conjunto de valores para todas as corridas, bastando gerá-lo uma vez. Dessa forma, espera-se um menor tempo de processamento da simulação baseada na

Amostragem Descritiva do que no Hipercubo Latino. Vale mencionar ainda que, a cada corrida, a mesma regra de permutação aleatória dos valores componentes da amostra foi implementada nos dois métodos, para se ter um controle a mais na comparação entre eles.

A matriz de aleatórios Z da Equação (3) foi assim redefinida de forma a conter valores amostrados por Amostragem Descritiva e não mais por Amostragem Aleatória Simples.

2.5.5 Variável de Controle com Amostragem Descritiva (VC com AD)

Esta técnica incorpora a Amostragem Descritiva na estimação do prêmio por Variável de Controle, de forma que os prêmios aritmético e geométrico estimados por simulação simples na Equação (6) são substituídos, respectivamente, pelos prêmios aritmético e geométrico estimados por Amostragem Descritiva. A partir daí, o procedimento para a simulação é semelhante ao da Variável de Controle.

2.5.6 Quasi-Monte Carlo usando Seqüência de Sobol (QMC Sobol)

O método de Quasi-Monte Carlo se baseia essencialmente no uso de seqüências de baixa discrepância, para a geração determinística de números distribuídos uniformemente num determinado intervalo. Esses números são chamados de quasi-aleatórios, em contraposição aos conhecidos pseudo-aleatórios gerados pelo método de *Monte Carlo* tradicional.

A seqüência de baixa discrepância empregada neste ensaio foi a de *Sobol* na versão de *Antonov e Saleev*. Esta versão é considerada mais veloz do que o algoritmo original de *Sobol*, 1967. *Galanti e Jung*, 1997 apresentam o algoritmo de *Sobol* na versão de *Antonov-Saleev* em detalhe.

O procedimento para a construção de uma seqüência de *Sobol* de tamanho N para uma determinada dimensão pode ser decomposto em quatro etapas:

1. Obtenção de um vetor de números, conhecidos como números direcionais, (m_1, m_2, \dots, m_w) que servirá de base para o cálculo dos números quasi-aleatórios de *Sobol*. Os elementos do vetor de números direcionais são obtidos a partir da escolha de um polinômio primitivo de módulo 2 e grau d ⁵. Os primeiros d elementos do vetor poderão ser quaisquer inteiros ímpares menores do que 2^i , onde i é a ordem em que o elemento aparece no vetor ($0 < i = d$). Os demais elementos do vetor (para $d < i = w$) são obtidos pela fórmula abaixo:

$$m_i = 2^1 a_1 m_{i-1} \oplus 2^2 a_2 m_{i-2} \oplus \dots \oplus 2^j a_j m_{i-j} \oplus \dots \oplus 2^d a_d m_{i-d} \oplus m_{i-d}, \quad (10)$$

Onde \oplus representa a operação de soma bit a bit (XOR) feita na representação em base binária dos números m_i e a_1, a_2, \dots, a_d são os coeficientes do polinômio primitivo de grau d escolhido.

2. Transformação dos números direcionais m_i em números binários fracionários v_i , da seguinte forma:

$$v_i = m_i / 2^i \quad (11)$$

⁵ Os polinômios primitivos utilizados neste ensaio foram retirados de Winiarski, 1998, tabela B.1.

3. Conversão de uma seqüência de números inteiros não negativos e consecutivos (0, 1, 2, ..., N-1) em sua representação em base binária.
4. Obtenção do n -ésimo número de Sobol $S(n)$, para $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, da seguinte forma:

$$S(n+1) = S(n) \oplus v(c) \quad (12)$$

Onde $S(0) = 0$, $v(c)$ é o c -ésimo número direcional fracionário e c é o bit-zero mais à direita da expressão de n em base binária.

No presente ensaio, seria necessário gerar 42 seqüências de Sobol de tamanho 1023 para cada corrida de simulação⁶, já que cada dia da trajetória de preços do ativo-objeto representa uma dimensão. Assim sendo, uma matriz de números quasi-aleatórios de Sobol de tamanho 42 x 1023 seria obtida para cada corrida de simulação, a qual substituiria a matriz de aleatórios tradicionais Z^j da Equação (3). Contudo, dada a característica determinística da seqüência de Sobol e dado que seria preciso gerar 40 matrizes de quasi-aleatórios de tamanho 42 x 1023 ao final, cada uma dessas 40 matrizes foi obtida a partir da permutação aleatória das linhas de uma matriz de quasi-aleatórios de Sobol maior, de tamanho 160 x 1023, seguida da seleção das 42 primeiras linhas da matriz permutada.

⁶ Na verdade, este aparentemente estranho tamanho de amostra (1023) foi escolhido para que fossem considerados apenas ciclos completos da seqüência de Sobol. Ciclos completos garantem a baixa discrepância da seqüência.

3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para avaliar o desempenho dos diferentes métodos de simulação do prêmio das opções de compra asiáticas, no que se refere à precisão e ao tempo de processamento das estimativas, foi utilizada a metodologia descrita na seção anterior. Além disso, foi analisada a combinação da técnica de Variável de Controle com a Amostragem Descritiva, já que essas duas técnicas, isoladamente, apresentaram os melhores ganhos de precisão das estimativas em trabalhos anteriores⁷.

3.1 Avaliação da Precisão das Técnicas em Relação ao Método Padrão

A Tabela 2.1 apresenta os resultados da simulação-parâmetro (*Monte Carlo* com 10.000 corridas) e os resultados analíticos do modelo de *Black e Scholes* para os prêmios das opções de compra consideradas. Observa-se que as diferenças algébricas entre os dois métodos de precificação são pequenas em quaisquer dos 21 casos analisados, o que indica que a solução analítica de *Black e Scholes* para o caso geométrico é uma boa aproximação da solução para o caso aritmético.

Apesar da proximidade dos prêmios obtidos pelos dois métodos, nota-se sempre uma diferença a maior das soluções obtidas pela simulação-parâmetro em relação às obtidas por *Black e Scholes*. Isso ocorre uma vez que médias aritméticas

⁷ Marins, J., Santos, J. e Saliby, E. Precificação de Opções de Compra do Tipo Asiática usando Simulação de Monte Carlo: uma Comparação entre Diferentes Métodos Amostrais. EnAnpad, 2003; Marins, J., Santos, J. e Saliby, E. Aplicação de Técnicas de Redução de Variância para Estimção do Prêmio de Opções de Compra do Tipo Asiática. Encontro Brasileiro de Finanças, 2003.

(soluções da simulação-parâmetro) são superiores a médias geométricas (soluções de *Black e Scholes*).

Nota-se também uma repetição dos valores das diferenças algébricas entre os dois métodos no caso de preços de exercício abaixo de \$55 (preço inicial do ativo). Isso provém do uso da mesma semente de aleatórios em todas as 21 combinações de K e s consideradas.

Tabela 2.1 - Prêmios das opções de compra do tipo asiáticas obtidos pela simulação-parâmetro (Monte Carlo tradicional de 10.000 corridas) e obtidos segundo o modelo de Black & Scholes, com as respectivas diferenças algébricas entre os métodos.

	Simulação-Parâmetro			Black & Scholes			Diferenças Algébricas		
	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25.0122	25.0121	25.0120	24.9818	24.9438	24.8905	0.0302	0.0681	0.1212
K 2 = 35	20.0371	20.0370	20.0369	20.0068	19.9687	19.9155	0.0302	0.0681	0.1212
K 3 = 40	15.0620	15.0620	15.0621	15.0317	14.9936	14.9408	0.0302	0.0681	0.1210
K 4 = 45	10.0870	10.0884	10.1080	10.0566	10.0208	9.9928	0.0302	0.0675	0.1150
K 5 = 50	5.1272	5.2436	5.4755	5.0992	5.1891	5.3879	0.0279	0.0543	0.0873
K 6 = 55	1.0947	1.6063	2.1177	1.0839	1.5779	2.0632	0.0107	0.0283	0.0544
K 7 = 60	0.0401	0.2322	0.5504	0.0380	0.2204	0.5198	0.0021	0.0118	0.0305

Já os prêmios estimados pelas técnicas em análise, suas respectivas variâncias e os erros quadráticos médios das estimativas (calculados em relação à simulação-parâmetro), estão apresentados na Tabela 2.2⁸.

Em cada método considerado, observa-se uma repetição dos valores da variância e do erro quadrático médio para valores baixos de K . Novamente, isso se deve ao emprego da mesma semente de números aleatórios em todas as combinações de K e s consideradas.

⁸ Nesta Tabela, os dados referentes à variância dos métodos Variável de Controle e Variável de Controle com Amostragem Descritiva correspondem à variância dos resíduos da regressão, feita conforme descrito na seção 2.

Entre os diversos métodos analisados, pode-se notar que os prêmios estimados por simulação apresentam um padrão de comportamento semelhante. Para um mesmo nível de volatilidade e para valores baixos de K , os valores dos prêmios diferem de uma constante⁹. Isso acontece porque, para esses valores baixos de K , as opções serão sempre exercidas e, para os demais casos, nem sempre haverá exercício¹⁰. Esse efeito da constante sobre as estimativas dos prêmios determina uma repetição dos valores da variância para preços de exercício mais baixos em todos os métodos analisados.

Em todos os métodos, à exceção de Quasi-Monte Carlo, podemos também observar a não-tendenciosidade das estimativas qualquer que seja a combinação de K e s uma vez que a variância corresponde a praticamente todo o erro quadrático médio dos prêmios estimados. De fato, ao se comparar as estimativas dos prêmios apresentadas na Tabela 2.2 com os prêmios obtidos pela simulação-parâmetro na Tabela 2.1, nota-se que as diferenças entre os respectivos são bastante pequenas. No caso do método de Quasi-Monte Carlo, o componente do viés das estimativas no erro quadrático médio é bastante alto.

Pode-se verificar que o uso do método Variável de Controle resultou em estimativas com menor variabilidade. Entretanto, quando foi testada a combinação da técnica de Variável de Controle com Amostragem Descritiva, a variância dos prêmios estimados foi, na grande maioria dos 21 casos, igual ou um pouco menor do que a dos estimados pela Variável de Controle.

⁹ Esta constante corresponde ao valor presente da variação dos preços de exercício.

¹⁰ Vale ressaltar que, para cada método de simulação e para um dado valor de volatilidade, as trajetórias geradas para os preços do ativo-objeto são as mesmas, independentemente do valor do preço de exercício.

Para melhor avaliar o ganho de precisão obtido com a utilização dos diversos métodos de simulação em relação ao método da Amostragem Aleatória Simples, comparou-se a variação relativa do erro-padrão de cada um dos métodos, conforme apresentado na Tabela 2.3. Quanto mais negativos os valores apresentados nesta tabela, maior o ganho de precisão do método em relação ao *Monte Carlo* tradicional. Constatou-se, assim, que todas as técnicas de redução de variância mostraram-se bem superiores ao método tradicional de *Monte Carlo*, com pequenas diferenças em seus ganhos. Em ordem crescente de precisão, os métodos se classificaram da seguinte forma: Quasi-Monte Carlo, Variáveis Antitéticas, Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva (empate técnico), e Variável de Controle. Observou-se, entretanto, uma pequena melhora na precisão quando foi utilizada a combinação das técnicas Variável de Controle com Amostragem Descritiva.

Nota-se também um bom desempenho dos métodos de simulação no caso de valores baixos de K e uma degradação dos mesmos no caso de valores altos. Esse fato se justifica pela não-linearidade da função que define a variável de resposta da simulação (função de máximo para o *payoff*, expressa pela Equação (1)), uma vez que as técnicas redutoras atuam melhor sobre funções lineares, correspondendo, neste caso, à região onde há exercício das opções. Todavia, os métodos Variável de Controle e Variável de Controle com Amostragem Descritiva praticamente não apresentaram degradação no caso de valores altos de K .

Cabe destacar que o Hipercubo Latino também apresentou grandes ganhos de precisão, bem próximos aos exibidos pela Amostragem Descritiva. De fato, a diferença entre os prêmios estimados por esses dois métodos é muito próxima de zero (na ordem de 10^{-4}), sendo essas estimativas, em média, altamente correlacionadas (na ordem de 97%).

Tabela 2.2 - Prêmios das opções de compra do tipo asiáticas estimados por simulação, segundo os métodos indicados. Em cada corrida de simulação, foram geradas 1023 trajetórias para o preço do ativo-objeto. O experimento totalizou 40 corridas. Também são apresentados a variância e o erro quadrático médio dos prêmios estimados.

AAS	Prêmios estimados por simulação			Variância			Erro Quadrático Médio		
	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0130	25,0134	25,0137	0,006018	0,013442	0,023750	0,006018	0,013444	0,023753
K 2 = 35	20,0379	20,0383	20,0387	0,006018	0,013442	0,023750	0,006018	0,013444	0,023753
K 3 = 40	15,0629	15,0632	15,0639	0,006018	0,013442	0,023694	0,006018	0,013444	0,023698
K 4 = 45	10,0878	10,0900	10,1107	0,006018	0,013317	0,022368	0,006018	0,013320	0,022375
K 5 = 50	5,1287	5,2464	5,4774	0,005543	0,010811	0,016825	0,005543	0,010819	0,016828
K 6 = 55	1,0958	1,6078	2,1195	0,001966	0,004449	0,008048	0,001967	0,004451	0,008051
K 7 = 60	0,0399	0,2316	0,5507	0,000060	0,000525	0,001833	0,000060	0,000526	0,001833
VA	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0122	25,0120	25,0117	0,000014	0,000071	0,000225	0,000014	0,000071	0,000225
K 2 = 35	20,0371	20,0369	20,0366	0,000014	0,000071	0,000225	0,000014	0,000071	0,000225
K 3 = 40	15,0621	15,0618	15,0617	0,000014	0,000071	0,000228	0,000014	0,000071	0,000228
K 4 = 45	10,0870	10,0882	10,1075	0,000014	0,000081	0,000394	0,000014	0,000081	0,000394
K 5 = 50	5,1272	5,2416	5,4710	0,000053	0,000533	0,001697	0,000053	0,000537	0,001718
K 6 = 55	1,0933	1,6041	2,1149	0,000800	0,001916	0,003617	0,000802	0,001921	0,003625
K 7 = 60	0,0397	0,2300	0,5452	0,000060	0,000574	0,001627	0,000060	0,000579	0,001654
VC com AAS	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0131	25,0139	25,0151	0,000001	0,000003	0,000008	0,000001	0,000006	0,000017
K 2 = 35	20,0380	20,0388	20,0400	0,000001	0,000003	0,000008	0,000001	0,000006	0,000017
K 3 = 40	15,0629	15,0638	15,0651	0,000001	0,000003	0,000008	0,000001	0,000006	0,000016
K 4 = 45	10,0879	10,0903	10,1119	0,000001	0,000002	0,000005	0,000001	0,000006	0,000020
K 5 = 50	5,1287	5,2480	5,4837	0,000000	0,000001	0,000004	0,000003	0,000021	0,000070
K 6 = 55	1,1008	1,6151	2,1288	0,000000	0,000001	0,000003	0,000037	0,000080	0,000126
K 7 = 60	0,0412	0,2362	0,5573	0,000000	0,000001	0,000004	0,000002	0,000017	0,000051
HCL	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0120	25,0115	25,0109	0,000007	0,000035	0,000110	0,000007	0,000036	0,000111
K 2 = 35	20,0369	20,0365	20,0358	0,000007	0,000035	0,000110	0,000007	0,000036	0,000111
K 3 = 40	15,0619	15,0614	15,0608	0,000007	0,000035	0,000110	0,000007	0,000036	0,000112
K 4 = 45	10,0868	10,0878	10,1071	0,000007	0,000040	0,000192	0,000007	0,000040	0,000193
K 5 = 50	5,1273	5,2453	5,4786	0,000032	0,000231	0,000678	0,000032	0,000234	0,000687
K 6 = 55	1,0924	1,6021	2,1114	0,000425	0,001031	0,001977	0,000430	0,001049	0,002017
K 7 = 60	0,0388	0,2240	0,5361	0,000055	0,000426	0,001187	0,000057	0,000493	0,001391
AD	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0119	25,0114	25,0105	0,000007	0,000033	0,000107	0,000007	0,000034	0,000109
K 2 = 35	20,0369	20,0363	20,0355	0,000007	0,000033	0,000107	0,000007	0,000034	0,000109
K 3 = 40	15,0618	15,0612	15,0605	0,000007	0,000033	0,000107	0,000007	0,000034	0,000109
K 4 = 45	10,0867	10,0876	10,1066	0,000007	0,000037	0,000185	0,000007	0,000038	0,000187
K 5 = 50	5,1271	5,2448	5,4775	0,000030	0,000226	0,000663	0,000030	0,000227	0,000667
K 6 = 55	1,0916	1,6010	2,1099	0,000417	0,001013	0,001945	0,000427	0,001042	0,002006
K 7 = 60	0,0387	0,2234	0,5352	0,000055	0,000429	0,001193	0,000057	0,000506	0,001424
VC com AD	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0132	25,0142	25,0157	0,000000	0,000002	0,000008	0,000001	0,000007	0,000021
K 2 = 35	20,0381	20,0391	20,0406	0,000000	0,000002	0,000008	0,000001	0,000007	0,000021
K 3 = 40	15,0631	15,0641	15,0660	0,000000	0,000002	0,000008	0,000001	0,000007	0,000023
K 4 = 45	10,0880	10,0908	10,1122	0,000000	0,000003	0,000011	0,000001	0,000009	0,000029
K 5 = 50	5,1288	5,2480	5,4836	0,000001	0,000002	0,000008	0,000003	0,000022	0,000074
K 6 = 55	1,1008	1,6152	2,1291	0,000000	0,000001	0,000005	0,000038	0,000081	0,000135
K 7 = 60	0,0414	0,2365	0,5578	0,000000	0,000001	0,000003	0,000002	0,000019	0,000058
OMC (SOBOL)	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	25,0345	25,0624	25,1019	0,000069	0,000351	0,001115	0,000568	0,002882	0,009187
K 2 = 35	20,0594	20,0873	20,1268	0,000069	0,000351	0,001114	0,000568	0,002882	0,009190
K 3 = 40	15,0844	15,1124	15,1587	0,000069	0,000352	0,001249	0,000568	0,002895	0,010591
K 4 = 45	10,1097	10,1558	10,2497	0,000072	0,000619	0,002651	0,000587	0,005158	0,022723
K 5 = 50	5,1833	5,3705	5,6781	0,000454	0,002795	0,008559	0,003597	0,018913	0,049616
K 6 = 55	1,1942	1,7653	2,3437	0,003421	0,008264	0,015727	0,013331	0,033539	0,066780
K 7 = 60	0,0991	0,3591	0,7484	0,000463	0,002967	0,008907	0,003945	0,019068	0,048126

Tabela 2.3 - Variação percentual do erro-padrão dos prêmios de opções de compra asiáticas estimados por simulação segundo os métodos indicados, em relação ao erro-padrão do prêmio estimado pelo método Amostragem Aleatória Simples.

VA	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	-95,2%	-92,7%	-90,3%
K 2 = 35	-95,2%	-92,7%	-90,3%
K 3 = 40	-95,2%	-92,7%	-90,2%
K 4 = 45	-95,2%	-92,2%	-86,7%
K 5 = 50	-90,3%	-77,8%	-68,2%
K 6 = 55	-36,2%	-34,4%	-33,0%
K 7 = 60	0,0%	4,5%	-5,8%
VC com AAS	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	-99,1%	-98,6%	-98,2%
K 2 = 35	-99,1%	-98,6%	-98,2%
K 3 = 40	-99,1%	-98,6%	-98,2%
K 4 = 45	-99,1%	-98,7%	-98,4%
K 5 = 50	-99,3%	-99,0%	-98,5%
K 6 = 55	-99,0%	-98,5%	-98,0%
K 7 = 60	-94,7%	-95,4%	-95,5%
HCL	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	-96,5%	-94,9%	-93,2%
K 2 = 35	-96,5%	-94,9%	-93,2%
K 3 = 40	-96,5%	-94,9%	-93,2%
K 4 = 45	-96,5%	-94,5%	-90,7%
K 5 = 50	-92,4%	-85,4%	-79,9%
K 6 = 55	-53,5%	-51,9%	-50,4%
K 7 = 60	-4,2%	-9,9%	-19,5%
AD	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	-96,7%	-95,0%	-93,3%
K 2 = 35	-96,7%	-95,0%	-93,3%
K 3 = 40	-96,7%	-95,0%	-93,3%
K 4 = 45	-96,7%	-94,7%	-90,9%
K 5 = 50	-92,7%	-85,5%	-80,2%
K 6 = 55	-53,9%	-52,3%	-50,8%
K 7 = 60	-4,1%	-9,7%	-19,3%
VC com AD	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	-99,1%	-98,7%	-98,2%
K 2 = 35	-99,1%	-98,7%	-98,2%
K 3 = 40	-99,1%	-98,7%	-98,2%
K 4 = 45	-99,1%	-98,5%	-97,7%
K 5 = 50	-98,9%	-98,6%	-97,8%
K 6 = 55	-98,8%	-98,2%	-97,5%
K 7 = 60	-95,4%	-96,4%	-96,0%
QMC (SOBOL)	s 1 = 20%	s 2 = 30%	s 3 = 40%
K 1 = 30	-89,3%	-83,8%	-78,3%
K 2 = 35	-89,3%	-83,8%	-78,3%
K 3 = 40	-89,3%	-83,8%	-77,0%
K 4 = 45	-89,1%	-78,4%	-65,6%
K 5 = 50	-71,4%	-49,2%	-28,7%
K 6 = 55	31,9%	36,3%	39,8%
K 7 = 60	177,7%	137,6%	120,5%

3.2 Avaliação do Tempo de Processamento

De acordo com a Tabela 2.4, as técnicas da Amostragem Descritiva e da Variável Antitética apresentaram tempos de processamento das estimativas muito próximos aos do método de *Monte Carlo* simples, tendo as demais técnicas mostrado tempos superiores.

Tabela 2.4 - Tempo de processamento dos scripts de 40 corridas de simulação dos prêmios, desenvolvidos para os métodos indicados. Também foram apresentados tempos de processamento de scripts de 1.000 corridas de simulação para alguns métodos. O tempo de processamento está apresentado em segundos.

Tempo de Processamento	
	Duração (em segundos)
AAS	8,57
VA	8,78
VC com AAS	20,15
HCL	43,23
AD	7,36
VC com AD	26,25
QMC (SOBOL)	29,93
AAS (1000 corridas)	223,77
HCL (1000 corridas)	954,66

Nota-se que os tempos de processamento dos métodos Variável de Controle e Variável de Controle com Amostragem Descritiva são mais do que o dobro do tempo do método Amostragem Aleatória Simples. Isso se deve ao fato de esses dois métodos necessitarem de dois tipos de estimativa de prêmio, uma aritmética e outra geométrica, nas suas respectivas simulações, ao passo que, na Amostragem Aleatória Simples, somente é realizada a estimativa do tipo aritmética.

Um resultado interessante obtido refere-se ao tempo de processamento do Hipercubo Latino comparado ao da Amostragem Descritiva. Conforme mencionado anteriormente, esses dois métodos apresentaram, em média, prêmios praticamente iguais e ganhos de precisão bastante semelhantes. No entanto, quando se compara seus tempos de processamento, verifica-se que o tempo do Hipercubo é aproximadamente seis vezes o tempo de processamento da Amostragem Descritiva. Esse resultado também se verificou no caso de um experimento de simulação muito maior, contendo 1000 corridas ao invés de 40, conforme pode ser visto na Tabela 2.4. Isso pode ser atribuído à necessidade de o método Hipercubo Latino aplicar a transformada inversa da Normal padronizada a cada observação da amostra, a cada dia da trajetória dos preços do ativo e a cada corrida. No caso da Amostragem Descritiva, basta realizar uma vez a aplicação e, dessa forma, trabalha-se com um mesmo conjunto de valores em todas as corridas. Além disso, o Hipercubo possui, por definição, um termo aleatório adicional para a geração dos valores, que é aplicado a cada dia da trajetória e a cada corrida.

O tempo de processamento das simulações segundo Quasi-Monte Carlo foi o maior de todos. Apesar de as 160 seqüências quasi-aleatórias originais terem sido geradas em *script* a parte, o procedimento de permutação das 160 seqüências e posterior seleção das 42 primeiras para a composição da matriz de quasi-aleatórios, repetido 40 vezes, explicam o elevado tempo de processamento da rotina.

4 CONCLUSÕES

Ao avaliar o desempenho de diversas técnicas de redução de variância na estimação do prêmio de opções de compra asiáticas, definidas conforme os parâmetros do Quadro 2.1, confirmamos a utilidade destas técnicas em relação

à abordagem tradicional de *Monte Carlo*, a qual emprega a Amostragem Aleatória Simples.

Os resultados obtidos confirmaram a não-tendenciosidade das estimativas geradas por meio dos diferentes procedimentos, com a variância das estimativas sendo o termo dominante do erro quadrático médio dos prêmios estimados. A exceção ocorre para o caso das estimativas obtidas segundo o método de Quasi-Monte Carlo.

Quanto à precisão das estimativas, o uso das técnicas de redução de variância mostrou-se extremamente vantajoso: todas as técnicas levaram a resultados bem superiores aos obtidos pelo método tradicional de *Monte Carlo*. Foram observadas pequenas diferenças de ganho entre as técnicas, com a seguinte classificação em ordem crescente de precisão: Quasi-Monte Carlo, Variáveis Antitéticas, Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva (empate técnico), e Variável de Controle. No entanto, observou-se que ganhos adicionais foram obtidos quando se combinou o uso das técnicas Variável de Controle com a Amostragem Descritiva.

Em termos computacionais, a Amostragem Descritiva mostrou-se o mais eficiente dos métodos, com o menor tempo de processamento das simulações. O método tradicional de *Monte Carlo* e a técnica das Variáveis Antitéticas apresentaram tempos muito próximos ao da Descritiva. Seguiram-se, na ordem, Variável de Controle, Hipercubo Latino e Quasi-Monte Carlo.

O método Hipercubo Latino teve desempenho computacional pior do que a Amostragem Descritiva. Este resultado, na verdade, era esperado, sendo explicado pela maior complexidade operacional do método, que envolve duas etapas: a geração dos valores amostrais com um componente aleatório e sua permutação também aleatória. No caso da Amostragem Descritiva, a amostragem também é feita

em duas etapas: geração de valores descritivos e sua permutação aleatória, porém os valores amostrais são gerados uma única vez para todas as corridas.

O pior desempenho computacional do método de Quasi-Monte Carlo pode ser explicado pela necessidade que o método tem de realizar 40 vezes o procedimento de permutação das 160 seqüências originais e de selecionar as 42 primeiras para a composição das matrizes de quasi-aleatórios.

ENSAIO 2 – SEGUNDA PARTE
APLICAÇÃO DA AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA À SIMULAÇÃO
MONTE CARLO DE OPÇÕES ASIÁTICAS
FORA-DO-DINHEIRO

RESUMO

Resultados anteriores mostraram que o emprego da técnica de redução de variância Amostragem por Importância na precificação de opções europeias fora do dinheiro, onde o exercício se torna altamente improvável, foi vantajoso. Nesta segunda parte do ensaio 2, é mostrado que o mesmo acontece para opções asiáticas. Quando à Amostragem por Importância, na sua forma padrão ou combinada com a Amostragem Descritiva, é incorporada a Variável de Controle, a técnica de redução de variância que apresentou melhores resultados anteriormente, são obtidos ganhos de precisão ainda maiores.

ABSTRACT

According to previous results, Importance Sampling proved to be advantageous to price out-of-the-money european calls, in which the exercise is highly improbable. In the second part of the Essay 2, it is showed that the same happens to asian calls. When Control Variate, the variance reduction technique which generated the best results previously, is incorporated to Importance Sampling, in its standard form or combined to Descriptive Sampling, even greater precision improvements were obtained.

1 INTRODUÇÃO

Apesar de as técnicas de redução de variância (TRV) testadas anteriormente no caso de opções asiáticas terem se mostrado eficientes, observou-se uma degradação dessa eficiência quando essas opções tornavam-se fora do dinheiro. De acordo com os resultados da primeira parte do ensaio 2 (Tabela 2.3), para preços de exercício (K) de 55 e 60, as técnicas apresentaram uma sensível redução no ganho de precisão das estimativas em relação à Amostragem Aleatória Simples (AAS). Esse mesmo problema de deterioração das TRV's foi identificado no caso das opções européias do ensaio 1 desta Tese e a Amostragem por Importância (AI) foi então usada como solução. Será que a aplicação da AI também ajudará a resolver o problema no caso das opções asiáticas?

O objetivo aqui é aplicar a Amostragem por Importância às opções asiáticas usadas na primeira parte do ensaio 2, para verificar se o ganho de precisão é preservado em regiões onde as opções se tornam fora do dinheiro, ou equivalentemente, onde os preços de exercício tornam-se elevados.

Nesta segunda parte do ensaio 2, são também testadas formas diferentes da Amostragem por Importância padrão (AI+AAS) para verificar a possibilidade de ganhos adicionais. Dado o bom desempenho da técnica Variável de Controle (VC) obtido na primeira parte, em especial quando combinada com a Amostragem Descritiva (AD), são aqui testadas as combinações AI+AD, AI+AAS+VC e AI+AD+VC.

Na seção 2, está descrita a metodologia das combinações de técnicas aqui usadas. Na seção 3, os resultados são apresentados. Em seguida, são feitas conclusões, buscando-se responder a pergunta feita inicialmente.

2 METODOLOGIA

Como já dito, são utilizadas, na ordem, as seguintes técnicas: Amostragem por Importância na sua forma padrão, isto é, a que tem como método amostral a Amostragem Aleatória Simples (AI+AAS); Amostragem por Importância com Amostragem Descritiva (AI+AD); Amostragem por Importância padrão com Variável de Controle (AI+AAS+VC); e Amostragens por Importância e Descritiva com Variável de Controle (AI+AD+VC).

O ganho de precisão de cada técnica continua sendo medido em termos da redução percentual do erro-padrão dos prêmios estimados. O ganho total de precisão é avaliado em relação ao erro-padrão obtido pela AAS. Ganhos marginais de precisão também são calculados, para se ter uma idéia mais clara da contribuição de cada técnica incorporada. Assim, no caso da AI+AAS, o ganho marginal é calculado em relação à AAS e, portanto, equivale ao ganho total; no caso da combinação da AI+AD, o ganho marginal é calculado em relação à AI+AAS; quando se incorpora a técnica VC na análise, o ganho marginal da combinação AI+AAS+VC é calculado em relação à AI+AAS, e o ganho marginal da combinação AI+AD+VC é calculado em relação à AI+AD e também em relação à AI+AAS+VC.

Foram usadas as mesmas opções da primeira parte do ensaio 2 e o experimento de simulação também foi o mesmo. A diferença é que, desta vez, o experimento simulará os prêmios para mais valores de K na região fora do dinheiro. Em cada técnica, foram utilizadas as mesmas sementes de aleatórios para todos os K. Todas as rotinas de simulações foram desenvolvidas no *software* MATLAB 6.1.

Haja vista que uma descrição detalhada das metodologias de aplicação da AI+AAS e da AI+AD está feita no ensaio 1 desta Tese, apenas as combinações AI+AAS+VC e AI+AD+VC terão suas metodologias aqui descritivas.

Cabe, no entanto, mencionar que, no caso de opções asiáticas, a razão de verossimilhança usada na AI será a mesma das opções europeias, já que esta razão continuará incidindo sobre o payoff das opções. A única diferença é que este payoff dependerá da média dos preços do ativo-objeto ao longo da trajetória e não mais do preço final.

2.1 Amostragem por Importância Padrão com Variável de Controle (AI+AAS+VC)

A forma mais usual de aplicação da técnica VC é a substituição do problema de simulação em análise (precificação de opções asiáticas aritméticas), que não dispõe de solução analítica, por um similar mais simplificado, que possui esse tipo de solução (precificação de opções asiáticas geométricas). Com a simulação do prêmio das opções geométricas e o cálculo de sua solução analítica, o erro de simulação pode ser obtido para o caso das opções geométricas e, em seguida, aplicado ao caso da simulação das opções aritméticas, para que se promova um ajuste nas estimativas de prêmio aritmético. Ao se combinar a VC com a AI padrão, os valores simulados passam a usar como método amostral a AI ao invés da AAS, que, como já explicado no ensaio 1, consiste basicamente em sortear de uma distribuição normal deslocada os valores aleatórios.

A aplicação da técnica combinada AI+AAS+VC ao caso das opções de compra asiáticas aritméticas em estudo é representada pela Equação 1 abaixo:

$$PA_{AI+AAS+VC} = PA_{AI+AAS} + \mathbf{b} (C - PG_{AI+AAS}), \quad (1)$$

onde:

$PA_{AI+AAS+VC}$ = prêmio aritmético estimado por AI+AAS+VC;

PA_{AI+AAS} = prêmio aritmético estimado por simulação usando AI+AAS;

PG_{AI+AAS} = prêmio geométrico, definido como na seção 2.5.2 da primeira parte deste ensaio, estimado por simulação usando AI+AAS.

b_2 = coeficiente angular da regressão entre PA_{AI+AAS} e PG_{AI+AAS} ;

C = prêmio obtido pelo modelo de *Black e Scholes* para o caso geométrico, definido pela Equação 7 da seção 2.5.2 da primeira parte deste ensaio.

2.2 Amostragens por Importância e Descritiva com Variável de Controle (AI+AD+VC)

Neste caso, a AI será feita de forma integrada à AD, antes de se aplicar o controle no processo de simulação. Esta integração se dá como na seção 2.4.2 da segunda parte do ensaio 1; em vez de se sortear valores amostrais da distribuição normal deslocada, esta combinação AI+AD faz com que os valores sejam escolhidos deterministicamente da distribuição normal deslocada.

Quando o controle é aplicado, o modelo para simular as opções de compra asiáticas aritméticas em estudo torna-se idêntico ao da Equação 1 da seção anterior, à exceção de que PA e PG serão agora obtidos por simulação usando a combinação AI+AD como método amostral.

3 RESULTADOS

Antes de apresentar os resultados das técnicas, é conveniente examinar o que acontece com a probabilidade de exercício das opções à medida que K aumenta. A Tabela 2.5 abaixo mostra a involução da probabilidade de exercício da opção de regiões dentro do dinheiro até regiões fora do dinheiro. Essa probabilidade de exercício apresentada foi calculada por meio de uma simulação *Monte Carlo* gigante (10.000 corridas de tamanho 1.000 cada), uma vez que não havia como se obtê-la analiticamente por se tratar de opções asiáticas

aritméticas. Essa simulação gigante também forneceu uma estimativa do prêmio das opções para os diversos valores de K considerados. Sendo assim, a simulação gigante fornece um parâmetro para as estimativas de prêmio e de probabilidade de exercício, na falta de uma solução analítica, e, à semelhança da primeira parte do ensaio 2, é aqui também chamada de Simulação-Parâmetro.

Como o interesse é nas regiões fora do dinheiro, variou-se o K em \$1 a partir de $K=55$ (onde K iguala S_0) para se examinar essa região mais detalhadamente. Como esperado, observa-se, por esta tabela, probabilidades de exercício das opções de 100% nas regiões dentro do dinheiro. Quando a opção se aproxima da região fora do dinheiro, esta probabilidade começa a cair. Em $K=55$, a probabilidade é de aproximadamente 50%. Daí em diante, a queda se acelera, chegando rapidamente a probabilidades próximas de zero. A partir de $K=69$, chega-se a uma situação em que a probabilidade de exercício calculada torna-se zero absoluto para os valores dos parâmetros de simulação considerados, e, portanto, não há mais interesse em ir além desse valor de K . Dessa forma, para o estudo da Amostragem por Importância, os valores de K aqui considerados variaram entre \$55 e \$68, com incremento de \$1.

Tabela 2.5: Probabilidades de Exercício e Prêmios das opções de compra do tipo asiáticas obtidos pela Simulação-Parâmetro (10.000 corridas de tamanho 1.000 cada) para diversos valores de preço de exercício K.

K	Prob. de Exercício	Prêmio
30	1.0000	25.0120
35	1.0000	20.0370
40	1.0000	15.0619
45	1.0000	10.0868
50	0.9812	5.1271
55	0.5099	1.0946
56	0.3597	0.6630
57	0.2314	0.3713
58	0.1353	0.1918
59	0.0719	0.0913
60	0.0347	0.0401
61	0.0154	0.0163
62	0.0062	0.0061
63	0.0023	0.0021
64	0.0008	0.0007
65	0.0003	0.0002
66	0.0001	0.0001
67	0.0000	0.0000
68	0.0000	0.0000
69	0.0000	0.0000
70	0.0000	0.0000
75	0.0000	0.0000
80	0.0000	0.0000
85	0.0000	0.0000
90	0.0000	0.0000

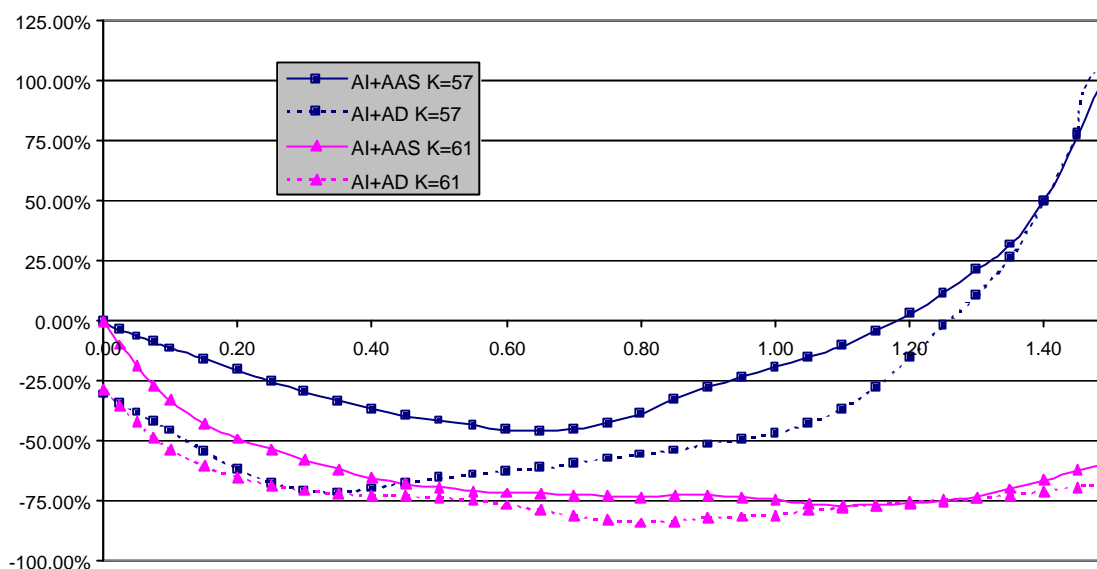
A Tabela 2.6 abaixo apresenta os prêmios estimados pelas técnicas AI+AAS e AI+AD, assim como os respectivos erros-padrão das estimativas de prêmios. Foram considerados vários valores de deslocamentos (μ), de 0.00 a 1.50. Os dados da coluna $\mu = 0$ referente à técnica AI+AAS correspondem a estimativas obtidas pelo método AAS. Para esse conjunto de valores de μ , observa-se uma não-tendenciosidade das estimativas, qualquer que seja a técnica considerada, quando comparadas à Simulação-Parâmetro da Tabela 2.5.

Os dados de erros-padrão da Tabela 2.6 indicam que a técnica AI+AAS passa a funcionar melhor como técnica redutora de variância a partir do momento em que a opção se torna fora do dinheiro, isto é, para valores de K acima de \$55. No caso de K abaixo desse valor, a redução de variância ocorre apenas para pequenos valores de μ . Isso corrobora o fato de a AI padrão ser uma técnica eficiente para tratar eventos raros ou, no caso, de baixa probabilidade de exercício.

Para o conjunto considerado de valores de μ , nota-se que os erros-padrão associados a cada K decrescem até um certo valor de μ . e depois crescem. Há portanto um valor ótimo de μ . que minimiza a variância para cada K .

As estimativas de prêmios obtidas por ambas as técnicas, AI+AAS e AI+AD, apresentaram ganho de precisão em relação à AAS na região fora do dinheiro. O Gráfico 2.1 abaixo mostra a variação percentual do erro-padrão dos prêmios estimados por ambas as técnicas em relação ao erro-padrão obtido pela AAS. Variações negativas significam reduções de erro-padrão ou, equivalentemente, ganhos de precisão. Para não prejudicar a visualização, apenas dois valores de K pertencentes à região fora do dinheiro foram apresentados ($K=57$ e $K=61$), porém os resultados se estendem para os demais valores de K dessa região.

Gráfico 2.1 – Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AAS e AI+AD em relação aos obtidos por AAS, para vários valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).



Para cada K, houve um pequeno ganho na precisão das estimativas ao se substituir a AAS pela AD na técnica da Amostragem por Importância. Por este gráfico também é possível identificar o valor ótimo de μ de cada técnica.

Ao se incorporar a técnica da Variável de Controle na análise, as estimativas de prêmio obtidas pelas técnicas AI+AAS e AI+AD passam a ser ajustadas pelo erro de simulação, conforme explicado na seção Metodologia, gerando assim duas novas técnicas combinadas: AI+AAS+VC e AI+AD+VC. Os prêmios estimados e os erros-padrão obtidos por essas novas técnicas são apresentados pela Tabela 2.7 a seguir. Para facilitar a visualização, o conjunto considerado de valores de μ é menor do que o da Tabela 2.6.

Tabela 2.7: Prêmios e Erros-Padrão das opções de compra do tipo asiáticas estimados por AI+AAS+VC e AI+AD+VC, para alguns valores do parâmetro de deslocamento μ e vários valores do preço de exercício K.

AI+AAS+VC	K	m			
		0.025	0.050	0.075	0.100
Prêmios	55	1.1008	1.1008	1.1008	1.1008
	56	0.6687	0.6688	0.6688	0.6688
	57	0.3760	0.3760	0.3760	0.3760
	58	0.1951	0.1951	0.1952	0.1952
	59	0.0933	0.0934	0.0934	0.0934
	60	0.0412	0.0412	0.0412	0.0412
	61	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168
	62	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063
	63	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022
	64	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
	65	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
66	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	
Erro-Padrão	55	0.00045193	0.00045703	0.00046789	0.00045418
	56	0.00035367	0.00032249	0.00031125	0.00033030
	57	0.00043967	0.00043262	0.00039261	0.00038281
	58	0.00048663	0.00045700	0.00042411	0.00038524
	59	0.00036417	0.00035192	0.00035710	0.00035299
	60	0.00039215	0.00032601	0.00028290	0.00025330
	61	0.00026509	0.00026848	0.00029023	0.00029548
	62	0.00017904	0.00019061	0.00017180	0.00016345
	63	0.00015890	0.00015369	0.00014925	0.00013010
	64	0.00011477	0.00009868	0.00008825	0.00007796
	65	0.00007797	0.00006993	0.00007273	0.00006429
66	0.00006002	0.00006235	0.00005058	0.00003934	

Tabela 2.7 (cont.): Prêmios e Erros-Padrão das opções de compra do tipo asiáticas estimados por AI+AAS+VC e AI+AD+VC, para alguns valores do parâmetro de deslocamento μ e vários valores do preço de exercício K.

AI+AD+VC	K	μ			
		0.025	0.050	0.075	0.100
Prêmios	55	1.1008	1.1008	1.1008	1.1008
	56	0.6689	0.6689	0.6689	0.6688
	57	0.3761	0.3761	0.3761	0.3761
	58	0.1952	0.1952	0.1952	0.1953
	59	0.0935	0.0935	0.0935	0.0935
	60	0.0414	0.0414	0.0414	0.0414
	61	0.0169	0.0169	0.0169	0.0169
	62	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064
	63	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023
	64	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007
	65	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
66	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	
Erro-Padrão	55	0.00050304	0.00048404	0.00045417	0.00043026
	56	0.00051374	0.00050997	0.00045698	0.00043212
	57	0.00039473	0.00037929	0.00035120	0.00037119
	58	0.00037461	0.00036624	0.00034704	0.00034950
	59	0.00039313	0.00031086	0.00030624	0.00026165
	60	0.00034361	0.00033972	0.00033988	0.00031505
	61	0.00029113	0.00026512	0.00026297	0.00025624
	62	0.00018866	0.00016695	0.00016493	0.00016325
	63	0.00015552	0.00014463	0.00013568	0.00012662
	64	0.00010686	0.00008483	0.00006811	0.00007536
	65	0.00003617	0.00004493	0.00004992	0.00004552
66	0.00000416	0.00002084	0.00002262	0.00002090	

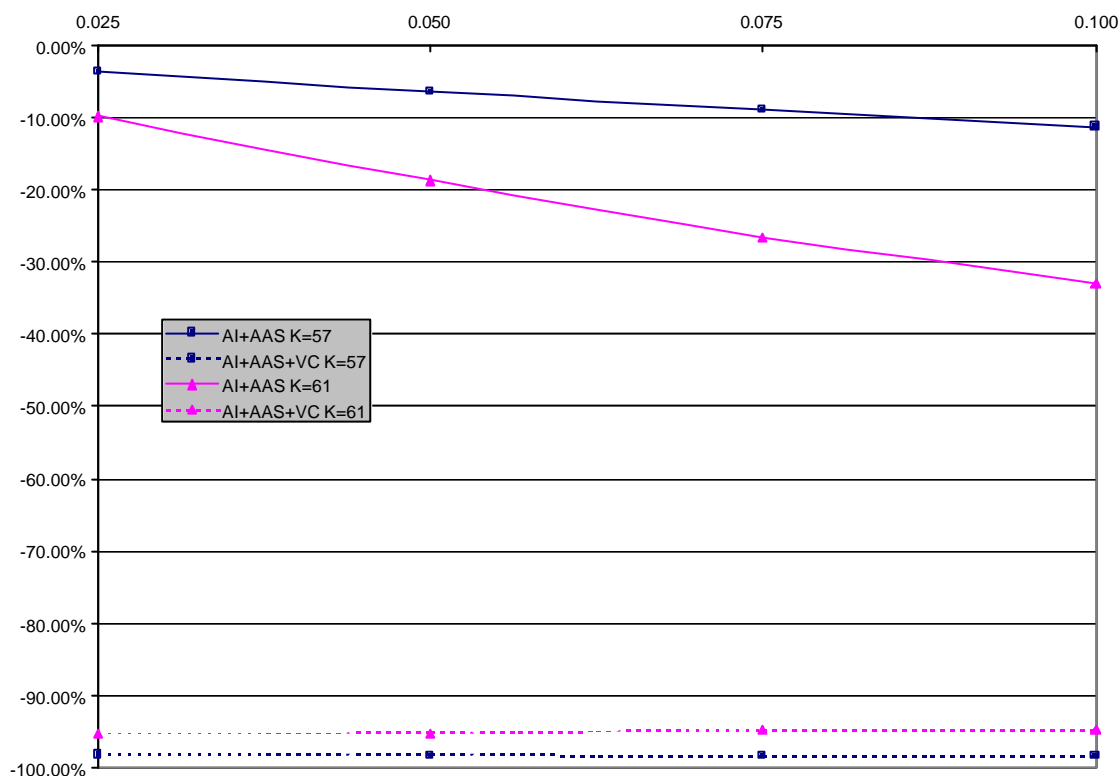
Observa-se, antes de mais nada, que a não-tendenciosidade das estimativas é preservada pela incorporação da técnica da Variável de Controle.

As estimativas de prêmio obtidas pelas duas novas técnicas também apresentaram ganho de precisão em relação à AAS na região fora do dinheiro das opções. Isso pode ser melhor observado pelos gráficos 2.2 a 2.4 abaixo, que mostram a variação percentual do erro-padrão de cada nova técnica em relação ao erro obtido pela AAS para o conjunto reduzido de valores de μ . Como no gráfico

anterior, apenas dois valores de K (57 e 61) foram apresentados, porém os resultados se estendem para os demais valores de K dessa região.

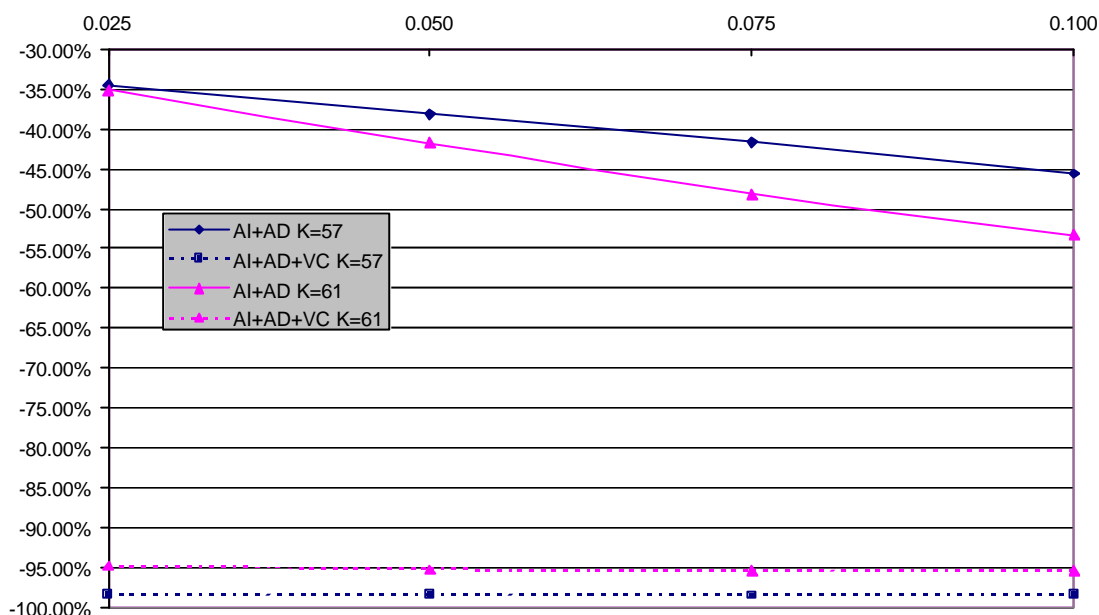
O Gráfico 2.2 mostra o que acontece com o ganho total de precisão das estimativas de prêmio quando a técnica VC é incorporada à AI+AAS (AI padrão). Observa-se um grande aumento nos ganhos totais com a incorporação para os dois valores de K considerados. O ganho total de precisão da AI+AAS+VC em relação à AAS pode ser decomposto em ganho da AI+AAS+VC sobre a AI+AAS e ganho da AI+AAS sobre a AAS. O primeiro componente mede o quanto a incorporação da VC acrescentou de ganho de precisão à técnica AI+AAS e, portanto, é chamado aqui de ganho marginal da AI+AAS+VC. Esse ganho marginal representa mais de 80% em média do ganho total da AI+AAS+VC.

Gráfico 2.2 - Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AAS e AI+AAS+VC em relação aos obtidos por AAS para um conjunto reduzido de valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).



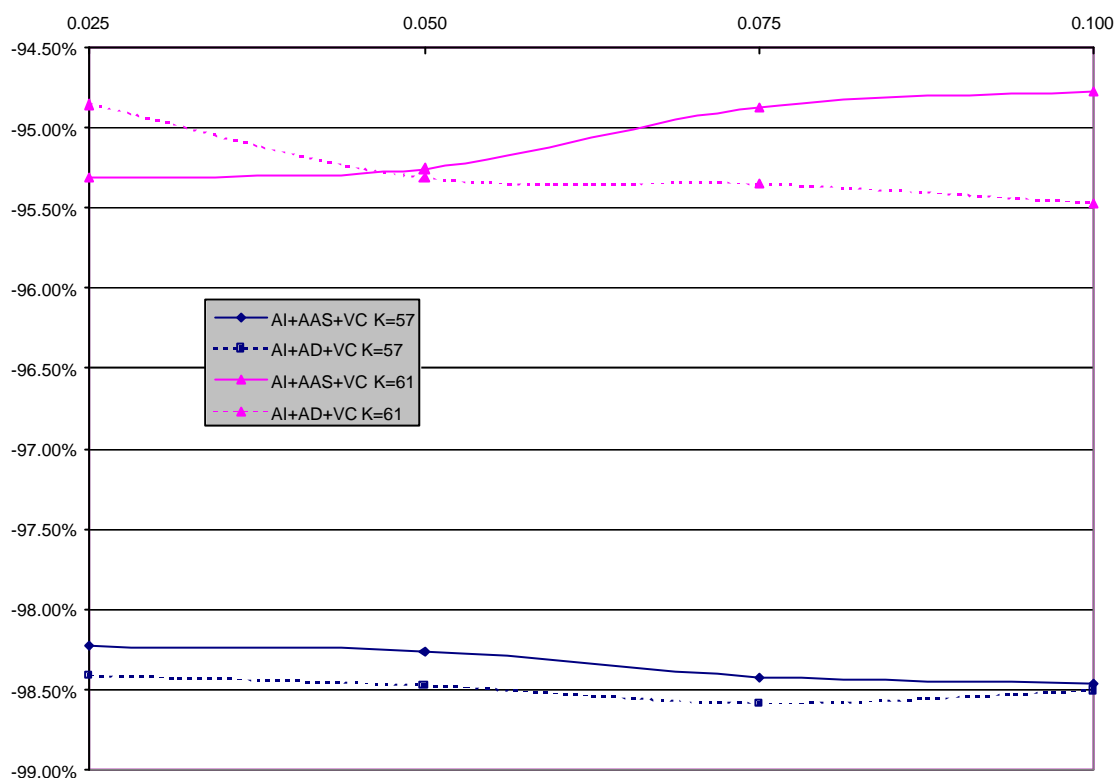
O Gráfico 2.3 apresenta o que acontece com o ganho total de precisão quando a VC é incorporada à AI+AD. Como no gráfico anterior, os ganhos totais da técnica AI+AD+VC foram enormes, qualquer que seja o valor de K considerado. No entanto, desta vez, a incorporação da VC contribuiu bem menos para o ganho total de precisão; o ganho marginal da AI+AD+VC sobre a AI+AD representou menos de 50% em média do ganho total da AI+AD+VC.

Gráfico 2.3 - Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AD e AI+AD+VC em relação aos obtidos por AAS para um conjunto reduzido de valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).



Finalmente, o Gráfico 24 compara o ganho total da AI+AAS+VC com o da AI+AD+VC. Por este gráfico, fica claro que o uso da AI+AAS+VC ou da AI+AD+VC é praticamente indiferente em termos de ganho de precisão. Cabe mencionar que a contribuição da AI+AD+VC ao ganho que já havia sido obtido pela AI+AAS+VC é bem pequeno, da ordem de 1.30% em média.

Gráfico 2.4 - Variação Percentual do Erro-Padrão dos prêmios estimados por AI+AAS+VC e AI+AD+VC em relação aos obtidos por AAS para um conjunto reduzido de valores do parâmetro de deslocamento μ . Apenas dois preços de exercício são apresentados (K=57 e K=61).



4 CONCLUSÕES

Na primeira parte do ensaio 2, havia sido concluído que qualquer técnica redutora de variância lá empregada gerava bons ganhos de precisão em relação ao método amostral padrão da Amostragem Aleatória Simples nas regiões dentro do dinheiro das opções consideradas. No entanto, quando as opções entravam na região fora do dinheiro, esses ganhos não mais se preservavam e o desempenho das técnicas se deteriorava rapidamente à medida que o preço de exercício das opções se elevava. De todas as técnicas lá analisadas, a Variável de Controle foi

que apresentou melhor desempenho, não se deteriorando tanto quanto as demais técnicas na região fora do dinheiro.

Nesta segunda parte, como no caso das opções européias, valeu a pena utilizar a Amostragem por Importância na região fora do dinheiro das opções asiáticas consideradas, seja na sua forma padrão ou na forma combinada com a Amostragem Descritiva, a qual gerou pequenos ganhos de precisão em relação à AAS. Os patamares de ganho obtidos pela AI+AAS e pela AI+AD são bem superiores aos obtidos pelas técnicas empregadas na primeira parte deste ensaio na região fora do dinheiro.

Entretanto, o que, de fato, fez diferença em termos de precisão das estimativas de prêmio na região fora do dinheiro foi a incorporação da Variável de Controle. A VC proporcionou grandes ganhos em relação à AAS, seja quando incorporada à AI+AAS ou à AI+AD. Conclui-se então que o ajuste nas estimativas promovido pela VC sobressai tanto à remodelagem do problema de simulação feita pela AI quanto ao controle amostral imposto pela AD, não sendo portanto muito vantajoso usar AI ou AD quando já se tem o ajuste.

ENSAIO 3

**A AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA APLICADA À SIMULAÇÃO POR
MONTE CARLO DO RISCO DE CRÉDITO DE UMA CARTEIRA DE ATIVOS DE
RENDA FIXA**

RESUMO

As principais metodologias de avaliação do risco de crédito de carteira são o modelo da *KMV*, o *CreditRisk+*, o *Credit Portfolio View* e o *CreditMetrics*. Esta última propõe uma avaliação do risco de crédito de carteiras de ativos por meio de simulação *Monte Carlo*. Neste ensaio, o modelo de simulação de risco de crédito utilizado baseou-se numa versão simplificada, porém bastante utilizada, do *CreditMetrics*, na qual somente o risco de *default* é considerado. Dada a raridade dos eventos de *default*, foi utilizada neste ensaio a Amostragem por Importância como técnica de simulação para se tentar obter estimativas mais precisas de risco de crédito. Esta técnica também foi associada à Amostragem Descritiva na tentativa de se gerar ganhos adicionais de precisão. O uso da Amostragem por Importância, seja na sua forma pura ou na forma combinada com a Amostragem Descritiva, mostrou-se bastante vantajoso em relação ao método amostral padrão de simulação.

ABSTRACT

KMV model, CreditRisk+, Credit Portfolio View and CreditMetrics are the mainly methodologies for estimating credit risk. The last one proposes an evaluation of portfolio credit risk based on Monte Carlo simulation. This essay uses a simplified, although very known, CreditMetrics version, in which only default risk is considered. As default events are rare, Importance Sampling was implemented here as a simulation technique in order to try to obtain more precise estimates of credit risk. Importance Sampling combined with Descriptive Sampling was also used in order to improve precision. Importance Sampling, either in its standard form or combined with Descriptive Sampling, was successful in obtaining more precise results.

1 INTRODUÇÃO

Este ensaio faz um exercício de simulação na área de risco de crédito. Os mercados financeiros e as instituições reguladoras mundiais, representadas em sua maioria por bancos centrais, voltaram grande parte de sua atenção na última década para metodologias de avaliação do risco de crédito, haja vista os efeitos do novo acordo de Basiléia sobre exigência de capital para os bancos cobrirem não apenas risco de mercado, mas também risco de crédito de suas carteiras (Basiléia II). A abordagem estrutural da *KMV Corporation*, o *CreditRisk+* do banco *Credit Suisse First Boston*, o *CreditPortfolio View* da consultoria McKinsey e o *CreditMetrics* do banco *JP Morgan* são metodologias de avaliação de VaR de risco de crédito de carteira desenvolvidas nos últimos anos pela indústria financeira. Algumas dessas metodologias fornecem soluções analíticas e outras soluções estimadas por simulação. O VaR de crédito é uma área de estudo nova, na qual as principais referências foram desenvolvidas recentemente. O presente ensaio não entra no mérito de julgar os modelos apresentados, limitando-se a escolher o *CreditMetrics* como metodologia de simulação e instrumento de avaliação do desempenho de técnicas redutoras de variância na área de risco de crédito.

É utilizada uma versão simplificada do *CreditMetrics* para a realização da simulação, apresentada em Glasserman (2004) e em Glasserman e Li (2005), onde somente o risco de default é considerado. O instrumento de análise é uma carteira formada por títulos/empréstimos emitidos por diferentes empresas, e sujeita a risco de default por parte de seus emissores. A técnica de redução de variância aqui avaliada é a Amostragem por Importância, por ser esta uma técnica apropriada para se tratar eventos raros, como é o caso dos eventos de

defaults dos emissores da carteira. A técnica da Amostragem Descritiva, pelos bons resultados apresentados anteriormente no caso de opções europeias e asiáticas, também é analisada em associação à Amostragem por Importância.

Na seção 2, é feita uma revisão teórica das quatro principais metodologias de avaliação de risco de crédito de carteiras acima citadas. Na seção 3, é descrito o modelo de simulação de risco de crédito aqui utilizado, baseado na versão simplificada do *CreditMetrics*, bem como a metodologia empregada para se aplicar a técnica da Amostragem por Importância na sua forma padrão e na forma combinada com a Amostragem Descritiva. Os principais resultados da simulação e as conclusões são apresentados respectivamente nas seções 4 e 5.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 Modelo KMV¹

A KMV Corporation, uma firma especializada em análise de risco de crédito, desenvolveu ao longo dos últimos anos uma metodologia de risco de crédito para calcular as probabilidade de *default* e a distribuição de perda relacionadas aos riscos de *default* e de migração.

Segundo o modelo KMV, o *CreditMetrics*, que será detalhado mais adiante, tem como pontos fracos não sua metodologia, mas sim a dependência de dados históricos para obter probabilidades de *default* e de migração de crédito e a hipótese básica de que todas as empresas pertencentes a uma mesma classe de *rating* tem a mesma probabilidade de transição e taxa de *default*.

¹ Em Crouhy et al., 2000.

A KMV realizou um exercício de simulação para mostrar que as taxas médias históricas de *default* e de probabilidade de transição podem desviar significativamente das taxas realizadas. Além disso, a KMV mostrou que diferenças substanciais nas taxas de *default* podem existir dentro da mesma classe de *rating*. A KMV argumenta ainda que as taxas de *default* são contínuas, enquanto que os *ratings* são ajustados de forma discreta, simplesmente porque as agências classificadoras de *rating* levam tempo para elevar ou rebaixar as empresas cujos riscos de *default* mudaram, o que compromete bastante as séries históricas de *rating* dessas agências.

Dessa forma, a KMV obtém analiticamente as probabilidades de *default*, chamadas de Freqüências Esperadas de *Default* (FED), para cada emissor. Esta metodologia se baseia no modelo proposto por Merton, 1974 que utiliza a teoria de opções para a avaliação de dívidas de empresas. A FED é então função da estrutura de capital da empresa, da volatilidade dos retornos dos seus ativos e do valor de mercado desses ativos. Dessa forma, sua obtenção se dá em três etapas: estimação do valor de mercado e da volatilidade dos ativos da empresa; cálculo da chamada distância-para-*default*, que é um índice de medida do risco de *default*; e tradução da distância-para-*default* em probabilidades de *default* por meio do uso de uma base de dados de *default*. A FED é específica para cada firma e pode ser mapeada em qualquer sistema de *rating*.

Contrariamente ao *CreditMetrics*, o modelo da KMV não faz nenhuma referência explícita às probabilidades de transição, as quais, na metodologia KMV, já estão embutidas nas FED's.

2.1.1 Estimação do Valor dos Ativos e da Volatilidade dos Retornos dos Ativos

No modelo KMV, utiliza-se a hipótese de que o valor de mercado dos ativos possui distribuição lognormal, ou equivalentemente, que os retornos dos ativos são normalmente distribuídos. Admite-se também que a volatilidade dos retornos é constante.

Como, na prática, os ativos e as obrigações de empresas não são negociados nem mercados a mercado diariamente, não é possível obter o valor total de mercado de seus ativos nem a volatilidade dos retornos desses ativos a partir de séries históricas. Somente o preço de ações de empresas é diretamente observável. A alternativa encontrada pela KMV para a avaliação foi então aplicar o modelo de Merton, 1974.

A KMV assume, para simplificar, que a estrutura de capital da empresa é somente composta de ações, dívidas de curto prazo (considerada equivalente a caixa), dívida de longo prazo (considerada uma perpetuidade), e ações preferenciais conversíveis. Torna-se assim possível obter soluções analíticas para o valor das ações, V_E , e sua volatilidade, σ_E (o subscrito E vem da palavra Equity em inglês) da forma abaixo:

$$V_E = f[V_A, \sigma_A, K, c, r], \quad (1)$$

$$\sigma_E = g(V_A, \sigma_A, K, c, r), \quad (2)$$

onde V_A é o valor de mercado dos ativos, σ_A é a volatilidade dos retornos dos ativos, K é a taxa de alavancagem da estrutura de capital, c é o cupom médio pago sobre a dívida de longo prazo e r é a taxa de juros livre de risco.

Se σ_E fosse diretamente observável, como o preço das ações, as equações acima poderiam ser resolvidas para V_A e σ_A . Porém, σ_E é relativamente instável, não havendo nenhuma forma simples de medi-lo precisamente a partir de dados de mercado. Como apenas V_E é diretamente observável, é possível escrever a Equação (3) abaixo a partir da Equação (1):

$$V_A = h(V_E, \sigma_A, K, c, r), \quad (3)$$

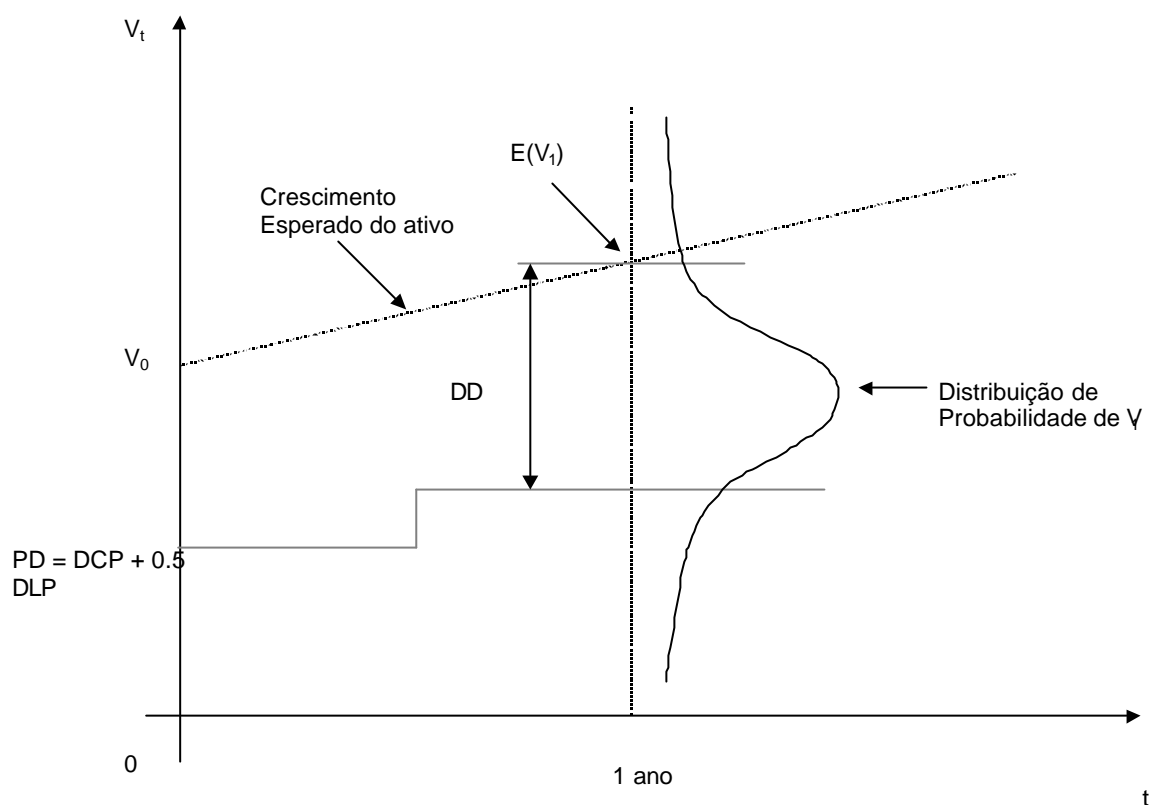
Para calibrar o modelo para σ_A , a KMV usa uma técnica iterativa.

2.1.2 Cálculo da Distância-para-Default

Na abordagem de Merton, 1974, o *default* ocorre quando o valor dos ativos da empresa cai abaixo do valor de suas obrigações. Contudo, a KMV observou, em uma amostra de centenas de empresas, que os *defaults* ocorriam quando o valor dos ativos alcançavam um nível entre o valor total das obrigações e o valor da dívida de curto prazo.

Dessa forma, o modelo KMV considera um outro conceito para *default*, que é quando o valor dos ativos atinge o chamado ponto de *default* (PD). O PD é definido como a soma do valor ao par da dívida de curto prazo (DCP, a ser paga no horizonte de 1 ano) mais metade da dívida de longo prazo (DLP). Com base nisso, a KMV criou o índice distância-para-*default* (DD), que vem a ser o número de desvios-padrão entre a média da distribuição do valor dos ativos num horizonte de 1 ano e o PD. A Figura 3.1 abaixo ilustra esses conceitos.

Figura 3.1: Ilustração do cálculo da Distância-Para-Default (DD)



Fonte: Crouhy et al., 2000.

Dada a hipótese da lognormalidade da distribuição do valor dos ativos, DD pode ser reescrito como:

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{PD_T}\right) + (m - (0.5 * s^2)) * T}{s \sqrt{T}}, \quad (4)$$

onde V_0 é o valor de mercado dos ativos, PD_T o ponto de *default* ao fim do horizonte de tempo T , m o retorno líquido esperado dos ativos, s a volatilidade anualizada dos ativos. A área sombreada na Figura 3.1 abaixo do PD é $N(-DD)$.

2.1.3 Tradução da Distância-para-*Default* para Frequência Esperada de *Default*

Esta última fase consiste simplesmente em mapear as DD's em probabilidades reais de *default*, para um dado horizonte de tempo. Estas probabilidades são chamadas pela KMV de frequências esperadas de *default* (FED's).

Com base em informações históricas de uma grande amostra de empresas, que inclui eventos de *default*, é possível estimar, para o horizonte de tempo considerado, a proporção de empresas que, de fato, entraram em *default* após esse tempo, para um dado nível de DD. Esta proporção é a FED.

2.1.4 Obtenção da Matriz de Probabilidades de Transição e do VaR de Crédito

Após a obtenção da FED, o modelo KMV se concentra em construir uma matriz de probabilidades de transição, que indicará a probabilidade de cada emissor migrar do seu respectivo *rating* atual para cada um dos possíveis *ratings* ao final do horizonte de tempo predeterminado. Diferentemente do *CreditMetrics*, a construção desta matriz no modelo KMV se baseia em taxas de *default*, ao invés de classes de *rating*. Em primeiro lugar, as empresas são classificadas em grupos de probabilidades de *default* não coincidentes, aos quais apenas posteriormente são atribuídas classes de *rating*. Por exemplo, todas as empresas identificadas com uma FED menor do que 2% são classificadas na mais alta classe de *rating* (AAA por exemplo), aquelas com FED entre 3% e 6% são classificadas na classe imediatamente inferior (AA) e assim por diante. Em seguida, fazendo uso dos dados históricos sobre mudanças nas FED's, é possível gerar a matriz de transição, exemplificada na Tabela 3.1 abaixo.

Tabela 3.1: Matriz de probabilidades de transição em 1 ano da KMV, baseada em classes não coincidentes de Frequências Esperadas de *Default*.

Initial rating	Rating at year-end (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	66.26	22.22	7.37	2.45	0.86	0.67	0.14	0.02
AA	21.66	43.04	25.83	6.56	1.99	0.68	0.20	0.04
A	2.76	20.34	44.19	22.94	7.42	1.97	0.28	0.10
BBB	0.30	2.80	22.63	42.54	23.52	6.95	1.00	0.26
BB	0.08	0.24	3.69	22.93	44.41	24.53	3.41	0.71
B	0.01	0.05	0.39	3.48	20.47	53.00	20.58	2.01
CCC	0.00	0.01	0.09	0.26	1.79	17.77	69.94	10.13

Fonte: Crouhy et al., 2000.

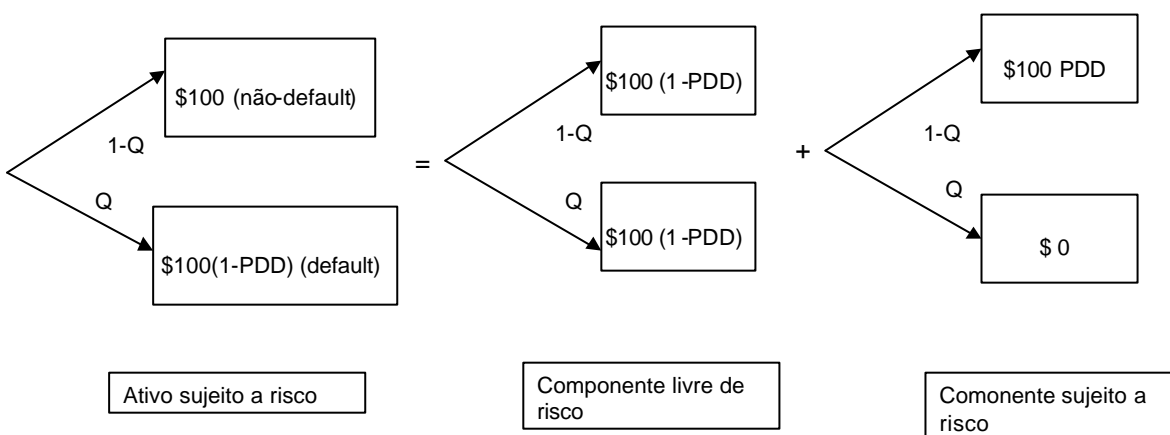
Para se calcular o VaR de crédito de uma carteira segundo a metodologia da KMV, é necessário ainda que se avalie o fluxo de caixa sujeito a risco. A avaliação no modelo KMV é baseada no chamado modelo risco neutro ou abordagem de Martingale de precificação de ativos, o qual obtém preços por meio do desconto do valor esperado do fluxo futuro de caixa, sendo que o valor esperado é calculado usando-se as chamadas probabilidades neutras ao risco em vez das probabilidades verdadeiras. O modelo KMV obtém essas probabilidades neutras ao risco a partir das FED's. Na verdade, para o modelo, no mundo risco neutro, o retorno esperado sobre todos os ativos é a taxa de juros livre de risco de *default*. Portanto, a FED risco neutro, chamada de Q pelo modelo, é definida como a probabilidade de *default*, i.e, a probabilidade de que o valor dos ativos ao fim do horizonte de tempo T caia abaixo do ponto de *default* PD , sob o processo estocástico do valor do ativo modificado para o mundo risco neutro, V_t^* ².

Uma vez obtidas as probabilidades neutras ao risco, a avaliação de fluxos de caixa sujeitos a risco se dá em duas etapas: a avaliação do componente livre de

² A expressão para a FED neutra ao risco (Q) usada pelo modelo KMV encontra-se em Crouhy et al., 2000, pg. 100.

risco de *default* e a avaliação do componente exposto a risco de crédito. No caso de um ativo com um único fluxo de caixa, por exemplo com um único pagamento de \$ 100 prometido de ser realizado em 1 ano e com uma taxa de recuperação de $(1 - PDD)$, onde PDD é a Perda Dado *Default*, esta avaliação é feita com o auxílio da Figura 3.2 abaixo:

Figura 3.2: Avaliação de um ativo de fluxo único de caixa sujeito a risco de *default*.



Fonte: Crouhy et al., 2000.

Dessa forma, fica mais fácil ver que os valores presentes do componente livre de risco de *default* (VP_1) e do componente exposto a risco de crédito (VP_2) são respectivamente:

$$VP_1 = 100(1 - PDD)/(1 + r), \quad (5)$$

$$VP_2 = E_Q(\text{fluxosujeitoa risco descontado}) = \frac{100PDD * (1 - Q) + 0 * Q}{1 + r}, \quad (6)$$

onde r é a taxa de juros livre de risco.

Sendo assim, o valor presente total (VP) do fluxo será:

$$VP = VP_1 + VP_2, \quad (7)$$

Generalizando o raciocínio acima para um ativo com vários fluxos de caixa (C_1, C_2, \dots, C_n), temos:

$$VP = (1 - PDD) \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + r_i)^{t_i}} + PDD \sum_{i=1}^n \frac{(1 - Q_i) C_i}{(1 + r_i)^{t_i}}, \quad (8)$$

Para finalmente se calcular o VaR de crédito da carteira considerada, o modelo KMV obtém analiticamente a distribuição de perdas da carteira de ativos considerada ao final do horizonte de tempo T . Para simplificar, admite-se, no modelo, que todos os ativos têm maturidade em T , sendo T maior do que o horizonte de crédito, H .

A perda da carteira (L) no tempo H é definida por:

$$L = V_{H/ND} - V_H, \quad (9)$$

onde:

$V_{H/ND}$ = valor descontado da carteira no tempo H , assumindo *não-default*,

V_H = valor de mercado da carteira no tempo H , obtido do processo de avaliação apresentado anteriormente.

V_H é desconhecido em $t = 0$ e somente sua distribuição de probabilidade pode ser obtida. Portanto, a perda, L , é uma variável aleatória. Sob algumas hipóteses simplificadoras, o modelo mostra que a distribuição de L , quando a carteira for bem

diversificada, é aproximadamente do tipo inversa normal. O VaR de crédito será então um percentil dessa distribuição, o qual pode ser facilmente obtido.

2.2 CreditRisk +³

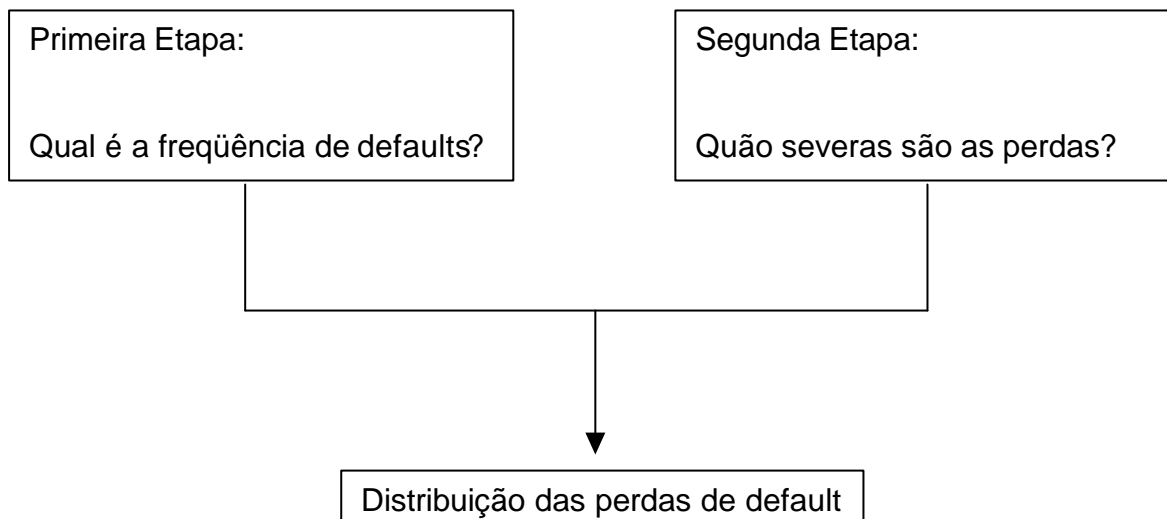
Ao final de 1997, a instituição Credit Suisse Financial Products (CSFP) lançou uma nova abordagem, chamada de CreditRisk+, a qual foca apenas em risco de *default*, não incluindo risco de migração de crédito.

O CreditRisk+ aplica uma estrutura de modelagem da área de seguros para a obtenção da distribuição de perdas de uma carteira de títulos e empréstimos. Contrariamente ao modelo KMV, o risco de *default* não é relacionado à estrutura de capital da empresa e nenhuma hipótese é feita sobre as causas do *default*.

A distribuição de perdas neste modelo é obtida em duas etapas, segundo a estrutura da Figura 3.3 abaixo.

³ Credit Suisse. CreditRisk+, 1997.

Figura 3.3: Estrutura para a avaliação de risco segundo a metodologia CreditRisk+



Fonte: CreditRisk+, 1997.

Para a realização da primeira etapa, o CreditRisk+ assume que o *default* segue um processo Poisson, segundo o qual um emissor A ou está em *default* com probabilidade P_A ou não está em *default* com probabilidade $1-P_A$. Também admite-se que, no caso de um título/empréstimo, a probabilidade de *default* em um dado período, um mês por exemplo, é a mesma em qualquer outro mês; que, para um grande número de emissores, a probabilidade de *default* de qualquer emissor é pequena; e que o número de *defaults* que ocorrem em qualquer período é independente do número de *defaults* que ocorrem em qualquer outro período⁴.

⁴ A hipótese de independência dos eventos de default é feita apenas na forma mais simples do modelo. Na forma mais completa, a dependência é admitida e quantificada pela correlação entre os eventos.

Sendo assim, a distribuição de probabilidade do número de *defaults* em um dado período (um ano por exemplo) é bem representada pela distribuição Poisson abaixo:

$$P(n \text{ defaults}) = \frac{m^n e^{-m}}{n!}, \quad (10)$$

onde: n = número anual de *defaults* ou taxa de *default* = 0, 1, 2, ...;

$$\mu = \text{número médio de } \textit{defaults} \text{ por ano} = \sum_A P_A.$$

O número anual de *defaults*, n , é portanto uma variável estocástica com média m e desvio-padrão \sqrt{m} . O modelo reconhece que a taxa média de *default*, m , muda com o tempo dependendo do ciclo da economia. Sendo assim, o modelo inclui uma hipótese adicional de que m é também uma variável estocástica com média m e desvio-padrão σ_μ . Essa hipótese não altera o fato de a distribuição do tipo Poisson bem representar a distribuição da taxa de *default*, n , mas faz com que essa distribuição fique mais assimétrica com uma cauda mais gorda à direita.

Para a realização da segunda etapa, sobre a severidade das perdas, é considerado no modelo que, na ocorrência de *default* de um emissor, a contraparte incorre em uma perda equivalente à sua exposição menos o montante recuperado, dado pela taxa de recuperação. No modelo, a exposição a cada emissor é então ajustada antecipadamente pela taxa de recuperação, para se calcular a perda dado o *default* (PDD). Estas exposições ajustadas são exógenas ao modelo e são independentes do risco de mercado e de migração de crédito.

Para se obter a distribuição de perdas da carteira, as perdas (exposições menos os ajustes provenientes da recuperação) são agrupadas em bandas. Esse agrupamento tem o efeito de reduzir o montante de dados que devem ser incorporados nos cálculos. A notação usada pelo modelo para o agrupamento das exposições é:

Tabela 3.1: Notações do modelo *CreditRisk+* para o agrupamento das exposições

REFERÊNCIA	NOTAÇÃO
EMISSOR	A
EXPOSIÇÃO	L_A
PROBABILIDADE DE DEFAULT	P_A
PERDA ESPERADA	I_A

Fonte: CreditRisk+, 1997.

Para se realizar os cálculos, uma unidade de exposição L é escolhida. Para cada emissor A , define-se v_A e e_A como:

$$L_A = L * v_A, \quad (11)$$

$$I_A = L * e_A, \quad (12)$$

Assim, v_A e e_A são respectivamente exposição e perda esperada expressadas como múltiplos da unidade de exposição L . Cada v_A é, em seguida, arredondado para o inteiro imediatamente superior. Este passo assim substitui cada exposição L_A pelo inteiro mais próximo do múltiplo de L . A vantagem disso é que, se a unidade de exposição L for adequadamente escolhida, então após ter sido feito o arredondamento para uma grande carteira, existirá um número relativamente

pequeno de valores possíveis de v_A , cada qual compartilhado por muitos emissores.

A carteira pode então ser dividida em m bandas de exposição, indexadas por j , onde $1 \leq j \leq m$. No CreditRisk+, cada banda é vista como uma carteira independente de títulos/empréstimos, para a qual é criada a seguinte notação:

Tabela 3.2: Notações do modelo *CreditRisk+* para o agrupamento das exposições (cont.)

REFERÊNCIA	NOTAÇÃO
EXPOSIÇÃO COMUM NA BANDA DE EXPOSIÇÃO J EM UNIDADES DE L	v_j
PERDA ESPERADA NA BANDA DE EXPOSIÇÃO J EM UNIDADES DE L	e_j
NÚMERO ESPERADO DE <i>DEFAULTS</i> NA BANDA DE EXPOSIÇÃO J	m_j

Fonte: CreditRisk+, 1997.

Assim, pelas definições acima, tem-se que:

$$e_j = v_j * m, \quad (13)$$

Da equação (12), e_A pode ser escrito como:

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{I}_A}{L}, \quad (14)$$

Então, a perda esperada ao longo do período de 1 ano na banda j , \mathbf{e}_j , expressa em unidades de L , é apenas a soma das perdas esperadas \mathbf{e}_A de todos os emissores pertencentes a banda j , i.e.,

$$\mathbf{e}_j = \sum_{A:v_A=v_j} \mathbf{e}_A, \quad (15)$$

Das equações (13) e (15), pode-se então escrever que:

$$\mathbf{n}_j = \frac{\mathbf{e}_j}{v_j} = \sum_{A:v_A=v_j} \frac{\mathbf{e}_A}{v_A}, \quad (16)$$

Finalmente, para se chegar à distribuição de perdas para a carteira, deve-se primeiramente obter a função geradora de probabilidade para cada banda. Como cada banda é vista como uma carteira de exposições, esta função é por definição:

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{perda} = nL) * Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ defaults}) * Z^{n*v_j}, \quad (17)$$

Como, no modelo, assume-se que o número de *defaults* segue uma distribuição Poisson, tem-se que:

$$G_j(z) = \sum \frac{e^{-m_j} m_j^n}{n!} Z^{n*v_j} = e^{\{-m_j + m_j Z^{v_j}\}}, \quad (18)$$

Em seguida, deve-se obter a função geradora de probabilidade para toda a carteira. Como assumimos que cada banda é uma carteira de exposições,

independente das outras bandas, a função de geradora probabilidade para toda a carteira é apenas o produto da função de probabilidade para cada banda:

$$G(z) = \prod_{j=1}^m e^{(-m_j + m_j Z^{v_j})} = e^{(-\sum_{j=1}^m m_j + \sum_{j=1}^m m_j Z^{v_j})}, \quad (19)$$

onde $\mathbf{m} = \sum_{j=1}^m m_j$ denota o número esperado de *defaults* para toda a carteira.

O procedimento para se obter a distribuição de perdas para toda a carteira a partir da Equação (19) está descrito em CreditRisk+, 1997, pg.38. Este procedimento envolve expandir por Taylor $G(z)$ e aplicar a fórmula de Leibnitz ao resultado da expansão. A obtenção resulta na seguinte relação de recorrência que possibilita a construção da distribuição de perdas:

$$P(\text{perda de } nL) = \sum_{j: \mathbf{n}_j \leq n} \frac{\mathbf{e}_j}{n} P(\text{perda de } (n - \mathbf{n}_j)L), \quad (20)$$

Esta distribuição depende apenas de 2 conjuntos de parâmetros: \mathbf{e}_j e v_j .

O modelo CreditRisk+ admite várias possibilidades de extensão. Como exemplos de extensões do modelo, pode-se considerar uma estrutura multi-período, ao invés de um único período como mostrado acima, e uma volatilidade variável da taxa de *default*, ao invés de fixa como considerado acima. Em quaisquer dos casos, o CreditRisk+ obtém uma fórmula fechada para a distribuição de perdas de uma carteira de títulos/empréstimos.

2.3 Credit Portfolio View⁵

A consultoria McKinsey propôs um modelo próprio de avaliação de risco de crédito, batizado de Credit Portfolio View.

O Credit Portfolio View é um modelo discreto multi-período que é usado para simular a distribuição conjunta das probabilidades de *default* e de migração para várias classes de *rating* em diferentes indústrias de cada país, distribuição esta condicionada ao valor de fatores macroeconômicos como taxa de desemprego, taxa de crescimento do PIB, nível de taxas de juros de longo prazo, taxas de câmbio, gastos do governo e taxas de poupança agregada.

O modelo baseia-se na observação de que as probabilidades de *default* e de migração estão relacionadas ao estado da economia: quando esta caminha para a recessão, os eventos de *defaults* e de rebaixamento aumentam, ocorrendo o contrário quando a economia melhora. Como o estado da economia é determinado por fatores macroeconômicos, o CreditPortfolio View propõe uma metodologia para relacionar estes fatores macroeconômicos às probabilidades de *default*.

As probabilidades de *defaults* são modeladas conforme a função logit abaixo:

$$P_{j,t} = \frac{1}{1 + e^{-Y_{j,t}}}, \quad (21)$$

onde $P_{j,t}$ é a probabilidade de *default* condicional no período t , para emissores do país/indústria j e $Y_{j,t}$ é o valor do índice macroeconômico obtido de um modelo multi-fator apresentado a seguir.

⁵ Crouhy et al., 2000.

$$Y_{j,t} = \mathbf{b}_{j,0} + \mathbf{b}_{j,1}X_{j,1,t} + \mathbf{b}_{j,2}X_{j,2,t} + \dots + \mathbf{b}_{j,m}X_{j,m,t} + v_{j,t}, \quad (22)$$

onde $Y_{j,t}$ é o valor do índice no período t para o j -ésimo país/indústria, $\mathbf{b}_j = (\mathbf{b}_{j,0}, \mathbf{b}_{j,1}, \mathbf{b}_{j,2}, \dots, \mathbf{b}_{j,m})$ são coeficientes a ser estimados para o j -ésimo país/indústria, $X_{j,t} = (X_{j,1,t}, X_{j,2,t}, \dots, X_{j,m,t})$ são valores no período t das variáveis macroeconômicas para o j -ésimo país/indústria, $v_{j,t}$ é o erro assumido independente de $X_{j,t}$ e identicamente distribuído com distribuição normal, i.e., $v_{j,t} \sim N(0, \mathbf{S}_j)$ e $v_{j,t} \sim N(0, \mathbf{S}_v)$.

As variáveis macroeconômicas são especificadas para cada país. Quando existem dados suficientes, o modelo pode ser calibrado ao nível país/indústria. Ambas as probabilidades de *default* $P_{j,t}$ e o índice $Y_{j,t}$ são definidos ao nível país/indústria e os coeficientes \mathbf{b}_j são calibrados de acordo com cada nível.

Admite-se que cada variável macroeconômica siga um modelo univariado auto-regressivo de ordem 2 (AR2):

$$X_{j,i,t} = \mathbf{g}_{j,i,0} + \mathbf{g}_{j,i,1} * X_{j,i,t-1} + \mathbf{g}_{j,i,2} * X_{j,i,t-2} + e_{j,i,t}, \quad (23)$$

onde $X_{j,i,t-1}$ e $X_{j,i,t-2}$ denotam valores defasados da variável macroeconômica $X_{j,i,t}$, $\boldsymbol{\gamma}_j = (\boldsymbol{\gamma}_{j,i,0}, \boldsymbol{\gamma}_{j,i,1}, \boldsymbol{\gamma}_{j,i,2})$ são coeficientes a serem estimados, $e_{j,i,t}$ é o erro para o qual supõe-se $e_{j,i,t} \sim N(0, \mathbf{S}_{e_{j,i,t}})$ e $e_{j,t} \sim N(0, \mathbf{S}_e)$.

Para calibrar o modelo, há que se resolver o sistema definido pelas Equações (21), (22) e (23) e pelo vetor de erros definido a seguir:

$$E_t = [v_t; e_t] \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (24)$$

$$\text{onde } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_v & \Sigma_{v,e} \\ \Sigma_{e,v} & \Sigma_e \end{bmatrix}.$$

Uma vez calibrado o sistema, pode-se usar a decomposição de Cholesky de Σ para simular a distribuição de probabilidades de *default*.

Após determinada a distribuição de probabilidades de *default*, o modelo preocupa-se em obter a matriz de probabilidades de transição. O ponto de partida para tal é a matriz de transição de Markov, baseada em dados históricos das agências de *rating* Moody's e Standard & Poor's e denotada por fM .

Segundo o modelo, as probabilidades de *default* e de rebaixamento para os emissores é mais alta do que a média durante períodos de recessão, enquanto que as probabilidades de elevação de *rating* decrescem. O contrário ocorre durante períodos de expansão da economia. Ou seja,

$$\text{em recessão: } \frac{PDS_t}{fPDS} > 1, \quad (25)$$

$$\text{em expansão: } \frac{PDS_t}{fPDS} < 1, \quad (26)$$

onde PDS_t é a probabilidade de *default* simulada para um dado emissor, $fPDS_t$ a probabilidade de *default* com base na média histórica para o emissor.

O modelo propõe usar estas razões para ajustar as probabilidades de migração em fM a fim de produzir uma matriz de transição M condicionada ao estado da economia:

$$M_t = M(P_{j,t} / fPDS), \quad (27)$$

onde o ajustamento consiste em deslocar a função de probabilidade em estados de *default* e de rebaixamento quando a razão $P_{j,t} / fPDS$ for maior do que 1 e vice-versa se a razão for menor do que 1. Como é possível simular $P_{j,t}$ ao longo de qualquer horizonte de tempo $t = 1, \dots, T$, esta abordagem pode gerar matrizes de transição multi-períodos:

$$M_t = \prod_{t=1, \dots, T} M(P_{j,t} / fPDS), \quad (28)$$

É possível simular muitas vezes a matriz de transição (28) para gerar a distribuição acumulada da probabilidade condicional de *default* para qualquer *rating*.

A mesma metodologia de simulação pode ser usada para produzir distribuições acumuladas das probabilidades condicionais de migração ao longo de qualquer horizonte de tempo.

2.4 CreditMetrics⁶

A metodologia de avaliação de risco de crédito proposta por Gupton, Finger e Bhatia (1997) batizada de *CreditMetrics* se baseia na simulação da distribuição futura de mudanças no valor de uma carteira de ativos decorrentes de mudanças de *rating* de crédito dos respectivos emissores. Essas mudanças de *rating* de crédito consistem em eventos de *defaults* ou de elevação (*upgrades*) e de rebaixamento (*downgrades*) da qualidade de crédito.

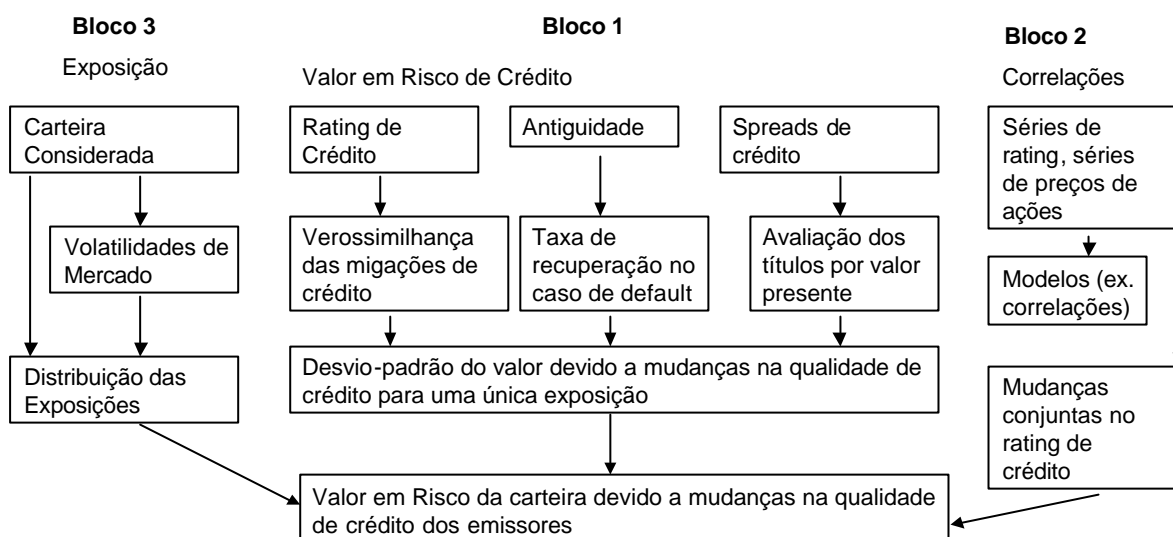
⁶ Gupton, G.M., Finger, C.C. e Bhatia, M. (1997). CreditMetrics Technical Document.

A partir dessa distribuição, o *CreditMetrics* calcula um determinado percentil que representará o Valor em Risco de crédito (VaR) da carteira. A necessidade de se ter a distribuição do valor futuro da carteira advém do fato de que, quando se trata de risco de crédito, a hipótese de normalidade dos retornos não mais se aplica, e portanto as medidas de média e de desvio-padrão dos retornos não mais são suficientes para quantificar os níveis de percentis da distribuição do valor da carteira decorrentes de mudanças de *rating* de crédito. Diferentemente da normalidade da distribuição que se observa para os retornos de mercado, os retornos de crédito possuem distribuição assimétrica à esquerda, sendo essa assimetria explicada pelo fato de que os eventos de *default* aumentam as probabilidades de se ter grandes perdas.

Segundo o *CreditMetrics*, quando se trata de avaliar risco de crédito, além da dificuldade advinda da não-normalidade dos retornos, há o problema de se medir o efeito sobre a carteira da diversificação do crédito. Este efeito é medido por meio das correlações das mudanças na qualidade de crédito para todos os pares de emissores de ativos da carteira considerada. Diferentemente do caso do risco de mercado, essas correlações não são diretamente observáveis. O *CreditMetrics* propõe então um modelo para se estimar as correlações de qualidade de crédito.

A Figura 3.4 apresenta a estrutura completa desenvolvida pelo *CreditMetrics* para a avaliação do risco de crédito, a qual está dividida em três blocos de análise.

Figura 3.4 Estrutura da metodologia *CreditMetrics* para a avaliação do risco de crédito de uma carteira.



Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

2.4.1 Bloco 1: VaR de Crédito para um Único Instrumento

No primeiro bloco, o *CreditMetrics* considera o caso mais simples de uma carteira composta por um único instrumento de renda fixa (um único emissor), o qual pode ser um título ou um empréstimo pois, para ambos, o processo de obtenção do risco de crédito é o mesmo.

Neste bloco, é necessário especificar as categorias de *rating* a serem usadas e as probabilidades de migração entre categorias ao longo do horizonte de tempo considerado (em geral, um ano). Para o modelo, não importa se o usuário irá utilizar alguma matriz de probabilidades já conhecida, como a da Moody's ou a da Standard & Poor's, ou uma própria obtida a partir de dados históricos de migração de *rating*. A Tabela 3.3 exemplifica uma matriz de probabilidades de transição, a qual indica a probabilidade de cada emissor

migrar do seu respectivo *rating* atual para cada um dos possíveis *ratings* ao final de 1 ano.

Tabela 3.3: Matriz de probabilidades de transição para três empresas emissoras, com os seguintes *ratings* iniciais: Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.

Rating	Probabilidades de Transição (%)		
	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
AAA	0.02	0.09	0.22
AA	0.33	2.27	0
A	5.95	91.05	0.22
BBB	86.93	5.52	1.3
BB	5.3	0.74	2.38
B	1.17	0.26	11.24
CCC	0.12	0.01	64.86
Default	0.18	0.06	19.79

Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

Uma hipótese considerada forte do modelo é que todos os emissores de uma mesma categoria de *rating* são homogêneos em crédito, possuindo as mesmas probabilidades de migração e de *default*. Esta hipótese foi, como já visto, contestada pela KMV, a qual, em seu modelo, assumiu que cada emissor é tratado especificamente e caracterizado por sua própria distribuição de retorno, sua própria estrutura de capital e sua própria probabilidade de *default*.

Além disso, neste primeiro bloco, é necessário especificar um modelo de avaliação dos ativos a futuro. No caso mais simples de títulos e empréstimos, a avaliação se dá pelo cálculo do valor presente dos fluxos futuros dos instrumentos, usando-se como taxa de desconto aquelas obtidas de curvas de juros futuros, do tipo *zero-curve*, para o horizonte de tempo considerado, sendo que cada categoria de crédito terá uma *zero-curve* correspondente. Por

exemplo, se existirem sete categorias de crédito no modelo, deverão existir sete *zero-curves* para precificar o instrumento em todos os seus sete estados possíveis, sendo todos os emissores de uma mesma categoria marcados a mercado com a mesma curva. Assim, o preço futuro (um ano) de um título/empréstimo é obtido da sua correspondente *zero-curve* de um ano a frente, a qual é aplicada ao fluxo de caixa residual do instrumento do ano um até a sua maturidade.

No caso de *default*, a avaliação do instrumento é dada pela estimação da taxa de recuperação do instrumento, que é uma percentagem do seu valor de face. Esta taxa de recuperação depende da antiguidade do instrumento, i.e., se é um instrumento do tipo sênior garantido, com taxas de recuperação mais altas em média, ou do tipo junior sem garantia, com taxas mais baixas em média. Na simulação da distribuição de perdas da carteira, assume-se que essas taxas de recuperação são variáveis aleatórias com uma distribuição Beta, cujo único parâmetro a ser estimado é a média. Esta média é estimada pelo *CreditMetrics* usando-se os dados históricos de taxas de recuperação das agências de *rating*.

A partir dessas informações de probabilidades de migração/*default* e de preços futuros da carteira, é possível concluir o primeiro bloco do modelo com a construção da distribuição futura das mudanças no valor da carteira formada por um único instrumento diante de mudanças na qualidade de crédito de seu emissor e, conseqüentemente, a obtenção de seus percentis, que corresponderão a medidas de VaR de crédito.

2.4.2 Bloco 2: Correlações e Distribuição Conjunta de Probabilidade de Migração

O segundo bloco deve ser considerado quando se tem uma carteira contendo mais de um título/empréstimo, cada qual com seu respectivo emissor. Neste caso, para se chegar ao VaR de crédito da carteira, há que se estimar a correlação de qualidade de crédito entre todos os pares de emissores, obter a distribuição conjunta de probabilidade de migração de todos os pares de emissores e se reavaliar a carteira em todos os seus estados possíveis ao final do horizonte de tempo considerado.

Para se obter a distribuição conjunta de probabilidade de migração, o *CreditMetrics* utiliza o modelo proposto por Merton, 1974, que faz uso da teoria de opções para a avaliação de dívidas⁷. Segundo o *CreditMetrics*, a motivação de usar esta abordagem indireta para se obter a distribuição conjunta advém da dificuldade prática de se conseguir dados históricos de *defaults* conjuntos, o que dificulta muito a estimação das probabilidades conjuntas diretamente.

O modelo propõe então que se identifique um processo para as mudanças de *rating* de crédito, de forma a estabelecer uma conexão entre os eventos que se deseja descrever (as mudanças de *rating*), mas que não são diretamente observáveis, e algo que possa ser entendido e observável. Os parâmetros que definem o processo proposto são então estimados e as probabilidades de mudança de *rating* determinadas.

⁷ Tanto a KMV quanto o *CreditMetrics* utilizam o modelo de Merton em suas metodologias, porém eles diferem substancialmente nas hipóteses simplificadoras que fazem a fim de facilitarem suas respectivas implementações.

O *CreditMetrics* propõe assim que o valor dos títulos/empréstimos emitidos pela empresa seja o processo que guia suas mudanças de *rating* de crédito e *defaults*. Neste modelo, existem níveis ou limites para o valor dos títulos/empréstimos, que determinarão *ratings* de crédito de seus respectivos emissores ao final do horizonte de tempo considerado.

Para se obter esses valores-limite, o modelo admite que os retornos financeiros dos instrumentos da carteira (R), após o horizonte de tempo considerado, são normalmente distribuídos, com média $\mu=0$ e desvio-padrão (ou volatilidade) σ . Assim sendo, existirão retornos-limite Z_{Def} , Z_{CCC} , Z_{BBB} , etc., tais que se $R < Z_{Def}$ por exemplo, o emissor entrará em *default*, se $Z_{Def} < R < Z_{CCC}$, o emissor será rebaixado para o *rating* CCC e daí por diante.

Como R tem distribuição normal por hipótese, pode-se escrever que:

$$\Pr ob(Default) = \Pr ob(R < Z_{Def}) = \mathbf{f}(Z_{Def} / \mathbf{s}), \quad (29)$$

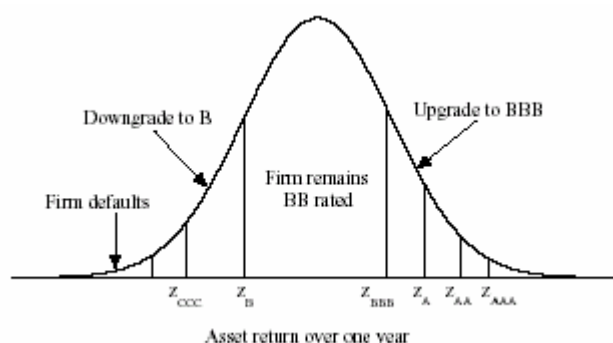
$$\Pr ob(CCC) = \Pr ob(Z_{Def} < R < Z_{CCC}) = \mathbf{f}(Z_{CCC} / \mathbf{s}) - \mathbf{f}(Z_{Def} / \mathbf{s}), \quad (30)$$

e daí em diante (onde Φ denota a distribuição acumulada da normal padrão).

As equações acima são então igualadas aos valores correspondentes das probabilidades de migração de cada emissor determinadas no bloco anterior. Dessa forma, os retornos-limite de cada emissor poderão ser determinados.

A conexão entre retornos financeiros e *ratings* de crédito é ilustrada pela Figura 3.5 abaixo.

Figura 3.5: Distribuição dos retornos financeiros de um instrumento, com a identificação dos limites de mudança de *rating* de crédito do seu emissor.



Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

A fim de se descrever mudanças conjuntas de *rating* de crédito, no caso de mais de um emissor, devem ser consideradas no modelo as correlações entre os retornos financeiros de cada instrumento emitido.

No caso de dois instrumentos, cada qual emitido por um emissor diferente, o modelo assume que os retornos são correlacionados por r e normalmente distribuídos⁸. A matriz de covariância para a distribuição normal bivariada é representada por S , onde:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s^2 & rss' \\ rss' & s'^2 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

Conhecido r , é possível obter as probabilidades conjuntas de migração dos dois emissores. A expressão abaixo mostra, no caso de $r \neq 0$, como se

⁸ No *CreditMetrics*, é reconhecido que esta hipótese da distribuição normal bivariada não é necessária. Qualquer distribuição multivariada (inclusive as que incorporam caudas gordas ou assimetria) na qual os movimentos conjuntos dos retornos podem ser caracterizados totalmente por um único parâmetro de correlação, pode ser aplicada.

obtem a probabilidade de que os emissores mantenham-se, ao final do horizonte determinado, classificados como inicialmente; supondo que o emissor 1 tenha *rating* inicial de BB e o emissor 2 de A.

$$\text{Pr ob}(Z_B < R < Z_{BB}, Z_{BBB} < R' < Z_A) = \int_{Z_B}^{Z_{BB}} \int_{Z_{BBB}}^{Z_A} f(r, r'; \Sigma) (dr') dr, \quad (32)$$

onde $f(r, r'; S)$ é a função densidade para a distribuição normal bivariada com matriz de covariância S .

A Tabela 3.4 abaixo apresenta um exemplo de matriz de probabilidades conjuntas de transição para um par de emissores, classificados inicialmente em BB e A respectivamente. Os totais de cada emissor são as probabilidades de migração individuais determinadas no bloco 1.

Tabela 3.4: Probabilidades conjuntas de migração de *rating* para dois emissores, com *rating* inicial de BB e A respectivamente.

Rating da Primeira Empresa	Rating da Segunda Empresa								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default	Total
AAA	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03
AA	0.00	0.01	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
A	0.00	0.04	0.61	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.66
BBB	0.02	0.35	7.10	0.20	0.02	0.01	0.00	0.00	7.70
BB	0.07	1.79	73.65	4.24	0.56	0.18	0.01	0.04	80.54
B	0.00	0.08	7.80	0.79	0.13	0.05	0.00	0.01	8.86
CCC	0.00	0.01	0.85	0.11	0.02	0.01	0.00	0.00	1.00
Default	0.00	0.01	0.90	0.13	0.02	0.01	0.00	0.00	1.07
Total	0.09	2.29	91.06	5.48	0.75	0.26	0.01	0.06	100.00

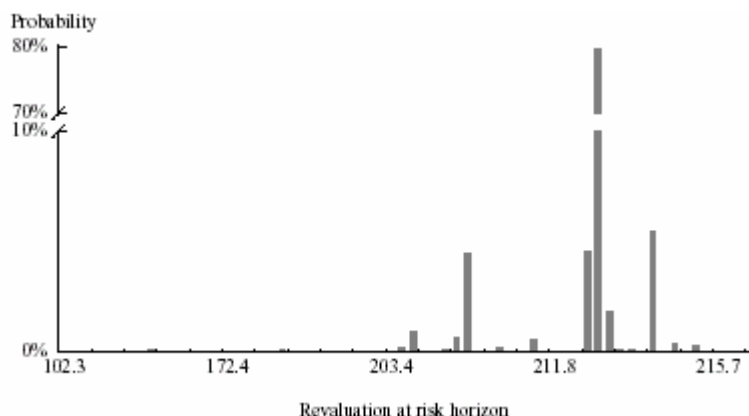
Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

Em relação à estimação do nível de correlação r entre os retornos, o *CreditMetrics* admite que há diferentes alternativas, como por exemplo, supor um valor fixo para todos os pares de emissores da carteira, para simplificar os cálculos, ou usar a correlação entre os retornos de ações como *proxy* para a

correlação entre os retornos dos instrumentos da carteira. Dado que a hipótese de correlação fixa é muito simplista e que pode haver escassez de informação sobre preços de ações de muitas empresas emissoras, o *CreditMetrics* sugere uma metodologia mais confiável para a estimação das correlações entre os retornos. Esta metodologia se baseia nas correlações existentes dentro de um conjunto de índices de desempenho industrial de cada país e no mapeamento das correlações das empresas emissoras a partir das correlações entre os índices. Por exemplo, uma empresa emissora pode ser mapeada com 56% de participação na indústria química alemã, 24% na indústria financeira alemã, 14% na indústria química americana e 6% na indústria financeira americana. Usando esses pesos e as correlações por indústria/país existentes (e disponíveis na base de dados do *CreditMetrics*), obtém-se as correlações entre os emissores.

Um histograma das mudanças futuras no valor da carteira diante de mudanças de *rating* de crédito dos emissores pode ser obtido a partir das informações da matriz de probabilidades de migração de *rating* e dos valores futuros dos dois instrumentos emitidos em cada par de *rating* possível ao final do horizonte de tempo considerado (obtidos conforme explicado no Bloco 1). A Figura 3.6 ilustra o caso.

Figura 3.6: Distribuição do valor futuro de uma carteira formada por dois títulos.



Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

No caso de carteiras maiores, com mais emissores, o processo descrito acima para a obtenção das probabilidades conjuntas deve ser repetido para cada par de emissores. Neste caso, a dificuldade de obtenção das probabilidades conjuntas cresce exponencialmente e o *CreditMetrics* sugere uma abordagem de simulação de Monte Carlo para se determinar uma distribuição de probabilidades mais completa dos valores futuros da carteira diante de mudanças de *rating* de crédito.

Para se efetuar a simulação do VaR de crédito de uma carteira de títulos/empréstimos segundo a metodologia do *CreditMetrics* será necessário:

- gerar cenários de *rating* de crédito para os emissores dos instrumentos componentes da carteira ao final do horizonte de risco considerado;
- reavaliar a carteira em cada um dos cenários gerados, o que fornecerá um grande número de valores futuros da carteira;
- expressar os valores futuros gerados em termos de uma distribuição de probabilidade, para, dessa forma, poder ser obtida uma série de

estatísticas dessa distribuição, as quais podem ser usadas como medidas de risco de crédito.

Para a geração de cenários, o *CreditMetrics* parte da suposição de que são normalmente distribuídos os retornos de cada título/empréstimo componente da carteira ao final do horizonte de tempo predeterminado (1 ano).

Como visto anteriormente, a hipótese da normalidade dos retornos e as informações da matriz de probabilidades de transição permitirão que as curvas de distribuição dos retornos de cada título/empréstimo sejam divididas em faixas-limite de *rating* de crédito, dentro das quais seus emissores poderão estar classificados ao final de 1 ano (ver Figura 3.9).

Gerar diversos cenários para os retornos de cada instrumento torna-se assim uma questão de gerar valores para variáveis normalmente distribuídas e correlacionadas segundo uma matriz predeterminada de correlação entre os retornos de cada instrumento. Existem vários métodos de obtenção de *variables* correlacionadas, tais como decomposição de Cholesky, cópula gaussiana e decomposição de valor singular. A Tabela 3.5 apresenta um exemplo de cenários de retornos correlacionados.

Tabela 3.5: Cenários de retornos correlacionados de instrumentos emitidos por 3 empresas. Os *ratings* iniciais são Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.

Retornos Financeiros			
Cenários	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
1	-0.7769	-0.875	-0.6874
2	-2.106	-2.0646	0.2996
3	-0.9276	0.0606	2.7068
4	0.6454	-0.1532	-1.151
5	0.469	-0.5639	0.2832
6	-0.1252	-0.557	-1.9479
7	0.6994	1.5191	-1.6503
8	1.1778	-0.6342	-1.7759
9	1.848	2.1202	1.1631
10	0.0249	-0.4642	0.3533

Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

Após a geração dos cenários dos retornos, a cada um deles será atribuído um *rating* de crédito, de acordo com as faixas-limite de *rating* de crédito já determinadas. Assim, a distribuição conjunta de retornos dos diversos instrumentos da carteira será mapeada em uma distribuição conjunta de *rating* de crédito. A Tabela 3.6 ilustra o mapeamento dos cenários gerados de retornos correlacionados em cenários de *rating* de crédito.

Tabela 3.6: Mapeamento dos cenários de retornos correlacionados em cenários de *rating* de crédito para instrumentos emitidos por 3 empresas. Os *ratings* iniciais são: Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.

Cenários	Retornos Financeiros			Novos Ratings		
	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
1	-0.7769	-0.875	-0.6874	BBB	A	CCC
2	-2.106	-2.0646	0.2996	BB	BBB	CCC
3	-0.9276	0.0606	2.7068	BBB	A	A
4	0.6454	-0.1532	-1.151	BBB	A	Default
5	0.469	-0.5639	0.2832	BBB	A	CCC
6	-0.1252	-0.557	-1.9479	BBB	A	Default
7	0.6994	1.5191	-1.6503	BBB	A	Default
8	1.1778	-0.6342	-1.7759	BBB	A	Default
9	1.848	2.1202	1.1631	A	AA	B
10	0.0249	-0.4642	0.3533	BBB	A	CCC

Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

Cada cenário de *rating* obtido deverá ser avaliado segundo a soma dos valores dos instrumentos classificados de acordo com aquele cenário ao final do ano (ver Tabela 3.7 abaixo). Para serem avaliados os cenários que não resultarão em *default*, os valores de cada instrumento deverão ser obtidos a partir do desconto de seus respectivos fluxos futuros de caixa segundo curvas de taxas futuras de juros predeterminadas. Para os cenários de *default*, será necessário conhecer as taxas de recuperação do instrumento em caso de *default*. Como dito anteriormente, o *CreditMetrics* supõe que essas taxas de recuperação são variáveis aleatórias distribuídas segundo uma distribuição Beta.

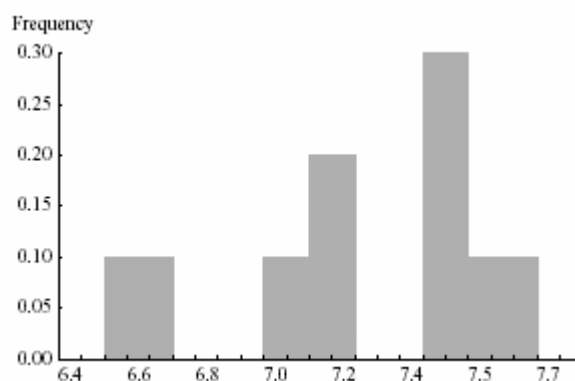
Tabela 3.7: Avaliação dos cenários de *rating* de crédito. Os *ratings* iniciais são: Empresa 1 com BBB, Empresa 2 com A e Empresa 3 com CCC.

Cenários	Retornos Financeiros			Novos Ratings			Avaliação			Total da Carteira
	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	
1	-0.7769	-0.875	-0.6874	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484
2	-2.106	-2.0646	0.2996	BB	BBB	CCC	4.081	2.063	1.056	7.2
3	-0.9276	0.0606	2.7068	BBB	A	A	4.302	2.126	1.161	7.589
4	0.6454	-0.1532	-1.151	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.657	7.085
5	0.469	-0.5639	0.2832	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484
6	-0.1252	-0.557	-1.9479	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.754	7.182
7	0.6994	1.5191	-1.6503	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.269	6.697
8	1.1778	-0.6342	-1.7759	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.151	6.579
9	1.848	2.1202	1.1631	A	AA	B	4.346	2.13	1.137	7.613
10	0.0249	-0.4642	0.3533	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484

Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

Dessa forma, para cada um dos diversos cenários de *rating* gerados haverá um valor futuro possível da carteira. Uma distribuição de probabilidades do valor futuro da carteira poderá ser então construída (ver Figura 15 abaixo). Quanto mais cenários forem gerados no processo de simulação, mais suave será esta curva de distribuição e, dessa forma, mais precisas serão as medidas de risco que podem, a partir desta curva, ser calculadas. O *Creditmetrics* apresenta algumas medidas de risco absolutas e marginais, tais como o desvio-padrão ou o i-ésimo percentil dessa distribuição, e faz uma discussão das vantagens e desvantagens de cada uma.

Figura 3.7: Distribuição de freqüência dos valores futuros da carteira.



Fonte: *CreditMetrics*, 1997.

2.4.3 Bloco 3: Exposição

Segundo o *CreditMetrics*, os conceitos aplicados até o momento para o caso de carteiras formadas por títulos/empréstimos são igualmente aplicáveis a outros tipos de exposição, tais como recebíveis, compromissos de empréstimos e cartas financeiras de crédito. A distribuição dos valores futuros da carteira, seja ela formada por títulos, empréstimos ou esses outros tipos de exposição, é caracterizada por dois componentes: a probabilidade de se estar em qualquer estado possível de *rating* ao final do horizonte de tempo considerado e o valor da carteira em cada um desses possíveis estados. As probabilidades de se estar em cada estado de qualidade de crédito são as mesmas para todos esses tipos de exposição, uma vez que essas probabilidades estão associadas aos emissores e não às suas obrigações. A forma de cálculo dos valores futuros de cada tipo de exposição é baseada no modelo do valor presente, usando curvas de juros futuros específicas para cada *rating* de crédito.

No entanto, segundo o *CreditMetrics*, para instrumentos derivativos, cujas exposições dependem dos movimentos das taxas de juros, tais como os *swaps*

e *forwards*, a avaliação da carteira em estados futuros de *rating* é mais difícil. Ao contrário dos títulos/empréstimos, não há uma forma simples de se obter fluxos futuros de caixa sem fazer hipóteses sobre a dinâmica das taxas de juros. A dificuldade surge do fato de que a exposição em um swap de taxas de juros, por exemplo, pode ser positiva, se o swap estiver *in-the-money* para o seu detentor, ou negativa, se o swap estiver *out-of-the-money*. Neste último caso, o swap se torna uma obrigação e é a contraparte que fica em risco. Assim sendo, para cada cenário de juros futuros haverá um valor da exposição em swap.

Na verdade, todos os modelos de avaliação de risco de crédito aqui revistos têm em comum a hipótese de taxas de juros e exposições determinísticas, i.e., assumem nenhum risco de mercado. Essa hipótese torna esses modelos inapropriados para medir risco de crédito de instrumentos derivativos. Para tal, seria necessário desenvolver modelos adicionais de taxas de juros estocásticas e probabilidades de migração que dependessem do nível das taxas de juros. Nenhum destes modelos, até o momento, oferece uma abordagem integrada de risco de crédito com risco de mercado.

3 METODOLOGIA

3.1 O Modelo de Simulação *Monte Carlo* de Risco de Crédito

O modelo de simulação empregado neste ensaio utiliza uma versão simplificada do *CreditMetrics* e apresentada em Glasserman (2004) e Glasserman e Li (2005). Enquanto no *CreditMetrics* original o objetivo é, como já dito, estimar a distribuição do valor futuro da carteira diante de mudanças no *rating* de crédito de seus emissores, na versão simplificada, o foco é a distribuição de perdas futuras em decorrência de default dos emissores. Ou seja, o default é uma das várias

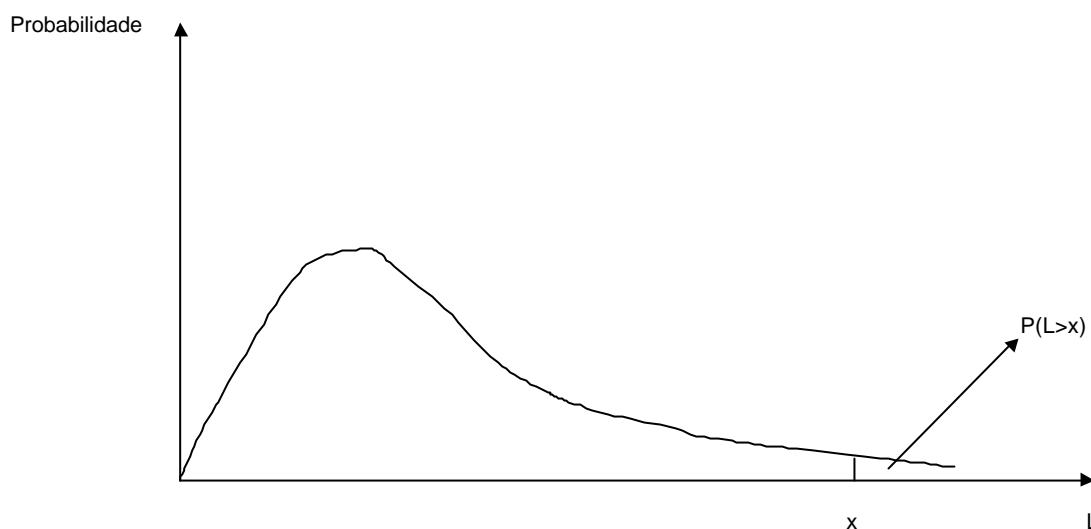
categorias possíveis de *rating* de crédito na versão original, enquanto que, na versão simplificada, os resultados possíveis são apenas default e não default.

Além disso, nos cenários de default do *CreditMetrics* simplificado, supõe-se que a perda seja total (100% da exposição), ao passo que, na versão original, o percentual de perda depende da taxa de recuperação, que, por sua vez, é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade do tipo Beta.

Por fim, no *CreditMetrics* original, os cenários de *rating* de crédito de cada emissor são extraídos de uma distribuição Normal, enquanto que na versão simplificada, cada emissor tem seus cenários extraídos de uma distribuição Bernoulli com uma dada probabilidade de sucesso (default).

O modelo de simulação de risco de crédito baseado no *CreditMetrics* simplificado e utilizado neste ensaio objetiva então gerar a distribuição amostral das perdas futuras de uma carteira em decorrência de eventos de default de seus emissores e, a partir disso, estimar a probabilidade de ocorrerem níveis de perda superiores a um valor pré-determinado. A Figura 3.8 abaixo ilustra melhor a idéia.

Figura 3.8: Distribuição das perdas futuras (L) de uma carteira teórica formada por títulos e empréstimos emitidos por m diferentes emissores.



Onde:

m = quantidade total de emissores;

Y_k = indicador de que o k -ésimo emissor entre em default dentro do horizonte de tempo considerado (1 ano);

c_k = exposição do k -ésimo emissor ($k = 1, \dots, m$);

$p_k = \text{Prob}(Y_k=1)$ = probabilidade individual ou marginal de default do k -ésimo emissor;

$$L = \text{Perda Total da Carteira} = \sum_{k=1}^m c_k * Y_k ;$$

x = perda-limite;

$Y_k \sim \text{Bernoulli}(p_k)$.

Conforme sugerido em Glasserman e Li (2005), para simplificar a análise, c_k e p_k serão considerados constantes e deterministicamente dados por:

$$c_k = \left(\frac{5k}{m} \right)^2 \quad (33)$$

$$p_k = 0.01 * \left(1 + \sin \left(\frac{16 \pi i k}{m} \right) \right), \quad (34).$$

A dependência entre os emissores neste modelo de simulação de risco de crédito é introduzida por meio do Modelo de Cópula Normal, que é amplamente usado em associação ao *CreditMetrics*⁹.

Na Cópula Normal, os eventos de default ($Y_k = 1$) são associados a variáveis latentes X_k da forma abaixo:

$$Y_k = 1 \{X_k > x_k\} \quad (35),$$

onde cada x_k é escolhido de forma a corresponder à p_k .

As variáveis latentes X_k possuem distribuição Normal padrão e estão associadas a fatores de risco (Z) comuns a todos os emissores, conforme modelo abaixo:

$$X_k = a_{k1} * Z_1 + \dots + a_{kd} * Z_d + b_k * e_k, \quad (36)$$

onde:

$a_{k,j}$ = peso do fator j para o emissor k , com $j = 1, \dots, d$ e $k = 1, \dots, m$;

Z_i (fator comum de risco sistemático) $\sim N(0,1)$, com $i = 1, \dots, d$;

e_k (fator de risco idiossincrático) $\sim N(0,1)$;

$$0 \leq a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2 \leq 1;$$

⁹ Kang e Shahabuddin (2005) usam também a t-cópula para aplicar a AI à simulação da $\text{Prob}(L > x)$. Na t-cópula, as variáveis latentes X_k possuem distribuição multivariada t-student, ao invés da distribuição Normal.

$$b_k = \sqrt{1 - (a_{k1}^2 + \dots + a_{kd}^2)}, \text{ para que } X_k \text{ seja } N(0,1).$$

Os fatores de risco sistemático, por serem comuns a todos os emissores, introduzem uma correlação entre as variáveis latentes X_k , que determinam a dependência entre Y_k e, conseqüentemente, entre os emissores. Esses fatores podem, por exemplo, representar riscos específicos de uma indústria ou região geográfica.

Os scripts de simulação são desenvolvidos em MatLab 6.1. O experimento de simulação é composto por 40 corridas de 1000 observações cada. É considerada uma carteira formada por títulos/empréstimos de renda fixa teoricamente emitidos por 20 diferentes instituições ($m=20$). Cada emissor está sujeito a 10 diferentes fatores de risco ($d=10$), fatores estes comuns a todos os 20 emissores. O nível de perda-limite (x) escolhido é de 35 unidades monetárias (ou cerca de 20% da perda total possível), de forma a proporcionar uma probabilidade muito baixa de ocorrência do evento $L > x$.

3.2 Técnicas de Redução de Variância

De acordo com a metodologia acima descrita, a $\text{Prob}(L > x)$ é a variável de saída do modelo de simulação. Obter uma medida precisa desta probabilidade não é fácil quando se lida com baixas probabilidades de default dos emissores e com elevados níveis de perda-limite, já que o problema se torna uma simulação de evento raro. Neste contexto, a técnica da Amostragem por Importância (AI), que basicamente torna eventos raros menos raros, bem se adequa ao problema de simulação em questão. A aplicação da AI elevaria as probabilidades de default dos emissores de modo a tornar a estimativa da $\text{Prob}(L > x)$ mais eficiente.

À exemplo dos ensaios anteriores, além da técnica da AI na sua forma padrão (AI+AAS), é avaliada aqui a sua forma combinada com a Amostragem Descritiva (AI+AD), como tentativa de obter estimativas ainda mais precisas.

A aplicação da AI varia conforme o grau de correlação de default entre os emissores. Neste sentido, dois casos foram considerados: emissores independentes e emissores com forte dependência. As técnicas AI+AAS e AI+AD foram empregadas em ambos os casos.

3.2.1 Amostragem por Importância para o Caso de Emissores Independentes

Neste caso, a abordagem de aplicação da AI padrão (AI+AAS) é bastante conhecida. Os pesos dos fatores de risco, $a_{k,j}$, são iguais a zero pela independência entre os emissores. A AI consiste em substituir as probabilidades individuais de default de cada emissor, p_k , por probabilidades mais elevadas, q_k , e amostrar eventos de default dessas novas probabilidades. Os eventos de $L > x$ seriam então mais facilmente obtidos a partir dessas probabilidades de default mais elevadas. Para se retornar ao problema original, esses eventos $L > x$ seriam corrigidos pela razão de verossimilhança que relaciona a distribuição original dos eventos de default (Bernoulli(p_k)) à nova distribuição (Bernoulli(q_k)). A estimação da $\text{Prob}(L > x)$ por AI poderia então ser obtida a partir junção das seguintes expressões:

$$E(L > x) = 1 * \text{Prob}(L > x) + 0 * \text{Prob}(L < x) \Rightarrow \text{Prob}(L > x) = E(L > x), \quad (37)$$

$$E(L > x) = \tilde{E} \left[1\{L > x\} \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k}{1-q_k} \right)^{1-Y_k} \right], \quad (38)$$

Onde:

$1\{\dots\}$ = indicador da ocorrência do eventos que está descrito entre as chaves;

$\tilde{E}(\dots)$ = valor esperado calculado usando as novas probabilidades q_k ;

$\prod_{k=1}^m(\dots)$ = razão de verossimilhança.

A Equação 37 advém do fato de $L > x$ ser ela própria uma variável do tipo Bernoulli e a Equação 38 decorre da própria idéia da AI, já apresentada na seção 2.4.1 do ensaio 1.

Portanto,

$$\Pr ob(L > x) = \tilde{E} \left[1\{L > x\} \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k}{1-q_k} \right)^{1-Y_k} \right], \quad (39)$$

Em conseqüência desta construção e se os indicadores de default forem amostrados das novas probabilidades de default q_k , temos que:

$$\tilde{E} \left[1\{L > x\} \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k}{1-q_k} \right)^{1-Y_k} \right] = \text{estimador por AI não - viesado da } \Pr ob(L > x), \quad (40)$$

Glasserman e Li (2005) não escolhem as novas probabilidades q_k arbitrariamente; em vez disso eles utilizam um mecanismo chamado por eles de *exponential twisting* para otimizar a escolha dessas novas probabilidades. Segundo esse mecanismo, escolhe-se um parâmetro $\theta > 0$ e calcula-se as novas probabilidades a partir da fórmula abaixo:

$$p_k(\mathbf{q}) = \frac{p_k e^{\theta c_k}}{1 + p_k (e^{\theta c_k} - 1)}, \quad (41)$$

A determinação do valor do parâmetro θ a ser usado deve ser tal que minimize a variância do estimador não-viesado de $\text{Prob}(L > x)$. Glasserman e Li (2005) determinam o valor ótimo de θ analiticamente e provam que este valor ótimo faz com que o estimador por AI da Equação 40 seja um estimador assintoticamente ótimo, sendo, por isso, mais eficiente do que a simulação padrão por AAS. O θ -ótimo é obtido por⁹:

$$\theta\text{-ótimo} = \begin{cases} \text{solução única de } \varphi'(\theta) = x, x > \varphi'(0); \\ 0, x \leq \varphi'(0); \end{cases}$$

onde:

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^m \log(1 + p_k (\exp(\mathbf{q} c_k) - 1)), \quad (42).$$

A incorporação da Amostragem Descritiva à implementação da AI acima apresentada resulta na técnica combinada (AI+AD). Esta incorporação envolve basicamente escolher de forma determinística, ao invés de aleatória, os valores da variável Y_k . Esse mesmo conjunto de valores é utilizado em todas as corridas de simulação, variando apenas a ordem em que eles aparecem na seqüência de valores da variável Y_k .

⁹ Ver Glasserman (2004), pgs. 498 e 530.

3.2.2 Amostragem por Importância para o Caso de Emissores com Forte Dependência

Para este caso, a abordagem utilizada foi a proposta em Glasserman e Li (2005). A abordagem possui duas etapas: aplicação da chamada AI Condicional, na qual as variáveis Y_k ficarão condicionadas a um conjunto z de valores dos fatores comuns de risco Z e, em seguida, aplicação da AI aos próprios fatores de risco Z .

Na primeira etapa, condiciona-se a AI a um determinado conjunto de valores para os fatores comuns de risco ($Z = z$) sorteados da distribuição Normal Padrão. Quando esse condicionamento é feito, as variáveis Y_k indicativas de default passam a ser calculadas a partir do mesmo conjunto z de valores para os fatores de risco, qualquer que seja o emissor, e, com isso, restaura-se o caso de emissores independentes. Sendo assim, todo o procedimento descrito na seção anterior de aplicação da AI para o caso de emissores independentes pode ser repetido para a AI condicional. A única diferença é que, em vez de se trabalhar com probabilidades de default p_k dadas exogenamente, calcula-se probabilidades condicionais de default $p_k(Z=z)$ para cada emissor, obtida pelo desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned} p_k(Z = z) &= \Pr ob(Y_k = 1 / Z) = \Pr ob(X_k > x_k / Z) \\ &= \Pr ob(a_k Z + b_k * \mathbf{e}_k > \Phi^{-1}(1 - p_k) / Z) = \Phi\left(\frac{a_k Z + \Phi^{-1}(p_k)}{b_k}\right), \quad (43). \end{aligned}$$

Segundo Glasserman e Li (2005), a segunda etapa torna-se necessária quando há forte correlação de default entre os emissores. Para propiciar uma correlação relativamente forte, os pesos $a_{k,j}$ são gerados de forma independente e uniformemente distribuída dentro do intervalo $(0; 1/\sqrt{d})$. A necessidade da segunda etapa se dá pois, quando há forte correlação, grandes perdas ocorrem

primeiramente devido a grandes resultados de Z , o que indica que também se deve aplicar AI à distribuição de Z .¹⁰

Portanto, nesta segunda etapa, ao invés de se trabalhar com um conjunto de valores z extraídos de uma distribuição Normal Padrão, usa-se um conjunto sorteado de uma distribuição Normal deslocada, do tipo $N(\mu, 1)$. A partir daí, basta implementar o procedimento da AI condicional já descrito. A única novidade é a fórmula da razão de verossimilhança, à qual passa a ter um termo adicional, $\exp((-\mu'Z + \mu'\mu)/2)$, que relaciona a densidade da $N(0, 1)$ à da $N(\mu, 1)$ e que deve ser multiplicado à fórmula anterior.

Glasserman e Li (2005) determinam analiticamente o valor ótimo para μ , de forma a gerar um estimador para a $\text{Prob}(L > x)$ que minimize sua variância. Aqui o valor do μ -ótimo foi escolhido empiricamente para simplificar a implementação da técnica.

A incorporação da AD à AI neste caso envolve, além da seleção determinística dos valores para a variável Y_k , a seleção determinística para os valores da variável Z . Esses dois conjuntos de valores deterministicamente escolhidos são utilizados em todas as corridas de simulação, variando apenas a ordem em que os seus elementos aparecem na seqüência de valores das respectivas variáveis.

4 RESULTADOS

A Tabela 3.8 abaixo resume os principais resultados do experimento do ensaio 3. Nela são apresentadas as estimativas da $\text{Prob}(L > x)$ para as três diferentes técnicas de simulação empregadas: o método tradicional da AAS, a AI padrão

¹⁰ A demonstração analítica encontra-se em Glasserman e Li (2005), pg. 8.

(AI+AAS) e a AI combinada com a AD (AI+AD). O desempenho dessas três técnicas foi analisado para os casos de emissores independentes e de emissores dependentes. A precisão das estimativas, representada pelo erro-padrão, também é apresentada.

O nível escolhido da perda-limite ($x = \$35$) define uma região propícia para se aplicar a Amostragem por Importância, já que a probabilidade de se obter perdas superiores a esse limite é bastante baixa para os dois tipos de emissores. Para se obter um parâmetro dessa probabilidade, foi realizada uma simulação gigante (10.000 corridas) pelo método tradicional (AAS), resultando em uma probabilidade média de 0.13% para o caso de emissores independentes e de 0.34% para os emissores dependentes. Esses baixos níveis de probabilidade caracterizam assim um evento raro nos dois casos.

A relevância da aplicação da Amostragem por Importância no experimento em questão também pode ser compreendida quando se tenta estimar a probabilidade de perda superior a limites ainda maiores. Existe um nível de perda-limite x' (equivalente a \$52 no problema em questão, ou cerca de 30% da perda total possível) a partir do qual a simples ocorrência do evento $L > x'$ não é mais observada, por maior que seja a quantidade de observações geradas pelo método tradicional de simulação. Isso simplesmente impossibilita o cálculo da estimativa da $\text{Prob}(L > x')$ por este método.

As duas técnicas de redução da variância utilizadas (AI+AAS e AI+AD) geraram estimativas semelhantes e com baixo viés em relação às obtidas pela simulação gigante, nos dois casos de dependência considerados.

Como esperado, nos dois tipos de emissores considerados, a introdução da AI funcionou bem para aumentar a precisão das estimativas em relação à AAS. O

ganho de precisão da AI+AAS, ou equivalentemente a redução do erro-padrão das estimativas, é da ordem de 88% para os emissores independentes e de 40% para os emissores dependentes.

O uso da combinação AI+AD também foi eficiente para obter ganhos de precisão em relação ao método tradicional AAS, resultando em 88% de ganho para os dois tipos de emissores. No entanto, a contribuição da AD foi muito mais importante no caso de emissores dependentes, gerando um ganho de precisão de 81% em relação à AI+AAS, contra apenas 3% no caso de emissores independentes. A maior contribuição da incorporação da AD à AI no caso dos emissores dependentes pode ser explicada pelo fato de a AD também ser aplicada em duas etapas quando há dependência entre os emissores.

Tabela 3.8: Estimativas da probabilidade de perdas totais da carteira superiores ao valor-limite ($\text{Prob}(L>35)$), obtidas por diferentes métodos de simulação (AAS, AI+AAS e AI+AD). Foram considerados dois tipos de dependência entre os emissores. A média e o erro-padrão das estimativas foram calculados para 40 corridas de simulação, cada qual contendo 1000 observações.

Emissores Independentes	AAS	Média	0.001125
		Erro-Padrão	0.000791
	AI+AAS	Média	0.001279
		Erro-Padrão	0.000091
	AI+AD	Média	0.001256
		Erro-Padrão	0.000088
Emissores Dependentes	AAS	Média	0.003250
		Erro-Padrão	0.009388
	AI+AAS	Média	0.003363
		Erro-Padrão	0.005649
	AI+AD	Média	0.003364
		Erro-Padrão	0.001099

5 CONCLUSÕES

A Amostragem por Importância é uma técnica de redução de variância que bem se aplica a problemas de simulação de eventos raros, pois sua idéia é torná-los menos raros por meio de um deslocamento na distribuição de probabilidades original. Seu uso portanto é bastante útil quando se trata de estimar risco de crédito de carteiras, uma vez que este risco está associado a ocorrências de default por parte de seus emissores dentro de um horizonte de tempo.

Este ensaio aplicou a Amostragem por Importância como técnica de redução de variância para melhorar a simulação por Monte Carlo da probabilidade de perdas de uma carteira teórica de títulos/empréstimos de renda fixa sujeita a risco de crédito por parte de seus emissores.

Sua aplicação mostrou-se indispensável para se obter observações do experimento analisado, já que o evento considerado era bastante raro, dados os valores dos parâmetros do experimento realizado. Além disso, a Amostragem por Importância, seja na sua forma padrão ou na forma combinada com a Amostragem Descritiva, mostrou-se muito vantajosa para se obter estimativas bem mais precisas do que o método tradicional de simulação.

Os bons resultados da Amostragem por Importância se estenderam ao caso mais complexo de forte correlação de default entre os emissores dos títulos/empréstimos componentes da carteira em análise.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos três ensaios aqui desenvolvidos o uso das técnicas de redução de variância se mostrou extremamente vantajoso, possibilitando obter estimativas mais precisas do que o método amostral tradicionalmente empregado em simulação Monte Carlo, a Amostragem Aleatória Simples. A dimensionalidade dos problemas de simulação estudados não afetou o bom desempenho das técnicas.

Dentre as técnicas de simulação empregadas, destacou-se a Amostragem Descritiva que, não apenas proporcionou grandes ganhos de precisão sobre a Amostragem Aleatória Simples, mas também gerou resultados em menor tempo do que o método de simulação padrão.

A Amostragem por Importância também merece destaque, por, de fato, ter se mostrado uma técnica eficiente para tratar dos modelos aqui analisados quando esses envolviam a simulação de eventos raros, onde a simulação tradicional não conseguiria nem sequer ser implementada.

O uso da técnica da Variável de Controle também proporcionou bons resultados nas simulações, porém sua aplicação está restrita aos casos em que exista um modelo analítico semelhante ao problema de simulação estudado.

Este estudo espera contribuir para um aprimoramento do uso da simulação Monte Carlo em Finanças. Neste sentido, aqui se procurou evidenciar a importância de se implementar várias corridas de simulação, para se ter uma informação sobre a variabilidade das estimativas obtidas. Também se tentou mostrar a necessidade de se aplicar técnicas de redução de variância em substituição ao método tradicional de simulação, para se obter estimativas mais precisas. O estudo espera proporcionar ainda um entendimento detalhado sobre a operacionalização das técnicas de

simulação empregadas, procurando descrever os todos os passos necessários para a aplicação de cada uma das técnicas.

Os dois primeiros ensaios deste estudo poderiam ser ampliados para se comparar o desempenho das técnicas de redução de variância na simulação de outros instrumentos derivativos, tais como opções com barreiras. Neste sentido, mais técnicas de simulação poderiam ser avaliadas. A aplicação da Amostragem por Importância realizada no último ensaio poderia ser estendida a modelos mais completos de risco de crédito, nos quais as probabilidades de default dos emissores e o valor das exposições da carteira fossem não mais exógenos, mas sim estimados com base em dados reais do mercado de crédito brasileiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araújo, M. **Simulação de Monte Carlo para Cálculo do Var: o Uso da Amostragem Descritiva**. 2001. 120p. Dissertação (Mestrado em Administração) - Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Banks, J., Carson, J.S.II.e Nelson, B.L. **Discrete-Event System Simulation**. Prentice Hall, 2nd Edition, 1996.
- Black, F. e Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, 81 (3): 637-59, May 1973.
- Bratley, P.; Fox, B.L. e Schrage, L.E. **A Guide to Simulation**, 2nd e., 1987.
- Boyle, P.P. Options: A *Monte Carlo* approach. **Journal of Financial Economics**, v.4, p.323-338, 1977.
- Boyle, P., M. Broadie, and P. Glasserman. 1997. Monte Carlo methods for security pricing. **Journal of Economic Dynamics and Control** 21: 1267:1321.
- Broadie M. e Glasserman P. Estimating Security Price Derivatives Using Simulation. **Management Science**, 42 (2): 268-285, 1996.
- Charnes, J. M. Using Simulation for Option Pricing. In: **Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference**, ed. J. A. Joines, R. R. Barton, K. Kang, and P. A. Fishwick, 2000.
- Credit Suisse. **CreditRisk+**: a Credit Risk Management Framework. Credit Suisse Financial Products, 1997.
- Crouhy M., Galai D. e Mark R. A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models, **Journal of Banking and Finance** 24, 59-117, 2000.
- GALANTI, S. e JUNG, A. Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices. **The Journal of Derivatives**, vol. 5, Fall 1997.
- Glasserman, P. **Monte Carlo Methods in Financial Engineering**. Springer, New York, 2004.

- Glasserman, P e Li, J. Importance Sampling for Portfolio Credit Risk, to appear in **Management Science**, 2005.
- Gordy M. B. A Comparative Anatomy of Credit Risk Models, **Journal of Banking and Finance**, 24, 119-149, 2000.
- Gupton, G.M., Finger, C.C., e Bhatia, M. **CreditMetrics. Technical Document**. JP Morgan, 1997.
- Hansen , A.T. e Jorgensen, P.L. Analytical Valuation of American-style Asian Options. **Working Paper Series id=87888**, November, 1997. www.ssrn.com acessado em 18 de abril de 2003.
- Hull, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Prentice Hall. 6th Edition, 2005.
- Kang, W. e Shahabuddin, P. Fast Simulation for Multifactor Portfolio Credit Risk in the t-copula Model. In: **Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference**, ed. M.E. Kuhl, N.M. Steiger, F.B. Armstrong, and J. A. Jones. 2005.
- Kemna A. e Vorst A., A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values, **Journal of Banking and Finance**, 14 (March 1990), 113-29.
- Marins, J., Santos, J. e SALIBY, E. Avaliação de Técnicas de Redução de Variância na Estimação do Prêmio de Opções de Compra do Tipo Asiática. **Anais do XXXV - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, 2003.
- Mckay, M.D., Beckman, R.J. e Conover, W.J. A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input in the Analysis of Output from a Computer Code. **Technometrics**, vol.21, 2, May, 1979.
- Merton, R. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. **Journal of Finance** 28, 449-470, 1974.
- Milevsky, M. e Posner, S. Asian Options, The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, September 1998.
- Moreira, F. F. P. **Estudo Comparativo dos Métodos de Quasi-Monte Carlo, Amostragem Descritiva, Hipercubo Latino e Monte Carlo Clássico na Análise de Risco**. 2001. 155p. Dissertação (Mestrado em Administração) - Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Neave, H. e Ye, G. Pricing Asian Options using path bundling. **Social Science Research Network Electronic Paper Collection**.
<http://papers.ssrn.com/abstract=284888>, 2000.

Saliby, E Descriptive Sampling: A Better Approach to *Monte Carlo* Simulation. **Journal of the Operational Research Society**, Vol. 41, nº 12, 1133-1142, 1990.

_____. Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling. In: **Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference**, ed. S. Andradóttir, K.J. Healy, D.H. Withers and B.L. Nelson, 1997.

_____. **Repensando a Simulação: A Amostragem Descritiva**. Ed. Atlas, 1989.

Saliby, E. e Gomes, G. C. Sobre o Uso Conjunto da Amostragem por Importância e da Amostragem Descritiva em Simulação por Monte Carlo. In: **Anais do VII Congresso Latino-Ibero Americano de Investigación Operativa e Ingeniería de Sistemas (VII CLAIO)**, ed. M. Bosch e C. Ortiz, Universidad de Chile, 1994.

Saliby, E. e Moreira, F. F. P. An Empirical Evaluation of Sampling Methods in Risk Analysis Simulation: Quasi-*Monte Carlo*, Descriptive Sampling and Latin Hypercube Sampling. In: **Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference**, ed. E.Yucesan, C-H Chen, J.L. Snowdon and J.M.Charnes, 2002.

Staum, J. 2003. Efficient simulations for option pricing. . In **Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference**, ed. S. Chick, P. J. Sánchez, D. Ferrin and D. J. Morrice, 258-266.

Sobol, I.M. **USSR Computational Mathematics and Mathematics Physics**. Vol. 7, pp. 86-112, 1967.

WINIARSKI, M. www.f.kth.se/~f98-mwi/msctheses.pdf , Stockholm University, 1998.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)