



Roberta de Souza Chun

**Análise de Persistência de Participantes em
Planos de Previdência**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Reinaldo Castro Souza
Co-Orientadora: Profa. Fernanda Chaves Pereira

Rio de Janeiro
Abril de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Roberta de Souza Chun

**Análise de Persistência de Participantes em
Planos de Previdência**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. . Reinaldo Castro Souza
Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Profa. . Fernanda Chaves Pereira
Co-Orientadora
IAG – PUC-Rio

Profa. Andrea Levy
IAPUC – PUC-Rio

Prof. Marcos Azevedo da Silveira
Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 09 de abril de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Roberta de Souza Chun

Graduou-se em Estatística, na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 1998. cursou o mestrado em Engenharia Elétrica na Pontifícia Universidade Católica (PUCRio) em 2006, tendo como linha de pesquisa Métodos de Apoio à Decisão. Participou de congressos na área de Estatística. Atualmente é coordenadora da área de técnica de seguros de vida e previdência da Mongeral Seguros e Previdência.

Ficha Catalográfica

Chun, Roberta de Souza

Análise de persistência de participantes em planos de previdência / Roberta de Souza Chun ; orientador: Reinaldo Castro Souza; co-orientadora: Fernanda Chaves Pereira. – 2007.

86 f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Persistência. 3. Chain Ladder. 4. Modelos Lineares Generalizados. 5. Modelagem. 6. Taxas de saídas. I. Souza, Reinaldo Castro. II. Pereira, Fernanda Chaves. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

Dedico à minha família, Clovenildo, Marinete, Rodrigo, Sandro e Marcel, pois são as pessoas mais importantes da minha vida.

Agradecimentos

A Deus por me guiar.

Aos meus orientadores Reinaldo e Fernanda e aos professores Marcos da Silveira e Andréa Levy pela paciência e incentivo.

Ao meu amigo Nelson Emiliano, que me apoiou em momentos muito difíceis.

Às equipes do DETEC (antiga e nova) que me ajudaram no trabalho, tendo paciência com a minha ausência em alguns momentos.

Ao meu companheiro Sandro por abrir mão do seu tempo para me apoiar.

Aos meus pais Clovenildo e Marinete, meu irmão Marcel e meu filho Rodrigo, pois foi o amor destas pessoas que me deu força para passar por mais esta etapa da vida com sucesso.

Resumo

Chun, Roberta de Souza; Souza, Reinaldo Castro (Orientador). **Análise de Persistência de Participantes em Planos de Previdência**. Rio de Janeiro, 2007. 86p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O tema central deste trabalho é apresentar modelos de persistência. As probabilidades de persistência na carteira de um produto de determinada empresa de seguros e previdência serão estudadas de forma agregada, de tal forma que se torna possível a elaboração de outros estudos, como por exemplo, de análise de lucratividade, mesmo com poucos dados, o que inviabiliza a elaboração de tábuas de múltiplos decrementos. Serão avaliadas as possíveis causas de saídas de acordo com as características do plano. O desenvolvimento dos modelos tomam por base dados em forma de triângulo, técnica normalmente utilizada para cálculo de provisões de seguros.

Palavras-chave

Persistência; *Chain Ladder*; Modelos Lineares Generalizados; Modelagem; Taxas de saídas.

Abstract

Chun, Roberta de Souza; Souza, Reinaldo Castro (Advisor). **Persistency Analysis of Participants of Pension Plans**. Rio de Janeiro, 2007. 86p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The objective of this work is to present persistency models. The probabilities of remaining in a Insurance and Pension company portfolio will be studied in a aggregate way, in this way it is possible to develop another results such as profitability, even though, there is poor data, what turns impossible to build multiple decrement tables. The possible lapses causes will be evaluated according to the plan. The models development is based on triangular data, this technique is usual on claims reserving.

Keywords

Persistency; Chain Ladder; Generalized Linear Models; Modeling; Lapse rates.

Sumário

1	Introdução	11
1.1.	Planos do tipo Benefício Definido	12
1.2.	Planos do tipo Contribuição Definida	13
1.3.	Persistência	15
2	Referencial Teórico	21
2.1.	Estudos da LIMRA International e SOA	21
2.2.	Persistência em função de variáveis econômicas	30
2.3.	Credibilidade e Persistência	33
2.4.	Outras referências	34
3	Análise dos dados	35
3.1.	Plano do tipo Benefício Definido	38
3.2.	Plano do tipo Contribuição Definida	42
4	Metodologia	46
4.1.	<i>Chain Ladder</i>	47
4.2.	<i>Chain Ladder</i> com Mínimos Quadrados	50
4.3.	Modelos Lineares Generalizados	51
5	Aplicação	59
5.1.	<i>Chain Ladder</i> ao plano do tipo Benefício Definido	60
5.2.	Modelos Lineares Generalizados ao plano do tipo Benefício Definido	62
5.3.	<i>Chain Ladder</i> ao Plano do Tipo Contribuição Definida	63
6	Considerações finais	66
7	Referências bibliográficas	68
8	Anexos	70
8.1.	Modelos Lineares Generalizados (saídas do SAS)	70
8.2.	Distribuições pertencentes à Família Exponencial	74
8.3.	Dados para o plano do tipo BD	76
8.4.	Dados para o plano do tipo CD	83

Lista de tabelas

Tabela 1: Amostra utilizada para o estudo LIMRA / SOA	23
Tabela 2: Modelos para estimar taxas de saídas utilizados no mundo	31
Tabela 3: Planos e características	36
Tabela 4: Distribuição de inscrições do plano CD	42
Tabela 5: Sinistros acumulados	48
Tabela 6: Taxa de evolução dos sinistros	48
Tabela 7: Quantidade de inscrições ao longo do tempo	49
Tabela 8: Persistência com relação a implantação	49
Tabela 9: Dados de sinistro de automóveis	55
Tabela 10: Ajuste do modelo (<i>Criteria for assessing goodness of fit</i>)	56
Tabela 11: Análise dos parâmetros estimados (<i>Analysis of parameter estimates</i>)	57
Tabela 12: Análise tipo I (<i>LR statistics for type1 analysis</i>)	57
Tabela 13: Análise tipo III (<i>LR statistics for type3 analysis</i>)	58
Tabela 14: Persistência com relação a implantação a ser estimada	59
Tabela 15: Resultados finais – Plano BD	61
Tabela 16: Resultados finais – Plano CD	64

Lista de figuras

Figura 1: Taxas de saídas por periodicidade de pagamento	23
Figura 2: Taxas de saídas por valor de capital segurado	24
Figura 3: Taxas de saídas por encargos de resgate significativa	25
Figura 4: Taxas de saídas por valor acumulado	25
Figura 5: Taxas de saídas por idade de ingresso	26
Figura 6: Taxas de saídas por idade atual	26
Figura 7: Taxas de saídas por fumantes e não fumantes	27
Figura 8: Taxas de saídas por produtos que oferecem bônus por persistência	28
Figura 9: Taxas de saídas por tempo de serviço	28
Figura 10: Taxas de saída para produtos com desconto em folha	29
Figura 11: Taxas de saídas para produtos com carregamento no primeiro ano	30
Figura 12: Evolução da persistência para toda a carteira	35
Figura 13: Evolução das saídas por causa – 199901	37
Figura 14: Taxa de saída por faixa etária para planos do tipo BD	39
Figura 15: Taxa de saída por região geográfica para planos do tipo BD	39
Figura 16: Taxa de saída por faixa de contribuição para planos do tipo BD	40
Figura 17: Taxa de saída por sexo para planos do tipo BD	40
Figura 18: Taxa de saída por forma de pagamento para planos do tipo BD	41
Figura 19: Taxa de saída por faixa etária para planos do tipo CD	43
Figura 20: Taxa de saída por região geográfica para planos do tipo CD	43
Figura 21: Taxa de saída por faixa de contribuição para planos do tipo CD	44
Figura 22: Taxa de saída por sexo para planos do tipo CD	44
Figura 23: Taxa de saída por forma de pagamento para planos do tipo CD	45
Figura 24: Resultados para plano do tipo BD	61
Figura 25: Resultados para plano do tipo CD	63
Figura 26: Resultados para plano do tipo CD, por arrecadação	65

1

Introdução

O estudo de persistência equivale a verificar o comportamento dos participantes de uma Entidade Aberta de Previdência Privada ou Seguradora quanto à saída do plano por resgates, cancelamentos ou pagamento de benefícios, ao longo do prazo de diferimento (prazo anterior ao benefício, em que o participante está pagando ou está ativo) estimando ao final deste período quantos participantes irão efetivamente permanecer no plano. O estudo pode ser feito pela quantidade inscrições que contribuíram no mês ou pela quantidade de participantes ativos no mês. Neste estudo modela-se quantidade de participantes ativos.

O estudo de persistência visa dimensionar o percentual de saídas de participantes que subscrevem os planos que compõem a carteira, desde a confirmação da primeira contribuição até os demais meses.

As aplicações deste estudo são, por exemplo:

- pode ser utilizado na evolução de fluxo de caixa para avaliação do casamento de ativos e passivos;
- também apresenta resultados quanto aos esforços da entidade com relação a fidelização de seus clientes;
- dimensionamento de custos no lançamento de um produto com características semelhantes;
- é utilizado no estudo de lucratividade do produto;
- no orçamento anual;
- para precificação da carteira para compra e venda.

Um plano de benefícios previdenciários baseia-se na acumulação de contribuições de participantes, acrescidas de rendimentos, para posterior pagamento de benefícios (rendas ou pecúlios). Estes planos classificam-se em Benefício Definido (BD) e Contribuição Definida (CD).

Serão abordados neste estudo, os dois tipos de produtos que serão explicados abaixo. Os dados obtidos para o estudo dos planos do tipo BD e CD são de empresas diferentes, assim como os produtos possuem regras de funcionamento e de comercialização diferentes. Por estes motivos as análises dos dois produtos não serão comparativas.

1.1

Planos do tipo Benefício Definido

O plano garante o pagamento de uma renda por aposentadoria e, no estudo, o produto avaliado também possui coberturas de risco por invalidez em forma de renda e morte (seguro de vida). Os planos do tipo Benefício Definido (BD) são aqueles em que o participante sabe o valor da aposentadoria na contratação do plano e a reserva acumulada é calculada atuarialmente, ou seja, leva em consideração a probabilidade de sobrevivência do participante. Neste produto os possíveis status são:

Ativo pagante: São os participantes que estão no plano e estão pagando constantemente um valor de contribuição calculado para garantir o benefício escolhido;

Óbito: o beneficiário recebe o seguro de vida, além da reserva acumulada;

Invalidez: o participante recebe uma renda por invalidez;

Aposentadoria: o participante, após completar a idade contratada para a aposentadoria, tem direito a uma renda vitalícia, ou seja, é uma cobertura por sobrevivência;

Cancelamento: o participante deixa de pagar pelo plano antes de completar a carência para resgate. O plano é cancelado, pois o prêmio para este tipo de produto é calculado de forma nivelada e a reserva é calculada atuarialmente, ou seja, leva em consideração a probabilidade de sobrevivência do participante;

Resgate: após o período de carência, neste caso 24 meses, o participante poderá resgatar a reserva formada para o pagamento da aposentadoria;

Portabilidade: o participante pode portar a reserva acumulada para outro plano de previdência.

1.2

Planos do tipo Contribuição Definida

Os planos do tipo Contribuição Definida (CD) também garantem uma renda de aposentadoria ao final do período contratado e, em caso de morte do participante, os beneficiários recebem a reserva acumulada. Os planos do tipo CD são aqueles em que o participante não sabe o valor da aposentadoria na contratação do plano, pois a reserva é calculada financeiramente. O produto que vamos avaliar neste estudo é o Plano Gerador de Benefício Livre (PGBL). No PGBL o contratante passa por duas fases: o período de investimento e o período de benefício. O primeiro normalmente ocorre quando estamos trabalhando e/ou gerando renda. Esta é a fase de formação de patrimônio. Já o período de benefício começa a partir da idade que você escolhe para começar a desfrutar do dinheiro acumulado durante anos de trabalho. A maneira de recebimento dos recursos é você quem escolhe. É possível resgatar o patrimônio acumulado e/ou contratar um tipo de benefício (renda) para passar a receber, mensalmente, da empresa seguradora.

Neste produto os possíveis status são:

Ativo pagante: são os participantes que estão no plano e estão pagando. Eles podem estar pagando constantemente ou fazendo apenas aportes, que são contribuições esporádicas;

Ativo sem pagar: são os participantes que não estão contribuindo, mas possuem uma reserva acumulada;

Óbito: o beneficiário recebe a reserva acumulada;

Aposentadoria: o participante, após completar a idade contratada para a aposentadoria, tem direito a uma renda vitalícia, ou seja, é

uma cobertura por sobrevivência que é calculada em função do valor acumulado;

Cancelamento: para os planos do tipo CD não há cancelamento, pois o participante continua com o capital que acumulou, podendo resgatar, portar ou se aposentar;

Resgate: após o período de carência, neste caso 24 meses, o participante poderá resgatar a reserva formada para o pagamento da aposentadoria;

Portabilidade: o participante pode portar a reserva acumulada para outro plano de previdência.

A idéia de estudar estes dois tipos de produtos é interessante, pois na fase de diferimento as regras destes dois produtos são diferentes. Para os planos do tipo BD a contribuição é calculada em função da renda desejada. Enquanto o PGBL é um produto financeiro, onde o participante receberá uma renda de acordo com o que ele acumular. Ou seja, se um participante de um plano de aposentadoria do tipo BD para de pagar, seu plano será cancelado, mas seu direito a resgate continua. Enquanto que um participante com um plano do tipo CD pode parar de pagar por tempo indeterminado e voltar a pagar depois. Logo, espera-se que o plano do tipo BD seja de modelagem menos complexa, dada a estabilidade dos pagamentos.

A persistência destes planos será avaliada em da evolução do número de participantes pagantes ao longo dos meses. Como os planos do tipo CD permitem que o participante pare de pagar a contribuição e volte depois, esta curva não deve ter um comportamento muito estável, por isso, para este produto também devem ser avaliadas a evolução do número de participantes ativos, independentemente destes estarem contribuindo, e a evolução do valor acumulado na reserva.

Não será analisado o período de gozo de benefício, apenas o prazo de diferimento, ou seja, o período antes do participante ter direito aos benefícios, período de acumulação. Na fase de recebimento do benefício, a única forma de sair é por morte.

1.3

Persistência

Uma das formas de estudar estes dados para se estimar a persistência dos participantes nos dois tipos de produtos apresentados é a forma triangular, seguindo a idéia de modelagem de Verral (2002) em artigo sobre reservas de sinistros, pois desta forma se acumula informações. A forma triangular dos dados tem por objetivo avaliar a evolução da carteira como um todo, ou seja, de forma agregada. Outra forma de se avaliar as taxas de saídas seria pela construção de tábuas de múltiplos decrementos, onde com a utilização desta tábua, se poderia aplicar as probabilidades diretamente nos indivíduos, pois a maioria das tábuas são em função da idade.

No artigo “*Stochastic Claims Reserving in General Insurance*” o autor começa com modelos estocásticos que reproduzem o tradicional método *chain ladder* para estimar reservas. Os modelos são estendidos para considerar curvas paramétricas e modelos de suavização para a forma de desenvolvimento *run-off*, que será explicado mais adiante no capítulo 4. Uma vantagem de utilizar modelos estocásticos para estimar reservas é a disponibilidade de medidas de precisão para as estimativas, dentre elas o erro quadrático médio. O artigo também mostra a utilidade do modelo para estimar reservas de sinistros em modelos de Análise Financeira Dinâmica. Verral (2002) aponta que tem aumentado o interesse em modelos estocásticos para cálculo de reservas, porém estes modelos não são muito utilizados pelos seguintes motivos:

- falta de entendimento da metodologia;
- falta de flexibilidade nos métodos;
- falta de softwares e outros.

Outro artigo que serviu de inspiração para o estudo foi o artigo da Fernanda Pereira (1999) sobre modelos Bayesianos para práticas atuariais, de onde aproveita-se a modelagem triangular de dados agregados utilizada para estimar reserva de sinistros ocorridos e não avisados. Neste artigo a autora apresenta algumas metodologias aplicadas em atuária, Teoria da Credibilidade,

Estimação de Reservas de Sinistros e Graduação, sob o ponto de vista Bayesiano. O foco do artigo é mostrar a aplicabilidade da teoria Bayesiana em problemas práticos, o que é feito através de uma simplificação de modelos já apresentados em outros artigos.

O artigo que inspirou o estudo por Modelos Lineares Generalizados foi “*Statistical Motor Rating: making effective use of your data*”, de Brockman e Wright (1992). Onde os autores utilizam esta técnica em tarifação de seguros de automóveis.

Os estudos realizados pela *Life Insurance Marketing Research Association* (LIMRA International) e *Society Of Actuaries* (SOA – EUA e Canadá) foram os estudos mais completos encontrados na pesquisa. O artigo “*Annuity Persistency Study*” avaliou contratos de 1979 a 1993 (15 anos) de 28 empresas, e o artigo “*Universal Life Persistency Study*” avaliou contratos 1982 a 1992 (11 anos) e 21 empresas. Os institutos “fotografam” a situação no início do ano e outra no final, verificando o percentual de segurados que estavam ativos no início do ano e que saíram ao final do mesmo. Os três artigos que serão analisados posteriormente são:

- “*Universal Life Persistency Study*”, da LIMRA International e SOA;
- “*Modeling Surrender na Lapse Rates wiht Economic Variables*”, de Changki Kim;
- “*Credibility and Persistency*”, de Virginia R. Young.

Para se entender melhor os artigos a serem apresentados, foi elaborada uma lista com os tipos de produtos nacionais e alguns internacionais.

No Brasil temos os seguintes produtos:

Com cobertura por morte

- Pecúlio ou Seguro de Vida: capital único pago aos beneficiários em caso de morte do segurado. Pode ser capitalizado, ou seja, forma reserva, ou não. Para os planos capitalizados existe a possibilidade de resgate da reserva acumulada.

- Pensão: renda paga aos beneficiários em caso de morte do segurado. Pode ser capitalizado, ou seja, forma reserva, ou não. Para os planos capitalizados existe a possibilidade de resgate da reserva acumulada.

Com cobertura por invalidez

- Pecúlio ou Capital Segurado por Invalidez: capital único pago ao segurado em caso de invalidez. Pode ser capitalizado, ou seja, forma reserva, ou não. Para os planos capitalizados existe a possibilidade de resgate da reserva acumulada.
- Renda por Invalidez: renda paga ao segurado em caso de invalidez. Pode ser capitalizado, ou seja, forma reserva, ou não. Para os planos capitalizados existe a possibilidade de resgate da reserva acumulada.

Com cobertura por sobrevivência

- PGBL (Plano Gerador de Benefício Livre) e VGBL (Vida Gerador de Benefício Livre): planos de previdência / seguros do tipo contribuição definida que têm como objetivo acumular capital para garantia de uma renda complementar ao se aposentar. Em caso de morte, o valor acumulado na reserva é pago aos beneficiários. São planos capitalizados.
- Aposentadoria: planos de previdência do tipo benefício definido que têm como objetivo acumular capital para garantia de uma renda complementar ao se aposentar. Em caso de morte, o valor acumulado na reserva é pago aos beneficiários. São planos capitalizados.
- Dotal: planos de previdência / seguros do tipo benefício definido que têm como objetivo acumular capital para garantia de recebimento de um capital único ao se aposentar. Em caso de morte, o valor acumulado na reserva é pago aos beneficiários. São planos capitalizados.

Já nos EUA e Canadá temos os seguintes produtos:

Com cobertura por morte

- Universal Life Insurance: capital único pago aos beneficiários em caso de morte do segurado. Equivale ao pecúlio por morte não capitalizado.
- Variable Universal Life Insurance: capital único pago aos beneficiários em caso de morte do segurado. Seguro de vida com prêmio flexível que oferece cobertura por morte com investimento à longo prazo do capital acumulado. Você pode não pagar alguma parcela ou fazer aportes.
- Term Life Insurance: oferece cobertura temporária (exemplo: 5, 10 ou 15 anos) por morte. É o seguro mais simples. É um seguro para quem está com o orçamento limitado, pois é mais barato. Equivalente a um pecúlio por morte com cobertura temporária e não capitalizado, não forma reserva.
- Whole Life Insurance: oferece cobertura permanente por morte com pagamento periódico de prêmios nivelados, quanto mais novo, menor o prêmio. Ideal para objetivos de longo prazo e possui acumulação de capital. Reserva acumulada pode ser resgatada ou pode-se pegar emprestado. Também pode ser pago num prazo determinado e não toda vida. Seria o equivalente a um pecúlio capitalizado no Brasil.

Cobertura por invalidez

- Long-Term Care Insurance: capital único pago ao segurado em caso de invalidez. Equivalente ao pecúlio por invalidez.
- Disability Income Insurance: renda paga ao segurado em caso de invalidez. Equivalente a renda por invalidez.

Cobertura por sobrevivência

- Annuities: é comum se acumular capital em algum tipo de investimento e depois se comprar uma renda. Não é comum no Brasil.
- Endowment: capital único por sobrevivência. Equivalente ao Dotal.

Nesta dissertação foram utilizadas propostas implantadas desde janeiro de 1999 a outubro de 2005 (quase 7 anos de dados) para o plano do tipo BD e foram utilizadas propostas implantadas desde maio de 2001 a abril de 2006 (quase 5 anos de dados) para o plano do tipo CD. O que forneceria uma análise consistente não fosse a escassez de saídas, principalmente por pagamento de benefício (aposentadoria, óbito e invalidez). Por este motivo, as saídas foram avaliadas juntas e aceita-se que a mortalidade e entrada em invalidez são explicadas por tábuas existentes no mercado.

A importância desta dissertação está no fato dela ser pioneira, por isso houve grande dificuldade em recolher material sobre o assunto. Esta dissertação tem por objetivo verificar algumas premissas mercadológicas, como por exemplo, verificar a viabilidade de construção de modelos de persistência para plano do tipo CD, assim como apontar outras aplicabilidades do estudo de persistência, como por exemplo, para precificação de seguros. Esta dissertação também tem por objetivo indicar as variáveis que influenciam na persistência dos participantes nos planos e busca incentivar as empresas a constituírem banco de dados consistentes para construção de modelos de persistência.

O desenvolvimento da análise de persistência proposta por esta dissertação se divide em oito capítulos, sendo este o primeiro, com algumas definições e explicações necessárias ao bom entendimento deste trabalho. No segundo capítulo são apresentados alguns artigos que ilustram como é feito o estudo de persistência fora do Brasil e também mostra de que pontos de vista a análise pode ser feita, como por exemplo, individualmente através de tábuas de múltiplos decrementos. Apenas três artigos são analisados com maior profundidade: Estudo da LIMRA e SOA, Modelagem de Persistência com Variáveis Econômicas e outro artigo sobre Teoria de Credibilidade e Persistência. No terceiro capítulo é feita uma análise dos dados obtidos para modelagem através de gráficos e tabelas,

de uma forma similar ao estudo da LIMRA e SOA. No quarto capítulo são apresentadas as adaptações de modelos de previsão de reservas de sinistros mais utilizados pelo mercado, que se utilizam da técnica de evolução de sinistros através de triângulos de *run-off*, assim como uma outra proposta de modelagem em função dos dados cadastrais disponíveis através de Modelos Lineares Generalizados, utilizando o software SAS, como o artigo de Modelagem de Persistência com Variáveis Econômicas, porém com variáveis cadastrais do participante e da forma do negócio. O quinto capítulo apresenta os resultados das aplicações dos modelos propostos para os dois tipos de plano com as estatísticas utilizadas para encontrar o melhor modelo para planos do tipo Benefício Definido e Contribuição Definida. No sexto capítulo fica uma conclusão do estudo assim como propostas de estudos posteriores, pois ao final do estudo, fica evidente que o assunto Persistência, além de ter sido pouco explorado, dado a dificuldade de se encontrar artigos sobre o assunto, pode ser analisado com outras técnicas de modelagem. Os dois últimos capítulos são as referências bibliográficas e os anexos.

2

Referencial Teórico

Para fundamentar o presente trabalho, serão apresentados três trabalhos que serviram de inspiração para o desenvolvimento desta dissertação: os estudos da LIMRA International e SOA, que estudam as saídas por características do segurado, da apólice, do agente de venda e do produto em si, com foco num produto específico, o *Universal Life*, será utilizado o nome original do produto em inglês. Outro trabalho que estima persistência através de variáveis econômicas de Changki Kim (2006). Este é um artigo que aplica a teoria a um estudo de caso e apresenta uma tabela com os modelos para estimar taxas de saída por resgates utilizados pelo mercado internacional. E o último trabalho é voltado para ramos elementares de seguros, ou seja, não-vida. Este estudo mostra a utilização da persistência na tarifação de seguros.

Nos capítulos seguintes estão alguns métodos propostos por esta dissertação, que é o de aproveitar técnicas de previsão de reservas de sinistros (*Chain Ladder*) e de tarifação de seguros de automóveis (Modelos Lineares Generalizados) para estimar a persistência dos participantes em produtos de previdência com cobertura por sobrevivência do tipo BD e CD.

2.1

Estudos da LIMRA International e SOA

O foco do estudo: “*Universal life persistency study 1995-1996*” é o do produto *Universal Life*. Conforme definição apresentada na introdução desta dissertação, este produto é um seguro de vida que possui prêmio flexível e acumula reserva. Foram avaliadas apólices implantadas de 1982 a 1992 de vinte e uma empresas seguradoras. Caso exista curiosidade do leitor em saber quais empresas participaram do estudo, elas encontram-se listadas no final do artigo. Os anos base foram 1988 / 1990 e 1992.

Na introdução do artigo, os autores expõem algumas funções do estudo de persistência. Além dos já citados na introdução desta dissertação os autores

acrescentam: administração de investimentos e a avaliação da performance de marketing.

O trabalho baseia-se quase que unicamente pela análise de uma taxa:

$$\text{Taxa anual de saídas de apólices} = \text{Saídas} / \text{Exposição} \quad (1)$$

Onde exposição é o tempo em que a apólice permaneceu vigente no período de estudo, por exemplo: se uma apólice entrou em primeiro de julho, sua exposição será de 0,5 no ano. Ou seja, se ocorre uma saída para uma apólice que ficou exposta por meio ano, ao fazer a fração apresentada em (1), teríamos $1/0,5$, o que resultaria numa estimativa de duas saídas no ano. Neste artigo é feita uma análise das seguintes saídas: falta de pagamento e resgate total. Acredita-se que o resgate total tenha relação com variáveis externas, do mercado. Estas saídas são avaliadas por vários fatores que são tabelados e analisados no artigo. Estes fatores se dividem em quatro classes:

- da apólice;
- do segurado;
- do agente de venda e
- do produto.

A distribuição de dados nos anos é: 17% dos dados são de 1988, 20% de 1990 e 63% de 1992.

Abaixo a composição da amostra:

Quantidade de apólices: 609.664

Valor total de capitais segurados: \$51.988 milhões

Valor total de prêmios: \$746 milhões

Valor total de reserva: \$2.024 milhões

De acordo com a tabela abaixo temos que o volume de saídas foi de aproximadamente 8%.

Tabela 1: Amostra utilizada para o estudo LIMRA / SOA

Status	Quantidade de apólices	%
Resgate Total	19.692	3,23%
Falta de pagamento	28.227	4,63%
Óbito	1.116	0,18%
Invalidez	227	0,04%
Ativos	560.402	91,92%
Total	609.664	100,00%

Abaixo temos os resultados por fatores com seus respectivos gráficos e análises. Serão apresentados os fatores que foram considerados mais relevantes para a análise da persistência.

2.1.1

Fatores da apólice

Foram selecionados alguns fatores de apólice apresentados no estudo: forma de pagamento; valor do capital segurado; apólices com encargo de saída; valor acumulado na reserva.

Forma de pagamento: as apólices com pagamentos trimestrais e mensais apresentaram taxas de saídas maiores, enquanto as apólices com prêmios anuais apresentaram menores taxas de saídas.

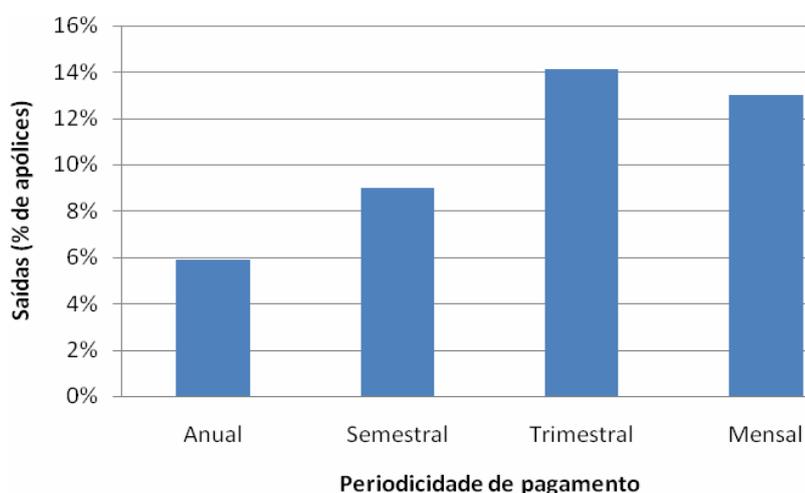


Figura 1: Taxas de saídas por periodicidade de pagamento

Capital segurado da apólice: as apólices com valor de capital entre \$100.000 e \$249.999 apresentaram taxa de saídas de 9,7%, enquanto que as apólices com capital acima de \$250.000 apresentaram uma redução de aproximadamente 25% desta taxa. Ou seja, o sentimento é de que quanto maior o valor do capital segurado, maior a persistência.

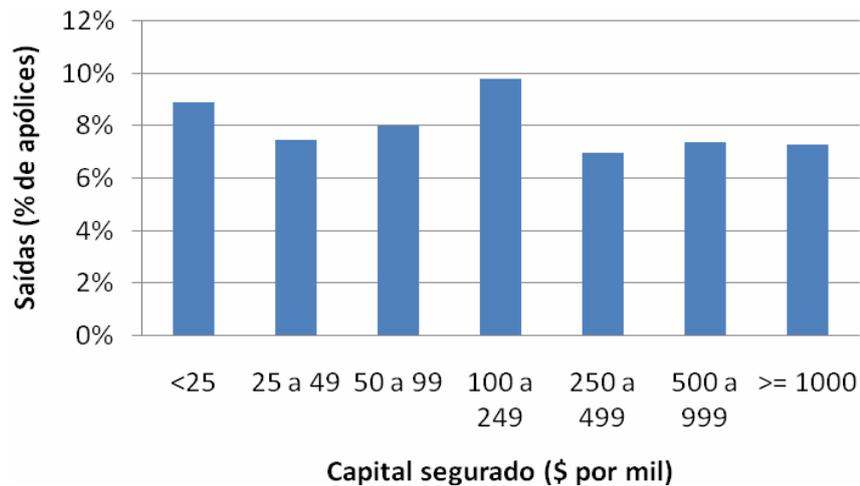


Figura 2: Taxas de saídas por valor de capital segurado

Encargos de saída: os produtos com encargos de saída significativos apresentaram taxas de saídas menores que os com encargos insignificantes nos dois primeiros anos e após o quinto ano. A diferença na persistência para de apólices com ou sem encargos significantes de saída são maiores para apólices com mais de sete anos, onde as apólices com encargos significantes possuem melhor persistência.

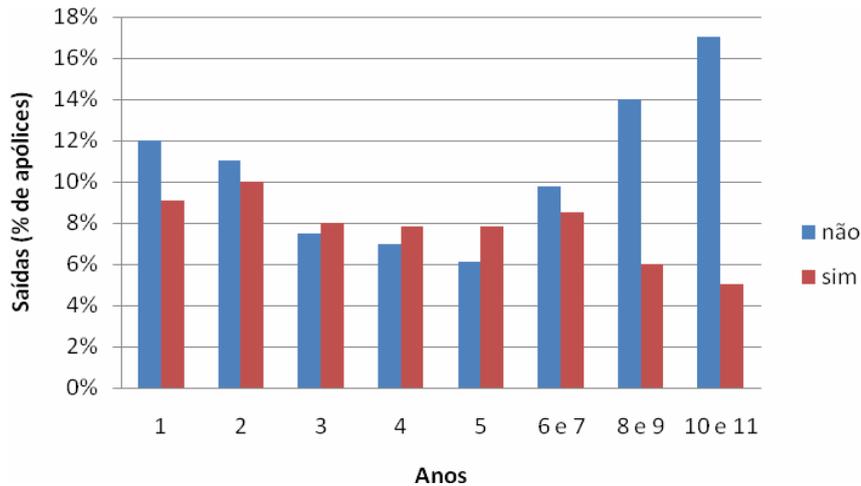


Figura 3: Taxas de saídas por encargos de resgate significante

Valor da reserva: quanto menor o valor acumulado, maior a probabilidade de saída conforme gráfico abaixo. Este efeito aparece para as apólices que possuem valor acumulado abaixo de \$5.000,00 e que representam 84% das apólices. Para valores acumulados acima de \$5.000,00, o valor acumulado parece não ter efeito sobre a persistência.

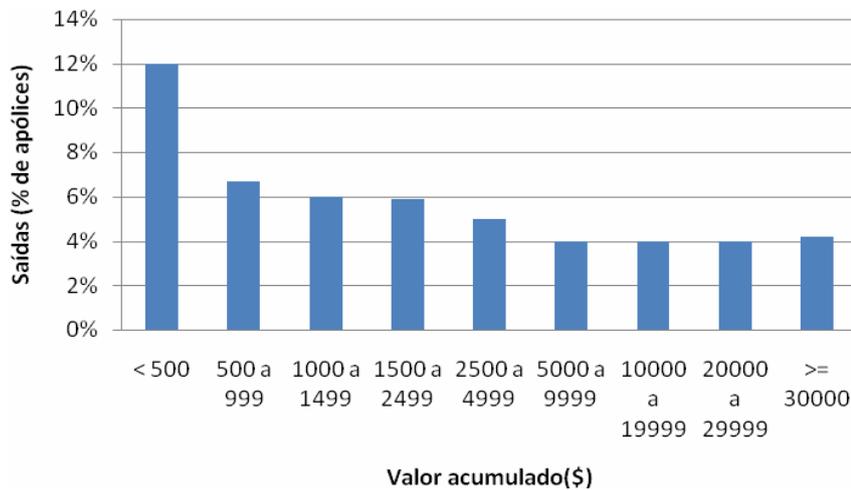


Figura 4: Taxas de saídas por valor acumulado

2.1.2

Fatores do segurado

Foram selecionados alguns fatores do segurado apresentados no estudo: idade de ingresso; idade atual; segurados fumantes e não fumantes.

Idade de ingresso: A pior faixa etária é de 19 a 29 anos e a taxa de saída decresce até a faixa de 70 a 74 anos.

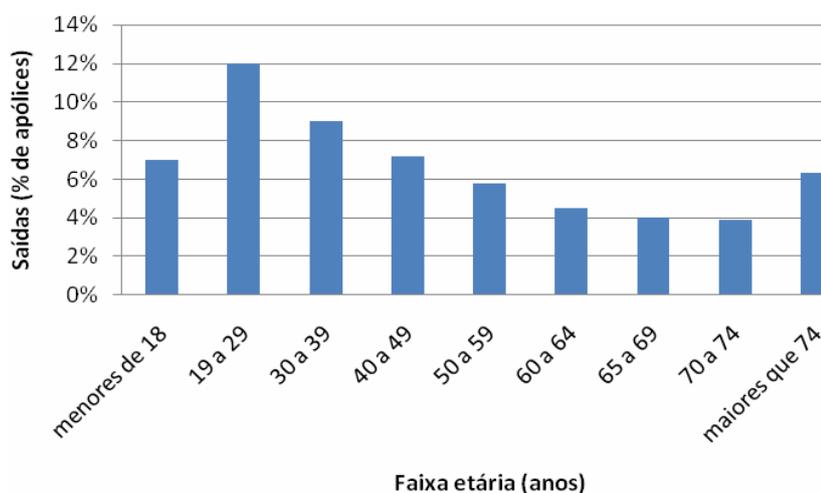


Figura 5: Taxas de saídas por idade de ingresso

Idade atual: A pior faixa etária é de 19 a 29 anos, acompanhando o mesmo padrão de comportamento da idade de ingresso.

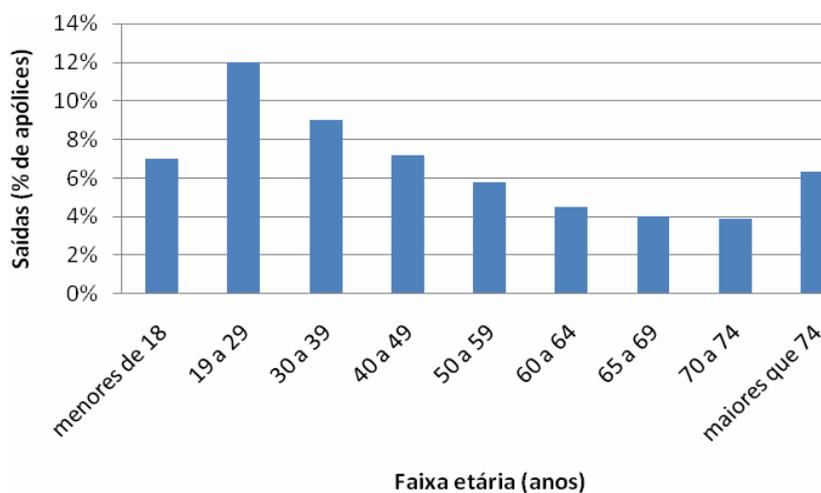


Figura 6: Taxas de saídas por idade atual

Fumante ou não-fumante: quase não há diferença entre as taxas de fumantes e não-fumantes, ou seja, este não parece ser um fator que afeta a persistência.

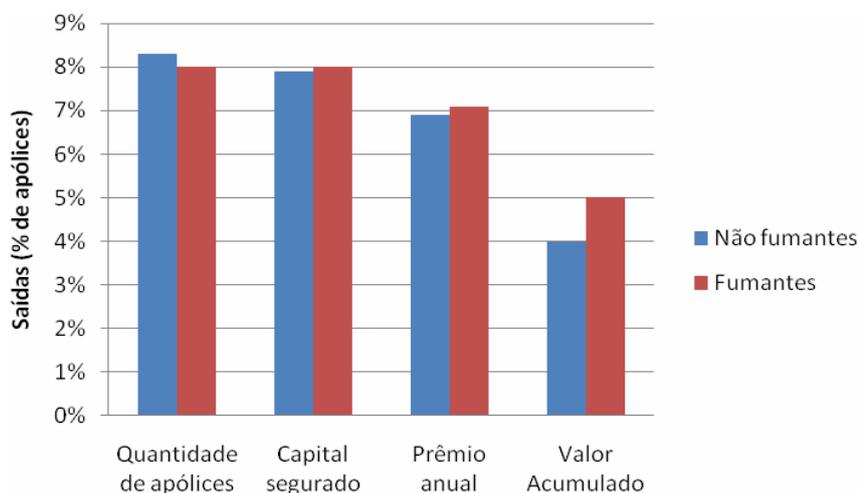


Figura 7: Taxas de saídas por fumantes e não fumantes

2.1.3

Fatores do agente de venda

Foram selecionados alguns fatores do agente de venda apresentados no estudo: bônus pago ao agente por persistência; tempo de serviço.

Produtos que pagam bônus por persistência: estes produtos apresentam taxas de saídas significativamente menores em todas as medidas. Em termos de números de apólices tem-se uma diferença de aproximadamente 11% para as apólices que não possuem bônus por persistência contra aproximadamente 7% para as que possuem. Aproximadamente 44% das apólices pagam bônus por persistência.

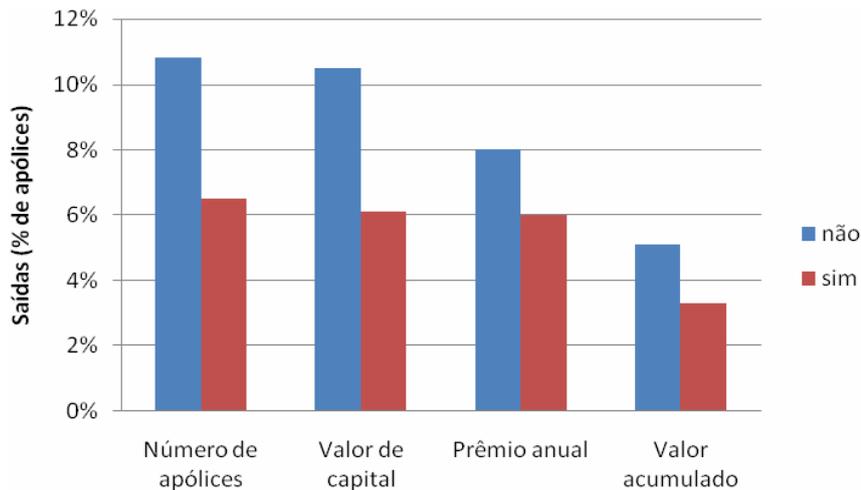


Figura 8: Taxas de saídas por produtos que oferecem bônus por persistência

Anos de serviço do agente: A taxa de saída diminui de 10% para 5% conforme a experiência do agente aumenta. Porém para mais de 40 anos ocorre um aumento significativo na taxa de saída, fenômeno não explicado no artigo. Mas uma possível explicação seria o fato do corretor estar perto de se aposentar.

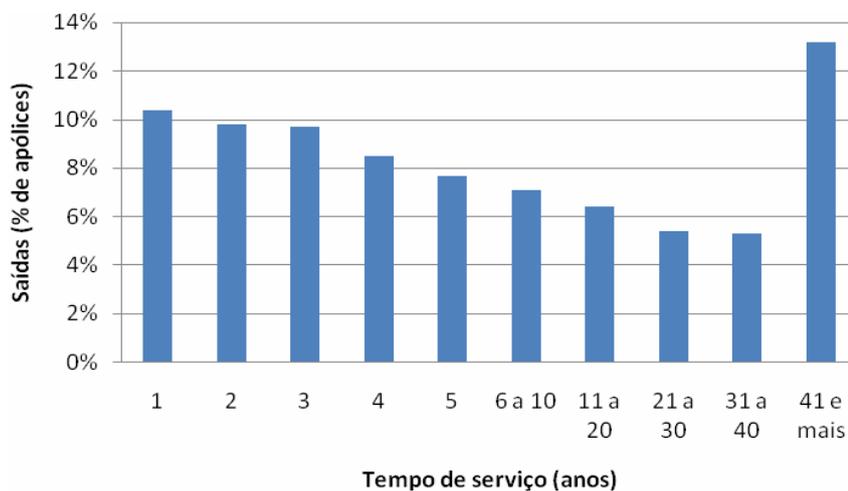


Figura 9: Taxas de saídas por tempo de serviço

2.1.4

Fatores do produto

Foram selecionados alguns fatores do produto apresentados no estudo: desconto em folha de pagamento; cobrança de carregamento para despesas no primeiro ano.

Desconto em folha de pagamento: os produtos pagos através de desconto em folha apresentaram melhor persistência que as demais formas de pagamento.

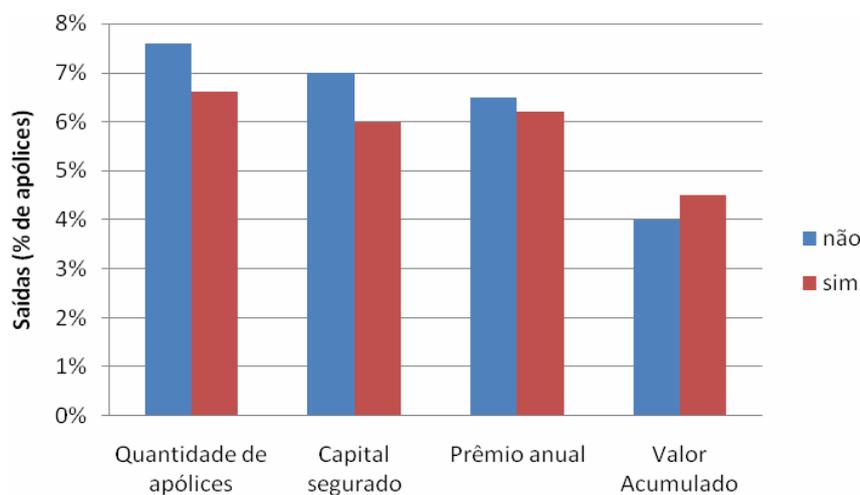


Figura 10: Taxas de saída para produtos com desconto em folha

Carregamento para despesas no primeiro ano de apólice: estas apólices apresentaram taxa de saídas maiores, que as que não possuem este tipo de carregamento. Aproximadamente 92% das apólices possuem alguma forma de carregamento para custear despesas no primeiro ano.

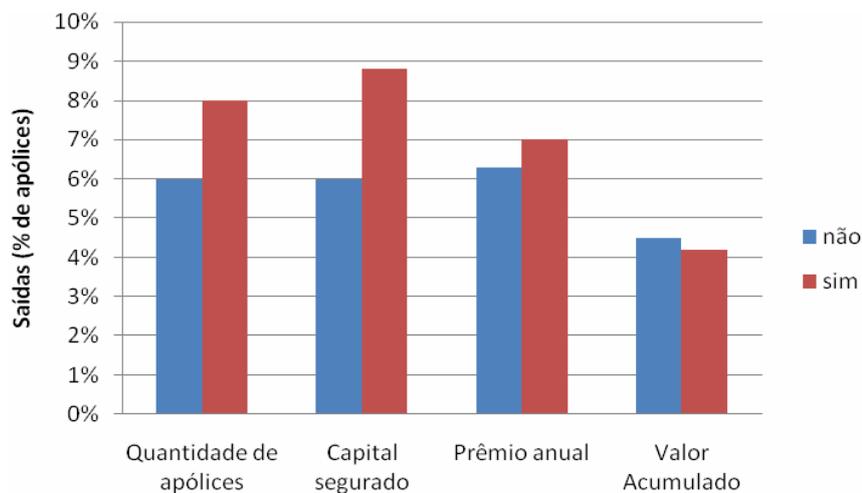


Figura 11: Taxas de saídas para produtos com carregamento no primeiro ano

2.2

Persistência em função de variáveis econômicas

No artigo “*Modeling surrender and lapse rates with economic variables*”, Chang Kim (2006) modela as taxas de resgates em função das seguintes variáveis:

- diferença entre taxa de crédito e taxas de referência;
- idade da apólice;
- crises financeiras;
- taxas de desemprego e de crescimento econômico e
- efeitos sazonais.

Foram utilizados alguns modelos estatísticos como: logit; complementar log-log (CLL) e arco-tangente para modelar taxas de resgates. As formulações destes modelos estatísticos encontram-se mais abaixo. Como os modelos variam de acordo com os tipos de apólice, o autor dividiu os modelos em quatro grupos: planos de proteção; planos educacionais; dotais e anuidades (rendas).

O autor aponta a necessidade de estimar as taxas de saídas em função da taxa de juros devido à alta correlação entre estas informações e impactos na avaliação dos fluxos de caixa de passivos e ativos.

Um exemplo citado no artigo de estudo de taxa de saída é o de Richardson e Hartwell (1951) que avalia as taxas de saídas em função de variáveis como: salário, profissão, sexo e idade. O foco do trabalho de Richardson e Hartwell é

parecido com a parte da dissertação que utilizará Modelos Lineares Generalizados, ou seja, baseia-se em dados cadastrais do segurado. Buck (1960) fez um estudo mais específico, onde focou o primeiro ano da apólice e avaliou impacto de outras variáveis na taxa de saída, como atributos da apólice e dos agentes de venda. Outro estudo interessante apresentado no artigo é o de Sharp (1996) que considera algumas premissas de saídas para cálculo de reservas.

Alguns modelos utilizados pelo mercado serão apresentados abaixo.

Tabela 2: Modelos para estimar taxas de saídas utilizados no mundo

Modelo	Fórmula
Arco tangente	$qs = a + b \text{ arco tangente } (m\Delta - n)$ (2)
Parabólico	$qs = a + b \text{ sinal } (\Delta)\Delta^2$ (3)
Exponencial	$qs = a + b \exp (mCR/MR)$ (4)
New York State Law 126	$qs = a + b \text{ sinal } (\Delta)\Delta k - c [(AV - CSV) / AV]$ (5)

Onde:

qs: taxa de resgates mensal

a, b, c, m, n, k: coeficientes a serem estimados

Δ : taxa de referência do mercado – taxa de crédito – encargos de resgate

CR: taxa de crédito

MR: taxa de referência do mercado

AV: valor de reserva da apólice

CSV: valor do resgate

Sinal(): 1 se () positivo, -1 caso contrário.

Note que todos os modelos para previsão de taxa de resgates são funções da taxa de juros. E mostra que o comportamento dos segurados quanto a resgate é complicado de estimar.

Um exemplo de que crises financeiras impactam diretamente na quantidade de resgates é o caso da Coréia na sua crise de dezembro de 1997 a dezembro de 1998. Alguns produtos chegaram a apresentar uma taxa mensal de

saída de 19%. Após a crise eles tentam desenvolver produtos sensíveis às taxas de juros.

No estudo do artigo foram utilizadas 1.000.000 apólices por produto. A taxa de persistência foi analisada como razão do valor de capital do período atual sobre o do período anterior. Os critérios utilizados na escolha do melhor modelo foram a raiz do erro quadrático médio (RMSE) e o valor médio do erro absoluto (MAPE).

Para a modelagem em SAS, programa estatístico, foram utilizados: modelos lineares generalizados (procedure GENMOD) e modelos de regressão logística (procedure LOGISTIC).

A função logit possui a seguinte forma:

$$\ln(qs/(1-qs)) = b_0 + b_1v_1 + \dots + b_nv_n \quad (6)$$

A função CLL possui a seguinte forma:

$$\log(-\log(1-qs)) = b_0 + b_1v_1 + \dots + b_nv_n \quad (7)$$

Onde qs é a taxa de resgate a ser estimada, $\{b_i; i=1,\dots,n\}$ são os coeficientes a serem estimados e $\{v_i; i=1,\dots,n\}$ são as variáveis explicativas descritas a seguir.

No final do estudo, ficam apenas as variáveis: diferença entre taxa de crédito e taxas de referência; idade da apólice e taxas de desemprego. As demais não apresentaram boa significância para o modelo. E o autor compara os modelos: arco-tangente, logit e CLL. Os melhores resultados foram os dos modelos logit e CLL.

Fica a sugestão de leitura do artigo, pois ele apresenta o passo a passo da modelagem utilizada.

2.3

Credibilidade e Persistência

Este estudo foi realizado pela *Casualty Actuarial Society* (CAS) cujo enfoque é em ramos Não-Vida (ramos elementares, como automóveis, por exemplo). Diferente da *Society of Actuaries* (SOA), cuja especialidade é em ramos Vida. As duas sociedades são organizações de profissionais e estudantes de atuária com foco em desenvolvimento de pesquisas atuárias.

Os segurados decidem comprar, renovar ou cancelar seu seguro em função do preço (prêmio) estabelecido pelos seguradores. A importância do estudo de persistência está relacionada ao fato do segurador precisar distribuir os riscos entre os segurados para garantir seu bem-estar financeiro e lucratividade. Utiliza-se Teoria da Decisão para se calcular os prêmios levando em conta a experiência passada de um segurado, de uma carteira de segurados e a probabilidade de compra ou renovação do seguro, que seria a persistência. Note que aqui estamos falando em renovação de apólices, o que não ocorre com os produtos de previdência, pois os seguros de ramos elementares, no geral, possuem vigência de um ano, enquanto os de previdência são, normalmente, pagos mensalmente até a entrada em gozo da renda de aposentadoria.

A autora assume que a persistência depende da diferença aritmética entre o prêmio cobrado e seus sinistros anteriores. Ela estende o trabalho de Taylor (1975), onde ele obtém fórmulas lineares de credibilidade minimizando funções de perda que incorporam a persistência dos segurados.

A base do estudo de determinar o efeito da persistência dos segurados no prêmio utilizada no artigo foi a Teoria Estatística da Decisão e sua aplicação a Teoria da Credibilidade. A Teoria da Credibilidade busca métodos sistemáticos para cálculo do prêmio de seguro baseado nas experiências individuais e coletivas dos segurados.

O artigo propõe uma função exponencial de persistência e desenvolve uma fórmula geral de credibilidade para o prêmio.

O artigo também apresenta como conseguir os prêmios ótimos de acordo com os objetivos da seguradora, maximizar o ganho de subscrição ou otimizar a estrutura da seguradora.

Antes de estudar o artigo, sugere-se uma leitura sobre Teoria da Decisão e Teoria da Credibilidade para facilitar o entendimento das fórmulas apresentadas.

2.4

Outras referências

Existem outros enfoques interessantes do estudo de persistência, como o caso de se estimar o tempo de permanência do segurado no plano ou o estudo da Teoria dos Múltiplos Decrementos, onde cada causa de saída é investigada. Para maiores detalhes sobre Teoria dos Múltiplos Decrementos ver Winklevoss (1993) e Haberman e Pittacco (1999).

Joseph R. Brzezinski (1981) utiliza análise de cluster para agrupar empresas de acordo com os padrões de persistência. São analisadas 26 empresas com dados separados para empresas Canadenses e Americanas. O estudo classifica as empresas em quatro grupos:

Cluster 1: Persistência ótima

Cluster 2: Persistência boa

Cluster 3: Persistência na média

Cluster 4: Pior Persistência

O estudo conclui que não se pode olhar apenas os primeiros 30 meses para se ter uma análise conclusiva sobre as ações para melhorar a persistência e que a tendência das empresas é de permanecer no mesmo cluster.

Todos estes artigos mostram a importância do estudo de persistência para as seguradoras, podendo inclusive a persistência definir o prêmio do seguro.

3

Análise dos dados

Neste capítulo vamos avaliar a carteira de clientes como um todo e depois os produtos objeto deste estudo: plano do tipo Benefício Definido e Contribuição Definida, os dados obtidos são de empresas diferentes.

Avaliando toda a carteira da empresa (com todos os produtos) desde janeiro de 1997, percebe-se que a série parece se estabilizar, após 70 meses, como se pode verificar no gráfico abaixo. No gráfico abaixo temos as séries que foram implantadas em janeiro, pois se fossem expostos todos os meses o gráfico iria ficar muito poluído. Mas antes de escolher o mês de janeiro, os outros meses também foram avaliados para verificar efeitos de sazonalidade, porém como não foram verificados, pode-se considerar o gráfico como representativo da evolução do comportamento de persistência com relação a implantação. Observe que as curvas a partir de 200201 passam a ter uma persistência pior nos primeiros meses. Uma possível explicação para este descolamento seria a aquisição de outra carteira em dezembro de 2001. O gráfico foi elaborado com a informação de quantidade de inscrições ativas da empresa fornecedora dos dados do plano tipo Benefício Definido. Os demais planos que formam a composição da carteira também são do tipo Benefício Definido, ou seja, os ativos são os que estão contribuindo para o plano.

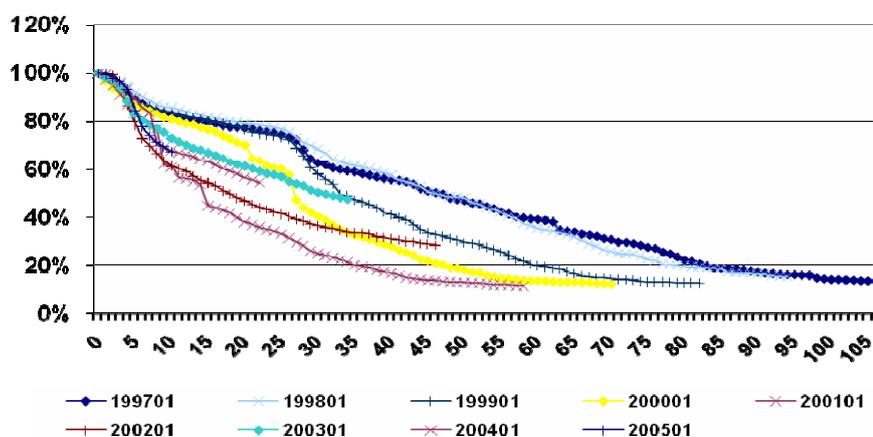


Figura 12: Evolução da persistência para toda a carteira

Para entendermos melhor o comportamento da carteira devemos dividir os produtos de acordo com as possíveis saídas e pelo tipo de produto:

Tabela 3: Planos e características

Caso	Cobertura	Produto	Regime	Saídas
1	Morte	Pecúlio / Pensão	Capitalização	Morte(sinistro) / Resgate
2	Morte	Pecúlio / Pensão	Repartição simples / Repartição de capitais de cobertura	Morte(sinistro) / Cancelamento
3	Sobrevivência	Aposentadoria / PGBL	Capitalização	Sobrevivência (sinistro) / Resgate / Cancelamento / Morte
4	Morte / Invalidez por Acidente	Pecúlio com seguro de acidentes pessoais	Repartição simples	Morte(sinistro) / Cancelamento / Invalidez por Acidente (sinistro)
5	Invalidez	Renda por invalidez / Pecúlio	Repartição de capitais de cobertura / Repartição simples	Invalidez (sinistro) / Morte / Cancelamento

Nesta dissertação foram utilizadas propostas implantadas desde janeiro de 1999 a outubro de 2005 (quase 7 anos de dados) para o plano do tipo BD e foram utilizadas propostas implantadas desde maio de 2001 a abril de 2006 (quase 5 anos de dados) para o plano do tipo CD. O produto escolhido foi o 3, de acordo com a tabela acima. O regime financeiro do plano define se o plano é resgatável (Capitalização) ou não (demais casos).

O primeiro produto a ser estudado é de sobrevivência com benefício definido combinado com um seguro de vida e uma renda por invalidez. Ou seja, as possíveis causas de saídas são: óbito, invalidez, aposentadoria e cancelamento/resgate (as inscrições canceladas podem ser resgatadas após um período de carência de 24 meses). A parte de sobrevivência, por ser em regime de capitalização, permite resgate.

O segundo produto a ser estudado é de sobrevivência com contribuição definida. Ou seja, as possíveis causas de saídas são: óbito, aposentadoria e cancelamento / resgate (as inscrições canceladas podem ser resgatadas após um

período de carência de 24 meses). Por ser em regime de capitalização, permite resgate.

Foi escolhido trabalhar com o triângulo de desenvolvimento das quantidades de inscrições ativas, ou seja, por competência. Ao trabalhar com a quantidade de inscrições ativas e não com a quantidade de inscrições que pagaram no mês (por caixa), evita-se um problema de estimativa nos primeiros meses da venda, onde pode-se ter um atraso no pagamento devido ao ajuste com a data desejada para pagamento da segunda contribuição, pois a primeira é paga no ato da contratação. A periodicidade será mensal para podermos analisar os momentos de pico nos cancelamentos, que são nos primeiros meses e também após o prazo de carência para o resgate, e também porque com as séries mais recentes a previsão fica prejudicada.

Conforme gráfico abaixo, verifica-se que as saídas por invalidez e óbito são pouco significativas. Este é um dos motivos pelo qual serão avaliadas apenas as saídas por cancelamento / resgate. Outro motivo, conforme referência bibliográfica, são os objetivos finais de utilização do estudo de persistência, como o estudo de lucratividade. Para construção do gráfico abaixo foram utilizados os dados do plano tipo BD.

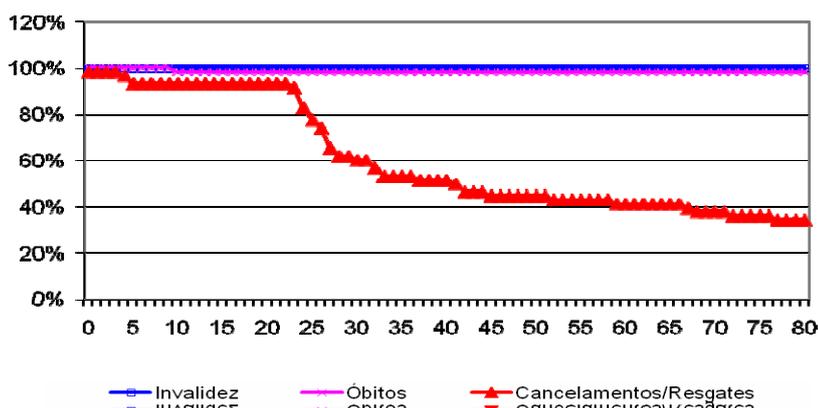


Figura 13: Evolução das saídas por causa – 199901

No gráfico acima temos a evolução das propostas implantadas em janeiro de 1999. Primeiro foram retiradas as saídas por invalidez (linha azul), depois as por óbito (linha rosa). Com estas saídas, a curva quase que permaneceu constante. O comportamento de saídas só começa a tomar forma com as saídas por cancelamento / resgate.

Nas próximas seções serão feitas análises de forma análoga ao estudo do SOA, porém com uma amostra extraída de forma diferente. Nos estudos do SOA foram avaliadas a quantidade de participantes no plano e este grupo foi novamente verificado ao final de um ano. As amostras para os planos do tipo BD e CD foram avaliadas desde a implantação até o fim do período de análise. Assim temos para o plano do tipo BD a série mais antiga sendo avaliada seis anos e dez meses depois e a mais recente, implantações em outubro de 2005, ainda sem experiência. E para o plano do tipo CD a série mais antiga, de implantações em maio de 2001 sendo avaliada em abril de 2006, ou seja, cinco anos depois e para a série mais recente, abril de 2006, não se tem experiência.

3.1

Plano do tipo Benefício Definido

Agora vamos avaliar cada produto separadamente para procurar identificar as variáveis que podem exercer alguma influência no comportamento da persistência ao longo do tempo. Para se estabelecer a divisão das faixas de idade de ingresso e das faixas de contribuição, foi utilizada a análise bivariada, onde as classes avaliadas foram dos participantes que permaneceram e dos que saíram. O objetivo da tabela bivariada é de dividir as faixas de forma a identificar as faixas com maior percentual de saídas.

Foram analisadas para este tipo de produto 8.371 implantações e 4.194 (50%) saídas com as seguintes características do participante:

- idade de ingresso,
- região,
- sexo.

E as seguintes características do negócio

- faixa de contribuição,
- forma de pagamento

No gráfico abaixo, por faixa etária, a taxa de saída é maior que a média para a faixa acima de 50 anos e abaixo da média (50%) para participantes que entraram no plano com até 30 anos de idade. Este plano possui maior número de implantações para pessoas com até 40 anos (66%).

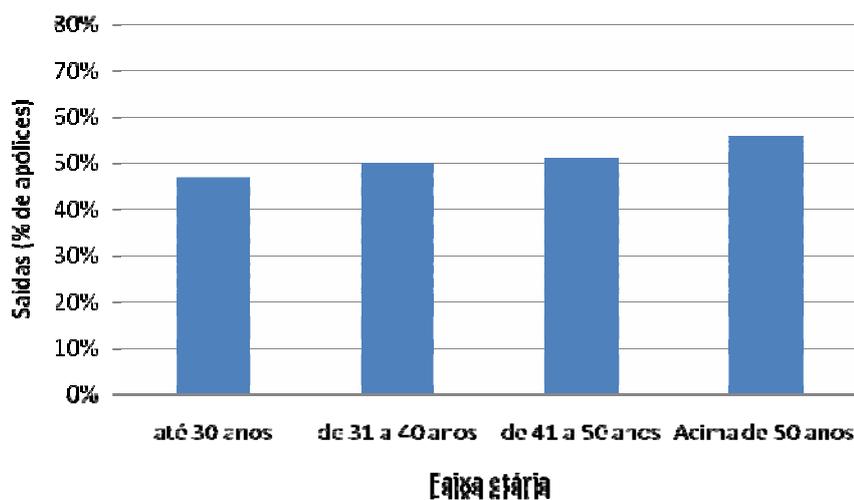


Figura 14: Taxa de saída por faixa etária para planos do tipo BD

No gráfico por região a taxa de saída mais alta foi para a região norte e menor para nordeste e sul. Porém estas são as regiões com menor número de implantações.

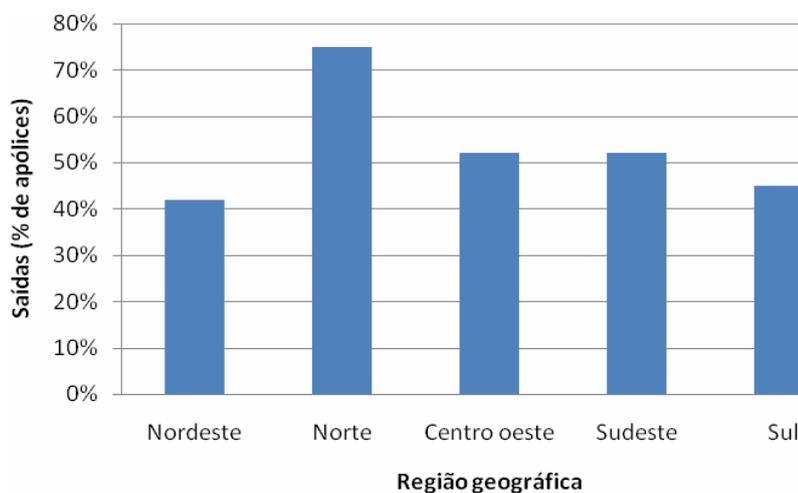


Figura 15: Taxa de saída por região geográfica para planos do tipo BD

Na análise por faixa de contribuição a taxa de saída mais alta foi para quem começou o plano contribuindo com valores acima de R\$100,00 e abaixo de R\$30,00, ou seja, os extremos, e menor para que contribuía com R\$30,00 a R\$100,00, conforme gráfico abaixo.

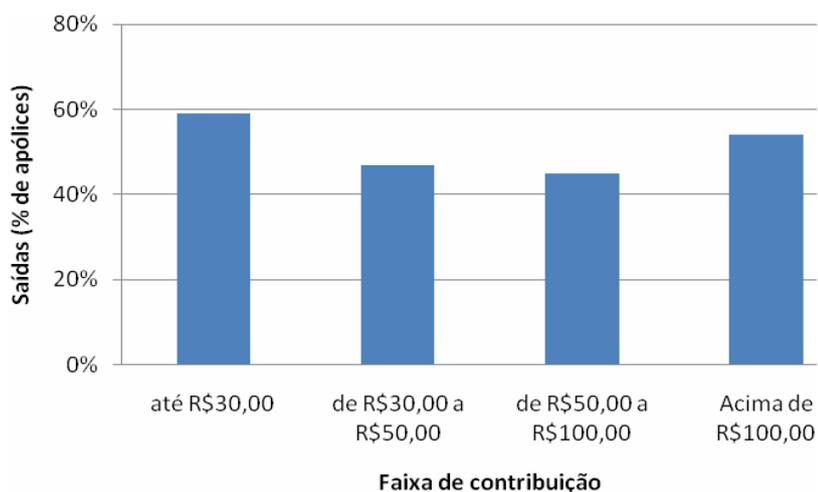


Figura 16: Taxa de saída por faixa de contribuição para planos do tipo BD

Na análise por sexo, a taxa de saída foi um pouco maior para homens. O número de implantações também é bem equilibrado, 49% de mulheres e 51% de homens. De acordo com o gráfico, pode-se deduzir que esta não é uma informação que influencia na persistência dos participantes no plano.

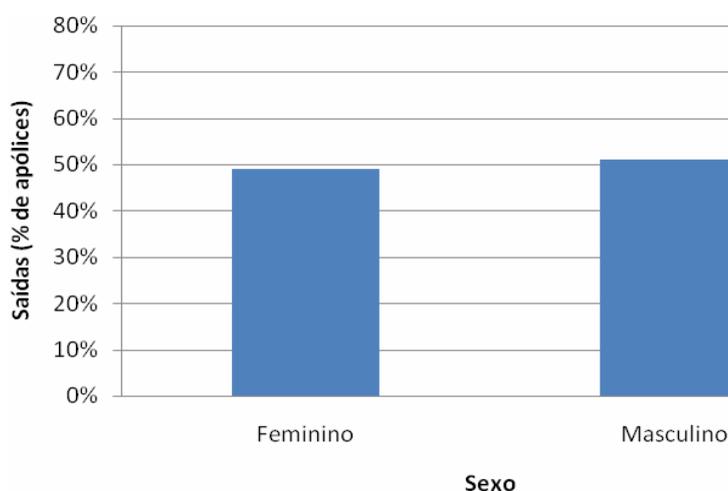


Figura 17: Taxa de saída por sexo para planos do tipo BD

Na análise por forma de pagamento, a taxa de saída é maior para os participantes que pagam com carnê e melhor para débito em conta corrente. Porém a maior concentração de implantações é de desconto em folha de pagamento.

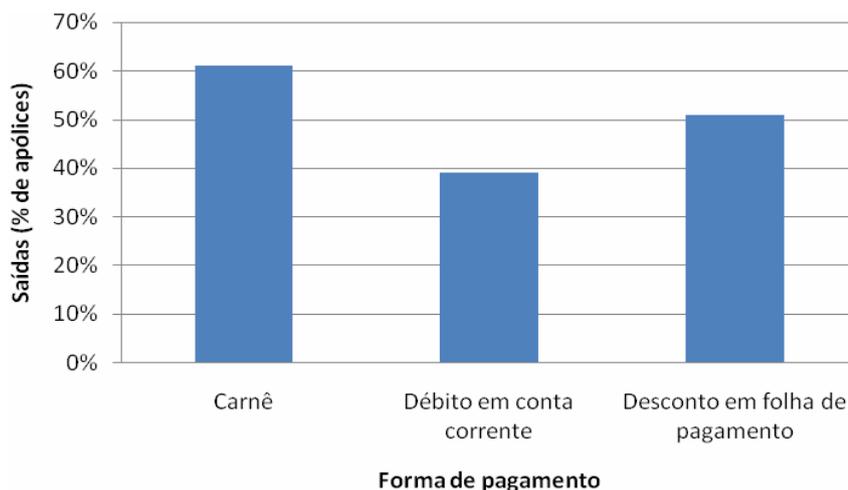


Figura 18: Taxa de saída por forma de pagamento para planos do tipo BD

Para os planos do tipo BD verificou-se que as variáveis que podem influenciar na persistência dos participantes no produto são:

- Faixa etária: quanto mais novos, menor a taxa de saída. Porém este aumento na taxa de saída pode estar sendo em função da mortalidade;
- Região geográfica: taxa de saída bem acima da média para a região norte;
- Faixa de contribuição: as menores e maiores contribuições apresentaram maior taxa de saída;
- Forma de pagamento: menor taxa de saída para débito em conta corrente.

3.2

Plano do tipo Contribuição Definida

Agora vamos avaliar o plano do tipo CD. Aqui, se aproveitou as faixas etárias e de contribuição estabelecidas para os planos do tipo BD. No geral, a taxa de saída do plano do tipo BD foi maior que para o plano do tipo CD. Mas note que os produtos são de empresas distintas e com regras de funcionamento e de comercialização diferentes, o que pode justificar esta diferença. Por isso não os produtos não serão analisados de forma comparativa.

Para o plano do tipo CD, o perfil dos que permaneceram no plano pode ser dividido em dois grupos: os pagantes e os não pagantes, ou seja, os que estão contribuindo e os que não estão contribuindo para o plano. De todos os ativos, foi verificado que 3% das inscrições estão como bloqueadas, ou seja, estão ativas, mas sem contribuir para o plano. A distribuição total ficou conforme abaixo:

Tabela 4: Distribuição de inscrições do plano CD

Status	Quantidade de inscrições	%
Ativo	18.071	59%
Bloqueado	524	2%
Saíram	11.975	39%
Total	30.570	100%

Foram 30.839 implantações e 12.013 (39%) saídas com as seguintes características do participante:

- idade de ingresso,
- região,
- sexo.

E as seguintes características do negócio

- faixa de contribuição,
- forma de pagamento

Na análise por faixa etária, note que a taxa de saídas é pouco maior que a média para a faixa de 31 a 40 anos e abaixo da média para participantes que entraram no plano nas demais faixas. Porém percebe-se que a faixa etária não é fator que influencia a saída dos participantes, pois quase não há variação quanto a

média. Para o plano do tipo CD verificou-se uma maior concentração de implantações nas faixas entre 31 e 50 anos.

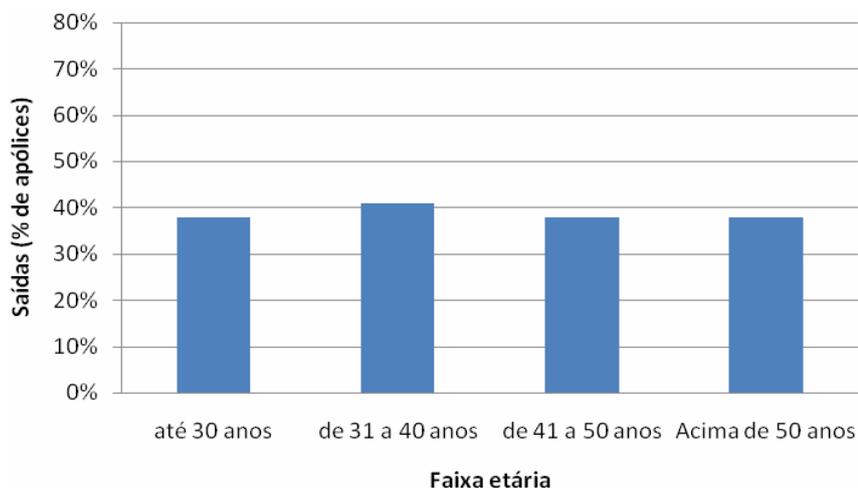


Figura 19: Taxa de saída por faixa etária para planos do tipo CD

Na análise por região geográfica, a taxa de saída mais alta foi para a região nordeste e menor para centro-oeste. Sendo que a maior concentração de implantações são nas regiões nordeste e sudeste (85%).

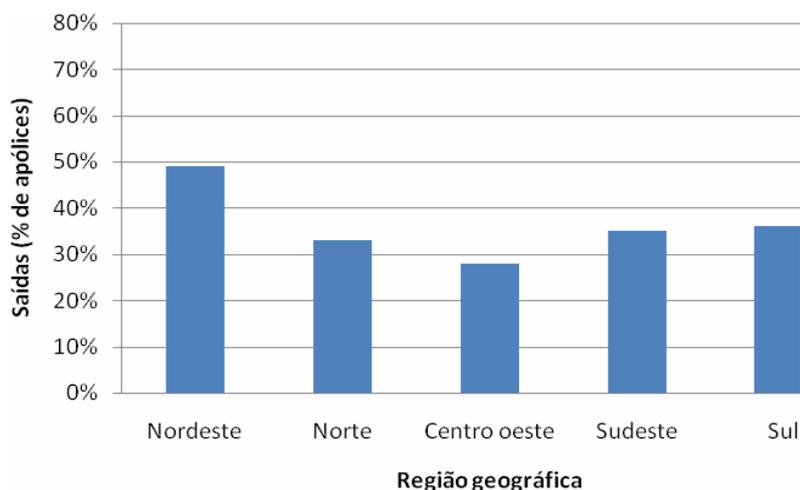


Figura 20: Taxa de saída por região geográfica para planos do tipo CD

Na análise por faixa de contribuição abaixo, a taxa de saída mais alta foi para quem começou o plano contribuindo com valores acima de R\$100,00 e abaixo de R\$30,00, ou seja, os extremos, e menor para quem contribuía com

R\$30,00 a R\$50,00. Mas novamente, podemos verificar que a única faixa longe da média possui baixa concentração de informações. Porém existe uma concentração muito alta na faixa acima de R\$100,00 (80%). Note que este produto possui forma de pagamento flexível, ou seja, o participante pode estar contribuindo ou não, e que a faixa de contribuição do gráfico é a faixa do primeiro aporte.

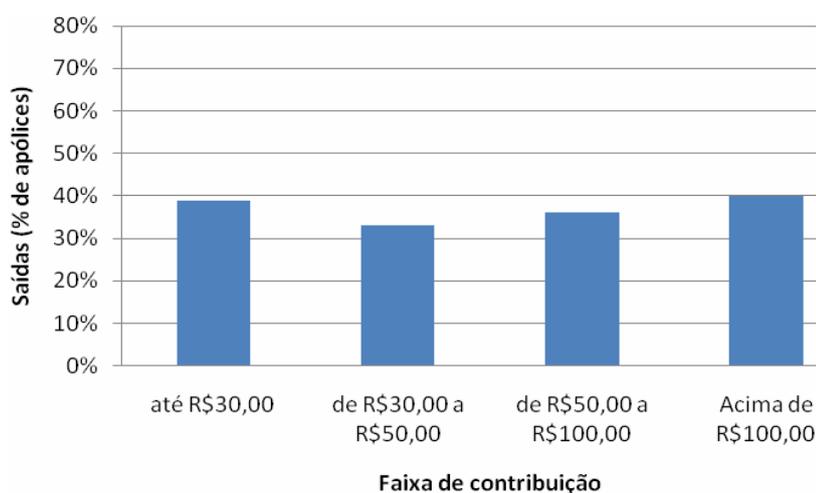


Figura 21: Taxa de saída por faixa de contribuição para planos do tipo CD

Na análise por sexo, a taxa de saída foi um pouco maior para homens, porém com variação baixa em relação à média, o que leva a crer que esta não seja uma variável com influência na persistência.

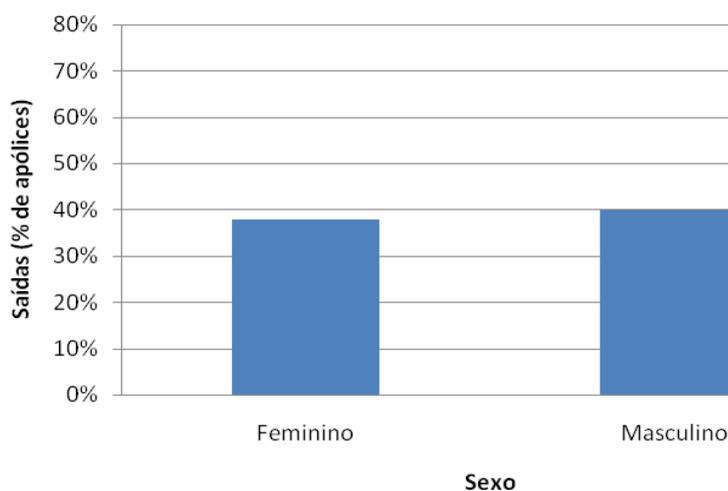


Figura 22: Taxa de saída por sexo para planos do tipo CD

Na análise por forma de pagamento, a taxa de saída é maior para os participantes que pagam com carnê, e esta parece ser a única variável que realmente contribui para o aumento na taxa de saída dos participantes. No caso do plano tipo CD, a empresa não disponibilizou a forma de pagamento por desconto em folha, apenas por carnê ou débito em conta.

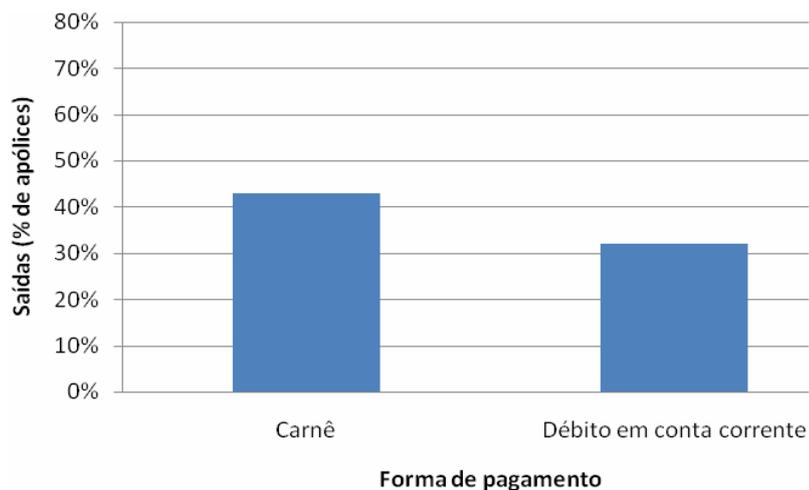


Figura 23: Taxa de saída por forma de pagamento para planos do tipo CD

Para os planos do tipo CD, a única variável que indica influenciar na persistência, numa análise univariada, é a região geográfica. As outras variáveis apresentam pequenas variações com relação a média.

A seguir, serão apresentadas a metodologias e suas aplicações aos dados empíricos.

4

Metodologia

Serão apresentadas duas formas de se estimar a persistência. A primeira é de forma mais agregada e se utiliza de dados em forma de triângulos de *run-off* e é conhecida como *Chain Ladder*, uma técnica comum para se estimar provisão de sinistros ocorridos e não avisados. Como este é um método muito subjetivo, em seguida é aplicado a técnica de Mínimos Quadrados para se otimizar o método de *Chain Ladder*.

A segunda forma busca inspiração na tarifação de seguros de automóveis, esta é uma forma menos agregada de se estimar a persistência.

Os modelos matemáticos podem ser classificados em:

- Modelos dinâmicos e estáticos: Dependentes do tempo e independentes do tempo
- Modelos determinísticos e estocásticos: Modelos determinísticos são aqueles que têm uma única resposta, enquanto que nos modelos estocásticos (ou probabilísticos) possíveis respostas dependem de uma distribuição de probabilidade. A distribuição normal é a distribuição de probabilidade mais empregada nos modelos estocásticos. Para construir um modelo estocástico basta adicionar um fator de variação aleatória (e_i). Os modelos estocásticos permitem a estimação dos parâmetros de dispersão, os quais medem a variabilidade dos indivíduos que compõem a população.
- Modelos lineares e não lineares: Um modelo é considerado linear quando todos os parâmetros estão linearmente dispostos, mesmo quando existirem termos elevados ao quadrado, ao cubo etc. Assim, um exemplo de modelo linear é o modelo de regressão polinomial:

$$Y_{ij} = b_0 + b_1X_i + b_2X_{i2} + e_{ij} \quad (12)$$

Um exemplo de modelo não-linear é a função de Gompertz (Gous, 1986, 1998; Hruby et al., 1994; Emmans, 1995), cuja expressão é dada por:

$$W_t = W_0 \exp\{(L/K)(1-e^{-kt})\} \quad (8)$$

Supondo F_t o percentual de saídas do plano, os modelos estudados podem ser classificados como:

Chain ladder: estático, não-linear e determinístico

$$F_t = \alpha / (\beta + t) \quad (9)$$

Mínimos quadrados: estático, não-linear e estocástico

$$F_t = \alpha / (\beta + t) + e_t \quad (10)$$

Modelos lineares generalizados: estático, não-linear e estocástico

$$F_t = \text{Poisson} \quad (11)$$

4.1

Chain Ladder

Um breve histórico deste método de acordo com o artigo do Verral (2002): Murphy (1994) considerou *Chain Ladder* num contexto com Regressão Linear; Renshaw e Verral (1998) não foram os primeiros a verificar a relação da técnica *Chain Ladder* com a distribuição de Poisson, mas foram os primeiros a implementar. Mack (1991) mostrou que as estimativas do *Chain Ladder* podem ser obtidas maximizando a verossimilhança de Poisson pelo método dos marginais totais. Uma discussão sobre a base estocástica deste método pode ser encontrada em Mack (1994), Verral (2002), Mack e Venter (2000) e Verral e England (2000).

Os dados em forma de triângulo permitem o estudo dos seguintes questões:

- Na coluna tem-se a evolução das saídas, o *run-off*, cada coluna representa a distância entre ocorrência e aviso;
- Na linha tem-se a evolução da implantação, pode-se acompanhar através das linhas do triângulo a tendência das saídas em função da época de implantação, assim como, se a carteira está aumentando ou se está em extinção, ou seja, não é mais comercializada;
- E por último, tem-se a evolução de ativos na diagonal do triângulo, que são a fotografia atual da carteira.

Partindo do triângulo de sinistros acumulados abaixo temos a seguinte situação: na coluna parte-se da ocorrência (coluna zero) e em seguida para a célula (i,j) que contém a quantidade de avisos até i períodos depois.

Tabela 5: Sinistros acumulados

Mês	0	1	2	3	4
1	300	390	398	400	400
2	400	430	445	500	
3	350	376	399		
4	330	340			
5	380				

Para se estimar o valor final dos sinistros, no geral, esta técnica estima uma taxa de evolução dos sinistros como o exemplo simplificado abaixo, onde vamos acumulando os avisos de sinistros com ocorrência num mesmo período, origem.

Tabela 6: Taxa de evolução dos sinistros

Mês	0-1	1-2	2-3	3-4
1	1,30	1,02	1,01	1,00
2	1,08	1,03	1,12	
3	1,07	1,06		
4	1,03			
Média	1,12	1,04	1,06	1,00

Adaptando a idéia acima, ao invés de acumular avisos de sinistros, se retirarmos as saídas em função de cancelamentos / resgate, temos um novo triângulo, porém de decréscimos. No triângulo abaixo temos a seguinte situação: na coluna, parte-se da implantação (coluna zero) e em seguida para a célula (i,j) que contém a quantidade de ativos que foram implantados no período i e que continuam ativos j períodos depois.

Tabela 7: Quantidade de inscrições ao longo do tempo

Mês	0	1	2	3	4
1	300	290	275	273	273
2	400	350	325	300	
3	350	325	300		
4	330	300			
5	380				

A Persistência é o percentual de ativos na célula (i,j) com relação a implantação. Também se pode estimar as saídas ou a persistência com relação ao período anterior. Com este tipo de informação, se consegue estimar quanto tempo mais um participante deverá permanecer no plano em função da sua implantação e do tempo em que está no plano. O estudo apresentará as saídas como função do tempo de permanência no plano. A idéia de se utilizar o triângulo de *run-off* para estimar a persistência de forma agrupada foi apontada por André di Montiny¹.

Tabela 8: Persistência com relação a implantação

Mês	Implantação	0-1	1-2	2-3	3-4
1	100%	97%	92%	91%	91%
2	100%	88%	81%	75%	
3	100%	93%	86%		
4	100%	91%			
5	100%				

Pode-se buscar estimar a média das taxas de saídas através da fórmula a ser vista no item 2, ou com outros métodos. O método de *Chain Ladder* consiste em uma análise quase que visual dos dados, verifica-se o que se pretende com o resultado, se desejo usar as informações mais recentes ou com maior histórico, e analisa-se a existência de *outliers*, ou seja, informações fora do padrão que podem prejudicar as estimativas.

¹Conforme trabalho realizado por André di Montiny em 2004. Tanto o agrupamento de forma triangular como a fórmula por partes foram utilizadas em seu trabalho.

4.2

Cain Ladder com Mínimos Quadrados

Para se estimar o conteúdo de cada célula modela-se uma curva aos dados obtidos para se verificar os valores para prazos longos. Algumas possíveis curvas de saídas, no caso por morte, podem ser encontradas no material de tábuas de mortalidade do Kaizô (2004), assim como as curvas de taxa de resgate apresentadas no item 3.2.

Um modelo proposto para persistência nos planos de sobrevivência / risco segue com a curva apresentada abaixo¹, ou seja, a curva será por partes, de acordo com o intervalo de tempo, pois cada intervalo possui um comportamento particular :

$$F_t = (\alpha / (\beta + t)) + \gamma \quad (12)$$

Onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \gamma_1, 1 \leq t \leq 5; \\ \gamma = 0, 6 \leq t \leq 23 \text{ e } 36 < t < n; \\ \gamma = \gamma_2, 24 \leq t \leq 36 \end{array} \right.$$

F - probabilidade de saída da carteira;

t - tempo decorrido em meses;

γ_1 - Parâmetro utilizado para confirmação da primeira venda (intervenção no modelo), onde a desistência é mais acentuada;

γ_2 - Parâmetro utilizado para período após carência para resgate (intervenção no modelo), onde a desistência é mais acentuada;

α - Parâmetro utilizado para a concavidade da função;

β - Parâmetro utilizado para a posição da função no eixo y;

n - número de períodos disponíveis na amostra.

A persistência da carteira é obtida através da seguinte fórmula:

$$P_t = P_{t-1} * (1 - F_t), \text{ com } P_0 = 100\%. \quad (13)$$

Note que o modelo toma por base uma função complexa, sem solução analítica. P_0 é 100% pois os dados são do status no final do mês, ou seja, somente serão avaliadas as propostas que foram implantadas, as negadas não serão

analisadas. Os dados não mostram as propostas que entraram e não se confirmaram dentro do próprio mês, pois o proponente paga a primeira contribuição no ato de assinatura da proposta e só é cancelado após 3 meses de atraso.

Para escolhermos os melhores parâmetros: α , β , γ_1 e γ_2 , podemos utilizar o método de Mínimos Quadrados que propõe parâmetros que minimizem a soma dos erros ao quadrado.

Para os nossos dados temos:

$$\text{Min } \sum_1^{n-1} (P_t - \hat{P}_t)^2 \quad (14)$$

Restrição: Para $t=0$, $P_0 = 100\%$

O modelo acima foi utilizado sobre a média das persistências obtida com os triângulos de *run-off*.

Para minimizar a função acima foi utilizada a ferramenta *solver* do MS Excel.

Esta forma de modelagem é simples e, conforme veremos ver a seguir, eficaz. Também é de fácil entendimento, o que facilita a aceitação desta forma de modelagem por parte da área estratégica da empresa.

4.3

Modelos Lineares Generalizados

A forma de modelagem que vai ser apresentada nesta seção é muito utilizada para tarifação de seguros de automóveis, onde para calcular o prêmio estima-se primeiro o número de sinistros e depois a severidade (valor médio do sinistro).

A classe de Modelos Lineares Generalizados é uma extensão dos modelos lineares tradicionais que permite a média da população depender de um preditor linear através de uma função de ligação não linear e permite a probabilidade da variável ser estimada por qualquer membro da família exponencial. Muitos dos modelos estatísticos utilizados são modelos lineares generalizados.

Um modelo linear tradicional possui a seguinte forma:

$$y_i = x_i' \beta + e_i \quad (15)$$

Onde y_i é a variável resposta para a i -ésima informação. A quantidade x_i é o vetor coluna de variáveis explicativas para a observação i que é conhecida. O vetor de coeficientes β é estimado por mínimos quadrados para modelar y . Assume-se que os erros e_i sejam variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média zero e variância constante. O valor esperado de y_i , denotado por m_i , é dado por:

$$m_i = x_i' \beta \quad (16)$$

Enquanto modelos lineares tradicionais são extensivamente utilizados em análises estatísticas, existem alguns problemas nos quais eles não são apropriados:

- Pode não ser razoável assumir que os dados são normalmente distribuídos. Por exemplo: a distribuição normal, que é contínua, talvez não seja adequada para modelar contagens ou medidas de proporções, que são distribuições discretas;
- Se a média dos dados é naturalmente restrita a um intervalo de valores, o modelo linear tradicional pode não ser apropriado, pois o preditor linear $x_i' \beta$ pode resultar qualquer valor. Por exemplo: a medida de uma medida de proporção está entre 0 e 1, mas o preditor linear da média num modelo linear tradicional não está restrito a este intervalo;
- Pode não ser realista que a variância dos dados seja constante para todas as observações. Por exemplo: é comum observar dados onde a variância aumenta de acordo com a média.

Um modelo linear generalizado estende o modelo linear tradicional e é aplicável a problemas de análise de dados mais genéricos. Um modelo linear generalizado consiste nos seguintes componentes:

- Componente linear definido na mesma forma do modelo linear tradicional:

$$n_i = x_i' \beta \quad (17)$$

- Função de ligação monotônica diferenciável g que descreve como o valor esperado de y_i está relacionado ao preditor linear n_i :

$$g(m_i) = x_i' \beta \quad (18)$$

- Variável resposta y_i independente para $i = 1, 2, \dots$ com distribuição de probabilidade da família exponencial, ver anexo sobre “distribuições

pertencentes a família exponencial”. Isto implica que a variância da variável resposta depende da média através de uma função de variância V :

$$\text{var}(y_i) = \phi V(m_i)/w_i \quad (19)$$

Onde ϕ é uma constante e w_i é um peso conhecido para cada observação. O parâmetro de dispersão ϕ também é conhecido, por exemplo, para a distribuição binomial, ou pode ser estimado.

Assim como para os modelos lineares tradicionais, modelos lineares generalizados podem ser resumidos através de estatísticas como estimativas dos parâmetros, seus erros padrões e estatísticas de ajuste do modelo.

Também se pode fazer inferência estatística sobre os parâmetros utilizando intervalos de confiança e testes de hipóteses. Porém, procedimentos específicos de inferência são usualmente baseados em considerações assintóticas, pois não há teoria de distribuição exata ou não é prática para qualquer modelo linear generalizado.

4.3.1

Exemplos de Modelos Lineares Generalizados

Um modelo linear generalizado é construído se escolhendo a variável resposta e as explicativas de acordo com os dados e escolhendo uma função de ligação e distribuição de probabilidade da variável resposta. Alguns exemplos de modelos lineares generalizados seguem abaixo.

Variáveis explicativas podem ser combinações de variáveis contínuas, de classificação ou interações.

- Modelo linear tradicional
 Variável resposta: variável contínua
 Distribuição: normal
 Função de ligação: identidade $n = m$
- Regressão logística
 Variável resposta: proporção
 Distribuição: binomial
 Função de ligação: logit $n = \log(m/(1-m))$

- Regressão de Poisson no modelo log-linear
 Variável resposta: dados de contagem
 Distribuição: poisson
 Função de ligação: $\log n = \log(m)$
- Modelo Gamma com ligação log
 Variável resposta: variável contínua positiva
 Distribuição: gamma
 Função de ligação: $\log n = \log(m)$

4.3.2

Procedimento GENMOD

A procedure GENMOD do software SAS modela GLM, como definido por Nelder e Wedderburn (1972).

Este procedimento ajusta modelos lineares generalizados aos dados por estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros β , de forma numérica através de um processo iterativo. O parâmetro de dispersão ϕ também é estimado por máxima verossimilhança. Covariâncias, erros padrões e p-valores são calculados para os parâmetros estimados baseando-se na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.

Mudanças nas estatísticas de adequação do modelo são utilizadas para avaliar a contribuição da variável explicativa para o modelo.

O procedimento GENMOD permite ajustar uma seqüência de modelos, começando com um modelo simples até um modelo com o máximo de variáveis explicativas. Esta é a análise do tipo I, que resulta numa tabela com os valores de desvios nas verossimilhanças dos modelos. O resultado deste processo depende da ordem das modelagens.

A análise do tipo III não depende da ordem em que as variáveis são especificadas. Esta análise consiste em calcular a estatística raio de verossimilhança e estatística de Wald para os contrastes entre o termos para um determinado modelo.

Exemplo com Regressão de Poisson:

A distribuição de Poisson pode ser usada para modelar uma distribuição de contagens numa tabela de contingência. Vamos utilizar este método para modelar quantidade de sinistros para seguros de automóveis. Suponha uma experiência de sinistros classificada por dois fatores: idade (duas faixas etárias, ou seja, dois níveis) e tipo de carro (divido em três níveis: pequeno, médio e grande), conforme tabela abaixo.

Tabela 9: Dados de sinistro de automóveis

Exposição	Número de sinistros	Tipo de carro	Faixa etária
500	42	Pequeno	1
1200	37	Médio	1
100	1	Grande	1
400	101	Pequeno	2
500	73	Médio	2
300	14	Grande	2

Assuma que o número de sinistros possui distribuição Poisson e que a média da distribuição m_i está relacionada aos fatores tipo de carro (C) e faixa etária do segurado (I) para a observação i através da função de ligação log:

$$\log(m_i) = \log(\text{exposição}) + \beta_0 + C_i(1)\beta_1 + C_i(2)\beta_2 + C_i(3)\beta_3 + I_i(1)\beta_4 + I_i(2)\beta_5 \quad (20)$$

$C_i(j)$ e $I_i(j)$ são variáveis indicadoras associadas ao j -ésimo nível dos fatores tipo de carro (C) e faixa etária do segurado (I):

$$C_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } C = j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (21)$$

Para a observação i . Os β s são parâmetros desconhecidos que serão estimados. O logaritmo da exposição é utilizado como variável *offset*, ou seja, variável da regressão com coeficiente 1. A relação log linear entre a média e os

fatores é especificada pela função de ligação. A função de ligação log garante que a média do número de sinistros para cada classe de carro e idade estimado seja positivo.

O código abaixo fornece quatro tipos de resultados que serão avaliados a seguir:

```
proc genmod data=insure;
class carro idade;
model c = carro idade /      dist = poisson
      link = log
      offset = ln
      type1
      type3;
run;
```

Tabela 10: Ajuste do modelo (*Criteria for assessing goodness of fit*)

Criterion	DF	Value	Value/DF
Deviance	2	2,8207	1,4103
Scaled deviance	2	2,8207	1,4103
Pearson Chi-square	2	2,8416	1,4208
Scaled Pearson X2	2	2,8416	1,4208
Log likelihood	.	837,4533	.

A tabela acima contém as estatísticas de um modelo específico. Estas estatísticas são em avaliar o ajuste do modelo e para comparação com outros modelos. Ao se comparar o desvio 2,8207 com seu qui-quadrado assintótico com 2 graus de liberdade, se encontra o p-valor de 0,24. Isto indica que o modelo específico ajusta razoavelmente bem os dados.

Tabela 11: Análise dos parâmetros estimados (*Analysis of parameter estimates*)

Parameter	DF	Estimate	Std error	X2	Pr>Chi
Intercept	1	-1,3168	0,09	212,73	0,0000
Carro - pequeno	1	-1,7643	0,27	41,96	0,0000
Carro – médio	1	-0,6928	0,13	29,18	0,0000
Carro - pequeno	0	0	0	.	.
Idade -1	1	-1,3199	0,14	94,34	0,0000
Idade -2	0	0	0	.	.

Esta tabela apresenta para cada parâmetro do modelo os graus de liberdade, o valor estimado, o erro padrão, a estatística qui-quadrado de Wald e o p-valor associado para testar a significância do parâmetro para o modelo.

Tabela 12: Análise tipo I (*LR statistics for type1 analysis*)

Source	Deviance	DF	X2	Pr>Chi
Intercept	175,15	0	.	.
Carro	107,46	2	67,69	0,0000
Idade	2,82	1	104,64	0,0000

Na análise do tipo I cada entrada na coluna desvio representa o desvio do modelo contendo o efeito daquela linha e todos os efeitos precedentes na tabela, ou seja, o desvio correspondente a carro é o desvio do modelo contendo o intercepto e carro. Quanto mais termos são incluídos no modelo o desvio diminui.

Entradas na coluna qui-quadrado são os raios de verossimilhança (*LR statistics*) para testar a significância do efeito adicionado ao modelo contendo todos os efeitos anteriores. O valor 67,69 para carro representa a diferença entre os desvios do modelo apenas com o intercepto e outro com o intercepto e a variável carro. O p-valor (Pr>Chi) ser zero significa que esta variável é altamente significativa para o modelo.

Tabela 13: Análise tipo III (*LR statistics for type3 analysis*)

Source	DF	X2	Pr>Chi
Carro	2	72,82	0,0000
Idade	1	104,64	0,0000

A análise do tipo III leva as mesmas conclusões que a análise do tipo I. O qui-quadrado do tipo III para carro, por exemplo, é a diferença entre o desvio do modelo com intercepto, carro e idade e o modelo sem carro. A hipótese testada neste caso é a significância de carro no modelo que já possua idade. Os valores do raio de verossimilhança para carro e idade indicam que ambos os fatores são altamente significantes em determinar o comportamento dos sinistros de seguros de automóveis.

A análise feita par o exemplo acima será a mesma a ser feita nos modelos de persistência.

5

Aplicação

Os modelos apresentados no capítulo anterior foram aplicados aos dados descritos no capítulo 3. Para aplicação do *Chain Ladder*, se arrumou o triângulo e foi feito um arranjo semi-visual dos dados. Semi-visual, pois para identificar *outliers* foram utilizadas algumas estatísticas básicas como o uso dos desvios padrões.

Para aplicação do método de otimização de Mínimos Quadrados ao modelo anterior, foi utilizada uma função para estimar as saídas por resgate / cancelamento em função do tempo decorrido t e, conseqüentemente a persistência:

$$F_t = \alpha / (\beta + t) + \gamma \quad (22)$$

$$P_t = P_{t-1} * (1 - F_t), \text{ com } P_0 = 100\%. \quad (23)$$

As fórmulas acima foram aplicadas às células da tabela acima e o *solver* (MS excel) encontrou os parâmetros α , β , γ_1 e γ_2 que minimizavam o erro quadrático médio nas células que não estão em destaque. O objetivo é estimar as células em destaque.

Tabela 14: Persistência com relação a implantação a ser estimada

Mês	Implantação	0-1	1-2	2-3	3-4
1	100%	97%	92%	91%	91%
2	100%	88%	81%	75%	
3	100%	93%	86%		
4	100%	91%			
5	100%				

Para avaliar a aderência dos modelos são utilizadas duas medidas de erro: MPE (Erro médio percentual) e EQM (Erro quadrático médio) que são calculados conforme abaixo:

$$\text{MPE} = 100 * \frac{\sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y}) / \hat{Y}}{n} \quad (24)$$

$$EQM = 100 * \frac{\sum_1^n (Y - \hat{Y})^2}{n} \quad (25)$$

Onde Y é o valor observado e \hat{Y} o valor estimado. As medidas de desvio acima servirão para comparar os modelos de *Chain Ladder* subjetivo e com mínimos quadrados. Não será possível comparação do *Chain Ladder* com Modelos Lineares Generalizados com variáveis cadastrais, no caso do plano tipo BD, pois estão em escalas diferentes. A técnica de Modelos Lineares Generalizados com variáveis cadastrais não será aplicada ao plano do tipo CD, pois de acordo com o capítulo 3, apenas uma variável, região, teria influência sobre a persistência.

Para podermos comparar o modelo de métodos lineares generalizados com o *Chain Ladder*, tentou-se estimar o número de saídas para cada célula do triângulo de saídas, para posteriormente se montar o triângulo com as persistências. Porém o modelo não convergiu, devido ao grande número de classes, assim como por existirem muitas classes zeradas.

Neste capítulo são apresentados resultados dos modelos aplicados aos planos do tipo BD e CD, assim como a avaliação destes resultados de acordo com o esperado pelo conhecimento de mercado. Os modelos aplicados ao plano tipo BD foram o *Chain Ladder* subjetivo e otimizado com técnica de mínimos quadrados e o outro modelo foi o de Modelos Lineares Generalizados, já para o plano do tipo CD não foi aplicado o método de Modelos Lineares Generalizados.

Um problema que poderá ser percebido com as análises a serem apresentadas é a questão de se estimar a cauda das séries mais recentes, dado que estas informações existem apenas para as séries mais antigas, o que pode não refletir a realidade atual da carteira.

5.1

***Chain Ladder* ao plano do tipo Benefício Definido**

O gráfico abaixo apresenta os dados a serem analisados de forma sumarizada. Pois as estimativas foram calculadas para cada célula, ou seja, o ideal seria plotar cada série. Porém o gráfico ficaria confuso, são muitas séries, e como

a estimativa se baseou em apenas uma curva, pois foram estimados α , β , γ_1 e γ_2 para construção de apenas uma curva, escolheu-se plotar a média das persistências.

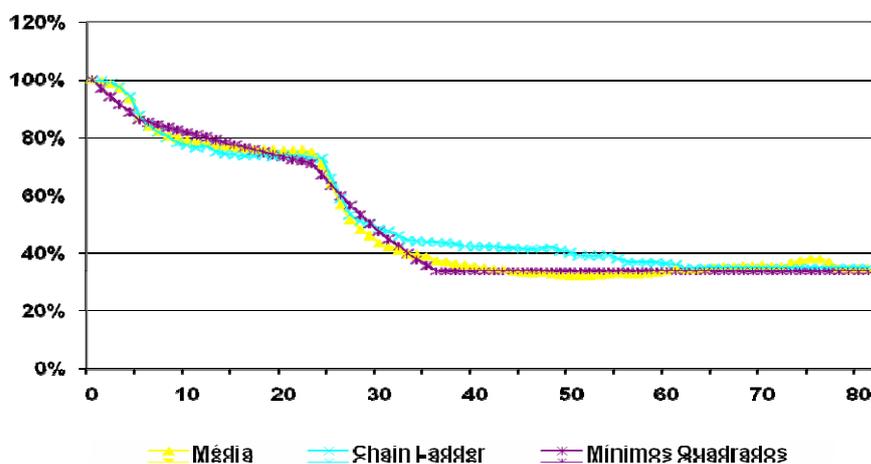


Figura 24: Resultados para plano do tipo BD

Os parâmetros estimados foram:

$$\hat{\alpha} = 98,35; \hat{\beta} = 9.424,77; \hat{\gamma}_1 = 0,02; \hat{\gamma}_2 = 0,06.$$

Conclui-se do estudo que a persistência tende a um patamar de aproximadamente 35%, a partir do mês 40, de acordo com a média. A cauda dos dados observados não foi avaliada, pois a informação é muito antiga.

A população tende a resgatar e assim o objetivo do produto que é a aposentadoria não é atingido.

A otimização para o *Chain Ladder* funcionou, pois obtivemos uma melhora nos erros, conforme resultados da tabela abaixo. Porém o problema da cauda deve ser avaliado com mais cuidado.

Tabela 15: Resultados finais – Plano BD

Plano BD	Erro Médio Percentual (MPE)	Erro Quadrático Médio (EQM)
Chain Ladder	(0,0884)	0,0121
Mínimos Quadrados	0,0038	0,0115

5.2

Modelos Lineares Generalizados ao plano do tipo Benefício Definido

Para se implantar Modelos Lineares Generalizados, primeiro tentou-se utilizar um número de classes muito grande e com o ponderador agrupado em classes menores para não se ter ponderador zerado, porém o modelo não convergiu.

O modelo final para o plano do tipo BD, ao qual chegou-se após várias simulações e avaliações das estatísticas fornecidas pelo programa SAS, utilizou as seguintes variáveis:

- Faixa de contribuição com 3 níveis:
 - 1: até R\$30,00
 - 2: de R\$30,00 a R\$100,00
 - 3: acima de R\$100,00
- Tempo de permanência no plano:
 - 1: até 5 meses
 - 2: de 6 até 24 meses
 - 3: de 25 até 36 meses
 - 4: acima de 36 meses
- Idade de ingresso:
 - 1: até 35 anos
 - 2: acima de 35 anos
- Forma de pagamento:
 - 1: Carnê
 - 2: Débito em conta corrente e Desconto em folha de pagamento
- Sexo:
 - 1: Feminino
 - 2: Masculino

Não foi feita modelagem para o PGBL, pois não havia indícios de que estas variáveis explicassem o modelo de persistência.

Implementação: Modelo para número de saídas.

Y: Número de saídas

Distribuição: Poisson

Função de ligação: log

Ponderador: implantações

A técnica de Modelos Lineares Generalizados obteve bons resultados, porém, como está em escala diferente dos dois modelos anteriores, e como não se possui a abertura por tempo decorrido, estes não podem ser comparados.

5.3

Chain Ladder ao Plano do Tipo Contribuição Definida

O gráfico abaixo apresenta os dados a serem analisados de forma sumarizada. Pois, assim como para o plano do tipo Benefício Definido, as estimativas foram calculadas para cada célula, ou seja, o ideal seria plotar cada série. Porém o gráfico ficaria confuso, são muitas séries, e como a estimativa se baseou em apenas uma curva, escolheu-se plotar a média das persistências.

De acordo com o gráfico abaixo, percebe-se que a persistência do PGBL, plano do tipo Contribuição Definida, tem uma tendência linear decrescente, enquanto o plano BD possui um comportamento mais peculiar, com problemas na confirmação da venda e após a carência do resgate.

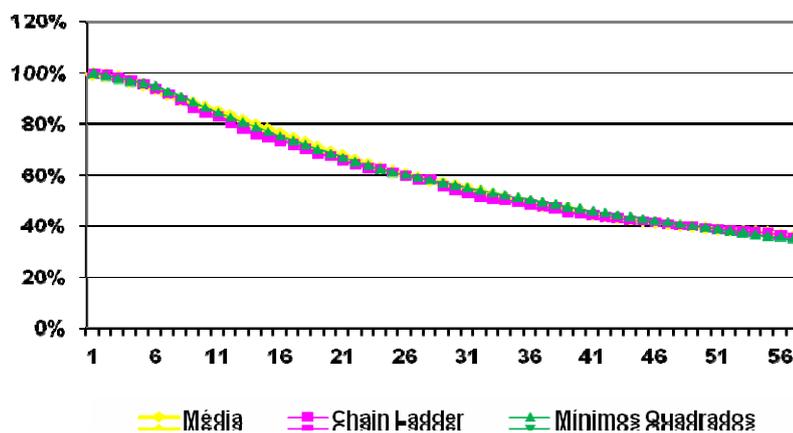


Figura 25: Resultados para plano do tipo CD

Os parâmetros estimados por mínimos quadrados foram:

$$\hat{\alpha} = 47,02; \hat{\beta} = 2.002,63; \hat{\gamma}_1 = (0,014); \hat{\gamma}_2 = (0,005)$$

É interessante notar que a alta variabilidade da curva de persistência esperada para o PGBL não foi percebida. O fato de não existir alta variabilidade na curva se deve ao fato da maior parte dos participantes pagarem mensalmente e de não ter sido percebido descontinuidade dos pagamentos, embora permitido, apenas 3% dos ativos estão como bloqueados, ou seja, estão ativos, mas sem contribuir.

A persistência não estabilizou em 59 meses, pois a cauda continua apresentando tendência de diminuir. A curva não apresenta os picos de saída que aparecem para o plano BD. Talvez o motivo seja o baixo poder aquisitivo dos participantes do plano BD, assim como a venda mal feita, que estimularam o resgate deste plano. A venda do plano do tipo BD foi realizada pelos corretores destacando a vantagem de resgate após 24 meses, ou seja, o produto foi vendido como se fosse uma “poupança”. Já o público do PGBL, além de possuir um poder aquisitivo maior, adquiriu o produto na intenção de acumular recursos para obter uma renda de aposentadoria. A otimização para o *Chain Ladder* melhorou o EQM, porém piorou o MPE, conforme tabela abaixo. Ou, seja, não se pode concluir que o modelo otimizado seja melhor que o subjetivo.

Tabela 16: Resultados finais – Plano CD

Plano BD	Erro médio percentual (MPE)	Erro Quadrático Médio (EQM)
Chain Ladder	(0,000012)	0,000069
Mínimos Quadrados	(0,000014)	0,000066

Foi feito um teste igualando-se $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$ a zero, pois não se verificou uma mudança de comportamento tão brusca para plano do tipo CD quanto para o plano do tipo BD. Os novos parâmetros estimados foram:

$$\hat{\alpha} = 38,68; \hat{\beta} = 2.002,83; \hat{\gamma}_1 = 0; \hat{\gamma}_2 = 0$$

O MPE permaneceu em (0,000014) e o EQM piorou um pouco, foi para 0,000074.

Verifica-se uma tendência decrescente na cauda da curva, devido aos dados estarem apresentando esta tendência, mesmo com aproximadamente 5 anos

de dados. O que não se verificou para o plano do tipo BD, que se estabilizou a partir de 40 meses.

Para complementar a avaliação da persistência para o plano do tipo Contribuição Definida, deveriam ser avaliadas:

- a evolução da arrecadação, através das inscrições que contribuíram no mês,
- da reserva constituída,
- além de se acumular mais meses para verificar onde o processo vai estabilizar, pois o sentimento era de que esta estabilidade fosse atingida antes dos 60 meses, o que não se verificou com os dados apresentados.

Conforme o gráfico de arrecadação abaixo, no primeiro instante percebe-se uma queda brusca na arrecadação, que se deve ao fato de se adaptar a data de pagamento do primeiro mês para a data desejada pelo segurado.

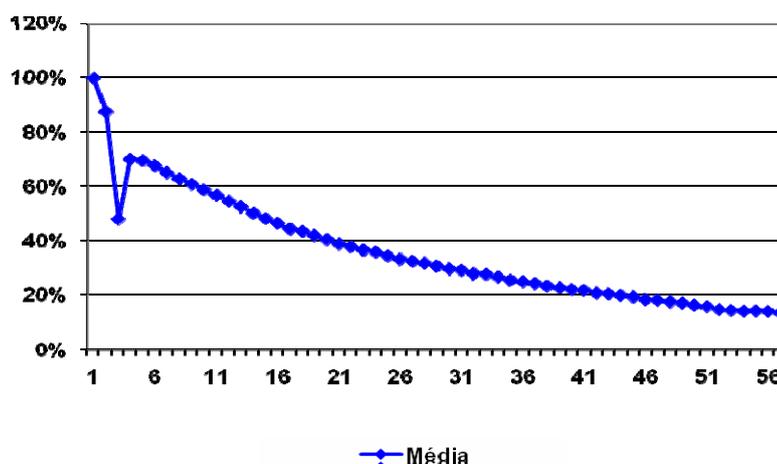


Figura 26: Resultados para plano do tipo CD, por arrecadação

Quanto a evolução da reserva, não foi possível construir o gráfico desta informação, pois somente foi fornecida a posição atual da carteira.

Em posse destas três informações seria possível cercar o problema de estimar a persistência de forma a evitar conclusões errôneas, o que seria possível ao avaliar apenas uma das informações.

6

Considerações finais

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações sobre o estudo realizado e, ao final, são apresentadas propostas de estudos posteriores, principalmente para os planos do tipo CD, pois este tipo de produto precisa de uma análise mais detalhada rendendo outra dissertação.

As propostas do estudo eram de se modelar e avaliar o problema da persistência para os planos do tipo BD e CD. Verificou-se que a modelagem por partes foi a melhor opção para se modelar os dados do plano tipo BD, que possui comportamentos peculiares ao longo do tempo em função das características do produto. A proposta do mercado de modelagem através de uma curva única não se verificou como melhor opção.

Outro sentimento que existia com relação aos dados era de que a persistência de participantes do plano tipo BD fosse pior que a de participantes do plano CD, devido a venda com objetivos diferentes realizadas pelos corretores das empresas, os de BD com intenção de resgate e o de CD com intenção de obter renda de aposentadoria. Não foi possível validar este sentimento, pois a curva de persistência não estabilizou como se esperava. Se fotografarmos a persistência com 40 meses, poderíamos chegar à conclusão de que a persistência para o plano CD é melhor que para BD, porém, a curva de BD se estabiliza, enquanto a de CD permanece decrescendo.

Verificou-se a viabilidade de modelagem de planos do tipo CD, porém com mais informações que as selecionadas para este estudo, como, por exemplo, a evolução da reserva acumulada.

Para o plano do tipo BD verificou-se a influência de variáveis como idade, região, valor da contribuição e forma de pagamento, o mesmo foi verificado na análise por Modelos Lineares Generalizados, que ainda acrescentou a informação de sexo para melhorar a qualidade de ajuste do modelo. A influência de dados cadastrais dos participantes do plano CD na persistência não foi verificada. Aparentemente, apenas a região possui algum efeito sobre a persistência. Talvez os dados não tenham sido suficientes para se chegar a alguma conclusão.

Algumas sugestões para estudos posteriores:

- Análise individual das informações para elaboração de tábuas de múltiplos decrementos;
- Também pode-se realizar estudos individuais ou agregados utilizando outras variáveis explicativas para cada tipo de saída, por exemplo a profissão do indivíduo ou até mesmo variáveis macro-econômicas como proposta do artigo exposto no item 2.2 desta dissertação;
- Pode-se realizar o mesmo estudo para produtos de Contribuição Definida (CD), verificar se posso adotar a mesma linha aqui adotada, com a informação da evolução da reserva. Estes planos possuem características peculiares, como por exemplo, a pessoa pode permanecer ativa, mas sem contribuir. Pois o estudo sobre este produto, nesta dissertação, foi pouco conclusivo;
- Estudos mais aprofundados quanto a questão da estimativa da cauda.

Como pode ser visto, existem muitos aspectos do estudo de persistência a serem investigados. O desenvolvimento desta dissertação foi um trabalho pioneiro que visa servir de referência para estudos posteriores.

Referências bibliográficas

(s.d.). Fonte: SOA - Society of Actuaries: www.soa.org

BELTRÃO, K., & SUGAHARA, S. (2002). *Tábuas de mortalidade para os funcionários públicos civis federais do poder executivo*. Rio de Janeiro: Escola Nacional de Ciências Estatísticas.

BOTTALO, E. (1981). *O mercado de seguros no Brasil*. São Paulo: Editora Sindicato dos Corretores de Seguros.

BOWERS, N. L., GERBER, H. U., C., H. J., JONES, D. A., & NESBITT, C. J. (1986). *Actuarial mathematics*. Illinois: The Society of Actuaries.

BROCKMAN, M. J., & WRIGHT, T. S. (v119 de 1992). Statistical motor rating: making effective use of your data. *Journal of the Institute of Actuaries* , pp. 457-543.

BROWN, R. L. (1988). Minimum bias with generalized linear models. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, v75 , p. 187.

BRZEZINSKI, J. (1981). Patterns in persistency. *Transactions of Society of Actuaries*, v33 .

CASTIGLIONE, L. (1997). *Seguros: conceitos e critérios de avaliação de resultados*. São Paulo: Editora Manuais Técnicos de Seguros.

DOBSON, A. J. (1990). *An introduction to generalized linear models*. Chapman & Hall.

E., W. H. (1993). *Pension Mathematics with numerical illustrations*. Pension Research Council.

Electronic Statistics Textbook. (s.d.). Fonte: www.statsoft.com/textbook/stathome.html

FERREIRA, P. P. (2002). *Modelos de precificação e ruína para seguros de curto*. Rio de Janeiro: FUNENSEG.

FRISCHTAK, R. M. (1996). *Princípios de operação de planos de contribuição definida*. Rio de Janeiro: UFRJ.

HABERMAN, S., & PITACCO, E. (1999). *Actuarial models for disability insurance*. Chapman & Hall.

HARTWEL, J. R. (1951). Lapse rates. *Transactions of Society of Actuaries*, v.3, no7 .

HOSSACK, I. B. (1983). *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge: Cambridge University Press.

JONES, B. (1997). A model for analyzing the impact of selective lapsation on mortality. *Actuarial Research Conference*. Alberta.

KIM, C. (2006). Modeling surrender and lapse rates with economic variables. *North America Actuarial Journal* , v.9, no4.

LIMRA International e Society of Actuaries. (1995-1996). Annuity persistency study. *Transactions of Society of Actuaries* .

LIMRA International e Society of Actuaries. (1995-1996). Universal life persistency study. *Transactions of Society of Actuaries* .

LIMRA International e Society of Actuaries. (2005). US individual life persistency update.

McCULLAGH, P. N. (1989). *Generalized linear models*. Chapman & Hall.

NELDER, J., & WEDDERBURN, R. (1972). Generalized linear models. *Journal Research Statistic Science*, v135 , pp. 370-384.

PEREIRA, F. (1999). Practical modern Bayesian statistics in actuarial science. *Genrel Insurance Convention*, (pp. 159-199). Brighton.

RENSAHW A. E., H. S. (1996). Generalized linear models and actuarial science. *The Statistician*, 45, no4 , pp. 407-436.

SAS Institute Inc., S. (1993). *Technical Report P-243, SAS/STAT® Software:The GENMOD Procedure, Release 6.09*. Cary: SAS Institute Inc.

SHAPIRO, A. (1979). A Bayesian approach to persistency in the projection of retirement costs. *Transactions of Society of Actuaries*, v. 31 .

VERRAL, R. J., & ENGLAND, P. D. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, V.8, no 3 , pp. 443-518.

YOUNG, V. R. (1996). Credibility and Persistency. *Astin Bulletin*, v.26, no1 , pp. 53-69.

8

Anexos

Abaixo teremos os anexos com o código SAS utilizado para a modelagem por Modelos Lineares Generalizados e seus resultados, alguns exemplos distribuições pertencentes à família exponencial e os dados dos planos do tipo Benefício Definido e Contribuição Definida na forma triangular.

8.1

Modelos Lineares Generalizados (saídas do SAS)

The GENMOD Procedure

Model Information

Description	Value	Label
Data Set	EU_TESTE_A	
Distribution	POISSON	
Link Function	LOG	
Dependent Variable	SAIDAS_C	SAIDAS_C
Frequency Weight Variable	IMPLANTA	IMPLANTA
Observations Used	96	
Sum Of Frequency Weights	8371	

Class Level Information

Class	Levels	Values
CONTR	3	1.00000 2.00000 3.00000
DIF	4	1.00000 2.00000 3.00000 4.00000
IDADE	2	1.00000 2.00000
PAGTO	2	1.00000 2.00000
SEXO	2	1.00000 2.00000

Criteria For Assessing Goodness Of Fit

Criterion	DF	Value	Value/DF
Deviance	8362	47532.3101	5.6843
Scaled Deviance	8362	8362.0000	1.0000
Pearson Chi-Square	8362	46034.2217	5.5052
Scaled Pearson X2	8362	8098.4526	0.9685
Log Likelihood	.	457169.7785	.

Analysis Of Parameter Estimates

Parameter	DF	Estimate	Std Err	Chi Square	Pr>Chi
INTERCEPT	1	2.7999	0.0164	29295.5952	0.0001
CONTR 1	1	0.2255	0.0118	363.6637	0.0001
CONTR 2	1	0.8862	0.0096	8582.4498	0.0001
CONTR 3	0	0.0000	0.0000	.	.
DIF 1	1	1.2036	0.0147	6718.4156	0.0001
DIF 2	1	1.2347	0.0142	7526.6094	0.0001
DIF 3	1	1.4983	0.0144	10769.0259	0.0001
DIF 4	0	0.0000	0.0000	.	.
IDADE 1	1	-0.0559	0.0058	94.5474	0.0001
IDADE 2	0	0.0000	0.0000	.	.
PAGTO 1	1	-1.0875	0.0116	8748.8001	0.0001

PAGTO	2	0	0.0000	0.0000		
SEXO	1	1	-0.0834	0.0057	214.3223	0.0001
SEXO	2	0	0.0000	0.0000		
SCALE		0	2.3842	0.0000		

NOTE: The scale parameter was estimated by the square root of DEVIANCE/DOF.

LR Statistics For Type 1 Analysis

	Source	Deviance	NDF	DDF	F	Pr>F	Chi Square	Pr>Chi
	INTERCEPT	300226.091	0	8362				
0.0001	CONTR	212421.807	2	8362	7723.3719	0.0001	15446.7438	
0.0001	DIF	118160.381	3	8362	5527.5667	0.0001	16582.7002	
0.0001	IDADE	117292.087	1	8362	152.7523	0.0001	152.7523	
0.0001	PAGTO	48752.2664	1	8362	12057.6926	0.0001	12057.6926	
0.0001	SEXO	47532.3101	1	8362	214.6177	0.0001	214.6177	

LR Statistics For Type 3 Analysis

	Source	NDF	DDF	F	Pr>F	Chi Square	Pr>Chi
	CONTR	2	8362	7526.6432	0.0001	15053.2865	0.0001
	DIF	3	8362	5145.5471	0.0001	15436.6414	0.0001
	IDADE	1	8362	94.5386	0.0001	94.5386	0.0001
	PAGTO	1	8362	12032.8745	0.0001	12032.8745	0.0001
	SEXO	1	8362	214.6177	0.0001	214.6177	0.0001

OBS	PARM	LEVEL1	DF	ESTIMATE	STDERR	CHI SQ	PVAL	REL
1	INTERCEPT		1	2.7999	0.0164	29295.5952	0.0001	16.444
2	CONTR	1	1	0.2255	0.0118	363.6637	0.0001	1.253
3	CONTR	2	1	0.8862	0.0096	8582.4498	0.0001	2.426
4	CONTR	3	0	0.0000	0.0000	.	.	1.000
5	DIF	1	1	1.2036	0.0147	6718.4156	0.0001	3.332
6	DIF	2	1	1.2347	0.0142	7526.6094	0.0001	3.438
7	DIF	3	1	1.4983	0.0144	10769.0259	0.0001	4.474
8	DIF	4	0	0.0000	0.0000	.	.	1.000
9	IDADE	1	1	-0.0559	0.0058	94.5474	0.0001	0.946
10	IDADE	2	0	0.0000	0.0000	.	.	1.000
11	PAGTO	1	1	-1.0875	0.0116	8748.8001	0.0001	0.337
12	PAGTO	2	0	0.0000	0.0000	.	.	1.000
13	SEXO	1	1	-0.0834	0.0057	214.3223	0.0001	0.920
14	SEXO	2	0	0.0000	0.0000	.	.	1.000
15	SCALE		0	2.3842	0.0000	.	.	10.850

Programa SAS:

```
PROC IMPORT OUT= eu.teste  
    DATAFILE= "C:\roberta\tese\formata\glm1.dbf"  
    DBMS=dbf REPLACE;
```

```
run;
```

```
PROC CONTENTS DATA=EU.teste;
```

```
RUN;
```

```
proc univariate data=eu.teste plot;
```

```
var saidas_c;
```

```
run;
```

```
proc genmod data=eu.teste;
```

```
class contr dif idade pagto regioa sexo;
```

```
make 'obstats' out=eu.obs;
```

```
make 'parmest' out=eu.var;
```

```
freq implanta;
```

```
model saidas_c=contr dif idade pagto regioa sexo
```

```
/ dist=poisson
```

```
link=log
```

```
obstats
```

```
dscale
```

```
type1
```

```
type3;
```

```
run;
```

```
data eu.est;
```

```
set eu.var;
```

```
rel=round(exp(estimate),0.001);
```

```
run;
```

```
proc print data=eu.est;
```

```
run;
```

```
data graf1;  
set eu.teste;  
set eu.obs(keep=pred reschi resdev);  
goptions ftext=swiss;  
axis1 label=(angle=0 rotate=0 'Num sinistros total estimado')  
minor=none;  
axis2 label=(angle=0 rotate=0 'Std Residual Deviance')  
minor=none;
```

```
proc gplot data = graf1;  
plot resdev*pred/overlay  
    frame  
    haxis=axis1  
    vaxis=axis2;  
run;
```

```
data graf2;  
set graf1;  
goptions reset=all;  
axis1 label=(angle=0 rotate=0 'Residuos: freq abs total');  
run;
```

```
proc gchart data=graf2;  
vbar resdev / midpoints=-3.5 to 3.5 by .5  
    space=0  
    frame  
    raxis=axis1;  
run;  
quit;
```

8.2

Distribuições pertencentes à Família Exponencial

Família exponencial com um parâmetro

Uma família de densidades $f(x, \theta)$, com um parâmetro θ , que pode ser escrita como:

$$f(x, \theta) = a(\theta) b(x) \exp [c(\theta) d(x)] \quad x \in R \text{ e } \theta \in \Theta$$

é definida como pertencente à Família Exponencial.

Exemplo:

Distribuição de Poisson

$$f(x, \lambda) = (e^{-\lambda} \lambda^x) / x! I_{\{0,1,\dots\}}(x), \text{ onde}$$

$$I_{\{0,1,\dots\}}(x) = 1 \text{ para } x = 0, 1, \dots \text{ e}$$

$$I_{\{0,1,\dots\}}(x) = 0 \text{ caso contrário}$$

$$f(x, \lambda) \text{ pode ser escrita como } f(x, \lambda) = e^{-\lambda} [(1/x!) I_{\{0,1,\dots\}}(x)] \exp (x \log \lambda)$$

Sejam

$$a(\lambda) = e^{-\lambda}$$

$$b(x) = (1/x!) I_{\{0,1,\dots\}}(x)$$

$$c(\lambda) = \log \lambda$$

$$d(x) = x$$

Tem-se que , $f(x, \lambda)$ pertence a família exponencial.

Família exponencial com k parâmetros

Uma família de densidades $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$, com k parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_k$, que pode ser escrita como:

$$f(x, \theta_1, \dots, \theta_k) = a(\theta_1, \dots, \theta_k) b(x) \exp \left[\sum_{j=1}^k c_j(\theta_1, \dots, \theta_k) d_j(x) \right]$$

é definida como pertencente à Família Exponencial.

Exemplo:

Distribuição Normal

$$\theta_1 = \mu$$

$$\theta_2 = \sigma^2$$

$$f(x, \mu, \sigma^2) = (1/\sqrt{2\pi} \sigma) \exp [(-1/2)(x-\mu)^2/\sigma^2]$$

Sejam

$$a(\mu, \sigma) = (1/\sqrt{2\pi} \sigma) \exp [(-1/2)\mu^2/\sigma^2]$$

$$b(x) = 1$$

$$c1(\mu, \sigma) = -1/2\sigma^2$$

$$c2(\mu, \sigma) = \mu/\sigma^2$$

$$d1(x) = x^2$$

$$d2(x) = x$$

Então, $f(x, \mu, \sigma^2)$ pertence à Família Exponencial.

Exemplo:

Distribuição Gamma

$$\theta_1 = \lambda > 0$$

$$\theta_2 = r > 0$$

$$f(x, \lambda, r) = (\lambda^r / \Gamma(r)) x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x) = (\lambda^r / \Gamma(r)) I_{(0,\infty)}(x) \exp [(r-1) \log x - \lambda x]$$

Sejam

$$a(\lambda, r) = \lambda^r / \Gamma(r)$$

$$b(x) = I_{(0,\infty)}(x)$$

$$c1(\lambda, r) = r-1$$

$$c2(\lambda, r) = -\lambda$$

$$d1(x) = \log x$$

$$d2(x) = x$$

Então, $f(x, \lambda, r)$ pertence à Família Exponencial.

8.3

Dados para o plano do tipo BD

Parte 1: até 30 meses

Data de implantação	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
199901	100%	100%	100%	100%	98%	95%	95%	95%	95%	95%	95%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	91%	83%	78%	74%	66%	62%	62%	60%		
199902	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	98%	94%	84%	76%	69%	63%	59%	53%		
199903	100%	99%	98%	98%	95%	94%	94%	93%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	90%	85%	81%	66%	64%	59%	55%	53%		
199904	100%	100%	99%	99%	99%	97%	95%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	91%	88%	73%	64%	60%	56%	53%	52%		
199905	100%	99%	98%	98%	97%	97%	97%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	92%	80%	76%	71%	66%	65%	62%	60%		
199906	100%	99%	99%	98%	93%	89%	88%	87%	87%	87%	86%	86%	86%	86%	86%	86%	86%	86%	86%	86%	86%	85%	85%	85%	84%	82%	73%	66%	65%	64%	60%		
199907	99%	96%	96%	95%	92%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	86%	86%	86%	85%	82%	76%	69%	65%	61%	60%	60%		
199908	100%	100%	100%	99%	97%	97%	97%	97%	97%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	95%	89%	80%	72%	58%	54%	54%	53%		
199909	100%	100%	100%	99%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	95%	95%	95%	95%	95%	93%	92%	92%	92%	92%	91%	91%	91%	84%	71%	63%	59%	52%	51%	51%	
199910	100%	100%	100%	100%	100%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	96%	82%	72%	60%	55%	54%	49%	45%		
199911	100%	100%	100%	99%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	95%	94%	94%	94%	93%	93%	93%	92%	89%	79%	68%	64%	59%	57%	55%		
199912	100%	100%	99%	97%	95%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	93%	92%	92%	92%	92%	92%	90%	90%	90%	90%	89%	79%	69%	61%	56%	54%	53%	52%		
200001	100%	100%	98%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	96%	87%	85%	78%	70%	65%	63%	63%	
200002	99%	99%	98%	97%	96%	95%	95%	95%	95%	95%	95%	95%	95%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	92%	92%	88%	86%	76%	60%	58%	53%	52%	
200003	100%	100%	100%	98%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	91%	91%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	88%	88%	88%	84%	75%	64%	57%	54%	50%	48%	
200004	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	98%	98%	98%	96%	96%	96%	96%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	94%	85%	71%	69%	63%	58%	58%	52%
200005	100%	100%	100%	100%	96%	94%	94%	94%	93%	93%	93%	93%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	92%	85%	76%	65%	61%	56%	45%	45%
200006	100%	100%	100%	100%	100%	98%	98%	98%	98%	98%	98%	98%	98%	96%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	93%	91%	91%	91%	91%	91%	84%	78%	76%	67%	62%	62%	58%
200007	100%	100%	100%	100%	97%	96%	96%	93%	91%	91%	90%	89%	89%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	87%	86%	81%	73%	70%	61%	56%	54%	53%	
200008	100%	100%	100%	100%	98%	98%	95%	95%	95%	95%	91%	89%	84%	84%	84%	84%	84%	84%	84%	82%	82%	80%	80%	80%	80%	80%	80%	73%	64%	61%	61%	61%	61%

8.4

Dados para o plano do tipo CD

Parte 1: até 36 meses

Data de Implantação	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
200105	100%	100%	100%	100%	100%	99%	98%	97%	97%	96%	95%	95%	95%	95%	95%	95%	94%	92%	92%	90%	88%	88%	87%	71%	70%	68%	58%	57%	55%	55%	54%	53%	50%	49%	48%	47%	46%
200106	100%	100%	100%	100%	100%	99%	98%	98%	96%	96%	95%	95%	95%	93%	92%	92%	89%	88%	87%	86%	85%	85%	64%	63%	62%	56%	54%	53%	53%	52%	50%	49%	47%	46%	46%	46%	
200107	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	99%	98%	98%	98%	97%	96%	95%	95%	91%	90%	89%	88%	87%	87%	68%	67%	65%	58%	56%	55%	53%	52%	51%	48%	47%	46%	44%	43%	42%	41%
200108	100%	100%	100%	99%	99%	99%	99%	98%	98%	97%	97%	96%	96%	94%	94%	93%	91%	89%	88%	87%	68%	66%	65%	60%	59%	58%	57%	57%	56%	53%	52%	51%	50%	49%	49%	47%	47%
200109	100%	100%	100%	99%	99%	99%	98%	98%	97%	97%	96%	96%	95%	93%	92%	91%	90%	89%	87%	73%	72%	70%	65%	63%	61%	59%	58%	58%	56%	56%	55%	53%	53%	52%	50%	49%	48%
200110	100%	100%	100%	99%	99%	99%	99%	98%	98%	97%	97%	97%	94%	93%	92%	91%	90%	90%	72%	71%	70%	63%	63%	61%	60%	59%	58%	56%	55%	54%	53%	53%	51%	51%	50%	50%	49%
200111	100%	100%	100%	99%	99%	99%	99%	99%	98%	98%	97%	95%	93%	91%	90%	90%	89%	74%	73%	70%	65%	63%	63%	63%	62%	61%	59%	59%	56%	55%	55%	53%	51%	49%	49%	48%	47%
200112	100%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	98%	97%	97%	94%	93%	90%	90%	89%	88%	78%	77%	74%	64%	62%	62%	61%	60%	59%	58%	55%	54%	52%	52%	50%	49%	49%	48%	48%	48%	47%
200201	100%	100%	100%	99%	99%	99%	98%	97%	97%	95%	94%	93%	92%	91%	90%	79%	77%	74%	62%	61%	60%	60%	59%	58%	57%	56%	55%	54%	53%	52%	51%	50%	49%	49%	49%	48%	48%
200202	100%	100%	99%	98%	98%	97%	97%	95%	93%	91%	90%	89%	88%	87%	78%	77%	74%	66%	65%	64%	62%	61%	60%	58%	57%	56%	54%	53%	51%	50%	48%	47%	46%	46%	46%	45%	45%
200203	100%	100%	99%	99%	99%	98%	97%	93%	92%	90%	88%	87%	86%	75%	75%	73%	64%	63%	61%	61%	60%	60%	58%	57%	55%	54%	53%	50%	50%	49%	49%	48%	48%	47%	46%	45%	45%
200204	100%	100%	100%	99%	99%	99%	93%	92%	88%	87%	86%	85%	73%	71%	70%	63%	61%	60%	59%	59%	58%	57%	56%	56%	55%	54%	53%	53%	52%	52%	50%	50%	49%	49%	49%	47%	47%
200205	100%	100%	100%	99%	99%	95%	94%	93%	91%	90%	89%	79%	78%	76%	66%	64%	62%	61%	61%	60%	59%	57%	55%	54%	52%	52%	51%	50%	49%	49%	48%	48%	47%	47%	45%	44%	43%
200206	100%	100%	100%	99%	99%	98%	93%	92%	90%	89%	83%	81%	80%	72%	71%	69%	69%	68%	67%	66%	65%	62%	61%	60%	59%	58%	57%	56%	56%	55%	54%	53%	52%	50%	50%	49%	49%
200207	100%	100%	100%	99%	98%	97%	93%	91%	90%	84%	83%	80%	72%	71%	69%	68%	68%	67%	64%	64%	63%	61%	60%	60%	59%	58%	58%	57%	56%	56%	55%	55%	54%	53%	52%	52%	51%
200208	100%	100%	100%	99%	98%	98%	94%	93%	86%	85%	81%	76%	72%	70%	69%	68%	67%	65%	63%	62%	62%	60%	58%	58%	57%	57%	55%	55%	54%	54%	53%	51%	51%	50%	49%	48%	47%
200209	100%	100%	99%	98%	97%	96%	95%	90%	89%	85%	77%	75%	73%	71%	70%	68%	66%	64%	62%	62%	60%	59%	58%	57%	56%	55%	55%	55%	54%	53%	53%	52%	51%	50%	49%	48%	47%
200210	100%	99%	99%	98%	98%	97%	94%	91%	88%	80%	78%	75%	74%	72%	70%	67%	67%	64%	64%	62%	61%	60%	59%	58%	58%	58%	58%	57%	56%	55%	54%	54%	52%	51%	51%	50%	50%
200211	100%	100%	98%	97%	96%	95%	93%	88%	77%	75%	73%	72%	71%	70%	69%	68%	66%	65%	65%	64%	63%	62%	62%	61%	60%	60%	59%	58%	57%	57%	56%	55%	54%	53%	52%	52%	51%
200212	100%	100%	99%	99%	96%	94%	91%	80%	78%	76%	74%	73%	72%	71%	69%	67%	66%	65%	64%	63%	63%	62%	61%	60%	60%	59%	59%	58%	57%	57%	56%	55%	55%	54%	53%	53%	52%
200301	100%	100%	99%	98%	97%	95%	86%	85%	84%	82%	81%	79%	78%	77%	76%	75%	74%	74%	73%	72%	72%	71%	70%	70%	68%	67%	66%	66%	64%	64%	63%	62%	62%	62%	61%	59%	58%
200302	100%	100%	99%	98%	96%	91%	87%	83%	81%	79%	78%	76%	74%	73%	72%	71%	70%	68%	68%	67%	67%	66%	66%	66%	65%	63%	63%	62%	60%	59%	58%	58%	57%	57%	56%	55%	

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)