

IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS EM OPERAÇÃO
ATRAVÉS DE ANÁLISE MODAL HÍBRIDA

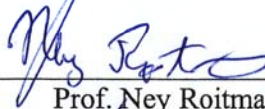
Luiz Augusto Cavalcante Moniz de Aragão Filho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL

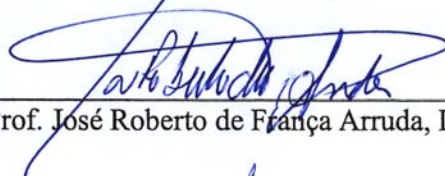
Aprovada por:



Prof. Carlos Magluta, D.Sc.



Prof. Ney Roitman, D.Sc.



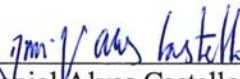
Prof. José Roberto de França Arruda, Dr. Ing.



Prof. José Luis Vital de Brito, D.Sc.



Prof. Alexandre Gonçalves Evsukoff, D.Sc.



Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ARAGÃO FILHO, LUIZ AUGUSTO
CAVALCANTE MONIZ DE

Identificação de Estruturas em Operação
Através de Análise Modal Híbrida [Rio de
Janeiro] 2008

VIII, 297 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Civil, 2008)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Identificação Estrutural

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

Aos meus pais Lilina e Luiz Augusto, pelo apoio irrestrito e incondicional.

À Karyna, meu amor, pela perseverança.

Aos meus filhos Luiza e Rodrigo, ambos nascidos ao longo da jornada deste trabalho, pelas horas de carinho cedidas.

Aos orientadores Carlos Magluta e Ney Roitman, pela dedicada orientação, colaboração e paciência durante a elaboração desta tese.

Ao Exército Brasileiro, pelos três anos de dedicação exclusiva que me concedeu para o doutorado.

Aos meus chefes diretos, Ten Cel Ferreira Filho, Ten Cel Leal Neto, Maj Ferro e Maj Carneiro pela motivação dada no período de dedicação parcial.

Aos amigos e colegas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a elaboração desta tese, entre eles, Gadéa, Faísca, Alúcio, Fabrício, Daniel, George, Emerson e Leopoldo.

Aos funcionários e técnicos do Laboratório de Estruturas do PEC/COPPE, principalmente ao engenheiro Flávio.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS EM OPERAÇÃO ATRAVÉS DE ANÁLISE MODAL HÍBRIDA

Luiz Augusto Cavalcante Moniz de Aragão Filho

Março/2008

Orientadores: Carlos Magluta

Ney Roitman

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por finalidade propor uma nova metodologia de identificação de estruturas em regime normal de operação que proporcione estimativas dos parâmetros modais e seus respectivos intervalos de confiança a partir exclusivamente das suas respostas dinâmicas.

Várias técnicas de análise modal que prescindem do conhecimento das forças excitadoras são revistas e implementadas de forma a proporcionarem estatísticas de dispersão. Filtros recursivos e técnicas de fusão de informação são então aplicados de forma a inferirem estimativas híbridas das frequências naturais e taxas de amortecimento e seus respectivos intervalos de confiança.

A metodologia é progressivamente validada através de simulações numéricas e então aplicada na identificação de uma passarela de pedestres submetida ao caminhar de pessoas. Os resultados obtidos encorajam o emprego da metodologia por sua robustez e confiabilidade.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

IN-OPERATION STRUCTURAL IDENTIFICATION BY HYBRID MODAL
ANALYSIS

Luiz Augusto Cavalcante Moniz de Aragão Filho

March/2008

Advisors: Carlos Magluta

Ney Roitman

Department: Civil Engineering

This work aims to propose a new methodology for the identification of structures under normal operation, which provides estimates of the modal parameters and their confidence intervals without knowing the input exciting the system.

Five techniques of modal analysis for which the knowledge of forces are not necessary are reviewed and implemented in order to provide statistics of their uncertainties. Recursive filters and techniques of fusion of information are then applied in order to acquire good hybrid estimates of natural frequencies and damping rates and their confidence intervals.

The methodology is progressively validated through numerical simulations and then applied in the identification of a footbridge under pedestrian loading. Obtained results encourage the use of the methodology for its robustness and reliability.

ÍNDICE

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
I.1 – Introdução e Motivação	1
I.2 – Escopo e Estrutura do Trabalho	4
CAPÍTULO II – FUNDAMENTOS DA TEORIA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	6
II.1 – Introdução	6
II.2 – Função de Resposta a Impulso	9
II.3 – Transformada de Fourier, de Laplace, e Transformada-z	12
II.3.1 – Transformada de Fourier	12
II.3.2 – Transformada de Laplace	14
II.3.3 – Transformada-z	15
II.4 – Representações de Sistemas Dinâmicos	16
II.4.1 – Equações de Diferenças	18
II.4.2 – Função de Transferência	21
II.4.3 – Função de Resposta em Frequência	24
II.4.4 – Espaço de Estados	31
II.5 – Representações de Modelos Estocásticos	36
II.5.1 – Processos Estocásticos	36
II.5.2 – Funções de Probabilidade de Variáveis Aleatórias	39
II.5.3 – Funções de Probabilidade de Processos Estocásticos	43
II.5.4 – Representações Estocásticas no Domínio do Tempo	51
II.6 – Estimação Espectral na Prática da Análise Modal	55
II.6.1 – Função Densidade de Autoespectro (PSD)	56
II.6.2 – Estimadores da FRF	58
II.6.3 – Forma Pólo-Resíduo da PSD	60
CAPÍTULO III – TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	66
III.1 – Introdução	66
III.2 – Técnicas no Domínio da Frequência	67

III.2.1 – Método do Círculo Ajustado	67
III.2.2 – Método Peak Picking	71
III.2.3 – Frequency Domain Decomposition (FDD)	73
III.2.4 – Rational Fraction Polynomial (RFP)	79
III.3– Técnicas no Domínio do Tempo	82
III.3.1 – Técnicas baseadas no Método de Prony	84
III.3.2 – Técnicas baseadas em Modelos de Séries Temporais ARMA	92
III.3.3 – Técnicas de Identificação no Espaço de Estados	97
III.3.4 – Técnicas de Identificação Direta pelos Sinais no Tempo	107
II.3.5 – Técnicas de Estimação de Funções de Decaimento	115
III.4 – Técnicas no Domínio Tempo-Frequência	119
III.4.1 – A Transformada Wavelet Contínua	125
III.4.2 – Representações no Plano Tempo-Frequência	129
III.4.3 – Estimação da Frequência Natural e Amortecimento	131
III.4.4 – Estimação a partir de Sinais Aleatórios	137
CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO	140
IV.1 – Introdução	140
IV.2 – Funções RD	142
IV.3 – Técnica AR-Prony	145
IV.4 – Diagrama de Estabilização	147
IV.5 – Técnica SSM	149
IV.6 – Técnica SSI	154
IV.7 – Técnica FDD	156
IV.8 – Técnica CWT	161
CAPÍTULO V - INFERÊNCIA ESTATÍSTICA E ESTIMADORES	166
V.1 – Introdução	166
V.2 – Cenários de Testes Experimentais	168
V.3 – Técnica Bootstrap de Inferência Estatística	171
V.4 – Estimadores	179
V.4.1 – Mínimos Quadrados	181
V.4.2 – Filtro de Kalman	185
V.5 – Estimação por Fusão de Dados	190

CAPÍTULO VI - ELABORAÇÃO DE ALGORITMO HÍBRIDO E RECURSIVO	194
VI.1 – Introdução	194
VI.2 – Simulações Numéricas	194
VI.2.1 – Análise 1A	196
VI.2.2 – Análise 1B	199
VI.2.3 – Análise 2A	200
VI.2.4 – Análise 2B	209
VI.2.5 – Análise 3A	212
VI.2.6 – Análise 3B	215
VI.3 – Algoritmo Híbrido Recursivo Implementado	215
VI.3.1 – Análise 4	217
VI.3.2 – Análise 5	222
CAPÍTULO VII – APLICAÇÕES	229
VII.1 – Introdução	229
VII.2 – Descrição da estrutura e do sistema de aquisição de sinais	229
VII.3 – Ensaio controlado	233
VII.4 – Avaliação da metodologia desenvolvida	238
VII.5 – Ensaio com duas pessoas caminhando	247
CAPÍTULO VIII – CONSIDERAÇÕES FINAIS	258
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	263
APÊNDICE A - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA	275

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 – Introdução e Motivação

A identificação de sistemas pode ser entendida como o processo do desenvolvimento ou aprimoramento da representação teórica de um sistema físico através da observação das suas entradas e respostas. É um conceito amplo e abrange vários campos do conhecimento humano, remontando inclusive ao processo clássico de diagnóstico de enfermidades da medicina clínica.

No campo da análise estrutural, a identificação de sistemas consiste no tratamento do problema inverso, oposto ao problema direto (do dimensionamento), o qual estima as saídas do sistema conhecido com base nas entradas a ele impostas.

O estudo do problema inverso se justifica pela permanente necessidade de se obter informações sobre os parâmetros físicos que compõem os sistemas estruturais, sejam para validar o modelo utilizado para o dimensionamento de uma obra civil, um veículo ou uma estação orbital, sejam para verificar sua integridade após longos anos de uso, permitindo o planejamento de sua manutenção, reparo ou substituição.

Em 15 de dezembro de 1967, o colapso da *Silver Bridge* em pleno horário de rush, sobre o Rio Ohio, nos Estados Unidos, levou 46 pessoas à morte, num dos acidentes estruturais mais trágicos da história. Após esse desastre, o *Federal Highway Administration* (FHWA) estabeleceu o programa nacional de inspeção de pontes, que exige que cada ponte com mais de 20 pés de vão seja inspecionada pelo menos uma vez a cada dois anos. Quarenta anos depois, em 1º de agosto de 2007, a ponte I-35W com 581 metros de comprimento total, 139 metros de vão principal e oito faixas de rolamento cai sobre o Rio Mississippi, em Minneapolis, matando 13 pessoas e deixando outras cem feridas. Desta vez, a ponte havia sido inspecionada há apenas três meses antes de seu colapso. Entretanto, as inspeções não são regularmente conduzidas por engenheiros, e baseiam-se essencialmente na inspeção visual (REID, 2008).

“Nesta e em outras falhas será importante se estabelecer se os inspetores falharam, ou se as inspeções são limitadas no que podem detectar. Talvez devam ser

utilizados equipamentos mais sensíveis para se detectar os problemas ocultos” (NYT - EDITORIAL, 2008).

De acordo com o *Bureau of Transportation Statistics* (BTS), uma divisão do *U.S Department of Transportation* (DOT), em boletim datado de doze dias após o acidente de Minnesota, os Estados Unidos possui 600.022 pontes de auto-estrada, sendo que 72.274 delas, ou seja, 12%, apresentam deficiências estruturais (DOT, 2007).

No mesmo dia em que o boletim do BTS fora divulgado, uma ponte sobre o Rio Tue, na China, às vésperas de sua inauguração, entra em colapso matando 34 e deixando 22 feridos. No dia seguinte, a imprensa chinesa já reportava existirem 6.300 pontes naquele país com sérios problemas estruturais (CNN, 2007).

O Brasil, com dimensões continentais próximas às dos dois países supracitados, possui 3.513 pontes e viadutos cadastrados só em sua malha rodoviária federal de maior tráfego, sendo 428 deles em trechos sob concessão privada (DNIT, 2008).

O problema da identificação estrutural não se restringe a obras-de-arte-especiais (pontes, viadutos e passarelas) com problemas estruturais ou em construção, mas essa demanda justifica por si só o desenvolvimento de estudos nessa área.

A análise modal vem sendo aplicada para a identificação de sistemas estruturais desde antes da metade do século passado, fornecendo parâmetros globais do comportamento estrutural em oposição às usuais técnicas locais de inspeção. Deve-se ressaltar também que a computação digital e o desenvolvimento de novos materiais mais resistentes têm tornado as estruturas maiores e mais esbeltas, ampliando sua suscetibilidade às forças de inércia e à devida análise estrutural dinâmica.

O custo e a impossibilidade prática de se proceder um ensaio controlado nos mais diversos tipos de sistemas inspirou a busca da sua identificação a partir do conhecimento exclusivo das respostas, muito ampliada na última década, e com base teórica já bastante desenvolvida. Um aparato capaz de identificar um sistema apenas a partir das suas respostas permite ainda monitoração contínua de sua integridade, com aplicações imediatas na indústria de veículos e aeronaves, em plataformas de operação e produção de petróleo, pontes, viadutos, passarelas, barragens, torres, edifícios, e outros. Inúmeros projetos de pesquisa e desenvolvimento que tratam da monitoração da integridade estrutural na Europa, Estados Unidos e Ásia, são descritos na revisão de VAN DER AUWERAER e PEETERS (2003).

As publicações de análise modal a partir exclusivamente das respostas das estruturas surgem formalmente na década de 70, sendo inicialmente desenvolvidas no domínio do tempo e partindo sempre da suposição de se dispor dos sinais de vibração livre dos sistemas. Hoje são inúmeras as técnicas denominadas “*output-only*” e se estendem à análise de sinais obtidos através da excitação da estrutura por fatores ambientais e por decorrência da sua operação, admitindo-se geralmente que um carregamento aleatório fracamente correlacionado é aplicado em todo o domínio do sistema.

BITTANTI e LOVERA (2000), VANDERMEULEN *et al.* (2000) e KIJEWski e KAREEM (2002), YAN *et al.* (2006) apresentam soluções para a obtenção de incertezas nos parâmetros modais a partir da aplicação do método *bootstrap* de inferência estatística em técnicas *output-only*, preocupando-se essencialmente na verificação da qualidade das estimativas obtidas.

BASSEVILLE *et al.* (2006) alertam que apesar dos avanços nas técnicas de análise modal, é indispensável o conhecimento das incertezas dos parâmetros modais na monitorização de estruturas. Ou seja, como comparar identificações sucessivas para a verificação da integridade estrutural, ou como estabelecer patamares a partir de onde se passa a admitir a existência de danos, ou como entender que um modelo numérico está bem ajustado, ou ainda, como avaliar a influência de perturbações como a variação da temperatura e os ruídos de medição, se não houver inferência sobre as incertezas dos parâmetros? Prosseguem o artigo comentando algumas soluções, essencialmente para métodos por subespaços, e afirmam ainda serem válidas estimativas *bootstrap*, apesar de implicarem em elevado custo computacional.

Por outro lado, LJUNG e GLOVER (1981) no artigo intitulado “*Frequency Domain Versus Time Domain Methods in System Identification*” já defendiam desde então que as técnicas de estimação no domínio do tempo e da frequência não deviam competir entre si, mas sim compor uma estrutura complementar de estimação. Essa associação permitiria aliar a visão global fornecida pela análise espectral à precisão instantânea fornecida por uma análise temporal.

Uma vez obtida uma visão global da estrutura, e inferidas as incertezas dos parâmetros, diferentes estimações obtidas ao longo do tempo podem ser combinadas através de estimadores seqüenciais. O método seqüencial dos mínimos quadrados proposto por Wiener e o sua evolução para o Filtro de Kalman (SORENSEN, 1980) merecem atenção especial, visto que constituem estimadores amplamente utilizados na

Teoria de Controle, com resultados destacados na estimação multi-sensores típica dos problemas de navegação inercial (TITTERTON e WESTON, 1997).

Dentro das premissas colocadas acima, hoje, uma metodologia eficiente de identificação de estruturas deve: prescindir da disponibilidade dos sinais da excitação, inferir as incertezas de suas estimativas, lançar mão de técnicas no domínio do tempo e da frequência - ou dentro do escopo *output-only* - utilizar técnicas baseadas em diferentes estatísticas, e de preferência, organizar a informação sequencialmente (ou recursivamente) para a verificação da estabilidade da estimação ou mesmo para poder se abandonar dados passados, abrandando seu custo computacional.

Identificada a estrutura de forma contínua, podem-se utilizar técnicas diretas de avaliação da integridade estrutural, ou alternativamente empregar rotinas da confiabilidade estrutural, definindo-se as funções e critérios de falha, e obtendo-se a probabilidade de falha.

I.2 – Escopo e Estrutura do Trabalho

Este trabalho tem por finalidade propor uma metodologia que estime as frequências naturais e amortecimentos de estruturas em regime normal de operação a partir da fusão das informações proporcionadas por diferentes técnicas de análise modal, inferindo ainda as incertezas dos parâmetros estimados.

Para finalmente propor uma metodologia para a solução ao paradigma acima descrito, buscou-se preliminarmente a ambientação aos variados aspectos que tratam do tema. Inicialmente, no decorrer do capítulo II deste texto, é proposto um passeio à terminologia e aos fundamentos da teoria de identificação de sistemas. Em seguida, apresenta-se uma revisão cronológica das técnicas de análise modal mais encontradas na literatura geral e específica. No capítulo IV são apresentadas implementações dos algoritmos das técnicas *output-only* selecionadas, e a identificação modal de uma estrutura didática simples a partir de experimentos simulados é realizada.

O capítulo V discorre sobre o procedimento necessário para a obtenção das incertezas dos parâmetros para cada técnica e apresenta a base teórica e o equacionamento necessários para a implementação computacional da recursividade e da fusão da informação. No capítulo seguinte, a metodologia é verificada passo-a-passo através de simulações numéricas com uma viga biapoiada, e os resultados obtidos são discutidos.

Formalizada a metodologia, no capítulo VII ela é aplicada na identificação de uma passarela de pedestres com 11,50 metros de vão, submetida ao caminhar de pessoas. Finalmente no último capítulo, conclui-se sobre as contribuições do trabalho e apresentam-se propostas para estudos futuros.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DA TEORIA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

II.1 – Introdução

Este capítulo tem como principal objetivo consolidar as representações teóricas de sistemas dinâmicos e processos estocásticos mais utilizadas na literatura a fim de estabelecer uma nomenclatura que permita, sem margem a ambigüidades, a posterior apresentação das metodologias de análise modal abordadas neste trabalho.

Um registro descrito quantitativamente, obtido em função de uma única variável independente, constitui um *signal unidimensional*. A magnitude do sinal em um valor específico da variável independente é chamada de *amplitude*. Em um sinal unidimensional, a variável independente geralmente é o *tempo* de análise do fenômeno. O processo de amostragem digital das saídas dos sensores implica na transformação do tempo em uma variável discreta, com passo constante e igual ao período de aquisição. Desta forma, o sinal unidimensional também se torna discreto no tempo, apresentando amostras representativas do fenômeno real contínuo no tempo, definidas em instantes discretos, caracterizando uma *seqüência* ou *série temporal* de números.

Há fenômenos físicos que podem ter seus valores futuros pré-determinados com boa exatidão, a partir de um processo bem definido como, por exemplo, regras ou expressões matemáticas. Esses fenômenos e os seus sinais representativos são chamados de *determinísticos*. Por outro lado, muitos outros fenômenos de interesse apresentam registros gerados de forma única, não se podendo repeti-los nem prever seu comportamento futuro. Tais dados e os fenômenos que eles representam são denominados de *aleatórios* (BENDAT e PIERSOL, 1980).

Na Engenharia, um *sistema* pode ser descrito como um dispositivo físico ou representação matemática que responde a uma ou mais excitações impostas, descritas segundo variáveis de entrada, realizando um evento cujos registros compreendem a geração de novos sinais, denominados respostas ou saídas (vide Fig. II.1).

Alternativamente, esta relação pode ser expressa dizendo-se que há um *filtro* operando entre a seqüência de entrada e a seqüência de saída (OTNES e ENOCHSON, 1978).

O conjunto de variáveis independentes internas do sistema, que caracterizam seu comportamento, é denominado de *estado*. Um *sistema dinâmico*, por sua vez, pode ser entendido como um sistema em que sua saída depende não só da entrada presente, mas também de alguns valores da entrada passada (SCHWARZ e FRIEDLAND, 1972).



Figura II.1 – Desenho esquemático típico de um sistema.

Um sistema é dito *linear* quando nele se aplica o princípio da superposição, isto é, a resposta à soma de vários sinais é idêntica à soma das respostas de cada um dos sinais aplicados individualmente.

Um sistema é *determinístico* quando seu estado assume sempre valores bem definidos. Um sistema é dito *estocástico*, quando seu estado é uma variável aleatória, sendo por isso descrito por funções de probabilidade. Sistemas monitorados por sensores suscetíveis a uma quantidade considerável de ruído nas medições, ou que sofrem outras perturbações durante as medições, podem ser tratados como sistemas estocásticos.

Um sistema pode ser classificado também como *invariante no tempo* ou *estacionário* quando suas relações de entrada e saída não se modificam com o tempo, ou seja, a forma da resposta a uma entrada aplicada em qualquer instante depende somente da forma da entrada, e não do instante da aplicação (SCHWARZ e FRIEDLAND, 1972).

Sistemas discretos no tempo que satisfazem simultaneamente as propriedades de linearidade e invariância no tempo são denominados na literatura de processamento de sinais como sistemas LTI (*Linear Time-Invariant*) constituindo a mais importante classe de sistemas aplicados na Engenharia (MITRA, 1998).

Um sistema mecânico massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, conforme ilustrado na Fig. II.2, por exemplo, é não-linear se forem consideradas todas as complexidades e iterações dos materiais. Entretanto, para eventos controlados numa determinada faixa de deslocamento e velocidade, pode-se atribuir-lhe um

comportamento linear, através, por exemplo, da expressão do equilíbrio dinâmico de d'Alembert entre a ação externa, a força elástica, a força de dissipação de energia e a força de inércia da massa:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = F(t) \quad (\text{II.1})$$

onde $F(t)$ é a ação externa aplicada no corpo;
 $y(t)$ é o deslocamento do corpo;
 m é a massa do corpo;
 c é a constante do amortecimento, admitido como viscoso;
 k é a constante elástica da mola.

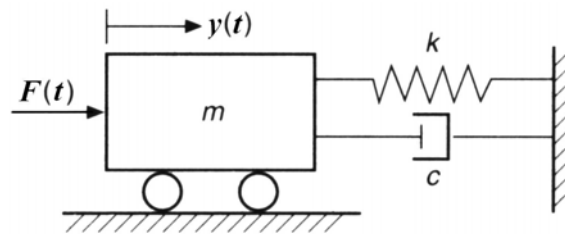


Figura II.2 – Sistema mecânico de um grau de liberdade.

A mesma equação pode ser colocada na seguinte forma:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = p(t) \quad (\text{II.2})$$

onde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência circular natural do sistema; (II.3)

$\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$ é a taxa de amortecimento; (II.4)

$p(t) = \frac{F(t)}{m}$ (II.5)

O sistema mecânico apresentado é, portanto, descrito por uma equação diferencial linear ordinária de 2ª ordem a coeficientes constantes, sendo desta forma um sistema LTI. Pode também ser classificado como SISO (*Single Input Single Output*), pois apresenta apenas uma entrada, a força externa, e uma resposta, que corresponde ao deslocamento observado.

O processo de determinação dos parâmetros modais (frequências naturais, taxas de amortecimento e formas modais) de um sistema mecânico linear e invariante no tempo por meios experimentais é denominado de Análise Modal (ALLEMANG, 1999). Este capítulo visa abordar fundamentalmente as representações matemáticas mais utilizadas de sistemas LTI a fim de permitir a apresentação posterior de diferentes métodos de Análise Modal em relação a uma mesma base teórica.

II.2 – Função de Resposta a Impulso

Uma seqüência finita arbitrária pode ser expressa como uma combinação ponderada de seqüências de impulsos unitários defasados, ou seja, uma adição de impulsos escalonados com atrasos (ou avanços) no tempo (MITRA, 1998). Por exemplo, seja a seqüência $x(n)$ com 9 amostras, definida para $-4 \leq n \leq 4$ apresentada a seguir:

$$x(n) = \{0,5 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 1,5 \quad -1,0 \quad 0,0 \quad 1,0 \quad 0,0 \quad 0,75\} \quad (\text{II.6})$$

A mesma seqüência pode ser representada como:

$$x(n) = 0,5 \cdot \delta(n+4) + 1,5 \cdot \delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-2) + 0,75 \cdot \delta(n-4) \quad (\text{II.7})$$

onde $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ é a função discreta de impulso unitário (pulso).

A resposta de um sistema dinâmico ou filtro digital a uma função impulso $\delta(n)$ é conhecida na teoria de processamento de sinais como função resposta a impulso (*impulse response function* – IRF) sendo geralmente representada por $h(n)$:

$$x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n) \quad (\text{II.8})$$

Seja a entrada aplicada em um sistema linear definida pela seqüência $x(n)$ apresentada na Eq. II.6. A resposta $y(n)$ do sistema pode ser então determinada a partir de uma combinação linear de IRFs defasadas entre si:

$$y(n) = 0,5 \cdot h(n+4) + 1,5 \cdot h(n+1) - h(n) + h(n-2) + 0,75 \cdot h(n-4) \quad (\text{II.9})$$

Generalizando-se, a resposta $y(n)$ de um sistema linear discreto no tempo à entrada $x(n)$ pode ser dada por:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad (\text{II.10})$$

Um sistema linear e invariante no tempo pode ser, portanto, completamente definido por sua IRF. A operação de soma apresentada acima é comutativa, sendo denominada de *soma de convolução*, e também é comumente apresentada na seguinte forma:

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (\text{II.11})$$

Um sinal é definido como *causal* quando as mudanças nas amostras de saída do sistema não precedem mudanças nas amostras de entrada (MITRA, 1998). Em sistemas lineares discretos e invariantes no tempo (LTI), a casualidade está diretamente relacionada à limitação da seqüência da IRF à esquerda:

$$h(k) = 0 \text{ para } k < 0 \quad (\text{II.12})$$

Em seqüências causais e estáveis (com IRF somável absolutamente), a convolução apresenta ainda as propriedades associativa e distributiva. Quando a IRF, por sua vez, é finita, o sistema discreto é denominado FIR (*Finite Impulse Response*), e a soma de convolução pode ser calculada diretamente, pois se reduz a:

$$y(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} x(k) \cdot h(n-k) \quad (\text{II.13})$$

Se o sistema for FIR e causal, $N_1 = 0$ e $N_2 > 0$. Uma visão geométrica da convolução de sinais discretos causais consiste na soma acumulada dos pontos da curva

discreta obtida pelo produto das seqüências ponto a ponto, conforme a IRF desliza através da seqüência das amostras de entrada $x(n)$.

Em dinâmica estrutural, a IRF de um sistema de um grau de liberdade pode ser entendida como a solução da equação diferencial do movimento para um carregamento impulsivo unitário de curta duração (em relação ao período fundamental da estrutura), ou seja, uma força extremamente alta atuando durante um momento infinitesimalmente pequeno, implicando num impulso total unitário (MAYMON, 1998).

A função impulso unitário, ilustrada na Fig. II.3, é geralmente representada por $\delta(t - t_k)$ e pode ser matematicamente descrita por:

$$\delta(t - t_k) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } t < t_k \\ 1/\Delta t & , \text{ para } t_k \leq t \leq t_k + \Delta t \\ 0 & , \text{ para } t > t_k + \Delta t \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

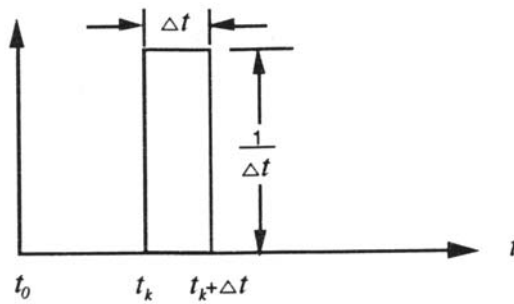


Figura II.3 – Função impulso unitário (JUANG, 1994).

Para o caso de sistemas estruturais com amortecimento viscoso (sub-crítico), a IRF pode ser representada por (MEIROVITCH, 1986, CLOUGH e PENZIEN, 1993):

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t\right) \quad (\text{II.15})$$

A resposta de um sistema estrutural elástico-linear invariante no tempo a um carregamento qualquer pode então ser obtida através do somatório de respostas impulsivas defasadas, devidas a pulsos de carregamento $p(t)$ justapostos no tempo, constituindo uma equação de convolução contínua, conhecida como integral de Duhamel (CLOUGH e PENZIEN, 1993):

$$y(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{II.16})$$

II.3 – Transformada de Fourier, de Laplace, e Transformada-z

II.3.1 – Transformada de Fourier

Uma função escalar $f(t)$ periódica, com um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades, e nenhuma descontinuidade infinita no intervalo (condições de Dirichlet), pode ser colocada na forma de uma série infinita e convergente de funções harmônicas, a Série de Fourier. Quando a função tem seu período assumido como infinito ($T \rightarrow \infty$), os harmônicos da série passam a constituir uma base ortogonal infinita, com frequências definidas em todo o domínio dos Reais ($\Delta\omega \rightarrow 0$), e a série de Fourier no tempo se torna a Integral de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{II.17})$$

Qualquer função arbitrária $f(t)$ pode então ser descrita por uma integral representando contribuições de componentes harmônicos, apresentando um espectro contínuo de frequência, de $-\infty$ a $+\infty$. A quantidade $F(\omega) \cdot d\omega$ pode ser entendida como a contribuição à função $f(t)$ dos harmônicos no intervalo de frequência de ω a $(\omega + d\omega)$.

A expressão $F(\omega)$ descrita na Eq. II.18 consiste na Transformada de Fourier (FT) da função $f(t)$, e a Eq. II.17 é a Inversa da Transformada de Fourier.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (\text{II.18})$$

A Transformada de Fourier de seqüências discretas no tempo, por sua vez, é definida por:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i\omega n} \quad (\text{II.19})$$

A Transformada de Fourier de seqüências discretas no tempo consiste na representação da seqüência $x(n)$ em termos da seqüência exponencial complexa $e^{-i\omega n}$ onde ω é a variável de freqüência real, sendo, portanto, uma função complexa contínua da variável real ω .

A Transformada de Fourier de uma seqüência também é chamada de espectro (de Fourier) da seqüência, ou representação no domínio da freqüência, sendo as quantidades $|X(e^{i\omega})|$ e $\theta = \arg\{X(e^{i\omega})\}$ denominadas de magnitude e fase (argumento) do espectro, respectivamente.

A seqüência no domínio do tempo $x(n)$ pode ser calculada a partir de seu espectro de Fourier pela aplicação da Transformada Inversa:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{i\omega}) \cdot e^{i\omega n} d\omega \quad (\text{II.20})$$

À seqüência finita $X(k)$ obtida pela amostragem uniforme em freqüência do espectro contínuo $X(e^{i\omega})$ no domínio $0 \leq \omega \leq 2\pi$, segundo os pontos $\omega_k = 2\pi k/N$, $0 \leq k \leq N-1$, dá-se o nome de Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$X(k) = X(e^{i\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi k n/N} \quad (\text{II.21})$$

Pode-se perceber, portanto, que se a seqüência $x(n)$ possuir n amostras no domínio do tempo, sua transformada $X(k)$ terá também n amostras no domínio da freqüência, com intervalo entre amostras Δf igual a:

$$\Delta f = f_s/n = 1/(n \cdot \Delta t) = 1/T_t \quad (\text{II.22})$$

onde f_s é a freqüência de amostragem;
 Δt é o intervalo de aquisição;
 T_t é o tempo total de amostragem;
 Δf é a resolução em freqüência.

A Inversa da Transformada Discreta de Fourier (IDFT) é dada por:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi k n/N} \quad (\text{II.23})$$

A obtenção da DFT e IDFT pode ser realizada alternativamente por técnicas numéricas eficientes, diminuindo-se substancialmente o custo computacional envolvido no cálculo. Esses algoritmos são denominados de Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) e constituem geralmente funções pré-definidas na maioria dos programas de processamento de sinais.

II.3.2 – Transformada de Laplace

Outra transformada com ampla utilização em sistemas dinâmicos é a Transformada de Laplace, a qual permite soluções metódicas de equações diferenciais. Para uma função $f(t)$ contínua, definida no domínio do tempo, a transformada é denotada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (\text{II.24})$$

onde s é uma variável complexa. Ela leva, portanto, sinais contínuos no domínio do tempo para o chamado domínio- s , ou da frequência complexa, na perspectiva de sistemas dinâmicos.

Apresenta uma série de propriedades, geralmente representadas simplificadamente na literatura na forma de tabelas (KREIDER *et al.*, 1972), as quais permitem a conversão de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em equações algébricas simples.

A Transformada de Laplace aplicada na equação do movimento do sistema mecânico de um grau de liberdade (Eq. II.1) fornece, para movimento com deslocamento e velocidade iniciais nulos, a seguinte expressão:

$$\mathcal{L}[m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k \cdot y(t)] = \mathcal{L}[F(t)] \quad (\text{II.25})$$

$$\Rightarrow m s^2 Y(s) + c s Y(s) + k Y(s) = F(s) \quad (\text{II.26})$$

A resposta do sistema no domínio- s fica, portanto:

$$Y(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k} F(s) \quad (\text{II.27})$$

II.3.3 – Transformada-z

A Transformada-z, de forma análoga à Transformada de Laplace, conduz sinais discretos no domínio do tempo para o domínio da frequência complexa:

$$G(z) = Z\{g(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) z^{-n} \quad (\text{II.28})$$

onde $z = r e^{i\omega}$, é variável complexa, na forma de Euler.

Uma função contínua $f(t)$ representativa de um fenômeno qualquer pode ser amostrada por uma série de pulsos, fornecendo uma seqüência ou série temporal, cujo n -ésimo elemento $x(n)$, referindo-se ao instante $t = n \cdot \Delta t$, sendo Δt o intervalo de aquisição, é dado pela expressão:

$$x(n) = f(n\Delta t) = f(0) \cdot \delta(n) + f(\Delta t) \cdot \delta(n-1) + \dots + f(m\Delta t) \cdot \delta(n-m) \quad (\text{II.29})$$

onde $(m+1)$ é o número de amostras e $0 \leq n \leq m$. A série $x(n)$ pode ser representada também em função do tempo, pela seguinte função discreta:

$$x(t) = f(0) \cdot \delta(t) + f(\Delta t) \cdot \delta(t-\Delta t) + \dots + f(m\Delta t) \cdot \delta(t-m\Delta t) \quad (\text{II.30})$$

Operando-se a Transformada de Laplace na função $x(t)$ tem-se:

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-ns\Delta t} \quad (\text{II.31})$$

Fazendo-se $z = e^{s\Delta t}$, obtém-se:

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (\text{II.32})$$

que é a Transformada- z da seqüência $x(n)$, ou melhor, da função causal $f(t)$ discretizada:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (\text{II.33})$$

Desta forma, a Transformada de Laplace para sinais discretos no tempo pode se obtida pelo cálculo da sua Transformada- z , fazendo-se $z = e^{s\Delta t}$. O conjunto de valores de z para os quais suas Transformadas- z convergem é chamado de Região de Convergência (ROC).

A Transformada de Fourier, por sua vez, pode então ser entendida como a componente puramente imaginária da Transformada de Laplace, sendo obtida analiticamente a partir do domínio- s pela substituição ($s = i\omega$). Da mesma forma, no domínio discreto, a Transformada de Fourier pode ser obtida pela Transformada- z admitindo-se $z = r e^{i\omega}$ com módulo unitário ($r = 1$). Segue então que a Transformada de Fourier de uma seqüência $x(n)$ converge uniformemente se e somente se a ROC da Transformada- z da seqüência inclui o círculo unitário no plano de Argand.

II.4 – Representações de Sistemas Dinâmicos

Conforme já foi apresentado, no exemplo do sistema mecânico de um grau de liberdade, a entrada e a saída do sistema ficam relacionadas através da equação diferencial linear a coeficientes constantes:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = F(t) \quad (\text{II.34})$$

Colocando a equação do equilíbrio acima segundo uma representação de operadores diferenciais lineares aplicados à entrada $x(t)$ e à saída $y(t)$ do sistema, tem-se:

$$D^{(1)}[y(t)] = D^{(2)}[x(t)] \quad (\text{II.35})$$

$$\Rightarrow D^{(1)} = \left[m \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + k \right]; \Rightarrow D^{(2)} = I \quad (\text{II.36})$$

Pela teoria clássica de equações diferenciais lineares, a solução da equação homogênea não-trivial, correspondente a uma vibração livre amortecida do sistema, pode ser admitida como sendo da forma:

$$y(t) = Y e^{st} \quad (\text{II.37})$$

onde s é uma constante complexa a ser determinada. Substituindo-a na equação diferencial homogênea, obtém-se a equação característica:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$\Rightarrow s = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (\text{II.39})$$

As raízes da equação característica podem ser colocadas também na forma:

$$\Rightarrow \lambda, \lambda^* = -\xi \cdot \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sigma \pm i \omega_d \quad (\text{II.40})$$

onde σ é o *fator de amortecimento*, parte real da raiz da equação característica;
 ω_d é a *freqüência natural amortecida*.

A solução geral do movimento livre amortecido fica então:

$$\Rightarrow y(t) = Y_1 \cdot e^{\left(-\xi \cdot \omega_n + i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} + Y_2 \cdot e^{\left(-\xi \cdot \omega_n - i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} \quad (\text{II.41})$$

$$\Rightarrow y(t) = \left[Y_1 \cdot e^{\left(i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} + Y_2 \cdot e^{\left(-i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t} \right] \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \quad (\text{II.42})$$

A seguir serão apresentadas outras formas de se representar um sistema dinâmico que visam permitir um tratamento numérico mais eficiente para a estimação de seus parâmetros.

II.4.1 – Equações de Diferenças

Na maioria dos casos práticos de interesse na Engenharia, um sistema LTI pode ser caracterizado por uma equação linear de diferenças com coeficientes reais e constantes (MITRA, 1998). Na equação de diferenças representada na Eq. II.43, $x(n)$ e $y(n)$ são respectivamente a entrada e a resposta do sistema, e $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ são constantes.

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (\text{II.43})$$

Se o sistema for causal, a Eq. II.43 pode ser reescrita para expressar $y(n)$ explicitamente como uma função de $x(n)$:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x(n-k) \quad (\text{II.44})$$

A Eq. II.44 pode ser utilizada para calcular a função de resposta a impulso, aplicando-se a seqüência pulso unitário $\delta(n)$ como entrada do sistema.

O diagrama de blocos de uma implementação de um filtro pode ser produzido diretamente da Eq. II.43, conforme apresentado na Fig. II.4 . Os atrasos unitários nas seqüências são representados pelo correspondente operador z^{-1} , onde z^{-1} corresponde ao atraso unitário $\delta(n-1)$ no domínio- z , e os coeficientes constantes a_k e b_k são mostrados como fatores de ganho (JACKSON, 1996).

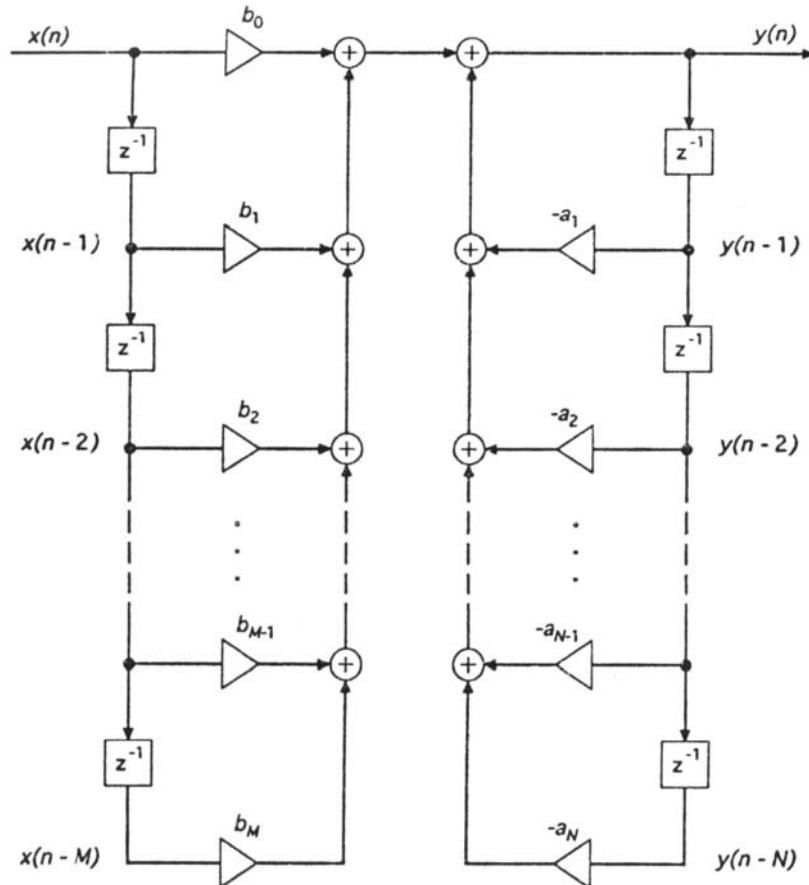


Figura II.4 – Diagrama de blocos de uma equação de diferenças (JACKSON, 1996).

Seja um sistema onde a resposta presente $y(n)$ depende apenas das entradas $x(k)$, ou seja, sua equação de diferenças é caracterizada por apresentar seus coeficientes a_k nulos ($k > 0$), e coeficientes b_k não nulos (vide Eq. II.45).

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b_k x(n-k) \quad (\text{II.45})$$

Se os coeficientes b_k forem constantes, iguais a $1/(q+1)$, por exemplo, então a resposta é a média das $(q+1)$ entradas - a presente e as q passadas - e esse valor

médio muda conforme o valor de n avança. Em função desta característica, este filtro é denominado de *média-móvel* (*moving average*), e representado pelo acrograma $MA(q)$, onde q é o número de entradas passadas, ou ordem do sistema.

A equação de diferenças deste filtro pode ser colocada na forma de soma de convolução de sinais discretos, admitindo-se $b(n)$ como a seqüência formada pelos coeficientes b_k , ($0 \leq k \leq M$), conforme indica a Eq. II.46.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) = b(n) * x(n) \quad (\text{II.46})$$

A resposta a impulso do filtro MA é, portanto, finita, e caracterizada com sendo idêntica à seqüência $b(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} b_k, & 0 \leq k \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

Agora, por outro lado, seja o filtro denotado pela equação de diferenças apresentada na Eq. II.43, tendo sua resposta presente $y(n)$ colocada como função (linear) da entrada presente e das respostas passadas. Devido a essa relação regressiva da saída presente com saídas passadas, este filtro é denominado *autoregressivo*, sendo comumente representado pelo acrograma $AR(p)$, onde p é a sua ordem.

$$y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^p a_k y(n-k) \quad (\text{II.48})$$

O filtro $AR(1)$, por exemplo, com apenas um pólo, tem função de resposta a impulso de comprimento infinito, dada pela Eq. II.49:

$$h(n) = b_0 a_1^n u(n) \quad (\text{II.49})$$

Para muitas séries encontradas na prática, se o modelo a ser identificado estiver relacionado a um número não muito grande de parâmetros, a inclusão de termos autoregressivos e de médias móveis é a solução adequada (MORETTIN e TOLOI,

2004). Tal sistema tem sua equação de diferenças idêntica à forma geral, apresentada na Eq. II.43, e são denominados de $ARMA(p,q)$, onde p e q são respectivamente a ordem do operador auto-regressivo e a ordem do operador média móvel.

II.4.2 – Função de Transferência

Conforme foi visto no item II.2 deste capítulo, a Transformada de Laplace da equação diferencial de equilíbrio de um sistema mecânico de um grau de liberdade assume a forma (Eq. II.50):

$$Y(s) = \frac{I}{m s^2 + c s + k} F(s) \quad (\text{II.50})$$

A razão entre a saída e a entrada de um sistema linear, ambas no domínio de Laplace, é definida como *função de transferência* do sistema e geralmente denotada por $H(s)$. No caso do sistema massa-mola-amortecedor, a função de transferência pode ser colocada como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{I}{m s^2 + c s + k} \quad (\text{II.51})$$

Logo, a função de transferência pode ser considerada como um operador algébrico que atua na transformada da excitação para originar a transformada da resposta (MEIROVITCH, 1986):

$$Y(s) = H(s)F(s) \quad (\text{II.52})$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \quad (\text{II.53})$$

O cálculo da transformada inversa de Laplace em geral envolve uma integral de linha no campo dos complexos (KREIDER *et al.*, 1972). Entretanto, para o sistema de 1GL em análise, pode ser facilmente calculada a partir da decomposição de $Y(s)$ em

frações parciais e a decorrente representação em funções cujas transformadas inversas são bem conhecidas.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{I}{m s^2 + c s + k} = \frac{I}{m (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (\text{II.54})$$

$$= \frac{I}{2i\omega_n \sqrt{1-\xi^2} m} \left(\frac{I}{s + \xi\omega_n - i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} - \frac{I}{s + \xi\omega_n + i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \right) \quad (\text{II.55})$$

Para o caso da entrada do sistema, ou seja, da força de excitação $F(t)$ corresponder a um impulso unitário, tem-se:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (\text{II.56})$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{I}{m\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t) \quad (\text{II.57})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t) \quad (\text{II.58})$$

Logo, a função de resposta a impulso $h(t)$ é igual à inversa da transformada de Laplace da função de transferência $H(s)$. Juntas constituem, portanto, um par transformado de Laplace, contendo cada uma delas todas as informações sobre as características dinâmicas do sistema. A Fig. II.5 resume as relações de transferência no domínio do tempo e da frequência.

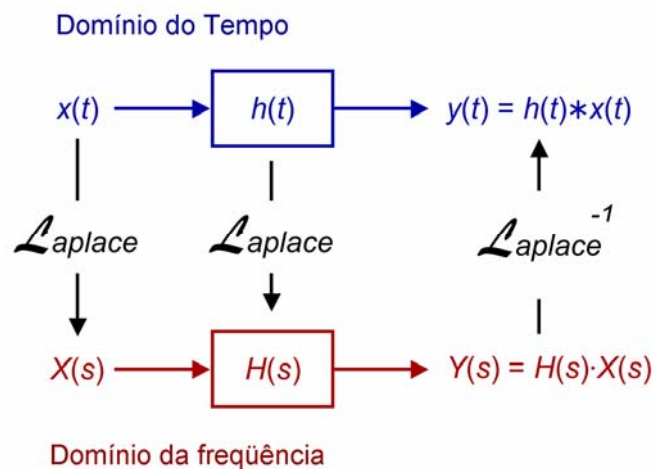


Figura II.5 – Relações de transferência no domínio do tempo e no domínio da frequência.

De forma análoga, a transformada- z de uma IRF (finita), representada por $H(z)$, pode ser colocada também como a razão entre as transformadas- z da seqüência de saída e da seqüência de entrada, sendo denominada como *função de transferência do filtro* (Eq. II.59):

$$\begin{cases} H(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h(n)z^{-n} \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

A função de transferência corresponde à generalização do conceito de resposta em frequência também em sistemas discretos, e permite uma caracterização mais hábil de um filtro. Por exemplo, a função de transferência de um sistema LTI representado por uma equação de diferenças pode ser obtida rapidamente por uma razão de polinômios em z^{-1} :

$$\left\{ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right\} Y(z) = \left\{ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right\} X(z) \quad (\text{II.60})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (\text{II.61})$$

Uma maneira alternativa de se expressar $H(z)$ consiste na forma fatorada dos polinômios:

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \gamma_k)}{\prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)} \quad (\text{II.62})$$

onde as raízes do polinômio do numerador $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M$ que conduzem a $H(\gamma_k) = 0$ são denominadas *zeros* da função de transferência, e as raízes do polinômio do denominador $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ que levam $H(\lambda_k)$ tender ao infinito, são, por sua vez, denominadas *pólos* da função de transferência.

II.4.3 – Função de Resposta em Freqüência

Se a entrada $x(n)$ de um sistema puder ser colocada na forma de uma exponencial complexa discreta:

$$x(n) = e^{i\omega n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (\text{II.63})$$

a saída pode ser obtida, por definição, pela aplicação da convolução da entrada com a IRF do filtro, conforme já foi apresentado:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{i\omega(n-k)} \quad (\text{II.64})$$

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} \right)}_{H(e^{i\omega})} e^{i\omega n} \quad (\text{II.65})$$

O termo $H(e^{i\omega})$ corresponde à transformada de Fourier da IRF discreta do filtro, e é chamada de resposta em freqüência do sistema LTI discreto no tempo, fornecendo uma descrição no domínio da freqüência do sistema (MITRA, 1998). A Eq. II.65 mostra que para uma entrada exponencial complexa de freqüência angular ω (Eq. II.63), a resposta do filtro também consiste em uma exponencial complexa com a mesma freqüência, mas ponderada pela amplitude complexa $H(e^{i\omega})$.

Aplicando a transformada discreta de Fourier na Eq. II.65, admitindo-se a entrada $x(n)$ definida na Eq. II.63, e operando-se convenientemente as funções somatório, obtém-se a expressão:

$$Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})X(e^{i\omega}) \quad (\text{II.66})$$

$$\Rightarrow H(e^{i\omega}) = \frac{Y(e^{i\omega})}{X(e^{i\omega})} \quad (\text{II.67})$$

Desta forma, percebe-se mais uma vez que a resposta em frequência do sistema $H(e^{i\omega})$, ou simplesmente $H(\omega)$, pode ser dada pela razão entre as transformadas (de Fourier) da seqüência de saída e da seqüência de entrada. Ao valor absoluto da resposta em frequência de um sistema e ao seu argumento dão-se as denominações de *ganho* e *fase* do filtro, respectivamente:

$$fase \equiv \theta(\omega) = \arg[H(\omega)] = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[H(\omega)]}{\text{Re}[H(\omega)]} \right\} \quad (\text{II.68})$$

A Função de Resposta em Frequência (FRF) pode ser definida simplesmente como a transformada de Fourier da função resposta a impulso. A FRF é um caso especial da Função de Transferência sem perda de informação útil, ou seja, as características dinâmicas de um sistema LTI estável podem ser suficientemente descritas pela FRF (JUANG, 1994).

A transformada de Fourier da equação diferencial do mesmo sistema mecânico de 1GL pode ser obtida, por sua definição, como:

$$-\omega^2 Y(\omega) + 2\zeta\omega_n i\omega Y(\omega) + \omega_n^2 Y(\omega) = p(\omega) \quad (\text{II.69})$$

De forma análoga à função de transferência, a FRF do conjunto massa-mola-amortecedor pode ser obtida pela relação entre a resposta e a entrada do sistema, agora no domínio da frequência:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + c i\omega + k} = \frac{1/m}{-\omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (\text{II.70})$$

Conforme já havia sido mencionado para o caso geral das transformadas de Fourier e Laplace, pode-se perceber que a função de resposta em frequência se torna igual à função de transferência quando somente a parte imaginária da variável s de Laplace é considerada:

$$H(s = i\omega) = \frac{Y(s = i\omega)}{F(s = i\omega)} = \frac{I}{-m \omega^2 + c i\omega + k} \quad (\text{II.71})$$

Analogamente para o caso discreto, uma vez determinada a função de transferência discreta do filtro, sua resposta em frequência pode ser obtida a partir do cálculo de $H(z)$ no círculo unitário no plano de Argand, ou seja, $|z| = |e^{i\omega}| = 1$.

A FRF apresentada na Eq. II.71 corresponde à representação da saída do sistema a partir do espectro do seu deslocamento, sendo denominada de receptância (ALLEMANG, 1999, HE e FU, 2001), e comumente representada por $\alpha(\omega)$. Essa expressão, conhecida como Modelo Polinomial da FRF, pode ser fatorada e colocada segundo o Modelo de Frações Parciais:

$$\alpha(\omega) = \frac{A}{i\omega - \lambda} + \frac{A^*}{i\omega - \lambda^*} \quad (\text{II.72})$$

onde $\lambda \equiv$ pólo do sistema $= -\xi\omega_n + \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n i$;
 $A \equiv$ resíduo da receptância junto ao pólo λ .

Os resíduos podem ser entendidos de uma forma mais ampla como sendo os coeficientes (numeradores) dos termos da função de transferência do sistema quando expressa em frações parciais. Essa denominação vem da terminologia da solução analítica de equações diferenciais ordinárias, estando diretamente relacionados à amplitude da função resposta a impulso (IRF). Para o sistema de 1GL com deslocamento inicial nulo, a IRF pode ser colocada como:

$$h(t) = A e^{\lambda t} + A^* e^{\lambda^* t} \quad (\text{II.73})$$

Em geral, o resíduo A é uma variável complexa. Entretanto, para sistemas de 1GL pela aplicação da transformada de Laplace para a solução da equação diferencial do movimento pode-se demonstrar que o mesmo admite um valor imaginário puro:

$$A = \frac{I}{2i\omega_n \sqrt{1-\xi^2} m} = \frac{I}{2i\omega_d m} \quad (\text{II.74})$$

Substituindo-o na Eq. II.73 obtém-se mais uma vez a expressão da IRF de um sistema de 1GL amortecido (viscoso sub-crítico):

$$h(t) = \frac{I}{2i\omega_d m} \left(e^{-\xi\omega_n t + i\omega_d t} - e^{-\xi\omega_n t - i\omega_d t} \right) = \frac{I}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (\text{II.75})$$

A aplicação real da análise modal começa a partir da descrição de estruturas contínuas e não-homogêneas como sistemas com múltiplos graus de liberdade. A solução da FRF de um sistema com vários GL pode ser desenvolvida de forma análoga ao caso do sistema de 1GL, conforme será apresentado adiante.

A discretização de uma estrutura em nós e elementos implica na geração de um sistema de equações diferenciais cujos coeficientes são agrupados nas matrizes de massa $[M]$, rigidez $[K]$ e amortecimento $[C]$ do sistema:

$$[M]\ddot{\mathbf{y}}(t) + [C]\dot{\mathbf{y}}(t) + [K]\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{II.76})$$

Para a solução do sistema de equações diferenciais do sistema com múltiplos GL busca-se o desacoplamento dessas equações através da solução do problema de autovalor generalizado da equação dinâmica do movimento livre não-amortecido (CRAIG, 1981). Assim obtém-se a matriz modal da estrutura $[\Psi]$, correspondente aos autovetores da equação do movimento, sendo constituída pelas formas modais com seus coeficientes dispostos em colunas, e as frequências naturais ω_n de cada um dos modos, relativas aos respectivos autovalores.

Admitindo a matriz de amortecimento como proporcional à matriz de massa e de rigidez, permite-se o desacoplamento também dos termos da primeira derivada da resposta $\mathbf{y}(t)$. Ortonormalizando-se a matriz modal $[\Psi]$ em relação à matriz de massa,

obtem-se a matriz modal ortonormalizada $[\Phi]$, a qual pré-multiplicada aos termos da Eq. (II.76) previamente transformados pela relação $y(t)=[\Phi]u(t)$ fornece:

$$[\Phi]^t [M][\Phi]\ddot{u}(t)+[\Phi]^t [C][\Phi]\dot{u}(t)+[\Phi]^t [K][\Phi]u(t)=[\Phi]^t F(t) \quad (\text{II.77})$$

$$\Rightarrow [I]\ddot{u}(t)+[2\xi_i\omega_i m_i]\dot{u}(t)+[\omega_i^2]u(t)=[I/m_i][\Phi]^t F(t) \quad (\text{II.78})$$

As soluções do sistema de equações diferenciais desacoplado, relativas a cada uma das formas modais calculadas podem ser admitidas também como exponenciais complexas do tipo $u(t)=\varphi_r e^{\lambda_r t}$, com pólos $\lambda_r, \lambda_r^* = -\xi_r\omega_r \pm i\sqrt{1-\xi_r^2}\omega_r$, e forma de vibrar φ_r .

Em um sistema linear com múltiplos graus de liberdade, cada par formado por um GL onde é registrada a resposta (índice p) e um GL de monitoração da entrada (índice q) admite a estimação de uma FRF, que pode ser representada como uma superposição linear dos modelos de 1GL apresentados anteriormente (EWINS, 1984):

$$\alpha_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{pqr}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{A_{pqr}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \quad (\text{II.79})$$

onde N é o número de frequências modais positivas.

O resíduo A_{pqr} pode ser colocado como o produto entre as deformadas modais na entrada q e a resposta p , multiplicado pelo fator de escala modal. Desta forma, o produto destes três fatores é único, mas cada um deles não é único, permitindo assim a obtenção da forma modal de cada um dos modos analisados.

$$A_{pqr} = Q_r \psi_{pr} \psi_{qr} = L_{qr} \psi_{pr} \quad (\text{II.80})$$

$$\Rightarrow \{A_{qr}\} = L_{qr} \{\psi_r\} \quad (\text{II.81})$$

onde Q_r é o fator de escala modal;
 ψ_{pr} é coeficiente da forma modal do GL p no modo r ;

$L_{qr} = Q_r \psi_{qr}$ é o fator de participação modal.

O fator de escala modal refere-se do ponto de vista analítico à relação existente entre a forma modal normalizada e a ortonormalização pela matriz de massa do modo de vibração. Pode ser entendido como a quantidade de massa do sistema que está participando em cada modo de vibração.

Para sistemas não amortecidos ou com amortecimento proporcional (EWINS, 1984), o fator de escala modal pode ser definido como:

$$Q_r = \frac{1}{2i\omega_d m_r} \quad (\text{II.82})$$

onde m_r é a massa modal do modo r .

A relação da Eq. II.80 permite que todos os resíduos de diferentes FRFs sejam expressos como função de um GL de referência através do fator de participação modal (ALLEMANG, 1998):

$$A_{pmr} = \frac{L_{mr}}{L_{qr}} A_{pqr} = \frac{Q_r \psi_{mr}}{Q_r \psi_{qr}} Q_r \psi_{pr} \psi_{qr} = Q_r \psi_{pr} \psi_{mr} \quad (\text{II.83})$$

$$\bar{L}_{mqr} = \frac{L_{mr}}{L_{qr}} = \frac{\psi_{mr}}{\psi_{qr}} \quad (\text{II.84})$$

onde p, q, m são GL de referência;

r é o modo de vibração em análise;

\bar{L}_{mqr} é o fator de participação modal do GL m normalizado em relação ao GL q no modo r .

O modelo modal de uma estrutura com vários graus de liberdade pode assim ser representado simplesmente pelas frequências naturais, taxas de amortecimento e formas modais (ou resíduos) de cada um dos modos de vibração avaliados.

Quando a resposta do sistema é obtida em função de sua velocidade de saída, obtém-se a FRF denominada de mobilidade (ALLEMANG, 1999, HE e FU, 2001), representada a seguir como $Y_{pq}(\omega)$. Como a resposta em termos de deslocamento tem

sendo admitida analiticamente como uma exponencial complexa, a velocidade, sendo derivada do deslocamento terá sua expressão igual à posição $y(t)$ multiplicada por $i\omega$, implicando numa defasagem (90° no plano de Argand) existente entre a posição e a velocidade no movimento dinâmico. A expressão da mobilidade pode assim ser obtida a partir da receptância:

$$\dot{y}(t) = i\omega y(t) \quad (\text{II.85})$$

$$\Rightarrow Y_{pq}(\omega) = i\omega \alpha_{pq}(\omega) \quad (\text{II.86})$$

$$\Rightarrow Y_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_{pqr}}{i\omega - \lambda_r} \cdot i\omega + \frac{A_{pqr}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \cdot i\omega \right) \quad (\text{II.87})$$

$$= \sum_{r=1}^N \frac{C_{pqr} \cdot i\omega}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_r + \omega_r^2} \quad (\text{II.88})$$

O numerador C_{pqr} do modelo polinomial é denominado de constante modal (MAIA e SILVA, 2001), assumindo para modos normais (amortecimento viscoso proporcional) com pólos conjugados a seguinte expressão:

$$C_{pqr} = \phi_{pr}\phi_{qr} = \frac{\psi_{pr}\psi_{qr}}{m_r} \quad (\text{II.89})$$

onde ϕ_{pr}, ϕ_{qr} são as formas modais ortonormalizadas em relação à matriz de massa, relativas respectivamente aos GL p e q no modo r ;

De forma análoga, a acelerância (ou inertância) $A_{pq}(\omega)$, FRF obtida pela razão entre o espectro da resposta em termos de aceleração e o espectro da força de entrada, pode ser obtida multiplicando-se a mobilidade por $i\omega$:

$$\Rightarrow A_{pq}(\omega) = i\omega Y_{pq}(\omega) \quad (\text{II.90})$$

Na vizinhança da ressonância (pólos), a magnitude da FRF é influenciada principalmente por um dos termos do somatório dos diversos modos, aquele relativo ao modo cuja ressonância está sendo observada:

$$Y_{pq}(\omega) = \frac{C_{pqr} \cdot i\omega}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_r + \omega_r^2} i\omega + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \frac{C_{pqs} \cdot i\omega}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_s + \omega_s^2} i\omega \quad (\text{II.91})$$

$$= \frac{C_{pqr} \cdot i\omega}{-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_r + \omega_r^2} i\omega + B_{pqr} \quad (\text{II.92})$$

onde B_{pqr} consiste na contribuição dos demais modos sobre o r-ésimo.

Quando os demais modos de vibração podem ser desconsiderados na análise de um único modo de vibração (r), ou seja, quando os modos apresentam-se bem separados entre si e com baixos valores de amortecimento, o valor de B_{pqr} torna-se aproximadamente constante na vizinhança da região de ressonância. Nessas circunstâncias os métodos de 1GL podem ser aplicados na estimação de parâmetros de estruturas com múltiplos GL, obtendo-se resultados bastante satisfatórios. Caso contrário, algoritmos que levam em conta a contribuição simultânea de todos os modos devem ser aplicados.

II.4.4 – Espaço de Estados

A área da Teoria de Controle vem se dedicando desde a década de 60 ao desenvolvimento de modelos matemáticos computacionalmente eficientes para a identificação de sistemas no domínio do tempo. Esses modelos baseiam-se na representação de sistemas dinâmicos segundo as denominadas *equações de estado* (GELB, 1974).

Nessa representação, um modelo matemático descrito por uma equação diferencial de ordem n é substituído por um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Se o modelo matemático tiver vários graus de liberdade, sendo descrito por m equações diferenciais de ordem n , ele será substituído por um sistema de $(m \times n)$ equações diferenciais de primeira ordem (SILVA, 2004, SCHWARZ e FRIEDLAND, 1972).

Desta forma, para um sistema mecânico de 1GL, a partir da equação diferencial de 2ª ordem, obtêm-se duas novas equações diferenciais de 1ª ordem a partir do estabelecimento de duas *variáveis de estado*, s_1 e s_2 :

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (\text{II.93})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = y \\ s_2 = \dot{y} \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{s}_1 = \dot{y} \\ m \dot{s}_2 + c \dot{y} + k y = F \end{cases} \quad (\text{II.95})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 \\ \dot{s}_2 = -\frac{c}{m} s_2 - \frac{k}{m} s_1 + \frac{1}{m} F \end{cases} \quad (\text{II.96})$$

O conhecimento das variáveis de estado no instante $t = t_0$, juntamente com o conhecimento da entrada $x(t)$ para $t \geq t_0$ determina completamente o comportamento do sistema para $t \geq t_0$. O conjunto das variáveis de estado constitui o *vetor de estado*, e o seu valor num determinado instante $t \geq t_0$ é denominado de *estado* do sistema em t .

O vetor de estado tem o efeito de condensar em um conjunto de números a história de um processo em todo tempo anterior a t_0 . Seu conhecimento é equivalente ao de todo passado do processo, possibilitando, junto com o conhecimento da entrada presente e futura, a determinação do seu comportamento. O número de variáveis de estado independentes constitui a *ordem do sistema*.

O número de variáveis de estado deve ser no mínimo igual à ordem da equação diferencial, ou seja, do número de condições de contorno necessárias à solução do problema. No caso do sistema mecânico simples exemplificado, as variáveis de estado correspondem ao deslocamento $s_1 = y(t)$ e à velocidade $s_2 = \dot{y}(t)$. Esse vetor de estado constitui uma base do espaço de estados conhecida como *physical displacement-velocity model* (ALVIN, 1993).

As expressões obtidas na Eq. II.96, colocadas em função das variáveis de estado, são denominadas de *equações de estado*, podendo ser colocadas na forma matricial, conforme apresenta a Eq. II.97:

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/m \end{Bmatrix} F \quad (\text{II.97})$$

A equação que fornece por fim a resposta do sistema é conhecida por *equação de saída*, e pode ser escrita como função das variáveis de estado:

$$\{y\} = [1 \ 0] \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.98})$$

Generalizando-se, a representação em variáveis de estado de um sistema de 1GL linear, contínuo e invariante no tempo pode ser colocada como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{s} + \mathbf{B}_c \mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{s} + \mathbf{D} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{II.99})$$

onde $\mathbf{s} \equiv$ vetor de estado $= \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix};$ $\dot{\mathbf{s}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix};$

$\mathbf{A}_c \equiv$ matriz de estado do sistema contínuo;

$\mathbf{B}_c \equiv$ matriz de entrada do sistema contínuo;

$\mathbf{C} \equiv$ matriz de observação ou saída;

$\mathbf{D} \equiv$ matriz de transmissão direta.

Para o dispositivo massa-mola-amortecedor, as matrizes do sistema contínuo no tempo assumem os seguintes valores:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ I/m \end{Bmatrix} \quad (\text{II.101})$$

$$\mathbf{C} = [I \quad 0] \quad (\text{II.102})$$

$$\mathbf{D} = [0] \quad (\text{II.103})$$

Entretanto, deve-se ressaltar que existe um número infinito de representações em estado de espaços que produzem a mesma descrição entrada/saída. A solução geral da equação de estado tendo como condição inicial $s(t_0)$, com $t \geq t_0$ pode ser colocada como:

$$s(t) = e^{A_c(t-t_0)} s(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_c(t-\tau)} B_c x(\tau) d\tau \quad (\text{II.104})$$

A Eq. II.104 descreve a variável de estado s no tempo em relação à condição inicial $s(t_0)$ e a entrada $x(t)$. A representação de s como uma seqüência discreta amostrada segundo um período de aquisição constante Δt fica igual a:

$$s[(k+1)\Delta t] = e^{A_c \Delta t} s(k\Delta t) + \left[\int_0^{\Delta t} e^{A_c \tau} B_c d\tau \right] x(k\Delta t) \quad (\text{II.105})$$

Exprimindo a equação acima na forma compacta, obtém-se:

$$s(k+1) = A s(k) + B x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.106})$$

onde $A = e^{A_c \Delta t} \quad (\text{II.107})$

$$B = \int_0^{\Delta t} e^{A_c \tau} B_c d\tau; \quad (\text{II.108})$$

$$s(k+1) = s[(k+1)\Delta t] \quad (\text{II.109})$$

$$x(k) = x(k\Delta t) \quad (\text{II.110})$$

A matriz de estado discreta no tempo A pode ser calculada a partir de A_c por expansão em série da função exponencial:

$$A = e^{A_c \Delta t} = I + A_c \Delta t + \frac{1}{2!} (A_c \Delta t)^2 + \frac{1}{3!} (A_c \Delta t)^3 + \dots \quad (\text{II.111})$$

A matriz B do sistema discreto, analogamente, pode ser obtida a partir da substituição da equação acima na expansão em série da Eq. II.111:

$$B = [A - I] A_c^{-1} B_c \quad (\text{II.112})$$

A matriz de saída C e a matriz de transmissão direta D , entretanto, são identicamente iguais nos casos contínuo e discreto. Para um sistema inicialmente relaxado ($s(0) = 0$), a solução da saída $y(k)$ é então dada por:

$$y(k) = D x(k) + CB x(k-1) + CAB x(k-2) + \dots + CA^{k-1} B x(0) \quad (\text{II.113})$$

$$= \sum_{i=0}^k Y(k-i) x(i) \quad (\text{II.114})$$

onde $Y(i)$ é a matriz função resposta a impulso discreta, conhecida também como *parâmetros de Markov*, definidos como:

$$\begin{aligned} Y(0) &= D \\ Y(i) &= CA^{i-1} B \quad i = 1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (\text{II.115})$$

Os parâmetros de Markov caracterizam de forma única a relação entrada/saída do sistema no impulso unitário. Qualquer realização equivalente do sistema deve assim preservar os parâmetros de Markov.

A abordagem por variáveis de estado pode, desta forma, ser entendida como uma generalização da representação da equação de diferenças para filtros causais, incluindo a descrição do estado interno e relações entre a entrada e saída do sistema (JACKSON, 1996).

II.5 – Representações de Modelos Estocásticos

II.5.1 – Processos Estocásticos

Quando não é possível estabelecer um modelo determinístico que permita o cálculo exato do comportamento de um fenômeno, pode-se, por outro lado, buscar-se a obtenção de um modelo que possa ser calculado para a probabilidade de um valor se dispor entre dois limites especificados. A caracterização de um fenômeno por este princípio geral constitui a adoção de um modelo probabilístico, ou *modelo estocástico*.

As técnicas baseadas em modelos estocásticos aparecem na literatura sob diferentes formas, dependendo de como são apresentadas as informações de entrada e saída do sistema, da caracterização do erro, e do número de eventos observados.

Em um modelo estocástico do fenômeno, o registro temporal (*time history*) de um dado experimento representa uma única realização física das inúmeras que poderiam ter ocorrido. Para se compreender os dados, entretanto, deve-se conceitualmente pensar-se em termos de todos os registros que poderiam ter ocorrido (BENDAT e PIERSOL, 1980). Esta família de registros possíveis é chamada de *ensemble* e define um *processo estocástico* (ou aleatório) que descreve o fenômeno (Fig. II.6).

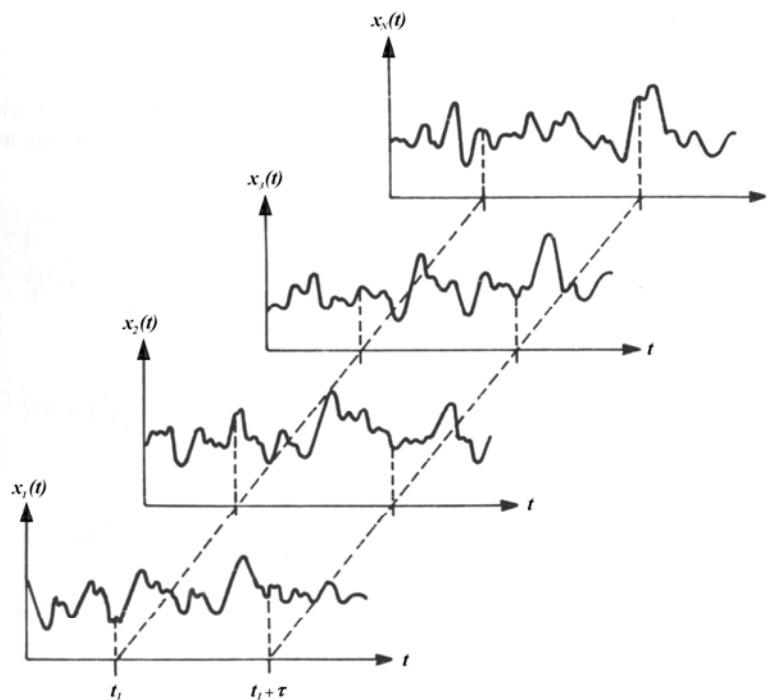


Figura II.6 – *Ensemble* de registros temporais definindo um processo estocástico (BENDAT e PIERSOL, 1980).

Uma série temporal $x_k(t)$ com N observações sucessivas pode ser definida como um evento amostral de uma população de infinitas séries temporais, as quais teriam sido geradas pelo processo estocástico (BOX e JENKINS, 1970). Ou seja, o mecanismo gerador da série é denominado processo estocástico, e a série temporal observada, uma de suas realizações possíveis. Logo, os conceitos de processos estocásticos e série temporal são análogos, respectivamente, aos conceitos de população e amostra na Estatística elementar (PEREIRA *et al.*, 1986). Desta forma, o processo estocástico pode ser entendido como uma família $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ tal que cada série $x_k(t)$, $k = \{1, 2, \dots, N\}$, é uma variável aleatória (vide Fig. II.6).

Um processo é denominado *estacionário* se ele se desenvolve no tempo de modo que a escolha de uma origem dos tempos não é importante (MORETTIN e TOLOI, 2004). Já a hipótese de *ergodicidade* em um processo permite que funções de uma família de variáveis aleatórias sejam substituídas por funções de uma única variável aleatória, ou seja, uma amostra passa a ser representativa de todo o processo (OTNES e ENOCHSON, 1978). Todo processo ergódico é estacionário, mas nem todo processo estacionário é ergódico.

Nem todas as séries temporais são realizações de processos estacionários e ergódicos. O que se faz geralmente é uma tentativa de se transformar a série e utilizar a teoria desses processos para a série transformada. Quando a análise modal é realizada em campo e em estruturas reais de grande magnitude, vários fatores incontrolláveis do ambiente, da medição ou constitutivos da estrutura acabam por afetar a resposta do sistema. Essa influência indesejável e geralmente inevitável pode ser caracterizada como *ruído* presente no sinal de resposta. Sistemas contaminados por ruído podem ser tratados segundo modelos estocásticos.

Neste contexto, o ruído em um sistema LTI pode ser dividido em duas categorias: ruído do processo e ruído da medição (ANDERSEN, 1997, JUANG, 1994). O ruído do processo inclui as incertezas acerca do sistema, a modelagem imprópria da estrutura em seu ambiente como um sistema linear e invariante no tempo (LTI), bem como interferências na excitação. A Fig. II.7 ilustra a contaminação do sinal de entrada $x(t)$ pelo ruído $m(t)$.

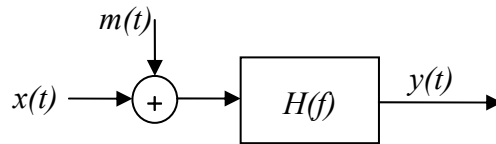


Figura II.7 – Ruído passando pelo sistema (BENDAT e PIERSOL, 1980).

Entre as causas mais óbvias do ruído ocasionado pela medição citam-se os erros gerados pelos sensores e os erros de truncamento na conversão analógico-digital. A Fig. II.8 mostra os sinais reais de entrada $u(t)$ e saída $v(t)$ sendo contaminados pelos termos de ruído $m(t)$ e $n(t)$.

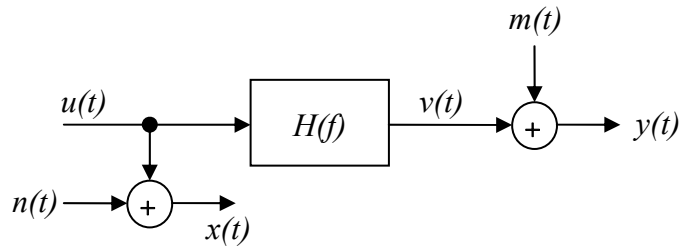


Figura II.8 – Ruído na medição da entrada e saída do sistema (BENDAT e PIERSOL, 1980).

Na Fig. II.9 é apresentado um outro tipo de sistema historicamente marcado pela revisão tutorial de MAKHOUL (1975). Nele, o sinal $y(t)$ é considerado a saída de um sistema onde a entrada é desconhecida. A resposta é admitida como uma função linear das entradas presente e passadas e de respostas passadas. O sinal de saída é desta forma uma “predição linear” de entradas e saídas passadas. O trabalho de Makhoul consistiu assim num marco da aplicação da teoria das séries temporais na engenharia.

O sistema da Fig. II.9 é amplamente tratado na literatura de processamento de sinais, sendo comumente denominado filtro sintetizador de voz. Dado um sinal de voz particular (entrada desconhecida) o objetivo é determinar o tipo geral de voz, mas mantendo a identidade do som, e então proceder a geralmente necessária compressão do sinal.

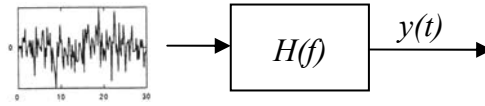


Figura II.9 – Sistema submetido a um sinal desconhecido (BENDAT e PIERSOL, 1980).

Uma analogia pode então ser feita entre o sistema da Fig. II.9 com o processo de identificação de estruturas por análise modal. Os sistemas seriam as pontes, edifícios, plataformas *offshore*, excitados por forças de difícil medição, dispondo-se apenas de suas respostas dinâmicas, geralmente obtidas por acelerômetros. Nesta abordagem, o conhecimento da entrada do sistema é substituído pela hipótese de que a excitação é uma realização de um processo estocástico.

II.5.2 – Funções de Probabilidade de Variáveis Aleatórias

Conforme já foi mencionado, um registro temporal individual de um processo estocástico constitui uma função (evento) amostral e é denominado variável aleatória. Sendo o processo estocástico admitido como ergódico, essa variável aleatória, sozinha, pode caracterizar todo o fenômeno. Por outro lado, uma variável aleatória poderá ser sempre aproximadamente caracterizada através de uma tendência central e pela dispersão de seus dados.

A *função de distribuição (fd)* de uma variável aleatória $x_1(t)$ pode, por exemplo, ser calculada pela soma dos intervalos de ocorrência Δt_i em que $x_1(t) < X_1$, conforme apresenta a Fig. II.10.

$$P(x_1(t); X_1) = Prob[x_1(t) < X_1] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i \Delta t_i \quad (\text{II.116})$$

É muito comum descrever-se uma variável aleatória em termos da curvatura da função de distribuição de probabilidade, ou seja, da sua derivada, denominada de *função densidade de probabilidade*:

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (\text{II.117})$$

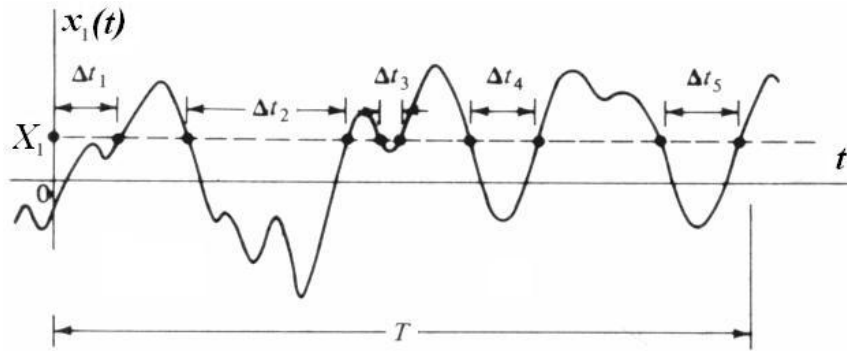


Figura II.10 – Registro temporal da variável aleatória $x_1(t)$, com destaque para os intervalos onde $x_1(t) < X_l$ (MEIROVITCH, 1986).

A função densidade de probabilidade representa, por definição, a taxa da mudança da probabilidade versus a amplitude. Logo, a área sob sua curva (vide Fig. II.11-b) fornece diretamente a probabilidade de se achar uma amplitude numa faixa definida:

$$Prob[x_1 < x < x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x) \cdot dx \quad (II.118)$$

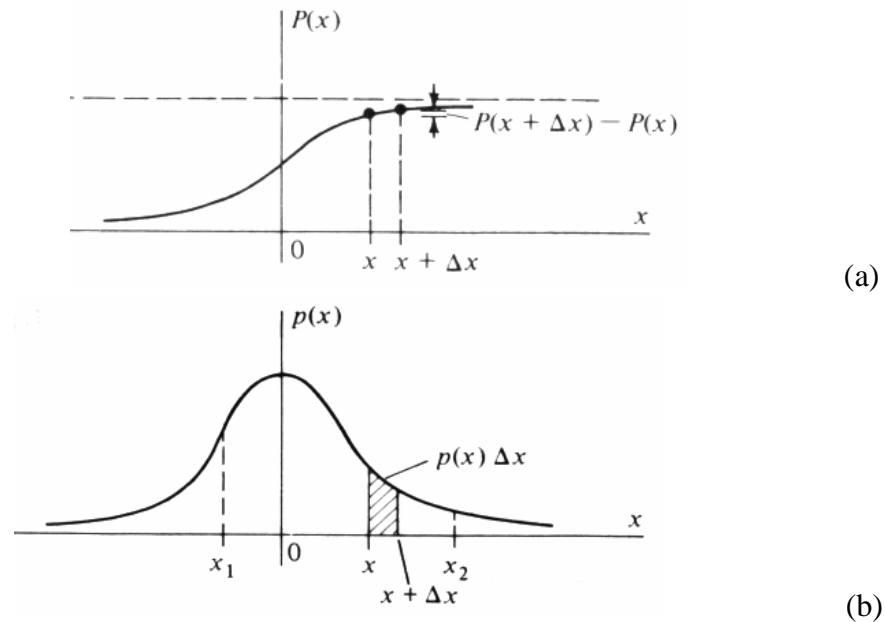


Figura II.11 - Função distribuição de probabilidade (a) e função densidade de probabilidade (b) de uma variável aleatória com média nula (MEIROVITCH, 1986).

O *valor esperado* de uma variável aleatória discreta consiste na média dos n valores possíveis x_i ponderados pelas respectivas probabilidades de ocorrência $P(x_i)$:

$$E = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) \quad (\text{II.119})$$

Se a variável aleatória for descrita por uma função amostral definida num domínio contínuo, e sua distribuição de probabilidade admitir uma função densidade de probabilidade, então o valor esperado, no limite de $dx \rightarrow 0$, pode ser calculado por:

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (\text{II.120})$$

A expressão anterior (Eq. II.120) compreende ainda, por definição, o *valor médio* do evento aleatório, sendo denominada ainda *primeiro momento* de $x(t)$. De uma forma geral, o *momento* de ordem n de uma variável aleatória pode ser definido algebricamente como:

$$E[x^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p(x) dx \quad (\text{II.121})$$

O momento de segunda ordem da variável aleatória $x(t)$, por exemplo, consiste, por definição, no seu valor médio quadrático, e sua raiz quadrada positiva no valor *rms* (*root mean square* - ψ) de $x(t)$:

$$E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \equiv \psi^2 \equiv \text{valor médio quadrático} \quad (\text{II.122})$$

Para a análise em ordens iguais ou superiores a dois, entretanto, é mais comum o cálculo dos momentos em relação ao valor médio do evento, definindo-se assim os denominados *momentos centrais*. O momento central de segunda ordem de uma variável aleatória $x(t)$ define sua *variância*:

$$E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \equiv \sigma^2 \equiv \text{variância de } x(t) \quad (\text{II.123})$$

A raiz quadrada positiva da variância, por sua vez, é denominada de *desvio padrão* (σ) da função amostral. Nota-se que quando o valor médio da variável aleatória é nulo, seu valor *rms* coincide com o desvio padrão. Quando isto não ocorre, obtém-se a seguinte relação:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 = \psi^2 - \mu^2 \quad (\text{II.124})$$

$$\Rightarrow \psi^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad (\text{II.125})$$

O Teorema Central do Limite na Estatística (BENDAT e PIERSOL, 1980) demonstra que a função densidade de probabilidade da média de qualquer conjunto de variáveis aleatórias com qualquer distribuição, possuindo média e variância finitas, tende à expressão enunciada na Eq. II.126 quando o número de variáveis aleatórias consideradas tende ao infinito. Essa função obtida é denominada *Normal* ou *Gaussiana*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{II.126})$$

Como a maioria dos fenômenos físicos aleatórios é resultado da soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes, nenhuma das quais contribuindo significativamente para a distribuição final, é geralmente eficaz a adequação de tais processos à distribuição Normal.

Do ponto de vista prático, é bastante interessante assumir que determinados dados estão distribuídos normalmente. Primeiro porque a distribuição pode ser completamente determinada a partir do conhecimento do valor médio e da variância da variável aleatória (conforme se pode observar na Eq. II.126). Além disso, todos operadores lineares aplicados em uma variável aleatória normalmente distribuída produzem outra variável aleatória também normalmente distribuída.

Além da determinação de uma tendência central e da dispersão de uma variável aleatória, um outro conceito estatístico muito importante é aquele que quantifica a correlação existente entre duas variáveis aleatórias. Um indicador do grau com que uma variável aleatória se relaciona com outra é fornecido pela *covariância* (σ_{xy}), a qual

pode ser definida algebricamente como o valor esperado do produto dos desvios de duas variáveis aleatórias em relação aos seus respectivos valores médios:

$$\sigma_{xy} \equiv \text{cov}[x(t), y(t)] \equiv E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - E[x]E[y] \quad (\text{II.127})$$

Dividindo-se a covariância pelos desvios padrão de $x(t)$ e $y(t)$, obtém-se a expressão do *coeficiente de correlação* (ρ_{xy}), uma medida normalizada do grau de dependência linear entre as duas variáveis aleatórias:

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)\text{var}(y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \quad (\text{II.128})$$

Se as variáveis aleatórias forem independentes, pode-se mostrar que o valor esperado do produto das variáveis torna-se igual ao produto dos valores esperados, e desta forma, a covariância e o coeficiente de correlação das funções se anulam.

II.5.3 – Funções de Probabilidade de Processos Estocásticos

Um processo estocástico estará especificado se forem conhecidas as ocorrências das variáveis aleatórias que o compõem em relação a valores de amplitude, ou seja, se forem conhecidas suas distribuições finito-dimensionais:

$$P(x_1(t), \dots, x_n(t); X_1, \dots, X_n) = \text{Prob}[x_1(t) < X_1, \dots, x_n(t) < X_n] \quad (\text{II.129})$$

Em geral, se uma distribuição envolve mais de uma variável independente ela é denominada de *multivariada*. Pode-se demonstrar (Teorema de Kolmogorov) que qualquer distribuição multivariada que satisfaça duas condições apresentadas a seguir define um processo estocástico (MORETTIN e TOLOI, 2004, PEREIRA *et al.*, 1986):

- Condição de simetria:

$$P(x_1(t), \dots, x_n(t); X_1, \dots, X_n) = P(x_n(t), \dots, x_1(t); X_n, \dots, X_1) \quad (\text{II.130})$$

(para qualquer permutação dos índices)

- Condição de compatibilidade (ou convergência):

$$\lim_{\substack{X_{m+1} \rightarrow \infty \\ \dots \\ X_n \rightarrow \infty}} P(x_1(t), \dots, x_m(t), \dots, x_n(t); X_1, \dots, X_m, \dots, X_n) = \\ = P(x_1(t), \dots, x_m(t); X_1, \dots, X_m), \text{ para } m < n \quad (\text{II.131})$$

Em termos práticos, porém, não se conhecem todas as distribuições que compõem um processo $\mathbf{X} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. O que se faz então é se restringir à análise dos momentos de baixa ordem da distribuição multivariada. Logo, os parâmetros importantes a considerar na especificação de um processo estocástico consistem no seu valor médio e na sua função de autocovariância (MORETTIN e TOLOI, 2004).

A partir de uma família de registros temporais que descrevem um determinado fenômeno, pode-se prontamente calcular a *função valor médio* $\mu_x(t_1)$ e a *função valor médio quadrático* $\psi_x^2(t_1)$ do processo estocástico em um instante específico t_1 (vide Fig. II.6) ao longo dos membros da família (*ensemble*), através das expressões:

$$\mu_x(t_1) = E[\mathbf{X}(t_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) \quad (\text{II.132})$$

$$\psi_x^2(t_1) = E[\mathbf{X}^2(t_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2(t_1) \quad (\text{II.133})$$

A *função de variância* do processo \mathbf{X} é calculada de forma análoga à variância no caso da distribuição univariada, entretanto é expressa para um único instante t_1 e em função de todas as distribuições do processo:

$$\sigma_x^2(t_1) = \text{var}[\mathbf{X}(t_1)] = E[(\mathbf{X}(t_1) - \mu_x(t_1))^2] \quad (\text{II.134})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{x_k(t_1) - \mu_x(t_1)\}^2 \quad (\text{II.135})$$

$$= E[\mathbf{X}^2(t_1)] - E^2[\mathbf{X}(t_1)] \quad (\text{II.136})$$

A *função de autocovariância (facv)* é um indicador da relação existente entre o comportamento do processo segundo dois diferentes instantes de tempo, podendo ser calculada pelas expressões (MORETTIN e TOLOI, 2004, BENDAT e PIERSOL, 1980, MARPLE, 1987):

$$\gamma_x(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_x(t_1))(X(t_2) - \mu_x(t_2))] \quad (\text{II.137})$$

$$= E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)] E[X(t_2)] \quad (\text{II.138})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x_k(t_1) - \mu_x(t_1)][x_k(t_2) - \mu_x(t_2)] \quad (\text{II.139})$$

Quando a *facv* é calculada para $t_1 = t_2$, obtém-se, como se pode verificar, a expressão da (função) *variância* do processo estocástico no instante $t = t_1 = t_2$. Observando-se a Fig. II.12-a, verifica-se que para cada instante t_j , pode-se ajustar uma distribuição pelo seu valor médio $\mu_x(t_j)$ e variância $\sigma_x^2(t_j)$.

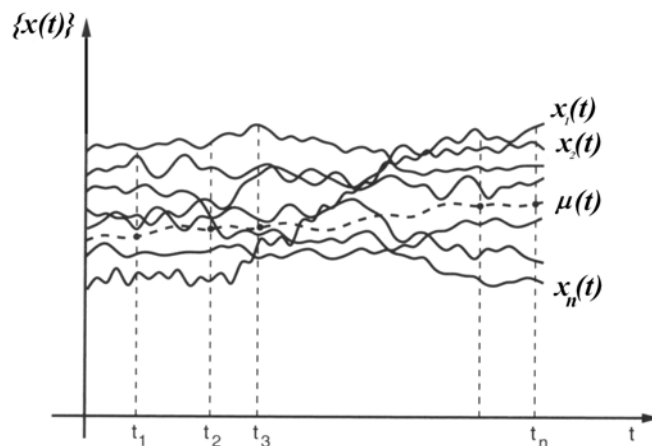
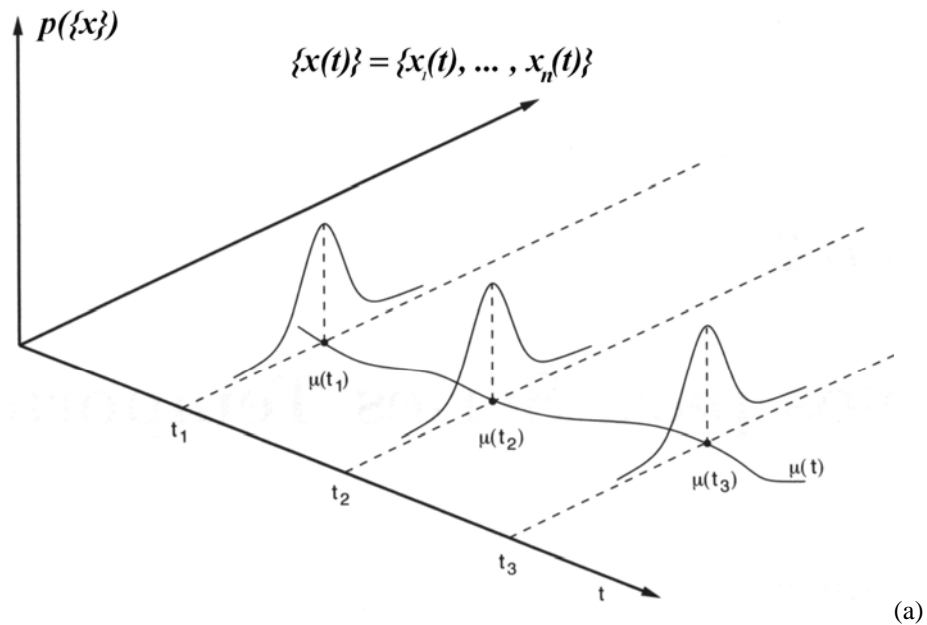


Figura II.12 - Processo estocástico interpretado como uma família de variáveis aleatórias, e as funções densidade de probabilidade no tempo, calculadas para cada instante de tempo ao longo dos membros da família (a), e o valor médio do processo no tempo (b), segundo gráficos apresentados por MORETTIN e TOLOI (2004).

Uma vez especificado o processo estocástico, pode-se proceder a sua classificação em relação à sua invariância no tempo. Quando seu valor médio e sua variância no instante t forem as mesmas do instante $t + \tau$, para todo τ , o processo é denominado *estritamente estacionário* (ou estacionário-forte). Isto significa que todas as distribuições unidimensionais são invariantes sob translações no tempo (vide Fig. II.12-a).

Por outro lado, um processo estocástico $X(t) = \{x(t)\}$ diz-se fracamente estacionário (ou estacionário de segunda ordem, ou em sentido amplo: *wide sense stationary* - WSS) se e somente se:

$$\text{i) } E[X(t)] = \mu_x(t) = \mu = \text{cte}; \quad (\text{II.140})$$

$$\text{ii) } E[X^2(t)] < \infty; \quad (\text{II.141})$$

$$\text{iii) } \gamma_x(t_1, t_2) \text{ é uma função de } \tau = t_1 - t_2. \quad (\text{II.142})$$

Buscando-se a larga aplicabilidade das distribuições Gaussianas, pode-se, quando possível, admitir o processo estocástico como Gaussiano (ou normal) desde que para qualquer conjunto t_1, t_2, \dots, t_n as variáveis aleatórias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ tenham também distribuição normal (n -variada). Pode-se demonstrar ainda que se um processo Gaussiano for fracamente estacionário, então ele também será um processo estacionário-forte (MORETTIN e TOLOI, 2004).

Considerando agora que um sistema LTI está relacionado a dois processos estocásticos $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ os quais são admitidos como estacionários e ergódicos. Pode-se definir para esse sistema a *função de covariância* (cruzada) entre $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ para um atraso no tempo τ da seguinte forma:

$$C_{xy}(\tau) = E[\{x(t) - \mu_x\} \{y(t + \tau) - \mu_y\}] \quad (\text{II.143})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\} \{y(t + \tau) - \mu_y\} dt \quad (\text{II.144})$$

A *função de correlação* (cruzada) entre $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$, por sua vez, pode ser definida como o valor esperado do produto de variáveis aleatórias:

$$R_{xy}(\tau) = E[\{x(t)\} \{y(t + \tau)\}] \quad (\text{II.145})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \quad (\text{II.146})$$

Na literatura multidisciplinar que trata dos processos estocásticos, os termos “covariância” e “correlação” muitas vezes são tratados sem distinção, entretanto, formalmente as funções só se igualam em processos com valor médio nulo, conforme se observa na expressão (facilmente demonstrável) apresentada a seguir:

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \quad (\text{II.147})$$

A função de correlação cruzada apresentada anteriormente é aplicada para a análise de dois processos distintos com um atraso relativo τ . De forma análoga, para a avaliação das mudanças ou periodicidade ocorridas em um único processo (ou variável aleatória) pode-se aplicar a *função de autocorrelação* $R_{xx}(\tau)$:

$$R_{xx}(\tau) = E[\{x(t)\} \{x(t + \tau)\}] \quad (\text{II.148})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (\text{II.149})$$

Assim como acontece entre as funções de covariância cruzada e correlação cruzada, a função de autocorrelação se iguala à função de autocovariância para processos com valor médio nulo. Em processos estacionários tem-se:

$$\gamma_x(t, t + \tau) = C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2 \quad (\text{II.150})$$

A literatura das aplicações estatísticas reserva a terminologia “autocorrelação” para valores normalizados da (auto) covariância, inclusive na análise de processos estocásticos. Seguindo a nomenclatura adotada por BENDAT e PIERSOL (1980), neste texto esta quantidade será tratada como *função coeficiente de correlação* $\rho_x(\tau)$, que para processos estacionários (WSS) fica:

$$\rho_x(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)} \quad (\text{II.151})$$

Nas aplicações de engenharia, principalmente no processamento de sinais digitais, a função de autocorrelação é definida da seguinte forma (JACKSON, 1996):

$$r_{xx}(m) = E[x(n+m)x^*(n)] \quad (\text{II.152})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)x^*(n) \quad (\text{II.153})$$

onde $x^*(n)$ é o complexo conjugado de $x(n)$.

A função de autocorrelação (*fac*) desempenha um papel fundamental na identificação no domínio do tempo de sistemas descritos por processos estocásticos, representando a aleatoriedade dos processos através indicação da correlação existente entre variáveis aleatórias no tempo. Em aplicações práticas ela constitui, junto com o valor médio, as únicas informações retidas de um processo, sendo a partir dela possível se verificar de que forma o processo apresenta mudanças no tempo e se possui componentes periódicas.

A *função densidade espectral* entre dois registros temporais $x(t)$ e $y(t)$ representando processos estacionários ergódicos $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ pode ser definida como a transformada de Fourier da função de correlação entre tais registros (BENDAT e PIERSOL, 1980). Para o caso geral onde $x(t)$ e $y(t)$ representam informações diferentes, a função é denominada *função densidade do espectro cruzado*, sendo apresentada a seguir como $S_{xy}(f)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II.154})$$

Quando a transformada é aplicada na função de autocorrelação, ou seja, $y(t) = x(t)$, define-se a *função densidade de autoespectro* ou simplesmente *autoespectro* de $x(t)$, ou ainda *espectro densidade de potência* (*power spectral density function-PSD*):

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{II.155})$$

Por outro lado, a função de autocorrelação pode ser obtida pela transformada de Fourier inversa:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{II.156})$$

O par transformado formado pelas Eq. II.155 e II.156 é conhecido como relação de Wiener-Khintchine. A partir da Eq. II.156, a *fac* para um intervalo $\tau = 0$ pode ser colocada como:

$$R_{xx}(0) = E[x^2] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (\text{II.157})$$

Se a série $x(t)$ representar deslocamento, $R_{xx}(0)$ denota energia média, e fica claro pela equação acima que $S_{xx}(\omega)$ representa a densidade de energia associada à frequência ω , ou seja, $S_{xx}(\omega)$ indica a distribuição da energia do sistema no espectro (RAO, 1995). Se $x(t)$ é corrente elétrica, $R_{xx}(0)$ é potência, razão da terminologia PSD para $S_{xx}(\omega)$.

As funções de densidade espectral são definidas analiticamente sobre todas as frequências, negativas e positivas. Na prática, entretanto, é mais conveniente trabalhar como o espectro definido somente nas frequências não-negativas. Desta forma torna-se interessante a definição das funções de densidade espectral unilaterais $G_{xy}(\omega)$ e $G_{xx}(\omega)$, definidas apenas para frequências positivas, mas contendo a mesma energia total:

$$G_{xy}(\omega) = \begin{cases} 2 S_{xy}(\omega), & \text{para } \omega \geq 0 \\ 0, & \text{para } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{II.158})$$

$$G_{xx}(\omega) = \begin{cases} 2 S_{xx}(\omega), & \text{para } \omega \geq 0 \\ 0, & \text{para } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{II.159})$$

Os processos aleatórios são freqüentemente identificados pela forma das suas funções PSD. A caracterização qualitativa mais geral dos processos consiste na classificação entre processos de *banda larga* e de *banda estreita*. Um processo de banda estreita é caracterizado por uma PSD com picos bem definidos, apresentando valores significativos apenas na vizinhança da freqüência onde ocorre o pico. Nos processos de banda larga, por outro lado, a PSD possui valores significativos ao longo de uma larga faixa de freqüência, com largura da mesma ordem de magnitude da freqüência central da banda (MEIROVITCH, 1986).

Nos extremos desta classificação tem-se a PSD de uma função periódica determinística com a forma de uma função impulso (banda estreita, vide Fig. II.13-a), e a PSD correspondente a uma função aleatória na qual todas as freqüências estão igualmente representadas (banda larga, vide Fig. II.13-d). Esta última é conhecida como *ruído branco* por analogia à luz branca, a qual possui um espectro aplainado na faixa de freqüência de luz visível.

A *fac* de um processo de ruído branco ideal (Fig. II.13-d), a partir da Eq. (II.148), fica igual a:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau) \quad (\text{II.160})$$

onde $\delta(\tau)$ é a função delta de Dirac. Pela definição da função de autocorrelação, pode-se colocar que, no domínio do tempo, o ruído branco se caracteriza por não apresentar correlação consigo mesmo para todos intervalos de análise, exceto para $\tau = 0$, quando se iguala à variância σ_x^2 do processo.

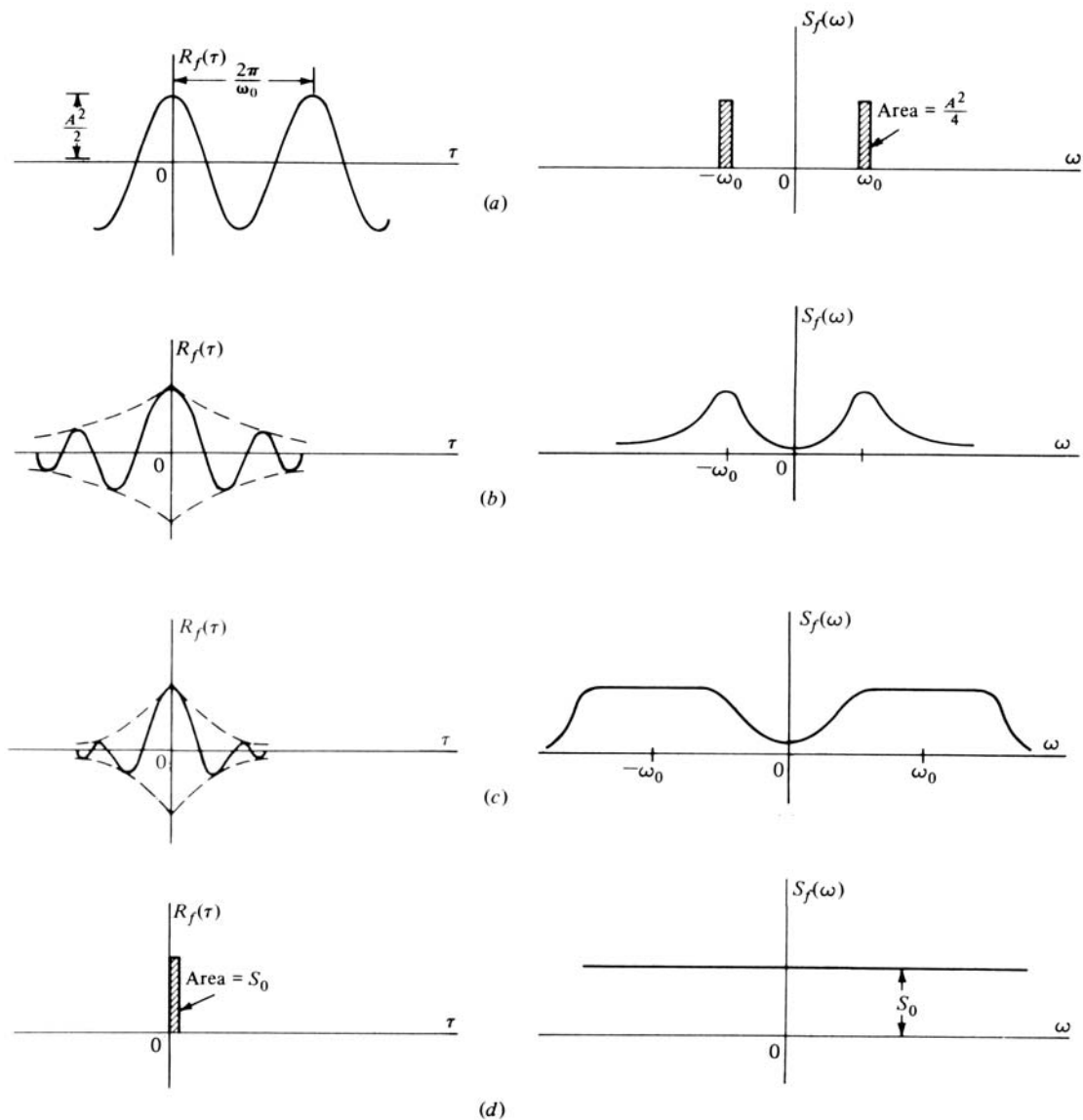


Figura II.13 – Função de autocorrelação e autoespectro de um sinal senoidal (a), de ruído branco ideal (d) e casos intermediários em (b) e (c), MEIROVITCH (1986).

II.5.4 – Representações Estocásticas no Domínio do Tempo

As funções de autocovariância e autocorrelação constituem o momento estatístico de segunda ordem do processo estocástico (ergódico), caracterizando-o no domínio do tempo. Como já foi salientado, na prática não se dispõe das infinitas amostras dos sinais dos sistemas necessárias para se definir essas funções. O que se faz então é estimá-las a partir de uma quantidade finita de pontos discretos.

Dado um registro $y(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ no campo dos reais, e assumindo-o como um processo ergódico, um estimador *não-tendencioso* (não-viesado, *unbiased*) da

função de autocorrelação (MARPLE, 1987, JACKSON, 1996, MARI e STOICA 2000) consiste em:

$$\hat{r}_{yy}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} y(k)y(k+m) \quad (\text{II.161})$$

$$= \frac{1}{N-m} \sum_{k=m}^{N-1} y(k)y(k-m) \quad (\text{II.162})$$

Quando m se aproxima de N , a variância de $\hat{r}_{yy}(m)$ se torna grande porque o número $(N-m)$ de amostras calculadas se torna pequeno. Nesses casos, o estimador tendencioso apresentado a seguir é empregado:

$$\hat{r}_{yy}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} y(k)y(k+m) \quad (\text{II.163})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{N-1} y(k)y(k-m) \quad (\text{II.164})$$

Considerando \mathbf{y} uma variável aleatória real multivariada de média nula, a matriz de (auto) covariância pode ser definida como:

$$\mathbf{R}_{yy}(m) = E \left\{ \left[\mathbf{y}_{k-m} \cdot \mathbf{y}_k^T \right] \right\}, \quad (\text{II.165})$$

e um estimador (PEETERS, 2000) seria:

$$\hat{\mathbf{R}}_{yy}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{N-1} \mathbf{y}_{k-m} \mathbf{y}_k^T \quad (\text{II.166})$$

Através da função de autocorrelação e/ou seus desdobramentos, processos estocásticos podem ser estimados no domínio do tempo e aplicados segundo diferentes modelos. A seguir apresentam-se os modelos mais correntes de representação de sistemas submetidos a processos estocásticos.

II.5.4.1 – Modelos no Espaço de Estados

Para a análise do sistema com ruído de medição e de processo, o modelo em espaço de estados admite uma forma combinada determinístico-estocástica:

$$\begin{cases} s(k+1) = \mathbf{A} s(k) + \mathbf{B} x(k) \\ y(k) = \mathbf{C} s(k) + \mathbf{D} x(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s(k+1) = \mathbf{A} s(k) + \mathbf{B} x(k) + w(k) \\ y(k) = \mathbf{C} s(k) + \mathbf{D} x(k) + v(k) \end{cases}$$

onde $w(k)$ é o ruído do processo e $v(k)$ é o ruído de medição. Ambos são desconhecidos, sendo geralmente assumidos como ruído branco gaussiano de média nula.

Para um sistema mecânico em operação, onde a única informação disponível consiste na sua vibração em resposta a excitações desconhecidas, não se pode mais discernir entre o sinal de entrada e as componentes de ruído. Este modelo puramente estocástico passa a apresentar as seguintes equações de estado e de saída:

$$\begin{cases} s(k+1) = \mathbf{A} s(k) + w(k) \\ y(k) = \mathbf{C} s(k) + v(k) \end{cases} \quad (\text{II.167})$$

Desta forma, a entrada do sistema é também admitida como um ruído branco. Caso a ele se somem excitações com alguma frequência dominante, estas componentes não poderão ser separadas das frequências próprias do sistema, aparecendo como pólos adicionais ao algoritmo (PEETERS, 2000, ALLEMANG, 1999).

A Fig. II.14 apresenta a representação gráfica de um sistema estacionário puramente estocástico, com saídas $y_k = y(k)$ e estados $s_k = s(k)$, descrito pelas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} .

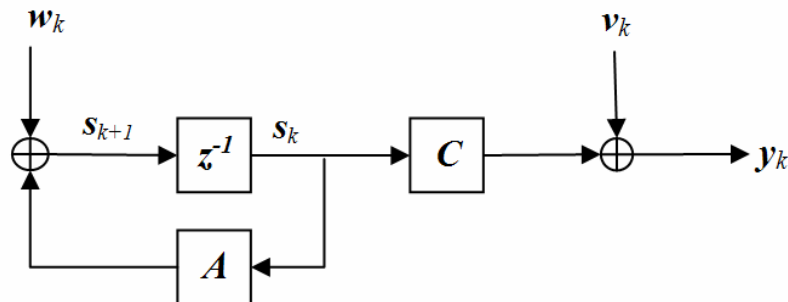


Figura II.14 – Representação gráfica de um sistema puramente estocástico (PEETERS *et al.*, 1995, VAN OVERSCHEE, 1995).

Logo, em sistemas puramente estocásticos, as matrizes A e C mais as matrizes de covariâncias de $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(k)$ representam completamente o sistema, em substituição ao conjunto de matrizes $\{A, B, C, D\}$ da representação determinística.

As matrizes de covariância dos vetores \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k , admitidos como processos tipo ruído branco (não-correlacionados no tempo), podem ser definidas através da seguinte relação (PEETERS, 2000):

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_{t_1} \\ \mathbf{v}_{t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{t_2}^T & \mathbf{v}_{t_2}^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta_{t_1 t_2} \quad (\text{II.168})$$

onde E é o operador valor esperado, t_1 e t_2 são dois diferentes instantes de tempo e δ é o delta de Kronecker.

II.5.4.2 – Modelos em Séries Temporais

O modelo de séries temporais representando uma observação discreta dos sinais de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ de um sistema SISO, LTI e estocástico pode ser generalizado pela seguinte equação escalar de diferenças:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{n_a} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{n_b} b_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{n_c} c_k \varepsilon(n-k) \quad (\text{II.169})$$

onde os escalares a_k ponderam os valores passados do vetor de saída contaminado com ruído, representando os coeficientes autoregressivos (AR) do modelo, os valores b_k ponderam o sinal de entrada do sistema trazendo as características da excitação para o modelo, sendo denominados de componente exógena (X), e os escalares c_k constituem os coeficientes da média móvel (MA) que se aplicam ao ruído de processo $\varepsilon(n)$, admitido como ruído branco de média nula, não correlacionado aos demais sinais do sistema.

O modelo apresentado na Eq. II.169 é denominado de ARMAX, por considerar as componentes AR, MA e X apresentadas acima, onde n_a , n_b e n_c são respectivamente suas ordens (FASSOIS, 2001).

Quando a ordem da componente MA é nula, ou seja, não há memória sobre o ruído $\varepsilon(n)$, obtém-se o modelo ARX ou AR, dependendo da disponibilidade ou não do sinal de entrada do sistema:

$$\text{ARX: } y(n) = \sum_{k=1}^{n_a} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{n_b} b_k x(n-k) + \varepsilon(n) \quad (\text{II.170})$$

$$\text{AR: } y(n) = \sum_{k=1}^{n_a} a_k y(n-k) + \varepsilon(n) \quad (\text{II.171})$$

Na vasta e multidisciplinar literatura que trata das séries temporais, é comum encontrar outras representações do modelo ARMAX e derivados. Nas aplicações de estatísticos e economistas, por exemplo, a representação mais comum é aquela apresentada a seguir:

$$y(n) = A(B)y(n) + B(B)x(n) + C(B)\varepsilon(n) \quad (\text{II.172})$$

onde $A(B) = a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_{n_a} B^{n_a}$;
 $B(B) = b_0 + b_1 B + b_2 B^2 + \dots + b_{n_b} B^{n_b}$;
 $C(B) = c_0 + c_1 B + c_2 B^2 + \dots + c_{n_c} B^{n_c}$;
e B é o operador atraso: $By(n) = y(n-1)$.

Os polinômios $A(B)$, $B(B)$ e $C(B)$ são polinômios atraso, consistindo nos operadores autoregressivo, exógeno e de média móvel, respectivamente. O modelo de séries temporais pode também ser representado na forma de espaço de estados forçando-se $n_a = n_b = n_c$, entretanto sem o conhecimento explícito de seu estado inicial (PEETERS, 2000).

II.6 – Estimação Espectral na Prática da Análise Modal

A caracterização do conteúdo espectral de um processo aleatório baseado em um conjunto finito de observações consiste no problema geral da estimação espectral (KAY, 1988). A estimação espectral é uma ferramenta preliminar de análise de dados,

podendo ser utilizada para responder perguntas específicas sobre os dados disponíveis e sugerir hipóteses dentro de uma abordagem estatística.

O problema da estimação espectral envolve a estimação de uma função de frequência. O desempenho do estimador é julgado em termos de como o espectro estimado se aproxima do espectro conhecido de um determinado sinal numa faixa de frequência contínua (MARPLE, 1987).

Se o problema de interesse é tão bem definido que as incógnitas se restringem a um conjunto finito de parâmetros, então as técnicas de estimação de parâmetros devem ser empregadas. Estes estimadores, por outro lado, geralmente são avaliados pelo seu desempenho em regiões de frequências específicas.

Assim, a estimação espectral e a estimação de parâmetros buscam elementos distintos na caracterização de um sistema, o que não impede que muitas vezes se sobreponham.

II.6.1 – Função Densidade de Autoespectro (PSD)

O par transformado (de Fourier) da função de autocorrelação, conforme já foi apresentado, consiste na função densidade de autoespectro (PSD), que na forma discreta, pode ser apresentada como:

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{yy}(k) e^{-i\omega k \Delta t} \quad (\text{II.173})$$

onde Δt é o período de amostragem do sinal.

Mais uma vez, em função da indisponibilidade prática do cálculo em intervalos infinitos, é preciso se realizar uma estimação da função a partir de dados finitos, ou seja, uma estimação espectral. Estimativas da PSD baseadas na transformação direta dos dados para o domínio da frequência são denominadas de *periodogramas*, e estimativas baseadas na estimativa prévia da função de autocorrelação para posterior transformação, são denominadas de *correlogramas*.

Dentre os métodos clássicos mais robustos e utilizados para a estimação da PSD destaca-se, na abrangente literatura de estimação espectral, o *periodograma de Welch* (MARPLE, 1987, STOICA e MOSES, 2005, PEETERS, 2000). O método de Welch introduz mudanças na estimação geralmente inconsistente fornecida pelo periodograma, dividindo o sinal em segmentos sobrepostos (50%), tornando-os

periódicos pela aplicação da janela de Hanning, calculando seus periodogramas e então realizando uma média. Desta forma, o *leakage* da DFT é reduzido pelo enjanelamento não-retangular (MARPLE, 1987), a hipótese de ergodicidade do sinal é numericamente aproximada pelas médias, e a variância da estimação é significativamente reduzida pelo aumento do número de segmentos computados em função da sobreposição imposta. Além disso, Welch sugeriu um eficiente algoritmo para o cálculo, amplamente difundido na literatura de métodos numéricos e estimação espectral, e facilmente aplicável no ambiente Matlab[®] através da execução do código fonte *pwelch*.

A formulação básica é apresentada a seguir. Inicialmente é calculada a DFT do sinal janelado (Eq. II.174), após o que pode ser estimada a PSD através do cálculo do periodograma pelo produto da transformada do sinal janelado por sua transposta conjugada, e posteriormente aplicação do fator de correção da energia da janela (Eq. II.175).

$$Y(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k e^{-i \omega k \Delta t} \quad (\text{II.174})$$

$${}_n \hat{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{E_w} Y^*(\omega) Y^T(\omega) \quad (\text{II.175})$$

$$E_w = \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2 \quad (\text{II.176})$$

$$\hat{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L {}_n \hat{S}_{yy}(\omega) \quad (\text{II.177})$$

onde w_k é a função de enjanelamento no tempo;

$\hat{S}_{yy}(\omega)$ é a PSD estimada;

N é o número de amostras por segmento;

L é o número total de segmentos (com sobrepasso de 50%);

$(L + 1) \cdot N / 2$ é o número total de amostras (pontos) do sinal.

A resolução em frequência obtida para a PSD, para sinais segmentados em N amostras, sendo N potência de 2 para a implementação eficiente da FFT, fica igual a $\Delta\omega = 2\pi / N \Delta t$.

II.6.2 – Estimadores da FRF

Conforme já foi apresentado, a resposta de um sistema LTI pode ser dada através de uma integral da convolução:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{II.178})$$

Admitindo que a excitação $x(t)$ ao sistema LTI consiste num processo estocástico estacionário (ergódico), a resposta $y(t)$ também consistirá num processo estacionário. A partir da Eq. II.178, da hipótese de estacionaridade, da definição de função de autocorrelação, do teorema da convolução no domínio da frequência, e após algum algebrismo (BENDAT e PIERSOL, 1980, MITRA, 1998), obtém-se:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (\text{II.179})$$

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega) \quad (\text{II.180})$$

$$S_{yy}(\omega) = H(\omega) S_{yx}(\omega) \quad (\text{II.181})$$

Logo, para um sistema sem ruídos de medição, a respectiva FRF pode ser calculada pela razão das estimações das funções de densidade de espectro:

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)} \quad (\text{II.182})$$

Admitindo agora a existência de ruído somente na medição da resposta do sistema, pela análise da Fig. II.7, pode-se escrever:

$$y(t) = v(t) + n(t) \quad (\text{II.183})$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = V(\omega) + N(\omega) \quad (\text{II.184})$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + N(\omega) \quad (\text{II.185})$$

A partir da Eq. II.185, seja pela minimização da variância do espectro do ruído, seja pela aplicação de desdobramentos da relação de Wiener-Khinchin, obtém-se o seguinte estimador para a FRF:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \quad (\text{II.186})$$

onde $S_{xy}(\omega) \cong \hat{S}_{xy}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \frac{1}{E_w} X^*(\omega) Y^T(\omega)$ (II.187)

Considerando agora ruído somente na entrada do sistema, pode-se obter, de forma equivalente ao caso anterior, a expressão do estimador H_2 :

$$H_2(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} \quad (\text{II.188})$$

No caso ideal do sistema não apresentar ruídos de medição, tem-se:

$$H_1(\omega) = H_2(\omega) = H(\omega) \quad (\text{II.189})$$

Uma medida direta da razão do autoespectro do ruído em relação ao autoespectro do sinal corrompido é fornecida pela *função de coerência* γ_{xy}^2 . Quando o ruído é inexistente, a função de coerência é igual à unidade, diminuindo em direção à nulidade conforme aumenta a influência do ruído na medição, representando assim um indicador da qualidade da estimação da FRF. As funções de coerência dos estimadores H_1 e H_2 podem ser calculadas a partir das seguintes expressões:

$$\gamma_{xy}^2|_{H_1} = \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{yy}(\omega)} = 1 - \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{yy}(\omega)} = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)} \quad (\text{II.190})$$

$$\gamma_{xy}^2|_{H_2} = \frac{G_{uu}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} = 1 - \frac{G_{nn}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)} \quad (\text{II.191})$$

Outros estimadores da FRF que buscam a minimização simultânea do ruído na medição da entrada e na medição da saída do sistema são encontrados na literatura: H_3 , H_4 , H_v , H_s e outros (HE e FU, 2001), apresentando, na prática, valores intermediários entre H_1 e H_2 seja pela aplicação de médias entre elas (aritméticas ou geométricas), seja pela realização de outros tipos de minimização de erro.

Os estimadores da FRF diferem entre si principalmente nas regiões de ressonância ou anti-ressonância, com o estimador H_1 , por exemplo, apresentando geralmente uma subestimação dos valores na ressonância, enquanto que H_2 tende a superestimar os valores na ressonância. É bom salientar que os estimadores apresentam diferenças entre si apenas na magnitude das FRF, não tendo efeito nas características da fase (ALLEMANG, 1999).

A apresentação detalhada desses estimadores foge ao propósito deste trabalho, remetendo-se às referências indicadas para maiores esclarecimentos do assunto.

II.6.3 – Forma Pólo-Resíduo da PSD

Considerando sem perda de generalidade o modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) onde o número de registros de entrada é igual ao número de registros de saída, BENDAT e PIERSOL (1986) apresentam uma metodologia de estimação das FRF a partir exclusivamente dos auto-espectros da entrada e saída (sem espectros cruzados), desde que sejam satisfetas algumas hipóteses acerca do sistema e da excitação.

Definindo \mathbf{X} como vetor-coluna que contém as transformadas de Fourier dos registros de entrada $X_k = X_k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots, m$, e \mathbf{Y} como vetor-coluna com as transformadas dos registros de saída $Y_k = Y_k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots, m$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} \quad (\text{II.192})$$

As matrizes das Eq. II.148, II.155 e II.159, as matrizes das funções de densidade espectral unilaterais podem então ser expressas como:

$$\mathbf{G}_{xx} = \frac{2}{T} E[\mathbf{X}^* \mathbf{X}^t] = \text{matriz densidade espectral da entrada} \quad (\text{II.193})$$

$$\mathbf{G}_{xy} = \frac{2}{T} E[\mathbf{X}^* \mathbf{Y}^t] = \text{matriz densidade espectral cruzada entrada/saída} \quad (\text{II.194})$$

$$\mathbf{G}_{yy} = \frac{2}{T} E[\mathbf{Y}^* \mathbf{Y}^t] = \text{matriz densidade espectral da saída} \quad (\text{II.195})$$

onde T é o período da amostragem, teoricamente tendendo a infinito.

Abrindo-se as expressões das matrizes espectrais, pode-se observar facilmente que \mathbf{G}_{xx} e \mathbf{G}_{yy} são matrizes Hermetianas, ou seja, $[G]_{ij} = [G]_{ji}^*$ para todo i e j .

A matriz do sistema que relaciona a entrada X e a saída Y pode ser representada por $\mathbf{H}_{xy} = \mathbf{H}_{xy}(\omega)$, com a entrada precedendo a saída. Representando os elementos de \mathbf{H}_{xy} por $H_{iy_k} = H_{x_i y_k}$, tem-se:

$$\mathbf{H}_{xy} = \begin{bmatrix} H_{1y_1} & H_{1y_2} & \cdots & H_{1y_m} \\ H_{2y_1} & H_{2y_2} & \cdots & H_{2y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{my_1} & H_{my_2} & \cdots & H_{my_m} \end{bmatrix} \quad (\text{II.196})$$

$$H_{x_q y_p} = H_{pq} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_{pqr}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{A_{pqr}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (\text{II.197})$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_{x_q y_p} = [\mathbf{H}_{pq}]^T \quad (\text{II.198})$$

Nota-se que a matriz \mathbf{H}_{xy} apresentada na Eq. (II.196) é transposta à matriz das FRF, \mathbf{H}_{pq} , comumente encontradas na literatura de análise modal (vide Eq. II.79 e Eq. II.88).

Pode-se observar pela Eq. II.197 que um modelo MIMO de \mathbf{H}_{xy} pode ser representado em termos das matrizes resíduo $[\mathbf{A}_r]_{n_e \times n_s}$ e seus respectivos pólos λ_r . Para o caso com número de registro de entrada n_e igual ao número de saídas n_s , tem-se:

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\mathbf{A}_r}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\mathbf{A}_r^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (\text{II.199})$$

onde a matriz resíduo \mathbf{A}_r pode ser subdividida em vetores-coluna:

$$\mathbf{A}_r = \left[\{A\}_{1r} \quad \{A\}_{2r} \quad \cdots \quad \{A\}_{n_s r} \right]_{n_s \times n_e} \quad (\text{II.200})$$

sendo $\{A\}_{qr} = L_{qr} \{\psi\}_r$;

$$A_{pqr} = Q_r \psi_{pr} \psi_{qr} = L_{qr} \psi_{pr};$$

p representa o GL da saída do sistema com $1 \leq p \leq n_s$;

q representa o GL da entrada do sistema com $1 \leq q \leq n_e$.

A partir do desmembramento da matriz resíduo, a FRF pode ser representada em termos dos vetores modais e das matrizes de participação modal:

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^t}{i\omega - \lambda_r} + \frac{Q_r^* \{\psi\}_r \{\psi\}_r^t}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (\text{II.201})$$

$$= \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^t}{i\omega - \lambda_r} \right), \text{ com } \lambda_{r+N} = \lambda_r^* \text{ e } Q_{r+N} = Q_r^* \quad (\text{II.202})$$

$$\mathbf{H}_{xy} = [\mathbf{H}]_{n_e \times n_s} = [\mathbf{L}]_{n_e \times 2N} \left[\begin{array}{c} \ddots \\ \frac{I}{i\omega - \lambda_r} \\ \ddots \end{array} \right]_{2N \times 2N} [\boldsymbol{\psi}]_{2N \times n_s}^t \quad (\text{II.203})$$

$$\mathbf{H}_{xy}^t = \mathbf{H}_{pq} = [\boldsymbol{\psi}]_{n_s \times 2N} \left[\begin{array}{c} \ddots \\ \frac{I}{i\omega - \lambda_r} \\ \ddots \end{array} \right]_{2N \times 2N} [\mathbf{L}]_{2N \times n_e}^t \quad (\text{II.204})$$

onde $\left[\begin{array}{c} \ddots \\ \frac{I}{i\omega - \lambda_r} \\ \ddots \end{array} \right]_{2N \times 2N}$ é a matriz diagonal com os pólos;

$[\psi]_{n_e \times 2N}$ é a matriz modal não normalizada;

$[L]_{n_e \times 2N}$ é a matriz de participação modal.

A representação da Eq. (II.203) consiste na formulação matemática no domínio da frequência de sistemas MIMO desenvolvida dentro de um conjunto de expressões que visam permitir a unificação dos conceitos apresentados nas diferentes técnicas de análise modal (*Unified Matrix Polynomial Approach - UMPA*), apresentada inicialmente por ALLEMANG *et al.* (1994).

Cada espectro da saída Y_k pode desta forma ser relacionado com o vetor das entradas X_j através das funções de resposta em frequência H_{jy_k} , conforme descrevem as equações a seguir e verifica-se no desenho esquemático na Fig. (II.15).

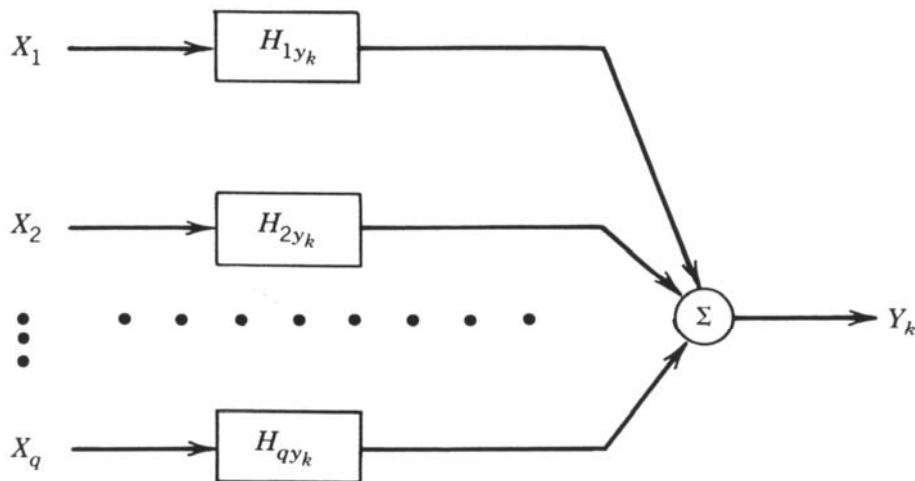


Figura II.145 – Relação entre o vetor de entradas e o vetor das saídas através da matriz das FRF (Bendat e Piersol, 1986).

$$\Rightarrow Y_k = \sum_{j=1}^q H_{jy_k} X_j \quad , \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (\text{II.205})$$

$$\Rightarrow Y = H_{xy}^t X \quad (\text{II.206})$$

Aplicando uma série de operações algébricas à Eq. (II.206) e admitindo que todas as matrizes são inversíveis, chega-se a:

$$Y^* Y^t = (H_{xy}^t)^* X^* X^t H_{xy} \quad (\text{II.207})$$

Calculando o valor esperado de ambos os lados da Eq. (II.207) e multiplicando-os por $(2/T)$, obtém-se:

$$\mathbf{G}_{yy} = (\mathbf{H}_{xy}^t)^* \mathbf{G}_{xx} \mathbf{H}_{xy} \quad (\text{II.208})$$

$$\mathbf{G}_{yy} = \mathbf{H}_{pq}^* \mathbf{G}_{xx} \mathbf{H}_{pq}^t \quad (\text{II.209})$$

Desta forma BENDAT e PIERSOL (1986) mostram que a função densidade de auto-espectro da saída admite uma representação em função da FRF e da função densidade do auto-espectro de entrada. Em um sistema com múltiplas entradas e uma única saída, tem-se:

$$\mathbf{G}_{yy} = \begin{bmatrix} H_{1y}^* & H_{2y}^* & \dots & H_{qy}^* \end{bmatrix} \mathbf{G}_{xx} \begin{bmatrix} H_{1y} \\ H_{2y} \\ \vdots \\ H_{qy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.210})$$

Supondo que a entrada no sistema é ruído branco, a matriz densidade espectral se torna uma matriz constante, ou seja, $\mathbf{G}_{xx} = \mathbf{C}$. Desmembrando ainda a matriz \mathbf{H}_{xy} na forma de frações parciais, tem-se a partir da Eq. II.209:

$$\mathbf{G}_{yy} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^N \left(\frac{\mathbf{A}_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{\mathbf{A}_k^*}{i\omega - \lambda_k^*} \right) \mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{A}_r}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\mathbf{A}_r^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right)^H \quad (\text{II.211})$$

onde $()^H$ representa a transposta conjugada da matriz.

BRINKER *et al.* (2000) desenvolvem a expressão fatorada da Eq. II.211 em frações parciais, e apresentam a matriz do auto-espectro segundo o modelo pólo/resíduo:

$$\mathbf{G}_{yy} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\mathbf{R}_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{\mathbf{R}_k^*}{i\omega - \lambda_k^*} + \frac{\mathbf{B}_k}{-i\omega - \lambda_k} + \frac{\mathbf{B}_k^*}{-i\omega - \lambda_k^*} \right) \quad (\text{II.212})$$

Onde \mathbf{R}_k é denominada de matriz resíduo do auto-espectro de saída, sendo dominante para sistema com baixo amortecimento, e \mathbf{B}_k é o resíduo não dominante da expressão. Na região de ressonância em sistemas com baixo amortecimento e modos reais (normais), o resíduo do auto-espectro da resposta no modo k pode ser calculado por:

$$\mathbf{R}_k = \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{C} \mathbf{A}_k^H}{-2 \operatorname{Re}(\lambda_k)} = d_k \{\psi\}_k \{\psi\}_k^t \quad (\text{II.213})$$

onde d_k é um escalar.

Desta forma BRINKER *et al.* (2000) apresentam finalmente a expressão da matriz função densidade de auto-espectro da resposta com aspecto similar à FRF, uma vez atendidas todas as hipóteses estabelecidas nas passagens descritas:

$$\mathbf{G}_{yy}(\omega) = \sum_{k|\omega_k \in \operatorname{viz}(\omega)} \left(\frac{d_k \{\psi\}_k \{\psi\}_k^t}{i\omega - \lambda_k} + \frac{d_k^* \{\psi\}_k \{\psi\}_k^t}{i\omega - \lambda_k^*} \right) \quad (\text{II.214})$$

O modelo apresentado na Eq. II.214 constitui a fundamentação básica para a estimação no domínio da frequência dos parâmetros modais de um sistema estrutural a partir exclusivamente da análise dos seus sinais de resposta.

CAPÍTULO III

TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

III.1 – Introdução

Neste capítulo serão abordadas as técnicas de estimação de parâmetros modais mais encontradas na literatura. Essas técnicas podem ser classificadas como determinísticas ou estocásticas no que se refere ao tratamento estatístico da estimação, desenvolvidas no domínio do tempo ou da frequência dependendo da variável independente da representação teórico-experimental utilizada, de respostas no tempo em decaimento ou em vibração forçada conforme o tipo de entrada imposta ou admitida ao sistema, e como de entrada-e-saída (*input-output*) ou somente-saída (*output-only*) dependendo da disponibilidade ou não dos sinais da excitação aplicada ao sistema. Neste trabalho adotou-se o critério dos domínios (do tempo ou frequência) para a classificação geral das técnicas abordadas.

Dentre as técnicas de estimação de parâmetros no domínio da frequência destacam-se aquelas que utilizam-se das Funções Resposta em Frequência estimadas a partir de um ensaio dinâmico controlado. Muitas informações sobre o sistema podem ser deduzidas pela simples observação das FRF's, razão pela qual continua sendo muito utilizada pelos profissionais da área de análise modal, apesar de não prescindir do exato conhecimento da excitação imposta à estrutura.

Sistemas estruturais excitados por forças com um espectro de potência constante, aproximando-se de um processo tipo ruído branco, pelo menos na faixa de frequência de interesse da resposta da estrutura, podem ter seus parâmetros modais estimados diretamente pela análise espectral da resposta, a qual passa a assumir forma análoga às respectivas FRF's do sistema, admitindo técnicas de estimação de parâmetros também bastante similares.

Edifícios altos excitados pela ação dos ventos (KIJEWski, 2003), edifícios submetidos à ação do caminhar de pessoas e vento (DE ROECK *et al.*, 2000), pontes em vibração induzida pelo tráfego (PEETERS E VENTURA, 2003), além de aeronaves em pleno vôo (GOETHALS *et al.*, 2004) e estruturas *offshore* submetidas à ação das ondas e ventos (KAREEM *et al.*, 1999) são exemplos de sistemas cuja entrada pode

admitir uma modelagem estocástica. As aplicações que fazem uso dessa hipótese constituem a Análise Modal denominada “*output-only*” ou “em operação” que apresenta a destacada vantagem de prescindir do conhecimento do sinal de entrada do sistema, permitindo, entre outras várias conveniências, a monitorização de sistemas em operação e de forma continuada.

A análise modal “*output-only*” pode ser realizada também no domínio do tempo, seja pela análise de sinais transientes de decaimento, seja pela aproximação admitida entre o comportamento da função de autocovariância da resposta e a função resposta a impulso (IRF) do sistema.

III.2 – Técnicas no Domínio da Frequência

III.2.1 – Método do Círculo Ajustado

Dentre as técnicas de estimação de sistemas de 1GL destacam-se aquelas que se utilizam das propriedades geométricas do gráfico da FRF no plano de Argand. A FRF de mobilidade de um sistema de 1GL, como foi visto no capítulo anterior, pode ser colocada como:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{i\omega/m}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2i\xi\omega_n\omega} \\ &= \frac{2\xi\omega_n\omega^2/m}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} + \frac{i\omega(\omega_n^2 - \omega^2)/m}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

$$\Rightarrow \text{Re}[Y(\omega)] = \frac{2\xi\omega_n\omega^2/m}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} \quad (\text{III.2})$$

$$\Rightarrow \text{Im}[Y(\omega)] = \frac{\omega(\omega_n^2 - \omega^2)/m}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} \quad (\text{III.3})$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{Re}[Y(\omega)] - \frac{I}{4m\omega_n\xi} \right\}^2 + \left\{ \text{Im}[Y(\omega)] \right\}^2 = \left\{ \frac{I}{4m\omega_n\xi} \right\}^2 \quad (\text{III.4})$$

A partir da Eq. III,4, percebe-se que a mobilidade do sistema de 1GL com amortecimento viscoso descreve um círculo no plano de Argand, com raio $R = \frac{1}{4m\omega_n\xi}$ e

com centro $(\frac{1}{4m\omega_n\xi}, 0)$, conhecido como círculo de Nyquist ou círculo modal (Fig. III.1).

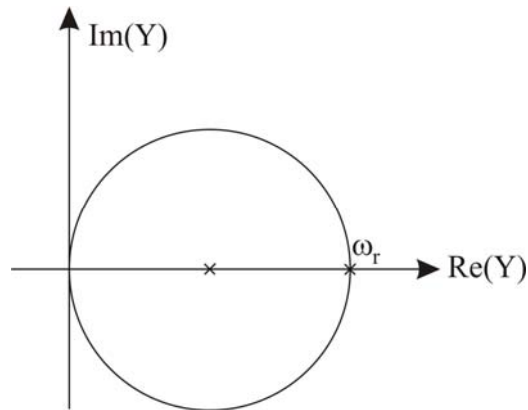


Figura III.1 – Círculo de Nyquist para FRF de mobilidade de sistema com amortecimento viscoso proporcional.

Em 1947, KENNEDY e PANCU destacaram o fato da FRF representada no plano de Argand descrever uma forma circular para valores de frequência próximos às ressonâncias, e um círculo exato em sistemas de 1GL. Mostraram que além de indicar a região de ressonância, o círculo permitia o cálculo das demais propriedades dos modos de vibração. Esta técnica foi inicialmente apresentada a partir da expressão da FRF de receptância e para sistemas como amortecimento histerético, tendo incorporado ao longo dos anos vários aprimoramentos (EWINS, 1984, ALLEMANG, 1999, HE e FU, 2001), constituindo por fim a técnica hoje conhecida como “método do círculo ajustado” (*circle-fitting method*). Até a década de 70, o método do círculo ajustado constituiu a principal contribuição ao desafio da identificação dos parâmetros modais.

O primeiro passo do método consiste no ajuste pelo método dos mínimos quadrados de um círculo a partir dos pontos disponíveis da FRF próximos à região de ressonância. Matematicamente pode ser mostrado também que a frequência natural está localizada no intervalo de frequência relacionado ao máximo arco de circunferência descrito pela FRF na região de ressonância (ângulo θ na Fig. III.2-a). Assim, pode-se estimar a frequência fundamental do sistema por métodos numéricos de derivação dos valores dos arcos.

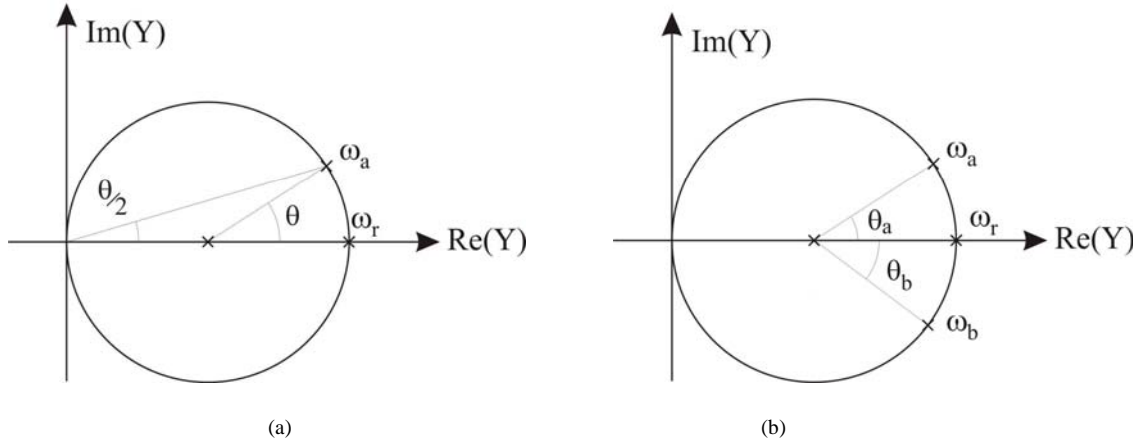


Figura III.2 – Ângulo central θ no círculo ajustado e sua relação com o argumento da FRF (a), e referente a dois pontos da FRF (b), em um sistema de IGL ideal.

Uma vez estimada a frequência natural do sistema, o amortecimento pode ser então calculado pela relação entre o valor imaginário e o valor real da mobilidade:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan[\arg(Y)] = \frac{\text{Im}(Y)}{\text{Re}(Y)} = \frac{\omega(k - \omega^2 m)}{\omega^2 c} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2}{2\xi \cdot \frac{\omega}{\omega_r}} \quad (\text{III.5})$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{2\omega\omega_r \tan(\theta/2)} \quad (\text{III.6})$$

Teoricamente, todos os pontos da mobilidade na região da ressonância deveriam implicar na obtenção do mesmo valor da taxa de amortecimento, a partir da simples aplicação da Eq. III.6. Entretanto, devido à existência de ruídos nas medições e incompatibilidades entre o modelo teórico e o real, o valor do amortecimento sofre variação entre os pontos calculados a partir da FRF. Em função disto, uma boa estimativa do amortecimento consiste no cálculo da média entre as taxas de amortecimento calculadas a partir de pares de pontos da FRF tomados antes e depois da posição referente à frequência natural, a partir da combinação das expressões do amortecimento de cada um desses pontos (vide Eq. III.7).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) &= \frac{1 - (\omega_a / \omega_r)^2}{2\xi \cdot \omega_a / \omega_r} \\ \Rightarrow \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) &= \frac{1 - (\omega_b / \omega_r)^2}{2\xi \cdot \omega_b / \omega_r} \end{aligned} \quad \Rightarrow \xi = \frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)}{2\omega_r(\omega_a \cdot \tan(\theta_a/2) + \omega_b \cdot \tan(\theta_b/2))} \quad (\text{III.7})$$

Por fim, conhecidas a frequência natural e a taxa de amortecimento do sistema, realiza-se a estimação da constante modal por simples substituição desses valores na expressão do diâmetro do círculo modal previamente ajustado:

$$D = \text{Re}[Y(\omega_r)] = 2R = 1/2m\omega_n\xi \quad (\text{III.8})$$

$$C = 2\omega_n\xi D = 1/m \quad (\text{III.9})$$

onde D é o diâmetro do círculo modal e C é a constante modal do sistema de 1GL.

Satisfeita a hipótese dos demais modos não influírem na região de ressonância de um determinado modo de um sistema com múltiplos GL, a curvatura circular do gráfico de Nyquist não muda, ocorrendo apenas a translação da origem do círculo de uma constante complexa B_{pqr} , conforme pode-se observar na Fig. III.3.

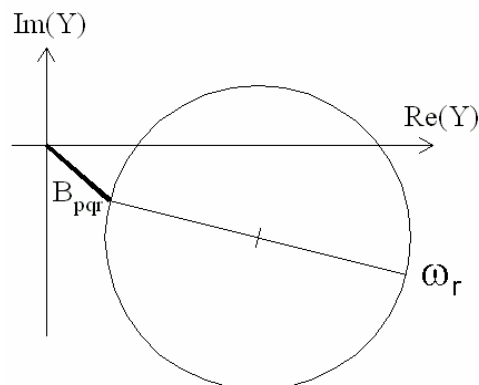


Figura III.3 – Deslocamento do círculo pela existência de mais modos no sinal da FRF, sem, neste caso, comprometer sua curvatura.

Sistemas com vários GL que guardam essas características podem ter sua forma modal estimada a partir do cálculo das constantes modais C_{pqr} relativas ao ajuste em cada um dos modos (r) das mobilidades $\Upsilon_{pq}(\omega)$:

$$C_{pqr} = 2\omega_r \xi_r D_{pqr} = \frac{\psi_{pr} \psi_{qr}}{m_r} \quad (\text{III.10})$$

$$C_{ppr} = 2\omega_r \xi_r D_{ppr} = \frac{\psi_{pp}^2}{m_r} \quad (\text{III.11})$$

Uma descrição detalhada do método do círculo ajustado, bem como a apresentação de um eficiente tratamento numérico ao problema, podem ser encontradas no trabalho de ROSA (1991).

III.2.2 – Método *Peak Picking*

O método *peak picking* (PP) é certamente a forma mais simples de se estimar parâmetros modais de uma estrutura. É uma técnica expedita válida somente para sistemas de 1GL, e extensível como primeira aproximação em sistemas com vários GL com modos espaçados e baixo amortecimento (PEETERS, 2000, HE e FU, 2001, ALLEMANG, 1999).

O primeiro passo do método consiste na identificação do pico da FRF na região de ressonância do modo de vibração analisado, observando-se o respectivo valor da frequência, procedimento elementar que dá nome ao método. Desta forma, percebe-se imediatamente como desvantagem do método o fato da estimação estar sempre restrita à resolução em frequência da FRF, e ser irremediavelmente prejudicada para FRF onde o pico da ressonância não se apresenta bem evidente.

Para a estimação da taxa de amortecimento e forma modal, o método PP pode ser entendido como uma simplificação do método do círculo ajustado, fazendo uso das propriedades elementares do círculo de Nyquist.

Para a estimação do amortecimento, por exemplo, aplica-se a expressão da Eq. III.7 para o caso particular de $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$, conhecido como Método da Meia Potência

(*Half-Power Method*) para a determinação do amortecimento, obtendo-se a expressão da Eq. III.12.

$$\Rightarrow \xi = \frac{(\omega_b - \omega_a)}{2\omega_n} \quad (\text{III.12})$$

$$\theta_a = \theta_b = 90^\circ \Rightarrow |Y(\omega_a)| = |Y(\omega_b)| = \frac{\text{lado do quadrado inscrito no círculo modal}}{\sqrt{2}} = \frac{|Y(\omega_n)|}{\sqrt{2}} \quad (\text{III.13})$$

Ou seja, a partir do pico da FRF, determinam-se os dois pontos (um anterior e outro posterior à frequência natural) onde a FRF assume $1/\sqrt{2}$ de seu valor de pico, obtendo-se os respectivos valores de frequência ω_a e ω_b (vide Fig. III.4).

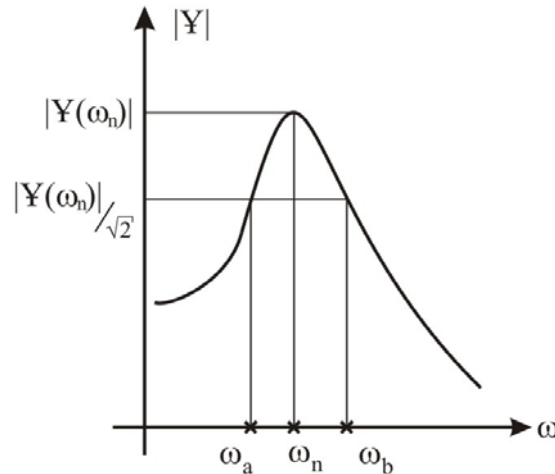


Figura III.4 – Frequências utilizadas no cálculo do amortecimento pelo método da meia potência.

A estimação do amortecimento obtida desta forma é reconhecida na literatura como precária, não raramente indicando valores inverossímeis.

Uma vez estimados a frequência natural e o amortecimento, as formas modais podem ser obtidas pelos valores que a FRF assume nos picos referentes a cada um dos modos, teoricamente iguais aos valores dos diâmetros dos círculos modais:

$$C_{pqr} = 2\omega_r \xi_r |Y_{pq}(\omega_r)| = \frac{\psi_{pr} \psi_{qr}}{m_r} \quad (\text{III.14})$$

A grande vantagem do método PP consiste na sua aplicabilidade na análise modal “output-only”. Nessa abordagem as FRFs do sistema não podem ser estimadas

em função de não se dispor do registro da força de entrada. Entretanto, no PP a informação disponibilizada pela fase dos espectros cruzados entre a entrada e a saída não é utilizada diretamente, o que aliado à hipótese de que a força excitadora é um processo de ruído branco permite a substituição da FRF pelo auto-espectro da saída.

Aproveitando essa similaridade, o método *Peak-Picking* admite a identificação dos parâmetros modais a partir de $G_{yy}(\omega)$, de forma análoga ao que descrito a partir da disponibilidade da FRF (vide Eq. II.214 do capítulo anterior).

A violação das hipóteses básicas de baixo amortecimento e baixa densidade modal leva a resultados muito ruins. Além disso, como qualquer outro método “*output-only*”, o PP estima as formas modais de operação (*operational deflections shapes* – ODS) ao invés das formas modais exatas, e no caso de sistemas com modos de vibração próximos, tal ODS consistirá na superposição de vários modos (PEETERS e VENTURA, 2003).

III.2.3 – *Frequency Domain Decomposition (FDD)*

O método *Frequency Domain Decomposition (FDD)*, apresentado inicialmente por BRINCKER *et al.* (2000), propõe a decomposição espectral da matriz do auto-espectro de saída em um conjunto de funções densidade do auto-espectro (PSD), cada uma correspondendo a um único grau de liberdade e seu respectivo modo.

Se A é uma matriz real $m \times n$, então existem matrizes ortogonais U e V tal que (GOLUB e VAN LOAN, 1996):

$$U^t A V = S = \text{diag}(s_1, \dots, s_p) = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_p \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

onde $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$;

$V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

$p = \min(m, n)$;

s_k são os valores singulares de A , com $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0$.

A decomposição descrita na Eq. III.15 é denominada de decomposição em valores singulares (SVD), podendo ainda ser apresentada como:

$$A = U S V^t \quad (\text{III.16})$$

$$A \{v_k\} = s_k \{u_k\}, \quad k = 1, \dots, \min(m, n) \quad (\text{III.17})$$

$$A^t \{u_k\} = s_k \{v_k\}, \quad k = 1, \dots, \min(m, n) \quad (\text{III.18})$$

A decomposição em valores singulares de uma matriz revela-se um importante instrumento na identificação de sua estrutura, podendo fornecer seu posto pelo número de valores singulares não nulos, o quadrado da sua norma (de Frobenius) pela soma dos quadrados dos valores singulares, além de possibilitar sua expressão através da expansão em valores singulares (*SVD expansion*):

$$A = \sum_{k=1}^r s_k \{u_k\} \{v_k\}^t \quad (\text{III.19})$$

onde r é o posto de A .

Quando a matriz A em análise é complexa, a decomposição em valores singulares toma a seguinte forma:

$$A = U^H S V \quad (\text{III.20})$$

onde U e V passam a ser matrizes unitárias, $()^H$ representa a transposta conjugada da matriz, e S permanece sendo uma matriz diagonal composta por valores singulares reais não negativos. Uma matriz $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é denominada unitária quando $Q^H Q = Q Q^H = I_n$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ (GOLUB e VAN LOAN, 1996).

Quando a matriz A a ser decomposta é hermitiana, portanto quadrada e idêntica à sua transposta conjugada, o problema da decomposição em valores singulares

se resume ao problema de autovalores de matrizes complexas hermetianas, cuja expressão fatorada (*eigendecomposition, spectral factorization*) é:

$$A = U S U^H \quad (\text{III.21})$$

onde U é a matriz unitária dos autovetores, completa ($n \times n$), e S é a matriz diagonal dos autovalores.

Realizando-se a decomposição da matriz (hermetiana) estimada do auto-espectro da saída \hat{G}_{yy} (vide Eq. II.214) na frequência discreta $\omega = \omega_k$, obtém-se:

$$\hat{G}_{yy}(\omega_k) = U_k S_k U_k^H \quad (\text{III.22})$$

Quando houver apenas um modo dominante no espectro na vizinhança de ω_k (k -ésimo modo), o primeiro vetor singular da matriz U_k (vetor-coluna) consistirá em uma estimação daquela forma modal de vibração:

$$\{\hat{\psi}\}_k = \{u\}_k^l \quad (\text{III.23})$$

onde $\{\hat{\psi}\}_k$ é a forma modal estimada do k -ésimo modo de vibração;

$\{u\}_k^l$ é o vetor singular correspondente à primeira coluna da matriz U_k .

O valor singular correspondente ao vetor singular $\{u\}_k^l$, tomado no primeiro elemento da diagonal principal da matriz S_k , constitui valor da função densidade do auto-espectro de um sistema de 1GL referente à contribuição daquele modo, em $\omega = \omega_k$, na forma apresentada na Eq. III.23.

A função densidade do auto-espectro na vizinhança do pico do k -ésimo modo pode ser calculada iterativamente, através da decomposição da matriz \hat{G}_{yy} neste trecho e da identificação dos valores singulares cujos respectivos vetores singulares apresentem a melhor correspondência com a forma modal inicialmente estimada para o modo $\{\hat{\psi}\}_k$, indicada pelo valor MAC – *Modal Assurance Criteria* (ALLEMANG e

BROWN, 1982). O valor MAC descreve quantitativamente entre zero e 1,0 o grau de correlação entre duas formas modais:

$$MAC \left[\{\hat{\psi}\}, \{u\}^r \right] = \frac{\| \{\hat{\psi}\} \cdot \{u\}^r \|}{\| \{\hat{\psi}\} \| \| \{u\}^r \|} \quad (\text{III.24})$$

Dentro do algoritmo de identificação pode-se estabelecer um valor mínimo do MAC (nível de rejeição) a partir do qual a contribuição do modo é levada em conta, estabelecendo-se assim uma faixa em frequência na qual a função densidade de auto-espectro do modo em questão é definida. Quanto menor for o nível de rejeição do valor MAC, mais abrangente será a definição do auto-espectro desacoplado, grafando a denominada “função sino” (*bell function*) do sistema de 1GL. Às demais faixas de frequência do auto-espectro (à esquerda e à direita do “sino”) não identificadas na decomposição espectral são atribuídos o valor nulo (BRINKER *et al.*, 2001).

Uma outra estimação da forma modal pode ser obtida pela média dos vetores singulares utilizados na definição do auto-espectro de 1GL, ponderados pelos respectivos valores singulares (MACMILLAN E BATEL, 2004).

A partir da PSD de 1GL identificada parcialmente, a frequência natural e a taxa de amortecimento podem ser finalmente calculadas no domínio do tempo pelo cálculo da IFT, obtendo-se, por definição, a função de autocorrelação (*fac*) do sistema de 1GL, que neste caso corresponde à uma estimativa do decaimento da IRF daquele modo de vibração da estrutura.

BRINKER *et al.* (2000, 2001) sugerem que a frequência natural seja estimada simplesmente pela observação do número de ciclos que ocorrem no intervalo de tempo útil da *fac*, seja pela identificação dos picos por interpolação quadrática, seja pelos zeros (*crossing times*) por interpolação linear.

O amortecimento, por sua vez, pode ser calculado pelo cálculo clássico do decremento logarítmico (CLOUGH e PENZIEN, 1993) na análise do decaimento fornecido pela *fac*. BRINKER *et al.* (2001) recomendam uma forma mais elaborada na qual todos os máximos e mínimos (picos e vales) do decaimento sejam identificados, calculando-se progressivamente do primeiro até o *k*-ésimo extremo a expressão do decremento logarítmico para semi-ciclos (Eq. III.25), obtendo-se assim uma série de

valores δ_k . O decremento logarítmico é então estimado como o coeficiente angular da reta ajustada por mínimos quadrados (regressão linear) aos pares ordenados $[k, 2 \ln(|r_k|)]$ conforme sugere a Eq. III.26.

$$\delta = \frac{2}{k} \ln\left(\frac{r_0}{|r_k|}\right) \quad (\text{III.25})$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \ln(|r_k|)}_y = \underbrace{\delta k}_{ax} + \underbrace{2 \ln(r_0)}_b \quad (\text{III.26})$$

onde $k = 1, 2, \dots, n^\circ$ de extremos locais (picos e vales);

r_0 é o valor inicial da *fac*;

r_k é o k -ésimo extremo.

Em seguida, a taxa de amortecimento pode ser estimada pela sua relação com o decremento logarítmico (CLOUGH e PENZIEN, 1993), na hipótese de amortecimento viscoso:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (\text{III.27})$$

BRINKER *et al.* (2001) sugerem ainda que a estimação da frequência natural seja realizada também por regressão linear, de forma análoga ao descrito anteriormente para o amortecimento. Deve-se salientar que esta forma de se estimar o amortecimento e a frequência natural permite também a fácil obtenção do desvio padrão dos valores estimados.

Ainda em BRINKER *et al.* (2001), é verificado o desempenho da técnica FDD para o caso da análise de um sistema com excitação levemente correlacionada, com ruídos na medição, com modos próximos ou ainda com modos não ortogonais, tendo-se obtido bons resultados. Especificamente para o caso de modos próximos, verificou-se que a simples diminuição do nível de rejeição do valor do MAC permitiu uma boa identificação do amortecimento.

Um algoritmo baseado na decomposição em valores singulares da matriz FRF \mathbf{H}_{pq} já havia sido apresentado na década de 80, tendo sido denominado de *Complex Mode Identification Function* (CMIF), e inicialmente desenvolvido apenas para a identificação do número de modos reais ou complexos existentes em uma determinada faixa de frequência, principalmente em sistemas com alta densidade modal (ALLEMANG, 1999, PEETERS, 2000).

Os autovalores da matriz obtida pela pré-multiplicação da matriz FRF por sua Hermitiana, ou alternativamente o quadrado dos valores singulares da matriz FRF, para cada valor de frequência, constituem a função CMIF, conforme apontam as expressões a seguir:

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^H(\omega) = \mathbf{V}(\omega)\mathbf{A}(\omega)\mathbf{V}^H(\omega) \quad (\text{III.28})$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{U}(\omega)\mathbf{S}(\omega)\mathbf{V}^H(\omega) \quad (\text{III.29})$$

$$\text{CMIF}_k(\omega) \equiv \lambda_k(\omega) = s_k^2(\omega), \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{III.30})$$

onde $\mathbf{H}(\omega)$ é a matriz FRF;
 $\mathbf{V}(\omega)$ é a matriz dos autovetores (vetores singulares) de $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^H(\omega)$;
 $\mathbf{A}(\omega)$ é a matriz diagonal com os autovalores de $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^H(\omega)$;
 λ_k é o k -ésimo autovalor de $\mathbf{A}(\omega)$;
 $\mathbf{U}(\omega)$ é a matriz unitária dos vetores singulares à esquerda de $\mathbf{H}(\omega)$;
 $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz diagonal com os valores singulares de $\mathbf{H}(\omega)$;
 s_k é o k -ésimo valor singular de $\mathbf{S}(\omega)$;
 $\text{CMIF}_k(\omega)$ é o k -ésimo valor CMIF, função da frequência;
 n é o número de modos que contribuem à resposta da estrutura naquela frequência particular;

Os picos que surgem nos gráficos das funções CMIF, da mesma forma que na técnica FDD, indicam a existência de modos de vibração, e as correspondentes frequências onde ocorrem esses picos correspondem às frequências naturais amortecidas de cada modo. Na aplicação original da técnica CMIF, a quantidade de

modos identificados nas funções corresponde ao número de GL necessários à representação mínima do sistema para uma dada faixa de frequência. Na prática, os algoritmos de identificação acabam por utilizar uma ordem maior (de GL) para que possam lidar numericamente com não-linearidades e ruídos intrínsecos aos ensaios reais.

Se o número de modos efetivos for menor ou igual à menor dimensão da matriz FRF, pode-se admitir que as matrizes da decomposição SVD tendem a fornecer aproximações das formas modais e dos fatores de participação modal, na forma da Eq. III.31 (vide apresentação da Eq. II.202 do capítulo anterior). Para um dado modo, quanto mais perto da frequência natural se realizar a decomposição espectral, maior será o valor singular encontrado. Se modos diferentes forem comparados, quanto mais forte for a contribuição modal, maior será o respectivo valor singular encontrado (ALLEMANG, 1999).

$$H(\omega) = [\psi] \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{Q_r}{i\omega - \lambda_r} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} [\psi]^t = U(\omega) S(\omega) V^H(\omega) \quad (\text{III.31})$$

Desta forma, o método FDD pode ser entendido cronologicamente como uma aplicação *output-only* da técnica CMIF, ou ainda como uma extensão por SVD da técnica PP (Peeters e De Roeck, 2001).

III.2.4 – *Rational Fraction Polynomial (RFP)*

O método RFP é uma das técnicas mais utilizadas pelos profissionais da área de identificação de sistemas estruturais, consistindo na formulação básica de um grande número de aplicativos comerciais de análise modal ainda hoje.

Baseia-se essencialmente na solução de um problema de ajuste de curva, buscando a minimização do erro entre a FRF medida e seu modelo teórico representado na forma de razão de polinômios, ao longo de uma determinada faixa de frequência.

Conforme apresentado no capítulo anterior (vide Eq. II.54), a Função de Transferência no domínio s de Laplace, admite a representação na forma de razão de polinômios:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{c_0 + c_1s + \dots + c_M s^M}{d_0 + d_1s + \dots + d_N s^N} = \frac{\sum_{k=0}^M c_k s^k}{\sum_{k=0}^N d_k s^k} \quad (\text{III.32})$$

A matriz Função de Transferência para um sistema de dois GL não amortecido, por exemplo, após a aplicação do operador de Laplace nos dois lados da equação de equilíbrio dinâmico fica igual a:

$$[\mathbf{M} s^2 + \mathbf{K}] \mathbf{Y}(s) = \mathbf{X}(s) \quad (\text{III.33})$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{X}(s)} = [\mathbf{M} s^2 + \mathbf{K}]^{-1} \quad (\text{III.34})$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}(s) = \frac{\begin{bmatrix} m_{22}s^2 + k_{22} & -(m_{12}s^2 + k_{12}) \\ -(m_{21}s^2 + k_{21}) & m_{11}s^2 + k_{11} \end{bmatrix}}{(m_{11}s^2 + k_{11})(m_{22}s^2 + k_{22}) - (m_{21}s^2 + k_{21})(m_{12}s^2 + k_{12})} \quad (\text{III.35})$$

onde m e k correspondem aos coeficientes da matriz de massa e rigidez do sistema, respectivamente.

A partir da Eq. III.32 pode-se obter a representação polinomial da FRF pela avaliação da Função de Transferência segundo o eixo imaginário, ou seja, fazendo-se $s = i\omega$:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M c_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N d_k (i\omega)^k} \quad (\text{III.36})$$

A função erro sugerida por RICHARDSON e FORMENTI (1982) evita a não-linearidade dos polinômios racionais, inerente ao erro simples calculado diretamente entre a FRF medida $\tilde{H}(\omega)$ e a teórica:

$$\varepsilon(\omega) = [H(\omega) - \tilde{H}(\omega)] \sum_{k=0}^N d_k (i\omega)^k \quad (\text{III.37})$$

$$= \sum_{k=0}^M c_k (i\omega)^k - \tilde{H}(\omega) \left[\sum_{k=0}^{N-1} d_k (i\omega)^k + (i\omega)^N \right] \quad (\text{III.38})$$

No algoritmo original um vetor erro é montado a partir do cálculo para cada valor discreto da frequência, obtendo-se finalmente o erro quadrático (real, não negativo) pela multiplicação desse vetor pelo seu transposto conjugado. Calculando-se os gradientes da expressão do erro em relação aos coeficientes c_k e d_k , e igualando-os a zero, obtém-se um sistema de $(N+M+1)$ equações lineares, cujo conjunto solução de c_k e d_k minimiza a função erro (por mínimos quadrados):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^H \mathbf{P} & -\text{Re}(\mathbf{P}^H \mathbf{T}) \\ -\text{Re}(\mathbf{T}^H \mathbf{P}) & \mathbf{T}^H \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\mathbf{P}^H \mathbf{W}) \\ \text{Re}(\mathbf{T}^H \mathbf{W}) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega_1) & (i\omega_1)\tilde{H}(\omega_1) & \cdots & (i\omega_1)^{N-1}\tilde{H}(\omega_1) \\ \tilde{H}(\omega_2) & (i\omega_2)\tilde{H}(\omega_2) & \cdots & (i\omega_2)^{N-1}\tilde{H}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}(\omega_\ell) & (i\omega_\ell)\tilde{H}(\omega_\ell) & \cdots & (i\omega_\ell)^{N-1}\tilde{H}(\omega_\ell) \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & (i\omega_1) & \cdots & (i\omega_1)^{M-1} \\ 1 & (i\omega_2) & \cdots & (i\omega_2)^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (i\omega_\ell) & \cdots & (i\omega_\ell)^{M-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} (i\omega_1)^N \tilde{H}(\omega_1) \\ (i\omega_2)^N \tilde{H}(\omega_2) \\ \vdots \\ (i\omega_\ell)^N \tilde{H}(\omega_\ell) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

onde ℓ é o número de valores discretos em frequência utilizados no ajuste;
 $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ são as frequências discretas consecutivas utilizadas;
 $d_N = 1$;
 M é o número de zeros da FRF;
 N é o número de pólos da FRF.

Uma vez conhecidos os coeficientes dos polinômios do denominador e numerador e suas respectivas raízes complexas, a FRF é colocada na forma de frações parciais, de onde se pode extrair a frequência natural, o amortecimento e os resíduos do sistema (Eq. II.72, Eq. II.79 e Eq. II.197).

O sistema montado na solução, entretanto, por ter os elementos de sua matriz principal em potências de frequência se torna numericamente mal-condicionado conforme se amplia a faixa de frequência de análise ou a ordem do sistema a analisar (ALLEMANG, 1999). Uma alternativa que potencializa o método consiste na substituição dos polinômios simples inicialmente utilizados na representação da FRF por uma série de polinômios ortogonais. RICHARDSON e FORMENTI (1982) sugerem a utilização dos polinômios de Forsythe. A matriz principal obtida dessa forma é geralmente estável além de desacoplar a solução dos coeficientes dos polinômios do denominador da solução do numerador. Uma vez determinados tais coeficientes da série de polinômios ortogonais, eles são finalmente convertidos nos coeficientes dos polinômios de potência originais, de onde se podem extrair os parâmetros modais. À técnica RFP aprimorada pela utilização de polinômios ortogonais dá-se usualmente o nome de *Orthogonal Polynomials Method* (OP).

III.3– Técnicas no Domínio do Tempo

A expressão da resposta no tempo a partir do vetor de entradas x (forças) e da função resposta a impulso h para sistemas de 1GL apresentada na Eq. II.16 do capítulo anterior pode ser generalizada para sistemas MIMO. Admitindo-se o sistema em repouso em $t = 0$, um sistema com vários GL pode então ter sua resposta segundo a coordenada de referência p expressa por:

$$y_p(t) = \int_0^t h_{pq}(\tau) x_q(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.44})$$

onde x_q consiste na única excitação a que a estrutura é submetida, imposta segundo o GL q , e h_{pq} é a função resposta impulso (IRF) que relaciona a resposta em p à entrada na coordenada q .

A partir da solução da equação diferencial do movimento livre amortecido de um sistema mecânico de 1GL, assumindo-se que as condições iniciais são nulas e que a

força aplicada corresponde a um impulso unitário, a IRF de um sistema LTI com múltiplos graus de liberdade ocorre em pares complexos conjugados de iguais amplitudes, podendo ser modelada como:

$$h_{pq}(t) = \sum_{r=0}^N \left[A_{pqr} \cdot e^{\lambda_r t} + A_{pqr}^* \cdot e^{\lambda_r^* t} \right] \quad (\text{III.45})$$

onde N é o número de graus de liberdade do sistema;
 p, q são respectivamente o GL da resposta e o GL da entrada;
 A_{pqr} é o resíduo no modo r de $h_{pq}(t)$;
 $\lambda_r = \sigma_r + i\omega_r$ são os pólos do sistema;
 $\sigma_r = -\xi_r \omega_n$ é o fator (coeficiente) de amortecimento (rad/s);
 $\omega_r = \sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_{n,r}$ é a frequência natural amortecida do modo r ;
 $\omega_{n,r}$ é a frequência natural do modo r ;
 ξ_r é a taxa de amortecimento do modo r .

A expressão da Eq.(III.45) pode ser obtida também pela transformada inversa de Fourier da FRF, mantendo-se as mesmas definições de pólos e resíduos. Na prática, a IRF de um sistema é geralmente obtida a partir da transformada inversa de Fourier da função de resposta em frequência (FRF) estimada em um ensaio controlado.

Técnicas no domínio do tempo que fazem uso da função de resposta a impulso (IRF) ou de respostas de decaimento com condições iniciais bem conhecidas foram introduzidas inicialmente ainda na década de 70, a partir da adaptação de algoritmos de processamento de sinais de sonares. Ainda hoje são amplamente utilizadas, fornecendo geralmente estimações determinísticas dos parâmetros modais (ALLEMANG, 1999).

De uma forma geral, a análise modal paramétrica no domínio do tempo de sistemas estruturais consiste no desenvolvimento de modelos matemáticos de tais estruturas descritos no tempo com um número finito de parâmetros, a partir de sinais medidos das respostas e/ou das excitações (PETSOUNIS e FASSOIS, 2001).

Métodos baseados em modelos estocásticos têm sido aplicados no domínio no tempo com a finalidade de aumentar a eficácia na identificação de sinais com forte presença de ruído. Geralmente se baseiam em estimativas das funções de autocorrelação dos sinais de saída.

Técnicas de identificação de sistemas no domínio do tempo originárias da Teoria de Controle têm sido introduzidas no campo da análise modal desde o meado da década de 80, destacando-se o algoritmo ERA proposto por JUANG inicialmente em 1985. Recentemente, com a busca de técnicas eficientes para a estimação de parâmetros de estruturas em operação, as excitações têm sido caracterizadas como processos estocásticos, e as abordagens derivadas da Teoria de Controle têm se destacado pelos bons resultados que vêm apresentando.

III.3.1 – Técnicas baseadas no Método de Prony

O método de ajuste idealizado por Gaspard Riche, Barão de Prony, no final do século XVIII, foi proposto inicialmente para modelar a propagação dos gases através de funções exponenciais, tendo sua inventividade estendida para o ajuste (exato) de dados transientes ou harmônicos a exponenciais complexas. O método representa uma seqüência de $4N$ observações realizadas em intervalos de tempo iguais por uma combinação linear de $2N$ funções exponenciais. Um polinômio (de colocação) de ordem $2N$ é utilizado, tem seus coeficientes determinados, e suas raízes inferem os expoentes (pólos) das funções exponenciais ajustadas. As amplitudes (resíduos) das funções são determinadas posteriormente através da solução de outro sistema linear, montado a partir da hipótese de intervalos de tempo constantes entre as amostras (MARPLE, 1987, BROWN *et al.*, 1980).

A partir da expressão da IRF da Eq. III.45, pode-se colocar:

$$h_{pq}(t_k) = \sum_{r=0}^N \left[A_{pqr} \cdot (x_r)^k + A_{pqr}^* \cdot (x_r^*)^k \right] \quad \text{(III.46)}$$

$$\Rightarrow h_{pq}(t_k) = \sum_{r=1}^{2N} A_{pqr} \cdot (x_r)^k = \sum_{r=1}^{2N} \psi_{pr} L_{qr} \cdot (x_r)^k \quad \text{(III.47)}$$

onde $x_r = e^{\lambda_r \Delta t}$, $t_k = k \cdot \Delta t$;

λ_r são os pólos do sistema.

L_{qr} é o fator de participação modal da referência q no modo r ;

ψ_{pr} é a escala da forma modal r no GL p ;

Vale lembrar que o resíduo A_{pqr} está associado à amplitude do modo r na coordenada p a partir de uma excitação na referência q , e que o fator de participação modal L_{qr} está relacionado em quão um determinado modo r pode ser excitado a partir da referência q .

O método de Prony introduz um novo conjunto de $(2N + 1)$ incógnitas reais $\{a_k\}$, coeficientes dos termos da equação polinomial (de colocação):

$$\prod_{r=1}^N (x - x_r)(x - x_r^*) = \sum_{k=0}^{2N} a_k x^k = 0 \quad (\text{III.48})$$

Multiplicando a Eq. III.47 pelos coeficientes a_k , $k = 0, \dots, 2N$, e somando-se as equações obtidas, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{2N} a_k h(t_{m+k}) = \text{Re} \left\{ \sum_{r=1}^N A_r x_r^m \underbrace{\left(2 \sum_{k=0}^{2N} a_k x_r^k \right)}_{\rightarrow 0} \right\} = 0 \quad (\text{III.49})$$

Na forma matricial ter-se-ia:

$$\begin{bmatrix} h_{pq}(t_{2N-1}) & h_{pq}(t_{2N}) & \cdots & h_{pq}(t_{4N-1}) \\ h_{pq}(t_{2N-2}) & h_{pq}(t_{2N-1}) & \cdots & h_{pq}(t_{4N-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{pq}(t_1) & h_{pq}(t_2) & \cdots & h_{pq}(t_{2N+1}) \\ h_{pq}(t_0) & h_{pq}(t_1) & \cdots & h_{pq}(t_{2N}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \\ a_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

Admitindo pela Eq. (III.50) que há somente $2N$ (ou N , no caso complexo) valores linearmente independentes na resposta a impulso amostrada, e normalizando $a_{2N} = 1$, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} a_k h_{pq}(t_{m+k}) = -h_{pq}(t_{m+2N}) \quad (\text{III.51})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} h_{pq}(t_{2N-1}) & h_{pq}(t_{2N}) & \cdots & h_{pq}(t_{4N-2}) \\ h_{pq}(t_{2N-2}) & h_{pq}(t_{2N-1}) & \cdots & h_{pq}(t_{4N-3}) \\ h_{pq}(t_{2N-3}) & h_{pq}(t_{2N-2}) & \cdots & h_{pq}(t_{4N-4}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{pq}(t_0) & h_{pq}(t_1) & \cdots & h_{pq}(t_{2N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_{pq}(t_{4N-1}) \\ h_{pq}(t_{4N-2}) \\ h_{pq}(t_{4N-3}) \\ \vdots \\ h_{pq}(t_{2N}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.52})$$

A matriz principal do sistema de equações lineares da Eq. III.52 consiste em uma matriz de Toeplitz (elementos diagonais idênticos) de dimensão $2N \times 2N$ formada por $4N$ valores da IRF igualmente espaçados no tempo. Uma vez calculados os coeficientes $\{a_k\}$, as raízes do polinômio da Eq. III.48 podem ser determinadas, e a partir delas os $2N$ pólos das funções exponenciais complexas ajustadas.

$$\lambda_r = \frac{\ln(x_r)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \sigma_r = \text{Re}\left(\frac{\ln(x_r)}{\Delta t}\right) \text{ rad/s} \quad (\text{III.53})$$

$$\Rightarrow \omega_r = \text{Im}\left(\frac{\ln(x_r)}{\Delta t}\right) \text{ rad/s} \quad (\text{III.54})$$

Desta forma, ao se obterem as frequências naturais e o amortecimento da estrutura se conclui o denominado primeiro “estágio” da estimativa dos parâmetros modais pela abordagem matricial geral da estimação de parâmetros modais – *Unified Matrix Polynomial Approach* (ALLEMANG *et al.*, 1994). No segundo e último “estágio” se propõe finalmente à estimativa das formas modais de vibração.

Uma vez obtidos os pólos, os respectivos resíduos podem ser calculados pela simples substituição de $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ na Eq. III.47, formando-se um sistema de N equações com sua matriz principal na forma de Van der Monde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{pq1} \\ A_{pq2} \\ A_{pq3} \\ \vdots \\ A_{pqN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{pq}(t_0) \\ h_{pq}(t_1) \\ h_{pq}(t_2) \\ \vdots \\ h_{pq}(t_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.55})$$

onde $(x_r)^k = e^{\lambda_r k \Delta t}$;

Amplitude do modo $r = |A_{pqr}|$;

Fase inicial $= \theta_r = \arctg\left(\frac{\text{Im}(A_{pqr})}{\text{Re}(A_{pqr})}\right)$.

Assim se completa a determinação exata das exponenciais complexas pelo método de Prony. Este algoritmo, associado à solução das raízes polinomiais por solução de problema de autovalor e aplicado na análise modal de estruturas, é geralmente denominado de *Complex Exponential Method* (CE).

Um dos maiores problemas desta técnica consiste na determinação do número de modos de vibração existente nos dados. O algoritmo mostra-se também muito sensível à presença de ruídos, sendo necessária a utilização de vários GL adicionais no algoritmo para compensar a presença de distorções nos dados, criando os chamados “modos computacionais”.

As técnicas no domínio do tempo encontram-se por vezes classificadas na literatura como de *ordem inferior* (primeira e segunda ordens) e de *ordem superior* (ALLEMANG, 1999), dependendo do número de parâmetros de Markov utilizados, ou seja, do número de valores temporais (tamanho da memória) utilizados da IRF. Nessa classificação, portanto, a técnica CE se enquadra como de ordem superior por utilizar simultaneamente vários valores consecutivos da IRF.

A extensão da técnica CE para o *Least-Squares Complex Exponential Method* (LSCE) é direta. Os coeficientes $\{a_k\}$ do polinômio característico são quantidades globais, invariáveis no tempo, devendo ser os mesmos para qualquer trecho ou tamanho utilizado da IRF. Desta forma, a partir de um número maior de valores da IRF, o sistema da Eq. III.52 passa a ser sobredeterminado, e a solução encontrada (pelo cálculo da pseudo-inversa) é aquela que minimiza o erro quadrático médio da Eq. III.51. O mesmo procedimento pode ser feito para o cálculo dos resíduos.

A técnica LSCE apresenta em relação à CE uma melhora significativa no que se refere à estimação de parâmetros na presença de ruídos, utilizando-se um mesmo número de modos (pares conjugados de pólos). Entretanto, a determinação do número de modos existentes (e identificação dos modos computacionais) continua sendo um problema.

Num sistema com múltiplas respostas e uma única referência (SIMO) se obtém pelo ajuste de Prony não apenas um conjunto de coeficientes polinomiais, mas N_o conjuntos de coeficientes polinomiais, onde N_o é o número de saídas observadas. O conjunto solução dos pólos é definido agora não por um polinômio de colocação, mas por uma matriz polinomial, cuja equação característica pode ser apresentada na forma:

$$x^{2N} + [a_{2N-1}]_{N_o \times N_o} x^{2N-1} + \dots + [a_0]_{N_o \times N_o} = 0 \quad (\text{III.56})$$

Cada conjunto de coeficientes deve ser obtido a partir de cada IRF, para um mesmo número de pólos admitidos, individualmente ou em bloco (HE e FU, 2001). Uma vez obtidos, trata-se o problema de obtenção de raízes da matriz polinomial como um problema de autovalor (GOHBERG *et al.*, 1982) através da montagem da denominada matriz companheira (*companion matrix, first companion form*):

$$[C] = \begin{bmatrix} -[a_{2N-1}] & -[a_{2N-2}] & \dots & -[a_1] & -[a_0] \\ [I] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ [0] & [I] & \dots & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{III.57})$$

onde $[C]\{X_r\} = x_r [I]\{X_r\}$, sendo $\{X_r\}$ o autovetor associado ao autovalor x_r .

O novo problema de autovalor-autovetor, tem em cada autovalor x_r uma raiz da matriz polinomial (que por sua vez corresponde a um pólo λ_r do sistema), com multiplicidade algébrica teoricamente igual ao número de saídas monitoradas N_o (ordem das matrizes dos coeficientes). Admitindo-se a matriz companheira como não-defectiva, o autovetor $\{X_r\}$ associado a cada autovalor é de comprimento igual a $2N \cdot N_o$ (ordem do modelo vezes ordem da matriz de coeficientes). Assim, pode-se mostrar que no ensaio SIMO a porção de interesse no autovetor é de comprimento igual a N_o e é repetida $2N$ vezes em $\{X_r\}$, multiplicada por potências do respectivo autovalor (LEURIDAN e VOLD, 1984):

$$\{X_r\} = \begin{Bmatrix} x_r^{2N-1} \{\psi_r\} \\ x_r^{2N-2} \{\psi_r\} \\ \vdots \\ x_r^1 \{\psi_r\} \\ \{\psi_r\} \end{Bmatrix}_{2N \cdot N_o} \quad (\text{III.58})$$

onde $\{\psi_r\}$ é a forma de vibração do r -ésimo modo.

Uma vez obtidos os pólos (e as formas modais) do sistema SIMO, os resíduos (e os fatores de participação modal) podem ser calculados pela solução do erro quadrático mínimo da Eq. III.55, GL por GL, para cada uma das IRF estimadas, na forma da Eq. III.55 de sistemas de 1GL, entretanto utilizando-se matrizes sobredeterminadas.

A obtenção em bloco das soluções características da matriz polinomial confere a esta abordagem um caráter global na estimativa dos pólos (frequência natural e amortecimento), entretanto local na obtenção individualizada dos resíduos (LEURIDAN *et al.*, 1986).

A fim de melhorar os resultados da técnica LSCE, BROWN *et al.* (1980) sugerem a aplicação da transformada “zoom” (ALLEMANG, 1999) na FRF experimental, concentrando seus valores numa faixa de frequência definida junto às ressonâncias a analisar, e só então aplicar a transformada de Fourier inversa para a obtenção da IRF.

A versão MIMO da técnica LSCE foi apresentada inicialmente por VOLD e ROCKLIN (1982), sendo geralmente reconhecida por *Polyreference Time Domain Method* (PTD), consistindo num dos algoritmos de identificação mais utilizados até hoje.

O algoritmo de Prony é também encontrado na literatura de filtros digitais (JACKSON, 1996) como um dos métodos mais simples utilizados para a modelagem de filtros de função resposta a impulso infinita (IIR). A partir da aplicação da transformada- z sobre a representação polinomial da Função de Transferência (vide Eq. II.61), tem-se:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (\text{III.59})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (\text{III.60})$$

$$\Rightarrow b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \right) (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) \quad (\text{III.61})$$

Onde M é o número de zeros, e N o número de pólos. No domínio do tempo, tem-se:

$$b(n) = h(n) * a(n) \quad (\text{III.62})$$

Dispondo matricialmente a Eq. III.61, a formulação fica então parecida com a primeira fase da técnica LSCE, entretanto com as linhas da matriz principal dispostas na ordem inversa. Para quatro zeros ($M = 4$), três pólos ($N = 3$), $(L+1)$ amostras da IRF, e $a_0=1$, por exemplo, obter-se-ia a Eq. III.63:

$$\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \\ h(4) & h(3) & h(2) & h(1) \\ \hline h(5) & h(4) & h(3) & h(2) \\ h(6) & h(5) & h(4) & h(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & h(L-2) & h(L-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_L \quad (\text{III.63})$$

Buscando-se inicialmente os valores dos coeficientes autoregressivos $\{a_k\}$, resolve-se o sistema de equações abaixo da linha pontilhada da expressão da Eq. III.63 obtendo-se:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} h(5) & h(4) & h(3) & h(2) \\ h(6) & h(5) & h(4) & h(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & h(L-2) & h(L-3) \end{bmatrix}_{(L-M) \times (N+1)} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} h(4) & h(3) & h(2) \\ h(5) & h(4) & h(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h(L-1) & h(L-3) & h(L-2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{\text{ref}}}_{(L-M) \times N} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\{a_k\}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} h(5) \\ h(6) \\ \vdots \\ h(L) \end{bmatrix}}_{\{c_k\}} \quad (\text{III.64})$$

$$\Rightarrow \{a_k\} = [\mathbf{T}^{\text{ref}}]^{-1} \{c_k\} \quad (\text{III.65})$$

(para \mathbf{T}^{ref} quadrada com $L = M+N$)

$$\Rightarrow \{a_k\} = \left[(\mathbf{T}^{\text{ref}})^T \mathbf{T}^{\text{ref}} \right]^{-1} (\mathbf{T}^{\text{ref}})^T \{c_k\} \quad (\text{III.66})$$

(para \mathbf{T}^{ref} retangular com $L > M+N$)

Sendo um método clássico da área de processamento de sinais, o pacote DSP (*Digital Signal Processing*) do Matlab[®] traz o código fonte *prony.m* que realiza os passos descritos acima para o cálculo dos coeficientes $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$. Um algoritmo simples de estimação de parâmetros pela técnica LSCE, para sistemas SISO, escrito para o Matlab[®], encontra-se apresentado na Fig. III.5.

Inúmeros trabalhos já foram desenvolvidos nos mais diversos campos da ciência com o fim de aprimorar o desempenho das técnicas baseadas no método de Prony, principalmente no que diz respeito à sensibilidade ao ruído e determinação da ordem do modelo. Dentre esses inúmeros trabalhos, podem-se destacar as publicações de OSBORNE e SMITH (1991, 1995), que propõem modificações no algoritmo tornando-o (assintoticamente) mais estável na presença de ruídos, e de KURKA e BAZÁN (1994), que descrevem a aplicação na IRF de um algoritmo de redução de ordem de modelos baseado no método dos momentos (estatísticos), buscando a

identificação dos parâmetros reais corretos entre os muitos fornecidos pelo ajuste de Prony em sistemas sobredeterminados.

```

% Dados do sinal
% IRF=h(k), k=1,2,...,∞
% dt=intervalo de tempo entre amostras
Tt= input('Tempo total de análise:');
N=  input('No. de pólos estimado:');
L=  input('No. de valores utilizados da IFR >=2N-1');
M=N-1;    %utiliza desde o primeiro valor da IRF
k=fix((Tt/(L-1))/dt);
h_ref=h(1:k:1+(L-1)*k) % seleciona ptos da IRF
[b,a]=prony(h_ref,M,N); % calcula os coef do polinômio
xr=roots(a);           % calcula as raízes do pol.
lambda= log(xr)/dt;   % calcula os pólos
wr=imag(lambda)       % calcula as freq. nat. amort.
sr=real(lambda)./wr   % calcula as taxas de amort.
V=exp((0:k*dt:(N-1)*k*dt) '*lambda. ');
                                % calc. matriz de Van der Monde
A= V\h_ref(1:N)';        % calcula os resíduos
t=0:k*dt:(L-1)*k*dt;    % calcula os valores no tempo
plot(t,h_ref,t,real(exp(t '*lambda. ')*A));
                                % apresenta o gráfico do ajuste

```

Figura III.5 – Algoritmo LSCE em Matlab®.

III.3.2 – Técnicas baseadas em Modelos de Séries Temporais ARMA

Sinais de resposta em sistemas (filtros) lineares submetidos a valores de entrada aleatórios e desconhecidos podem ser interpretados como processos estocásticos gerados por ruído branco, e serem parametrizados através de modelos de séries temporais. Neste item serão abordadas as técnicas de identificação de sistemas da classe ARMA, fundamentadas essencialmente na teoria de séries temporais.

Conforme foi visto no capítulo II, a representação ARMA de um sistema pode ser dada pela equação de diferenças apresentada a seguir, onde $y(n)$ é a série de saída e $x(n)$ corresponde à entrada (desconhecida).

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (\text{III.67})$$

Assim, como se pode observar pela Eq. (III.67), nos modelos ARMA a resposta é assumida como uma função linear das entradas presente e passadas e de respostas passadas, sendo desta forma uma “predição linear” de entradas e saídas passadas (MAKHOUL, 1975). Aplicando-se a transformada- z à equação de diferenças do modelo ARMA, e isolando em um de seus membros a relação entre a resposta e a entrada do sistema, obtém-se expressão idêntica à Eq. III.59 obtida na formulação do filtro Prony:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (\text{III.68})$$

O modelo paramétrico ARMA possui, portanto, pólos e zeros em sua função de transferência, sendo por isso comumente relacionado a filtros pólo-zero de uma forma geral na literatura de processamento de sinais. Na teoria de séries temporais, o modelo ARMA da Eq. III.67 está sempre relacionado à hipótese da entrada como sendo um processo de ruído branco.

Abrindo-se a Eq. III.67 para N pólos e M zeros, tem-se:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_N y_{k-N} = x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_M x_{k-M} \quad (\text{III.69})$$

onde y_k é o k -ésimo valor da seqüência de saída;
 x_k é o k -ésimo valor da seqüência de entrada (ruído branco);
 $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$, sem perda de generalidade.

Multiplicando ambos os membros da Eq. III.69 por y_{k-p} e o operador valor esperado, obtém-se:

$$r_{yy}(p) = -\sum_{k=1}^N a_k r_{yy}(p-k) + \sum_{k=0}^M b_k r_{xy}(p-k) \quad (\text{III.70})$$

onde $r_{yy}(p)$ é a função de autocorrelação (*fac*) da saída y_k com atraso p ;
 $r_{xy}(p)$ é a função de correlação cruzada entre a entrada e a saída, com atraso p .

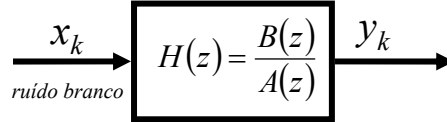


Figura III.6 – Filtro linear, com entrada, saída e função de transferência.

Sendo a entrada do sistema admitida como ruído branco, pode-se mostrar que (MARPLE, 1987):

$$r_{xx}(p) = \begin{cases} r_{xx}^*(p) & , \text{ para } p < 0 \\ - \sum_{k=1}^N a_k r_{xx}(p-k) + \sigma_x^2 \sum_{k=p}^M b_k h^*(k-p) & , \text{ para } 0 \leq p \leq M \\ - \sum_{k=1}^N a_k r_{xx}(p-k) & , \text{ para } p > M \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

onde $x(k)$ é a seqüência de entrada (ruído branco);
 $h(k)$ é a IRF do sistema, uma vez que $r_{xy}(k) = r_{xx}(k) * h(k)$;
 σ_x^2 é a variância do ruído branco, com $r_{xx}(k) = \sigma_x^2 \delta(k)$;
 $\delta(k)$ é a função delta de Dirac.

Pela observação da Eq. III.71 percebe-se que a partir da *fac* do sinal de saída, os coeficientes autoregressivos $\{a_k\}$ podem ser calculados separadamente dos coeficientes de média móvel $\{b_k\}$ para índices de atraso superiores ao número de zeros do modelo ($p \geq M + 1$). Por outro lado, os parâmetros MA não podem ser obtidos, pois se encontram convoluídos com a IRF, resultando numa relação não-linear indesejável com a *fac*.

A não linearidade trazida pelos parâmetros MA tem sido evitada nas aplicações gerais da área de identificação de sistemas em função do mau desempenho computacional dos algoritmos aplicados e pelos resultados geralmente pouco confiáveis obtidos (MATHIAS, 1998, STOICA *et al.* 2000-a, PEETERS, 2000). STOICA *et al.* (2000-a), entretanto, apresentam uma nova solução à estimação dos coeficientes MA, obtendo bons resultados.

Removendo-se os coeficientes de médias móveis do modelo ARMA, obtém-se um processo autoregressivo (AR) puro, representado pela equação linear:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_N y_{k-N} = x_k \quad (\text{III.72})$$

Retirando-se os coeficientes MA também da expressão da *fac* (Eq. III.71), obtém-se, pela disposição matricial, o sistema de equações de Yule-Walker AR (BOX e JENKINS, 1970, MARPLE, 1987):

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-N) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N) & r_{xx}(N-1) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.73})$$

Vale ressaltar que a matriz de autocorrelação da Eq. III.73 é Hermitiana, uma vez que é quadrada e $r_{xx}(-k) = r_{xx}^*(k)$, além de seguir o padrão de Toeplitz, o que potencializa o desempenho computacional da solução do sistema.

A equação de Yule-Walker permite que os coeficientes AR e a variância do ruído branco de entrada sejam calculados a partir das funções de autocorrelação, estimadas diretamente a partir dos sinais de saída do sistema. A matriz de Toeplitz simétrica da representação de Yule-Walker pode ser estimada como um produto de matrizes constituídas pelos valores temporais da saída $y(k)$ dispostos segundo diagonais (JACKSON, 1996):

$$\hat{\mathbf{R}} = [\mathbf{y}]^T [\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(N) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N) & r_{xx}(N-1) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (\text{III.74})$$

onde $\hat{\mathbf{R}}$ é a matriz de autocorrelação estimada a partir da seqüência de saída;
 $[\mathbf{y}]$ é a matriz de dados na forma de Toeplitz (respostas no tempo).

Dependendo de como as saídas são dispostas na matriz de dados, diferentes desdobramentos da representação de Yule-Walker são obtidos, cada um deles constituindo um método de identificação diferente.

Para a matriz de dados na forma de Toeplitz apresentada na Eq. III.75, por exemplo, a qual equivale à aplicação de uma janela retangular de tamanho $(L + 1)$ à IRF infinita $h(k)$, obtém-se a matriz de autocorrelação referente ao Método da Autocorrelação (JACKSON, 1996), ou Método de Predição Linear (MAKHOUL, 1975). Neste método pode-se admitir que $y(k)$ corresponde à resposta de um sistema causal inicialmente em repouso e submetido à uma força aplicada num instante zero.

$$[\mathbf{y}]_{\text{MPL}} = \begin{bmatrix} y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_L & y_{L-1} & \cdots & y_0 \\ 0 & y_L & \cdots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_L \end{bmatrix}_{(2L+1) \times (L+1)} \quad (\text{III.75})$$

Estimando-se a matriz de autocorrelação da Eq. III.74 por matrizes de dados não janelados, ou seja, completas, obtém-se as expressões do Método da Covariância (de predição linear) as quais são idênticas àquelas obtidas pelo método de Prony com mínimos quadrados (MARPLE, 1987). Uma descrição de vários métodos de estimação dos parâmetros AR baseados em modificações à equação de Yule-Walker pode ser encontrada na publicação de LJUNG (1997).

Os coeficientes autoregressivos (AR) obtidos na Eq. III.73 definem o polinômio no denominador da função de transferência. Uma vez estimados, as frequências naturais, as taxas de amortecimento e as formas modais podem ser calculadas pela mesma abordagem matricial geral da estimação de parâmetros modais descrita na apresentação da técnica LSCE.

Os coeficientes MA, entretanto, são indispensáveis na composição do modelo ARMA, este sim consistindo numa boa representação de uma estrutura deformável em vibração. Pode-se mostrar, por outro lado, que um processo AR com ordem teoricamente infinita é equivalente a um modelo ARMA de ordem finita, o que tem motivado o uso do algoritmo AR na identificação de sistemas estruturais. A hipótese de

ordem infinita é substituída, na prática, pela introdução de um grande número de pólos excedentes no cálculo, o que acaba por dificultar a separação dos modos reais dos “computacionais” (PEETERS, 2000, MARPLE, 1987). Discussões sobre critérios da definição da ordem real dos modelos AR obtidos podem ser encontrados nos trabalhos de KAY (1988), LARDIES (1996), e MATHIAS (1998).

FRIEDLANDER (1983) mostra que a técnica modificada de Yule-Walker de estimação ARMA é um caso especial do Método da Variável Instrumental (IV) de identificação de sistemas. O método IV foi introduzido inicialmente por Olav Reiersol em 1941 para a solução de problemas da área de Ciências Econômicas. Pode ser utilizado para estimar um conjunto de N parâmetros a partir de uma série de ($L > N$) equações algébricas envolvendo esses parâmetros, um conjunto de observações, e um conjunto de termos de ruído não observáveis. Pré-multiplicando-se a matriz dos coeficientes das equações por uma outra matriz retangular arbitrária, obtém-se uma matriz quadrada forçosamente inversível, a partir da qual resolve-se o novo sistema de equações obtido. Os elementos que compõem essa matriz arbitrária são chamados de *variáveis instrumentais* e são correlacionados com as observações. O método IV conduz invariavelmente a boas estimações, entretanto, a taxa de convergência aos valores reais dos parâmetros depende da escolha das variáveis instrumentais, as quais devem, por isso, serem escolhidas segundo algum critério de otimização (WONG e POLAK, 1967). STOICA e SÖDERSTRÖM (1983) provam que as estimações obtidas apresentam assintoticamente uma distribuição gaussiana, permitindo que a covariância dessa distribuição seja usada como medida da qualidade da estimação.

III.3.3 – Técnicas de Identificação no Espaço de Estados

Uma série de técnicas no domínio do tempo se caracteriza pela aplicação da decomposição em valores singulares sobre matrizes compostas por valores da IRF ou por estimações das covariâncias dos sistemas a analisar. A partir desta abordagem, pode-se obter a realização mínima, que é uma representação em espaço de estados (SS) de ordem mínima que consegue reproduzir o vetor de saída para o vetor de entrada usado num determinado ensaio.

A representação em espaço de estados de um sistema discreto no domínio do tempo, conforme já apresentado no capítulo II (vide Eq. II.93), pode ser colocada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \mathbf{B} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{s}(k) + \mathbf{D} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

onde $\mathbf{s}(k)$ é o vetor de estado $n \times 1$ no tempo k ;
 $\mathbf{x}(k)$ é o vetor das entradas $p \times 1$ no tempo k ;
 $\mathbf{y}(k)$ é o vetor de saída $q \times 1$ no tempo k , $k = 1, 2, \dots, \ell$;
 \mathbf{A} é a matriz de estado do sistema;
 \mathbf{B} é a matriz de entrada;
 \mathbf{C} é a matriz de observação ou saída;
 \mathbf{D} é a matriz de transmissão direta.

A Eq. (III.76) pode ser reescrita para vários passos de tempo, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}(2) & \mathbf{s}(3) & \cdots & \mathbf{s}(\ell) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(\ell-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(1) & \mathbf{s}(2) & \cdots & \mathbf{s}(\ell-1) \\ \mathbf{x}(1) & \mathbf{x}(2) & \cdots & \mathbf{x}(\ell-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.77})$$

Se os vetores $\mathbf{s}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$ fossem todos conhecidos, então as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} poderiam ser calculadas a partir da solução da expressão acima por mínimos quadrados. Entretanto, o vetor de estado é geralmente desconhecido, e deve ser previamente estimado ou medido, se possível. Após algumas manipulações matemáticas pode-se colocar a Eq. (III.77) na forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+\alpha-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \mathbf{s}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{\alpha-2} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\alpha-3} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\alpha-4} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+\alpha-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.78})$$

Substituindo-se o vetor de entradas pela função pulso unitário (segundo todos os graus de liberdade) e admitindo-se o sistema como relaxado ($\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$), obtém-se, similarmente ao apresentado na Eq. II.115, a expressão de matrizes compostas de p respostas a q impulsos para cada passo de tempo, denominadas parâmetros de Markov.

$$Y(0) = \mathbf{D}, Y(1) = \mathbf{CB}, Y(2) = \mathbf{CAB}, \dots, Y(k) = \mathbf{CA}^{k-1} \mathbf{B}$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{12}(k) & \dots & h_{1q}(k) \\ h_{21}(k) & h_{22}(k) & \dots & h_{2q}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1}(k) & h_{p2}(k) & \dots & h_{pq}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{III.79})$$

onde $h_{ij}(k)$ é o k -ésimo termo da IRF segundo o GL i devida ao pulso em j ;
 $Y(k)$ é o k -ésimo parâmetro de Markov.

Dentro deste contexto, *realização* é o cálculo das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} da representação em espaço de estados de um sistema a partir do conhecimento dos parâmetros de Markov (vide Eq. II.115 no capítulo anterior). Como existem infinitas representações de espaço de estado (realizações) que conseguem reproduzir uma resposta impulsional para um mesmo conjunto de entradas e saídas, a identificação do sistema pode ser atingida através da obtenção realização que implique nas menores dimensões das equações de espaço de estado possíveis, ou seja, a *realização mínima*. Todas as realizações mínimas possuem o mesmo conjunto de autovalores, os quais têm correspondência direta com os parâmetros modais do sistema.

Compondo os parâmetros de Markov segundo matrizes de Hankel (com valores iguais nas anti-diagonais), e fazendo uso das expressões da Eq. III.79, obtém-se a seguinte decomposição:

$$\mathbf{H}(k-1)_{p \times q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k-1+\beta} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k-1+\alpha} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \dots & \mathbf{Y}_{k-2+\alpha+\beta} \end{bmatrix}_{p \times q \beta} \quad (\text{III.80})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{\beta-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{III.81})$$

$$= \mathbf{O}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{\Gamma}_\beta \quad (\text{III.82})$$

onde H é a matriz dos parâmetros de Markov na forma de Hankel, ou ainda “Matriz ERA de dados em bloco”, na denominação de Juang (1994);
 O_α é denominada matriz observabilidade;
 Γ_β é denominada matriz controlabilidade;
 α e β são inteiros escolhidos com valores maiores que a ordem do sistema.

Pode ser demonstrado que os autovalores da matriz de estado no domínio contínuo do tempo (A_c) correspondem aos pólos das exponenciais complexas que compõem a resposta impulsiva do sistema (RAO e ARUN, 1992). A decomposição em autovalores e autovetores da matriz de estado discreta de ordem n pode ser colocada como:

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (\text{III.83})$$

onde Ψ corresponde à matriz dos autovetores da descrição em espaço de estados;
 Λ é a matriz diagonal contendo os autovalores discretos $(\lambda_{d1}, \dots, \lambda_{dn})$.

Os autovalores discretos estão relacionados com os autovalores (λ_i) da matriz de estado contínua A_c pela relação:

$$\lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_{di}) \quad (\text{III.84})$$

onde Δt é o intervalo de amostragem. Os autovalores contínuos ocorrem em pares complexos, sendo que os fatores de amortecimento e as frequências naturais amortecidas de cada modo do sistema correspondem respectivamente às partes reais e imaginárias dos pólos λ_i . As formas modais Φ descritas segundo as referências de saída podem ser obtidas do sistema de autovetores Ψ e a partir da equação de observação:

$$\Phi = C\Psi \quad (\text{III.85})$$

Os métodos de identificação no espaço de estados podem ser caracterizados pela estimação comum do modelo modal pela decomposição da matriz de estado

discreta A , diferindo-se principalmente na forma como a referida matriz de estado é definida.

IBRAHIM e MIKULCIK (1973) apresentam de forma pioneira um método que faz uso do vetor de estado físico posição-velocidade (vide Eq. II.94), obtendo inicialmente a matriz de estado contínua do sistema em vibração livre pela integração do sinal fornecido pelos acelerômetros. Posteriormente apresentam nova abordagem (IBRAHIM e MIKULCIK, 1977), obtendo a matriz de estado discreta pela solução por mínimos quadrados da equação de estado montada a partir de amostras defasadas dos sinais de decaimento da aceleração (ou velocidade, ou deslocamento):

$$\mathbf{H}(0) = A \mathbf{H}(1) \quad (\text{III.86})$$

O método ficou conhecido na literatura por *Ibrahim Time Domain* (ITD) tendo recebido também a denominação de *Least-squares Regression Technique* no trabalho de Juang, (JUANG, 1994) que propõem uma reclassificação de todas as técnicas de análise modal no domínio do tempo através de uma perspectiva generalista representada no espaço de estados.

A matriz de estado obtida pelo ITD não corresponde geralmente a uma realização mínima, implicando no aparecimento de uma série de “modos computacionais” na solução do algoritmo. Este fato motivou a elaboração do Modal Confidence Factor (MCF), técnica para distinção dos “modelos estruturais reais” entre os demais (IBRAHIM, 1978).

O método ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*) apresentado em 1985 por Juang e Pappa e amplamente desdobrado em JUANG (1994) tem como primeiro passo a obtenção dos parâmetros de Markov a partir dos sinais de entrada e saída do sistema. O próximo passo consiste no cálculo das matrizes de Hankel $\mathbf{H}(0)$ e $\mathbf{H}(1)$. Decompondo em valores singulares a matriz $\mathbf{H}(0)$ e igualando-a à expressão da Eq. III.82, pode-se obter uma solução para as expressões das matrizes de observabilidade \mathbf{O}_α e controlabilidade $\mathbf{\Gamma}_\beta$:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^t \quad (\text{III.87})$$

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{O}_\alpha \mathbf{\Gamma}_\beta \quad (\text{III.88})$$

$$\Rightarrow \mathbf{O}_\alpha = \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \quad (\text{III.89})$$

$$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_\beta = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{S}^t \quad (\text{III.90})$$

onde \mathbf{R} e \mathbf{S} são as matrizes ortogonais da SVD;
 $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz diagonal com os valores singulares.

Substituindo as expressões admitidas para \mathbf{O}_α e $\mathbf{\Gamma}_\beta$ na expressão da matriz de Hankel $\mathbf{H}(l)$, obtém-se finalmente a expressão da matriz de estado discreta \mathbf{A} :

$$\mathbf{H}(l) = \mathbf{O}_p \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_q = \mathbf{R}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_k^{1/2} \mathbf{S}_k^t \quad (\text{III.91})$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1/2} \mathbf{R}_k^t \mathbf{H}(l) \mathbf{S}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1/2} \quad (\text{III.92})$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}_k$ é a matriz formada pelas k primeiras linhas e colunas de $\boldsymbol{\Sigma}$;
 \mathbf{R}_k e \mathbf{S}_k são matrizes formadas pelas k primeiras colunas de \mathbf{R} e \mathbf{S} , ou seja, contém os vetores singulares correspondentes aos k maiores valores singulares.

Em 1960, no trabalho intitulado “*Contributions to the theory of optimal control*”, apresentado numa conferência cujos anais foram publicados numa desconhecida revista mexicana, Rudolf Emil Kalman cunhou os conceitos de *observabilidade e controlabilidade*, hoje elementos basilares da teoria de controle ótimo de sistemas definidos segundo variáveis de estado. Controlabilidade de um sistema refere-se à influência do vetor de entrada no vetor de estado. Assim, um sistema é dito controlável se pode ser obtido a partir de qualquer estado inicial do sistema, num intervalo de tempo finito por algum vetor de entrada. Observabilidade, por sua vez, está relacionada com a influência do vetor de estado no vetor de saída. O estado de um sistema num dado tempo é observável se pode ser determinado conhecendo-se os vetores de entrada e saída num intervalo finito de tempo (JUANG, 1994). A realização mínima deve sempre representar um sistema observável e controlável.

Ao longo do tempo vários aperfeiçoamentos foram introduzidos no método ERA a fim de se minimizar o efeito do ruído. Destaca-se a variação ERA-DC (*Data Correlation*), que utiliza estimativas da matriz (função) de autocorrelação dos

parâmetros de Markov para compor a matriz $\mathcal{H}(k)$ de correlação em blocos, na forma de Hankel (JUANG, 1994):

$$\mathcal{H}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k) & \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+\tau) & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+b\tau) \\ \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+\tau) & \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+2\tau) & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+(b+1)\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+a\tau) & \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+(a+1)\tau) & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{hh}(k+(a+b)\tau) \end{bmatrix}_{(a+1)\alpha \times (b+1)\beta q} \quad (\text{III.93})$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{hh}(k) = \mathbf{H}(k) \mathbf{H}^T(0) \quad (\text{III.94})$$

$$\mathbf{H}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+N} \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \mathbf{Y}_{k+4} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+N+1} \\ \mathbf{Y}_{k+3} & \mathbf{Y}_{k+4} & \mathbf{Y}_{k+5} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+m+1} & \mathbf{Y}_{k+m+2} & \mathbf{Y}_{k+m+3} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+N+m} \end{bmatrix}_{(m+1)p \times N} \quad (\text{III.95})$$

onde $\hat{\mathcal{R}}_{yy}(k)$ é a matriz de autocorrelação (covariância) cheia, de Toeplitz, com atrasos de $(k-m)$ a $(k+m)$;

$\hat{\mathcal{R}}_{yy}(k)$ é a autocorrelação do vetor de saída para um atraso igual a k ;

$\mathbf{H}(k)$ é a matriz dos parâmetros de Markov, na forma de Hankel.

Alternativamente às expressões das Eq. III.94 e III.95, pode-se colocar, por definição:

$$\hat{\mathcal{R}}_{hh}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k) & \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k-1) & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k-m) \\ \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k+1) & \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k) & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{yy}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k+m) & \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k+m-1) & \cdots & \hat{\mathcal{R}}_{yy}(k) \end{bmatrix}_{\alpha p \times \alpha p} \quad (\text{III.96})$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{yy}(k) = \frac{1}{N} [\mathbf{Y}_{k+1} \cdots \mathbf{Y}_{k+N}] \cdot [\mathbf{Y}_1 \cdots \mathbf{Y}_N]^T \quad (\text{III.97})$$

As técnicas no domínio do tempo de identificação de sistemas de vários graus de liberdade se caracterizam pela decomposição, parametrizada ou não, de matrizes compostas pelos valores da IRF (ou respostas impulsivas) ou por estimações das funções de autocorrelação dos sinais. Dentro da perspectiva da Teoria de Controle, Juang publicou inicialmente em 1986, em relatório da NASA, artigo apresentando a correspondência matemática existente entre alguns métodos de análise modal e a Teoria da Realização Mínima (JUANG, 1994).

Destaca-se nessa correspondência estabelecida por Juang o algoritmo denominado *Canonical-Form Realization*, similar, se não idêntico, à técnica de análise modal *Polyreference Time Domain* (VOLD e ROCKLIN, 1982). Pré e pós-multiplicando a equação da decomposição observabilidade-controlabilidade (Eq. III.88) pelas matrizes ortogonais \mathbf{R} e \mathbf{S} da decomposição de $\mathbf{H}(\theta)$, e fazendo-se uso da propriedade de ortogonalidade, obtém-se:

$$\mathbf{R}^t \mathbf{H}(\theta) \mathbf{S} = \mathbf{R}^t \mathbf{O}_\alpha \Gamma_\beta \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Sigma_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{III.98})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^t \mathbf{O}_\alpha \Gamma_\beta \mathbf{S}_k & \mathbf{R}_k^t \mathbf{O}_\alpha \Gamma_\beta \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{R}_0^t \mathbf{O}_\alpha \Gamma_\beta \mathbf{S}_k & \mathbf{R}_0^t \mathbf{O}_\alpha \Gamma_\beta \mathbf{S}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{III.99})$$

onde \mathbf{R}_0 é a sub-matriz de \mathbf{R} , obtida ao se excluírem as suas k primeiras colunas;
 \mathbf{S}_0 é a sub-matriz de \mathbf{S} , obtida ao se excluírem as suas k primeiras colunas.

Admitindo-se que o sistema é observável e controlável, e que as matrizes \mathbf{R}_k , \mathbf{O}_α , Γ_β , e \mathbf{S}_k possuem posto k , implica, pela observação da Eq. III.99, nas igualdades:

$$\mathbf{R}_0^t \mathbf{O}_\alpha = \mathbf{0} \quad (\text{III.100})$$

$$\Gamma_\beta \mathbf{S}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{III.101})$$

Substituindo a expressão algébrica da matriz de observabilidade (Eq. III.80 a III.82) na Eq. III.100 acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0_1}^t & \mathbf{R}_{0_2}^t & \cdots & \mathbf{R}_{0_\alpha}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{III.102})$$

$$\Rightarrow \mathbf{CA}^{\alpha-1} = -\sum_{i=1}^{\alpha-1} [\overline{\mathbf{R}}_{0_\alpha}^t]^{-1} \overline{\mathbf{R}}_{0_i}^t \mathbf{CA}^{i-1} \equiv -\sum_{i=1}^{\alpha-1} \tilde{\mathbf{R}}_{0_i}^t \mathbf{CA}^{i-1} \quad (\text{III.103})$$

onde \mathbf{R}_{0_i} é a i -ésima coluna de \mathbf{R}_0 ;
 $\overline{\mathbf{R}}_{0_i}$ é a sub-matriz quadrada de \mathbf{R}_0 , com ordem igual ao número de saídas p ;
 $\tilde{\mathbf{R}}_{0_i} = [\overline{\mathbf{R}}_{0_\alpha}]^{-1} \overline{\mathbf{R}}_{0_i}^t$.

As Eq. III.102 e III.103 podem ser rearranjadas para se obter a forma de matriz companheira (*companion form*) de sistemas em espaço de estados (SCHIMEL e GRANTHAM, 1995), obtendo-se por fim (JUANG, 1994):

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_p \\ -\tilde{\mathbf{R}}_{0_1}^t & -\tilde{\mathbf{R}}_{0_2}^t & -\tilde{\mathbf{R}}_{0_3}^t & \cdots & -\tilde{\mathbf{R}}_{0_{(\alpha-1)}}^t \end{bmatrix} \quad (\text{III.104})$$

A realização delineada acima é denominada “realização forma-canônica observável”, sem, entretanto, nada poder se garantir sobre sua controlabilidade, ou seja, não se trata geralmente de uma realização mínima. A partir da definição da matriz transmissibilidade das Eq. III.80 a III.82 aplicada na Eq. III.101, pode-se obter analogamente a “realização forma-canônica controlável” (JUANG, 1994).

Abordagens na identificação no espaço de estados de sistemas estocásticos têm sido amplamente apresentadas, devendo-se ressaltar a técnica *Covariance-driven Stochastic Subspace Identification – SSI/COV* (PEETERS, 2000). Admitindo-se que o sistema está submetido a processos estocásticos gaussianos não correlacionados em suas entradas e saídas, o modelo em espaço de estados assume a representação puramente estocástica (vide Eq. II.167 no capítulo anterior):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{s}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (\text{III. 105})$$

onde $\mathbf{w}(k)$ é o ruído do processo $p \times 1$ no tempo k ;
 $\mathbf{v}(k)$ é o ruído de medição $q \times 1$ no tempo k ;

Esta técnica se assemelha com o ERA/DC, com as matrizes dos parâmetros de Markov sendo substituídas por matrizes de correlação dos sinais de saída na forma de Toeplitz, onde cada elemento da matriz constitui um estimador da função de autocorrelação, como por exemplo:

$$\hat{\mathbf{R}}_{yy}(k) = \frac{1}{N} [\mathbf{y}_{k+1} \cdots \mathbf{y}_{k+N}] \cdot [\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_N]^T \quad (\text{III.106})$$

onde \mathbf{y}_k é o vetor de saídas no instante $k \cdot \Delta t$;
 N é o número de elementos da seqüência de autocorrelação.

PEETERS (2000) sugere que a matriz de covariância seja calculada somente entre um conjunto limitado de saídas de referência com as demais, ao invés de realizar o cálculo entre todas elas. As respostas de referência seriam escolhidas entre as “melhores”, ou seja, nos GL onde se percebe a influência de um maior número de modos. O critério de seleção desses GL recomenda simplesmente a escolha das mesmas posições onde se estabeleceria a excitação da estrutura num ensaio controlado (*inputs*). Para isso, propõe inicialmente uma reordenação do vetor de dados de saída (num instante discreto k), onde as respostas de referência são dispostas anteriormente:

$$\mathbf{y}_k = \{\mathbf{y}(k)\}_{p \times 1} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{y}_k^{ref}]_{r \times 1} \\ [\mathbf{y}_k^{\sim ref}]_{(p-r) \times 1} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.107})$$

$$\mathbf{y}_k^{ref} = \mathbf{L} \mathbf{y}_k = [\mathbf{I}_r \ \mathbf{0}] \mathbf{y}_k \quad (\text{III.108})$$

onde \mathbf{y}_k é o vetor das respostas no instante k ;
 \mathbf{y}_k^{ref} é o vetor das saídas de referência, extraído a partir de \mathbf{y}_k ;
 $\mathbf{y}_k^{\sim ref}$ é o vetor com as demais saídas;
 \mathbf{L} é o operador linear de seleção das saídas de referência;
 r é o número de saídas de referência selecionadas;

p é o número total de saídas.

Dentro dessa abordagem, a matriz de funções de correlação em blocos fica igual a:

$$\hat{\mathbf{R}}_{yy}(k) = \mathbf{H}(k) [\mathbf{H}^{ref}(0)]^T \quad (\text{III.109})$$

Ou alternativamente, no cálculo elemento a elemento (vide Eq. III.96), tem-se:

$$\hat{R}_{yy}(k) = \frac{1}{N} [\mathbf{y}_{k+1} \cdots \mathbf{y}_{k+N}] \cdot [\mathbf{y}_1^{ref} \cdots \mathbf{y}_N^{ref}]^T \quad (\text{III.110})$$

III.3.4 – Técnicas de Identificação Direta pelos Sinais no Tempo

Técnicas de identificação baseadas diretamente nas informações de saída dos sistemas (*Data-driven Techniques*) têm sido cada vez mais utilizadas. O principal objetivo dos métodos de identificação direta pelos sinais no tempo consiste na busca da identificação de modelos sem fazer uso de estimativas preliminares de espectros, funções de autocorrelação, ou parametrizações. Uma visão geral das metodologias e possibilidades dessas técnicas pode ser obtida a partir do exemplar especial 41(3) da revista *Automática* (2005), *Data-Based Modelling and System Identification*, além do trabalho de PEETERS (2000).

Admitindo-se que as saídas \mathbf{y} de um sistema são monitoradas em diferentes posições por um determinado período, enquanto a excitação que produz no sistema tais respostas é desconhecida, deseja-se identificar o sistema a partir do seguinte modelo puramente estocástico, linear, estacionário, e discreto no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{s}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (\text{III.111})$$

onde \mathbf{y}_k é o vetor com as p saídas no tempo k ;
 \mathbf{s}_k é o vetor de estado (estocástico) no tempo k , de dimensão n ;
 \mathbf{w}_k é o ruído do processo $n \times 1$ no tempo k ;

\mathbf{v}_k é o ruído de medição $p \times 1$ no tempo k .

Os vetores \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são também desconhecidos, entretanto admitidos como processos gaussianos de ruído branco, com suas matrizes de covariância obedecendo a seguinte relação:

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta_{pq} \quad (\text{III.112})$$

A Fig. III.7 ilustra um sistema puramente estocástico, estacionário, com saídas \mathbf{y}_k e estados \mathbf{s}_k , descrito pelas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} (e pelas matrizes de covariância \mathbf{Q} , \mathbf{S} , e \mathbf{R}). Neste problema, apenas as respostas são conhecidas, e os estados são determinados como passo intermediário da identificação.

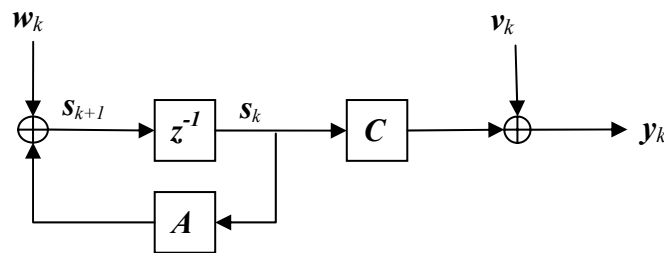


Figura III.7 – Representação gráfica de um sistema puramente estocástico, estacionário, com saídas \mathbf{y}_k e estados \mathbf{s}_k (VAN OVERSCHEE, 1995).

Aplicações da técnica denominada *Stochastic Subspace Identification* – SSI – têm se destacado na literatura de Análise Modal desde a publicação do livro de VAN OVERSCHEE e DE MOOR (1996), baseado fundamentalmente na Tese de Doutorado do primeiro autor pelo Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Católica de Leuven defendida no ano anterior. Bart Peeters, naquela ocasião fazendo seu doutorado no Departamento de Engenharia Civil da mesma universidade, publicou ainda em 1995 junto com seu orientador e outros dois autores, o primeiro artigo apresentando objetivamente a técnica SSI para a identificação estrutural via análise modal (PEETERS *et al.*, 1995).

Mesmo sem apresentarem um entendimento apropriado dos algoritmos disponibilizados nas publicações supracitadas, diversos artigos foram desde então publicados exibindo geralmente excelentes resultados na identificação em operação

(*output-only*) dos mais diversos sistemas estruturais. Só num segundo e tardio movimento, entretanto, pôde-se perceber uma maior preocupação no entendimento físico e analítico da técnica SSI nas aplicações de identificação de sistemas mecânicos e estruturais (DE COCK *et al.*, 2002, BRINCKER e ANDERSON, 2006).

Os algoritmos de identificação por subespaços podem ser entendidos por generalizações “entradas-estados-saídas” da teoria clássica da Realização, na identificação de modelos no espaço de estados a partir de respostas impulsivas. VAN OVERSCHEE (1995) apresenta um diagrama, ilustrado aqui na Fig. III.8, que sumariza o processo de construção de modelos no espaço de estados pelo método dos subespaços e por algumas abordagens clássicas. Enquanto boa parte dos métodos de identificação obtém inicialmente um modelo de elevada ordem e então procedem a técnicas de redução, a abordagem por subespaços destaca-se por primeiramente obter uma seqüência de estados reduzida, identificando em seguida diretamente o modelo de baixa ordem.

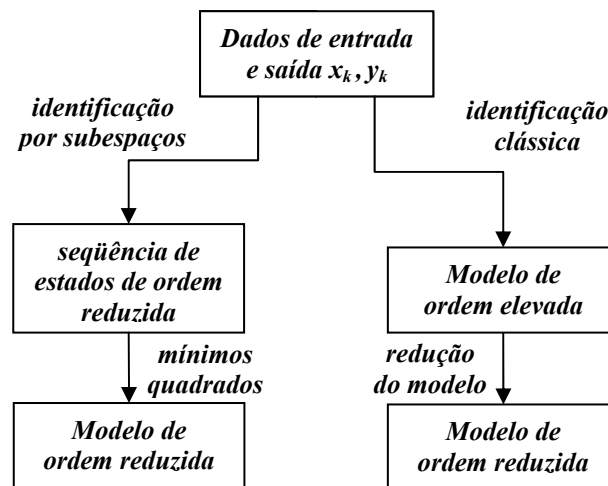


Figura III.8 – Sistemas de identificação na busca da obtenção de modelos no espaço de estados, destacando-se a abordagem dos métodos dos subespaços da abordagem clássica (VAN OVERSCHEE, 1995).

O grande êxito do algoritmo de identificação por subespaços de Van Overschee consiste na aplicação da formulação do filtro de Kalman (GELB, 1974) na demonstração de como se podem estimar os estados diretamente a partir dos dados de saída utilizando-se apenas ferramentas da álgebra linear, sem o conhecimento do modelo matemático do sistema.

As fases principais dos métodos dos subespaços podem ser observadas na Tabela III.1. Inicialmente, de forma inovadora, determina-se a seqüência do vetor de estados do sistema dinâmico diretamente a partir dos dados de entrada e saída (ou apenas saída) sem se conhecer o modelo matemático (matrizes do sistema) fazendo-se uso de ferramentas de álgebra linear (decomposição QR e decomposição em valores singulares). Uma vez conhecidos os estados, podem-se obter em seguida as matrizes do sistema por mínimos quadrados.

Tabela III.1 – Tabela síntese dos algoritmos de identificação por subespaços (VAN OVERSCHEE, 1995).

Fase da Identificação	Interpretação geométrica	Algoritmo aplicado
Seqüência de estados (ordem elevada)	Projeção (ortogonal ou oblíqua)	Decomposição QR
Seqüência de estados (baixa ordem)	Determinação de subespaço de dimensão finita	Decomposição em valores singulares (SVD)
Matrizes do sistema	Relações lineares	Mínimos quadrados

De forma análoga a outros métodos no espaço de estados já apresentados, o método SSI trata das saídas do sistema de forma agrupada em uma matriz de dados na forma de Hankel, com $2i$ blocos de linhas e j colunas. Dividindo-se essa matriz em “passado” e “futuro” tem-se, utilizando-se a notação de VAN OVERSCHEE (1995):

$$\mathbf{H}_{0|2i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_{j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{i-2} & \mathbf{y}_{i-1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-3} \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-1} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+j-2} \end{bmatrix}_{2i \times j} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{0|i-1} \\ \mathbf{H}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{passado} \\ \mathbf{H}_{futuro} \end{bmatrix} \quad (\text{III.113})$$

onde os termos subscritos das matrizes de dados denotam o primeiro e o último elemento da primeira das j colunas, e as matrizes $\mathbf{H}_{0|i-1}$ e $\mathbf{H}_{i|2i-1}$, respectivamente

denominadas de matrizes de dados “passados” e “futuros”, são obtidas pela divisão em partes iguais (de mesmo número de linhas) da matriz $\mathbf{H}_{0|2i-1}$.

O número de linhas da matriz de dados deve ser maior que a ordem do sistema a identificar, lembrando-se que a dimensão máxima do espaço de estados corresponde ao número máximo de autovalores que podem ser identificados. A fim de se utilizar todas as s amostras de dados o número de colunas deve ser igual a $s - 2i + 1$, não devendo ser menor que $2i - 1$ (DE COCK *et al.*, 2002).

Outra definição importante nos métodos dos subespaços consiste na (matriz) projeção do espaço-linha das saídas “futuras” no espaço-linha das saídas “passadas”, onde espaço-linha é o subespaço formado pelas linhas da matriz (de Hankel) das saídas, considerada como um conjunto de vetores:

$$\mathcal{P}_i \equiv \mathbf{H}_f \angle \mathbf{H}_p \quad (\text{III.114})$$

$$= \mathbf{H}_f \mathbf{H}_p^T (\mathbf{H}_p \mathbf{H}_p^T)^\dagger \mathbf{H}_p \quad (\text{III.115})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2l} \\ \mathbf{R}_{3l} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_l^T \quad (\text{III.116})$$

onde \mathcal{P}_i é a projeção de \mathbf{H}_f em \mathbf{H}_p ;

\mathbf{H}_f é a matriz de dados “futuros”;

\mathbf{H}_p é a matriz de dados “passados”;

$()^\dagger$ é o operador da pseudo-inversa de Moore-Penrose;

\mathbf{R}_{2l} , \mathbf{R}_{3l} e \mathbf{Q}_l^T são blocos da decomposição QR da matriz de dados $\mathbf{H}_{0|2i-1}$ na forma da Eq. (III.117).

$$\mathbf{H}_{0|2i-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} pi & p & p(i-1) & j \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} pi \downarrow \\ p \downarrow \\ p(i-1) \downarrow \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{2l} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{3l} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_l^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{III.117})$$

VAN OVERSCHEE (1995) demonstra que a matriz projeção \mathcal{P}_i descrita acima pode ser fatorada em termos da matriz observabilidade \mathbf{O}_i e a seqüência de estados preditos $\hat{\mathbf{S}}_i$:

$$\mathcal{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_i & \hat{\mathbf{s}}_{i+1} & \cdots & \hat{\mathbf{s}}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{S}}_i \quad (\text{III.118})$$

Nas palavras de PEETERS (2000), esta projeção busca “reter a informação nas saídas passadas que podem ser úteis para se prever o futuro”. Sua interpretação geométrica pode ser vista na Fig. III.9 abaixo. BRINCKER e ANDERSEN (2006) atentam que para processos estocásticos Gaussianos, a operação de projeção corresponde algebricamente a uma função das covariâncias das saídas.

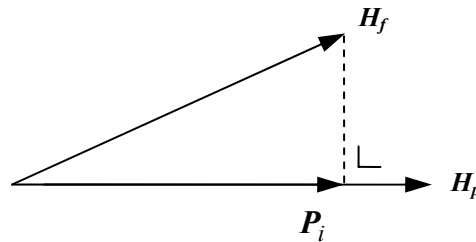


Figura III.9 – Ilustração da projeção ortogonal do espaço-linha das saídas futuras no espaço-linha das saídas passadas (PEETERS, 2000).

A fim de se obterem estimativas das matrizes \mathbf{O}_i e $\hat{\mathbf{S}}_i$ bem como a ordem do modelo, procede-se a decomposição em valores singulares da expressão da matriz projeção \mathcal{P}_i obtida na Eq. III.116:

$$\mathcal{P}_i = \underbrace{[U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{31} \end{bmatrix}} Q_i^T \quad (\text{III.119})$$

O número de autovalores não nulos (tomados a partir de um *threshold* adotado numericamente como zero) que compõem a matriz Σ_l indica a ordem do sistema, e as matrizes de observabilidade e a seqüência de estados podem ser admitidas como:

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{U}_l \Sigma_l^{1/2} \quad (\text{III.120})$$

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \Sigma_l^{1/2} \mathbf{V}_l^T \mathbf{Q}_l^T \quad (\text{III.121})$$

$$= \mathbf{O}_i^\dagger \mathcal{P}_i \quad (\text{III.122})$$

Uma vez obtidas as estimativas dos estados, pode-se proceder a identificação das matrizes do sistema a partir da formulação do espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{i+1} \\ \mathbf{H}_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_w \\ \boldsymbol{\rho}_v \end{bmatrix} \quad (\text{III.123})$$

onde $\mathbf{H}_{i|i}$ é a matriz de dados com apenas um bloco de linhas e $\boldsymbol{\rho}_w$ e $\boldsymbol{\rho}_v$ são os resíduos.

A seqüência de estados $\hat{\mathbf{S}}_{i+1}$ pode ser obtida analogamente à Eq. III.122 pela redefinição da divisão da matriz de dados, ou seja, pela adição de um bloco de linhas de dados às matrizes de dados “passados”, ao mesmo tempo em que se retira o primeiro bloco de linhas das matrizes de dados “futuros”. VAN OVERSCHEE e DE MOOR (1996) mostram que isso corresponde algebricamente a:

$$\hat{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{O}_{i-1}^\dagger \mathcal{P}_{i-1} \quad (\text{III.124})$$

$$\mathcal{P}_{i-1} \equiv \mathbf{H}_f^+ / \mathbf{H}_p^- = [\mathbf{R}_{31} \quad \mathbf{R}_{32}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (\text{III.125})$$

$$\mathbf{O}_{i-1} = \mathbf{O}_i (1 : p(i-1), :) \quad \text{na notação do MATLAB} \quad (\text{III.126})$$

ou seja, a matriz \mathcal{P}_{i-1} pode ser calculada diretamente pelos blocos da decomposição QR apresentada na Eq. III.117, e \mathbf{O}_{i-1} pode ser obtida deletando-se as p últimas linhas da

expressão de \mathbf{O}_i , conforme apresentado na Eq. III.126 na notação do *MatLab*, sendo p o número de respostas do sistema.

Uma vez que os resíduos ρ_w e ρ_v são admitidos como não-correlacionados com os estados, estimativas assintoticamente não-tendenciosas para as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} podem ser finalmente obtidas por mínimos quadrados:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{i+1} \\ \mathbf{H}_{i|i} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_i^\dagger \quad (\text{III.127-a})$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1^{1/2})^\dagger \mathbf{R}_{31} \\ \mathbf{R}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1/2} \quad (\text{III.128-b})$$

onde $(\)^\dagger$ é o operador da pseudo-inversa de Moore-Penrose.

Existem diversas variantes do algoritmo sucintamente apresentado acima. Pode-se demonstrar (VAN OVERSCHEE, 1995) que essas diferenças podem ser colocadas simplesmente como a adoção de ponderações distintas à esquerda (\mathbf{W}_1) e à direita (\mathbf{W}_2) das projeções \mathcal{P}_i antes de se proceder à decomposição em valores singulares. A tabela III.2 apresenta três diferentes algoritmos segundo abreviações e nomenclaturas de ARUN e KUN (1990) e as respectivas matrizes peso, onde $\text{cov}[\]$ é o operador de covariância entre matrizes

Tabela III.2 – Relação entre algoritmos de identificação de sistemas estocásticos e pesos das matrizes de projeção (VAN OVERSCHEE, 1995).

Sigla	Referência do algoritmo	\mathbf{W}_1	\mathbf{W}_2
UPC	<i>Unweighted Principal Component</i>	\mathbf{I}	\mathbf{I}
CVA	<i>Canonical Variate Analysis</i>	$(\text{cov}[\mathbf{H}_f, \mathbf{H}_f])^{-1/2}$	\mathbf{I}
PC	<i>Principal Component</i>	\mathbf{I}	$\mathbf{H}_p^T (\text{cov}[\mathbf{H}_p, \mathbf{H}_p])^{-1/2} \mathbf{H}_p$

PEETERS (2000) propõe ainda uma alteração ao algoritmo de forma a se utilizar somente alguns GL de referência na matriz Hankel de saídas “passadas” a fim de se diminuir a quantidade de dados utilizados, e com isso diminuir o esforço computacional e o tempo de processamento. À técnica desdobrada por essa alteração deu a denominação de SSI-DATA.

II.3.5 – Técnicas de Estimação de Funções de Decaimento

Na extensa bibliografia que trata da teoria de análise modal podem ser encontradas ainda várias outras técnicas e variações além das transcritas neste texto. Dentre tantas outras abordagens existentes e não classificadas nos itens anteriores deste capítulo, pode-se destacar a *Random Decrement Technique* (RDT). A técnica RDT tem como premissa básica converter respostas aleatórias devidas a estímulos desconhecidos aleatórios na função de resposta a impulso (IRF) do sistema. Uma vez estimada a IRF, os parâmetros modais podem ser obtidos a partir de qualquer uma das técnicas do domínio do tempo.

A técnica RDT foi desenvolvida essencialmente por Henry Cole no final da década de 60 e início dos anos 70, na NASA, com a análise da resposta dinâmica de estruturas espaciais submetidas a carregamentos do ambiente de operação. Desde então já se buscava a identificação “em serviço” das características dinâmicas das estruturas e a detecção de eventuais danos. Cole procurava especificamente uma forma de melhorar as estimativas do amortecimento, e a técnica RD foi desenvolvida na tentativa de se obter, a partir de uma série temporal aleatória (*random*), a expressão do decaimento (*decrement*) de vibração livre da estrutura (ASMUSSEN, 1997).

A técnica baseia-se na hipótese de que a resposta aleatória da estrutura no momento $t_0 + t$ é composta de três partes: a resposta aos deslocamentos iniciais no momento t_0 , a resposta devida à velocidade inicial também em t_0 , e a parcela aleatória devida ao carregamento aplicado à estrutura no período t_0 a $t_0 + t$. Operando-se a média de segmentos do sinal aleatório da resposta tomados toda a vez que o deslocamento assume um determinado valor arbitrado (*triggering points*), admitindo-se ainda que o sinal da velocidade varia aleatoriamente no tempo, poderia se verificar que ao se aumentar o número de médias, a única das três parcelas da resposta que restaria seria a resposta de vibração livre ao deslocamento inicial arbitrário.

A Fig. III.10 extraída da Tese de ASMUSSEN (1997) ilustra bem o processo de cálculo da função RD: a partir de uma seqüência de dados identificam-se inicialmente doze pontos de triggering (“*level crossing*”); em seguida somam-se sucessivamente segmentos da seqüência de tamanho fixo tomados a partir desses pontos; gráfico a gráfico é possível observar-se a função RD resultante (linha cheia) e o segmento do sinal corrente em linha pontilhada.

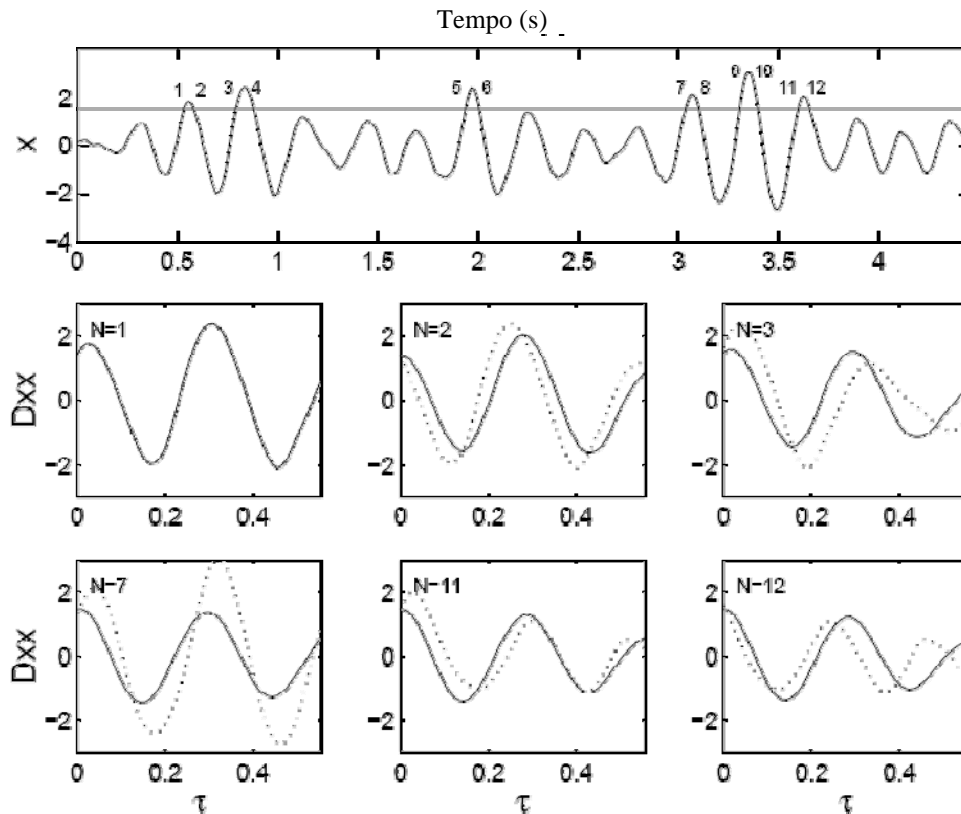


Figura III.10 – Conceito da técnica RD, apresentando-se no primeiro gráfico o sinal aleatório da resposta de um sistema e os doze pontos de *triggering* (“*level crossing*”), e nos gráficos sucessivos a função RD resultante (linha cheia) e o segmento do sinal corrente em linha pontilhada (ASMUSSEN, 1997).

Uma expressão da estimativa da função RD (auto-RD) pode então ser colocada como:

$$\hat{D}_{XX}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i + \tau) | [x(t_i) = a] \quad (\text{III.129})$$

onde \hat{D}_{XX} é uma estimativa da função RD;
 τ é a variável temporal dentro de \hat{D}_{XX} ; e

N é o número de pontos de *triggering*.

A função RD cruzada, dentro da perspectiva da análise modal de sistemas com vários GL (e várias respostas), pode ser colocada como:

$$\hat{D}_{YX}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i + \tau) [x(t_i) = a] \quad (\text{III.130})$$

onde o primeiro índice refere-se ao GL onde a média está sendo calculada, e o segundo índice refere-se à resposta do GL onde a condição de *triggering* está sendo imposta.

Ainda na década de 70, publicações do grupo de trabalho de Cole recomendavam o cálculo de médias com aproximadamente 2000 segmentos para se obter estimativas satisfatórias de amortecimento e frequência natural. Investigavam também desde então outras formas de *triggering*, como por exemplo, a condição de “cruzamento pelo zero com tangente positiva” na análise da resposta de deslocamento, o que acreditava-se permitir a obtenção da função resposta a impulso (IRF) da estrutura.

ASMUSSEN (1997) consolida o formalismo teórico envolvendo as estimativas das funções RD iniciado na década de 80. Define a técnica RD como um método que transforma processos estocásticos $X_k(t)$ em funções RD, que por sua vez são definidas como o valor médio de um processo estocástico na condição de um outro processo estocástico:

$$D_{X_p X_q}(\tau) = E[X_p(t + \tau) \mid T_{X_q}] \quad (\text{III.131})$$

Onde T_{X_q} é a condição de *triggering* generalizada envolvendo o processo estocástico $X_q(t)$, podendo ser colocada como:

$$T_{X_q} = \{a_1 \leq X_q < a_2, \quad b_1 \leq \dot{X}_q < b_2\} \quad (\text{III.132})$$

Admitindo-se os processos estocásticos como estacionários e gaussianos de média nula, podem-se exprimir as funções RD como proporcionais às funções de autocorrelação e suas derivadas através da expressão:

$$D_{X_p X_q}(\tau) = \frac{R_{X_p X_q}(\tau)}{\sigma_{X_q}^2} \cdot \tilde{a} + \frac{R'_{X_p X_q}(\tau)}{\sigma_{\dot{X}_q}^2} \cdot \tilde{b} \quad (\text{III.133})$$

onde $R_{XX}(\tau)$ é a função autocorrelação (ou correlação cruzada quando $p \neq q$);
 σ_X^2 é a variância do processo X ;
 \tilde{a} e \tilde{b} são os níveis das condições de triggering, funções das extremidades (a_1 e a_2 , b_1 e b_2) e das funções densidade de probabilidade do processo X_q .

Essa proporcionalidade foi demonstrada inicialmente em 1982 por VANDIVER *et al.* para a condição de *triggering* de cruzamento por um ponto e, a partir desse momento, a técnica RD passou a ser explorada mais como uma metodologia numericamente eficiente de se estimar a função de autocorrelação (ou correlação cruzada) de um processo estocástico, permitindo que outras técnicas de identificação de estruturas no domínio do tempo a partir de respostas impulsivas proporcionem estimativas consistentes dos parâmetros modais (BRINCKER *et al.*, 1991, IBRAHIM *et al.*, 1996).

O fator decisivo para uma boa estimativa da função RD é o número de médias realizadas, ou seja, número de pontos de *triggering*, que por sua vez são função das faixas de *triggering* adotadas. ASMUSSEN (1997), após vários testes, recomenda o uso da condição de *triggering* de “ponto positivo”, ou seja:

$$T_X = \{ a_1 \leq X(t) < a_2, -\infty \leq \dot{X}(t) < \infty \}, a_1 > 0 \quad (\text{III.134})$$

A condição acima pode ser considerada como a generalização da condição de “passagem por nível” (*level crossing*) na análise de respostas discretas amostradas no tempo. Quando os sinais forem longos o bastante, podem-se utilizar outras condições de *triggering*, como o “máximo local” ou o “*level crossing*”. Entretanto, é recomendado não se utilizar a condição “passagem pelo zero” (*zero crossing*), pois próximo ao zero o ruído apresenta uma maior influência no sinal, podendo-se induzir ao entendimento da existência de falsos pontos de *triggering*.

Em se utilizando a condição de “ponto positivo”, deve-se determinar os níveis de *triggering*. ASMUSSEN (1997) sugere que se escolha dentre todos os sinais de resposta um único como referência, preferencialmente aquele com maior desvio padrão, e se proceda testes de sensibilidade para diferentes faixas, como por exemplo:

$$[a_1 ; a_2] = \begin{cases} [0,5 ; 1,0] \\ [1,0 ; 1,5] \\ [1,5 ; \infty] \end{cases} \quad \sigma_X, a_1 > 0 \quad (\text{III.135})$$

Após a definição de diferentes faixas, pode-se verificar a qualidade das estimativas obtidas a partir da observação da invariância na forma das funções RD (por simples observação ou através de funções semelhantes à MAC - *Modal Assurance Criterion*). Por fim, seleciona-se a faixa mais conveniente levando-se em conta o esforço computacional versus a qualidade das estimativas. Outra forma para se validar as estimativas consiste na verificação da simetria das funções de autocorrelação de processos estacionários gaussianos. Isto pode ser avaliado ao se obter a média entre os valores encontrados das funções RD obtidos a partir do sinal tomado com passos positivos no tempo e também com “passos negativos” (*negative time lags*), ou seja, “de trás pra frente”.

O número de pontos a ser utilizado nas estimativas das funções RD deve ser avaliado a partir da análise da consistência obtida para as estimativas da função de autocorrelação, tendo-se em mente que o erro nos valores das estimativas costuma aumentar conforme a resposta se afasta dos pontos de *triggering*. KIJEWski (2003) relata serem apenas os primeiros ciclos das funções RD capazes de fornecer boas estimativas do amortecimento, aspecto sempre dependente do número de médias viabilizadas.

III.4 – Técnicas no Domínio Tempo-Frequência

A Transformada de Fourier de sinais adquiridos a partir da monitorização de sistemas estruturais tem sido historicamente uma fundamental ferramenta na identificação de estruturas por meio de suas características dinâmicas (EWINS, 1984). Entretanto, essa transformada fornece uma representação do conteúdo em frequência de um sinal assumido infinito, sem informação sobre a localização no tempo de suas componentes, e sem permitir a identificação (e retirada) de perturbações transitórias de altas frequências, dificultando o tratamento de sinais com ruído:

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{III.136})$$

A localização no tempo na Transformada de Fourier pode ser obtida pelo enjanelamento do sinal, cortando-se “fatias” da função bem localizadas no tempo e então procedendo ao cálculo das transformadas. A transformada obtida é conhecida por *Windowed Fourier Transform – WFT* (DAUBECHIES, 1992) ou *Short Time Fourier Transform- STFT* (VAIDYANATHAN, 1993).

Muitas funções de enjanelamento g foram utilizadas, a maioria apresentando suporte compacto e razoável suavidade (DAUBECHIES, 1992), em geral bem “concentradas” no tempo e em frequência:

$$F_{STFT}(\omega, t) = \int f(s)g(s-t)e^{-i\omega s} ds \quad (\text{III.137})$$

Para sinais discretos (digitais), onde t e ω são representados por múltiplos igualmente espaçados, $t = n \cdot t_0$ e $\omega = m \cdot \omega_0$, tem-se:

$$F_{STFT}(m, n) = \int f(s)g(s - nt_0)e^{-im\omega_0 s} ds \quad (\text{III.138})$$

A Transformada de Gabor (GABOR, 1946) é essencialmente uma STFT (*Short Time Fourier Transform*) com uma janela gaussiana modulada. As janelas são definidas por uma família de funções ψ_G , indexadas por dois parâmetros (ω, b) , denominadas de funções de Gabor:

$$\psi_G(t) = \exp(-\alpha^2 t^2) \exp(i\omega t) \quad (\text{III.139})$$

ou conforme mais comumente encontrada hoje (TODOROVSKA, 2001, BOLTEŽAR e SLAVIC, 2002):

$$\psi_G(t) = k \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp(i\omega t) \quad (\text{III.140})$$

$$\psi_{G(\omega, b)}(t) = g(t-b) \cdot \exp[i\omega(t-b)] \quad (\text{III.141})$$

onde g é a função de enjanelamento (gaussiana), b é o atraso no tempo, ω é a frequência de modulação da função de enjanelamento, α é o inverso da dispersão (arbitrária) da função no tempo, σ é a dispersão da função em termos do desvio padrão e k é uma constante normalizadora.

A transformada de Gabor pode ser definida como o produto interno entre a função em análise e a família de funções $\psi_{G(\omega,b)}$, recebendo analiticamente as representações da Eq. III.141:

$$\begin{aligned}
 F_{Gabor}(\omega, b) &= \langle f, \psi_{g(\omega,b)} \rangle = \int f(t) \psi_{g(\omega,b)}^*(t) dt \\
 &= \int f(t) g_{\bar{\omega},b}^*(t) dt \\
 &= \int f(t) g^*(t-b) e^{-i\bar{\omega}t} dt
 \end{aligned} \tag{III.142}$$

A transformada de Fourier da função de Gabor tem a forma:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{G(\bar{\omega},b)}(\omega) &= \exp(-i\bar{\omega}b) \cdot \Psi_{g(\bar{\omega},0)}(\omega) \\
 &= k \cdot \exp(-i\bar{\omega}b) \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega})^2 \sigma^2\right)
 \end{aligned} \tag{III.143}$$

As funções $g_{\bar{\omega},b}$ consistem da mesma função de enjanelamento (ou “envelopamento”) g , transladadas para as localizações no tempo de interesse, e “preenchidas” com oscilações em alta frequência, todas possuindo a mesma “largura” no tempo. Esta “largura” ou resolução no tempo mostra-se determinante para a observação da localização temporal de diferentes componentes do sinal: janelas maiores implicam na obtenção de melhor resolução em frequência, enquanto janelas menores induzem a melhor localização no tempo (BUCHER, 2001). A Fig. III.11 apresenta duas funções de enjanelamento gaussianas, para diferentes modulações em frequência, apresentando a mesma definição (“resolução”) no tempo.

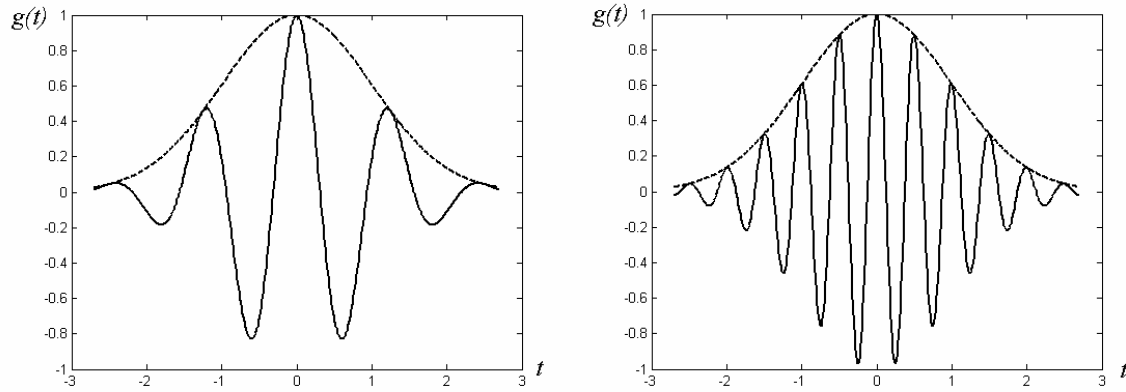


Figura III.11 – Funções de enjanelamento gaussianas, para diferentes modulações em frequência, apresentando a mesma definição (“resolução”) no tempo;

As funções de Gabor são, portanto, definidas pelos seguintes parâmetros:

- f_0 : frequência média (ou central);
- $T=1/f_0$: período médio da função;
- Δt : duração (resolução) no domínio do tempo;
- $\Delta\omega$: banda (resolução) em frequência.

As resoluções Δt e $\Delta\omega$, analisadas de uma forma mais ampla, medem, respectivamente, a habilidade da função de distinguir sucessivas informações no domínio do tempo e da frequência.

MORLET *et al.* (1982), estudando aplicações geofísicas das transformadas tempo-frequência (Gabor/STFT), e desejando analisar sinais sísmicos com diferentes desdobramentos no tempo e na frequência, geralmente caracterizados por componentes de alta frequência com menor duração no tempo, introduziu importantes alterações nas funções das transformadas.

Desejando obter bons resultados através da aplicação de apenas uma transformada, sem ter que arbitrar tamanhos de enjanelamento (na STFT), estabeleceu funções da transformada de uma forma diferente: a partir de uma função exponencial complexa (ou uma função cosseno, numa análise no campo dos reais), submeteu-a a uma janela gaussiana, por vezes comprimida, por vezes distendida no tempo. Permitiu-se ainda a estas funções que se transladassem no tempo.

Surgia uma nova transformada com uma grande diferença da STFT. As funções propostas por Morlet possuem “larguras” no tempo adaptadas às suas

freqüências: funções de alta freqüência são mais estreitas enquanto funções de baixa freqüência são mais abrangentes (vide Fig. III.12 e III.13).

Morlet batizou as funções de sua transformada de “*wavelets of constant shape ratio*” como forma de diferenciá-las das funções de Gabor, por apresentarem, no domínio da freqüência, a banda proporcional à freqüência central, conforme aponta a Eq. III.144.

$$\frac{\Delta f}{f_0} = k_1' \quad \text{e} \quad \frac{\Delta t}{T} = k_2', \quad \text{logo} \quad \Delta t = T \cdot k_2' = \frac{1}{f_0} \cdot k_2' = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot k_2' \quad (\text{III.144})$$

onde k_1' e k_2' são constantes arbitrárias e ω_0 é a freqüência média (central) em radianos.

As resoluções Δt e $\Delta \omega$ podem receber valores arbitrários, como, por exemplo, o intervalo limitado pelos pontos onde a gaussiana (no tempo) assume metade do seu valor máximo - *full width at half maximum* (FWHM). No caso da gaussiana, esse valor é $2\sigma\sqrt{2\ln 2}$ no domínio do tempo, onde σ é o desvio padrão. Logo:

$$\Delta t = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\Delta t^2}{8\ln 2} \quad (\text{III.145})$$

A família de funções de Morlet é, portanto, montada a partir das funções de Gabor, entretanto, apresentando modulações variáveis, dependendo da representação da sua banda em freqüência, e normalização para amplitude máxima unitária no domínio do tempo (MORLET *et al.*, 1982, BOULAHBAL *et al.*, 1999, TODOROVSKA, 2001):

$$\psi_M(t) = \exp\left(i\omega_0 t - \frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{III.146})$$

onde: $\Delta t = \frac{4\pi}{\omega_0}$ (para k_2' igual a 2);

$$\omega_0 = \frac{4\pi}{2\sigma\sqrt{2\ln 2}} = \pi\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} \cong 5,3364\dots, \quad \text{para } \sigma = 1; \quad (\text{DAUBECHIES, 1992})$$

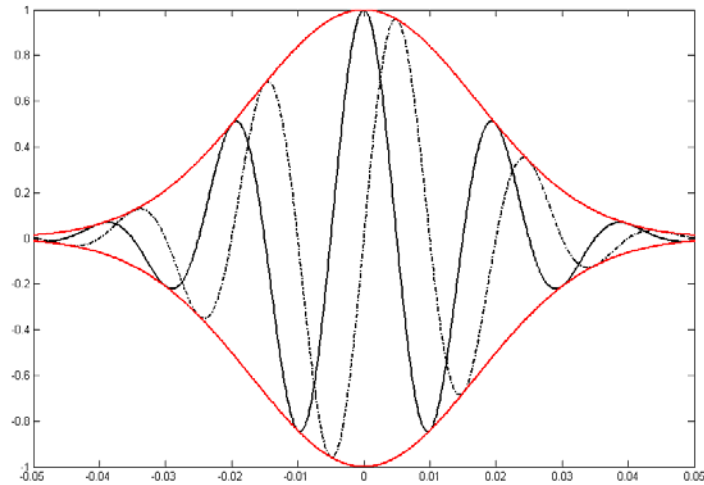


Figura III.12 – Wavelet de Morlet, para $\Delta t = 20ms$ e $f_0 = 50Hz$, com seus valores reais em linha contínua, e os complexos em linha pontilhada, envolvida pela gaussiana.

A vasta utilização da *wavelet* de Morlet se deve principalmente ao fato da mesma ser descrita por meio de uma função analítica, bem como sua transformada de Fourier:

$$\Psi_M(\omega) = \sqrt{2\pi} \sigma \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \sigma^2\right) \quad (\text{III.147})$$

Calculando-se a resolução em frequência da *wavelet* a partir do FWHM de sua transformada de Fourier (MORLET *et al.*, 1982), obtém-se:

$$\Delta\omega = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sigma} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{8\ln 2}{\Delta\omega^2} \quad (\text{III.148})$$

A *wavelet* apresentada acima está “normalizada” para apresentar valor unitário em seu pico máximo (no domínio do tempo), para o tempo central $t_0 = 0$; Outras normalizações e valores de resolução no tempo (σ) são encontradas na literatura, como as apresentadas a seguir:

$$\psi_M(t) = \exp\left(i\omega_0 t - \frac{t^2}{2}\right), \text{ STASZEWSKI (1997);} \quad (\text{III.149})$$

$$\psi_M(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(i\omega_0 t - \frac{t^2}{2}\right), \text{ FARGE (1992);} \quad (\text{III.150})$$

$$\psi_M(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left(i\omega_0 t - \frac{t^2}{\sigma^2}\right), \text{ TEOLIS (1998).} \quad (\text{III.151})$$

Poucos anos após a exposição de Morlet, as funções da sua transformada deixaram o círculo dos geofísicos, passando a ser chamadas somente por *wavelets*. O caminho evolutivo da transformada desde esse momento até os dias de hoje, bem como a ligação a antigas idéias e procedimentos de diferentes campos da engenharia, física, computação e matemática encontram-se descritos de forma bastante interessante em DAUBECHIES (1996).

III.4.1 – A Transformada *Wavelet* Contínua

As transformada wavelet de um sinal pode ser generalizada (DAUBECHIES, 1992) como:

$$F_{WT}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (\text{III.152})$$

Esta forma integral da transformada recebe o nome de Transformada *Wavelet* Contínua (CWT), e pode ser entendida, assim como a Transformada de Gabor, como o produto interno de uma função f com uma família de funções indexada por dois parâmetros:

$$g_{\omega,b}(t) = e^{i\omega t} g(t-b),$$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ wavelet, sendo } \psi \text{ a wavelet-mãe.} \quad (\text{III.153})$$

Onde $1/\sqrt{a}$ é o fator de normalização da *wavelet*, fazendo com que todas possuam a mesma norma no espaço integral quadrático L^2 :

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \int \langle \psi_{a,b}(t), \psi_{a,b}(t) \rangle dt = \int |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \int |\psi(t)|^2 dt \quad (\text{III.154})$$

Conforme o parâmetro a (escala) muda, a *wavelet* cobre diferentes faixas de frequência: valores altos de a correspondem à frequências baixas (escala “grosseira”), enquanto valores baixos implicam em frequências altas (escala “refinada”). Mudando-se o parâmetro b , move-se o centro da localização no tempo da função: cada $\psi_{a,b}(t)$ se localiza em torno de $t=b$ (Fig. III.13). A CWT pode ser definida também como uma integral de convolução do sinal em análise com versões escalonadas e transladadas da *wavelet*-mãe (STASZEWSKI, 1997).

O parâmetro a apresentado na definição da CWT surge então como o fator de escala entre as resoluções no tempo e em frequência das *wavelets* escalonadas Δt_w e Δf_w e as resoluções Δt e Δf da *wavelet*-mãe de Morlet:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_w} = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta f}{\Delta f_w} = a \quad (\text{III.155})$$

sendo t e f as variáveis independentes de tempo e frequência do sinal a analisar. Logo, a *wavelet* de Morlet escalonada e transladada pode ser colocada na forma:

$$\psi_{M(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_M\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 / 2\sigma^2\right] \exp\left[i\omega_0\left(\frac{t-b}{a}\right)\right] \quad (\text{III.156})$$

E sua transformada de Fourier:

$$\Psi_{M(a,b)}(\omega) = \exp(-i\omega b) \cdot \Psi_M(a\omega) \quad (\text{III.157})$$

A Fig. III.13 apresenta três wavelets de Morlet $\Psi_{M(a,b)}$ para diferentes valores de translação b e escala a , sendo representados em linha cheia os valores reais e em linha pontilhada os valores imaginários das funções.

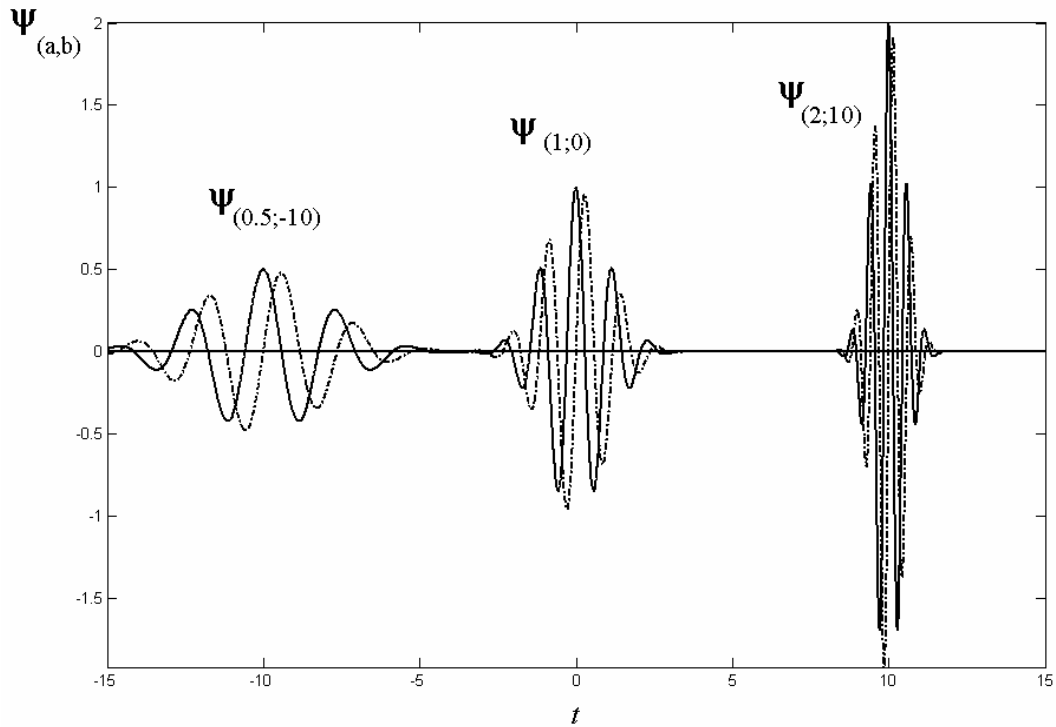


Figura III.13 – Três *wavelets* de Morlet para diferentes valores de translação b e escala a .

A partir da expressão da transformada de Fourier da wavelet de Morlet, percebe-se que o seu valor máximo se dá para $\omega = \omega_0$. Logo, torna-se interessante escalonar a variável independente da frequência como sub-múltiplos de ω_0 (STASZEWSKI *et al.*, 1994):

$$\omega = \frac{\omega_0}{a} \Rightarrow a = \frac{f_0}{f} \quad (\text{III.158})$$

A obtenção do valor do parâmetro de escala a poderá ser procedida diretamente pela expressão acima somente quando a frequência de amostragem de uma *wavelet* for igual à frequência de amostragem do sinal a analisar (STASZEWSKI *et al.*, 1994).

Para sinais discretos no tempo, a máxima frequência que a CWT (bem como qualquer outra transformada) poderá representar é limitada pela frequência de digitalização f_s , e é a frequência de Nyquist (MITRA, 1998):

$$f_{\max} \leq f_{Nyquist} = \frac{f_s}{2} \quad (\text{III.159})$$

Destá forma, pode-se obter um elemento (valor de par ordenado) da CWT para um dado valor de frequência (fator de escala) e resolução em frequência. A diferença principal entre a CWT e a STFT consiste na forma das funções de análise $g_{\omega,t}$ e $\psi_{a,b}$.

Como resultado desta diferente representação no tempo, a transformada introduzida por Morlet (e as transformadas *wavelet*, em geral) apresenta-se mais eficiente na identificação de frequências altas de curta duração, e por isso, consegue trabalhar melhor com sinais contaminados por ruídos. Destá forma, conclui-se que a CWT consiste numa poderosa ferramenta que corta sinais em diferentes componentes em frequência, e então estuda cada componente com a resolução ajustada para sua escala, enquanto que a STFT apresenta diferentes resultados, em função do tamanho da janela definido (e constante).

O sinal original analisado pode ainda ser reconstruído a partir de sua transformada *wavelet* (DAUBECHIES, 1992):

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} F_{CWT}(a,b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (\text{III.160})$$

A constante C_ψ depende somente de ψ , devendo ser finita para que a expressão acima faça sentido (Eq. III.161).

$$C_\psi = 2\pi \int \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (\text{III.161})$$

Se a wavelet ψ for definida em L^1 , então sua transformada Fourier Ψ é contínua, e C_ψ é finito somente se $\Psi(0) = 0$. A condição de DC nulo indica que as *wavelets* apresentam um espectro em frequência do tipo passa-faixa

(VAIDYANATHAN, 1993, BURRUS *et al.*, 1998). Significa também que a *wavelet* deve apresentar média nula no domínio do tempo:

$$\int \psi(t)dt = 0 \quad (\text{III.162})$$

Esta restrição representa a propriedade mais importante das wavelets: a admissibilidade; sendo ela que dá à estas funções seus aspectos geométricos de transitoriedade e suavidade (*wavelet*, “pequena onda”, *ondelette* em francês).

Apesar de possuir *infinite support* (DAUBECHIES, 1992), a *wavelet*-mãe de Morlet apresenta valores cada vez menos significativos conforme se afasta de seu tempo central, tendo a condição de admissibilidade praticamente satisfeita para valores de $\omega_0 > 5$ (com $\sigma = 1$), com DC na ordem de grandeza de 10^{-6} para $\omega_0 = 5,3364$.

A Transformada Wavelet Contínua apresenta seus parâmetros de dilatação e translação (a, b) variando continuamente no conjunto dos números reais $(a \neq 0)$. A discretização destes parâmetros, e a conseqüente retirada da redundância da transformada contínua (que mapeia um sinal unidimensional numa função bi-dimensional) têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores, constituindo a base da formulação da Transformada *Wavelet* Discreta - DWT (DAUBECHIES, 1992).

LIN e QU (2000) concluem em seus trabalhos, entretanto, que para a análise de problemas relacionados à estimação de propriedades de um sinal, a transformada wavelet contínua com funções complexas se apresenta como melhor alternativa quando comparada à transformada contínua real ou à transformada discreta.

III.4.2 – Representações no Plano Tempo-Frequência

Uma wavelet com parâmetro de escala $a > 1$, tem a vezes menor frequência que sua *wavelet*-mãe, sendo melhor localizada em frequência, em detrimento de sua localização no tempo. O paradigma acima é bem conhecido na mecânica quântica como o princípio da incerteza de Heisenberg, que afirma ser impossível a determinação simultânea do tempo e da frequência de um determinado fenômeno.

A localização tempo-frequência de uma *wavelet*, ou seja, sua posição central e desdobramento no tempo e na frequência, pode ser caracterizada através de retângulos similares à caixa de Heisenberg (MALLAT, 1999), dispostos em função da média e

resolução (por exemplo, desvio-padrão) da expressão de $\psi_{a,b}(t)$ no tempo e de $\Psi_{a,b}(\omega)$ em frequência. Logo, uma melhor localização no tempo de um sinal somente pode ser alcançada à custa de uma pior localização em frequência.

A propriedade de localização no tempo da Transformada de Gabor depende da largura (fixa) da janela Gaussiana escolhida. Como seu suporte no tempo é constante em todas as frequências, pela aplicação do princípio da incerteza de Heisenberg, a resolução em frequência também será constante, dividindo o plano tempo-frequência em retângulos idênticos, conforme ilustrado na Fig. III.14-a.

Já a CWT baseada na *wavelet* de Morlet divide o plano tempo-frequência segundo retângulos de mesma área, entretanto com formas diferentes (Fig. III.14-b). Para a definição inicial de resolução no tempo e na frequência de Morlet, o valor da área do retângulo é:

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{8 \ln 2}{2\pi} = 0,8825... \quad (\text{III.163})$$

A precisão em frequência na Transformada de Gabor (e também na STFT) depende somente da incerteza da gaussiana em frequência, ou seja, aumentando-se o valor de σ na expressão de $\psi(t)$, aumenta-se a definição em frequência. Já na CWT de Morlet a precisão relativa em frequência é constante, ou seja, quanto menor a frequência em análise, maior sua precisão. Para se aumentar esta precisão, aumenta-se o valor de σ (espalhamento no tempo) ou diminui-se a frequência de análise (em termos relativos).

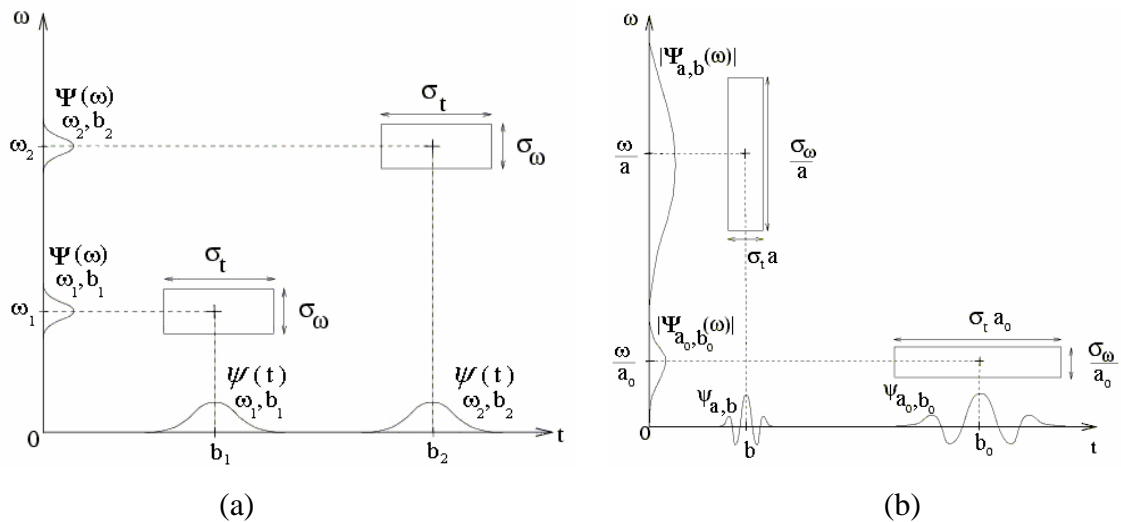


Figura III.14 – Plano apresentado por MALLAT (1999):

(a) retângulos tempo-frequência representando a distribuição da energia de dois pares ordenados da transformada de Gabor, onde σ_t é a resolução (incerteza) da função de Gabor no tempo, e σ_ω é a resolução da função no domínio da frequência;

(b) retângulos tempo-frequência representando a distribuição da energia de duas *wavelets*, $\psi_{a,b}$ e ψ_{a_0,b_0} : quando a escala a diminui (e a frequência aumenta), o suporte no tempo é reduzido, mas a banda em frequência aumenta, e vice-versa.

III.4.3 – Estimação da Frequência Natural e Amortecimento

A CWT é uma convolução da seqüência de dados (resposta a impulso) com uma versão transladada e escalonada da *wavelet*-mãe. Esta convolução pode ser calculada no domínio de tempo ou no domínio da frequência. Na CWT, para cada valor de escala utilizado, a correlação entre a respectiva wavelet e a função a analisar é calculada. A menos que se deseje a reconstrução do sinal original, não há restrições quanto ao número de escalas utilizadas nem ao intervalo estabelecido entre elas. O espectro gerado pode utilizar escala linear ou logarítmica, podendo-se ainda, no algoritmo da convolução no tempo, obter-se uma faixa restrita de frequência (“*zoom*”).

A CWT mapeia a função em análise (discretizada em N pontos) em uma função bi-dimensional, ou seja, com N valores espectrais para cada escala utilizada, cada uma delas exigindo uma transformada de Fourier inversa. O custo computacional do processo apresenta-se como um fator limitante. O benefício desta redundância no cálculo da CWT é o acurado espectro tempo-frequência obtido. A avaliação de diversos algoritmos de cálculo da CWT pode ser encontrada em RIOUL *et al.* (1992).

O cálculo da CWT no domínio da frequência, ou seja, para cada linha de frequência, faz uso de duas operações bem conhecidas no processamento de sinais digitais: Teorema da convolução (no domínio da frequência) e a Transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned}
 F_{CWT}(a,b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
 &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int F(\omega) \Psi_M^*(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \\
 &= \sqrt{a} \text{ IFT} [F(\omega) \Psi_M^*(a\omega)] \quad \text{(III.164)}
 \end{aligned}$$

A equação acima refere-se ao cálculo de uma linha de frequência, e não de todo o plano tempo-frequência, logo também pode ser aplicada de forma análoga para o cálculo da STFT. Seguem abaixo dois *scripts* de MATLAB. O primeiro trecho corresponde à obtenção das escalas a partir de um intervalo de espectro de interesse. Em seguida, cada uma das linhas da CWT (representações no tempo) é obtida, compondo finalmente a matriz final.

```

df = 0.1;
Freq = df:df:fs/2;
w0 = 5.4;
s0 = w0/(2*pi)/(fs/2);
conversion = 2*pi/w0;
scales = 1./(Freq*conversion);

```

onde `df` é o passo linear em frequência em que é calculada a CWT;
`Freq` é o conjunto de valores de frequência selecionados;
`df` é a resolução em frequência;
`w0` é a frequência média da *wavelet*-mãe;
`s0` é a escala correspondente à frequência de Nyquist do sinal;
`conversion` é o fator de conversão;
`scales` é o vetor contendo as escalas referentes às frequências selecionadas.

```

m = length(scales);
cwt = zeros(m,N);
for linhas = 1:m
    s = scales(linhas);
    mother = (w>0).*sqrt(2*pi).*exp(-(s*w - w0).^2./2);
    cwt(linhas,:) = sqrt(s)*ifft(Xk.*mother)';
end

```

onde w é o vetor das frequências em rad/s;
 X_k é a transformada de Fourier do sinal a analisar;
 $mother$ é a transformada de Fourier da *wavelet*-mãe de Morlet ;
 $(w>0)$ corresponde à função de Heaviside, utilizada a fim de se considerar apenas os valores não negativos de frequência na transformada de Fourier da *wavelet*-mãe;
 cwt é a transformada *wavelet* contínua tempo×frequência (colunas×linhas).

Para um sistema estrutural com vários graus de liberdade, a transformada *wavelet* proporciona o desacoplamento dos modos de vibração de um sinal de decaimento ou em regime permanente, possibilitando a identificação da frequência natural instantânea de cada um dos modos separadamente (vide Fig. III.15).

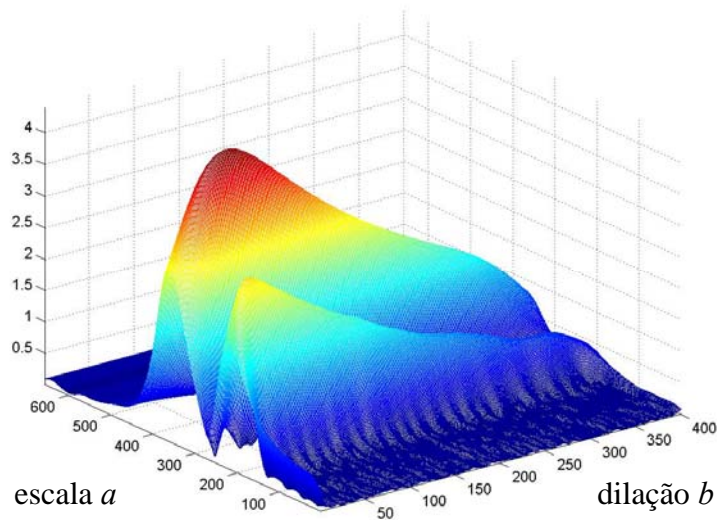


Figura III.15 – Amplitude da Transformada *Wavelet* Contínua na análise de vibração livre de um sistema de dois GL (ARAGÃO FILHO, MAGLUTA e ROITMAN, 2003).

As transformadas tempo-frequência funcionam como filtros passa-faixas, desacoplando as componentes dos sinais e dessa forma permitindo a identificação em separado de cada uma de suas componentes (modos). Esse desacoplamento em

frequência pode ser tão refinado quanto se queira, bastando para isso ajustar-se arbitrariamente a frequência central da *wavelet*-mãe (de Morlet). KIJEWski (2003) sugere para a frequência central um valor que implique numa resolução em frequência na transformada não inferior a um décimo de período fundamental do sinal analisado, não devendo ainda ser menor que $5,34 \text{ rad/seg}$ (DAUBECHIES, 1992). Na Fig. III.16 apresentam-se transformadas CWT de um mesmo sinal para diferentes valores de ω_0 .

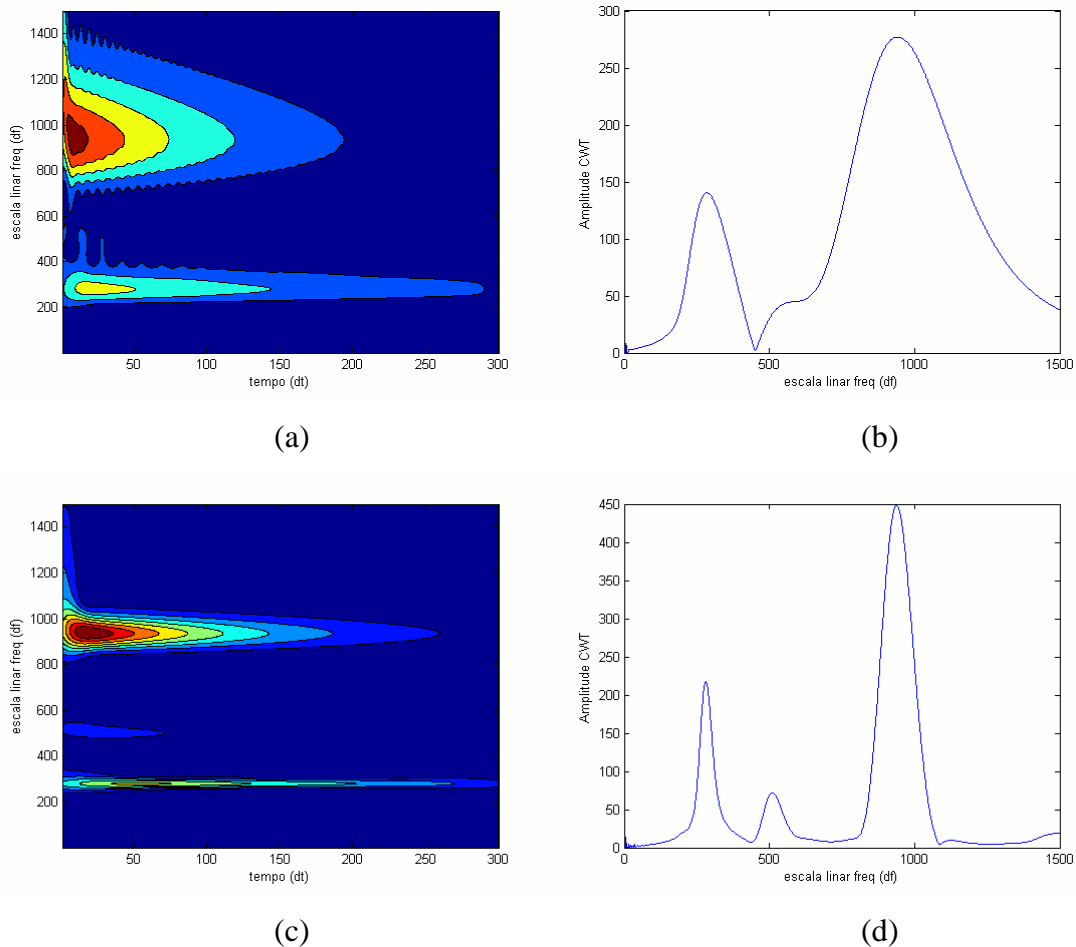


Figura III.16 – Transformada CWT de determinada IRF estimada a partir de ensaio de vibração forçada para $\omega_0 = 5,34 \text{ rad/seg}$ (a) e para $\omega_0 = 18,85 \text{ rad/seg} \cong 3\text{Hz}$ (c) e respectivos cortes transversais (b) e (d) identificando sucessivamente os três primeiros modos de vibração do sistema, para o passo no tempo $dt = 0,0033\text{seg}$ e precisão em frequência $df = 0,1\text{Hz}$ (ARAGÃO FILHO, MAGLUTA e ROITMAN, 2006).

A simples observação das seções transversais do módulo da CWT no sentido do eixo da frequência permite a identificação aproximada das frequências naturais

amortecidas, dentro da banda em frequência da *wavelet* utilizada. As linhas de crista da superfície definida sobre o plano tempo-frequência pela transformada CWT indicam a concentração de energia em torno de determinadas faixas de frequência.

A cada uma dessas curvas em cuja vizinhança se estabelecem os valores máximos da CWT no tempo, dá-se o nome de *ridge* (CARMONA *et al.*, 1997). A análise dessas curvas pode proporcionar informações sobre a frequência instantânea do sistema monitorado bem como verificar eventuais comportamentos dependentes da frequência.

O *ridge* pode ser definido formalmente como o conjunto de pontos (b,a) no domínio da transformada onde a fase do produto interno entre o sinal e a *wavelet* escalonada é estacionária (TODOROVSKA, 2001), sendo a escala a diretamente relacionada com a frequência instantânea do sinal observado (CARMONA *et al.* 1997):

$$a_r(t) = \frac{\omega_0}{\dot{\phi}_y(t)} \quad (\text{III.165})$$

onde $a_r(t)$ é a escala (frequência) da CWT no *ridge* e $\dot{\phi}_y(t)$ é a derivada da fase do sinal.

Na curva descrita pelo *ridge*, a frequência das funções *wavelet* escalonadas coincide com a frequência do sinal naquele momento fazendo com que os valores da transformada se tornem maiores naquela parte do plano tempo-frequência, formando assim a forma geométrica de um cume.

Os dois métodos mais referenciados na literatura para a detecção do *ridge* são o método Carmona, desdobrado a partir do módulo da transformada e o método “Marseille”, que usa a informação de fase da CWT (TODOROVSKA, 2001). Muito citado também, o método simplificado (“*Simple method*”), desenvolve a detecção do *ridge* pela simples localização da escala a correspondente à maior amplitude da transformada para cada valor temporal b .

Tendo-se identificado a linha de crista referente a um determinado modo de vibração, podem-se obter os respectivos valores dos coeficientes da CWT, permitindo-se pela expressão da transformada inversa a reconstrução da componente do sinal no tempo que atua naquela faixa de frequência, denominada de *skeleton*. A função *skeleton* corresponde ao decaimento desacoplado daquele modo de vibração e a partir dela

pode-se estimar a frequência natural e o amortecimento do sistema em vibração livre por técnicas simplificadas de 1GL (STASZEWSKI, 1997).

CARMONA *et al.* (1997) apresentam uma aproximação da CWT de Morlet de sinais que possam ser representados como uma soma de funções co-seno com amplitude $A(t)$ e argumento $\phi(t)$.

$$F_{CWT}(a,b) \approx A(b) \Psi_M^*[a\phi'(b)] \exp(i\phi(b)) + \begin{matrix} \text{elementos de} \\ \text{ordem inferior} \end{matrix} \quad (\text{III.166})$$

O módulo da CWT, desprezando-se as parcelas de ordem inferior, é dado por:

$$|F_{CWT}(a,b)| \approx A(b) \left| \Psi_M^*[a\phi'(b)] \right| \quad (\text{III.167})$$

Na frequência natural ($\omega_n = a_0\omega_0$), feitas as substituições, obtém-se:

$$\begin{aligned} |F_{CWT}(a_0,b)| &\approx A_0 e^{-\xi\omega_n b} \left| \Psi_M^*(a_0\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) \right| \\ \Rightarrow \ln|F_{CWT}(a_0,b)| &\approx -\xi\omega_n b + \ln \left[A_0 \left| \Psi_M^*(a_0\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) \right| \right] \end{aligned} \quad (\text{III.168})$$

A partir da equação III.164 e III.166 pode-se verificar, respectivamente, que a frequência natural de uma componente modal pode ser estimada a partir da derivada da fase da transformada, e a respectiva taxa de amortecimento pode ser obtida a partir do coeficiente angular da reta apresentada pela amplitude da seção transversal da CWT tomada ao longo do tempo em escala logarítmica (STASZEWSKI, 1996), para os coeficientes da transformada sobre o *ridge* do respectivo modo de vibração.

LAMARQUE *et al.* (2000), chegam a uma formulação similar comparando dois picos da seção transversal de uma CWT generalizada (no tempo):

$$\omega_n \xi \cong \frac{1}{(m-n)T} \ln \left| \frac{F_{CWT}(a,nT)}{F_{CWT}(a,mT)} \right| \quad (\text{III.169})$$

BUCHER (2001) desenvolve outra formulação para a estimação do amortecimento a partir da STFT com janela gaussiana (transformada de Gabor):

$$\xi = -\frac{I}{2\omega_n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \ln(|F_{STFT}(\omega_n, t)|^2) \quad (\text{III.170})$$

BOLTEŽAR e SLAVIC (2002) apresentam uma expressão similar a partir da transformada de Gabor, obtendo:

$$\ln \left[\frac{2|F_{GT}(\bar{\omega}, b)|}{(4\pi\sigma^2\bar{\omega}^2)^{1/4}} \right] \approx -\xi\omega_n b + \ln[A_0], \quad (\text{III.171})$$

onde a constante da função de Gabor adotada (parâmetro k) é $\frac{I}{(\sigma^2\pi)^{1/4}}$.

Uma vez identificados a frequência natural e o amortecimento de cada um dos modos, as formas modais podem ser obtidas como segunda fase da estimação a partir de qualquer uma das alternativas apresentadas nos métodos no domínio do tempo.

A partir da comparação direta dos valores das transformadas de sinais de diferentes GL de um sistema em vibração livre amortecida, pode-se, para um mesmo modo de vibração e a qualquer instante de tempo, obterem-se componentes da forma modal complexa do sistema analisado. PIOMBO *et al.* (2000) apresentam uma expressão para a estimativa por mínimos quadrados das formas modais aproveitando-se trechos contínuos das transformadas:

$$\psi_{pr} = \frac{\sum_{k=1}^n \left\{ \text{Re}[F_{CWT_p}(b_k, a_r)] \cdot \text{Re}[F_{CWT_q}(b_k, a_r)] \right\}}{\sum_{k=1}^n \left\{ \text{Re}[F_{CWT_q}(b_k, a_r)] \cdot \text{Re}[F_{CWT_q}(b_k, a_r)] \right\}}, \quad (\text{III.172})$$

onde ψ_{pq} é a k -ésima coordenada (GL) do modo normal de vibração r , (b_l, b_n) é o intervalo utilizado para a estimação, a_r é a escala relativa à frequência natural do modo r , F_{CWT_p} é a transformada CWT do sinal do GL p e F_{CWT_q} é a transformada CWT do sinal do GL q de referência.

III.4.4 – Estimação a partir de Sinais Aleatórios

Na aplicação das transformadas *wavelet* contínuas ao paradigma da identificação de estruturas em operação (sem o conhecimento das forças dinâmicas

excitadoras) o algoritmo de identificação muda apenas na forma de se obterem as funções de decaimento dos GL. Ao invés das estimativas prévias das IRF, utilizam-se sinais de respostas a impulsos/impactos sucessivos, ou aplica-se a técnica *Random Decrement Technique* – RDT para se obter o transiente (decaimento) a partir de sinais estocásticos (KIJEWski, 2003).

As transformadas CWT de sinais de respostas a excitações não impulsivas geralmente conduzem a decomposições no plano tempo-freqüência sem identificação imediata dos *ridges* de ressonância. Na Fig. III.17 pode-se observar a CWT das respostas de uma estrutura submetida a excitação tipo ruído branco.

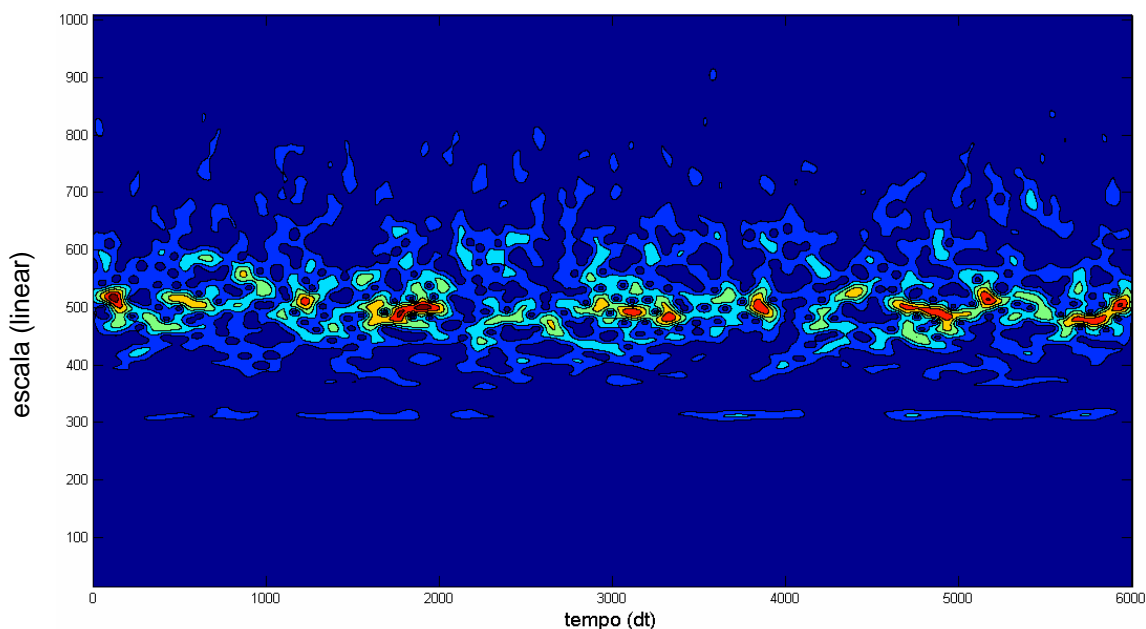


Figura III.17 – Transformada CWT da resposta de determinado GL de sistema estrutural à uma excitação tipo ruído branco.

Calculando-se médias dos valores espectrais (escala em freqüência) apresentados pelas seções transversais tomados ao longo do eixo do tempo, obtém-se os gráficos apresentados na Fig. III.18. Pode-se perceber que conforme passamos a avaliar um maior período do sinal, as freqüências de ressonância vão se tornando evidentes.

Na Fig. III.19 apresentam-se comparativamente no mesmo gráfico a transformada CWT média de 20 segundos, e o autoespectro do sinal de 20 seg, estimado pelo periodograma de Welch a partir de 8 e 32 médias.

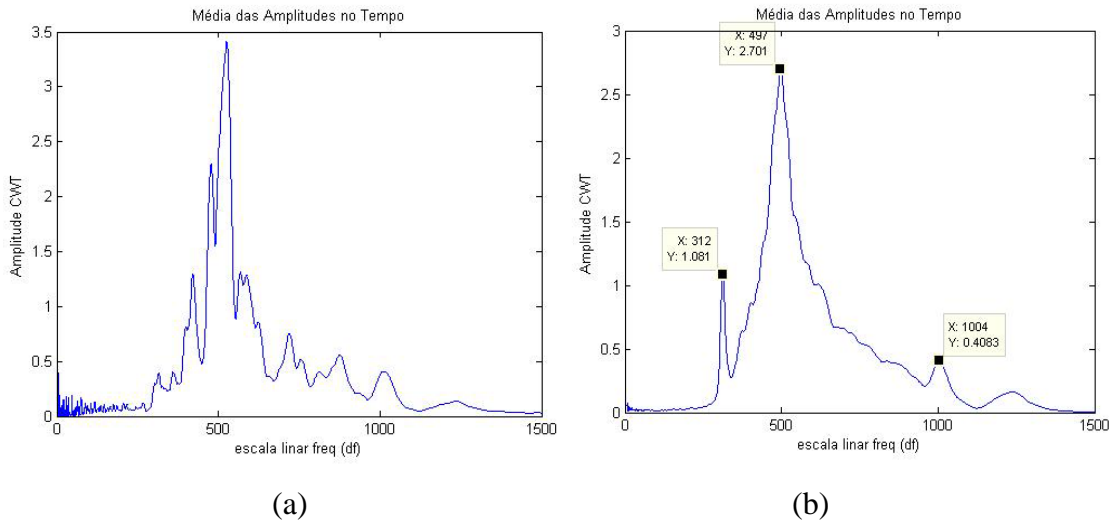


Figura III.18 – Média no tempo das Transformadas CWT da resposta de determinado GL de sistema estrutural à uma excitação tipo ruído branco para (a) 1 segundo de análise e (b) 20 seg.

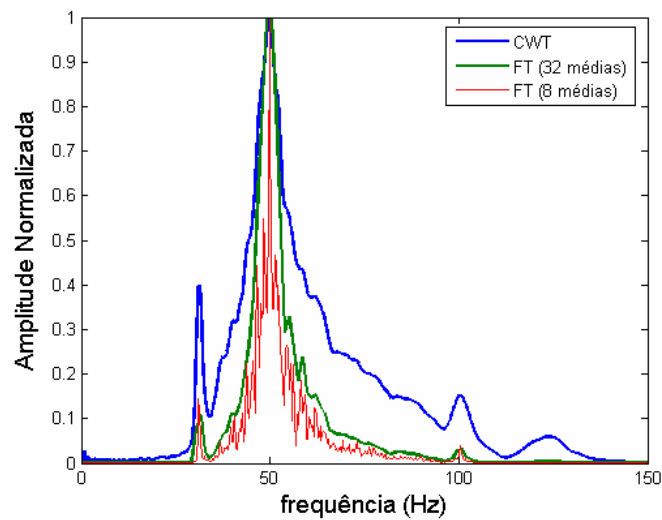


Figura III.19 – Média no tempo das seções transversais da Transformadas CWT da resposta de determinado GL de sistema estrutural à uma excitação tipo ruído branco para 20 seg, e autoespectro do sinal para o mesmo período, com 8 e 32 médias, na escala logarítmica das amplitudes.

Os picos obtidos pela média das seções transversais em frequência servem apenas como primeira aproximação para a determinação do número de pólos do sistema, e das escalas onde se desdobram os *ridges* da transformada. Para a estimação das frequências naturais, das taxas de amortecimento e das formas modais, recomenda-se a estimação prévia das IRF ou *fac* dos GL monitorados.

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTAÇÃO

IV.1 – Introdução

Este capítulo tem por finalidade apresentar objetivamente os algoritmos das principais técnicas apresentadas no capítulo anterior com vistas à análise modal de estruturas em operação. Foram implementadas para o desenvolvimento deste estudo três técnicas no domínio do tempo, uma no domínio da frequência e uma em tempo-frequência.

Cabe ressaltar que neste estudo não foram implementadas soluções para a estimação das formas modais de vibração, e em decorrência, também não foram analisados os desdobramentos da multiplicidade geométrica de pólos (*repeated roots* e/ou *pseudo repeated roots*).

A Tabela IV.1 apresenta o acrograma de cada técnica implementada, descreve o modelo estocástico que utiliza, a forma como a identificação dos pólos foi realizada, e finalmente o procedimento para estimação das frequências naturais e taxas de amortecimento. Este trabalho não aborda especificamente o esforço de estimação das formas modais.

Tabela IV.1 – Descrição dos algoritmos das técnicas de análise modal *output-only* implementadas.

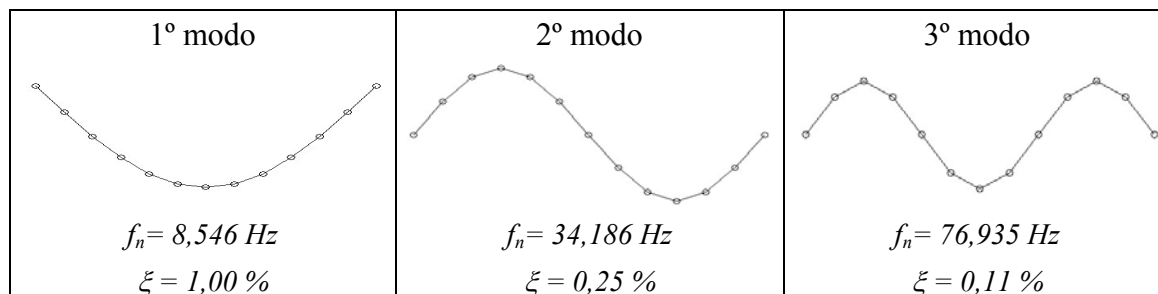
<i>Técnica</i>	<i>Domínio</i>	<i>Estimação estocástica preliminar</i>	<i>Identificação dos pólos</i>	<i>Estimação das frequências naturais e taxas de amortecimento</i>
AR-Prony	tempo	Funções RD	Diagrama de estabilização	Ajuste de Prony
SSM		Matrizes de autocorrelação		Decomposição da matriz de estado [A]
SSI		—		
FDD	frequência	Autoespectros	Decomposição espectral	IFT e Transformada Hilbert (domínio do tempo)
CWT	tempo-frequência	Funções RD	Média das seções transversais em frequência das CWT	Ajustes nas amplitudes e fases da CWT nos <i>ridges</i> das funções RD

Para exemplificar algumas etapas das implementações foram realizadas simulações numéricas em um modelo de elementos finitos de viga biapoiada, composto de elementos lineares planos com dois GL por nó (translação vertical e rotação). As características físicas e os parâmetros modais dos três primeiros modos do sistema estão apresentados nas Tab. (IV.2) e Tab. (IV.3) respectivamente. Para essas demonstrações foram calculadas para diferentes excitações respostas em três diferentes pontos: no meio (GL 13), no primeiro quarto (GL 7) e no último terço do vão da viga (GL 17).

Tabela IV.2 – Propriedades físicas da viga bi-apoiada.

Vão principal	$1,470\text{ m}$
Módulo de Elasticidade (E)	$2,05\ 10^5\ \text{MPa}$
Massa específica	$7,85\ 10^3\ \text{Kg/m}^3$
Área da Seção Transversal	$6,048\ 10^{-4}\ \text{m}^2$
Momento de Inércia	$3,175\ 10^{-9}\ \text{m}^4$

Tabela IV.3 – Parâmetros dos três primeiros modos de vibração do modelo da viga bi-apoiada.



Os algoritmos foram todos implementados em ambiente MATLAB (MATHEMATICS, 2008) visando proporcionar transparência para o seu aproveitamento em trabalhos futuros. Os parâmetros e os textos indicadores do sistema desenvolvido encontram-se identificados em inglês para evitar ambigüidades decorrentes do aportuguesamento imprudente de terminologias consagradas pela literatura internacional da análise modal.

IV.2 – Funções RD

As funções RD, conforme apresentado no Cap. III, proporcionam estimativas estocásticas das funções de autocorrelação de sistemas submetidos a carregamentos aleatórios. Potencializam desta forma a utilização dentro do contexto “*output-only*” de técnicas que foram desenvolvidas inicialmente para a análise modal a partir de funções de resposta a impulso (IRF), como por exemplo a técnica baseada na CWT e o método de Prony com mínimos quadrados (ou equivalentemente a técnica AR com matriz não-janelada). Pode também ser utilizada como estimador preliminar de outras técnicas essencialmente estocásticas como a FDD e a SSI, conforme sugerido por RODRIGUES, BRINKER e ANDERSEN (2004), e RODRIGUES e BRINKER (2005).

Neste trabalho, a partir das sugestões de ASMUSSEN (1997) e dos resultados de KIJEWski (2003), optou-se pela da condição de *triggering* de “ponto positivo” com sobreposição livre, ou seja, seqüências (de tamanho arbitrário) do sinal analisado que se iniciem dentro de uma faixa de valores são somadas ponto a ponto, obtendo-se, após a divisão pelo número total de parcelas acumuladas, a respectiva função RD. A partir dos resultados de KIJEWski (2003), pode-se concluir que o tamanho das seqüências para fins de estimação da taxa de amortecimento deve conferir no mínimo 04 ciclos ao harmônico de maior período fundamental.

Na implementação realizada optou-se por deixar livre a definição do intervalo de “ponto positivo” (em função do desvio padrão do sinal completo), o número de pontos das funções RD e a utilização ou não do sinal “de trás para frente”.

A Fig. IV.1 ilustra a obtenção da função RD segundo o GL 05 (primeiro quarto do vão: *output#01*) da viga anteriormente definida, submetida a um carregamento aleatório de 30 minutos ininterruptos, tendo-se definido como GL de referência (onde ocorre o *triggering*) também o GL 05.

Conforme pode-se observar na Fig. IV.1, a função RD foi calculada tendo-se como condição de ponto positivo o intervalo $[\sigma, 2\sigma]$, o tamanho da seqüência sendo 300 pontos (a 250Hz) e aproveitando-se os segmentos tomados na análise do sinal de “trás para frente”.

É importante selecionar como canal de referência aquele relativo a um GL que tenha sensibilidade para o maior número possível de modos de vibração. O tamanho da função e os limites do intervalo de “ponto positivo” devem ser escolhidos após análise de sensibilidade para cada sistema estrutural específico. A utilização do sinal também no sentido inverso do tempo geralmente contribui para a obtenção de melhores resultados, e menores variâncias.

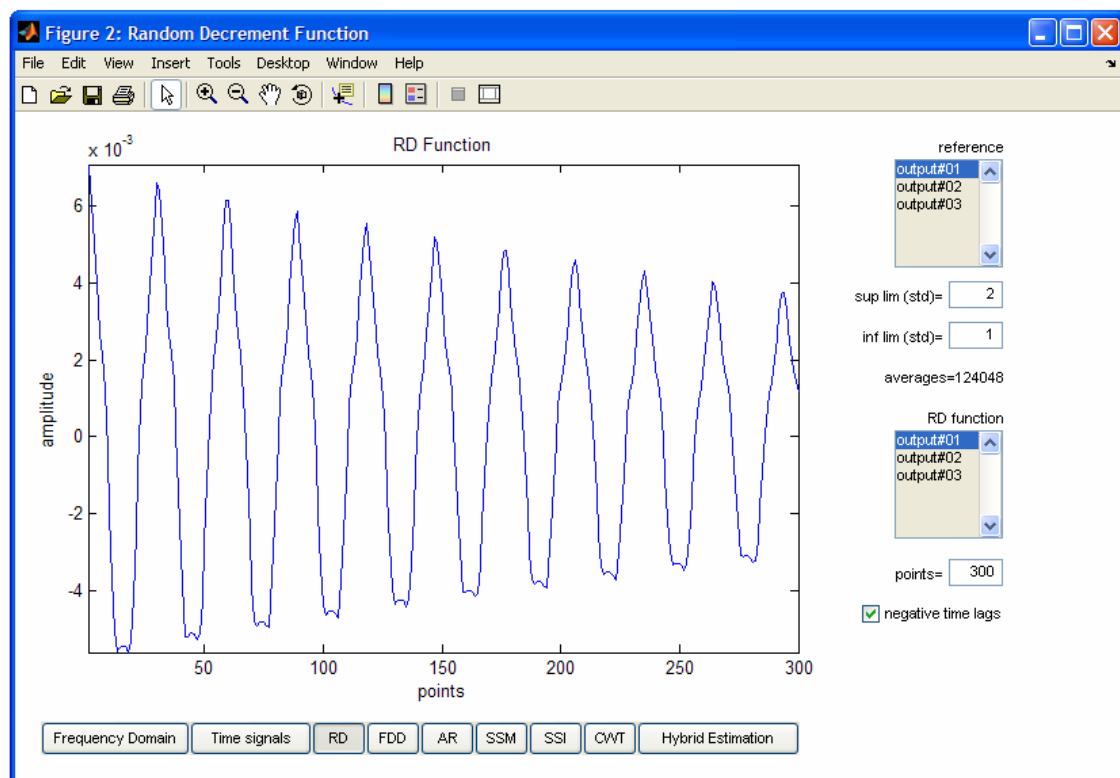


Figura IV.1 – Função RD estimada pela média de 124.048 segmentos.

Finalmente, pode-se sugerir o seguinte pseudocódigo como algoritmo de estimação das funções RD:

```

Início:
   $x(n) \leftarrow$  obter sinal de referência para o triggering
   $y(n) \leftarrow$  obter sinal onde serão extraídos os segmentos e será calculada a média
   $[x_{inf}, x_{sup}] \leftarrow$  limites do intervalo de ponto positivo
   $N \leftarrow$  tamanho do sinal  $y(n)$ 
   $Np \leftarrow$  tamanho dos segmentos (e da função RD)
  booleano  $\leftarrow$  verdadeiro // análise no sentido inverso//
   $Rd(1:np) \leftarrow 0$  //inicia função RD//
   $nmedias \leftarrow 0$  //inicia variável que conta o número de segmentos//
  Para  $i$  de 1 até  $(N-Np)$  executar
    Se  $x_{inf} \leq x(i) \leq x_{sup}$  então
       $Rd(1:Np) \leftarrow Rd(1:Np) + y(i:i+Np-1)$ 
       $nmedias \leftarrow nmedias + 1$ 
    Fim (Se)
  Fim ( $i$ )
  Se booleano verdadeiro então
    Para  $i$  de  $N$  até  $Np$  executar
      Se  $x_{inf} \leq x(i) \leq x_{sup}$  então
         $Rd(1:Np) \leftarrow Rd(1:Np) + y(i: -1:i-Np+1)$ 
         $nmedias \leftarrow nmedias + 1$ 
      Fim (Se)
    Fim ( $i$ )
  Fim (Se)
   $Rd(n) \leftarrow Rd(n) / nmedias$ 
  Escrever  $Rd(n)$ 
Fim

```

Na apresentação do pseudocódigo optou-se por apresentar a manipulação de elementos de vetores e matrizes de forma idêntica à sintaxe exigida pela plataforma Matlab, ou seja, representando com o sinal de dois pontos a abrangência dos elementos selecionados em uma mesma dimensão.

IV.3 – Técnica AR-Prony

Conforme foi apresentado no capítulo anterior, o método AR apresenta múltiplos desdobramentos, principalmente em função dos estimadores que utiliza para a matriz de autocorrelação. Neste trabalho optou-se pela implementação da técnica da autocovariância, que equivale à técnica de Prony com mínimos quadrados.

Sabendo-se que as técnicas autoregressivas constituem simplesmente um preditor linear baseado em respostas passadas ponderadas por um número p de coeficientes, quanto maior o número p (de pólos) da memória utilizada, melhor será a predição do valor presente, ou seja, melhor será o ajuste à seqüência.

BROWN *et al.* (1980) sugerem que sejam utilizados pelo menos uma vez e meia o número de pólos esperado para o sistema estrutural ($1,5N$) para que se obtenha um bom ajuste e uma decorrente boa estimação dos parâmetros modais. Cada pólo identificado pela técnica implicará, portanto, na necessidade de se avaliá-lo quanto à existência real, ou apenas funcionalidade numérica. MATHIAS (1998) e ALLEMANG (1999) apresentam várias técnicas encontradas na literatura que realizam apropriadamente essa identificação.

Este trabalho propõe a utilização de diagramas de estabilização como técnica unificada para se identificar os pólos reais de sistemas estruturais entre todos os pólos obtidos pelos diferentes métodos implementados.

Neste trabalho restringiu-se à utilização do método AR como estimador dos parâmetros modais associados ao decaimento proporcionado pelas funções RD pré-estimadas. A Fig. IV.2 apresenta uma visualização da implementação realizada para o algoritmo denominado de AR-Prony. Os parâmetros a serem definidos são o número mínimo de pólos a pesquisar e o número de pontos utilizados no ajuste, além dos critérios do diagrama de estabilização.

Uma vez que a técnica de seleção de pólos utilizada é o diagrama de estabilização, cujos detalhes serão apresentados adiante, sugere-se que se coloque como número mínimo de pólos o número de modos de vibração que realmente se admite existir no sinal disponibilizado. Para número de pontos, geralmente utilizam-se todos os pontos disponíveis do decaimento.

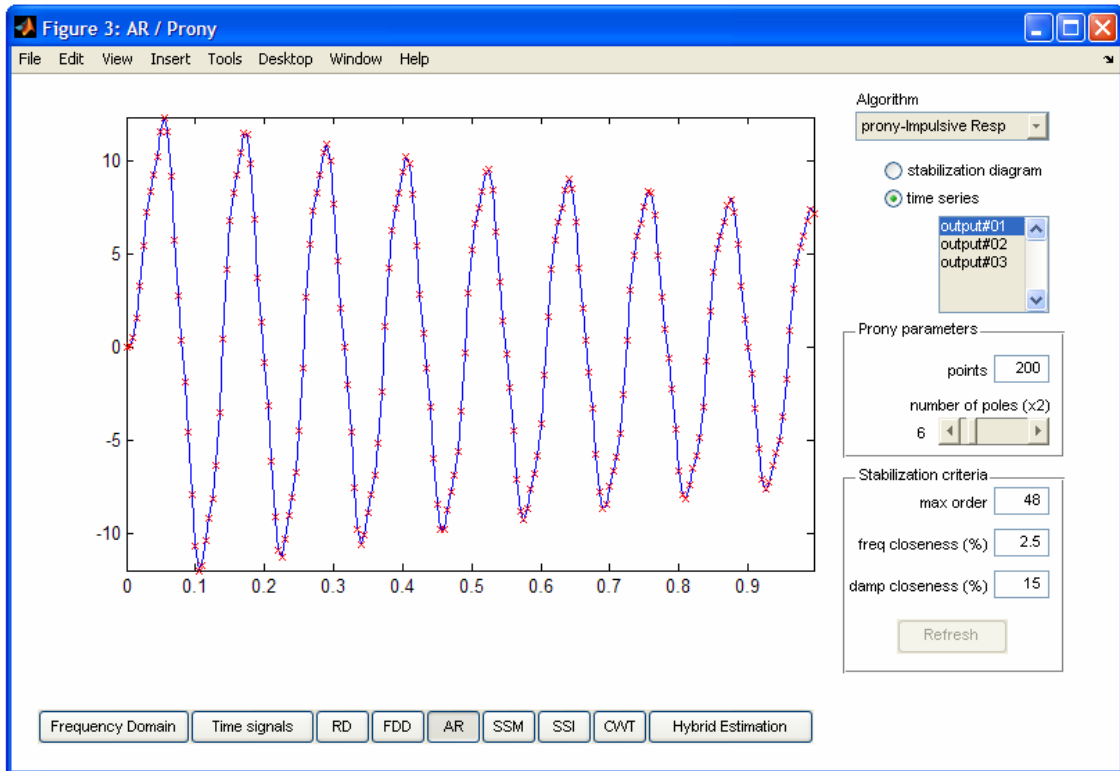


Figura IV.2 – Ajuste de Prony efetuado para o decaimento (deslocamento em mm) do GL 07 da viga exemplo, utilizando-se 200 pontos (1 segundo) e admitindo-se 6 pares de pólos conjugados (o dobro do existente).

Apresenta-se a seguir pseudocódigo do algoritmo AR-Prony, inspirado no código em MATLAB já apresentado no Cap. III:

Início:

$y(n) \leftarrow$ função de decaimento

$N \leftarrow$ número mínimo de pólos

$dt \leftarrow$ intervalo de amostragem

$\mathbf{T} \leftarrow$ matriz de Toeplitz $2N \times 2N$ dos dados $y(n)$ // Eq. III.52 //

$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}$ // estimador da matriz de autocorrelação //

$\{a_k\} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{T}^T \{y(n)\}$ //calculam-se coeficientes autoregressivos//

$[\mathbf{C}] \leftarrow \{a_k\}$ //monta-se a matriz companheira: Eq. III.57 //

$\lambda \leftarrow$ autovalores de $[\mathbf{C}]$ //obtem-se os pólos do sistema//

$\omega, \xi \leftarrow \lambda$ //obtem-se parâmetros modais Eq. III.53 e III.54 //

Fim

IV.4 – Diagrama de Estabilização

Na análise modal não se busca apenas o ajuste de modelos numéricos aos dados experimentais, mas principalmente buscam-se os parâmetros modais associados a esses modelos. A experiência prática em aplicações de modelos paramétricos na análise modal indica ser mais eficiente sobredeterminar a ordem do modelo e posteriormente se proceder à eliminação dos pólos numéricos “não-físicos” excedentes. Dentro deste contexto, o diagrama de estabilização se apresenta como uma ferramenta simples e eficiente (PEETERS, 2000, ALLEMANG, 1999).

Baseia-se na comparação entre os pólos obtidos a partir de um modelo com uma determinada ordem, e os pólos do modelo com ordem imediatamente inferior. Se os valores encontrados para os parâmetros modais se assemelharem dentro de uma tolerância pré-determinada, o respectivo pólo é identificado como estável. Por outro lado, os pólos numéricos espúrios em geral não se estabilizam e podem ser sucessivamente descartados.

Os diagramas de estabilização devem ser construídos de forma a evitarem cálculos repetitivos ao estimarem os pólos de modelos de diferentes ordens. Podem identificar a estabilidade dos pólos através da proximidade de estimativas da frequência natural, da frequência e do amortecimento, da frequência e da forma modal, e preferencialmente, a partir da aproximação de todos os parâmetros de um mesmo modo.

Neste trabalho optou-se pela implementação de um diagrama que verifica a estabilidade dos pólos a partir da verificação de tolerâncias entre frequências naturais e taxas de amortecimento. O número de pólos do modelo varia desde um valor máximo (par) determinado pelo usuário, até o dobro do número de modos esperado, também determinado pelo usuário, diminuindo-se a ordem em dois a cada iteração. Deve-se atentar, entretanto, que o modelo de maior ordem não pode ultrapassar a dimensão proporcionada pelo estimador específico da técnica utilizada.

Apresenta-se a seguir um algoritmo geral para a obtenção de diagramas de estabilização. Em seguida, na Figura IV.3, é exibido um diagrama de estabilização como critério de identificação e verificação de estabilidade dos pólos estimados segundo a técnica AR-Prony.

Início:

$npolos \leftarrow$ número de pólos estimado (par)

$nmax \leftarrow$ número máximo de pólos

$tol_freq \leftarrow$ tolerância de estabilização do pólo em frequência

$tol_amrt \leftarrow$ tolerância de estabilização do pólo em amortecimento

$nlinhas \leftarrow (nmax - npolos + 1)$ // nº de iterações //

$i \leftarrow 1$ // contador do nº de iterações //

Para $ordem$ de $2 \cdot nmax$ até $2 \cdot npolos$ passo -2 executar

$freq(1:ordem) \leftarrow$ estimativa de frequência natural

$amrt(1:ordem) \leftarrow$ estimativa do amortecimento

$matriz_freq(i,1:ordem) \leftarrow freq(1:ordem)$

$matriz_amrt(i,1:ordem) \leftarrow amrt(1:ordem)$

$i \leftarrow i + 1$

Fim ($ordem$)

$contador \leftarrow 1$ // contador do nº de pólos estabilizados //

$matriz_freq_est(1,:) \leftarrow matriz_freq(1,:)$

$matriz_amrt_est(1,:) \leftarrow matriz_amrt(1,:)$

Para i de 2 até $nlinhas$ executar

Para j de 1 até $2 \cdot nmax$ executar

$k \leftarrow 1$

Enquanto $k \leq 2 \cdot nmax$ executar

$$dif_freq \leftarrow \frac{matriz_freq(i,j) - matriz_freq(i-1,k)}{matriz_freq(i-1,k)}$$

$$dif_amrt \leftarrow \frac{matriz_amrt(i,j) - matriz_amrt(i-1,k)}{matriz_amrt(i-1,k)}$$

Se $dif_freq < tol_freq$ e $dif_amrt < tol_amrt$ então

$matriz_freq_est(i,contador) \leftarrow matriz_freq(i,j)$

$matriz_amrt_est(i,contador) \leftarrow matriz_amrt(i,j)$

$contador \leftarrow contador + 1$

$k \leftarrow 2 \cdot nmax + 1$

Fim (Se)

Fim (Enquanto)

Fim (j)

Fim (i)

Exibir diagrama de estabilização a partir da $matriz_freq_estab$

Calcular ω, ξ pela média dos valores encontrados nos pólos estabilizados

Fim

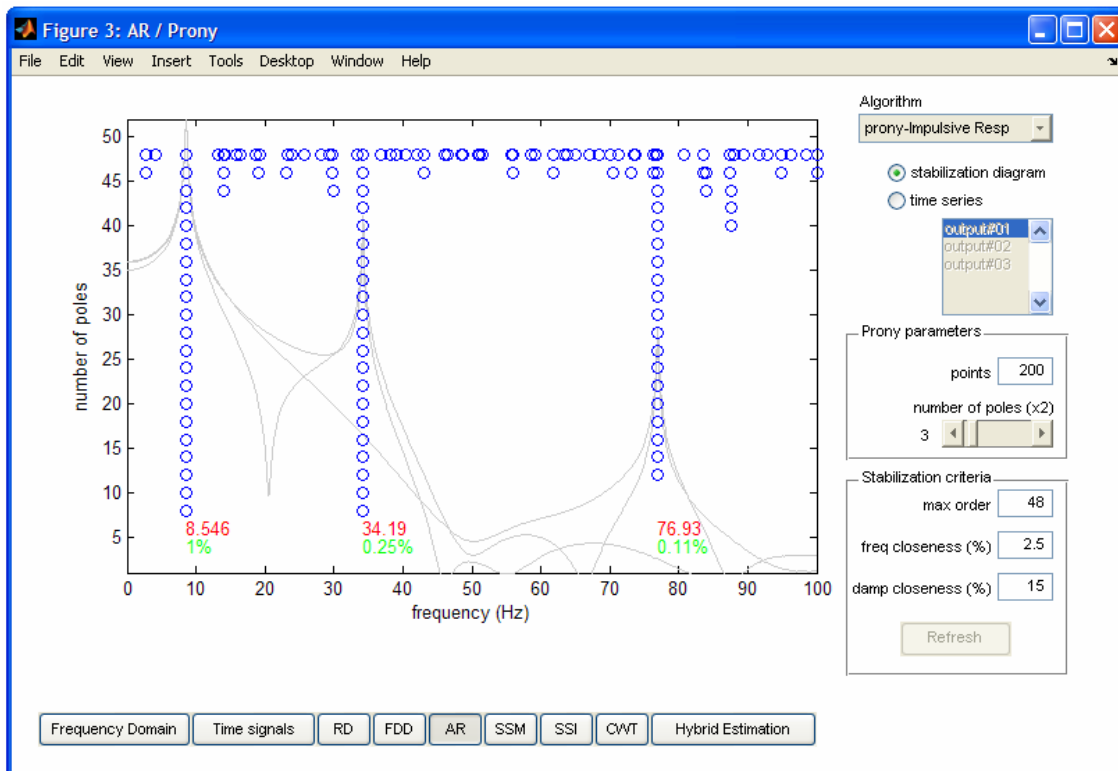


Figura IV.3 – Diagrama de estabilização aplicado na técnica AR-Prony ilustrado sobre funções densidade do autoespectro dos sinais de saída, utilizando-se critério de estabilização de pólos as tolerâncias de 2,5% para a proximidade mínima entre frequências e 15% para o erro máximo entre estimativas de amortecimento.

IV.5 – Técnica SSM

Conforme apresentado no capítulo anterior, as técnicas de estimação de parâmetros modais desdobradas a partir da representação de sistemas dinâmicos no espaço de estados caracterizam-se pela busca de estimativas da matriz de estado A , a partir de onde se podem obter os pólos do sistema pelo cálculo dos respectivos autovalores.

Para se estimar a matriz de estado, os métodos desenvolvidos no espaço de estados – “*State Space Methods*” (SSM) na terminologia de LIU (1996) – utilizam essencialmente os parâmetros de Markov dispostos na forma da matriz de Hankel. Em problemas de análise modal de estruturas em operação (“*output-only*”), onde não se dispõem em geral da resposta impulsiva, pode-se substituir a referida matriz por matrizes de correlação (covariância) dos sinais de saída dispostas também na forma de

Hankel, e de forma análoga à solução determinística, obter uma estimativa para a matriz de estado A .

A partir da conceituação apresentada por JUANG (1994) para a técnica ERA-DC e da formulação explicitada por PEETERS (2000) para a técnica SSI-COV, implementou-se neste trabalho um algoritmo de estimação de parâmetros modais, doravante denominado de SSM.

O primeiro passo do algoritmo consiste na estimação das Matrizes de autocorrelação (covariâncias) $\hat{\mathcal{R}}$, na forma das Eq. III.96 e Eq. III.106. Para tal, é preciso se determinar inicialmente quantas funções de autocorrelação $\hat{\mathbf{R}}_{yy}(k)$ comporão a matriz (na forma de Toeplitz), ou seja, quais serão os valores admitidos para o atraso k . A partir do número de funções de autocorrelação, pode-se em seguida determinar-se o número (máximo) de pontos utilizados nas estimativas de $\hat{\mathbf{R}}_{yy}(k)$ como sendo o número de pontos das seqüências menos o número total de funções a estimar. A seguir é apresentado código em MATLAB para a estimação de matrizes de autocorrelação no domínio do tempo com elementos diagonais sem atraso, e com atraso unitário.

```

% yd = seqüências de saída (GL monitorados)
% nout = número de seqüências de saída
% np = n° de pontos das seqüências de saída
% k_ssi = ordem da matriz de autocorrelação (quadrada)
% N_ssi = n° de pontos para cálculo das funções de autocorrelação
% Rk0 = matriz de autocorrelação com elementos da diagonal sem atraso
% Rk1 = matriz de autocorrelação com atraso unitário
N_ssi=np-2*k_ssi*nout-1;
for i=1:k_ssi
    for j=1:k_ssi
        Rk0((i-1)*nout+1:i*nout,(j-1)*nout +1:j*nout)=1/sqrt(N_ssi)*...
            yd(:,k_ssi+i:k_ssi+N_ssi+i)* yd(:,j:N_ssi+j)';
        Rk1((i-1)*p+1:i*nout,(j-1)*nout +1:j*nout)=1/sqrt(N_ssi)*...
            yd(:,k_ssi+i+1:k_ssi+N_ssi+i+1)* yd(:,j:N_ssi+j)';
    end
end
end

```

O número de $(2k-1)$ de funções de autocorrelação estimadas compõem uma matriz de autocorrelação quadrada com dimensão igual a kl , onde l é o número de seqüências de saída. Logo, o número máximo de pólos que poderá ser obtido a partir da matriz será também $k \cdot l$. PEETERS (2000) propõe uma matriz de autocorrelação

retangular $\mathbf{T}_{l|k}^{ref}$, com dimensões $lk \times rk$, onde r é o número de saídas de referência (vide equações III.107 a III.110). Neste trabalho será utilizada a matriz de autocorrelação quadrada (completa).

Uma vez estimadas as matrizes de autocorrelação, aplica-se a formulação da técnica ERA apresentada no capítulo III, fundamentalmente as decomposições definidas nas equações III.87 à III.91, substituindo-se as matrizes de Hankel $\mathbf{H}(0)$ e $\mathbf{H}(l)$ pelas matrizes de autocorrelação estimadas (na forma de Toeplitz), adaptando-se assim à abordagem “*output-only*”. A matriz de estado \mathbf{A} pode então ser finalmente obtida pela aplicação direta da equação III.92.

Para inicialmente se inferir a ordem do sistema, poderia-se, teoricamente, apenas verificar o número de valores singulares não-nulos da matriz $\mathbf{H}(0)$. Entretanto, a existência de ruído nas medições e efeitos decorrentes da digitalização e decimação (com aplicação de filtros digitais passa-baixas) dos sinais, acabam por fazer com que os valores singulares obtidos sejam todos diferentes de zero. Na prática, a ordem do sistema pode ser estimada a partir da disposição dos valores singulares em ordem decrescente e respectiva representação gráfica em escala logarítmica. Desta forma torna-se possível observar a variação existente da ordem de grandeza entre dois valores singulares adjacentes. O primeiro valor singular onde ocorre o maior degrau (no sentido da direita para esquerda) indica geralmente a ordem do modelo (PEETERS, 2000). A figura IV.4 apresenta a implementação efetuada dessa técnica de verificação da ordem do modelo para a simulação numérica da viga biapoiada.

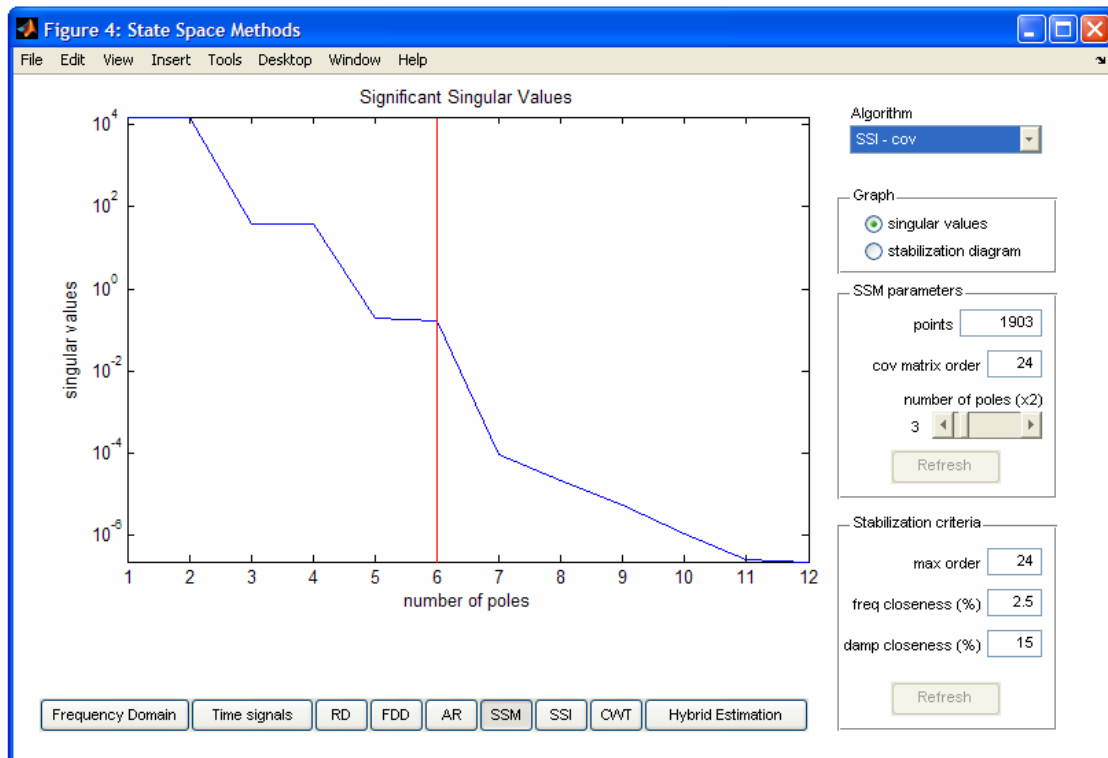


Figura IV.4 – Valores singulares da matriz de covariância na forma de Toeplitz. Nele pode-se perceber que os seis primeiros valores singulares (referentes a três pares de pólos complexos conjugados) apresentam valores de maior magnitude, inferindo antecipadamente a ordem do sistema.

Tendo-se já uma primeira estimativa da ordem do sistema, empreende-se complementarmente a identificação dos pólos pela composição do diagrama de estabilização. No algoritmo SSM pode-se construí-lo realizando-se a decomposição em valores singulares da matriz de autocorrelação apenas uma vez. Para isso basta que a matriz seja montada com dimensão maior ou igual ao número de pólos admitidos ao modelo de ordem máxima do diagrama de estabilização. Partindo-se dos valores singulares do modelo de ordem máxima, e utilizando-se sucessivamente um número menor de valores singulares não nulos (de maior magnitude), obtém-se o diagrama de estabilização na forma já descrita neste capítulo. A Figura IV.5 ilustra o diagrama de estabilização obtido a partir da análise de sinais de decaimento simulados.

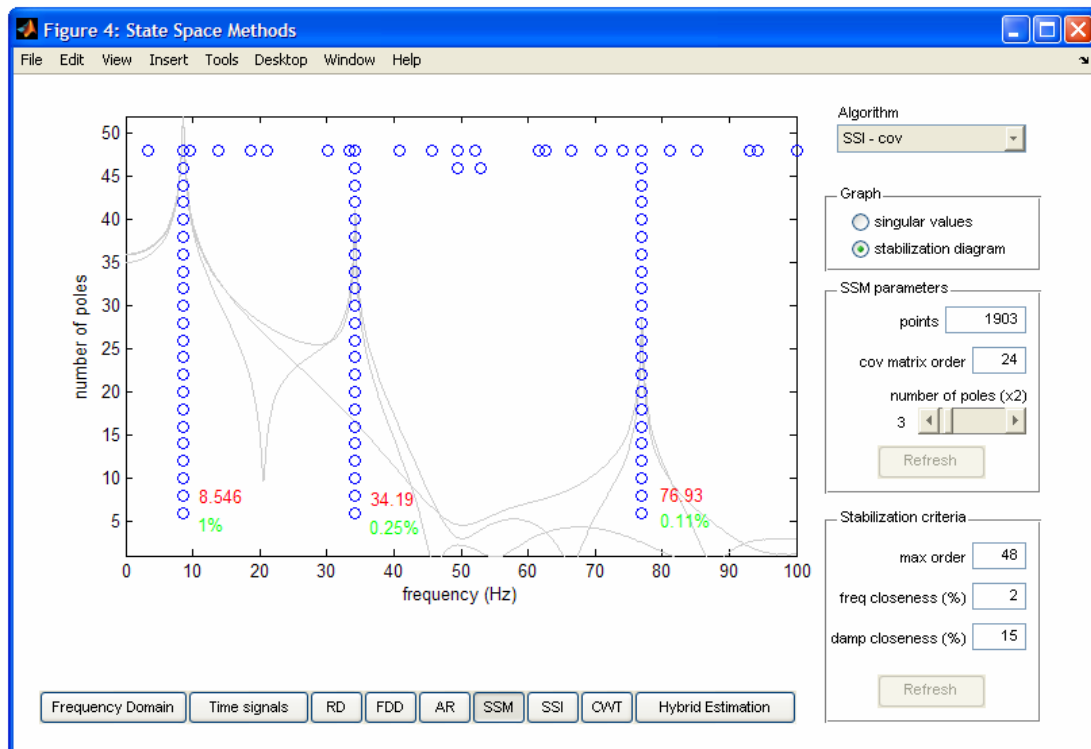


Figura IV.5 – Diagrama de estabilização obtido a partir do algoritmo SSM, utilizando-se critério de estabilização de pólos as tolerâncias de 2% para a proximidade mínima entre freqüências e 15% para o erro máximo entre estimativas de amortecimento. A ordem admitida ao modelo partiu de 48 pólos chegando-se à seis pólos. As freqüências e amortecimentos médios obtidos encontram-se também apresentados.

O pseudocódigo resumido da técnica SSM implementada neste trabalho é apresentado a seguir.

Início:

- $k \leftarrow$ atraso máximo das funções de autocorrelação
- Estimativa das funções de autocorrelação
- Montagem da matriz de autocorrelação na forma de Toeplitz
- Decomposição em valores singulares da matriz de autocorrelação
- Estimativa da matriz de estado A // Eq. III.87 à III.92 //
- Estimativa dos pólos λ // Eq. III.83 //
- $\omega, \xi \leftarrow \lambda$ // Eq. III.84 //
- Montagem do diagrama de estabilização

Fim

IV.6 – Técnica SSI

A técnica SSI tem sido sem dúvida a técnica mais empregada na literatura recente de identificação estrutural, sendo amplamente explorada nos novos pacotes comerciais de análise modal. Conforme apresentado no capítulo anterior, as publicações de Van Overschee e De Moor em meados da década de 90 são certamente as principais responsáveis pela ampla exposição da técnica ao apresentarem algoritmos elegantes pela simplicidade para a solução do problema estocástico e do problema determinístico-estocástico, inicialmente focados para aplicações da Engenharia de Controle e Identificação de Sistemas.

Neste trabalho foi implementada a solução estocástica publicada inicialmente por VAN OVERSCHEE e DE MOOR (1993) amparada pelos algoritmos disponibilizados em VAN OVERSCHEE e DE MOOR (1996) já na plataforma MATLAB. A seguir apresenta-se o pseudocódigo básico da técnica implementada:

```
Início:
   $n \leftarrow$  número de amostras do vetor de saídas (dados)
   $i \leftarrow$  número de blocos de linhas na matriz de dados
   $j \leftarrow n - 2i + 1$  //nº de blocos de colunas //
  → Montagem da matriz de dados  $\mathbf{H}_{0,2i-1}$  // Eq. III.113 //
  → Decomposição QR de  $\mathbf{H}_{0,2i-1}$  // Eq. III.117 //
  → Cálculo das projeções  $\mathbf{P}_i$  e  $\mathbf{P}_{i-1}$  // Eq. III.116 e III.125//
  → Decomposição em valores singulares de  $\mathbf{P}_i$  // Eq. III.119 //
  → Cálculo das seqüências de estado  $\hat{\mathbf{S}}_i$  e  $\hat{\mathbf{S}}_{i+1}$  // Eq. III.121 e III.124//
  → Estimativa da matriz de estado  $\mathbf{A}$  por mínimos quadrados // Eq. III.127 //
  → Estimativa dos pólos  $\lambda$  // Eq. III.83 //
   $\omega, \xi \leftarrow \lambda$  // Eq. III.84 //
  → Montagem do diagrama de estabilização
Fim
```

Conforme se pode perceber pela observação do pseudocódigo, o parâmetro fundamental da técnica consiste no número i de blocos de linhas em que será montada a matriz de dados. DE COCK e DE MOOR (2003) sugerem que esse número seja no mínimo igual à máxima ordem (número de pólos) inicialmente admitida ao sistema que se deseja identificar. Note-se que uma vez que cada bloco de linhas contém m saídas, a matriz de dados terá $2mi$ linhas.

As Figuras IV.6 e IV.7 ilustram respectivamente a ordem do sistema pela análise direta dos valores singulares de \mathcal{P}_t , e os parâmetros modais apontados pelo diagrama de estabilização.

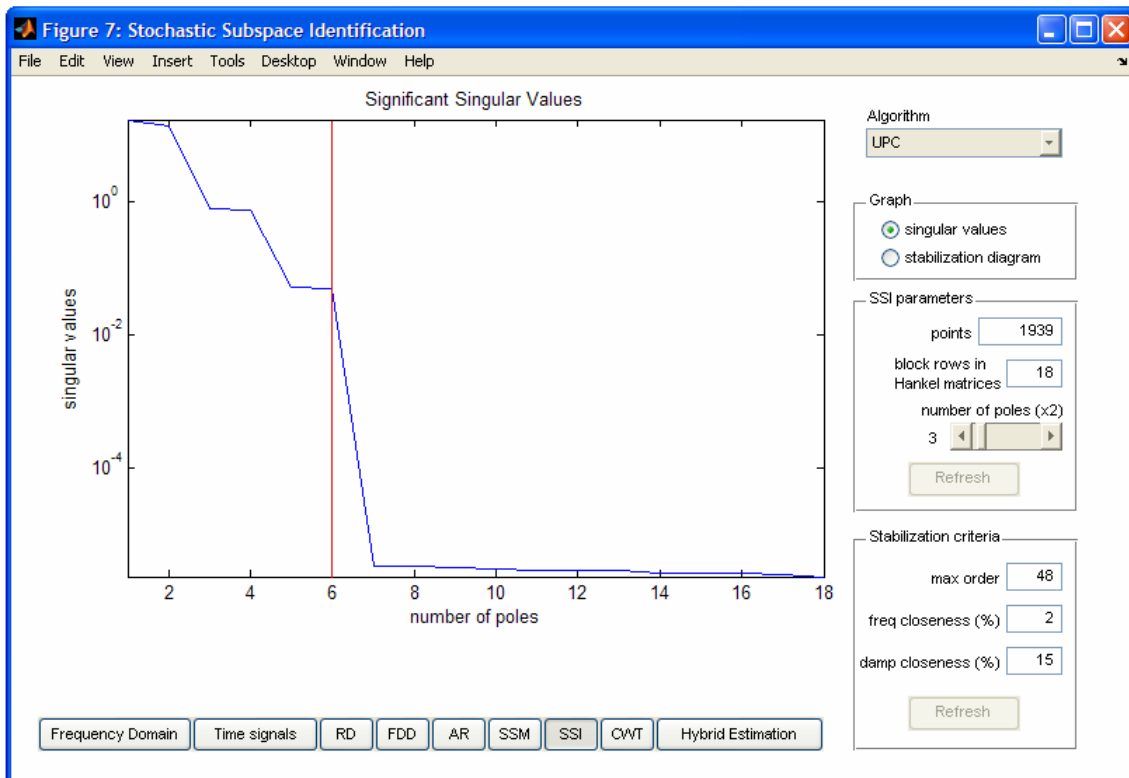


Figura IV.6 – Valores singulares da matriz de projeção. Nele pode-se perceber que os seis primeiros valores singulares (referentes a três pares de pólos complexos conjugados) apresentam valores de maior magnitude, inferindo antecipadamente a ordem do sistema.

Uma limitação encontrada no algoritmo implementado na plataforma MATLAB consiste na restrição do número de linhas de matrizes de dados com um número acentuado de amostras a serem submetidas à decomposição QR.

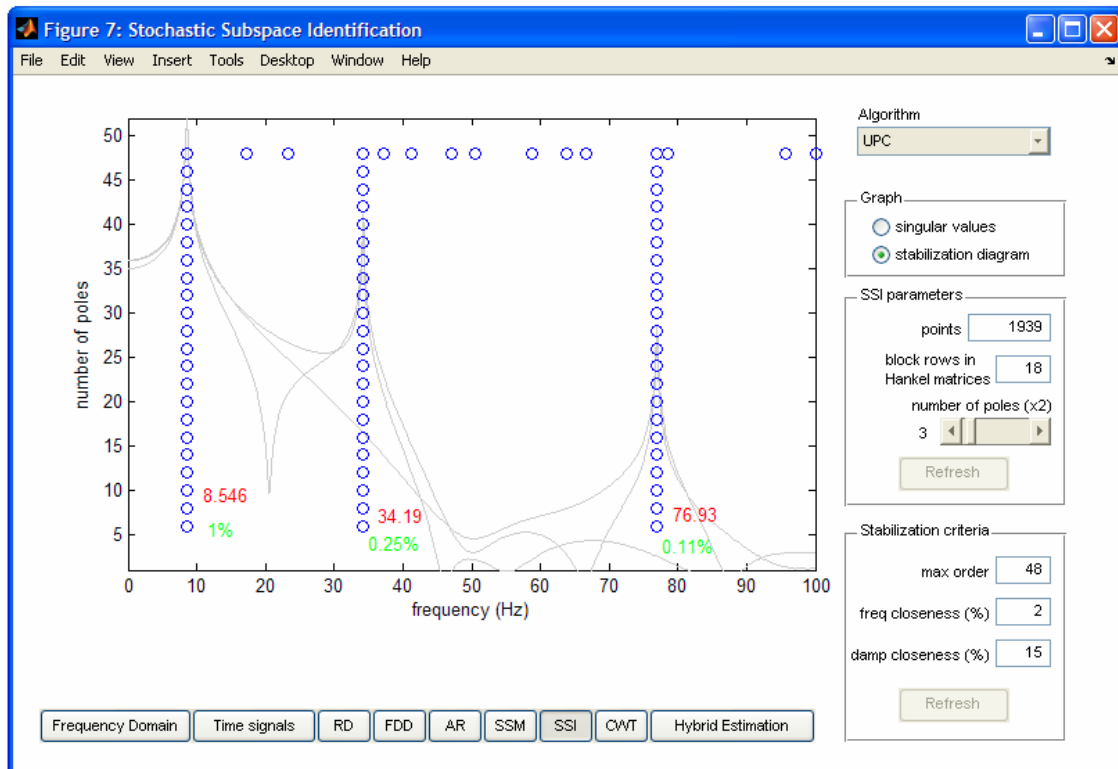


Figura IV.7 – Diagrama de estabilização obtido a partir do algoritmo SSI, utilizando-se critério de estabilização de pólos as tolerâncias de 2% para a proximidade mínima entre freqüências e 15% para o erro máximo entre estimativas de amortecimento. A ordem admitida ao modelo partiu de 48 pólos chegando-se à seis pólos. As freqüências e amortecimentos médios obtidos encontram-se também apresentados.

IV.7 – Técnica FDD

A técnica FDD baseia-se essencialmente na decomposição em valores singulares da matriz formada pelas funções densidade espectral (PSD) dos sinais de saída, representada por $[G_{yy}]$. Logo, o primeiro passo da técnica consiste na estimativa dos auto-espectros e espectros cruzados que compõem essa matriz para cada valor de freqüência.

As duas definições equivalentes da PSD podem ser bem percebidas pelo diagrama em triângulo proposto por MARPLE (1987) e apresentado na Figura IV.8, onde são dispostos o método indireto e direto de obtenção da função.

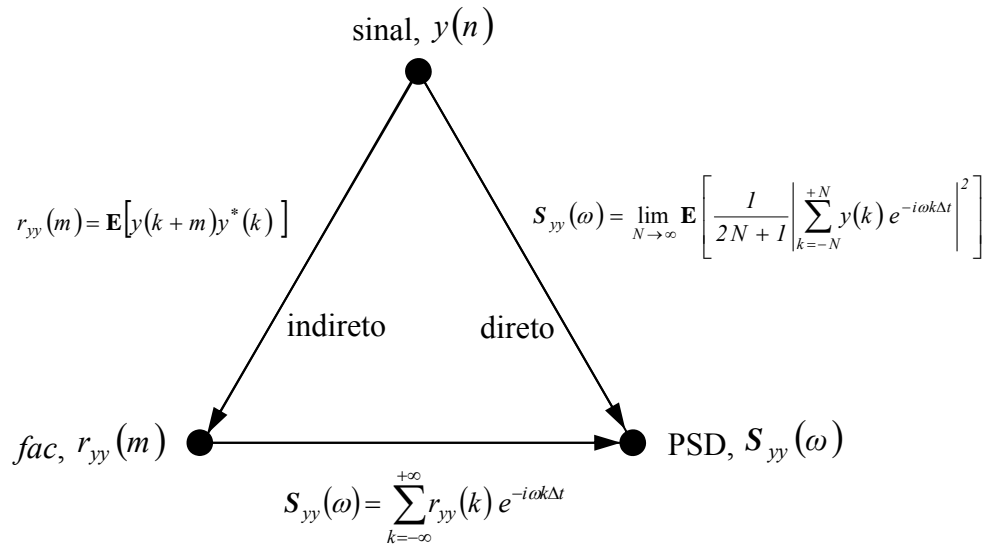


Figura IV.8 – Definições equivalentes da função densidade espectral (PSD) para sistemas ergódicos (MARPLE,1987).

Um estimador direto da PSD foi apresentado nas Eq. II.174 à II.177, obtido pela média entre auto-espectros (ou espectros cruzados) dos sinais, estimados a partir de L registros (disjuntos do sinal) de mesmo período. Conforme também já sinalizado no capítulo II, numericamente essa estimativa preliminar pode ser eficientemente implementada pelo periodograma de Welch.

Ao se montar as estimativas da matriz $[G_{yy}]$ a partir de seqüências temporais de vários GL, devem-se inicialmente escolher o número de janelas utilizadas para a obtenção das FFT. Quanto maior for o número de janelas, menor será a variância do estimador, mas por outro lado, menor será a resolução em freqüência da PSD. Quanto menor for a resolução em freqüência, maior será o erro de *bias* causado por *leakage* (BENDAT e PIERSOL, 1986).

TAMURA *et al.* (2002) avaliaram a convergência das estimativas de amortecimento pela técnica FDD para diferentes tamanhos de janelas, chegando à conclusão de que para identificar o amortecimento (de todos os nove primeiros modos analisados, de freqüências naturais de 0,76Hz a 4,47Hz) eram necessários pelo menos 4096 pontos para as janelas, 2048 linhas de freqüência, implicando em uma resolução de 0,00488Hz para as PSD.

A Tabela IV.4 apresenta valores de resolução em freqüência adotados em diferentes identificações estruturais onde foi aplicada a técnica FDD.

Tabela IV.4 – Valores de resolução em frequência adotados em diferentes referências.

Referência	Resolução em frequência da PSD (1)	Menor frequência natural (2)	Relação $\frac{(1)}{(2)}$
TAMURA <i>et al.</i> , 2002	0,00488 Hz	0,76 Hz	0,64%
RODRIGUES <i>et al.</i> , 2005	0,031 Hz	2,96 Hz	1,05%
BAPTISTA <i>et al.</i> , 2004	0,0244 Hz	1,05 Hz	2,3%

Para a composição de cada PSD da matriz espectral $[G_{yy}]$ pode-se utilizar o seguinte pseudocódigo:

```

Início:
  np ← número de amostras por seqüência
  nj ← número de janelas
  nw ← 2int(log2(int(3*np/(nj+2)))) // número de pontos por janela//
  noverlap ← int(2/3*nw) // n° de pontos de sobreposição//
  Para i de 1 até nj executar
    yp ← i-ésima seqüência janelada da saída p, nw elementos, noverlap sobrepostos
    yq ← i-ésima seqüência janelada da saída q, nw elementos, noverlap sobrepostos
    Yp ← FFT(yp)
    Yq ← FFT(yq)
    iSpq ← Yp* · Yq
  Fim (i)
  Spq ← média (iSpq)
  Sqp ← Spq*
Fim

```

A implementação no ambiente MATLAB poderia ser simplificada utilizando-se as funções pré-definidas “pwelch” e “cpsd” da *toolbox* de processamento de sinais (*Signal Processing Toolbox*), que calculam respectivamente a PSD do autoespectro e a PSD cruzada pelo periodograma de Welch, conforme pode ser observado a seguir.

```

% yd = seqüências de saída (GL monitorados);
% nout = número de seqüências de saída;
% nfft = n° de pontos utilizados na FFT (=nw);
% fa = freqüência de amostragem (após decimação);

for i=1:nout
    for j=1:i-1
        [Gyy(i,j,:),f] = cpsd(yd(i,:),yd(j,:),nw,noverlap,nfft,fa,'onesided');
        Gyy(j,i,:) = conj(Gyy(i,j,:));
    end
    [Gyy(i,i,:),f]=pwelch(yd(i,:),nw,noverlap,nfft,fa,'onesided');
end
end

```

O algoritmo implementado neste trabalho inicia apresentando o espectro das respostas através da “*Averaged Normalised Power Spectral Density Function*” (ANPSD) da forma como o próprio nome diz: pela média dos autoespectros das saídas normalizados. Essa primeira visualização provê uma visão geral do sinal em freqüência, inclusive apontando preliminarmente o número de pólos do sistema a partir do número de picos que se destacam. A Figura IV.9 ilustra a apresentação inicial do algoritmo implementado.

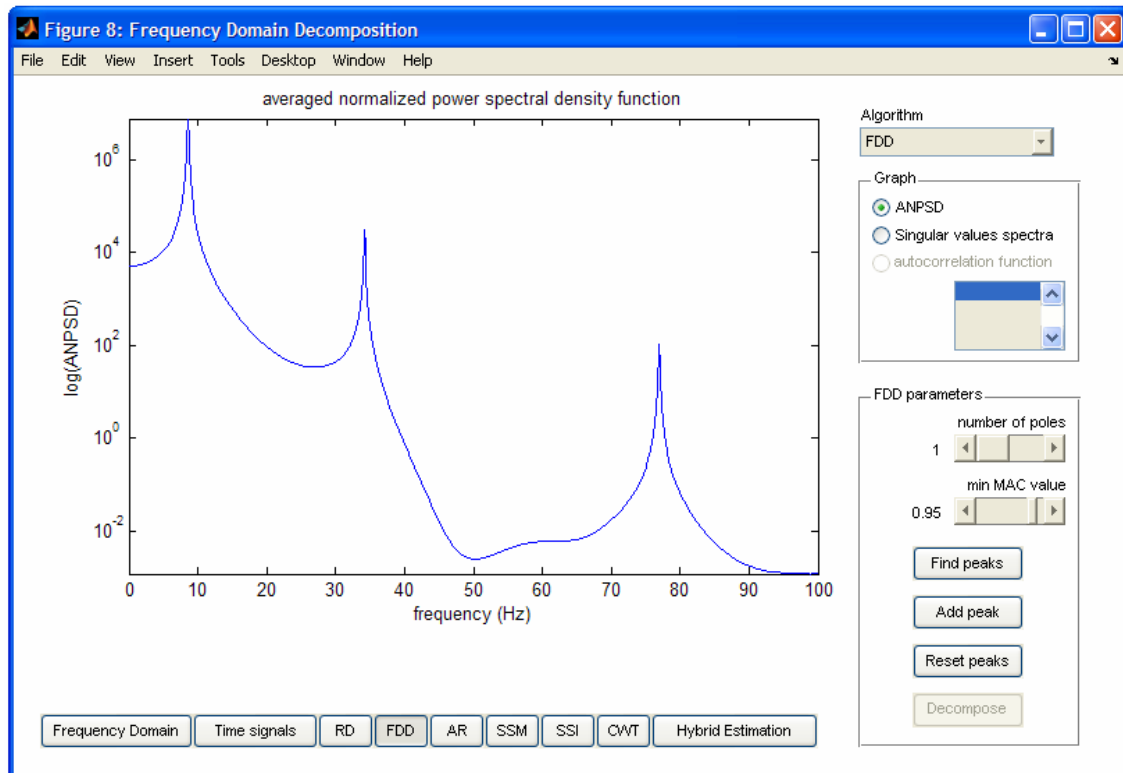


Figura IV.9 – Função ANPSD calculada a partir dos autoespectros das saídas dos três GL monitorados da viga exemplo.

Realizando-se a decomposição em valores singulares da matriz espectral $[G_{yy}]$ para cada linha de frequência e extraíndo-se os respectivos (maiores) valores singulares, obtém-se o gráfico ilustrado na Figura IV.10.

Os picos podem então ser identificados a partir de qualquer algoritmo de obtenção de máximos locais. A partir de verificação da correspondência entre os autovetores do pico com os da sua vizinhança através do número MAC, conforme descrito no capítulo III, procede-se à “decomposição modal” do espectro, segundo também ilustrado na Figura IV.10.

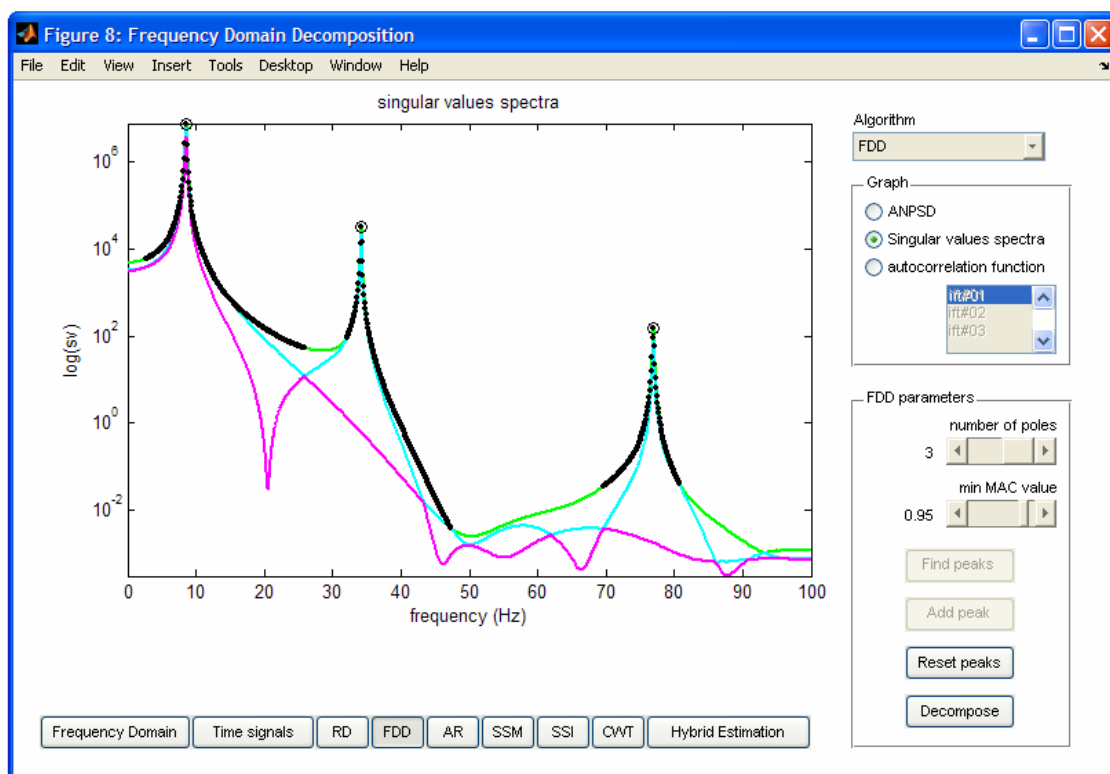


Figura IV.10 – Espectro formado pelos valores singulares da matriz espectral, apresentando ainda as regiões de decomposição modal por análise das matrizes dos autovetores.

Uma vez identificadas as contribuições de cada modo no espectro, pode-se obter uma estimativa das respectivas funções de autocorrelação (“normalizadas”) pela transformada inversa de Fourier (IFT). Neste trabalho optou-se pela estimação da frequência natural e taxa de amortecimento a partir da Transformada Hilbert da função de autocorrelação (LEE e PARK, 1994). Ajustando-se uma reta à fase da transformada obtém-se uma estimativa da frequência natural, e ajustando-se uma reta ao decremento logarítmico da amplitude, obtém-se a taxa de amortecimento. A Figura IV.11 ilustra a

estimação da frequência natural e taxa de amortecimento do primeiro modo da viga-exemplo a partir do algoritmo descrito.

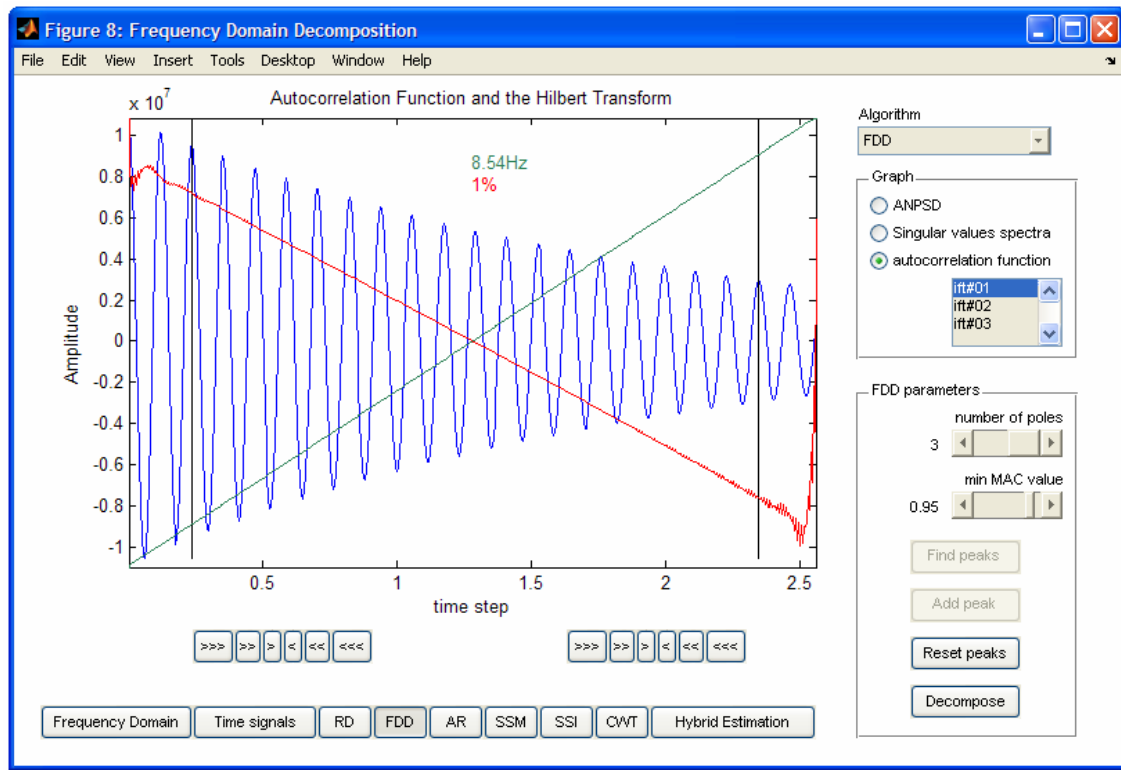


Figura IV.11 – Estimação da frequência natural e taxa de amortecimento do primeiro modo de vibração da viga-exemplo a partir de ajustes respectivamente à fase e ao decremento logarítmico da amplitude da Transformada Hilbert da função de autocorrelação obtida pela técnica FDD.

IV.8 – Técnica CWT

A Técnica CWT implementada neste trabalho consiste essencialmente na aplicação de transformadas contínuas de Morlet às funções RD previamente calculadas sobre os sinais de resposta das estruturas, ou diretamente a sinais de decaimento, na forma apresentada pelas equações e algoritmos já apresentados no item III.4.3 deste texto. Neste capítulo acrescenta-se somente uma nova técnica essencialmente visual de identificação dos *ridges* da CWT de sinais de decaimento.

A Figura IV.12 apresenta a Transformada *Wavelet* Contínua (CWT) do sinal de decaimento do GL 13 (meio da viga) na faixa de 3 a 13Hz na forma de curvas de nível, tendo-se utilizado a *wavelet*-mãe de Morlet com frequência central de 2Hz. As linhas

tracejadas identificam o ponto de maior amplitude da transformada e definem duas seções transversais: uma ao longo do tempo e outra na dimensão da frequência.

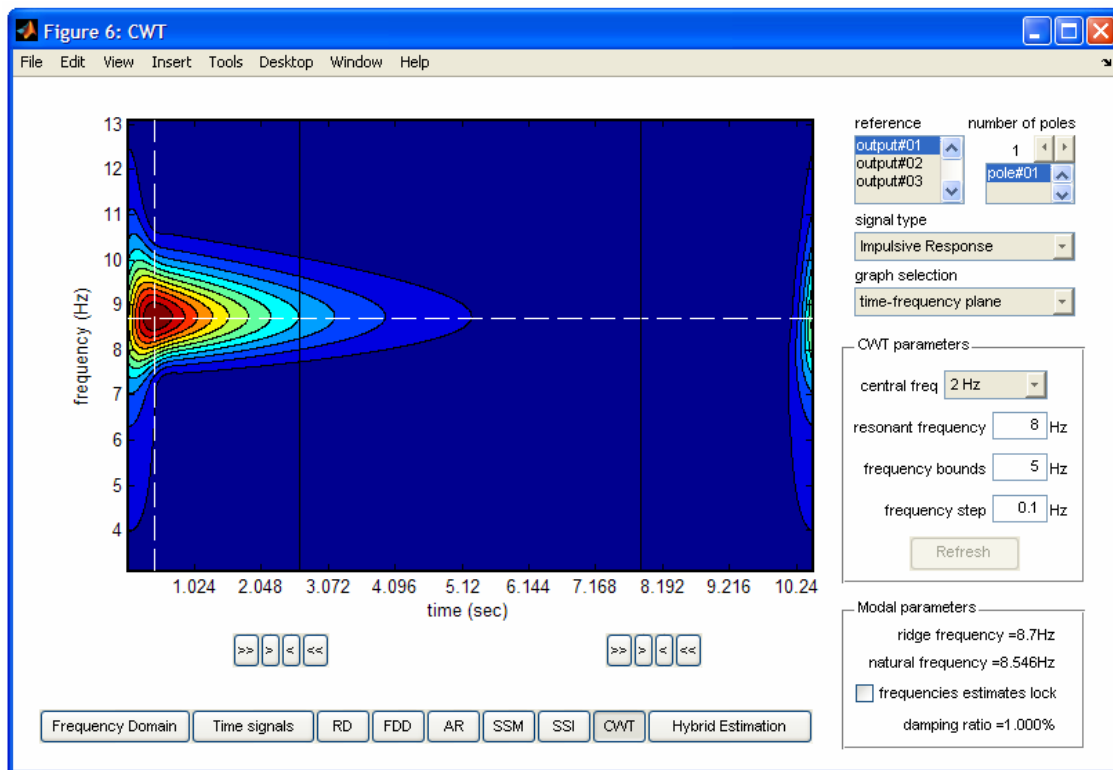


Figura IV.12 – Transformada CWT apresentada por curvas de nível de sua amplitude, destacando o primeiro modo de vibração da viga-exemplo. Para o desenho foi utilizada a *wavelet*-mãe de Morlet de 2Hz, e uma resolução de 100 linhas em frequência.

O algoritmo implementado utiliza imediatamente a seção transversal ao longo do tempo, admitindo-a preliminarmente como sendo a *ridge* daquele modo, e estima a frequência natural e a taxa de amortecimento respectivamente pelo ajuste linear da fase e do decremento logarítmico da amplitude da transformada no trecho selecionado (pelas linhas pretas transversais). As Figuras IV.13 e IV.14 ilustram respectivamente a seção ao longo da frequência e a seção ao longo do tempo da CWT do sinal de decaimento do GL 13 da viga-exemplo. Na Figura IV.14 podem-se verificar os ajustes obtidos para a taxa de amortecimento ao utilizarem-se diferentes frequências centrais para a *wavelet*-mãe de Morlet. Para se realizar uma boa estimativa, a experiência recomenda a seleção de uma *wavelet*-mãe que proporcione o maior trecho retilíneo, aproveitando dessa forma melhor o sinal disponibilizado. Paralelamente, a frequência natural é obtida pelo ajuste da fase com a aplicação da mesma *wavelet*-mãe ao mesmo trecho selecionado para a estimação do amortecimento.

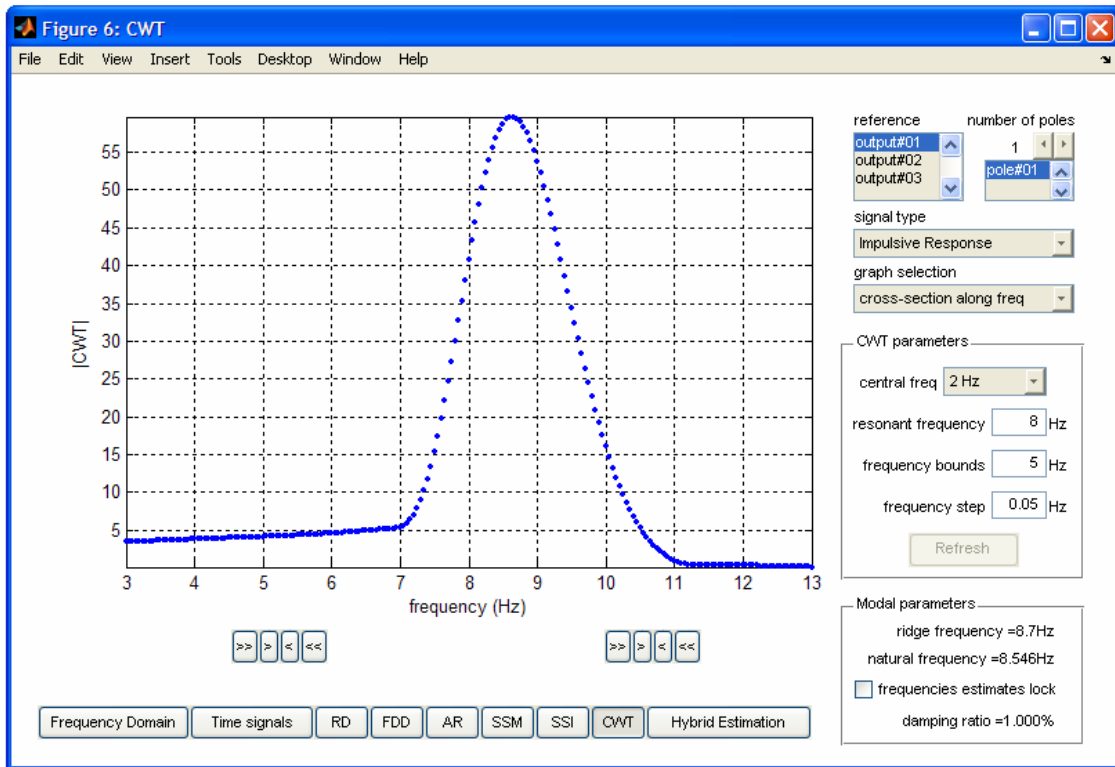


Figura IV.13 – Gráfico obtido a partir da seção tomada ao longo da frequência a partir da CWT apresentada na Figura IV.12.

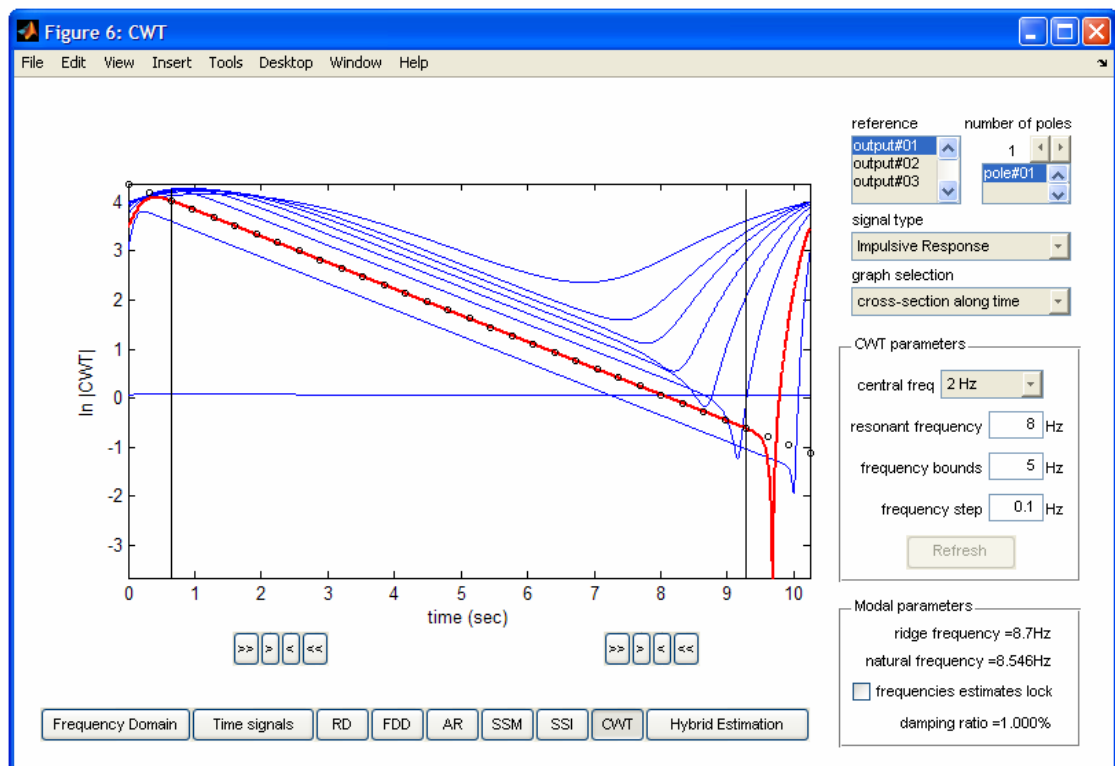


Figura IV.14 – Seção da CWT ao longo do tempo (em vermelho), e estimação da taxa de amortecimento do primeiro modo de vibração da viga-exemplo, utilizando-se a *wavelet*-mãe de 2Hz.

Quando a presença de ruído puder prejudicar a estimativa do *ridge* pelo “método simples”, outras técnicas podem ser aplicadas para sua identificação. ARAGÃO FILHO *et al.* (2006) propõem uma nova técnica de identificação do *ridge* da CWT. Consiste na construção de linhas auxiliares a partir de pares ordenados formados por valores de freqüência de seções da CWT e as respectivas estimativas obtidas para as freqüências naturais pelo ajuste da fase naquela linha. Calculando-se essas linhas para *wavelet*-mães de diferentes freqüências centrais, obtém-se o gráfico ilustrado na Figura IV.15. Como era razoável de se admitir, há um valor de freqüência da CWT onde todas as linhas se cruzam, independentemente da *wavelet*-mãe utilizada. Esse ponto representaria o valor da freqüência do *ridge* (admitido linear) que deveria ser utilizado na estimação dos parâmetros modais.

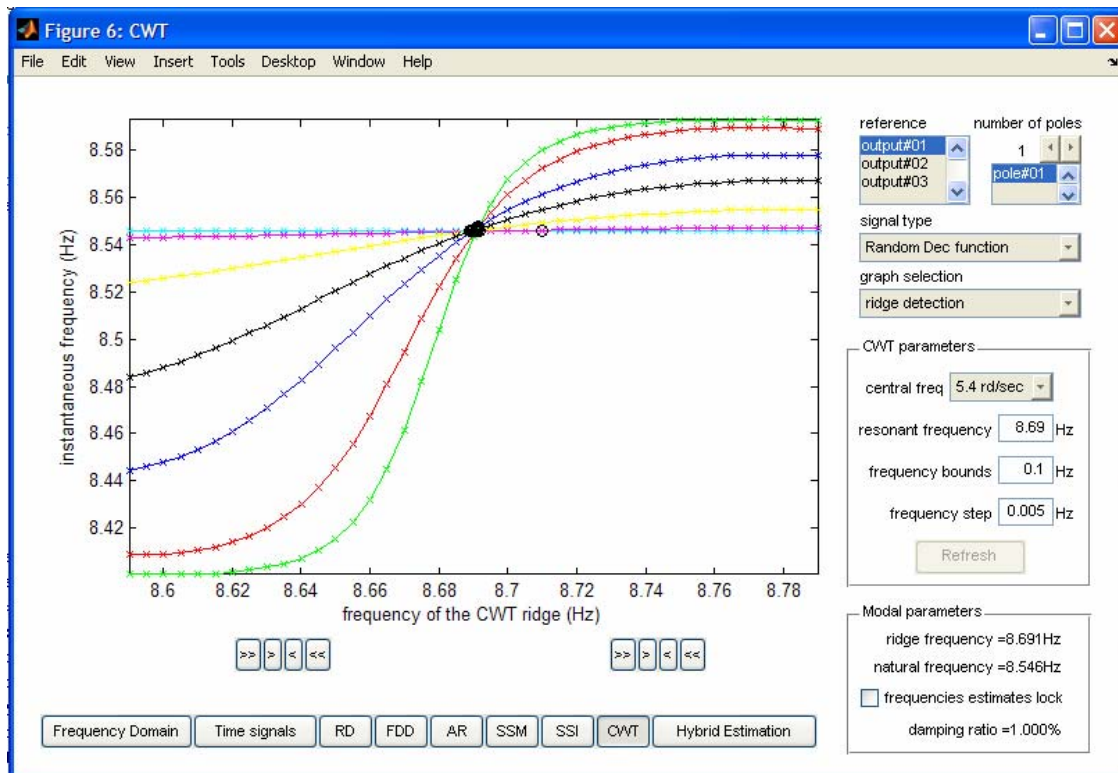


Figura IV.15 – Estimação da freqüência natural e taxa de amortecimento do primeiro modo de vibração da viga-exemplo, a partir de uma função RD obtida a partir de sinal aleatório de resposta à excitação tipo ruído branco.

CAPÍTULO V

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA E ESTIMADORES

V.1 – Introdução

Uma vez apresentado o problema geral da identificação de sistemas estruturais e estimação de parâmetros modais, busca-se neste momento a proposição de uma abordagem prática eficiente ao problema da identificação estrutural.

É desejável que um sistema de identificação e monitoração da integridade de estruturas contenha, entre outras, as seguintes propriedades:

- Estimar os parâmetros modais sem a disponibilidade dos sinais da excitação dinâmica imposta à estrutura em operação;
- Basear-se em mais de uma técnica de estimação de parâmetros e obter estatísticas das estimações;
- Permitir potencialmente a realização da identificação em tempo “quase-real” (*near-real-time*), admitindo a percepção de eventuais mudanças no comportamento da estrutura, e avaliando sua integridade estrutural.

Por tempo “quase-real” entende-se aqui o tempo necessário em se obter uma determinada informação, a menos do tempo levado para o armazenamento dos sinais digitalizados e estimação de parâmetros por algoritmos semi-automatizados. Admite-se ainda esse atraso como pequeno quando comparado ao período transcorrido para a ocorrência de uma alteração significativa que interfira na resposta dinâmica da estrutura.

Para se estabelecer uma metodologia que compreenda essas características, entende-se ser necessário fazer uso de técnicas que se baseiem em diferentes estatísticas das respostas aleatórias e se desdobrem cada uma em diferentes domínios, ou seja, no tempo, em frequência, e também tempo-frequência, conferindo credibilidade e robustez às estimativas.

A heterogeneidade desejada para as técnicas de estimação e a cobiçada obtenção de estimativas em tempo “quase-real” deflagra, por outro lado, um problema: como obter as desejadas variâncias ou intervalos de confiança dos parâmetros dispondo-se de dados limitados e utilizando-se técnicas desdobradas segundo modelos estocásticos diferentes?

Para responder a essa pergunta, buscaram-se na literatura aplicações de técnicas de obtenção das incertezas de parâmetros modais que tivessem sido aplicadas com êxito em diferentes abordagens de análise modal. Verificou-se assim a vasta aplicabilidade da técnica *bootstrap* de inferência estatística em problemas dessa natureza.

Uma vez obtidas diferentes estimativas e suas respectivas incertezas, torna-se necessária a aplicação de um estimador que a partir de toda essa informação apresente um valor final ótimo para o parâmetro e seu respectivo intervalo de confiança. Entende-se necessário, portanto, a aplicação de técnicas de “fusão de dados”, admitindo-se ainda informações prestadas por estimações anteriores. O método seqüencial dos mínimos quadrados proposto por Wiener e a sua evolução para o filtro de Kalman merecem atenção especial, visto que constituem estimadores amplamente utilizados com resultados destacados na estimação multi-sensores típica dos problemas de navegação inercial e *tracking*.

Com a detecção de mudanças nas estimações dos parâmetros modais, diversos algoritmos de identificação de danos podem ser aplicados. Aliados ao desenvolvimento um modelo matemático em elementos finitos, e à instituição de uma função erro (função objetivo) relacionando os parâmetros modais numéricos e experimentais, o problema da identificação de danos se equivale ao do ajuste de modelos. Tanto a identificação de danos quanto o ajuste de modelos consistem em desdobramentos desejáveis a um sistema completo de identificação estrutural, entretanto não serão abordados neste estudo.

Neste capítulo são revisados aspectos gerais da técnica de inferência estatística *bootstrap*, de estimadores recursivos destacando-se o Filtro de Kalman, e de procedimentos para a fusão de informações, a fim de se possibilitar a proposição de um algoritmo de identificação com as características identificadas acima, sugestivamente denominado a partir de agora como híbrido-recursivo.

V.2 – Cenários de Testes Experimentais

Antes de prosseguir na análise teórica dos elementos constitutivos de um algoritmo híbrido-recursivo, entende-se necessária a caracterização dos possíveis cenários de testes experimentais onde se aplicaria uma metodologia híbrida-recursiva de identificação de estruturas em operação.

A Tabela (V.1) apresenta um pequeno conjunto amostral de testes de análise modal de estruturas em operação encontrados na literatura. Nela descrevem-se as estruturas onde foram aplicados os testes e as respectivas cargas de operação, as técnicas de estimação de parâmetros adotadas e o período total de excitação em que foram obtidos os sinais.

Pela análise da Tab. (V.1), percebe-se que o tempo demandado para se efetuar a análise modal de estruturas em operação segundo abordagens determinísticas é em geral bastante significativo, baseando-se geralmente em aquisições contínuas de sinais por períodos longos.

É razoável admitir, entretanto, que haja estruturas que nem sempre receberão períodos tão longos de excitação ininterrupta, ou ainda que existam séries temporais de respostas curtas, entretanto com grande consistência de informações dinâmicas devido a uma maior presença de grandezas transientes. O não aproveitamento de sinais curtos é prejudicial tanto no cenário típico de avaliação da integridade estrutural, onde uma informação atualizada não deve deixar de ser observada, quanto para o cenário das aplicações de ajuste de modelos, onde a transitoriedade do aparato exige a obtenção de estimativas no menor tempo possível.

Por outro lado, sob a perspectiva da invariância dos parâmetros modais, os testes experimentais usualmente conduzidos para a identificação de estruturas poderiam ser divididos em dois diferentes cenários conforme apresentado na Tabela (V.2).

O cenário I pode caracterizar as situações onde há disponibilidade das respostas no tempo sem restrições quanto ao número e tamanho das amostras, permitindo-se a estimação de parâmetros de forma determinística para cada conjunto de dados, podendo-se, quando desejado, inferir-se da incerteza das estimativas após a análise de um determinado conjunto de dados independentes. Entretanto, havendo interesse na monitoração continuada da integridade estrutural, passa a ser importante obterem-se inferências céleres para se prover sensibilidade às variações nas características modais da estrutura.

Tabela V.1 – Exemplos de testes experimentais de identificação de estruturas em operação.

Referência	Estrutura / Carga de operação	Técnica	Período de aquisição
COSTA <i>et al.</i> , 2005	Ponte de alvenaria de pedra em arcos sob tráfego de veículos	PP e FDD	8×300 seg
DE ROECK <i>et al.</i> , 2000	Edifício submetido a carregamento de vento e atividade humana	SSI e PP	327 segundos
PEETERS e VENTURA, 2003	Ponte em concreto protendido submetida a vento e tráfego	FDD, ITD, e SSI	10 min 55 seg
REN <i>et al.</i> , 2004	Ponte metálica em arco estaiado sob tráfego de veículos	SSI e PP	15 minutos
TAMURA <i>et al.</i> , 2002	Edifício submetido a carregamento de vento e atividade humana	FDD	30 minutos
RODRIGUES <i>et al.</i> , 2004	Pórtico espacial de 4 pavimentos em escala reduzida sobre mesa vibratória	RD-FDD	30 minutos
BAPTISTA <i>et al.</i> , 2004	Edifício submetido ao vento, circulação de pessoas e tráfego adjacente	SSI e FDD	30 minutos
ROSENOW <i>et al.</i> , 2005	Navio submetido a carregamento de ventos ondas e maquinário	FDD	50 minutos
KIJEWSKI, 2003	Torre submetida a tufão	RD-CWT	1,5 horas
PEETERS <i>et al.</i> , 2004	Estádio de futebol em pleno jogo	SSI e pacote PolyMAX	<ul style="list-style-type: none"> • 4 horas • 40 min • 819,2 seg • 204,8 seg

Tabela V.2 – Cenários de testes experimentais típicos para identificação estrutural.

Cenário	Hipótese acerca dos parâmetros modais	Dispositivo de aquisição de dados	Exemplos de aplicações e estruturas
I	potencialmente variantes no tempo	permanente	Monitoração da integridade estrutural (SHM) em pontes, edifícios, barragens, sistemas petrolíferos, aeronaves, etc;
II	invariantes no tempo	provisório	Ajuste de modelos numéricos (<i>model updating</i>) de estruturas íntegras ou danificadas;

O cenário II, por sua vez, busca representar as análises experimentais de sistemas estruturais em operação onde, por uma variedade de motivos, há restrições quanto à disponibilidade de sinais de resposta. Em função dessa restrição, além das estimativas dos parâmetros exige-se de imediato alguma informação sobre suas incertezas.

Entre as possíveis aplicações onde incide a disponibilidade limitada de dados, citam-se as identificações onde não se dispõe de carregamento continuado sobre a estrutura, os testes onde há limitações quanto ao aparato de aquisição, e no emprego onde o tempo excessivo na obtenção dos sinais torna-se um problema por necessitar-se de informação atualizada em breves intervalos de tempo. Entre as limitações do aparato, mencionam-se, por exemplo, a indisponibilidade de meios de registro dos dados, a falta de rede de energia elétrica no local, ou ainda a presença de condições climáticas inadequadas.

O ajuste de modelos numéricos a estruturas reais através de equipamentos de aquisição instalados provisoriamente, se configura como uma aplicação do cenário II. Nesse caso, o intervalo de confiança do parâmetro modal estimado serviria de indicador para a possibilidade de finalização do teste.

A Fig. (V.1) apresenta esquematicamente o desdobramento de testes representativos tanto do cenário I quanto do cenário II.

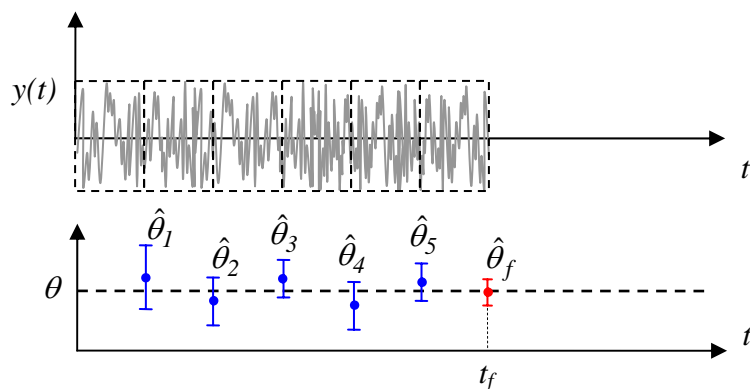


Figura V.1 – Resposta y obtida no tempo t , estimação de parâmetros θ e inferência dos intervalos de confiança para cada conjunto de dados adquirido.

Ambos os cenários de identificação estrutural exigem, portanto, aplicação de metodologias para inferir a qualidade das estimações. A seguir, neste capítulo, serão revistas técnicas de inferência estatística e estimação recursiva para dar um melhor entendimento do algoritmo híbrido-recursivo de identificação de estruturas em operação desenvolvido neste trabalho.

V.3 – Técnica *Bootstrap* de Inferência Estatística

Estatísticas relacionadas às características específicas das diferentes técnicas de estimação são geralmente discutidas isoladamente dentro da análise das suas aplicações. As variâncias dos parâmetros obtidos são calculadas simplesmente a partir das várias estimativas obtidas de diferentes conjuntos de dados observados. Para a identificação estrutural dentro dos Cenários I e II de aplicações, entretanto, esse procedimento não é aplicável, sendo necessário lançar-se mão de técnicas de inferência estatística.

Inferência estatística consiste na aplicação de métodos para se tomar decisões ou obter conclusões sobre uma população utilizando-se a informação contida em uma amostra da população. Pode ser dividida em duas grandes áreas: estimação de parâmetros e testes de hipótese (MONTGOMERY e RUNGER, 1999). Técnicas de inferência para a obtenção de incertezas em estimativas de parâmetros modais têm sido há muito tempo objeto de interesse na literatura de análise modal, podendo-se citar a abordagem Bayesiana discutida nos trabalhos de PETERKA (1981) e KATAFYGIOTIS *et al.* (2001), e mais recentemente os trabalhos de BASSEVILLE *et al.* (2006), pesquisadores da INRIA/IRISA (*Institut National de Recherche en Informatique et en*

Automatique, França), mais especificamente da equipe SISTHEM – *Statistical Inference for Structural Health Monitoring*.

A técnica de inferência a ser implementada neste estudo tem por objetivo permitir a associação das informações de diferentes técnicas de estimação de parâmetros modais. Logo é desejável que a mesma se integre naturalmente dentro dos algoritmos de cada uma das técnicas implementadas.

Bradley Efron apresentou no final da década de 70 uma técnica de inferência estatística consistindo essencialmente em um procedimento computacional de reamostragem capaz de estimar parâmetros e obter o intervalo de confiança de variáveis aleatórias de distribuição de probabilidade desconhecida a partir de uma disponibilidade limitada de dados (EFRON, 1973). Fez na ocasião uma brincadeira ao atribuir o nome *bootstrap* à sua proposta de inferência “auto-suficiente”, capaz de inferir a estimativa e sua incerteza a partir de um mesmo conjunto limitado de dados, ou seja, “*pull itself by its own bootstraps*”. Anos mais tarde, à característica de um sistema operacional de um computador pessoal se auto-iniciar, deu-se similarmente o nome de “*bootstrapping*”, termo posteriormente simplificado para “*boot*”.

Seja $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ um conjunto de amostras de uma variável aleatória de distribuição F , e $\theta(F)$ um parâmetro de interesse. Considerando-se F a distribuição empírica baseada em \mathbf{x} , e supondo $\hat{\theta}(F)$ um estimador de $\theta(F)$, então, para uma classe suficientemente grande de θ , o método *bootstrap* constitui uma forma robusta de verificar as características de desempenho de $\hat{\theta}(F)$ unicamente a partir da reamostragem aleatória da amostra observada \mathbf{x} (RADHAKRISHNA *et al.*, 1997).

“Durante os últimos 25 anos uma enorme quantidade de pesquisa em Estatística tem investigado a validade da abordagem *bootstrap*. Para a maioria dos modelos de distribuição F e maioria das estatísticas $\theta(F)$, sabe-se que o desvio padrão *bootstrap* é um bom estimador para o verdadeiro valor do desvio padrão, bem como outras medições de exatidão” (EFRON, 2003).

O diagrama da Fig. (V.2) descreve uma aplicação *bootstrap* típica: um modelo de probabilidade F tendo fornecido um vetor de dados \mathbf{x} . A partir de \mathbf{x} calcula-se uma estatística $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ a fim de se estimar um parâmetro $\theta(F)$ de importância. Deseja-se saber a exatidão de $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ ao estimar $\theta(F)$ em termos de variância, intervalos de confiança ou outras medições. A metade à direita do diagrama descreve o “*mundo bootstrap*”, onde \mathbf{x}

é uma amostra de F a partir da qual se obtêm vetores de dados reamostrados \mathbf{x}^* , e então as estimativas *bootstrap* $(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*)$.

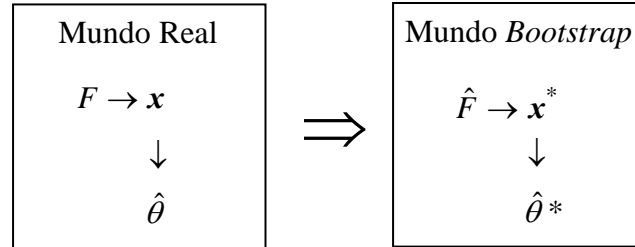


Figura V.2 – Diagrama *bootstrap* típico apresentando o conjunto amostral \mathbf{x} , da distribuição F , as reamostras \mathbf{x}^* e as estimativas bootstraps $\hat{\theta}^*$ (EFRON, 2003).

Uma vez que \mathbf{x} é conhecido, podem-se gerar tantos $\hat{\theta}^*$ quanto se queira ou quanto o custo computacional permita, e a partir dessas estimativas, obter-se a variabilidade observada a fim de se acessar a exatidão de $\hat{\theta}$.

Desta forma, as estimativas *bootstrap* do valor médio e do desvio-padrão podem ser obtidas respectivamente pelas expressões:

$$\bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \hat{\theta}_k^* \quad (\text{V.1})$$

$$\hat{s}_{\theta}^* = \left[\frac{1}{B-1} \sum_{k=1}^B (\hat{\theta}_k^* - \bar{\theta}^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{V.2})$$

onde B é o número de reamostras *bootstrap*.

VANDERMEULEN *et al.* (2000) apresentam diferentes abordagens do método *bootstrap* ao problema da estimação do amortecimento a partir da técnica da meia potência, ou seja, a partir de estimativas de autoespectros de sinais de resposta. Após o teste de várias implementações, sugerem que para a estimativa de uma reamostra *bootstrap*, divide-se inicialmente o sinal no tempo disponibilizado em n blocos de dados, e se calcule o autoespectro de cada um deles. Compõe-se em seguida B seqüências *bootstrap* X_i pela reamostragem aleatória (com repetição) dos n blocos de dados. O espectro dessa reamostra é então obtido pelo cálculo da média dos espectros

de cada bloco de dados e a partir dele obtém-se uma estimativa de amortecimento $\hat{\theta}_i^*$. Com as B estimativas de amortecimento computadas, obtém-se finalmente as estimativas *bootstrap* do valor médio e do desvio padrão do amortecimento. Como experiência retratam o fato de 50 réplicas *bootstraps* terem sido suficientes para boas estimativas de desvio-padrão, e verificaram ainda que a aplicação da técnica antecipou significativamente a obtenção de boas estimativas do amortecimento.

Destacam ainda a decisão a ser tomada na estimativa de cada autoespectro em se definir entre o tamanho (tempo) necessário para cada bloco de dados versus o número médias obtidas, ou seja, optar-se entre redução do erro de *bias* com uma melhor resolução em frequência e a redução da variância, inversamente proporcional à raiz quadrada do número de médias realizadas.

De forma análoga, KIJEWski e KAREEM (2002) apresentam uma metodologia para se obter estimativas *bootstrap* de funções RD (decremento aleatório), também baseada no cálculo da média de funções RD de cada bloco de dados que compõe uma reamostra. Concluem afirmando que as melhores estimativas de amortecimento obtidas através da técnica do decremento logarítmico aplicada às funções RD *bootstrap* foram conseguidas na análise de 5 ciclos de funções RD tipo máximo local calculadas com a média de pelo menos 200 segmentos.

A Figura (V.3) apresentada por YAN *et al.* (2006) resumem seu trabalho apresentando sucessivamente as fases da estimação proposta por eles: (a) segmentação do sinal original em S amostras para composição de funções RD a partir de *triggering* arbitrário (vide item III.3.5); (b) obtenção de B reamostras *bootstrap* pela combinação dos segmentos; (c) cálculo das funções RD para cada reamostra; (d) aplicação da transformada *wavelet* contínua de Morlet para separação dos modos; (e) determinação dos parâmetros para cada reamostra; e (f) cálculo dos estimadores *bootstrap* do valor médio e variância das frequências naturais e amortecimento.

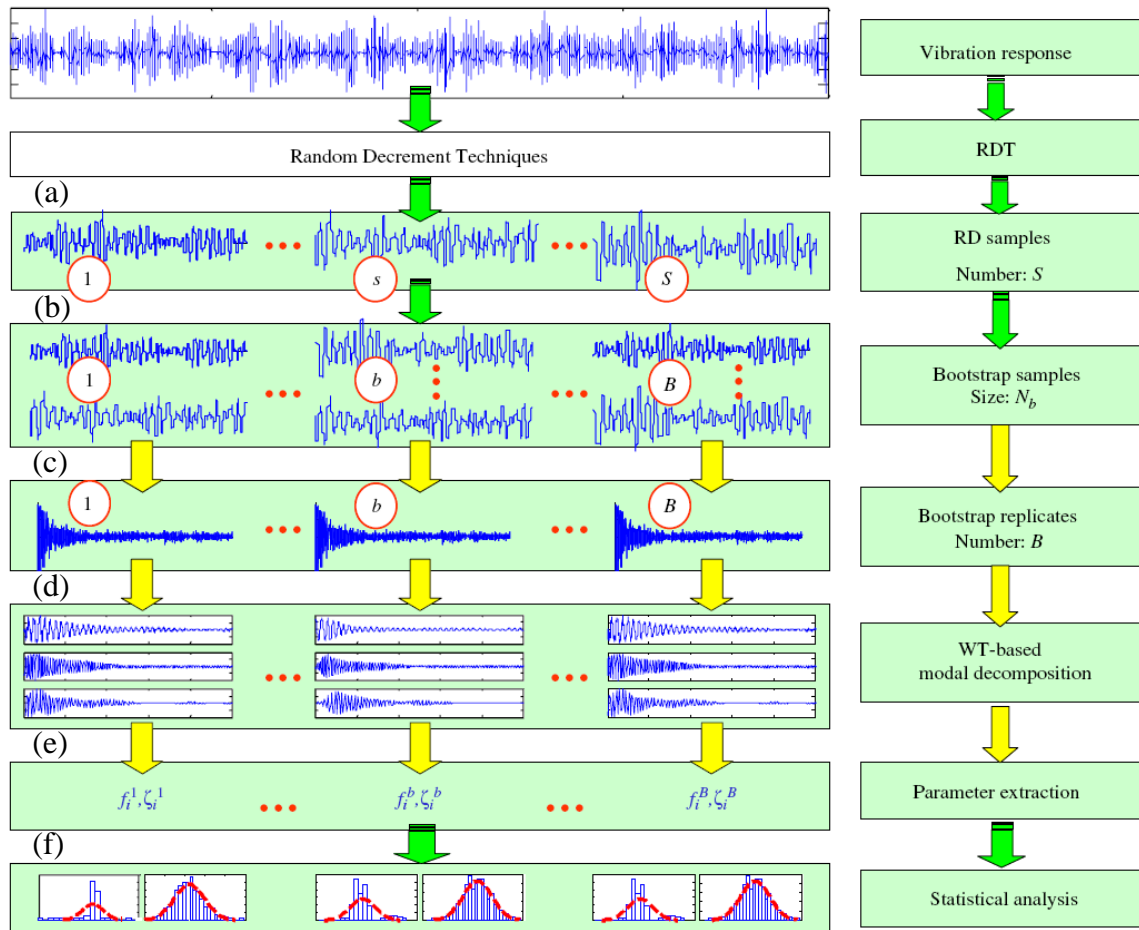


Figura V.3 – Esquema *bootstrap* de identificação modal por transformadas *wavelet* contínuas a partir de sinal aleatório (YAN, MIYAMOTO e BRÜHWILER, 2006).

A partir dos exemplos observados dos trabalhos citados acima, e admitindo-se algumas alterações a fim de minorar o custo computacional a ser empreendido, propõe-se a seguir a generalização da aplicação da inferência *bootstrap* nas técnicas de análise modal *output-only*:

1. Segmentação dos sinais aleatórios em blocos de dados;
2. Cálculo de funções estatísticas (representações estocásticas) para cada um desses blocos;
3. Montagem de B reamostras *bootstrap* pela combinação aleatória (com reposição) dessas funções estatísticas;
4. Obtenção da estatística final de cada reamostra pela média (simples ou ponderada) das estatísticas de cada bloco de dados que a compõe;

5. Determinação dos parâmetros modais associados a cada estatística de reamostra;
6. Estimativa dos parâmetros modais e respectivas incertezas através do cálculo do valor médio e variância dos B conjuntos de parâmetros obtidos.

Conforme foi visto no item III.3.5 deste trabalho, admitindo-se os processos estocásticos como estacionários e gaussianos de média nula, podem-se exprimir as funções RD como proporcionais às funções de autocorrelação e sua derivada. Logo, a média (simples ou ponderada) entre as funções RD calculadas para diferentes segmentos do sinal constitui ainda uma estatística representativa do processo, representando ainda um meio de compactação de dados. De forma análoga, a partir da definição dos estimadores numéricos para as funções de autocorrelação (técnicas SSM) e dos auto-espectros e espectros-cruzados (técnica FDD), percebe-se que as médias dessas estimativas não-paramétricas constituem estatísticas representativas do processo.

A Figura V.4 ilustra, por exemplo, a implementação adotada para a inferência *bootstrap* da técnica SSM. O sinal é segmentado em S pedaços (com ou sem sobreposição), para cada segmento a estatística R é calculada (matriz de covariância) e armazenada, calculam-se B amostras *bootstrap* são obtidas pela combinação das estatísticas de N segmentos, e por fim estima-se a média e a variância de cada um dos parâmetros calculados.

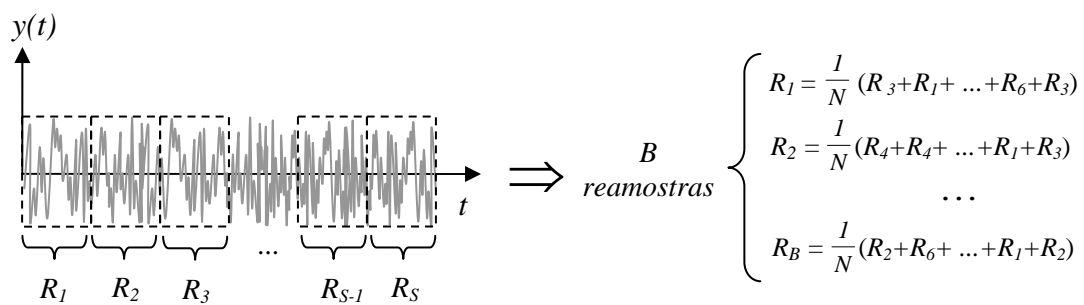


Figura V.4 – Esquema representando o processo de obtenção das reamostras *bootstrap* para a técnica SSM, onde R_i é a matriz de covariância do i -ésimo segmento do sinal.

A Tabela (V.3) apresenta as representações estocásticas utilizadas por cada técnica de análise modal *output-only* implementada neste trabalho e que consistiria na estatística a ser obtida por bloco e por fim fornecida para cada reamostra aleatória.

Tabela V.3 – Estatísticas utilizadas em cada técnica de análise modal que viabilizam o processo de inferência *bootstrap* pelo cálculo de sua média.

Técnica	Estatística
RD-AR	Funções RD
RD-CWT	Funções RD
FDD	Matriz espectral
SSM	Matriz de autocorrelação

A técnica SSI, como não se baseia na estimativa prévia de uma função estocástica sendo aplicada diretamente aos sinais, não pode receber a implementação *bootstrap* sugerida nos passos triviais apresentados acima. BITTANTI e LOVERA (2000) discutem formas de se obter estimativas *bootstrap* na aplicação da técnica SSI. Uma das técnicas se destaca pela simplicidade: “*moving block method*”. Consiste simplesmente na partição do sinal medido em B amostras (seqüenciais) com superposição. Os parâmetros são então estimados a partir de cada amostra, obtendo-se por fim o seu valor médio e respectiva variância como as estimativas *bootstrap* e respectivas incertezas. Entretanto, essa reamostragem *bootstrap* não se apresentou muito eficiente nas simulações realizadas neste trabalho, uma vez que diminui consideravelmente o número de pontos utilizado em cada estimativa, o que em análise modal de estruturas em operação constitui fator reconhecidamente comprometedor na obtenção de bons resultados.

Uma vez que o algoritmo da técnica se baseia fundamentalmente na decomposição QR da matriz de Hankel das respostas, um procedimento coerente para reamostragem consistiria na utilização de matrizes de Hankel equivalentes às combinações de decomposições QR de diferentes segmentos do sinal. Uma forma óbvia de realizar essa combinação consiste na aplicação do estimador de mínimos quadrados.

Sabendo-se que a matriz Q da decomposição é ortonormal, pode-se transformar facilmente a equação da decomposição numa equação normal:

$$H^T = QR \Rightarrow Q^T H^T = R \quad (V.3)$$

A obtenção da matriz H equivalente, por mínimos quadrados, para um conjunto arbitrário de seis combinações das matrizes Q e R (aos pares) tomaria a seguinte forma inicial:

$$\begin{bmatrix} Q_3^T \\ Q_1^T \\ Q_6^T \\ Q_6^T \\ Q_2^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} H_{eq}^T = \begin{bmatrix} R_3 \\ R_1 \\ R_6 \\ R_6 \\ R_2 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad (V.4)$$

$$\Rightarrow [Q_3 \ Q_1 \ Q_6 \ Q_6 \ Q_2 \ Q_4] \cdot \begin{bmatrix} Q_3^T \\ Q_1^T \\ Q_6^T \\ Q_6^T \\ Q_2^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} H_{eq}^T = [Q_3 \ Q_1 \ Q_6 \ Q_6 \ Q_2 \ Q_4] \cdot \begin{bmatrix} R_3 \\ R_1 \\ R_6 \\ R_6 \\ R_2 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 6 \cdot [I] \cdot H_{eq}^T = (Q_3 R_3 + Q_1 R_1 + Q_6 R_6 + Q_6 R_6 + Q_2 R_2 + Q_4 R_4) \quad (V.5)$$

A partir da propriedade de ortonormalidade das matrizes Q , verifica-se que a matriz H_{eq}^T que satisfaz a Eq. V.4, com erro quadrático mínimo, é igual a:

$$H_{eq}^T = \frac{1}{6} (H_3^T + H_1^T + H_6^T + H_6^T + H_2^T + H_4^T) \quad (V.6)$$

Logo, apesar das matrizes de Hankel das respostas por si só não constituírem uma estatística do processo, a decomposição QR de seu valor médio mantém uma coerência algébrica com o algoritmo da técnica SSI.

V.4 – Estimadores

A área da inferência estatística, assim como a da identificação de sistemas e estimação de parâmetros, trata do problema de extrair informações a partir de observações que por si só seriam pouco úteis. À função que resolva esse problema dá-se o nome de estimador, e ao resultado obtido pela aplicação de um determinado conjunto de observações a essa função, estimativa.

Antes de prosseguir na introdução sobre estimadores, cabe validar a utilização da terminologia “estimação” neste trabalho. Até pouco tempo, nos dicionários nacionais de maior penetração o vocábulo “estimação” estava exclusivamente relacionado à predileção ou sentido de estima, sem qualquer ligação a ato ou efeito de se obter estimativas. Entretanto, em publicações recentes, inclusive na edição de 2005 do dicionário Houaiss, em livros de renomados autores brasileiros de estatística e títulos de dissertações de mestrado e teses de doutorado de diferentes instituições educacionais brasileiras, o termo “estimação” aparece invariavelmente com o sentido geral de “obtenção de estimativas”, provavelmente associado etimologicamente a um empréstimo lingüístico do difundido termo inglês *estimation*. Pela necessidade legítima de se admitir uma tradução direta de *estimation*, além de evitar repetições monótonas de variações passivas do vocábulo “estimativa”, a palavra estimação tem sido utilizada neste texto.

Para reduzir o efeito das discrepâncias, ou erros, existentes nas diferentes observações de uma mesma quantidade, deve-se buscar um estimador que conduza a estimativas apropriadas, dentro de uma perspectiva arbitrada a partir das hipóteses admitidas a esses erros, tidos como aleatórios.

Geralmente, há muitos estimadores com características desejáveis que podem ser aplicados a um determinado conjunto de observações, sendo por isso natural que se busque por um que seja ótimo. Entretanto, a escolha do critério de otimização acaba por ser arbitrária, destacando-se na literatura os estimadores obtidos por aplicação dos mínimos quadrados, do critério do mínimo erro quadrático médio, da máxima verossimilhança, e do máximo *a posteriori*.

SORENSEN (1980) apresenta cronologicamente a interessante cadeia de publicações célebres que permitiram a consolidação do que mais tarde viria a chamar de Teoria da Estimação. A partir desta abordagem, pode-se inicialmente destacar na teia

dos conceitos basilares sobre estimadores, a publicação (póstuma) da regra de Thomas Bayes da probabilidade condicional, em 1763:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \quad (\text{V.7})$$

onde A e B são eventos mutuamente dependentes;

$p(A|B)$ é a função densidade de probabilidade (condicional) do evento A ocorrer já tendo ocorrido B , denominada de probabilidade *a posteriori*;

$p(A)$ é a função densidade de probabilidade do evento A , *a priori*;

$p(B|A)$ é a função densidade de probabilidade do evento B ocorrer já tendo ocorrido A ;

$p(B)$ é a função densidade de probabilidade do evento B ;

Ou seja, dado um conjunto de medições B , determina-se a função densidade *a posteriori* de parâmetros desconhecidos A que caracteriza a distribuição de probabilidade a partir da qual os dados foram obtidos. A aplicabilidade da regra de Bayes, entretanto, depende da disponibilidade das distribuições *a priori*, que teoricamente são sempre admitidas como existentes.

No início do século XIX, na busca da identificação da trajetória de corpos celestes, Legendre e Gauss desenvolvem independentemente o que viria a se chamar de “método dos mínimos quadrados”. Gauss pioneiramente fala em modelos, número de observações necessárias, redundância de dados para diminuir a influência dos erros, resíduos, antecipando possibilidades de abordagens a problemas atuais de estimação.

Ainda acompanhando o estudo de SORENSON (1970), um novo salto na teoria da estimação teria sido dado pelos trabalhos de Fisher publicados a partir da segunda década do século XX, tendo introduzido os conceitos de Estatística Suficiente, Estimativas Consistentes, e desenvolvido o “método da máxima verossimilhança”.

Wiener e Kolmogorov estabelecem a partir da década de 40 uma ponte entre estatísticos e engenheiros de comunicações, compondo os fundamentos da teoria “clássica” de controle, com ênfase na análise (e síntese) de sistemas em termos de suas características de entrada-saída (I/O) e utilizando fundamentalmente as transformadas de Laplace e Fourier. Desenvolvimentos posteriores exploram ao limite a formulação

em espaço de estados de equações diferenciais e/ou de diferenças, passando-se a se a analisar os sistemas a partir de suas “saídas observadas”, reaproximando-se desta forma à abordagem de Gauss. O Filtro de Kalman surge neste contexto como uma solução recursiva que fornece uma estimativa que é equivalente à obtida ao se analisar todos os dados simultaneamente, entretanto, com excelente desempenho computacional e com grande utilidade no trato de problemas não-lineares.

Entretanto, deve-se observar que quando tratamos de variáveis (processos) aleatórias gaussianas em sistemas lineares, resultados idênticos são obtidos pelos estimadores baseados nos diferentes métodos mencionados acima, uma vez que as hipóteses passam a ser as mesmas para todos os casos (GELB, 1974).

V.4.1 – Mínimos Quadrados

Admitindo-se que um conjunto de m medições \mathbf{z} pode ser expresso como combinação linear de n elementos de um vetor constante \mathbf{x} mais um erro aleatório \mathbf{v} , descreve-se o seguinte modelo de regressão linear:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (\text{V.8})$$

onde \mathbf{H} é o operador que caracteriza o modelo (matriz de medições, ou matriz das observações), de dimensões $m \times n$.

Para $m > n$ o conjunto de medições possui informação redundante. Na estimativa por mínimos quadrados busca-se a estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ que minimize a soma dos quadrados dos desvios $z_i - \hat{z}_i$, ou seja, minimize a quantidade:

$$J = \sum_{i=1}^m (z_i - \mathbf{h}_i^T \hat{\mathbf{x}})^2 = (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{V.9})$$

onde \mathbf{h}_i^T é a i -ésima linha da matriz \mathbf{H} .

A estimativa por mínimos quadrados é, portanto obtida fazendo-se $\partial J / \partial \hat{\mathbf{x}} = 0$, sendo uma função linear das medições \mathbf{z} :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{z} \quad (\text{V.10})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} \quad (\text{V.11})$$

Já o erro nas estimativas ($\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$) e o resíduo ($\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$) podem ser colocados como funções lineares dos ruídos das medições:

$$\Rightarrow (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = -(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{v} \quad (\text{V.12})$$

$$\Rightarrow (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T] \mathbf{v} \quad (\text{V.13})$$

Pode-se facilmente perceber que quando \mathbf{x} é um escalar, a matriz \mathbf{H} reduz-se a um vetor unidade e o estimador por mínimos quadrados é a média aritmética das medições z_i :

$$\hat{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} = \frac{1}{m} [\mathbf{1}]_{m \times 1}^T \mathbf{z} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_i \quad (\text{V.14})$$

Conforme se pôde observar pela revisão acima, a estimativa por mínimos quadrados é determinística, não tendo sido considerados até agora aspectos probabilísticos. Entretanto, algumas hipóteses podem ser adotadas em relação ao ruído aleatório \mathbf{v} , como por exemplo, ser conhecida sua estatística de 2ª ordem (média e matriz de covariância):

$$E[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \quad (\text{V.15})$$

$$\text{cov}[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \text{cov}[\mathbf{v} \mathbf{v}^T] = \text{cov}[\mathbf{v}] = \mathbf{R} \quad (\text{V.16})$$

A partir dessas hipóteses pode-se mostrar que o estimador (mínimos quadrados) é não-tendencioso (não-viesado, *unbiased*), ou seja, o valor esperado do erro ($\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$) é nulo (SORENSEN, 1980):

$$E[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{0} \quad (\text{V.17})$$

Podem-se ainda obter as matrizes de covariância do erro nas estimativas e dos resíduos:

$$\text{cov}[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] \equiv \mathbf{P} = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{V.18})$$

$$\text{cov}[(\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})] = \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \right] \mathbf{R} \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \right] \quad (\text{V.19})$$

Se o ruído \mathbf{v} for admitido ainda como não-correlacionado e possuindo variâncias idênticas σ^2 (homoscedástico) tem-se para as matrizes de covariância dos erros ($\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$) e dos resíduos ($\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$) as expressões:

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (\text{V.20})$$

$$\Rightarrow \text{cov}[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{V.21})$$

Pela equação (V.21) pode-se perceber que a matriz de covariância do erro nas estimativas não depende das medições \mathbf{z} , o que permite que o desempenho do estimador seja avaliado mesmo antes de se obter qualquer valor de medição.

Voltando-se novamente à análise da estimativa de um escalar a partir de várias medições, e admitindo que os ruídos das medições possuam média nula, sejam não-correlacionados e distribuídos com variância $\sigma^2 = 1$, a expressão do desvio padrão do erro das estimativas se torna igual a $1/\sqrt{m}$, onde m é o número de medições.

Generalizando-se a função objetivo de mínimos quadrados (Eq. V.10) pela introdução de uma matriz peso simétrica e positivo-definida \mathbf{W} , buscando-se a possibilidade da ponderação diferenciada das medições, tem-se:

$$J = (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{V.22})$$

Com a admissão da matriz peso, as expressões da estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ e das matrizes de covariância dos erros ($\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$) e dos resíduos ($\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$) ficam:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z} \quad (\text{V.23})$$

$$\text{cov}[\tilde{\mathbf{x}}] \equiv \mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{V.24})$$

$$\text{cov}[(\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})] = \left[\mathbf{I} - \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \right] \mathbf{R} \left[\mathbf{I} - \mathbf{W} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \right] \quad (\text{V.25})$$

Pode-se perceber diretamente que ao se realizar a substituição $\mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{I}$, ou seja, ao se atribuir peso igual a todas as medições, as expressões das Eq.(V.23) a (V.25) ficam idênticas às apresentadas inicialmente nas Eq. (V.11), (V.18) e (V.19).

A matriz de covariância dos erros \mathbf{P} corresponde à variância dos erros no caso multivariado, sendo por isso utilizada para o entendimento do comportamento do estimador, proporcionando uma medida estatística da incerteza nas estimativas. É simplesmente uma matriz cujos elementos são os momentos estatísticos de segunda ordem das variáveis aleatórias que compõem o vetor $\tilde{\mathbf{x}}$. Para $\tilde{\mathbf{x}}$ correspondendo a um sistema de duas variáveis, tem-se:

$$\mathbf{P} = E[\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T] = E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 & \tilde{x}_2^2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E[\tilde{x}_1^2] & E[\tilde{x}_1 \tilde{x}_2] \\ E[\tilde{x}_1 \tilde{x}_2] & E[\tilde{x}_2^2] \end{bmatrix} \quad (\text{V.26})$$

Pode-se perceber pela Eq. (V.26) que a matriz \mathbf{P} é simétrica, com os elementos de sua diagonal principal correspondendo ao erro quadrático médio (EQM, ou *MSE*) de cada uma das variáveis, e com os demais elementos relativos à correlação cruzada entre os elementos de $\tilde{\mathbf{x}}$. Uma estimativa que a minimize poderia, portanto, ser considerada ótima sob essa perspectiva.

V.4.2 – Filtro de Kalman

Admitindo-se que uma coleção de dados medidos z_1, z_2, \dots, z_k esteja disponível e a partir dela deseja-se estimar os parâmetros \mathbf{x} . Os dados z_i por sua vez podem ser considerados como sendo medições de diferentes sensores, ou respostas de um mesmo sensor em diferentes instantes de tempo. Cada z_i pode ser relacionado com \mathbf{x} através do modelo de regressão da Eq.(V.7):

$$z_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x} + v_i \quad (\text{V.27})$$

Admitindo-se agora que o parâmetro \mathbf{x} pode variar no tempo, a equação assume a forma:

$$z_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + v_i \quad (\text{V.28})$$

Se no passo i da expressão acima o número de medições for menor que o número de parâmetros, o problema se torna indeterminado mesmo na ausência dos erros v_i . Para contornar esse problema pode-se acrescentar uma relação entre parâmetros passados e presentes através de uma equação a diferenças:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} \quad (\text{V.29})$$

Os parâmetros desconhecidos \mathbf{x}_i , denominados “estados”, podem ser diretamente estimados pela expressão acima desde que se conheçam as matrizes (de transição) de estado $\Phi_{k,k-1}$ e o estado inicial \mathbf{x}_1 .

Admitindo-se então a existência de informação *a priori* sobre o parâmetro \mathbf{x} , como sua média $\boldsymbol{\mu}$ e covariância $\mathbf{M} = \text{cov}(\mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t]$, e os vetores v_i como seqüências de ruído branco de média nula e com covariância \mathbf{R} , a matriz de covariância do erro \mathbf{P}_k pode ser escrita recursivamente (SORENSEN, 1980):

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^t \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^t + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \quad (\text{V.30})$$

O estimador de mínimos quadrados (ponderado pelo inverso das covariâncias) pode ser também reescrito na forma recursiva (ou seqüencial):

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k^{LS} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (\text{V.31})$$

onde \mathbf{K}_k^{LS} é a matriz ganho do estimador recursivo de mínimos quadrados ponderados:

$$\mathbf{K}_k^{LS} = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^t (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^t + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (\text{V.32})$$

Esta abordagem fornece uma estimativa que é equivalente à estimativa obtida pelo processamento de todos os dados simultaneamente (“*batch*”), entretanto torna mais eficiente a manipulação de dados por prescindir de todas as medições passadas para o propósito de computar estimativas presentes.

Quando as condições iniciais e as excitações do sistema dinâmico forem supostamente aleatórias, o estado não se propagará sem incertezas. Fazendo-se então com que a equação da evolução dos estados (V.29) admita erros aleatórios, obtém-se a seguinte equação de diferenças estocástica:

$$\mathbf{x}_i = \Phi_{i,i-1} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i \quad (\text{V.33})$$

onde os vetores \mathbf{w}_i são tidos como seqüências de ruído branco de média nula e covariância \mathbf{Q} .

Para o tratamento do ruído nos estados, torna-se necessária a consideração de um novo conjunto de equações que descreva a evolução de estimativas preditas do estado através da combinação linear das medições (equações preditoras). A estimativa ótima do estado no passo k pode então ser tomada a partir de uma estimativa prévia mais uma medição (ou resíduo):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (\text{V.34})$$

onde \mathbf{K}_k pode ser escolhida como a matriz-peso variável no tempo que implica na minimização do erro quadrático médio (EQM) entre as estimativas preditas $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ e os estados \mathbf{x}_k .

As equações a seguir completam a formulação do estimador recursivo linear ótimo quanto à minimização do erro quadrático, definindo o sistema de equações preditor-corretor denominado Filtro de Kalman (GELB, 1974):

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^t \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^t + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (\text{V.35})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k|k-1}^t + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (\text{V.36})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (\text{V.37})$$

- onde \mathbf{K}_k é a matriz ganho do Filtro de Kalman;
 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ é a covariância do erro no estado predito;
 $\mathbf{P}_{k|k}$ é a covariância do erro no estado corrigido;
 $\Phi_{k|k-1}$ é a matriz de transição de estados;
 \mathbf{R}_k é a covariância do ruído das medições \mathbf{v}_k ;
 \mathbf{Q}_{k-1} é a covariância do ruído do estado \mathbf{w}_{k-1} .

O Filtro de Kalman estima um processo usando um algoritmo preditor-corretor, com um conjunto de equações fazendo alternadamente a atualização no tempo e o ajuste das medições (WELCH e BISHOP, 2004). O ajuste do tempo é responsável por projetar à frente o estado e a covariância do erro nas estimativas a fim de predizerem estimativas *a priori* para o próximo passo no tempo. O ajuste das medições é responsável pela retroalimentação do estimador, ou seja, pela incorporação de uma nova medição numa estimativa *a priori* a fim de se obter uma estimativa *a posteriori* corrigida. As Fig. V.5 e V.6 apresentam duas diferentes representações esquemáticas do Filtro de Kalman.

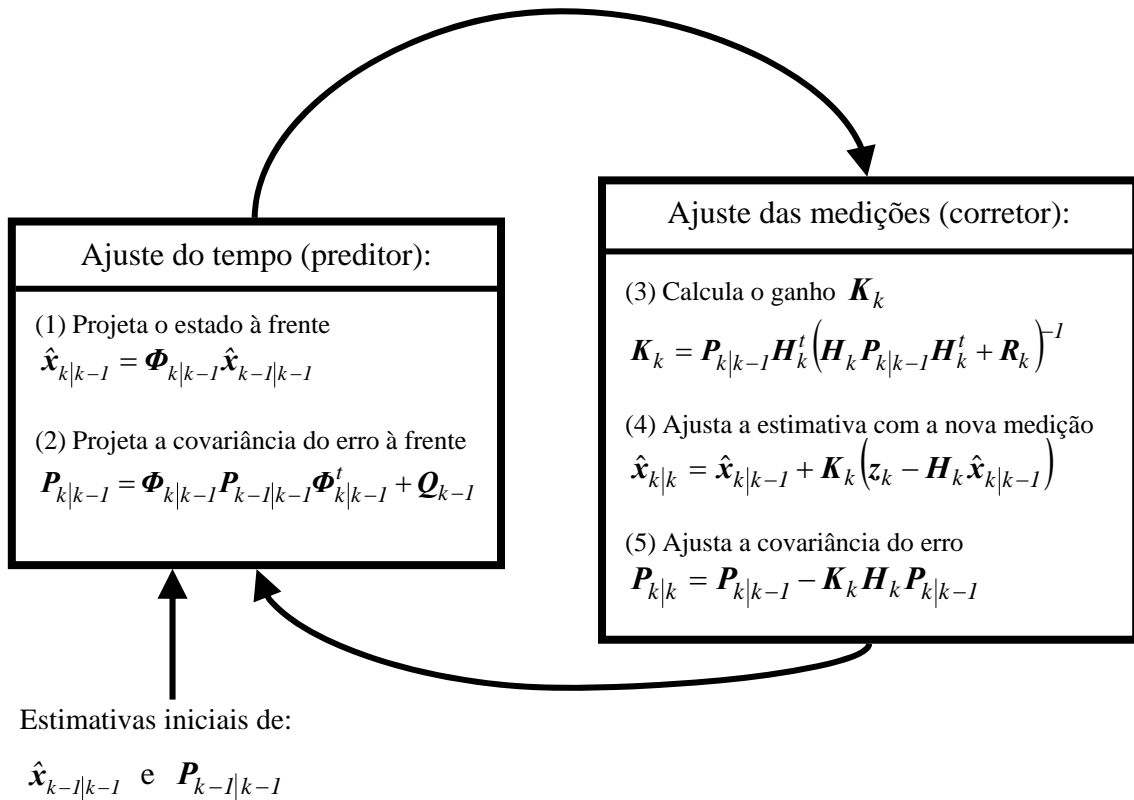


Figura V.5 – Diagrama apresentando o algoritmo preditor-corretor e equações do Filtro de Kalman discreto (adaptado de WELCH e BISHOP, 2004).

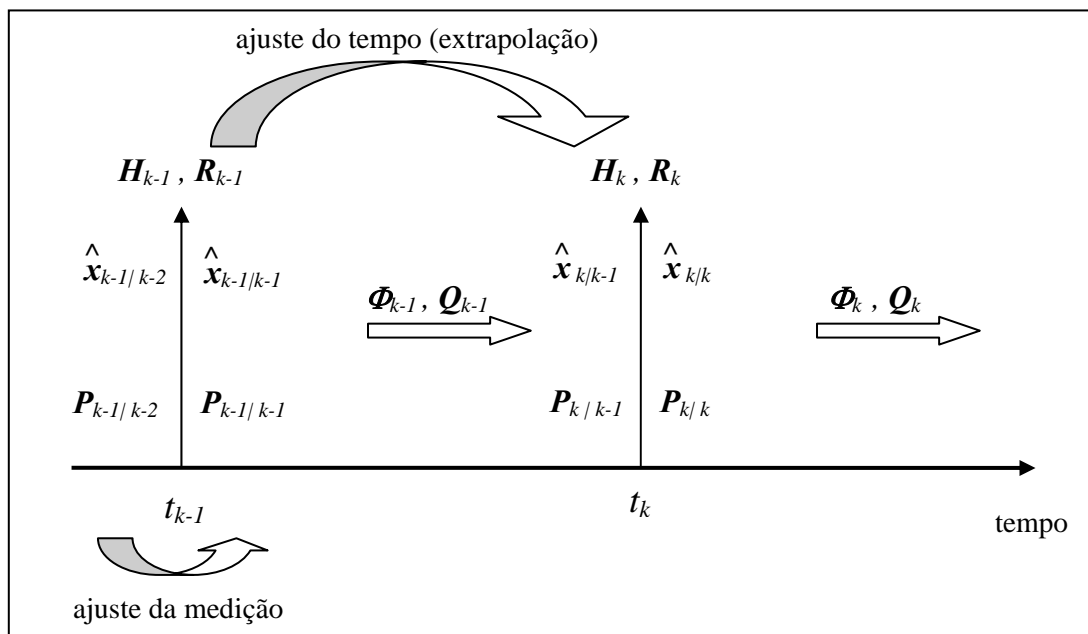


Figura V.6 – Diagrama no tempo do Filtro de Kalman (adaptado de GELB, 1974).

Pela análise das equações do diagrama da Fig. (V.5) pode-se observar que se a variância do ruído das medições \mathbf{R}_k é alta, então o respectivo ganho \mathbf{K}_k é pequeno, isto

é, está sendo conferida pouca confiança à medição com muito ruído, e por isso atribuir-se-á pouco peso a ela. No limite, quando a variância do ruído tende a infinito, o ganho se aproxima de zero, e a estimativa corrigida $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ se iguala à predita $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, ou seja, uma medição infinitamente ruidosa é totalmente ignorada pelo estimador (MAYBECK, 1979).

Por outro lado, se o ruído do sistema dinâmico $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ for alto, então sua projeção futura $\mathbf{P}_{k|k-1}$ também será alta, assim como o ganho \mathbf{K}_k . Neste caso, não se tem muita confiança nas saídas preditas do filtro e por isso pondera-se fortemente a medição. No limite, a estimativa corrigida $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ se iguala à nova medição. Logo, no limite de não se ter absolutamente nenhuma confiança nas saídas do modelo, a melhor política é ignorar a predição do filtro e utilizar-se da nova medição como o estado ótimo.

Pode-se verificar ainda que o ganho \mathbf{K}_k se anula quando a projeção futura do ruído do sistema $\mathbf{P}_{k|k-1}$ se iguala à zero, ou seja, quando se está absolutamente certo da estimativa predita antes mesmo de uma nova medição tornar-se disponível, podendo-se por isso desconsiderar-se essa medição.

Resumindo-se, pode-se afirmar que a matriz ganho é “proporcional” à incerteza na estimativa (prévia) e “inversamente proporcional” ao ruído da medição (GELB, 1974).

Na implementação prática do filtro, o ruído da medição, ou melhor, a matriz covariância do ruído da medição \mathbf{R} , pode geralmente ser considerada constante e estimada anteriormente à aplicação do filtro pela análise prévia de algumas amostras “*off-line*”. Entretanto, a determinação da matriz covariância do ruído do processo \mathbf{Q} é geralmente mais difícil, uma vez que geralmente não é possível observar-se diretamente o processo que se está estimando. Algumas vezes, um filtro mais elementar (menos completo, com menos estados que outro modelo do mesmo sistema) pode inferir bons resultados simplesmente pela admissão de um pouco de imprecisão através de \mathbf{Q} (WELCH e BISHOP, 2004).

Quando \mathbf{Q} e \mathbf{R} são de fato constantes, a covariância do ruído (erro) das estimativas $\mathbf{P}_{k|k}$ e o ganho \mathbf{K}_k se estabilizarão rapidamente e então permanecerão constantes. Neste caso, esses parâmetros podem ser pré-computados “rodando-se” o

filtro *off-line*, ou ainda determinando-se analiticamente os seus valores em regime permanente (*steady-state*).

Quando o sistema modelado admite alterações nos ruídos das medições e do processo, as matrizes de covariância se tornam R_k e Q_k , variáveis no tempo. Neste caso, o ruído do processo Q_k deve ser escolhido levando-se em conta tanto a incerteza do modelo quanto a incerteza acerca das intenções do usuário.

V.5 – Estimação por Fusão de Dados

Estimação por Fusão (*Estimation Fusion*), ou Fusão de Dados para Estimação, consiste no problema de como se melhor utilizar informação útil contida em um conjunto de dados com o objetivo de se estimar uma quantidade desconhecida: um parâmetro ou um processo (LI *et al.*, 2003). De uma forma geral, técnicas de fusão de dados combinam dados de múltiplos sensores e informações relacionadas à suas bases de dados a fim de obter inferências com maior exatidão do que se obteria pelo uso de um único sensor (HALL e LLINAS, 1997).

O Filtro de Kalman tem sido utilizado em inúmeras aplicações no processamento da fusão de dados de sistemas dinâmicos. Seu enfoque computacional recursivo é particularmente eficiente para sistemas multisensores operando no domínio do tempo. Esses sensores são admitidos como sendo dispositivos de diferentes mecanismos, cada um fornecendo sua própria seqüência de dados.

Em uma aplicação típica do Filtro de Kalman em sistemas multisensores, os dados não-processados dos sensores alimentam um único filtro onde todas as medições são então utilizadas centralizadamente para fornecer uma solução. A essa aplicação dá-se o nome de “Filtragem Centralizada”. Ao se aplicar o filtro de Kalman diretamente às diferentes medições, aumenta-se, entretanto a complexidade na especificação dos parâmetros do modelo dinâmico (Φ, H) , nas estatísticas do ruído (Q, P) e principalmente na ordem do vetor de estado $\hat{x}_{k|k-1}$.

Alternativamente, pode-se dividir essa arquitetura por um esquema em paralelo de filtros dedicados a sensores específicos, e suas soluções (estados) sendo fundidas periodicamente por um “Filtro Mestre”. De uma forma geral esse arranjo permite um melhor desempenho computacional da estimação, uma vez que se pode diminuir o número de estados no modelo do filtro central, e os resultados finais se apresentam

melhores na presença de dados espúrios, implicando eventualmente em resultados “localmente” ruins, entretanto “globalmente” bons. Mesmo quando uma informação adicionada em paralelo às demais se apresenta como sendo de qualidade muito inferior às demais, sua incorporação é desejada, pois ela acaba proporcionando maior redundância e confiabilidade à estimação (GAO *et al.*, 1993). A Fig. V.7 apresenta uma possibilidade de arquitetura de um filtro descentralizado.

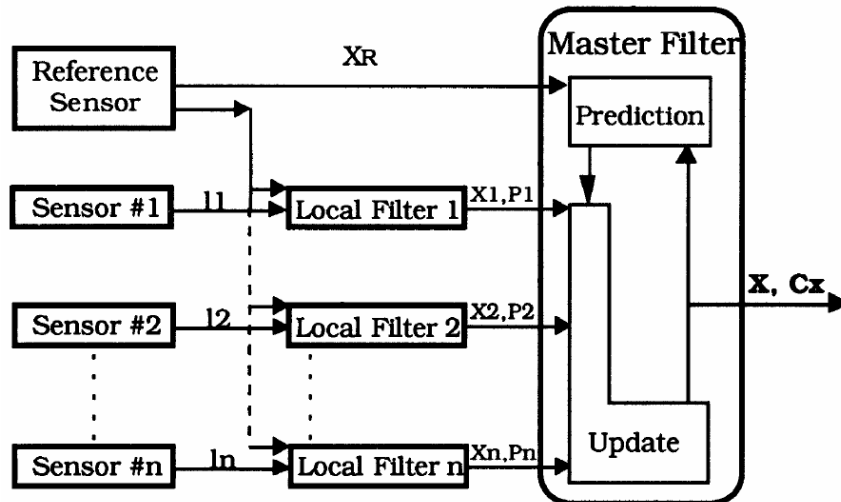


Figura V.7 – Arquitetura de um filtro descentralizado (GAO *et al.*, 1993)

Um filtro descentralizado consiste, portanto, em uma técnica de processamento de dados de dois estágios: filtro local e filtro mestre. No primeiro estágio os filtros locais processam seus próprios dados em paralelo, fornecendo as melhores estimativas locais possíveis. No segundo estágio, o filtro mestre funde as estimativas locais fornecendo finalmente a melhor estimativa global.

Na arquitetura descentralizada apresentada na Fig. V.7, o sensor de referência assume o papel de sensor fundamental do sistema de identificação e seus dados consistem na medição de entrada do filtro mestre (estado *a priori*). Os demais sensores, após processamento local, alimentam o filtro mestre na etapa de ajuste das medições. O filtro mestre, portanto, usa as saídas dos filtros locais como medições para ajustar o vetor de estado global sequencialmente.

Pode-se utilizar a arquitetura de um filtro descentralizado como modelo para fusão de estimativas de parâmetros modais procedentes de diferentes técnicas de análise modal ou de diferentes seqüências de dados. Para tal, pode-se entender cada filtro local como uma técnica de estimação de parâmetros, recebendo medições de um conjunto

arbitrário de sensores, e estimando parâmetros e inferindo incertezas que passarão a ser dados para ajuste do filtro mestre. O sensor de referência da Figura V.7 pode na verdade ser um conjunto de sinais de maior relevância (em função do posicionamento, por exemplo), que além de serem compartilhados com os demais filtros locais, permitem, através da aplicação de uma das técnicas de análise modal, fornecer as estimativas iniciais do filtro mestre.

HASHEMIPOUR *et al.* (1988) apresentam a paralelização das equações do Filtro de Kalman. As Eq. V.38 e V.39 transcritas neste texto constituem o ajuste das medições, processando de uma só vez todas as novas estimativas síncronas ${}_i\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ e matrizes de covariâncias ${}_i\mathbf{P}_{k|k}$ fornecidas pelos filtros locais:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k} \left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \sum_{i=1}^M \left({}_i\mathbf{P}_{k|k}^{-1} {}_i\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - {}_i\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} {}_i\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \right) \quad (\text{V.38})$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \sum_{i=1}^M \left({}_i\mathbf{P}_{k|k}^{-1} - {}_i\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \right) \quad (\text{V.39})$$

Para se efetuar o avanço no tempo das estimativas dos estados no filtro de Kalman descentralizado é necessário primeiramente determinar-se o modelo estatístico apropriado para os estados e para as “medições”. Para o problema de se fundir estimativas de parâmetros modais obtidas por diferentes técnicas através de amostras de dados síncronos ou coincidentes, admitem-se as seguintes proposições:

- Os estados dos filtros locais e do filtro descentralizado são as frequências naturais e taxas de amortecimento a serem inferidas;
- Admitindo-se que os sinais analisados constituem um processo estocástico estacionário, o estado permanece constante ao longo das medições, o que implica que as matrizes de transição de estados $\Phi_{k|k-1}$ tanto dos filtros locais quanto do filtro descentralizado são matrizes identidade;

- A matriz de covariância do ruído do estado \mathcal{Q}_{k-1} do filtro descentralizado pode ser arbitrada com valores não nulos para se admitir ao modelo variabilidade nos estados de forma a acolher incertezas tanto dos modelos das diferentes técnicas de estimação quanto devidas à descontinuidade do procedimento de aquisição de dados.

No próximo capítulo, após a análise de uma série de simulações numéricas de uma estrutura submetida a carregamento aleatório, será apresentada uma metodologia de estimação híbrida por fusão descentralizada de dados.

CAPÍTULO VI

ELABORAÇÃO DE ALGORITMO HÍBRIDO E RECURSIVO

VI.1 – Introdução

Este capítulo busca fornecer subsídios para a proposição de uma metodologia de identificação estrutural híbrida e recursiva. Com esse propósito, são realizadas simulações numéricas em um modelo ideal submetido a carregamento aleatório a fim de se verificarem as limitações de cada uma das técnicas implementadas e avaliar as possibilidades de se estimar as incertezas. Em seguida, baseando-se nos resultados preliminares encontrados, propõe-se uma metodologia para análise modal de estruturas em operação através de algoritmo híbrido e recursivo. Por fim, as implementações são testadas com os sinais simulados e os resultados obtidos são comentados.

Assim como nos exemplos utilizados para a apresentação da implementação dos métodos no capítulo IV, para estas simulações foi adotado também o didático modelo de viga plana biapoiada através de seus três primeiros modos de vibração bem espaçados e definidos, desenvolvido segundo elementos lineares planos com dois graus de liberdade por nó (deslocamento vertical e angular). As respostas do modelo foram obtidas por integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem implementada em Fortran, com passo de integração de 10^{-6} do segundo. Nas aplicações deste capítulo foram utilizadas as respostas de apenas três graus de liberdade verticais: no primeiro quarto do vão (GL 07), no primeiro terço do vão (GL 09), e no meio do vão (GL 13).

VI.2 – Simulações Numéricas

Todas as simulações numéricas partiram de respostas da viga biapoiada de análise submetida a excitação por seqüências de ruído branco gaussiano não correlacionadas filtradas digitalmente até o valor de corte em 100Hz segundo todos os graus de liberdade verticais do modelo. As respostas foram obtidas numericamente com

frequência de aquisição de 200Hz, por duas horas, totalizando 1.440.000 pontos de saída obtidos segundo todos os graus de liberdade verticais discretizados.

A Fig. VI.1 apresenta estimativas dos autoespectros dos sinais dos três graus de liberdade selecionados, estimados pelo periodograma de Welch através da média de 127 segmentos com 66% de sobreposição, submetidos à janela de Hamming, obtendo-se janelas com 32768 pontos e resolução em frequência aproximada de 0,006Hz.

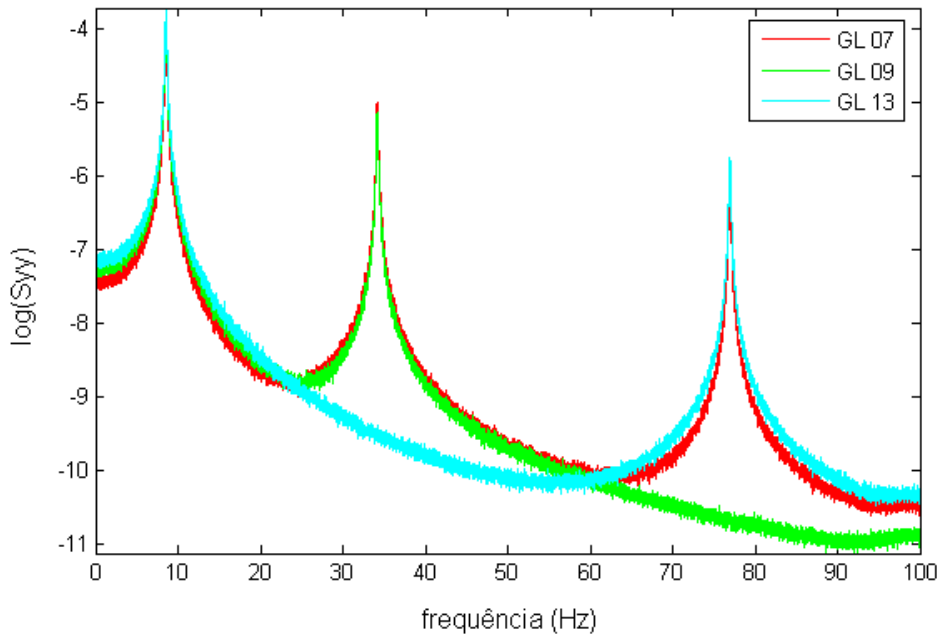


Figura VI.1 – Estimativas dos autoespectros dos sinais de resposta da viga biapojada submetida a carregamento tipo ruído branco por duas horas segundo seus GL.

A seguir serão apresentadas uma série de análises efetuadas a fim de se testar os algoritmos implementados para o caso da excitação aleatória, para se obter sensibilidade em relação às características de desempenho de cada uma das técnicas de estimação, e para verificar a aplicabilidade das possibilidades do algoritmo híbrido-recursivo. A Tabela VI.1 apresenta uma descrição esquemática de cada uma das análises realizadas preliminarmente.

Tabela VI.1 – Análises realizadas com os sinais simulados numericamente para teste dos algoritmos e inferência de intervalos de confiança.

Análise	Dados		Estimação		
	Período	Ruído	Tipo	Recursi- vidade	Fusão de estimativas
1A	2 horas	não	determinística	não	não
1B	2 horas	10%			
2A	10×30min ⁽¹⁾ 10×12min 28×12min ⁽¹⁾	não	média e intervalo de confiança entre amostras		
2B		10%			
3A		20×6min 58×6min ⁽¹⁾ 40×3min 118×3min ⁽¹⁾	não		
3B	10%				

(1) segmentos obtidos com superposição de 2/3, ou seja, 66% sobre amostra anterior.

VI.2.1 – Análise 1A

Inicialmente foi realizada a verificação da consistência dos algoritmos de estimação de parâmetros para o caso de sinais aleatórios. Com esse objetivo, desdobrou-se a identificação determinística do sistema estrutural simulado sem acréscimo de ruído por cada um dos algoritmos implementados.

Utilizando-se os parâmetros de aplicação das técnicas segundo sugestões do Cap. IV, todos os métodos implementados identificaram com boa exatidão a frequência natural e as taxas de amortecimento idealizados. Ilustrativamente, a Fig. VI.2 apresenta o diagrama de estabilização e as estimativas dos parâmetros modais obtidos pela técnica combinada RD-AR, utilizando-se 350 pontos (1,4 segundos) das estimativas das funções de autocorrelação calculadas.

A Tab. VI.2 apresenta os parâmetros dos algoritmos identificação adotados para cada uma das estimativas obtidas. A Tab. VI.3 apresenta as estimativas das frequências naturais e amortecimentos dos sinais simulados.

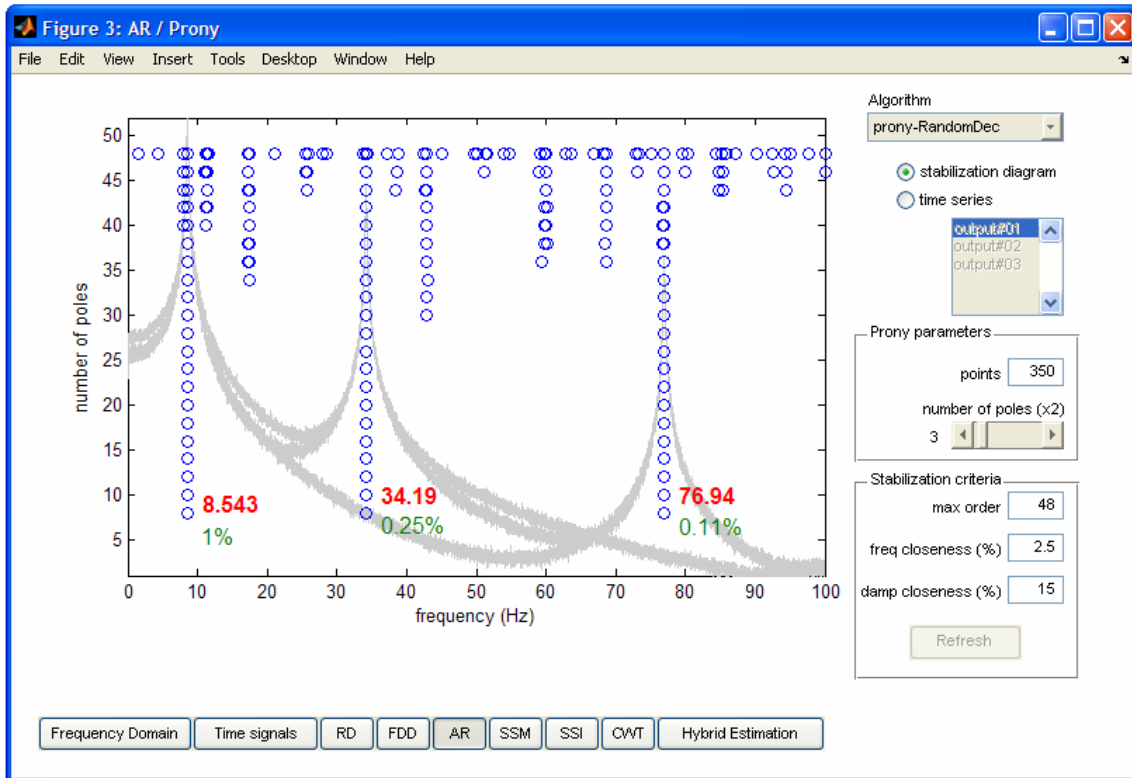


Figura VI.2 – Diagrama de estabilização e estimativas dos parâmetros modais pela técnica combinada RD-AR, utilizando-se 350 pontos (1,75 segundos) das estimativas das funções de autocorrelação calculadas.

Tabela VI.2 – Parâmetros utilizados em cada umas das técnicas para as identificações realizadas nas simulações 1A e 1B.

Técnica	Parâmetros utilizados
RD-AR	<ul style="list-style-type: none"> • Funções RD tipo “ponto positivo” entre um e dois desvios, com 350 pontos (1,75 segundos, 14 ciclos da primeira freqüência), com sobreposição, avaliando-se 391.175 amostras na média, incluindo-se estimativas de “passo negativo”; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 48 e aceitação de variabilidade de 2,5% na freqüência, e 15% no amortecimento.
RD-CWT	<ul style="list-style-type: none"> • Funções RD tipo “ponto positivo” entre um e dois desvios, com 1000 pontos (5,0 segundos, 42 ciclos da primeira freqüência), com sobreposição, somando-se 391.501 amostras na média, incluindo-se estimativas de “passo negativo”; • <i>Wavelet-mães</i> com freqüências centrais de 5,4rad/s, 6Hz e 10Hz para respectivamente o 1°, 2° e 3° modo analisados, a partir do sinal compreendido de 0,5 a 1,5 segundos.
FDD	<ul style="list-style-type: none"> • 514 segmentos na média, resolução de 0,0241Hz, janelas com 8192 pontos, freqüência de digitalização de 200Hz; • Ajuste linear da transformada Hilbert entre o primeiro e o décimo ciclo da menor freqüência natural; • Tolerância admitida ao valor MAC entre os vetores singulares = 0,98;
SSM	<ul style="list-style-type: none"> • Matriz de covariância com ordem igual a 32; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 32 e aceitação de variabilidade de 2,5% na freqüência, e 15% no amortecimento.
SSI	<ul style="list-style-type: none"> • Número de blocos de linha da matriz de dados igual a 10; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 24 e aceitação de variabilidade de 2,5% na freqüência, e 15% no amortecimento; • O tamanho do sinal foi restringido aos seus últimos 40 minutos em função das limitações de memória que apresentou o algoritmo implementado no ambiente MATLAB.

Tabela VI.3 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento segundo cada uma das técnicas de estimação abordadas para o sinal simulado sem adição de ruído.

Valor exato			Estimativa determinística das frequências naturais amortecidas (respostas de três GL, 2 horas, sem ruído)				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI ⁽¹⁾
Frequência natural (Hz)	1º modo	8,546	8,543	8,546	8,544	8,546	8,549
	2º modo	34,186	34,185	34,188	34,181	34,186	34,190
	3º modo	76,935	76,936	76,936	76,922	76,933	76,931
Amortecimento (%)	1º modo	1,000	0,995	1,000	1,004	0,992	1,000
	2º modo	0,250	0,246	0,249	0,255	0,249	0,250
	3º modo	0,111	0,109	0,109	0,111	0,111	0,114

(1) – Valores obtidos a partir dos últimos 40 minutos do sinal.

VI.2.2 – Análise 1B

Ao sinal de resposta obtido numericamente adicionou-se seqüências de ruído branco uniformemente distribuído de 10% do seu valor *rms*. Deve-se acrescentar que uma integração numérica efetuada para um período tão longo, mesmo tendo-se utilizado passos de integração muito pequenos, pode implicar no aparecimento de algumas distorções que acabam por se somar ao ruído arbitrado. Os valores obtidos para as frequências naturais e taxas de amortecimento apresentam-se na Tab. VI.4.

Tabela VI.4 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento segundo cada uma das técnicas de estimação abordadas para o sinal simulado com adição de ruído.

Valor exato			Estimativa determinística das frequências naturais amortecidas (respostas de três GL, 2 horas, com ruído)				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI ⁽¹⁾
Frequência natural (Hz)	1º modo	8,546	8,543	8,544	8,544	8,546	8,549
	2º modo	34,186	34,185	34,192	34,182	34,187	34,189
	3º modo	76,935	76,933	76,931	76,924	76,932	76,929
Amortecimento (%)	1º modo	1,000	0,996	1,002	1,001	0,993	1,003
	2º modo	0,250	0,247	0,249	0,254	0,250	0,249
	3º modo	0,111	0,109	0,109	0,113	0,111	0,1143

(1) – Valores obtidos a partir dos últimos 40 minutos do sinal.

Analisando-se os resultados obtidos com as análises numéricas 1A e 1B, pode-se concluir parcialmente que para longos períodos como o sinal de 2 horas simulado, o erro aleatório passa praticamente despercebido para todas as técnicas de estimação.

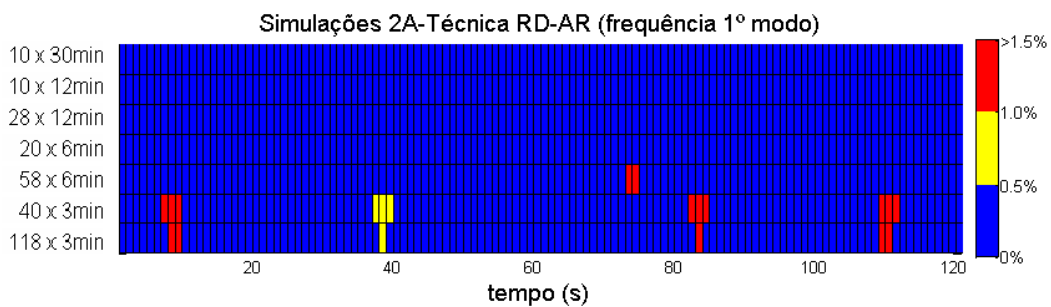
VI.2.3 – Análise 2A

A fim de se obter fundamentalmente uma relação entre a duração dos sinais e a exatidão das estimativas dos parâmetros modais encontradas para cada uma das técnicas “*output-only*” implementadas, foi elaborado este conjunto de análises denominado de Análise 2A. Através de seus resultados buscar-se-á a ratificação das experiências colhidas na literatura e já apresentadas na Tab. (IV.1) sobre o tempo necessário de aquisição para se obter boas estimativas, ampliando-se essa verificação para uma perspectiva comparativa.

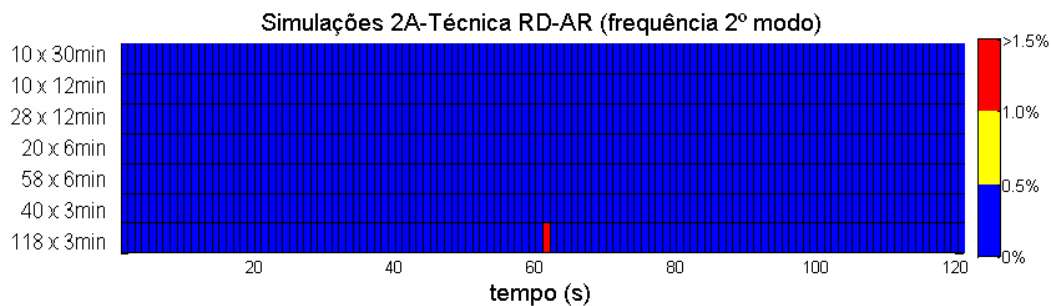
Para cumprir esse objetivo, o sinal de duas horas numericamente simulado (sem a adição de ruído) foi repartido em períodos de 30, 12, 6 e 3 minutos, com e sem sobreposição, aplicando-se sobre esses segmentos de dados cada uma das técnicas de estimação.

A Figura VI.3 apresenta a exatidão obtida nos valores das frequências naturais utilizando-se a técnica RD-AR. Nesta figura, a cor azul representa os segmentos de

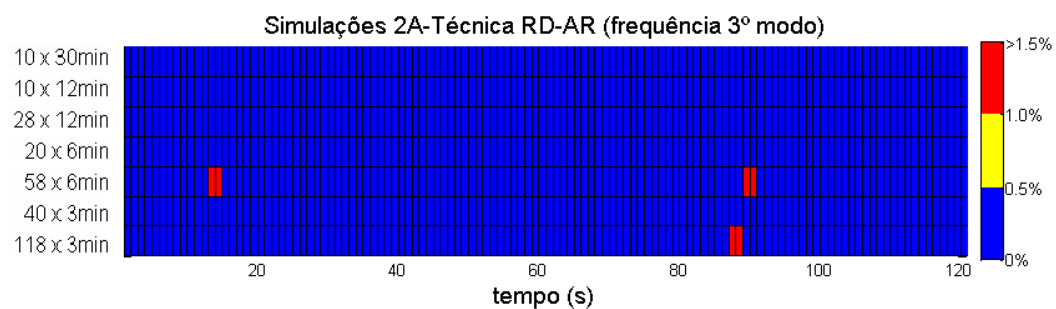
dados a partir de onde se obtiveram estimativas com erro inferior a 0,5% do exato, com cor amarela os trechos com erro entre 0,5% e 1,0%, e em vermelho, resultados com desvio superior a 1,0%. A figura foi montada a partir da representação de cada amostra de um minuto como um retângulo. Assim, períodos de 12, 6 e 3 minutos tomados sem sobreposição correspondem respectivamente a 12, 6 e 3 retângulos segundo o eixo das abscissas (tempo), enquanto períodos de 30, 12, 6 e 3 minutos tomados com sobreposição de 66% correspondem a 10, 4, 2 e 1 retângulos.



(a)



(b)



(c)

Figura VI.3 – Erro encontrado nas estimativas de frequência natural a partir da aplicação da técnica RD-AR sobre cada segmentação de dados adotada, para o 1º, 2º e 3º modos de vibração.

De forma análoga, as Figuras VI.4 e VI.5 apresentam a exatidão encontrada para as estimativas das frequências naturais dos três primeiros modos de vibração da viga simulada segundo as técnicas SSI e SSM, respectivamente.

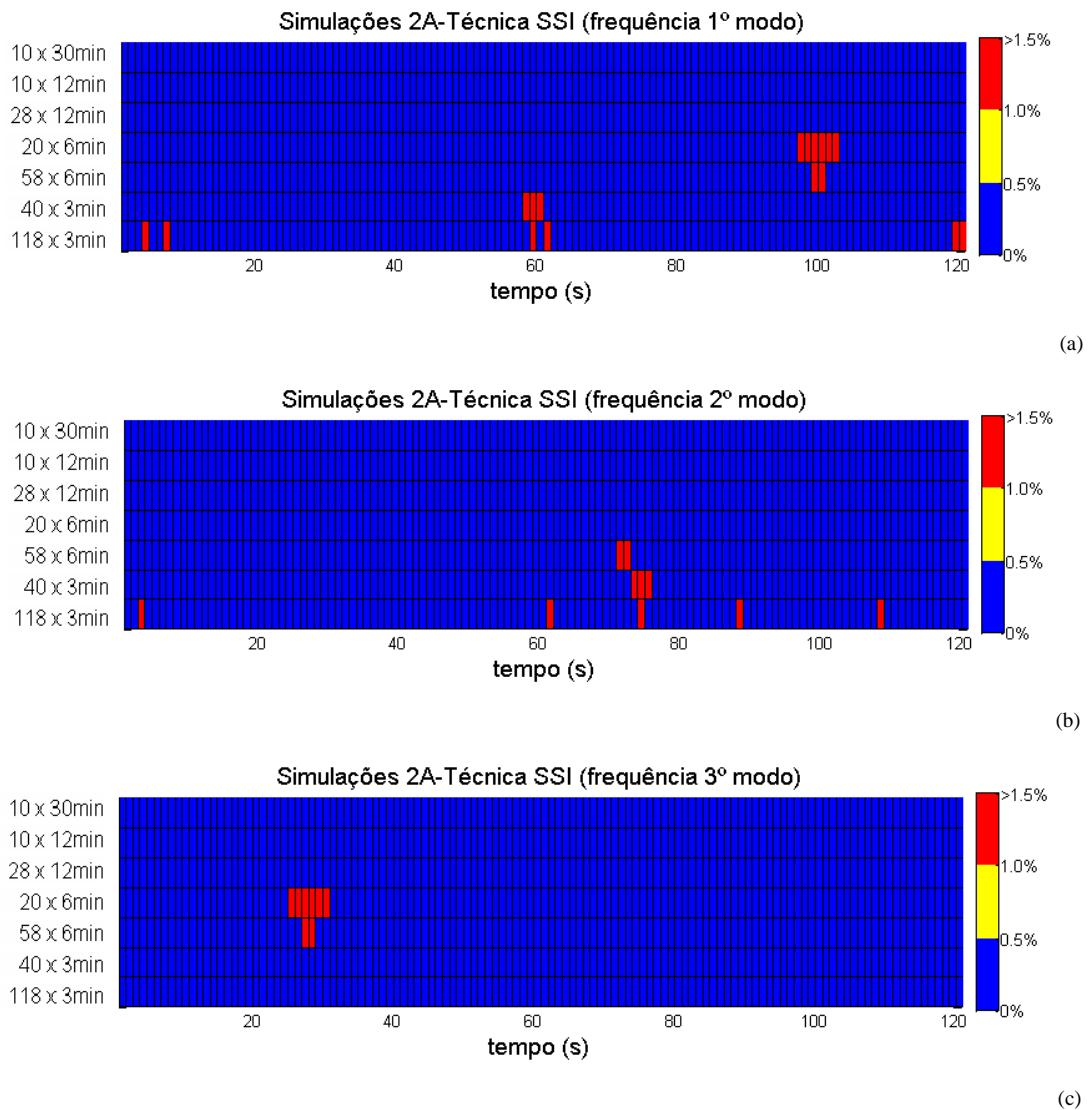
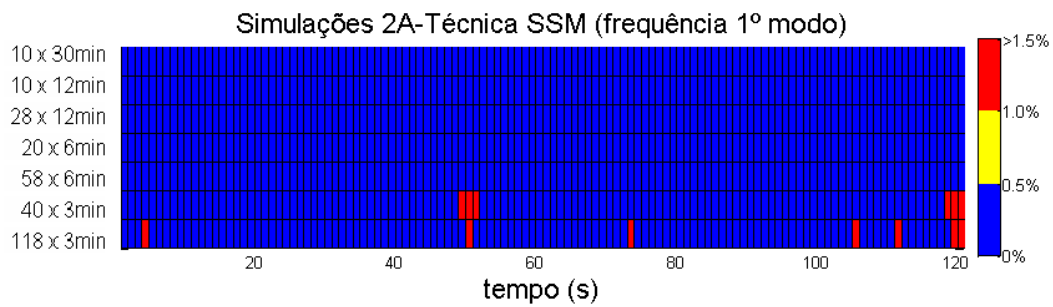
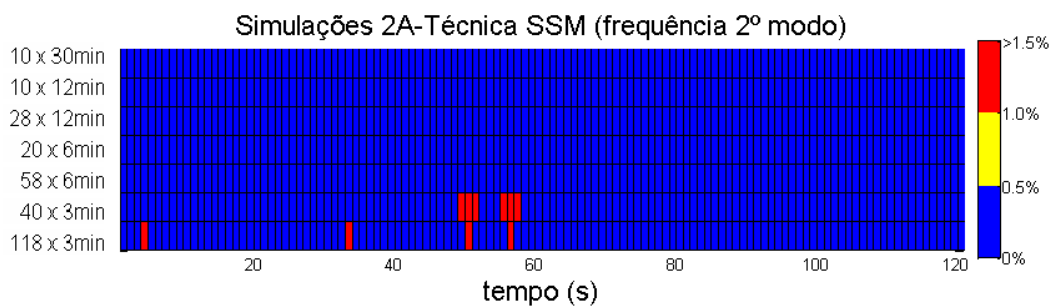


Figura VI.4 – Erro encontrado nas estimativas de frequência a partir da aplicação da técnica SSI sobre cada um dos segmentos de dados.

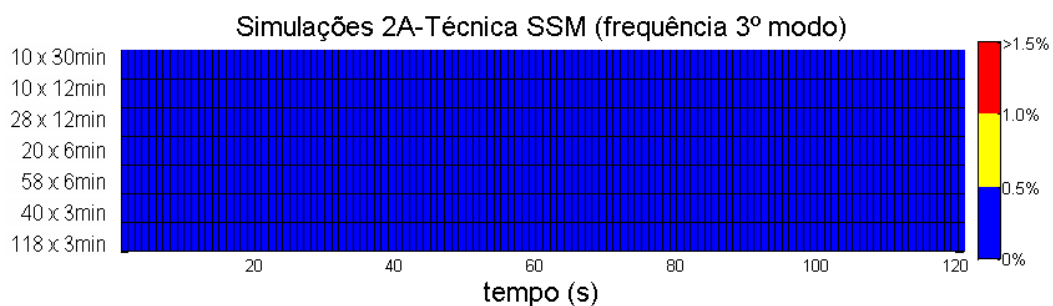
As técnicas FDD e RD-CWT apresentaram todas as suas estimativas de frequência com erro inferior a 0,5%, ou seja todos os gráficos ficaram completamente “azuis”, dispensando-se por isso suas apresentações.



(a)



(b)



(c)

Figura VI.5 – Erro encontrado nas estimativas de frequência a partir da aplicação da técnica SSM sobre cada um dos segmentos de dados.

Para a estimação dos parâmetros modais a partir de cada um dos 284 diferentes segmentos de dados foram estabelecidos critérios de parametrização para a automatização da execução das técnicas de estimação. Esses critérios, similares aos utilizados para a análise do sinal completo, estão apresentados na Tab. VI.5.

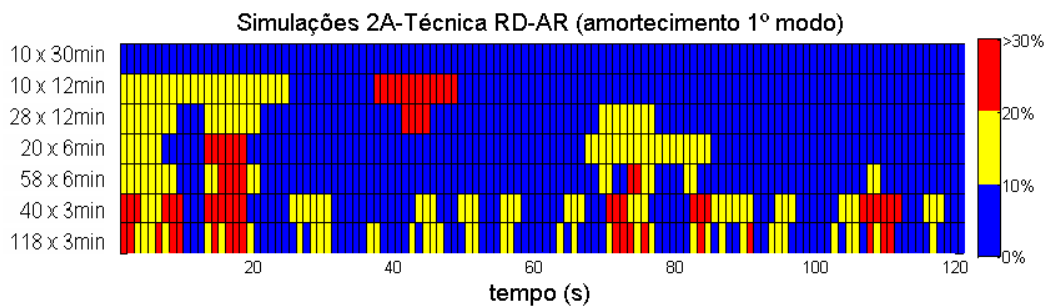
Tabela VI.5 – Critérios para automatização das técnicas de estimação de parâmetros.

Técnica	Critérios e parâmetros de automatização
RD-AR	<ul style="list-style-type: none"> • Funções RD tipo “ponto positivo” entre um e dois desvios, com 350 pontos (1,75 segundos ou 14 ciclos da primeira frequência), incluindo-se estimativas de “passo negativo”; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 48 e aceitação de variabilidade de 2,5% na frequência, e 15% no amortecimento.
RD-CWT	<ul style="list-style-type: none"> • Funções RD tipo “ponto positivo” entre um e dois desvios, com 1000 pontos (5,0 segundos ou 42 ciclos da primeira frequência), incluindo-se estimativas de “passo negativo”; • Frequências centrais das <i>wavelet-mães</i> e período linear do decaimento selecionados a partir da observação prévia do sinal (ou parte dele) para cada modo de vibração; • Valores das frequências dos <i>ridges</i> selecionados da seguinte forma: <ul style="list-style-type: none"> ○ Estimativa inicial a partir do cálculo da média dos espectros de cada linha do tempo da transformada <i>wavelet</i> contínua dos primeiros 10 segundos do segmento do sinal utilizando-se a <i>wavelet</i>-mãe de maior frequência central aplicada no item anterior; ○ Ajuste fino a partir da identificação do valor máximo da média da faixa de espectro de 1Hz de banda, centrada na estimativa inicial da frequência obtida no item anterior, utilizando-se transformadas <i>wavelet</i> contínuas da função RD e <i>wavelet</i>-mãe pré-selecionadas para cada modo.
FDD	<ul style="list-style-type: none"> • Estimação da matriz espectral para cada segmento de dados analisado, e subsequente identificação dos picos do gráfico dos valores singulares na frequência; • Tolerância admitida ao valor MAC entre os vetores singulares, e período do decaimento para ajuste dos parâmetros selecionados a partir da observação prévia do sinal (ou parte dele).
SSM	<ul style="list-style-type: none"> • Matriz de covariância com ordem igual a 32; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 32 e aceitação de variabilidade de 2,5% na frequência, e 15% no amortecimento.
SSI	<ul style="list-style-type: none"> • Número de blocos de linhas da matriz de dados igual a 10; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 24 e aceitação de variabilidade de 2,5% na frequência, e 15% no amortecimento.

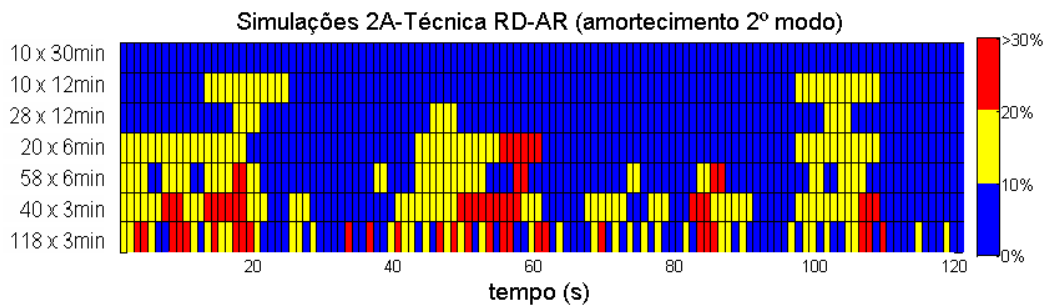
Pela análise dos resultados das estimativas de frequência natural, pode-se concluir que todos os métodos apresentaram excelentes resultados, destacando-se as técnicas FDD e RD-CWT, ambas baseadas na estimativa espectral preliminar. Verifica-se ainda que na maioria das vezes o fato de não se identificar uma das frequências a

partir de um sinal não impossibilita a estimação das frequências dos demais modos de vibração a partir dos dados daquele mesmo trecho.

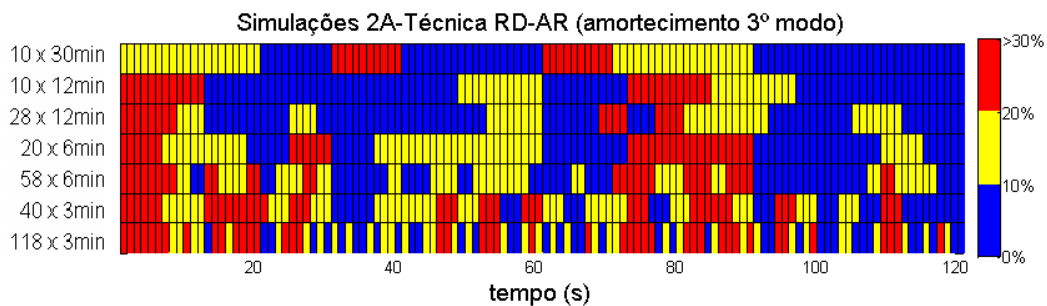
Apresentam-se a seguir as estimativas obtidas para as taxas de amortecimento segundo cada uma das técnicas de estimação, representando-se, analogamente às frequências naturais, na cor azul os segmentos de dados a partir de onde se obtiveram estimativas com erro inferior a 10% do exato, com a cor amarela, erros entre 10% e 20%, e em vermelho, erros superiores a 20%. As Figuras VI.6 à VI.10 apresentam o nível de exatidão obtido para os valores de amortecimento a partir da técnica RD-AR, RD-CWT, FDD, SSM e SSI, respectivamente.



(a)

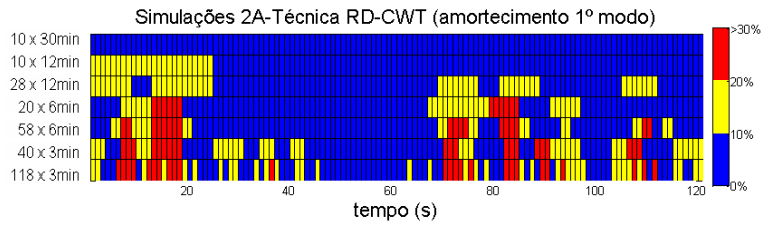


(b)

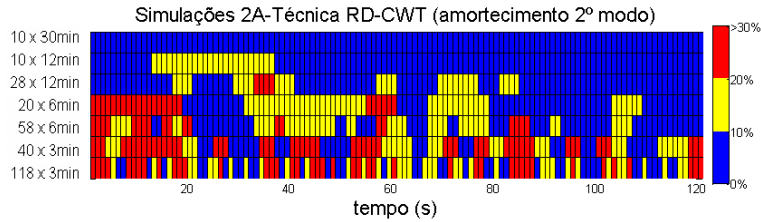


(c)

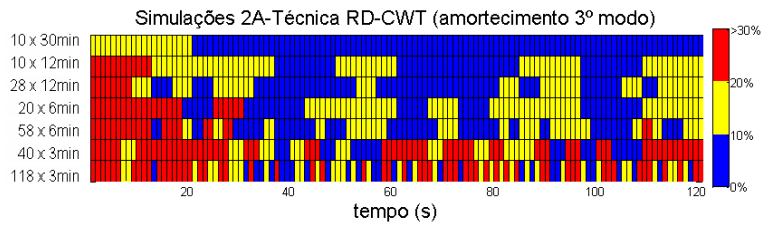
Figura VI.6 – Erro encontrado nas estimativas de taxa de amortecimento a partir da aplicação da técnica RD-AR sobre cada um dos segmentos de dados.



(a)

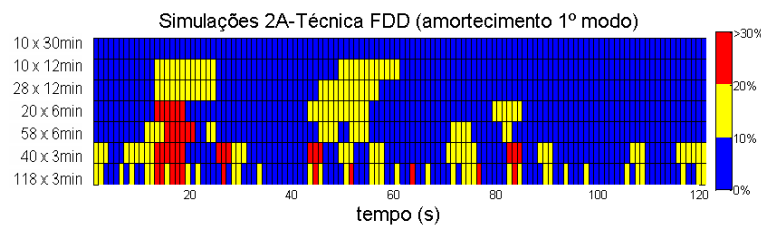


(b)

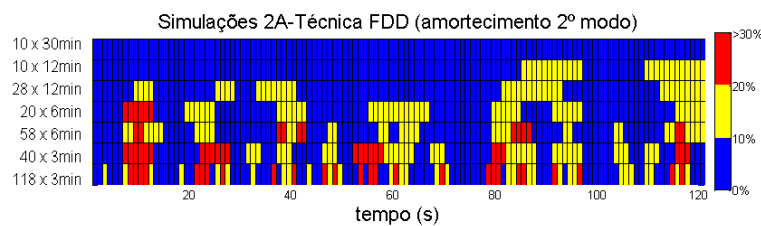


(c)

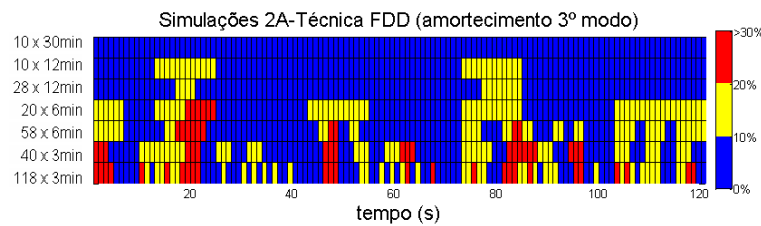
Figura VI.7 – Erro encontrado nas estimativas de taxa de amortecimento a partir da aplicação da técnica RD-CWT sobre cada um dos segmentos de dados.



(a)

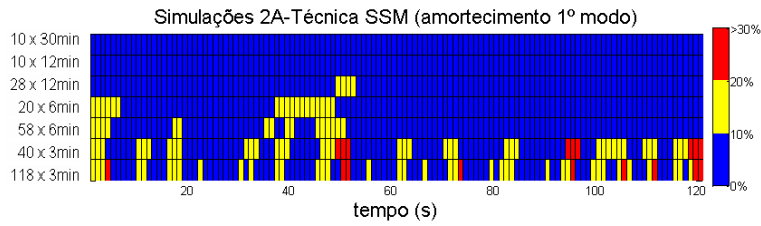


(b)

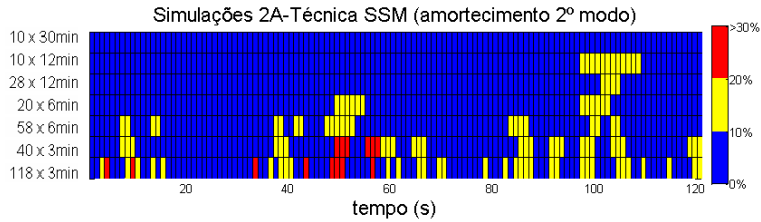


(c)

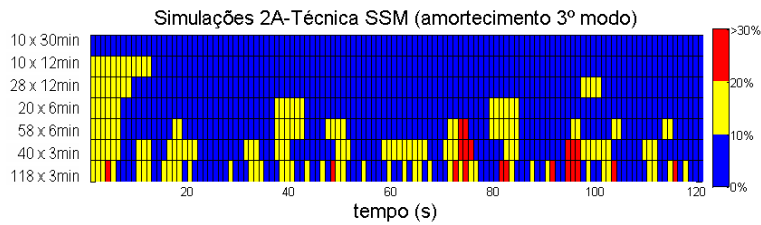
Figura VI.8 – Erro encontrado nas estimativas de taxa de amortecimento a partir da aplicação da técnica FDD sobre cada um dos segmentos de dados.



(a)

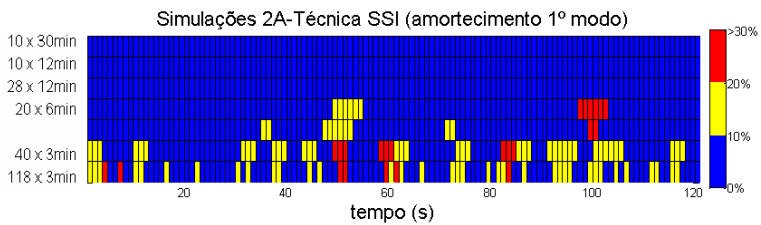


(b)

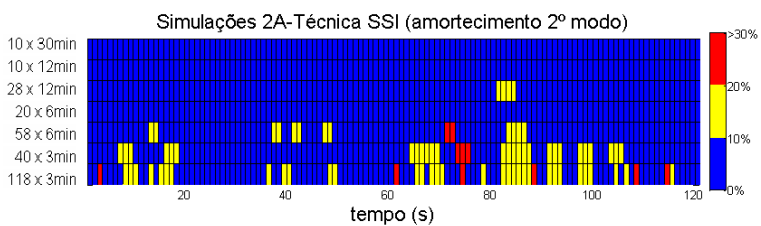


(c)

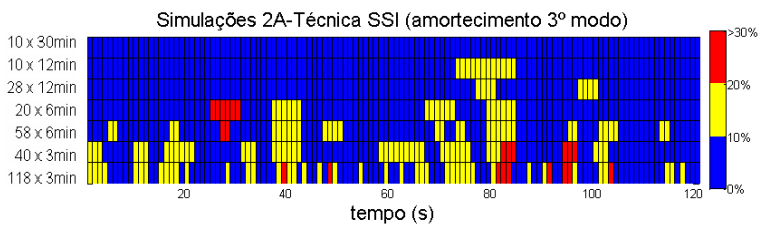
Figura VI.9 – Erro encontrado nas estimativas de taxa de amortecimento a partir da aplicação da técnica SSM sobre cada um dos segmentos de dados.



(a)



(b)



(c)

Figura VI.10 – Erro encontrado nas estimativas de taxa de amortecimento a partir da aplicação da técnica SSI sobre cada um dos segmentos de dados.

A partir da análise qualitativa das estimativas das frequências naturais e das taxas de amortecimento, podem-se ratificar as seguintes conclusões parciais já presumíveis dentro do escopo geral da análise modal:

- Conforme o período disponibilizado do sinal é reduzido, piores se tornam as estimativas;
- O fato de não ser possível estimar com boa precisão a frequência natural e o amortecimento de um determinado modo não impossibilita a estimação desses parâmetros nos demais modos;
- As técnicas de estimação apresentaram desempenho diferenciado ao longo de cada segmento do sinal, não havendo em geral trechos do sinal onde nenhuma das técnicas fosse capaz de identificar um determinado parâmetro modal.

O Apêndice A apresenta quantitativamente as estimativas finais dos parâmetros modais obtidos a partir das simulações apresentadas neste capítulo. A Tabela A.4 apresenta os valores médios e intervalos de confiança das estimativas obtidas nesta simulação 2A por técnica e por tipo de segmentação. Para o cálculo dos intervalos de confiança foi adotada a hipótese de distribuição normal das amostras e nível de confiança de 95%, ou seja, utilizou-se o valor de duas vezes o desvio-padrão (como aproximação do escore 1,96). Para essa inferência aproveitaram-se apenas amostras com estimativas simultaneamente “não-vermelhas” da frequência natural e da taxa de amortecimento de um determinado modo de vibração (em relação ao critério estabelecido para os gráficos das figuras VI.3 à VI.10). A Tab. A.5 resume quantitativamente a disponibilidade de amostras para o cálculo das estimativas, por técnica e por tipo de segmentação.

A Fig. VI.11 exemplifica graficamente os valores médios e os intervalos de confiança inferidos pela aplicação da técnica RD-AR nos sinais das diferentes segmentações. Nesta figura, como era de se esperar, percebe-se que estimativas efetuadas com sinais mais longos apresentaram, de uma forma geral, menor dispersão em torno do valor exato. Verifica-se também que, para a estimação de parâmetros a partir de segmentos de um mesmo tamanho, análises com mais amostras implicam em menores variâncias.

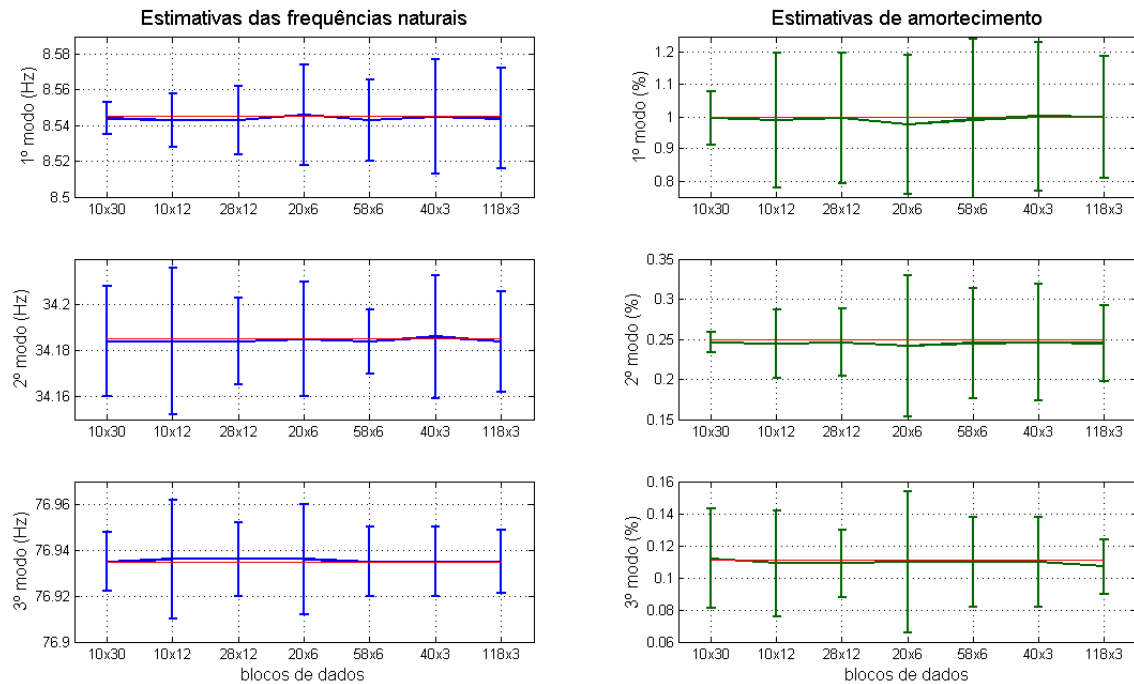


Figura VI.11 – Intervalos de confiança das frequências naturais e taxas de amortecimento obtidas pela técnica RD-AR, alcançadas a partir do cálculo do desvio padrão das estimativas determinísticas extraídas das amostras do sinal obtidas pelas diferentes segmentações propostas.

VI.2.4 – Análise 2B

A análise 2B consiste na repetição do mesmo procedimento de segmentação efetuado na simulação 2A, entretanto acrescentando-se aos sinais seqüências aleatórias uniformemente distribuídas com amplitudes de 10% do valor *rms* dos sinais de resposta da viga. Tem por fim verificar a suscetibilidade das técnicas de estimação simultaneamente à presença de ruídos e à redução do tamanho das seqüências das respostas.

A Figura VI.12 apresenta a exatidão obtida nos valores das frequências naturais a partir da técnica SSI, representando-se pela cor azul os segmentos de dados a partir de onde se obtiveram estimativas com erros inferiores a 0,5% do exato, com cor amarela erros entre 0,5% e 1,0%, e em vermelho erros superiores a 1,0%.

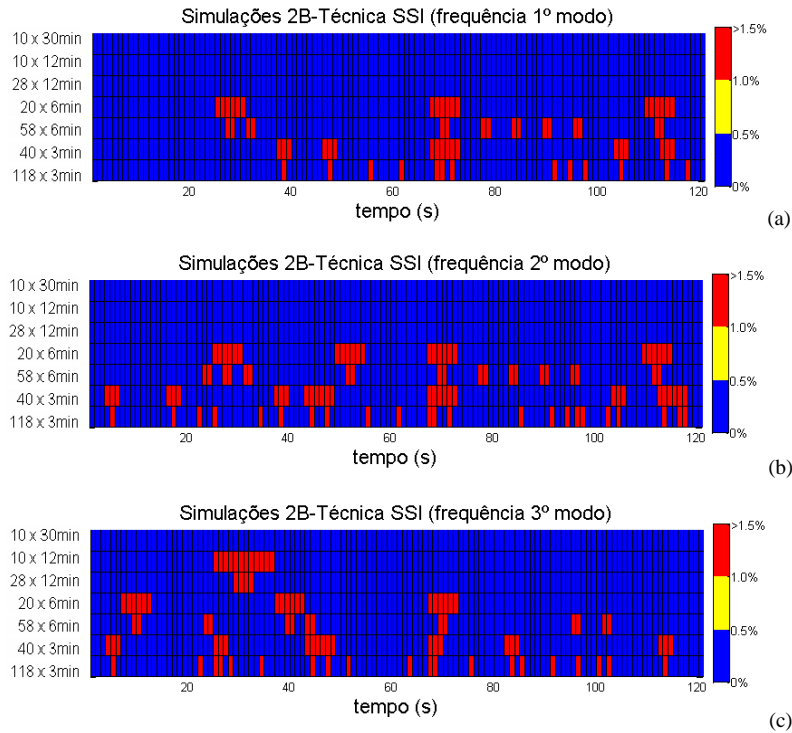


Figura VI.12 – Erro encontrado nas estimativas de frequência a partir da aplicação da técnica SSI sobre cada um dos segmentos de dados com ruído.

Apresentam-se na Fig. VI.13 os valores obtidos para as taxas de amortecimento segundo a técnica SSI, representando-se pela cor azul os segmentos de dados a partir de onde se obtiveram estimativas com erro inferior a 10% do exato, com cor amarela erros entre 10% e 20%, e em vermelho erros superiores a 20%.

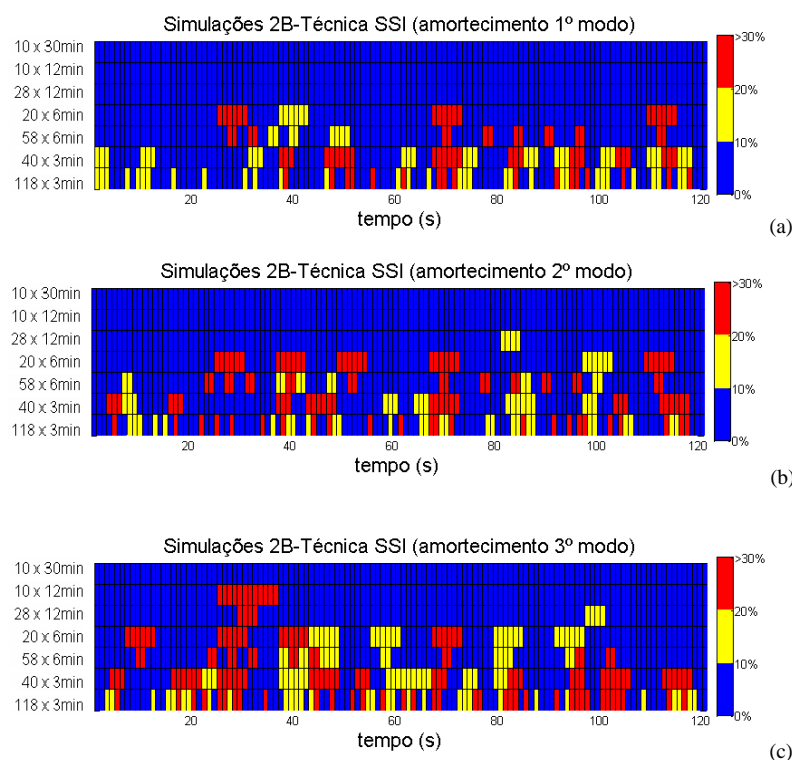


Figura VI.13 – Erro encontrado nas estimativas de amortecimento a partir da aplicação da técnica SSI sobre cada um dos segmentos de dados com ruído.

Comparando-se as Fig. VI.12 e VI.13 com as Fig. VI.4 e VI.9 percebe-se que a adição do ruído implicou em acentuada degradação na exatidão das estimativas da técnica SSI. As demais técnicas implementadas, entretanto, não apresentaram nas simulações 2B mudanças qualitativamente significativas na exatidão de suas estimativas, fato que desobrigou a apresentação das suas respectivas figuras.

Quantitativamente, podem-se verificar os resultados encontrados para as cinco técnicas a partir da Tabela A.6 do Apêndice A. Enquanto as técnicas RD-AR, RD-CWT e FDD mantiveram as suas estimativas e variâncias, as técnicas SSM e principalmente SSI perceberam significativa alteração nos intervalos de confiança encontrados.

Para avaliar a suscetibilidade da técnica SSI ao ruído imposto, apresentam-se na Fig. VI.14 os gráficos de avaliação da exatidão das estimativas de amortecimento do 3º modo para o caso de sinais sem ruído (simulação 2A), para uma adição de 10% de ruído (simulação 2B), e por fim para sinais com 20% de ruído (*rms*).

Os gráficos da Fig. VI.14 confirmam a expressiva sensibilidade da implementação da técnica SSI à presença de ruídos nas medições.

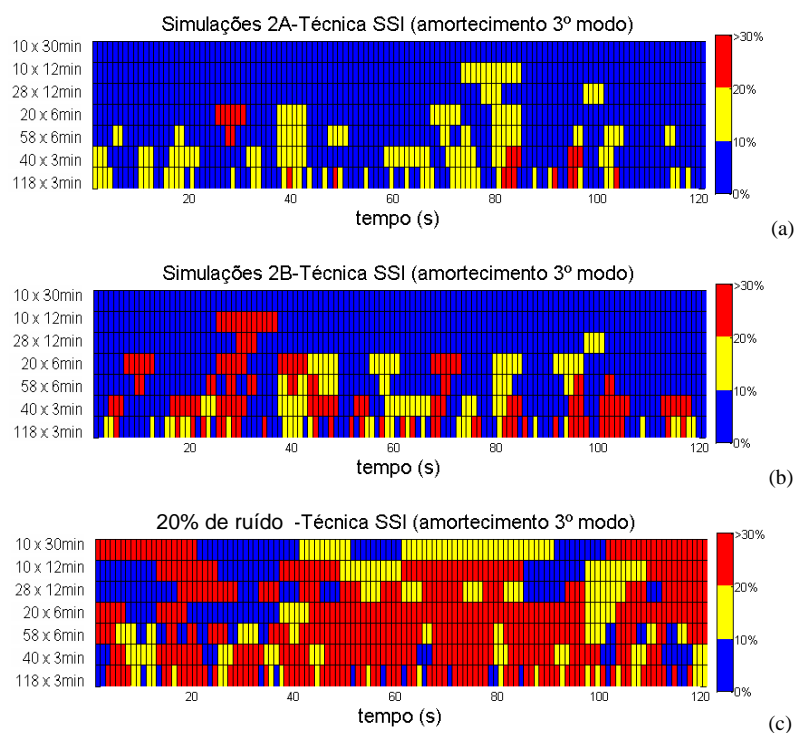


Figura VI.14 – Erro encontrado nas estimativas de amortecimento a partir da aplicação da técnica SSI sobre cada um dos segmentos de dados sem ruído (a), com 10% de ruído (b) e com 20% de ruído (c).

VI.2.5 – Análise 3A

A análise 3A tem por objetivo prover estimativas dos parâmetros modais e intervalos de confiança a partir da técnica de reamostragem *bootstrap* do sinal simulado de 2 horas, a fim de se comparar com as inferências obtidas pela simulação 2A. Para isso, efetuou-se a segmentação dos dados proposta na simulação 2A, procedendo-se em seguida a recomposição do sinal de duas horas por reamostragem dos blocos.

A partir da análise das referências apresentadas no capítulo anterior, foram implementadas para esta simulação rotinas de reamostragem de dados que sustentassem coerência com as funções estocásticas utilizadas teoricamente por cada técnica de estimação.

A tabela VI.7 apresenta os critérios utilizados para a obtenção de reamostras e respectivas estimativas de parâmetros modais, para cada técnica implementada. A Tab. VI.8 descreve as simulações efetuadas para diferentes composições de blocos para a

obtenção de 50, 200 e 400 reamostras de duas horas cada, a partir das quais obtiveram-se novas estatísticas.

Tabela VI.7 – Critérios para automatização da técnica *bootstrap* inferência estatística.

Técnica	Critérios e parâmetros para a obtenção das reamostras <i>bootstrap</i>
Funções RD	<ul style="list-style-type: none"> • Estimação das funções RD tipo “ponto positivo” de cada segmento (bloco) de dados são previamente calculadas e armazenadas; • Para cada nova reamostra <i>bootstrap</i>, novas funções RD são obtidas pela média ponderada (pelo número de médias) das funções RD de cada bloco de dados utilizado.
RD-AR	<ul style="list-style-type: none"> • Utilização das médias ponderadas das Funções RD;
RD-CWT	<ul style="list-style-type: none"> • Utilização das médias ponderadas das Funções RD; • Os valores das frequências dos <i>ridges</i> de cada um dos modos de vibração são estimados uma única vez, sendo aproveitados para todas reamostras. Essa simplificação torna o algoritmo muito rápido, e implica em mudanças insignificantes nas estimativas.
FDD	<ul style="list-style-type: none"> • Para cada nova reamostra <i>bootstrap</i>, matrizes espectrais são obtidas por média simples das matrizes de cada bloco de dados utilizado. • Os picos de cada um dos modos de vibração são estimados a cada reamostra, bem como a seleção da banda em frequência representativa daquele modo, a inversão da Transformada de Fourier e os ajustes nas Transformadas de Hilbert.
SSM	<ul style="list-style-type: none"> • Para cada nova reamostra <i>bootstrap</i>, matrizes de autocovariância são obtidas por média simples das matrizes de cada bloco de dados utilizado.
SSI	<ul style="list-style-type: none"> • Para cada nova reamostra <i>bootstrap</i>, matrizes de Hankel são obtidas por média simples das matrizes de cada bloco de dados utilizado.

Tabela VI.8 – Descrição das simulações efetuadas para diferentes composições de blocos para 50, 200 e 400 reamostras, para cada uma das técnicas de estimação.

Simulação	Período dos segmentos (blocos)	Número de blocos obtidos	Número de blocos na reamostragem	Número de reamostras Bootstrap
3A1	30min	10 ⁽¹⁾	4	50, 200 e 400
3A2	12 min	10	10	
3A3	12 min	28 ⁽¹⁾	10	
3A4	6 min	20	20	
3A5	6 min	58 ⁽¹⁾	20	
3A6	3 min	40	40	
3A7	3 min	118 ⁽¹⁾	40	

⁽¹⁾ obtidos com sobreposição de 66%

As Tabelas (A.7) a (A.11) do Apêndice apresentam as estimativas obtidas para as técnicas RD-AR, RD-CWT, FDD, SSM e SSI. A Tabela (A.7) apresenta estimativas para todas as segmentações efetuadas na simulação 2A. As demais, entretanto, para evitar excesso de informação desnecessária, apresentam apenas as estimativas *bootstrap* a partir das segmentações 10×30min, 10×12min e 118×3min. A fim de ilustrar em parte o procedimento efetuado, a Figura VI.15 apresenta o histograma da distribuição das 400 reamostras *bootstrap* pela técnica SSM da análise 3A na segmentação de 118×3min.

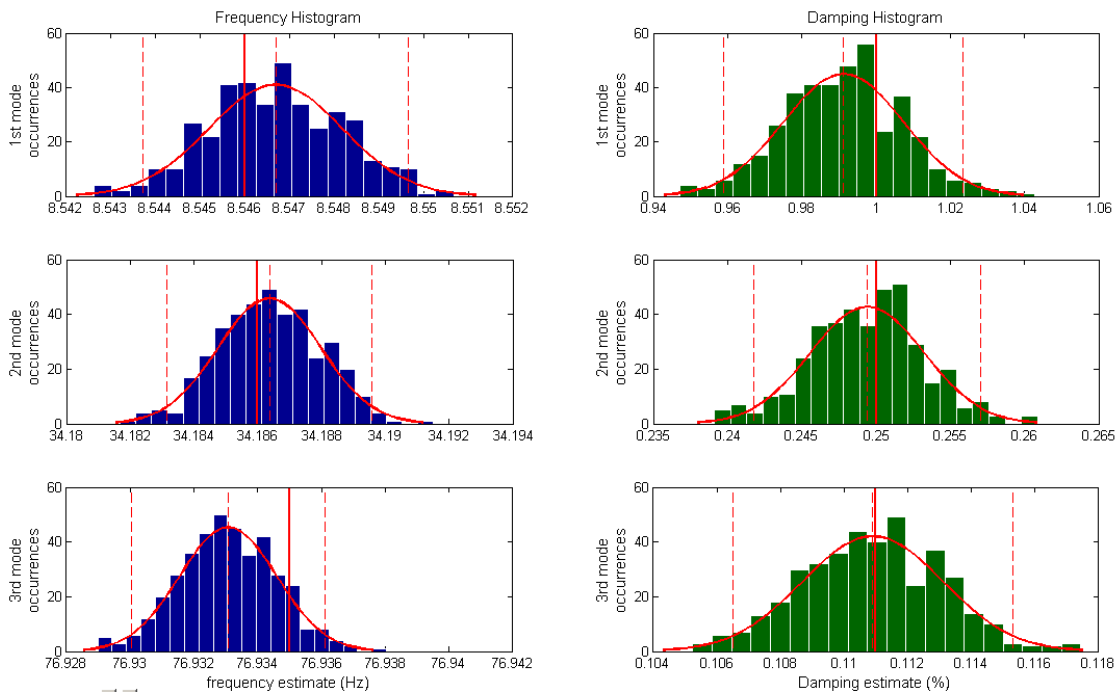


Figura VI.15 – Distribuição das reamostras *bootstrap* pela técnica SSM da análise 3A na segmentação de 118×3min, apresentando-se ainda a correspondente Gaussiana, o valor médio e o intervalo de confiança em linhas tracejadas e o valor exato em linha cheia.

Ao longo da implementação dessa análise foi verificado que no processo de obtenção das reamostras *bootstrap* eventualmente chega-se a estatísticas imprecisas que acabam por implicar em estimativas acentuadamente inexatas, principalmente quando os blocos de dados se tornam menores.

A fim de eliminar essas estimativas espúrias, foi implementado um algoritmo que consistiu na retirada progressiva de amostras de maior desvio em relação aos valores médios de frequência natural e amortecimento, alternadamente, até o limite de 25% do total de pares de amostras, ou até que as todas as estimativas apresentem um

desvio máximo de 10% em relação ao amortecimento médio e 1% na frequência. Quando as amostras remanescentes, ou seja, 75% da quantidade inicial, não apresentarem dispersão menor que 50% em relação ao amortecimento médio e 5% na frequência, descartam-se todo o conjunto de estimativas. Para essa simulação, verifica-se que após a retirada de algumas poucas amostras, o critério de parada de desvio de 10% em relação ao amortecimento médio é atingido, e o descarte de amostras interrompido.

Pela observação dos resultados encontrados por ocasião da análise 3A, podem-se extrair as seguintes conclusões parciais:

- As estimativas *bootstrap* apresentaram em geral valores médios melhores do que aqueles encontrados na análise 2A e com intervalos de confiança significativamente menores;
- O número de 50 reamostras *bootstrap* se mostrou suficiente para se obter bons intervalos de confiança para as estimativas, não se percebendo vantagem expressiva na utilização de um número maior de reamostras.

VI.2.6 – Análise 3B

A análise 3B consiste na repetição do mesmo procedimento de verificação da reamostragem *bootstrap* efetuado na simulação 3A, entretanto acrescentando-se aos sinais seqüências aleatórias uniformemente distribuídas com amplitudes de 10% do valor *rms* dos sinais de resposta da viga.

De forma análoga à simulação 3A, as Tabelas A.12 a A.16 do Apêndice apresentam as estimativas obtidas para as técnicas RD-AR, RD-CWT, FDD, SSM e SSI. Pela observação dos resultados encontrados pode-se afirmar que em geral os valores médios obtidos são um pouco melhores do que aqueles encontrados na análise 2B e, assim como na análise 3A, os intervalos de confiança se mostraram coerentes e menores.

VI.3 – Algoritmo Híbrido Recursivo Implementado

A partir das conclusões parciais obtidas pelas análises apresentadas até então pode-se concluir que:

- Nenhuma técnica é infalível, e as técnicas apresentam rendimentos distintos para diferentes trechos do sinal simulado, principalmente ao se diminuir o tamanho das seqüências;
- A técnica de inferência *bootstrap* apresentou-se eficiente na identificação dos intervalos de confiança pelas estimativas das variâncias;
- Eventualmente, algumas técnicas apresentam estimativas precisas mas inexatas, ou seja, o valor correto do parâmetro modal não pertence ao intervalo de confiança inferido.

A partir das evidências levantadas, foi desenvolvida uma metodologia que contorne os problemas específicos de cada técnica de estimação através da utilização concomitante de todas elas.

Uma vez que a técnica *bootstrap* apresentou-se eficiente na identificação dos intervalos de confiança, propõe-se então utilizá-la para estimar a variância das estimativas para cada passo de tempo, desenvolvendo-se assim um algoritmo recursivo.

A Tabela VI.8 apresenta novas análises cujo desdobramento se mostra necessário a fim de verificar a aplicabilidade de uma abordagem híbrida e/ou recursiva eficiente.

Tabela VI.8 – Análises híbridas e recursivas realizadas por simulações numéricas.

Análise	Dados		Estimação		
	Período	Ruído	Tipo	Recursividade	Fusão de estimativas
4	10×12min	10%	reamostragem <i>bootstrap</i> : estimativa de média e variância para cada novo conjunto de amostras	amostras cumulativas	Média ponderada pelo inverso das variâncias
5	10×12min 20×6min 40×3min			amostras cumulativas e Filtro de Kalman	Filtro de Kalman descentralizado

VI.3.1 – Análise 4

Conforme se pôde perceber pelas análises 2A e 2B, todas as técnicas de estimação apresentaram-se mais eficientes no tratamento de seqüências de período mais longo. Logo, é natural que uma metodologia de obtenção de estimativas considere os dados das aquisições anteriores, acumulando-os com novas aquisições, estendendo-se assim o tamanho dos arquivos em análise (Cenário II).

Nessa abordagem, o número dos blocos para a reamostragem permanece inalterado, entretanto o tamanho de cada bloco aumenta a cada nova aquisição adicionada. A Figura VI.17 apresenta esquematicamente o tratamento dado aos sinais obtidos na Análise 4.

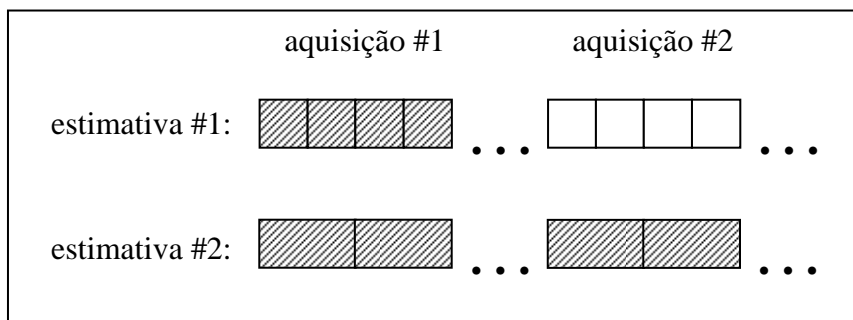


Figura VI.17 – Estimativas obtidas pela aquisição de novos dados através da acumulação dos sinais disponibilizados mantendo-se constante o número de blocos para reamostragem.

A Figura VI.18 apresenta a evolução das estimativas *bootstrap* da técnica RD-AR dos sinais simulados com ruído obtida sucessivamente com a opção de recursividade da análise 4. A primeira estimativa e o seu intervalo de confiança (obtido pela multiplicação do desvio padrão pelo escore 2,0) foram obtidos a partir de um segmento de dados de 12 minutos, repartido em 6 blocos de 120 segundos, a partir de onde se obtiveram 50 reamostras. Sucessivamente outras inferências foram realizadas para segmentos de 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, e 120 minutos. De forma análoga à Figura VI.18, as Figuras VI.19 a VI.22 apresentam respectivamente as estimativas *bootstrap* obtidas sequencialmente pelas técnicas RD-CWT, FDD, SSM e SSI.

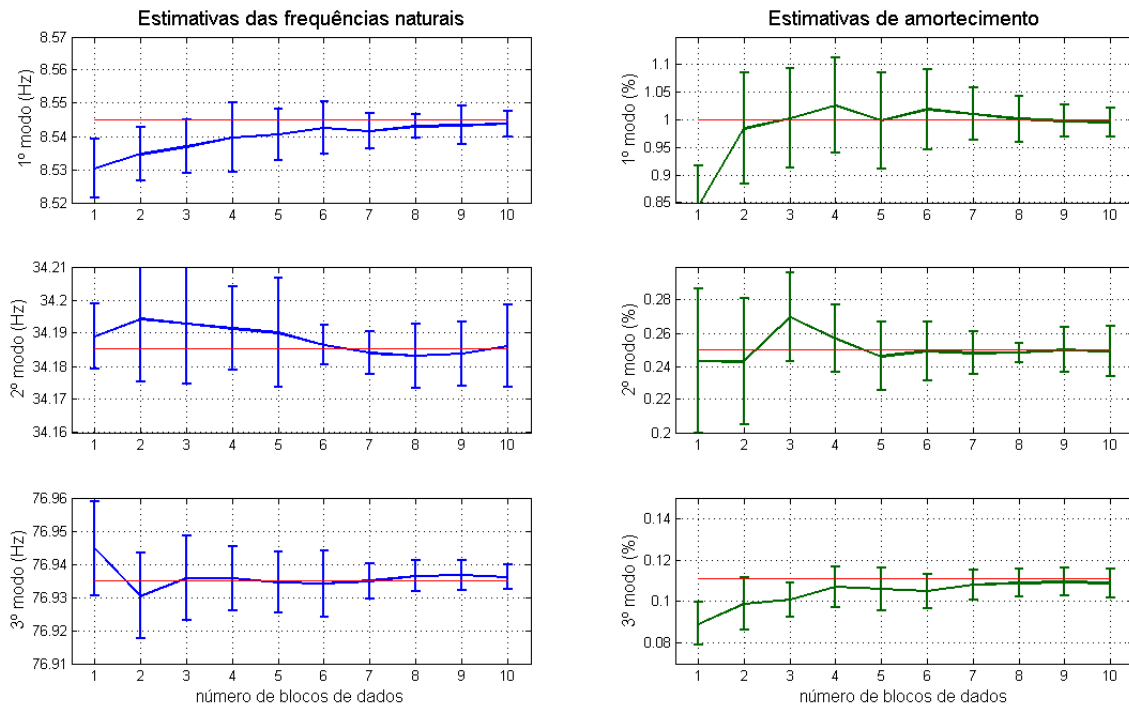


Figura VI.18 – Inferência bootstrap na análise 4 obtida pela técnica RD-AR.

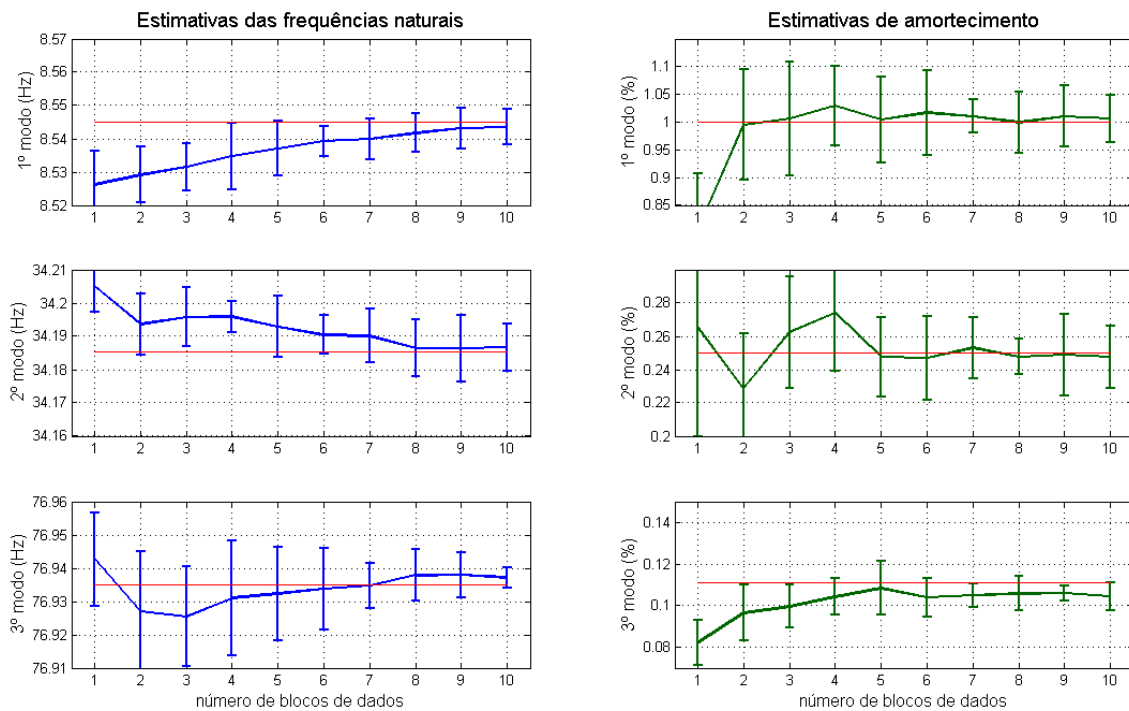


Figura VI.19 – Inferência bootstrap na Análise 4 obtida pela técnica RD-CWT.

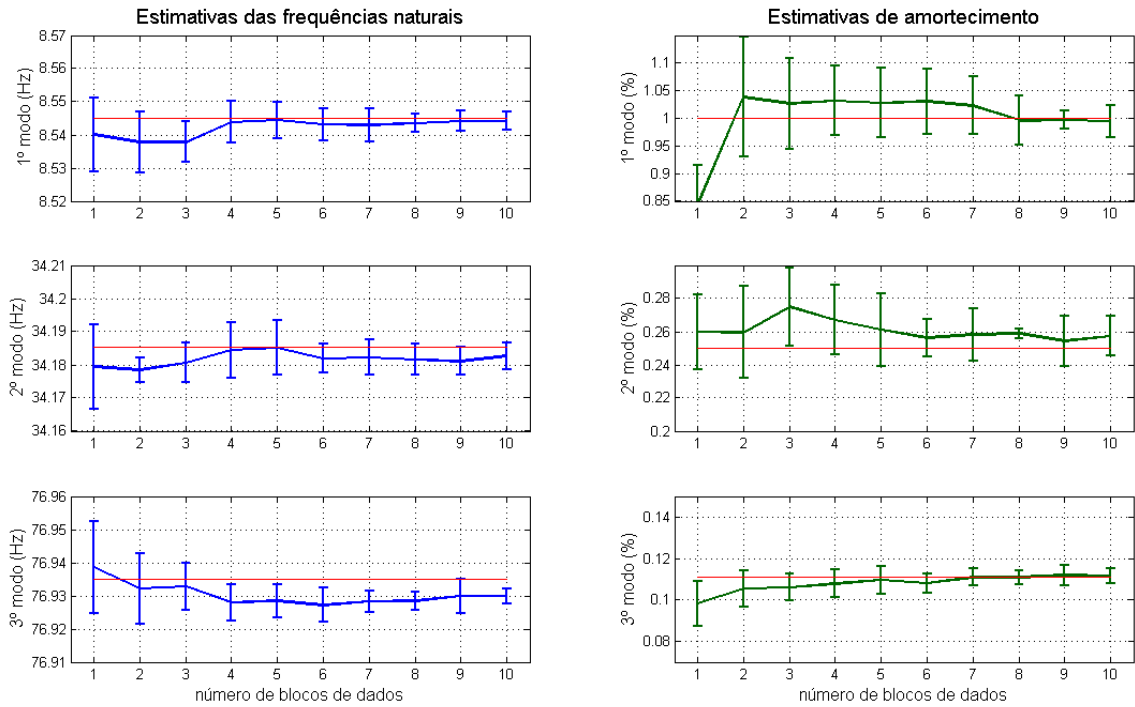


Figura VI.20 – Inferência bootstrap na Análise 4 obtida pela técnica FDD.

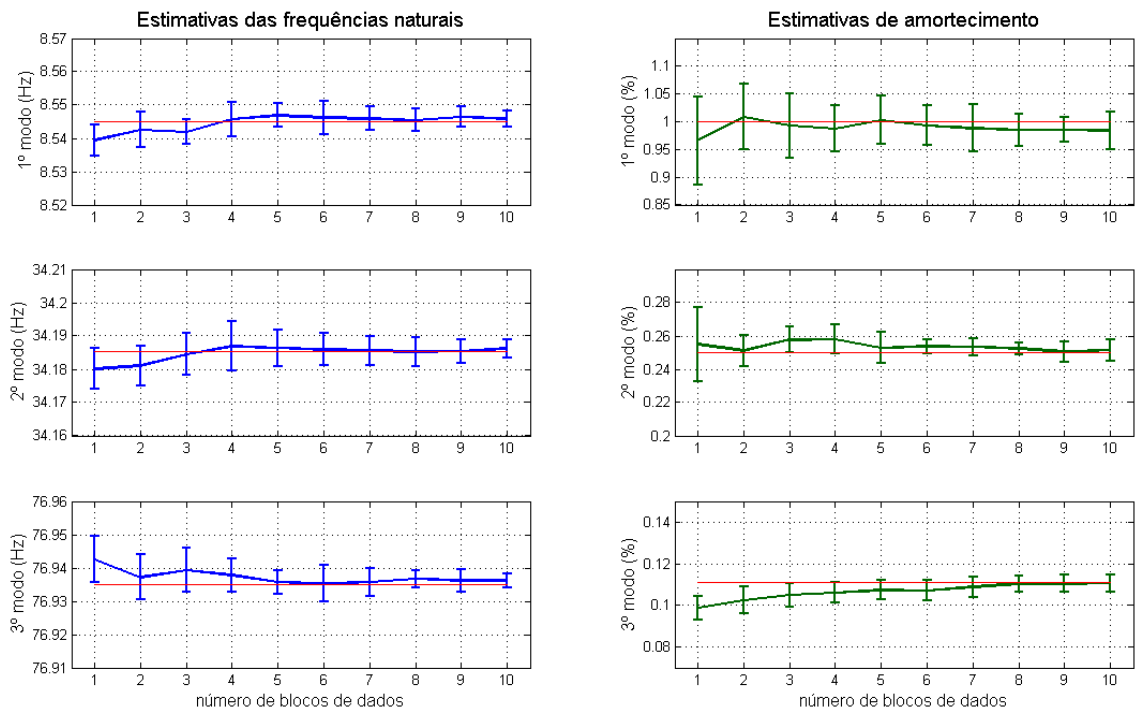


Figura VI.21 – Inferência bootstrap na Análise 4 obtida pela técnica SSM.

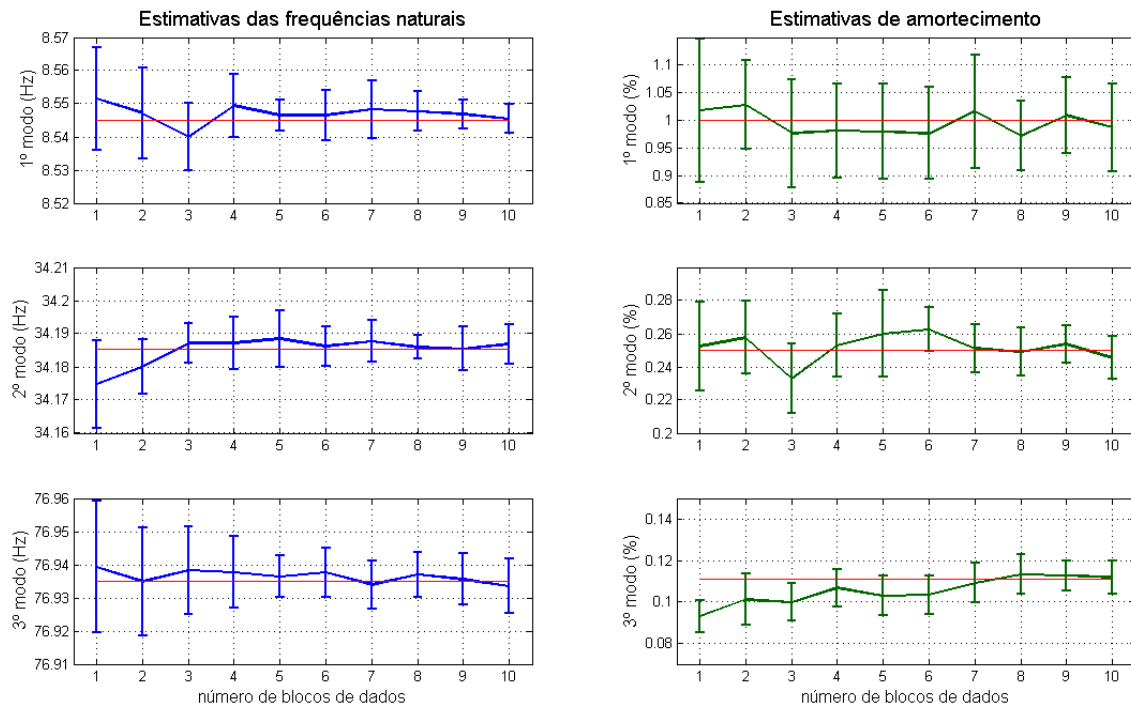


Figura VI.22 – Inferência bootstrap na Análise 4 obtida pela técnica SSI.

Uma vez que todas as estimativas foram realizadas com aproximadamente 50 reamostras (retirando-se apenas as espúrias, conforme mencionado anteriormente), a redução da variância conforme se aumenta o tamanho das seqüências de dados analisados se deve exclusivamente à melhoria progressiva na qualidade das estimações.

O método de fusão das estimativas que foi aplicado nessa análise consiste simplesmente na obtenção do valor médio das estimativas através do cálculo da média ponderada pelo inverso da variância (LUO e KAY, 1990), sendo efetuada para cada bloco de tempo acumulado. As estimativas $\hat{\mathbf{x}}_k$ e as covariâncias \mathbf{P}_k podem desta forma ser obtidas a partir da aplicação das equações a seguir:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{P}_k \left(\sum_{i=1}^M \left({}_i\mathbf{P}_k^{-1} \cdot {}_i\hat{\mathbf{x}}_k \right) \right) \quad (\text{VI.1})$$

$$\mathbf{P}_k^{-1} = \sum_{i=1}^M \left({}_i\mathbf{P}_k^{-1} \right) \quad (\text{VI.2})$$

$$P_k = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_N}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3})$$

onde \hat{x}_k é a estimativa (média) obtida pela aplicação da técnica “i” no tempo t_k ;
 P_k é a matriz covariância (diagonal) obtida a partir da reamostragem *bootstrap*;
 M é o número de técnicas de análise modal empregadas.

A Figura VI.23 apresenta as estimativas obtidas pela fusão dos resultados a partir inicialmente do segmento de dados de 12 minutos e depois para os segmentos acumulados de 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, e 120 minutos. Comparando-se o gráfico da Figura VI.23 com os gráficos obtidos pelas técnicas de estimação aplicadas separadamente (ilustrados nas Fig. VI.18 a V.22) verifica-se que o algoritmo implementado nesta análise tornou a estimação dos parâmetros mais consistente, percebendo-se objetivamente:

- menores erros das estimativas em relação aos valores exatos;
- menor variabilidade dos intervalos de confiança;
- estabilização da estimação, permitindo a interrupção da análise antecipadamente com segurança.

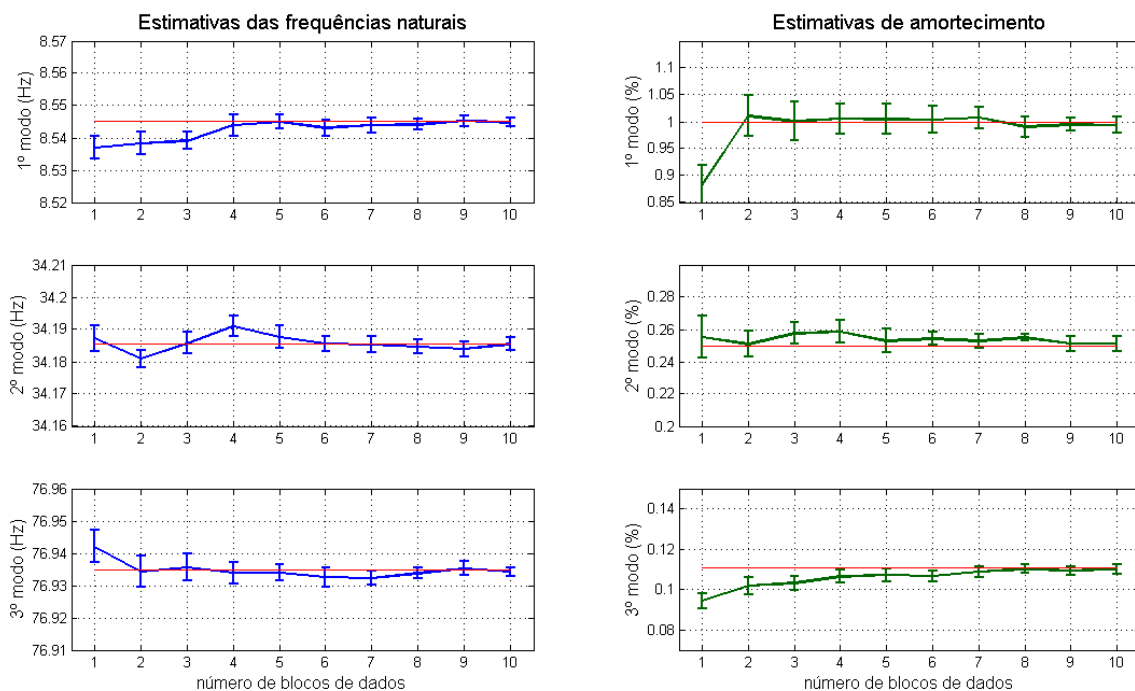


Figura VI.23 - Estimação híbrida-recursiva proposta na Análise 4.

VI.3.2 – Análise 5

Nesta análise se propõe a aplicação da fusão das estimativas na forma apresentada no capítulo V. Nela as estimativas obtidas pelas diferentes técnicas para cada bloco de tempo são processadas localmente por filtros de Kalman e então “fundidas” pelo Filtro de Kalman descentralizado. A Figura VI.24 ilustra esquematicamente a fusão proposta para esta análise.

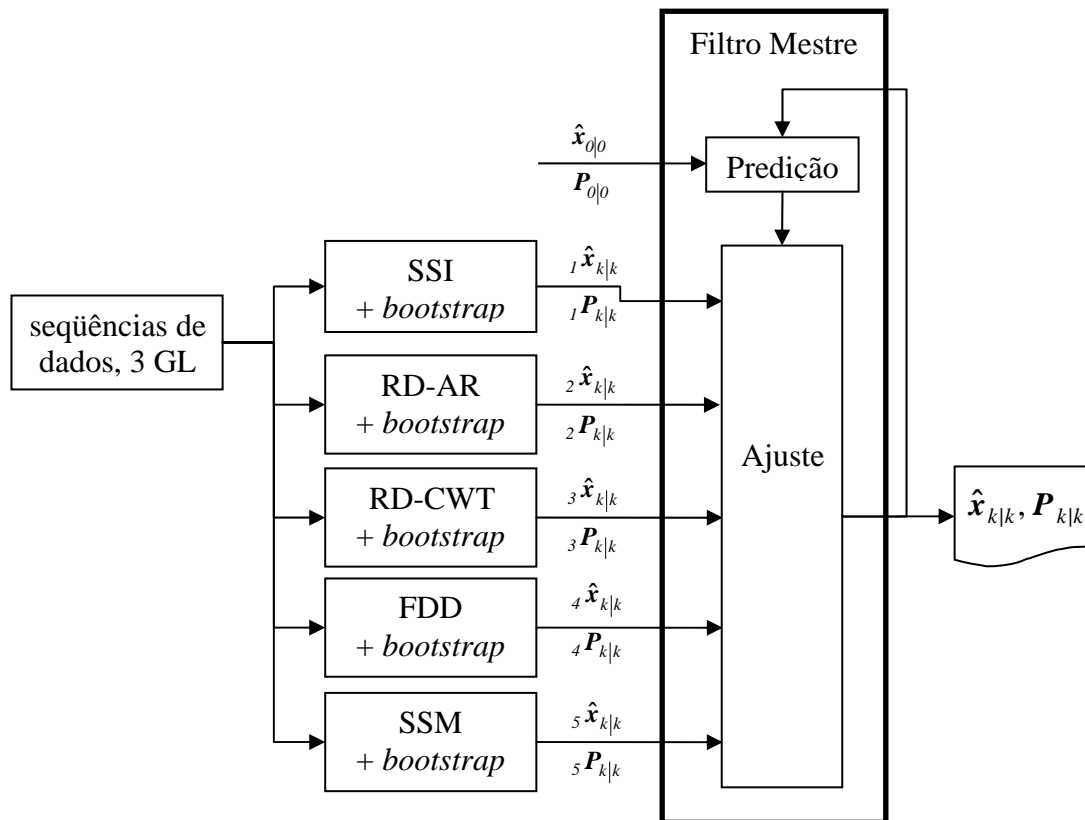


Figura VI.24 – Representação esquemática da fusão das estimativas aplicada na análise 5.

Localmente, a aplicação de cada técnica de análise modal implica no emprego de um Filtro de Kalman, onde as estimativas obtidas para cada passo de tempo são tratadas como “medições” contaminadas por ruído, e o estado coincide com os parâmetros modais “exatos” a estimar.

Desta forma, o estado pode ser representado por uma “medição” z_k mais um ruído multivariado não correlacionado v_k com variâncias compondo a matriz R_k . Substituindo-se essa relação na Eq. V.34, verifica-se que a matriz das medições H_k se torna unitária:

$$z_k = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (\text{VI. 4})$$

A partir das hipóteses admitidas acima, pode-se verificar ainda que a equação de propagação temporal da matriz \mathbf{P} (de covariância do erro no estado) se torna:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (\text{VI.5})$$

onde \mathbf{Q} é a matriz covariância do ruído do processo.

A equação de correção da matriz \mathbf{P} , por sua vez, fica igual a:

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{P}_{k|k-1} + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (\text{VI.6})$$

onde \mathbf{R}_k é a matriz covariância do ruído das “medições” a cada instante discreto k .

Para a implementação dos filtros de cada uma das técnicas de análise modal, podem-se obter para diferentes momentos o valor da matriz \mathbf{R}_k , montando-a a partir dos valores das variâncias *bootstraps* calculadas para cada novo grupo de dados incorporados.

Conforme mencionado no capítulo V, a matriz \mathbf{Q} conferirá variabilidade ao processo, permitindo ainda uma maior independência das novas estimativas em relação às passadas. Nesta simulação optou-se por matrizes \mathbf{Q}_k igual a $0,1 \mathbf{R}_{k-1}$ (nas técnicas no domínio do tempo com seqüências de dados maiores que 30 minutos) ou igual a $1,0 \mathbf{R}_{k-1}$ (demais casos).

Já na implementação do filtro correspondente à técnica SSI, uma vez que neste trabalho não foi explorada a estimação da sua variância, é recomendável manter-se o valor da matriz \mathbf{R}_k constante, tomando-se seus valores arbitrariamente. Uma medida simples seria adotá-la igual à média das variâncias das demais técnicas para o primeiro bloco de dados, sugestivamente também igual à matriz inicial $\mathbf{P}_{0|0}$ do filtro descentralizado:

$${}_{SSI} \mathbf{R} = \mathbf{P}_{0|0} = \left[\sum_{i=1}^M ({}_i \mathbf{P}_0^{-1}) \right]^{-1} \quad (\text{VI.7})$$

Estimativas híbridas e recursivas dos parâmetros modais e os respectivos intervalos de confiança podem então ser extraídos a partir das Equações VI.5 à VI.7 em adição às equações do capítulo V e à mecanização apresentada na Fig. VI.24.

As Fig. VI.25 à VI.27 apresentam respectivamente as estimativas obtidas recursivamente pela aplicação de Filtros de Kalman locais para os resultados das técnicas SSI, RDT-AR e SSM, para dados em segmentos de 12, 06 e 03 minutos, respectivamente.

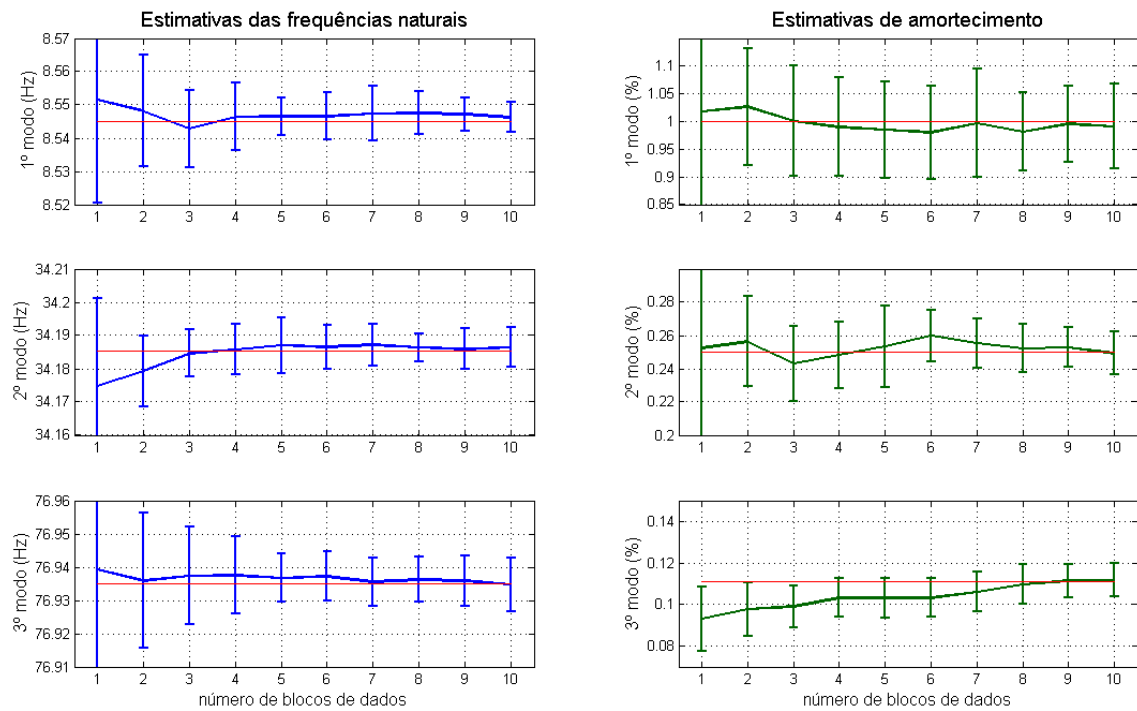


Figura VI.25 – Inferência recursiva da técnica SSI obtida a partir da aplicação de um Filtro de Kalman local nas estimativas provenientes de seqüências de dados múltiplas de 12 minutos.

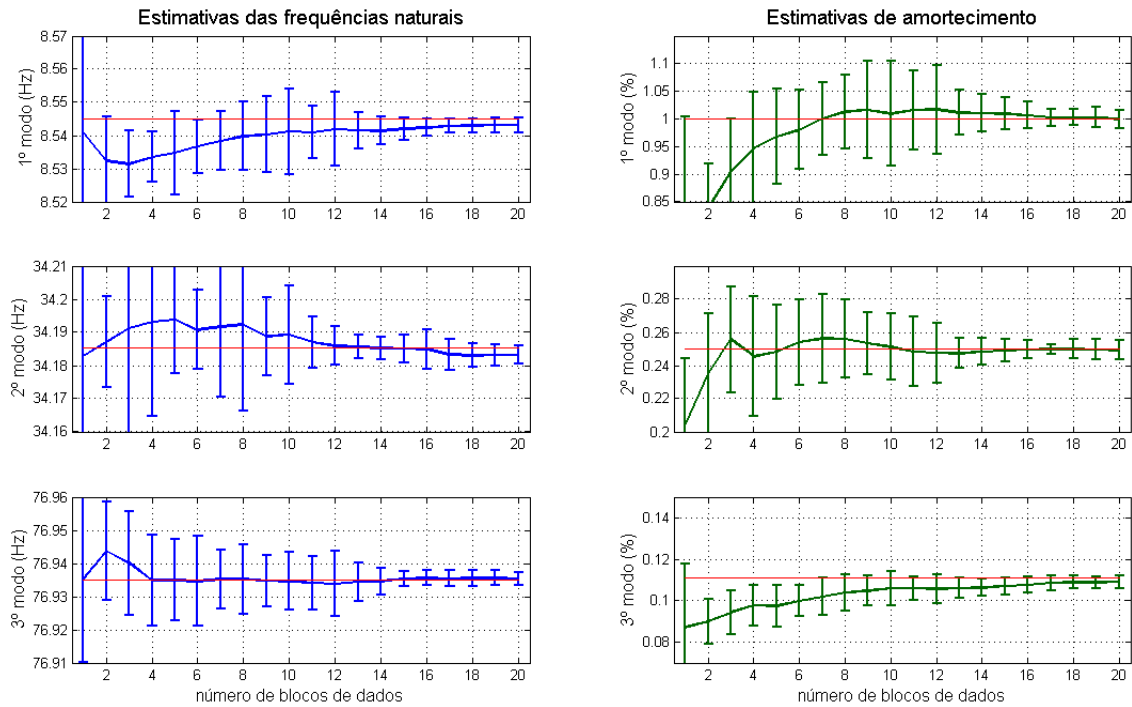


Figura VI.26 – Inferência recursiva da técnica RDT-AR obtida a partir da aplicação de um Filtro de Kalman local nas estimativas provenientes de seqüências de dados múltiplas de 6 minutos.

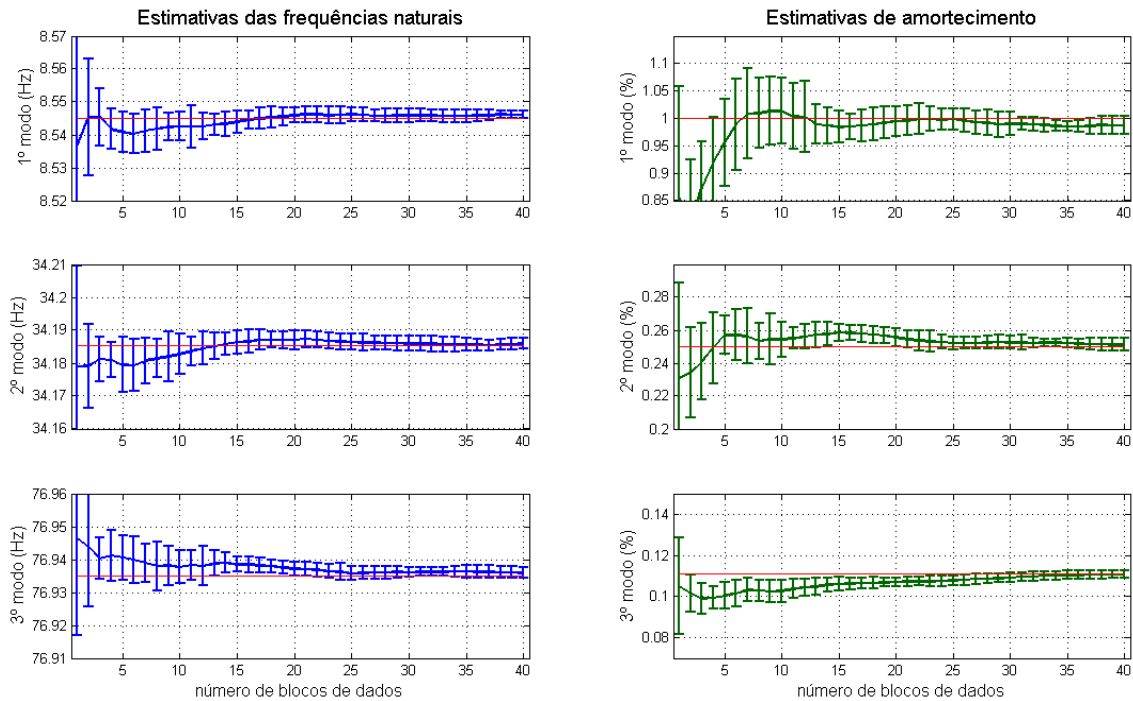


Figura VI.27 – Inferência recursiva da técnica SSM obtida a partir da aplicação de um Filtro de Kalman local nas estimativas provenientes de seqüências de dados múltiplas de 3 minutos.

As Figuras VI.28 à VI.30 apresentam as estimativas obtidas pela fusão dos resultados obtidos a partir dos segmentos de dados múltiplos respectivamente de 12, 06 e 03 minutos.

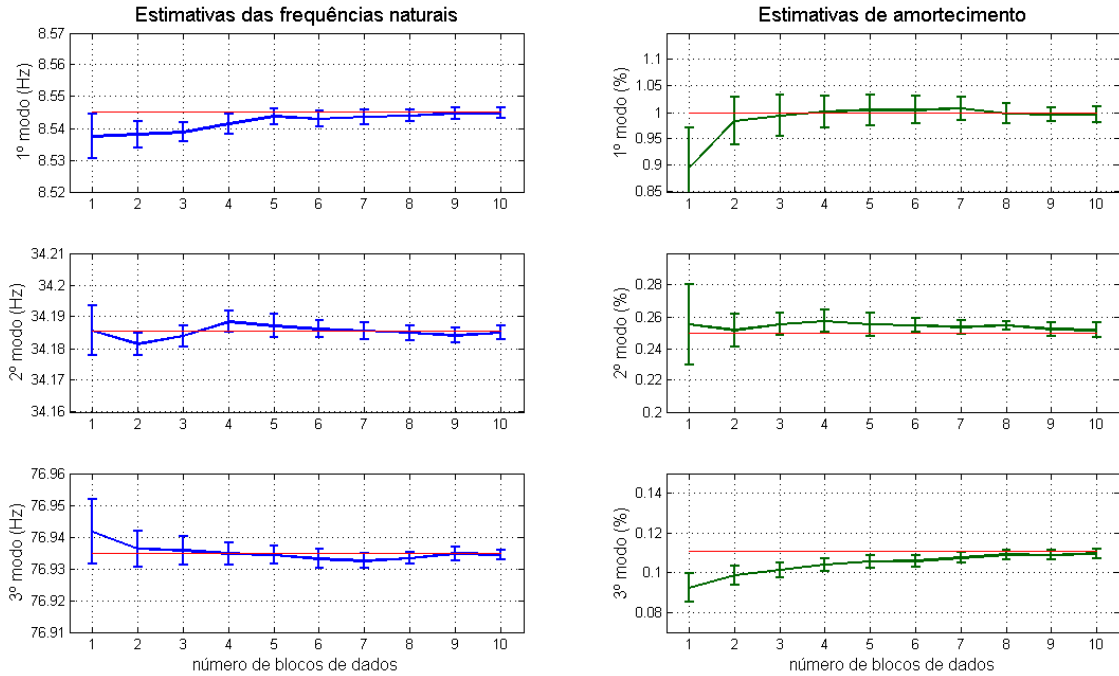


Figura VI.28 - Estimação híbrida-recursiva proposta na Análise 5 realizada para as seqüências de dados múltiplas de 12 minutos.

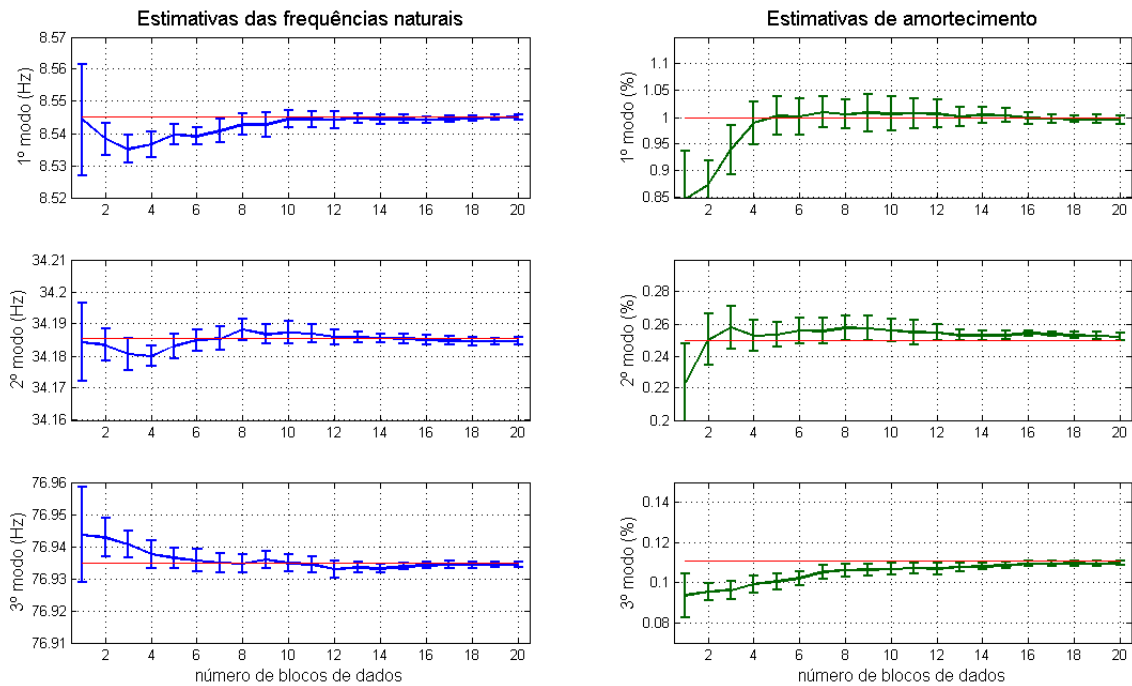


Figura VI.29 - Estimação híbrida-recursiva proposta na Análise 5 realizada para as seqüências de dados múltiplas de 06 minutos.

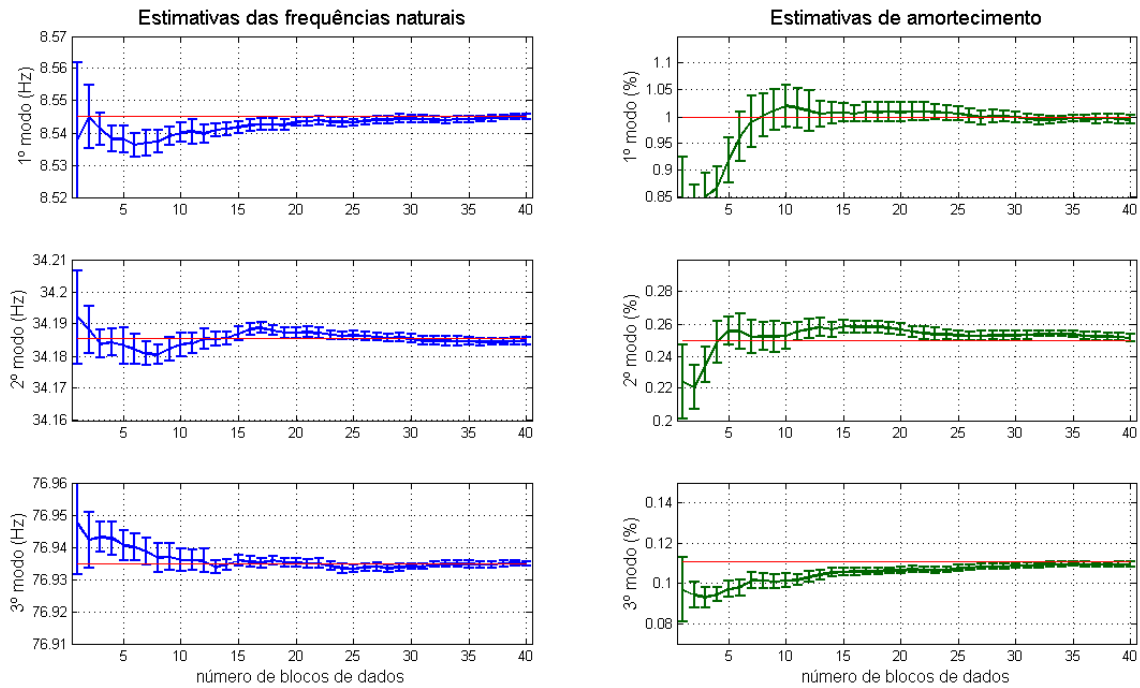


Figura VI.30 - Estimação híbrida-recursiva proposta na Análise 5 realizada para as seqüências de dados múltiplas de 03 minutos.

Comparando-se os gráficos das Fig. VI.28 à VI.30 com os da Fig. VI.23, verifica-se que o algoritmo implementado nesta análise apresenta objetivamente:

- menores dispersões das estimativas em relação às estimativas médias;
- menor variabilidade no tempo dos intervalos de confiança;
- estabilização da estimação;
- independência em relação ao tamanho das seqüências utilizadas.

A partir dos resultados encontrados nas simulações numéricas apresentadas e das conclusões parciais formadas ao longo deste capítulo, enumeram-se a seguir os elementos reunidos à metodologia proposta:

- Escolha dos parâmetros de automatização das técnicas de análise modal de forma análoga ao estabelecido na Tab. VI.5;
- Segmentação dos dados e reamostragem dentro de cada segmento para a inferência de intervalos de confiança. Os segmentos de dados devem apresentar tamanhos tão curtos quanto a técnica *bootstrap* permita, obtendo-se um número mínimo satisfatório de reamostras com boa qualidade (que não conduzam a estimativas “espúrias” em relação aos valores médios);

- Utilização dos segmentos de dados de forma cumulativa, na forma da Fig. VI.17;
- Aplicação de Filtros de Kalman locais para condensar recursivamente as estimativas de cada técnica;
- Aplicação do Filtro de Kalman descentralizado para a fusão das estimativas ao longo do tempo.

O algoritmo assim definido se mostrou bastante satisfatório e será aferido no próximo capítulo com a utilização de resultados experimentais.

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES

VII.1 – Introdução

Este capítulo tem por objetivo verificar a aplicabilidade em ensaios experimentais da metodologia proposta no capítulo anterior. Para tal, uma passarela em estrutura mista composta de vigas de aço e tabuleiro em concreto, biapoiada, com 12 metros de comprimento foi utilizada.

Inicialmente foi realizada sua identificação estrutural determinística a partir de excitações impulsivas impostas em seu primeiro quarto de vão. Em seguida, dispondose apenas dos sinais de resposta da estrutura, a metodologia foi aplicada na tentativa de identificá-la sem o conhecimento da excitação imposta para diferentes carregamentos.

As respostas utilizadas nessas aplicações foram todas obtidas através de ensaios experimentais conduzidos no Laboratório de Estruturas do Programa de Engenharia Civil da COPPE, especificamente para este trabalho.

VII.2 – Descrição da estrutura e do sistema de aquisição de sinais

A estrutura utilizada foi projetada e construída inicialmente para os trabalhos da tese de doutorado de FAÍSCA (2003), intitulada “Caracterização de Cargas Dinâmicas Geradas por Atividades Humanas”. Constitui uma estrutura mista, com vigas metálicas em perfil I para as longarinas e transversinas e um tabuleiro em concreto armado com dimensões 12.20 m x 2.20 m x 0.10 m. A estrutura foi projetada para suportar uma carga de 7,4 kN/m², o que equivale aproximadamente ao seu peso próprio somado a carga acidental de 4,9 kN/m². Os apoios são móveis e podem ser considerados como sendo essencialmente do 1º gênero. Detalhes do dimensionamento e fabricação da estrutura podem ser obtidos na referência supracitada.

Sobre o pavimento de concreto, foram fixados 26 módulos de células de carga fabricadas a partir de placas de MDF de 90x90cm interpostas por nove anéis de aço instrumentados com extensômetros elétricos de resistência interligados em série, e

finalmente ligados em $\frac{1}{2}$ ponte de Wheatstone, medindo-se desta forma apenas as ações transversais impostas à placa. Maiores detalhes da fabricação dessas células podem ser vistos em FAÍSCA (2003).

As Figuras VII.1 e VII.2 apresentam uma vista geral e um detalhe da passarela e do tablado composto de 26 módulos de células de cargas independentes. Os anéis foram dimensionados considerando-se duas situações extremas: ter sensibilidade para permitir a medição das cargas geradas por um único indivíduo, e ter capacidade de resistir a uma carga dinâmica gerada por um grupo até três pessoas sobre cada conjunto (FAÍSCA, 2003).



Figura VII.1 – Vista geral da passarela, podendo-se observar as vigas, o tabuleiro, os apoios e as células de carga (FAÍSCA, 2003).

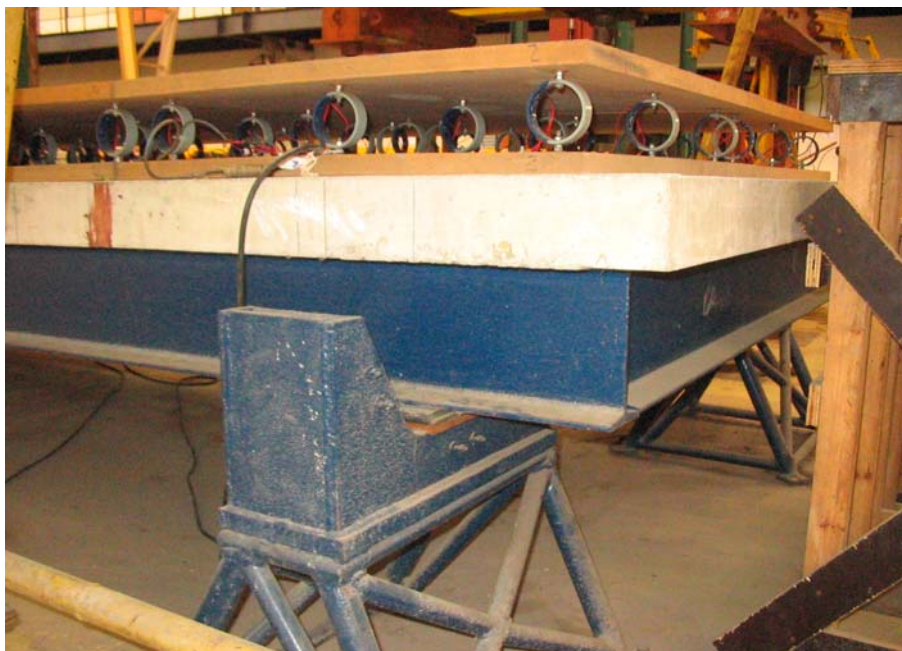


Figura VII.2 – Extremidade da passarela, podendo-se observar em detalhe o apoio e as células de carga.

Para os ensaios conduzidos neste trabalho, os apoios da estrutura foram dispostos de forma a estabelecerem um vão teórico de 11,50 metros. Para a monitoração das respostas da passarela, foram instalados três acelerômetros resistivos de 1g e dois de 2g, posicionados segundo os pontos representados nas Figuras VII.3 e VII.4, buscando-se assim obter boa sensibilidade aos cinco primeiros modos de vibração, cujas formas modais prováveis encontram-se ilustradas na Figura VII.5.

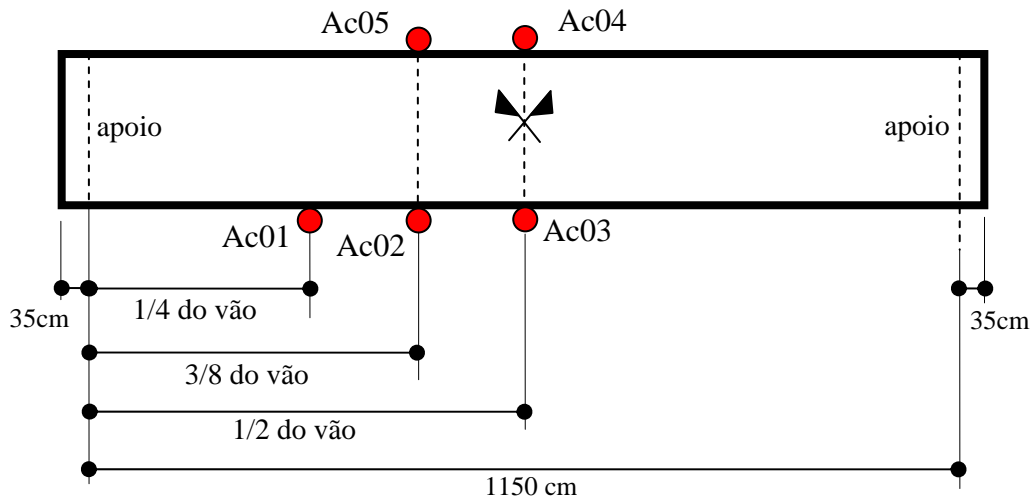


Figura VII.3 –Disposição em planta dos acelerômetros na passarela.

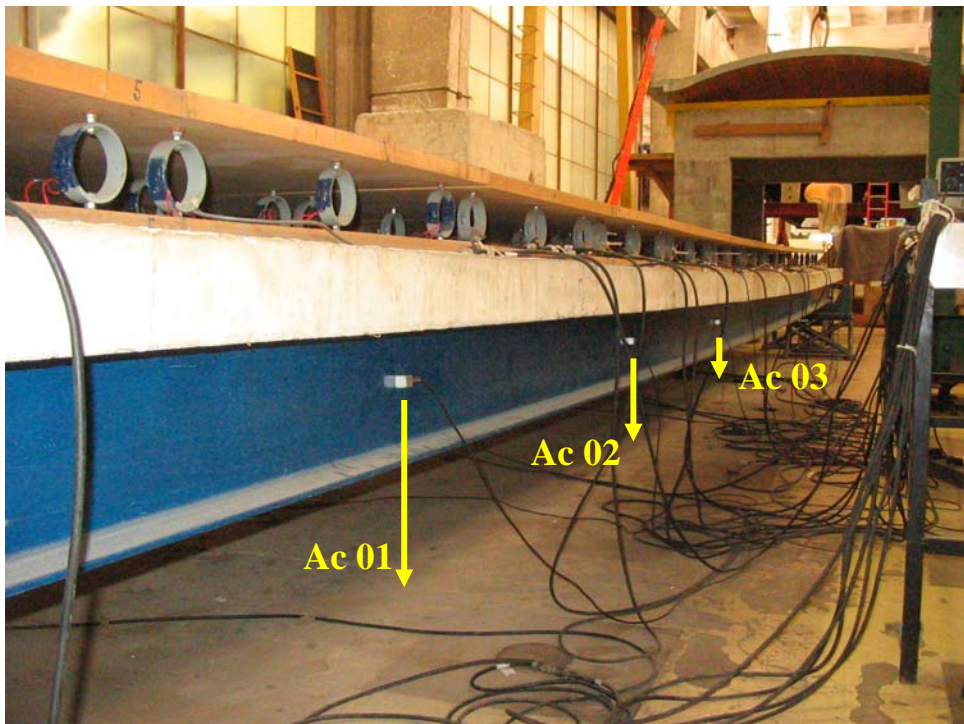


Figura VII.4 – Disposição dos acelerômetros Ac01, Ac02 e Ac03, aproximadamente no primeiro quarto, a 3/8, e na metade do vão, respectivamente.

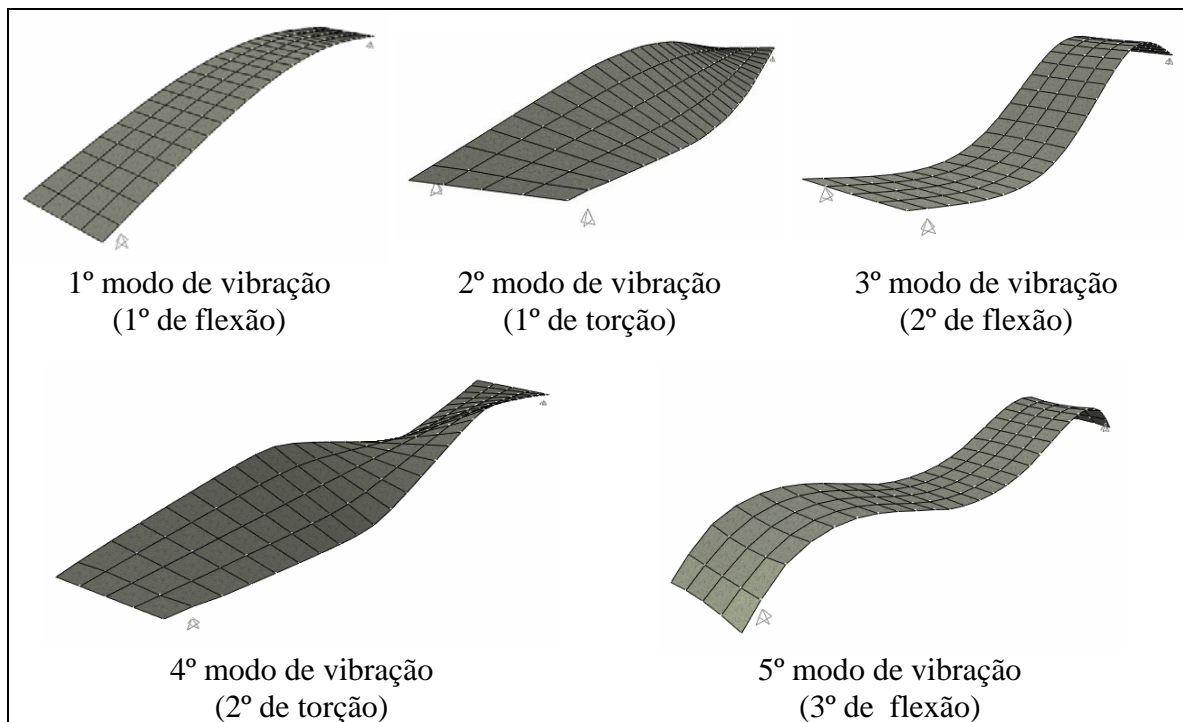


Figura VII.5 – Formas modais dos cinco primeiros modos de vibração, obtidas a partir do sistema SAP 2000 (CSI, 2008).

O conjunto de 26 células de cargas e 5 acelerômetros foram então conectados ao sistema de aquisição de dados ADS2000 e o software AqDados, ambos de fabricação da Lynx Tecnologia Eletrônica Ltda. O sistema calibra, condiciona, filtra e digitaliza os sinais resistivos. A Figura VII.6 apresenta uma imagem do dispositivo instalado.

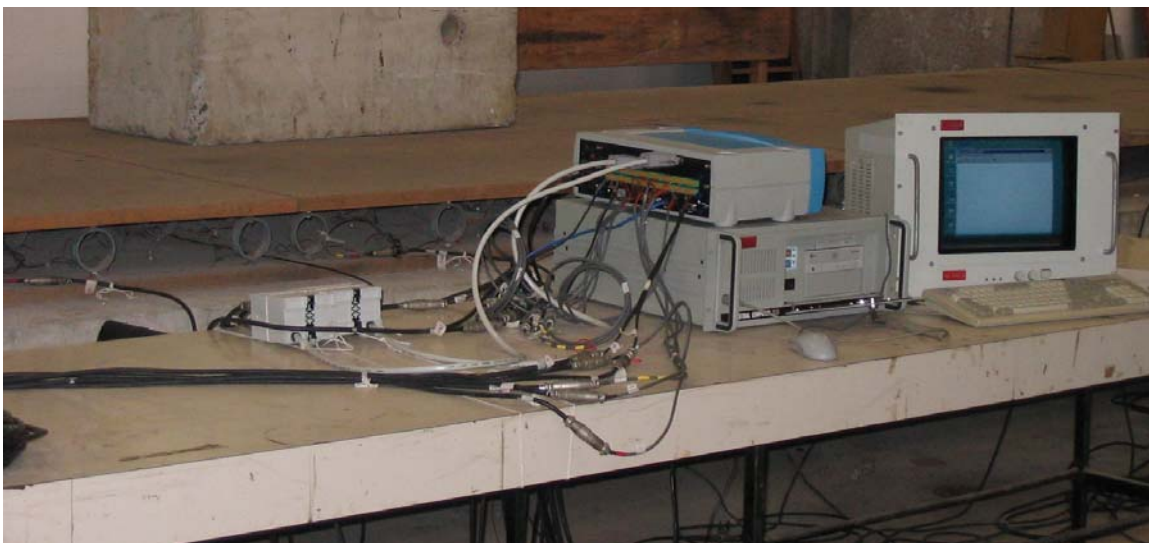


Figura VII.6 – Dispositivo de aquisição de dados.

VII.3 – Ensaio controlado

Inicialmente buscou-se a aplicação da análise modal clássica, com excitação controlada e monitorizada, para a estimativa dos parâmetros modais da estrutura. Desta forma foram executados impulsos simples pelos calcanhares de um único indivíduo (“*heel drop*”), aplicados aproximadamente no primeiro quarto e no meio do vão e monitorados a partir de células de carga (P07 e P13, respectivamente).

No total foram executados doze ensaios, com seis diferentes indivíduos exercendo os *heel drops*. A Figura VII.7 apresenta imagem de um ensaio de *heel drop* a $\frac{1}{4}$ do vão, e a Figura VII.8 ilustra os respectivos gráficos da célula de carga P07 e do acelerômetro Ac01 nos primeiros segundos aquisitados. As características dos ensaios encontram-se descritas na Tabela VII.1.



Figura VII.7 – Ensaio de heeldrop a $\frac{1}{4}$ de vão.

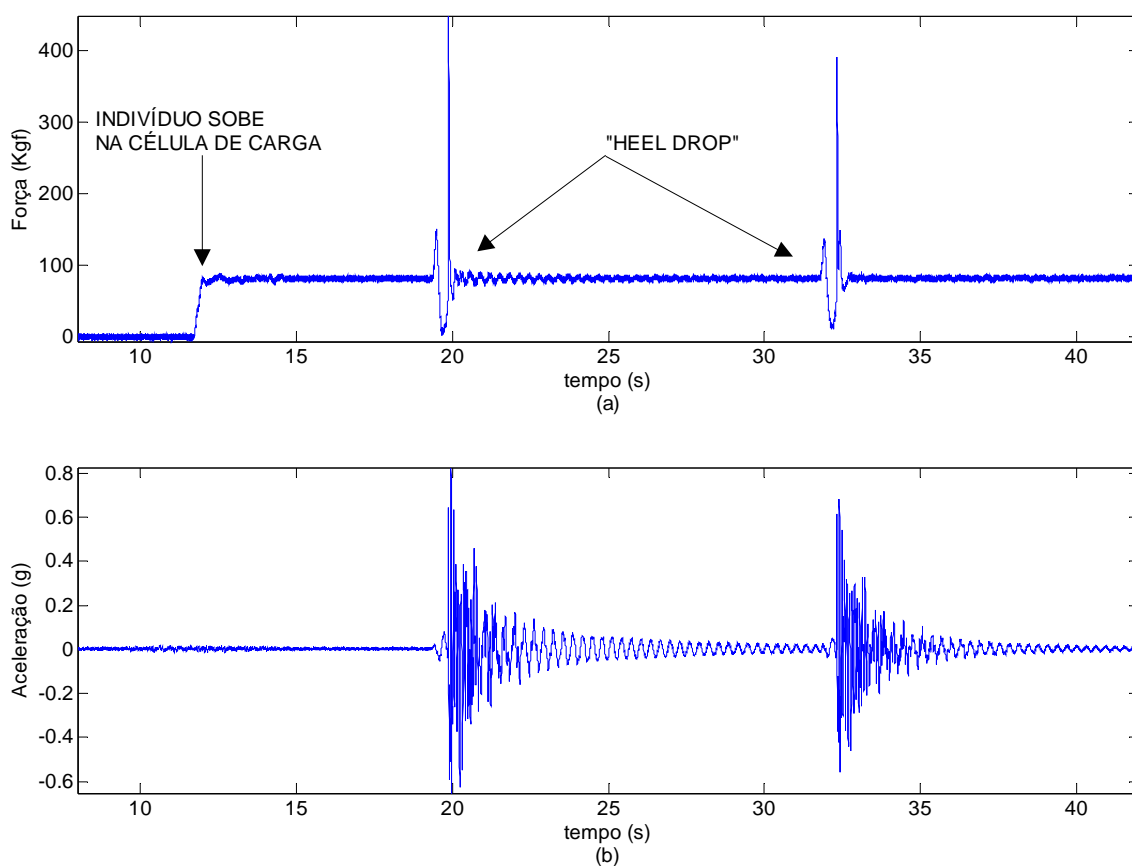


Figura VII.8 – Sinais da célula de carga P07 (a) e do acelerômetro Ac01 (b) do ensaio #1.1 de *heeldrop* a $\frac{1}{4}$ de vão.

Tabela VII.1 – Características dos ensaios de *heel drop*.

Ensaio	Indivíduos		Posição do indivíduo	Frequência de aquisição	Tempo total aquisitado	Filtro <i>anti-alias</i>
	peso (kg)	calçado				
#1.1	87	sapato	$\frac{1}{4}$ do vão	500 Hz	300 s	30Hz
#1.2	88	sapato		500 Hz	300 s	
#1.3	88	sapato		200 Hz	300 s	
#1.4	70	tênis		200 Hz	180 s	
#1.5	60	sapato		200 Hz	180 s	
#1.6	82	sapato		200 Hz	300 s	
#1.7	87	sapato	$\frac{1}{2}$ do vão	500 Hz	300 s	
#1.8	88	sapato		500 Hz	300 s	
#1.9	88	sapato		200 Hz	300 s	
#1.10	70	tênis		200 Hz	180 s	
#1.11	60	sapato		200 Hz	180 s	
#1.12	82	sapato		200 Hz	300 s	

Nos testes de *heel drop* estabelece-se um sistema SIMO, podendo-se obter as respectivas estimativas das Funções Resposta em Frequência (FRF) referentes aos GL monitorados pelos acelerômetros. As FRF foram calculadas pela razão entre o espectro cruzado da resposta com o sinal da força excitadora e o autoespectro da força excitadora (estimador H_I), ambos computados a partir do periodograma de Welch. Para cada teste, foram estimadas cinco FRF, uma para cada sensor de resposta. A Figura VII.9 apresenta as FRF obtidas a partir dos sinais dos acelerômetros Ac01, Ac02 e Ac03 do teste #1.2.

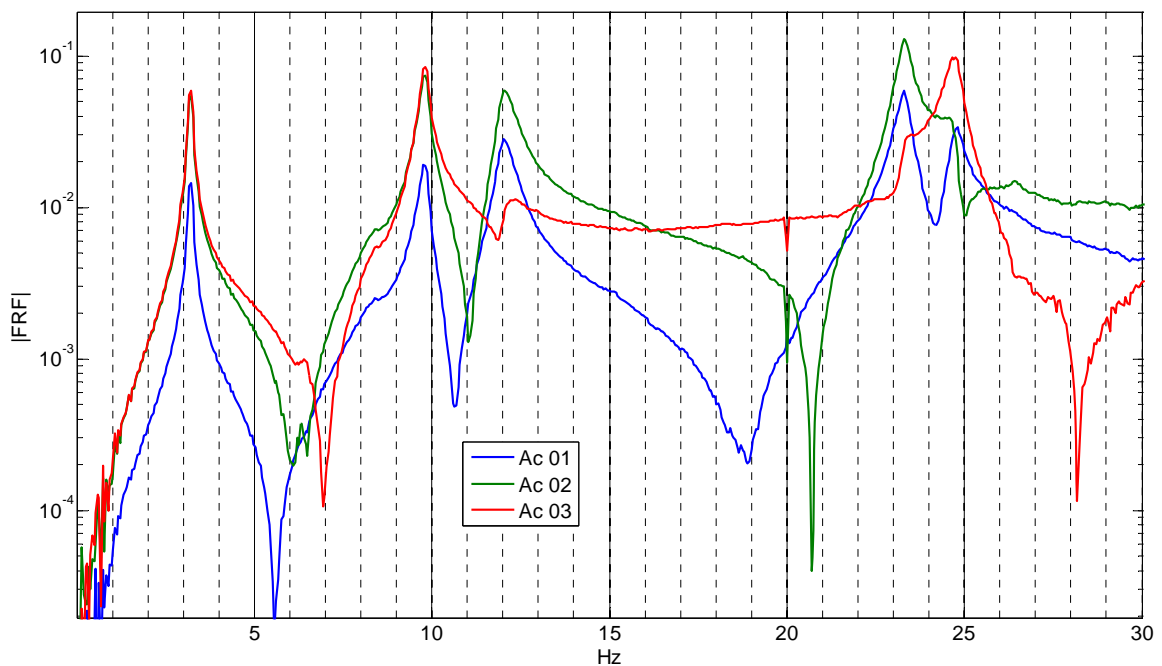


Figura VII.9 – Estimativas das FRF de aceleração (acelerância) do teste #1.2, excitação tipo “*heel drop*” (1 pessoa) em célula de carga localizada aproximadamente no primeiro quarto do vão, 5 minutos aquisitados, frequência de amostragem decimada para 100Hz, janelas com 2048 pontos, 66% de sobreposição, resolução final em frequência de 0,0488 Hz.

Observando-se a magnitude dos picos das FRF apresentadas na Figura VII.9 e a posição dos acelerômetros à que elas se referem, percebe-se que o Ac03 (meio do vão) é pouco sensível ao 3º e 4º modos, e o Ac02 é pouco sensível ao 5º modo de vibração, ou seja, as formas modais (globais) de vibração de fato seguem a ordem numericamente obtida e apresentada na Figura VII.5.

Dispondo-se dos sinais de entrada e saída do sistema, foram utilizadas duas técnicas clássicas e determinísticas de análise modal, o LSCE (*Least Squares Complex*

Exponential) e o ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*). Para tal, funções de resposta a impulso (IRF) de cada grau de liberdade (GL) de resposta monitorado foram estimadas a partir das transformadas inversas de Fourier das respectivas FRF.

Neste trabalho, as técnicas LSCE e ERA foram implementadas diretamente a partir das técnicas RD-AR e SSM dos casos estocásticos, substituindo-se respectivamente as funções RD e a matriz de autocorrelação pelas seqüências das IRF (parâmetros de Markov) previamente estimadas.

A Tabela VII.2 dispõe as estimativas determinísticas encontradas para as frequências naturais e taxas de amortecimento por ambas as técnicas para cada um dos testes realizados. Como o meio do vão constitui nó dos 2º modo de flexão e 2º modo de torção, os respectivos parâmetros não foram estimados a partir dos sinais dos ensaios #7 à #12.

A partir dos valores dispostos na Tabela VII.2, podem-se obter os valores médios e os limites do intervalo de ocorrência dos valores de cada parâmetro, consolidados na Tabela VII.3.

Tabela VII.2 – Frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento estimadas a partir da técnica LSCE e ERA para cada ensaio *heel drop*.

Excitação	Modo de vibração	Ensaio	Intervalos das estimativas			
			Frequência natural (Hz)		Amortecimento (%)	
			LSCE	ERA	LSCE	ERA
¼ do vão	1º de flexão	#1	3,23	3,23	0,95	0,93
		#2	3,21	3,21	0,91	0,89
		#3	3,20	3,20	1,19	1,15
		#4	3,21	3,21	1,16	1,03
		#5	3,20	3,20	1,15	1,02
		#6	3,23	3,23	1,11	1,07
	1º de torção	#1	9,82	9,86	1,56	1,24
		#2	9,80	9,80	1,25	0,93
		#3	9,78	9,78	1,22	1,00
		#4	9,84	9,82	1,40	1,27
		#5	9,79	9,77	1,44	1,15
		#6	9,88	9,92	1,16	1,12
	2º de flexão	#1	12,11	12,12	1,54	1,50
		#2	12,07	12,07	1,62	1,53
		#3	12,06	12,05	1,69	1,57
		#4	12,09	12,10	1,79	1,77
		#5	12,09	12,09	1,79	1,70
		#6	12,08	12,10	1,55	1,55
	2º de torção	#1	23,42	23,41	0,68	0,62
		#2	23,31	23,31	0,80	0,72
		#3	23,27	23,27	0,84	0,78
		#4	23,33	23,34	0,73	0,69
		#5	23,27	23,27	0,80	0,76
		#6	23,39	23,38	0,64	0,59
3º de flexão	#1	24,86	24,85	0,67	0,68	
	#2	24,74	24,73	0,80	0,75	
	#3	24,69	24,69	0,83	0,79	
	#4	24,77	24,77	0,68	0,72	
	#5	24,70	24,70	0,73	0,75	
	#6	24,83	24,83	0,67	0,65	
½ do vão	1º de flexão	#7	3,23	3,23	0,94	0,94
		#8	3,21	3,21	0,87	0,89
		#9	3,20	3,20	1,23	1,21
		#10	3,23	3,23	1,13	1,10
		#11	3,21	3,21	1,19	1,18
		#12	3,23	3,23	1,03	1,05
	1º de torção	#7	9,88	9,88	1,09	1,10
		#8	9,80	9,80	1,23	1,23
		#9	9,76	9,76	1,21	1,19
		#10	9,86	9,86	1,41	1,16
		#11	9,79	9,79	1,30	1,24
		#12	9,86	9,85	1,11	1,18
	3º de flexão	#7	24,88	24,88	0,69	0,68
		#8	24,77	24,77	0,80	0,81
		#9	24,67	24,68	0,85	0,85
		#10	24,82	24,82	0,74	0,74
		#11	24,72	24,72	0,81	0,80
		#12	24,82	24,82	0,70	0,68

Tabela VII.3 – Intervalos obtidos para as frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento estimadas a partir das técnicas LSCE e ERA para os ensaios de *heel drop*.

Modo de vibração	Frequência natural (Hz)			Amortecimento (%)		
	mín	média	máx	mín	médio	máx
1º de flexão	3,20	3,22	3,23	0,87	1,06	1,23
1º de torção	9,76	9,82	9,92	0,93	1,22	1,56
2º de flexão	12,05	12,09	12,12	1,50	1,63	1,79
2º de torção	23,27	23,33	23,42	0,59	0,72	0,84
3º de flexão	24,67	24,77	24,88	0,65	0,74	0,85

VII.4 – Avaliação da metodologia desenvolvida

Para a avaliação da eficiência da metodologia desenvolvida frente a sinais experimentais reais, foi realizada a identificação estrutural da passarela. Para este estudo foram utilizados os mesmos 26 minutos de dados, com repetições de *heel drop* a $\frac{1}{4}$ do vão empregados na estimação determinística clássica dos parâmetros modais. Para tal, os sinais de resposta foram divididos em 26 passos contínuos de 60 segundos. Cada passo recebeu ainda uma segmentação apropriada, com sobreposição, para não se impor descontinuidades ao sinal.

A fim de se aumentar o número de blocos disponíveis para a reamostragem *bootstrap*, estabeleceu-se uma sobreposição de 66% entre os segmentos do sinal, permitindo assim um número maior de combinações entre eles. As Figuras VII.10 e VII.11 apresentam a divisão do sinal realizada para as sete primeiras inferências pela metodologia híbrida desenvolvida neste trabalho. Cabe ressaltar que também foi realizada uma série de análises sem a superposição dos segmentos conduzindo a resultados bem semelhantes aos aqui apresentados.

Para cada minuto de dados acrescido, procede-se uma nova divisão do sinal acumulado, reamostragem (com repetição) para obtenção de 50 novas amostras, e estimação dos parâmetros. Este procedimento é compatível para uma aplicação da metodologia em campo, em tempo “quase-real”, onde para cada nova aquisição de dados, seja em tempo contínuo, seja por *triggering*, obtém-se uma nova inferência.

Após definida a segmentação e o número de inferências, cada técnica *output-only* utilizada deve ter seus parâmetros de estimação definidos para permitir a automatização da metodologia. A Tabela VII.4 apresenta os parâmetros determinados para cada técnica.

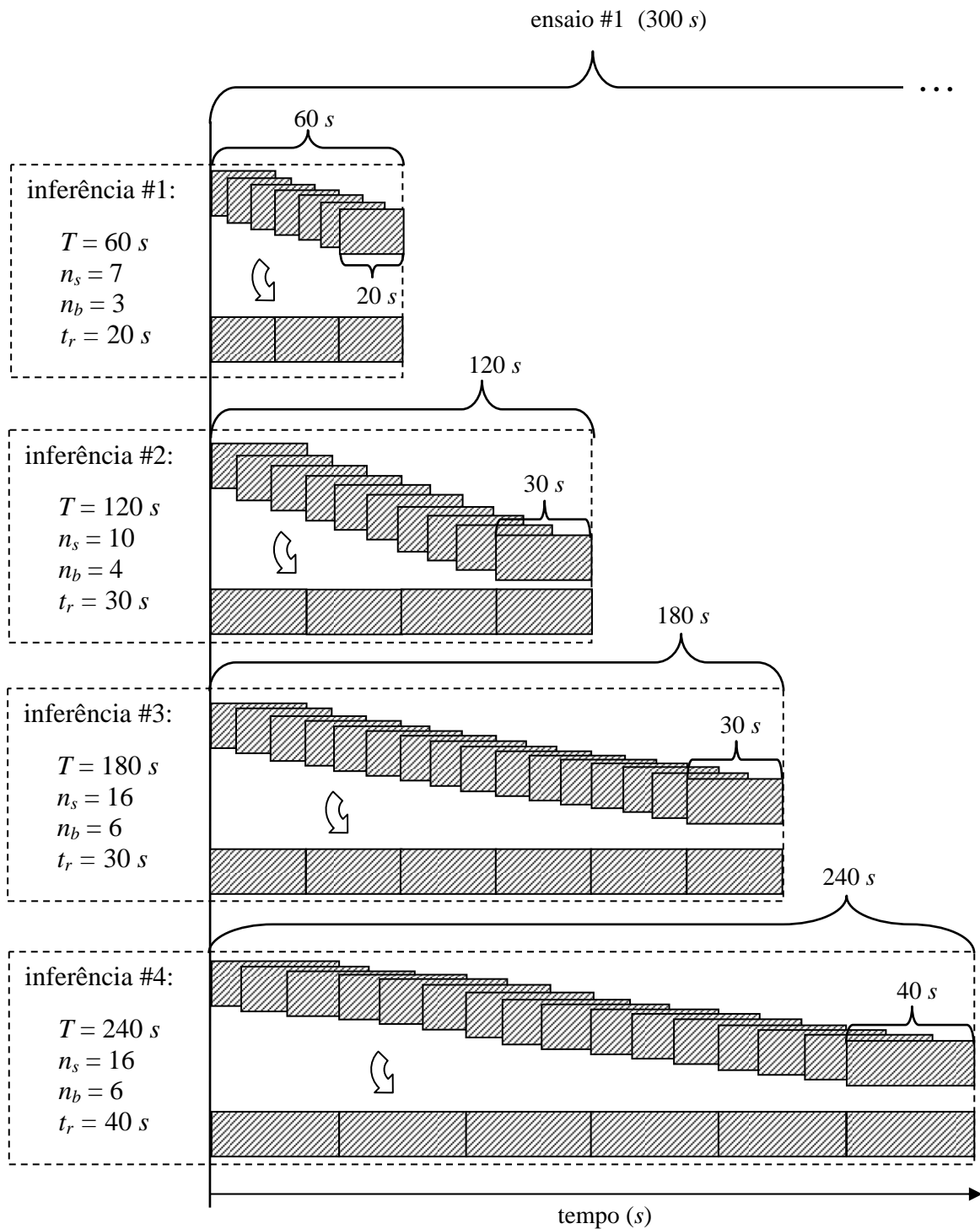


Figura VII.10 – Reamostragens obtidas para as 4 primeiras inferências a partir de sinais acumulados por aquisições sucessivas, com tempo total acumulado T , variando-se o número de segmentações (n_s), o número de blocos por reamostra (n_b), e o tamanho (período) de cada reamostra (t_r).

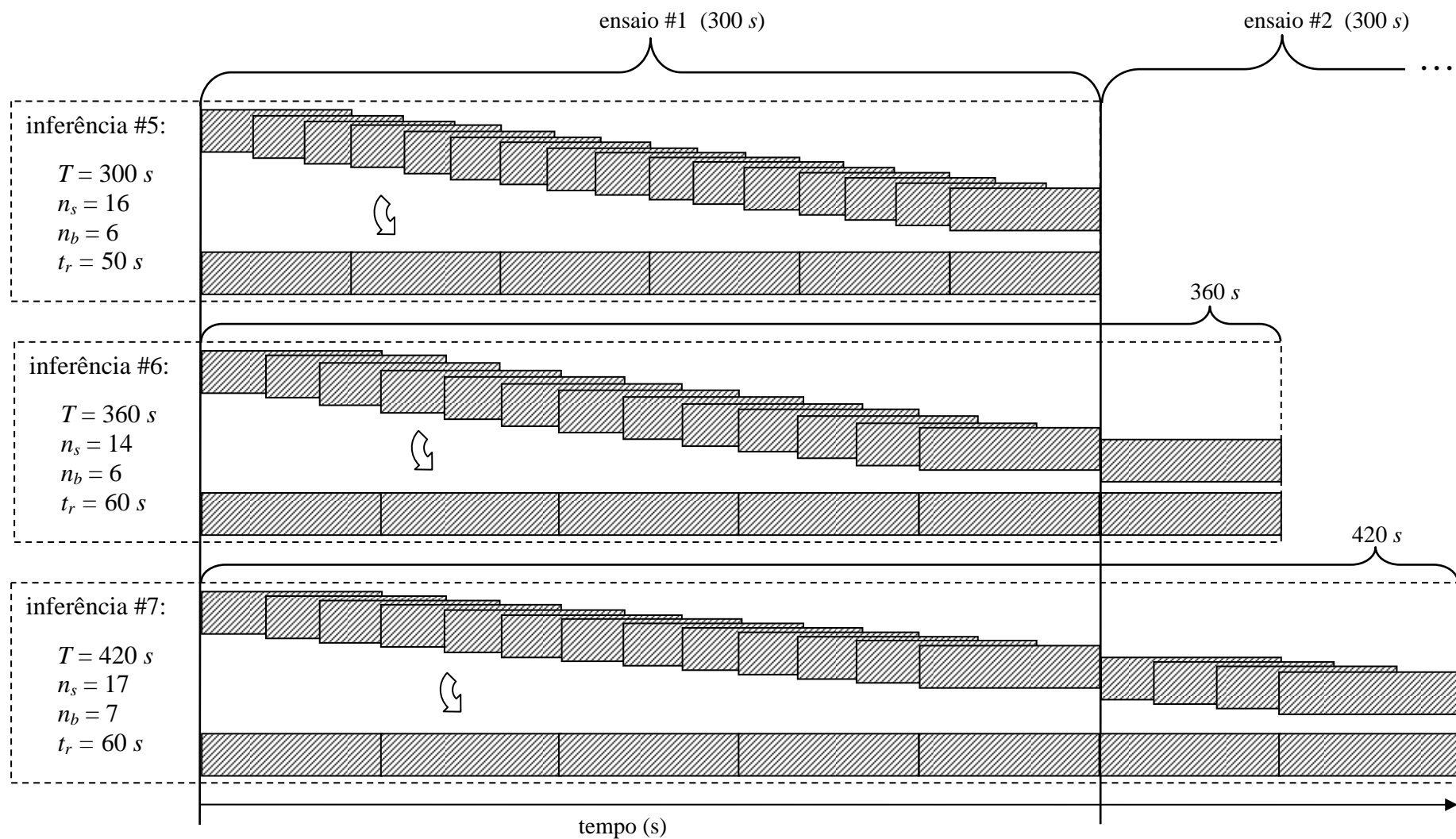


Figura VII.11 – Reamostragens adotadas para a obtenção da 5ª, 6ª e 7ª inferência, com tempo total acumulado T , variando-se o número de segmentações (n_s), o número de blocos por reamostra (n_b), e o tamanho (período) de cada reamostra (t_r).

Tabela VII.4 – Critérios para automatização das técnicas de estimação de parâmetros.

Técnica	Critérios e parâmetros de automatização
RD-AR	<ul style="list-style-type: none"> • Funções RD tipo “ponto positivo” entre um e dois desvios, com 2,5 segundos, sem estimativas de “passo negativo”; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 48 e aceitação de variabilidade de 2% na frequência, e 10% no amortecimento.
RD-CWT	<ul style="list-style-type: none"> • Funções RD tipo “ponto positivo” entre um e dois desvios, com 6,0 segundos, sem estimativas de “passo negativo”; • Sensores, frequências centrais das <i>wavelet-mães</i> e período linear do decaimento de cada modo de vibração selecionados a partir da observação prévia dos primeiros 60 segundos do sinal: <ul style="list-style-type: none"> 1º modo: Ac03; $f_m = 4Hz$; 3,5 s 2º modo: Ac03; $f_m = 12Hz$; 3,5 s 3º modo: Ac01; $f_m = 12Hz$; 2,5 s 4º modo: Ac02; $f_m = 20Hz$; 2,5 s 5º modo: Ac01; $f_m = 32Hz$; 2,5 s
FDD	<ul style="list-style-type: none"> • Tolerância admitida ao valor MAC de 0,9 , período do decaimento para identificação dos parâmetros igual a 30 ciclos da respectiva frequência.
SSM	<ul style="list-style-type: none"> • Matriz de covariância com ordem igual a 20; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 36 e aceitação de variabilidade de 2% na frequência, e 10% no amortecimento.
SSI	<ul style="list-style-type: none"> • Número de blocos de linhas da matriz de dados igual a 18; • Diagrama de estabilização com ordem máxima igual a 36 e aceitação de variabilidade de 2% na frequência, e 10% no amortecimento.

Conforme verificado nas simulações numéricas, ao se utilizar a técnica *bootstrap* de inferência, torna-se necessário descartar as estimativas espúrias para se obterem boas distribuições dos resultados. Para o tratamento dos dados experimentais optou-se por proceder esse descarte a partir da verificação do afastamento de cada estimativa em relação a valores de referência calculados para cada passo de tempo.

Considerando-se todos os valores obtidos pelo conjunto das técnicas aplicadas, podem-se estimar médias e variâncias para as frequências naturais e amortecimento de cada um dos modos analisados. Utilizando-se essas médias como valores de referência, admite-se como espúrias as estimativas que se apresentem afastadas delas em mais de 4σ , onde σ^2 é a variância global. A média de cada técnica para cada passo no tempo pode então ser calculada a partir das respectivas estimativas válidas remanescentes.

A figura VII.12 apresenta a evolução temporal dos valores médios de frequência e amortecimento do primeiro modo de vibração, para cada uma das cinco técnicas implementadas, além do número de amostras válidas disponíveis. Verifica-se nesta figura que somente a técnica SSI não apresentou um número elevado de estimativas válidas, e que todas as técnicas obtiveram valores próximos para a frequência natural, e aparentemente estáveis a partir do passo 20.

A partir aproximadamente do mesmo passo 20, percebe-se na Figura VII.12 um afastamento entre as estimativas das taxas de amortecimento. Apesar de gradativamente ocupar a faixa dos valores obtidos deterministicamente pelas técnicas LSCE e ERA (apresentados em vermelho), as estimativas de amortecimento não apresentam sinais claros de estabilização.

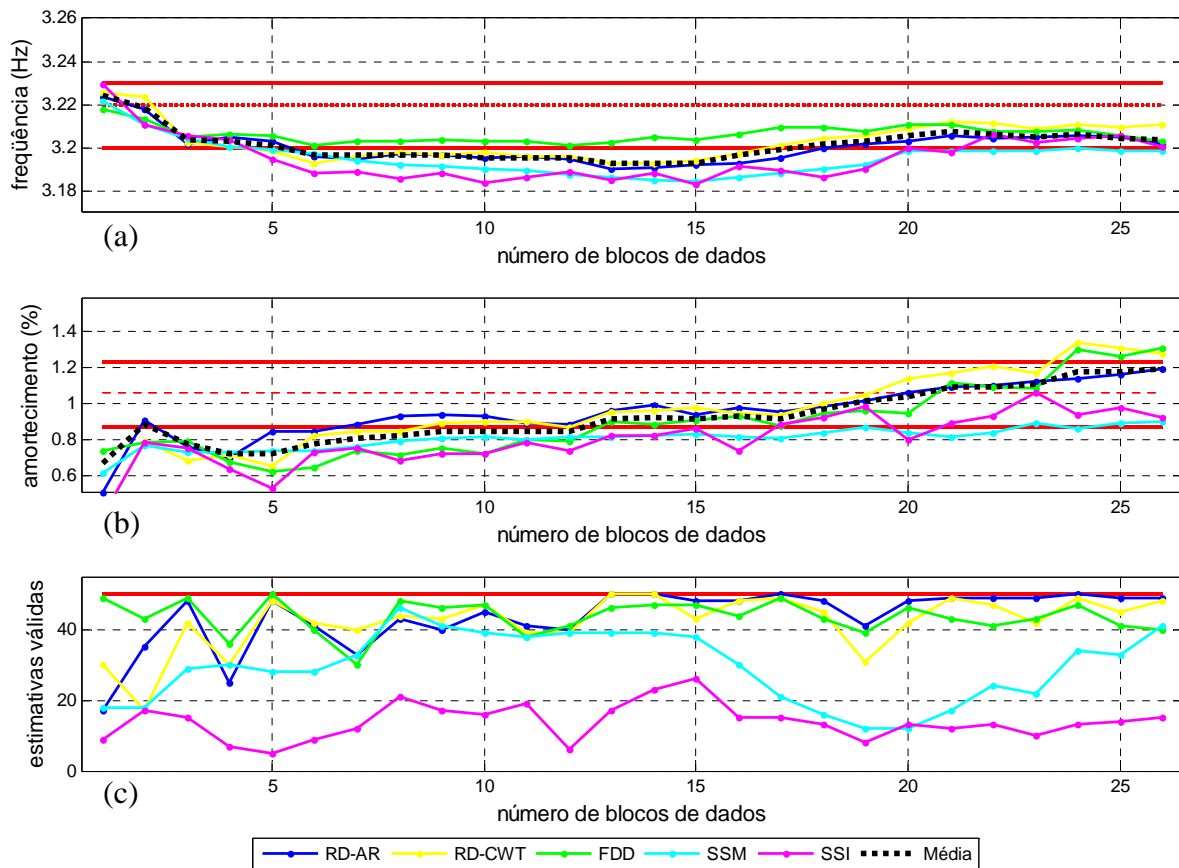


Figura VII.12 – Estimativas médias da frequência natural (a) e taxa de amortecimento (b) do 1º modo de flexão obtidas pelas técnicas implementadas a partir das reamostragens válidas (c) em cada passo de tempo. Limites e média das estimativas deterministicas em vermelho.

A evolução temporal das estimativas médias de frequência natural e taxa de amortecimento do 2º modo de vibração encontra-se na Figura VII.13. Para esse modo, as técnicas apresentaram regularidade e proximidade entre os parâmetros estimados, oscilando levemente sobre os valores estimados deterministicamente (em vermelho).

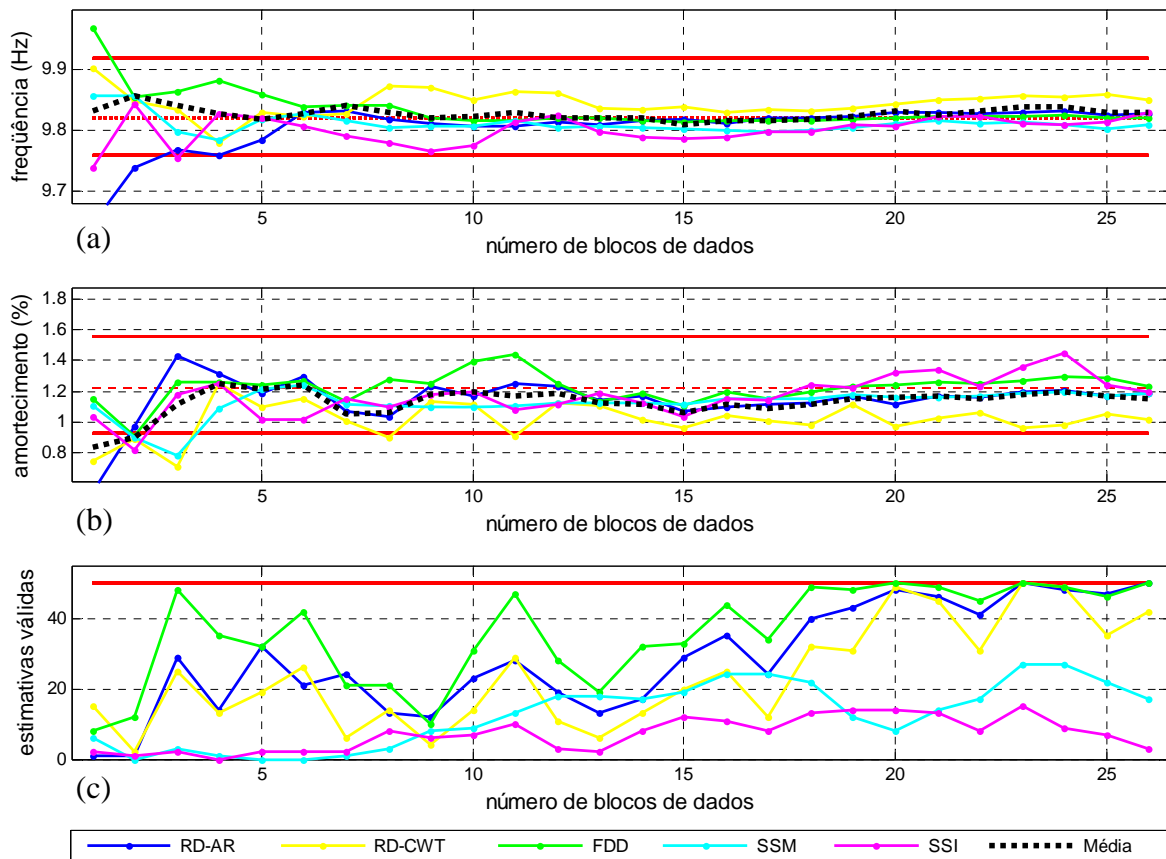


Figura VII.13 – Estimativas médias da frequência natural (a) e taxa de amortecimento (b) do 2º modo de vibração (1º de torção) obtidas pelas técnicas implementadas a partir das reamostragens válidas (c) em cada passo de tempo. Limites e média das estimativas deterministicamente em vermelho.

A Figura VII.14 apresenta a evolução das estimativas médias de cada técnica dos parâmetros de 3º modo de vibração. Nela pode-se verificar principalmente uma dispersão significativa entre as estimativas de taxa de amortecimento a partir do passo 15.

Apesar das ressalvas feitas anteriormente, em todas as estimativas efetuadas para os sinais de *heel drop* no primeiro quarto de vão, todas as cinco técnicas implementadas foram capazes de proporcionar estimativas aparentemente válidas para o cômputo geral.

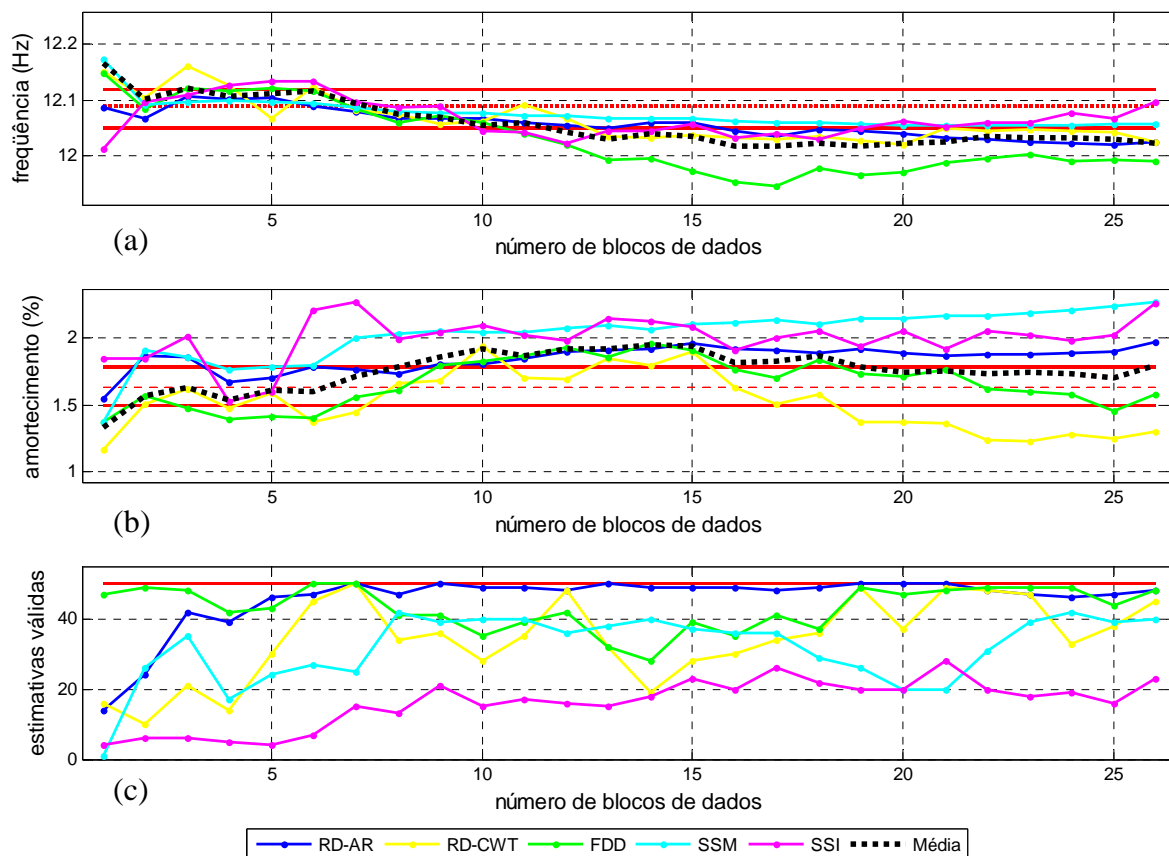


Figura VII.14 – Estimativas médias da frequência natural (a) e taxa de amortecimento (b) do 3º modo de vibração (2º de flexão) obtidas pelas técnicas implementadas a partir das reamostragens válidas (c) em cada passo de tempo. Limites e média das estimativas determinísticas em vermelho.

O processo híbrido-recursivo implementado é alimentado a cada passo no tempo pelas médias e variâncias das estimações de cada técnica. No processo de fusão, em termos gerais, pode-se afirmar que a influência de cada técnica no cômputo da estimativa híbrida final é função inversa de sua respectiva variância. Ou seja, técnicas que apresentem estimativas com menores intervalos de confiança recebem um peso maior na fusão.

Os estimadores numéricos de variância conduzem, na análise de espécimes de uma mesma população, a valores decrescentes conforme se aumenta o número de amostras utilizadas, até se aproximar do valor limite. Dentro desse escopo, a variância pode ser entendida simplesmente como a média dos quadrados dos desvios (das amostras em relação à média). Desta forma, quando uma técnica de análise modal implica em poucas amostras válidas, ela naturalmente apresenta valores maiores de variância, sendo por isso minorada a sua influência na fusão das estimativas.

Em relação à convergência, a metodologia permite ainda a mediação do usuário a partir de dois elementos:

- Ajuste do ganho dado às novas medições nos filtros a partir da admissão do ruído do processo;
- Penalização dos resultados de uma determinada técnica a partir da atribuição de elevados valores de variância para uma determinada medição que tenha se mostrado ineficiente a partir de indicadores pré-estabelecidos.

Os resultados da aplicação da metodologia híbrida aos sinais de *heel drop* a $\frac{1}{4}$ do vão encontram-se na Figura VII.15. Nela pode-se observar que a metodologia híbrida foi capaz de identificar bem os parâmetros dos 2º, 4º e 5º modos de vibração, apresentando valores estáveis e dentro do intervalo de incertezas obtido deterministicamente.

As estimativas finais dos parâmetros do 1º modo apresentaram-se dentro da vizinhança dos resultados determinísticos, entretanto sem apresentar estabilização, uma vez que nenhuma das técnicas se estabilizou dentro dos 26 minutos de aquisição, para diferentes valores de ganho impostos.

Os parâmetros encontrados para o 3º modo também não foram conclusivos uma vez que não convergiram, apresentando sucessivos aumentos nos intervalos de confiança, função da dispersão ocorrida entre os resultados oferecidos pelas técnicas individualmente.

O mérito da metodologia implementada na identificação do 1º e 3º modo para os sinais dos ensaios de *heel drop* consiste justamente em permitir a partir da observação de um único gráfico, uma análise precisa da “identificabilidade” daqueles modos a partir de técnicas *output-only*.

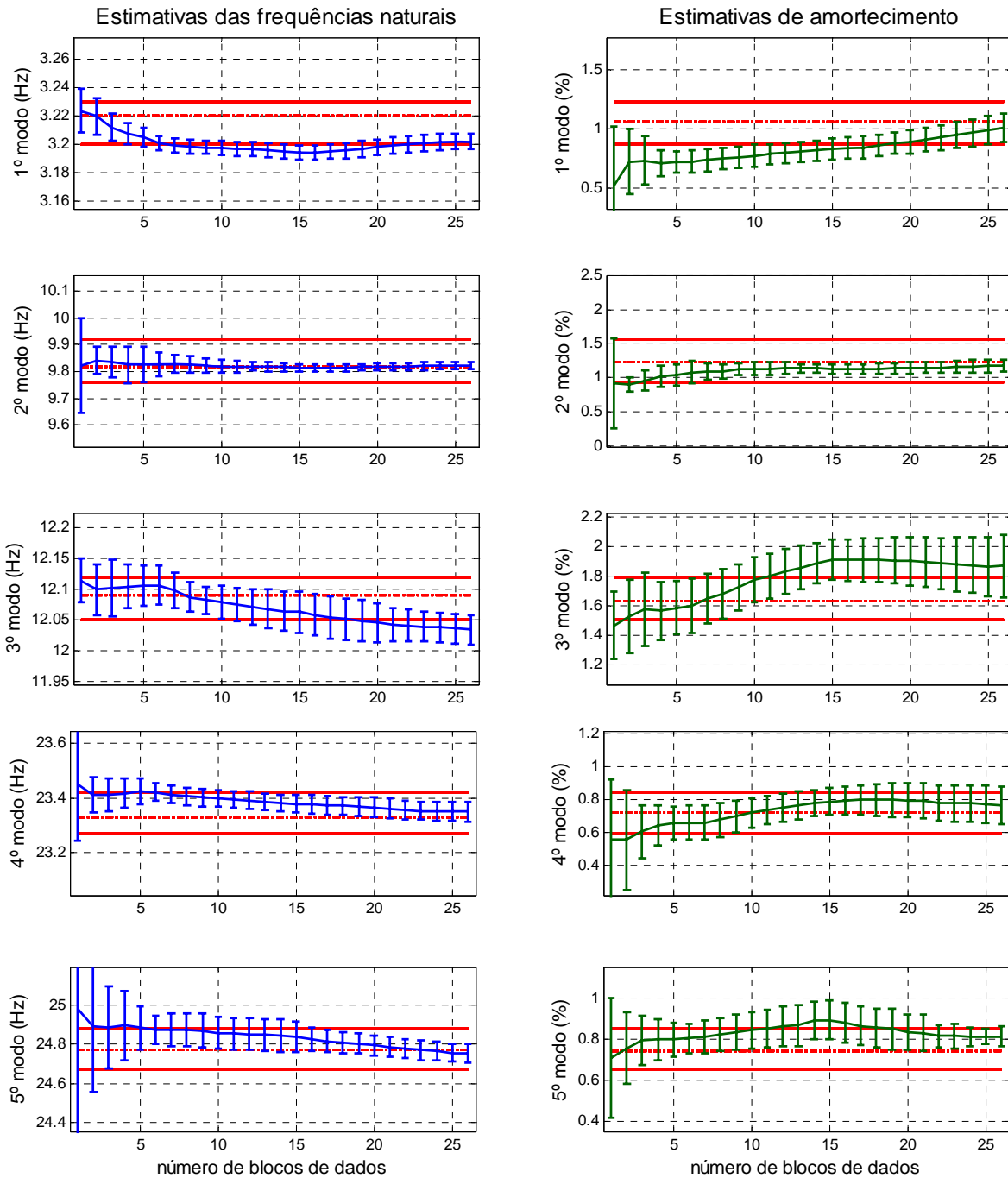


Figura VII.15 – Estimativas e intervalos de confiança ($\pm 4\sigma$) alcançados pela metodologia híbrida a partir de blocos de 60 segundos de sinais de *heel drop*, dispostos sobre os resultados determinísticos obtidos pelas técnicas LSCE e ERA (em vermelho). Variância do erro do processo admitida igual a 1% da variância das medições.

VII.5 – Ensaio com duas pessoas caminhando

Uma vez comparados os resultados da metodologia desenvolvida com os valores obtidos através de técnicas clássicas de análise modal no ensaio controlado, busca-se em seguida a identificação da passarela a partir de suas cargas típicas de operação: o caminhar de pessoas.

Desta forma foram conduzidos 12 ensaios com o “caminhar” de pessoas em duplas. Esses ensaios compreenderam três formas distintas de caminhar: lado a lado, em linha e em sentido contrário. As Figuras VII.16 e VII.17 apresentam duas destas formas de caminhar.



Figura VII.16 – Vista do caminhar “lado-a-lado” de duas pessoas.

Ao todo foram 42 minutos de dados deste tipo de carregamento, apresentando-se na Tabela VII.5 a descrição de cada um dos ensaios.



Figura VII.17 – Vista do caminhar “em linha” de duas pessoas.

Tabela VII.5 – Características dos ensaios do caminhar de duas pessoas.

Ensaio	Peso dos indivíduos (kg)	Tipo de caminhar	Tempo aquisitado	Frequência de aquisição	Filtro <i>anti-alias</i>
#2.1	105+60	em linha	300 s	200 Hz	30Hz
#2.2	105+60	em dupla			
#2.3	105+60	sentido contrário			
#2.4	67+70	em linha	180 s		
#2.5	67+70	em dupla			
#2.6	67+70	sentido contrário			
#2.7	65+69	em linha			
#2.8	65+69	em dupla			
#2.9	65+69	sentido contrário			
#2.10	87+65	em linha			
#2.11	87+65	em dupla			
#2.12	87+65	sentido contrário			

A literatura aponta a frequência do caminhar de pessoas como sendo em torno dos 2 Hz , com desvio padrão de $0,175\text{ Hz}$, ou seja, admitindo uma distribuição normal, 95% das pessoas caminham numa frequência entre $1,65$ e $2,35\text{ Hz}$ (BACHMANN *et al*, 1995).

Logo, o natural é entender que passarelas de pedestres sejam excitadas essencialmente na banda de frequência que compreende essas frequências e seus primeiros superharmônicos. Entretanto, devido à variabilidade da posição geométrica dessa excitação, mesmo um único indivíduo é capaz de induzir a excitação de modos com frequências bem afastadas daquelas do caminhar. A Figura VII.18 apresenta a excitação compassada do caminhar através dos sinais de células de carga adjacentes do ensaio #2.1, e o sinal obtido nos acelerômetros Ac01 e Ac03 (dispostos a $1/4$ e no meio do vão). As células de carga adjacentes P5, P7 e P9, numeradas do apoio para o meio do vão, apontam o caminhar em linha dos indivíduos. A célula P7 encontra-se disposta sobre o primeiro quarto do vão, aproximadamente sobre o Ac01.

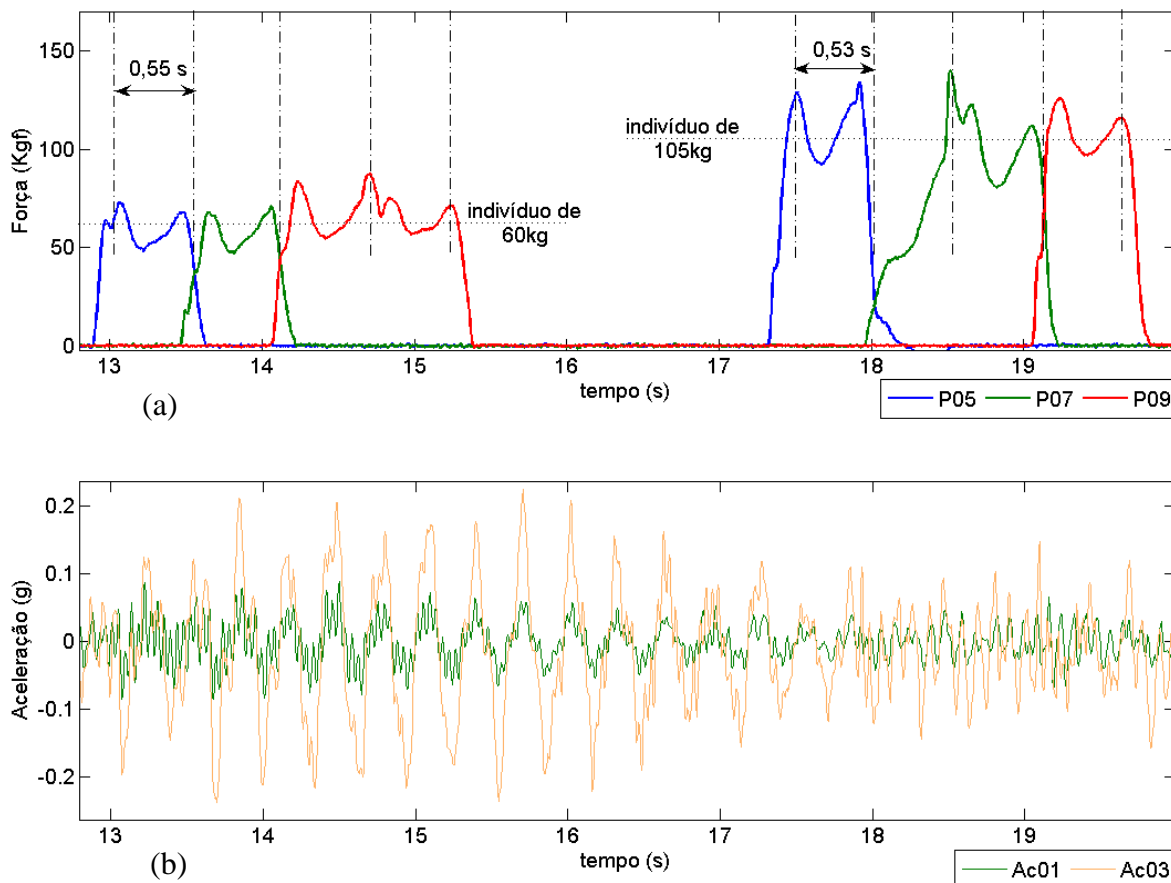


Figura VII.18 – Sinais das células de carga adjacentes P05, P07 e P09 apresentando os passos sucessivos de duas pessoas caminhando em linha com período em torno de meio segundo (a) e sinais dos acelerômetro Ac01 e Ac03 (b) do ensaio #2.1.

Pela análise dos sinais dos acelerômetros na Figura VII.18 é possível observar que enquanto os primeiros modos são excitados no período de 14 a 16 segundos, no período de 18 a 19 segundos a energia se distribui nos modos de frequência mais elevada. Analisando-se GL por GL, o carregamento imposto se constitui de impulsos intermitentes e defasados, o que conduz a um carregamento de banda bem mais larga do que em princípio se pensaria da excitação do “caminhar”.

A Figura VII.19 apresenta os autoespectros das respostas dos acelerômetros Ac01, Ac02 e Ac03 obtidos pelos sinais do ensaio #2.1. A partir dos espectros é possível observar os cinco primeiros modos de vibração já apontados na FRF da Figura VII.9, além da frequência do caminhar (aproximadamente a 2Hz) e seus quatro primeiros superharmônicos. Pode-se observar também que o primeiro superharmônico se sobrepõe ao pico da primeira frequência natural (de aproximadamente $3,2\text{Hz}$).

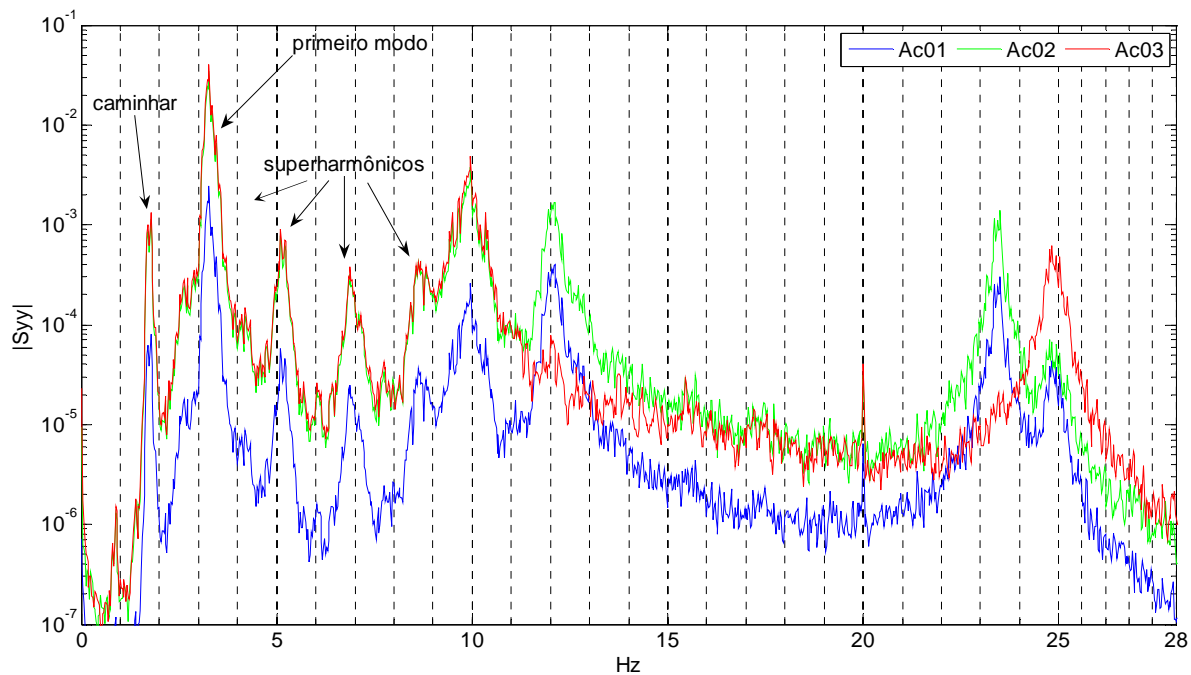


Figura VII.19 – Estimativas dos autoespectros das saídas de aceleração, caminhar de dois indivíduos em linha, ensaio #2.1, 5 minutos aquisitados, frequência de amostragem de 200Hz decimada para $66,7\text{Hz}$ (frequência de corte de $26,7\text{Hz}$), janelas com 4096 pontos, 66% de sobreposição, resolução final em frequência de $0,0244\text{Hz}$.

A figura VII.20 apresenta a evolução temporal dos valores médios de frequência e amortecimento do primeiro modo de vibração, para cada uma das cinco técnicas

implementadas, além do número de amostras válidas disponíveis por técnica. Verifica-se que para esse modo, as técnicas SSM e SSI falharam e não apresentaram número suficiente de estimativas válidas. Quando uma determinada técnica não possui nenhuma estimativa válida, o algoritmo implementado atribui ao seu valor médio o valor médio do passo anterior, e à sua variância um valor alto ($s^2 = 1$), propagando a incerteza de sua estimativa no Filtro de Kalman Local e diminuindo significativamente sua contribuição no processo de fusão.

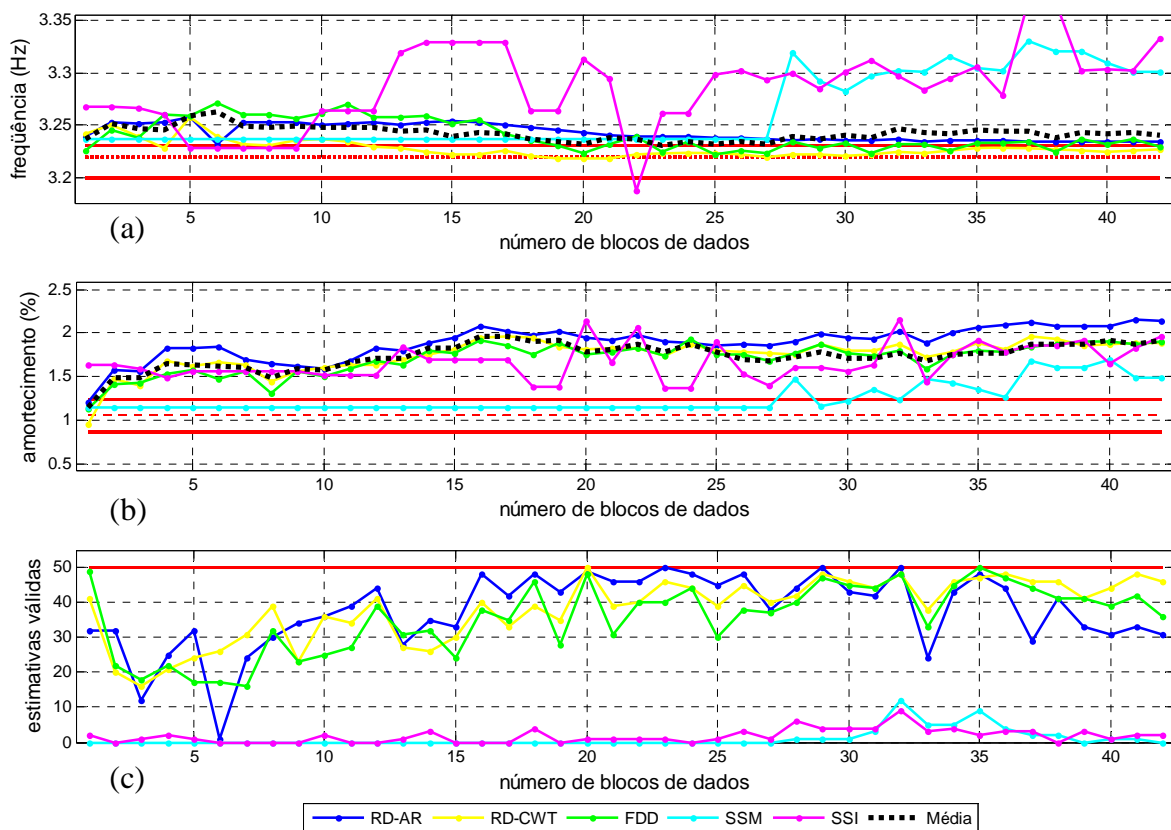


Figura VII.20 – Estimativas médias da frequência natural (a) e taxa de amortecimento (b) do 1º modo de vibração do ensaio do caminhar de duas pessoas, obtidas pelas técnicas implementadas a partir das reamostragens válidas (c) em cada passo de tempo. Limites e média das estimativas determinísticas em vermelho.

A Figura VII.21 apresenta a evolução das estimativas médias de cada técnica dos parâmetros do 2º modo de vibração. Nela pode-se verificar que a técnica SSI apresentou pouquíssimas estimativas válidas, e as técnicas SSM e RD-CWT apresentaram significativa oscilação na obtenção dessas amostras adequadas. Pode-se verificar também que as médias se estabilizaram com uma dispersão significativa entre si, aumentando a incerteza dos parâmetros.

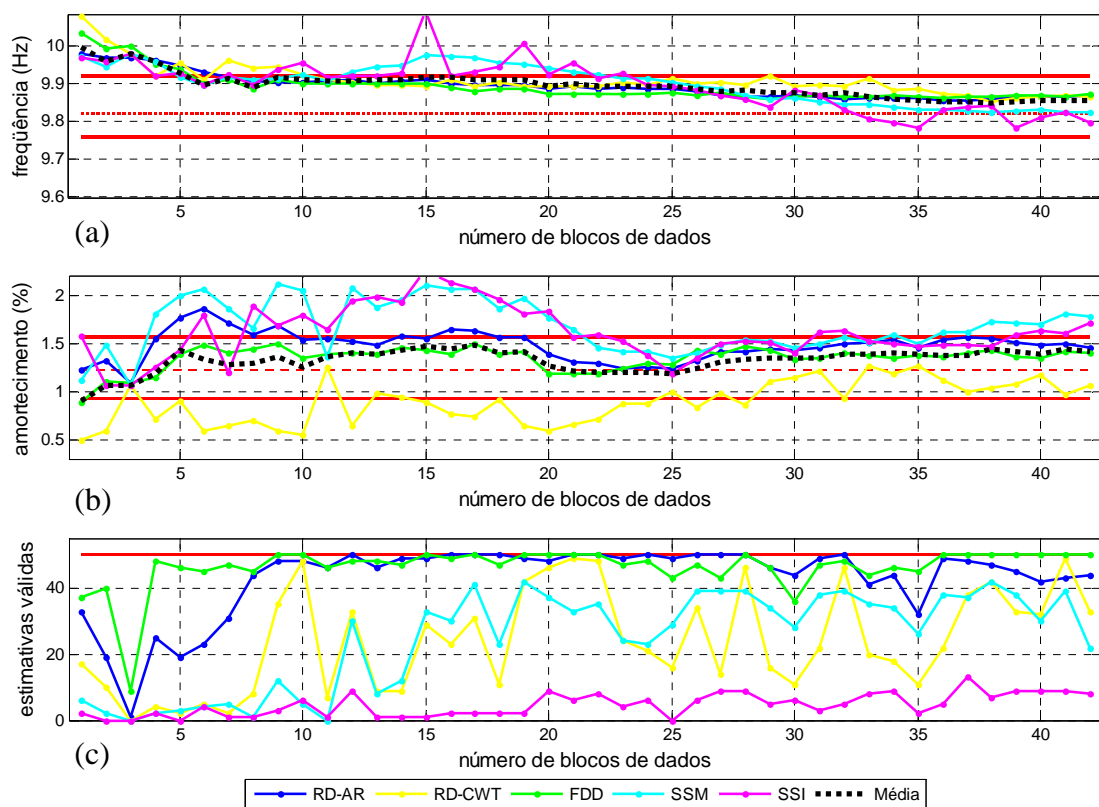


Figura VII.21 – Estimativas médias da frequência natural (a), taxa de amortecimento e (b) reamostragens válidas (c) em cada passo de tempo do 2º modo de vibração do ensaio do caminhar de duas pessoas

A Figura VII.22 ilustra, analogamente, a estimação efetuada para o 4º modo de vibração. Para este modo, todas as técnicas apresentaram número elevado de estimativas, e os parâmetros se estabilizaram sobre valores muito aproximados, prenúncio de uma boa estimação.

Os resultados da aplicação da metodologia híbrida aos sinais do “caminhar” de duas pessoas são apresentados na Figura VII.23. Nela pode-se observar que a metodologia híbrida foi capaz de identificar bem os parâmetros de todos os modos de vibração, com exceção do primeiro.

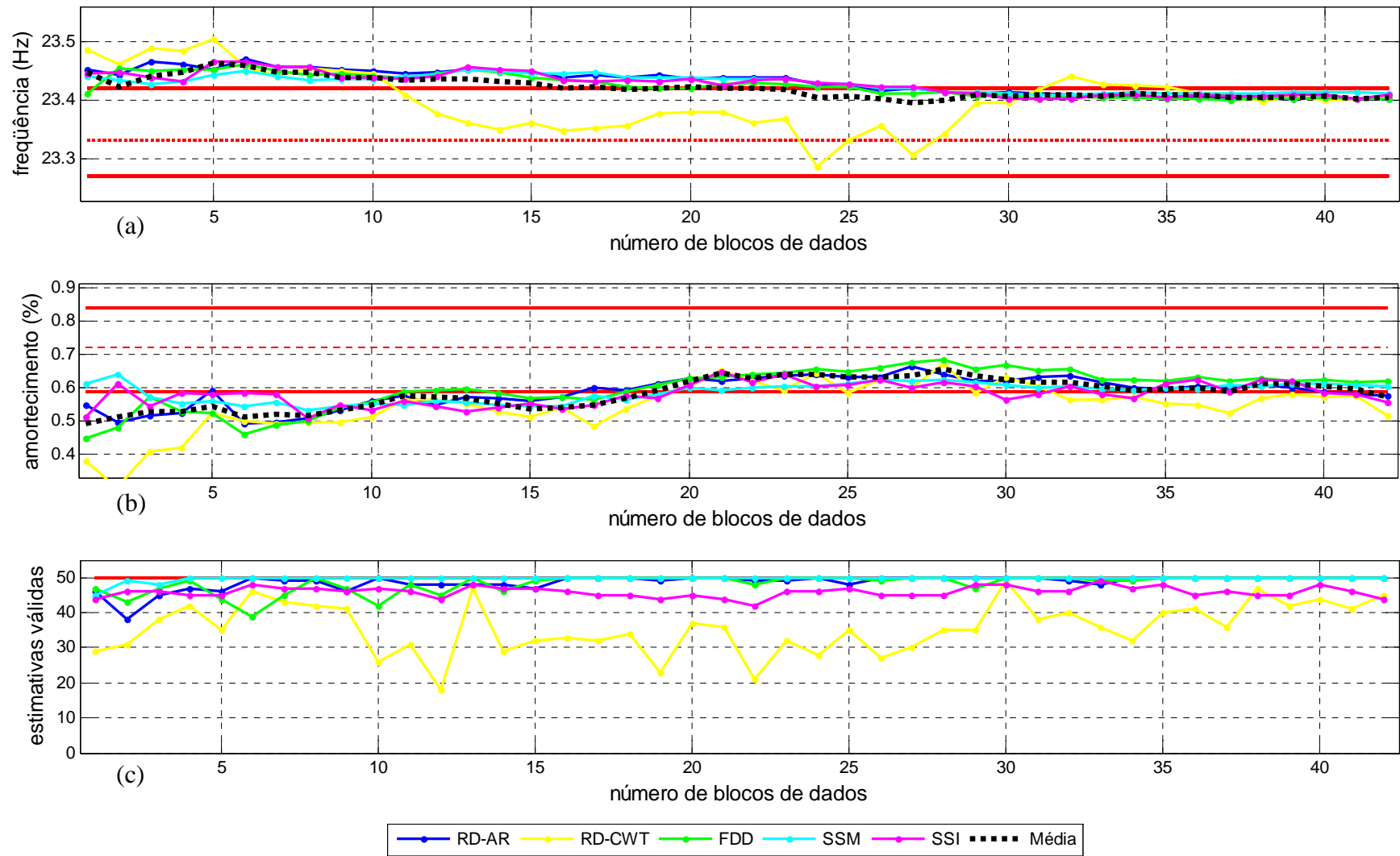


Figura VII.22 – Estimativas médias da frequência natural (a), taxa de amortecimento e (b) reamostragens válidas (c) em cada passo de tempo do 4º modo de vibração do ensaio do caminhar de duas pessoas.

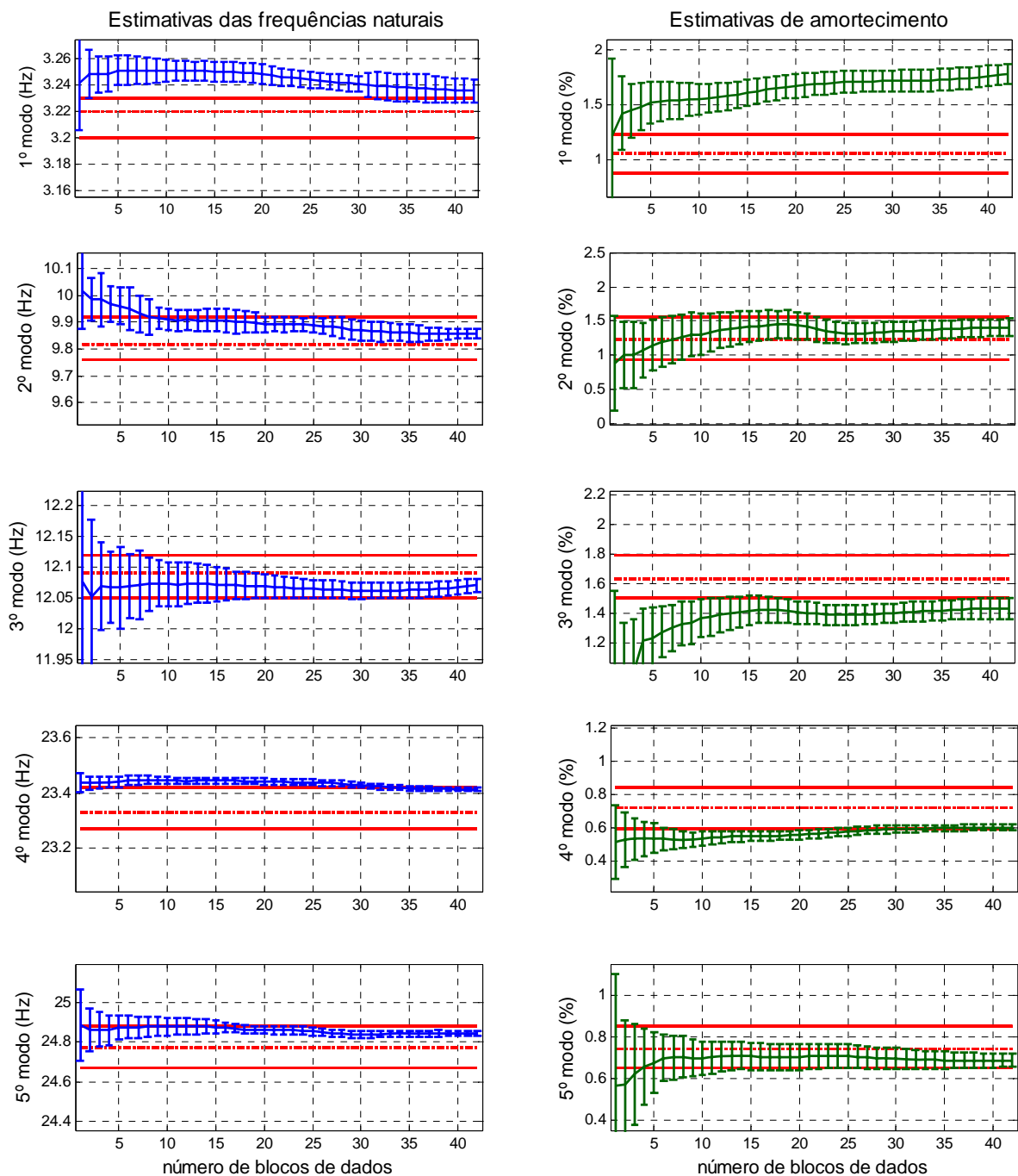


Figura VII.23– Estimativas e intervalos de confiança ($\pm 4\sigma$) alcançados pela metodologia híbrida a partir de 42 blocos de 60 segundos de sinais de dois indivíduos caminhando, dispostos sobre os resultados determinísticos obtidos pelas técnicas LSCE e ERA (em vermelho). Variância do erro do processo admitida igual a 0,1% da variância das medições.

As estimativas finais do amortecimento do 1º modo não se estabilizaram, mesmo após 42 minutos de dados, e apresentaram seus resultados finais distantes da vizinhança dos resultados determinísticos. Pode-se observar também que as variâncias das estimativas híbridas da frequência natural também se apresentaram instáveis. O resultado da fusão

associado ao fato de tanto a técnica SSI quanto a técnica SSM não conseguirem estimar parâmetros para o primeiro modo de vibração, sendo ambas paramétricas, do domínio do tempo, são fortes indícios de que há interferência de outros fatores no processo.

Este fato em si, indicar falha na estimativa dos parâmetros modais, já demonstra uma característica positiva da metodologia implementada, uma vez que permite ao usuário ter um maior controle do processo, conferindo assim uma maior confiabilidade nos resultados obtidos.

Analisando-se mais detalhadamente as componentes dos espectros apresentados na Fig. VII.19, observa-se que o primeiro superharmônico do carregamento acaba por coincidir com a 1ª frequência natural, perturbando assim o processo de identificação dos parâmetros, principalmente o amortecimento.

Para a identificação do primeiro modo, tem-se, obrigatoriamente, que se adotar uma estratégia específica. Forçosamente, é necessário que se selecione um carregamento não coincidente com a frequência natural. Neste caso da passarela, uma boa alternativa seria a utilização de sinais oriundos de pessoas correndo. A frequência de “correr”, assim como a de “pular”, varia entre 2 e 3Hz, logo, desta forma, afastar-se-ia da coincidência entre o primeiro modo de vibração e o primeiro superharmônico do caminhar. A Figura VII.24 apresenta o espectro do sinal de uma pessoa correndo na passarela.

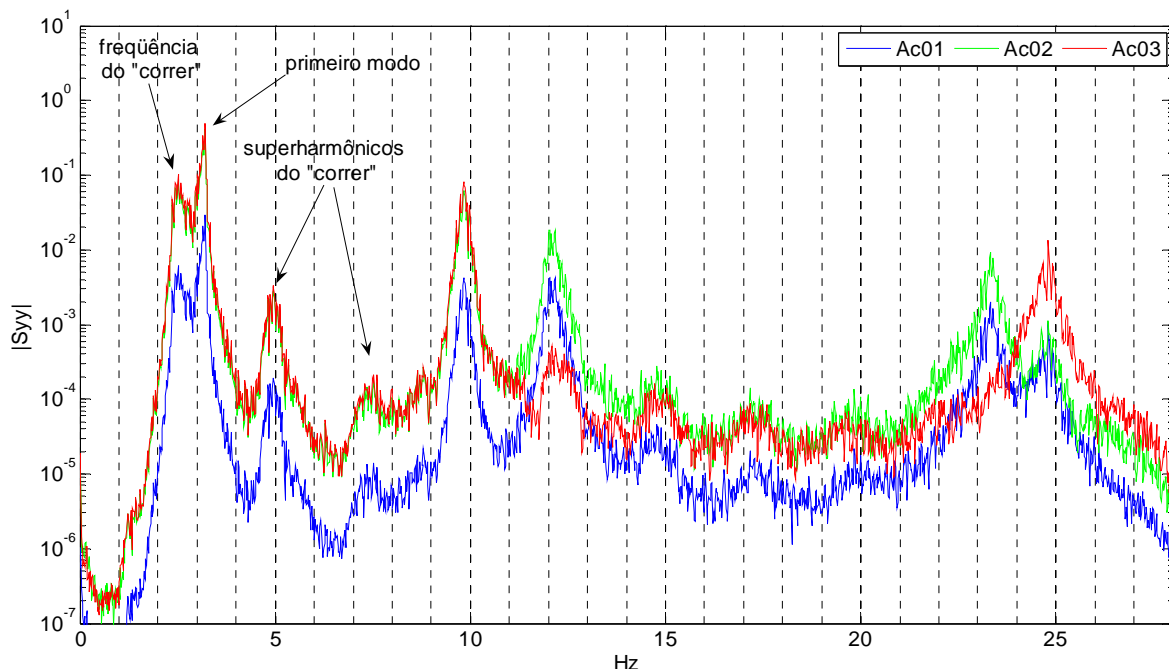


Figura VII.24 – Estimativas dos autoespectros das saídas de aceleração, correr de um indivíduo, 5 minutos aquisitados, frequência de amostragem de 200Hz decimada para 66,7Hz (frequência de corte de 26,7Hz), janelas com 4096 pontos, 66% de sobreposição, resolução final em frequência de 0,016Hz.

Na Figura VII.24 percebe-se que o sinal do “correr” ficou próximo da primeira frequência natural, mas não coincidente. A partir do algoritmo RD-CWT implementado é possível se separar os dois picos, e se estimar exclusivamente o decaimento da energia do pico referente ao primeiro modo de vibração. A Figura VII.25 ilustra a tela de identificação do primeiro modo a partir do Ac01 (*output#1*), separando os picos com a aplicação ao sinal de uma *wavelet*-mãe de Morlet com frequência central de 4Hz.

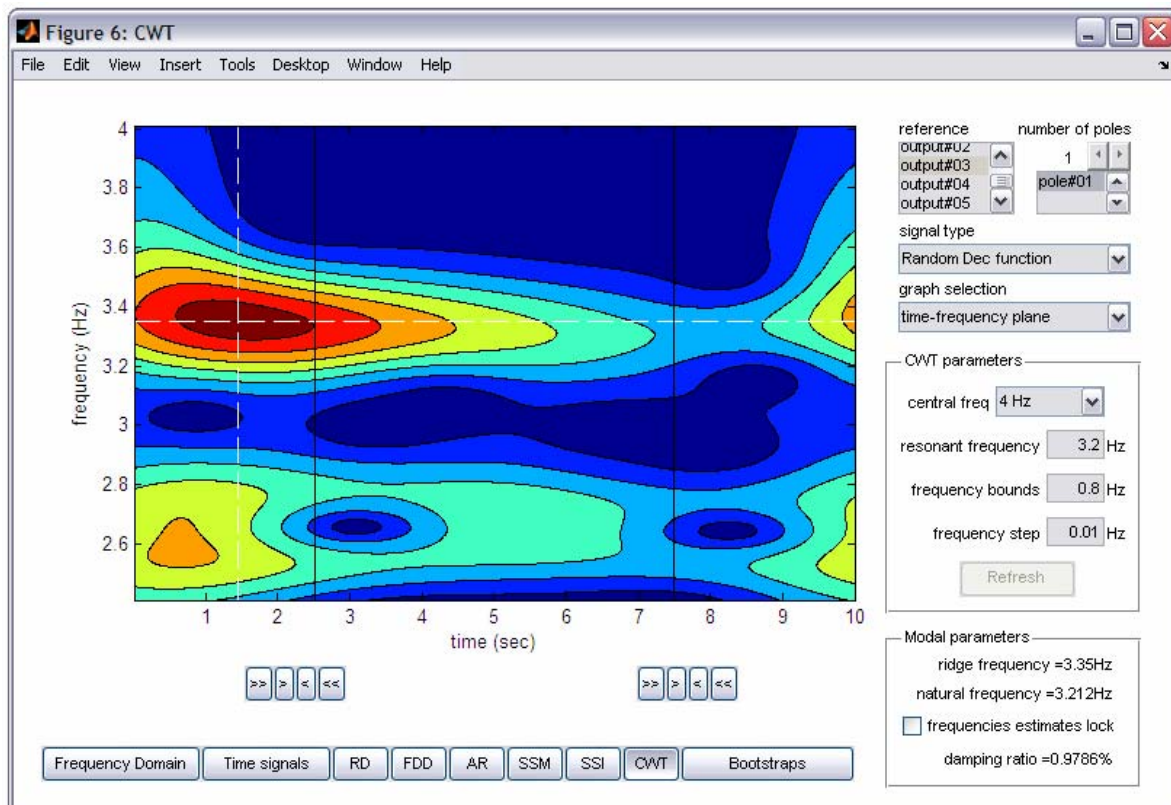


Figura VII.25 – Separação de componentes em frequência a partir da transformada *wavelet* sobre a função RD do acelerômetro central (Ac03). *Wavelet*-mãe de Morlet com frequência central de 4Hz.

A taxa de amortecimento do primeiro modo de vibrar pode ser conferida no gráfico mono-log da Figura VII.26, a partir do ajuste de uma reta ao trecho selecionado do decaimento.

Dividindo o arquivo do ensaio de “correr” em 13 segmentos de 60 segundos (com 66% de sobreposição), e calculando-se 50 reamostras a partir da combinação de cinco blocos de segmentos cada, pode-se obter uma inferência *bootstrap* simples para os parâmetros modais: $3,20 \pm 0,01 \text{ Hz}$ para a frequência natural e $0,91 \pm 0,35\%$ para a taxa de amortecimento. Comparando-se estes resultados com os obtidos deterministicamente verifica-se que consistem numa boa aproximação, reforçando mais uma vez a importância

de se possuir uma metodologia robusta para a identificação de parâmetros que apresente não só as estimativas, mas também que permita inferir precisões e a tendência desses resultados. A Figura VII.27 apresenta os parâmetros obtidos a partir das reamostras.

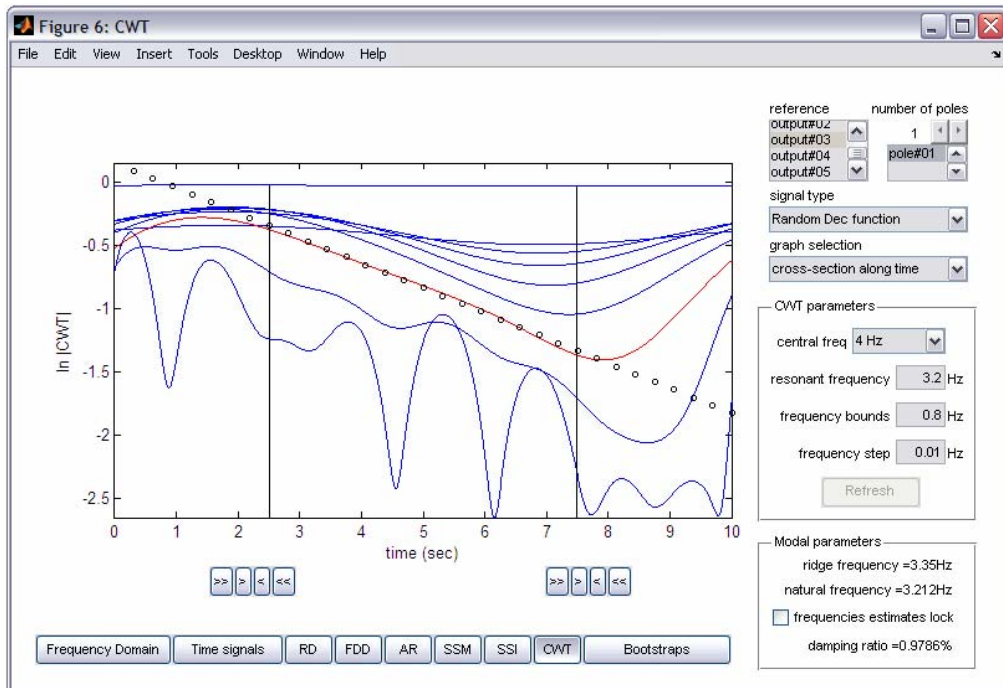


Figura VII.26 – Identificação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração a partir da CWT da função RD do acelerômetro Ac03 utilizando-se a *wavelet*-mãe de Morlet com frequência central de 4Hz.

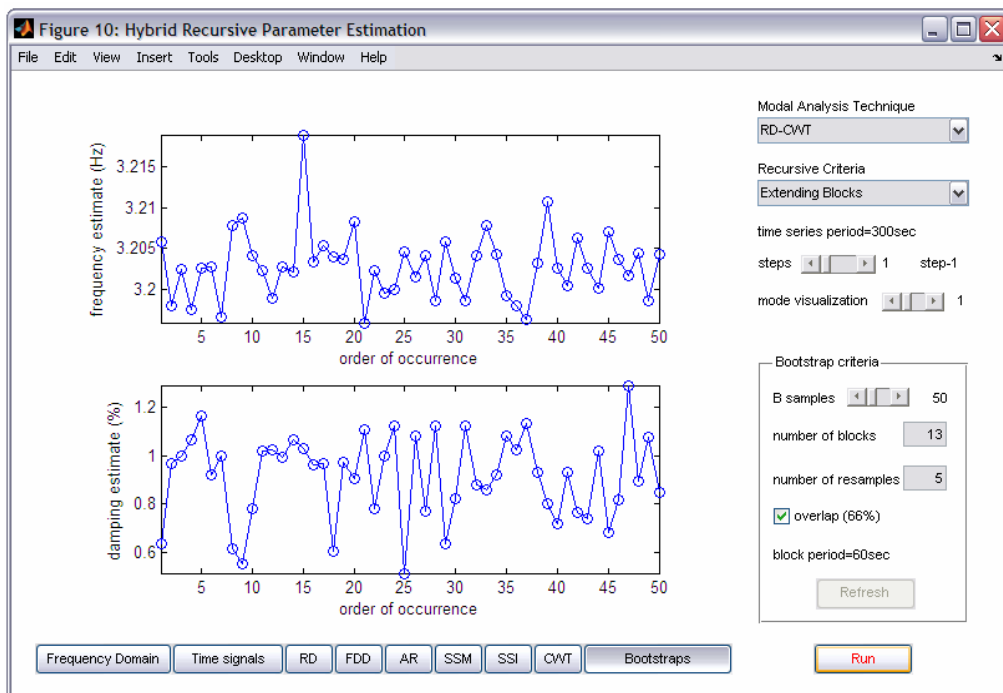


Figura VII.27 – Inferência *bootstrap* do primeiro modo de vibração utilizando a técnica RD-CWT: 50 reamostras a partir de diferentes combinações de 13 segmentos de 60 segundos em blocos de 5 segmentos.

A partir dos resultados obtidos neste capítulo, pode-se afirmar que a metodologia implementada conferiu objetividade e credibilidade às estimativas dos parâmetros modais proporcionadas pelas técnicas *output-only*, e suas dispersões conferiram números para suas prováveis variabilidades. Quando não implicou em estimativas estáveis, constituiu indicador da ocorrência de fenômenos complicadores da modelagem do processo.

CAPÍTULO VIII

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo desenvolver uma metodologia de identificação estrutural a partir da estimação das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento e seus respectivos intervalos de confiança, dispondo-se exclusivamente dos sinais de resposta da estrutura em operação.

Para se obter de forma consistente e robusta os parâmetros modais e suas incertezas, entendeu-se necessária a aplicação concomitante de várias técnicas de análise modal *output-only* baseadas em diferentes estatísticas. Firmada a conceituação básica do problema estocástico da vibração de estruturas e suas representações, apresentou-se um estudo cronológico das contribuições entendidas como mais relevantes sobre o tema de análise modal “em operação”. Por fim, foram selecionadas cinco técnicas: três no domínio do tempo, uma no domínio da frequência e uma no domínio tempo-frequência.

Após a exposição da implementação computacional das técnicas escolhidas, buscou-se novamente argumentação teórica para se obter dentro de uma mesma estruturação de dados, inferências sobre os intervalos de confiança dos parâmetros modais proporcionados por essas técnicas. A técnica de reamostragem *bootstrap* foi então apresentada e modelos para a sua adequação a cada uma das técnicas foram especificados.

A partir da verificação de que o tempo disponível de dados é um dos parâmetros mais importantes para se obterem boas estimativas pelas técnicas *output-only*, foram apresentados os fundamentos de estimadores recursivos e estimadores por fusão de informações.

Utilizando-se respostas numericamente simuladas de uma estrutura em operação, foram discutidos os resultados encontrados ao se testarem as técnicas individualmente, compararam-se os intervalos obtidos pela técnica de inferência adotada com aqueles obtidos pela estatística convencional, apresentaram-se algumas alternativas de implementação da recursividade e fusão de estimativas, e finalmente propôs-se uma

metodologia híbrida e recursiva de análise modal “em operação”. A metodologia foi então numericamente testada e suas vantagens apresentadas.

Por fim, foram conduzidos testes controlados em uma passarela de pedestres com 11,5 metros de vão, e testes onde a excitação imposta restringiu-se à sua carga típica de operação: o caminhar de pessoas.

Os resultados e contribuições obtidos pelo presente trabalho foram apresentados gradualmente ao longo deste texto. A seguir enumeram-se novamente os mais relevantes.

- Apresentação das técnicas de análise modal de estruturas “em operação” mais encontradas na literatura sob uma mesma base conceitual estocástica, detalhando-se seus algoritmos e propondo opções de implementação computacional;
- Apresentação, implementação e validação de algoritmos para a inferência de intervalos de confiança para as técnicas RD-CWT, RD-AR, e FDD, e de novas propostas para as técnicas SSI e SSM (SSI-COV), tudo a partir de reamostragens *bootstrap*. Os valores inferidos nas simulações numéricas se apresentaram compatíveis com os obtidos pela amostragem convencional, e na avaliação com sinais experimentais, as dispersões finais se mostraram coerentes com o espalhamento dos resultados determinísticos;
- Implementação do Filtro de Kalman sobre as estimativas obtidas sucessivamente por uma determinada técnica, permitindo que a recursividade substitua a utilização *batch* de longas seqüências de dados na análise modal, tornando a estimação mais célere, e sugerindo uma solução para a estimação de parâmetros em tempo “quase-real”. O ajuste do ganho do Filtro de Kalman permitiu ainda que se verificasse a estabilização da estimação com mais clareza, e tornasse cada técnica menos suscetível às ineficiências transitórias;
- Verificação numérica e prática de que as técnicas de análise modal “em operação” apresentam desempenhos diferentes por se basearem em diferentes funções estocásticas. Este fato permite que, ao serem utilizadas

concomitantemente, aprovisionem uma massa de estimativas que ora ratifica a exatidão na obtenção de um parâmetro modal, ora indica a dispersão ou instabilidade na estimação.

- Proposição, implementação e validação de uma metodologia híbrida de fusão de estimativas baseada em algoritmos já consolidados nas aplicações de navegação inercial, que torna a estimação modal mais robusta por sempre prover informação, e mais consistente por condicionar a estimativa do parâmetro à estabilização dos resultados de diferentes técnicas;

A conclusão central deste trabalho consiste na constatação de que a inexorável variabilidade das estimativas dos parâmetros modais exige a inferência do seu intervalo de confiança, antes do que se torna sem efeito qualquer iniciativa de ajuste de modelos numéricos ou verificação da integridade estrutural, principalmente ao se utilizarem técnicas *output-only*.

A partir das considerações apresentadas acima, podem-se fazer algumas sugestões para estudos futuros:

- Extensão do algoritmo para inferir as formas modais de operação de forma análoga ao que foi desenvolvido neste trabalho para as frequências naturais amortecidas e para as taxas de amortecimento;
- Complementação do algoritmo híbrido com ferramentas mais robustas de penalização ou exclusão de inferências julgadas impróprias. Citam-se como alternativas a implementação do Filtro Federado, proposto por CARLSON (1990) que se baseia no princípio do compartilhamento da informação, ou ainda a aplicação de estatísticas de verificação da pertinência de grupos de amostras a uma mesma população, como a análise de variância (ANOVA);
- Aplicação da metodologia proposta em outros sistemas estruturais a fim de se verificar a extensão da sua aplicabilidade, bem como se observar a sensibilidade de cada uma das técnicas implementadas, principalmente em

situações onde não se observa o amortecimento viscoso e proporcional, ou ainda, onde a excitação de operação apresenta distribuições correlacionadas.

- Desenvolvimento de um sistema que permita a estimação dos parâmetros modais em tempo “quase real”, processando os dados enquanto novas aquisições são feitas, de forma sucessiva, permitindo que testes de campo sejam mais breves e eficientes, e eventuais dificuldades na identificação estrutural sejam contornadas oportunamente;
- Desenvolvimento de sistema de identificação de danos estruturais associado à metodologia híbrida-recursiva desenvolvida neste trabalho, o qual buscaria a interpretação oportuna de mudanças reais dos parâmetros modais, sem entretanto prescindir das estimativas determinísticas proporcionadas por cada técnica, essas últimas provavelmente mais sensíveis a essas mudanças;
- Desenvolvimento de algoritmo auto-adaptativo que ajuste as variáveis de identificação de cada técnica de análise modal adequadamente, dispensando a análise prévia de parte do sinal para fins de parametrização dos modelos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEMANG, R. J., BROWN, D. L., 1982, "A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis", In: *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference – I IMAC*, pp. 501-514.
- ALLEMANG, R. J., BROWN, D. L., FLADUNG, W., 1994, "Modal Parameter Estimation: A Unified Matrix Polynomial Approach", In: *Proceedings of the International Analysis Modal Conference – XII IMAC*, pp. 110-116.
- ALLEMANG, R. J., 1998, *Vibrations: Analytical Modal Analysis*, Report UC-SDRL-CN-20-263-662, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati.
- ALLEMANG, R. J., 1999, *Vibrations: Experimental Modal Analysis*, Report UC-SDRL-CN-20-263-663/664, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati.
- ALVIN, K. F., 1993, *Second-Order Structural Identification Via State Space-Based System Realizations*, PhD Thesis, University of Colorado.
- AMANI, M.G., RIERA, J.D., "Determinación de las Propiedades Dinâmicas de Sistemas Sometidos a Excitaciones Ambientales Aleatórias", In: *XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, Brasília.
- ANDERSEN, P., 1997, *Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models*, PhD Thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University.
- ARAGÃO FILHO, L. A. C. M., MAGLUTA, C., ROITMAN, N., 2003, "Estimação do Amortecimento de Estruturas através da Análise de Seções Transversais de Transformadas Tempo-Frequência", IN: *Proceedings of the 24th Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Ouro Preto.
- ARAGÃO FILHO, L. A. C. M., ROITMAN, N., MAGLUTA, C., 2006, "Time-Frequency Structural Identification Using a Recursive Estimation Approach", IOMAC Workshop, Dinamarca.
- ARUN, K. S., KUNG, S. Y., 1990, "Balanced Approximation of Stochastic Systems", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 11 (1), pp. 42-68.
- ASMUSSEN, J. C., 1997, *Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique - Application to Civil Engineering Structures*, PhD Thesis, Aalborg University.

- BACHMANN, H., *et al.*, 1995, *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*, Birkhäuser Verlag.
- BAPTISTA, M. A., MENDES, P., CAMPOS COSTA, A., AFILHADO, A., SILVA, P., SOUSA OLIVEIRA, C., 2004, "Análise Experimental para obtenção das Características Dinâmicas do Edifício da Portugal Telecom no Parque das Nações", In: *Sísmica 2004 - 6º Congresso de Sismologia e Engenharia Sísmica*, pp 565 - 574, Guimarães.
- BASSEVILLE, M. BENVENISTE, A., MEVEL, L., 2006 "Handling uncertainties in identification and model validation: a statistical approach", In: *Proceedings of the 24th International Modal Analysis Conference (IMAC-XXIV)*. Saint Louis.
- BENDAT, J. S., PIERSOL, A. G., 1980, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience Publication.
- BENDAT, J. S., PIERSOL, A. G., 1986, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience Publication.
- BITTANTI, S., LOVERA, M., 2000, Bootstrap-based estimates of uncertainty in subspace identification methods, *Automatica*, Vol. 36(11), pp. 1605-1615.
- BOLTEŽAR, M., SLAVIČ, J., 2002, "Use of the Continuous Wavelet Transform for the Identification of Damping", In: *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics Modelling*, Madeira.
- BOULAHBAL, D., GOLNARAGHI, M. F., ISMAIL, F., 1999, "Amplitude and Phase Wavelets Maps for the Detection of Cracks in Geared Systems", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 13, pp. 423-436.
- BOX, G. E. P., JENKINS, G. M., 1970, *Time Series Analysis – forecasting and control*, Holden-Day Publisher.
- BRASILIANO, A., DOZ, G.N., BRITO, J.L.V., 2004, "Métodos de Identificação de Sistemas Aplicados a Estruturas de Engenharia Civil", In: *XXXI Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, Mendoza.
- BRINCKER, R., KRENK, S., JENSEN, J. L., 1991, "Estimation Of Correlation Functions by the Random Decrement Technique", In: *Proceedings of The 9th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Florence, Italy, pp.610-615.
- BRINCKER, R., ZHANG, L., ANDERSEN, P., 2000, "Modal Identification from Ambient responses using Frequency Domain Decomposition", In: *Proceedings of the XVIII IMAC*.

- BRINCKER, R., VENTURA, C. E., ANDERSEN, P., 2001, “Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition”, In: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference – XIX IMAC*.
- BRINCKER, R., ANDERSEN, P., 2006, “Understanding Stochastic Subspace Identification”, In: *Proceedings of the 24th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, St. Louis, Missouri.
- BROWN, D.L., ALLEMANG, R.J., ZIMMERMAN, R., MERGEAY, M., 1980, “Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis”, *SAE Paper Number 790221*, Vol 88, pp. 828-846.
- BUCHER, H. F., 2001, “*Aplicações das Transformadas Tempo-Frequência em Engenharia Civil*”, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- BURRUS, C. S., GOPINATH, R. A., GUO, H. , 1998, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer*, 1 ed. Prentice Hall.
- CARLSON, N.A. 1990, “Federated square root filter for decentralized parallel processes”, *IEEE Trans. Aerospace Electronic Systems*. Vol. 26(3), pp.517-525.
- CARMONA, R. A., HWANG, W. L., TORRÉSANI, B., 1997, “Characterization of Signals of the Ridges of their Wavelets Transforms”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45(1), pp. 2586 - 2590.
- CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., 1993, *Dynamics of Structures*, 2 ed. McGraw-Hill.
- CNN, 2007, CNN.COM/WORLD. Publicado em 14 de Agosto de 2007. Disponível em: <http://www.cnn.com/2007/WORLD/asiapcf/08/13/china.bridge.ap/index.html>. Acesso em: 14 Agosto de 2007.
- COSTA, C.; ARÊDE, A.; COSTA, A., 2005, “Dynamic Characterization of a Masonry Arch Bridge”, In: *Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC)*, Copenhagen, Denmark.
- CRAIG, R. R., 1981, *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, Wiley & Sons.
- DAUBECHIES, I., 1992, *Ten Lectures on Wavelets*, 1 ed. SIAM.
- DAUBECHIES, I., 1996, “Where do wavelets come from? – A personal point of view”, In: *Proceedings of the IEEE - Special Issue on Wavelets*, vol. 84(4), pp. 510-513.
- DE COCK, K., PEETERS, B., VECCHIO, A., VAN DER AUWERAER, H., DE MOOR, B., 2002, “Subspace system identification for mechanical engineering”,

- in: *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven.
- DE COCK, K., DE MOOR, B., 2003, *Subspace identification methods*, in: Contribution to section 5.5, "Control systems robotics and automation" of EOLSS, UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems, (Unbehauen H.D.), vol. 1 of 3, Eolss Publishers Co., Ltd. (Oxford, UK), pp. 933-979.
- DE ROECK, G., PEETERS, B., REN, W. -X., 2000, "Benchmark Study On System Identification through Ambient Vibration Measurements", In: *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Texas.
- DNIT, 2008, Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes, Sistema de Gerenciamento de Autorização Especial de Trânsito – SIAET, Levantamento de Dados. Disponível em: http://www1.dnit.gov.br/aplweb/sis_siaet/levantamento.asp . Acesso em: 20 de Fevereiro de 2008.
- DOT, 2007, U.S. Department of Transportation, Research and Innovative Technology Administration, Bureau of Transportation Statistics, *National Bridge Inventory, Deficient Bridges by State and Highway System*, special tabulation. Publicado em 13 de Agosto de 2007. Disponível em: http://www.bts.gov/current_topics/2007_08_02_bridge_data/html/bridges_by_state.html. Acesso em: 25 Agosto 2007.
- EFRON, B., 1973, "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife", *The Annals of Statistics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-26
- EFRON, B., 2003, "Second Thoughts on the Bootstrap", *Statistical Science, Silver Anniversary of the Bootstrap*, vol. 18 (2). pp. 135-140.
- EWINS, D. J., 1984, *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley and Sons.
- FAÍSCA, R. G., 2003, *Caracterização de Cargas Dinâmicas Geradas por Atividades Humanas*, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE.
- FARGE, M., "Wavelet Transforms and their Applications to Turbulence", 1992, *Annual Review in Fluid Mechanics*, vol. 24, pp. 395-457.
- FASSOIS, S. D., 2001, "MIMO LMS-ARMAX Identification of Vibrating Structures – Part I: The Method", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 15(4), pp723-735.
- FRIEDLANDER, B., 1983, "Instrumental Variable Methods for ARMA Spectral Estimation", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol 31(2), pp. 404-415.

- GABOR, D., 1946, "Theory of Communication", *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, v. 93, III, pp. 429-441.
- GAO, Y., KRAKIWSKY, E.J., ABOUSALEM, M., and MCLELLAN, J.F., 1993, "Comparison and Analysis of Centralized, Decentralized and Federated Filters", *Journal of the Institute of Navigation*, Vol. 40, No. 1., pp.69-86.
- GELB, A., 1974, *Applied Optimal Estimation*, MIT Press.
- GOHBERG, I. LANCASTER, P. RODMAN, L., 1982, *Matrix polynomials*, Academic Press.
- GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F., 1996, "The Singular Value Decomposition and Unitary Matrices", In: *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, pp. 70-71 and 73.
- GOETHALS, I., MEVEL, L., BENVENISTE, A., De Moor, B., 2004, "Recursive Output Only Subspace Identification for In-flight Flutter Monitoring", In: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference – XXII IMAC*.
- HALL, D.L., LLINAS, J., 1997, "An introduction to multisensor data fusion", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 85 (1), pp. 6 – 23.
- HASHEMIPOUR, H.R., ROY, S., LAUB, A.J., "Decentralized structures for parallel Kalman filtering", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33(1), pp. 88-94.
- HE, J., FU, Z.-F., 2001, *Modal Analysis*, Butterworth Heinemann.
- IBRAHIM, S.R., MIKULCIK, E. C., 1973, "A Time Domain Modal Vibration Test Technique", *Shock and Vibration*, vol 43(4), pp.21-37.
- IBRAHIM, S.R., MIKULCIK, E. C., 1977, "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Response", *Shock and Vibration*, vol 47(4), pp.183-198.
- IBRAHIM, S.R., 1978, "Modal confidence factor in vibration testing", *The AIAA Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 15, September-October, pp. 313-316.
- IBRAHIM, S. R., BRINCKER, R., ASMUSSEN, J. C., 1996, "Modal Parameter Identification from Response of General Unknown Forces", In: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, pp.446-452.
- JACKSON, L. B., 1996, *Digital Filters and Signal Processing*, 3 ed., Kluwer Pub.
- JUANG, J.-N., 1994, *Applied System Identification*, Prentice Hall Englewood Cliffs.
- KAREEM, A., KIJEWSKI, T., SMITH, C. E., 1999, "Analysis and Performance of Offshore Platforms in Hurricanes", *Wind and Structures*, Vol. 2(1), pp1-23.

- KATAFYGIOTIS, L.S., YUEN, K.V., and CHEN, J.C., 2001, "Bayesian Modal Updating by Use of Ambient Data", *AIAA Journal*, Vol. 39 (2), 271-278.
- KAY, S. M., 1988, "*Modern Spectral Estimation*", Prentice Hall.
- KIJEWSKI, T., KAREEM, A., 2002, "On the Reliability of a Class of System Identification Techniques: Insights from Bootstrap Theory", *Structural Safety*, vol.24 (2-4), pp. 261-280.
- KIJEWSKI, T., KAREEM, A., 2003, "Wavelet Transforms for System Identification in Civil Engineering", *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol. 18, pp339-355.
- KIJEWSKI, T., 2003, "*Full-Scale Measurements and System Identification: A Time-Frequency Perspective*", PhD Thesis, Department of Civil Engineering and Geological Sciences, University of Notre Dame.
- KIM, M., SUTHERLAND, S., 1994, "Polynomial Root-finding Algorithms and Branched Covers", *SIAM J. on Computing*, 23(2), pp 415-436.
- KREIDER, D.L., KULLER, R.G., OSTBERG, D.R., PERKINS, F.W., 1972, "*Introdução à Análise Linear*", Vol I, Ao Livro Técnico S.A. - Ed. UnB.
- KURKA, P.R.G., BAZÁN, F.S.V., 1994, "A Prony-Moment Method for Parameter Identification in Over-Determined Systems", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 8(2), pp145-158.
- LAMARQUE, C. -H., PERNOT, S., CUER, A. , 2000, "Damping Identification in Multi-Degree-of-Freedom Systems via a Wavelet-Logarithmic Decrement – Part I: Theory", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 253, pp. 361-374.
- LARDIES, J., 1996, "Analysis of Multivariate Autoregressive Process", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 10(6), pp747-761.
- LEE, J.K., PARK, Y.S., 1994, "The Complex Envelope Signal and an Application to Structural Modal Parameter Estimation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 8(2), pp. 129-144.
- LEURIDAN, J., VOLD, H., 1984, "A Time Domain Linear Model Estimation Technique for Global Modal Parameter Identification", 2nd International Modal Analysis Conference, Orlando, February.
- LEURIDAN, J.M., BROWN, D.L., ALLEMANG, R.J., 1986, "Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis: A Unifying Approach", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 108, pp.1-8.

- LI, X. R., ZHU, Y., WANG, J., HAN, C., 2003, “Optimal Linear Estimation Fusion – Part I: Unified Fusion Rules”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 49 (9).
- LIN, J., QU, L., 2000, “Feature Extraction Based on Morlet Wavelet and its Application for Mechanical Fault Diagnosis”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 234(1), pp. 135-148.
- LIU, K., 1996, “Modal Parameter Estimation Using the State Space Method”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol 197(4), pp387-402.
- LJUNG, L., GLOVER, K., 1981, “Frequency Domain Versus Time Domain Methods in System Identification”, *Automatica*. Vol. 17, no. 1, pp. 71-86.
- LJUNG, L., 1997, “*System Identification Toolbox for Use with Matlab*”, The MathWorks, <http://www.mathworks.com>.
- LUO, R.C., KAY, M.G., 1990, “A tutorial on multisensor integration and fusion”, In: Industrial Electronics Society, IECON '90, *16th Annual Conference of IEEE*, vol.1, pp. 707-722.
- MAIA, N. M. M., SILVA, J. M. M., 2001, “*Modal Analysis Identification Techniques*”, Phil. Trans. Royal Soc. London, 359, pp 29-40.
- MAKHOUL, J., 1975, “*Linear Prediction: A Tutorial Review*”, Proc. IEEE, vol. 63, pp561-580.
- MALLAT, S., 1999, “*A Wavelet Tour of Signal Processing*”, New York: Academic Press.
- MARI, J., STOICA, P., 2000, “*Vector ARMA Estimation: A Reliable Subspace Approach*”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 48(7).
- MARPLE, S. L. J., 1987, “*Digital Spectral Analysis*”, Prentice Hall.
- MATHIAS, M. H., 1998, “*Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de Processamento de Sinais na Caracterização de Estruturas Mecânicas*”, Tese de Doutorado, UNICAMP.
- MATHWORKS, 2008, *MATLAB® - The Language of Technical Computing*. Disponível em <http://www.mathworks.com/products/matlab/>. Acesso em 20 de fevereiro de 2008.
- MAYMON, G., 1998, *Some Engineering Applications in Random Structures*, Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 178, AIAA – American Institute of Aeronautics and Astronautics.

- MACMILLAN, B., BATEL, M., 2004, “OMA Testing by SLDV with FEM Pre and Post-test Analysis”, In: *Proceedings of IMAC XXII*.
- MAYBECK, P. S., 1979, *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Academic Press Inc., 1st Ed..
- MEIROVITCH, L., 1986, *Elements of Vibration Analysis*, 2 ed., McGraw-Hill.
- MITRA, S. K., 1998, *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill.
- MONTGOMERY, D., RUNGER, G., 1999 , *Applied statistics and probability for engineers*. New York (US): John Wiley & Sons.
- MORETTIN, P. A., TOLOI, C. M., 2004, *Análise de Séries Temporais*, Ed. Edgard Blücher.
- MORLET, J., ARENS, G., FOURGEAU, E., GIARD, D., 1982, “Wave Propagation and Sampling Theory”, *Geophysics*, vol. 47, n. 2, pp. 203-236.
- NYT – NEW YORK TIMES, EDITORIAL, 2008, publicado em 05 de Agosto de 2007. Disponível em: http://www.nytimes.com/2007/08/05/opinion/05sun1.html?_r=1&oref=slogin. Acesso em: 25 Agosto 2007.
- OSBORNE, M.R., SMYTH, G.K., 1991, “A modified Prony Algorithm for Fitting Functions Defined by Difference Equations”, *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, vol.12, 362-382.
- OSBORNE, M.R., SMYTH, G.K., 1995, “A Modified Prony Algorithm for Fitting Sums of Exponential Functions”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, vol. 16, 119-138.
- OTNES, R. K., ENOCHSON, L., 1978, *Applied Time Series Analysis*, John Wiley & Sons.
- PAN, V. Y., 1997, “Solving polynomial equations: some history and recent progress”, *SIAM Review*, 39, pp. 187-220.
- PEETERS, B., DE ROECK, G., POLLET, T., SCHUEREMANS, L., 1995, “Stochastic subspace techniques applied to parameter identification of civil engineering structures”. In: *Proceedings of the International Conference MV2 on New Advances in Modal Synthesis of Large Structures, Non-linear, Damped and Non-deterministic Cases*, pp. 151-162, Lyon, France, October.
- PEETERS, B., 2000, *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*, PhD Thesis, Department of Civil Engineering, Katholieke Universiteit Leuven.

- PEETERS, B., DE ROECK, G., 2001, “Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, ASME, vol. 123(4), pp. 659-667.
- PEETERS, B., VENTURA, C. E., 2003, “Comparative Study of Modal Analysis Techniques for Bridge Dynamic Characteristics”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17(5), pp.965-988.
- PEETERS, B., VANHOLLEBEKE, F., VAN DER AUWERAER, H., 2005, “Operational PolyMAX for estimating the dynamic properties of a stadium structure during a football game”. In: *Proceedings of IMAC XXIII*, Orlando.
- PEREIRA, B. B., PAIS, M. B. Z., SALES, P. R. H., 1986, *Análise Espectral de Séries Temporais: Uma Introdução para Engenharia, Economia e Estatística*, Eletrobrás.
- PETERKA, V., 1981, “Bayesian system identification”, *Automatica*, Vol. 17, no. 1, pp. 41-53.
- PETSOUNIS, K. A., FASSOIS, D., 2001, “Parametric Time-Domain Methods for the Identification of Vibrating Structures – A Critical Comparison and Assessment”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 15(6), pp 1031-1060.
- PIOMBO, B. A. D., FASANA, A., MARCHESIELLO, S., RUZZENE, M., 2000, “Modelling and Identification of the Dynamic Response of a Supported Bridge”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 14, pp. 74-89.
- RADHAKRISHNA, R. -C., PATHAKB, P. K., KOLTCHINSKIIB, V. I., 1997, “Bootstrap by sequential resampling”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 64, Issue 2, pp 257-281.
- RAO, S. S., 1995, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley.
- RAO, B. D., ARUN, K.S., 1992, “Model Based Processing of Signals: A State Space Approach,” In: *Proceedings of IEEE*, vol 80(2), pp 283-309.
- REID, R. L., 2008, “The Infrastructure Crisis”, *Civil Engineering Magazine*, ASCE, January. Disponível em: <http://www.pubs.asce.org/magazines/CEMag/>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2008.
- REN, W.-X., ZATAR, W., HARIK, I.E., 2004, “Ambient vibration-based seismic evaluation of a continuous girder bridge”, *Engineering Structures*, Vol. 26 (5) pp. 631-640.

- RICHARDSON, M., FORMENTI, D. L., 1982, “Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials”, In: Proceedings of IMAC I.
- RIOUL, O., DUHAMEL, P., 1992, “Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38(2), pp. 569-586.
- RODRIGUES, J., BRINKER, R., ANDERSEN, P., 2004, “Improvement of Frequency Domain Output-Only Modal Identification from the Application of Random Decrement Techniques”, In: *Proceedings of The 22nd International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Detroit, Michigan.
- RODRIGUES, BRINKER, 2005, “Application of Random Decrement Technique in Operational Modal Analysis”, In: *Proceedings of The 1st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC)*, Copenhagen, Denmark.
- ROSA, L. F. L., 1991, *Desenvolvimento de um Sistema Computacional para a Determinação de Parâmetros Modais de Estruturas através do Método do Círculo Ajustado*, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE.
- ROSENOW, S.-E., SCHLOTTMANN, G., 2005, “ Investigation of the Dynamic Behaviour of Ship Structures using Classical and Operational Modal Analysis”, In: *Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC)*, Copenhagen, Denmark.
- SALAZAR, J.W.A., 2000, *Identificação de Sistemas de Estruturas Mecânicas e Aplicações*, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-RJ.
- SCHIMEL, B.D. and GRANTHAM, W.J., 1995, *Linear State Space Models*, in The Engineering Handbook, R.C. Dorf, ed., CRC Press, Boca Raton, pp. 1058-1069.
- SILVA, R. M., 2004, *Representação de Modelos de Sistemas Dinâmicos: Espaço de Estados*, Notas de Aula, PUCRS - Faculdade de Engenharia - Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica, <http://www.em.pucrs.br/~molina/> .
- SORENSEN, H. W., 1980, *Parameter Estimation: Principles and Problems*, Control and Systems Theory Series, Marcel Dekker Ed..
- STASZEWSKI, W.J., TOMLINSON, G.R., 1994, “Application of the Wavelet Transform to Fault detection in a Spur Gear”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 8(3), pp. 289-307.

- STASZEWSKI, W.J., 1997, "Identification of Damping in MDOF Systems Using Time-Scale Decomposition", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 203(2), p. 283-305.
- STOICA, P., SÖDERSTRÖM, T., 1983, "Optimal Instrumental Variable Estimation and Approximate Implementations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28(7), pp. 757- 772.
- STOICA, P., MCKELVEY, T., MARI, J., 2000-a, "MA Estimation in Polynomial Time", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 48(7), pp. 1999-2012.
- STOICA, P., JANSSON, M., 2000-b, "MIMO System Identification: State Space and Subspace Approximations versus Transfer Functions and Instrumental Variables", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 48(11), pp. 3087-3099.
- STOICA, P., MOSES, R., 2005, *Spectral Analysis of Signals*, New Jersey: Prentice-Hall.
- SCHWARZ, R. J., FRIEDLAND, B., 1972, *Sistemas Lineares*, Ao Livro Técnico S. A. e Ed. da Universidade de São Paulo.
- TAMURA, Y., ZHANG, L., YOSHIDA, A., NAKATA, S., ITOH, T., 2002, "Ambient vibration test and modal identification of structures by FDD and 2DOF-RD Technique", In: *Proceedings of the Structural Engineers World Congress*, SEWC2002, CD-ROM, T1-1-a-1, pp.8.
- TEOLIS, 1998, *Computational Signal Processing with Wavelets*, Boston:Birkhauser.
- TITTERTON, D., WESTON, J., 1997, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series. 1st Ed.
- TODOROVSKA, M. I., 2001, *Estimation of Instantaneous Frequency of Signals Using the Continuous Wavelet Transform*, Report CE 01-07, Department of Civil Engineering, University of Southern California.
- VAIDYANATHAN, P. P., 1993, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall.
- VAN DER AUWERAER, H., PEETERS, B., 2003, "International Research Projects on Structural Health Monitoring: An Overview", *Structural Health Monitoring*, Vol 2(4), pp341-358.
- VANDERMEULEN, R., KIJEWSKI, T. and KAREEM, A., 2000, "Bootstrap Method for Estimation of Spectral Bandwidth with Limited Observations", In: *Proceedings of ASCE Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, Notre Dame.

- VAN OVERSCHEE, P., DE MOOR, B., 1991, "Subspace Algorithms for the Stochastic Identification Problem", In: *Proceedings of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp.1321-1326.
- VAN OVERSCHEE, P., DE MOOR, B.,1993, "Subspace algorithms for the stochastic identification problem". *Automatica*, vol. 29, 649–660.
- VAN OVERSCHEE, P., 1995, *Subspace Identification: Theory, Implementation, Application*, PhD thesis, Faculty of Engineering, K.U.Leuven.
- VAN OVERSCHEE, P., DE MOOR, B., 1996, *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*, Kluwer Academic Publishers.
- VOLD, H. & ROCKLIN, G.T., 1982, "The Numerical Implementation of a Multi-Input Modal Estimation Method for Mini Computers", In: *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference – I IMAC*, pp. 542-548, Orlando.
- WELCH, G., BISHOP, G., 2004, Report TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC 27599-3175, April 5, 2004.
- WONG, K.Y., POLAK, E.,1967, "Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Variable Method", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 12(6), pp.707-718.
- YAN, B.F., MIYAMOTO, A., BRÜHWILER, E., 2006, "Wavelet transform-based modal parameter identification considering uncertainty", *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 291(1-2), pp. 285-301.

APÊNDICE A

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Tabela A.1 – Análises realizadas por simulações numéricas cujos resultados estão apresentados neste Apêndice.

Análise	Dados		Estimação		
	Período	Ruído	Tipo	Recur- sivi- dade	Fusão de estimativas
1A	2 horas	não	determinística	não	
1B	2 horas	10%			
2A	10×30min ⁽¹⁾ 10×12min ⁽¹⁾ 28×12min ⁽¹⁾ 20×6min ⁽¹⁾ 58×6min ⁽¹⁾ 40×3min ⁽¹⁾ 118×3min ⁽¹⁾	não	média e intervalo de confiança entre amostras		
2B		10%			
3A		não	reamostragem <i>bootstrap</i> e estimativa de média e intervalo confiança para cada novo conjunto de amostras		
3B		10%			

(1) segmentos obtidos com superposição de 2/3, ou seja, 66% sobre amostra anterior.

Tabela A.2 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento segundo cada uma das técnicas de estimação abordadas para o sinal simulado sem adição de ruído – Simulações 1A.

Valor exato			Estimativa determinística das frequências naturais amortecidas (respostas de três GL, 2 horas, sem ruído)				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI ⁽¹⁾
Frequência natural (Hz)	1º modo	8,546	8,543	8,546	8,544	8,546	8,549
	2º modo	34,186	34,184	34,188	34,181	34,186	34,190
	3º modo	76,935	76,936	76,936	76,922	76,933	76,931
Amortecimento (%)	1º modo	1,000	0,995	1,000	1,004	0,992	1,000
	2º modo	0,250	0,246	0,249	0,255	0,249	0,250
	3º modo	0,111	0,109	0,109	0,111	0,111	0,114

(1) – Valores obtidos a partir dos últimos 40 minutos do sinal.

Tabela A.3 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento segundo cada uma das técnicas de estimação abordadas para o sinal simulado com adição de ruído – Simulação 1B.

Valor exato			Estimativa determinística das frequências naturais amortecidas (respostas de três GL, 2 horas, com ruído)				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI ⁽¹⁾
Frequência natural (Hz)	1º modo	8,546	8,543	8,544	8,544	8,546	8,549
	2º modo	34,186	34,185	34,192	34,182	34,187	34,189
	3º modo	76,935	76,933	76,931	76,924	76,932	76,929
Amortecimento (%)	1º modo	1,000	0,996	1,002	1,001	0,993	1,003
	2º modo	0,250	0,247	0,249	0,254	0,250	0,249
	3º modo	0,111	0,109	0,109	0,113	0,111	0,1143

(1) – Valores obtidos a partir dos últimos 40 minutos do sinal.

Tabela A.4 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimados na simulação 2A.

Segmentação	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,009)	8,543 (± 0,014)	8,542 (± 0,008)	8,546 (± 0,008)	8,547 (± 0,007)
		2° modo	34,184 (± 0,024)	34,184 (± 0,030)	34,177 (± 0,015)	34,186 (± 0,012)	34,186 (± 0,013)
		3° modo	76,935 (± 0,013)	76,935 (± 0,020)	76,912 (± 0,013)	76,933 (± 0,010)	76,935 (± 0,010)
	Amort. (%)	1° modo	0,996 (± 0,083)	1,006 (± 0,104)	1,045 (± 0,087)	0,985 (± 0,061)	0,981 (± 0,056)
		2° modo	0,246 (± 0,013)	0,250 (± 0,026)	0,265 (± 0,019)	0,250 (± 0,015)	0,251 (± 0,012)
		3° modo	0,112 (± 0,031)	0,109 (± 0,019)	0,116 (± 0,012)	0,112 (± 0,010)	0,113 (± 0,010)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,015)	8,543 (± 0,023)	8,542 (± 0,018)	8,546 (± 0,019)	8,549 (± 0,019)
		2° modo	34,184 (± 0,032)	34,186 (± 0,045)	34,176 (± 0,023)	34,186 (± 0,017)	34,186 (± 0,019)
		3° modo	76,936 (± 0,026)	76,933 (± 0,044)	76,912 (± 0,028)	76,940 (± 0,079)	76,935 (± 0,019)
	Amort. (%)	1° modo	0,989 (± 0,209)	0,997 (± 0,250)	1,041 (± 0,218)	0,987 (± 0,119)	0,989 (± 0,126)
		2° modo	0,244 (± 0,043)	0,246 (± 0,077)	0,265 (± 0,043)	0,249 (± 0,040)	0,251 (± 0,036)
		3° modo	0,109 (± 0,033)	0,110 (± 0,041)	0,115 (± 0,033)	0,111 (± 0,023)	0,112 (± 0,023)
28 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,019)	8,542 (± 0,026)	8,542 (± 0,019)	8,547 (± 0,017)	8,547 (± 0,015)
		2° modo	34,184 (± 0,019)	34,185 (± 0,026)	34,176 (± 0,020)	34,186 (± 0,014)	34,185 (± 0,014)
		3° modo	76,936 (± 0,016)	76,934 (± 0,030)	76,913 (± 0,011)	76,936 (± 0,060)	76,935 (± 0,010)
	Amort. (%)	1° modo	0,995 (± 0,202)	1,001 (± 0,252)	1,046 (± 0,217)	0,992 (± 0,116)	0,990 (± 0,126)
		2° modo	0,246 (± 0,042)	0,249 (± 0,069)	0,266 (± 0,030)	0,249 (± 0,026)	0,251 (± 0,026)
		3° modo	0,109 (± 0,021)	0,108 (± 0,031)	0,116 (± 0,023)	0,112 (± 0,017)	0,113 (± 0,017)

Tabela A.4 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas na simulação 2A (continuação).

Segmentação	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento					
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI	
20 × 6 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546	8,546	8,543	8,543	8,546	8,547
		2° modo	34,186	34,185	34,186	34,177	34,186	34,186
		3° modo	76,935	76,936	76,933	76,913	76,933	76,934
	Amort. (%)	1° modo	1,000	0,976	0,963	1,025	0,994	0,993
		2° modo	0,250	0,242	0,243	0,263	0,249	0,251
		3° modo	0,111	0,110	0,109	0,115	0,111	0,113
58 × 6 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546	8,543	8,543	8,542	8,547	8,547
		2° modo	34,186	34,184	34,187	34,176	34,186	34,186
		3° modo	76,935	76,935	76,936	76,932	76,933	76,935
	Amort. (%)	1° modo	1,000	0,991	0,991	1,028	0,993	0,993
		2° modo	0,250	0,245	0,244	0,262	0,249	0,252
		3° modo	0,111	0,110	0,110	0,114	0,111	0,113
40 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546	8,545	8,542	8,543	8,546	8,546
		2° modo	34,186	34,186	34,189	34,179	34,187	34,186
		3° modo	76,935	76,935	76,936	76,933	76,933	76,935
	Amort. (%)	1° modo	1,000	1,001	0,987	1,006	0,988	0,986
		2° modo	0,250	0,246	0,244	0,260	0,252	0,252
		3° modo	0,111	0,110	0,105	0,113	0,111	0,112

Tabela A.4 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas na simulação 2A (continuação).

Segmentação	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento					
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI	
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546	8,544 (± 0,028)	8,543 (± 0,034)	8,543 (± 0,029)	8,547 (± 0,020)	8,546 (± 0,020)
		2° modo	34,186	34,184 (± 0,022)	34,188 (± 0,030)	34,178 (± 0,010)	34,187 (± 0,011)	34,186 (± 0,013)
		3° modo	76,935	76,935 (± 0,014)	76,936 (± 0,006)	76,913 (± 0,012)	76,933 (± 0,014)	76,935 (± 0,014)
	Amort. (%)	1° modo	1,000	0,999 (± 0,190)	0,995 (± 0,154)	1,014 (± 0,219)	0,993 (± 0,199)	0,986 (± 0,215)
		2° modo	0,250	0,245 (± 0,047)	0,244 (± 0,029)	0,258 (± 0,050)	0,252 (± 0,046)	0,252 (± 0,045)
		3° modo	0,111	0,107 (± 0,017)	0,108 (± 0,016)	0,112 (± 0,013)	0,111 (± 0,023)	0,112 (± 0,025)

Tabela A.5 – Número de amostras aproveitadas para a estimação dos valores médios e intervalos de confiança das frequências naturais e taxas de amortecimento – Simulação 2A.

Segmentação	Aproveitamento das estimativas da amostras					
	RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI ⁽¹⁾	
10 × 30 min	1º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	2º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	3º modo	08 (80%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
10 × 12 min	1º modo	09 (90%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	2º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	3º modo	08 (80%)	09 (90%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
28 × 12 min	1º modo	27 (96%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)
	2º modo	28 (100%)	27 (96%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)
	3º modo	25 (89%)	27 (96%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)
20 × 6 min	1º modo	19 (95%)	18 (90%)	19 (95%)	20 (100%)	19 (95%)
	2º modo	19 (95%)	16 (80%)	19 (95%)	20 (100%)	10 (100%)
	3º modo	15 (75%)	16 (80%)	19 (95%)	20 (100%)	19 (95%)
58 × 6 min	1º modo	55 (95%)	49 (85%)	55 (95%)	58 (100%)	57 (98%)
	2º modo	55 (95%)	49 (85%)	52 (90%)	58 (100%)	57 (98%)
	3º modo	44 (76%)	48 (83%)	53 (91%)	57 (98%)	57 (98%)
40 × 3 min	1º modo	32 (80%)	33 (83%)	35 (88%)	37 (93%)	37 (93%)
	2º modo	32 (80%)	22 (55%)	32 (80%)	38 (95%)	39 (98%)
	3º modo	26 (65%)	17 (43%)	33 (83%)	38 (95%)	38 (95%)
118 × 3 min	1º modo	101 (86%)	93 (79%)	107 (91%)	110 (93%)	111 (94%)
	2º modo	91 (77%)	78 (66%)	92 (78%)	110 (93%)	112 (95%)
	3º modo	76 (64%)	63 (53%)	93 (79%)	106 (90%)	109 (92%)

Tabela A.5 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimados na simulação 2B.

Segmentação	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,010)	8,543 (± 0,014)	8,542 (± 0,008)	8,547 (± 0,010)	8,547 (± 0,019)
		2° modo	34,184 (± 0,022)	34,185 (± 0,031)	34,177 (± 0,015)	34,186 (± 0,012)	34,187 (± 0,010)
		3° modo	76,933 (± 0,015)	76,935 (± 0,020)	76,912 (± 0,013)	76,933 (± 0,010)	76,936 (± 0,015)
	Amort. (%)	1° modo	0,996 (± 0,080)	1,008 (± 0,104)	1,045 (± 0,087)	0,991 (± 0,061)	0,992 (± 0,208)
		2° modo	0,247 (± 0,015)	0,250 (± 0,025)	0,265 (± 0,019)	0,249 (± 0,012)	0,253 (± 0,043)
		3° modo	0,113 (± 0,029)	0,108 (± 0,019)	0,116 (± 0,012)	0,111 (± 0,011)	0,111 (± 0,017)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,018)	8,543 (± 0,023)	8,542 (± 0,018)	8,546 (± 0,020)	8,549 (± 0,019)
		2° modo	34,185 (± 0,029)	34,186 (± 0,045)	34,176 (± 0,023)	34,187 (± 0,017)	34,186 (± 0,019)
		3° modo	76,934 (± 0,025)	76,933 (± 0,045)	76,912 (± 0,029)	76,933 (± 0,018)	76,935 (± 0,019)
	Amort. (%)	1° modo	0,990 (± 0,202)	0,999 (± 0,255)	1,041 (± 0,219)	0,987 (± 0,119)	0,989 (± 0,126)
		2° modo	0,246 (± 0,041)	0,246 (± 0,075)	0,264 (± 0,043)	0,249 (± 0,037)	0,251 (± 0,036)
		3° modo	0,110 (± 0,036)	0,109 (± 0,040)	0,115 (± 0,033)	0,111 (± 0,024)	0,112 (± 0,023)
28 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,020)	8,542 (± 0,027)	8,542 (± 0,019)	8,542 (± 0,019)	8,547 (± 0,015)
		2° modo	34,184 (± 0,018)	34,185 (± 0,027)	34,176 (± 0,020)	34,176 (± 0,020)	34,185 (± 0,014)
		3° modo	76,934 (± 0,016)	76,935 (± 0,031)	76,913 (± 0,011)	76,913 (± 0,011)	76,935 (± 0,010)
	Amort. (%)	1° modo	0,996 (± 0,200)	1,003 (± 0,251)	1,046 (± 0,217)	1,046 (± 0,217)	0,990 (± 0,126)
		2° modo	0,248 (± 0,038)	0,249 (± 0,069)	0,265 (± 0,030)	0,265 (± 0,030)	0,251 (± 0,026)
		3° modo	0,112 (± 0,025)	0,108 (± 0,031)	0,116 (± 0,022)	0,116 (± 0,022)	0,113 (± 0,017)

Tabela A.5 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimados na simulação 2B (continuação).

Segmentação	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento				
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI
20 × 6 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,020)	8,543 (± 0,035)	8,543 (± 0,029)	8,547 (± 0,024)	8,547 (± 0,007)
		2° modo	34,184 (± 0,018)	34,187 (± 0,035)	34,177 (± 0,023)	34,186 (± 0,022)	34,186 (± 0,012)
		3° modo	76,934 (± 0,016)	76,935 (± 0,043)	76,913 (± 0,020)	76,933 (± 0,019)	76,935 (± 0,012)
	Amort. (%)	1° modo	0,996 (± 0,200)	0,964 (± 0,202)	1,025 (± 0,216)	0,993 (± 0,227)	0,981 (± 0,054)
		2° modo	0,248 (± 0,038)	0,245 (± 0,080)	0,263 (± 0,069)	0,250 (± 0,039)	0,250 (± 0,011)
		3° modo	0,112 (± 0,025)	0,111 (± 0,029)	0,115 (± 0,038)	0,111 (± 0,025)	0,112 (± 0,014)
58 × 6 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,025)	8,543 (± 0,026)	8,542 (± 0,017)	8,547 (± 0,018)	8,547 (± 0,014)
		2° modo	34,185 (± 0,015)	34,187 (± 0,020)	34,176 (± 0,011)	34,187 (± 0,010)	34,186 (± 0,008)
		3° modo	76,934 (± 0,014)	76,934 (± 0,011)	76,932 (± 0,012)	76,933 (± 0,013)	76,936 (± 0,012)
	Amort. (%)	1° modo	0,998 (± 0,271)	0,988 (± 0,242)	1,028 (± 0,195)	0,995 (± 0,177)	0,987 (± 0,153)
		2° modo	0,247 (± 0,071)	0,244 (± 0,058)	0,262 (± 0,049)	0,250 (± 0,038)	0,252 (± 0,035)
		3° modo	0,111 (± 0,037)	0,110 (± 0,020)	0,114 (± 0,025)	0,111 (± 0,024)	0,112 (± 0,021)
40 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,032)	8,543 (± 0,037)	8,542 (± 0,017)	8,547 (± 0,018)	8,547 (± 0,025)
		2° modo	34,186 (± 0,028)	34,189 (± 0,020)	34,176 (± 0,011)	34,187 (± 0,010)	34,187 (± 0,015)
		3° modo	76,933 (± 0,030)	76,937 (± 0,006)	76,932 (± 0,012)	76,933 (± 0,013)	76,935 (± 0,026)
	Amort. (%)	1° modo	1,002 (± 0,270)	0,988 (± 0,260)	1,028 (± 0,195)	0,995 (± 0,177)	0,997 (± 0,228)
		2° modo	0,245 (± 0,084)	0,246 (± 0,040)	0,262 (± 0,049)	0,250 (± 0,038)	0,252 (± 0,037)
		3° modo	0,111 (± 0,026)	0,111 (± 0,016)	0,114 (± 0,025)	0,111 (± 0,024)	0,110 (± 0,024)

Tabela A.5 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimados na simulação 2B (continuação).

Segmentação	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento					
			RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI	
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546	8,544 (± 0,025)	8,543 (± 0,034)	8,543 (± 0,029)	8,546 (± 0,020)	8,547 (± 0,019)
		2° modo	34,186	34,185 (± 0,054)	34,188 (± 0,029)	34,178 (± 0,011)	34,187 (± 0,014)	34,187 (± 0,010)
		3° modo	76,935	76,933 (± 0,020)	76,934 (± 0,013)	76,913 (± 0,012)	76,933 (± 0,015)	76,936 (± 0,015)
	Amort. (%)	1° modo	1,000	0,997 (± 0,194)	0,996 (± 0,156)	1,014 (± 0,219)	0,991 (± 0,197)	0,992 (± 0,208)
		2° modo	0,250	0,247 (± 0,023)	0,244 (± 0,006)	0,257 (± 0,050)	0,252 (± 0,054)	0,253 (± 0,043)
		3° modo	0,111	0,109 (± 0,024)	0,109 (± 0,020)	0,112 (± 0,018)	0,111 (± 0,025)	0,111 (± 0,017)

Tabela A.6 – Número de amostras aproveitadas para a estimação dos valores médios e intervalos de confiança das frequências naturais e taxas de amortecimento – Simulação 2B.

Segmentação		Aproveitamento das estimativas da amostras				
		RD-AR	RD-CWT	FDD	SSM	SSI ⁽¹⁾
10 × 30 min	1º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	2º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	3º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
10 × 12 min	1º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	2º modo	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
	3º modo	09 (90%)	09 (90%)	10 (100%)	10 (100%)	10 (100%)
28 × 12 min	1º modo	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)
	2º modo	28 (100%)	27 (96%)	28 (100%)	28 (100%)	28 (100%)
	3º modo	27 (96%)	27 (96%)	28 (100%)	28 (100%)	25 (89%)
20 × 6 min	1º modo	19 (95%)	18 (90%)	19 (95%)	20 (100%)	19 (95%)
	2º modo	19 (95%)	15 (75%)	19 (95%)	20 (100%)	19 (95%)
	3º modo	16 (80%)	15 (75%)	19 (95%)	20 (100%)	18 (90%)
58 × 6 min	1º modo	55 (95%)	50 (86%)	55 (95%)	57 (98%)	57 (98%)
	2º modo	56 (97%)	48 (83%)	53 (91%)	58 (100%)	57 (98%)
	3º modo	49 (84%)	46 (79%)	53 (91%)	58 (100%)	50 (86%)
40 × 3 min	1º modo	34 (85%)	33 (83%)	35 (88%)	36 (90%)	33 (83%)
	2º modo	36 (90%)	21 (53%)	32 (80%)	39 (98%)	35 (88%)
	3º modo	29 (73%)	17 (43%)	32 (80%)	39 (98%)	28 (70%)
118 × 3 min	1º modo	104 (88%)	93 (79%)	107 (91%)	112 (95%)	101 (86%)
	2º modo	101 (86%)	78 (66%)	92 (78%)	115 (97%)	102 (86%)
	3º modo	87 (73%)	63 (53%)	91 (77%)	108 (92%)	78 (66%)

Tabela A.7 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica RD-AR na simulação 3A.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica RD-AR		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)
		2° modo 34,186	34,183 (± 0,006)	34,183 (± 0,006)	34,183 (± 0,006)
		3° modo 76,935	76,936 (± 0,004)	76,935 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	0,999 (± 0,023)	0,999 (± 0,024)	0,999 (± 0,023)
		2° modo 0,250	0,246 (± 0,004)	0,246 (± 0,004)	0,246 (± 0,004)
		3° modo 0,111	0,112 (± 0,008)	0,112 (± 0,008)	0,112 (± 0,008)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)
		2° modo 34,186	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo 76,935	76,935 (± 0,006)	76,935 (± 0,006)	76,935 (± 0,006)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	0,998 (± 0,037)	0,999 (± 0,038)	0,998 (± 0,037)
		2° modo 0,250	0,244 (± 0,008)	0,244 (± 0,008)	0,244 (± 0,008)
		3° modo 0,111	0,111 (± 0,008)	0,111 (± 0,009)	0,111 (± 0,008)
28 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo 34,186	34,183 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo 76,935	76,936 (± 0,005)	76,936 (± 0,005)	76,936 (± 0,005)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	1,001 (± 0,044)	1,000 (± 0,041)	0,998 (± 0,042)
		2° modo 0,250	0,246 (± 0,009)	0,246 (± 0,009)	0,246 (± 0,009)
		3° modo 0,111	0,111 (± 0,007)	0,111 (± 0,007)	0,111 (± 0,007)

Tabela A.7 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica RD-AR na simulação 3A (continuação).

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica RD-AR		
			B=50	B=200	B=400
20 × 6 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)
	Amort. (%)	1° modo	0,996 (± 0,043)	0,997 (± 0,040)	0,997 (± 0,040)
		2° modo	0,246 (± 0,012)	0,245 (± 0,012)	0,246 (± 0,012)
		3° modo	0,110 (± 0,008)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)
58 × 6 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,005)	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)
		2° modo	34,184 (± 0,006)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)
	Amort. (%)	1° modo	0,996 (± 0,041)	0,995 (± 0,044)	0,997 (± 0,043)
		2° modo	0,247 (± 0,011)	0,246 (± 0,012)	0,246 (± 0,011)
		3° modo	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)

Tabela A.7 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica RD-AR na simulação 3A (continuação).

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica RD-AR		
			B=50	B=200	B=400
40 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)	8,544 (± 0,005)
		2° modo	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,937 (± 0,012)	76,936 (± 0,007)	76,936 (± 0,006)
	Amort. (%)	1° modo	0,994 (± 0,040)	0,993 (± 0,044)	0,993 (± 0,046)
		2° modo	0,246 (± 0,012)	0,246 (± 0,010)	0,245 (± 0,011)
		3° modo	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,005)
	Amort. (%)	1° modo	0,999 (± 0,041)	0,995 (± 0,042)	0,996 (± 0,043)
		2° modo	0,244 (± 0,008)	0,244 (± 0,011)	0,245 (± 0,011)
		3° modo	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)

Tabela A.8 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica RD-CWT na simulação 3A.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica RD-CWT		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,544 (± 0,003)	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,003)
		2° modo 34,186	34,184 (± 0,007)	34,184 (± 0,008)	34,184 (± 0,008)
		3° modo 76,935	76,934 (± 0,006)	76,934 (± 0,006)	76,934 (± 0,006)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	1,006 (± 0,028)	1,009 (± 0,029)	1,008 (± 0,028)
		2° modo 0,250	0,251 (± 0,008)	0,252 (± 0,007)	0,252 (± 0,007)
		3° modo 0,111	0,110 (± 0,004)	0,110 (± 0,005)	0,110 (± 0,005)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)
		2° modo 34,186	34,185 (± 0,008)	34,186 (± 0,008)	34,185 (± 0,008)
		3° modo 76,935	76,935 (± 0,007)	76,935 (± 0,009)	76,934 (± 0,008)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	1,002 (± 0,045)	1,005 (± 0,042)	1,005 (± 0,042)
		2° modo 0,250	0,247 (± 0,013)	0,247 (± 0,014)	0,247 (± 0,014)
		3° modo 0,111	0,108 (± 0,007)	0,109 (± 0,008)	0,109 (± 0,008)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,543 (± 0,005)	8,543 (± 0,005)	8,543 (± 0,005)
		2° modo 34,186	34,187 (± 0,007)	34,186 (± 0,006)	34,186 (± 0,006)
		3° modo 76,935	76,933 (± 0,007)	76,934 (± 0,006)	76,934 (± 0,007)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	1,002 (± 0,053)	0,995 (± 0,055)	0,996 (± 0,053)
		2° modo 0,250	0,251 (± 0,016)	0,250 (± 0,018)	0,250 (± 0,018)
		3° modo 0,111	0,107 (± 0,009)	0,107 (± 0,008)	0,107 (± 0,008)

Tabela A.9 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica FDD na simulação 3A.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica FDD		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)
		2° modo	34,184 (± 0,003)	34,184 (± 0,003)	34,184 (± 0,003)
		3° modo	76,929 (± 0,011)	76,929 (± 0,010)	76,930 (± 0,008)
	Amort. (%)	1° modo	0,998 (± 0,017)	0,999 (± 0,018)	0,998 (± 0,017)
		2° modo	0,250 (± 0,003)	0,251 (± 0,003)	0,251 (± 0,003)
		3° modo	0,111 (± 0,002)	0,110 (± 0,002)	0,110 (± 0,002)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo	34,184 (± 0,004)	34,184 (± 0,004)	34,184 (± 0,004)
		3° modo	76,929 (± 0,021)	76,929 (± 0,015)	76,930 (± 0,010)
	Amort. (%)	1° modo	1,001 (± 0,041)	1,002 (± 0,037)	1,001 (± 0,036)
		2° modo	0,250 (± 0,007)	0,250 (± 0,008)	0,250 (± 0,008)
		3° modo	0,111 (± 0,006)	0,110 (± 0,006)	0,110 (± 0,006)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,006)	8,544 (± 0,005)	8,544 (± 0,005)
		2° modo	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,930 (± 0,005)	76,929 (± 0,006)	76,930 (± 0,008)
	Amort. (%)	1° modo	0,999 (± 0,045)	0,996 (± 0,047)	0,997 (± 0,048)
		2° modo	0,253 (± 0,014)	0,253 (± 0,015)	0,253 (± 0,014)
		3° modo	0,109 (± 0,007)	0,109 (± 0,006)	0,109 (± 0,006)

Tabela A.10 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica SSM na simulação 3A.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica SSM		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,002)	8,546 (± 0,002)	8,546 (± 0,002)
		2° modo	34,186 (± 0,004)	34,186 (± 0,005)	34,186 (± 0,006)
		3° modo	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,017)	0,987 (± 0,019)	0,988 (± 0,019)
		2° modo	0,250 (± 0,004)	0,249 (± 0,004)	0,249 (± 0,004)
		3° modo	0,111 (± 0,003)	0,112 (± 0,003)	0,112 (± 0,003)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,004)	8,547 (± 0,004)	8,547 (± 0,004)
		2° modo	34,186 (± 0,003)	34,186 (± 0,003)	34,186 (± 0,003)
		3° modo	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,023)	0,989 (± 0,024)	0,990 (± 0,024)
		2° modo	0,250 (± 0,007)	0,248 (± 0,007)	0,248 (± 0,007)
		3° modo	0,111 (± 0,004)	0,112 (± 0,004)	0,112 (± 0,004)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,002)	8,547 (± 0,003)	8,547 (± 0,002)
		2° modo	34,186 (± 0,003)	34,186 (± 0,003)	34,187 (± 0,003)
		3° modo	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,026)	0,989 (± 0,031)	0,989 (± 0,026)
		2° modo	0,250 (± 0,008)	0,249 (± 0,008)	0,249 (± 0,008)
		3° modo	0,111 (± 0,005)	0,111 (± 0,004)	0,111 (± 0,005)

Tabela A.11 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica SSI na simulação 3A.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3A – Técnica SSI		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)
		2° modo	34,186 (± 0,006)	34,183 (± 0,006)	34,183 (± 0,007)
		3° modo	76,935 (± 0,003)	76,936 (± 0,003)	76,936 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,028)	1,005 (± 0,025)	1,004 (± 0,025)
		2° modo	0,250 (± 0,007)	0,249 (± 0,007)	0,249 (± 0,007)
		3° modo	0,111 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,005)	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)
		2° modo	34,186 (± 0,007)	34,185 (± 0,006)	34,185 (± 0,005)
		3° modo	76,935 (± 0,007)	76,935 (± 0,006)	76,935 (± 0,005)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,044)	1,003 (± 0,035)	1,002 (± 0,024)
		2° modo	0,250 (± 0,012)	0,247 (± 0,011)	0,248 (± 0,007)
		3° modo	0,111 (± 0,005)	0,109 (± 0,006)	0,110 (± 0,004)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,005)	8,544 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo	34,186 (± 0,006)	34,185 (± 0,007)	34,185 (± 0,007)
		3° modo	76,935 (± 0,005)	76,936 (± 0,005)	76,936 (± 0,005)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,053)	0,992 (± 0,046)	0,994 (± 0,044)
		2° modo	0,250 (± 0,013)	0,248 (± 0,014)	0,248 (± 0,014)
		3° modo	0,111 (± 0,007)	0,108 (± 0,007)	0,108 (± 0,006)

Tabela A.12 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica RD-AR na simulação 3B.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3B – Técnica RD-AR		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)
		2° modo	34,183 (± 0,005)	34,183 (± 0,006)	34,183 (± 0,006)
		3° modo	76,935 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,030)	1,002 (± 0,030)	1,002 (± 0,028)
		2° modo	0,250 (± 0,004)	0,246 (± 0,004)	0,246 (± 0,004)
		3° modo	0,111 (± 0,006)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,003)	8,543 (± 0,009)	8,544 (± 0,007)
		2° modo	34,183 (± 0,005)	34,183 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,935 (± 0,006)	76,935 (± 0,006)	76,936 (± 0,005)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,032)	1,003 (± 0,038)	1,002 (± 0,037)
		2° modo	0,250 (± 0,008)	0,243 (± 0,009)	0,243 (± 0,008)
		3° modo	0,111 (± 0,007)	0,109 (± 0,007)	0,109 (± 0,008)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)
		2° modo	34,186 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)	34,184 (± 0,005)
		3° modo	76,935 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)	76,936 (± 0,004)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,037)	0,996 (± 0,047)	0,996 (± 0,045)
		2° modo	0,250 (± 0,009)	0,245 (± 0,011)	0,245 (± 0,011)
		3° modo	0,111 (± 0,007)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,006)

Tabela A.13 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica RD-CWT na simulação 3B.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3B – Técnica RD-CWT		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,543 (± 0,003)	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)
		2° modo 34,186	34,183 (± 0,010)	34,183 (± 0,010)	34,184 (± 0,010)
		3° modo 76,935	76,934 (± 0,007)	76,934 (± 0,007)	76,934 (± 0,007)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	1,008 (± 0,031)	1,010 (± 0,028)	1,010 (± 0,028)
		2° modo 0,250	0,253 (± 0,005)	0,253 (± 0,007)	0,253 (± 0,007)
		3° modo 0,111	0,104 (± 0,003)	0,104 (± 0,004)	0,104 (± 0,004)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)
		2° modo 34,186	34,186 (± 0,007)	34,186 (± 0,008)	34,185 (± 0,009)
		3° modo 76,935	76,936 (± 0,008)	76,935 (± 0,009)	76,934 (± 0,007)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	1,008 (± 0,048)	1,005 (± 0,047)	1,004 (± 0,042)
		2° modo 0,250	0,246 (± 0,015)	0,247 (± 0,015)	0,247 (± 0,014)
		3° modo 0,111	0,106 (± 0,008)	0,105 (± 0,008)	0,104 (± 0,008)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo 8,546	8,542 (± 0,005)	8,543 (± 0,005)	8,543 (± 0,005)
		2° modo 34,186	34,186 (± 0,006)	34,186 (± 0,007)	34,186 (± 0,007)
		3° modo 76,935	76,934 (± 0,004)	76,934 (± 0,006)	76,934 (± 0,006)
	Amort. (%)	1° modo 1,000	0,992 (± 0,060)	0,996 (± 0,051)	0,996 (± 0,050)
		2° modo 0,250	0,249 (± 0,015)	0,250 (± 0,016)	0,251 (± 0,017)
		3° modo 0,111	0,102 (± 0,008)	0,102 (± 0,008)	0,102 (± 0,008)

Tabela A.14 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica FDD na simulação 3B.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3B – Técnica FDD		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)
		2° modo	34,186 (± 0,004)	34,183 (± 0,005)	34,183 (± 0,005)
		3° modo	76,935 (± 0,014)	76,929 (± 0,012)	76,930 (± 0,010)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,025)	1,003 (± 0,024)	1,003 (± 0,025)
		2° modo	0,250 (± 0,005)	0,253 (± 0,005)	0,253 (± 0,005)
		3° modo	0,111 (± 0,004)	0,111 (± 0,004)	0,111 (± 0,004)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,004)	8,543 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo	34,186 (± 0,004)	34,183 (± 0,004)	34,183 (± 0,004)
		3° modo	76,935 (± 0,011)	76,929 (± 0,010)	76,930 (± 0,008)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,040)	1,004 (± 0,040)	1,004 (± 0,037)
		2° modo	0,250 (± 0,008)	0,250 (± 0,008)	0,250 (± 0,008)
		3° modo	0,111 (± 0,007)	0,111 (± 0,007)	0,111 (± 0,006)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)	8,544 (± 0,004)
		2° modo	34,186 (± 0,005)	34,183 (± 0,004)	34,183 (± 0,005)
		3° modo	76,935 (± 0,012)	76,931 (± 0,011)	76,930 (± 0,009)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,037)	0,992 (± 0,043)	0,992 (± 0,044)
		2° modo	0,250 (± 0,013)	0,254 (± 0,012)	0,254 (± 0,012)
		3° modo	0,111 (± 0,006)	0,111 (± 0,007)	0,111 (± 0,006)

Tabela A.15 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica SSM na simulação 3B.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3B – Técnica SSM		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,003)	8,546 (± 0,002)	8,546 (± 0,002)
		2° modo	34,186 (± 0,004)	34,186 (± 0,004)	34,186 (± 0,004)
		3° modo	76,935 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,023)	0,987 (± 0,022)	0,986 (± 0,022)
		2° modo	0,250 (± 0,004)	0,249 (± 0,004)	0,249 (± 0,004)
		3° modo	0,111 (± 0,003)	0,112 (± 0,003)	0,112 (± 0,003)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,004)	8,546 (± 0,004)	8,547 (± 0,004)
		2° modo	34,186 (± 0,003)	34,186 (± 0,003)	34,186 (± 0,003)
		3° modo	76,935 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)	76,933 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,023)	0,991 (± 0,026)	0,990 (± 0,024)
		2° modo	0,250 (± 0,006)	0,249 (± 0,007)	0,249 (± 0,007)
		3° modo	0,111 (± 0,004)	0,112 (± 0,004)	0,112 (± 0,004)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,546 (± 0,004)	8,547 (± 0,003)	8,547 (± 0,003)
		2° modo	34,186 (± 0,003)	34,187 (± 0,003)	34,187 (± 0,003)
		3° modo	76,935 (± 0,003)	76,934 (± 0,003)	76,934 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,026)	0,993 (± 0,035)	0,993 (± 0,034)
		2° modo	0,250 (± 0,006)	0,251 (± 0,007)	0,250 (± 0,007)
		3° modo	0,111 (± 0,004)	0,111 (± 0,004)	0,111 (± 0,004)

Tabela A.16 – Valores das frequências naturais e taxas de amortecimento estimadas pela Técnica SSI na simulação 3B.

Blocos	Valor exato		Estimativas das frequências naturais amortecidas e taxas de amortecimento – Simulação 3B – Técnica SSI		
			B=50	B=200	B=400
10 × 30 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)	8,544 (± 0,003)
		2° modo	34,183 (± 0,006)	34,183 (± 0,007)	34,183 (± 0,007)
		3° modo	76,936 (± 0,003)	76,936 (± 0,003)	76,936 (± 0,003)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,026)	1,003 (± 0,024)	1,003 (± 0,024)
		2° modo	0,250 (± 0,007)	0,249 (± 0,008)	0,250 (± 0,008)
		3° modo	0,111 (± 0,008)	0,110 (± 0,007)	0,110 (± 0,008)
10 × 12 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)
		2° modo	34,183 (± 0,004)	34,183 (± 0,004)	34,183 (± 0,004)
		3° modo	76,936 (± 0,002)	76,936 (± 0,002)	76,936 (± 0,002)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,015)	1,004 (± 0,015)	1,004 (± 0,015)
		2° modo	0,250 (± 0,005)	0,249 (± 0,005)	0,250 (± 0,005)
		3° modo	0,111 (± 0,005)	0,110 (± 0,005)	0,110 (± 0,005)
118 × 3 min	Freq. Nat. (Hz)	1° modo	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)	8,544 (± 0,002)
		2° modo	34,183 (± 0,004)	34,183 (± 0,004)	34,183 (± 0,004)
		3° modo	76,936 (± 0,002)	76,936 (± 0,002)	76,936 (± 0,002)
	Amort. (%)	1° modo	1,000 (± 0,015)	1,004 (± 0,015)	1,004 (± 0,015)
		2° modo	0,250 (± 0,005)	0,250 (± 0,005)	0,250 (± 0,005)
		3° modo	0,111 (± 0,005)	0,110 (± 0,005)	0,110 (± 0,005)

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)