

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES COM SALTOS:
ANÁLISE ECONOMÉTRICA DO MODELO DE KOU
NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO

Aurélio Ubirajara de Luccas

Orientador: Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira

Área de Concentração: Métodos Quantitativos e Informática

SÃO PAULO, SP

2007

Profa. Dra. Suely Vilela
Reitora da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Carlos Roberto Azzoni
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Isak Kruglianskas
Chefe do Departamento de Administração

Prof. Dr. Lindolfo Galvão de Albuquerque
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

AURÉLIO UBIRAJARA DE LUCCAS

**MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES COM SALTOS:
ANÁLISE ECONOMETRICA DO MODELO DE KOU
NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada ao Departamento de
Administração da Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade da
Universidade de São Paulo como requisito
parcial para a obtenção do título de Mestre em
Administração.

Orientador: Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira

SÃO PAULO, SP

2007

Dissertação defendida e aprovada no Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo – Programa de Pós-Graduação em Administração, em 27 de setembro de 2007, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira	- Presidente	- FEA-USP
Prof. Dr. José Roberto Securato	- Titular	- FEA-USP
Prof. Dr. William Eid Junior	- Titular	- FGV-SP

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Luccas, Aurélio Ubirajara de

Modelos de precificação de opções com saltos : análise econométrica do modelo de Kou no mercado acionário brasileiro / Aurélio Ubirajara de Luccas. – São Paulo, 2007.
189 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2007
Bibliografia

1. Finanças 2. Derivativos 3. Opções financeiras I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade.
II. Título.

CDD – 332

A Deus por me dar forças e saúde para viver.
A meus pais pela educação e incentivo ao estudo.
A Sueli, Rafael e Bruno por fazerem felizes os meus dias.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor José de Oliveira Siqueira por todo o apoio, ensinamento, compreensão, motivação, amizade e momentos de alegria durante o meu mestrado.

À Universidade de São Paulo, especialmente ao Instituto de Matemática e Estatística, e à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade pela excelência do ensino de graduação e pós-graduação proporcionado a mim e a milhares de outros estudantes.

Ao Unibanco S.A., especialmente aos diretores de tecnologia, José Fernando Trita (*in memoriam*) e Julio Gomes, por terem me incentivado ao desenvolvimento profissional e permitido frequentar as aulas do mestrado no meu horário de trabalho.

*Politics is for the present,
but an equation is for eternity.*

Albert Einstein

*In the end, a theory is accepted not because it
is confirmed by conventional empirical tests,
but because researchers persuade one another
that the theory is correct and relevant.*

Fischer Black

RESUMO

Esta dissertação revisa a literatura acadêmica existente sobre a teoria de opções utilizando os modelos de precificação com saltos. Os conceitos foram equalizados, a nomenclatura foi padronizada, sendo gerado um material de referência sobre o assunto. O pressuposto de lognormalidade com volatilidade constante não é aceito pelo mercado financeiro. É freqüente, no meio acadêmico, a busca de modelos que reproduzam os fenômenos observados de leptocurtose ou assimetria dos log-retornos financeiros e que possuam a mesma robustez e facilidade para manipulação analítica do consagrado modelo de Black-Scholes. Os modelos com saltos são uma alternativa para esse problema. Avaliou-se o modelo de Kou no mercado acionário brasileiro composto por um componente de difusão que segue um movimento browniano geométrico e um componente de saltos que segue um processo de Poisson com intensidade do salto descrito por uma distribuição duplamente exponencial. A simulação histórica do modelo aponta, em geral, uma superioridade preditiva do modelo, porém as dificuldades de calibração dos parâmetros e de *hedge* em mercados incompletos são as principais deficiências para o uso dos modelos com saltos.

Palavras-chave: finanças; derivativos; opção européia; volatilidade; processo de Lévy; mercado incompleto; modelo de Black-Scholes; modelo de Kou; calibração.

ABSTRACT

This master dissertation reviews the academic literature about option pricing and hedging with jumps. The theory was equalized and the notation was standardized, becoming this document a reference document about this subject. The log-normality with constant volatility is not accepted by the market. Academics search consistent models with the same analytical capabilities like Black-Scholes' model which can support the observed leptokurtosis or asymmetry of the financial daily log-returns behavior. The jump models are an alternative to these issues. The Kou's model was evaluated and this one consists of two parts: the first part being continuous and following a geometric Brownian motion and the second being a jump process with its jump intensity defined by a double exponential distribution. The model backtesting showed a better predictive performance of the Kou's model against other models. However, there are some handicaps regarding to the parameters calibration and hedging.

Keywords: finance; derivative; European option; volatility; Lévy process; incomplete market; Black-Scholes' model; Kou's model; calibration.

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O ESTUDO	9
1.1	INTRODUÇÃO AO TEMA.....	9
1.1.1	<i>A descontinuidade da evolução dos preços dos ativos.....</i>	<i>9</i>
1.1.2	<i>O sorriso e a assimetria de volatilidade.....</i>	<i>11</i>
1.2	SITUAÇÃO PROBLEMA E OBJETIVOS.....	13
1.3	CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO.....	14
1.4	DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS E OS MÉTODOS UTILIZADOS.....	14
1.5	RESTRIÇÕES E DELIMITAÇÕES DO ESTUDO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
2.1	O COMPORTAMENTO DO PREÇO DAS AÇÕES.....	16
2.1.1	<i>Processos estocásticos</i>	<i>16</i>
2.1.2	<i>O processo de Markov.....</i>	<i>16</i>
2.1.3	<i>Passeio aleatório.....</i>	<i>17</i>
2.1.4	<i>O movimento browniano (MB).....</i>	<i>17</i>
2.1.5	<i>O movimento browniano geométrico (MBG).....</i>	<i>19</i>
2.1.6	<i>O processo de Poisson puro.....</i>	<i>21</i>
2.1.7	<i>O processo de Poisson composto</i>	<i>23</i>
2.1.8	<i>O processo de Poisson compensado</i>	<i>23</i>
2.1.9	<i>O processo de Lévy</i>	<i>24</i>
2.2	O MODELO DE BLACK-SCHOLES	25
2.2.1	<i>Os pressupostos do modelo</i>	<i>25</i>
2.2.2	<i>A equação de Black-Scholes.....</i>	<i>26</i>
2.2.3	<i>As condições de contorno do contrato contingencial.....</i>	<i>28</i>
2.2.4	<i>A conversão da equação de Black e Scholes em uma equação de difusão do calor</i>	<i>28</i>
2.2.5	<i>A fórmula do preço de uma opção de compra europeia ordinária</i>	<i>30</i>
2.3	OS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO COM SALTOS	35
2.3.1	<i>Eventos raros e outliers.....</i>	<i>35</i>
2.3.2	<i>A modelagem de log-retornos diários com saltos e os processos de Lévy.....</i>	<i>36</i>
2.3.3	<i>O modelo puro com saltos determinísticos idênticos sem MBG</i>	<i>42</i>
2.3.4	<i>O modelo com saltos normais de Merton com MBG.....</i>	<i>46</i>
2.3.5	<i>O modelo de saltos IID.....</i>	<i>52</i>
2.3.6	<i>O modelo de Kou com distribuição duplamente exponencial</i>	<i>56</i>
2.3.7	<i>A comparação dos preços das opções nos modelos BS, Merton e Kou.....</i>	<i>73</i>
2.4	A MODELAGEM DA SUPERFÍCIE DE VOLATILIDADE.....	76
2.4.1	<i>Volatilidades históricas.....</i>	<i>76</i>
2.4.2	<i>A volatilidade implícita.....</i>	<i>79</i>
2.4.3	<i>A dependência da volatilidade ao tempo: a estrutura a termo de volatilidade</i>	<i>82</i>

2.4.4	<i>O sorriso de volatilidade no mercado de ações</i>	83
2.4.5	<i>A capacidade de gerar sorrisos através do modelo de Kou</i>	85
2.4.6	<i>A superfície de volatilidade implícita</i>	90
2.4.7	<i>A obtenção da função de densidade de probabilidade do modelo</i>	93
2.4.8	<i>A calibração do modelo de Kou</i>	93
2.4.9	<i>A superfície de volatilidade do processo</i>	96
2.4.10	<i>Os modelos de precificação que capturam o sorriso de volatilidade</i>	105
2.5	HEDGE EM PORTFÓLIO DE OPÇÕES	108
2.5.1	<i>Portfolio e arbitragem</i>	108
2.5.2	<i>A probabilidade ajustada ao risco</i>	112
2.5.3	<i>A condição de não-arbitragem</i>	114
2.5.4	<i>Martingales e submartingales</i>	115
2.5.5	<i>A precificação de derivativos em mercados incompletos</i>	116
2.5.6	<i>Os diferentes tipos de hedge de opções</i>	119
2.5.7	<i>As abordagens existentes para hedge de opções em mercados incompletos</i>	125
2.5.8	<i>Hedge em processos com difusão e saltos</i>	128
3	AValiação DO MODELO DE KOU	130
3.1	O PROCESSO DO LOG-RETORNO DIÁRIO: TESTE DE HIPÓTESE IID	130
3.1.1	<i>A assimetria e a leptocurtose do log-retorno do ativo</i>	131
3.2	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO DO PROCESSO COM SALTOS	134
3.2.1	<i>Modelagem da simulação de Monte Carlo para o modelo de Kou</i>	134
3.2.2	<i>Conclusões</i>	136
3.3	APLICAÇÃO DO MODELO NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO	137
3.3.1	<i>A aplicação dos modelos de precificação nos preços históricos de opções</i>	137
3.3.2	<i>A estrutura e o processo de coleta dos dados</i>	138
3.3.3	<i>Os modelos de precificação e os processos de calibração utilizados</i>	140
3.3.4	<i>Resultados empíricos</i>	141
3.4	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO DA ESTRATÉGIA DE HEDGE	145
3.4.1	<i>Modelagem da simulação para o modelo de difusão e para o modelo com saltos</i>	145
3.4.2	<i>Simulação do hedge pelo delta</i>	145
3.4.3	<i>Simulação do hedge para processos com saltos utilizando-se opção adicional</i>	146
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	148
4.1	SOBRE OS RESULTADOS ALCANÇADOS	148
4.2	LIMITAÇÕES E SUGESTÕES DE PESQUISA	149
5	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	150
6	ANEXOS	155
6.1	ANEXO A – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO DA FÓRMULA DE KOU	155
6.2	ANEXO B – SUPERFÍCIE DE VOLATILIDADE OBTIDA POR AJUSTES POLINOMIAIS	157

6.3	ANEXO C – VOLATILIDADE LOCAL A PARTIR DE VOLATILIDADE IMPLÍCITA	159
6.4	ANEXO D – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 1	160
6.5	ANEXO E – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 2	161
6.6	ANEXO F – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 3.....	163
6.7	ANEXO G – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 4	165
6.8	ANEXO H – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 5	167
6.9	ANEXO I - SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 6.....	171
6.10	ANEXO J – SIMULAÇÃO MONTE CARLO – <i>HEDGE</i> PELO DELTA.....	176
6.11	ANEXO K – SIMULAÇÃO COM SALTOS – <i>HEDGE</i> COM SEGUNDA OPÇÃO.....	178

LISTA DE ACRÔNIMOS

ARCH – heteroscedasticidade condicionada auto-regressiva
ATM – *at-the-money*, no dinheiro na data atual
ATMF – *at-the-money forward*, no dinheiro a termo
BS – Black-Scholes
BSM – Black-Scholes-Merton
BDS – Brock-Dechert-Scheinkman
Bovespa – Bolsa de Valores de São Paulo
c.p. – *ceteris paribus*, todo o mais constante
EDP – equação diferencial parcial
e.g. – *exempli gratia*, por exemplo
FDP – função densidade de probabilidade
FVD – função de volatilidade determinística
IID – independente e identicamente distribuída
ITM – *in-the-money*, dentro do dinheiro.
MB – movimento browniano
MBG – movimento browniano geométrico
MEM – medida equivalente martingale
OTC – *over-the-counter*, mercado de balcão
OTM – *out-the-money*, fora do dinheiro
PETR ou PETR4 – ação preferencial nominativa da empresa Petrobras
VALE ou VALE5 – ação preferencial nominativa da empresa Vale do Rio Doce
VaR – *Value at Risk*, valor em risco

LISTA DE SÍMBOLOS

R	números reais
R_+	números reais não-negativos
R_+^*	números reais não-negativos e diferente de zero
$P(A)$	probabilidade de ocorrência do evento A
$E[X]$	esperança não-condicionada da variável estocástica X
$E[X Y]$	esperança da variável estocástica X condicionada à variável estocástica Y
P	medida P
Q	medida Q
$E_t^Q[X]$	esperança condicionada ao conjunto informacional até o instante t inclusive da variável estocástica X na medida Q
$N(\alpha; \beta)$	distribuição gaussiana ou normal com esperança α e variância β
$V[X]$	variância não-condicionada da variável estocástica X
$\exp(\cdot)$	função exponencial
$\ln(\cdot)$	função logaritmo natural
$\{W(t)\}_{t \geq 0}$	processo de Wiener
Z	variável estocástica com FDP normal padronizada $N(0;1)$

LISTA DE QUADROS

Tabela 1 – Notícias Petrobras - Resumo Diário Bovespa do Jornal Folha de São Paulo.....	10
Tabela 2 - Comparação entre os modelos de difusão MBG e os modelos com saltos (Cont e Tankov, 2003)	41
Tabela 3 - Comparação entre os modelos com saltos de Merton (1976) e Kou (2002).....	70
Tabela 4 – Volatilidade implícita obtida a partir dos preços do modelo de Kou.....	85
Tabela 5 – As fórmulas das gregas do modelo de Black-Scholes	124
Tabela 6 – Média e desvio-padrão da volatilidade implícita	141
Tabela 7 – Resultado da simulação histórica dos modelos de precificação	144
Tabela 8 – Resultado da simulação do <i>portfolio</i> com <i>hedge</i> pelo delta	146
Tabela 9 – Resultado da simulação do processo com saltos e <i>portfolio</i> com segunda opção	147

LISTA DE FIGURAS

Gráfico 1 - Volatilidade implícita dos modelos de KOU e BSM (Glasserman e Kou, 1999)..	13
Gráfico 2 - Trajetória de preço de um ativo em função do tempo gerado por um MBG	21
Gráfico 3 - Processo de Poisson puro.....	22
Gráfico 4 - Processo de Poisson composto.....	23
Gráfico 5 - Processo de Poisson compensado.....	24
Gráfico 6 - Trajetória de preços de um MBG e uma trajetória real (Cont e Tankov, 2003)	36
Gráfico 7 - Dispersão de uma distribuição simulada MBG e sua respectiva dispersão real (Cont e Tankov, 2003).....	37
Gráfico 8 - Trajetória de preços gerada pela dinâmica de preços do modelo de Kou	38
Gráfico 9 – Comparativo de preços entre os modelos de Kou e BS	74
Gráfico 10 – Comparativo de preços entre os modelos de Merton com saltos e BS	75
Gráfico 11 – Comparativo de preços entre o modelo Kou e BS de mesma variância	75
Gráfico 12 – Volatilidades históricas (EWMA) e preços da ação Petrobras.....	78
Gráfico 13 – O comportamento gráfico da volatilidade.....	84
Gráfico 14 – Sorriso de volatilidade padrão <i>smirk</i> a partir do modelo de Kou	86
Gráfico 15 – Impacto da variação dos parâmetros do modelo de Kou na geração do sorriso de volatilidade.....	87
Gráfico 16 – Volatilidade do modelo de Kou e volatilidade do mercado	89
Gráfico 17 – Superfície de volatilidade implícita obtida por ajustes polinomiais	92
Gráfico 18 – Volatilidade local obtida a partir da volatilidade implícita (gráfico 14).....	102
Gráfico 19 – <i>Straddle</i> – Diagrama de retorno da estratégia	103
Gráfico 20 – <i>Risk-Reversal</i> – Diagrama de retorno da estratégia	104
Gráfico 21 – Superfície de volatilidade em forma de U (Andersen e Andreasen, 2000).....	107
Gráfico 22 – Superfície de volatilidade não estacionária (Andersen e Andreasen, 2000)	108

Gráfico 23 - Exemplo do não ajuste dos log-retornos diários à distribuição normal (Papapantoleon, 2006)	132
Gráfico 24 - Evolução do preço diário de fechamento da PETR4 (Bovespa)	132
Gráfico 25 - Distribuição dos log-retornos diários e ajuste do histograma à distribuição normal equivalente	133
Gráfico 26 – Processo de simulação histórica	138
Gráfico 27 – Volatilidade histórica e volatilidade implícita Black-Scholes.....	142

1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O ESTUDO

1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA

A precificação de opções é um dos temas mais importantes da área de finanças e o desenvolvimento de fórmulas e processos de precificação das diversas estratégias e contratos de derivativos tem se apoiado em áreas do conhecimento como a matemática, a computação e a estatística.

A existência de modelos de precificação é condição necessária para a negociação dos ativos entre os agentes financeiros. Em um mercado de capitais desenvolvido e eficiente, o mercado de opções desempenha um papel fundamental na redução e na gestão dos riscos em *portfolio* de ativos.

Após a apresentação da fórmula de Black-Scholes ao mercado financeiro e acadêmico, o mercado bursátil e de balcão de produtos derivativos teve enorme crescimento, trazendo consigo a necessidade do desenvolvimento de uma nova indústria acadêmica de pesquisa em derivativos.

A sofisticação constante dos contratos de derivativos (derivativos exóticos), as constatações empíricas de que pressupostos do modelo clássico de preços não são totalmente válidos e a busca da eficiência nos processos de precificação tem fomentado o contínuo desenvolvimento dos modelos de precificação das opções.

1.1.1 A descontinuidade da evolução dos preços dos ativos

Os modelos tradicionais de precificação de opções pressupõem variações contínuas no preço do valor mobiliário subjacente. Evidências empíricas de descontinuidade nas mudanças de preços diários podem ser encontradas nos trabalhos de Jarrow e Rosenfeld (1984), Ball e Torous (1983) e Jorion (1988). Press, em artigo publicado em 1967, apontava, em seus estudos, a existência da combinação de um componente de Poisson e um componente de Wiener na dinâmica dos preços dos ativos. Naik e Lee (1990) afirmaram que modelos com saltos são adequados para modelar mercados com elevada volatilidade.

O pressuposto de Merton (1976) é de que os componentes de salto nos movimentos de preços dos ativos representam um risco não-sistemático, ou seja, esse risco pode ser eliminado pela diversificação das carteiras, sendo provocado pela chegada de informações a respeito de uma determinada empresa ou da indústria em que ela opera de maneira isolada. De maneira resumida, o que Merton afirma é que o salto não estaria correlacionado com o retorno do mercado.

Anexam-se, a seguir, os principais movimentos significativos de preço nas cotações das ações preferenciais da Petrobrás no período de janeiro de 2004 a outubro de 2006. Como podem ser observados, os saltos nas ações da Petrobras, na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), apresentam variações significativas oriundas tanto de risco sistemático quanto de risco não-sistemático.

Tabela 1 – Notícias Petrobras - Resumo Diário Bovespa do Jornal Folha de São Paulo

Data	Preço Fechamento	Retorno Diário	Notícia
3 outubro, 2006	38.80	-4.22%	Queda de 4.08% do preço do petróleo no mercado internacional.
16 junho, 2006	40.30	5.77%	Discurso do presidente do FED traz otimismo aos mercados internacionais.
7 junho, 2006	40.55	-4.70%	Temor aumento de taxa de juros nos EUA e desaquecimento economia.
16 fevereiro, 2006	43.12	4.79%	Melhoria Rating Brasil e Medida Provisória 281.
2 fevereiro, 2006	44.70	-4.39%	Tensão no mercado externo em virtude de ameaças de ataques terroristas no Reino Unido.
24 outubro, 2005	32.27	5.53%	Alta em Wall Street em função da indicação do substituto de Greenspan no FED.
18 outubro, 2005	30.40	-5.41%	Saída de investidores no mercado nacional em virtude indicadores econômicos dos EUA.
5 outubro, 2005	32.75	-5.35%	Política de alta de juros do FED e valorização do dólar.
1 março, 2005	26.67	-4.11%	Divulgação do balanço da Petrobras não empolga analistas de mercado.
9 fevereiro, 2005	25.40	4.43%	Revisão dos cálculos atuariais do fundo de pensão da Petrobras.
25 novembro, 2004	23.60	5.36%	Petrobrás anuncia reajuste de 4% na gasolina e 8% no diesel.
24 maio, 2004	17.85	6.23%	Recomendação de compra Merrill Lynch e provável re-alinhamento preços.
11 maio, 2004	18.58	7.85%	Melhoria geral do risco dos países emergentes e queda do dólar.
6 maio, 2004	18.55	-6.65%	Governo não irá realinhar preços do combustível mesmo com a alta de preços internacionais.
29 abril, 2004	18.75	-5.11%	Banco Suíço UBS desfaz grande posição em ações Petrobras.
29 janeiro, 2004	20.25	-5.81%	Aumento IGPM e pessimismo com manutenção da taxa de juros.
5 janeiro, 2004	20.96	5.86%	Risco Brasil desaba 6% e investidores estrangeiros retomam investimentos.

No mercado americano, são frequentemente citados como *outliers*, os log-retornos do índice S&P500 ocorridos a partir de 1955 nos dias:

- 19 de outubro de 1987 (-22.22%);
- 26 de setembro de 1955 (-6.99%);
- 13 de outubro de 1989 (-6.31%);
- 20 de outubro de 1987 (+9.02%);
- 21 de outubro de 1987 (+7.25%).

O fim do período especulativo com os ativos das empresas de tecnologia, impulsionados pelo crescimento da Internet, ocorreu em 14 de abril de 2000 quando o índice composto da NASDAQ apresentou queda de aproximadamente -10%. É consenso, na literatura acadêmica, que estes retornos anormais considerados *outliers* são mais bem explicados nos modelos com difusão e saltos do que nos modelos com volatilidade estocástica.

Poucos trabalhos são encontrados na literatura acadêmica brasileira nos quais sejam analisadas a qualidade dos modelos com difusão e saltos e a significância dos parâmetros estimados. Encontra-se apenas o trabalho de Guimarães e Silva (2002) que estimou os parâmetros implícitos nos prêmios das opções da moeda dólar utilizando o modelo de saltos proposto por Merton (1976) no período de 1997 a 1999, apontando a existência de saltos como uma possível causa dos sorrisos de volatilidade verificados no mercado de câmbio.

Aproximadamente três décadas se passaram desde que o trabalho seminal de Merton sobre descontinuidade dos preços dos ativos foi publicado. Apenas mais recentemente, os modelos com saltos, após a publicação dos trabalhos de Kou (2002) e Kou e Wang (2004), começam a ganhar novamente notoriedade acadêmica principalmente pela sua distribuição assimétrica do salto e capacidade de reproduzir leptocurtose da distribuição não-condicionada do log-retorno diário, além do fato de o modelo também proporcionar soluções analíticas para muitas opções exóticas e dependentes da trajetória de preços do valor mobiliário subjacente.

1.1.2 O sorriso e a assimetria de volatilidade

O sorriso de volatilidade refere-se ao fato empírico de que para a maioria dos valores mobiliários subjacentes, o gráfico de volatilidade implícita contra o preço de exercício tem a forma não linear horizontal. Outro termo também bastante utilizado pelo mercado é a superfície de volatilidade, em virtude de que a variável prazo de vencimento igualmente é um fator de mudança da volatilidade do ativo-objeto.

A volatilidade implícita, aquela obtida a partir da fórmula de Black-Scholes-Merton, é significativamente mais elevada para opções fora do dinheiro (OTM) do que para opções no preço a termo (ATMF). Isso se deve ao fato de que as hipóteses sobre as quais o modelo de BSM está sustentado, não são plenamente justificadas empiricamente, pois as distribuições

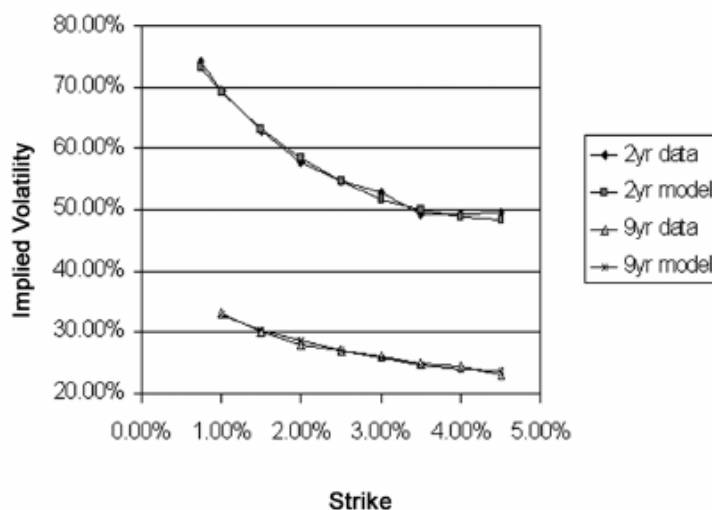
dos log-retornos diários podem exibir leptocurtose e sua volatilidade não é constante em relação ao tempo e para diferentes preços de exercício.

Se os preços não são controlados exatamente por um movimento browniano geométrico, então grandes mudanças de preços podem ser observadas empiricamente com uma maior frequência do que aquela admitida pelo modelo de Black-Scholes. Se as distribuições dos log-retornos diários são normais, mas a volatilidade é estocástica ou a volatilidade é constante, mas os log-retornos exibem leptocurtose, ou ambos os fatos ocorrem, grandes variações de preços são mais prováveis de ocorrer que o previsto pela distribuição normal e conseqüentemente uma opção OTM tem uma chance maior de se tornar dentro do dinheiro (ITM) do que aquela assumida pelo modelo. Como conseqüência, o prêmio calculado pelo modelo de Black-Scholes é menor que o preço do mercado para opções OTM pago por uma opção.

No mercado de ações, o sorriso aparenta ter uma assimetria negativa, com volatilidades implícitas mais elevadas nas opções com baixo preço de exercício e volatilidades implícitas mais baixas nas opções com preço de exercício mais elevado. Isso se deve ao fato de que o prêmio de mercado das opções com preço de exercício mais baixo (opções de compra dentro do dinheiro e opções de venda fora do dinheiro) é muito maior que o prêmio previsto pelo modelo de Black-Scholes. A hipótese plausível para esse fato é de que o mercado de ações não seria simétrico.

Kou sugere que o modelo composto com difusão e saltos duplamente exponenciais pode produzir, através da calibração de sua fórmula, volatilidades implícitas bastante aproximadas da “volatilidade implícita do modelo de Black-Scholes”. Glasserman e Kou (1999) apresentam um gráfico de volatilidade implícita do mercado japonês de opções sobre contratos futuros da LIBOR em que as curvas de volatilidade geradas pelo modelo e as curvas observadas no mercado para o período de 2 e 9 anos são praticamente idênticas.

Gráfico 1 - Volatilidade implícita dos modelos de KOU e BSM (Glasserman e Kou, 1999)



1.2 SITUAÇÃO PROBLEMA E OBJETIVOS

O mercado financeiro utiliza quase que exclusivamente o modelo de Black-Scholes e suas principais derivações que assumem o pressuposto de lognormalidade da distribuição de probabilidade dos retornos diários do ativo-objeto.

Esse pressuposto quase sempre não é válido e, para lidar com esse viés na precificação das opções, o mercado adotou uma parametrização da volatilidade baseada no preço de exercício e no prazo de vencimento das opções. Apesar do uso disseminado dessas técnicas, é pouco plausível e realista admitir que a volatilidade de um ativo-objeto esteja correlacionada a parâmetros contratuais dos contratos de opções. A existência de descontinuidade na evolução dos preços dos ativos mobiliários subjacentes proposta pelos modelos de difusão e saltos parece ser uma hipótese mais plausível para justificar o comportamento dos preços no mercado, pois pode atribuir uma probabilidade maior de ocorrência de eventos raros do que os modelos com pressuposto de lognormalidade dos retornos financeiros.

O objetivo da dissertação é fazer uma revisão dos modelos de precificação de opções com saltos, dando atenção especial ao modelo composto de difusão com saltos de distribuição assimétrica duplamente exponencial de Kou (2002), avaliando sua aplicabilidade no mercado brasileiro de ações.

O modelo de Kou é bastante flexível, pois, ao contrário do modelo com saltos com distribuição normal, é possível modelar diferentes amplitudes e densidades probabilísticas para os saltos em virtude da ocorrência de boas ou más notícias. Nesse sentido, uma comparação dos modelos mais disseminados de precificação de opções foi realizada avaliando-se a capacidade de cada modelo de capturar a realidade do mercado e precificar corretamente um contrato de opções.

1.3 CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO

Segundo Lakatos e Marconi (2004), um trabalho é original quando provoca no leitor a reflexão e o pensamento. Além disto, sabe-se que originalidade não quer dizer somente apresentar algo novo, mas também significa verificar as origens do conhecimento, trazendo uma nova leitura e esclarecimentos sobre o assunto.

As principais contribuições deste estudo são:

- revisar e melhorar o entendimento sobre os modelos de precificação de opções com saltos;
- ser um estudo pioneiro do modelo de Kou ao testar sua aplicabilidade no mercado acionário brasileiro, testando a robustez de sua fórmula e a confiabilidade dos seus resultados;
- realizar um estudo comparativo sobre o desempenho preditivo de modelos de precificação com volatilidade determinística, local e com saltos.

1.4 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS E OS MÉTODOS UTILIZADOS

No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica dos modelos de precificação de opções abordando o comportamento dos preços dos ativos financeiros, o modelo de Black-Scholes e os modelos de difusão com saltos. Um modelo didático com saltos determinísticos é apresentado para facilitar a compreensão do componente de saltos baseado em processos de Poisson. Os modelos de Merton (1976) e de Kou (2002) são apresentados e os conceitos padronizados com os demais fundamentos do capítulo. Ainda na fundamentação teórica, dois importantes assuntos são revisados e incorporados ao trabalho: o estudo da volatilidade implícita e o *hedge* em *portfolio* de opções.

No capítulo 3, são realizados os testes de independência e de distribuição dos log-retornos dos ativos. A fórmula de Kou é validada através da simulação de Monte Carlo do processo de preços, evidenciando a robustez da fórmula.

Ainda no capítulo 3, o modelo de Kou, de maneira comparativa ao modelo de Black-Scholes com suas derivações de volatilidade determinística, foi calibrado para avaliação da facilidade de uso do modelo e da capacidade preditiva em relação aos demais métodos. Foram efetuados testes empíricos de calibração do modelo de Kou objetivando avaliar a capacidade de reprodução da curva de volatilidade implícita do mercado. O estudo foi realizado utilizando-se os preços das ações e das opções de compra das empresas Petrobrás e Vale do Rio Doce por possuírem as opções de maior liquidez e volume de negócios no mercado Bovespa. Simulações de Monte Carlo foram realizadas para avaliação do *hedge* em processos de difusão simples e com saltos. Maiores detalhes sobre a metodologia de trabalho estão presentes no capítulo 3.

No capítulo 4, são feitas as considerações finais do trabalho, suas conclusões e as sugestões de pesquisa decorrentes deste estudo.

1.5 RESTRIÇÕES E DELIMITAÇÕES DO ESTUDO

A estratégia de *hedge* em mercados incompletos é um tema importante na teoria de opções, sendo uma área de estudo justificada pela utilização dos modelos de precificação de opções com saltos. O assunto foi contextualizado na fundamentação teórica e foram simulados *portfolios* replicantes em processos com saltos com finalidade de *hedge*, porém o assunto é vasto e merece ser mais bem explorado em trabalhos futuros.

Os processos de calibração de modelos com saltos são instáveis e representam um desafio na área de otimização. As abordagens possíveis para superação dos problemas numéricos são citadas no estudo, porém não foram implementadas nas simulações. Apesar de serem calibrados, nos testes deste trabalho, os principais parâmetros, os métodos utilizados não permitiram a exploração de toda a flexibilidade de modelagem proporcionada pelo modelo de Kou.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O COMPORTAMENTO DO PREÇO DAS AÇÕES

2.1.1 Processos estocásticos

Um processo estocástico $\mathbf{X} = \{X(t), t \in T\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias, ou seja, para cada t do conjunto T , $X(t)$ é uma variável estocástica. Geralmente, interpreta-se t como um indexador de tempo e chama-se $X(t)$ de estado do processo estocástico no instante t . Se o conjunto T é contável, diz-se que $\mathbf{X}$ é um processo estocástico discreto e, no caso de T contínuo, $\mathbf{X}$ é um processo estocástico contínuo no tempo.

Um processo estocástico contínuo no tempo $\mathbf{X} = \{X(t), t \in T\}$ possui incrementos independentes se para todo $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ as variáveis aleatórias $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ são independentes.

O processo estocástico possui incrementos estacionários se $X(t+s) - X(t)$ tem a mesma distribuição para todo t .

2.1.2 O processo de Markov

Considere um processo estocástico $\{ \quad \}$

independente dos estados passados $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ e depende somente do estado atual X_n . Essa característica do processo estocástico é chamada de propriedade markoviana.

2.1.3 Passeio aleatório

Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (IID) com $E[X_i] < \infty$. Seja $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. O processo $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ é chamado de passeio aleatório.

Passeios aleatórios são utilizados para modelar vários fenômenos, como, por exemplo, o passeio aleatório simples com $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1)$ no qual S_n pode ser interpretado como as vitórias de um jogador após a jogada de número n em um jogo em que o apostador recebe ou perde uma unidade em cada aposta. Como se verá na sequência, o preço de uma ação de uma determinada companhia pode ser modelado como um passeio. No exemplo acima de passeio aleatório simples, quando $p = \frac{1}{2}$, dizemos que o passeio aleatório é simétrico.

2.1.4 O movimento browniano (MB)

Inicialmente, utilize-se um passeio aleatório simétrico no qual a cada unidade de tempo um passo é feito em uma determinada direção à direita ou à esquerda. Imagine-se, agora, que os passos serão dados a instante de tempo cada vez menor. No limite, à medida que esses intervalos de tempo tendem a zero, obtém-se um movimento browniano.

Sejam:

Δx o tamanho do passo;

Δt unidades de tempo;

$$I_j \sim \text{Bernoulli}(p), \text{ independentes e } I_j = \begin{cases} +1 \text{ movimento a direita e } P(I_j = +1) = \frac{1}{2} \\ -1 \text{ movimento a esquerda e } P(I_j = -1) = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$X(t) = \Delta x I_0 + \Delta x I_1 + \dots + \Delta x I_{\frac{t}{\Delta t}} \text{ o estado de } X \text{ no instante } t.$$

Tem-se, então, que:

$$X(t) = \Delta x \sum_{j=0}^{\frac{t}{\Delta t}} I_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{\frac{t}{\Delta t}} I_j \sim \text{Binomial} \left(\left[\frac{t}{\Delta t} \right], p \right).$$

Fazendo $\left[\frac{t}{\Delta t} \right] \rightarrow \infty$ ou $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$, c uma constante positiva, ter-se-á:

$$E[X(t)] = 0;$$

$$V[X(t)] = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t} = (c\sqrt{\Delta t})^2 \frac{t}{\Delta t} = c^2 t;$$

$$X(t) = \Delta x \sum_{j=0}^{\frac{t}{\Delta t}} I_j \text{ terá uma distribuição } N(0; c^2 t).$$

Além disso:

$\{X(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes e estacionários,

ou seja, um processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um movimento browniano ou processo de Wiener se:

- i. $X(0) = 0$;
- ii. $\{X(t), t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários e independentes;
- iii. para todo $t > 0$, $X(t)$ é distribuído normalmente com esperança 0 e variância $c^2 t$;
- iv. o processo será conhecido como movimento browniano padrão quando $c = 1$.

Considere-se, agora, o seguinte processo estocástico:

$$X(t) = W(t) + \mu t$$

em que:

$W(t)$ é um movimento browniano padrão com esperança 0 e variância t ;

μ é o coeficiente que representa a tendência (*drift*) do processo.

Nesse caso, o processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um movimento browniano que possui uma tendência, pois:

- i. $X(0) = 0$;
- ii. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos estacionários e independentes;
- iii. para todo $t > 0$, $X(t)$ é distribuído normalmente com esperança μt e variância t .

2.1.5 O movimento browniano geométrico (MBG)

O movimento browniano foi apresentado em 1900 pelo matemático francês Bachelier que utilizou os conceitos para modelar os preços das ações e de mercadorias. Nesse modelo, o preço de uma ação ou mercadoria será determinado por um movimento browniano aritmético, ou, como também é conhecido, por processo de Wiener:

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma B(t)$$

em que:

μ esperança do log-retorno do ativo;

σ^2 variância do log-retorno do ativo;

$B(t)$ é o movimento browniano padrão quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Entretanto, o movimento browniano aritmético possui duas imperfeições:

- Dado que o preço de uma ação é uma variável aleatória, ela pode teoricamente se tornar negativa em virtude da definição do modelo.
- O pressuposto de que as diferenças de preço em um determinado intervalo de tempo fixo possuem a mesma distribuição normal, não importando o preço no início do intervalo, não parece ser plausível economicamente. Por exemplo, parece pouco razoável que uma ação que custe 20 reais e uma queda no seu preço de 5 reais (perda de valor de 25%) tenha a mesma probabilidade quando a ação estiver custando 10 reais e tenha uma queda de 5 reais (perda de valor de 50%).

O MBG não possui essas deficiências, pois, nesse caso, é o logaritmo do preço da ação que possui distribuição normal, não permitindo que o preço da ação seja negativo. Além disso, são as razões entre os preços de dois intervalos fixos de tempo que possuem a mesma probabilidade, ou seja, mesma perda relativa de valor. É plausível, então, que $\frac{S(t+s)}{S(t)}$ seja independente e identicamente distribuído, ao contrário de $S(t+s) - S(t)$.

O MBG é uma versão multiplicativa do movimento browniano e permitiu que Black e Scholes apresentassem, em 1973, uma fórmula para precificação de opções, modelando o preço da seguinte maneira:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right)$$

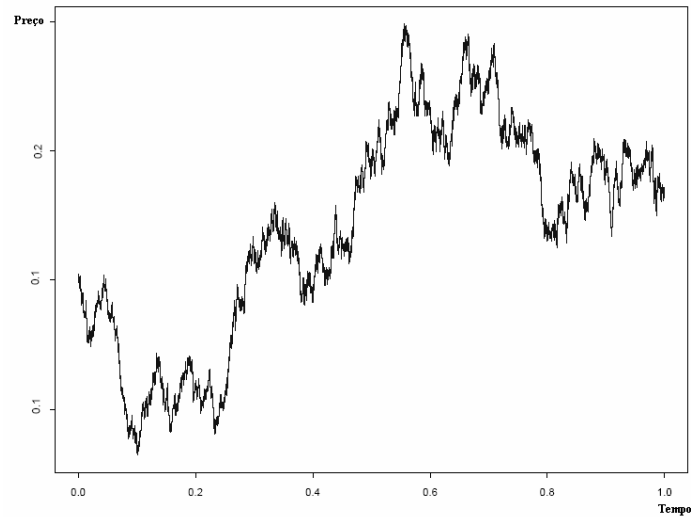
em que $B(t)$ é o movimento browniano padrão quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Essa solução foi obtida a partir da resolução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

Tem-se, então, que, se $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um movimento browniano, então, o processo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ definido como $S(t) = \exp(X(t))$, é conhecido como movimento browniano geométrico.

Abaixo se apresenta um gráfico exemplificando a trajetória de um movimento browniano geométrico. Como se pode observar esse processo estocástico pode reproduzir de maneira bastante realista as séries de preços dos ativos financeiros.

Gráfico 2 - Trajetória de preço de um ativo em função do tempo gerado por um MBG



2.1.6 O processo de Poisson puro

Um processo estocástico $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de contagem se $N(t)$ representa o total de número de eventos ocorridos até o instante t . Além disso, um processo de contagem deve satisfazer:

- i. $N(t) \geq 0$;
- ii. $N(t)$ é um número inteiro;
- iii. se $s < t$, então, $N(s) < N(t)$;
- iv. para $s < t$, $N(s) - N(t)$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo $[s, t]$.

Um processo de contagem possui incrementos independentes se o número de eventos que ocorrem em um intervalo de tempo t independe do número de eventos em um intervalo consecutivo $t + s$.

Um processo de contagem possui incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos que ocorrem, em um intervalo de tempo, depende somente do tempo de duração do intervalo. Em outras palavras, o processo tem incrementos estacionários se o número de eventos no intervalo $[t_1 + s, t_2 + s]$, ou seja, $N(t_1 + s) - N(t_2 + s)$ têm a mesma distribuição do número de eventos do intervalo $[t_1, t_2]$, ou seja, $N(t_1) - N(t_2)$ para todo $t_1 < t_2$ e $s > 0$.

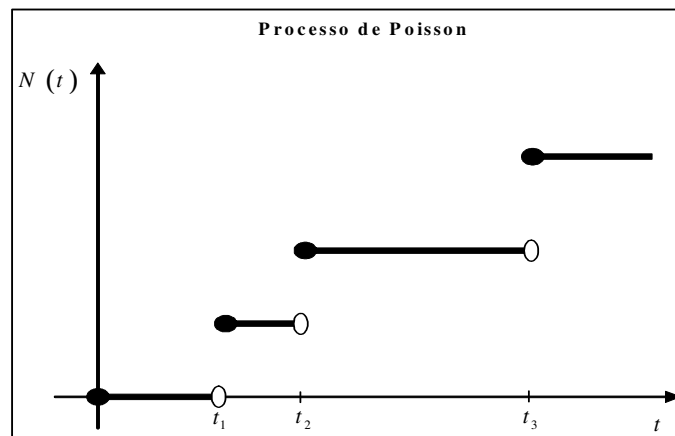
Um dos mais importantes processos estocásticos de contagem é o processo de Poisson. O processo $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com intensidade λ , $\lambda > 0$, se:

- i. $N(0) = 0$;
- ii. o processo tiver incrementos independentes;
- iii. o número de eventos em qualquer intervalo de tempo t for uma distribuição de Poisson com esperança λt , ou seja, para todo $s, t \geq 0$:

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

Através de iii. é possível demonstrar que o processo de Poisson tem incrementos estacionários.

Gráfico 3 - Processo de Poisson puro



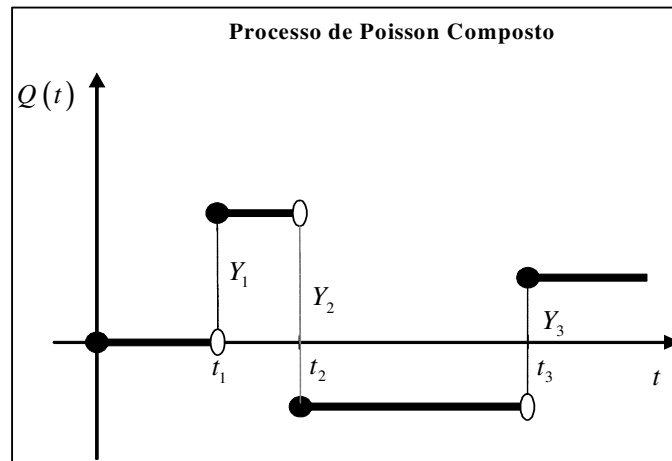
2.1.7 O processo de Poisson composto

Um processo de Poisson composto com intensidade λ ($\lambda > 0$) e distribuição da amplitude do salto G é um processo estocástico contínuo $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ gerado por:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

em que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson com intensidade λ ($\lambda > 0$) e $\{Y_i, i \geq 1\}$ variáveis aleatórias IID com função de distribuição G a qual é também independente de $\{N(t)\}_{t \geq 0}$.

Gráfico 4 - Processo de Poisson composto



2.1.8 O processo de Poisson compensado

Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade λ ($\lambda > 0$). Define-se um processo de Poisson compensado como:

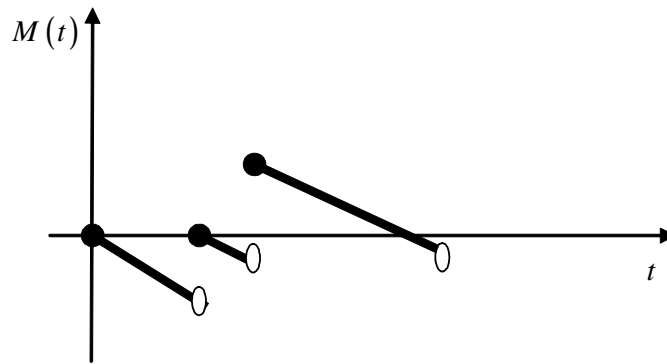
$$\begin{aligned} M(t) &= N(t) - E[N(t)] \\ &= N(t) - \lambda t \end{aligned}$$

Tem-se, então, que $M(t)$ é um martingale, pois:

Seja $0 \leq s < t$. Como $N(t) - N(s)$ independente de $F(s)$ e $E[N(t) - N(s)] = \lambda(t - s)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 E[M(t) | F(s)] &= E[M(t) - M(s) | F(s)] + E[M(s) | F(s)] \\
 &= E[N(t) - N(s) - \lambda(t - s) | F(s)] + M(s) \\
 &= E[N(t) - N(s) | F(s)] - \lambda(t - s) + M(s) \\
 &= E[N(t) - N(s)] - \lambda(t - s) + M(s) \\
 &= M(s)
 \end{aligned}$$

Gráfico 5 - Processo de Poisson compensado



2.1.9 O processo de Lévy

Um processo estocástico unidimensional $\{L_t\}_{t \geq 0}$ em um espaço de probabilidade (Ω, F, P) é um processo de Lévy, se:

- i. $L_0 = 0$;
- ii. possui incrementos independentes, ou seja, para qualquer $0 \leq s < t < s' < t'$ as variáveis aleatórias $L_t - L_s$ e $L_{t'} - L_{s'}$ são independentes;
- iii. possui incrementos estacionários, ou seja, para qualquer $0 \leq s < t < \infty$, a variável aleatória $L_{t+s} - L_t$ tem a mesma distribuição para todo t ;
- iv. é estocasticamente contínuo, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$, $P((L_{t+s} - L_t) > \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$;

- v. as trajetórias do processo são contínuas à direita e possuem limite à esquerda (função *cadlag*).

Exemplos de processos de Lévy são os movimentos brownianos, os processos de Poisson e suas extensões compostas. O processo de Lévy pode ser compreendido através de três componentes: uma medida de tendência (*drift*), um movimento browniano e um componente com saltos seguindo um processo de Poisson, possuindo, assim, uma grande capacidade de representar de maneira mais realista o comportamento dos preços dos ativos financeiros.

2.2 O MODELO DE BLACK-SCHOLES

2.2.1 Os pressupostos do modelo

Alguns pressupostos foram feitos por Fischer Black e Myron Scholes para a obtenção da equação diferencial do preço da opção $F(t)$ a partir do preço da ação $S(t)$:

- a taxa de juros livre de risco de curto prazo r é conhecida e constante no tempo;
- o preço da ação segue um processo estocástico em tempo contínuo, com a variância σ_S^2 proporcional ao quadrado do preço da ação $S(t)$. Dessa forma, a distribuição dos preços da ação, após um espaço de tempo finito, será lognormal. A variância do retorno da ação σ_R^2 é constante;
- a ação não paga dividendos;
- O mercado é perfeito, não existindo custos de transação em compras e vendas da ação ou da opção e a ação e a opção pode ser negociada em qualquer quantidade fracionária;
- é possível vender a descoberto a ação (*short-selling*);
- não existem oportunidades de arbitragem sem risco.

O modelo de Black-Scholes assume que a tendência (*drift*) e a volatilidade são determinísticas, assume também que somente existe uma única ação no mercado e a taxa de juros livre de risco r é determinística, portanto, com volatilidade zero. Nenhum desses

pressupostos é necessário como foi demonstrado por Baxter e Rennie (1996) através do modelo geral de BSM.

2.2.2 A equação de Black-Scholes

Uma abordagem para a construção da equação de Black-Scholes é feita a partir da construção de uma carteira contendo uma opção e certa quantidade constante Δ_t da ação.

$$\Pi = F(S, t) + \Delta_t S_t \quad (0)$$

A variação do valor do *portfolio* do instante t ao instante $t + dt$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$d\Pi = dF(S, t) + \Delta_t dS_t \quad (1)$$

Utilizando-se do lema de Itô, tem-se que:

$$dF(S, t) = \frac{\partial F(S, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} dt \quad (2)$$

Tem-se, então, de (1) e (2):

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial F(S, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} dt + \Delta_t dS_t \\ &= \frac{\partial F(S, t)}{\partial t} dt + \left(\Delta + \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} \right) dS(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} dt \end{aligned}$$

Pode-se entender, nesta equação, que o termo dS_t é estocástico, dado que não se pode saber o preço da ação antecipadamente. Logo, para ser anulado o efeito da estocasticidade do preço, pode-se escolher a quantidade Δ_t , de forma que se anule o risco. Essa escolha é mais conhecida como *hedge* pelo delta.

$$\begin{aligned} \left(\Delta_t + \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} \right) &= 0 \\ \Delta_t &= - \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} \end{aligned} \quad (3)$$

A variação do valor do *portfolio* do instante t ao instante $t + dt$, após o *hedge* do delta passa a ser escrito como:

$$d\Pi = \frac{\partial F(S, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} dt \quad (4)$$

Em virtude de a carteira ser isenta de risco, pode-se, então, considerar que pelo princípio da não-arbitragem, o valor da variação do *portfolio* no instante $t + dt$ deve ser o valor da variação do *portfolio* Π pela taxa livre de risco r :

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (5)$$

Logo, substituindo em (5) os valores das equações (4), (3) e (0), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(S, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} dt &= r \left(F(S, t) + \Delta_t S_t \right) dt \\ \left(\frac{\partial F(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} \right) dt &= r \left(F(S, t) - \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} S_t \right) dt \end{aligned}$$

Dividindo por dt e rearranjando os termos, será obtida a equação de Black e Scholes:

$$\frac{\partial F(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} - r F(S, t) = 0$$

Pode-se observar que, na equação de Black e Scholes, o valor da esperança do preço da ação não é explicitamente apresentado. O argumento econômico para esse fato é que em virtude de existir um *hedge* perfeito para opção realizado sobre determinada quantidade da ação, nenhum prêmio por risco deve ser concedido ao investidor, mas somente o retorno de um ativo livre de risco.

2.2.3 As condições de contorno do contrato contingencial

As condições finais ou de fronteira fornecem informações de como a solução do problema se comporta, e.g., quando $S_t = 0$ e quando $S_t \rightarrow \infty$.

Pode-se observar que a equação de Black e Scholes não fornece nenhuma característica a respeito do tipo de opção que se está precificando, como, e.g., se é uma opção de compra ou venda ou o preço de exercício da opção.

Essas condições são chamadas de condições de contorno do contrato. No caso de uma opção de compra européia, uma condição final do contrato será $F(S_T, T) = \max[S_T - K_T, 0]$ e, no caso de uma opção de venda européia, ter-se-á $F(S_T, T) = \max[K_T - S_T, 0]$, em que T é a data de vencimento da opção.

Além dessas condições, tem-se, também, que, quando $S_t = 0$, o valor do contrato se torna $F(0, t) = 0$.

2.2.4 A conversão da equação de Black e Scholes em uma equação de difusão do calor

A equação de Black e Scholes deve ser resolvida através das condições finais do contrato. É importante lembrar que, na maioria dos casos, a derivação de fórmulas explícitas para o valor teórico das opções não é possível, sendo, então, necessária a utilização de métodos numéricos para sua solução.

$$\frac{\partial F(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial F(S, t)}{\partial S_t} - r F(S, t) = 0 \quad (0)$$

Seja chamado o momento em que ocorre o exercício da opção européia de T e

$$F(S, t) = e^{-r(T-t)} U(S, t) \quad (1)$$

Utilizando-se (1), tem-se uma nova equação de Black e Scholes:

$$\frac{\partial [e^{-r(T-t)} U(S, t)]}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 [e^{-r(T-t)} U(S, t)]}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial [e^{-r(T-t)} U(S, t)]}{\partial S_t} - r e^{-r(T-t)} U(S, t) = 0$$

$$e^{-r(T-t)} r U(S, t) + e^{-r(T-t)} \frac{\partial [U(S, t)]}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 U(S, t)}{\partial S_t^2} + r S_t e^{-r(T-t)} \frac{\partial U(S, t)}{\partial S_t} - r e^{-r(T-t)} U(S, t) = 0$$

$$\frac{\partial U(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 U(S, t)}{\partial S_t^2} + r S(t) \frac{\partial U(S, t)}{\partial S_t} = 0 \quad (2)$$

Substituindo na equação $\tau = T - t$ que corresponde ao prazo remanescente de vencimento (maturidade), tem-se:

$$\frac{\partial U(S_t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 U(S_t, \tau)}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial U(S_t, \tau)}{\partial S_t} \quad (3)$$

Seja criada uma nova variável $\xi_t = \ln(S_t)$, com isso, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial S_t} = \exp(-\xi_t) \frac{\partial}{\partial \xi_t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial S_t^2} = \exp(-2\xi_t) \frac{\partial^2}{\partial \xi_t^2} - \exp(-2\xi_t) e^{-2\xi_t} \frac{\partial}{\partial \xi_t}$$

Aplicando em (3), tem-se:

$$\frac{\partial U(\xi_t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 U(\xi_t, \tau)}{\partial \xi_t^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial U(\xi_t, \tau)}{\partial \xi_t} \quad (4)$$

Seja a função $W(x, \tau) = U(\xi_t, \tau)$ e $x_t = \xi_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau$. Tem-se, então, uma forma

bastante simplificada da equação de Black e Scholes:

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (5)$$

Equações dessa forma são conhecidas como equação de transferência ou difusão de calor, sendo um problema clássico de solução de equações diferenciais parciais, podendo ser resolvido através das funções de Green ou através das séries de Fourier.

2.2.5 A fórmula do preço de uma opção de compra européia ordinária

A equação de difusão do calor obtida (5) pode ser resolvida através de uma solução especial:

$$W(x, \tau) = \tau^\alpha g\left(\frac{x - x_c}{\tau^\beta}\right) \quad (6)$$

e x_c é uma constante qualquer.

Será promovida uma mudança em g , reduzindo a função a uma única variável $\eta = \frac{x - x_c}{\tau^\beta}$. Dessa forma, a equação para $g(\eta)$ será uma equação diferencial ordinária.

Substituindo (6) em (5), tem-se:

$$\tau^{\alpha-1} \left(\alpha g(\eta) - \beta \eta \frac{dg(\eta)}{d\eta} \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 \tau^{(\alpha-2\beta)} \frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2}$$

A única solução em α e β necessita que:

$$\alpha - 1 = \alpha - 2\beta. \text{ Logo, } \beta = \frac{1}{2}.$$

A integral da solução $g(\eta)$ necessita que a mesma seja independente de τ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^\alpha g\left(\frac{x - x_c}{\tau^\beta}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{\alpha+\beta} g(\eta) d\eta$$

Para que isso seja verdade, tem-se que $\tau^{\alpha+\beta} = 1$. Logo, $\alpha = -\beta = -\frac{1}{2}$.

A função g , portanto, satisfaz:

$$-g(\eta) - \eta \frac{dg(\eta)}{d\eta} = \sigma^2 \frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2}$$

$$\sigma^2 \frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2} + \frac{d(\eta g(\eta))}{d\eta} = 0$$

Integrando pela primeira vez, ter-se-á:

$$\sigma^2 \frac{dg(\eta)}{d\eta} + \eta g(\eta) = c_1$$

Escolhendo $c_1 = 0$ e integrando mais uma vez, ter-se-á:

$$g(\eta) = c_2 e^{\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Escolhendo c_2 , de forma que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) d\eta = 1$, ter-se-á:

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Escrevendo sob a forma de W :

$$W(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\tau}} e^{\left(-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2\tau}\right)}$$

A função W torna-se uma função delta de Dirac quando $x = x_c$, pois se tem que:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2\tau}\right)} h(x_c) dx_c = h(x)$$

Seja $F(S_T, T) = \text{Payoff}(S_T)$, tem-se então:

$$F(S_T, T) = \text{Payoff}(S_T) = \text{Payoff}(e^x) = \text{Payoff}(e^x) = W(x, 0) \text{ e}$$

$$W(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\tau}} e^{\left(-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2\tau}\right)} \text{Payoff}(e^{x_c}) dx_c$$

Logo, tem-se que a fórmula do valor da opção, baseada em uma função qualquer do valor intrínseco da opção (*payoff*), será:

$$F(S, t) = e^{-r(T-t)} U(S, T - \tau) = e^{-r(T-t)} W(x, \tau)$$

$$F(S, t) = e^{-r(T-t)} U(S, T - \tau) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(T-t)}} e^{\left(-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2\tau}\right)} \text{Payoff}(e^{x_c}) dx_c$$

Sabemos que $x = \xi + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau = \ln(S) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ e definindo $x_c = \ln(S_c)$,

tem-se:

$$F(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{+\infty} e^{\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{S_c}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)} \text{Payoff}(S_c) \frac{dS_c}{S_c}$$

No caso de uma opção de compra européia, tem-se que $\text{Payoff}(S) = \max[S - K, 0]$ e sua fórmula de preço será:

$$C(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{+\infty} e^{\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{S_c}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)} C_0(S_c) \frac{dS_c}{S_c}$$

$$C(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_K^{+\infty} e^{\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{S_c}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)} (S_c - K) \frac{dS_c}{S_c}$$

Promovendo-se mais uma mudança de variáveis, estabelece-se:

$$\begin{aligned} \eta &= \ln(S_c \div S) - r(T-t) \\ &= \ln(S_c) - \ln(S) - r(T-t) \end{aligned}$$

Tem-se, assim, que: $S_c = S \exp(r(T-t) + \eta)$

Na transformação da integral, tem-se:

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{dS_c}{S_c}, \quad \text{e os limites:} \quad \text{Se } S_c = K, \text{ tem-se } \eta = \ln(K \div S) - r(T-t); \\ &\quad \text{Se } S_c \rightarrow \infty, \text{ tem-se } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A nova equação será:

$$C(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right)}^{+\infty} e^{\left(\frac{-(\eta + \sigma^2(T-t) \div 2)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)} (Se^{r(T-t) + \eta} - K) d\eta$$

$$\begin{aligned} C(S, t) &= (Se^{r(T-t)}) \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right)}^{+\infty} e^{\left(\eta - \frac{(\eta + \sigma^2(T-t) \div 2)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)} d\eta \\ &\quad - K \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right)}^{+\infty} e^{\left(\frac{-(\eta + \sigma^2(T-t) \div 2)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)} d\eta \end{aligned}$$

$$C(S, t) = S \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right)}^{+\infty} e^{\left(\frac{(\eta - \sigma^2(T-t) \div 2)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)} d\eta$$

$$- K \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right)}^{+\infty} e^{\left(\frac{-(\eta + \sigma^2(T-t) \div 2)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)} d\eta$$

Ambas as integrais podem ser escritas sob a forma de $\int_d^{+\infty} e^{\left(\frac{-x_c^2}{2}\right)} d\eta$ e lembrando-se de que a função acumulada da distribuição normal padronizada é definida por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\left(\frac{-y^2}{2}\right)} dy$$

Fazendo nova transformação de variáveis para simplificação da 2ª integral, tem-se:

$$x = \frac{\eta + \sigma^2(T-t) \div 2}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$d\eta = \sqrt{\sigma^2(T-t)} dx$$

$\eta \rightarrow \infty$, tem-se $x \rightarrow \infty$;

$$\text{quando } \eta = \left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right), \text{ tem-se } x = d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Para a 1ª integral, tem-se de maneira similar:

$$x = \frac{\eta - \sigma^2(T-t) \div 2}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$\text{quando } \eta = \left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - r(T-t)\right), \text{ tem-se } x = d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Portanto, chega-se ao preço da opção européia de compra segundo o modelo de Black-Scholes (1973):

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K_T e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= S_t N(d_1) - K_T e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

2.3 OS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO COM SALTOS

2.3.1 Eventos raros e *outliers*

Comportamentos extremos nas mudanças de preços dos ativos financeiros são passíveis de ocorrer na maioria dos mercados. Muitas vezes, turbulências nos mercados apenas promovem aumento da volatilidade que pode ser mensurada por processos estocásticos contínuos.

O que difere os eventos raros (*outliers*) dos eventos típicos é a forma com que as mudanças dos preços ocorrem. Nos eventos normais, à medida que o intervalo de tempo observado h torna-se menor, a amplitude da mudança de preço também se torna menor, ou seja, ao ser diminuído o intervalo de tempo, as observações de grandes mudanças de preço diminuem sensivelmente, tornando-se desprezíveis à medida que $h \rightarrow 0$. No caso de eventos raros, apesar da probabilidade de ocorrência tender a zero à medida que $h \rightarrow 0$, a magnitude das mudanças de preços pode não diminuir, provocando saltos nos preços dos ativos, ou seja, a existência de eventos raros promove a descontinuidade das trajetórias de preços dos ativos, existindo uma relação de causa e efeito entre a ocorrência de *outliers* e a existência de saltos na dinâmica de preços dos ativos.

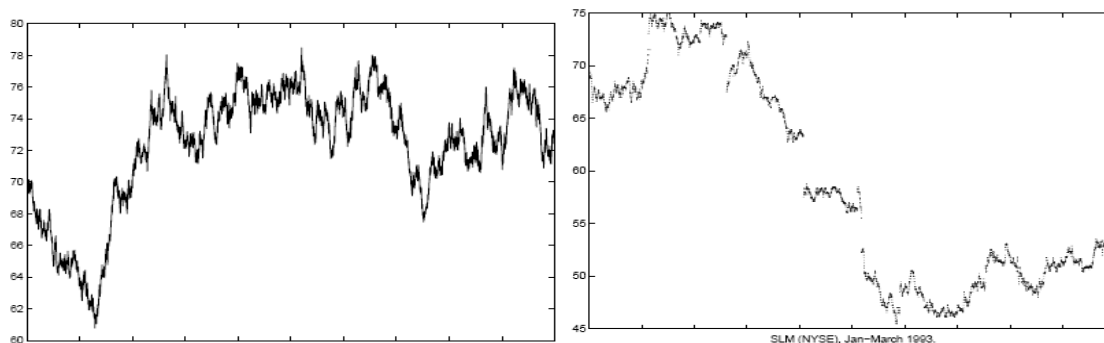
Segundo Cont e Tankov (2003), se alguma dúvida ainda possa existir a respeito da importância de existirem modelos de precificação de ativos que admitam a possibilidade de eventos raros na economia, basta ser lembrado que, na análise de valores em risco de qualquer companhia, devem ser feitas suposições sobre movimentos extremos no comportamento dos preços dos ativos para alocação correta de requisitos de capital dessa instituição.

2.3.2 A modelagem de log-retornos diários com saltos e os processos de Lévy

Nos últimos anos, tem crescido muito a utilização dos processos de Lévy na área de finanças quantitativas por causa da sua capacidade de descrever a realidade do mercado financeiro de uma maneira mais precisa que os modelos baseados em MBG. No mundo real, observa-se que os preços dos ativos possuem saltos ou pontos de descontinuidade e os gestores de risco devem levar isso em consideração. Além disso, como discutido anteriormente, a distribuição empírica dos retornos dos ativos apresentam leptocurtose e assimetria, comportamentos esses que contrariam a hipótese da normalidade dos log-retornos diários dos ativos.

Algumas das importantes propriedades do MBG é que ela é uma função contínua no tempo e não é variável em relação à escala utilizada de tempo (segundos, minutos, horas, dias ou anos). Essas propriedades não são observadas no mundo real. Na primeira figura, tem-se uma trajetória gerada pelo MBG para o período de três meses a partir da esperança dos log-retornos e da volatilidade anualizada da ação SLM (NYSE). No segundo gráfico está o movimento de preços real. Pode-se observar, no segundo gráfico, que existem descontinuidades de preços (saltos) e a existência de um movimento constante de queda de preços. No primeiro gráfico, é difícil distinguir se o movimento apresentado é referente a um período de três horas, três meses ou três anos.

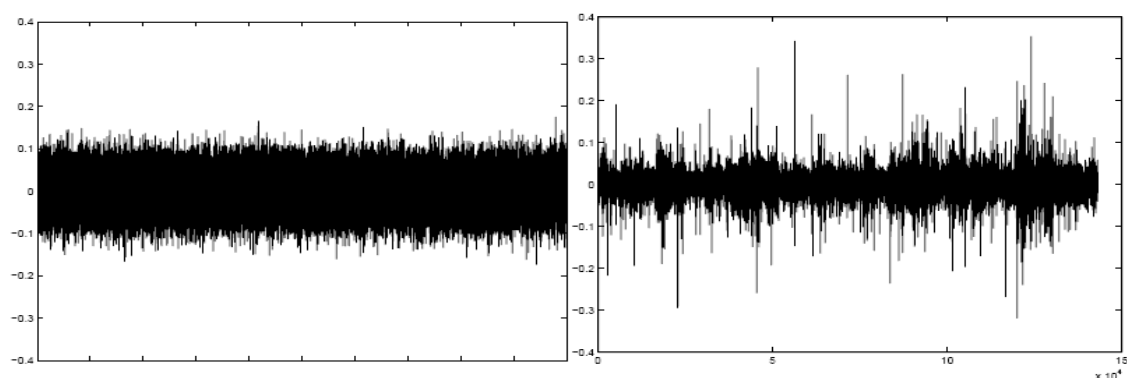
Gráfico 6 - Trajetória de preços de um MBG e uma trajetória real (Cont e Tankov, 2003)



Essa não variabilidade em relação à escala e a ausência de saltos é acentuadamente percebida quando se olham os preços ao longo do dia dos ativos e nitidamente nota-se a predominância de saltos dos preços, ao contrário do MBG em que o movimento de preços aparenta ser o mesmo das escalas maiores de tempo.

Outro comportamento bastante irreal do MBG e crítico em relação à tomada de decisão do investidor é a forma com que são gerados os log-retornos dos ativos. Abaixo, observa-se, no primeiro gráfico, a dispersão dos log-retornos gerados por um MBG de mesma esperança e volatilidade que a distribuição real dos retornos no gráfico ao lado, sendo plausível a existência do fato empírico da leptocurtose no comportamento desse ativo em virtude da concentração dos log-retornos em torno da média e da existência de log-retornos mais evidenciados em pontos extremos da distribuição (caudas).

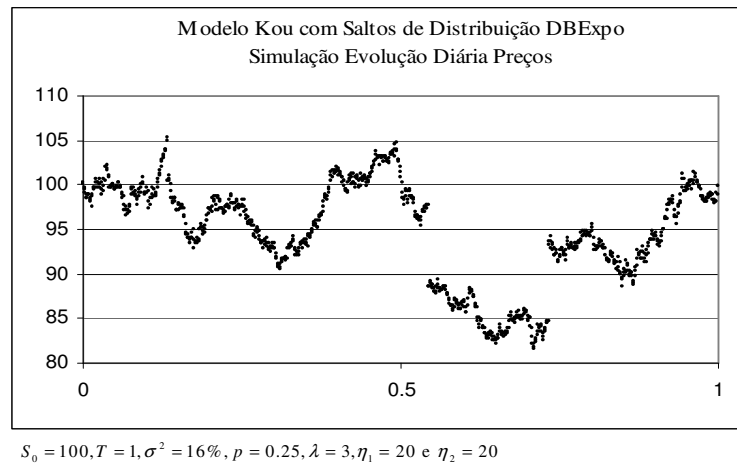
Gráfico 7 - Dispersão de uma distribuição simulada MBG e sua respectiva dispersão real (Cont e Tankov, 2003)



Dada essa situação, modelos que mais precisamente se ajustam à distribuição dos log-retornos são essenciais para a estimativa dos lucros e perdas das companhias. Em um mundo com risco neutralizado, idealmente as volatilidades implícitas são constantes em relação ao preço de exercício e ao vencimento da opção como estipulado pelo modelo de BSM. Portanto, os investidores precisam de modelos que possam capturar esse fato estilizado para que possam administrar os riscos de seus negócios.

Os processos de Lévy com difusão e saltos fornecem uma estrutura adequada para descrever esses fatos estilizados tanto no mundo físico quanto no mundo com o risco neutralizado. O gráfico abaixo foi gerado a partir de um processo simulado de Lévy com difusão e saltos. Fatos observáveis no mundo físico, tais como saltos de preços (instantes $t = 0.54$ anos e $t = 0.73$ anos), podem ser gerados através do modelo teórico do processo de Lévy.

Gráfico 8 - Trajetória de preços gerada pela dinâmica de preços do modelo de Kou



Seja o processo $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy com MBG e com um processo de Poisson composto e compensado. Esse processo pode ser descrito por:

$$L_t = bt + cW_t + \left(\sum_{k=1}^{N_t} J_k - \underbrace{E \left[\sum_{i=1}^{N_t} J_i \right]}_{\kappa \lambda t} \right)$$

em que:

$b \in R$;
 $c \in R_+$;
 $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ é um movimento browniano padrão;
 $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda > 0$, ou seja $E[N_t] = \lambda t$;
 $J = \{J_i\}_{i \geq 0}$ é uma sequência IID com distribuição F e $0 < E[J] = \kappa < \infty$;

Os três processos estocásticos W, N e J são mutuamente independentes, ou seja, $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$. Sabe-se que o movimento browniano e o processo compensado de Poisson são martingales. Portanto, $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ é um martingale se e somente se $b = 0$.

O tripé característico de Lévy (b, c, ν) é composto por $b \in R$ representando a tendência do processo, $c \in R_+$ é o coeficiente gaussiano ou de difusão e ν é conhecido como a medida de Lévy. A medida de Lévy ν é uma medida em R que satisfaz as seguintes condições:

$$\nu(\{0\}) = 0, \quad \int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

As condições anteriores indicam que a medida de Lévy não possui massa na sua origem, mas infinitos pequenos saltos podem ocorrer em torno da origem. Intuitivamente a medida de Lévy descreve o número esperado de saltos de certa amplitude em um intervalo unitário.

E.g., em um processo de Lévy com difusão e saltos, tem-se que $\nu(dx) = \lambda F(dx)$, em que se deduz que os saltos ocorrem com intensidade λ e a amplitude do salto tem distribuição F .

Se ν for uma medida finita, ou seja, $\nu(R) = \int_R \nu(dx) = \lambda < \infty$, então, tem-se que:

$$F(dx) = \frac{\nu(dx)}{\lambda} \text{ é uma medida de probabilidade.}$$

Se ν for uma medida infinita, ou seja, $\nu(R) = \infty$, então, tem-se que um número infinito de pequenos saltos é esperado.

Pode-se descrever um modelo de precificação de ativos utilizando processos de Lévy sob a forma de $S_t = S_0 \exp(L_t)$, em que $\{L_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy.

Os modelos mais populares de processos de Lévy utilizados para precificação de ativos financeiros são:

- Modelo de Black-Scholes (1973) pressupõe que os log-retornos dos ativos financeiros são distribuídos normalmente, ou seja, $L_t \sim N(\mu, \sigma^2)$.
 - Tripé característico $(\mu, \sigma^2, 0)$
 - Decomposição canônica $L_t = \mu t + \sigma W_t$

- Modelo de Merton para retornos descontínuos (1976). Foi o primeiro processo com saltos a modelar o retorno dos ativos.
 - Tripé característico $(\mu, \sigma^2, \lambda f_J)$
 - Decomposição canônica $L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k$
 - $J \sim NID(\mu_j, \sigma_j^2)$
 - $f_J(x) = \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right)$
 - J e W independentes
 - Função de densidade L_t não possui fórmula analítica.

- Modelo de Kou (2002). Similar ao modelo de Merton, porém a distribuição da amplitude dos saltos é duplamente exponencial.
 - Tripé característico $(\mu, \sigma^2, \lambda f_J)$
 - Decomposição canônica $L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k$

- $J \sim DbExpID(p, \eta_1, \eta_2)$
- $f_J(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 x} \mathbf{1}_{\{x < 0\}}$
- J e W independentes
- Função de densidade L_t não possui fórmula analítica.

O fato de a dinâmica de preço ser orientada por um processo de Lévy, faz com que, de maneira geral, o mercado seja incompleto, as únicas exceções são os processos MBG e os processos puros de Poisson, portanto, existe, em geral, uma grande quantidade de medidas martingales candidatas à neutralização do risco.

Recomenda-se a leitura de Cont e Tankov (2003) e Santos (2005) para melhor compreensão das aplicações dos processos de Lévy em finanças quantitativas.

Tabela 2 - Comparação entre os modelos de difusão MBG e os modelos com saltos (Cont e Tankov, 2003)

Fatos Empíricos	Modelos de difusão (MBG)	Modelos de difusão com saltos
Grandes e repentinos movimentos de preços	Difícil. Necessita grandes e irreais aumentos na volatilidade do ativo.	Propriedade genérica.
Leptocurtose	Possível utilizando-se estruturas de volatilidade não lineares.	Propriedade genérica.
Opções são investimentos de risco.	Opções podem ser ter <i>hedge</i> contínuo de uma maneira livre de risco.	<i>Hedge</i> perfeito não existe. Opções são investimentos de risco, podem ser minimizados.
Mercados são incompletos. Alguns riscos podem não ter <i>hedge</i> .	Mercados são completos.	Mercados são incompletos.

Perdas são concentradas em poucos movimentos de queda.	Mudanças abruptas não ocorrem. As perdas são contínuas.	Descontinuidade através de saltos pode proporcionar perdas abruptas.
Algumas estratégias de <i>hedge</i> são melhores que as outras.	Todas as estratégias de <i>hedge</i> contínuo levam a um risco residual zero apesar da medida de risco utilizada.	A estratégia de <i>hedge</i> é obtida resolvendo um problema de otimização de <i>portfolio</i> .

2.3.3 O modelo puro com saltos determinísticos idênticos sem MBG

Os modelos de difusão do preço pressupõem a mudança contínua no preço da ação. Considere-se, agora, um modelo pouco realista, mas bastante didático para demonstrar um modelo com saltos. Inicialmente proposto por Cox e Ross (1975), esse modelo puro de saltos apresenta uma dinâmica de preços que a cada pequeno intervalo de tempo Δt o preço da ação tem a probabilidade $p_{up} = 1 - \lambda \Delta t$ de mudar seu preço para $S_t e^{\tilde{\mu} \Delta t}$ e a probabilidade $p_{down} = \lambda \Delta t$ de mudar seu preço para $S_{t+\Delta t} = S_t e^{\tilde{\mu} \Delta t - J}$, com J determinístico e estritamente positivo.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 1 - \lambda \Delta t & \nearrow \\
 S_t & & S_{t+\Delta t} = S_t e^{\tilde{\mu} \Delta t} \\
 & \lambda \Delta t & \searrow \\
 & & S_{t+\Delta t} = S_t e^{\tilde{\mu} \Delta t - J}
 \end{array}
 \end{array}$$

Dessa forma, os log-retornos desse modelo serão:

$$\ln \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = \mu \Delta t \quad \text{quando não ocorrem saltos;}$$

$$\ln \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = \mu \Delta t - J \quad \text{no caso em que ocorrem saltos sendo o movimento de baixa.}$$

A esperança de $X = \ln \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)$ e a variância serão:

$$\begin{aligned}
E^P[X] &= p_u X_u + p_d X_d \\
&= (1 - \lambda \Delta t) \tilde{\mu} \Delta t + \lambda \Delta t (\tilde{\mu} \Delta t - J) \\
&= (\tilde{\mu} - \lambda J) \Delta t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^P[X] &= E[(X - \mu)^2] \\
&= p_u (X_u - (p_u X_u + p_d X_d))^2 + p_d (X_d - (p_u X_u + p_d X_d))^2 \\
&= p_u p_d (X_u - X_d)(p_u + p_d) \\
&= p_u p_d (X_u - X_d) \\
&= (1 - \lambda \Delta t) \lambda \Delta t J^2 \\
&= \lambda \Delta t J^2 - (\lambda \Delta t J)^2
\end{aligned}$$

Sabe-se que o log-retorno durante o período de tamanho 1 é a soma dos $\frac{1}{\Delta t}$ log-retornos sobre o período de tempo Δt , a saber:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} E^P[X(\Delta t)] &= E^P[X(1)] = \mu \\
\frac{1}{\Delta t} V^P[X(\Delta t)] &= V^P[X(1)] = \sigma^2
\end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mu &= \tilde{\mu} - \lambda J \\
\sigma^2 &= \lambda J^2 - \Delta t (\lambda J)^2 = J^2 (\lambda - \lambda^2 \Delta t)
\end{aligned}$$

Podem-se encontrar, então, a função de $\tilde{\mu}$ e J em Δt :

$$\begin{aligned}
J(\Delta t) &= \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \lambda \Delta t}} \\
\tilde{\mu}(\Delta t) &= \mu + \frac{\sigma \lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - \lambda \Delta t}}
\end{aligned}$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$, ter-se-á $J = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}$ e $\tilde{\mu} = \mu + \sigma \lambda \sqrt{\lambda}$.

No MBG, $X = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ pode assumir qualquer valor em $(-\infty; \infty)$, porém no movimento com saltos X somente pode assumir um número discreto de valores que correspondem à quantidade de saltos que podem ocorrer no período $[0; t]$:

- $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \tilde{\mu}t$ caso nenhum salto ocorra no período $[0; t]$;
- $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \tilde{\mu}t - J$ caso ocorra 1 salto no período $[0; t]$;
- $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \tilde{\mu}t - 2J$ caso ocorram 2 saltos no período $[0; t]$;
- $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \tilde{\mu}t - N_t J$ caso ocorram N_t saltos no período $[0; t]$.

Como já se sabe, a quantidade de saltos em um determinado período $[0; t]$ é uma variável aleatória de tal forma que $\Pr\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Calcule-se, agora, a medida neutralizadora do risco Q :

$$Q_u = \frac{R_f - R_d}{R_u - R_d}$$

Utilizando a expansão de Taylor $e^x = 1 + x + o(t)$, tem-se que:

$$R_f = 1 + rt + o(t)$$

$$R_d = e^{\tilde{\mu}t - J_t} = e^{-J} \left(1 + \left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda \right) t + o(t) \right)$$

$$R_u = e^{\tilde{\mu}t} = 1 + \tilde{\mu}t + o(t)$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q_u(\Delta t) &= \frac{(1+rt+o(t)) - \left(e^{-J} \left(1 + \left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2} \sigma t \sqrt{\lambda} \right) t + o(t) \right) \right)}{1 + \tilde{\mu} t + o(t) - \left(e^{-J} \left(1 + \left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2} \sigma t \sqrt{\lambda} \right) t + o(t) \right) \right)} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{r - \tilde{\mu}}{1 - e^{-J}}}_{-\lambda_Q} \Delta t + o(n) \quad (\text{análoga à } p_{up} = 1 - \lambda_p \Delta t)
\end{aligned}$$

Isso significa que, após a neutralização do risco, a ocorrência de saltos será representada por $\lambda_Q = -\left(\frac{r - \tilde{\mu}}{1 - e^{-J}} \right) = \frac{\tilde{\mu} - r}{1 - e^{-J}} = \frac{\mu + \sigma \lambda \sqrt{\lambda} - r}{1 - e^{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \right)}}$.

A fórmula do preço da opção de compra sob a hipótese do movimento puro de saltos determinísticos será:

$$\begin{aligned}
c(t, N(t)) &= e^{-r(T-t)} E^Q [c(T, N(t))] \\
c(t, N(t)) &= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\max [S_0 e^{\tilde{\mu}(T-t) - (n+N(t))J} - K; 0] \times \Pr_Q \{N(t) = n\} \right) \\
c(t, N(t)) &= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\max [S_0 e^{\tilde{\mu}(T-t) - (n+N(t))J} - K; 0] \times e^{-\lambda_Q(T-t)} \frac{(\lambda_Q(T-t))^n}{n!} \right) \\
c(t, N(t)) &= e^{-r(T-t)} e^{-\lambda_Q t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\max [S_0 e^{\tilde{\mu}(T-t) - (n+N(t))J} - K; 0] \times \frac{(\lambda_Q(T-t))^n}{n!} \right) \\
c(t, N(t)) &= e^{-(r+\lambda_Q)(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\max [S_0 e^{\tilde{\mu}(T-t) - (n+N(t))J} - K; 0] \times \frac{(\lambda_Q(T-t))^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

Pode-se também identificar a quantidade exata de ativos-objetos no *portfolio* replicante autofinanciável, mais conhecido como o delta do *hedge*, sendo essa uma estratégia de *hedge* perfeito dinâmico:

$$\theta = \frac{c_u - c_d}{S_u - S_d}$$

Na dinâmica de preços, quando Δt é muito pequeno, tem-se:

$$\begin{aligned}
S_u &= S_0 e^{\tilde{\mu} \Delta t} = S_0 + o(\Delta t) \\
S_d &= S_0 e^{\tilde{\mu} \Delta t - J} = S_0 e^{-J} + o(\Delta t)
\end{aligned}
\quad e \quad
\begin{aligned}
c_u &= c(\Delta t, 0) = c(0, 0) + o(\Delta t) \\
c_d &= c(\Delta t, 1) = c(0, 1) + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

Logo, temo-se que a quantidade delta do *hedge* será:

$$\theta(t, N_t \geq 0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c_u - c_d}{S_u - S_d} = \frac{c(t, N_t \geq 0) - c(t, N_t \geq 1)}{S_t (1 - \exp(-J))}$$

2.3.4 O modelo com saltos normais de Merton com MBG

Segundo Merton (1973), o pressuposto mais importante da derivação da fórmula pelo modelo de BSM é de que os negócios acontecem a todo o momento no mercado e, portanto, as curvas de preço da ação são contínuas no tempo. A solução do modelo necessita que o preço da ação possa ser representado por um processo estocástico de Markov localmente, ou seja, em um curto espaço de tempo o preço da ação pode se modificar em pequenos movimentos de alta e de baixa.

Observe-se que os preços das ações, geralmente em resposta a fatos imprevistos, apresentam movimentos bruscos de preços que muito se assemelham a saltos e/ou a eventos raros. Nos estudos realizados por Merton (1973), todos os demais pressupostos do modelo de BSM são mantidos, analisando-se o impacto no modelo de precificação, considerando-se a existência de log-retornos não-contínuos, ou seja, a existência de saltos no movimento de preços das ações.

2.3.4.1 A dinâmica do preço da ação e da opção

A modelagem dos saltos é feita considerando-se que, em um intervalo de tempo h e dado um parâmetro λ com $\lambda \geq 0$, um salto irá acontecer nesse intervalo de tempo com probabilidade λh . Além disso, será considerado que essa probabilidade não se modifica em virtude da existência de informação a respeito de saltos anteriores. Se for denotado $N(t)$ o número de saltos que ocorrem até o instante t com os pressupostos anteriores, pode-se chamar $\{N(t), t \geq 0\}$ de processo de Poisson e mostrar que:

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (0)$$

Segundo Merton (1973), a mudança total no preço da ação será a composição de dois tipos de mudanças: a variação de preço em virtude da oferta e demanda do ativo, mudanças nas taxas de capitalização e mudanças nas perspectivas econômicas, ou outras informações que causem mudanças marginais no preço da ação. Esse tipo de mudança é modelado por meio de um MBG com volatilidade constante por unidade de tempo e um trajeto contínuo dos preços. O outro tipo de mudança seria do tipo “abrupta” em virtude do surgimento de novas e importantes informações de mercado sobre a empresa ou sobre o setor em que ela atua.

É razoável esperar-se que existam períodos mais turbulentos em que o preço da ação se modifique em uma maior magnitude e períodos mais calmos em que esse preço sofra pequenas e lentas modificações. É perfeitamente plausível que períodos turbulentos e períodos calmos sejam aleatórios, além disto, pela sua natureza, informações que promovem turbulência nos preços são pontos discretos no tempo. Essa componente que afeta o preço da ação é modelada como um processo de salto, refletindo um impacto não-marginal no preço.

Para ser consistente com a hipótese geral de eficiência do mercado (FAMA, 1970), a dinâmica dos movimentos não-antecipados de preço deveria ser um martingale. A dinâmica de preço para processos contínuos de tempo em contínuos movimentos de preço é o processo de Itô. Os processos de saltos são processos compostos de Poisson, que podem ser descritos como processos independentes e identicamente distribuídos.

Suponha-se que, quando ocorrem saltos, o preço da ação é multiplicado por uma variável estocástica J_i em que i representa o salto de número i do movimento de preço da ação. Poder-se-ia, então, descrever o preço da ação da seguinte maneira:

$$S(t) = S^*(t) \prod_{i=1}^{N(t)} J_i, \quad J \sim \text{IID}$$

em que:

$$J_i \sim f_J(j), \quad j \in R_+^*;$$

$$t \geq 0 \text{ e } \prod_{i=1}^{N(t)} J_i = 1 \text{ quando } N(t) = 0;$$

$S^*(t)$ é um MBG.

Além disto, deve-se considerar que o MBG, o processo de Poisson e os saltos são mutuamente independentes.

$$\text{Seja } J(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} J_i. \text{ Calcule-se } E[J(t)]:$$

$$\begin{aligned} E[J(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[J(t) | N(t) = n] \times P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^{N(t)} J_i(t) | N(t) = n\right] \times P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^n J_i(t)\right] \times P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (E[J(t)])^n \times \exp(-\lambda t) \times \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t) \times \frac{(E[J(t)] \lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\therefore E[J(t)] = \exp(-\lambda t(1 - E[J]))$$

Devido ao fato de $S^*(t)$ ser um estado do MBG, tem-se que:

$$E[S^*(t)] = S^*(0) \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$

Assim, tem-se:

$$E[S(t)] = E[S^*(t)J(t)] = E[S^*(t)]E[J(t)]$$

$$E[S(t)] = S^*(0) \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \exp(-\lambda t(1 - E[J]))$$

$$E[S(t)] = S^*(0) \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} - \lambda + \lambda E[J]\right)t\right)$$

$$J(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} J_i = \prod_{i=1}^{N(t)} e^{X_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)$$

Substituindo em (1):

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= e^{-rt} E_t^Q \left[\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) S^*(0) \exp(W_t) - K_T \right)^+ \right] \\ C(S_t, t) &= \exp(-rt) E_t^Q \left[\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + W_t\right) S^*(0) - K_T \right)^+ \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Tem-se que $\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + W_t \right) \middle| N(t) = n$ é uma variável estocástica normal, sua esperança e variância serão:

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + W_t \right) \middle| N(t) = n \right] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda - \lambda E[J] \right) t + n \mu_J$$

$$V \left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + W_t \right) \middle| N(t) = n \right] = t \sigma^2 + n \sigma_J^2$$

Define-se, então, que:

$$\sigma^2(n) = \sigma^2 + \frac{n \sigma_J^2}{t} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} r(n) &= r - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda - \lambda E[J] + n \mu_J \frac{1}{t} + \frac{\sigma^2(n)}{2} \\ &= r - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda - \lambda E[J] + n \mu_J \frac{1}{t} + \frac{\left(\sigma^2 + \frac{n \sigma_J^2}{t} \right)}{2} \\ &= r + \lambda - \lambda E[J] + n \mu_J \frac{1}{t} + \frac{n \sigma_J^2}{2t} \\ &= r + \lambda - \lambda E[J] + \frac{n}{t} \left(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$r(n) = r + \lambda - \lambda E[J] + \frac{n}{t} \log(E[J]) \quad (3)$$

Sabe-se, então, que, quando $N(t) = n$, então:

$$C_{\sigma(n), r(n)}(S_t, t) = \exp(-r(n)t) E_t^Q \left[\left(\exp \left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + W_t \right) S^*(0) - K_T \right)^+ \middle| N(t) = n \right].$$

Multiplicando os dois lados por $e^{(r(n)-r)t}$, tem-se:

$$e^{(r(n)-r)t} C_{\sigma(n), r(n)}(S_t, t) = \exp(-rt) E_t^Q \left[\left(\exp \left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + W_t \right) S^*(0) - K_T \right)^+ \middle| N(t) = n \right] \quad (4)$$

A expressão anterior apura o preço da opção de compra européia sabendo-se que, em um intervalo de tempo t , ocorreram n saltos. É razoável e é demonstrável que a esperança não-condicionada acima seja uma média ponderada em diferentes quantidades de n . Utilizando-se (0) e (4), tem-se:

$$C(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp((r(n) - r)t) C_{\sigma(n), r(n)}(S_t, t)$$

$$r(n) = r + \lambda - \lambda E[J] + \frac{n}{t} \ln(E[J]);$$

$$E[J] = \exp\left(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}\right).$$

Embora a fórmula acima seja uma série infinita, sabe-se que ela converge rapidamente em virtude do fato de que λ será bastante pequeno.

2.3.5 O modelo de saltos IID

2.3.5.1 Quando o preço da opção aumenta com o aumento da volatilidade determinística

Supondo que, quando ocorrem saltos, o preço da ação é multiplicado por uma variável estocástica J_i em que i representa o salto de número i do movimento de preço da ação.

Tem-se, então:

$$S(t) = S^*(t) \prod_{i=1}^{N(t)} J_i, \quad J \sim \text{IID}$$

em que:

$$J_i \sim f_J(j), \quad j \in R_+^*;$$

$$t \geq 0 \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{N(t)} J_i = 1, \quad \text{quando} \quad N(t) = 0;$$

$$S^*(t) \text{ é um MBG;}$$

$$W_t^Q \stackrel{P}{\sim} N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda - \lambda E[J]\right)t; \sigma^2 t\right) \text{ e } W_t^Q \stackrel{Q}{\sim} N(0; t) \text{ após neutralização do risco.}$$

O preço de uma opção de compra europeia com preço de exercício K_T será:

$$\begin{aligned}
C(S_t, t) &= E_t^Q \left[e^{-rt} (S(t) - K_T)^+ \right] \\
&= e^{-rt} E_t^Q \left[(J(t) S^*(t) - K_T)^+ \right]
\end{aligned} \tag{1}$$

Proceda-se, agora, a mudança nas variáveis da fórmula acima:

$$W_t^{Q*} = W_t^Q - \lambda t (1 - E[J]) \stackrel{P}{\sim} N \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t; \sigma^2 t \right)$$

$$S_t = P_t \exp(\lambda t (1 - E[J])) = \frac{P_t}{E[J(t)]}, \text{ pois se tem } E[J(t)] = \exp(-\lambda t (1 - E[J]))$$

Dessa forma, pode-se reescrever (1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C(S_t, t) &= e^{-rt} E_t^Q \left[(J(t) P_t e^{W_t} - K_T)^+ \right] \\
&= e^{-rt} E_t^Q \left[\left(J(t) \frac{S_t}{e^{(\lambda t (1 - E[J]))}} e^{(W_t^* + \lambda t (1 - E[J]))} - K_T \right)^+ \right] \\
&= E_t^Q \left[e^{-rt} (J(t) S_t e^{W_t^*} - K_T)^+ \right]
\end{aligned}$$

Lembrando que W_t^* é uma variável estocástica normal com esperança $\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right)$ e variância $\sigma^2 t$, tem-se sob a medida P:

$$C_{salto}(S_t, t) = E_t^Q [C_{GBM}(J(t) S_t, t)]$$

Utilizando-se, adicionalmente, a desigualdade de Jensen que determina que, se u é uma função côncava em X , então, tem-se que $E[u(X)] \leq u(E[X])$.

Logo, tem-se que:

$$C_{salto}(S_t, t) = E_t^Q [C_{MBG}(J(t) S_t, t)] \geq C_{MBG}(E_t^Q [J(t) S_t], t)$$

Como se tem $E_t^Q [J(t) S(t)] = P(t)$, vale o resultado:

$$C_{salto}(S_t, t) \geq C_{MBG}(P_t, t),$$

ou seja, o preço da opção no modelo com saltos não é menor do que o preço da opção no modelo MBG, *c.p.*

2.3.5.2 O preço da opção de compra européia no modelo de saltos IID

Uma aproximação para o preço da opção no modelo de saltos genéricos pode ser obtida interpretando $C(x, t, \sigma, K, r)$ como uma função exclusiva em x e expandindo a função por Taylor em torno de um ponto $x_0 = E[X]$ e desconsiderando os termos de ordem superior a três:

$$C(x, t, \sigma, K, r) \approx C(x_0, t, \sigma, K, r) + C'(x_0, t, \sigma, K, r)(x - x_0) + \frac{1}{2} C''(x_0, t, \sigma, K, r)(x - x_0)^2$$

$$C(x, t, \sigma, K, r) \approx C(E[X], t, \sigma, K, r) + C'(E[X], t, \sigma, K, r)(x - E[X]) + \frac{1}{2} C''(E[X], t, \sigma, K, r)(x - E[X])^2$$

Tomando a esperança na medida Q em ambos os lados da equação:

$$E^Q[C(x, t, \sigma, K, r)] = C[E^Q[X]] + \frac{1}{2} C''(E^Q[X], t, \sigma, K, r) V^Q[(x - E^Q[X])^2]$$

$$E^Q[C(x, t, \sigma, K, r)] = C[E^Q[X]] + \frac{1}{2} C''(E^Q[X], t, \sigma, K, r) V^Q[X]$$

Seja, então, $X = J(t)S_t$ e $E^Q[X] = s$, tem-se que:

$$E^Q[C(S_t J(t), t, \sigma, K, r)] = C(s) + \frac{1}{2} C''(s, t, \sigma, K, r) V^Q[S_t J(t)]$$

$$E^Q[C(S_t J(t), t, \sigma, K, r)] = C(s) + \frac{1}{2} C''(s, t, \sigma, K, r) S_t^2 V^Q[J(t)]$$

Utilizando o resultado anterior $E^Q[J(t)] = \exp(-\lambda t(1 - E[J]))$, tem-se:

$$\begin{aligned}
V^Q[J(t)] &= E^Q[J^2(t)] - E^Q[J(t)]^2 \\
V^Q[J(t)] &= E^Q\left[\left(\prod_{i=1}^{N(t)} J_i\right)^2\right] - \left(\exp(-\lambda t(1 - E^Q[J]))\right)^2 \\
V^Q[J(t)] &= E^Q\left[\left(\prod_{i=1}^{N(t)} J_i^2\right)\right] - \left(\exp(-\lambda t(1 - E^Q[J]))\right)^2 \\
V^Q[J(t)] &= \exp(-\lambda t(1 - E^Q[J^2])) - \exp(-2\lambda t(1 - E^Q[J]))
\end{aligned}$$

Sabe-se que a derivada parcial de segunda ordem de C em relação a s_t é conhecida como gama e é definida por:

$$\begin{aligned}
C''(s_t, t, \sigma, K_T, r) &= \frac{\partial^2 C(s_t, t, \sigma, K_T, r)}{\partial s_t^2} \\
&= \Phi'(w) \frac{1}{s_t \sigma \sqrt{t}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \right) \frac{1}{s_t \sigma \sqrt{t}}
\end{aligned}$$

$$\text{em que } S_t = S_0 \exp(\lambda t(1 - E[J])), \quad w = \frac{rt + \frac{\sigma^2 t}{2} - \ln\left(\frac{K_T}{s_t}\right)}{\sigma \sqrt{t}} \quad \text{e } s_t = E[J_t S_t].$$

Dessa forma, tem-se que a fórmula aproximada do preço da opção no modelo com saltos de distribuição genérica será:

$$\begin{aligned}
E_t^Q[C(S_t J_t, t, \sigma, K_T, r)] &\approx C(s_t, t, \sigma, K_T, r) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \right) \frac{1}{s_t \sigma \sqrt{t}} \right) \\
&\quad \times S_t^2 \left(\exp(-\lambda t(1 - E[J^2])) - \exp(-2\lambda t(1 - E[J])) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^Q[C(S_t J(t), t, \sigma, K, r)] &= C(s, t, \sigma, K, r) \\
&\quad + s^2 \left(\exp(\lambda t(1 - 2E[J] + E[J^2])) - 1 \right) \left(\frac{1}{2s\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

2.3.6 O modelo de Kou com distribuição duplamente exponencial

Muitas pesquisas têm sido realizadas para modificar o modelo de BSM baseado em movimento browniano geométrico e distribuições normais no sentido de incorporar duas características empiricamente verificadas no mercado:

- (1) Característica de assimetria (3º momento centrado na esperança, distribuição assimétrica negativa) e leptocurtose (4º momento centrado na esperança, pico alto e caudas largas);
- (2) O sorriso de volatilidade. Os preços de mercado das opções para diferentes preços de exercício e prazos de vencimentos não determinam uma volatilidade constante. É reconhecido pelo mercado que a curva de volatilidade implícita possui uma forma de “sorriso”, significando que é uma curva convexa em função do valor do preço de exercício da opção.

Para incorporar as características de assimetria ou de leptocurtose, uma variedade de modelos de precificação de opções são propostos, entre eles:

- (a) Teoria do caos, movimento browniano com fractais;
- (b) Modelos hiperbólicos generalizados, incluindo modelo $\log t$ e modelo $\log$ hiperbólico;
- (c) Movimento browniano com mudança de tempo, incluindo modelo gama de $\log$ variância.

Um dos problemas desses modelos é a dificuldade de se obterem soluções analíticas para o preço da opção. Mais precisamente, esses modelos podem até fornecer soluções para opções de compra e venda européias simples, porém não conseguem fornecer soluções analíticas para derivativos de renda fixa, opções dependentes da trajetória, como, por exemplo: as americanas, com barreira e as do tipo *lookback*.

Em desenvolvimentos paralelos, diferentes modelos são propostos para incorporar o sorriso de volatilidade em precificação de opções. Os mais populares são:

- (a) volatilidade estocástica e modelos GARCH;
- (b) modelo de elasticidade constante da variância (CEV);
- (c) modelos de difusão com saltos;
- (d) volatilidade estocástica e modelos de difusão com saltos do tipo *affine*;
- (e) modelos baseados em processos de Lévy;
- (f) SABR.

Embora muitos modelos alternativos possam conduzir a soluções analíticas para opções de compra e venda européias, é difícil o mesmo para opções dependentes da trajetória, como, por exemplo, opções americanas, opções do tipo *lookback* e opções com barreiras. Mesmo métodos numéricos para esses derivativos não são simples de serem implementados. Por exemplo, as taxas de convergência de árvores binomiais e simulações de Monte Carlo para opções dependentes da trajetória são muito mais lentas do que as opções de compra e venda simples.

Kou (2002) procurou estender o tratamento analítico do modelo de BSM para o movimento browniano geométrico com saltos. Em particular, ele demonstrou que o modelo de saltos com distribuição duplamente exponencial pode apresentar as seguintes propriedades:

- Fornecer uma explicação para as características de assimetria leptocúrtica dos retornos dos ativos e o sorriso de volatilidade das opções.
- Conduzir a aproximações analíticas para opções americanas com horizonte finito de tempo e soluções analíticas para derivativos de renda fixa, opções do tipo *lookback*, barreira e americanas perpétuas.
- Pode ser inserido em uma estrutura com expectativa equilíbrio racional de preços. Merton (1976) apontava em seus trabalhos que a precificação baseada em ausência de arbitragem não era possível se somente fossem permitidas carteiras com títulos sem risco e o ativo objeto.

O modelo de difusão com saltos duplamente exponencial foi originalmente proposto por Kou (2002) sendo esse modelo de difusão uma classe especial da difusão com saltos *affine*. Um modelo muito similar foi sugerido por Ramezani e Zeng (1998) através de uma distribuição Pareto-Beta com dois distintos componentes de saltos gerados por dois processos de Poisson.

2.3.6.1 Visão geral do modelo de Kou

Esse modelo apresenta várias propriedades interessantes à modelagem de preços de derivativos. A FDP do retorno gerado pelo modelo é leptocurtica e assimétrica em relação. Além disso, o modelo pode reproduzir o sorriso de volatilidade e fornecer fórmulas analíticas para os preços de vários tipos de opções.

Nesse modelo, o logaritmo do retorno do preço do ativo é modelado através de um processo com duas partes: a primeira um MBG e a segunda um processo com saltos. A ocorrência de saltos é governada por um processo de Poisson com tamanhos de saltos definidos através de uma distribuição duplamente exponencial. O modelo de difusão com saltos pressupõe que a dinâmica de preços segue a seguinte EDP:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \underbrace{\mu dt + \sigma dW}_{MBG} + d \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N_t} (J_i - 1) \right)}_{\text{processo com saltos}}$$

O processo com saltos assume que N_t é o número de saltos no intervalo de tempo $[0, t]$ e segue um processo de Poisson com parâmetro λt em que λ é uma constante. No salto de número i , a proporção do salto do preço é $J_i - 1$.

2.3.6.2 A distribuição duplamente exponencial da intensidade do salto

Para amostras finitas, é difícil distinguir uma distribuição duplamente exponencial de uma distribuição *t de Student*. Entretanto, a distribuição duplamente exponencial é mais facilmente tratável analiticamente e pode gerar altas concentrações de probabilidade em torno da sua esperança.

A distribuição duplamente exponencial é uma distribuição formada por duas distribuições exponenciais justapostas. Seja Y uma variável aleatória que representa o logaritmo do tamanho dos saltos e seja a função de densidade:

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

em que: $\eta_1 > 1$;

$$\eta_2 > 0;$$

$$p, q \geq 0 \text{ e } p + q = 1.$$

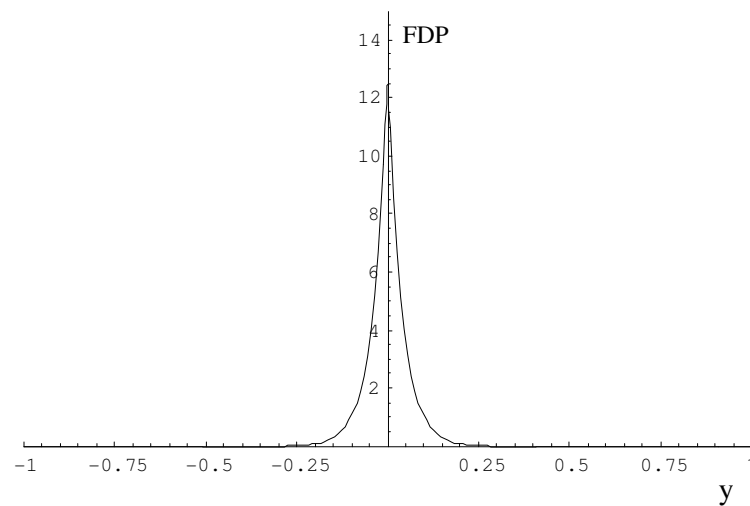
A condição $\eta_1 > 1$ deve ser imposta para garantir que o preço do ativo tenha esperança finita. As probabilidades p e q representam as probabilidades de saltos para cima e de saltos para baixo.

$$\ln(J) = Y = \begin{cases} \xi^+ & \text{com probabilidade } p \\ -\xi^- & \text{com probabilidade } q \end{cases}$$

As esperanças das duas distribuições exponenciais são, respectivamente, $\frac{1}{\eta_1}$ e $\frac{1}{\eta_2}$. A seguir, apresenta-se alguns gráficos da função de densidade das distribuições duplamente exponenciais plotadas no *Mathematica 5.2* e as integrais $\int_{-\infty}^0 f(y) dy$ e $\int_0^{+\infty} f(y) dy$:

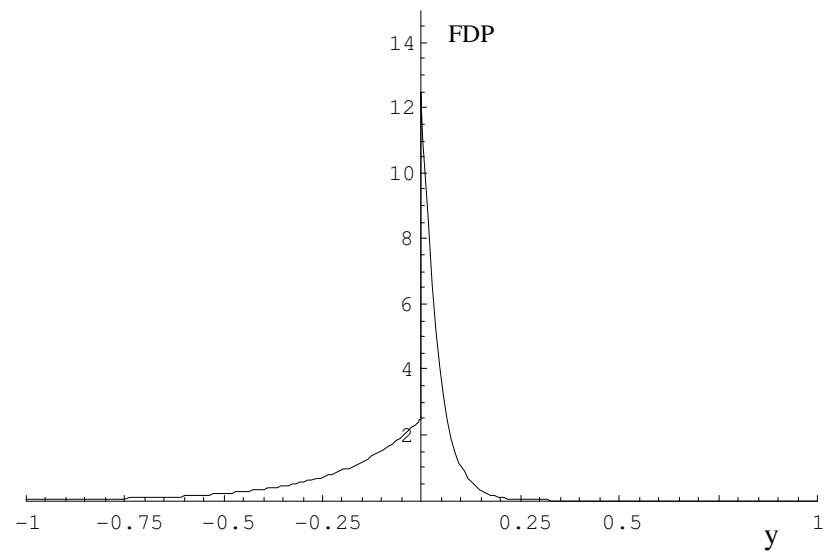
a) $\eta_1 = \eta_2 = 25$ e $p = q = \frac{1}{2}$, sendo uma distribuição de Laplace.

$$\int_{-\infty}^0 f(y) dy = \frac{1}{2} \quad \int_0^{+\infty} f(y) dy = \frac{1}{2}$$



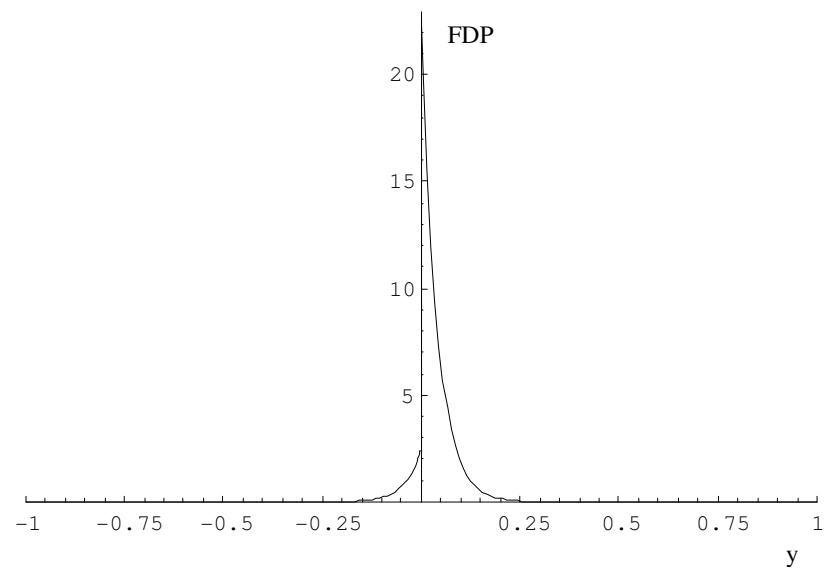
b) $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 5$ e $p = q = \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^0 f(y) dy = \frac{1}{2} \quad \int_0^{+\infty} f(y) dy = \frac{1}{2}$$



c) $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 25$ e $p = 0.9$ e $q = 0.1$

$$\int_{-\infty}^0 f(y) dy = \frac{1}{10} \quad \int_0^{+\infty} f(y) dy = \frac{9}{10}$$



2.3.6.3 O modelo de difusão do preço

A dinâmica de preço de ativos a partir de um modelo de difusão com saltos de distribuição duplamente exponencial é dada por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW + d \left(\sum_{i=1}^{N(t)} (J_i - 1) \right) \quad (0)$$

em que:

μ esperança do log-retorno do ativo;

σ desvio-padrão do log-retorno do ativo i ;

W é o movimento browniano padrão com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$;

N é o estado do processo de Poisson com intensidade λ ;

$J = \{J_i\}$ é um processo IID de variáveis aleatórias estritamente positivas de tal forma que:

$Y_i = \ln(J_i)$ possui uma distribuição duplamente exponencial com

$$\text{FDP} \quad f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}.$$

No modelo, as variáveis aleatórias $N(t)$, $W(t)$ e $Y_{i's}$ são mutuamente independentes. A solução da equação diferencial estocástica que fornece a dinâmica do preço do ativo será:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W \right\} \prod_{i=1}^{N(t)} J_i$$

Observe-se que:

$$E[Y] = \frac{p}{\eta_1} - \frac{q}{\eta_2}, \quad V[Y] = pq \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right)^2 + \left(\frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2} \right) e \quad E[J] = E[e^Y] = p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1}$$

2.3.6.4 A função de densidade do modelo de Kou

Seja o processo:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} + BY$$

em que:

Z e B são variáveis aleatórias normal e de Bernoulli respectivamente;

$$P(B=1) = \lambda \Delta t \text{ e } P(B=0) = 1 - \lambda \Delta t;$$

Y tem uma distribuição assimétrica duplamente exponencial .

O cálculo da distribuição da soma de uma distribuição normal com a somatória de distribuições duplamente exponenciais pode ser obtido através da função Hh, uma classe especial de função da física-matemática.

Utilizando a FDP do retorno do processo acima fornecida por Kou (2002):

$$f(x) = \frac{1 - \lambda \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \varphi \left(\frac{x - \lambda \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) + \lambda \Delta t \left\{ \begin{aligned} & p \eta_1 \exp \left(\left(\sigma^2 \eta_1^2 \Delta t \right) / 2 \right) \exp \left(- (x - \mu \Delta t) \eta_1 \right) \Phi \left(\frac{x - \lambda \Delta t - \sigma^2 \eta_1 \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \\ & + q \eta_2 \exp \left(\left(\sigma^2 \eta_2^2 \Delta t \right) / 2 \right) \exp \left((x - \mu \Delta t) \eta_2 \right) \Phi \left(\frac{x - \lambda \Delta t + \sigma^2 \eta_2 \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \end{aligned} \right\}$$

$\varphi(\cdot)$ é função de densidade da normal padrão

$\Phi(\cdot)$ é função de distribuição da normal padrão

Para os seguintes parâmetros:

$$t = 1/250 \text{ anos}$$

$$\sigma = 20\% \text{ a.a.}$$

$$\mu = 15\% \text{ a.a.}$$

$$\lambda = 10 \text{ a.a.}$$

$$p = 0.3$$

$$\eta_1 = 50$$

$$\eta_2 = 25$$

Serão obtidos como esperança e variância da distribuição os seguintes valores:

$$E[f(x)] = \mu\Delta t + \lambda\Delta t \left(\frac{p}{\eta_1} - \frac{q}{\eta_2} \right) = -0.00028$$

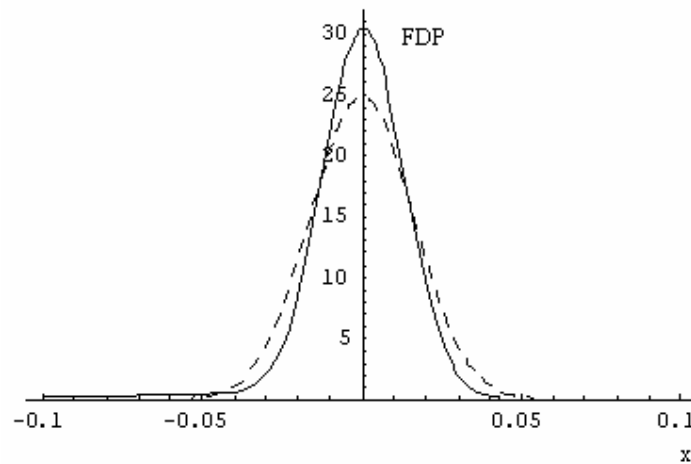
$$\begin{aligned} V[f(x)] &= \sigma^2\Delta t + \left\{ pq \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right)^2 + \left(\frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2} \right) \right\} \lambda\Delta t \\ &\quad + \left(\frac{p}{\eta_1} - \frac{q}{\eta_2} \right)^2 \lambda\Delta t (1 - \lambda\Delta t) \\ &= 0.000258 \end{aligned}$$

Comparando a FDP de Kou $f(x)$ com a FDP de uma distribuição normal de mesma esperança e variância, a saber:

$$N(\mu, \sigma^2)$$

$$N(-0.00028 \times 250, 0.000258 \times 250)$$

$$N(-0.07, (0.2539)^2)$$



Apesar de ambas as FDPs possuírem mesma esperança e variância, pode-se constatar uma maior concentração em torno da média e a existência de valores extremos com probabilidade não nula (caudas largas), demonstrando a capacidade do modelo de Kou em apresentar FDPs com leptocurtose. Pode-se constatar, também, que a capacidade de gerar

caudas pesadas e concentração em torno da média pode ser potencializada incrementando λ (taxa de ocorrência de saltos) e aumentando $\frac{1}{\eta_i}$ (esperança do tamanho do salto).

2.3.6.5 O equilíbrio geral dos modelos de difusão

Na presença de saltos aleatórios, o mercado torna-se incompleto. Nesse caso, os argumentos de *hedge* e não-arbitragem não são aplicáveis para a precificação de opções. Pode-se, assumindo alguns pressupostos, derivar uma fórmula de preços para opções que não dependa da atitude do investidor perante o risco assumindo que o número de ativos no mercado é suficientemente grande, que o risco de saltos repentinos é diversificável e o mercado, portanto, não pagará nenhum prêmio acima da taxa livre de risco para assumir esse risco adicional.

Em virtude dos saltos, a MME não é única. Segundo Lucas (1978) e Naik e Lee (1990), pode ser demonstrado que se utilizando um argumento de esperança racional com função utilidade do tipo potência ou HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*) para o agente representativo, podemos escolher uma particular medida neutralizadora do risco Q com a qual um preço racional da opção é calculado a partir de um valor intrínseco descontado.

A medida de probabilidade Q é chamada de neutralizadora do risco, pois:

$$E_t^Q \left[e^{-rt} S(t) \right] = S(0)$$

Segundo Kou (2002), utilizando-se os resultados de Naik e Lee (1990), a evolução do preço, em condições de equilíbrio, pode ser escrita como:

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta \right) t + \sigma \sqrt{t} Z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right)$$

em que:

r é a taxa de juros livre de risco no período $T = 1$;

σ é desvio padrão do log-retorno do ativo no período $T = 1$;

ζ é esperança da amplitude do salto menos um $\left(\zeta = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 - 1} - 1 \right)$;

Z é variável estocástica com distribuição $N(0;1)$;

N é o estado do processo de Poisson com intensidade λ ;

$Y = \{Y_i\}$ é uma sequência IID de variáveis aleatórias com distribuição duplamente exponencial com e função de densidade $f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$.

Os parâmetros constantes λ, p, q, η_1 e η_2 são todos dependentes da função utilidade do agente representativo, estando sob a medida Q . Da mesma forma, todos os três processos estocásticos N, Z e Y são mutuamente independentes estando sob Q . Com essa medida de probabilidade neutralizadora do risco, o preço do ativo S_t ainda segue um processo de difusão do tipo duplamente exponencial:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda\zeta)dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (J_i - 1)\right) \quad (1)$$

2.3.6.6 A propriedade da falta de memória

Em virtude da sua simplicidade, os parâmetros do modelo duplamente exponencial podem ser interpretados e soluções analíticas para precificação de opções podem ser obtidas. O calculo explicito é possível particularmente em virtude da propriedade da falta de memória da distribuição exponencial.

Uma variável estocástica X possui a propriedade de falta de memória com respeito a t , se para todo s com $t \neq 0$, tem-se:

$$P[X > s+t | X > t] = P[X > s].$$

De maneira equivalente:

$$\frac{P[X > s+t, X > t]}{P[X > t]} = P[X > s] \quad .$$

$$P[X > s+t] = P[X > s]P[X > t]$$

No caso da distribuição duplamente exponencial, tem-se:

$$P[X > t] = e^{-\lambda t}$$

$$P[X > s+t] = e^{-\lambda(s+t)} = P[X > s]P[X > t]$$

2.3.6.7 O preço da opção de compra européia ordinária no modelo de Kou

Introduza-se a seguinte notação:

$$P[Z(T) \geq a] = \Psi(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T)$$

em que $Z_t = \mu t + \sigma W + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, sendo que Y tem uma distribuição duplamente exponencial com função de densidade $f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$ e $N(t)$ é um processo de Poisson com intensidade λ .

O preço racional de um agente econômico logarítmico de uma opção de compra européia simples ordinária será dado por:

$$C(S_t, t) = \exp(-r(T-t)) E_t^Q(C(S_T, T)) \text{ para todo } t \in [0, T]$$

$$C(S_t, t) = S_t \Psi \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \log \left(\frac{K_T}{S_t} \right), T-t \right)$$

$$- K_T \exp(-r(T-t)) \Psi \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \log \left(\frac{K_T}{S_t} \right), T-t \right)$$

em que:

$$\tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1;$$

$$\widetilde{\eta}_2=\eta_2+1;$$

$$\widetilde{\lambda}=\lambda(\zeta+1);$$

$$\zeta=\frac{p\eta_1}{\eta_1-1}+\frac{q\eta_2}{\eta_2+1}-1;$$

$$\sim \frac{\quad}{\quad} - \frac{1}{1}$$

$$I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \left(\sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} Hh_i(\beta c - \delta) \right) \\ + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \Phi \left(-\beta c + \delta + \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Caso $\beta < 0$ e $\alpha < 0$, então para todo $n \geq -1$, tem-se:

$$I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \left(\sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} Hh_i(\beta c - \delta) \right) \\ - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \Phi \left(\beta c - \delta - \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

$$Hh_n(x) = \int_x^\infty Hh_{n-1}(y) dy \\ = \frac{1}{n!} \int_x^\infty (t-x)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad n=0,1,2,\dots$$

em que:

$$Hh_{-1}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \phi(x) \\ Hh_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \phi(-x)$$

$$P_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{i-k} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{n-i} p^i q^{n-i}$$

$$Q_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{n-i} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{i-k} p^{n-i} q^i$$

Para melhor entendimento das equações utilizadas na solução analítica de Kou, sugerimos a leitura de Papapantaleon (2002) e Tsay (2005).

2.3.6.8 As limitações do modelo de Kou

Uma das desvantagens do modelo é de que, apesar de ser uma fórmula analítica, ela aparenta ser bastante complicada. Isso não seria um grande problema, pois funções Hh podem

ser calculadas facilmente e apesar de ser um processo analítico bastante extenso, o procedimento é rapidamente realizado pelos computadores atuais.

A existência de maiores dificuldades relacionadas ao *hedge* em mercados incompletos, que é perfeito dentro de um MBG, porém não é perfeito dentro de uma estrutura de preços composta por difusão e saltos estocásticos, parece ser um dos maiores entraves à adoção deste tipo de modelo de precificação. Entretanto sabe-se que o *hedge* perfeito é uma situação muito particular do MBG, não sendo possível de ser feita mesmo em tempo discreto e se mostra pouco realista ante as condições impostas pelo mercado financeiro.

Outra limitação que afeta todos os modelos baseados em processos de Lévy é de que o modelo com distribuição duplamente exponencial não pode incorporar uma possível dependência entre a intensidade dos saltos e o log-retorno dos ativos.

Tabela 3 - Comparação entre os modelos com saltos de Merton (1976) e Kou (2002)

Característica do Modelo	Modelo de Merton para retornos descontínuos (1976)	Modelo de Kou com saltos de distribuição duplamente exponencial (2002)
Representação Fatos Estilizados	Saltos para cima ou para baixo ocorrem com distribuição idêntica gerando saltos com amplitude e probabilidades similares, distribuição lognormal.	Saltos para cima ou para baixo ocorrem com probabilidades e amplitudes que podem ser diferentemente calibradas, distribuição duplamente exponencial.
Leptocurtose	Sim	Sim, porém mais acentuada.
Sorriso de Volatilidade	Sim	Sim
Processo de Lévy	$L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k \text{ com}$ $J_k \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$	$L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k \text{ com}$ $J_k \sim DbExpo(p, \eta_1, \eta_2)$
Mercado	Incompleto (a não ser que um número infinito de opções possa ser negociada e incorporada ao <i>portfolio</i>)	Incompleto (a não ser que um número infinito de opções possa ser negociada e incorporada ao <i>portfolio</i>)
Neutralização do Risco	Saltos fazem parte do risco não sistêmico, portanto, beta do <i>portfolio</i> é zero e utilizando o pressuposto CAPM o retorno esperado dos ativos é a taxa livre de risco.	Modelo geral de equilíbrio (Naik e Lee, 1990), utilizando função HARA ou potencia $U(c_t, t) = e^{-\theta t} \frac{c_t^\alpha}{\alpha}$ (artigo do Kou), porém é plausível que seja $U(c_t, t) = e^{-\theta t} \ln(c_t)$.
Fórmula preço opção de compra européia	$C(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t E_t^Q[J]) \frac{(\lambda t K)^n}{n!} C_{\sigma(n), r(n)}(S_t, t)$	$C(S_t, t) = S_t \Psi \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \ln \left(\frac{K_t}{S_t} \right), T-t \right) - K_t \exp(-r(T-t)) \Psi \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \ln \left(\frac{K_t}{S_t} \right), T-t \right)$
Tratamento analítico para opções dependentes da trajetória	Não é possível.	Em virtude da propriedade da falta de memória das distribuições exponenciais, é possível a derivação analítica de opções americanas perpétuas, <i>lookback</i> e opções com barreira (KOU e WANG, 2004).

2.3.6.9 A implementação do modelo de Kou no *Mathematica* 5.2

A implementação da fórmula analítica do preço de uma opção de compra europeia ordinária no Mathematica 5.0 é fornecida pelo próprio Kou em sua página pessoal hospedada no *website* da Universidade de Columbia (EUA):

$C(S_t, t) = S_t \Psi \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \log \left(\frac{K_T}{S_t} \right), T - t \right) - K_T \exp(-r(T-t)) \Psi \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \log \left(\frac{K_T}{S_t} \right), T - t \right)$ em que: $\tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1$ $\tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1$ $\tilde{\lambda} = \lambda(\zeta + 1)$ $\zeta = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1$ $\tilde{p} = \frac{p}{1 + \zeta} \times \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}$	<pre>callOR[eta1_, eta2_, la_, p_, sig_, rr_, bigS_, bigK_, bigT_, nStep_] := (zetaaOR = p*eta1/(eta1 - 1) + (1-p)*eta2/(eta2 + 1); tempaa1OR = rr + sig*sig/2 - la*zetaaOR; tempaa2OR = tempaa1OR - sig*sig; bigS = cprob[tempaa1OR, eta1 - 1, eta2 + 1, la*(1+zetaaOR), p*eta1/((1+zetaaOR)*(eta1 - 1)), sig, Log[bigK/bigS], bigT, nStep] - bigK * Exp[- rr*bigT] * cprob[tempaa2OR, eta1, eta2, la, p, sig, Log[bigK/bigS], bigT, nStep])</pre>
--	--

O cálculo de $P[Z(T) \geq a] = \Psi(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T)$:

$\Psi(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) = P[Z(T) \geq a]$ $= \frac{e^{\frac{(\sigma\eta_1)^2 \times T}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n P_{n,k} \times \underbrace{\left(\sigma\sqrt{T}\eta_1 \right)^k \times I_{k-1} \left(a - \mu; -\eta_1, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_1\sqrt{T} \right)}_{\text{sec}}$ $+ \frac{e^{\frac{(\sigma\eta_2)^2 \times T}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n Q_{n,k} \times \underbrace{\left(\sigma\sqrt{T}\eta_2 \right)^k \times I_{k-1} \left(a - \mu; \eta_2, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_2\sqrt{T} \right)}_{\text{fourth}}$ $+ \pi_0 \Phi \left(\frac{a - \mu}{\sigma\sqrt{T}} \right)$ em que: $\pi_n = P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$	<pre>cprob[mu_, eta1_, eta2_, la_, p_, sig_, aa_, bigT_, nStep_] := (IITwo = Table[II[k-1, aa - mu * bigT, -eta1, -1/(sig*Sqrt[bigT]), - (sig*Sqrt[bigT])*eta1], {k, 1, nStep}]; IIFour = Table[II[k-1, aa - mu * bigT, eta2, 1/(sig*Sqrt[bigT]), - (sig*Sqrt[bigT])*eta2], {k, 1, nStep}]; PiN[n_] = Exp[-la*bigT]*((la*bigT)^n)/(n!); PiNPni = Table [PiN[n] * Pni[n, k, p, eta1, eta2] * ((sig*Sqrt[bigT]*eta1)^k) , {n, 1, nStep}, {k, 1, n}]; PiNQni = Table [PiN[n] * Qni[n, k, p, eta1, eta2] * ((sig*Sqrt[bigT]*eta2)^k) , {n, 1, nStep}, {k, 1, n}]; sec = Sum[PiNPni[[n, k]] * IITwo[[k]], {n, 1, nStep}, {k, 1, n}]; fourth = Sum[PiNQni [[n, k]] * IIFour[[k]], {n, 1, nStep}, {k, 1, n}]; (sec * Exp[((sig*eta1)^2)*bigT/2] + fourth * Exp[((sig*eta2)^2)*bigT/2]) / (Sqrt[2*Pi] * sig * Sqrt[bigT]) + Exp[- la* bigT] * phi [-(aa- mu*bigT)/(sig*Sqrt[bigT])])</pre>
--	--

O cálculo de $I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = \int_c^\infty e^{\alpha x} Hh_n(\beta x - \delta) dx$:

$I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = \int_c^\infty e^{\alpha x} Hh_n(\beta x - \delta) dx$ Caso $\beta > 0$ e $\alpha \neq 0$, então para todo $n \geq -1$, tem-se: $I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \left(\sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} Hh_i(\beta c - \delta) \right) + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \Phi \left(-\beta c + \delta + \frac{\alpha}{\beta} \right)$ Caso $\beta < 0$ e $\alpha < 0$, então para todo $n \geq -1$, tem-se: $I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \left(\sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} Hh_i(\beta c - \delta) \right) - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \Phi \left(\beta c - \delta - \frac{\alpha}{\beta} \right)$	<pre> Hh[jj_, ll_, aa_, bb_, dd_] := Which[(bb > 0 && aa != 0), - (Exp[aa*ll]/aa) * (Table[(bb/aa)^(jj-i), {i, 0, jj}] . Table[Hh[i, bb*ll-dd], {i, 0, jj}]) + ((bb/aa)^(jj+1)) * (Sqrt[2*Pi]/bb) *Exp[aa*dd/bb + (1/2) * (aa/bb)^2] * phi[-bb*ll + dd + aa/bb], (bb < 0 && aa < 0), - (Exp[aa*ll]/aa) * (Table[(bb/aa)^(jj-i), {i, 0, jj}] . Table[Hh[i, bb*ll-dd], {i, 0, jj}]) - ((bb/aa)^(jj+1)) * (Sqrt[2*Pi]/bb) * Exp[aa*dd/bb + (1/2) * (aa/bb)^2]] * phi[bb*ll - dd - aa/bb], (bb > 0 && aa == 0), Hh[n+1, bb*ll - dd]/bb] </pre>
---	--

O cálculo de $Hh_n(x)$:

$Hh_n(x) = \int_x^\infty Hh_{n-1}(y) dy$ $= \frac{1}{n!} \int_x^\infty (t-x)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad n=0,1,2,\dots$ Sendo $Hh_{-1}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \phi(x)$ $Hh_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \phi(-x)$	(* temp é ponto de máximo, integral em torno de temp *) <pre> Hh[n_, x_] := If[x >= -6, If[x < 10, 1/n! * NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, x, Infinity}], 0], (temp = (x + Sqrt[x*x + 4*n])*0.5; (NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, x, temp-3}]] + NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp-3, temp-1}]] + NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp-1, temp}]] + NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp, temp+1}]] + NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp+1, temp+3}]] + NIntegrate[(t - x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp+3, Infinity}]) /(n!))] </pre>
--	---

Ou a fórmula completa da função Hh (maior precisão):

$$Hh_n(x) = 2^{\frac{-n}{2}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \left(\frac{F_1\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x^2\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}n\right)} - x \frac{F_1\left(\frac{1}{2}n + 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right)} \right)$$

Ou (processamento mais lento):

```
Hh[n_, x_] :=  
Sqrt[Pi/(2^n)]*Exp[-(x^2)/2]*  
(Hypergeometric1F1[(n+1)/2, 1/2, (x^2)/2] / (Sqrt[2]*Gamma[1+ (n/2)])  
- x * Hypergeometric1F1[(n/2)+1, 3/2, (x^2)/2] / (Gamma[(1+ n)/2])  
)
```

Complementando:

$P_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{i-k} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{n-i} p^i q^{n-i}$	<pre>Pni[n_, i_, p_, eta1_, eta2_] := Sum[Binomial[n, j]*(p^j)*((1-p)^(n-j))*Binomial[n-i-1, j-i]* ((eta1/(eta1 + eta2))^(j-i)) * ((eta2/(eta1 + eta2))^(n-j)), {j, i, n-1}] /; i<n Pni[n_, n_, p_, eta1_, eta2_] = p^n</pre>
$Q_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{n-i} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^{i-k} p^{n-i} q^i$	<pre>Qni[n_, i_, p_, eta1_, eta2_] := Sum[Binomial[n, j]*((1-p)^j)*(p^(n-j))*Binomial[n-i-1, j-i]* ((eta2/(eta1 + eta2))^(j-i)) * ((eta1/(eta1 + eta2))^(n-j)), {j, i, n-1}] /; i<n Qni[n_, n_, p_, eta1_, eta2_] = (1-p)^n</pre>
$\Phi(x)$	<pre>Phi[x_] = (1 + Erf[x/Sqrt[2]])/2</pre>

2.3.7 A comparação dos preços das opções nos modelos BS, Merton e Kou

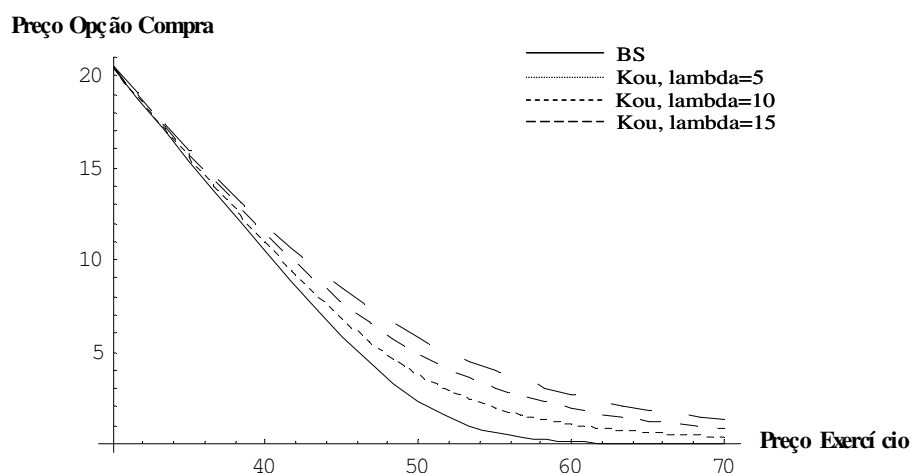
Matsuda (2004) recomenda cuidado ao analisar e comparar os componentes de volatilidade do processo de difusão e a variância total dos processos estocásticos de preços dos ativos nos modelos com saltos. Nos diferentes modelos estudados, este o desvio-padrão determinado pela variância do processo é definido como:

$$\begin{aligned} \text{Desvio - Padrão}_{BS} &= \sqrt{\sigma_{BS}^2 t} \\ \text{Desvio - Padrão}_{COXROSS} &= \sqrt{(\lambda J^2) t} \\ \text{Desvio - Padrão}_{Merton} &= \sqrt{(\sigma_{Merton}^2 + \lambda \sigma_J^2 + \lambda \mu_J^2) t} \\ \text{Desvio - Padrão}_{Kou} &= \sqrt{(\sigma_{Kou}^2 + \lambda p / \eta_1^2 + \lambda (1-p) / \eta_2^2) t} \end{aligned}$$

Ao definirmos que as volatilidades $\sigma_{BS} = \sigma_{Merton} = \sigma_{Kou}$, teremos que os preços da opção de compra dos modelos de Kou e de Merton serão sempre maiores que os preços do modelo de Black-Scholes em virtude da quantidade extra de volatilidade que estes modelos possuem. Sabemos por Ross e Shanthikumar (2000) de que se a função do preço do derivativo é convexa em relação ao preço do ativo-objeto, ou seja, o aumento da volatilidade implica no aumento do preço da opção.

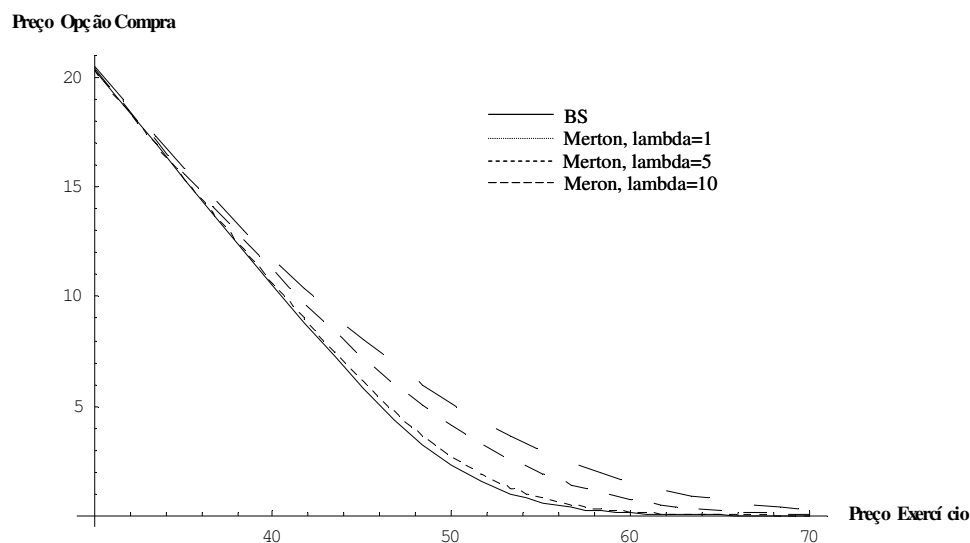
No gráfico abaixo, comparamos o modelo de Black-Scholes com o modelo de Kou, utilizando a mesma volatilidade para o componente de difusão do processo de ambos os modelos, $\sigma_{BS} = \sigma_{Kou} = 0.20$, e os seguintes parâmetros: $T = 0.25$, $S = 50$, $r = 0.05$, $p = 0.5$ e $\eta_1 = \eta_2 = 10$. Podemos observar neste gráfico que à medida que a intensidade (λ) dos saltos aumenta, o preço da opção de compra aumenta em virtude do componente adicional de volatilidade.

Gráfico 9 – Comparativo de preços entre os modelos de Kou e BS



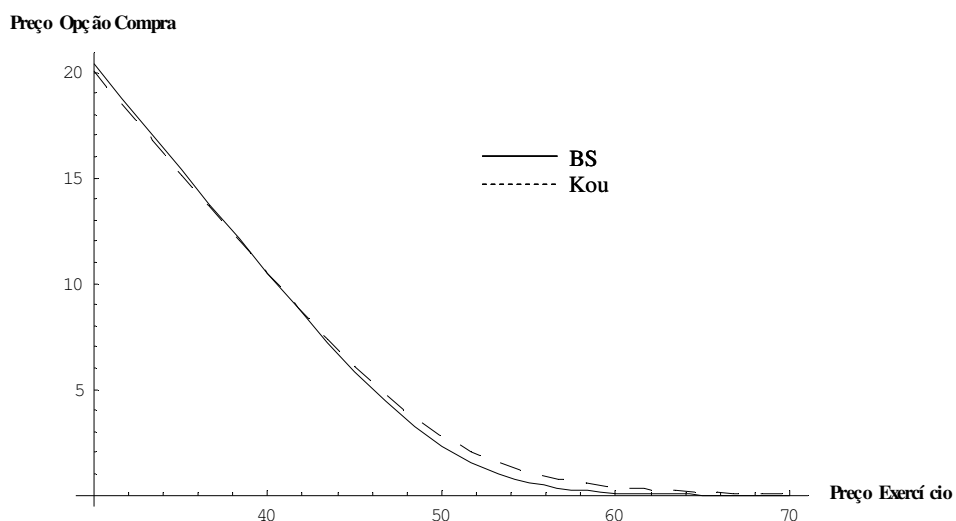
O mesmo comportamento foi evidenciado quando geramos o gráfico comparativo do modelo BS com o modelo de saltos de Merton com $\sigma_{BS} = \sigma_{Merton} = 0.20$ e os seguintes parâmetros: $T = 0.25$, $S = 50$, $r = 0.05$, $\mu_j = -0.1$ e $\sigma_j = 0.1$. Novamente, à medida que a intensidade (λ) dos saltos aumenta, o preço da opção de compra aumenta em virtude do componente adicional de volatilidade.

Gráfico 10 – Comparativo de preços entre os modelos de Merton com saltos e BS



Ao considerarmos uma equivalência não em termos da volatilidade do processo de difusão e sim em termos da variância total dos processos estocásticos, as análises se tornam mais complexas. Ao considerarmos $Desvio - Padrão_{BS} = Desvio - Padrão_{Kou} = 0.20$ e utilizando os seguintes parâmetros: $T = 0.25$, $S = 50$, $r = 0.05$, $\lambda = 20$, $p = 0.5$ e $\eta_1 = \eta_2 = 25$; obteve-se a volatilidade do componente de difusão de Kou, $\sigma_{BS} = \sigma_{Merton} = 0.09$.

Gráfico 11 – Comparativo de preços entre o modelo Kou e BS de mesma variância



Nesta situação de variância total equivalente entre os dois processos estocásticos, aparentemente, o modelo de saltos de Kou estabeleceu preços menores que o modelo BS para opções de compra *deep* ITM, porém estabelece preços superiores para opções de compra ATM e OTM. Matsuda (2004) obteve superioridade de preços para opções de compra ITM quando utilizou o modelo de saltos com Merton de mesma variância total, ou seja, resultado oposto ao obtido no nosso exemplo. Estes resultados indicam que a comparação entre modelos utilizando-se apenas a equivalência total da variância do processo estocástico não é suficiente para determinarmos os padrões de comportamento dos preços das opções de compra em função do preço de exercício.

2.4 A MODELAGEM DA SUPERFÍCIE DE VOLATILIDADE

2.4.1 Volatilidades históricas

A volatilidade de um ativo é a medida da variabilidade do log-retorno diário. Segundo Tsay (2005), uma característica especial da volatilidade no mercado acionário é que ela não é diretamente observável, pois os dados de retornos são unicamente observáveis em um dia de negociação. Para o mercado financeiro, a estimativa de volatilidade futura é o que realmente importa para a precificação de opções, sendo o fator relevante para determinação da probabilidade de o ativo-objeto atingir um determinado preço em data futura e, portanto, fundamental para o cálculo do prêmio da opção.

Apesar de ser relativamente simples, a utilização da volatilidade histórica como estimativa de volatilidade futura não é comum no mercado financeiro para a determinação dos preços das opções. Entende-se por volatilidade histórica qualquer método de cálculo de volatilidade que utilize séries temporais baseadas em valores passados. Entretanto, no mercado financeiro de opções o termo volatilidade histórica tem o significado da volatilidade especificado por Black-Scholes na descrição dos parâmetros necessários para o seu modelo de precificação de opções européias de 1973. Nessa situação, volatilidade histórica é o desvio-padrão da mudança no logaritmo natural do preço do ativo-objeto que é esperado ao longo do prazo de vida da opção, expressado em termos de taxa anual e obtido de uma série temporal histórica dos preços diários de fechamento do ativo-objeto.

Uma das técnicas mais difundidas de obtenção da volatilidade é o estimador de média móvel com amortecimento exponencial (EWMA) proposto pela *RiskMetrics* com o propósito

de calcular o VaR. Essa técnica fornece maior peso aos retornos mais recentes, assim sendo os fatos mais atuais têm maior importância que os mais antigos, o que pode ser uma melhor aproximação que as médias móveis igualmente ponderadas quando o que se pretende é obter um estimador entre o momento atual e um momento futuro, pois o EWMA tende a reagir mais rápido às mudanças abruptas no preço atual dos ativos. Na sua forma mais simples, a *RiskMetrics* assume que o retorno diário composto continuamente segue uma distribuição normal condicionada:

$$\sigma_t^2 = \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) r_{t-1}^2$$

em que

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \text{ ou seja, } \text{é o log-retorno no período } t-1 \text{ e } t;$$

F_{t-1} é o conjunto informacional no instante $t-1$;

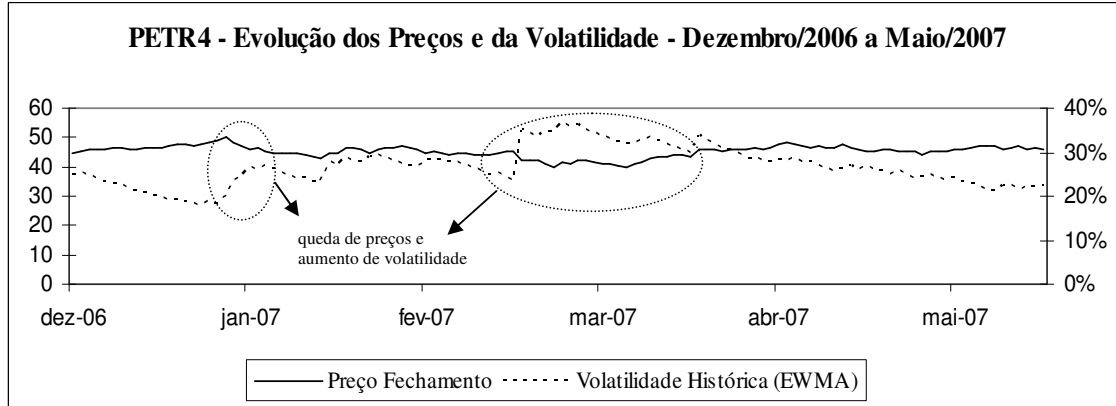
$$r_t | F_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \text{ com } \mu_t = 0;$$

$0 < \alpha < 1$, sendo sugerido pela *RiskMetrics* o valor típico de 0.94 para dados diários.

O gráfico abaixo apresenta a volatilidade histórica da ação PETR4 calculada pela técnica da média móvel com amortecimento exponencial (EWMA) especificada pela *RiskMetrics* com $\alpha = 0.94$. Nesse gráfico, pode-se observar uma característica já percebida por Fisher Black (1976), segundo o qual os preços das ações tendem a subir quando a volatilidade histórica entra em períodos de queda e os preços tendem a cair quando a volatilidade entra em períodos de alta, sugerindo correlação negativa.

Para o ativo PETR4, no período abaixo analisado a correlação de Pearson foi negativa e significativa a 5% ($\rho = -0.7$).

Gráfico 12 – Volatilidades históricas (EWMA) e preços da ação Petrobras



O modelo generalizado auto-regressivo condicionado heterocedástico (GARCH) permite capturar certas propriedades dos ativos financeiros: heterocedasticidade, ou seja, variabilidade ao longo do tempo; autocorrelação e reversão à média. O modelo GARCH(1,1) incorpora o pressuposto de que a volatilidade de hoje depende de 3 fatores: uma constante que serve como linha base ou um valor médio, informações mais recentes sobre a variância dos retornos e a previsão de ontem a respeito da volatilidade.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

em que:

$$a_t = r_t - \mu$$

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \text{ ou seja, é o log-retorno no período } t-1 \text{ e } t;$$

F_{t-1} é o conjunto informacional no instante $t-1$;

$$r_t | F_{t-1} \sim N(\mu, \sigma_t^2);$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq 1 \text{ e } \alpha_0, \alpha_1 \text{ e } \beta_1 > 0.$$

O modelo GARCH(1,1) é classificado como um modelo simétrico, uma vez que assume que choques positivos e negativos de retornos exercem impactos idênticos na volatilidade do ativo. Assim sendo, foram desenvolvidos outros modelos GARCH, tais como o NGARCH, EGARCH e TARCH que são especificações do modelo GARCH que capturam essa propriedade. Pode-se notar, também, que o modelo EWMA é um caso específico da família GARCH(1,1), com a condição $r_t | F_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, sendo chamado de IGARCH.

2.4.2 A volatilidade implícita

Apesar de possuir algumas deficiências, o modelo de Black-Scholes (1973) permanece largamente utilizado após 30 anos de sua apresentação à comunidade científica e ao mercado financeiro. A aceitação do modelo é devida ao fato de ele fornecer um procedimento robusto e teoricamente consistente para a precificação de opções para todas as classes de ativos. A relativa facilidade no uso da fórmula e o fato de ela intuitivamente corresponder às expectativas dos operadores de mercado fizeram com que ela seja amplamente utilizada no mercado financeiro.

A fórmula de Black-Scholes permite obter o preço racional de uma opção simples ordinária europeia a partir de variáveis observáveis, tais como: preço atual diário de fechamento do ativo-objeto, preço de exercício da opção, data de vencimento, a taxa livre de risco e um único parâmetro determinístico ou estocástico e não-observável, a volatilidade do ativo-objeto.

Volatilidade histórica pode ser facilmente determinada, porém os operadores de mercado não a consideram uma boa previsão do comportamento futuro da volatilidade do ativo-objeto. No contexto da precificação de derivativos, acadêmicos e operadores tendem a desconsiderar os modelos baseados em séries temporais para obtenção da volatilidade futura, adotando os procedimentos de calibração das fórmulas através de volatilidades implícitas. É recorrente encontrar na literatura afirmações como as de Alexander (2003):

“... previsões de volatilidade são difíceis de se obter e apresentam uma incerteza muito grande, particularmente para vencimentos de curto prazo. Esta é uma das razões do por que os operadores procuram calibrar seus modelos em dados de negociação de mercado ao invés de dados históricos...”

Os operadores de mercado lidam com essa deficiência negociando as opções sobre os ativos-objetos não em termos de numerário e sim em termos de volatilidade implícita equivalente. Utilizar a volatilidade implícita como uma unidade de negociação somente é possível em virtude de o preço da opção ser uma função monotonicamente crescente com relação à volatilidade. Essa propriedade é responsável pelo largo emprego da fórmula no

mercado financeiro, entretanto, o uso da volatilidade implícita torna transparente a maior deficiência do modelo: o fato de que a volatilidade observada no mercado não é constante.

De acordo com o modelo clássico de Black-Scholes (1973), todos os preços de opções sobre o mesmo ativo-objeto deveriam ter a mesma volatilidade para diferentes vencimentos e preços de exercício, portanto, o gráfico da volatilidade em função da maturidade e do preço de exercício deveria ser uma superfície plana e perpendicular à cota.

Entretanto, não é isso o que se observa no mercado financeiro quando se constata os preços negociados de opções, sendo bem documentada a existência de sorrisos ou curvas assimétricas para os diferentes preços de exercício e uma estrutura a termo de volatilidade em razão do prazo de vencimento.

O nível de risco embutido no prêmio de uma opção é medido pela volatilidade implícita dessa opção, que nada mais é do que o valor de σ que, colocado na fórmula analítica de Black-Scholes, gera o mesmo valor do prêmio pago pela opção. A volatilidade implícita é relacionada ao sobrepreço de uma opção. Essa análise é coerente com a proposição de Ross e Shanthikumar (2000) de que se a função do preço do derivativo é convexa em relação ao preço do ativo-objeto, o aumento da volatilidade determinística implica no aumento do preço do derivativo.

Variações da volatilidade implícita de uma opção são, portanto, variações no preço dessa opção. Como todos os parâmetros da fórmula de BSM são observados no mercado financeiro, exceto a volatilidade do ativo-objeto, pode-se obter, de maneira não-ambígua, a volatilidade implícita em um determinado prêmio pago, ou seja, em um mundo Black-Scholes de volatilidade constante, o valor de uma opção de compra ordinária simples européia é simplesmente:

$$C(S_t, \sigma, r, K_T, T-t) = S_t N(d_1) - K_T e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_T}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_T}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

A função C possui seis argumentos, sendo que as duas primeiras variáveis são independentes, a terceira e quarta variáveis são parâmetros do ativo e do mercado financeiro, as duas últimas são informações do contrato de opção em questão. Todos os parâmetros, exceto σ , são facilmente identificados e utilizando-se o valor de mercado para $C_{mercado}(S_t, \sigma, r, K_T, T-t)$, pelo fato de a função do preço da opção ser monotônica na volatilidade e com as condições de que o valor do mercado da opção é maior que $\max(S - e^{-r(T-t)}, 0)$ e menor que S_t , sabe-se que existe um valor único de σ que torna iguais o preço teórico da opção e o preço de mercado. Essa volatilidade σ é chamada de volatilidade implícita. Em virtude do fato de que o modelo de Black-Scholes não proporciona uma descrição perfeita do mundo real, Rebonato (2004) afirmou que a volatilidade implícita é o número errado que colocado na fórmula imperfeita fornece o preço correto.

Seja o valor da opção em um mundo Black-Scholes representado por $F_{BS}(S_t, \sigma, r, K_T, T-t)$ para uma opção européia com maturidade T , preço de exercício K , volatilidade constante σ e uma taxa de juro sem risco r . Esta se procurando, portanto, o valor σ_{imp} que iguala $F_{mercado} = F_{BS}(S_t, \sigma_{imp}, r, K_T, T-t)$. Como foi dito, a volatilidade implícita pode ser unicamente identificada, pois $\frac{\partial F_{BS}(S_t, \sigma, r, K_T, T-t)}{\partial \sigma} > 0$. O algoritmo de Newton-Raphson fornece um método numérico para ser obtida a σ_{imp} a partir do preço de mercado da opção de compra européia.

2.4.2.1 Fórmulas aproximadas da volatilidade implícita

Brenner e Subrahmanyam (1998) sugeriram uma fórmula simples que pode ser utilizada para encontrar a volatilidade implícita de uma opção de compra simples e ordinária que esteja com preço corrente igual ao preço de exercício descontado (preço ATM a termo):

$$\sigma_{imp}^{ATMF} \approx \frac{C_{mercado} \sqrt{2\pi}}{S\sqrt{T}} \quad \text{quando se tem: } S_0 = K_T \exp(-rT).$$

Corrado e Miller (1996) sugeriram uma fórmula analítica que também produz uma aproximação da volatilidade implícita. Eles construíram uma aproximação $N(d)$ através de uma função linear. A aproximação linear é substituída na fórmula de Black-Scholes e é igualada ao preço observado no mercado da opção e rearranjada para se transformar em uma equação quadrática. A equação quadrática é resolvida para fornecer a volatilidade implícita em termos das variáveis observadas do modelo. A fórmula de Corrado e Miller, conforme demonstrado em seus artigos, estende a precisão da aproximação para outros níveis de *moneyness* (relação percentual entre o preço de exercício e o preço futuro do ativo-objeto):

$$\sigma_{imp} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{S + K_T \exp(-rT)} \left\{ \frac{C_{mercado} - \frac{S - K_T \exp(-rT)}{2}}{\sqrt{\left[\left(C_{mercado} - \frac{S - K_T \exp(-rT)}{2} \right)^2 - \frac{(S - K_T \exp(-rT))^2}{\pi} \right]}} \right\} \div \sqrt{T}.$$

As fórmulas aproximadas para a volatilidade implícita podem ser muito úteis quando se necessita, por exemplo, definir um valor inicial de σ_{imp} para ser utilizado no algoritmo de Newton-Raphson.

2.4.3 A dependência da volatilidade ao tempo: a estrutura a termo de volatilidade

Em virtude da constatação da existência de diferentes volatilidades em virtude do prazo de maturação da opção, o mercado financeiro procura estabelecer a relação entre a volatilidade e o prazo da opção, chamando essa relação de estrutura a termo de volatilidade.

O mercado financeiro estabelece pontos ao longo do tempo em que eventos previsíveis (divulgação de demonstrações contábeis, eleições, datas de reuniões de comitês de políticas monetárias, etc.) possivelmente irão afetar os preços dos ativos no mercado, provocando uma mudança nos seus níveis de volatilidade. Para modelar esses eventos e suas implicações, o mercado define vértices no tempo, estabelecendo uma volatilidade constante entre esses períodos, utilizando para isso o método de interpolação chamado de *flat-forward*.

Wilmott (2000) definiu uma estrutura a termo de volatilidade constante entre duas datas (volatilidade implícita interpolada no tempo), utilizando para isso os pontos preestabelecidos de trajetória $\sigma_{imp}(t^*, T_i)$ da seguinte maneira:

$$\sigma_{imp}(t^*) = \sqrt{\frac{(T_i - t^*)\sigma_{imp}(t^*, T_i)^2 - (T_{i-1} - t^*)\sigma_{imp}(t^*, T_{i-1})^2}{T_i - T_{i-1}}}$$

em que:

$$T_{i-1} < t^* < T_i;$$

$\sigma_{imp}(t^*, T_i)$ é a volatilidade implícita medida no instante t^* referente ao prazo T_i .

2.4.4 O sorriso de volatilidade no mercado de ações

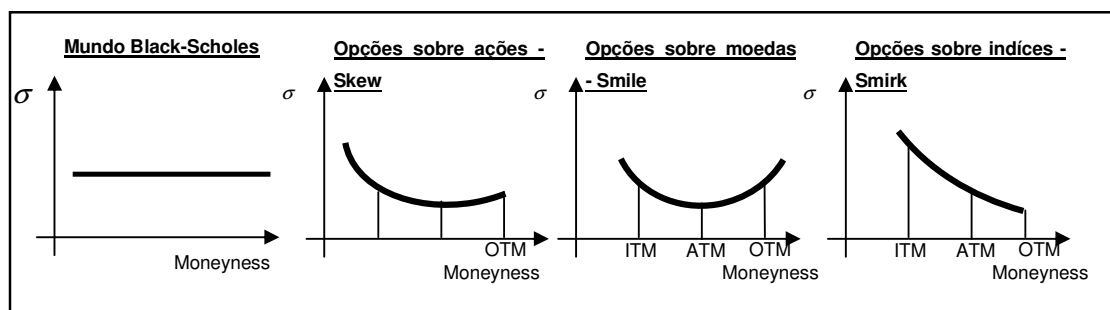
O sorriso de volatilidade é um padrão observado no qual uma opção “no dinheiro” a termo (ATMF) possui uma tendência de apresentar menor volatilidade implícita que as demais opções “dentro e fora do dinheiro” (ITM e OTM). Esse padrão apresenta diferentes características nos diversos mercados de ativos. No mercado de opções sobre ações, essa curva é assimétrica, apresentando maior volatilidade nas opções ITM, sendo utilizado mais freqüentemente o termo *skew* para descrever sua forma. No mercado de opções sobre moeda, o padrão da curva é mais simétrico, sendo o termo *smile* mais adequado para descrevê-lo.

Uma medida do grau no qual uma opção com preço neutralizado ao risco está próxima a ter um resultado monetário positivo no seu vencimento é chamada de *moneyness*. Quanto menor o grau de *moneyness*, maior a proximidade de se ter um resultado monetário positivo. Ait-Sahalia (2002) utilizou em seu trabalho a seguinte especificação da medida de *moneyness*:

$$M_{T,t}^c = \frac{K_T}{S_t \exp(r(T-t))} \quad \text{para opções de compra;}$$

$$M_{T,t}^p = \frac{S_t \exp(r(T-t))}{K_T} \quad \text{para opções de venda.}$$

Gráfico 13 – O comportamento gráfico da volatilidade



Segundo Rebonato (2004), os fatos empíricos relevantes relativos ao sorriso de volatilidade no mercado de opções sobre ações são:

- As curvaturas dos sorrisos têm crescido em magnitude desde a crise do mercado americano de ações em 1987 (quando a princípio ele foi observado). O fenômeno da fobia a “quebra” das Bolsas é crescente e foi constatado em estudos do índice S&P500 feitos por Rubinstein (1994) e Ait-Sahalia & Lo (1998).
- A magnitude do sorriso tende a ser decrescente em relação ao aumento do prazo de maturação do contrato.
- A magnitude do sorriso, como uma função do grau de *moneyness*, é mais constante em relação a diferentes prazos de maturação.
- A assimetria do sorriso tende a aumentar durante períodos de turbulência do mercado.

O fenômeno do sorriso de volatilidade foi fortemente relatado quando, em 1987, o mercado americano de ações teve uma queda de 23% em dois dias. Os participantes do mercado não foram capazes de se proteger contra a queda em virtude da falta de oferta de opções de venda (*puts*). Depois da queda da Bolsa, o mercado começou a pagar um prêmio adicional no sentido de obter proteção adequada contra as quedas de mercado. A falta de liquidez na oferta e demanda é uma das teorias que procura explicar a existência do sorriso e foi sugerida por Longstaff (1995), Pena (1999) e Bates (2000).

Rubinstein (1994) sugeriu que a fobia à quebra das Bolsas pelos participantes do mercado faz com que a FDP dos ativos-objetos sejam diferentes daquela assumida pelo modelo de Black-Scholes (1973), questionando a lognormalidade dos retornos do ativo-objeto e apresentando evidências de leptocurtose e assimetria dos retornos.

2.4.5 A capacidade de gerar sorrisos através do modelo de Kou

O modelo de Kou é bastante robusto e flexível para produzir FDP leptocurtica ou assimétrica, portanto, é um modelo adequado para ser calibrado para reproduzir o fenômeno do sorriso de volatilidade.

Para demonstrar através de um exemplo didático a capacidade do modelo de Kou para gerar sorriso de volatilidade implícita Black-Scholes, compare-se os dois modelos utilizando a mesma volatilidade total nos dois processos ($\sigma_{total} = 35.61\%a.a.$). A seguir, serão obtidos os preços das opções de compra européia utilizando os modelos de Black-Scholes e de Kou para diferentes preços de exercício e apurada a volatilidade implícita Black-Scholes a partir dos preços gerados pelos dois modelos.

Parâmetros empregados na fórmula de Black-Scholes:

$$T = 0.5; \quad r = 5\%a.a.; \quad \sigma = 35.61\%a.a..$$

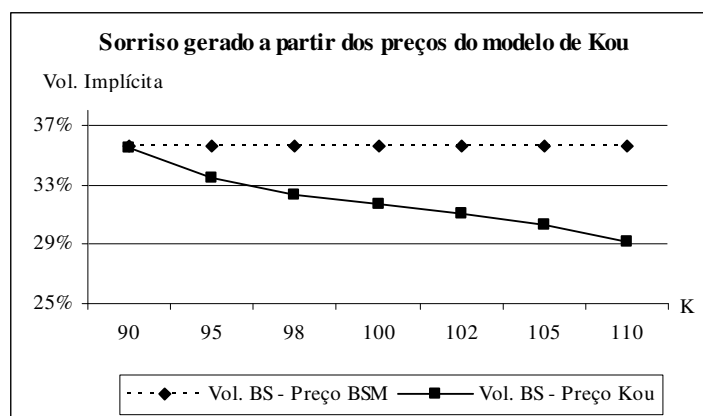
Parâmetros empregados na fórmula de Kou:

$$T = 0.5; \quad r = 5\%a.a.; \quad \sigma_{MBG} = 21\%a.a.; \quad \eta_1 = 10; \quad \eta_2 = 3.5;$$

$$\lambda = 0.8; \quad p = 10\%; \quad \sigma_{total} = 35.61\%a.a..$$

Tabela 4 – Volatilidade implícita obtida a partir dos preços do modelo de Kou

Preço Exercício	Preço Opção BSM	Preço Opção Kou	Vol. BS - Preço BSM	Vol. BS - Preço Kou
90	16.7422	16.7032	35.61%	35.44%
95	13.7608	13.1962	35.61%	33.41%
98	12.1639	11.2861	35.61%	32.35%
100	11.1782	10.1032	35.61%	31.70%
102	10.2543	8.9967	35.61%	31.11%
105	8.9807	7.4852	35.61%	30.31%
110	7.1416	5.3652	35.61%	29.19%

Gráfico 14 – Sorriso de volatilidade padrão *smirk* a partir do modelo de Kou

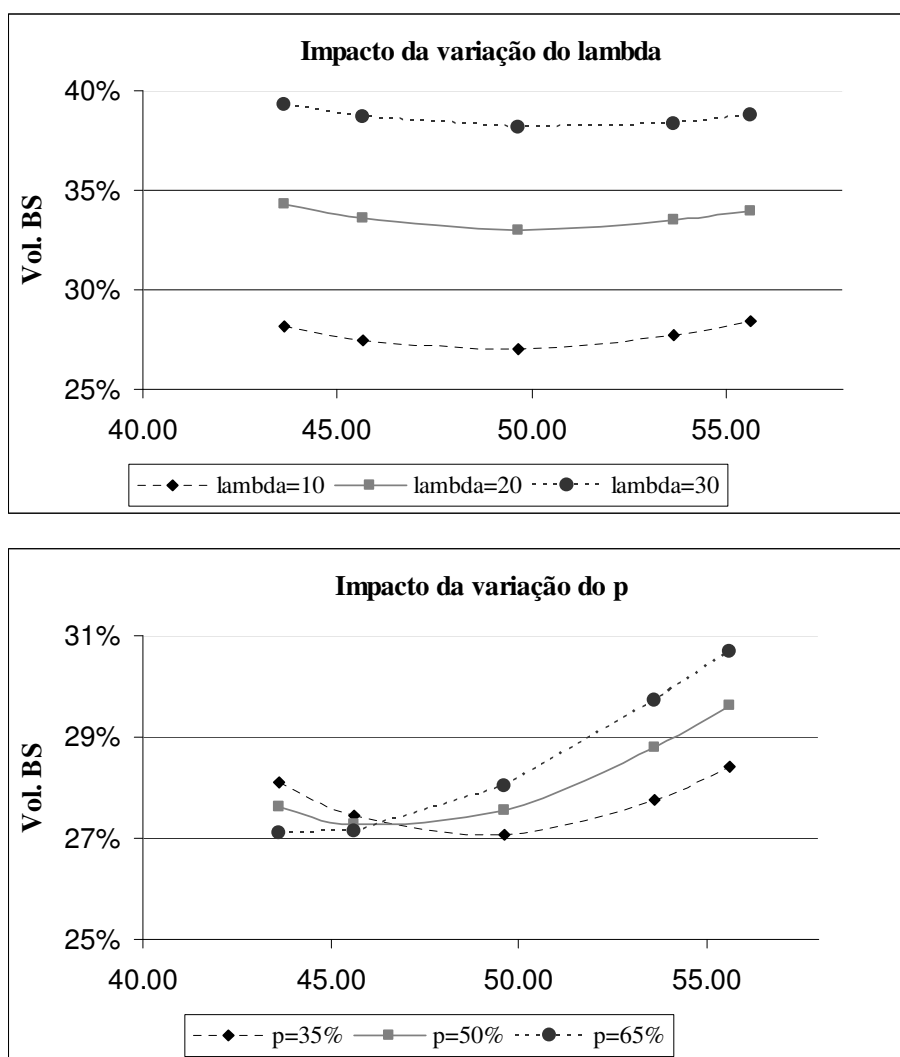
O padrão *smirk* da curva de sorriso de volatilidade foi obtido através do parâmetro $p = 10\%$ o qual determina que apenas 10% dos saltos serão para cima, conseqüentemente os demais 90% serão saltos para baixo. Isso determina um prêmio adicional para opções com menor data de exercício em virtude de a FDP resultante possuir maior concentração de probabilidade na cauda esquerda da distribuição.

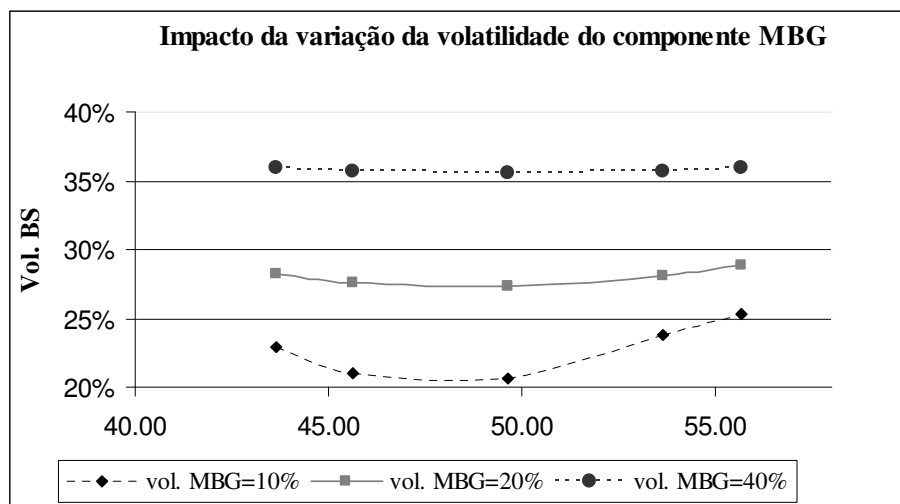
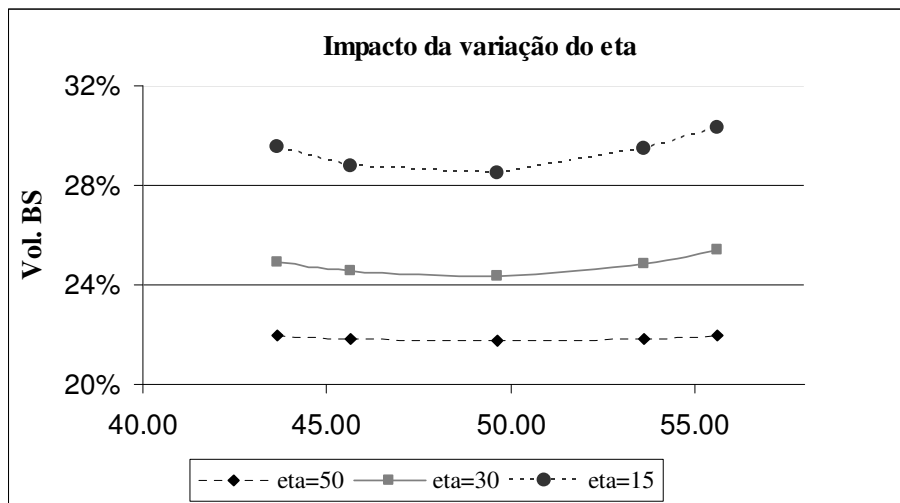
Pode-se observar que o preço de uma opção no modelo de Kou é função dos seguintes parâmetros:

- Parâmetros da opção
 - K preço de exercício da opção
 - T data de exercício da opção
- Parâmetros de mercado
 - S_t é o preço atual do ativo-objeto
 - r é a taxa de juros livre de risco
- Parâmetros do modelo
 - σ_{MBG}^2 é a variância do componente MBG do processo
 - λ é a frequência de ocorrência de saltos
 - $p / (q = 1 - p)$ são as probabilidades de saltos para cima/baixo
 - $\frac{1}{\eta_1} / \frac{1}{\eta_2}$ são as esperanças da amplitude do salto para cima/baixo

Para ser analisado o efeito dos parâmetros do modelo na volatilidade implícita obtida através do modelo Black-Scholes, será reproduzido o trabalho de Papantoleon e Senge (2002). Cada parâmetro em análise foi especificado em 3 níveis de intensidade (identificados na legenda dos gráficos), os demais parâmetros foram mantidos constantes, sendo determinados os preços pelo modelo de Kou para diversos preços de exercício. Os respectivos preços foram utilizados para obter a volatilidade implícita Black-Scholes.

Gráfico 15 – Impacto da variação dos parâmetros do modelo de Kou na geração do sorriso de volatilidade





Observe-se que um aumento na frequência dos saltos λ provoca um aumento geral e aparentemente uniforme no sorriso de volatilidade. O parâmetro p , à medida que aumenta, provoca um aumento da inclinação do sorriso à direita. Por outro lado, à medida que o parâmetro diminui, provoca um efeito oposto, de aumento da inclinação do lado esquerdo do sorriso em decorrência do aumento de q , ou seja, esse parâmetro determina o padrão *skew*, *smile* ou *smirk* no sorriso de volatilidade.

A diminuição do η (aumento da esperança) também provoca um aumento do nível de volatilidade do sorriso, porém afetando de maneira mais intensa as volatilidades das opções ITM e OTM.

A volatilidade do MBG aumenta de maneira geral a volatilidade determinada pelo sorriso, porém, à medida que cresce, diminui o impacto do componente de saltos (distribuição

duplamente exponencial), deixando o sorriso menos pronunciado. A volatilidade MBG do modelo de Kou não deve ser interpretada como a volatilidade total do ativo-objeto, pois, em um modelo com saltos, a volatilidade total do processo é determinada pela soma da volatilidade do componente MBG e a componente de saltos de Poisson.

Pelos exemplos acima, pode-se perceber que o modelo de Kou tem grande capacidade de reproduzir as curvas de volatilidade implícita Black-Scholes observadas no mercado. Através da calibração dos parâmetros, o modelo pode gerar os preços de mercado que determinam o sorriso de volatilidade implícita Black-Scholes. Os preços da ação Petrobrás de 27/04/2007 foram calibrados, obtendo-se as curvas de sorriso de mercado e a curva de sorriso gerada pelos preços do modelo de Kou.

Parâmetros de mercado empregados na fórmula de Black-Scholes e de Kou:

$$T = 0.142466; \quad r = 12.43\%a.a.; \quad S = 45.99.$$

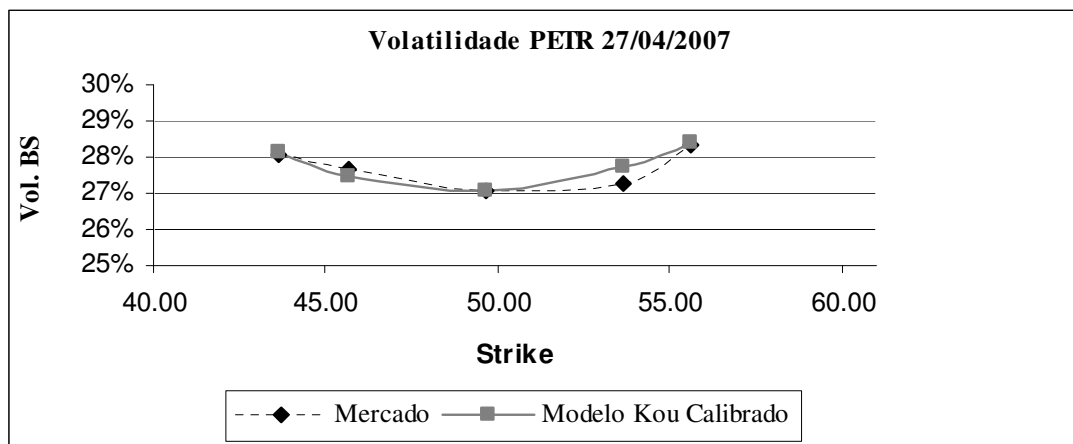
Parâmetros calibrados empregados na fórmula de Kou:

$$\sigma_{MBG} = 19.9783\%a.a.; \quad \eta_1 = 22.9673; \quad \eta_2 = 21.8933; \quad \lambda = 10; \quad p = 35\%.$$

Na tabela abaixo, estão relacionados os preços de mercado coletados em 27/04/2007 para as opções de compra da Petrobras com vencimento em 18/06/2007 e os preços obtidos pelo modelo de Kou calibrado.

K	Preço Mercado	Preço Kou
43.64	3.83	3.83
45.64	2.52	2.51
49.64	0.85	0.85
53.64	0.22	0.24
55.64	0.12	0.12

Gráfico 16 – Volatilidade do modelo de Kou e volatilidade do mercado



Observa-se que as curvas de volatilidade implícita Black-Scholes são muito semelhantes. Esta calibração não representa um teste do modelo, tratando-se simplesmente de um exemplo para mostrar que o modelo pode produzir uma curva de volatilidade implícita semelhante à do mercado.

do preço da opção que amplificam as irregularidades da função ajustada de volatilidade implícita, provocando grandes irregularidades em determinadas regiões da FDP do preço. Rebonato (2004) justifica, ainda, a necessidade de se obter uma FDP do preço suave e, conseqüentemente, confiável, fornecendo também uma série de procedimentos para suavizar o ajuste das curvas.

2.4.6.1 O método de ajuste por funções polinomiais

O método de ajuste por funções polinomiais é um método paramétrico que determina uma só curva para todo o intervalo de valores possíveis, podendo não ser, em alguns casos, satisfatório o ajuste efetuado. A idéia básica do método de ajustes de funções polinomiais é ajustar uma função polinomial a vários pontos predeterminados.

As funções mais utilizadas são as lineares (grau 1), quadráticas (grau 2) e cúbicas (grau 3). Dumas *et al.* (1998) e Yoshino (2001) ajustaram a superfície de volatilidade implícita através de observações do mercado financeiro utilizando respectivamente polinômio de terceiro grau para os domínios de preço de exercício/prazo de maturação e grau 2 para o domínio do *moneyness* e *flat-forward* para o domínio do tempo. Ait-Sahalia (2002) modelou o sorriso do índice S&P utilizando polinômios de terceira ordem.

O processo de simulação histórica apresentado neste trabalho calibrou a volatilidade implícita através de polinômios de terceira ordem na variável *moneyness* e linear na variável prazo de vencimento. Como exemplo, será apresentada a função polinomial obtida para o período de 23/01/2007 a 30/01/2007 para as opções de compra das ações da Vale do Rio Doce (VALE5).

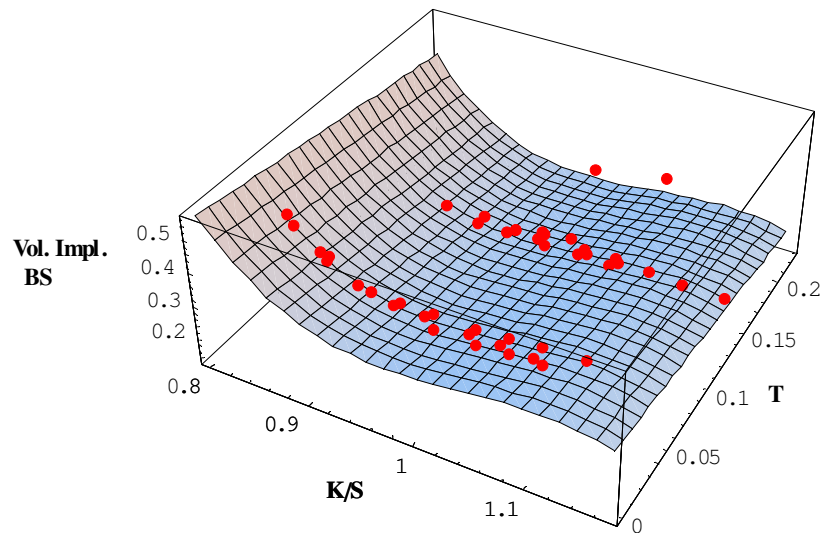
$$\hat{\sigma}(M, T) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times M + \hat{\beta}_2 \times M^2 + \hat{\beta}_3 \times M^3 + \hat{\beta}_4 \times T$$

$\hat{\beta}_0 = 27.083$	$p - value = 0.0006$	$\hat{\beta}_1 = -78.000$	$p - value = 0.001$
$\hat{\beta}_2 = 75.415$	$p - value = 0.001$	$\hat{\beta}_3 = -24.191$	$p - value = 0.002$
$\hat{\beta}_4 = -0.496$	$p - value = 6.807 \times 10^{-7}$		

RSquared → 0.5153, AdjustedRSquared → 0.4891, EstimatedVariance → 0.00180997,

		DF	SumOfSq	MeanSq	FRatio	PValue
ANOVA Table →	Model	4	0.142394	0.0355984	19.668	4.62332×10^{-11}
	Error	74	0.133938	0.00180997		
	Total	78	0.276331			

Gráfico 17 – Superfície de volatilidade implícita obtida por ajustes polinomiais



2.4.6.2 O método de interpolação por *splines* cúbicos

O método dos *splines* cúbicos é uma técnica de aproximação que consiste em dividir o domínio de interesse em vários subdomínios, interpolando-os com vários polinômios de terceira ordem, permitindo a concordância entre as curvas obtidas e os vértices preestabelecidos de maneira suave, sem grandes angulações.

Definição. Seja uma subdivisão do intervalo $[a, b]$. Uma função *spline* de grau p com nós nos pontos $(x_i, f_i)_{i=1..n}$ é uma função $sp(x)$ com as propriedades:

- em cada subintervalo $(x_i, x_{i+1})_{i=0..m-1}$, $sp(x)$ é um polinômio de grau p ;
- $sp(x)$ é contínuo em $[a, b]$ e tem derivada contínua em $[a, b]$ até ordem p .

A função *spline* interpolante é a função $sp(x)$ tal que $(sp(x_i) = f(x_i))_{i=0..m}$.

2.4.7 A obtenção da função de densidade de probabilidade do modelo

O processo de difusão do modelo de BSM pode ser representado pela seguinte FDP lognormal:

$$\rho(S_T | S_t) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left(-\frac{\left(\ln(S_T) - \ln(S_t) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)$$

No caso de uma opção de compra europeia simples e ordinária, o preço do derivativo será:

$$C(S_t, t) = \exp(-r(T-t)) \int_K^{\infty} (S_T - K) \rho(S_T | S_t) dS_T$$

Diferenciando a fórmula acima duas vezes com respeito a K , pode-se utilizar o resultado de Breeden e Litzenberger (1978) que fornece a relação entre o preço da opção de compra europeia e a distribuição de probabilidade neutra a risco. Esse resultado afirma que:

$$\rho(S_T | S_t) = \exp(r(T-t)) \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial K^2}$$

Wilmott (2000) publicou a seguinte fórmula da FDP neutralizadora do risco em termos da volatilidade implícita.

$$\rho(S_T | S_t) = \frac{1}{K \sigma_{impl} \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp(-0.5d_1^2) \times \left(\left(1 + K d_1 \sqrt{T-t} \frac{\partial \sigma_{impl}}{\partial K} \right)^2 + K^2 (T-t) \sigma_{impl} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{impl}}{\partial K^2} - d_1 \left(\frac{\partial \sigma_{impl}}{\partial K} \right)^2 (T-t) \right) \right)$$

2.4.8 A calibração do modelo de Kou

Kou (2002) afirmou que modelos com muitos parâmetros tendem a ser mais difíceis de serem calibrados, pois o problema envolve otimização numérica com vários pontos de

ótimos locais. Essa seria uma das razões do mercado ainda preferir a simplicidade do modelo de BSM.

Segundo Cont e Tankov (2004), a calibração de processos com saltos é um problema *ill-posed*, pois os algoritmos de otimização são bastante instáveis na obtenção das soluções locais ou globais. Mesmo para modelos de difusão simples, o problema de otimização para obtenção da volatilidade implícita e local é considerado *ill-posed*. Jiang et al. (2003) publicaram um artigo através do qual propõem um algoritmo *well-posed* para a obtenção da volatilidade implícita e local utilizando técnicas de controle de otimização para a obtenção de uma solução de maneira estável. É recorrente em artigos acadêmicos a classificação de *ill-posed* para o problema de calibração dos modelos, especialmente a calibração dos modelos de volatilidade local de Dupire (1994) e Derman e Kani (1994). Wilmott (2000) define um problema com *ill-posed* como sendo um problema de otimização em que uma pequena variação nos dados de entrada provoca grandes variações nas respostas dos algoritmos. Rebonato (2004) fornece as seguintes características para um problema ser considerado *well-posed*:

- para todo conjunto de dados de entrada, uma solução existe e a solução é única;
- existe uma dependência contínua da solução em relação aos dados de entrada.

Mesmo utilizando um critério para a escolha de uma solução, existe uma dependência da solução em relação aos dados de entrada que são descontínuos e resultam, portanto, em instabilidades numéricas no algoritmo de calibração. No sentido de resolver esse problema, Cont e Tankov (2004) sugerem que sejam utilizadas no problema tanto as séries históricas quanto os preços negociados das opções.

Para calibrar-se um modelo de precificação de opções, deve-se resolver o seguinte problema utilizando a abordagem dos processos de Lévy:

Dado um modelo exponencial de Lévy $(\sigma(\theta), \nu(\theta), \gamma(\theta))$ e os preços observados de opções de compra C_i com prazo de vencimento T_i e preços de exercícios K_i , $i \in I$,

encontre θ de forma que o preço do ativo descontado $S_t \exp(-rt)$ seja um martingale e o preço observado das opções fornecido pela sua esperança neutralizada a risco descontado.

$$\forall i \in I, C_i = \exp(-rt) E_0^\theta \left[(S_{T_i} - K_i)^+ \right]$$

A solução desse problema fornece uma medida de Lévy que descreve os saltos em um processo neutralizado a risco. Uma das formas de tentar resolver o problema acima é através da solução de um problema de minimização de quadrados não lineares:

$$\theta^* = \arg \min_{Q_\theta \in \mathbb{Q}} \sum_{i=1}^N w_i^C \left(\ln C^\theta(K_i, T_i) - \ln C_i \right)^2 + w_i^P \left(\ln P^\theta(K_i, T_i) - \ln P_i \right)^2$$

em que:

C^θ e P^θ representam, respectivamente, o preço da opção de compra e de venda calculada em um modelo exponencial de Lévy $(\sigma(\theta), \nu(\theta), \gamma(\theta))$;

$\mathbb{Q}$ é o conjunto das medidas martingales;

w_i são pesos específicos dados a determinados preços de opções.

O critério de escolha dos pesos deve levar em consideração a maior ou menor liquidez de determinados preços de opções. Geralmente, opções mais líquidas possuem menor diferença entre as ofertas de compra e venda observada no mercado. Cont e Tankov (2004) sugerem o seguinte critério para atribuir os pesos na função a ser minimizada.

No processo de calibração devem ser eliminadas as opções fortemente (*deep*) OTM e ITM, isto é, com deltas muito próximos de 0 ou 1 (*call*) ou -1 (*put*).

$$w_i = \frac{1}{\left(\ln(C_i^{bid}) - \ln(C_i^{ask}) \right)^2} \text{ ou } w_i = \frac{1}{vega_i}$$

Outra possibilidade é utilização do volume de negócios sobre determinadas datas de vencimento e preços de exercícios nos ativos negociados em bolsa.

2.4.9 A superfície de volatilidade do processo

A superfície do sorriso da volatilidade no domínio de (K, T) não deve ser confundida com a superfície da volatilidade do processo de difusão com volatilidade estocástica ou determinística. A superfície do sorriso da volatilidade $\sigma(K_T, T)$ é uma superfície implícita da volatilidade obtida através da fórmula de Black-Scholes. Por outro lado, a superfície da volatilidade $\sigma(S_t, t)$ é uma especificação da volatilidade como um processo em função do preço do ativo-objeto S e do tempo t .

As volatilidades implícitas obtidas a partir dos preços das opções também são estimativas da volatilidade do processo. Elas podem ser utilizadas para estimar os parâmetros de uma superfície de volatilidade. Todavia, o uso de volatilidades implícitas de Black-Scholes não é consistente, pois é um modelo de volatilidade determinística. Para a abordagem ser coerente, deve-se de fato utilizar volatilidades implícitas extraídas do processo que se deseja estimar, o que conduz a um argumento circular.

2.4.9.1 O modelo de volatilidade local: a abordagem de Dupire

Dada a complexidade dos modelos de volatilidade estocástica e a dificuldade de calibração dos parâmetros para a precificação de opções de compra européias simples e ordinária, o mercado financeiro e o meio acadêmico procuraram uma maneira mais simples para precificar opções exóticas de maneira consistente com o sorriso de volatilidade. Desde o trabalho de Breeden e Litzenberger (1978), os operadores de mercado já haviam entendido que era possível obter a FDP neutralizadora do risco a partir dos preços negociados das opções européias.

A formalização das idéias ocorreu com Dupire (1994) e Derman e Kani (1994) que perceberam que, sob a condição de neutralização de risco, existia um único processo de difusão consistente com essas distribuições. Dupire publicou a versão em tempo contínuo e

volatilidade utilizada em cada ponto ao longo do processo está consistente com os preços de opções observados no mercado em um determinado instante de tempo para todos os vencimentos e preços de exercício. Segundo Wilmott (2000), a função de volatilidade local é também chamada de “*volatilidade a termo*”, ou melhor, “*volatilidade a termo a termo*” de um determinado processo de difusão.

Não é verdade que Dupire, Derman e Kani pensaram que a função de volatilidade local representasse um modelo do comportamento da volatilidade: a idéia era simplesmente representar como o mercado precificava opções exóticas a partir dos preços conhecidos das opções européias. A função de volatilidade local também é conhecida como função de volatilidade determinística (FVD). Fazendo uma breve revisão do trabalho de Dupire (1994), tem-se para um determinado prazo de vencimento T e o preço atual do ativo-objeto S_0 , a seguinte relação:

$$C(S_0, K, T) = \int_K^{\infty} (S_T - K) \rho(S_T, T; S_0) dS_T$$

em que:

$\rho(S_T, T; S_0)$ é a FDP neutralizada do risco;

K é o preço de exercício da opção.

Diferenciando duas vezes com respeito a K , tem-se:

$$\rho(K, T; S_0) = \frac{\partial^2 C(S_0, K, T)}{\partial K^2}$$

Dada a distribuição de probabilidade de preços do ativo-objeto no vencimento para cada tempo T condicionado ao preço inicial S_0 , mostrou que existe um único processo de difusão neutralizadora do risco que reproduz essa distribuição. O processo pode ser descrito como:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_L(S_t, t; S_0) dZ$$

Utilizando o lema de Itô juntamente com a neutralização do risco, a equação acima resulta em uma EDP para as funções do preço do ativo-objeto que é uma generalização da equação de BSM. Em particular, a FDP $\rho(K, T; S_0)$ deve satisfazer a equação de Fokker-Planck. O resultado será a equação:

$$C(S_0, K, T) = \int_K^\infty (S_T - K) \rho(S_T, T; S_0) dS_T \quad (1)$$

De acordo com a equação de Fokker-Planck:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} (\sigma^2 S_T^2 \rho(S_T, T; S_0)) - S \frac{\partial}{\partial S_T} (\mu S_T \rho(S_T, T; S_0)) = \frac{\partial}{\partial T} (\rho(S_T, T; S_0)).$$

Diferenciando (1) com respeito à K , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial K} &= - \int_K^\infty \rho(S_T, T; S_0) dS_T \\ \frac{\partial^2 C(S_0, K, T)}{\partial K^2} &= \rho(K, T; S_0) \end{aligned}$$

Diferenciando (1) com respeito à T , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial T} &= \int_K^\infty (S_T - K) \left(\frac{\partial \rho(S_T, T; S_0)}{\partial T} \right) dS_T \\ &= \int_K^\infty \left((S_T - K) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} (\sigma^2 S_T^2 \rho(S_T, T; S_0)) - S \frac{\partial}{\partial S_T} (\mu S_T \rho(S_T, T; S_0)) \right) \right) dS_T \\ &\quad + \int_K^\infty \rho(S_T, T; S_0) dS_T \end{aligned}$$

Integrando por partes, tem-se a equação de Dupire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial T} &= \frac{\sigma^2 K^2}{2} \times \rho(K, T; S_0) \int_K^\infty (\mu S_T \rho(S_T, T; S_0)) dS_T \\ \frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial T} &= \frac{\sigma^2 K^2}{2} \times \frac{\partial^2 C(S_0, K, T)}{\partial K^2} + r_t \left(-K \frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial K} \right) \end{aligned}$$

Utilizando o preço futuro do ativo-objeto, tem-se a expressão do preço da opção em termos do preço futuro do ativo-objeto:

$$F_T = S_0 \exp \int_0^T r_t dt$$

$$\frac{\partial C(F_T, K, T)}{\partial T} = \frac{\sigma^2 K^2}{2} \times \frac{\partial^2 C(F_T, K, T)}{\partial K^2} \quad (2)$$

Invertendo a equação, tem-se:

$$\sigma^2(S_0, K, T) = \frac{\partial C(F_T, K, T)}{\partial T} \div \left(\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C(F_T, K, T)}{\partial K^2} \right) \quad (3)$$

A equação (3) pode ser vista como a função da volatilidade local independentemente do fato de qual seja o modelo do processo que governa a evolução da volatilidade.

2.4.9.2 Volatilidade local em termos de volatilidade implícita

Um dos principais problemas com a fórmula de Dupire (3) é que, caso o preço de exercício da opção não esteja próximo ao preço do ativo-objeto (opções ATM), tanto o denominador quanto o numerador serão muito pequenos, conduzindo o resultado da fórmula para um resultado pouco preciso. O termo relacionado à densidade, $\frac{\partial^2 C(S_0, K, T)}{\partial K^2}$, que é o denominador da fórmula, apresenta valores muito pequenos à medida que a opção se distânciada da condição ATM, provocando fortes instabilidades numéricas no resultado, a menos que o numerador também se aproxime do zero na velocidade adequada. Uma das formas de diminuir esse tipo de problema da fórmula de volatilidade local é escrevê-la em termos de volatilidade implícita.

Uma das vantagens de se escrever a volatilidade local em termos da volatilidade implícita é que se pode observar como resultado direto da fórmula que, ao ser utilizada uma curva de volatilidade implícita constante (*flat*), se obterá uma curva de volatilidade local também constante (*flat*).

Gatheral (2006) demonstrou através de um procedimento bastante elegante, como obter a fórmula de Dupire em termos da volatilidade implícita. Para isso, inicialmente propôs a seguinte mudança de variáveis:

$$w(S_0, K, T) = \sigma_{impl}^2(S_0, K, T)T \quad \text{e} \quad y = \ln\left(\frac{K}{F_T}\right).$$

Utilizando essas variáveis, a fórmula de Black-Scholes e a fórmula de Dupire serão, respectivamente:

$$\begin{aligned} C_{BS}(F_T, y, w) &= F_T \{N(d_1) - \exp(y)N(d_2)\} \\ &= F_T \left\{ N\left(-\frac{y}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2}\right) - \exp(y)N\left(-\frac{y}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial T} = \frac{\sigma_L^2(S_t, t; S_0)}{2} \left\{ \frac{\partial^2 C(S_0, K, T)}{\partial y^2} - \frac{\partial C(F_T, K, T)}{\partial y} \right\} + rC(S_0, K, T) \quad (4)$$

Derivando a fórmula de Black-Scholes:

$$\frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w^2} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2} \right) \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y \partial w} = \left(\frac{1}{8} - \frac{y}{w} \right) \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} + \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y}$$

Pode-se transformar a equação (4) da seguinte forma:

$$\frac{\partial C(F_T, K, T)}{\partial y} = \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(F_T, K, T)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y \partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S_0, K, T)}{\partial T} &= \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial T} + \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} \\ &= \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} + r C_{BS}(F_T, y, w) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} + r C_{BS}(F_T, y, w) = \frac{\sigma_L^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 C(S_0, K, T)}{\partial y^2} - \frac{\partial C(F_T, K, T)}{\partial y} \right\} + r C(S_0, K, T)$$

$$\frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\sigma_L^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y \partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ &+ \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial y} - \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\sigma_L^2}{2} \frac{\partial C_{BS}(F_T, y, w)}{\partial w} \left\{ \begin{aligned} &2 - \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \sigma_L^2 \left\{ 1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}$$

$$\sigma_L^2(S_t, t; S_0) = \frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{\left\{ 1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}}$$

Pode-se observar que, quando se tem $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, ou seja, volatilidade implícita constante, a fórmula da volatilidade local se reduz a $\sigma_L^2(S_t, t; S_0) = \frac{\partial w}{\partial T} = \sigma_{impl}^2(S_0, K, T)$.

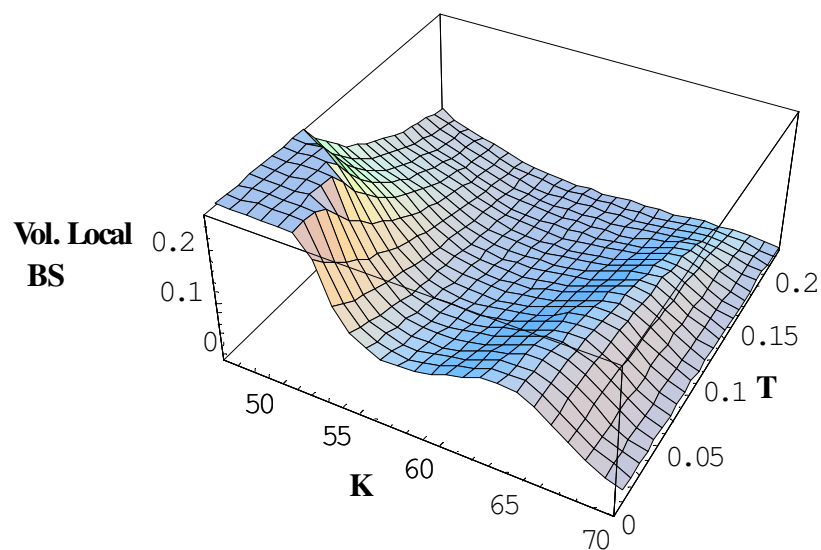
Wilmott (2000), também, publicou sua fórmula para a volatilidade local em termos de volatilidade implícita. Ambas as fórmulas conduzem ao mesmo resultado numérico.

$$\sigma_L^2(S_t, t) = \frac{\sigma_{impl}^2 + 2(T-t)\sigma_{impl} \frac{\partial \sigma_{impl}}{\partial T} + 2rK(T-t)\sigma_{impl} \frac{\partial \sigma_{impl}}{\partial K}}{\left(1 + Kd_1\sqrt{(T-t)} \frac{\partial \sigma_{impl}}{\partial K}\right)^2 + K^2(T-t)\sigma_{impl} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{impl}}{\partial K^2} - d_1 \left(\frac{\partial \sigma_{impl}}{\partial K}\right)^2 \sqrt{(T-t)}\right)}$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_T}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_{impl}^2\right)(T-t)}{(T-t)\sigma_{impl}}.$$

Gráfico 18 – Volatilidade local obtida a partir da volatilidade implícita (gráfico 14)



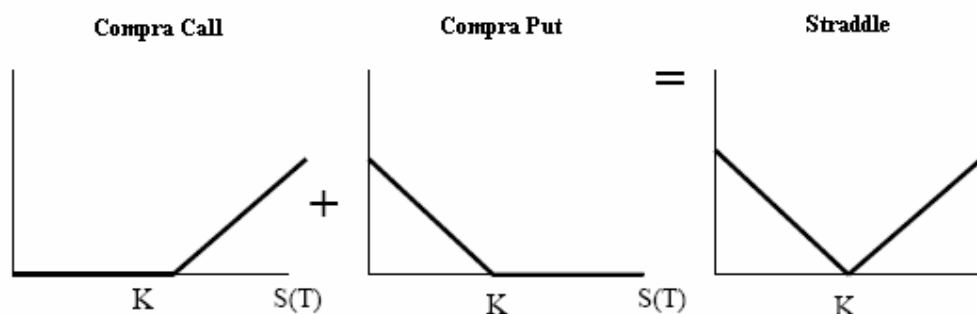
2.4.9.3 Soluções aproximadas para a obtenção dos parâmetros da superfície de volatilidade local

Wilmott (2000) argumentando que os modelos determinísticos de volatilidade local sofrem sérios problemas de instabilidade numérica sugere a utilização de um método simples e rápido de se implementar. Citando o trabalho de Dumas et al. (1998) que constataram que boa parte das informações de mercado são perdidas quando a superfície de volatilidade local é fortemente ajustada, ele sugere um método parcimonioso de representação da volatilidade:

$$\sigma_{impl}(K, T; S_0) = a(T)(K - S_0) + b(T)$$

O cálculo de $b(T)$ é feito utilizando-se o preço conhecido de uma estratégia *straddle* ATM ($V_{straddle}$) que é a combinação de uma posição comprada de uma opção de compra e de uma opção de venda com o mesmo preço de exercício e data de vencimento.

Gráfico 19 – *Straddle* – Diagrama de retorno da estratégia



$$V_{straddle} = C + P = C + C - S + K \exp(-r(T-t))$$

$$C = \frac{1}{2} (V_{straddle} + S - K \exp(-r(T-t)))$$

Como o *straddle* é ATM, tem-se que $S_0 = K = S_T$, logo:

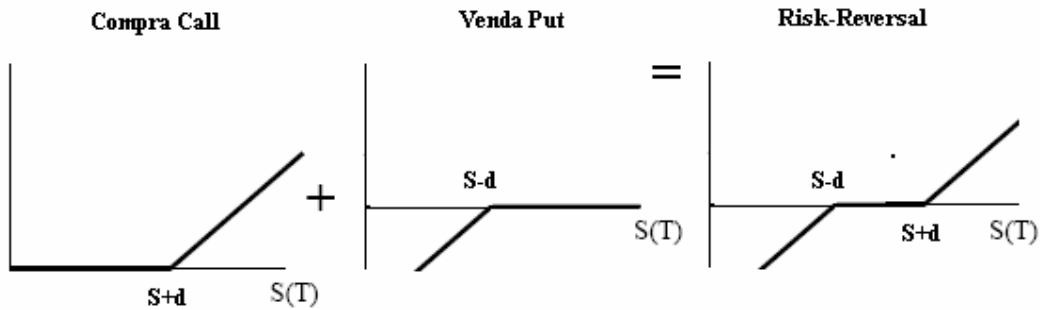
$$N(d_1) - \exp(-r(T-t))N(d_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{straddle}}{S_0} + 1 - \exp(-r(T-t)) \right)$$

$$d_1 = \frac{\left(r + \frac{1}{2}b(T)^2 \right) \sqrt{T-t}}{b(T)} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - b(T)\sqrt{T-t}$$

Como se conhece o preço $V_{straddle}$, pode-se calcular $b(T)$.

O cálculo de $a(T)$ é feito utilizando-se o preço conhecido de uma estratégia *risk-reversal* (V_{RR}) que é a combinação de uma posição comprada de uma opção de compra com preço de exercício acima de S_0 e de uma posição vendida de uma opção de venda com preço de exercício abaixo de S_0 .

Gráfico 20 – Risk-Reversal – Diagrama de retorno da estratégia



Assuma-se que o preço de exercício da opção de compra é $S_0 + \Delta$ e o preço do exercício da opção de venda é $S_0 - \Delta$.

$$V_{RR} = C(S_0 + \Delta, \sigma_{impl}(S_0 + \Delta, T)) - P(S_0 - \Delta, \sigma_{impl}(S_0 - \Delta, T))$$

$$= C(S_0 + \Delta, \sigma_{impl}(S_0 + \Delta, T)) - C(S_0 - \Delta, \sigma_{impl}(S_0 - \Delta, T)) + S_0 - (S_0 - \Delta)\exp(-r(T-t))$$

Para um Δ pequeno, pode-se escrever:

$$V_{RR} - S_0(1 - \exp(-r(T-t))) = \Delta \left(\exp(-r(T-t)) + 2 \frac{\partial C(S_0, b)}{\partial K} + 2 \frac{\partial C(S_0, b)}{\partial \sigma_{impl}} a \right)$$

Utilizando a fórmula da opção de compra européia:

$$V_{RR} - S_0 (1 - \exp(-r(T-t))) = \Delta \left(\frac{\exp(-r(T-t)) - 2 \exp(-r(T-t)) N(d_2) +}{2a S_0 \sqrt{T-t} N'(d_1)} \right)$$

$$d_1 = \frac{\left(r + \frac{1}{2} b(T)^2 \right) \sqrt{T-t}}{b(T)} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - b(T) \sqrt{T-t}$$

Utilizando o valor de $b(T)$, obtido a partir de uma estratégia ATM de *straddle*, pode-se obter $a(T)$:

$$a(T) = \frac{1}{2\Delta S_0 \sqrt{T-t} N'(d_1)} \left(V_{RR} - S_0 (1 - \exp(-r(T-t))) \right) + \frac{\exp((1-r)(T-t)) N(d_2)}{S_0 \sqrt{T-t} N'(d_1)}$$

O mercado financeiro utiliza o valor $a(T)$ para deduzir o sorriso de volatilidade, pois é interpretado como o “coeficiente” angular do sorriso em uma abordagem simplificada da fórmula da volatilidade implícita $\sigma_{impl}(K, T; S_0) = a(T)(K - S_0) + b(T)$. No mercado acionário brasileiro, os preços de uma estratégia *straddle* e *risk-reversal* somente podem ser obtidos através de cotações no chamado mercado de balcão (OTC), não existindo preços divulgados no mercado de bolsa para essas estratégias.

2.4.10 Os modelos de precificação que capturam o sorriso de volatilidade

Nos modelos de volatilidade estocástica, como, por exemplo, Heston (1993) e Hull e White (1987), a volatilidade do ativo-objeto é um processo de reversão à média, correlacionado com o próprio processo de preço do ativo. Através dessa correlação e dos parâmetros do processo, uma variedade de sorrisos e curvas de volatilidade podem ser geradas nesse modelo. Existem evidências empíricas baseadas na análise de séries temporais que mostram ser plausível a existência de volatilidade estocástica; veja Andersen, Bezoni e Lund (1999) para uma revisão de várias referências. Entretanto, no sentido de gerar curvas de volatilidade implícita que sejam consistentes com os preços do mercado, freqüentemente altas

e não-realistas correlações negativas entre o preço do ativo-objeto e a volatilidade são necessárias.

No modelo inicialmente proposto por Merton (1976) e mais recentemente por Kou (2002), a geração das curvas de volatilidade é feita através da adição de saltos no modelo de difusão de BSM. Em particular, definindo como negativa a esperança do tamanho do salto, pronunciadas curvas de volatilidade podem ser capturadas por esse modelo. Da mesma maneira que os modelos de volatilidade estocástica, os modelos de difusão com saltos são complexos de serem tratados numericamente.

Outras extensões do modelo de BSM que tratam o fenômeno das curvas de volatilidade são os modelos determinísticos de volatilidade em função do tempo e do preço do ativo-objeto. Esse tratamento dado ao modelo de BSM foi proposto por Dupire (1994), Derman e Kani (1994) e Rubinstein (1994) e tem sido consistentemente aprimorado por outros autores, tais como Andersen e Brotherton-Ratcliffe (1998) e Brown e Toff (1999). Os modelos determinísticos de volatilidade são populares no mercado financeiro principalmente por manterem a característica de mercado completo necessário para o modelo de Black-Scholes.

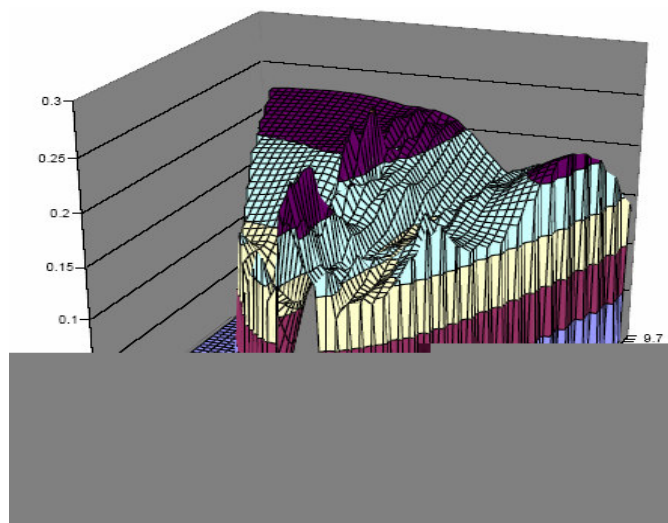
Andersen e Andreasen (2000) argumentam que os modelos determinísticos de volatilidade permitem um ajuste eficiente do modelo aos preços de mercado, em contraste os modelos com saltos e de volatilidade estocástica são parametrizados através de um conjunto restrito de variáveis e, conseqüentemente, sujeitos a erros de ajustes que podem ser inaceitavelmente grandes. Embora convenientes, esses modelos apresentam sérios problemas. Primeiramente, não é realista imaginar que a volatilidade de um ativo-objeto seja consequência exclusiva do seu preço e do tempo. Além disto, existem alguns artigos empíricos que rejeitam o modelo: Ait-Sahalia, Wang e Yared (1998) e Dumas, Fleming e Whaley (1997). A fraca evidência empírica é resultado do fato de o modelo determinístico de volatilidade predizer que o sorriso de volatilidade irá desaparecer após um determinado prazo. Na prática, é observado que as curvas de volatilidade são estacionárias ao longo do tempo. Conjectura-se que a superfície de volatilidade surgiu após o *Crash* de 1987. Outro fato negativo em relação ao modelo é que geralmente para se ajustar curvas pronunciadas de volatilidade, as técnicas de interpolação ajustam de maneira “forçada” e pouco convincente a função de volatilidade implícita.

Andersen e Andreasen ainda argumentam que a combinação de um modelo com saltos e uma FVD oferece a possibilidade de se ter um modelo em que parte da curva de volatilidade é explicada pelos saltos e outra parte por uma função de volatilidade. Esse modelo seria mais estável em virtude de não serem necessários fortes ajustes para adequação das curvas de curto prazo devido à facilidade de modelar esse comportamento através da componente de saltos. Além disso, uma precisão maior no ajuste aos preços de mercado é possível através da FVD. O modelo geral proposto pelos autores foi o seguinte:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \underbrace{\left(r - \lambda E[J - 1] \right) dt + d \left(\sum_{i=1}^{N_t} (J_i - 1) \right)}_{\text{processo com saltos neutralizados ao risco}} + \underbrace{\sigma(S_t, t) dW}_{\text{função determinística volatilidade}}$$

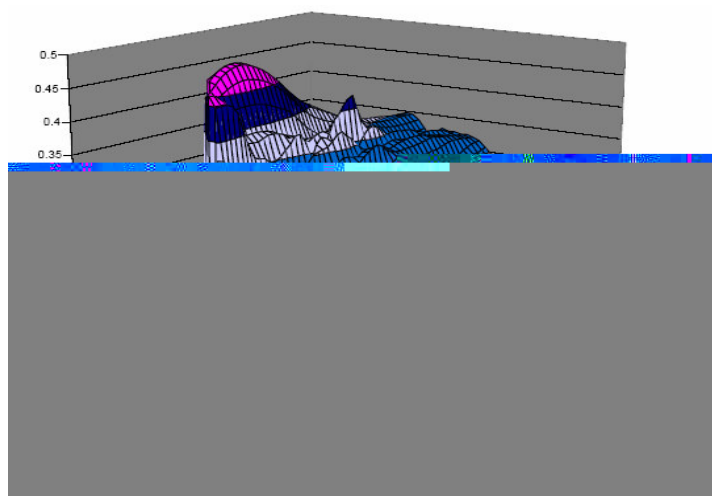
Os autores, utilizando um processo de saltos segundo o modelo de Merton (1976), obtiveram uma superfície de volatilidade local em formato de U, sendo estacionária ao longo do tempo.

Gráfico 21 – Superfície de volatilidade em forma de U (Andersen e Andreasen, 2000)



Contrastando com o resultado acima, os autores apresentaram os mesmos dados de mercado ajustados a um modelo de difusão simples com função determinística de volatilidade. Claramente se observa que a superfície de volatilidade local apresentou pronunciadas curvaturas no curto prazo e não-estacionariedade da volatilidade em relação ao tempo.

Gráfico 22 – Superfície de volatilidade não estacionária (Andersen e Andreasen, 2000)



2.5 *HEDGE EM PORTFÓLIO DE OPÇÕES*

2.5.1 *Portfolio e arbitragem*

Inicialmente, seja formalizada a notação necessária para descrever os conceitos de *portfolio* e arbitragem. Suponha-se que existam N

$$Z(T) = [S_1(T), S_2(T), \dots, S_K(T)] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1K} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NK} \end{bmatrix}$$

em que:

Z_{ij} representa o preço $S_j^i(T)$ do instrumento i , em um estado j da economia.

Resumidamente, os preços dos instrumentos $S(0)$ no instante 0 têm probabilidade P_j de ter os preços $S_j(T)$ no instante t .

Um *portfolio* é uma coleção de investimentos mantidos por uma instituição ou por um investidor privado. Pode-se representar *portfolio* (Π) através de um vetor coluna de N componentes que representa quantas unidades de cada instrumento são mantidas pelo investidor.

Arbitragem pode ser definida como a prática de obter lucro financeiro a partir de um estado de desequilíbrio nos preços dos instrumentos financeiros. Intuitivamente significa fazer dinheiro do “nada”.

Uma oportunidade de arbitragem do tipo I existe se e somente se existe um *portfolio* Π , de modo que:

$${}^T S(0) = 0 \quad \text{e} \quad {}^T Z(T) = 0$$

Outra forma equivalente para afirmação da não existência da possibilidade de arbitragem é a existência de um vetor coluna $\psi > 0$, de forma que:

$$S(0) = Z(T)\psi$$

Portanto, no caso de ocorrência de oportunidades de arbitragem e o fato de não existir risco de investimentos em *portfolio* de arbitragens, poder-se-ia, através da geração de um número infinito de investimentos neste tipo de *portfólio*, provocar o desequilíbrio do mercado.

Seja utilizado um exemplo simples, porém totalmente aplicável para ser apresentada a condição de não arbitragem: suponha-se que existam apenas duas datas em nosso problema em exame: o momento atual ($t = 0$) e a próximo momento ($t = T$). Além disso, considere-se a possibilidade de existirem apenas 3 instrumentos disponíveis na economia:

- Um título livre de risco cujo retorno de hoje até o próximo momento será de $(1 + r(T - 0))$. O fato de o título ser livre de risco significa que ele terá o mesmo valor no próximo momento, qualquer que seja o estado da economia.
- Um ativo-objeto, como por exemplo, uma ação $S(t)$ com possibilidades de assumir dois possíveis valores no instante $t = T$. Isso significa que existiram dois possíveis estados da economia no instante $t = T$. Além disso, $S(t)$ tem risco, pois o retorno do ativo-objeto é diferente para cada um dos dois estados.
- Um derivativo de $S(t)$, uma opção de compra com prêmio $C(t)$ e um preço de exercício C_0 . A opção vence no próximo instante e assim como o ativo-objeto poderá assumir dois possíveis valores.

Então, tem-se uma situação em que existem três ativos ($N = 3$) e dois estados da economia ($K = 2$). O primeiro ativo é uma posição comprada ou vendida em títulos livres de risco, um ativo-objeto e uma opção de compra sobre o ativo. Apesar de ser uma situação bastante simples, se o intervalo de tempo em consideração torna-se muito pequeno uma situação de apenas dois possíveis movimentos de preço torna-se plausível.

Utilizando-se a notação matricial, tem-se:

$$S_t = \begin{bmatrix} B(t) \\ S(t) \\ C(t) \end{bmatrix} \quad Z_T = \begin{bmatrix} (1+r(T-t))B(t) & (1+r(T-t))B(t) \\ S_1(T) & S_2(T) \\ C_1(T) & C_2(T) \end{bmatrix}$$

S_t é o vetor de preços dos ativos;

$B(t)$ é o preço do título livre de risco;

$S(t)$ é o preço do ativo-objeto;

$C(t)$ é o preço da opção de compra;

Todos os preços no instante t ;

Z_T é a matriz de retornos no instante T dos três ativos considerando dois estados possíveis da economia.

A não existência da possibilidade de arbitragem pressupõe que exista $\psi > 0$. Para simplificar-se o problema, como a quantidade de ativos comprados ou vendidos é uma decisão do investidor, seja definido o preço do título livre de risco $B(t) = 1$, de forma que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r(T-t) & 1+r(T-t) \\ S_1(T) & S_2(T) \\ C_1(T) & C_2(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha da matriz de retornos pelo vetor ψ , obter-se-á:

$$1 = (1+r(T-t))\psi_1 + (1+r(T-t))\psi_2$$

Defina-se:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1+r(T-t))\psi_1 \\ Q_2 &= (1+r(T-t))\psi_2 \end{aligned}$$

Como se tem $\psi > 0$, tem-se que $Q_1 + Q_2 = 1$ e $0 < Q_1 \leq 1$. Como Q_i 's são números positivos e a soma desses números é 1, eles podem ser interpretados como probabilidades associadas com os dois estados possíveis da economia no instante T . O termo interpretado é utilizado, pois em geral as probabilidades reais P_i 's são diferentes de Q_i 's. As probabilidades Q_i 's são conhecidas como probabilidades ajustadas ao risco.

2.5.2 A probabilidade ajustada ao risco

As probabilidades Q_i 's existem se e somente se não existirem oportunidades de arbitragem. Em outras palavras, se não existirem preços incorretamente determinados na economia. Se não existirem oportunidades de arbitragem na economia, tem-se a garantia de que existem $\{ \quad \}$

$$S(t) = \frac{1}{(1+r(T-t))} (S_1(T)Q_1 + S_2(T)Q_2)$$

$$C(t) = \frac{1}{(1+r(T-t))} (C_1(T)Q_1 + C_2(T)Q_2)$$

Podem-se interpretar os termos $(S_1(T)Q_1 + S_2(T)Q_2)$ e $(C_1(T)Q_1 + C_2(T)Q_2)$ como um valor esperado, pois se trata dos valores possíveis dos ativos no instante T , ponderados pelas probabilidades Q_1 e Q_2 . Através dessa interpretação, pode-se considerar que os preços atuais dos ativos, considerando as probabilidades Q_1 e Q_2 , são iguais à esperança dos seus preços no instante T descontado pela taxa livre de risco.

Seja, agora, interpretado o significado das probabilidades ajustadas ao risco. Suponha-se que os verdadeiros valores esperados sejam:

$$E^{true}[S(T)] = (S_1(T)P_1 + S_2(T)P_2)$$

$$E^{true}[C(T)] = (C_1(T)P_1 + C_2(T)P_2)$$

Em virtude de os ativos possuírem risco, quando se desconta o seu valor esperado pela taxa livre de risco, ter-se-á:

$$S(t) < \frac{1}{(1+r(T-t))} E^{true}[S(T)]$$

$$C(t) < \frac{1}{(1+r(T-t))} E^{true}[C(T)]$$

Isso se deve ao fato de que a igualdade nessas equações somente pode ser obtida caso se tenha:

$$(1+r(T-t) + r_{prêmio}) = \frac{E^{true}[S(T)]}{S(t)}$$

$$(1+r(T-t) + r_{prêmio}) = \frac{E^{true}[C(T)]}{C(t)}$$

ou seja, ativos com risco irão exigir um prêmio, caso contrário os investidores iriam preferir ativos livres de risco. Isso implica, portanto, que:

$$S(t) < \frac{1}{(1+r(T-t))} E^{true} [S(T)]$$

$$C(t) < \frac{1}{(1+r(T-t))} E^{true} [C(T)]$$

Entende-se que a não existência de arbitragem internaliza o prêmio pelo risco através da apuração das probabilidades Q_1 e Q_2 , resultando em:

$$S(t) = \frac{1}{(1+r(T-t))} E^Q [S(T)]$$

$$C(t) = \frac{1}{(1+r(T-t))} E^Q [C(T)]$$

2.5.3 A condição de não-arbitragem

Sejam os retornos dos ativos S_i nos dois estados da economia:

$$R_1(T) = \frac{S_1(T)}{S(t)}$$

$$R_2(T) = \frac{S_2(T)}{S(t)}$$

Sabe-se que:

$$1 = (1+r(T-t))\psi_1 + (1+r(T-t))\psi_2 \quad (1)$$

$$1 = \psi_1 R_1 + \psi_2 R_2 \quad (2)$$

Subtraindo a equação (2) de (1), tem-se:

$$0 = (1+r(T-t) - R_1)\psi_1 + (1+r(T-t) - R_2)\psi_2.$$

A equação acima, com ψ_1 e ψ_2 positivos somente será satisfeita se e somente se:

$$R_1 < (1+r(T-t)) < R_2.$$

Caso se tenha $(1+r(T-t)) < R_1 < R_2$, poder-se-ia ficar vendidos em B_t e comprados em S_t , garantindo retornos positivos, ou seja, ter-se-á uma oportunidade de arbitragem. Nesse caso, ψ_1 ou ψ_2 terão de ser negativos.

Caso se tenha $R_1 < R_2 < (1+r(T-t))$, poder-se-ia ficar comprados em B_t e vendidos em S_t , garantindo retornos positivos, ou seja, ter-se-á uma oportunidade de arbitragem. Nesse caso também, ψ_1 ou ψ_2 terão de ser negativos.

Portanto, verifica-se que a existência de ψ_1 e ψ_2 positivos implica na condição de que $R_1 < (1+r(T-t)) < R_2$, o que na prática significa a não existência de arbitragem.

2.5.4 Martingales e submartingales

Suponha-se que, no instante t , tenhamos um conjunto informacional I_t .

Uma variável aleatória que satisfaça a igualdade $E_t^Q[X_{t+s}|I_t] = X_t$ para todo $s \geq 0$, é chamada martingale com relação à medida de probabilidade Q .

Uma variável aleatória que satisfaça à igualdade $E_t^P[X_{t+s}|I_t] \geq X_t$ para todo $s \geq 0$, é chamada submartingale com relação à probabilidade P .

Dessa forma, pode-se, então, dizer que os preços dos ativos no instante T , descontados pela taxa livre de risco, é um submartingale com relação à probabilidade P . Porém, torna-se o preço descontado um martingale com relação à probabilidade Q , ou seja, a utilização da probabilidade ajustada ao risco irá converter todos os preços dos ativos descontados pela taxa de risco em martingales.

É sempre importante lembrar que a noção de martingale está associada a dois conceitos:

- A existência de uma específica probabilidade ajustada ao risco.

- O fato de que S_t não é um martingale e sim $X_{t+s} = \frac{1}{(1+r)^s} S_{t+s}$.

O teorema de arbitragem fornece um método poderoso para determinar o preço justo dos derivativos de ativos financeiros. Duas diferentes abordagens podem ser dadas ao problema: a abordagem proposta por Black e Scholes (1973), baseada na criação de uma carteira livre de risco e na identificação de uma fórmula analítica através da solução de uma abordagem EDP; a outra abordagem é baseada na identificação de uma medida equivalente de probabilidade Q na qual sobre essa probabilidade $e^{-rt} F(S_t, t)$ torna-se um martingale. Para um completo entendimento das diferenças entre as duas abordagens ver Neftci (2000) no qual é formalizada a fórmula de Feynman-Kac que representa a dualidade entre a abordagem EDP e o martingale.

Os principais passos para obtenção do preço racional dos derivativos financeiros utilizando-se a abordagem de martingales são:

- i. Obtenção de um modelo aproximado da dinâmica de preço do preço do ativo-objeto.
- ii. Calcular a relação entre a função de preço do derivativo e o ativo-objeto no vencimento e em outras condições de fronteira.
- iii. Obter a função densidade de probabilidade neutralizadora do preço do risco.
- iv. Calcular a esperança do valor intrínseco utilizando-se essa probabilidade ajustada ao risco ou martingale equivalente.
- v. Descontar essa esperança utilizando-se a taxa de retorno livre de risco ou um numerário.
- vi. Transformando a esperança em uma integral, utilizando-se a função de densidade de S_t , usando-se a medida de probabilidade Q .

2.5.5 A precificação de derivativos em mercados incompletos

A teoria de precificação baseada no conceito de não-arbitragem utiliza-se do pressuposto da existência de mercados completos, nos quais todos os preços dos contratos contingenciais podem ser reproduzidos por um *portfolio* autofinanciável do ativo-objeto.

Entretanto, é bastante complexo saber se um mercado é completo e mesmo afirmar-se que existe um mercado completo no mundo real.

Seja utilizado um exemplo simples, porém totalmente aplicável para ser apresentada a situação de mercado incompleto: suponha-se que existam apenas duas datas no problema: o momento atual ($t=0$) e a próximo momento ($t=T$); além disso, considere-se a possibilidade de existirem os mesmos apenas três instrumentos na economia: um título livre de risco, um ativo-objeto, como, por exemplo, uma ação $S(t)$ com possibilidades de assumir três possíveis valores no instante $t=T$. Isso significa que existiram três possíveis estados da economia no instante $t=T$. Além disso, $S(t)$ tem risco, pois o retorno do ativo-objeto é diferente para cada um dos três estados. Um derivativo de $S(t)$, uma opção de compra com prêmio $C(t)$ e um preço de exercício C_0 . A opção vence no próximo instante e assim como o ativo-objeto poderá assumir três possíveis valores, ou seja, tem-se, agora, uma situação em que existem três ativos ($N=3$) e três estados da economia ($K=3$). Utilizando-se notação matricial, tem-se:

$$S_t = \begin{bmatrix} B(t) \\ S(t) \\ C(t) \end{bmatrix} \quad Z_T = \begin{bmatrix} (1+r(T-t))B(t) & (1+r(T-t))B(t) & (1+r(T-t))B(t) \\ S_1(T) & S_2(T) & S_3(T) \\ C_1(T) & C_2(T) & C_3(T) \end{bmatrix}$$

S_t é o vetor de preços dos ativos: $B(t)$ é o preço do título livre de risco, $S(t)$ é o preço do ativo-objeto e $C(t)$ é o preço da opção de compra. Todos os preços no instante t .

Z_T é a matriz de retornos no instante T dos três ativos considerando os três estados possíveis da economia.

A não existência da possibilidade de arbitragem pressupõe que exista $\psi > 0$. Para ser simplificado o problema, como a quantidade de ativos comprados ou vendidos é uma decisão do investidor, seja definido o preço do título livre de risco $B(t)=1$, de forma que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r(T-t) & 1+r(T-t) & 1+r(T-t) \\ S_1(T) & S_2(T) & S_2(T) \\ C_1(T) & C_2(T) & C_3(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha da matriz de retornos pelo vetor ψ , obter-se-á:

$$1 = (1+r(T-t))\psi_1 + (1+r(T-t))\psi_2 + (1+r(T-t))\psi_3$$

Defina-se:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1+r(T-t))\psi_1 \\ Q_2 &= (1+r(T-t))\psi_2 \\ Q_3 &= (1+r(T-t))\psi_3 \end{aligned}$$

Como se tem $\psi > 0$, tem-se que $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$. Como Q_i 's são números positivos e a soma desses números é 1, eles podem ser interpretados como probabilidades associadas com os três estados possíveis da economia no instante T . A esperança do preço dos ativos calculados no instante T será:

$$\begin{aligned} E[S(T)] &= S_1(T)\psi_1 + S_2(T)\psi_2 + S_3(T)\psi_3 \\ E[C(T)] &= C_1(T)\psi_1 + C_2(T)\psi_2 + C_3(T)\psi_3 \end{aligned}$$

Em virtude de termos dois ativos e três estados possíveis, nitidamente não existirá uma solução única para a obtenção do preço dos ativos. Nesse caso, portanto, não existe uma única medida de martingale neutralizadora do risco, ou seja, o método anterior para a determinação de um preço do ativo não é possível, caracterizando um mercado incompleto.

2.5.6 Os diferentes tipos de *hedge* de opções

Wilmott (2000) considera como *hedge* a tentativa de reduzir o risco no mercado financeiro através das relações e das correlações existentes entre os diversos investimentos sujeitos a risco. De maneira geral, pode-se dizer que um *portfolio* está protegido ou *hedged* em relação a um determinado risco se o valor do *portfolio* não apresentar sensibilidade em relação a esse risco.

Seja c um *portfolio* ou ativo com risco, pode-se formar um novo *portfolio* comprando ou vendendo outros ativos no mercado financeiro:

$$\Pi = c + \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_n S_n$$

Pode-se escolher as quantidades $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de maneira que se elimine o risco existente nesse *portfolio*. O lema de Itô possui a informação da sensibilidade desse *portfolio*, indicando a quantidade de risco existente no instante dt .

Pode-se exemplificar o conceito anterior, através de um *portfolio* composto basicamente por uma posição comprada em opção de compra (*call*), no qual se deseja eliminar o risco decorrente da variação do preço do ativo-objeto. Sejam:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \text{ a dinâmica do processo do ativo-objeto;}$$

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial c}{\partial S} dz, \text{ a dinâmica do processo da opção;}$$

$$\Pi = c + \alpha S, \text{ o } \textit{portfolio};$$

$$d\Pi = dc + \alpha dS, \text{ a variação do } \textit{portfólio}.$$

Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial c}{\partial S} dz + \alpha (\mu S dt + \sigma S dz) \\
 &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \mu S \alpha \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial c}{\partial S} + \alpha \sigma S \right) dz .
 \end{aligned}$$

Para ser eliminado o risco, tem-se que:

$$\left(\sigma S \frac{\partial c}{\partial S} + \alpha \sigma S \right) = 0, \text{ ou seja, } \alpha = -\frac{\partial c}{\partial S}$$

Dado que o

Para neutralizar-se o risco de ΔS e $(\Delta S)^2$, tem-se que:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial c}{\partial S} + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial c^{(2)}}{\partial S} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial S^2} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{Logo,} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \div \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial S^2} \right) \times \frac{\partial c^{(2)}}{\partial S} - \frac{\partial c}{\partial S} \\ \alpha_2 = - \left(\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \div \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial S^2} \right) \end{cases}$$

Dessa forma, o conceito das “gregas” está relacionado à sensibilidade do *portfolio* em relação a variação dos diversos parâmetros do modelo $c(S, \sigma, r, t)$:

$$\Delta c = \underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}_{\text{teta}} \Delta t + \underbrace{\frac{\partial c}{\partial S}}_{\text{delta}} \Delta S + \underbrace{\frac{\partial c}{\partial \sigma}}_{\text{vega}} \Delta \sigma + \underbrace{\frac{\partial c}{\partial r}}_{\text{rô}} \Delta r + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}}_{\text{gama}} (\Delta S)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots$$

Chama-se de proteção pelo delta a eliminação de todo o risco existente no preço da opção em decorrência das variações de preço do ativo-objeto. Esse é um exemplo de *hedge* dinâmico, devendo ser monitorado constantemente e freqüentemente ajustado através da compra ou venda do ativo-objeto. Em virtude dos constantes ajustes, perdas de resultado no *portfolio* ocorrem em virtude dos custos de transação, o que pode ser considerável em alguns mercados.

O delta (Δ) está estreitamente relacionado com a análise de Black-Scholes, na qual demonstrou que é possível estabelecer uma carteira sem riscos, composta de uma posição num derivativo e de uma posição no ativo-objeto, ou seja, o modelo de Black-Scholes avalia opções através de uma tomada de posição com delta neutro, argumentando que seu retorno ao longo do tempo deve ser a taxa de juros livre de risco.

O gama (Γ) é a taxa de variação do delta em relação ao preço do ativo-objeto. Se o gama for pequeno, a variação do delta ocorrerá mais lentamente e os ajustes para mantê-lo neutralizado podem ser feitos com freqüência relativamente esparsa. No entanto, se o delta for grande em termos absolutos, o delta será altamente sensível em relação ao ativo-objeto. Para reduzir a freqüência e o volume de compras e vendas decorrentes da estratégia de proteção pelo delta, a técnica da proteção pelo gama Γ é freqüentemente utilizada. A maneira utilizada para mudar o gama de um *portfolio* é através de uma posição numa opção negociada.

Suponha-se que um *portfolio* com delta neutralizado tenha gama igual a Γ_C e que uma opção negociada tenha gama Γ_N . Se o número de opções negociadas for w_N , o novo gama do *portfolio* será:

$$\Gamma = \Gamma_C + w_N \Gamma_N.$$

Portanto, em uma estratégia gama neutralizadora, tem-se que ter, neste caso, $w_N = -\frac{\Gamma_C}{\Gamma_N}$. Naturalmente, a inclusão da opção negociada altera o delta do *portfolio*, de maneira que o delta deve ser novamente ajustado para ficar neutralizado, ou seja, a estratégia gama neutro tem efeito apenas instantâneo, devendo, portanto, a quantidade de opções negociadas sofrer ajustes freqüentes de maneira que a relação $w_N = -\frac{\Gamma_C}{\Gamma_N}$ seja mantida.

Haug (2007) afirma que existe uma série de problemas relacionados com a tradicional definição de gama (Γ), sendo uma melhor medida se forem observadas mudanças percentuais no delta em relação a mudanças percentuais no preço do ativo-objeto. Esse gama é conhecido pelos operadores de mercado como gama percentual:

$$\Gamma_P = \frac{S\Gamma}{100} = \frac{\phi(d_1)}{100\sigma\sqrt{T-t}}.$$

O teta (Θ) de um *portfolio* de derivativos é a taxa de variação de seu valor ao longo do tempo, com todo o resto permanecendo constante. Ele também é conhecido com perda de valor no tempo (*time decay*) do *portfolio*. O teta de uma opção é quase sempre negativo, pois com a diminuição da maturidade, a opção tende a ter menos valor. Exceções à regra podem ser uma opção européia de venda de uma ação sem dividendos e uma opção européia de moeda com taxa de juros muito alta.

O teta não é considerado uma estratégia de *hedge*, pois não existe incerteza com relação à passagem do tempo. Se o teta for grande em termos absolutos, ou o delta ou o gama serão altos. No caso de termos delta e gama próximo de zero, poderemos observar que o teta indicará que o *portfolio* irá variar segundo a taxa de juros livre de risco.

O vega (ν) e o rho (ρ) estão relacionados à sensibilidade do *portfolio* em relação a parâmetros que à princípio são constantes na fórmula de Black-Scholes: a volatilidade e a taxa de juros livre de risco. Na prática, porém ambos os parâmetros variam ao longo do tempo e em relação ao próprio preço do ativo no caso da volatilidade. O cálculo do vega a partir da fórmula de precificação de Black-Scholes é uma aproximação, isso porque um dos pressupostos do modelo é de que a volatilidade seja constante. O vega de um *portfolio* pode ser alterado com a inclusão de uma posição em uma opção negociada, ou seja, uma posição

$$w_N = -\frac{\nu_C}{\nu_N} \text{ na opção negociada tornara o vega instantaneamente nulo.}$$

A equação diferencial parcial de Black-Scholes pode ser reescrita em termos das “gregas”, estabelecendo uma relação entre delta, teta e gama:

$$\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \Gamma + r S_t \Delta - r F(S, t) = 0.$$

Em um *portfolio* com estratégia de *hedge* delta neutralizadora, tem-se:

$$\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \Gamma = r F(S, t).$$

Isso demonstra que, quando o teta é grande e positivo, o gama é grande e negativo. Os operadores de mercado costumam, na ausência do gama, utilizar o teta em virtude dessa associação. Além disso, pode-se constatar a afirmação anterior de que, em uma estratégia de *hedge* delta e gama neutralizados, o teta indicará que o *portfolio* irá evoluir à taxa de juros livre de risco.

Tabela 5 – As fórmulas das gregas do modelo de Black-Scholes

“Gregas”	Opção europeia simples e ordinária de compra	Opção europeia simples e ordinária de venda
Delta	$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1)$ $\Delta \in [0;1]$	$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = \Phi(d_1) - 1$ $\Delta \in [-1;0]$
Gama	$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$ $\Gamma \in \mathbb{R}^+$	
Teta	$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} \\ -rK \exp(-r(T-t))\Phi(d_2) \end{array} \right\}$ $\Theta \in \mathbb{R}^-$	$\Theta = \frac{\partial p}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} \\ +rK \exp(-r(T-t))\Phi(-d_2) \end{array} \right\}$ $\Theta \in \mathbb{R}^-$
Vega	$\nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\phi(d_1)$ $\nu \in \mathbb{R}^+$	
Rho	$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} = K(T-t)\exp(-r(T-t))\Phi(d_2)$ $\rho \in \mathbb{R}^+$	$\rho = \frac{\partial p}{\partial r} = -K(T-t)\exp(-r(T-t))\Phi(-d_2)$ $\rho \in \mathbb{R}^-$

Nas fórmulas da tabela anterior, tem-se que:

S, r, σ e K são, respectivamente, o preço atual do ativo-objeto, a taxa de juros livre de risco, a volatilidade e o preço de exercício da opção;

$\Phi(\cdot)$ é a função acumulada de probabilidade da distribuição normal padrão;

$\phi(\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão;

$$d_1 = \frac{\ln(S \div K) + (r + \sigma^2 \div 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}.$$

2.5.7 As abordagens existentes para *hedge* de opções em mercados incompletos

Segundo Cont e Tankov (2004), enquanto a ausência de arbitragem é uma importante e bastante razoável propriedade para ser assumida no mercado financeiro, a existência de um mercado completo é financeiramente pouco realista e uma teoria pouco robusta. A simples adição de riscos de saltos, mesmo que pequenos, invalida a condição de mercado completo. O grau de incompletude é mais alto em modelos com difusão e saltos do que em modelos com volatilidade estocástica. Enquanto em modelos com volatilidade estocástica, o mercado pode ser completo com a introdução de uma ou mais opções no *portfolio* replicante, o modelo de difusão e saltos exige uma quantidade infinita de opções em virtude da possibilidade de saltos com infinitas amplitudes.

Em um mercado completo, existe uma maneira única de precificar uma opção: esse preço é equivalente ao preço do *portfolio* replicante da opção, sendo este único. No mercado financeiro, *hedge* perfeito não existe e as opções não podem ser totalmente replicadas em *portfolio*. Não somente porque negociações em tempo contínuo e custos inexistentes de transação são impossíveis, mas porque existem riscos que não podem ser eliminados completamente. Portanto, o que deve ser feito é reavaliar o *hedge* de uma maneira mais realista, mensurando o risco e tentando minimizá-lo.

Algumas abordagens podem ser empregadas para precificação e *hedge* em mercados incompletos.

Merton (1976) propõe que seja ignorado o pagamento de prêmio em virtude da existência de saltos, argumentando que o risco dos saltos é diversificável, o que não é uma hipótese plausível. Em situações de grandes instabilidades de mercado, como, e.g., as grandes quedas em mercado de Bolsa, mesmo *portfolio* bastante diversificados de mercado como os

que representam a composição de índices de mercado (S&P500 e IBOVESPA) apresenta saltos significativos. Nessas situações, não se constata possibilidade de *hedge* através da diversificação de *portfolio*. Na situação acima, o *portfolio* está sendo protegido apenas da incerteza proveniente do MBG considerando de forma determinística a componente de saltos.

Outra abordagem para mercados incompletos é o chamado *superhedge* no qual, em uma abordagem conservadora, utilizando o pior cenário possível de perda, o *portfolio* é protegido de forma que em qualquer estado da economia, irá ocorrer uma saída positiva de caixa no *portfolio*. Essa abordagem, não assume como pressuposto do modelo que a estratégia é autofinanciável. Um exemplo de *superhedge* é a compra de ativo-objeto não financiada através de títulos à taxa livre de risco para se proteger de um possível exercício de uma posição vendida em opção de compra.

Uma abordagem mais flexível o para tratamento da questão do *hedge* em mercados incompletos é a utilização da tradicional teoria da maximização de uma função utilidade. Conforme a afirmação de Rebonato (2004), após a calibração de um modelo não é possível afirmar que sejam razoáveis os parâmetros ajustados do modelo escolhido, basicamente com referência à frequência ou à amplitude dos saltos. Uma forma de verificar se os parâmetros obtidos na calibração são razoáveis é verificar se eles são coerentes com o pensamento econômico do agente. Lewis (2002), utilizando um pensamento de um agente com aversão a risco, apresenta uma fórmula para o ajuste dos parâmetros para neutralização do risco de um modelo com saltos. A formalização da idéia é feita através da utilidade esperada, na qual um agente econômico, em um cenário de incerteza, tomará uma decisão através do critério:

$$\max_Z E^P [U(Z)]$$

em que:

$U : R \rightarrow R$ é uma função côncava e crescente chamada função utilidade do agente. A concavidade de U está relacionada à aversão a risco do agente.

P é uma distribuição de probabilidade que descreve a ocorrência de eventos futuros.

Lewis (2002) argumenta que a razoabilidade do modelo e dos parâmetros do salto podem ser determinadas pela maximização da utilidade esperada pelo agente. A função de

utilidade usada possui a seguinte forma $U(W) = W^\gamma$. No caso de γ igual a 1, tem-se um agente indiferente ao risco. No caso de γ menor que 1, tem-se uma função côncava descrevendo um comportamento de aversão ao risco por parte do agente. Para que fosse positiva, Lewis escreveu a amplitude do salto da seguinte forma:

$$Y \equiv e^x.$$

Seja $p(x)$ a FDP da amplitude do salto no mundo real, pode-se dizer que um investidor com aversão ao risco deveria precificar opções como se fosse neutro ao risco, porém a frequência do salto deveria ser alterada de λ para λ_γ , sendo que:

$$\lambda_\gamma = \lambda \int p(x) e^{(\gamma-1)x} dx.$$

A FDP da amplitude do salto também deveria ser alterada de $p(x)$ para $q(x)$:

$$q(x) = \frac{p(x) e^{(\gamma-1)x}}{\int p(x) e^{(\gamma-1)x} dx}.$$

As equações acima estabelecem uma relação através do parâmetro γ do grau de aversão ao risco com a amplitude e a frequência do salto. Através dessas relações é possível avaliar a razoabilidade dos parâmetros ajustados e estabelecer valores limites para esses parâmetros, estabelecendo, por exemplo, as condições $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$. A análise qualitativa proporcionada pelo uso dessas relações pode ser muito útil em virtude dos métodos numéricos de otimização baseado em múltiplos parâmetros poderem gerar uma grande quantidade de soluções com resultados muito similares, ou seja, essa abordagem sugerida por Lewis (2002) pode ser utilizada como uma estratégia para regularização da otimização dos parâmetros, produzindo um conjunto de resultados estáveis e plausíveis.

Segundo Cont e Tankov (2004), apesar de teoricamente ser bastante consistente, a precificação e o *hedge* utilizando funções de utilidade requer que sejam conhecidos tanto U quanto P . Na prática, a determinação de uma função de utilidade é totalmente subjetiva, não sendo consistente com as necessidades do mercado financeiro. Com relação a P , que descreve a ocorrência de eventos futuros, esse necessita que estatisticamente seja modelado o movimento de todos os relevantes ativos financeiros até o vencimento da opção.

Outra abordagem utilizada para a precificação em mercados incompletos é a utilização de uma medida de martingale equivalente otimizada. Pelo teorema fundamental da precificação de ativos, a escolha de um método de precificação livre de arbitragem corresponde à escolha de uma medida de martingale de mínima entropia $Q \sim P$. Segundo Cont e Tankov (2004), como o preço determinado por essa abordagem não é um produto resultante de uma estratégia de *hedge*, o significado econômico dos preços obtidos por essa abordagem é pouco claro para o mercado.

2.5.8 *Hedge em processos com difusão e saltos*

Sabe-se que em processos com difusão e saltos existem duas fontes de incerteza: a oriunda do MBG e a relacionada à amplitude do salto. É claro que, devido à quantidade de estados possíveis da economia, realizar o *hedge* com apenas o ativo-objeto e um título não é suficiente.

Rebonato (2004) e Andersen & Andreasen (2000) ponderam que o *hedge* em processos com saltos é mais complexo que em modelos com volatilidade estocástica e mesmo introduzindo-se no *portfolio* replicante outras opções, isso não é suficiente para se neutralizar completamente o risco. Apesar deste fato, ele propõe que na presença de saltos, se utilize uma estratégia de *hedge* em que seja adicionada uma quantidade gama (γ) de pelo menos uma segunda opção simples (h) ao *portfolio*:

$$\Pi_t = \alpha S_t + \beta B_t + \gamma h_t + c_t$$

em que:

α é a quantidade de ativo-objeto;

β é a quantidade de título;

γ é a quantidade da segunda opção.

Manipulando o *portfolio* de forma que o mesmo possa ter um comportamento “determinístico”, obteve-se o seguinte resultado:

$$\alpha = -\frac{\partial c}{\partial S} - \gamma \frac{\partial h}{\partial S};$$

$$\gamma = -\frac{\left(\frac{\partial c}{\partial S} - \frac{(c(JS) - c(S))}{(JY - S)}\right)}{\left(\frac{\partial h}{\partial S} - \frac{(h(JS) - h(S))}{(SJ - S)}\right)}.$$

Nesta equação, J representa a mudança percentual no preço do ativo-objeto, sendo que valores de J menores que 1 e maiores que 0 representam saltos para baixo no preço e valores de J maiores que 1, saltos para cima no preço.

Utilizando-se a esperança da amplitude do salto, $E[J] = J_0$, e considerando-se que este é o único valor possível para o salto, tem-se que:

$$\gamma = -\frac{\left(\frac{\partial c}{\partial S} - \frac{(c(J_0S) - c(S))}{(J_0S - S)}\right)}{\left(\frac{\partial h}{\partial S} - \frac{(h(J_0S) - h(S))}{(J_0S - S)}\right)}.$$

Tomando-se o pensamento acima e considerando que a distribuição de probabilidade da amplitude do salto é contínua, podendo assumir infinitos valores, tem-se que ter um número infinito de opções adicionais para ser realizado o *hedge* perfeito do *portfolio*.

Rebonato (2004) pondera que o número de diferentes opções simples necessárias para realizar o *hedge* perfeito considerando todas as possíveis amplitudes de J são incontáveis, portanto, o *hedge* de processos com saltos seria um desafio sem esperança. O que minimiza a questão é o fato de que se escolhendo um número significativo de possíveis amplitudes e opções para *hedge*, pode-se obter uma razoável, ainda que imperfeita, proteção ao risco do *portfolio*.

3 AVALIAÇÃO DO MODELO DE KOU

3.1 O PROCESSO DO LOG-RETORNO DIÁRIO: TESTE DE HIPÓTESE IID

Os modelos de médias móveis de volatilidade supõem que os log-retornos dos ativos sejam independentes e identicamente distribuídos. Em qualquer método de média móvel ponderada, não é feita a suposição de uma volatilidade que varia no tempo. Eles apenas fornecem uma estimativa da esperança da volatilidade não-condicionada, sendo a estimativa corrente tomada como uma previsão. Entretanto, os retornos em muitos mercados financeiros não são bem modelados por um processo independente e identicamente distribuído. Em frequências muito altas, como no caso de observações efetuadas durante os pregões de negociação e mesmo diárias, podem apresentar log-retornos autocorrelacionados, não sendo, portanto, independentes. A autocorrelação positiva dos log-retornos ao quadrado indica que a volatilidade do mercado financeiro se apresenta em agrupamentos em que períodos tranquilos de pequenos retornos são intercalados por períodos voláteis de grandes retornos: este fenômeno é chamado de heterocedasticidade condicionada auto-regressiva.

O teste BDS (Brock, Dechert e Scheinkman, 1996) é adequado para investigar desvios da hipótese nula de independência e distribuição idêntica, tais como não-estacionariedade, não-linearidade e caos determinístico. A estatística de teste BDS é baseada na integral de correlação entre dois vetores de séries temporais, definida através da seguinte expressão:

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T-m)(T-m+1)} \sum_{i,j=1}^T I\left((x_i^m - x_j^m) < \varepsilon\right) \quad i \neq j$$

em que:

T é o tamanho da série;

$x_t^m = (x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+m-1})$;

$I(\cdot)$ é a função indicadora.

Os autores mostraram que, sob a hipótese nula de observações IID, $C_m(\varepsilon) = (C_1(\varepsilon))^m$.

A partir desse resultado, define-se a estatística de teste BDS:

$$BDS_m(\varepsilon) = \sqrt{T} \frac{(C_m(\varepsilon) - (C_1(\varepsilon))^m)}{\sqrt{V_m}}$$

em que V_m é a expressão da variância, cuja fórmula pode ser encontrada em Cromwell e outros (1994). É possível mostrar que, sob a hipótese de IID, essa estatística tem distribuição assintótica normal padrão.

Essa aproximação é adequada desde que $\frac{T}{m} > 200$. Brock, Hsieh e Le Baron (1991) recomendam usar ε entre meia e duas vezes o desvio-padrão da série, e o parâmetro dimensional m , entre 2 e 10.

Os resultados da aplicação do teste BDS do *EViews 5.0* aos log-retornos diários da ação PETR4 da Petrobrás para o período de 04 de janeiro de 2004 até 19 de outubro de 2006, mostram que os valores descritivos do teste usando *bootstrap* são todos significantes ao nível de 1%, sendo que bastaria um ser significativo para a hipótese nula ser rejeitada, conclui-se que o processo não é estatisticamente IID. O teste BDS utilizando-se log-retornos semanais e mensais apresentam *p-values* do *bootstrap* não todos significantes ao nível de 1%, sendo que bastaria um ser significativo para a hipótese nula ser rejeitada, conclui-se que o processo é estatisticamente IID. Portanto, para o processo diário resta a dúvida se não é independente, se não é identicamente distribuído ou se não é ambos.

3.1.1 A assimetria e a leptocurtose do log-retorno do ativo

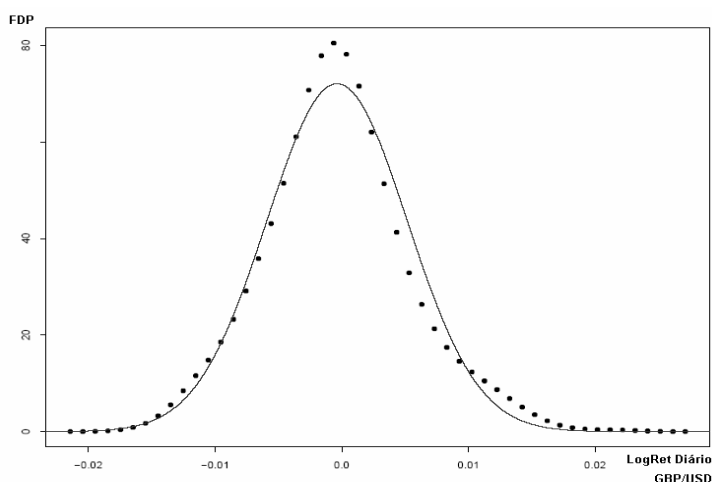
A caracterização das distribuições de maneira não-condicionada dos log-retornos diários dos ativos é uma preocupação já antiga na literatura acadêmica. Hull e White (1998) e Bonomo e Garcia (2001) evidenciam que séries financeiras históricas de log-retorno diárias não apresentam normalidade nos mercados de moeda e de ações brasileiros, respectivamente. Como previamente documentado, Kendall (1953), Mandelbrot (1963) e Fama (1965) afirmaram que a suposição de normalidade é pouco realista, à medida que os retornos das séries financeiras apresentam assimetria e excesso de curtoses estatisticamente significantes em suas distribuições. Jorion (1988), em seus estudos, constatou que, apesar da leptocurtose poder ser explicada por um modelo ARCH de difusão com segundo momento variável no

tempo, modelos com difusão e saltos são mais apropriados para modelar a distribuição dos log-retornos no mercado de câmbio.

Papapantoleon (2002) apresenta como evidências empíricas da existência de saltos a série histórica financeira da taxa de câmbio entre o Dólar americano e o Yen no período de abril de 1998 a abril de 1999 e o respectivo sorriso de volatilidade gerado pelo modelo de Black-Scholes-Merton.

Papapantoleon (2006) apresenta como exemplo de não-ajuste à distribuição normal a distribuição empírica dos log-retornos diários da taxa de câmbio entre o Euro e o Dólar americano.

Gráfico 23 - Exemplo do não ajuste dos log-retornos diários à distribuição normal (Papapantoleon, 2006)



Analisaram-se os log-retornos a partir do preço de fechamento da ação PETR4 da Petrobras para o período de 04 de janeiro de 2004 até 19 de outubro de 2006, totalizando 697 observações diárias, 147 observações semanais e 34 observações mensais.

Gráfico 24 - Evolução do preço diário de fechamento da PETR4 (Bovespa)

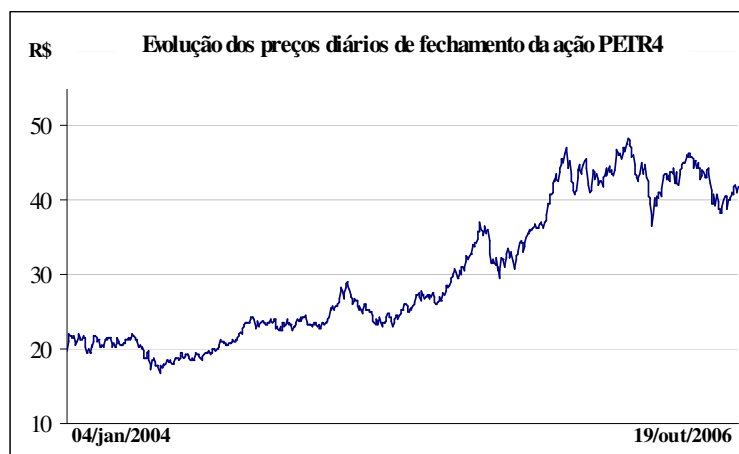
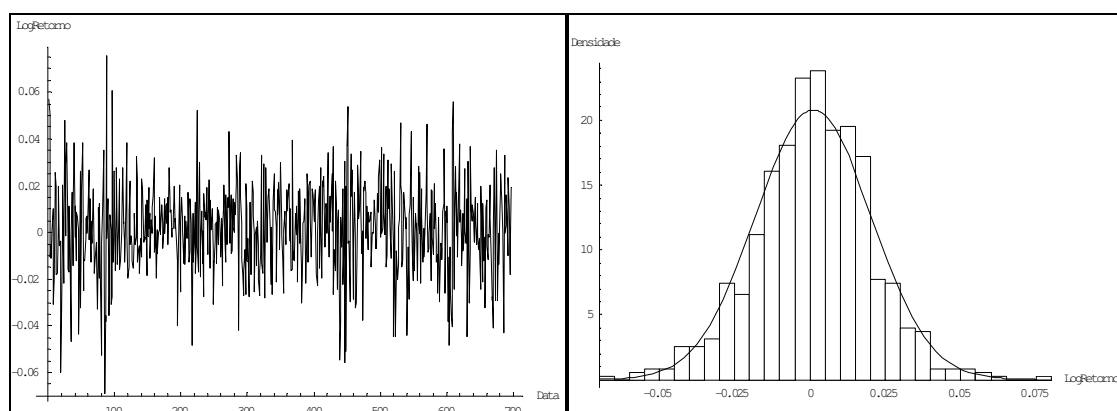


Gráfico 25 - Distribuição dos log-retornos diários e ajuste do histograma à distribuição normal equivalente



As características observadas nessa amostra são plausíveis com a hipótese de não-normalidade e leptocurtose. Observa-se, na figura acima, que a curva da distribuição normal subestima a proporção de valores nas caudas e em torno da média, principalmente na cauda esquerda, observando que os pontos das caudas são os mais distantes da reta que caracteriza a distribuição normal.

Realizou-se o teste da hipótese da distribuição não-condicionada do log-retorno ser normal usando o teste Jarque-Bera do *EViews 5*. Como o processo gerador de dados do log-retorno diário é estatisticamente não-IID, o teste Jarque-Bera não se aplica. No caso dos log-retornos semanais e mensais, como o *p-value* foi maior do que 1%, a hipótese IID é estatisticamente válida. Pode-se, então, neste caso, aplicar o teste Jarque-Bera e concluiu-se

pelos seus resultados que a distribuição dos log-retornos semanais não é estatisticamente normal e a distribuição dos log-retornos mensais é estatisticamente normal.

3.2 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO DO PROCESSO COM SALTOS

3.2.1 Modelagem da simulação de Monte Carlo para o modelo de Kou

- Dinâmica do preço utilizado na simulação:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta \right) (t + \Delta t) + \sigma \sqrt{(t + \Delta t)} Z + \sum_{i=1}^{N(t + \Delta t)} J_i \right)$$

em que:

r é a taxa de juros livre de risco no período $T = 1$;

σ é desvio-padrão do log-retorno do ativo no período $T = 1$;

ζ é esperança da amplitude do salto menos um $\left(\zeta = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 - 1} - 1 \right)$;

Z é variável estocástica com distribuição $N(0,1)$;

$N(t)$ é o estado do processo de Poisson com intensidade λ ;

$\{Y_i\}$ é uma sequência IID de variáveis aleatórias com distribuição duplamente exponencial com e função de densidade $f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$.

- Foram coletadas 100 amostras de preços obtidos através da simulação de 1.000 trajetórias de preço, sendo cada trajetória um processo com 100 passos $\left(\Delta t = \frac{T}{100} \right)$.
- Foi utilizado o comando *SeedRandom* do *Mathematica 5.2* para permitir reprodução dos resultados obtidos.

3.2.1.1 Simulação 1 – Modelo de Kou sem ocorrência de saltos (modelo de BSM)

a) Parâmetros utilizados

$S_0 = 100$, $K = 98$, $T = 0.5$, $t = 0$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.16$ e $\lambda = 0$ (sem saltos)

b) Preços utilizando fórmulas analíticas

Preço pela Fórmula de BS - Call Européia = 6.96828

Preço pela Fórmula de Kou - Call Européia = 6.96828

c) Simulação *Mathematica 5.2*

$$C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \dots, C_0^{(100)}$$

$$E[C_0] = 6.908$$

$$V[C_0] = 0.0836$$

Intervalo de Confiança - 90%

6.48424 a 7.41647

3.2.1.2 Simulação 2 – Ocorrência de saltos com intensidade igual a um

a) Parâmetros utilizados

$$S_0 = 100, K = 98, T = 0.5, t = 0, r = 0.05, \sigma = 0.16, \lambda = 1, p = 0.4, \eta_1 = 10 \text{ e } \eta_2 = 5$$

b) Preços utilizando fórmulas analíticas

Preço pela Fórmula de Kou - Call Européia = 9.14732

c) Simulação *Mathematica 5.2*

$$C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \dots, C_0^{(100)}$$

$$E[C_0] = 9.15076$$

$$V[C_0] = 0.1730$$

Intervalo Confiança - 90%

8.60808 a 9.84851

3.2.1.3 Simulação 3 – Ocorrência de saltos com intensidade igual a quatro

a) Parâmetros utilizados

$$S_0 = 110, K = 98, T = 0.5, t = 0, r = 0.05, \sigma = 0.16, \lambda = 4, p = 0.3, \eta_1 = 4 \text{ e } \eta_2 = 2$$

b) Preços utilizando fórmulas analíticas

Preço pela Fórmula de Kou - Call Européia = 34.9898

c) Simulação *Mathematica* 5.2

$$C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \dots, C_0^{(100)}$$

$$E[C_0] = 35.337683$$

$$V[C_0] = 4.1207$$

Intervalo Confiança - 90%

32.0831 a 38.5554

3.2.1.4 Simulação 4 – Ocorrência exclusiva de saltos para baixo no preço do ativo

a) Parâmetros utilizados.

$$S_0 = 110, K = 98, T = 0.5, t = 0, r = 0.05, \sigma = 0.16, \lambda = 4, p = 0 \text{ e } \eta_2 = 5$$

b) Preços utilizando fórmulas analíticas.

Preço pela Fórmula de Kou - Call Européia = 23.8613

c) Simulação *Mathematica* 5.0

$$C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \dots, C_0^{(100)}$$

$$E[C_0] = 23.856261$$

$$V[C_0] = 0.6786$$

Intervalo Confiança - 90%

22.50238 a 25.49025

3.2.2 Conclusões

Os resultados das simulações da dinâmica de preços com difusão e amplitude de saltos com distribuição assimétrica duplamente exponencial mostraram-se condizentes com os

preços obtidos através da fórmula de Kou, validando a coerência entre o modelo de preços e a fórmula analítica.

Kou, em seu artigo, não foi claro em apresentar a medida neutralizadora de risco do seu modelo. Apesar de citar que foi utilizado um critério de escolha da medida neutralizadora, baseado em função potência ou HARA, as simulações realizadas, nesse trabalho, foram feitas utilizando-se o critério de escolha utilizado por Merton (1976) para mercados incompletos baseado em função utilidade logarítmica, o que sugere uma melhor investigação posterior sobre o assunto.

Na simulação quatro, sob condições de ocorrência exclusiva de saltos para baixo, o preço da opção de compra no modelo de Kou foi superior à do modelo de BSM sujeita aos mesmos parâmetros de difusão. Esse resultado é pouco intuitivo, porém esperado em virtude da neutralização do risco e do aumento da volatilidade.

A constatação de que a fórmula analítica, na hipótese de ausência de saltos, conduz aos mesmos resultados do modelo de BSM é relevante para assegurar a flexibilidade e robustez do modelo. Realizaram-se simulações adicionais analisando o comportamento dos preços obtidos pela fórmula a partir da variação dos parâmetros de intensidade, amplitude e assimetria da distribuição dos saltos e todos os resultados conduzem a valores superiores ou iguais ao preço da opção de compra européia ordinária do modelo de BSM. Esse resultado é coerente com a proposição de Ross e Shanthikumar (2000) de que, se a função do preço do derivativo é convexa em relação ao preço do ativo-objeto, o aumento da volatilidade determinística implica o aumento do preço do derivativo.

3.3 APLICAÇÃO DO MODELO NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO

3.3.1 A aplicação dos modelos de precificação nos preços históricos de opções

Para avaliar-se a validade da aplicação do modelo de Kou no mercado acionário brasileiro, realizou-se uma simulação histórica para analisar-se a capacidade preditiva deste modelo. Além disso, compara-se este desempenho com os seguintes modelos: modelo de volatilidade constante Black-Scholes (*benchmark*), modelo de precificação com volatilidade determinística (Dupire) e modelos de mercado (volatilidade implícita).

Quando se testa um modelo de precificação em tempos passados (*ex post facto*), os resultados obtidos não indicam obviamente que esse desempenho passado seja uma garantia de resultados futuros. Os operadores de mercado utilizam esse tipo de técnica com frequência para validar suas estratégias correntes de negociação assumindo que os dados históricos utilizados foram determinados em uma conjuntura econômica similar com a do momento atual da economia.

3.3.2 A estrutura e o processo de coleta dos dados

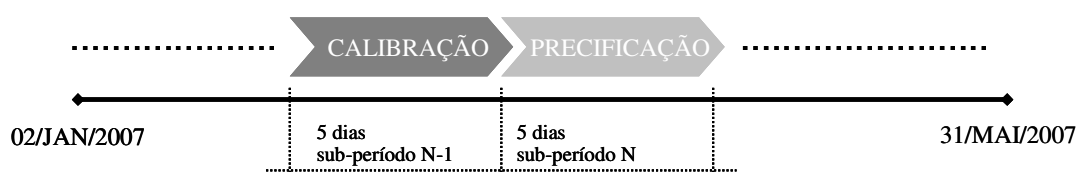
Durante o período de 02/01/2007 a 31/05/2007 foram coletados os preços médios diários da ação e das opções européias de compra da Petrobras e da Vale do Rio Doce negociadas na Bovespa.

Foram desconsiderados da amostra os preços médios das opções com número de negócios diários (quantidade de operações de compra/venda) menores que 5 e preços de opções de compras menores que R\$ 0,10. O objetivo desse filtro foi eliminar ativos pouco negociados e, portanto, com baixa liquidez e ativos considerados muito “baratos” que acabam sendo alvo de especulação pelo mercado.

A simulação histórica para a avaliação da capacidade preditiva dos modelos consistiu na divisão do período de coleta dos dados em sub-períodos de 5 dias. Os dados de mercado de cada um dos sub-períodos foram utilizados para calibrar os parâmetros do modelo para serem usados na previsão de preços do sub-período seguinte.

Na precificação das opções sobre ação, foi desconsiderada a taxa de pagamento de dividendos periódicos (*dividend yield*) para efeito de simplificação em todos os modelos.

Gráfico 26 – Processo de simulação histórica



Nesse período, foram precificadas 1.651 opções de compra da Petrobras (PETR) e 1.941 opções de compra da Vale do Rio Doce (VALE). Os dados da amostra foram classificados segundo o seu nível de *moneyness* e o seu prazo de vencimento, estando distribuídos da seguinte maneira:

VALE	P1	P2	P3	Total	PETR	P1	P2	P3	Total
ITM	414	281	33	728	ITM	267	233	52	552
ATM	275	313	85	673	ATM	207	228	162	597
OTM	130	317	93	540	OTM	70	256	176	502
Total	819	911	211	1,941	Total	544	717	390	1,651

em que:

Moneyiness	$M=K \div (Se^{rt})$	Período	Prazo (dias)
ITM	$M < 0.95$	P1	$P \leq 30$
ATM	$0.95 \leq M \leq 1.05$	P2	$30 < P \leq 60$
OTM	$M > 1.05$	P3	$P > 60$

Para avaliar-se a qualidade preditiva dos modelos, apurou-se o erro quadrático e o erro absoluto relativo de cada opção precificada:

$$\varepsilon_q = (c_i - \hat{c}_i)^2 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ar} = \frac{|c_i - \hat{c}_i|}{c_i},$$

em que:

c_i é o preço de mercado da opção i ;

$\hat{c}_i$ é o preço de calculado pelo modelo para a opção i .

A média e o desvio-padrão dos erros da amostra segundo a sua classificação de *moneyness* e prazo de vencimento foram tomados para análise final dos resultados.

3.3.3 Os modelos de precificação e os processos de calibração utilizados

Foram avaliados no processo de simulação histórica, seis diferentes modelos de precificação:

- Modelo 1: Black-Scholes com volatilidade determinística. Foi utilizado na fórmula de precificação um valor constante de volatilidade para todos os prazos e preços de exercício das opções. A volatilidade utilizada foi apurada através do estimador de média móvel com amortecimento exponencial (EWMA) proposto pela *RiskMetrics* com fator de decaimento $\alpha = 94\%$. A data de cálculo da volatilidade foi a do último dia do sub-período de calibração.
- Modelo 2: Black-Scholes considerando o processo de volatilidade local de Dupire. Fórmula da FDP neutralizada ao risco em termos de volatilidade implícita no processo de difusão (WILMOTT, 2000). A superfície de volatilidade implícita foi aproximada por um polinômio de terceiro grau a partir das volatilidades implícitas obtidas a partir dos preços de mercado no sub-período de calibração.
- Modelo 3: Black-Scholes em termos de uma função de volatilidade obtida pelo método de interpolação linear. O método de interpolação é utilizado pelos operadores de mercado para produzir a matriz de volatilidade do mercado e precificação das opções com aplicação da volatilidade interpolada diretamente na fórmula clássica de precificação. Foi utilizada a função *Interpolation* do *Mathematica 5.2* para determinação da função no sub-período de calibração do modelo. A função *Interpolation* ajusta curvas polinomiais entre sucessivos vértices fornecidos como parâmetro da função, sendo que o grau dos polinômios é determinado pelo parâmetro *InterpolationOrder* com valor predefinido de 3.
- Modelo 4: Black-Scholes em termos de uma função de volatilidade obtida pelo método aproximação polinomial de terceiro grau e usada diretamente na fórmula de Black-Scholes.

- Modelo 5: Fórmula de Kou com volatilidade constante no processo de difusão. A frequência dos saltos (λ) foi estimada no sub-período de calibração minimizando o erro quadrático médio na determinação do preço da opção. Esse erro foi minimizado para 3 níveis de $p = 35\%$, $p = 50\%$ e $p = 65\%$. As esperanças dos saltos para cima e para baixo foram arbitrariamente definidas com $\eta_{1,2} = 20$. A volatilidade constante utilizada corresponde a 70% da volatilidade histórica apurada através do estimador de média móvel com amortecimento exponencial (EWMA) proposto pela *RiskMetrics* com fator de decaimento $\alpha = 94\%$. A mesma volatilidade foi utilizada na calibração dos parâmetros do componente de saltos.
- Modelo 6: Fórmula de Kou com a abordagem de Andersen & Andreasen (2000), adicionando ao processo de saltos uma função de volatilidade determinística para o processo de difusão. A frequência dos saltos (λ) foi estimada no sub-período de calibração minimizando o erro quadrático médio na determinação do preço da opção. Esse erro foi minimizado para 3 níveis de $p = 35\%$, $p = 50\%$ e $p = 65\%$. As esperanças dos saltos para cima e para baixo foram arbitrariamente definidas com $\eta_{1,2} = 20$. Uma superfície da volatilidade implícita do componente MBG do modelo com saltos foi obtida no sub-período de calibração utilizando-se uma aproximação polinomial de terceiro grau e usada diretamente na fórmula de Kou no sub-período de precificação.

3.3.4 Resultados empíricos

Os resultados empíricos apresentados aqui podem ser reproduzidos com os algoritmos implementados no *Mathematica 5.2* disponibilizados nos anexos desta dissertação e com os dados fornecidos pela Bovespa para os dois ativos-objetos estudados.

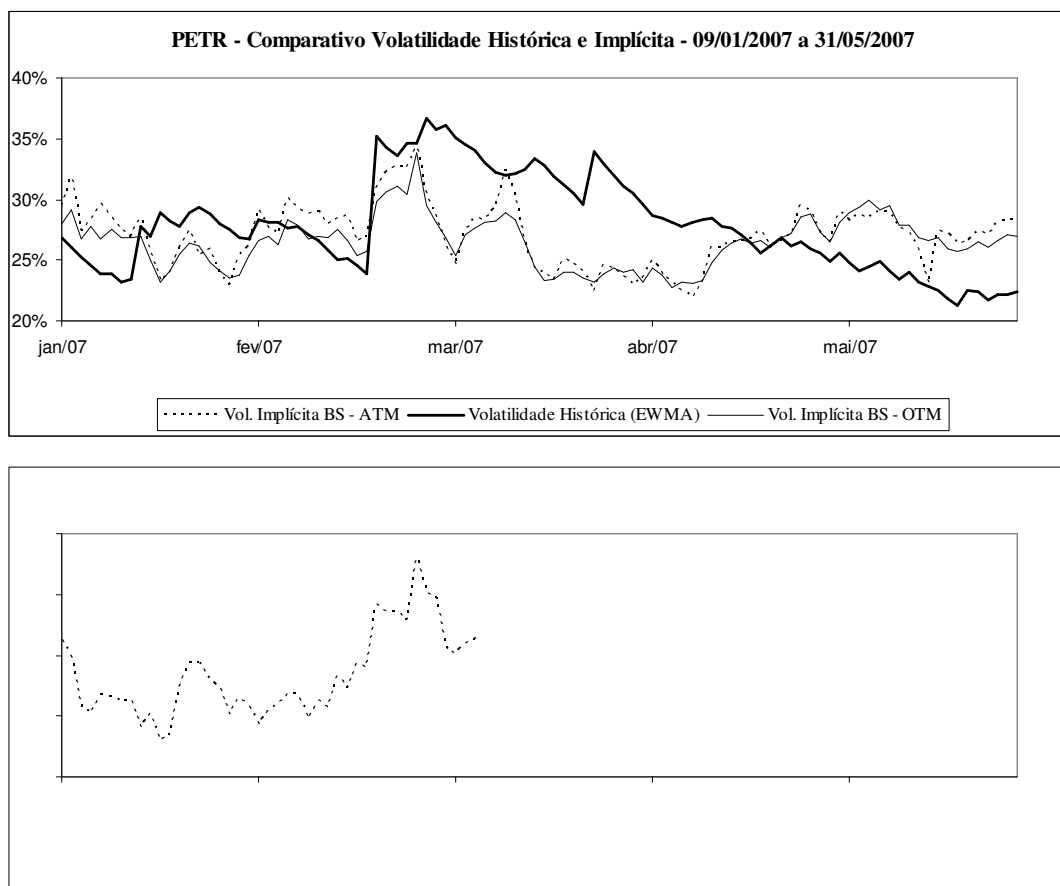
Tabela 6 – Média e desvio-padrão da volatilidade implícita

PETR	P1			P2			P3		
	Média (%)	Desvio-padrão (%)	n	Média (%)	Desvio-padrão (%)	n	Média (%)	Desvio-padrão (%)	n
ITM	42.81%	25.91%	267	29.25%	5.75%	233	28.47%	5.90%	52
ATM	26.77%	3.88%	207	27.45%	2.44%	228	26.60%	2.35%	162
OTM	27.50%	2.21%	70	26.73%	2.21%	256	26.28%	2.39%	176

VALE	P1			P2			P3		
	Média (%)	Desvio-padrão (%)	n	Média (%)	Desvio-padrão (%)	n	Média (%)	Desvio-padrão (%)	n
ITM	48.31%	31.12%	414	28.23%	5.92%	281	28.80%	6.88%	33
ATM	27.97%	4.13%	275	27.66%	2.81%	313	26.35%	2.61%	85
OTM	28.99%	3.39%	130	27.53%	2.89%	317	26.28%	3.07%	93

Pelos resultados anteriores, observa-se que o sorriso de volatilidade se apresenta de maneira mais pronunciada nas opções com prazos menores de maturidade. O sorriso possui uma tendência de ser mais *flat* nas opções com maturidade mais elevada. Além disso, constata-se que as volatilidades das opções de compra ITM apresentam, consistentemente, maior desvio-padrão (volatilidade da volatilidade) do que as opções de compra ATM. Esses comportamentos estão condizentes com as expectativas do mercado relacionados à maior instabilidade da volatilidade implícita em relação ao prazo e ao grau de *moneyness*.

Gráfico 27 – Volatilidade histórica e volatilidade implícita Black-Scholes



Pode-se constatar, nos gráficos, uma alternância de dominância entre as curvas de volatilidade histórica e implícita, sendo esse um padrão que pode sugerir uma de tendência de reversão das expectativas dos investidores em relação ao comportamento da volatilidade futura. Apesar da alternância entre as curvas, o teste de correlação não indicou significância na suposta correlação negativa entre as variáveis, devendo ser um comportamento determinado por fatos históricos específicos. Entre os meses de fevereiro e março, o mercado financeiro mundial ficou instável devido às quedas do índice da principal Bolsa da China, elevando contingencialmente a volatilidade do mercado.

A simulação histórica dos modelos de precificação de opções apresentou, de maneira geral, um desempenho preditivo superior dos modelos de Kou para as opções VALE e PETR no período da simulação, tanto utilizando o critério do erro quadrático médio no critério de erro quadrático médio (modelo 5) quanto se utilizando o critério do erro absoluto relativo (modelo 6).

Como era esperado, o modelo clássico de Black-Scholes (modelo 1) com o pressuposto de volatilidade constante, mesmo utilizando-se uma metodologia de volatilidade histórica EWMA que pondera as variações mais recentes com maior peso, foi o modelo em geral com o pior desempenho.

Os modelos 2 e 3 para as opções PETR apresentaram performance superior somente em relação ao modelo 1. Acredita-se que esses resultados confirmam as conclusões de Dumas *et al.* (1998) de que modelos mais parcimoniosos não sofrem os vieses de excesso de ajustes proporcionados pela interpolação de dados e a perda de informação decorrente do uso dos modelos de volatilidade local, ou seja, quanto mais simples, melhor.

O modelo 2 para as opções VALE apresentou erros quadráticos e absolutos relativos muito acima dos demais modelos. O mesmo não se observou para a simulação da opção PETR. A análise dos dados revelou a existência de um problema numérico na determinação dos limites superior e inferior da integral da FDP que deve ser igual a 1, sendo essa uma situação necessária para a precificação do modelo. Estes pontos conjugados de mínimo superior e inferior na FDP para a VALE não se mostraram tão pronunciados quanto os da PETR, determinando uma maior imprecisão do modelo.

Pode-se observar um aumento significativo no erro de precificação no período 3 (P3) para as opções ITM e ATM pelo modelo 3 que utiliza um modelo de volatilidade local, uma suposição é de que o fato esteja relacionado à constatação de Andersen e Andreasen (2000) de que os erros desse modelo decorrem do fato de que eles determinam que o sorriso de volatilidade irá desaparecer no futuro. Andersen e Andreasen argumentam que o sorriso de volatilidade é estacionário no tempo.

Tabela 7 – Resultado da simulação histórica dos modelos de precificação

Ativo	Modelo	EQM	DPEQM	EARM	DPEARM
PETR	5	0.0252	13.60%	10.67%	15.47%
	4	0.0259	13.81%	10.24%	13.95%
	6	0.0271	14.30%	10.13%	13.42%
	2	0.0319	18.66%	10.47%	13.85%
	3	0.0438	25.27%	10.67%	15.45%
	1	0.0696	16.13%	23.95%	40.13%
VALE	5	0.0479	12.40%	12.29%	21.66%
	4	0.0553	19.18%	10.84%	16.76%
	6	0.0566	18.53%	10.79%	16.37%
	3	0.1048	65.90%	12.42%	20.91%
	1	0.2825	56.02%	37.77%	76.46%
	2	0.8835	255.33%	28.28%	31.22%

Ativo	Money	Modelo	Prazo Maturidade menor ou igual a 30 dias				Prazo Maturidade de 30 a 60 dias				Prazo Maturidade acima de 60 dias			
			EQM	DPEQM	EARM	DPEARM	EQM	DPEQM	EARM	DPEARM	EQM	DPEQM	EARM	DPEARM
PETR	ITM	1	0.0283	7.26%	2.62%	2.57%	0.0779	29.82%	4.23%	4.04%	0.1384	28.29%	5.53%	5.25%
		2	0.0249	4.92%	2.33%	2.06%	0.0793	44.95%	3.50%	3.13%	0.1547	34.74%	5.67%	5.36%
		3	0.0387	10.24%	2.68%	3.13%	0.0524	29.51%	3.14%	2.74%	0.2282	62.93%	6.37%	7.17%
		4	0.0235	7.04%	2.11%	2.02%	0.0538	30.35%	2.95%	2.78%	0.1336	36.48%	5.05%	4.99%
		5	0.0236	7.08%	2.13%	1.99%	0.0486	29.40%	2.76%	2.62%	0.1245	37.97%	4.99%	4.91%
		6	0.0271	7.06%	2.37%	2.19%	0.0596	31.53%	3.11%	2.85%	0.1437	37.91%	5.06%	5.14%
	ATM	1	0.0400	4.82%	25.80%	34.57%	0.0785	10.30%	14.77%	12.63%	0.1579	18.92%	17.07%	14.13%
		2	0.0101	1.42%	11.51%	13.68%	0.0173	2.54%	6.47%	5.67%	0.0397	7.46%	7.70%	6.96%
		3	0.0243	4.02%	19.19%	26.03%	0.0175	2.51%	6.33%	5.32%	0.1429	59.08%	9.63%	12.30%
		4	0.0102	1.41%	11.50%	13.62%	0.0182	2.54%	6.68%	5.62%	0.0346	5.43%	7.18%	6.31%
		5	0.0110	1.47%	11.88%	12.26%	0.0211	2.87%	7.21%	6.38%	0.0325	5.58%	7.15%	6.21%
		6	0.0109	1.48%	11.36%	12.18%	0.0172	2.41%	6.62%	5.74%	0.0307	4.78%	6.76%	5.92%
	OTM	1	0.0109	1.68%	47.32%	52.18%	0.0411	6.94%	50.02%	52.63%	0.1076	15.16%	56.75%	66.89%
		2	0.0018	0.24%	19.45%	18.14%	0.0059	1.00%	19.15%	17.15%	0.0307	7.39%	23.81%	19.84%
		3	0.0044	0.87%	25.60%	22.96%	0.0041	0.71%	14.98%	11.64%	0.0250	8.69%	18.35%	19.17%
		4	0.0018	0.25%	19.53%	18.85%	0.0057	0.88%	19.66%	16.93%	0.0198	4.11%	22.31%	20.97%
		5	0.0021	0.30%	21.79%	21.32%	0.0069	1.05%	21.87%	21.13%	0.0182	3.29%	21.36%	23.62%
		6	0.0027	0.38%	24.02%	24.28%	0.0058	0.96%	18.30%	15.92%	0.0190	3.96%	21.52%	17.99%
VALE	ITM	1	0.0662	15.45%	2.48%	2.87%	0.2409	32.71%	6.04%	5.31%	0.5332	73.07%	9.29%	7.72%
		2	0.0514	13.45%	2.05%	2.08%	2.7279	461.07%	16.34%	16.87%	6.9009	687.48%	35.69%	22.25%
		3	0.0637	13.16%	2.53%	2.71%	0.0806	14.46%	2.96%	2.54%	0.1885	41.14%	3.98%	3.74%
		4	0.0482	12.74%	1.91%	2.00%	0.1172	20.55%	3.44%	2.81%	0.2779	58.86%	4.74%	4.46%
		5	0.0475	12.43%	1.94%	2.08%	0.0767	14.69%	2.84%	2.48%	0.2321	52.33%	4.09%	4.34%
		6	0.0523	13.31%	1.99%	2.11%	0.1302	28.17%	3.52%	2.93%	0.2498	55.38%	4.38%	4.30%
	ATM	1	0.1438	24.43%	28.17%	40.78%	0.3883	56.00%	21.78%	20.37%	1.0480	117.62%	34.81%	24.34%
		2	0.0298	4.10%	12.59%	16.04%	0.9639	151.43%	32.17%	26.11%	3.1610	323.87%	58.25%	27.87%
		3	0.0878	21.31%	18.72%	25.29%	0.0383	7.36%	6.26%	5.46%	0.6398	223.30%	14.65%	20.57%
		4	0.0217	3.31%	11.95%	16.56%	0.0405	7.25%	6.82%	5.66%	0.0581	9.63%	7.24%	6.54%
		5	0.0345	5.88%	12.68%	13.89%	0.0395	7.40%	6.66%	5.56%	0.0633	11.68%	7.68%	8.15%
		6	0.0224	3.43%	11.50%	15.42%	0.0398	6.93%	6.68%	5.51%	0.0564	9.86%	7.19%	6.98%
	OTM	1	0.0977	20.96%	80.57%	104.11%	0.2877	48.04%	100.68%	118.68%	0.8764	116.60%	111.41%	144.28%
		2	0.0086	1.37%	25.81%	21.64%	0.1541	20.76%	60.11%	30.15%	0.7602	152.50%	79.35%	24.95%
		3	0.0209	4.79%	35.71%	33.79%	0.0178	4.62%	18.45%	15.36%	0.5290	193.10%	35.09%	44.19%
		4	0.0058	1.01%	23.13%	24.18%	0.0240	5.04%	24.06%	20.68%	0.1437	60.58%	26.36%	30.79%
		5	0.0091	1.59%	29.72%	25.39%	0.0228	4.58%	25.80%	25.36%	0.0907	15.28%	41.53%	56.26%
		6	0.0055	0.87%	24.13%	23.70%	0.0244	4.99%	24.39%	20.47%	0.1224	46.13%	24.23%	29.13%

EQM - erro quadrático médio

DPEQM - desvio-padrão do erro quadrático médio

EARM - erro absoluto relativo

DPEARM - desvio-padrão do erro absoluto relativo médio

3.4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO DA ESTRATÉGIA DE *HEDGE*

3.4.1 Modelagem da simulação para o modelo de difusão e para o modelo com saltos

Foram reproduzidos os experimentos realizados por Rebonato (2004, p. 104 e 502) para o estudo dos processos de replicação de *portfolio* como estratégia de *hedge*. O primeiro experimento é a simulação de um MBG não neutralizado a risco, com a respectiva proteção pelo delta. O segundo experimento é a simulação de um processo com saltos, também não neutralizado, com replicação de 2 *portfolios*: um somente pelo delta do ativo-objeto e outro considerando, além do ativo-objeto, uma opção adicional. Foi considerada uma amplitude de salto determinística para obtenção das quantidades da opção adicional ao *portfolio*. Os resultados foram analisados e são compatíveis com os resultados obtidos por Rebonato.

3.4.2 Simulação do *hedge* pelo delta

O processo simulado foi o seguinte:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \left(1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right).$$

em que:

$$S_0 = 40;$$

$$K = 40;$$

$$\sigma = 30\% a.a.;$$

$$T = 0.33 \text{ anos};$$

$$r = 12\% a.a.$$

O *portfolio* replicante utilizado foi:

$$\Pi_t = \alpha S_t + \beta B_t + c_t.$$

Foram simuladas 2.000 trajetórias de preços para cada uma das seguintes quantidades de passos do processo de difusão: 10, 40, 80, 160 e 250. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Tabela 8 – Resultado da simulação do *portfolio* com *hedge* pelo delta

Steps	Opção	Pdelta	Pdelta -Opção (Pdelta-Opção)	dp
10	2.5464	2.5365	-0.0099	0.7657
40	2.7074	2.6985	-0.0089	0.3743
80	2.6477	2.6409	-0.0068	0.2617
160	2.8315	2.8306	-0.0009	0.1913
250	2.8326	2.8319	-0.0006	0.1501

Steps - quantidade de passos

Opção - preço futuro simulado da opção

Pdelta - valor futuro do *portfolio* replicante pelo delta

dp - desvio-padrão

Os resultados da simulação do *portfolio* replicante se mostraram bastante satisfatórios. Podemos observar que à medida que aumentamos a quantidade de passos, a diferença de valores entre o *portfólio* replicante e a opção diminuem, inclusive o desvio-padrão, confirmando que a estratégia pelo delta quando realizada de maneira contínua, considerando os pressupostos do modelo de Black-Scholes, permite que a opção tenha um *hedge* perfeito.

3.4.3 Simulação do *hedge* para processos com saltos utilizando-se opção adicional

O processo simulado foi o seguinte:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z + \sum_{i=1}^{N(t+\Delta t)} J_{ampl} \right).$$

em que:

$$S_0 = 100;$$

$$K = 100;$$

$$\sigma = 17\% a.a.;$$

$$T = 1 \text{ ano};$$

$$J_{ampl} = 0.90;$$

$$\sigma_{jump} = 10\%a.a. ;$$

$$r = 5\%a.a.$$

O *portfolio* replicante utilizado foi:

$$\Pi_t = \alpha S_t + \beta B_t + \gamma h_t + c_t .$$

A única diferença entre a opção h e a opção c é o prazo de vencimento: $T_h = 2$ anos .

Foram simuladas 2.048 trajetórias de preços para cada uma das seguintes quantidades de passos do processo de difusão e saltos: 10, 80, 160, 320 e 440. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Tabela 9 – Resultado da simulação do processo com saltos e *portfolio* com segunda opção

Steps	Opção	Pdelta	Pso	Pdelta -Opção	(Pdelta-Opção)	Pso-Opção	(Pso-Opção)
10	5.5721	4.6691	5.6530	-0.9030	3.2499	0.0809	1.0109
80	5.8639	5.1341	5.9233	-0.7298	2.5387	0.0594	1.2108
160	6.1728	5.4301	6.2621	-0.7426	2.3715	0.0893	0.8793
320	5.9084	5.1415	5.9818	-0.7669	2.3127	0.0735	0.9705
440	5.9118	5.1397	5.9949	-0.7721	2.3772	0.0830	0.6934

Steps - quantidade de passos

Opção - preço futuro simulado da opção

Pdelta - valor futuro do *portfolio* replicante pelo delta

Pso - valor futuro do *portfolio* replicante com segunda opção

dp - desvio-padrão

Os resultados da simulação dos valores do *portfolio* replicante exclusivamente pelo delta se mostraram consistentemente inferiores ao *portfolio* com uma segunda opção. Na presença de saltos o valor do *portfolio* pelo delta se mostra sempre inferior ao valor da opção (diferenças negativas). A diferença apurada entre o valor do *portfolio* replicante com segunda opção e a opção *hedged* são substancialmente menores, porém não apresenta tendência de diminuição em virtude da quantidade de passos da trajetória. Conforme constatado pelo próprio Rebonato (2004), na presença de saltos o *hedge* pelo delta é insuficiente e a inclusão de opções no *portfólio* replicante é fundamental para diminuição do risco.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 SOBRE OS RESULTADOS ALCANÇADOS

O objetivo principal desta dissertação foi revisar os modelos de difusão e saltos, gerando um documento de referência sobre o assunto, equalizando os conceitos e buscando uma padronização das diversas nomenclaturas encontradas no meio acadêmico.

Além dos modelos de precificação, foi dada especial atenção ao estudo da volatilidade e ao *hedge* através de *portfolios* replicantes. Foi demonstrada através de vários exemplos toda a capacidade de ajuste do modelo de Kou em relação aos preços de mercado, conseqüentemente mostrou-se que diversos padrões de sorriso de volatilidade podem ser gerados por esse modelo.

O modelo de Kou foi entendido, implementado e simulado. A solução analítica de precificação foi validada utilizando-se a simulação do processo de difusão e saltos. O trabalho culminou com o estudo do desempenho preditivo dos modelos utilizando-se ações negociadas na Bovespa. O modelo de Kou, com volatilidade constante e saltos, apresentou o menor erro quadrático médio, sendo por este critério o modelo com melhor desempenho preditivo no período estudado. Esse resultado reafirma a capacidade do modelo de Kou de gerar satisfatoriamente o fenômeno do sorriso de volatilidade sem necessidade de ajustes na volatilidade do ativo-objeto.

O trabalho foi complementado pelas simulações do processo de replicação de *portfolio* com a finalidade de *hedge*, demonstrando que, mesmo na presença de saltos, é possível através do uso de opções adicionais obter razoáveis resultados na proteção do risco assumido pelo agente econômico. Constatou-se também a insuficiência no uso exclusivo da proteção pelo delta quando da existência de saltos no processo.

4.2 LIMITAÇÕES E SUGESTÕES DE PESQUISA

No estudo dos modelos de difusão e saltos foi evidenciada a necessidade de se obter processos numericamente estáveis e computacionalmente rápidos para calibração dos parâmetros do modelo. Um estudo aprofundado das técnicas de otimização e a criação de algoritmos de alto desempenho para a solução do problema podem ajudar a eliminar um dos principais entraves no uso deste tipo de modelo pelo mercado.

As dificuldades com *hedge* são outro fator limitante no uso dos modelos com saltos. Um estudo completo das técnicas de *hedge* em mercados incompletos e a aplicação desse tipo de estratégia de *hedge* no mercado de ações brasileiro complementariam o estudo do desempenho preditivo do modelo de Kou realizado neste trabalho.

Não foi explorada neste trabalho a capacidade do modelo de Kou de derivar soluções analíticas para opções dependentes da trajetória do tipo americanas perpétuas, *lookback* e com barreiras. Além do próprio trabalho seminal de Kou, não foram identificados outros artigos que abordassem esta capacidade analítica do modelo, sendo uma alternativa de estudo para trabalhos avançados na área de precificação de opções exóticas.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIT-SAHALIA, Y. Telling from Discrete Data Whether the Underlying Continuous-Time Data is a Diffusion. *Journal of Finance*. v. 57, n. 5, p. 2075-2112. 2002.
- ALEXANDER, C. Common Correlation and Calibration of the Log-normal Forward-Rate Model. *Wilmott*. p. 68-77. 2003.
- ANDERSEN, L.; ANDREASEN J. Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing. *Review of Derivatives Research*. v. 4, p. 231-262. 2000.
- AVELLANEDA, M. Minimum-Entropy Calibration of Asset-Pricing Models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. p. 447-472. 1998.
- BALL, C. A.; TOROUS W.N. A Simplified Jump Process for Common Stock Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. v. 18, n. 1, p. 53-65. 1983.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPARD, N. Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation. *Journal of Financial Econometrics*. v. 4, n. 1, p. 1-30. 2006
- BAXTER, M.; RENNIE A. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Segunda Impressão. Cambridge. 1996.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. v. 81, n. 3, p. 637-654. 1973.
- BONOMO, M. A. C.; GARCIA, R. Tests of Conditional Asset Pricing Models in the Brazilian Stock Market. *Journal of International Money and Finance*, v. 20, n. 1, p. 71-90, 2001.
- BROCK, W.; HSIEH, D.; SCHEINKMAN, J. A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Reviews*, 15(3):197-235. 1996.
- BROCK, W.; HSIEH, D.; LEBARON, B. *Non linear dynamics, chaos, and instability: statistical theory and economic evidence*. Cambridge, MIT Press. 1991.

CERNY, A. *Mathematical Techniques in Finance: Tools for Incomplete Markets*. Princeton University Press. 2003.

CONT, R.; TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall Press. 2003.

CORRADO, C.J.; MILLER, T.W. A note on a simple, accurate formula to compute implied standard deviations. *Journal of Banking & Finance*. v. 20, p. 595-603. 1996.

COX, J.C.; ROSS, S.A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*. v. 3, p. 145-166. 1976.

CROMWELL, J.B.; LABYS, W.C.; TERRAZA, M. Univariate tests for time series models. *Sage University Papers*, 99. 1994.

DUMAS, B.; FLEMING J.; WHALEY R.E. Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *The Journal of Finance*. v. LIII, n. 6, p. 2059-2106. 1998.

DUFFIE, D.; RICHARDSON, H.R. Mean-Variance Hedging in Continuous Time. *The Annals of Applied Probability*. v. 1, n. 1, p. 1-15. 1991.

FAMA, E.F. The Behaviour of Stock-Market Process. *The Journal of Business*. v. 38, p. 34-105. 1965.

GATHERAL, J. *The Volatility Surface – A Practitioner's Guide*. Wiley. 2006.

GUIMARÃES, B.V.; SILVA M.E. A possibilidade de saltos no câmbio implícita nos prêmios das opções. *Revista Brasileira de Econometria*. n. 56, v. 3, p. 397-428. 2002.

HULL, J.C. *Options, Futures and Other Derivatives*. Terceira Edição. Prentice Hall. 1998.

HAMILTON, J.D. *Time Series Analysis*. Princeton University Press. 1994.

HAUG, E.G. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill. Segunda Edição. 2007.

JACKSON, M.; STAUNTON M. *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*. Wiley. 2001.

NAIK, V.; LEE M. General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns. *The Review of Financial Studies*. v. 3, n. 4, p. 493-521. 1990.

NEFTCI, S.N. *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Second Edition. Academic Press. 2000.

PAPAPANTALEON, A.; SENGE, T. Option Pricing in a Jump Diffusion Model with Double Exponential Jumps. *Quantitative Research. Commerzbank FX. Frankfurt MathFinance Colloquium*. 2002.

_____. An Introduction to Lévy Processes with Applications in Finance. *Working Paper. Technical University of Athens*. 2006.

PRESS, S.J. A Compound Events Model For Security Prices. *Journal of Business*. v. 40, p. 317-335. 1967.

RAMEZANI, C.; ZENG Y. Maximum Likelihood Estimation of Asymmetric Jump-Diffusion Processes: Application to security prices. *Working Paper, Department of Statistics, University of Missouri, Kansas City*. 1998.

REBONATO R. *Volatility and Correlation: the Perfect Hedger and the Fox*. Segunda Edição. Wiley. 2004.

ROSS, S.M. *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. Second Edition. Cambridge. 2003

_____. *Stochastic Processes*. Segunda Edição. Wiley. 1996

_____.; SHANTHIKUMAR, J.G. Pricing Exotic Options: Monotonicity in Volatility and Efficient Simulation. *Engineering and Informational Sciences*. v. 14, p. 317-326. 2000.

SANTOS, E.B. Modelagem de Séries Temporais Financeiras Multidimensionais via Processos Estocásticos e Cópuas de Lévy. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo. 2005.

SIQUEIRA, J.O. *Determinação Entrópica do Preço Racional da Opção Européia Simples e Ordinária sobre Ação e Bond: uma Aplicação da Teoria da Informação em Finanças em Condições de Incerteza*. Tese de Doutorado. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo. São Paulo. 1999.

SHREVE, S.E. *Stochastic Calculus Models for Finance: Continuous Time Models*. Vol. II. Springer. 2004.

TAYLOR, H.M.; KARLIN S. *A First Course in Stochastic Processes*. Second Edition. Academic Press. 1975.

TSAY, R.S. *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition. Wiley. 2005.

YOSHINO, J.A. Uma metodologia para a estimação do risco no mercado acionário brasileiro: preço Arrow-Debreu. *Pesquisa e Planejamento Econômico*.

6 ANEXOS

6.1 ANEXO A – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO DA FÓRMULA DE KOU

```

<<Statistics`ContinuousDistributions`
<<Statistics`DiscreteDistributions`
ClearAll[]
(* parametros da call *)
txlivre=5/100;
volatilidade=16/100;
szero=110;
strike=98;
t=0;
TT=0.5;
stepsize=TT/100;
lambda=4;
etaum=4;
etadois=2;
p=0.3;
q=1-p;
zeta=p*etaum/(etaum-1)+q*etadois/(etadois+1)-1;

(* PARAMETROS SIMULACAO *)
qtdsimulacao=100;
amostras=1000;
tabelaprecos=Range[qtdsimulacao];
qtd=TT/stepsize+1;
passo=Range[qtd];
caminho=Range[qtd];
precofuturo=Range[amostras];
valormedio =0;

(* GERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS SEGUNDO UMA DISTRIBUIÇÃO *)
RandomNormal[m_,v_]:=Random[NormalDistribution[m,v]]
RandomPoisson[m_]:=Random[PoissonDistribution[m]]
RandomDoubleExponential[paux_,eum_,edois_]:= (r1:=Random[];r2:=Random[];If[r1<=paux,-
Log[r2]/eum,Log[r2]/edois])
SeedRandom[1]

Block[{cont=1},
  Label[simulacao];
  Block[{s=1},
    Label[casos];
    passo[[1]]=0;
    caminho[[1]]=szero;
    totsalto=0;
    Block[{i=2},
      Label[top];
      passo[[i]]=passo[[i-1]]+stepsize;
      nt=RandomPoisson[lambda*stepsize];
      salto=0;
      salto=Sum[RandomDoubleExponential[p,etaum,etadois],{k,1,nt}];
      totsalto=totsalto+nt;
      caminho[[i]]=caminho[[i-1]] * Exp[(txlivre-0.5*(volatilidade^2) -lambda*zeta) *
stepsize26( )9.3865( )-3.27649( )-3.27.7418.7747(a)0.76521(1)-0.60443o5.7418.7749( )-3.27027649( )-3.2739(z)0.604

```

```

s=s+1;
If[s<amostras+1,Goto[casos]]];
somaprecos=0;
Block[{i=1},
  Label[retorno];
  somaprecos=somaprecos+Max[precofuturo[[i]]-strike,0];
  i=i+1;
  If[i<amostras+1,Goto[retorno]]];
tabelaprecos[[cont]]=Exp[-txlivre*(TT-t)]*somaprecos/amostras;
Print[cont,"----",tabelaprecos[[cont]]];
valormedio=valormedio+tabelaprecos[[cont]];
Print["Media=",valormedio/cont];
cont=cont+1;
If[cont<qtdsimulacao+1,Goto[simulacao]]];
X:=Table[tabelaprecos[[i]],{i,1,qtdsimulacao}];
Print[X];
Export["c:\ppga\projeto\mathematica\simulação_kou.csv",X,"List"];
Print[Mean[X]]

```

6.2 ANEXO B – SUPERFÍCIE DE VOLATILIDADE OBTIDA POR AJUSTES POLINOMIAIS

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`

NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)

callBSM[S_,X_,v_,r_,T_]:=
  nd[d_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],d];
  d1:=(Log[S/X]+(r+v^2/2)*T)/(v*Sqrt[T]);
  d2:=d1-v*(T^(1/2));
  S*nd[d1]-X*Exp[-r*T]*nd[d2];

VolImplicitaBSM[S_,X_,r_,T_,CM_]:=
  vLow=0.0005;
  vHigh=2;
  epsilon=1/1000000;
  cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
  cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
  vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
  Block[{ii=0},Label[inicio];
    vLow=If[callBSM[S,X,vi,r,T]<CM,vi,vLow];
    vHigh=If[callBSM[S,X,vi,r,T]>=CM,vi,vHigh];
    cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
    cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
    vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
    ii=If[Abs[CM-callBSM[S,X,vi,r,T]]<epsilon,1,0];
    If[vi<0.001,Goto[fimimpl]];
    If[ii<1,Goto[inicio]];
  Label[fimimpl];
  vi);

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
(* proxlinha=1; *)
proxlinha=216;
linha=proxlinha;
DTINIC=S[[linha]][[2]];
XY:={};
Block[{j=1},Label[inicio];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fim]];
  volimpl=VolImplicitaBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]],S[[linha]][[5]]];
  If[volimpl>0.01,If[volimpl<0.50,XY=Append[XY,{S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]],volimpl}]]];
  linha=linha+1;
  j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
  DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];

```

```

If[j<=NDE,Goto[inicio]]];
Print[XY];
Print[Regress[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}]];
Regress[XY,{1,x1,x1*x1,x1*x1*x1,x2},{x1,x2}]
Show[Plot3D[27.083-78*KS+75.415*KS^2-24.191*KS^3-0.496*T,{KS,0.80,1.17},
{ T,0,0.225},
AxesLabel->{StyleForm["K/S",
FontFamily->"Times",FontSize->10,
FontWeight->"Bold"],
StyleForm["T",FontFamily->"Times",
FontSize->10,FontWeight->"Bold"], StyleForm["Vol. Impl.
BS
",FontFamily->"Times",
FontSize->10,FontWeight->"Bold"]}],
Graphics3D[{RGBColor[1,0,0],
PointSize[0.02],Point/@XY}], ViewPoint->{1.3,-2.4,2}]

```

6.3 ANEXO C – VOLATILIDADE LOCAL A PARTIR DE VOLATILIDADE IMPLÍCITA

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`
ClearAll;
r=0.1319;
S=58.03;
volimpl[K_,T_]:=27.083-78*(K/(S*Exp[r*T]))+75.415*(K/(S*Exp[r*T]))^2-24.191*(K/(S*Exp[r*T]))^3-
0.496*T;
dt=D[volimpl[K,T],{T,1}]
dk=D[volimpl[K,T],{K,1}]
dkk=D[volimpl[K,T],{K,2}]

d1[K_,T_]:= (Log[S/K]+(r+0.5*volimpl[K,T]^2)*T)/(volimpl[K,T]*T^(1/2));

(* vol. local fórmula Wilmott 2000 *)

vollocal[K_,T_]:= ((volimpl[K,T]^2)+2*T*volimpl[K,T]*dt+2*r*K*T*volimpl[K,T]*dk)/
(1+K*d1[K,T]*(T^(1/2))*dk)^2 + (K^2)*T*volimpl[K,T]*(dkk-d1[K,T]*((dk)^2)*(T^(1/2))));

Show[Plot3D[vollocal[K,T],{K,46,70},{T,0,0.225}, AxesLabel->{StyleForm["K", FontFamily->"Times",
FontSize->10, FontWeight->"Bold"], StyleForm["T",FontFamily->"Times", FontSize->10, FontWeight->"Bold"],
StyleForm["Vol. Local \n BS ",FontFamily->"Times", FontSize->10, FontWeight->"Bold"]}],
ViewPoint->{1.3,-2.4,2}]

```

6.4 ANEXO D – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 1

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`

(* Modelo 1 - Black Scholes - Volatilidade Histórica EWMA *)
(*****)

(* Parametros do back-test *)
NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)
callBSM[S_,X_,v_,r_,T_]:= (nd[d_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],d];
  d1:=(Log[S/X]+(r+v^2/2)*T)/(v*Sqrt[T]);
  d2:=d1-v*(T^(1/2));
  S*nd[d1]-X*Exp[-r*T]*nd[d2]);

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
proxlinha=1;
Block[{i=1},Label[inicioi];
  linha=proxlinha;
  DTINIC=S[[linha]][[2]];
  Block[{j=1},Label[inicioj];
    If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
    volewma=S[[linha]][[9]];
    linha=linha+1;
    j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
    DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
    If[j<=NDE,Goto[inicioj]];
  proxlinha=linha;
  Print["====Linha Excel=====>",proxlinha];
  DTINIC=S[[linha]][[2]];
  Block[{k=1},Label[iniciok];
    If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
    c=N[callBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],volewma,S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]],4];
    Print["c=",c," volewma=",volewma];
    SS=Append[SS,Append[Append[S[[linha]],c],volewma]];
    linha=linha+1;
    k=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,k+1,k];
    DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
    If[k<=NDP,Goto[iniciok]];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
  i=S[[proxlinha]][[2]];
  Print["====Dia N=====>",i];
  If[i<=TOTDIAS-NDE,Goto[inicioi]];
Label[fimi];
Export["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007_BT_BS_VOL_EWMA.csv",SS,"XLS"];

```

6.5 ANEXO E – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 2

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`

(* Modelo 2 - FDP neutralizado + Vol. Local WilMott *)
(*****)

(* Parametros do back-test *)
NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)

callBSM[S_,X_,v_,r_,T_]:= (nd[d_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],d];
  d1:=(Log[S/X]+(r+v^2/2)*T)/(v*Sqrt[T]);
  d2:=d1-v*(T^(1/2));
  S*nd[d1]-X*Exp[-r*T]*nd[d2]);

VolImplicitaBSM[S_,X_,r_,T_,CM_]:= (vLow=0.0005;
  vHigh=2;
  epsilon=1/1000000;
  cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
  cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
  vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
  Block[{ii=0},Label[inicio];
    vLow=If[callBSM[S,X,vi,r,T]<CM,vi,vLow];
    vHigh=If[callBSM[S,X,vi,r,T]>=CM,vi,vHigh];
    cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
    cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
    vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
    ii=If[Abs[CM-callBSM[S,X,vi,r,T]]<epsilon,1,0];
    If[vi<0.001,Goto[fimimpl]];
    If[ii<1,Goto[inicio]];
  Label[fimimpl];
  vi);

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
(* proxlinha=1; *)
proxlinha=1;
Block[{i=1},Label[inicioi];
  linha=proxlinha;
  DTINIC=S[[linha]][[2]];
  XY:={};
  Block[{j=1},Label[inicioj];
    If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
    volimpl=VolImplicitaBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]],S[[linha]][[5]]];
    If[volimpl>0.01,If[volimpl<0.50,XY=Append[XY,{S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]],volimpl}]]];
    linha=linha+1;
    j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
  
```

```

DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[j<=NDE,Goto[inicioj]];
Print[Regress[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}]];
v[m_,t_]=Fit[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}];
fpdapreg[S_,X_,t_,r_]:= (1/(X*v[X/(S*Exp[r*t]),t]*((2* $\pi$ *t)^(1/2))))*Exp[-
0.5*(((Log[S/X]+(r+v[X/(S*Exp[r*t]),t]^2/2)*t)/(v[X/(S*Exp[r*t]),t]*Sqrt[t])-
v[X/(S*Exp[r*t]),t]*(t^(1/2)))^2)*((1+X*((Log[S/X]+(r+v[X/(S*Exp[r*t]),t]^2/2)*t)/(v[X/(S*Exp[r*t]),t]*Sqrt[
t]))*(t^(1/2))*D[v[X/(S*Exp[r*t]),t],{X,1}]^2+(X^2)*t*v[X/(S*Exp[r*t]),t]*(D[v[X/(S*Exp[r*t]),t],{X,2}]-
((Log[S/X]+(r+v[X/(S*Exp[r*t]),t]^2/2)*t)/(v[X/(S*Exp[r*t]),t]*Sqrt[t]))*(D[v[X/(S*Exp[r*t]),t],{X,1}]^2*(t^
1/2)))));
proxlinha=linha;
Print["====Linha Excel=====>",proxlinha];
DTINIC=S[[linha]][[2]];
Block[{k=1},Label[iniciok];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
maxk=S[[linha]][[7]]-1;
Print[maxk];
Label[iniciop];
maxk=maxk+1;
If[maxk>S[[linha]][[4]]*1.25,Goto[fimp]];
If[NIntegrate[fpdapreg[S[[linha]][[4]],X,S[[linha]][[11]],S[[linha]][[10]]
],{X,S[[linha]][[4]]*0.75,maxk}<1,Goto[iniciop]];
Label[fimp];
maxk=maxk-1;
c=NIntegrate[fpdapreg[S[[linha]][[4]],X,S[[linha]][[11]],S[[linha]][[10]]]*(X-
S[[linha]][[7]]),{X,S[[linha]][[7]],maxk}];
volewma=v[S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]]];
Print["C=",c," VOL=",volewma," MAXK=",maxk];
SS=Append[SS,Append[Append[S[[linha]],c],volewma]];
linha=linha+1;
k=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,k+1,k];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[k<=NDP,Goto[iniciok]];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
i=S[[proxlinha]][[2]];
Print["====Dia N=====>",i];
If[i<=TOTDIAS-NDE,Goto[inicioi]];
Label[fimi];
Export["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007_BT_BS_PDF_REG.csv",SS,"XLS"];

```

6.6 ANEXO F – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 3

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`

(* Modelo 3 - Fórmula BS + vol implícita interpolada *)
(*****)

(* Parametros do back-test *)
NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)

callBSM[S_,X_,v_,r_,T_]:= (nd[d_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],d];
  d1:=(Log[S/X]+(r+v^2/2)*T)/(v*Sqrt[T]);
  d2:=d1-v*(T^(1/2));
  S*nd[d1]-X*Exp[-r*T]*nd[d2]);

VolImplicitaBSM[S_,X_,r_,T_,CM_]:= (vLow=0.0005;
  vHigh=2;
  epsilon=1/1000000;
  cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
  cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
  vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
  Block[{ii=0},Label[inicio];
  vLow=If[callBSM[S,X,vi,r,T]<CM,vi,vLow];
  vHigh=If[callBSM[S,X,vi,r,T]>=CM,vi,vHigh];
  cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
  cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
  vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
  ii:=If[Abs[CM-callBSM[S,X,vi,r,T]]<epsilon,1,0];
  If[vi<0.001,Goto[fimimpl]];
  If[ii<1,Goto[inicio]]];
  Label[fimimpl];
  vi);

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
(* proxlinha=1; *)
proxlinha=1;
Block[{i=1},Label[inicio];
  linha=proxlinha;
  DTINIC=S[[linha]][[2]];
  XY:={};
  nlinha=1;
  volmax=0;
  Block[{j=1},Label[inicio];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
  volimpl=VolImplicitaBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]],S[[linha]][[5]]];

```

```

If[volimpl>volmax,If[volimpl>0.01,If[volimpl<0.50,volmax=volimpl]]];
If[volimpl>0.01,If[volimpl<0.50,XY=Append[XY,{S[[linha]][[12]],volimpl}]]];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],XY=Join[XY,{0.7,volmax},{1.3,volmax}]];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],l[nlinha]=Interpolation[XY,InterpolationOrder -> 1];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],l[nlinha]=S[[linha]][[11]];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],Print[XY];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],Plot[l[nlinha][mn],{mn,0.7,1.3}]];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],nlinha=nlinha+1];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],volmax=0];
If[S[[linha]][[11]]!=S[[linha+1]][[11]],XY:={}];
linha=linha+1;
j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[j<=NDE,Goto[iniciok]]];
nlinha=nlinha-1;
tabaux={};
Do[tabaux=Join[tabaux,
  Table[{mn,l[w],l[w][mn]},{mn,0.7,1.3,0.02}]],{w,1,nlinha}];

SUPER=Interpolation[tabaux,InterpolationOrder -> 1];
proxlinha=linha;
Print["====Linha Excel=====>",proxlinha];
DTINIC=S[[linha]][[2]];
Block[{k=1},Label[iniciok];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
volewma=SUPER[S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]]];
If[volewma<0.001,volewma=0.01];
If[volewma>0.50,volewma=0.50];
c=callBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],volewma,S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]]];
If[c<0.001,c=0.001];
Print["C=",c," VOL=",volewma];
SS=Append[SS,Append[Append[S[[linha]],c],volewma]];
linha=linha+1;
k=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,k+1,k];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[k<=NDP,Goto[iniciok]]];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
i=S[[proxlinha]][[2]];
Print["====Dia N=====>",i];
If[i<=TOTDIAS-NDE,Goto[inicio]]];
Label[fimi];
Export["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007_BT_BS_PDF_INTER.csv",SS,"XLS"];

```

6.7 ANEXO G – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 4

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`

(* Modelo 4 - Black Scholes com volatilidade implicita - polinomio 3o grau *)
(*****)

(* Parametros do back-test *)
NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)

callBSM[S_,X_,v_,r_,T_]:= (nd[d_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],d];
  d1:=(Log[S/X]+(r+v^2/2)*T)/(v*Sqrt[T]);
  d2:=d1-v*(T^(1/2));
  S*nd[d1]-X*Exp[-r*T]*nd[d2]);

VolImplicitaBSM[S_,X_,r_,T_,CM_]:= (vLow=0.0005;
  vHigh=2;
  epsilon=1/1000000;
  cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
  cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
  vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
  Block[{ii=0},Label[inicio];
    vLow=If[callBSM[S,X,vi,r,T]<CM,vi,vLow];
    vHigh=If[callBSM[S,X,vi,r,T]>=CM,vi,vHigh];
    cLow=callBSM[S,X,vLow,r,T];
    cHigh=callBSM[S,X,vHigh,r,T];
    vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
    ii=If[Abs[CM-callBSM[S,X,vi,r,T]]<epsilon,1,0];
    If[vi<0.001,Goto[fimimpl]];
    If[ii<1,Goto[inicio]];
  Label[fimimpl];
  vi);

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
(* proxlinha=1; *)
proxlinha=1;
Block[{i=1},Label[inicioi];
  linha=proxlinha;
  DTINIC=S[[linha]][[2]];
  XY:={};
  Block[{j=1},Label[inicioj];
    If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
    volimpl=VolImplicitaBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]],S[[linha]][[5]]];
    If[volimpl>0.01,If[volimpl<0.50,XY=Append[XY,{S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]],volimpl}]]];
    linha=linha+1;
    j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
  
```

```

DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[j<=NDE,Goto[iniciok]]];
Print[Regress[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}]];
v[m,t]=Fit[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}];

proxlinha=linha;
Print["====Linha Excel=====>",proxlinha];
DTINIC=S[[linha]][[2]];
Block[{k=1},Label[iniciok];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
volimpl=v[S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]]];
Print[volimpl];
If[volimpl<0.001,volimpl=0.001];
If[volimpl>0.500,volimpl=0.50];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)
c=callBSM[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],volimpl,S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]]];;
Print["C=",c," VOL=",volimpl];
SS=Append[SS,Append[Append[S[[linha]],c],volimpl]];
linha=linha+1;
k=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,k+1,k];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[k≤NDP,Goto[iniciok]]];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
i=S[[proxlinha]][[2]];
Print["====Dia N=====>",i];
If[i≤TOTDIAS-NDE,Goto[inicio]]];
Label[fimi];
Export["c:\\ppga\\projeto\\mathematica\\VALE_2007_BT_BS_VOL_IMPL.csv",SS,"XLS"];

```

6.8 ANEXO H – SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 5

```

<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`

(* Modelo 5 - Modelo Kou com volatilidade constante 70% EWMA *)
(*****)

phi[x_]=(1+Erf[x/Sqrt[2]])/2

Hh[n_,x_]:=If[x<-6,If[x<10,1/n!*NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-
t^2/2],{t,x,Infinity}],0],(temp=(x+Sqrt[x*x+4*n])*0.5;
(NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,x,temp-3}]+NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,temp-3,temp-
1}]+NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,temp-1,temp}]+NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-
t^2/2],{t,temp,temp+1}]+NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,temp+1,temp+3}]+NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-
t^2/2],{t,temp+3,Infinity}]/(n!)))]

II[jj_,ll_,aa_,bb_,dd_]:=Which[(bb>0&&aa<0),-(Exp[aa*ll]/aa)*(Table[(bb/aa)^(jj-i),{i,0,jj}].Table[Hh[i,bb*ll-
dd],{i,0,jj}])+((bb/aa)^(jj+1))*(Sqrt[2*Pi]/bb)*Exp[aa*dd/bb+(1/2)*(aa/bb)^2]*phi[-
bb*ll+dd+aa/bb],(bb<0&&aa<0),-(Exp[aa*ll]/aa)*(Table[(bb/aa)^(jj-i),{i,0,jj}].Table[Hh[i,bb*ll-dd],{i,0,jj}])-
((bb/aa)^(jj+1))*(Sqrt[2*Pi]/bb)*Exp[aa*dd/bb+(1/2)*(aa/bb)^2]*phi[bb*ll-dd-
aa/bb],(bb>0&&aa<0),Hh[n+1,bb*ll-dd]/bb]

Pni[n_,i_,p_,eta1_,eta2_]:=Sum[Binomial[n,j]*(p^j)*((1-p)^(n-j))*Binomial[n-i-1,j-i]*((eta1/(eta1+eta2))^(j-
i))*((eta2/(eta1+eta2))^(n-j)),{j,i,n-1}]/i<n
Pni[n_,n_,p_,eta1_,eta2_]=p^n

Qni[n_,i_,p_,eta1_,eta2_]:=Sum[Binomial[n,j]*((1-p)^j)*(p^(n-j))*Binomial[n-i-1,j-i]*((eta2/(eta1+eta2))^(j-
i))*((eta1/(eta1+eta2))^(n-j)),{j,i,n-1}]/i<n
Qni[n_,n_,p_,eta1_,eta2_]=(1-p)^n

cprob[mu_,eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,aa_,bigT_,nStep_]:=
(IITwo=Table[II[k-1,aa-mu*bigT,-eta1,-
1/(sig*Sqrt[bigT]),-(sig*Sqrt[bigT])*eta1],{k,1,nStep}];
IIFour=Table[II[k-1,aa-mu*bigT,eta2,1/(sig*Sqrt[bigT]),-(sig*Sqrt[bigT])*eta2],{k,1,nStep}];
PiN[n_]=Exp[-la*bigT]*(la*bigT)^n/(n!);
PiNPni=Table[PiN[n]*Pni[n,k,p,eta1,eta2]*((sig*Sqrt[bigT])*eta1)^k,{n,1,nStep},{k,1,n}];
PiNQni=Table[PiN[n]*Qni[n,k,p,eta1,eta2]*((sig*Sqrt[bigT])*eta2)^k,{n,1,nStep},{k,1,n}];
sec=Sum[PiNPni[[n,k]]*IITwo[[k]],{n,1,nStep},{k,1,n}];
fourth=Sum[PiNQni[[n,k]]*IIFour[[k]],{n,1,nStep},{k,1,n}];
(sec*Exp[((sig*eta1)^2)*bigT/2]+fourth*Exp[((sig*eta2)^2)*bigT/2])/(Sqrt[2*Pi]*sig*Sqrt[bigT])+Exp[-
la*bigT]*phi[-(aa-mu*bigT)/(sig*Sqrt[bigT])])

(*Step 1-Preço da opção de compra ordinária*)

callKOU[eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,rr_,bigS_,bigK_,bigT_,nStep_]:=
(zetaaOR=p*eta1/(eta1-1)+(1-
p)*eta2/(eta2+1)-1;
tempaa1OR=rr+sig*sig/2-la*zetaaOR;
tempaa2OR=tempaa1OR-sig*sig;
bigS*cprob[tempaa1OR,eta1-1,eta2+1,la*(1+zetaaOR),p*eta1/((1+zetaaOR)*(eta1-
1)),sig,Log[bigK/bigS],bigT,nStep]-bigK*Exp[-
rr*bigT]*cprob[tempaa2OR,eta1,eta2,la,p,sig,Log[bigK/bigS],bigT,nStep]);

volImplicitaKOU[S_,X_,r_,T_,CM_,eta1_,eta2_,lambda_,p_,nn_]:=
vLow=0.001;
vHigh=2;

```

```

epsilon=1/10000;
cLow=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vLow,r,S,X,T,nn];
If[cLow>CM,vi=0.001];
If[cLow>CM,Goto[fimimpl]];
cHigh=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vHigh,r,S,X,T,nn];
vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
Block[{i=0},Label[inicio];
  vLow=If[callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]<CM,vi,vLow];
  vHigh=If[callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]>CM,vi,vHigh];
  cLow=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vLow,r,S,X,T,nn];
  cHigh=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vHigh,r,S,X,T,nn];
  vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
  (*Print[vi,"-----",callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]];*)i:=If[Abs[CM-
callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]]<epsilon,1,0];
  If[vi<0.001,Goto[fimimpl]];
  If[i<1,Goto[inicio]];
Label[fimimpl];
vi);

lambdaImplicitaKOU[S_,X_,r_,T_,CM_,eta1_,eta2_,vol_,p_,nn_] := (
  epsilon=1/10000;
  delta=5;
  laux=0;
  lant=0;
  cc=0;
  ccant=0;
  Block[{i=0},Label[inicio];
    If[ccant>cc,Goto[fimlambda]];
    cc=callKOU[eta1,eta2,laux,p,vol,r,S,X,T,nn];
    If[ccant>cc,Goto[fimlambda]];
    If[cc<CM,lant=laux];
    If[cc<CM,ccant=cc];
    If[cc<CM,laux=laux+delta];
    If[cc>CM,If[laux==0,Goto[fimlambda],delta=delta/2]];
    If[cc>CM,If[laux==0,Goto[fimlambda],laux=laux-delta]];
    If[Abs[cc-CM]>epsilon,Goto[inicio],lant=laux];
  Label[fimlambda];
  Print["CC=",cc," CM=",CM," laux=",laux," lant=",lant];
  N[lant]);

(* Parametros do back-test *)
NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
(* proxlinha=1; *)
proxlinha=1;
Block[{i=1},Label[inicio];

  linha=proxlinha;
  DTINIC=S[[linha]][[2]];

```

```

Block[{j=1},Label[inicioj];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
volewma=S[[linha]][[9]];
linha=linha+1;
j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[j<=NDE,Goto[inicioj]];

```

```

lambdamed1 = 0;
lambdamed2 = 0;
lambdamed3 = 0;
sant1=0;
sant2=0;
sant3=0;

```

```

(*callKOU[eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,rr_,bigS_,bigK_,bigT_,nStep_]*)
Print["linha=",linha-1," proxlinha=",proxlinha];

```

(* assumindo inicialmente 70% da volatilidade do ativo-objeto é por conta do sigma MBG e p=0.35 *)

```

M1[la_]:= (Sum[Abs[S[[i]][[5]]-
callKOU[20,20,la,0.35,volewma*0.7,S[[i]][[10]],S[[i]][[4]],S[[i]][[7]],S[[i]][[11]],10]]^2,{i,proxlinha,linha-1}]);
lant=0;
latu=0;
delta=1;
latu=latu+delta;
satu=M1[0];
Block[{ii=0},Label[inicioii];
sant=satu;
satu=M1[latu];
Print[" latu=",latu," lant=",lant," satu=",satu," sant=",sant];
If[satu<sant,lant=latu];
If[satu<sant,latu=latu+delta];
If[satu<sant,Goto[inicioii]];
sant1=sant;
If[lant 0,lambdamed1=0,lambdamed1=lant];

```

(* assumindo inicialmente 70% da volatilidade do ativo-objeto é por conta do sigma MBG e p=0.5 *)

```

M2[la_]:= (Sum[Abs[S[[i]][[5]]-
callKOU[20,20,la,0.5,volewma*0.7,S[[i]][[10]],S[[i]][[4]],S[[i]][[7]],S[[i]][[11]],10]]^2,{i,proxlinha,linha-1}]);
lant=0;
latu=0;
delta=1;
latu=latu+delta;
satu=M2[0];
Block[{ii=0},Label[inicioii];
sant=satu;
satu=M2[latu];
Print[" latu=",latu," lant=",lant," satu=",satu," sant=",sant];
If[satu<sant,lant=latu];
If[satu<sant,latu=latu+delta];
If[satu<sant,Goto[inicioii]];
sant2=sant;
If[lant 0,lambdamed2=0,lambdamed2=lant];

```

(* assumindo inicialmente 70% da volatilidade do ativo-objeto é por conta do sigma MBG e p=0.65 *)

```

M3[la_]:= (Sum[Abs[S[[i]][[5]]-
callKOU[20,20,la,0.65,volewma*0.7,S[[i]][[10]],S[[i]][[4]],S[[i]][[7]],S[[i]][[11]],10]]^2,{i,proxlinha,linha-1}]);
lant=0;
latu=0;
delta=1;
latu=latu+delta;
satu=M3[0];
Block[{ii=0},Label[inicioii];
  sant=satu;
  satu=M3[latu];
  Print[" latu=",latu," lant=",lant," satu=",satu," sant=",sant];
  If[satu<sant,lant=latu];
  If[satu<sant,latu=latu+delta];
  If[satu<sant,Goto[inicioii]];
sant3=sant;
If[lant 0,lambdamed3=0,lambdamed3=lant];

Print[sant1,"/",sant2,"/",sant3];
Print[lambdamed1,"/",lambdamed2,"/",lambdamed3];

pp=0;
lambdaest=0;

If[sant1<sant2,If[sant1<sant3,lambdaest=lambdamed1,lambdaest=lambdamed3],If[sant2<sant3,lambdaest=lambdamed2,lambdaest=lambdamed3]];
If[sant1<sant2,If[sant1<sant3,pp=0.35,pp=0.65],If[sant2<sant3,pp=0.5,pp=0.65]];

Print[lambdaest,"////",pp];

proxlinha=linha;
Print["====Linha Excel=====>",proxlinha,"====lambdamin=",lambdaest];
DTINIC=S[[linha]][[2]];
Block[{k=1},Label[iniciok];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
  volimpl=volewma*0.7;
  If[volimpl<0.001,volimpl=0.001];
  If[volimpl>0.50,volimpl=0.50];
  (* LAYOUT DE VALE_2007.txt *)
  (* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
  (* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)
  (* callKOU[eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,rr_,bigS_,bigK_,bigT_,nStep_] *)
  c=callKOU[20,20,lambdaest,pp,volimpl,S[[linha]][[10]],S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[11]],10];
  Print["C=",c," VOL=",volimpl," lambda=",lambdaest," pp=",pp];
  SS=Append[SS,Append[Append[S[[linha]],c],volimpl]];
  linha=linha+1;
  k=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,k+1,k];
  DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
  If[k NDP,Goto[iniciok]];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
  i=S[[proxlinha]][[2]];
  Print["====Dia N=====>",i];
  If[i TOTDIAS-NDE,Goto[inicioii]];
Label[fimi];
Export["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007_BT_KOU_CALIB_LAMBDA_P_VOLEWMA.csv",SS,"XLS"];

```

6.9 ANEXO I - SIMULAÇÃO HISTÓRICA: MODELO 6

```
<<Statistics`StatisticsPlots`
<<Statistics`NormalDistribution`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`LinearRegression`
<<Statistics`ContinuousDistributions`
```

```
(* Modelo 6 - Modelo Kou + função de volatilidade determinística *)
(*****)
```

```
phi[x_]=(1+Erf[x/Sqrt[2]])/2
```

```
Hh[n_,x_]:=If[x>=6,If[x<10,1/n!*NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-
t^2/2],{t,x,Infinity}],0],(temp=(x+Sqrt[x*x+4*n])*0.5;
(NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,x,temp-3}] + NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,temp-3,temp-
1}] + NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,temp-1,temp}] + NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-
t^2/2],{t,temp,temp+1}] + NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-t^2/2],{t,temp+1,temp+3}] + NIntegrate[(t-x)^n*Exp[-
t^2/2],{t,temp+3,Infinity}])/(n!))]
```

```
II[jj,ll,aa,bb,dd]:=Which[(bb>0&&aa!=0),-(Exp[aa*ll]/aa)*(Table[(bb/aa)^(jj-i),{i,0,jj}].Table[Hh[i,bb*ll-
dd],{i,0,jj}]) + ((bb/aa)^(jj+1))*(Sqrt[2*Pi]/bb)*Exp[aa*dd/bb+(1/2)*(aa/bb)^2]*phi[-
bb*ll+dd+aa/bb],(bb<0&&aa<0),-(Exp[aa*ll]/aa)*(Table[(bb/aa)^(jj-i),{i,0,jj}].Table[Hh[i,bb*ll-dd],{i,0,jj}]) -
((bb/aa)^(jj+1))*(Sqrt[2*Pi]/bb)*Exp[aa*dd/bb+(1/2)*(aa/bb)^2]*phi[bb*ll-dd-
aa/bb],(bb>0&&aa==0),Hh[n+1,bb*ll-dd]/bb]
```

```
Pni[n_,i_,p_,eta1_,eta2_]:=Sum[Binomial[n,j]*(p^j)*((1-p)^(n-j))*Binomial[n-i-1,j-i]*((eta1/(eta1+eta2))^(j-
i))*((eta2/(eta1+eta2))^(n-j)),{j,i,n-1}]/i<n
Pni[n_,n_,p_,eta1_,eta2_]=p^n
```

```
Qni[n_,i_,p_,eta1_,eta2_]:=Sum[Binomial[n,j]*((1-p)^j)*(p^(n-j))*Binomial[n-i-1,j-i]*((eta2/(eta1+eta2))^(j-
i))*((eta1/(eta1+eta2))^(n-j)),{j,i,n-1}]/i<n
Qni[n_,n_,p_,eta1_,eta2_]=(1-p)^n
```

```
cprob[mu_,eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,aa_,bigT_,nStep_]:= (IITwo=Table[II[k-1,aa-mu*bigT,-eta1,-
1/(sig*Sqrt[bigT]),-(sig*Sqrt[bigT])*eta1],{k,1,nStep}];
IIFour=Table[II[k-1,aa-mu*bigT,eta2,1/(sig*Sqrt[bigT]),-(sig*Sqrt[bigT])*eta2],{k,1,nStep}];
PiN[n_]=Exp[-la*bigT]*(la*bigT)^n/(n!);
PiNPni=Table[PiN[n]*Pni[n,k,p,eta1,eta2]*((sig*Sqrt[bigT])*eta1)^k,{n,1,nStep},{k,1,n}];
PiNQni=Table[PiN[n]*Qni[n,k,p,eta1,eta2]*((sig*Sqrt[bigT])*eta2)^k,{n,1,nStep},{k,1,n}];
sec=Sum[PiNPni[[n,k]]*IITwo[[k]],{n,1,nStep},{k,1,n}];
fourth=Sum[PiNQni[[n,k]]*IIFour[[k]],{n,1,nStep},{k,1,n}];
(sec*Exp[((sig*eta1)^2)*bigT/2]+fourth*Exp[((sig*eta2)^2)*bigT/2])/(Sqrt[2*Pi]*sig*Sqrt[bigT])+Exp[-
la*bigT]*phi[-(aa-mu*bigT)/(sig*Sqrt[bigT])]
```

```
(*Step 1-Preço da opção de compra ordinária*)
```

```
callKOU[eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,rr_,bigS_,bigK_,bigT_,nStep_]:= (zetaaOR=p*eta1/(eta1-1)+(1-
p)*eta2/(eta2+1)-1;
tempaa1OR=rr+sig*sig/2-la*zetaaOR;
tempaa2OR=tempaa1OR-sig*sig;
bigS*cprob[tempaa1OR,eta1-1,eta2+1,la*(1+zetaaOR),p*eta1/((1+zetaaOR)*(eta1-
1)),sig,Log[bigK/bigS],bigT,nStep]-bigK*Exp[-
rr*bigT]*cprob[tempaa2OR,eta1,eta2,la,p,sig,Log[bigK/bigS],bigT,nStep];
```

```
volImplicitaKOU[S_,X_,r_,T_,CM_,eta1_,eta2_,lambda_,p_,nn_]:= (
vLow=0.001;
vHigh=2;
epsilon=1/10000;
```

```

cLow=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vLow,r,S,X,T,nn];
If[cLow>CM,vi=0.001];
If[cLow>CM,Goto[fimimpl]];
cHigh=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vHigh,r,S,X,T,nn];
vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
Block[{i=0},Label[inicio];
vLow=If[callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]<CM,vi,vLow];
vHigh=If[callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]>=CM,vi,vHigh];
cLow=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vLow,r,S,X,T,nn];
cHigh=callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vHigh,r,S,X,T,nn];
vi=vLow+(CM-cLow)*(vHigh-vLow)/(cHigh-cLow);
(*Print[vi,"-----",callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]];*)i:=If[Abs[CM-
callKOU[eta1,eta2,lambda,p,vi,r,S,X,T,nn]]<epsilon,1,0];
If[vi<0.001,Goto[fimimpl]];
If[i<1,Goto[inicio]];
Label[fimimpl];
vi);

lambdaImplicitaKOU[S_,X_,r_,T_,CM_,eta1_,eta2_,vol_,p_,nn_] := (
epsilon=1/10000;
delta=5;
laux=0;
lant=0;
cc=0;
ccant=0;
Block[{i=0},Label[inicio];
If[ccant>cc,Goto[fimlambda]];
cc=callKOU[eta1,eta2,laux,p,vol,r,S,X,T,nn];
If[ccant>cc,Goto[fimlambda]];
If[cc<CM,lant=laux];
If[cc<CM,ccant=cc];
If[cc<CM,laux=laux+delta];
If[cc>CM,If[laux==0,Goto[fimlambda],delta=delta/2]];
If[cc>CM,If[laux==0,Goto[fimlambda],laux=laux-delta]];
If[Abs[cc-CM]>epsilon,Goto[inicio],lant=laux];
Label[fimlambda];
Print["CC=",cc," CM=",CM," laux=",laux," lant=",lant];
N[lant]);

(* Parametros do back-test *)
NDE=5; (* numero dias para calibrar *)
NDP=5; (* numero dias para estimar/prever *)
TOTDIAS=102; (* numero total de dias na amostra *)

ClearAll;
S:=Import["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007V2.txt","table"];
TOTLINHA=Length[S];
(* LAYOUT DE PETR_2007.txt *)
(* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
(* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)

SS:={};
(* proxlinha=1; *)
proxlinha=1;
Block[{i=1},Label[inicio];

linha=proxlinha;
DTINIC=S[[linha]][[2]];

Block[{j=1},Label[inicio];

```

```

If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
volewma=S[[linha]][[9]];
linha=linha+1;
j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[j<=NDE,Goto[inicioj]];

lambdamed1 = 0;
lambdamed2 = 0;
lambdamed3 = 0;
sant1=0;
sant2=0;
sant3=0;

(*callKOU[eta1_,eta2_,la_,p_,sig_,rr_,bigS_,bigK_,bigT_,nStep_]*)
Print["linha=",linha-1," proxlinha=",proxlinha];

(* assumindo inicialmente 70% da volatilidade do ativo-objeto é por conta do sigma MBG e p=0.35 *)

M1[la_]:=Sum[Abs[S[[i]][[5]]-
callKOU[20,20,la,0.35,volewma*0.7,S[[i]][[10]],S[[i]][[4]],S[[i]][[7]],S[[i]][[11]],10]]^2,{i,proxlinha,linha-1}]];
lant=0;
latu=0;
delta=1;
latu=latu+delta;
satu=M1[0];
Block[{ii=0},Label[inicioii];
sant=satu;
satu=M1[latu];
Print[" latu=",latu," lant=",lant," satu=",satu," sant=",sant];
If[satu<sant,lant=latu];
If[satu<sant,latu=latu+delta];
If[satu<sant,Goto[inicioii]];
sant1=sant;
If[lant==0,lambdamed1=0,lambdamed1=lant];

(* assumindo inicialmente 70% da volatilidade do ativo-objeto é por conta do sigma MBG e p=0.5 *)

M2[la_]:=Sum[Abs[S[[i]][[5]]-
callKOU[20,20,la,0.5,volewma*0.7,S[[i]][[10]],S[[i]][[4]],S[[i]][[7]],S[[i]][[11]],10]]^2,{i,proxlinha,linha-1}]];
lant=0;
latu=0;
delta=1;
latu=latu+delta;
satu=M2[0];
Block[{ii=0},Label[inicioii];
sant=satu;
satu=M2[latu];
Print[" latu=",latu," lant=",lant," satu=",satu," sant=",sant];
If[satu<sant,lant=latu];
If[satu<sant,latu=latu+delta];
If[satu<sant,Goto[inicioii]];
sant2=sant;
If[lant==0,lambdamed2=0,lambdamed2=lant];

(* assumindo inicialmente 70% da volatilidade do ativo-objeto é por conta do sigma MBG e p=0.65 *)

M3[la_]:=Sum[Abs[S[[i]][[5]]-
callKOU[20,20,la,0.65,volewma*0.7,S[[i]][[10]],S[[i]][[4]],S[[i]][[7]],S[[i]][[11]],10]]^2,{i,proxlinha,linha-1}]];

```

```

lant=0;
latu=0;
delta=1;
latu=latu+delta;
satu=M3[0];
Block[{ii=0},Label[inicioii];
  sant=satu;
  satu=M3[latu];
  Print[" latu=",latu," lant=",lant," satu=",satu," sant=",sant];
  If[satu<sant,lant=latu];
  If[satu<sant,latu=latu+delta];
  If[satu<sant,Goto[inicioii]];
sant3=sant;
If[lant==0,lambdamed3=0,lambdamed3=lant];

Print[sant1,"/",sant2,"/",sant3];
Print[lambdamed1,"/",lambdamed2,"/",lambdamed3];

pp=0;
lambdaest=0;

If[sant1<sant2,If[sant1<sant3,lambdaest=lambdamed1,lambdaest=lambdamed3],If[sant2<sant3,lambdaest=lambdamed2,lambdamed3=lambdamed3]];
  If[sant1<sant2,If[sant1<sant3,pp=0.35,pp=0.65],If[sant2<sant3,pp=0.5,pp=0.65]];

Print[lambdaest,"//////",pp];

linha=proxlinha;
DTINIC=S[[linha]][[2]];
XY:={ };
Block[{j=1},Label[iniciojj];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
  (*VolImplicitaKOU[S_,X_,r_,T_,CM_,eta1_,eta2_,lambda_,p_,nn_]*)

volimpl=volImplicitaKOU[S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[10]],S[[linha]][[11]],S[[linha]][[5]],20,20,lambdaest,pp,10];
  Print[linha,"---->",volimpl,"---->",lambdaest];
  If[volimpl>0.01,If[volimpl<0.50,XY=Append[XY,{S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]],volimpl}]]];
  linha=linha+1;
  j=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,j+1,j];
  DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
  If[j<=NDE,Goto[iniciojj]];

Print[Regress[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}]];
v[m_,t_]=Fit[XY,{1,m,m*m,m*m*m,t},{m,t}];

proxlinha=linha;
Print["====Linha Excel=====>",proxlinha,"====lambdaamin=",lambdaest];
DTINIC=S[[linha]][[2]];
Block[{k=1},Label[iniciok];
  If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
  volimpl=v[S[[linha]][[12]],S[[linha]][[11]]];
  If[volimpl<0.001,volimpl=0.001];
  If[volimpl>0.50,volimpl=0.50];
  (* LAYOUT DE PETR_2007.txt *)
  (* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *)
  (* DT, NDIA, Ativo, S, CMERC, NEG, K, DTEXERC, VOLEWMA, R, T, MN *)
  (* callKOU[eta1_,eta2_,la_p_sig_,rr_,bigS_,bigK_,bigT_,nStep_] *)

```

```

c=callKOU[20,20,lambdaest,pp,volimpl,S[[linha]][[10]],S[[linha]][[4]],S[[linha]][[7]],S[[linha]][[11]],10];
Print["C=",c," VOL=",volimpl," lambda=",lambdaest," pp=",pp];
SS=Append[SS,Append[Append[S[[linha]],c],volimpl]];
linha=linha+1;
k=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,k+1,k];
DTINIC=If[S[[linha]][[2]]!=DTINIC,S[[linha]][[2]],DTINIC];
If[k≤NDP,Goto[iniciok]];
If[linha>TOTLINHA,Goto[fimi]];
i=S[[proxlinha]][[2]];
Print["====Dia N=====>",i];
If[i≤TODDIAS-NDE,Goto[inicioi]];
Label[fimi];
Export["c:\ppga\projeto\mathematica\VALE_2007_BT_KOU_CALIB_LAMBDA_VOLIMPL_V3.csv",SS,"XL
S"];

```

6.10 ANEXO J – SIMULAÇÃO MONTE CARLO – *HEDGE* PELO DELTA

```
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`ContinuousDistributions`
<<Statistics`DiscreteDistributions`
```

```
(* SIMULAÇÃO MONTE CARLO - HEDGE PELO DELTA - REBONATO (2004, PÁG. 104) *)
(*****)
```

```
ClearAll[]
(* parametros da call *)
txlivre=12/100;
mi=0;
volatilidade=30/100;
szero=40;
strike=40;
t=0;
TT=0.33;
nsteps=40;
stepsize=TT/nsteps;
```

```
(* PARAMETROS SIMULACAO *)
qtdsimulacao=1;
amostras=2000;
tabelaprecos=Range[qtdsimulacao];
tabelaport=Range[qtdsimulacao];
qtd=TT/stepsize+1;
passo=Range[qtd];
caminho=Range[qtd];
precofuturo=Range[amostras];
```

```

passo[[i]]=passo[[i-1]]+stepsize;
caminho[[i]]=caminho[[i-1]]*(1+mi*stepsize+volatilidade*Sqrt[stepsize]*RandomNormal[0,1]);
(*If[s==1800,Print["d1=",d1," denominador=", (TT-passo[[i]])^(1/2)," passo=",passo[[i]],
" stepsize=",stepsize]];*)
If[TT-passo[[i]]>=stepsize,
deltanovo=CDF[ndist,(Log[caminho[[i]]/strike]+(txlivre+(volatilidade^2)/2
*(TT-passo[[i]]))/(volatilidade*((TT-passo[[i]])^(1/2))))],deltanovo=delta];
qtitulo=qtitulo*(1+txlivre*stepsize)+(deltanovo-delta)*caminho[[i]];
delta=deltanovo;
(*If[s==1800,Print["Qtitulo=",qtitulo," Delta=",delta," S=",caminho[[i]]]];*)
i=i+1;
If[j<qtd+1,Goto[top]];
precofuturo[[s]]=caminho[[qtd]];
portfuturo[[s]]=delta*caminho[[qtd]]-qtitulo;
s=s+1;
If[s<amostras+1,Goto[casos]]];
somaprecos=0;
somaport=0;
Block[{i=1},
Label[retorno];
somaprecos=somaprecos+Max[precofuturo[[i]]-strike,0];
somaport=somaport+portfuturo[[i]];
i=i+1;
If[i<amostras+1,Goto[retorno]]];
APDO=Table[portfuturo[[i]]-Max[precofuturo[[i]]-strike,0],{i,1,amostras}];
Print["Mean_pd_o=",Mean[APDO]];
Print["dp_pd_o=",StandardDeviation[APDO]];
tabelaprecos[[cont]]=somaprecos/amostras;
tabelaport[[cont]]=somaport/amostras;
Print[cont,"----",tabelaprecos[[cont]]];
Print[cont,"----",tabelaport[[cont]]];
valormedio=valormedio+tabelaprecos[[cont]];
valormediop=valormediop+tabelaport[[cont]];
Print["MediaOp=",valormedio/cont];
Print["MediaPort=",valormediop/cont];
cont=cont+1;
If[cont<qtdsimulacao+1,Goto[simulacao]]];

```

6.11 ANEXO K – SIMULAÇÃO COM SALTOS – *HEDGE* COM SEGUNDA OPÇÃO

```

<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`ContinuousDistributions`
<<Statistics`DiscreteDistributions`

(* SIMULAÇÃO MONTE CARLO - HEDGE COM SEGUNDA OPÇÃO E SALTOS - REBONATO (2004,
PÁG. 502) *)
(*****)

ClearAll[]
(* parametros da call *)
txlivre=5/100;
mi=0;
volatilidade=17/100;
volj=17.1/100;
szero=100;
strike=100;
TT2=2;
t=0;
TT=1;
nsteps=10;
stepsize=TT/nsteps;

callBSM[S_,X_,v_,r_,T_]:= (nd[d_]:=CDF[NormalDistribution[0,1],d];
  d1:=(Log[S/X]+(r+v^2/2)*T)/(v*Sqrt[T]);
  d2:=d1-v*(T^(1/2));
  S*nd[d1]-X*Exp[-r*T]*nd[d2]);

(* PARAMETROS SIMULACAO *)
qtdsimulacao=1;
amostras=2048;
tabelaprecos=Range[qtdsimulacao];
tabelaport=Range[qtdsimulacao];
tabelaportp=Range[qtdsimulacao];
qtd=TT/stepsize+1;
passo=Range[qtd];
caminho=Range[qtd];
precofuturo=Range[amostras];
portfuturo=Range[amostras];
portfuturop=Range[amostras];
valormedio =0;
valormediop=0;
valormediopp=0;
lambda=0.4;
Jaml=0.9;
Jvol=0.10;
ndist=NormalDistribution[0,1];
SeedRandom[1];

(* GERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS SEGUNDO UMA DISTRIBUIÇÃO *)
RandomNormal[μ_,σ_]:=Random[NormalDistribution[μ,σ]]
RandomPoisson[μ_]:=Random[PoissonDistribution[μ]]

Block[{cont=1},
  Label[simulacao];
  Block[{s=1},

```

```

Label[casos];
Print[s];
passo[[1]]=0;
caminho[[1]]=szero;
totsalto=0;
ntant=0;

c=N[callBSM[szero,strike,volj,txlivre,TT]];
h=N[callBSM[szero,strike,volj,txlivre,TT2]];
cj=N[callBSM[szero*Jampl,strike,volj,txlivre,TT]];
hj=N[callBSM[szero*Jampl,strike,volj,txlivre,TT2]];

d1=(Log[caminho[[1]]/strike]+(txlivre+(volj^2)/2)*(TT-passo[[1]]))/(volj*((TT-passo[[1]]^(1/2)));
delta=N[CDF[ndist,d1]];
d1h=(Log[caminho[[1]]/strike]+(txlivre+(volj^2)/2)*(TT2-passo[[1]]))/(volj*((TT2-passo[[1]]^(1/2)));
deltah=N[CDF[ndist,d1h]];
qtitulo=delta*caminho[[1]]-c; (* cash recebido venda delta - preço pago opção *)

gama=-(delta-(cj-c))/(caminho[[1]]*Jampl-caminho[[1]])/(deltah-(hj-h)/(caminho[[1]]
    *Jampl-caminho[[1]]));
alfa=-delta-gama*deltah;
qtitulop=alfa*caminho[[1]]+c+gama*h; (* cash recebido venda alfa - preço pago opção 1 e 2 *)

Block[{i=2},
  Label[top];
  passo[[i]]=passo[[i-1]]+stepsize;
  nt=0;
  If[lambdas==0,nt=0,nt=RandomPoisson[lambdas*stepsize]];
  salto=Product[RandomNormal[Jampl,Jvol],{k,ntant,ntant+nt-1}];
  ntant=ntant+nt;

  caminho[[i]]=caminho[[i-1]]*(Exp[(mi-0.5*(volatilidade^2))
    *stepsize+volatilidade*Sqrt[stepsize]*RandomNormal[0,1]])*salto;

  If[TT-passo[[i]]>=stepsize,
    c=N[callBSM[caminho[[i]],strike,volj,txlivre,TT-passo[[i]]],c=Max[caminho[[i]]-strike,0]];
    h=N[callBSM[caminho[[i]],strike,volj,txlivre,TT2-passo[[i]]]];
    If[TT-passo[[i]]>=stepsize,
      cj=N[callBSM[caminho[[i]]*Jampl,strike,volj,txlivre,TT-passo[[i]]],cj=Max[caminho[[i]]-strike,0]];
      hj=N[callBSM[caminho[[i]]*Jampl,strike,volj,txlivre,TT2-passo[[i]]]];

    If[TT-passo[[i]]>=stepsize,
      deltanovo=CDF[ndist,(Log[caminho[[i]]/strike]+(txlivre+(volj^2)/2)*(TT-passo[[i]]))/(volj*((TT-
        passo[[i]]^(1/2))))],deltanovo=delta];
      qtitulo=qtitulo*(1+txlivre*stepsize)+(deltanovo-delta)*caminho[[i]];

    If[TT-passo[[i]]>=stepsize,
      deltah=CDF[ndist,(Log[caminho[[i]]/strike]+(txlivre+(volj^2)/2)*(TT2-passo[[i]]))/(volj*((TT2-
        passo[[i]]^(1/2))))];

    If[TT-passo[[i]]>=stepsize,
      gamanovo=-(deltanovo-(cj-c))/(caminho[[i]]*Jampl-caminho[[i]])/(deltah-(hj-h)/(caminho[[i]]*Jampl-
        caminho[[i]]),gamanovo=gama];

    If[TT-passo[[i]]>=stepsize,alfanovo=-deltanovo-gamanovo*deltah,alfanovo=alfa];

    qtitulop=qtitulop*(1+txlivre*stepsize)+(alfanovo-alfa)*caminho[[i]]+(gamanovo-gama)*h;
    delta=deltanovo;
    alfa=alfanovo;
    gama=gamanovo;

```

```

i=i+1;
If[i<qtd+1,Goto[top]];
precofuturo[[s]]=caminho[[qtd]];
portfuturo[[s]]=delta*caminho[[qtd]]-qtitulo;
portfuturop[[s]]=-alfa*caminho[[qtd]]+qtitulop-gama*h;
s=s+1;
If[s<amostras+1,Goto[casos]];
somaprecos=0;
somaport=0;
somaportp=0;
Block[{i=1},
  Label[retorno];
  somaprecos=somaprecos+Max[precofuturo[[i]]-strike,0];
  somaport=somaport+portfuturo[[i]];
  somaportp=somaportp+portfuturop[[i]];
  i=i+1;
  If[i<amostras+1,Goto[retorno]];
APDO=Table[portfuturo[[i]]-Max[precofuturo[[i]]-strike,0],{i,1,amostras}];
APVO=Table[portfuturop[[i]]-Max[precofuturo[[i]]-strike,0],{i,1,amostras}];
Print["Mean_pd_o=",Mean[APDO]];
Print["dp_pd_o=",StandardDeviation[APDO]];
Print["Mean_pv_o=",Mean[APVO]];
Print["dp_pv_o=",StandardDeviation[APVO]];
tabelaprecos[[cont]]=somaprecos/amostras;
tabelaport[[cont]]=somaport/amostras;
tabelaportp[[cont]]=somaportp/amostras;
Print[cont,"---->",tabelaprecos[[cont]]];
Print[cont,"---->",tabelaport[[cont]]];
Print[cont,"---->",tabelaportp[[cont]]];
valormedio=valormedio+tabelaprecos[[cont]];
valormediop=valormediop+tabelaport[[cont]];
valormediopp=valormediopp+tabelaportp[[cont]];
Print["MediaOp=",valormedio/cont];
Print["MediaPort=",valormediop/cont];
Print["MediaPortP=",valormediopp/cont];
cont=cont+1;
If[cont<qtdsimulacao+1,Goto[simulacao]];

```