Universidade Estadual Paulista – UNESP
Programa de Pós-Graduação em Economia

# Teorias de Crescimento Econômico: Um Estudo Comparado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Economia.

**Candidata: Júlia Mendonça da Costa**
**Orientador: Mário Augusto Bertella**

Araraquara
Novembro de 2007

# AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar meus passos.

Aos meus queridos pai e madrasta, pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Aos amigos que fiz nesta cidade, pela força.

Ao meu querido orientador, pela amizade, confiança e paciência.

Aos professores que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A banca examinadora.

A Capes, pelo apoio financeiro.

*Júlia Mendonça da Costa*

# RESUMO

Os aspectos determinantes do crescimento econômico têm sido amplamente investigados por economistas de variadas tendências. A importância do tema dentro da teoria econômica data de mais de dois séculos, com a publicação da obra de Adam Smith, *Wealth of the nations.* A moderna abordagem da teoria do crescimento, caracterizada pela utilização da modelagem macrodinâmica, teve início com a contribuição pioneira de Harrod (1939, 1946). Este trabalho motivou o aparecimento de modelos de crescimento, tanto neoclássicos, quanto pós-keynesianos. O presente trabalho procura fazer uma exposição destas duas abordagens, com a finalidade de compará-las.

**Palavras-chave**: crescimento econômico, progresso tecnológico, distribuição.

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O crescimento econômico de um país possui importantes implicações sobre o bem estar dos indivíduos. De fato, o crescimento agregado é, provavelmente, o maior e mais importante fator que afeta os níveis individuais de renda. Desta forma, entender os determinantes do crescimento é a chave para entender a elevação do padrão de vida dos indivíduos no mundo, e as causas da pobreza de determinadas regiões (Barro & Sala-i-Martin, 1995). O desempenho do crescimento de países distintos tem sofrido grandes variações ao longo do último século. O padrão de vida no Japão, por exemplo, aumentou sistematicamente durante o pós II guerra mundial, enquanto países africanos continuaram atrasados e pobres.

Uma leitura da história econômica recente sugere que diferenças existentes entre o grau de desenvolvimento de nações distintas não é simplesmente o resultado de um processo aleatório, e altas taxas de crescimento estão sistematicamente correlacionadas a variáveis que descrevem o ambiente político e econômico de uma nação (Grossman & Helpman, 1991).

O crescimento econômico observado nas últimas décadas tem motivado estudos sobre sua natureza entre economistas de variadas tendências. A importância do tema dentro da teoria econômica data de mais de dois séculos, com a publicação da obra de Adam Smith, *Wealth of the nations*.

Smith realizou uma investigação acerca do tema, introduzindo duas proposições à teoria econômica. A primeira delas dizia respeito ao conceito de equilíbrio via livre competição do mercado. A segunda proposição destacava o papel da poupança como motor da acumulação de capital, devido a identidade existente entre poupança e investimento, sendo esta, portanto, o fator chave para explicar o crescimento da riqueza das nações ao longo do tempo. A segunda proposição de Smith foi levada em conta pela teoria de crescimento neoclássica, desenvolvida durante a década de 1950, e início dos anos 60 (Romer, 1989).

De acordo com Bertella (2000), a moderna abordagem da teoria do crescimento, caracterizada pela utilização da modelagem macrodinâmica, teve início com a contribuição pioneira de Harrod (1939, 1946), o qual desejou saber se o crescimento de uma economia capitalista poderia se dar de forma contínua a uma taxa estável. Em seu modelo, Harrod considera a existência de uma relação capital produto desejada igual a

$$g_w = \frac{s}{v}$$

onde $g_w$ é a taxa de crescimento do produto, *s* é a propensão a poupar constante da economia e *v* é a relação capital produto também assumida constante. Harrod afirma que esta taxa é compatível com as expectativas dos capitalistas, chamando-a de taxa garantida. Como esta taxa se baseia em expectativas individuais, não há mecanismo que garanta que ela irá se cumprir. Assim a taxa efetiva de crescimento, ou seja a taxa realizada, $g_a$, pode ser diferente da taxa garantida. O fio da navalha foi a expressão utilizada por Harrod para mostrar que apenas uma trajetória existiria para a taxa garantida, ou seja, uma única taxa de crescimento seria compatível com a manutenção do equilíbrio no longo prazo.

Outra questão levantada por Harrod é a compatibilidade da taxa garantida com a capacidade de expansão da economia, dada pelas taxas de crescimento da produtividade, $\sigma$, e da força de trabalho, $n$. Esta taxa de expansão do sistema foi chamada de taxa de crescimento natural, $g_n$, dada pela seguinte expressão:

$$g_n = n + \sigma$$

Desta forma, o crescimento do pleno emprego requer:

$$g_a = g_w = g_n$$

ou seja, a taxa de crescimento realizada deve ser igual a taxa natural. No entanto, Harrod afirmou que não existiria na economia nenhum mecanismo capaz de garantir a compatibilidade destas taxas, sendo o processo de crescimento capitalista endogenamente instável em sua conclusão.

A conclusão de Harrod motivou o aparecimento de modelos de crescimento, tanto neoclássicos, por parte do *mainstream* da teoria econômica, quanto pós-keynesianos, por parte da abordagem heterodoxa[1] da economia.

A resposta neoclássica se deu por meio dos trabalhos de Solow (1956) e Swan (1956). A reação pós-keynesiana, por sua vez, foi verificada nos trabalhos de Kaldor (1956) e Robinson (1956, 1962).A teoria neoclássica do crescimento, ou seja, a abordagem Solow-Swan ou modelo de Solow, ajudou a esclarecer o papel da acumulação de capital físico, destacando a importância do progresso técnico.

O modelo de Solow fundamentou-se na hipótese de retornos constantes de escala em um

se rso( )-120.088(r)24.5938(n)6.54813(ô)9895( )d4(u)-14.0123(a)32.7909 doecegendame(c)-8.33011(a
9.84604(g)681.7144 d(c)-28.89063()10.71.5406aus clut

primeira geração de modelos de crescimento durante a década de 60, em que a variável tecnologia não foi explicada. Deste modo, os modelos da tradição neoclássica foram denominados modelos de crescimento exógenos.

O interesse da pesquisa acadêmica acerca dos modelos de crescimento arrefeceu durante a década de 70, quando economistas de todo o mundo voltaram sua atenção para questões de significância imediata, tais como inflação e desemprego.

A nova teoria do crescimento teve início com o trabalho de Romer (1986), o qual fez ressurgir o interesse pelo tema, dando início a uma segunda geração de modelos: Lucas (1988); grossman & Helpman (1991); Aghion & Howitt (1992), entre outros. Tais modelos destacam a economia das idéias, empenhando-se em explicar a taxa de crescimento como um resultado de equilíbrio endógeno do comportamento racional dos agentes otimizadores, em termos de tecnologia e preferências. Por esta razão ficaram conhecidos como modelos de crescimento endógenos.

Romer (1986) destacou o papel das externalidades positivas geradas pelo conhecimento, que poderiam fazer com que a renda *per capita* crescesse sem restrições. Lucas (1988), reforçou a hipótese dos retornos externos gerados pelo capital humano. Já trabalho de Romer (1990) procurou explicar as motivações microeconômicas por trás do progresso tecnológico. Segundo este, o avanço tecnológico envolve a criação de novas idéias, que são bens não rivais, ou seja, podem ser utilizadas simultaneamente em diferentes processos, permitindo a presença de retornos crescentes.

Para um dado nível de tecnologia, ou ainda, para um dado nível de conhecimento, é razoável assumir a hipótese de retornos constantes e fatores de produção rivais, tais como capital, trabalho, e terra. No entanto, existirá uma tendência a retornos crescentes se as idéias, insumo não rival, forem incluídas como fator de produção (Barro & Sala-i-Martin, 1995). Deste modo, dada a aceitação de retornos crescentes, alguns destes modelos se desenvolvem em um ambiente de concorrência imperfeita, ao contrário da teoria neoclássica.

A nova teoria do crescimento tem sido analisada tanto em economias fechadas, quanto em economias abertas. De fato, uma das características da nova teoria do crescimento é a presença de uma maior orientação internacional, refletindo o aumento da importância de aspectos externos na macroeconomia em geral (Grossman & Helpman, 1991).

Os modelos heterodoxos, diferentemente da tradição clássica e neoclássica, não consideram a igualdade entre poupança e investimento. Portanto, a poupança não pode ser entendida como o motor da acumulação de capital. É introduzida uma função investimento independente, conjuntamente ao grau de utilização da capacidade, considerado endógeno. Desta forma, os resultados obtidos tornam-se completamente diferentes da abordagem neoclássica.

Tais diferenças conduzirão a duas predições de política econômica distintas: para os neoclássicos uma redistribuição de renda dos lucros para os salários conduziria a um nível de crescimento menor, devido a um menor nível de poupança, enquanto para os heterodoxos, a redistribuição de renda em favor dos trabalhadores poderia mover a economia para um maior grau de utilização da capacidade e maior crescimento.

De acordo com Bertella (2006), a evolução da macrodinâmica do crescimento pela corrente heterodoxa se deu primeiramente pelos modelos desenvolvidos por Robinson e Kaldor, pós-keynesianos de primeira geração.

Para Robinson, a acumulação de capital seria o resultado de características históricas, políticas e psicológicas da economia. Kaldor, por outro lado, reconhecia a importância do progresso tecnológico, trazido pela inovação, como sendo o responsável por taxas altas e baixas de acumulação e de produto. Tais modelos encontravam-se situados em um ambiente de concorrência perfeita, onde a economia opera a plena capacidade.

Os modelos atuais - Rowtorn (1982), Dutt (1984; 1987; e 1990) e Bhaduri e Marglin (1990), entre outros – tem como pressupostos fundamentais temas recorrentes da macro não neoclássica, tais como distinção entre classes sociais (trabalhadores e capitalistas), conflito distributivo, além de uma relação de causalidade recíproca entre distribuição e acumulação.

Tais modelos são denominados pós-keynesianos de segunda geração ou Kaleckianos, por incorporar a existência de um ambiente oligopolístico, em que o grau de utilização da capacidade é endógeno.

Conforme observa Bertella (2006), os modelos pós-keynesianos de segunda geração apresentam quatro características fundamentais: os preços estão relacionados aos custos, e são influenciados pelo grau de monopólio; os custos marginais são constantes até que se alcance a plena utilização da capacidade; o grau de utilização da capacidade é inferior a unidade; e ainda, a função investimento é dependente não somente da taxa de lucro, como também do grau de utilização da capacidade.

A atual abordagem Kaleckiana, tanto quanto a nova teoria do crescimento endógeno, possui a finalidade de explicar os determinantes fundamentais do crescimento econômico, dentro de um ambiente de concorrência imperfeita.

O objetivo do presente trabalho é realizar uma análise comparativa entre modelos de crescimento econômico da tradição neoclássica e modelos desenvolvidos pela abordagem heterodoxa da economia, ou seja, modelos pós-keynesianos e kaleckianos. Em particular, trata-se de apresentar a evolução do pensamento neoclássico, desde o trabalho Solow (1956) até a nova teoria do crescimento, caracterizada pela existência do progresso técnico como um fator endógeno. Em contraposição, será mostrada a crítica heterodoxa aos desenvolvimentos neoclássicos, e os modelos alternativos propostos por esta corrente, dentro de uma perspectiva macrodinâmica. Desta forma, procurar-se-á confrontar as visões neoclássica e heterodoxa, ressaltando as importantes contribuições de cada uma delas.

O trabalho está organizado como se segue. No capítulo 1 será feita a apresentação da abordagem neoclássica do crescimento econômico. No capítulo 2 será mostrada a crítica heterodoxa aos modelos neoclássicos, e a visão heterodoxa sobre crescimento dentro de uma perspectiva macrodinâmica. Na conclusão do trabalho, serão feitas comparações entre as duas abordagens.

# CAPÍTULO 1. ABORDAGEM NEOCLÁSSICA DO CRESCIMENTO ECONÔMICO

## 1.1. Introdução

O estudo do crescimento econômico na macroeconomia tradicional, ou seja, tradição clássica e neoclássica, pode ser dividido em duas fases. A primeira fase denominaremos de teoria do crescimento exógeno. A segunda fase, por sua vez, é conhecida como a nova teoria do crescimento, ou ainda, teoria do crescimento endógeno.

A teoria do crescimento exógeno é representada, em um primeiro momento, pelos trabalhos de Solow (1956) e Swan (1956). Posteriormente, Cass (1965) e Koopmans (1965) realizaram melhorias no modelo de Solow, por meio da incorporação do comportamento microeconômico dos agentes, tornando possível um estudo mais detalhado sobre questões relativas a poupança. A teoria exógena possibilitou o entendimento da dinâmica de transição do crescimento econômico, entretanto não foi capaz de explicar o persistente crescimento da renda per capita no longo prazo. A principal conclusão e limitações dos modelos neoclássicos foi à atribuição do crescimento econômico ao progresso tecnológico exógeno.

A nova teoria do crescimento procura explicar a natureza do progresso tecnológico, e seus efeitos sobre o crescimento de longo prazo, por meio de modelos em que a tecnologia é uma variável endógena. Por esta razão é denominada teoria do crescimento endógeno.

A primeira tentativa no sentido de explicar a natureza do progresso tecnológico em um modelo de crescimento econômico foi realizada por Romer (1986), e posteriormente por Lucas (1988). Estes autores destacaram as dotações de conhecimento e de capital humano da economia como os fatores determinantes para a ocorrência do progresso tecnológico, sendo estes fatores capazes de gerar importantes externalidades positivas, as quais mais do que compensariam os rendimentos marginais decrescentes dos fatores de produção tradicionais. Ambos os modelos foram desenvolvidos em um ambiente de concorrência perfeita.

É possível afirmar que estes dois modelos representam uma primeira geração de modelos de crescimento endógeno, devido às limitações apresentadas tal como, a ausência de um estudo microeconômico das motivações do progresso tecnológico. Apesar de acrescentarem o conhecimento e o capital humano à estrutura formal dos modelos de crescimento neoclássicos, não foram capazes de tratar a mudança tecnológica como endógena.

O trabalho de Romer (1990), ao introduzir aspectos microeconômicos, mostrou como o comportamento maximizador dos agentes pode tornar endógeno o progresso tecnológico. Romer introduziu importante contribuição ao esclarecer que a mudança tecnológica endógena não é compatível com uma estrutura de concorrência perfeita. Isto ocorre por que a característica determinante da tecnologia é a geração de retornos crescentes de escala, quando utilizada como um insumo da função de produção.

Este capítulo fará um breve exame do modelo de Solow, além de apresentar três trabalhos sobre crescimento endógeno: Lucas (1988a), Lucas (1988b) e Romer (1990). O modelo de Solow será exposto devido a sua importância enquanto ponto de partida para o estudo do crescimento econômico dentro da abordagem neoclássica. Os modelos de Romer (1986) e Lucas (1988a&b) resgatam este estudo, introduzindo importantes contribuições, como a economia das idéias e o papel do capital humano. O trabalho de Romer (1990) será exposto como forma de evidenciar a importância de aspectos microeconômicos que estão na origem do progresso tecnológico.

O restante do capítulo está organizado como se segue. Na seção 1.2, será feita uma apresentação da teoria do crescimento exógeno, por meio da exposição do modelo de Solow. Na seção 1.3, serão mostrados os trabalhos Lucas (1988a&b), destacando o papel da economia das idéias e do capital humano, e ainda será apresentado o modelo de Romer (1990), com mudança tecnológica endógena. A última seção se encerra com as considerações finais.

## 1.2. Teoria do Crescimento Exógeno

Conforme Romer (1989), pelo fim do período clássico da história do pensamento econômico, datado por exemplo pelo trabalho de Mill [1848 (1983)], a noção de equilíbrio de estado estacionário da renda, determinado pela aplicação da lei dos rendimentos decrescentes aos insumos produtivos, capital e trabalho, já estava firmemente consolidada. Mill [1848 (1983)] admitiu a possibilidade de que este estado estacionário pudesse se modificar ao longo do tempo em resposta a mudanças no mundo físico, e concluiu que o processo de melhorias tecnológicas estaria por trás destas mudanças.

Percebe-se que já pela metade do século XIX, todos os elementos da teoria de crescimento neoclássica já haviam sido percebidos: retornos decrescentes de escala impondo limites à acumulação de capital, e mudanças exógenas em nosso entendimento do mundo físico, que poderiam elevar os retornos desta acumulação. Formular o modelo neoclássico de crescimento era simplesmente dar uma demonstração matemática rigorosa a hipóteses consensuais dentro da teoria neoclássica. E pode-se dizer que esta foi uma das contribuições do trabalho de Solow (1956).

O modelo de Solow (1956) foi o ponto de partida para o estudo do crescimento econômico dentro da abordagem neoclássica, tendo sido também uma resposta ao modelo desenvolvido por Harrod (1939). Segundo Solow, a principal falha de Harrod foi estudar problemas de longo prazo utilizando ferramentas de curto prazo. Ao afirmar que o estudo de longo prazo é um domínio da teoria neoclássica, Solow desenvolve seu modelo sob as condições neoclássicas usuais.

### 1.2.1 O Modelo de Solow

O modelo de Solow é, então, fundamentado nas tradicionais hipóteses simplificadoras da realidade, quais sejam: a economia produz apenas um único bem, parte do qual é consumido e o resto é poupado e investido; a fração do produto poupada é constante; ausência de comércio internacional; retornos decrescentes de escala para cada um dos insumos produtivos isoladamente; elasticidade de substituição capital-trabalho positiva; equilíbrio de pleno emprego da força de trabalho; além de um ambiente de concorrência perfeita.

O bem (produto) único produzido pela economia é designado $Y$, em que a fração de produto poupada é uma constante, $s$, tal que a taxa de poupança é $sY$. O estoque de capital[2], $K$, representa a acumulação do produto desta economia. O investimento líquido é mensurado em termos do crescimento do estoque de capital. Assim, pela identidade entre poupança e investimento, tem-se a função que descreve a acumulação de capital ao longo do tempo,

$$\dot{K} = sY, \tag{1}$$

A produção do bem $Y$ requer a utilização dos insumos, capital, $K$, e trabalho, $L$. As possibilidades tecnológicas são assim representadas por uma função de produção Cobb-Douglas com retornos constantes de escala[3]:

---

[2] Supomos, para fins de simplificação, que não o capital não sofre depreciação.

[3] A pressuposição de retornos constantes de escala para $F(.)$ implica em que ao multiplicar os insumos capital, $K$, e trabalho, $L$, por uma constante positiva $\lambda$, o produto aumentará na mesma proporção, ou seja, $F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL)$ para todo $\lambda > 0$. Esta propriedade é também conhecida como homogeneidade de grau um em $K$ e $L$.

$$Y = sF(K, L) \tag{2}$$

Solow introduz o progresso técnológico exógeno ao modelo, acrescentando uma variável tecnologia, $A$ , à função de produção:

$$Y = sF(K, AL) \tag{3}$$

onde $AL$ é o trabalho efetivo. Substituindo (3) em (1):

$$\dot{K} = sF(K, AL), \tag{4}$$

O trabalho, $L$, e a tecnologia, $A$, crescem a taxas constantes, como segue:

$$\dot{L}(t) = L_0 e^{nt} \tag{5}$$

$$\dot{A}(t) = e^{gt} \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (4),

$$\dot{K} = sF\left(K, L_0 e^{(n+g)t}\right), \tag{7}$$

Quando se diz que uma economia é rica ou pobre, não é o produto total desta economia que deve ser analisado, e sim o produto por trabalhador, ou seja, o produto per capita da economia. Desta forma, é necessário que o modelo seja construído em termos per capita. Assim, o capital por trabalhador é descrito como $k = K / AL$, tal que $K = k \cdot AL = k \cdot L_0 e^{(n+g)t}$. Diferenciando esta expressão em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{K} = \dot{k}\, L_0 e^{(n+g)t} + (n + g)k L_0 e^{(n+g)t} \tag{8}$$

Subistituindo (8) em (7):

$$L_0 e^{(n+g)t}\left[\dot{k} + (n + g)k\right] = sF\left(K, L_0 e^{(n+g)t}\right) \tag{9}$$

Devido a presença dos retornos constantes de escala, é possível dividir ambas as variáveis em $F$ por $AL = L_0 e^{(n+g)t}$, e multiplica-las pelo mesmo fator. Assim,

$$L_0 e^{(n+g)t}\left[\dot{k} + (\dot{n} + g)k\right] = sL_0 e^{(n+g)t} F\left(\frac{K}{L_0 e^{(n+g)t}}, 1\right) \tag{10}$$

O que resulta em

$$\dot{k} + (n + g)k = sF(k) \tag{11}$$

Ou seja,

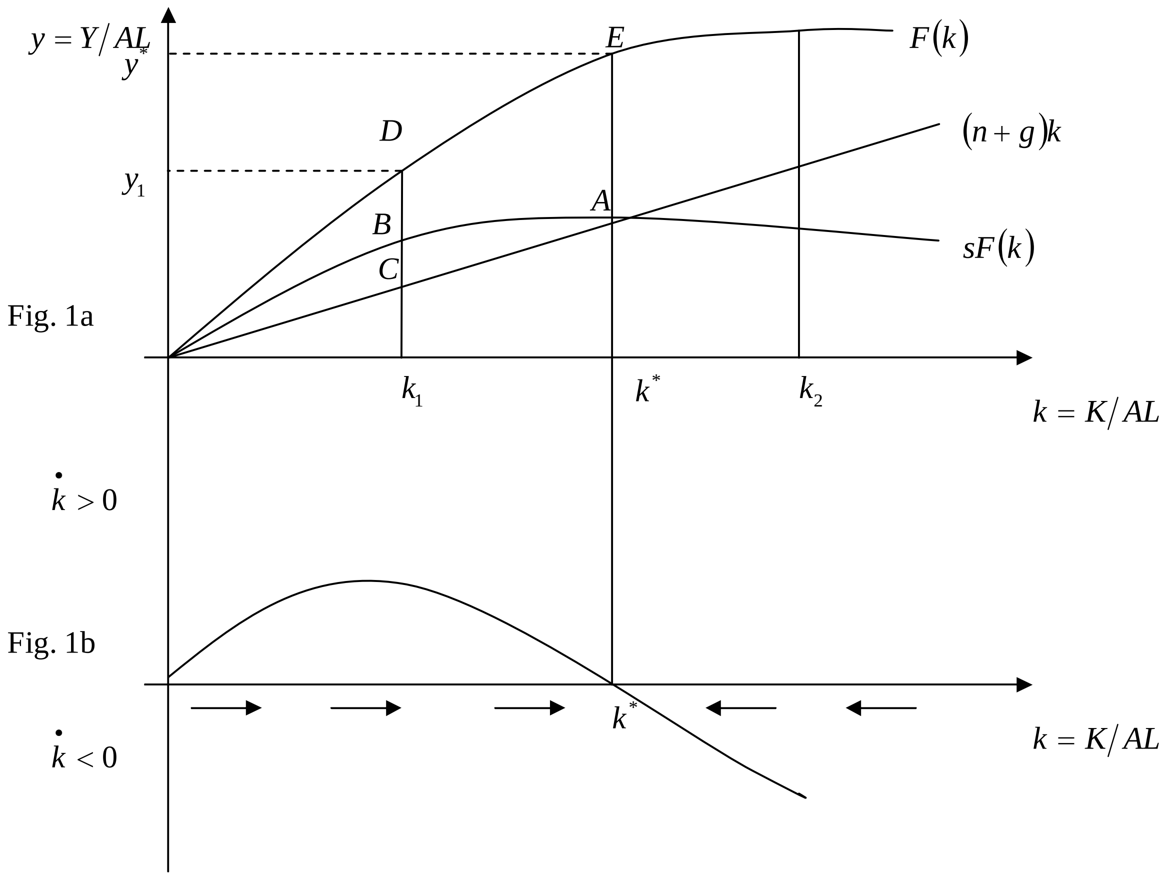
$$\dot{k} = sF(k) - (n + g)k \tag{12}$$

Na estrutura básica do modelo de Solow, destacam-se o impacto do crescimento da poupança, $s$, do crescimento populacional, $n$, e do progresso tecnológico, $A$. A equação (12) é a equação chave do modelo de Solow, descrevendo a taxa de variação do estoque de capital por unidade de trabalho efetivo como a diferença entre dois termos. O primeiro, $sF(k)$, é o investimento atual por unidade de trabalho efetivo. O segundo termo, $(n + g)k$, é o investimento de break even, ou seja, o investimento necessário para impedir a queda de $k$. Quando o investimento atual é igual ao investimento de break even, $k$ é mantido constante, e a economia se encontra no equilíbrio estacionário. Usando $^*$ para indicar os valores no estado estacionário, podemos definir o equilíbrio como:

$$sF(k^*) = (n + g)k^*$$

As equações que descrevem o crescimento do produto, $y = sF(k)$, e o crescimento da acumulação de capital, $\dot{k} = sF(k) - (n + g)k$, são representadas pelo diagrama básico do modelo de Solow, o qual é utilizado para análise da dinâmica de transição do modelo, com pode ser visto na figura 1a e 1b.

Figura 1 – Diagrama de Solow




Na figura 1a, a curva $F(k)$ é uma função de produção bem comportada, com retornos constantes de escala; $sF(k)$ mostra o nível de poupança por trabalhador ao longo de diferentes níveis de capital por trabalho efetivo; $(n+g)k$ descreve o investimento necessário para impedir a queda de $k$. No ponto $k_1$, a poupança por trabalhador, $B$, excede o investimento necessário, $C$, e a economia experimenta crescimento acelerado. Em $k_1$ o consumo por trabalhador é indicado por $D - B$ e o produto por trabalhador é $y_1$. Em $k_2$, devido ao fato de o investimento necessário ser menor do que a poupança por trabalhador, $k$ cai. A trajetória de crescimento equilibrado ocorre em $k^*$, ponto em que o investimento por trabalhador é igual ao investimento necessário. O produto por trabalhador é $y^*$ e o consumo por trabalhador é $E - A$. Na figura 1b é mostrada a relação entre $k^*$ e $k$ por meio do diagrama de fase. Quando $\dot{k} > 0$, $k$ está crescendo, e quando $\dot{k} < 0$, $k$ está caindo.

O diagrama de Solow nos diz que o crescimento da economia sempre convergirá para o equilíbrio de estado estacionário, $(k^*, \ y^*)$, independentemente das condições iniciais. Neste ponto, $(k^*, \ y^*)$, a renda per capita crescerá a uma taxa constante, equivalente a taxa de crescimento do progresso tecnológico exógeno. Assim, mudanças na taxa de poupança e na taxa de crescimento populacional são capazes de alterar o nível de equilíbrio da renda per capita, mas não o seu crescimento. A hipótese de convergência para o equilíbrio estacionário é a conclusão fundamental do modelo de Solow, a qual foi também aplicada para comparar taxas de crescimento entre diferentes países.

De acordo com o modelo de Solow, diferentes economias convergiriam para o mesmo equilíbrio estacionário, independentemente de suas dotações iniciais. Lucas (1988) critica tal hipótese, construindo um modelo em que uma economia que começa com baixos níveis de capital humano e físico continuará permanentemente abaixo de uma economia que inicia sua trajetória de crescimento com uma melhor dotação.

Em um segundo trabalho sobre crescimento econômico, Solow (1957) atribuiu a diferença entre a taxa de crescimento do produto e a taxa de crescimento dos fatores de produção à mudança tecnológica, dando origem ao chamado resíduo de Solow (Snowdon & Vane, 1999). O modelo de Solow tratou a tecnologia como uma variável exógena determinante do crescimento econômico de longo prazo, fornecendo as primeiras intuições para o desenvolvimento de modelos de crescimento pela abordagem neoclássica. No entanto, de acordo com o resultado de Solow, o principal determinante do crescimento, a mudança tecnologica, era tratada como um resíduo, e isto não poderia ser considerado satisfatório. Surgia assim, a necessidade de tornar o progresso tecnológico uma variável endógena ao modelo de crescimento econômico neoclássico.

Como será mostrado na próxima seção, os modelos de Romer (1986) e Lucas (1988), tentam resolver o problema do resíduo, incorporando o conhecimento e o capital humano no modelo de crescimento neoclássico. Estes trabalhos mantêm os mesmos postulados de Solow, especialmente no que tange a manutenção de uma estrutura de concorrência perfeita. Só mais adiante, a partir do trabalho de Romer (1990), os modelos neoclássicos passaram a considerar a necessidade de uma estrutura de concorrência imperfeita, compatível com retornos crescentes de escala, o que permitiu tornar a mudança tecnológica endógena.

## 1.3. Teoria do Crescimento Endógeno

No modelo de Solow, a taxa de crescimento econômico per capita no estado estacionário é igual a taxa de progresso tecnológico, assumida constante. Embora tal modelo seja interessante para a análise da dinâmica de transição, não é suficiente em explicar o motor do crescimento de longo prazo.

Entre 1970 e 1985, a pesquisa neoclássica macro desviou o foco de interesse em relação as questões do crescimento, tendo sido dominada neste período por questões relacionadas ao curto prazo, como ciclos reais, choques de oferta, estagflação, e o impacto das expectativas racionais sobre modelos macroeconômicos e formulações de política (Snowdon & Vane, 1999).

Em 1986, Romer publicou um estudo sobre o crescimento, abandonando a hipótese de retornos decrescentes à função de produção, e introduzindo o conceito de externalidade via acumulação do conhecimento. Lucas (1988), seguindo a mesma tendência, enfatizou a influência da acumulação de capital humano sobre a produtividade dos fatores de produção, inspirando o desenvolvimento de uma nova geração de modelos de crescimento: Romer (1990), Barro (1997), Jones (1998), Grosman & Helpman (1991), Aghion & Howitt (1998), entre outros.

A seção 1.3.1 faz uma apresentação dos modelos de Lucas (1988a) e Lucas (1988b), construídos a partir das considerações de Romer (1986) como precursores do desenvolvimento da teoria de crescimento endógeno.

### 1.3.1 O Papel do Conhecimento e do Capital Humano

O estudo acerca da economia das idéias, enfatizando o papel do conhecimento e do capital humano, foi o ponto de partida para o desenvolvimento da teoria de crescimento endógeno. Os trabalhos de Romer (1986) e Lucas (1988) constituem um primeiro momento dentro desta abordagem. Ambas as contribuições tomam como ponto de partida as mesmas considerações neoclássicas do modelo de Solow. O diferencial destes trabalhos em relação ao trabalho de Solow é a consideração das externalidades positivas geradas pelo investimento em conhecimento ou capital humano. Tais externalidades fazem com que a função de produção possa exibir retornos crescentes de escala, contrariando a hipótese de retornos constantes, considerada por Solow. Em ambos os trabalhos considera-se um ambiente de concorrência perfeita.

O conhecimento como forma de capital sugere naturalmente mudanças na formulação do modelo neoclássico exógeno, pois o investimento em conhecimento gera uma externalidade natural. Isto é, a criação de novo conhecimento por uma firma possui efeito externo positivo sobre as possibilidades de produção de outras firmas, uma vez que o conhecimento não pode ser perfeitamente patenteado, ou mantido em segredo. Por esta razão, a produção de bens de consumo, como uma função do estoque de conhecimento, pode exibir retornos crescentes (Romer, 1986).

O modelo de Romer (1986) considerou os efeitos das externalidades positivas geradas pelo conhecimento, concluindo que um equilíbrio competitivo com externalidades é compatível com a hipótese de retornos crescentes. De acordo com Romer, o crescimento de longo prazo é dirigido primeiramente pela acumulação de conhecimento por parte dos agentes maximizadores.

Romer considera um modelo em tempo discreto com dois períodos. Existem $S$ consumidores idênticos, que possuem uma função utilidade, $U(c_1, c_2)$, estritamente côncava e duas vezes continuamente diferenciável. Cada consumidor recebe sua dotação inicial de bens no período 1. Supõe-se que a produção de bens no período 2 é função do estado de conhecimento, $k$, e de um conjunto de fatores adicionais, como capital físico e trabalho, denotados por um vetor $X$. O problema de escolha assume que somente o estoque de conhecimento pode ser aumentado, e os fatores representados por $X$ são considerados uma oferta fixa.

Existe um trade-off entre o consumo presente e a produção de conhecimento, que pode ser utilizada para produzir um consumo maior no período 2. Por se tratar de um modelo com dois períodos, é possível trabalhar com uma tecnologia de pesquisa linear em unidades, tal que uma unidade de consumo perdido produz uma unidade de conhecimento.

Uma vez que o conhecimento privado produzido só pode ser parcialmente mantido em segredo, e não pode ser patenteado, podemos representar a tecnologia da firma i em termos de uma função de produção F, duas vezes continuamente diferenciável, que depende dos insumos específicos da firma i, $k_i, X_i$, e do nível agregado de conhecimento da economia. Sendo $N$ o número de firmas, em que $N$ é grande porém finito, o nível agregado de conhecimento é definido como $K = \sum_{i=1}^{N} k_i$. Assim, a função de produção para a firma será $F(k_i, K, X_i)$.

A primeira suposição para esta função é que para qualquer valor fixo de $K$, $F$ exibe retornos constantes de escala em relação aos insumos $k_i$ e $X_i$, ou seja, $F$ é homogenea de grau um em $k_i$ e $X_i$. Sem esta suposição, um equilíbrio competitivo não existe em geral. A segunda suposição feita a função de produção diz respeito ao fato de que $F$ exibe retornos marginais crescentes para o conhecimento agregado, $K$, do ponto de vista social.

A homogeneidade de $F$ em $k_i$ e $X_i$ e a suposição de que $F$ é crescente em $K$ implicam em retornos crescentes para esta função como segue. Para $\lambda > 1$:

$$F(\lambda k_i, \lambda K, \lambda X_i) > F(\lambda k_i, K, \lambda X_i) = \lambda F(k_i, K, X_i)$$

Assim, o equilíbrio do modelo de Romer (1986) é um equilíbrio competitivo com externalidades. Cada firma maximiza lucros, tomando $K$ como dado. No entanto, enquanto cada firma na economia opera com uma tecnologia de produção com retornos constantes, a ação de investir das firmas cria um novo conhecimento, o qual possui um efeito de transbordamento. Este efeito de transbordamento gerado pela acumulação de conhecimento faz com que a função de produção para a economia como um todo possa exibir retornos crescentes de escala.

Algumas importantes conclusões podem ser tiradas do trabalho de Romer (1986): a renda *per capita* de diferentes nações pode crescer sem fronteiras; o nível de produto per capita em diferentes nações não necessariamente converge; e o crescimento pode ser persistentemente lento em nações menos desenvolvidas, podendo muitas vezes cair em lugar de aumentar.

**1.3.1.2. O Modelo de Lucas (1988a)**

Lucas (1988) realizou duas adaptações ao modelo neoclássico exógeno, incluindo os efeitos da acumulação de capital humano. A primeira adaptação mantém a característica de um setor do modelo original, e se foca na interação entre capital físico e humano. A segunda examina um sistema de dois setores em que se admite o capital humano especializado, acumulado via educação escolar formal, e ainda via learning by doing.

O modelo de um setor de Lucas consiste em obter a trajetória de equilíbrio de Solow e a trajetória ótima (a qual incorpora os efeitos da acumulação de capital humano) com a finalidade de compará-las. Isto é feito a partir de um modelo exógeno, que toma como base o trabalho de Solow (1956), além de outros modelos com progresso tecnológico exógeno, e assume as tradicionais hipóteses neoclássicas: economia fechada com mercado competitivo; agentes racionais idênticos e uma taxa de retorno constante da tecnologia. Tal modelo supõe a existência de $N$ trabalhadores, com taxa de crescimento exógenamente determinada, igual a $\lambda$. O consumo corrente é $c$, e as preferências associadas ao consumo corrente são dadas por:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{1}{1-\sigma}\left[c^{1-\sigma}-1\right]N dt \qquad (13)$$

onde $\rho$ é a taxa de desconto e $\sigma$ é o coeficiente de aversão ao risco[4], ambos positivos.

A produção per capita de um bem é dividida entre consumo e acumulação de capital. Sendo $K$ o estoque de capital, e $\dot{K}$ sua taxa de variação, o produto total será $Nc+\dot{K}$ A produção é

[4] O coeficiente de aversão ao risco está relacionado à disposição dos consumidores em alterar sua trajetória de consumo no tempo em resposta aos estados da natureza. A inversa do coeficiente de aversão ao risco, $\sigma^{-1}$, é denominada elasticidade intertemporal de substituição (Lucas, 1988).

dependente dos níveis de capital, trabalho e tecnologia, de acordo com a seguinte função de produção:

$$Nc + \dot{K} = AK^{\beta}N^{1-\beta} \tag{14}$$

onde $0 < \beta < 1$, e a taxa de crescimento do progresso tecnológico exogenamente determinada, $\dot{A}/A$, é igual a $\mu > 0$.

Tal como no modelo de Solow, discutido em detalhes anteriormente, o problema defrontado

Tomamos $k$ para representar a taxa de crescimento do consumo per capita, $\frac{\dot{c}}{c}$, e de (16), temos que $\frac{\dot{\theta}}{\theta} = -\sigma k$ . Então, de (17) temos[7],

$$\beta A N^{1-\beta} K^{\beta-1} = \rho + \sigma k \tag{18}$$

que representa a produtividade marginal do capital com valor constante $\rho + \sigma k$ ao longo da trajetória equilibrada. Com esta função de produção Cobb-Douglas, a produtividade marginal do capital é proporcional a produtividade média, então dividindo (14) por $K$ e aplicando (18), obtemos

$$\frac{Nc}{K} + \frac{\dot{K}}{K} = AK^{\beta-1}N^{1-\beta} = \frac{\rho + \sigma k}{\beta} \tag{19}$$

Pela definição de trajetória equilibrada, $\dot{K}/K$ é constante. A equação (19) implica que $Nc/K$ seja constante, ou diferenciando que[8]

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{c}}{c} = k + \lambda \tag{20}$$

Logo, o consumo e o capital per capita crescem a taxa $k$ , que pela diferenciação de (18) ou (19) é:

$$k = \frac{\mu}{1-\beta} \tag{21}$$

Este parâmetro representa a magnitude da taxa de crescimento per capita na trajetória de equilíbrio de longo prazo. Sob esta condição, uma economia que inicia sob uma trajetória equilibrada, encontra seu ponto equilíbrio estacionário, e lá permanece.

---

[7] Para demonstração da expressão (18), vide apêndice.
[8] Para demonstração das expressões (20) e (21), vide apêndice.

Neste modelo exógeno existirá uma única trajetória constante de crescimento da renda per capita. Na ausência de equilíbrio estacionário não se faz necessário manter o produto e o capital crescendo a esta taxa constante, como mostrou Lucas (1988) ao incorporar o capital humano a esta estrutura formal. Ele atribuiu a cada trabalhador, $N$, o nível de experiência $h$, variando de zero a infinito tal que $N = \int_0^\infty N(h)dh$. Um trabalhador, $N$, dedica dedica a fração $u(h)$ de seu tempo a produção corrente, e o resto, $1 - u(h)$, a acumulação de capital humano. Então, a força de trabalho efetiva na produção é o total $N^e = u(h)N(h)hdh$ da experiência mensurada dedicada a produção corrente.

Especificamente, o nível médio de experiência, ou de capital humano é definido por

$$h_a = \frac{\int_0^\infty hN(h)dh}{N(h)}$$

Lucas considera $h_a$ como um efeito externo, uma vez que toda a economia pode ser beneficiada por ele. Todos os trabalhadores são idênticos, possuindo o mesmo nível de experiência, $h$, e escolhendo $u$ como sua alocação no tempo. e a força de trabalho efetiva é $N^e = uhN$. Sob esta hipótese, a função de produção, descrita em (14), toma a forma

$$Nc + \dot{K} = AK^\beta [uhN]^{1-\beta} h_a^\gamma, \tag{22}$$

Onde o termo $h_a^\gamma$ capta os efeitos externos do capital humano, e o nível de tecnologia, A, é assumido constante.

Os esforços na acumulação de capital humano, $1 - u$, estão diretamente ligados a sua taxa de crescimento da experiência, $\dot{h}$, como segue

$$\dot{h} = h\delta[1 - u] \tag{23}$$

De acordo com a equação (23), se nenhum esforço é empenhado na acumulação de capital humano, $u = 1$, não haverá acumulação. Se todos os esforços forem empenhados neste propósito, $u = 0$, $h$ cresce a taxa máxima $\delta$. Entre estes extremos, haverá retornos não decrescentes ao estoque de $h$: um dado aumento percentual em $h$ requer o mesmo esforço, não importando o nível de $h$ que já tenha sido atingido.

Como no modelo exógeno, a economia é fechada, a população crece a uma taxa fixa, $\lambda$, e uma família tem preferências conforme a expressão (13). Na presença de efeitos externos, $h_a^{\gamma}$, a trjetória de crescimento ótima e a trajetória de equilíbrio não coincidirão. Porém, é possível obter ambas as trajetórias e compará-las.

Para obter a trajetória ótima, basta fazer a escolha de $K, h, c$ e $u$, que maximiza a utilidade (13) sujeita a (22) e (23), e sujeita ainda a restrição $h = h_a$.

O Hamiltoniano de valor corrente para o problema ótimo, com preços $\theta_1$ e $\theta_2$ usados para avaliar aumentos no capital físico e humano, respectivamete, é[9]

$$H(K, h, \theta_1, \theta_2, c, u) = \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right]N + \theta_1\left[AK^{\beta}(uNh)^{1-\beta}h^{\gamma} - Nc\right] + \theta_2\left[\delta h(1-u)\right]$$

As condições de primeira ordem para este problema são[10]

$$c^{-\sigma} = \theta_1, \quad \text{e} \tag{24}$$

$$\theta_1(1-\beta)AK^{\beta}(uNh)^{-\beta}Nh^{1+\gamma} = \theta_2\delta h \tag{25}$$

---

[9] A resolução completa deste problema encontra-se no apêndice.
[10] Para demonstração das expressões (24), (25), (26) e (27), vide apêndice.

O tempo pode ser igualmente avaliado em seus dois usos: produção e acumulação de capital humano. As taxas de mudança dos preços $\theta_1$ e $\theta_2$ são dadas por

$$\dot{\theta}_1 = \rho\theta_1 - \theta_1\beta AK^{\;-1}\left(uNh\right)^{1-}\;h^{\gamma}\;, \tag{26}$$

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1\left(1-\beta+\gamma\right)AK^{\beta}\left(uN\right)^{1-\beta}h^{-\beta+\gamma} - \theta_2\delta\left(1-u\right) \tag{27}$$

Desta forma, as equações (22) a (27), descrevem a evolução ótima de $K$ e $u$, para alguma combinação inicial destes dois tipos de capital.

Os agentes privados maximizadores esperam que $h_a = h$. Quando o comportamento esperado é igual ao efetivo, o sistema se encontra em equilíbrio. Para encontrar a trajetória de equilíbrio, pode ser utilizado o mesmo problema de controle ótimo, porém com o termo $h_a$ determinado exogenamente, $h_a = h$, tal que (22) a (27) são condições necessárias para a trajetória de equilíbrio, tanto quanto para a trajetória ótima. Então, fazendo $h_a = h$, a equação (27) toma a seguinte forma[11]:

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1\left(a-\beta\right)AK^{\beta}\left(uN\right)^{1-\beta}h^{-\beta+\gamma} - \theta_2\delta\left(1-u\right) \tag{28}$$

em que $a = 1+\gamma$. Na ausência de efeito externo, $\gamma$, (27) e (28) são iguais. É a presença de efeito externo, $\gamma > 0$, que cria a divergência entre o valor social ótimo (27) e o valor que representa as expectativas dos agentes privados (28).

Como no modelo exógeno simples é necessário encontrar as soluções de crescimento de equilíbrio de ambos os sistemas: soluções em que o equilíbrio se dá com consumo e ambos os tipos de capital crescendo a uma  taxa percentual constante, o preço dos dois tipos de capital declina a uma taxa constante, e a alocação da variável $u$ no tempo é constante. A comparação

[11] Para demonstração, vide apêndice.

entre a trajetória social ótima e a de equilíbrio começa pela consideração das características que elas tem em comum (deixando de lado (27) e (28)).

Seja $k$ a constante que representa $\dot{c}/c$ como antes, tal que (24) e (26) implicam a condição marginal do capital:

$$\beta A K^{\beta-1}(uhN)^{1-\beta} h^{\gamma} = \rho + \sigma k \tag{29}$$

Que é análoga a condição (18). Como no modelo exógeno simples, $K$ cresce a taxa $K + \lambda$ ao longo da trajetória equilibrada. Supondo $v = \dot{h}/h$ ao longo da trajetória equilibrada, tem-se de (23) que

$$v = \delta(1-u) \tag{30}$$

E pela diferenciação de (29) obtém-se a taxa comum de crescimento do consumo e do capital per capita[12]:

$$k = \left(\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right)v. \tag{31}$$

Deste modo, com h crescendo a taxa fixa $v$, $(1-\beta+\gamma)v$ desempenha o mesmo papel da taxa de mudança tecnológica exógena, $\mu$ , no modelo exógeno simples.

Retornando aos determinantes da taxa de crescimento v do capital humano, pode ser visto que diferenciando ambas as condições de primeira ordem (24) e (25) e substituindo $\dot{\theta}_1/\theta_1$ , que

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = (\beta-\sigma)k - (\beta-\gamma)v + \lambda \tag{32}$$

Neste ponto, a análise das trajetórias eficiente e de equilíbrio divergem. Observando primeiro a trajetória eficiente, utiliza-se (25) e (27) para obter

[12] Para demonstração das expressões (31), (32) e (33), vide apêndice.

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \delta - \frac{\gamma}{1-\beta}\delta u \,. \tag{33}$$

Igualando as equações (32) e (33), substituindo o valor de u, implícito em (30), e de *k* em (31), obtém-se a taxa de crescimento eficiente do capital humano, a qual Lucas chama de $v^*$, como se segue[13]:

$$v^* = \sigma^{-1}\left[\delta - \frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}(\rho - \lambda)\right]. \tag{34}$$

Ao longo da trajetória de equilíbrio, quando (28) se mantém em lugar de (27), ao invés de (33) tem-se:

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \delta \tag{35}$$

Então, utilizando o mesmo procedimento utilizado para encontrar $v^*$, chega-se a taxa de crescimento de equilíbrio do capital humano $v$[14]:

$$v = [\sigma(1-\beta+\gamma) - \gamma]^{-1}[(1-\beta)(\delta - (\rho - \lambda))] \tag{36}$$

As equações (34) e (36) representam as taxas de crescimento de equilíbrio eficiente e competitivo ao longo de uma trajetória de crescimento equilibrada. Em cada caso, este crescimento aumenta com a magnitude de $\delta$, ou seja, com os investimentos em capital humano, e declina com aumentos na taxa de desconto $\rho$. Em cada caso, (31) representa a taxa de crescimento do capital físico per capita. E então, podemos perceber que na ausência de efeitos externos, $\gamma$, a taxa de crescimento do capital físico é igual a taxa de crescimento do capital humano.

[13] Para demonstração, vide apêndice.
[14] Para demonstração, vide apêndice.

Lucas conclui que a presença de efeitos externos faz com que o capital físico cresça mais rápido do que o capital humano. E então, a trajetória eficiente, que incorpora os efeitos do capital humano, é capaz de fazer com que a renda per capita cresça sem restrições, ao contrário do que afirma o modelo exógeno simples.

#### 1.3.1.3. O Modelo de Lucas (1988b)

O modelo com learnig by doing considera a importância do aprendizado ocorrido em função do exercício de uma atividade profissional. Neste modelo, o capital humano cresce de acordo com o crescimento da mão-de-obra empregada na produção. Dois bens são produzidos, $c_1$ e $c_2$, e nenhum capital físico. O bem i é produzido com a seguinte tecnologia:

$$c_i = h_i u_i N \qquad i = 1,2 \qquad (37)$$

Em que $h_i$ é o capital humano empregado na produção, e $u_i$ é a fração da força de trabalho utilizada na produção do bem i. Logo, $u_i > 0$, e $u_1 + u_2 = 1$.

Tomando $h_i$ como resultado do *learning by doing*, $h_i$ crescerá de acordo com os esforços, $u_i$, devotados a produção, como segue:

$$\dot{h}_i = h_i \delta_i u_i \qquad (38)$$

Assume-se que $\delta_1 > \delta_2$, de forma que o bem 1 é considerado ser de alta tecnologia. Os efeitos de $h_i$ são inteiramente externos, por hipótese. O *learning by doing* em uma atividade particular ocorre rapidamente no início, depois vai declinando até cessar. Novos bens são continuamente introduzidos, com retornos decrescentes para o aprendizado de cada um separadamente, e o capital humano especializado na produção de velhos bens começa a ser herdado para a produção de novos bens.

A elasticidade de substituição entre os bens é constante, e a função utilidade é dada por:

$$U(c_1, c_2) = \left[\alpha_1 c_1^{-\rho} + \alpha_2 c_2^{-\rho}\right]^{-1/\rho} \tag{39}$$

Onde $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\rho > -1$ e $\sigma = 1/(1+\rho)$ é a elasticidade de substituição entre $c_1$ e $c_2$. Com tecnologia e preferências dadas por (37) a (39) é possível encontrar o equilíbrio para uma economia fechada.

Tratando o bem 1 como numerário, os preços de equilíbrio serão dados por $(1, q)$, em que $q$ será igual a taxa marginal de substituição do consumo[15]

$$q = \frac{U_2(c_1, c_2)}{U_1(c_1, c_2)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-(1+\rho)} \tag{40}$$

Resolvendo para a taxa de consumo:

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma} q^{-\sigma} \tag{41}$$

Assim, ambos os bens serão produzidos. Os preços relativos são ditados pelas dotações de capital humano, $q = h_1/h_2$. As equações (37) e (41) juntas fornecem o equilíbrio da alocação da força de trabalho, como uma função destas dotações.

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{u_2 h_2}{u_1 h_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\sigma},$$

ou,

$$\frac{1-u_1}{u_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\sigma-1}$$

$$\dot{q} = (\delta_1 + \delta_2)\left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma} q^{1-\sigma}\right]^{-1} - \delta_2. \qquad (43)$$

Resolvendo esta equação de primeira ordem para $q = h_1/h_2$, e substituindo em (42), obtém-se as dotações iniciais de $h_1$ e $h_2$, que determinam a alocação da força de trabalho. E então, substituindo estes valores em (38), obtém-se as trajetórias de $h_1$ e $h_2$, separadamente[16].

Como visto acima, o bem 1 é o bem de alta tecnologia, e portanto, sua produção gera um retorno maior em termos de capital humano acumulado via *learning by doing*. No entanto, a escolha do bem que será produzido dependerá da elasticidade de substituição entre os dois bens da economia, $\sigma$.

Se $\sigma > 1$, caso em que os bens são bons substitutos, a economia se especializará na produção de apenas um dos dois bens. Neste caso, a escolha do bem que será produzido dependerá das condições iniciais. Se inicialmente for produzido $c_1$, sua produção aumentará cada vez mais. Se $\sigma < 1$, caso em que os bens são substitutos fracos, a força de trabalho será alocada de forma equilibrada entre $c_1$ e $c_2$. E se $\sigma = 1$, será produzido o bem que possuir maior demanda.

Como os efeitos do *learnig by doing* são externos, os trabalhadores não os levam em consideração. Se eles o fizessem, poderiam alocar sua mão-de-obra na produção do bem de alta tecnologia, e assim, tirariam vantagem de seu alto potencial de crescimento.

Em ambos os modelos de Lucas, a acumulação de capital humano envolve um sacrifício em termos de utilidade corrente. No primeiro modelo, este sacrifício toma a forma de uma redução

---

[16] As trajetórias de $h_1$ e $h_2$ encontram-se no apêndice.

do consumo corrente. No segundo, toma a forma de uma cesta de bens de consumo corrente menos desejável do que a que seria obtida com o baixo crescimento do capital humano.

Os trabalhos de Romer (1986) e Lucas4.4001(p)-32.4826(i)11.76(t)-0.12(4.7..71945(u)8.47752(c)-27.0

conjunto de instruções), e pode ser utilizada sempre que se deseje. E por mais que se queira manter em segredo uma nova tecnologia, não há como fazê-lo completamente. Por esta razão, a tecnologia é apenas parcialmente excludente. Estas duas características, não rivalidade e apropriabilidade incompleta, implicam a não convexidade da tecnologia[18]. O modelo fundamenta-se em três premissas.

A primeira premissa afirma que a mudança tecnológica produz um incentivo para a acumulação contínua de capital, e explica o aumento do produto por hora de trabalho. Isto implica que o crescimento é dirigido pela acumulação do insumo não rival e parcialmente excludente.

Pela segunda premissa, tem-se que a mudança tecnológica surge em parte pelas ações intencionais de pessoas que respondem aos incentivos do mercado. O novo conhecimento, no entanto, é produzido separadamente da esfera produtiva. As empresas, com o objetivo de aumentar lucros,“compram” estes novos conhecimentos para utilizá-los na produção. Romer (1990) cita o exemplo de que o entendimento sobre eletromagnetismo surgiu nas instituições acadêmicas, mas que fitas cassetes graváveis foram resultado dos esforços das firmas privadas em aumentar lucros.

A terceira premissa diz que as instruções para trabalhar com matérias primas são inerentemente diferentes de outros bens econômicos. Uma vez que o custo de criação de um novo conjunto de instruções tenha sido incorrido, estas instruções podem ser usadas sempre sem custos adicionais. Desenvolver novas e melhores instruções é equivalente a incorrer em custos fixos.

Se um insumo não rival tem valor produtivo, o produto deste insumo não pode ser uma função com retornos constantes de escala. Mais formalmente, se $F(A, x)$ representa uma função

[18] A convexidade da tecnologia é um pressuposto da teoria microeconômica neoclássica para mercados competitivos.

que depende de um insumo rival, $x$, e de um insumo não rival, $A$, a função $F$ não será homogênea de grau um em *A*, como segue:

$$F(A, \lambda x) = \lambda F(A, x)$$

assim a não rivalidade de *A* implicará retornos crescentes para $F$, como segue:

$$F(\lambda A, \lambda x) > \lambda F(A, x)$$

e assim, Romer (1990) conclui que uma firma com esta função de produção não pode sobreviver como tomadora de preços. Isto que faz com que este modelo adote uma estrutura de mercado do tipo concorrência monopolística para as firmas que utilizam a tecnologia.

**A Economia do Modelo**

O modelo de Romer (1990) comporta quatro insumos básicos: capital, *K*, trabalho, *L*, capital humano, *H*, e um índice que indica o nível de tecnologia, *A*. O componente rival do conhecimento, *H*, é separado do componente não rival que é a tecnologia, *A*, a qual pode crescer sem fronteiras.

A economia descrita aqui possui três setores. O setor de pesquisa utiliza capital humano, e possui um estoque de conhecimento, desenvolvendo a tecnologia necessária para a produção de um novo bem de capital. O setor de bens intermediários utiliza tecnologia e capital. Este setor compra a tecnologia desenvolvida pelo do setor de pesquisa e fabrica bens de capital, que serão utilizados na produção final. O setor produtor de bens finais utiliza trabalho, capital humano, e um conjunto de bens de capital (ou bens intermediários). O produto final pode ser consumido ou investido como novo capital.

As ofertas de *L* e *H* são fixas. O capital humano *H* é dividido em capital humano utilizado na produção de bens finais, $H_1$, e capital humano utilizado no setor de pesquisa, $H_2$.

A função de produção para o setor de bens finais é uma Cobb-Douglas com retornos constantes de escala, como segue:

$$Y(H_1, L, x) = H_1^{\alpha} L^{\beta} \int_0^{\infty} x(i)^{1-\alpha-\beta} di \tag{44}$$

em que a integral definida, $\int_0^{\infty} x(i)di$, representa um conjunto de bens de capital utilizados na produção. Por causa dos retornos constantes, o produto do setor final pode ser descrito em termos de firmas tomadoras de preços. A produção de bens de consumo é equivalente a produção de bens de capital. Logo, a evolução do capital é dada por

$$\dot{K} = Y - c \tag{45}$$

Para uma firma do setor de bens intermediários, a produção de um novo bem de capital requer a aquisição de uma nova tecnologia proveniente do setor de pesquisas. O dispêndio com esta tecnologia representa um custo fixo, pois uma vez adquirida, esta pode ser utilizada sempre que se deseje sem custos adicionais. Possuindo uma determinada tecnologia, a firma do setor intermediário é livre para produzir uma quantidade arbitrária de bens de capital. No entanto, esta produção terá também um componente de custo variável, que é o capital.

Para produzir x unidades de bens de capital, ela precisa por exemplo de 1 tecnologia (no caso um conjunto de instruções), e $\eta x$ unidades de capital. Supõe-se que os bens de capital não sofrem depreciação. *H* e *L* são fixos, e *K* cresce pela abstenção do consumo. Romer supõe que todo indivíduo engajado em pesquisa possui livre acesso ao estoque prévio de tecnologia, *A*.

Portanto, a dinâmica da tecnologia depende do capital humano engajado na pesquisa, e do estoque de conhecimento prévio, como segue:

$$\dot{A} = \delta H_2 A \tag{46}$$

Em que $\delta$ é um parâmetro de produtividade, e a não convexidade de A é mantida pela não rivalidade deste insumo. Uma importante característica da tecnologia neste modelo é que seu comprador, no setor intermediário, possuirá direitos de propriedade sobre ela. No entanto, no setor de pesquisas, todas as tecnologias podem ser livremente acessadas.

O nível agregado de *H* é:

$$H_1 + H_2 = H$$

Seja $P_A$ o preço da nova tecnologia, $w_H$ o salário pago ao capital humano, e r a taxa de juros. Da equação (46) segue que $P_A$ e $w_H$ estão relacionados como

$$w_H = P_A \delta A$$

Uma vez que a nova tecnologia tenha sido produzida, alguma firma do setor de bens intermediários desejará comprá-la para produzir o novo bem da capital. A firma do setor intermediário aluga o novo bem de capital para as firmas do setor final.

Cada firma do setor final toma o preço $P_A$ para a tecnologia, o preço 1 para o capital (já que os bens podem ser convertidos em capital um a um), e a taxa de juros como dada. Estas firmas operam sob concorrência perfeita. No entanto, a firma que começa primeiro a utilizar o novo bem de capital na produção, maximiza lucros. Assim, as firmas que começam a produção do bem $i$, escolhem o preço e a quantidade que maximizarão seu lucro:

$$\max_{x \in X} \int_0^\infty \left[ H_1^\alpha L^\beta x(i)^{1-\alpha-\beta} - p(i)x(i) \right] di.$$

Diferenciando em relação a *x(i)*, obtém-se a função demanda inversa:

$$p(i) = (1 - \alpha - \beta) H_1^\alpha L^\beta x(i)^{-\alpha-\beta}. \tag{47}$$

Esta é a curva de demanda que o produtor de bens de capital toma como dada em seu problema de maximização de lucros, $\pi$. Defrontado com os valores dados de $H_1$, $L$ e $r$, uma firma intermediária, que ainda tenha incorrido em investimento de custo fixo em tecnologia, escolherá o nível de produto $x$ que maximiza sua receita, descontado o custo variável em cada data:

$$\pi = \max_{x} p(x)x - r\eta x \tag{48}$$

$$\pi = \max_{x}(1 - \alpha - \beta)H_1^{\alpha}L^{\beta}x^{1-\alpha-\beta} - r\eta x$$

A decisão de produzir um novo bem de capital depende da comparação entre o valor presente da receita líquida que um monopolista pode extrair e o custo do investimento em tecnologia, $P_A$.

$$\pi = rP_A \tag{49}$$

Considera-se que as preferências dos consumidores são bem comportadas, com elasticidade de substituição constante:

$$\int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t}dt \text{, com } U(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \text{ para } \sigma \in [0, \infty).$$

Supõe-se que todos os bens de capital são ofertados na mesma quantidade, $\bar{x}$. Dado que $A$ determina a variação dos bens de capital que podem ser produzidos, e dado que $\eta$ unidades de capital são necessárias para a produção por unidade de bens intermediários, é possível resolver $\bar{x}$ a partir da equação $K = \eta A\bar{x}$. Desta forma, a função de produção que descreve o produto final pode ser reescrita como[19]:

$$Y(H_1, L, x) = (H_1A)^{\alpha}(LA)^{\beta}(K)^{1-\alpha-\beta}\eta^{\alpha+\beta-1} \tag{50}$$

## O Equilíbrio do Modelo

[19] Para demonstração, vide apêndice.

Um equilíbrio para este modelo terá trajetórias para preços e quantidades, tais que: consumidores fazem decisões de poupança e consumo tomando a taxa de juros como dada. Os detentores do capital humano decidem alocar sua mão-de-obra entre o setor de pesquisa e o setor de bens finais, tomando o estoque de conhecimento *A*, o preço da tecnologia $P_A$, e a taxa de salário do setor final como dados. O setor de bens finais escolhe trabalho, capital humano, e uma lista de bens de capital, tomando os preços como dados. As firmas do setor intermediário maximizam lucros tomando a taxa de juros e a curva de demanda negativamente inclinada como dadas. A oferta de cada bem é igual a sua demanda, no equilíbrio.

A estratégia para a caracterização deste modelo é encontrar um equilíbrio em que as variáveis *A*, *K* e *Y* crecem a taxas exponenciais constantes. Seguindo a intuição do modelo de Solow, um equilíbrio existirá se *A* cresce a uma taxa exponencial constante. Pela equação (46), *A* crescerá a uma taxa constante se o total de capital humano dedicado a pesquisa, $H_2$, permanecer constante. Logo, a trajetória de crescimento de equilíbrio requer preços e salário, tais que $H_1$ e $H_2$ permaneçam constantes enquanto *Y*, *K*, *C* e *A* crescem.

Como no modelo de Solow, como a produção e o investimento crescem a uma taxa constante, o consumo cresce a mesma taxa.. Ao longo da trajetória de crescimento de equilíbrio, todo o crescimento de *K* será utilizado para a produção de novos bens, ao invés de aumentar a produção de velhos bens, que já tenham sido produzidos. Assim, a solução de crescimento de equilíbrio possui um nível constante de bens de capital produzidos, $\bar{x}$. Devido a acumulação de *K* e *A*, o salário pago ao capital humano no setor de bens finais crescerá, mas a produtividade do capital humano no setor de pesquisa também crescerá com *A*. Se a produtividade do capital humano crescer a mesma taxa em ambos os setores, $H_2$ permanecerá constante se o preço para novas tecnologias, $P_A$, for constante.

A condição determinante da alocação de capital humano entre o setor final e o setor de pesquisa diz que o salário pago em ambos os setores deve ser o mesmo. No setor de bens finais, o sálario pago ao capital humano é seu produto marginal. No setor de pesquisa, o salário é $P_A \delta A$, e o capital humano recebe toda a renda deste setor. Igualando os retornos do capital humano em ambos os setores, $H_2$ será escolhido, tal que:

$$w_H = P_A \delta A = \alpha (H - H_2)^{\alpha - 1} L^{\beta} \int_0^{\infty} x(i)^{1-\alpha-\beta} di \tag{51}$$

Tomando a restrição $H_1 + H_2 = H$, a equação (44) pode ser reescrita como:

$$Y(H_1, L, x) = (H - H_2)^{\alpha} L^{\beta} A \left( \bar{x} \right)^{1-\alpha-\beta} \tag{52}$$

Combinando as equações (51) e (52), o preço para o novo conhecimento toma a seguinte forma:

$$P_A = \frac{\alpha}{\delta} (H - H_2)^{\alpha - 1} L^{\beta} \left( \bar{x} \right)^{1-\alpha-\beta} \tag{53}$$

A taxa de crescimento de *A* é $\delta H_2$. Pela equação (52), *Y* deve crescer a mesma taxa de *A*, se $L$, $H_1$ e $\bar{x}$ forem constantes. Se $\bar{x}$ é fixo, *K* cresce a mesma taxa de *A*, uma vez que $K = A \bar{x} \eta$. A constante g denota a taxa de crescimento de *A*, *Y* e *K*. Como $K/Y$ é uma constante, a fração $\frac{C}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K} \frac{K}{Y}$ deverá ser constante. Então, a taxa de crescimento g para todas essas variáveis, é:

$$g = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A} = \delta H_2$$

Das preferências segue que a taxa de juros constante do equilíbrio é:

$$r = \rho + \sigma\left(\frac{\dot{C}}{C}\right) = \rho + \sigma\delta H_2 \tag{54}$$

As equações (53) e (54) formam duas das quatro equações necessárias para encontrar os valores de $H_2$, $P_A$, $\bar{x}$ e r,que devem ser constantes ao longo da trajetória equilibrada. Uma das equações restantes é dada pela condição de lucro zero, que da equação (49) é:

$$\pi = rP_A \tag{55}$$

E a última equação é obtida aplicando a condição de primeira ordem a equação (48):

$$r = \frac{1}{\eta}(1 - \alpha - \beta)^2 (H - H_2)^{\alpha} L^{\beta} \left(\bar{x}\right)^{-\alpha-\beta} \tag{56}$$

As equações (53), (54), (55) e (56) formam o sistema de equações que pode ser resolvido explicitamente. O principal resultado é a taxa de crescimento em função dos parâmetros[20]:

$$g = \frac{\delta H - \Lambda\rho}{\Lambda\sigma + 1} \tag{57}$$

Onde $\Lambda$ é a constante

$$\Lambda = \frac{\alpha}{(1 - \alpha - \beta)(\alpha + \beta)} \tag{58}$$

A expressão para a taxa de crescimento sugere uma menor restrição técnica. Para que a integral que descreve as preferências dos consumidores seja finita, é necessário que a taxa de crescimento $(1 - \sigma)g$ seja menor do que a taxa de desconto $\rho$. Logo, $\frac{(1 - \sigma)\delta H}{\Lambda + 1} < \rho$, para

[20] Para demonstração das equações (57), (58), (60) e (61), vide apêndice.

$\sigma \in [0,1)$. Ambos os parâmetros das preferências, $\sigma$ e $\rho$, influenciam a taxa de crescimento. Uma redução em $\sigma$ ou $\rho$, faz com que as pessoas substituam o consumo presente pelo consumo futuro, o que leva a um rápido crescimento.

Um resultado interessante do trabalho de Romer (1990) é a independência da taxa de crescimento em relação a força de trabalho, *L*. A taxa de crescimento é também independente do parâmetro $\eta$, que determina o custo de produção de uma unidade de bem de capital. Este fato possui implicações sobre políticas de incentivo a acumulação de capital físico. Se o governo oferece incentivo a acumulação de bens de capital, isso será o mesmo que uma redução em $\eta$, e não afetará a taxa de acumulação de *A*, que é o determinante do crescimento de longo prazo.

Outra interessante característica da expressão da taxa de crescimento é a sugestão da possibilidade de estagnação na ausência de capital humano. Dado que *g* é igual a $\delta H_2$, a equação (57) pode ser reescrita como uma expressão para $H_2$ em termos de *H*:

$$H_2 = \frac{H - \rho \dfrac{\Lambda}{\delta}}{\Lambda\sigma + 1} \tag{59}$$

A expressão para $P_A$ é:

$$P_A^{\alpha+\beta} = \frac{\Gamma}{\delta^{\alpha}}\left[\frac{\delta\sigma\Lambda H + \Lambda\rho}{\sigma\Lambda + 1}\right]^{\alpha-1} L^{\beta}\eta^{\alpha+\beta-1} \tag{60}$$

Onde $\Gamma$ é a constante

$$\Gamma = \left[\alpha(1 - a - \beta)^{1-\alpha-\beta}(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}\right]$$

É possível perceber que $\eta$ e *L* não afetam a taxa de crescimento, mas influenciam o preço relativo da tecnologia. A expressão para $\bar{x}$ em termos de $P_A$, é:

$$\bar{x} = \frac{1}{\eta} P_A \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \tag{61}$$

Como mostrado anteriormente, incentivos a acumulação de capital não afetam a taxa de crescimento. No entanto, não ocorre o mesmo com o incentivo a pesquisa. Um subsídio para a pesquisa possui o mesmo efeito sobre o crescimento do que um aumento no parâmetro de produtividade, $\delta$, da equação (46). No longo prazo, causará um aumento na taxa de crescimento, uma queda em $P_A$ e uma redução em $\bar{x}$.

Devido a externalidade associada ao conhecimento, pressupõe-se que este tipo de subsídio gere ganhos de bem estar social. Para verificar se isto realmente ocorre, Romer faz uma comparação entre a taxa de crescimento de equilíbrio e a taxa de crescimento obtida pela solução do plano social ótimo, como segue[21]:

$$\max \int_0^{\infty} \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt$$

$$s.a. \dot{K} = \eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} H_{11}^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} - C$$

$$\dot{A} = \delta H_2 A$$

$$H_1 + H_2 \leq H$$

A aplicação da condição de primeira ordem para este problema fornece a taxa de crescimento social ótimo:

$$g^* = \frac{\delta H - \theta\rho}{\theta\sigma + (1-\theta)} \tag{62}$$

Onde $\theta = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Sendo $\theta$ menor do que o seu correspondente $\Lambda$ na equação (57), e sendo $1-\theta < 1$, segue que a taxa de crescimento social ótima é maior do que a taxa de crescimento de

[21] A resolução deste problema encontra-se no apêndice.

equilíbrio. No ótimo social, mais capital humano é dedicado a pesquisa e menos a produção de bens finais.

O trabalho de Romer encerra com uma importante consideração relativa ao comércio. De acordo com os resultados apresentados aqui, o que é importante para o crescimento não é a integração de comércio dentro de uma economia com um grande número de pessoas, mas sim entre nações com amplo estoque de capital humano. Daí a importância do comércio internacional, pois o tamanho de uma população não influencia a taxa de crescimento, e não pode ser portanto um bom substituto para o comércio internacional.

## 1.4. Considerações ao Capítulo

Este capítulo procurou realizar um exame das visões de crescimento econômico segundo a abordagem ortodoxa da economia, em suas versões exógena e endógena. Vimos que no modelo de Solow, a taxa de crescimento da economia era exogenamente determinada, igual a taxa de mudança tecnológica. Este modelo trouxe relevantes lições acerca da dinâmica de transição da taxa de crescimento da economia, alertando para a importância do progresso técnico, do crescimento populacional, e das variações na taxa de poupança. No entanto, era necessário determinar as variações na taxa de crescimento econômico endogenamente, e o modelo de Solow colocava duas barreiras a taxa de crescimento endógena: os retornos decrescentes à função de produção para os insumos capital e trabalho; e a taxa de crescimento exógena do progresso técnico (Dasgupta, 2005).

O trabalho de Romer (1986) conseguiu vencer a barreira dos retornos decrescentes aos insumos capital e trabalho, por meio da incorporação dos efeitos externos da acumulação de conhecimento à função de produção. Assim, apesar de cada uma das firmas operar com retornos constantes, dentro de uma estrutura de concorrência perfeita, a economia como um todo exibiria retornos crescentes, devido às externalidades geradas pela criação de novos conhecimentos. Lucas (1988a&b) acrescentou que a acumulação de conhecimento era obtida pela formação de capital humano, a qual poderia acontecer de duas formas: pela educação formal ou pelo aprendizado em virtude do exercício de prática profissional, ou seja, via *learning by doing*.

Os trabalhos de Romer (1986) e Lucas (1988a&b), ao incorporar os efeitos do conhecimento e do capital humano, tornaram taxa de crescimento econômico endógena ao modelo de crescimento neoclássico, por meio da possibilidade dos retornos crescentes de escala para a economia como um todo. Assim era possível explicar as disparidades em relação ao crescimento da renda *per capita* entre diferentes nações: as que iniciam a trajetória de crescimento com maior dotação de capital humano tendem a crescer a taxas mais aceleradas (Lucas, 1988). A hipótese de convergência de Solow estava superada. Todavia, estes modelos continuavam mantendo a taxa de progresso técnico como exogenamente determinada, devido a ausência de uma estrutura de concorrência imperfeita, que permitisse retornos crescentes de escala para as firmas produtoras de tecnologia.

Romer (1990) tornou o progresso técnico endógeno, por meio da presença de microfundamentos em um modelo de três setores: o setor produtor de pesquisa e desenvolvimento; o produtor de bens intermediários; e o produtor de bens de consumo finais. O setor de pesquisas, responsável pelo desenvolvimento de novas tecnologias opera com retornos crescentes de escala.

Este modelo abandonou a idéia de equilíbrio com concorrência perfeita, presente nos modelos anteriores, apresentando um equilíbrio descentralizado com concorrência monopolística. Vários modelos de crescimento foram construídos dentro da aboragem neoclássica a partir do trabalho de Romer (1990): Grosman & Helpman (1991), Romer (1994), Aghion & Howitt (1998), entre outros.

Os avanços teóricos dentro desta corrente tomam por base o comportamento racional de agentes idênticos e maximizadores de utilidade. Os modelos de crescimento focam o lado da oferta, por meio do estudo da função de produção neoclássica. Não há estudo sobre o comportamento da demanda agregada, e sua importância, na determinação do crescimento de longo prazo. O progresso tecnológico é visto como a principal fonte de crescimento da renda *per capita*.

Esta forma de explicar eventos do mundo econômico é o ponto de partida para as críticas da corrente heterodoxa pós-keynesiana. Como será mostrado no próximo capítulo, para os pós-keynesianos, o progresso técnico não é visto como o principal responsável pela elevação da taxa de crescimento (Bhaduri, 2003). Ao invés de focar o lado da oferta, a corrente heterodoxa destaca o papel da demanda na condução do crescimento econômico de longo prazo.

# CAPÍTULO 2. ABORDAGEM HETERODOXA DO CRESCIMENTO ECONÔMICO.

## 2.1 Introdução

O interesse sobre a natureza do crescimento econômico mereceu sempre grande destaque dentro da corrente de pensamento pós-keynesiana. Diversos modelos têm sido apresentados desde Harrod (1939). O estudo pós-keynesiano sobre crescimento econômico pode ser dividido em duas fases (tal como na abordagem neoclássica), que serão denominadas de primeira e segunda geração.

A primeira geração de modelos de crescimento desta corrente é representada pelos trabalhos de Kaldor (1956) e Robinson (1956, 1962). Ambos os autores desenvolveram modelos em resposta ao modelo de Harrod (1939). Tais modelos situam-se em um ambiente de concorrência perfeita, com agentes tomadores de preços, em que a economia opera a plena capacidade. Para ambos os autores, existe uma relação inversa entre crescimento e distribuição de renda.

A segunda geração de modelos apresenta forte influência, sendo também denominada de teoria de crescimento kaleckiana, ou estruturalista. Tais modelos situam-se em um ambiente oligopolístico, em que a economia opera com o grau de utilização da capacidade endógeno, e não a plena capacidade, como nos modelos de primeira geração. Os principais representantes desta corrente são Rowthorn (1982), Dutt (1984), Taylor (1985, 1981), entre outros. Uma das principais conclusões destes modelos é que pode haver crescimento com melhorias na distribuição de renda.

O pensamento pós-keynesiano se contrapõe ao pensamento neoclássico na medida em que incorpora o lado da demanda em sua análise, enquanto a teoria neoclássica trabalha apenas com o lado da oferta, por meio de sua tradicional função de produção Cobb-Douglas.

Os modelos pós-keynesianos são construídos por meio de equações comportamentais, e pelo ajustamento dos mercados, via políticas governamentais. Tais equações comportamentais não estão baseadas no comportamento otimizador dos agentes econômicos, o que distingue esta longo prazo, dada pelas constantes taxa de poupança e relação capital-produto.

### 2.2.1. O Modelo de Robinson (1956, 1962)

O ponto de partida do trabalho de Robinson (1956, 1962) é a distribuição de renda entre salários e lucros na economia. A poupança é, assim, dividida por classe social, entre capitalistas e trabalhadores. As poupanças por classe social são exógenas, contudo, a poupança agregada é determinada endogenamente, variando de acordo com a distribuição de rendas entre as duas classes.

O modelo é desenvolvido a partir da identidade Kaleckiana

$$R + W = C_c + C_w + I \tag{63}$$

Em que $R$ representa os lucros, $W$ o salário, $C_c$ o consumo dos capitalistas, $C_w$ o consumo dos trabalhadores, e $I$ o investimento. Pela suposição de que os trabalhadores não poupam, tem-se que

$$R = C_c + I \tag{64}$$

Assim, verifica-se que os lucros são determinados pelas decisões de investimento dos capitalistas. Se o consumo dos capitalistas for zero,

$$R = I \tag{65}$$

Dividindo a expressão (65) por $K$, estoque de capital, encontra-se

$$r = g \tag{66}$$

Em que a taxa de lucro, $r = R/K$, é determinada pela taxa de acumulação, $g = I/K$. Assume-se que a propensão a poupar dos capitalistas, s, é igual a unidade, uma vez que $C_c = 0$

$$I = S = sR \qquad 0 < s \leq 1 \tag{67}$$

Dividindo ambos os lados por $K$, obtém-se a equação de Cambridge:

$$g = sr \tag{68}$$

Em que a taxa de acumulação é dependente da propensão a poupar dos capitalistas e da taxa de lucro, ou seja, o mecanismo central da acumulação é o impulso das firmas em sobreviver e crescer. Robinson discute a relação entre a taxa de lucro causada pela taxa de acumulação e a taxa de acumulação futura como resultado da taxa de lucro atual.

Quando as firmas se encontram em uma situação em que a taxa de acumulação é mais alta do que a que seria justificada pela taxa de lucro que gera, os planos de investimento traçados produzirão uma taxa de acumulação mais baixa no futuro. E ao contrário, quando a taxa de acumulação for menor do que aquela justificável pela taxa de lucro que gera, os planos de investimento traçados para o futuro apontarão para um aumento na taxa de acumulação.

Este resultado remete a tradição keynesiana de que as firmas acumulam o quanto desejam, e a taxa de poupança da economia se acomoda a sua taxa de investimento. Assim, a motivação a investir das firmas aparece como uma função que relaciona a taxa de acumulação desejada com o nível de lucros esperado. A taxa de acumulação desejada é aquela que torna as firmas satisfeitas com a situação em que se encontram. Neste ponto, a taxa de acumulação está gerando apenas a expectativa de lucro necessária para que esta taxa seja mantida.

Robinson faz a distinção entre a taxa desejada e a taxa possível de acumulação. A taxa possível seria dada pela soma da taxa de crescimento da população com a produtividade per capita, tal como a taxa natural de Harrod. Quando a taxa desejada é igual a possível, a economia se aproxima muito do pleno emprego, situação denominada idade de ouro. A taxa desejada de Robinson é análoga à taxa garantida de Harrod. No entanto, a contribuição adicional do trabalho de Robinson foi introduzir a relação entre distribuição de renda e taxa de acumulação na determinação da taxa desejada, enquanto Harrod atribuía sua taxa garantida à propensão a poupar exógena e ao progresso técnico.

Por fim, Robinson afirma que, na verdade, o que faz com que a propensão a acumular seja alta ou baixa em uma economia são suas características históricas e políticas. Contudo, na impossibilidade de análise de tais características em um modelo deste tipo, é bastante razoável atribuir o crescimento da taxa de acumulação ao investimento induzido pela taxa de lucro esperada.

### 2.2.2. O modelo de Kaldor (1956)

Kaldor (1956), por sua vez, assume a hipótese da manutenção do pleno emprego no longo prazo, com a existência de uma relação capital-produto, $v$, constante. Tal como Robinson, ele considera o problema da distribuição de renda entre capitalistas e trabalhadores na determinação da poupança agregada. A principal diferença entre as classes sociais é que a propensão marginal a poupar dos trabalhadores é pequena em relação à dos capitalistas.

Sendo $S_w$ e $S_R$ a poupança agregada dos trabalhadores e dos capitalistas, respectivamente, tem-se as seguintes identidades:

$$Y \equiv W + R$$

$$I \equiv S$$

em que $I/Y$ representa a parcela de investimentos no produto, e a propensão a poupar obedece a restrição $s_R > s_w$. Rearranjando os termos, obtém-se a equação fundamental do modelo de Kaldor, qual seja a que representa a parcela dos lucros na renda:

$$\frac{R}{Y} = \frac{1}{s_R - s_w}\frac{I}{Y} - \frac{s_w}{s_R - s_w} \tag{70}$$

Assim, dadas as diferentes propensões a poupar, a parcela dos lucros na renda depende simplesmente da parcela do investimento no produto.

O funcionamento deste modelo depende da hipótese keynesiana de que a parcela de investimento no produto, $I/Y$, pode ser tratada como uma variável independente, indiferente em relação as propensões a poupar, $s_R$ e $s_w$.

Dividindo ambos os termos da equação (69) por $K$, obtém-se a equação da taxa de lucro:

$$\frac{R}{K} = \frac{1}{s_R - s_w}\frac{I}{K} - \frac{s_w}{s_R - s_w}\frac{Y}{K} \tag{71}$$

A equação (70), representando a parcela dos lucros na renda, indica que existe uma distribuição de renda que garanta o equilíbrio. Do mesmo modo, a equação (71) representa a taxa de lucro no equilíbrio. Assim, a taxa de poupança se torna fruto da distribuição de renda.

Seguindo Harrod, a taxa garantida de crescimento seria dada por $g_w = \frac{s}{v} = \frac{I}{Y}$, em que a taxa de poupança, exogenamente determinada, garantiria o equilíbrio. No entanto, a crítica de Kaldor é que devido as diferentes distribuições de renda possíveis, existiriam diversas possibilidades para a taxa garantida e, portanto, várias taxas agregadas de poupança. Kaldor observa o caso limite, em que $s_w = 0$, e a poupança é totalmente determinada pela propensão a poupar dos capitalistas:

| | |
|---|---|
| $$\frac{R}{Y}=\frac{1}{s_R}\frac{I}{Y}$$ | (72) |

Esta relação indica que os lucros são governados pelo investimento e pela propensão a consumir dos capitalistas. Ou seja, está de acordo com a afirmação keynesiana de que o consumo dos capitalistas aumenta seu lucro total, e ainda, com a afirmação de Kalecki de que “os capitalistas ganham o que gastam, e os trabalhadores gastam o que ganham”.

É fácil verificar em (72) que a participação dos lucros na renda não pode ser superior a $\frac{1}{s_R}\frac{I}{Y}$. Se isto ocorresse, haveria poupança excessiva, escassez de demanda e desemprego. Por outro lado, se a participação dos lucros na renda for superior a $\frac{1}{s_R}\frac{I}{Y}$, ter-se-ia um excesso de investimento e uma demanda explosiva.

Como condição de estabilidade do modelo de Kaldor, tem-se que $s_R > s_w$, de forma que:

| | |
|---|---|
| $$s_w < \frac{I}{Y} \text{ e}$$ | (73) |
| $$s_R > \frac{I}{Y}$$ | (74) |

A restrição dada por (73) não permite a existência de um equilíbrio com participação negativa ou nula dos lucros na renda, caso isto fosse possível, a economia se encontraria em uma situação de subemprego. A restrição dada por (74) exclui a possibilidade de um equilíbrio dinâmico com participação negativa ou nula dos salários na renda, o que implicaria inflação crônica. Assim, obedecendo às restrições (73) e (74), as equações (70) e (71) descrevem a taxa de lucro e a distribuição de renda, necessárias a manutenção do equilíbrio no longo prazo.

Robinson e Kaldor respondem ao fio da navalha de Harrod por meio da introdução da distribuição de renda em seus respectivos modelos de crescimento econômico, o que torna a poupança agregada resultado da distribuição entre salários e lucros. Desta forma estabelecem uma causalidade entre lucro e acumulação. Para Robinson, a acumulação é resultado das decisões de investimento dos capitalistas, as quais são guiadas pela taxa de lucro corrente. Kaldor, por sua vez, atribui a acumulação ao dinamismo técnico. Assim, dadas as diferentes decisões de investimento, ou os diferentes níveis de dinamismo técnico, seria possível encontrar múltiplas taxas garantidas na economia.

## 2.3. Modelos Pós-keynesianos de Segunda Geração

Os modelos de segunda geração, também denominados estruturalistas, estão fundamentados na tradição kaleckiana, que considera o conflito distributivo entre as classes sociais, ou seja, trabalhadores e capitalistas. Estes modelos, consensualmente, consideram importância fundamental da demanda efetiva na elevação das taxas de crescimento da economia. De acordo com esta visão, o crescimento será igualmente dependente do grau de utilização da capacidade produtiva da firmas.

Visto que esta abordagem considera que os trabalhadores consomem toda a sua renda, e que os capitalistas poupam uma fração constante de seus lucros, o aumento do salário real é considerado um forte estímulo ao aumento da demanda efetiva, elevando o investimento, o grau de utilização da capacidade, e conseqüentemente a taxa de crescimento da economia.

Este consenso em torno da centralidade da demanda efetiva, e, portanto do papel do salário real, está presente nos modelos de crescimento econômico estruturalistas, onde uma redistribuição de renda, ao aumentar o salário real e reduzir a margem de lucro, pode acelerar o crescimento. Esta abordagem engloba um grande número de modelos, como Kalecki (1971), Steindl (1952), Dutt (1984, 1987, 1990), Rowtorn (1982), entre outros. Para fins de simplificação denominaremos daqui por diante de modelo estruturalista simples, os modelos com este tipo de comportamento em relação ao salário real.

A controvérsia do salário real dentro dos modelos estruturalistas emerge a partir do trabalho de Bhaduri & Marglin (1990), o qual considera a possibilidade de uma redução no investimento dos capitalistas ocorrida pela redução na margem de lucro, via elevação do salário real. Estes autores levam em conta o problema do lado da oferta de um aumento nos custos de produção, argumentando que pode ocorrer uma situação em que o aumento do consumo ocasionado pelo aumento do salário real pode não ser suficiente para compensar a retração do investimento agregado, gerada pela redução da margem de lucro dos capitalistas. Estas duas formas de análise dos efeitos salário/lucro são comparadas por Bhaduri & Marglin (1990), por meio de uma reconstrução da curva IS.

Observa-se dentro da abordagem pós-keynesina do crescimento, modelos que incorporam o progresso tecnológico endógeno, tal como na abordagem neoclássica, por meio da produtividade do trabalho. Para os estruturalistas, o progresso tecnológico pode exercer influência sobre a taxa de crescimento, mas não é o fator determinante da mesma, como consideram os neoclássicos. Serão apresentados aqui dois modelos recentes com progresso tecnológico endógeno para fins de comparação entre as abordagens pós-keynesiana e neoclássica.

### 2.3.1. Modelos de segunda geração: do modelo estruturalista simples à crítica de Bhaduri e Marglin

#### 2.3.1.1. O modelo de Dutt (2003)

O modelo simples, apresentado aqui, é elaborado por Dutt (2003), sendo baseado nos trabalhos de Kalecki (1971) e Steindl (1952). Assume-se que a produção utiliza capital e trabalho, com proporções fixas trabalho/produto, $b$, e capital/produto potencial, $a$. Seguindo a tradição kaleckiana, os preços são determinados por mark-up sobre o custo variável, assumido por simplicidade ser somente o custo do trabalho, tal que:

$$P = (1 + z)bW, \tag{72}$$

onde $P$ é o nível de preços, e $W$, o salário nominal unitário. A taxa de mark-up, $z$, é assumida constante, representando o grau de monopólio. As firmas ajustam o seu produto em resposta a demanda efetiva, mantendo um excesso de capacidade produtiva, tal que seu produto estará abaixo de seu nível potencial, dado por $K/a$. O emprego é determinado pela demanda por trabalho, dada por $bY$, a qual é menor do que a oferta de trabalho. Assume-se, por simplicidade, que o salário nominal é fixo. A oferta de trabalho é fixa em um ponto do tempo, e crescente a uma dada taxa ao longo do tempo. Assume-se a existência de apenas dois fatores de produção, capital e trabalho, e que a renda da economia é dividida entre o salário dos trabalhadores e o lucro dos capitalistas. A participação dos lucros na renda (ou margem de lucro) é dada por

$$\sigma = \frac{R}{Y} = \frac{z}{1 + z} \tag{73}$$

Onde $R$ é o lucro, e $\sigma$ é a margem de lucro. O salário real obtido a partir da equação de mark-up é:

$$\frac{W}{P} = \frac{1}{(1 + z)b} \tag{74}$$

Assume-se que os trabalhadores consomem toda a sua renda, enquanto os capitalistas poupam uma fração constante, $s$, de seus lucros. Assim, o consumo é dado por:

$$C = (1 - \sigma)Y + (1 - s)\sigma Y \tag{75}$$

Onde o primeiro termo é o consumo dos trabalhadores, e o segundo é o consumo dos capitalistas. Assumindo uma economia fechada e sem governo, a única fonte da demanda agregada, além do consumo, é a demanda por investimento. Assume-se que a demanda por investimento é determinada exogenamente. Assim, a proporção investimento/capital, na ausência de depreciação, é igual a taxa de crescimento do estoque de capital:

$$\frac{I}{K} = g \tag{76}$$

Onde $I$ e $K$ são o investimento real e o estoque de capital físico. No longo prazo, assume-se que as firmas ajustam sua taxa de investimento a sua taxa de investimento desejada, a qual é formalizada pela seguinte equação:

$$\frac{dg}{dt} = \Lambda\left(g_d - g\right) \tag{77}$$

Onde $\Lambda$ é uma constante positiva e $g_d$ é o investimento desejado. O investimento desejado depende positivamente da taxa de lucro, $r = R/K$, e do grau de utilização da capacidade, mensurada por $u = Y/K$. Visto que a participação dos lucros na renda, $\sigma$, e o mark-up são constantes, a taxa de lucros é proporcional o grau de utilização da capacidade, ou seja, $r = \sigma u$. Desta forma o investimento desejado é influenciado duas vezes por u, isoladamente e pela taxa de lucro. Por simplicidade, a função que descreve o investimento desejado é escrita como segue:

$$g_d = \gamma_0 + \gamma_1 u \tag{78}$$

Em que $\gamma_i$ (para i = 0, 1) são parâmetros positivos do investimento.

No curto prazo, assume-se que $K$ e $g$ são fixos, e que o nível de produto se ajusta de acordo com a demanda efetiva, dada pela soma entre consumo e investimento,

$$Y = C + I$$

Substituindo os valores de $C$ e $I$ das equações (75) e (76), dividindo o resultado por $Y$ e resolvendo para $u$, obtém-se o valor de equilíbrio de curto prazo da utilização da capacidade, dado por:

$$u^{*} = \frac{g}{s\sigma} \tag{79}$$

Impõe-se a restrição $g > 0$, o que implica $u > 0$, e se o produto se ajusta ao excesso de demanda, o equilíbrio de curto prazo será estável. Se houver capital e trabalho suficientes não haverá restrição a produção.

No longo prazo, assume-se que $K$ e $g$ podem mudar. A dinâmica de g é dada substituindo os valores de (78) e (79) na equação (77):

$$\frac{dg}{dt} = \Lambda\left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{g}{s\sigma} - g\right) \tag{80}$$

De onde se encontra o valor de equilíbrio de longo prazo:

$$g = \frac{s\sigma\gamma_0}{s\sigma - \gamma_1} \tag{81}$$

A existência e a estabilidade deste equilíbrio de longo prazo requerem que $s\sigma > \gamma_1$, que é a condição de estabilidade dos modelos keynesianos, ou seja, a resposta da poupança a mudanças na variável de ajuste (neste caso, o grau de utilização da capacidade) é maior que a correspondente resposta do investimento. É possível verificar que a taxa de crescimento de equilíbrio no longo prazo depende inversamente da taxa de poupança dos capitalistas e da margem de lucro, e positivamente dos parâmetros do investimento. O resultado de que o crescimento depende negativamente da margem de lucro segue do fato de que o aumento no lucro se dá pela redução do salário real, o que implica a contração da demanda agregada, reduzindo o grau de utilização da capacidade e a demanda por investimentos. Este resultado foi criticado por Bhaduri & Marglin (1990), que afirmaram que o investimento desejado também depende positivamente à margem de lucro.

#### 2.3.1.2. A crítica de Bhaduri & Marglin (1990)

De acordo com Bhaduri & Marglin (1990), o investimento desejado é uma função positiva da taxa de lucro. Outros autores como Robinson (1962) e Marglin (1984) também chegaram a esta afirmação. No entanto, a inovação teórica do trabalho de Bhaduri & Marglin (1990) foi analisar separadamente os impactos dos dois componentes da taxa de lucro, quais sejam, o grau de utilização da capacidade, $u$, e a margem de lucro, $\sigma$, sobre o investimento desejado. Assim, a função que descreve o investimento desejado na equação (78) toma a forma:

$$g_d = g(\sigma, u) \tag{82}$$

Esta função tem a vantagem de separar claramente o impacto no lado da demanda sobre o investimento, operado por meio do efeito aceleracionista de uma alta utilização da capacidade, do impacto do lado da oferta, operado por meio do efeito da redução de custos de um baixo salário real e de uma alta margem de lucro. Assim, torna-se possível a presença de duas formas de expansão da demanda agregada, $C + I$. A primeira forma seria por meio de um aumento no salário real (elevação do consumo), expansão wage-led, e a segunda forma seria a expansão via aumento da margem de lucro (elevação do investimento), expansão profit-led. Estas duas formas de expansão da demanda agregada são mostradas por meio de uma reconstrução da curva IS, ou seja, pela relação entre poupança e investimento.

Pelo modelo estruturalista simples, apresentado anteriormente, algum aumento na taxa de salário real, depreciando a margem de lucro, reduziria a poupança e aumentaria o consumo, elevando a demanda agregada. Todavia, devido às considerações de Bhaduri & Marglin (1990) sobre a margem de lucro, a demanda agregada pode ainda aumentar ou diminuir dependendo do impacto da margem de lucro sobre o investimento. É possível argumentar que uma baixa margem de lucro reduziria o incentivo a investir. Assim, o contraditório efeito de uma variação do salário real se torna aparente: um alto salário real aumenta o consumo, mas reduz o investimento. Logo o efeito das variações do salário real sobre a demanda agregada será dependente da resposta do investimento às variações na margem de lucro, e no grau de ulilização, pois $I = I(u, \sigma)$.

Pela suposição de que os trabalhadores consomem toda a sua renda e que os capitalistas poupam uma fração constante de seus lucros, a poupança total da economia será dependente da margem de lucro e do grau de utilização da capacidade, como segue:

$$s = \sigma u \tag{83}$$

Pela igualdade entre investimento (82) e poupança (83), obtém-se a curva IS gerada no espaço $(\sigma, u)$:

$$s\sigma u = g(\sigma, u) \tag{84}$$

Que possui inclinação dada por:

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{g_\sigma - su}{s\sigma - g_u} \tag{85}$$

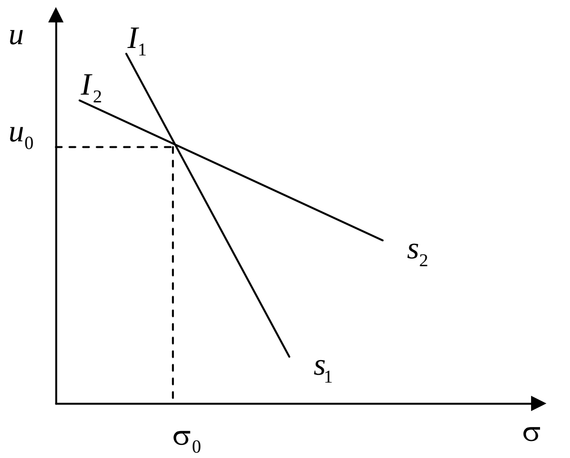
A inclinação da curva IS pode ser negativa ou positiva, dependendo da resposta relativa do investimento e da poupança à margem de lucro no numerador, e à utilização da capacidade no denominador.

A suposição tradicional é que a poupança responde mais fortemente do que o investimento a mudanças na margem de lucro. Pela condição de estabilidade dos modelos keynesianos, o denominador da equação (85) deve obedecer a restrição:

$$s\sigma - g_u > 0. \tag{86}$$

Uma resposta relativamente fraca do investimento a margem de lucro, $g_\sigma < su$, implicará uma curva IS negativamente inclinada, caso em que o consumo necessariamente assume um papel determinante na demanda agregada. Este é o caso da expansão wage-led (também denominada regime estagnacionista), em que uma queda na margem de lucro, ou equivalentemente, uma elevação no salário real gera aumento na demanda agregada e na capacidade de utilização. Neste regime, a cooperação entre capital e trabalho acontece quando os capitalistas conseguem recuperar no volume de vendas a margem de lucro perdida graças ao aumento do salário real. A condição para que isso ocorra é dada por: $d(\sigma u)/d\sigma < 0$, ou seja, a IS deve ser elástica para que exista cooperação entre capital e trabalho. Este resultado é mostrado na figura 2.

**Figura 2 – Regime estagnacionista (wage led) com ( $I_1S_1$ ) e sem ( $I_2S_2$ ) cooperação entre capital e trabalho**




Bhaduri & Marglin argumentam que a antítese do regime estagnacionista emerge quando a classe capitalista é enérgica, e o investimento privado responde vigorosamente a uma alta margem de lucro. Isto significa que o coeficiente $g_\sigma$ deve garantir $g_\sigma > su$ que, em conjunto com (86), faz com que a curva IS seja positivamente inclinada. Aqui a margem de lucro e o investimento desempenham o papel determinante na expansão da demanda agregada. Deste modo, alguma redução no consumo, causada por um baixo salário real, é mais do que compensada pela resposta do investimento privado, caso da expansão profit-led. A cooperação entre capital e trabalho neste regime ocorre quando o alto nível de emprego e utilização da capacidade se torna possível com a queda no salário real. A classe trabalhadora como um todo ganha pelo volume de emprego e por um alto salário total, se[22] $(\sigma/u)(du/d\sigma) > (\sigma/1-\sigma)$, ou seja, a elasticidade da IS deve exceder a participação relativa dos lucros e dos salários na renda.

Em contraposição ao regime estagnacionista, a figura 3 mostra o regime comandado pelos lucros, profit-led:

---

[22] $\dfrac{d[(1-\sigma)Y]}{d\sigma} > 0$ ou

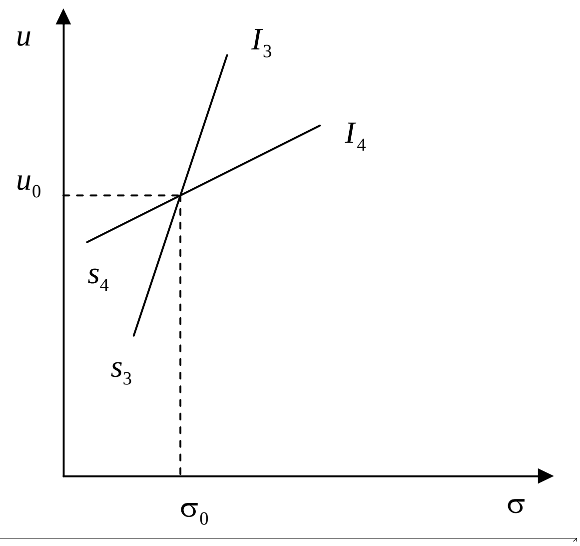
$$\frac{d[(1-\sigma)uK]}{d\sigma} > 0$$

$$-u + (1-\sigma)\frac{du}{d\sigma} > 0$$

$$\frac{(1-\sigma)}{u}\frac{du}{d\sigma} > 1$$

$$\frac{\sigma}{u}\frac{du}{d\sigma} > \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

**Figura 3 – Regime profit led com $I_3S_3$ ou sem $I_4S_4$ cooperação entre capital e trabalho**




A distinção entre os regimes estagnacionista e profit led mostra a possibilidade de que a expansão da economia possa beneficiar as duas classes sociais de maneiras diferentes. Ao longo da IS negativamente inclinada, no regime estagnacionista, uma elevada taxa de salário real produz altos níveis de utilização da capacidade e emprego. Isto significa um ganho para a classe trabalhadora em termos de salário real. Todavia, para os autores desta visão, a despeito de uma alta taxa de salário real e de uma baixa margem de lucro, os capitalistas podem continuar a fazer altos lucros totais, recuperando nas vendas o que perdem na margem de lucro por unidade.

No curto prazo, um alto lucro total poderia também significar uma alta taxa de lucro, apesar da baixa margem de lucro[23]. No entanto, esta cooperação econômica entre as classes sociais se torna problemática quando a curva IS é inelástica ( $g_2 s_2$ ) na figura 2. Neste caso, um declínio na margem de lucro causa um pequeno aumento na utilização da capacidade, insuficiente para compensar as perdas com a margem de lucro por unidade de venda. Existe também o perigo de que o crescimento via wage-led leve a uma expansão inadequada da capacidade produtiva ao longo do tempo. Pode ocorrer uma situação em que a capacidade produtiva persistentemente falhe em se manter na proporção do crescimento da força de trabalho, gerando o desemprego estrutural.

De outro modo, ao longo da inclinação positiva da IS, no regime profit led, os capitalistas ganham em termos de uma alta margem de lucro, tanto quanto de um alto lucro total a uma alta utilização da capacidade. Em conformidade com a lógica do lado da oferta, um alto nível de utilização da capacidade e de emprego se torna possível somente a uma baixa taxa de salário real. O ganho da classe trabalhadora se dá em termos de um alto volume de emprego e de um alto volume de salários, por meio da utilização da capacidade elevada.

Sob esta condição, uma redução no salário real e um aumento na margem de lucro estimulam o nível de demanda, uma vez que a elevada utilização da capacidade aumenta o volume de emprego e o total de salários da economia, como mostrado por ( $g_3 s_3$ ) na figura 3. Isto acarreta favorável cooperação entre as duas classes no regime profit led. No entanto, esta cooperação pode gerar o problema de excesso de capacidade produtiva no longo prazo, se a capacidade da economia crescer muito, de forma desproporcional em relação à força de trabalho, gerando um excesso estrutural de capacidade produtiva (que não é originado pelo argumento keynesiano de insuficiência de demanda efetiva).

---

[23] A taxa de lucro, $r$, é o produto da margem de lucro e da taxa de utilização da capacidade, $r = \sigma u$. Assim, uma queda em $\sigma$, quando compensada por um aumento em $u$ pode elevar $r$.

Por fim, Bhaduri & Marglin concluem que podem existir dois tipos de regimes econômicos, dependendo da inclinação da curva IS, e que dentro de cada regime poderá haver cooperação ou conflito entre as classes sociais, dependendo da elasticidade da curva IS em questão.

### 2.3.2 Modelos Estruturalistas com Progresso Tecnológico Endógeno

Ao contrário do que ocorre na tradição neoclássica, o progresso tecnológico não desempenha papel fundamental nos modelos de crescimento pós-keynesianos. No entanto, tal como nos modelos neoclássicos, é possível incorporar a mudança tecnológica, em termos de mudanças na eficiência do trabalho. Esta seção apresenta dois modelos pós-keynesianos com progresso tecnológico: o modelo estruturalista simples de Dutt (2003) com tecnologia, e o modelo de Bhaduri (2006), que incorpora o conflito intra e inter-classes.

No modelo estruturalista simples, a mudança tecnológica é tratada em termos de variações na produtividade do trabalho. Bhaduri (2006) assume este mesmo pressuposto, mostrando que o aumento da produtividade do trabalho possui efeito de queda no nível de preços, por meio da redução dos custos de produção para a firma. Esta redução no nível de preços gera, por um lado, uma tendência ao aumento do salário real, levando ao conflito inter-classe (entre capital e trabalho), e por outro lado, à uma disputa por ganhos de parcela de mercado, via redução de preços, o que propicia a existência de um conflito intra-classe (entre as firmas).

#### 2.3.2.1. Modelo de Dutt (2003) com Progresso Tecnológico Endógeno

Dutt (2003) incorpora a mudança tecnológica ao modelo apresentado na seção 2.3.1.1, fazendo $x = 1/b$. Assim, a mudança tecnológica pode ser vista como um aumento em $x$ ou uma queda em b. Se esta mudança tecnológica for exógena, dada por uma taxa de crescimento exógena da produtividade do trabalho (sem afetar nenhum outro parâmetro), de forma que $g_x = -\hat{b}$, ela não afetará a utilização da capacidade e o crescimento no curto ou no longo prazo. Este resultado pode ser visto pela observação das equações (79) e (81).

Uma vez que a taxa de crescimento do produto não é afetada pela mudança tecnológica exógena, o efeito de uma alta taxa de mudança tecnológica é a redução da taxa de crescimento da demanda por trabalho, resultando em um rápido aumento da taxa de desemprego ao longo do tempo. Este resultado depende da suposição de que nenhum dos outros parâmetros do modelo mudam, quando a taxa de progresso tecnológico muda. No entanto, sob o ponto de vista pós-keynesiano, mudanças na taxa de progresso tecnológico podem alterar os outros parâmetros do modelo direta ou indiretamente.

Uma alta taxa de progresso tecnológico terá um efeito positivo sobre o investimento, pois as firmas terão que investir na nova tecnologia contida em novos equipamentos de produção, utilizando novos produtos e processos. Assim, a mudança tecnológica impulsiona o investimento desejado, implicando altas taxas de investimento, e utilização da capacidade no longo prazo.

A mudança tecnológica também pode reduzir a taxa de poupança dos capitalistas, pelo aumento da variedade de bens de consumo disponíves para os consumidores capitalistas, levando a um aumento da utlização da capacidade no curto prazo, e ao crescimento da capacidade no longo prazo.

Por uma alta taxa de mudança tecnológica é possível modificar a taxa de mark-up, z, e, portanto, a margem de lucro, $\sigma$. Supondo que a mudança tecnológica elevada aumente o grau de monopólio (as firmas líderes conquistam um espaço maior no mercado), z e $\sigma$ aumentam. No caso do regime estagnacionista, um alto mark-up reduz a utilização da capacidade no curto prazo, e a expansão da capacidade, bem como a taxa de crescimento, no longo prazo. Este resultado se dá pela redução da demanda agregada gerada pela redistribuição de renda dos salários em direção aos lucros.

No entanto, de acordo com as considerações de Bhaduri & Marglin (1990) sobre a existência de um regime profit-led, um aumento na margem de lucro, $\sigma$, geraria um impacto positivo sobre a utilização da capacidade, devido a uma forte resposta do investimento ao aumento da margem de lucro.

A mudança tecnológica se torna endógena ao modelo estruturalista simples pela suposição de que $g_x$ depende de variáveis econômicas. A função que descreve o progresso tecnológico trata a produtividade do trabalho como uma função positiva da taxa de crescimento da fração capital/trabalho. Usando uma forma linear funcional, assume-se que

$$g_x = \tau_0 + \tau_1 \hat{k} \qquad (87)$$

Notando que $\hat{k} = \hat{K} - \hat{L} = \hat{K} - \hat{Y} - g_x$, a equação (87) pode ser reescrita como

$$g_x = \left(\frac{\tau_0}{1-\tau_1}\right) + \left(\frac{\tau_0}{1-\tau_1}\right) \cdot (\hat{K} - \hat{Y}) \qquad (88)$$

No equilíbrio de longo prazo, u atinge seu nível de equilíbrio em que $\hat{K} = \hat{Y}$. Logo,

$$g_x = \left(\frac{\tau_0}{1-\tau_1}\right) \qquad (90)$$

Em outras palavras, a taxa de crescimento da produtividade do trabalho é determinada somente pelos parâmetros da função do progresso técnico. Assim, a função (78), que descreve o investimento desejado, passa a incorporar a mudança tecnológica, como segue:

$$g_d = \gamma_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 g_x$$

E levando em conta o efeito positivo do progresso tecnológico sobre o investimento desejado, a função (81), que descreve a taxa de crescimento de equilíbrio no longo prazo, toma a seguinte forma:

$$g = s\sigma \frac{\gamma_0 + \gamma_1 g_x}{s\sigma - \gamma_1}$$

De modo que uma alta taxa de progresso tecnológico aumenta o investimento, a demanda agregada, e consequentemente, de maneira direta ou indireta (por meio de seu efeito sobre u), aumenta $g$.

#### 2.3.2.2. Modelo de Bhaduri (2006)

O modelo de Bhaduri (2006), por sua vez, se contrapõe aos modelos de crescimento equilíbrio, a poupança é idêntica ao investimento, $S = I$. No entanto, se por alguma razão este equilíbrio se desfaz, a economia se ajusta de forma a encontrar um novo equilíbrio em que, novamente, $S = I$. O processo de ajustamento em direção ao novo equilíbrio é representado como segue:

$$\left(g_y - g_y^*\right) = \frac{dg_y}{dt} = \alpha\left(g_i - g_s\right), \quad \alpha > 0 \tag{91}$$

Em que $g_y$ é a taxa de crescimento do produto fora do equilíbrio, $g_y^*$ é a taxa de crescimento de equilíbrio, $g_i$ é a taxa de crescimento do investimento, e $g_s$ é a taxa de crescimento da poupança. O investimento pode crescer a uma taxa diferente da taxa de crescimento da poupança se uma função investimento diferente da função poupança for introduzida como argumento.

Neste modelo, o investimento depende positivamente do nível de produto corrente, y, e da produtividade do trabalho, x, ou seja, $I = I(x, y)$. Aplicando o logaritmo a esta função investimento, e derivando, obtém-se

$$g_i = \eta_y g_y + \eta_x g_x \tag{92}$$

Onde $g_x$ é a taxa de crescimento da produtividade do trabalho, e $\eta_y$ e $\eta_x$ são as elasticidades parciais positivas do investimento em relação ao produto e a produtividade do trabalho. Ao assumir a influência da produtividade do trabalho na decisão de investimento, este trabalho segue a linha de raciocínio de Bhaduri & Marglin (1990), pois uma elevada produtividade do trabalho, mantendo constante o salário real, implica uma alta margem de lucro. Assim, o investimento se torna uma função positiva do nível de produto e da margem de lucro.

A taxa de variação da poupança é considerada uma função positiva da taxa de crescimento da renda, tal que

$$g_s = \varepsilon_y g_y \tag{93}$$

Onde $\varepsilon_y$ é a elasticidade parcial positiva da poupança em relação à renda. Inserindo (92) e (93) em (91), obtém-se

$$\frac{dg_y}{dt} = \alpha\left[\left(\eta_y - \varepsilon_y\right)g_y + \eta_x g_x\right] \qquad \varepsilon_y, \eta_y, \eta_x > 0 \tag{94}$$

A oferta de trabalho cresce de forma exógena a taxa $n$. O desemprego permanece constante quando o crescimento do emprego se dá a mesma taxa do crescimento da oferta de trabalho, ou seja, quando $g_L = n$. No caso do conflito inter-classes, existirá uma posição de equilíbrio da taxa de desemprego, pois na disputa por parcela de renda entre capital e trabalho, uma taxa inalterada de salário real e uma disciplina constante são impostas pelos capitalistas, os quais desejarão manter uma constante fração da força de trabalho desempregada. O crescimento da produtividade do trabalho, $g_x$, é, desta forma, induzido inteiramente pelo conflito inter-classe, o que pode ser capturado formalmente como:

$$\frac{dg_x}{dt} = \beta\left(g_L - n\right) = \beta\left(g_y - g_x - n\right), \qquad \beta > 0 \tag{95}$$

Onde por definição

$$g_y = g_x + g_L \tag{96}$$

As equações (94) e (95) descrevem uma dinâmica em que a taxa de crescimento do produto é governada pelo crescimento da demanda no mercado de bens, enquanto a produtividade do trabalho é governada pelo conflito inter-classe, expresso por meio da tentativa dos empregadores de manter uma taxa de desemprego constante no mercado de trabalho.

De (94):

$$dg_y / dt = 0 \Rightarrow g_y = z g_x \tag{97}$$

Onde $z = \dfrac{\eta_x}{\varepsilon_y - \eta_y}$ e de (95):

$$dg_x / dt = 0 \Rightarrow g_y = n + g_x \qquad n > 0 \tag{98}$$

De (97) e (98) segue que nenhuma configuração positiva de equilíbrio $g_y^*$ e $g_x^*$ acontecerá a menos que $z > 1$, o que implica

$$\eta_x > \left(\varepsilon_y - \eta_y\right) > 0, \tag{99}$$

que é a condição de estabilidade para o ajustamento do produto através do multiplicador keynesiano.

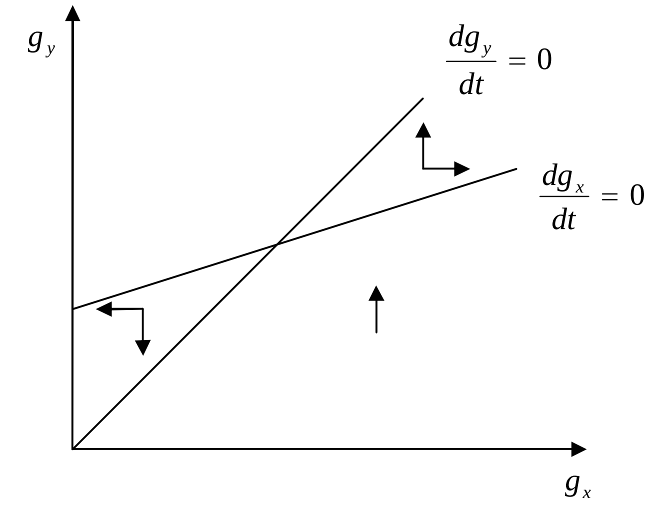
As soluções particulares de equilíbrio dadas por (97) e (98) são:

$$g_y^* = \frac{nz}{(z-1)}, \qquad g_x^* = \frac{n}{(z-1)}, \qquad g_L^* = n \tag{100}$$

O diagrama de fase da figura 4, resultante do sistema[24] (94) e (95) é um ponto de sela. Solução que não pode ser considerada estável em geral, uma vez que a metodologia keynesiana não comporta o ajustamento automático a um equilíbrio de pleno emprego.

[24] Para solução do sistema dinâmico, vide apêndice.

**Figura 4 – Diagrama de fase na presença de conflito inter-classe**




Bhaduri (2006) afirma que a especificação da equação (95) é deficiente por ignorar a competição intra-classe (entre firmas por parcela de mercado), na direção e difusão do crescimento da produtividade.

**O conflito intra-classe**

A difusão do conhecimento tecnológico das firmas inovadoras em direção as firmas rivais faz com que o conhecimento produtivo seja um bem público não exclusivo, gerando economias externas e retornos crescentes. Enquanto a velocidade de difusão da tecnologia dependeria em geral do grau de restrição imposto pelo regime de direitos autorais, esta interação dinâmica entre retornos crescentes e difusão tecnológica tem sido um tema importante dentro da teoria do crescimento.

Esta competição é capturada formalmente pela suposição de que existe um grande número de pequenas firmas com livre entrada e saída na economia. Em cada ponto do tempo existirá uma

$$p_{t+1} = p_t + \left[ \frac{\left(p_t^f - p_t\right)}{T} \right] \tag{102}$$

$$g_p = \left(p_{t+1} - p_t\right) = \lambda\left(p^f - p\right)$$

Onde $g_p$ é a variação no nível de preços médio, e $\lambda = \frac{1}{T}$ é a velocidade de ajustamento. Sendo $\lambda$ a variável responsável por descrever a velocidade de difusão de uma tecnologia na economia, ela estará diretamente relacionada ao regime de regulação de patentes sobre propriedade intelectual. Quanto mais rigoroso o regime de patentes, mais lenta será a difusão da tecnologia, implicando um baixo valor para $\lambda$.

Substituindo (101) em (102), e usando a definição (96), obtém-se o declínio na taxa do nível de preços médios em termos percentuais como

$$g_p = -\lambda \left[ \frac{\left(dL/dY\right)}{\left(dY/dY\right)} \right] = -\lambda \left( \frac{g_x}{g_y} \right), \quad g_y \neq 0 \tag{103}$$

Onde $\left[ {}^{\left(dL/L\right)} \big/ {}_{\left(dY/Y\right)} \right]$ é a elasticidade do emprego em relação a renda.

A pressão de queda no nível de preços exercida pelo progresso tecnológico, sob competição intra-firma na equação (103), tenderia a aumentar a parcela de salários na renda, $\theta = \left(wL/pY\right)$, através da elevação da taxa de salário real. Aplicando o logaritmo em $\theta$ e derivando, obtém-se:

$$g_\theta = \left(g_w - g_p\right) + \left(g_L - g_y\right) = \left(g_w - g_p\right) - g_x \tag{104}$$

Inserindo (103) em (104), obtém-se:

$$g_\theta = g_w + \lambda\left(g_x/g_p\right) - g_x \tag{105}$$

Assume-se que o salário nominal é mantido constante, ou seja, $g_w = 0$, de forma que o salário real deveria aumentar de acordo com a queda no nível de preços, dada por (103).

Conseqüentemente, a parcela de salários na renda, $\theta$, tenderia a crescer. No entanto esta hipótese não está de acordo com o crescimento equilibrado de longo prazo, e nem com verificações empíricas, onde o salário real tende a ser constante ao longo do tempo. Neste modelo, o salário real será constante no tempo somente se a taxa de crescimento da produtividade do trabalho se ajustar ao hiato entre o crescimento do salário real e da produtividade do trabalho, isto é,

$$\frac{dg_x}{dt} = \beta\left[\left(g_w - g_p\right) - g_x\right], \qquad \beta > 0 \tag{106}$$

Em um caso especial, caracterizado somente pela competição intra-classe entre firmas, sem a presença do conflito inter-classe, isto é, $g_w = 0$, tem-se

(107)

As equações (94) e (107) formam um sistema dinâmico[25],em que a taxa de crescimento do produto é governada pela demanda efetiva (como no conflito inter-classe), e a taxa de crescimento da produtividade do trabalho incorpora os efeitos da competição intra-classe. A solução particular deste sistema é dada por:

$$g_y^* = \lambda, \quad g_x^* = \frac{\lambda}{z}, \quad g_L^* = \frac{\lambda(z-1)}{z} \tag{108}$$

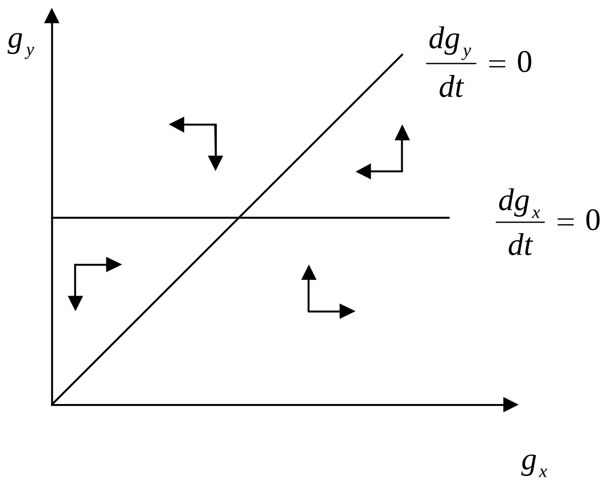
No entanto, a suposição deste estado estacionário com $g_w = 0$ implicará $g_L^* = n$. Logo, a taxa de crescimento do produto no equilíbrio pode ser reescrita como:

$$g_y^* = \lambda = \frac{nz}{(z-1)}$$

O diagrama de fase deste sistema é mostrado na figura 5, como segue:

[25] Para solução do sistema dinâmico, vide apêndice.

**Figura 5 – Diagrama de fase na presença de competição intra-classe**




Este diagrama mostra a possibilidade de convergência ao equilíbrio estacionário. Pelo cálculo do traço e do determinante da matriz jacobiana, encontra-se um equilíbrio estável, com [26] $T < 0$ e $D > 0$, se $\varepsilon_y - n_y > 0$.

**O modelo geral com competição intra e inter-classe**

Abandona-se aqui a hipótese de salário real constante. É postulada uma curva estável de salário, em que o nível de salário real é inversamente proporcional a taxa de desemprego.

$$w = f(u) \qquad\qquad f' < 0 \quad (109)$$

Onde $u = \frac{(N-L)}{N}$, em que $N$ é a quantidade total de trabalho, e $L$ é a força de trabalho empregada.

Assim, aplicando o logaritmo a (109), e derivando temos:

[26] Para demonstração, vide apêndice.

$$g_w = \frac{f'(u)}{f(u)} = ch(g_L - n) = b(g_y - g_x - n) \qquad b = ch > 0 \quad (110)$$

Em que $c$ é o valor absoluto da elasticidade do salário em relação ao desemprego, $\frac{W}{u}\frac{du}{dW}$, e $h$ é a fração emprego/desemprego, $\frac{1-u}{u}$. Substituindo (103) e (110) em (106), obtém-se:

$$\frac{dg_x}{dt} = \beta\left[b(g_y - g_x - n) + \lambda\left(\frac{g_x}{g_y}\right) - g_x\right] \qquad (111)$$

Assim, o sistema dinâmico[27] formado pelas equações (94) e (111) apresenta um ponto de vista mais geral. A distribuição de renda entre as classes em (111) é determinada pela difusão do progresso tecnológico, por um lado, e pela competição intra e inter-classes, por outro.

As soluções particulares deste sistema são dadas por:

$$g_y^* = [(\lambda - bnz)/(1 + b - bz)]; \qquad g_x^* = [g_y^*/z] \quad \mathbf{e} \quad g_L^* = [(z-1)g_y^*/z] \qquad (112)$$

A estabilidade deste equilíbrio requer que o traço do jacobiano seja negativo, e o determinante positivo,[28] isto é:

$$T > 0, \text{ o que implica } \{\alpha(\varepsilon_y - \eta_y) + \beta[(1+b) - (\lambda/g_y^*)]\} > 0 \qquad (113)$$

e

$$D > 0, \text{ ou seja, } \alpha\beta \cdot (\varepsilon_y - \eta_y)(1 + b - bz) > 0 \qquad (114)$$

Substituindo o valor de $g_y^*$ de (112) na condição do traço (113), obtém-se a seguinte restrição:

$$\lambda > n(1 + b) \qquad \mathbf{(115)}$$

O numerador de $g_y^*$ em (112) é positivo se:

[27] Para solução do sistema, vide apêndice.
[28] Para demonstração, vide apêndice.

$$\lambda > bnz\,, \tag{116}$$

e a condição para que o determinante seja positivo é $(1+b-bz)>0$, o que pode ser reescrito como:

$$b<\frac{1}{(z-1)} \tag{117}$$

Existe uma diferença fundamental entre os estados estacionários definidos por (100) e (108) e o descrito por (112). Nos dois primeiros casos, a taxa de desemprego, u, é constante. No último caso, ela pode aumentar ou diminuir ao longo do tempo. O sistema descrito pelas equações (94) e (111) leva, assim, a um estado estacionário em que o mercado de trabalho pode não estar em equilíbrio, igualmente quando o mercado de *commodities* e a participação do trabalho na renda atingem o equilíbrio.

O mecanismo de barganha salarial, implícito em (110), é obtido reescrevendo $g_w$ em termos de $u$, $\dot{u}$, e $c$, como segue:

$$g_w=-c\left[\frac{\dot{u}}{1-u}\right] \qquad 1>u>0 \quad \textbf{(118)}$$

Isto mostra o crescimento do salário real como sendo negativamente relacionado com a taxa de desemprego e a sua mudança.

Mantendo a suposição de um crescimento exógeno da taxa de oferta de trabalho, o crescimento da taxa de emprego de (112) deve satisfazer a condição:

$$g_L^* \leq n, \quad \text{e de (26)} \quad \lambda \leq nz/(z-1) \qquad \text{Com } z>1 \tag{119}$$

O propósito deste modelo é ver a competição intra-classe e inter-classe como interligadas na direção do salário e do crescimento da produtividade endogenamente, por meio dos valores dos parâmetros $b$ e $\lambda$, representando respectivamente os dois tipos de competição. A interação destes dois tipos de competição é mostrada no diagrama da figura 6.

**Figura 6 – Equilíbrio na presença dos conflitos inter e intra-classe**

Neste diagrama, as duas inegualdades, dadas pelas linhas *AC* de (115) e *OC* de (116), se interceptam ao ponto *C*, com as coordenadas $1/z-1$ e $nz/(z-1)$, que coincidem com os valores máximos permitidos por $b$ e $\lambda$. A área ABC representa o conjunto de valores compatíveis com o estado estacionário estável e positivo. Dado algum valor possível de $b$, a extensão do conflito

A taxa de crescimento do produto, $g_y^*$, atinge seu valor máximo possível quando λ encontra sua fronteira superior de pleno emprego, em que $\lambda = OB = nz/z - 1$. Substituindo este valor máximo de λ em (112), o crescimento máximo do produto se dá a seguinte taxa:

$$g_y^* = \frac{nz}{z-1} \tag{120}$$

A equação (120) representa um pleno equilíbrio de estado estacionário. Este equilíbrio se dá por que, por suposição, a oferta de trabalho e a demanda por trabalho crescem a mesma taxa, de forma que a fração emprego/desemprego se torna constante, e $b$ independente do tempo. Neste ponto de taxa de crescimento máxima do produto, a taxa exógena de crescimento da oferta de trabalho, $n$, é excedida. Desta forma, a taxa de crescimento de equilíbrio estacionário deixa de obedecer a restrição imposta pelo crescimento exógeno da oferta de trabalho, enquanto incorpora a influência da poupança e do investimento sobre a taxa de crescimento através do parâmetro $z$.

Este modelo se contrapõe aos modelos endógenos da teoria neoclássica, incorporando o problema da demanda efetiva, e eliminando a restrição da oferta de trabalho exógena. Aqui, as decisões de investimento e poupança exercem sua influência sobre a taxa de crescimento de equilíbrio do produto no longo prazo. O aspecto novo apresentado por esta análise é enxergar o crescimento do salário real e da produtividade do trabalho como sendo dirigidos simultaneamente pelas forças do conflito entre-classes por parcela de renda, e da competição intra-classe por parcela de mercado.

O progresso técnico influencia a taxa de crescimento a partir do grau de difusão das inovações entre as firmas.  Uma inovação no processo produtivo tende a aumentar a produtividade do trabalho e reduzir os preços dos bens de consumo. Desta forma, conclui-se que uma estrutura de mercado mais competitiva, com uma política de direitos autorais pouco rigorosa, agiliza a transferência dos benefícios da tecnologia por meio da redução do nível de preço, o que por sua vez tende elevar o salário real. Em adição, surge o conflito inter-classes entre capital e trabalho, expresso pela determinação da taxa de salário nominal como função da taxa de desemprego, levando a uma taxa salário real relativamente constante ao longo do tempo. Assim, Bhaduri afirma que o progresso técnico permanece neutro ao longo do tempo em relação a distribuição de renda, e que o aumento da produtividade do trabalho pode levar ao aumento da taxa de desemprego a menos que a demanda agregada cresça na mesma proporção.

## 2.4. Considerações ao Capítulo

Pelas linhas acima, é possível concluir que a abordagem pós-keynesiana do crescimento econômico foca-se inteiramente no problema da distribuição de renda. Os modelos aqui descritos buscam um caminho exatamente oposto ao pressuposto neoclássico de que a oferta cria sua própria demanda, e se focam no problema de determinação da demanda agregada.

Para os modelos de primeira geração, a acumulação de capital é determinada pela taxa de lucro. De acordo com Robinson (1956, 1962) e Kaldor (1956) existe uma distribuição de renda ideal por trás do crescimento do produto.

Entre os modelos de segunda geração, observou-se uma controvérsia acerca da distribuição de renda. O pensamento estruturalista, fundamentado no conflito kaleckiano entre capital e trabalho, assegura que uma mudança na distribuição de renda dos lucros em direção aos salários tende a aumentar a demanda agregada, gerando um aumento na taxa de crescimento do produto. No entanto, o trabalho de Bhaduri & Marglin (1990) critica tal hipótese, afirmando que o investimento é também uma função da margem de lucro. Assim, um alto nível de salário real implicaria em uma baixa margem de lucro, e portanto em um baixo nível de investimento.

Os modelos pós-keynesianos com progresso tecnológico endógeno, trazidos neste trabalho para fins de comparação com a teoria neoclássica, apresentam da mesma forma a demanda efetiva no comando do processo do crescimento. As comparações entre as abordagens neoclássica e estruturalista serão feitas em maiores detalhes na conclusão deste trabalho.

# CONCLUSÃO

As duas abordagens da teoria do crescimento econômico, apresentadas neste trabalho, são desenvolvidas dentro de uma perspectiva macrodinâmica, com a finalidade de esclarecer os determinantes do crescimento da renda *per capita* das nações no longo prazo. A primeira abordagem mostrada foi a teoria de crescimento neoclássica, dividida em duas fases: modelos exógenos e endógenos. A segunda abordagem trata da teoria de crescimento pós-keynesiana, também dividida em duas fases: modelos de primeira e de segunda geração.

Dentro de ambas as abordagens, o estudo sobre crescimento econômico tem como ponto de partida o trabalho de Harrod (1939). Conforme Bertella (2000), o modelo de crescimento econômico de Harrod motivou respostas tanto neoclássicas quanto pós-keynesianas, dando início às pesquisas sobre o tema que é, na atualidade, tratado com grande destaque dentro da pesquisa macroeconômica.

A primeira formulação da teoria de crescimento neoclássica, foi o modelo exógeno de Solow (1956), fundamentado pela hipótese de concorrência perfeita e retornos constantes de escala, com retornos decrescentes para cada um dos insumos produtivos isoladamente. A consideração de retornos decrescentes ao capital leva a uma importante conclusão no trabalho de Solow: a propriedade da convergência, segundo a qual nações com baixa intensidade de capital tenderiam a crescer mais rapidamente do que nações com amplo estoque de capital. Desta forma, existiria uma tendência à convergência das taxas de crescimento de todas as nações.

Outra importante conclusão do trabalho de Solow é a atribuição do crescimento econômico ao progresso tecnológico exógeno, ou seja, a diferença entre a taxa de crescimento do produto e a taxa de crescimento dos fatores de produção se deve à variação da tecnologia, a qual não é explicada pelo modelo. Esta variação não explicada ficou conhecida como o resíduo de Solow. Esta conclusão não poderia ser satisfatória para o pensamento neoclássico, uma vez que o modelo tomava como dado o comportamento da variável considerada a principal determinante do crescimento econômico. Outros modelos de crescimento foram construídos a partir da estrutura básica do modelo de Solow. Cass (1965) e Koopmans (1965) realizaram melhorias no modelo básico de Solow, tornando a poupança endógena. No entanto, o problema do resíduo de Solow permanecia. Somente em meados da década de 80, o trabalho de Romer (1986) conseguiu resolver este problema. O resíduo de Solow foi então explicado pela presença de externalidades positivas geradas pelo investimento em capital humano. Este trabalho deu início ao desenvolvimento dos modelos de crescimento endógeno, em que a mudança tecnológica passaria a ser determinada dentro do próprio modelo.

O trabalho de Romer (1986) foi desenvolvido por meio de de garantir que o crescimento da renda *per capita* ocorresse sem restrições, ainda que na presença de uma função de produção com retornos constantes e em um ambiente de concorrência perfeita.

Lucas (1988a) compara o modelo de Solow com e sem os efeitos da acumulação de capital humano. Tal como Romer (1986), Lucas (1988a) conclui que a presença dos efeitos externos gerados pelo capital humano é capaz de fazer com que a renda *per capita* cresça sem restrições. Em seu modelo com *learning by doing*, Lucas (1988b) mostra como o aprendizado surge em função da atividade profissional e acrescenta que caso os trabalhadores se especializassem na produção de bens de alta tecnologia, maior seria o crescimento da economia. No entanto, como os benefícios deste aprendizado surgem na forma de externalidades, os trabalhadores não os levam em consideração.

Os modelos de Romer (1986) e Lucas (1988) constituíram importante contribuição para o desenvolvimento da teoria de crescimento endógeno. No entanto, estes modelos apesar de incorporarem os efeitos do capital humano sobre o crescimento, ainda tratavam a mudança tecnológica como exógena, devido a falta de fundamentos microeconômicos compatíveis com uma estrutura de retornos crescentes de escala. Insatisfeito com esta abordagem, Romer (1990) desenvolveu um modelo com mudança tecnológica endógena baseado em três premissas. A primeira é que tal como no modelo de Solow, o motor do crescimento econômico é a mudança tecnológica, ou seja, o mecanismo de transformação de insumos em produtos. A segunda premissa é a mudança tecnológica endógena, primeiramente determinada pelas ações dos agentes em resposta aos incentivos financeiros. A terceira premissa é o caráter não rival e parcilmente excluível do conhecimento.

De acordo com Snowdon & Vane (1999) estas três premissas tem duas importantes implicações para a teoria de crescimento econômico. Em primeiro lugar, devido ao fato de as idéias serem não rivais, elas podem ser acumuladas sem limites ou base *per capita*. Segundo, pela exclusibilidade incompleta, a criação do conhecimento envolve externalidades positivas que não podem ser capturadas pelos agentes econômicos que produzem as idéias. O crescimento sem fronteiras e a incompleta apropriabilidade como características da economia das idéias implicam que o produto não pode ser representado por uma função com retornos constantes de escala de todos os insumos conjuntamente. A análise de Romer (1990) implica retornos crescentes e, portanto, concorrência imperfeita.

Pode-se concluir que a teoria neoclássica, tanto na versão exógena quanto endógena, foi desenvolvida a partir da hipótese de que o crescimento econômico é resultado do progresso tecnológico. Com o objetivo de estudar o longo prazo, estes modelos partem da análise do lado da oferta, por meio da utilização da função de produção neoclássica. Não há estudo sobre o papel da demanda na determinação do crescimento econômico. Da mesma forma, a poupança e o investimento são tomados como dados (exceto nos modelos de Cass (1965) e Koopmans (1965)), não exercendo papel relevante sobre a taxa de crescimento da economia. Estas conclusões são fortemente criticadas pelos autores pós-keynesianos, que trazem o lado da demanda para o foco da análise de longo prazo. Para a corrente pós-keynesiana, a mudança tecnológica não exerce grande influência nas taxas de crescimento, ao contrário da teoria neoclássica.

keynesianos, gerando apenas mudança qualitativa em relação às taxas de crescimento do capital e da produtividade.

A abordagem pós-keynesiana do crescimento econômico se desenvolveu, em um primeiro momento, a partir do modelo de Harrod (1939), tal como a abordagem neoclássica. Enquanto os trabalhos de Solow (1956) e Swan (1956) forneciam uma resposta neoclássica ao modelo de Harrod, os trabalhos de Kaldor (1956) e Robinson (1956, 1962) davam a resposta pós-keynesiana. O problema do fio da navalha de Harrod, ou seja, da existência de uma única taxa de crescimento compatível com o equilíbrio de longo prazo, era resolvido por Kaldor e Robinson por meio de modelos com distribuição de renda e taxa de poupança endógena.

Os dois autores tratam da existência de duas classes sociais: capitalistas e trabalhadores. Para Robinson, a taxa de crescimento da economia é uma função da taxa de lucro. A taxa de crescimento de equilíbrio é aquela que valida as expectativas de lucro dos capitalistas, fazendo com que as firmas se sintam satisfeitas com a situação em que se encontram. Esta taxa, Robinson chamou de taxa de acumulação desejada.

A importância do progresso técnico, dentro da análise de Robinson, era permitir a compatibilidade entre taxa de crescimento desejada e a taxa de crescimento possível, dada pela taxa de crescimento da população e pela produtividade do trabalho. Desta forma, caso a taxa desejada estivesse acima do crescimento da força de trabalho, os espíritos animais capitalistas teriam incentivo para expandir a taxa de progresso técnico, de forma a garantir que o crescimento da taxa de acumulação se desse à taxa desejada (Bertella, 2000).

Para Kaldor, existiriam múltiplas distribuições de renda na economia associadas à diferentes taxas de crescimento econômico. Assim, existiriam diferentes propensões a poupar a partir dos múltiplos perfis distributivos. No entanto, a parcela de investimento do produto seria independente da propensão a poupar da economia, seguindo a tradição keynesiana. Tal como

Robinson, Kaldor coloca como restrições ao crescimento de longo prazo, a taxa de crescimento da população e a produtividade do trabalho. Assim, o dinamismo técnico seria o motor do crescimento econômico, permitindo altos níveis de investimento.

Kaldor afirma que os ganhos do progresso técnico deveriam ser sistematicamente incorporados à produtividade do trabalho, gerando um aumento no salário real e conseqüentemente expansão na demanda agregada.

É possível afirmar que as respostas neoclássica e keynesiana ao trabalho de Harrod foram dadas em duas direções opostas. Por um lado, o modelo de Solow focava o lado da oferta na tentativa de explicar o crescimento da renda *per capita* no longo prazo.  O problema da unicidade da taxa garantida de Harrod desaparecia no modelo de Solow à medida que o progresso tecnológico permitia diferentes níveis de equilíbrio estacionário para a taxa de crescimento *per capita*. A resposta keynesiana de Kaldor e Robinson era dada pela ênfase no lado da demanda. Para os dois autores a existência de diferentes taxas de poupança, a partir de diferentes distribuições de renda, permitiria diferentes níveis de investimento, e assim diferentes níveis de equilíbrio para a taxa de acumulação. O progresso técnico nos modelos de primeira geração exercia o papel fundamental de permitir que a expansão do sistema se desse de acordo com os objetivos dos capitalistas. No entanto, nestes modelos, era o investimento e não a mudança tecnológica o motor do crescimento econômico de longo prazo.

A pesquisa pós-keynesiana sobre crescimento econômico avançou mesmo durante a década de 1970, período em que foi esquecida pela macroeconomia neoclássica. Surgiram os modelos de segunda geração, tais como Rowthorn (1982), Dutt (1984), Taylor (1985, 1981), que faziam a taxa de utilização da capacidade endógena. Em relação aos modelos de primeira geração, a taxa de utilização da capacidade é igual a taxa de  crescimento possível, exógena ao modelo.

Enquanto a teoria neoclássica removeu a barreira dos retornos decrescentes de escala, tornando o progresso tecnológico uma variável endógena, os modelos de segunda geração pós-keynesianos trabalham com taxa de crescimento do produto endógena, dada pela taxa de utilização da capacidade e pela taxa de crescimento da produtividade endógenas. Nestes modelos, o crescimento do produto não é independente da poupança e do investimento, como supõe a teoria neoclássica. Os modelos pós-keynesianos fazem a distinção entre poupança e investimento: enquanto políticas de aumento ao investimento podem elevar o crescimento econômico e a mudança tecnológica, aumentos na taxa de poupança dos capitalistas podem deprimir a demanda agregada e reduzir a taxa de crescimento.

Os modelos pós-keynesianos, ao contrário da maior parte dos modelos da nova teoria do crescimento, afirmam que não são todos os tipos de mudança tecnológica que aumentam a taxa de crescimento da economia. Se a mudança tecnológica não afetar significativamente o investimento, ou a estrutura industrial (que afeta o *mark-up*), terá como efeito o desemprego, sem aumentar a velocidade do crescimento. Pelo aumento do desemprego e pela depressão da demanda agregada, a mudança tecnológica pode de fato gerar uma desaceleração da taxa de crescimento. A mudança tecnológica é eficaz em aumentar o crescimento, quando proporciona impacto na demanda por investimento ou na demanda por consumo, envolvendo novos produtos e processos pela introdução de novas máquinas, ou na modificação da estrutura industrial.

Os modelos pós-keynesianos de segunda geração procuram trabalhar com hipóteses que julgam ser mais realísticas, tais como estrutura de mercado de oligopólio e preços de *mark-up*. Estas hipóteses podem ser tomadas como vantagem da teoria heterodoxa sobre os modelos neoclássicos. No entanto, como argumenta Dutt (2003) não seria correto afirmar que não há o que aprender com os modelos neoclássicos. Para ele, três pontos da teoria neoclássica merecem especial atenção.

Primeiro, os modelos da nova teoria do crescimento tem dado especial atenção para as externalidades entre as firmas, tomando cuidado em distinguir entre o nível de crescimento da firma e o nível de crescimento da economia, como é o caso do modelo de Romer (1986). Para Dutt (3003), os modelos pós-keynesianos podem também fazer uma distinção mais cuidadosa entre taxa de lucro particular e taxa agregada de utilização da capacidade. Segundo, a nova teoria deriva valores de certas variáveis chaves das decisões de otimização, enquanto os modelos pós-keynesianos geralmente tomam estas variáveis como exogenamente dadas. Terceiro, dado o foco da nova teoria do crescimento sobre a mudança tecnológica, vários trabalhos tem modelado os mecanismos de inovação e difusão tecnológica, incluindo o processo de pesquisa e desenvolvimento. Tais contribuições podem ser úteis para a teoria pós-keynesiana, embora esta não tenha o progresso tecnológico como foco principal de pesquisa.

Bhaduri (2006) desenvolveu um modelo com progresso tecnológico endógeno, mostrando como a mudança tecnológica pode gerar o crescimento econômico, dentro de paradigmas pós-keynesianos. Para ele, os modelos de crescimento neoclássicos cometem dois grandes erros: o erro de omissão em relação ao problema da demanda efetiva, e o erro no lado da oferta, da função de produção com apenas dois insumos, em um mundo de apenas um bem. A nova teoria do crescimento tenta contrapor a hipótese da produtividade marginal decrescente do capital pelo argumento do trabalho intelectual e do capital humano para produzir crescimento endógeno, escapando da restrição exógena da oferta de trabalho. No modelo de Bhaduri a taxa de crescimento de equilíbrio não se encontra restrita pela oferta de mão-de-obra, e ao invés disto, as decisões de poupança e investimento exercem sua influência de longo prazo sobre a taxa de crescimento do produto.

O modelo com progresso técnico endógeno de Bhaduri se desenvolve em torno da hipótese keynesiana sobre a existência de uma separação entre as decisões de poupança e investimento, no lado da demanda. No lado da oferta é o crescimento da produtividade do trabalho com retornos crescentes que providencia o principal ímpeto ao processo de crescimento.

Pode-se dizer que um ponto em comum entre os trabalhos de Romer (1990) e Bhaduri (2006) é a conclusão de que uma estrutura de mercado mais competitiva, com menor restrição de direitos de propriedade intelectual, é capaz de transferir mais rapidamente os benefícios da tecnologia, gerando crescimento econômico. Um ponto de divergência entre estes trabalhos é o fato de que no modelo de Romer o progresso técnico é resultado dos incentivos do mercado à pesquisa e desenvolvimento. As inovações tecnológicas surgem em um setor separado da esfera produtiva. Para Bhaduri, a adoção e difusão do progresso técnico é um resultado endógeno da competição entre capital e trabalho, por meio da manutenção de uma taxa de salário real constante, ajustada pela taxa de desemprego, por um lado, e do conflito entre firmas por maior parcela de mercado, por outro. Bhaduri afirma, ainda, que o progresso técnico deve ser sustentado por uma expansão nos mercados, com crescente nível de demanda agregada e produto para absorver o crescimento da produtividade do trabalho. E a menos que a demanda aumente a passos suficientes, o desemprego resultará. Romer e Bhaduri reproduzem a clássica divergência entre as abordagens neoclássica e pós-keynesiana, qual seja a análise do lado da oferta na primeira, e a análise no lado da demanda na segunda.

Para os pós-keynesianos, como uma imagem do mundo real, não existe mecanismo automático que garanta o pleno emprego, ou a manutenção de uma taxa de desemprego constante no longo prazo. Já para os neoclássicos, a validade da lei de Say, a igualdade entre poupança e investimento, e a omissão em relação ao problema da demanda efetiva, conduzem ao entendimento de que a flexibilidade de preços e salários é capaz de garantir o equilíbrio de pleno emprego.

Segundo Bhaduri (2006), a mensagem contemporânea de seu modelo é que políticas que impõe restrições sobre a taxa de salário real através da flexibilidade do mercado de trabalho podem ser prejudiciais por duas razões: a primeira é que podem conduzir ao desemprego, se a economia se encontrar em um regime estagnacionista; a segunda é que a restrição artificial ao crescimento do salário real pode enfraquecer no longo prazo o principal estímulo ao crescimento da produtividade do trabalho, qual seja a competição entre classes, importante força de propulsão do sistema capitalista.

Em razão das divergências entre as duas abordagens, este estudo objetivou oferecer evidências para a comparação entre ambas. Ao longo do trabalho é mostrado o desenvolvimento da pesquisa sobre crescimento dentro da abordagem do *mainstream*, que se dá sobre as hipóteses neoclássicas de sempre. Por outro lado, dentro da abordagem pós-keynesiana, os modelos de crescimento apesar de se desenvolverem em direção oposta, incorporam alguns conceitos neoclássicos, tal como o progresso técnico endógeno, com a finalidade de comprovar a validade de seus resultados em uma situação de crescimento dirigido pelas forças de demanda. Ambas as abordagens prosseguem em seu desenvolvimento, dentro do tema que é de grande relevância para pesquisa macroeconômica atual.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Aghion, P., and P. Howitt (1992), "A Model of Growth Through Creative Destruction." *Econometrica* 60: 323-351.

Bhaduri, A. e Marglin, S. (1990), "Unemployment and the Real Wage: the Economic Basis for Contesting Political Ideologies", *Cambridge Journal of Economics*,14.

Bhaduri, A. "Endogenous Economic Growth: a New Approach". *Cambridge Journal of Economics*, v. 30, n. 1, p. 69-83, 2006.

Barro, E. J. and X. Sala-i-Martin (1995), "*Economic Growth*", New York: McGraw-Hilll.

Bertella, M. A. (2000), "O fio da navalha de Harrod e a resposta da escola de Cambridge". *Análise Econômica*, UFRGS, ano 18, n. 34, set.

_______________ (2006), "Modelos de Crescimento Kaleckianos: uma Apreciação", *Revista de Economia Política*, no prelo.

Dasgupta, D. (2005) "*Growth Theory:Solow And His Modern Exponents*", Oxford Universiy Press.

Denison, E. F. (1961), "The Sources of Economia Growth in the United States". *Committe for Economic Development*, New York.

Dutt, A. K. (1984), “Stagnation, Income Distribution, and Monopoly Power”, *Cambridge Journal of Economics*, 8.

_________ (1987), “Alternative Closures Again: a Comment on ‘Growth, Distribution and Inflation’”, *Cambridge Journal of Economics*, 11.

_________ (1990), *Growth, Distribution, and Uneven Development*, Cambridge University Press.

_________ (2003), “New Growth Theory, Effective Demand, and Post-Keynesian Dynamics” in Salvadori, N. *Old and New Growth Theories: an assessment*. MPG Books, ltd.

Grossman, G. and Helpman, E. (1991), “*Inovation and Growth in the Global Economy*”, Cambridge: MIT Press.

Harrod, R. F. (1939), “An Essay in Dynamic Theory” in Stiglitz, J. E. e
Uzawa, H. (1969), *Readings in the Modern Theory of Economic Growth*, The MIT Press.

__________ (1948), “*Towards a Dynamic Economics*”, Macmillan.

Kaldor, N. (1956), “Alternative Theories of Distribution”, in Stiglitz, J. E. e Uzawa, H. (1969), *Readings in the Modern Theory of Economic Growth*, The MIT Press.

Lucas, R. (1988), “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, 22.

Robinson, J. (1956), *“The Accumulation of Capital*”, Macmillan.

__________ (1962), “*Essays in the Theory of Economic Growth*”, Macmillan.

Romer P. M. (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, 94.

Romer P. M. (1989), “Increasing Returns

Romer, P.M. (1990) “Endogenous Technological Change”, *Journal of Political Economy*/98

Rowthorn, R. (1982), “Demand, Real Wages and Economic Growth” in Sawyer, M. C. (1988), *Post-Keynesian Economics*, Edward Elgar.
*an oynayicno 8(i29626(t)-9.84604(t)10.7144(a)-14.h728( )23.83543(&)725.L889(h)6.54e011(a)-14.013(o)-14*

Snowdon, B. & Vane, H. (1999) “

# APÊNDICE

## 1. Demonstração das expressões (16) e (17)

Otimização via controle ótimo para o modelo exógeno simples:

$$\text{Max} \quad \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right]N(t)dt$$

$$\text{s.a} \quad \dot{K} = AK^\beta N^{1-\beta} - Nc$$

o Hamiltoniano para este problema é:

$$H(K, \theta, c) = \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right]N + \theta\left[AK^\beta N^{1-\beta} - Nc\right],$$

Condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{N}{1-\sigma}\left[(1-\sigma)c^{-\sigma}\right] + \theta\left[-N\right] = 0$$

$$\Rightarrow c^{-\sigma} = \theta \qquad (16)$$

Condição para $\theta$:

$$\dot{\theta} - \rho\theta = -\frac{\partial H}{\partial K}$$

$$\dot{\theta} - \rho\theta = -\left[\theta A\beta^{\beta-1}N^{1-\beta}\right]$$

$$\dot{\theta} = \left[\rho - \beta A N^{1-\beta}K^{\beta-1}\right]. \qquad (17)$$

## 2. Demonstração da expressão (18)

Seja $\frac{\dot{c}}{c} = k$, e de (15) temos que

$$c^{-\sigma} = \theta$$

aplicando o logarítimo aos dois lados da igualdade:

$$-\sigma \ln c = \ln \theta$$

$$-\sigma \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \therefore \frac{\dot{\theta}}{\theta} = -\sigma k$$

De (16)

$$\dot{\theta} = \left[\rho - \beta A N^{1-\beta} K^{\beta-1}\right]\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\theta} = \left[\rho - \beta A N^{1-\beta} K^{\beta-1}\right]$$

$$-\sigma k - \rho = -\beta A N^{1-\beta} K^{\beta-1}$$

$$\therefore \beta A N^{1-\beta} K^{\beta-1} = \rho + \sigma k \qquad (18)$$

**3. Demonstração da expressão (20)**

Diferenciando a expressão (19):

$$\ln \frac{Nc}{K} + \ln(k + \lambda) = \ln \frac{\rho + \sigma k}{\beta}$$

$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{c}}{c}$ em que $\frac{\dot{N}}{N} = \lambda$ e $\frac{\dot{c}}{c} = k$, logo,

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{c}}{c} = k + \lambda \qquad (20)$$

**4. Demonstração da expressâo (21)**

Diferenciando e aplicando o logarítimo em (18), temos:

$$\ln\beta + \ln A + (1-\beta)\ln N + (\beta-1)\ln K = 0$$

$$\frac{\dot{A}}{A} + (1-\beta)\frac{\dot{N}}{N} + (\beta-1)\frac{\dot{K}}{K} = 0$$

$$\mu + (1-\beta)\lambda + (\beta-1)(k+\lambda) = 0$$

$$[(\beta-1)k = -\mu]\cdot(-1)$$

$$k = \frac{\mu}{1-\beta} \qquad (21)$$

## 5. Demonstração das expressões (25) a (27)

Problema de controle ótimo para o modelo com capital humano $(h_a = h)$

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right]N(t)dt$$

$$\text{s.a} \quad \dot{K} = AK^\beta[uhN]^{1-\beta}h^\gamma - Nc$$

$$\text{e} \quad \dot{h} = h\delta[1-u]$$

O Hamiltoniano para este problema é:

$$H(K, h, \theta_1, \theta_2, c, u) = \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma} - 1\right]N + \theta_1\left[AK^\beta(uNh)^{1-\beta}h^\gamma - Nc\right] + \theta_2[\delta h(1-u)]$$

Condição de primeira ordem

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \theta_1 AK^\beta(1-\beta)(uhN)^{-\beta}hNh^\gamma + (\theta_2\delta h) - 1 = 0$$

$$\theta_1(1-\beta)AK^\beta(uNh)^{-\beta}Nh^{1+\gamma} = \theta_2\delta h \qquad (25)$$

A equação diferencial para $\theta_1$ é dada por

$$\dot{\theta}_1 - \rho\theta_1 = -\frac{\partial H}{\partial K}$$

$$\dot{\theta}_1 = \rho\theta_1 - \theta_1 \beta A K^{\beta-1} (uNh)^{1-\beta} h^{\gamma} \tag{26}$$

E a equação para $\dot{\theta}_2$ é dada por:

$$\dot{\theta}_2 - \rho\theta_2 = -\frac{\partial H}{\partial h}$$

$$\dot{\theta}_2 - \rho\theta_2 = -\left[\theta_1 A K^{\beta} (uN)^{-\beta} (1-\beta+\gamma) h^{-\beta+\gamma} + \theta_2 \delta (1-u)\right]$$

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1 (1-\beta+\gamma) A K^{\beta} (uN)^{1-\beta} h^{-\beta+\gamma} - \theta_2 \delta (1-u) \tag{27}$$

**6. Demonstração da expressão (31)**

Diferenciando a expressão (29), obtém-se:

$$(\lambda + k) + (1-\beta)(v + \lambda) + v = 0$$

$$\{(\beta-1)k + (\beta-1)\lambda + (1-\beta)\lambda = -(1-\beta+\gamma)v\} \cdot (-1)$$

$(1-\beta)k = (1-\beta+\gamma)v$, logo:

$$k = \frac{(1-\beta+\gamma)}{(1-\beta)} v \tag{31}$$

**7. Demonstração da expressão (32)**

Diferenciando (24)

$$-\sigma \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} \Rightarrow -\sigma k = \frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} \tag{$A_1$}$$

Diferenciando (25):

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} + \beta(k+\lambda) + (-\beta)(\lambda+v) + (1+\gamma)(\lambda+v) = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + v$$

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + v - \beta(k+\lambda) + \beta(\lambda+v) - (1+\gamma)v + \lambda$$

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + (\beta-\gamma)v - \beta k - \lambda \qquad (A_2)$$

$-\sigma k = \dfrac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + (\beta-\gamma)v - \beta k - \lambda$, logo:

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = (\beta-\sigma)k - (\beta-\gamma)v + \lambda \qquad (32)$$

**8. Demonstração da expressão (33)**

De (15)

$$\theta_1 = \theta_2 \left[ \frac{\delta h}{(1-\beta) A K^{\beta} u^{-\beta} N^{1-\beta} h^{1+\gamma-\beta}} \right]$$

Substituindo $\theta_1$ de (15) em (17):

$$\dot{\theta}_2 = [\rho - \delta(1-u)]\theta_2 - \left[ \frac{\delta h}{(1-\beta) A K^{\beta} u^{-\beta} N^{1-\beta} h^{1+\gamma-\beta}} \right] \left[(1-\beta+\gamma) A K^{\beta} u^{1-\beta} N^{1-\beta} h^{-\beta+\gamma}\right] \cdot \theta_2$$

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \left[ \rho - \delta(1-u) - \frac{(1-\beta+\gamma)}{(1-\beta)} \delta u \right]$$

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \left[ (1-\beta)\rho - (1-\beta)\delta(1-u) - \frac{(1-\beta+\gamma)}{(1-\beta)} \delta u \right]$$

$$v = \frac{\delta\left[\left(1-\beta\right)+\gamma\right]-\left(\rho-\lambda\right)\left(1-\beta\right)+\gamma\delta}{\sigma\left(1-\beta+\gamma\right)}$$

$$v^{*} = \sigma^{-1}\left[\delta - \frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}\left(\rho-\lambda\right)\right]. \qquad (34)$$

**10. Demonstração da expressão (35)**

De (15)

$$\theta_1 = \theta_2\left[\frac{\delta h}{\left(1-\beta\right)AK^{\beta}u^{-\beta}N^{1-\beta}h^{1+\gamma-\beta}}\right]$$

Substituindo $\theta_1$ de (15) em (18):

$$\dot{\theta}_2 = \left[\rho-\delta\left(1-u\right)\right]\cdot\theta_2 - \left[\frac{\delta h}{\left(1-\beta\right)AK^{\beta}u^{-\beta}N^{1-\beta}h^{1+\gamma-\beta}}\right]\left[\left(1-\beta\right)AK^{\beta}u^{1-\beta}N^{1-\beta}h^{-\beta+\gamma}\right]\cdot\theta_2$$

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \left[\rho-\delta+\delta u-\right]-\delta u$$

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho-\delta \qquad (35)$$

**11. Demonstração da expressão (36)**

Fazendo (32)=(35):

$$\left(\beta-\sigma\right)k-\left(\beta-\gamma\right)v+\lambda = \rho-\delta$$

Substituindo k, de acordo com (31):

$$\left(\beta-\sigma\right)\left(\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\right)-\left(\beta-\gamma\right)v = \rho-\delta-\lambda$$

$$\frac{(\beta-\sigma)(1-\beta+\gamma)v-(\beta-\gamma)(1-\beta)v=(\rho-\delta-\lambda)(1-\beta)}{(1-\beta)}$$

$$(\beta-\sigma)(1-\beta+\gamma)v-[\beta(1-\beta+\gamma)-\gamma]v=(\rho-\delta-\lambda)(1-\beta)$$

$$v[(\beta-\sigma)(1-\beta+\gamma)-\beta(1-\beta+\gamma)+\gamma]=(\rho-\delta-\lambda)(1-\beta)$$

$$v[(-\sigma)(1-\beta+\gamma)+\gamma]=(\rho-\delta-\lambda)(1-\beta)(-1)$$

$$[v[(-\sigma)(1-\beta+\gamma)+\gamma]=(\rho-\delta-\lambda)(1-\beta)](-1)$$

$$v[(\sigma)(1-\beta+\gamma)-\gamma]=\delta-(\rho-\lambda)(1-\beta)$$

$$v=[\sigma(1-\beta+\gamma)-\gamma]^{-1}[(1-\beta)(\delta-(\rho-\lambda))] \tag{36}$$

**12. Demonstração da expressão (40):**

$$\frac{\partial U}{\partial c_2}=-\frac{1}{\rho}\left[\alpha_1 c_1^{-\rho}+\alpha_2 c_2^{-\rho}\right]^{\frac{-1-\rho}{\rho}}\cdot\left(-\rho\alpha_2 c_2^{-\rho-1}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_1}=-\frac{1}{\rho}\left[\alpha_1 c_1^{-\rho}+\alpha_2 c_2^{-\rho}\right]^{\frac{-1-\rho}{\rho}}\cdot\left(-\rho\alpha_1 c_1^{-\rho-1}\right)$$

$$\frac{\partial U/\partial c_2}{\partial U/\partial c_1}=\frac{U_2(c_1,c_2)}{U_1(c_1,c_2)}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-(1+\rho)} \tag{40}$$

**13. Demonstração da expressão (41):**

$$q=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-(1+\rho)}$$

$$q\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-(1+\rho)}$$

$$\left(q\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{-1}{1+\rho}}=\left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-(1+\rho)}\right]^{\frac{-1}{1+\rho}}$$

$$\frac{c_2}{c_1}=q^{-1/1+\rho}\cdot\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right]^{\frac{-1}{1+\rho}}$$

sendo $\frac{1}{1+\rho}=\sigma$, teremos:

$$\frac{c_2}{c_1}=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{-\sigma}q^{-\sigma} \tag{41}$$

**14. Demonstração da expressão (42):**

**De (37):**

$c_1 = h_i u_i N \qquad\qquad i = 1,2$

logo,

$$\frac{c_2}{c_1}=\frac{h_2u_2}{h_1u_1} \tag{$A_4$}$$

e de (41): $\frac{c_2}{c_1}=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{-\sigma}q^{-\sigma}$, sendo $q=\frac{h_1}{h_2}$, temos:

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\sigma}$$

**15. Demontração da expressão (43):**

Derivando a expressão $q = \frac{h_1}{h_2}$, obtém-se:

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{h}_1}{h_1} - \frac{\dot{h}_2}{h_2}.$$

De (38), tem-se que:

$\dot{h}_1 = h_1\delta_1 u_1$ e $\dot{h}_2 = h_2\delta_2(1 - u_1)$, logo:

$$\frac{\dot{q}}{q} = \delta_1 u_1 - \delta_2(1 - u_1) \qquad (A_5)$$

O valor de $u_1$ é obtido como segue:

De (42), $\frac{1 - u_1}{u_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\sigma-1}$,

resolvendo para $u_1$:

$$u_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\sigma-1}}, \text{ ou}$$

$$u_1 = \left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma} q^{1-\sigma}\right]^{-1}$$

Substituindo este valor de $u_1$ em (e), encontra-se:

$$\dot{q} = \left(\delta_1 + \delta_2\right)\left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma} q^{1-\sigma}\right]^{-1} - \delta_2. \tag{43}$$

As trajetórias de $h_1$ e $h_2$ são obtidas pela resolução da equação diferencial (43), fazendo $q = h_1/h_2$, como segue:

$$\left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma} q^{1-\sigma}\right]^{-1} = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

$$\left[\left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\sigma} q^{1-\sigma}\right]^{-1}\right]^{-1} = \left[\frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}\right]^{-1}$$

$$\frac{\alpha_1^{\sigma} + \alpha_2^{\sigma} q^{1-\sigma}}{\alpha_1^{\sigma}} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_2}$$

$$q^{1-\sigma} = \frac{\left(\delta_1 + \delta_2\right)\alpha_1^{\sigma}}{\delta_2 \alpha_2^{\sigma}} - \alpha_1^{\sigma}$$

$$q = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1^{\sigma}\left[\left(\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2\right) - 1\right]}{\boldsymbol{\delta}_2 \boldsymbol{\alpha}_2^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Como $q = h_1/h_2$:

$$h_1 = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1^{\sigma}\left[\left(\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2\right) - 1\right]}{\boldsymbol{\delta}_2 \boldsymbol{\alpha}_2^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} h_2$$

$$h_2 = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1^{\sigma}\left[\left(\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2\right) - 1\right]}{\boldsymbol{\delta}_2 \boldsymbol{\alpha}_2^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \frac{1}{h_1}$$

**16. Demonstração da expressão (50):**

De (44), tem-se:

$$Y(H_1, L, x) = H_1^{\alpha} L^{\beta} \int_0^{\infty} x(i)^{1-\alpha-\beta} di$$

Todos os bens são ofertados na mesma quantidade $\bar{x}$; $A$ determina a variação de bens de capital; e $\eta$ unidades de capital são necessárias p/ a produção. Assim, é possível resolver $\bar{x}$ a partir de $K = \eta A \bar{x}$. Reescrevendo $Y$:

$$Y(H_1, L, x) = H_1^{\alpha} L^{\beta} A(\bar{x})^{1-\alpha-\beta}$$

$$= H_1^{\alpha} L^{\beta} A\left(\frac{K}{\eta A}\right)^{1-\alpha-\beta}$$

$$(H_1 A)^{\alpha} (LA)^{\beta} (K)^{1-\alpha-\beta} \eta^{\alpha+\beta-1} \qquad (50)$$

**17. Demonstração da expressão (57), (58), (60) e (61):**

Seja $g = \delta H_2$,

De (54):

$$H_2 = \frac{r-\rho}{\sigma\delta} \qquad (A_6)$$

logo,

$$g = \frac{r-\rho}{\sigma} \qquad (A_7)$$

Inserindo a equação (56) na expressão (48) para $\pi$, a equação (55) pode ser reescrita como

$$\bar{x} = \frac{1}{\eta} P_A \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \qquad (A_8)$$

Substituindo ($A_6$) e ($A_8$) para $\bar{x}$ e $H_2$ na equação (56) tem-se:

$$P_A^{\alpha+\beta} = \frac{\Omega}{r} L^{\beta} \left[ H - \frac{r-\rho}{\sigma\delta} \right]^{\alpha} \eta^{\alpha+\beta-1} \qquad (A_9)$$

em que $\Omega$ é uma constante em função de $\alpha$ e $\beta$:

$$\Omega = (1-\alpha-\beta)^{2-\alpha-\beta} (\alpha+\beta)^{\alpha+\beta} \qquad (A_{10})$$

Substituindo $\bar{x}$ e $H_2$ na equação (53), tem-se:

$$P_A^{\alpha+\beta} = \frac{\Gamma}{\delta} L^{\beta} \left[ H - \frac{r-\rho}{\sigma\delta} \right]^{\alpha-1} \eta^{\alpha+\beta-1} \qquad (A_{11})$$

onde a constante $\Gamma$ é dada por:

$$\Gamma = \alpha (1-\alpha-\beta)^{1-\alpha-\beta} (\alpha+\beta)^{\alpha+\beta-1}$$

Igualando ($A_9$) e ($A_{11}$), e simplificando, tem-se:

$$r = \frac{\sigma\delta H + \rho}{\sigma\Lambda + 1} \qquad (A_{12})$$

Onde $\Lambda$ é uma constante em função de $\alpha$ e $\beta$:

$\Lambda = \dfrac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$, que é a expressão (58). Substituindo ($A_{12}$) em ($A_7$), tem-se

$$g = \frac{\delta H - \Lambda\rho}{\Lambda\sigma + 1} \qquad (A_{13})$$

que é a expressão (57).

Substituindo ($A_{12}$) em ($A_{11}$), tem-se:

$$P_A^{\alpha+\beta} = \frac{\Gamma}{\delta^{\alpha}} \left[ \frac{\delta\sigma\Lambda H + \Lambda\rho}{\sigma\Lambda + 1} \right]^{\alpha-1} L^{\beta} \eta^{\alpha+\beta-1} \qquad (A_{14})$$

Que é a expressão (60).

A expressão (61) segue de ( $A_8$ ).

## 18. Demonstração da expressão (62) e solução do plano social ótimo do modelo de Romer (1990):

$$\max \int_0^\infty \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt$$

$$s.a. \overset{\bullet}{K} = \eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} H_{11}^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} - C$$

$$\overset{\bullet}{A} = \delta H_2 A$$

$$H_1 + H_2 \leq H$$

O hamiltoniano para este problema é:

$$H = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda\left[\eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} (H - H_2)^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} - C\right] + \mu\delta H_2 A$$

Condições necessárias para max *H* com respeito as variáveis de controle C e $H_2$:

$$\overset{\bullet}{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial K}$$

$$\overset{\bullet}{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H}{\partial A}$$

A condição de primeira ordem que que max *H* com respeito a *C* é dada por:

$$C^{-\sigma} = \lambda \qquad (A_{15})$$

Seja $\Theta$ o termo usado para representar $\eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} (H - H_2)^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta}$ do hamiltoniano. Assim, a condição de primeira ordem que maximiza *H* com respeito a $H_2$ é:

$$\Theta = (H - H_2)\frac{\delta\mu}{\alpha\lambda}A \qquad (A_{16})$$

Usando ( $A_{16}$ ), temos evolução de $\mu$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \delta\left[\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H - \frac{\beta}{\alpha}H_2\right] \qquad (A_{17})$$

Para a trajetória de crescimento equilibrado, deve-se fazer $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$. De ( $A_{15}$), tem-se que $-\sigma\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$. Como no estado estacionário $\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{A}}{A}$, podemos dizer que $-\sigma\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{\mu}}{\mu}$. Sabendo que $\frac{\dot{A}}{A} = \delta H_2$, pode-se reescrever ( $A_{17}$ ), como segue:

$$\delta H_2 = \rho - \delta\left[\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H - \frac{\beta}{\alpha}H_2\right] \qquad (A_{18})$$

Usando o fato de que $g = \delta H_2$ e resolvendo para $H_2$, tem-se

$$g^* = \frac{\delta H - \theta\rho}{\theta\sigma + (1-\theta)} \qquad (62)$$

Em que $\theta = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

### 19. Demonstração do sistema de equações (94) e (95)

$$\frac{dg_y}{dt} = \alpha\left[(\eta_y - \varepsilon_y)g_y + \eta_x g_x\right] \qquad \varepsilon_y, \eta_y, \eta_x > 0 \qquad (94)$$

$$\frac{dg_x}{dt} = \beta(g_L - n) = \beta(g_y - g_x - n), \qquad \beta > 0 \qquad (95)$$

Matriz Jacobiana:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\alpha(\varepsilon_y - \eta_y) & \alpha\eta_x \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$$

Traço: $T = -[\alpha(\varepsilon_y - \eta_y) + \beta] < 0$

Determinante: $D = \alpha\beta(\varepsilon_y - \eta_y - \eta_x)$. A estabilidade requer $D > 0$. No entanto, devido à restrição imposta em (99), $\eta_x > (\varepsilon_y - \eta_y) > 0$, temos que $D < 0$ e o equilíbrio é um ponto de sela.

**20. Demonstração do sistema de equações (94) e (107)**

$$\frac{dg_y}{dt} = \alpha[(\eta_y - \varepsilon_y)g_y + \eta_x g_x] \qquad \varepsilon_y, \eta_y, \eta_x > 0 \tag{94}$$

$$\frac{dg_x}{dt} = \beta[\lambda(g_x/g_y) - g_x], \qquad \beta > 0 \tag{107}$$

Matriz Jacobiana:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\alpha(\varepsilon_y - \eta_y) & \alpha\eta_x \\ -\beta\lambda(g_x/g_y^2) & (\beta\lambda/g_y) - \beta \end{bmatrix}$$

Traço: $T = -\alpha(\varepsilon_y - \eta_y) < 0$

Determinante: $D = \alpha\beta(\varepsilon_y - \eta_y)$

Sendo $z = \dfrac{\eta_x}{\varepsilon_y - \eta_y} > 1$, de (97). Assim, tem-se $T < 0$ e $D > 0$, condições necessárias e suficientes para o equilíbrio estável.

**21. Demonstração do sistema de equações (94) e (111)**

$$\frac{dg_y}{dt} = \alpha\left[\left(\eta_y - \varepsilon_y\right)g_y + \eta_x g_x\right] \qquad \varepsilon_y, \eta_y, \eta_x > 0 \tag{94}$$