

**UNESP**  
**Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá**

**Guaratinguetá**  
**2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CELSO LOURENZONI

PERTURBAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS NO  
MOVIMENTO ORBITAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

Dissertação apresentada à Faculdade  
de Engenharia do Campus de  
Guaratinguetá, Universidade  
Estadual Paulista, para a obtenção  
do título de Mestre em Física na  
área de Dinâmica orbital.

Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes.

Guaratinguetá  
2007

L892p Lourenzoni, Celso  
Perturbações eletromagnéticas no movimento orbital de satélites artificiais / Celso Lourenzoni . – Guaratinguetá : [s.n.], 2007  
80 f. : il.  
Bibliografia: f. 77 - 80

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2007  
Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

1. Satélites artificiais I. Título

CDU 629.783



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

"PERTURBAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS NO MOVIMENTO ORBITAL  
DE SATÉLITES ARTIFICIAIS"

CELSO LOURENZONI

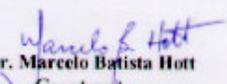
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO

DE

"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Marcelo Batista Hott  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. RODOLPHO VILHENA DE MORAES

Orientador / Unesp-Feg

  
Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT

Unesp-Feg

  
Prof. Dr. CLAUDIA CELESTE CELESTINO

USP - São João dos Campos

Setembro de 2007

## **DADOS CURRICULARES**

### **CELSO LOURENZONI**

NASCIMENTO	27.10.1967 – Taubaté / SP
FILIAÇÃO	Antonio Lourenzoni Ana Augusta Lourenzoni
1988/1991	Curso de Graduação - Licenciatura em Física Universidade de Taubaté - UNITAU
2005/2007	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP.

*Dedico este trabalho a meus familiares e amigos que de alguma forma ajudaram-me nesta conquista e, a meu orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela sua amizade e imensa colaboração na realização deste trabalho.*

*In Memory*

*Em especial a meus pais Antonio e Ana Lourenzoni que  
pela graça de Deus me deste a vida e pelo muito que  
fizeram por meus estudos.*

*A meu primo Odair que por sua luta e perseverança  
serviram-me de incentivo.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida e por todas as graças que me deste para a realização deste meu objetivo e a Nossa Senhora por sua interseção materna.*

*Carinhosamente agradeço meu orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela sua amizade e por sua imensa colaboração na realização deste trabalho.*

*Meus agradecimentos a minha irmã Margarida pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis.*

*A todos os demais irmãos e familiares que de alguma forma colaboraram na realização deste meu objetivo, meu muito obrigado.*

*A meus tios Luiz e Lourdes Lorenzon pela amizade e acolhida que sempre me ofereceram.*

*A meu amigo Régis Mancilha por suas palavras de apoio e incentivo nos momentos difíceis.*

*A Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG - pela oportunidade.*

*A todos os professores da pós-graduação pelos conhecimentos que me transmitiram ajudando a tornar realidade este trabalho, meu muito obrigado.*

*Por fim agradeço a todos os meus colegas de pós-graduação, em especial Jean e Elver, pelo incentivo e apoio nas dificuldades que surgiram durante a realização deste trabalho.*

Este trabalho contou com o apoio da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

“Nosso planeta é maravilhoso e é nos mínimos  
detalhes que se pode perceber a presença de Deus”

Autor desconhecido.

LOURENZONI, C. **Perturbações eletromagnéticas no movimento orbital de satélites artificiais.** 2007. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

## **RESUMO**

A influência do campo magnético da Terra no movimento orbital de satélites artificiais é analisada considerando também a ação de cargas elétricas adquiridas pela superfície do satélite ao se deslocar em um campo de plasma. Neste trabalho são consideradas perturbações devido ao campo magnético da Terra, ao campo elétrico induzido e ao arrasto provocado por partículas carregadas (arrasto elétrico); as duas primeiras manifestam-se através da força de Lorentz, enquanto que a última é influenciada pelo parâmetro de impacto e pelas velocidades térmicas das partículas que colidem com o satélite. Cada uma dessas perturbações foi caracterizada separadamente. As equações de Lagrange na forma de Gauss foram usadas para analisar a influência dessas perturbações no movimento orbital do satélite descrito em termos dos elementos orbitais. Ênfase foi dada na análise das perturbações seculares, devido a seu efeito cumulativo ao longo do tempo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Satélites artificiais, perturbações orbitais, perturbações eletromagnéticas, arrasto elétrico.

LOURENZONI, C. **Electromagnetic perturbations in the orbit motion of artificial satellites.** 2007. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

## **ABSTRACT**

The influence of the Earth's magnetic field on the orbital motion of artificial satellites is analyzed also taking into account the influence of the electric charge acquired by the surface of the satellite when moving in a plasma field. In this work are considered perturbations due to the magnetic field of the Earth, due to the induced electric field and due to the drag caused by the charged particles (electric drag); the two first one arisen through the Lorentz' force, while the last one is influenced by the impact parameter and by the thermal speeds of particles colliding with the satellite. Each of these perturbations was characterized separately. Gauss form for the Lagrange equations were used to analyze the influence of these perturbations on the orbital motion described in terms of the orbital elements. Emphasis was given in the analysis of the secular perturbations, due to its cumulative effect along the time.

**KEYWORDS:** Artificial satellites, orbits perturbations, electromagnetic perturbations, electric drag.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1-	Sistema de referências X, Y, Z, e S, T, W	30
FIGURA 2-	Triângulo esférico	31
FIGURA 3-	Trajectoria dos íons nas vizinhanças de um satélite	51
FIGURA 4-	Sistema de coordenadas polares	52
FIGURA 5-	Velocidade relativa do satélite em relação a um fluido	55

## **LISTA DE TABELAS**

TABELA 1-	Coeficiente de acomodação	59
TABELA 2-	Coeficiente de arrasto neutro	61
TABELA 3-	Coeficiente de arrasto elétrico	62

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	área do satélite
$\tilde{A}_S$	componente da aceleração perturbadora na direção $S$
$\tilde{A}_T$	componente da aceleração perturbadora na direção $T$
$\tilde{A}_W$	componente da aceleração perturbadora na direção $W$
$a$	semi-eixo maior da órbita do satélite
$a_e$	raio equatorial da Terra
$\vec{B}$	campo geomagnético
$B_{(X)}$	componente do campo geomagnético na direção $X$
$B_{(Y)}$	componente do campo geomagnético na direção $Y$
$B_{(Z)}$	componente do campo geomagnético na direção $Z$
$B_{(S)}$	componente do campo geomagnético na direção $S$
$B_{(T)}$	componente do campo geomagnético na direção $T$
$B_{(W)}$	componente do campo geomagnético na direção $W$
$b$	parâmetro de impacto
$b_m$	parâmetro de impacto máximo
$C_D$	coeficiente de arrasto neutro
$C_{De}$	coeficiente de arrasto elétrico
$D$	raio de Debye
$\vec{E}$	campo elétrico
$\hat{E}$	energia total
$E'$	anomalia excêntrica
$E_c$	energia cinética da partícula
$e$	excentricidade orbital
$\hat{e}$	carga elementar
$f$	força de arrasto neutro
$f_e$	força de arrasto elétrico
$\vec{F}$	força de Lorentz
$\vec{F}_B$	força magnética
$\vec{F}_E$	força elétrica
$F_{l,m,p}(I)$	função inclinação de Kaula
$g_n^m$	coeficientes Gaussianos
$h_n^m$	coeficientes Gaussianos
$I$	inclinação da órbita
$l$	momento angular
$k$	constante de Boltzmann
$K$	escala absoluta de temperatura
$M$	massa do satélite
$m$	massa de uma partícula
$m_i$	massa do íon

$m_e$	massa do elétron
$\langle \epsilon \rangle$	anomalia média
$N$	concentração de moléculas por unidade de volume
$n$	movimento médio
$n$	concentração de elétrons ou íons numa região neutra
$n_e$	concentração de elétrons
$n_i$	concentração de íons
$P_n^m(\vartheta)$	polinômios associados de Legendre
$Q$	carga elétrica do satélite
$R$	raio do satélite
$r$	distância do centro do satélite a um ponto considerado
$r$	distância geocêntrica
$\vec{r}$	raio vetor
$S$	coordenada do sistema orbital – direção radial
$t$	tempo
$T$	coordenada do sistema orbital – direção perpendicular a $S$
$T$	temperatura termodinâmica
$U$	energia potencial de uma partícula
$U$	potencial nas vizinhanças do satélite
$U_0$	potencial na superfície do satélite
$V$	potencial escalar geomagnético
$V_S$	velocidade do satélite
$V_{S(S)}$	velocidade do satélite na direção $S$
$V_{S(T)}$	velocidade do satélite na direção $T$
$V_{S(W)}$	velocidade do satélite na direção $W$
$V_T$	Velocidade térmica das partículas
$V_R$	velocidade relativa do satélite em relação a um fluxo de partículas
$W$	coordenada do sistema orbital – direção normal ao plano orbital
$X$	coordenada do sistema equatorial inercial – direção horizontal para o norte
$X_{q(e)}^{n,k}$	coeficientes de Hansen
$Y$	coordenada do sistema equatorial inercial – direção horizontal para leste
$Z$	coordenada do sistema equatorial inercial – direção vertical para baixo
$\alpha$	ângulo entre o plano orbital e o meridiano polar local que cruza a órbita do satélite num ponto qualquer
$\beta$	ângulo entre a velocidade do satélite e a velocidade térmica das moléculas incidentes no satélite
	aceleração de arrasto neutro
$e$	aceleração de arrasto elétrico
$\Delta$	variação dos elementos orbitais

$\mu$	razão entre a massa atômica das partícula incidente e a massa atômica do material que constitui a superfície do satélite
$\mu_0$	permeabilidade magnética do vácuo
$\Omega$	longitude do nodo ascendente
$\Omega^{\oplus}$	velocidade angular da Terra
$\omega$	argumento do perigeu
$\epsilon_0$	permissibilidade elétrica do vácuo
$\varphi$	longitude geocêntrica
	tempo médio de Greenwich
	coordenada angular polar
$\vartheta$	co-latidade geocêntrica
$\rho$	densidade do ar
$\rho_v$	densidade volumétrica de carga
$\nu$	anomalia verdadeira
$\kappa$	coeficiente de acomodação
$\lambda$	ângulo complementar a co-latidade geocêntrica
$\psi$	ângulo entre a velocidade a velocidade relativa e a velocidade do satélite

## SUMÁRIO

	LISTA DE FIGURAS	
	LISTA DE TABELAS	
	LISTA DE SÍMBOLOS	
	<b>INTRODUÇÃO</b>	17
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	21
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>PERTURBAÇÃO ORBITAL DEVIDO AO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA</b>	26
2.1	CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA	27
2.2	CÁLCULO DA ACELERAÇÃO PERTURBADORA	32
2.3	VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS	34
2.4	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS	39
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>PERTURBAÇÃO ORBITAL DEVIDO AO CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO</b>	42
3.1	CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO	42
3.2	VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS	43
3.3	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS	45
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>PERTURBAÇÃO ORBITAL DEVIDO AO ARRASTO ELÉTRICO</b>	47
4.1	POTENCIAL ELÉTRICO DO SATÉLITE	48
4.2	POTENCIAL ELÉTRICO NAS VIZINHANÇAS DO SATÉLITE	49
4.3	PARÂMETRO DE IMPACTO	51
4.4	ARRASTO ELÉTRICO	54
4.5	VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS	63
4.6	VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS	66
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>ANÁLISE DAS VARIAÇÕES SECULARES DOS</b>	



## INTRODUÇÃO

Embora as características gerais do campo magnético da Terra fossem conhecidas desde a época de William Gilbert, que em 1600 propôs em seu livro *de magnete*, que toda a Terra fosse um grande ímã cujo campo magnético atua no pequeno ímã que é a agulha da bússola, alinhando-a na direção norte-sul, os primeiros

manto, o núcleo externo líquido estará agitado por correntes de convecção. Esta movimentação é considerada como capaz de produzir tanto as correntes elétricas como o campo magnético necessário para manter um dínamo no núcleo, tanto mais que este é formado essencialmente por ferro no estado líquido (que é um bom condutor). É a partir deste dínamo fluido existente no núcleo externo que é gerado o campo magnético terrestre. Embora ainda existam muitos aspectos por esclarecer, esta idéia parece ser a melhor explicação para o magnetismo terrestre.

Desde o lançamento dos primeiros satélites artificiais a partir do final da década de 50, em virtude das disputas pela hegemonia mundial entre Estados Unidos e a antiga União Soviética, muitos dados têm sido acumulados sobre o campo magnético da Terra, permitindo assim aumentar nosso conhecimento acerca desse campo; em contra partida, tornou-se imperativo estudar a influência do magnetismo terrestre sobre o movimento de satélites artificiais, visto que o campo magnético terrestre provoca uma variação nos elementos orbitais dos mesmos – as chamadas perturbações eletromagnéticas. Isto ocorre basicamente devido aos satélites artificiais serem constituídos de superfícies metálicas que em contato com a atmosfera terrestre atraindo-se adquirindo uma carga elétrica que interage com o campo magnético terrestre através da força de Lorentz (VOKROUHLICKÝ, 1989).

Caso o movimento orbital dos satélites artificiais não fosse perturbado por nenhuma força, as órbitas dos satélites seriam elipses de forma e tamanhos definidos, em planos fixos e os satélites permaneceriam nessas órbitas indefinidamente; os elementos orbitais (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendente, argumento do perigeu e anomalia média) seriam constantes e o movimento orbital seria o chamado movimento kepleriano, conhecido por todos nós.

Porém devido às perturbações, os elementos orbitais variam com o passar do tempo, fazendo-se necessário um estudo mais aprimorado sobre a dinâmica que governa o movimento dos satélites artificiais. Essas forças de perturbação são basicamente classificadas em dois grupos: as de origem gravitacionais (como a distribuição não homogênea da massa da Terra, a atração gravitacional do Sol e da

Lua, as marés terrestres, etc) e as de origem não gravitacionais (como arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, albedo terrestre, efeitos eletromagnéticos, entre outros). Quanto aos efeitos que elas provocam nos elementos orbitais, temos: as perturbações periódicas (de curto período – aquelas cujo período de variação é da ordem de ou menor do que o período orbital; e de longo período – aquelas que tem período de variação maior do que o período orbital) e as perturbações seculares (aquelas que variam linearmente com o tempo). Essas perturbações alteram a órbita dos satélites artificiais, comprometendo as missões as quais lhes foram destinadas e até mesmo fazendo com que eles se percam (caindo ou indo para o espaço). Com isso, são necessárias algumas manobras para corrigir suas órbitas para que eles tenham um tempo de vida útil o mais longo possível.

Quanto à altitude, as órbitas são classificadas em: órbita baixa até 1500 km, órbita média de 1500 km até 20000 km e órbita alta acima de 20000 km (CAPDEROU, 2003).

O objetivo do presente trabalho é analisar as perturbações no movimento orbital de satélites artificiais devidas ao campo magnético da Terra considerando também a influência de cargas elétricas adquiridas pela superfície do satélite ao se deslocar em um campo de plasma (arrasto elétrico).

No capítulo 1 dedicamos à revisão de algumas bibliografias relacionadas com o tema de nosso trabalho e que tiveram significativa relevância para o desenvolvimento do mesmo.

No capítulo 2, caracterizamos o campo magnético da Terra. Obtemos as componentes desse campo em função dos elementos orbitais e por fim as equações de variação dos respectivos elementos orbitais, em especialmente as chamadas variações seculares.

Utilizamos o capítulo 3 para estudar as perturbações provocadas pelo campo elétrico induzido. Este surge devido à mudança do campo geomagnético do sistema em rotação com a Terra para o sistema equatorial inercial. A exemplo do capítulo 2,

encontramos as equações de variação dos elementos orbitais, com enfoque especial às variações seculares.

Dedicamos o capítulo 4 ao estudo do arrasto elétrico, onde procuramos analisar o movimento de um satélite artificial carregado imerso num campo de plasma. Fizemos a caracterização do fenômeno e deduzimos a expressão do arrasto elétrico para um satélite esférico em função do parâmetro de impacto e das velocidades térmicas das partículas incidentes. Obtemos as equações de variação dos elementos orbitais e dedicamos nossa atenção às variações seculares.

O capítulo 5 foi dedicado à análise das equações das variações seculares dos respectivos elementos orbitais, onde registramos algumas conclusões sobre os mesmos.

No capítulo 6 fizemos algumas conclusões referentes ao nosso trabalho e apresentamos sugestões que possam ser trabalhadas em futuras dissertações.

Esperamos que este trabalho possa ser um pequeno grão de areia na grande praia do conhecimento científico humano.

## CAPÍTULO 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresentamos os principais trabalhos referentes à influência do campo magnético da Terra no movimento orbital de satélites artificiais e das cargas elétricas adquirida pelo satélite ao se movimentar num campo de plasma (arrasto elétrico), que serviram de apoio ao nosso trabalho.

Fain e Greer (1959) analisam a influência do campo magnético da Terra sobre satélites artificiais carregados com carga constante em órbita circular e equatorial, considerando os eixos magnético e de rotação da Terra coincidentes. Os autores desenvolvem um modelo bidimensional para as equações do movimento para satélites a médias altitudes (próximas de 6000 km) e cujos resultados indicam variação no raio orbital.

Westerman (1960) faz uma análise do trabalho desenvolvido por Fain e Greer (1959) utilizando teoria de perturbação e obtém resultados semelhantes aos encontrados por Fain e Greer (1959).

Sehnal (1969) investiga a magnitude das perturbações que surgem da influência do campo magnético terrestre, em um caso que se aproxima mais da realidade do que os artigos citados anteriormente, pois Sehnal considera a variação da carga do satélite com a altitude. Estimativas de valores numéricos indicam que as variações dos elementos orbitais angulares, longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e argumento do perigeu ( $\omega$ ), são de baixa ordem de magnitude e que a variação do raio orbital durante um período de revolução é de curto período. Atenção especial foi dada à inclinação orbital, indicando que para uma órbita circular sua variação é nula; observa-se também que para órbitas não circulares, o satélite adquire um potencial elétrico superior a 1000 V. Uma vez que este potencial está em desacordo com as observações experimentais, o autor conclui que há necessidade de maiores conhecimentos sobre o valor da carga elétrica do satélite para que algum efeito do campo magnético da Terra sobre a mudança na inclinação orbital possa ser deduzido.

Em Wertz (1978) no capítulo 5, o autor descreve o campo magnético da Terra caracterizado por um dipolo magnético (chamado de campo principal) semelhante a uma esfera uniformemente magnetizada. Ele informa a intensidade do dipolo em 1975, o decréscimo anual dessa intensidade, a localização dos pólos magnéticos em relação aos pólos geográficos, as perturbações do campo magnético terrestre devido ao vento solar entre outras características. Segundo o autor e de acordo com a teoria do dínamo, a diferença de temperatura existente no núcleo externo terrestre faz com que apareça as correntes de convecção responsáveis pelo surgimento das correntes elétricas e conseqüentemente pelo campo magnético da Terra. Segundo o autor as correntes primárias produzem o dipolo magnético e as correntes secundárias próximas ao núcleo produzem os dipolos magnéticos locais, e esses por sua vez são superpostos para produzirem os multipolos magnéticos e também as anomalias magnéticas. Como o campo magnético da Terra possui simetria esférica, ele pode ser convenientemente representado pelos harmônicos esféricos cujos coeficientes Gaussianos são determinados empiricamente pelo método dos mínimos quadrados, os quais podem ser encontrados no International Geomagnetic Reference Field (IGRF). WERTZ (1978) apresenta alguns desses valores para o ano de 1975.

Rubincam (1982) investiga as possíveis causas do decréscimo secular de 1,1 mm por dia no semi-eixo maior do satélite LAGEOS (Laser Geodynamic Satellite). Dos efeitos investigados (ressonância, pressão de radiação terrestre, efeito Poynting-Robertson, efeito Yarkovsky, efeito geomagnético, arrasto devido a poeiras cósmicas, arrasto neutro e arrasto elétrico), o arrasto devido as partículas carregadas (íons), na altitude do satélite LAGEOS, é provavelmente a principal causa desse decaimento orbital. Uma estimativa do arrasto, baseada em experimentos laboratoriais e medidas de satélites da densidade atmosférica dos íons, admitindo um potencial de -1 V na superfície do satélite aproxima-se razoavelmente dos resultados obtidos experimentalmente; se o potencial na superfície do satélite for de -1,5 V, os resultados aproximam-se melhor das observações experimentais no decréscimo do semi-eixo maior da órbita do satélite LAGEOS. Verificou-se que o arrasto devido a poeiras cósmicas e o arrasto devido a partículas neutras de hidrogênio também trazem pequenas contribuições para o referido decréscimo.

Afonso et al (1985) analisam a influência do arrasto neutro e elétrico no decréscimo secular do semi-eixo maior da órbita do satélite LAGEOS. Os efeitos devido às forças gravitacionais e as demais forças não-gravitacionais não conseguem explicar o referido decréscimo; sendo assim, eles desenvolveram uma teoria para o arrasto neutro e elétrico mais refinada do que as disponíveis anteriormente. Tal teoria expressa o arrasto elétrico (para satélites com altitude próxima a 6000 km) em função da densidade iônica e da temperatura absoluta do plasma iônico que circunda o satélite; os resultados obtidos após simulações numéricas, indicam ser o arrasto elétrico a causa mais provável do decréscimo secular do semi-eixo orbital do satélite LAGEOS, com pequena contribuição para o arrasto devido a partículas neutras.

Ciufolini (1987) analisa as principais perturbações não gravitacionais, incluindo a perturbação devido ao campo magnético terrestre e o arrasto elétrico, que afetam a longitude do nodo ascendente do satélite LAGEOS, comparando-as com o efeito Lense-Thirring (este efeito foi previsto pela teoria da relatividade geral em 1914 e descoberto em 1918 por Lense e Thirring – veja Ciufolini et al (1997) – entre outros). Após as citadas comparações, o autor conclui que cada uma dessas perturbações contribui para precessão da longitude do nodo ascendente do satélite LAGEOS menos de 1% do efeito Lense-Thirring.

Com o objetivo de melhorar os resultados publicados por Ciufolini (1987), Vokrouhlický (1989) determina os efeitos da força de Lorentz sobre o movimento orbital de um satélite artificial eletricamente carregado movendo-se sob a influência do campo magnético da Terra. Nesse trabalho considera-se que o campo geomagnético é produzido por multipolos magnéticos. As correções relativísticas são desprezadas, pois suas contribuições para o campo geomagnético são da ordem de  $10^{-9}$  e a carga elétrica do satélite é suposta constante. Os cálculos são centrados na determinação das variações seculares dos elementos orbitais em especial a longitude do nodo ascendente e, valores numéricos são calculados para o satélite LAGEOS. Os resultados são discutidos no contexto de uma possível determinação do efeito Lense-Thirring analisando as perturbações orbitais do satélite LAGEOS; tais resultados confirmam as previsões feitas por Ciufolini (1987); ou seja, os efeitos geomagnéticos contribuem

para precessão da longitude do nodo ascendente do satélite LAGEOS menos de 1% do efeito Lense-Thirring.

Em Vokrouhlický (1990) considera-se um modelo para a variação da carga elétrica de um satélite artificial, admitindo que este se movimenta sob a influência do magnetismo terrestre. Para a caracterização do campo magnético da Terra usa-se o modelo de multipolo magnético embora segundo o autor, um modelo de dipolo magnético conduza a resultados semelhantes. Em primeira ordem de aproximação, justifica-se a afirmação de que as variações seculares da excentricidade e inclinação orbital devido a força de Lorentz desaparecem, ou seja: qualquer variação secular que possa ocorrer na excentricidade e na inclinação, a força de Lorentz não desempenha nenhum papel. A variação do semi-eixo maior permanece nula. Cálculos numéricos são feitos para variação secular na longitude do nodo ascendente usando os elementos orbitais do satélite LAGEOS, cujos resultados obtidos se assemelham ao modelo de carga constante.

Odo (1992) analisa a interação entre satélite esférico e partículas neutras e carregadas da alta atmosfera. Introduz a perturbação no plasma causado pelo movimento do satélite e estima o efeito dessa perturbação no arrasto elétrico. Aplicam-se os resultados para o satélite LAGEOS. Inicialmente considerou-se que o potencial criado pelos íons seja esfericamente simétrico e a seguir, introduziu-se a perturbação no plasma devido ao movimento do satélite. No primeiro caso, o resultado obtido para a aceleração de arrasto não difere dos resultados obtidos por outros autores; no segundo caso, observa-se um aumento de aproximadamente 10% na aceleração, isto porque o potencial deixa de ter uma simetria radial para apresentar uma simetria axial em relação ao eixo orientado no sentido do movimento do satélite.

Anderson et al (1994) examinando a relação entre o potencial elétrico da espaçonave Dynamics Explorer 2 (DE2) e o plasma que a envolve, desenvolve um algoritmo para determinar o potencial dessa espaçonave em qualquer ponto de sua órbita. Os efeitos sobre o potencial da espaçonave provocado pelo campo magnético

da Terra bem como os efeitos do campo magnético induzido pelo fluxo de elétrons foram considerados.

Em Vilhena de Moraes (1994) encontramos modelos analíticos para as diversas perturbações de origem não gravitacionais, que afetam o movimento translacional e rotacional de satélites artificiais. Entre essas perturbações, o autor descreve a gerada pelo campo geomagnético e pelo torque magnético residual com seus respectivos modelos matemáticos. Apresenta também um método para estudar perturbações acopladas.

Zanardi, Quirelli e Kuga (2005) apresentam uma abordagem analítica para a predição de atitude de espaçonaves estabilizadas por spin sob a influência de torque magnético residual. Assumindo um modelo de dipolo magnético para a descrição do campo magnético terrestre, os autores utilizam o método da média para obter o torque residual médio sobre todo o período orbital; observa-se que o torque magnético residual não possui componentes ao longo do eixo de spin do satélite. A inclusão do torque magnético residual nas equações do movimento rotacional do satélite mostra que o mesmo não afeta a magnitude da velocidade angular do satélite, contribuindo somente para a precessão e deriva do eixo de spin da espaçonave.

## **CAPÍTULO 2 PERTURBAÇÃO ORBITAL DEVIDO AO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA**

Alguns autores têm procurado investigar a influência do campo magnético terrestre no movimento orbital de satélites artificiais ao redor da Terra; um dos pioneiros neste ramo foi Fain e Greer (1959), seguidos por Westerman (1960) que analisaram a influência do magnetismo terrestre em satélites cujas órbitas eram circulares e equatoriais. A partir daí, outros autores entre eles Sehna (1969), Ciufolini (1987), Vokrouhlický (1989,1990) estenderam os estudos para satélites com órbitas excêntricas e com inclinações variadas.

A interação satélite carregado com o campo magnético da Terra manifesta-se predominantemente através da força de Lorentz e uma das grandes dificuldades na determinação precisa dessa interação ocorre com a carga elétrica adquirida pelo satélite. É muito difícil determinarmos a intensidade da carga elétrica do satélite, pois seu valor pode variar com as condições atmosféricas local, com a forma e tipo de material de que é feita a superfície do satélite e com o modo de interação entre o satélite e as partículas atmosféricas. Entretanto este desafio precisa ser vencido ou pelo menos em grande parte atenuado, visto que o valor da carga elétrica adquirida pela superfície do satélite é fundamental na obtenção da precisão desse tipo de interação.

Neste capítulo analisamos a interação entre satélites artificiais eletricamente carregados e o campo magnético da Terra. Admitimos que a carga elétrica na superfície do satélite seja constante, desprezamos o movimento de rotação do satélite em torno de seu próprio eixo e supomos que os eixos magnéticos e geográficos da Terra são coincidentes. Procuramos obter uma expressão para as componentes do campo magnético da Terra em função dos elementos orbitais e analisamos as possíveis variações desses elementos orbitais, em especial as variações seculares.

## 2.1 CAMPO MAGNETICO DA TERRA

Como vimos na introdução deste trabalho, o campo magnético terrestre é gerado por correntes elétricas no interior da Terra. Considerando um sistema em rotação com a Terra e admitindo ausência de correntes elétricas nas suas vizinhanças, isto implica que, fora da Terra o campo magnético  $\vec{B}$  possui rotacional nulo; ou seja:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

Sabemos ainda, que o campo magnético pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar apropriado  $V$ .

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} V \quad (2.2)$$

A ausência de monopolos magnéticos implica que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.3), obtemos o Laplaciano de  $V$ :

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.4)$$

A solução da equação (2.4) pode ser convenientemente representada pelos harmônicos esféricos (WERTZ, 1978):

$$V(r, \vartheta, \varphi) = a_e \sum_{n=1}^k \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)) P_n^m(\vartheta) \quad (2.5)$$

Sendo:  $a_e$  o raio equatorial da Terra,  $g_n^m$  e  $h_n^m$  os coeficientes Gaussianos,  $r$  a distância geocêntrica,  $\vartheta$  a co-latitute geocêntrica,  $\varphi$  a longitude geocêntrica e  $P_n^m(\vartheta)$

os polinômios associados de Legendre. Os coeficientes Gaussianos são constantes do campo determinados empiricamente pelo método dos mínimos quadrados e podem ser encontrados no International Geomagnetic Reference Field (IGRF); Wertz (1978) apresenta alguns desses valores para o ano de 1975.

Outra maneira de representar a solução da equação (2.4) é dada por Vokrouhlický (1989):

$$V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{a_e}{\mu_0} \sum_{n,k} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} K_{nk} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad (2.6)$$

Em que:  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,

$$K_{nk} = (-1)^k \varepsilon_k \left( \frac{\pi}{2n+1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right)^{1/2} (g_n^k - i h_n^k)$$

$$\varepsilon_k = 2 \text{ se } k = 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_k = 1 \text{ se } k \neq 0,$$

e  $g_n^k, h_n^k$  os coeficientes Gaussianos.

As componentes do campo magnético terrestre  $\vec{B}$  (em coordenadas esféricas) podem ser determinadas a partir da equação (2.6), a saber:

$$B_{(r)} = -\mu_0 \frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.7)$$

$$B_{(\vartheta)} = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \quad (2.8)$$

$$B_{(\varphi)} = -\mu_0 \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (2.9)$$

Vamos escrever as componentes do campo geomagnético dadas pelas equações (2.7), (2.8) e (2.9), em coordenadas cartesianas, no sistema geocêntrico.

De acordo com Vokrouhlický (1989) as componentes de  $\vec{B}$  no sistema equatorial inercial, nas direções  $X$  (horizontal para o norte),  $Y$  (horizontal para leste) e  $Z$  (vertical para baixo), são:

$$B_{(X)} = -B_{(\vartheta)} = \sum_{l,m} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \frac{K_{lm}}{\text{sen} \vartheta} (lA_{lm}Y_{l+1,m} - (l+1)B_{lm}Y_{l-1,m}) \quad (2.10)$$

$$B_{(Y)} = B_{(\varphi)} = -\sum_{l,m} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \frac{K_{lm}}{\text{sen} \vartheta} imY_{l,m} \quad (2.11)$$

$$B_{(Z)} = -B_{(r)} = -\sum_{l,m} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} (l+1)K_{lm}Y_{lm} \quad (2.12)$$

$$\text{Em que, } A_{lm} = \left( \frac{(l-m+1).(l+m+1)}{(2l+1).(2l+3)} \right)^{1/2}; \quad B_{lm} = \left( \frac{(l-m).(l+m)}{(2l-1).(2l+1)} \right)^{1/2}$$

Podemos obter as componentes de  $\vec{B}$  no sistema orbital (em que  $S$  indica a direção radial,  $T$  a direção perpendicular a  $S$  e  $W$  a direção normal ao plano que contém  $S$  e  $T$ ), através de uma rotação de um ângulo  $\alpha$  (ângulo entre o plano orbital e o meridiano polar local) em torno do raio vetor  $\vec{r}$ . A figura 1, que representa a projeção de uma órbita na esfera celeste, indica as direções  $S$ ,  $T$  e  $W$ .

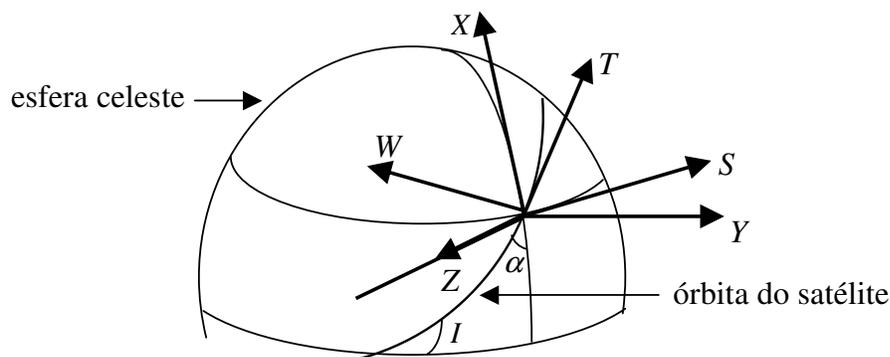


Figura 1 – Sistemas de referências  $X, Y, Z$  e  $S, T, W$  (SEHNAL, 1969).

Utilizando a matriz de rotação que relaciona os dois sistemas, definidas por:

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Obtemos:

$$B_{(S)} = -B_{(Z)} \quad (2.13)$$

$$B_{(T)} = B_{(X)} \cos \alpha + B_{(Y)} \sin \alpha \quad (2.14)$$

$$B_{(W)} = B_{(X)} \sin \alpha - B_{(Y)} \cos \alpha \quad (2.15)$$

Sendo  $B_{(X)}$ ,  $B_{(Y)}$  e  $B_{(Z)}$  dados pelas equações (2.10), (2.11) e (2.12) respectivamente.

Antes de substituirmos os valores de  $B_{(X)}$  e  $B_{(Y)}$  nas equações (2.14) e (2.15), faremos a seguinte mudança:  $\lambda = 90^\circ - \vartheta$ ; lembrando da trigonometria que  $\cos \vartheta = \sin \lambda$  e  $\sin \vartheta = \cos \lambda$ . Como estamos interessados em escrever as componentes de  $\vec{B}$  em função dos elementos orbitais, precisamos obter uma relação entre as variáveis  $\lambda$  e  $\alpha$  que aparecem nas equações (2.14) e (2.15), com os elementos orbitais. Para isto, vamos recorrer a trigonometria esférica. A figura 2 representa um triângulo esférico

cujos vértices são formados por: A interseção do meridiano polar que passa pelo satélite com o plano do equador, B posição do satélite, C nodo ascendente.

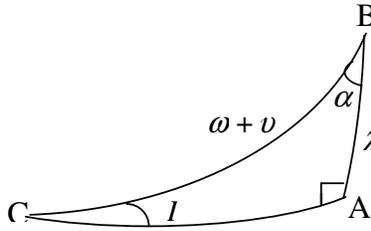


Figura 2 – Triângulo esférico.

A partir do triângulo esférico acima, podemos obter as seguintes relações (DANJON, 1952):

$$\text{sen } \lambda = \text{sen}(\omega + \nu) \text{sen } I \quad (2.16)$$

$$\cos \lambda \text{sen } \alpha = \cos I \quad (2.17)$$

$$\cos \lambda \cos \alpha = \cos(\omega + \nu) \text{sen } I \quad (2.18)$$

Em que:  $I$  é a inclinação orbital,  $\omega$  o argumento do perigeu e  $\nu$  a anomalia verdadeira.

Finalmente, substituindo as equações (2.16), (2.17) e (2.18) juntamente com as equações (2.10) e (2.11) nas equações (2.14) e (2.15) e, também substituindo a equação (2.12) na equação (2.13), obtemos de acordo com Vokrouhlický (1989):

$$B_{(s)} = \sum_{l,m} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} (l+1) K_{lm} Y_{lm} \quad (2.19)$$

$$B_{(r)} = \sum_{l,m} \sum_{k,v} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \frac{K_{lm}}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} (-1)^v \text{sen}^{2k} I (l A_{lm} Y_{l+1,m} - (l+1) B_{lm} Y_{l-1,m})^s - \frac{1}{2} (\cos((2v+1)(\omega + \nu)) + \cos((2v-1)(\omega + \nu))) - \sum_{l,m} \sum_{k,v} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \frac{K_{lm}}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} (-1)^v \cos I \text{sen}^{2k} I \cos(2v(\omega + \nu)) i m Y_{lm} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
B_{(w)} &= \sum_{l,m} \sum_{k,v} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \frac{K_{lm}}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} (-1)^v \cos I \sin^{2k} I \cos(2v(\omega + \nu)) \text{ }^{\text{st}} \\
& (lA_{lm} Y_{l+1,m} - (l+1)B_{lm} Y_{l-1,m}) + \\
& \sum_{l,m} \sum_{k,v} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \frac{K_{lm}}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} (-1)^v \sin^{2k} I \text{ }^{\text{st}} \\
& \frac{1}{2} (\cos((2v+1)(\omega + \nu)) + \cos((2v-1)(\omega + \nu)))
\end{aligned} \tag{2.21}$$

As componentes do campo magnético terrestre dadas pelas equações (2.19), (2.20) e (2.21), serão substituídas nas equações de Lagrange para obtermos as variações dos elementos orbitais.

## 2.2 CÁLCULO DA ACELERAÇÃO PERTURBADORA

Sabemos que a força perturbadora que provoca as supostas variações nos elementos orbitais é caracterizada pela força de Lorentz (GRIFFITHS, 1989):

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{V}_s \times \vec{B}) \tag{2.22}$$

Sendo: Q a carga elétrica do satélite,  $\vec{V}_s$  a velocidade orbital do satélite e  $\vec{E}$  o campo elétrico induzido.

Podemos separar a força de Lorentz dada pela equação (2.22) em duas partes: uma devido ao campo geomagnético (força magnética)  $\vec{F}_B$  e outra devido ao campo elétrico induzido (força elétrica)  $\vec{F}_E$ . Neste capítulo, vamos averiguar apenas os efeitos devido ao campo magnético da Terra. Os efeitos devido ao campo elétrico induzido serão tratados no capítulo 3; então, a equação (2.22) torna-se:

$$\vec{F}_B = Q(\vec{V}_s \times \vec{B}) \tag{2.23}$$

Fazendo o produto vetorial contido na equação (2.23), encontramos:

$$(\vec{V}_S \times \vec{B})_S = V_{S(T)}B_{(W)} - V_{S(W)}B_{(T)} \quad (2.24)$$

$$(\vec{V}_S \times \vec{B})_T = V_{S(W)}B_{(S)} - V_{S(S)}B_{(W)} \quad (2.25)$$

$$(\vec{V}_S \times \vec{B})_W = V_{S(S)}B_{(T)} - V_{S(T)}B_{(S)} \quad (2.26)$$

Sendo as componentes da velocidade do satélite no sistema orbital dada por (ROY, 1998):

$$V_{S(S)} = \dot{r} = \frac{nae}{(1-e^2)^{1/2}} \operatorname{sen} \nu \quad (2.27)$$

$$V_{S(T)} = r \dot{\nu} = na \left(1-e^2\right)^{1/2} \frac{a}{r} \quad (2.28)$$

$$V_{S(W)} = 0 \text{ (o movimento ocorre no plano } S, T) \quad (2.29)$$

Em que:  $a$  é o semi-eixo maior da órbita do satélite,  $n$  o movimento médio e  $e$  a excentricidade orbital.

Podemos calcular as componentes da aceleração perturbadora (causada pela força magnética) nas direções  $S$ ,  $T$  e  $W$  substituindo as equações (2.24), (2.25) e (2.26) na equação (2.23) e dividindo-a por  $M$  – a massa do satélite, logo:

$$\vec{A}_S = \frac{Q}{M} V_{S(T)} B_{(W)} \quad (2.30)$$

$$\vec{A}_T = -\frac{Q}{M} V_{S(S)} B_{(W)} \quad (2.31)$$

$$\tilde{A}_w = \frac{Q}{M}(V_{S(S)}B_{(T)} - V_{S(T)}B_{(S)}) \quad (2.32)$$

Substituindo os valores de  $B_{(S)}$ ,  $B_{(T)}$ ,  $B_{(W)}$ ,  $V_{S(S)}$  e  $V_{S(T)}$  dados pelas equações (2.19), (2.20), (2.21), (2.27) e (2.28) respectivamente, nas equações (2.30), (2.31) e (2.32), teremos o valor das componentes da aceleração.

A magnitude das componentes dessa aceleração é caracterizada principalmente pelo produto  $\frac{Q}{M}(g_n^k, h_n^k)$ . Como o valor desse produto possui ordem de grandeza baixa (para o satélite LAGEOS, por exemplo,  $Q = 10^{-11}$  C,  $M = 10^2$  kg e  $g_n^k, h_n^k = 10^{-9}$  Tesla, a ordem desse produto é de  $10^{-22}$ ), podemos esperar mudanças de pequena ordem de grandeza nos elementos orbitais provocada pela força magnética (SEHNAL, 1969).

### 2.3 VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Uma vez conhecida as componentes da aceleração dadas pelas equações (2.30), (2.31) e (2.32), podemos substituí-las nas equações Lagrange na forma de Gauss para encontrar as variações dos conjuntos de elementos orbitais. Temos então de acordo com Vokrouhlický (1989):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} [(esenv)S + (1+e\cos v)T] \quad (2.33)$$

Substituindo os valores de  $S$  e  $T$  dados pelas equações (2.30) e (2.31) respectivamente e utilizando:  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$  (ROY, 1998), obtemos:

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (2.34)$$

Este resultado também pode ser obtido se pensarmos na conservação da energia. No problema de dois corpos, a energia depende da velocidade do corpo em órbita; uma vez que a força magnética é normal à velocidade do satélite, esta não é alterada pela força magnética e conseqüentemente a energia é conservada; conservando-se a energia, o semi-eixo maior não sofre variação.

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{Q}{M} \sum_{l,k,v} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{\cos I}{2^{2k} (2l+1)} \times \\ & \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p}^{2k} \sum_{\xi=\pm} \sum_{\xi}^{1,2} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{\xi}^1 - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_{\xi}^1 \right) - \right. \\ & \left. (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k} \sum_{\xi=\pm} \sum_{\xi}^{1,0} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{\xi}^{-1} - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_{\xi}^{-1} \right) \right\} + \\ & \frac{Q}{M} \sum_{l,k,v} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \sum_{m,p} \frac{m}{2^{2k+3}} F_{l,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=0,\pm 2} \sum_{\xi}^{1,1+i} \times \\ & \left( \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_{\xi}^i - \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_{\xi}^i \right) \end{aligned}$$

$$\text{Sendo: } F_{l,m,p}^k(I) = \text{sen}^k I F_{l,m,p}(I); \quad F_{l,m,p}(I)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} = & \frac{Qe}{M(1-e^{\xi}e)} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{1}{2^{2k+4}(2l+1)} \xi \\
& \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=0,\pm 2} \mathcal{E}_i^{1,2+i} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{1+i}^{\xi} - \right. \right. \\
& \left. \left. \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_{1+i}^{\xi} \right) - (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k+1} \xi \right. \\
& \left. \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=0,\pm 2} \mathcal{E}_i^{1,i} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{-1+i}^{\xi} - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_{-1+i}^{\xi} \right) \right\} - \\
& \frac{Qe}{M(1-e^{\xi}e)} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{\text{cos} I}{2^{2k+3}} \sum_{m,p} m F_{l-1,m,p}^{2k+1} \xi \\
& \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=0,\pm 2} \mathcal{E}_i^{1,1+i} \left( \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_i^{\xi} - \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_i^{\xi} \right) - \\
& \frac{Q}{2M} \sum_l \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (l+1) \sum_q \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} X_q^{-(l+2),(l-2p+i)} \xi \\
& \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ -h_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_i^0 + \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_i^0 \right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Sendo:  $\Lambda_{\pm n}^0 = q \mathcal{E}_{\pm}^{n,n} + (l-2p \pm n)\omega + m(\Omega - )$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} = & -\frac{Qe}{M(1-e^s e) \text{sen } I} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{1}{2^{2k+4} (2l+1)} {}^s \\
& \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 2} \mathbf{A}_{\xi}^{1,2+i} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{1+i}^{\xi} + \right. \right. \\
& \left. \left. \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_{1+i}^{\xi} \right) - (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k+1} {}^s \right. \\
& \left. \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 2} \mathbf{A}_{\xi}^{1+i} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{-1+i}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_{-1+i}^{\xi} \right) \right\} + \\
& \frac{Qe}{M(1-e^s e) \text{sen } I} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{\text{cos } I}{2^{2k+3}} {}^s \\
& \sum_{m,p} m F_{l,m,p}^{2k} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 1} i {}^s \mathbf{A}_{\xi}^{1,1+i} \left( \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_i^{\xi} + \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_i^{\xi} \right) - \\
& \frac{Q}{2M \text{sen } I} \sum_l \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (l+1) \sum_q \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} i X_q^{-(l+2),(l-2p+i)} {}^s \\
& \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ -h_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_i^0 - \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_i^0 \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} = & -\frac{Q(1-e^{\xi}e)}{M.e} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{\cos I}{2^{2k+2}(2l+1)}{}^{\xi} \\
& \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \nabla_{\xi}^{3,2} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) - \right. \\
& (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k} \sum_{\xi=\pm} \nabla_{\xi}^{3,0} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) \left. \right\} - \\
& \frac{Q(1-e^{\xi}e)}{M.e} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v}{}^{\xi} \\
& \sum_{m,p} \frac{m}{2^{2k+3}} F_{l+1,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 1} \nabla_{\xi}^{3,1+i}{}^{\xi} \left( \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) + \\
& \frac{Q}{M} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{\cos I}{2^{2k+3}(2l+1)}{}^{\xi} \\
& \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p}^{2k} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 1} \mathbf{M}_{\xi}^{2,1+i} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) - \right. \\
& (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k}{}^{\xi} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 1} \mathbf{M}_{\xi}^{2,-1+i} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) \left. \right\} + \\
& \frac{Q}{M(1-e^{\xi}e)} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \frac{\cos I}{2^{2k+3}(2l+1)}{}^{\xi} \\
& \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p}^{2k} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 1} \mathbf{M}_{\xi}^{1,1+i} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) - \right. \\
& (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k}{}^{\xi} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i=\pm 1} \mathbf{M}_{\xi}^{1,-1+i} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) \left. \right\} + \\
& \frac{Q}{M} \sum_{l,k,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v} \sum_{m,p} \frac{m}{2^{2k+4}} F_{l,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i,j=\pm 1} \mathbf{M}_{\xi}^{2,i+j}{}^{\xi} \\
& \left( \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) + \frac{Q}{M} \sum_{l,m,v} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+2} (-1)^v \sum_q \binom{2k}{k-v}{}^{\xi} \\
& \sum_{m,p} \frac{m}{2^{2k+4}} F_{l,m,p}^{2k+1} \sum_{\xi=\pm} \sum_{i,j=\pm 1} \mathbf{M}_{\xi}^{1,i+j}{}^{\xi} \left( \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen}\Lambda_{\xi}^{\xi} + \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{cos}\Lambda_{\xi}^{\xi} \right) - \\
& \cos I \cdot \frac{d\Omega}{dt}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Em que:  $\nabla_{\pm}^{m,\pm n}(e) = X_{q(e)}^{-(l+m),(l-2p\pm 2v\pm n)} + X_{q(e)}^{-(l+m),(l-2p\pm 2v\pm(n-2))}$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} n \frac{Q}{M} (1 - e^{\xi} e)^{1/2} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{l-2} (-1)^v \frac{2k}{k-v} \frac{\cos I}{2^{2k} (2l-1)} \\
& \quad \cdot \sum_{m,p}^{(1)} (l-m-1) F_{l-1,m,p}^{2k-1} X_q^{(l-2),(l-2p\xi-2v)} \\
& \quad \left( \begin{array}{c} g_l^m \operatorname{sen} \xi_1 \\ h_l^m \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} h_l^m \cos \xi_i \\ g_l^m \end{array} \right) - (l+1) \sum_{m,p}^{(1)} (l+m) F_{l-1,m,p}^{2k} \\
& \quad \cdot X_q^{(l-2),(l-2p\xi-2v)} \left\{ \left[ \begin{array}{c} g_l^m \\ h_l^m \end{array} \right] \operatorname{sen} \Lambda_{\xi_1}^{\xi} + \left[ \begin{array}{c} -h_l^m \\ g_l^m \end{array} \right] \cos \Lambda_{\xi_1}^{\xi} \right\} - \\
& \quad \frac{Q}{M} (1 - e^{\xi} e)^{1/2} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{l-2} (-1)^v \frac{2k}{k-v} \frac{m}{2^{2k}} F_{l,m,p}^{2k-1} \\
& \quad \cdot X_q^{(l-2),(l-2p\xi-2v)} \left\{ \left[ \begin{array}{c} -g_l^m \\ h_l^m \end{array} \right] \operatorname{sen} \Lambda_{\xi_i}^{\xi} - \left[ \begin{array}{c} h_l^m \\ g_l^m \end{array} \right] \cos \Lambda_{\xi_i}^{\xi} \right\} - \\
& \quad \cos I \cdot (1 - e^{\xi} e)^{1/2} \frac{d\Omega}{dt} - (1 - e^{\xi} e)^{1/2} \frac{d\omega}{dt}
\end{aligned}$$

Uma vez que não é possível eliminar termos periódicos das equações (2.35) e (2.36), verificamos que:

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\text{sec}} = 0 \quad (2.41)$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{\text{sec}} = 0 \quad (2.42)$$

Contudo, ambos os elementos acima ( $e$ ,  $I$ ), possuem variações periódicas de curto e de longo período.

Considerando que  $X_0^{n,k} = X_0^{n,-k}$ ; a variação secular na longitude do nodo ascendente é devido ao último termo da equação (2.37). Então, segundo Vokrouhlický (1989), temos:

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}} = -\frac{Q}{2M \text{sen} I} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=0}^l (l+1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{l+2} g_1^0 (X_0^{-(l+2),0} \Big|_{l-2p-1=0} - X_0^{-(l+2),0} \Big|_{l-2p-1=0} = 0) F_{l,0,p} \quad (2.43)$$

Substituindo  $l = 2 + 1$  e após algumas reduções, obtemos:

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}} = \frac{2Q}{M \text{sen} I} \sum_{=0}^{\infty} ( +1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+3),0} g_{2+1}^0 A_{2+1}^{(-1)} \quad (2.44)$$

Em que:  $A_n^{(n-2p),k}(I) = F_{n,0,p}^k(I)$ , sendo  $F_{n,0,p}^k(I)$  a função inclinação de Kaula.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio com relação ao argumento do perigeu equação (2.38), de acordo com Vokrouhlický (1989), obtemos:

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}} = -\cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}} - \frac{Q}{M} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2l+3} \cos I g_{2l+1}^0 * \\ \frac{(l+1)(2l+1)}{(4l+3)} \left( \cdot \right) \left\{ \sum_{v=0}^{\min(k, l+1)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2l+2}^{2v, 2k} - \right. \\ \left. \sum_{v=0}^{\min(k, \cdot)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2l+2}^{2v, 2k} \right\}$$

Em que:

$$\left( \cdot \right) = 2 \frac{(1-e^* e)}{e} X_{0(e)}^{-(2l+4), 1} + X_{0(e)}^{-(2l+3), 0} - X_{0(e)}^{-(2l+3), 2} + \frac{1}{1-e^* e} \left( X_{0(e)}^{-(2l+2), 0} - X_{0(e)}^{-(2l+2), 2} \right)$$

A variação secular na anomalia média equação (2.39), pode ser obtida pelo mesmo procedimento (VOKROUHLICKÝ, 1989):

$$\left. \frac{d\omega^k}{dt} \right|_{\text{sec}} = n + (1-e^* e)^{1/2} \left\{ \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}} + \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}} \right\} - \\ \frac{4Q}{M} (1-e^* e) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2l+3} \cos I g_{2l+1}^0 \frac{(l+1)(2l+1)}{(4l+3)} \left( \cdot \right) * \\ \left\{ \sum_{v=0}^{\min(k, l+1)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2l+2}^{2v, 2k} - \sum_{v=0}^{\min(k, \cdot)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2l+2}^{2v, 2k} \right\}$$

Sendo:  $\left( \cdot \right) = X_{0(e)}^{-(2l+3), 0} - X_{0(e)}^{-(2l+3), 2}$

## **CAPÍTULO 3 PERTURBAÇÃO ORBITAL DEVIDO AO CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO**

Analisemos neste capítulo os efeitos da força de Lorentz sobre o movimento orbital de um satélite artificial eletricamente carregado devido ao campo elétrico induzido criado pelas cargas elétricas ao mudarmos do sistema em rotação com a Terra para um sistema fixo. Vamos admitir que a carga elétrica do satélite seja constante e desprezamos o movimento de rotação do satélite em torno de seu próprio eixo. Analisamos as possíveis variações desses elementos orbitais, em especial as variações seculares.

### **3.1 CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO**

$$E_{(\vartheta)} = \mu_0 \Omega^{\oplus} r^2 \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial r} \quad (3.2)$$

$$E_{(\varphi)} = 0 \text{ (ocorre simetria nesta direção)} \quad (3.)$$

⊕

encontrar as variações dos elementos orbitais. De acordo com Vokrouhlický (1989), temos:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{da}{dt} \right|^{el} &= -\frac{Q\Omega^\oplus a_e e}{M.n(1-e^{\mathcal{L}}e)^{1/2}} \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_q \frac{1}{2l+1} \mathcal{L} \\
&\left\{ \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p} \mathbf{A}_0^{1,2} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_1^0 - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_1^0 \right) - \right. \\
&(l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p} \mathbf{A}_0^{1,0} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{-1}^0 - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_{-1}^0 \right) \left. \right\} + \\
&\frac{Q\Omega^\oplus a_e (1-e^{\mathcal{L}}e)^{1/2}}{M.n} \text{sen} I \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} X_q^{-(l+2),(l-2p+i)} \mathcal{L} \\
&\left( \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen}_i^0 - \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos}_i^0 \right) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{de}{dt} \right|^{el} &= -\frac{Q\Omega^\oplus (1-e^{\mathcal{L}}e)^{1/2}}{2M.n} \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_q \frac{1}{2l+1} \mathcal{L} \\
&\left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p} \mathbf{A}_0^{1,2} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_1^0 - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_1^0 \right) - \right. \\
&(l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p} \mathbf{A}_0^{1,0} \left( \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen} \Lambda_{-1}^0 - \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos} \Lambda_{-1}^0 \right) \left. \right\} + \\
&\frac{Q(1-e^{\mathcal{L}}e)^{3/2}}{2M.n} \Omega^\oplus \text{sen} I \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} X_q^{-(l+2),(l-2p+i)} \mathcal{L} \\
&\left( \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen}_i^0 - \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos}_i^0 \right) - \frac{Q(1-e^{\mathcal{L}}e)^{3/2}}{2M.n} \Omega^\oplus \text{sen} I * \\
&\sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} X_q^{-l,(l-2p+i)} \mathcal{L} \left( \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen}_i^0 - \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos}_i^0 \right) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dl}{dt} \right|^{el} &= \frac{Q\Omega^\oplus \text{cos} I}{2M.n(1-e^{\mathcal{L}}e)^{1/2}} \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} X_q^{-l,(l-2p+i)} \mathcal{L} \\
&\left( \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \text{sen}_i^0 - \begin{bmatrix} -g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{cos}_i^0 \right) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|^{el} &= \frac{Q\Omega^\oplus (1-e^*e)^{1/2} \cos I}{2M.n.\text{sen } I} \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} i^* \\ & X_q^{-l,(l-2p-i)} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ -h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_i^0 - \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_i^0 \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|^{el} &= \frac{Q\Omega^\oplus (1-e^*e)^{1/2}}{2M.n} \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_q \frac{1}{2l+1} {}^* \\ & \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p} \nabla_0^{1,2} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_1^0 + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_1^0 \right) - \right. \\ & \left. (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p} \nabla_0^{1,0} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_{-1}^0 + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_{-1}^0 \right) \right\} + \\ & \frac{Q\Omega^\oplus (1-e^*e)^{3/2}}{4M.n} \text{sen } I \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} \Lambda_0^{1,1+i} {}^* \\ & \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ -h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_i^0 - \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_i^0 \right) - \frac{Q\Omega^\oplus (1-e^*e)^{3/2}}{4M.n} \text{sen } I {}^* \\ & \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+1} \sum_q (l+1) \sum_{m,p} F_{l,m,p} \sum_{i=\pm 1} \Lambda_0^{0,1+i} {}^* \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ -h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_i^0 - \begin{bmatrix} h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_i^0 \right) - \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|^{el} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bullet}{dt} \right|^{el} &= n + \frac{Q\Omega^\oplus}{M.n} \sum_l \left( \frac{a_e}{r} \right)^{l+2} \sum_q \frac{1}{2l+1} {}^* \\ & \left\{ l \sum_{m,p}^{(1)} (l-m+1) F_{l+1,m,p} X_q^{-l,(l-2p+1)} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_1^0 + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_1^0 \right) - \right. \\ & \left. (l+1) \sum_{m,p}^{(-1)} (l+m) F_{l-1,m,p} X_q^{-l,(l-2p-i)} \left( \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \text{sen } \Lambda_{-1}^0 + \begin{bmatrix} -h_l^m \\ g_l^m \end{bmatrix} \cos \Lambda_{-1}^0 \right) \right\} - \\ & \cos I (1-e^*e)^{1/2} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|^{el} - (1-e^*e)^{1/2} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|^{el} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3 VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Novamente, concentremos nossa atenção nas variações seculares dos elementos orbitais.

De acordo com Vokrouhlický (1989) das equações (3.8), (3.9) e (3.10), podemos observar que:

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} = 0 \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} = 0 \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} = 0 \quad (3.16)$$

Entretanto, para os demais elementos orbitais contidos nas equações (3.11), (3.12) e (3.13) (VOKROUHLICKÝ, 1989) temos:

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} = - \frac{2Q\Omega^{\oplus} \cos I}{M.n(1-e^*e)^{1/2} \text{sen} I} \sum_{=1}^{\infty} ( +1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+1),0} g_{2+1}^0 A_{2+1}^{(-1)} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} = & - \frac{2Q\Omega^{\oplus}}{M.n.e} (1-e^*e)^{1/2} \sum_{=1}^{\infty} ( +1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+1),0} g_{2+1}^0 * \\ & \frac{2+1}{4+1} (A_{2+2}^{(0)} - A_{2+1}^{(0)}) - \cos I \cdot \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} = & n + \frac{2Q\Omega^{\oplus}}{M.n} \sum_{=1}^{\infty} ( +1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+1),0} g_{2+1}^0 \frac{2+1}{4+3} * \\ & (A_{2+2}^{(0)} - A_{2+1}^{(0)}) - \cos I \cdot (1-e^*e)^{1/2} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} - (1-e^*e)^{1/2} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{el} \end{aligned} \quad (3.19)$$

## **CAPÍTULO 4 PERTURBAÇÃO ORBITAL DEVIDO AO ARRASTO ELÉTRICO**

Sabemos que a atmosfera terrestre é constituída por uma mistura de vários gases, cuja composição e características físicas variam de acordo com a altitude. Nas camadas inferiores, na composição do ar atmosférico predominam-se os gases oxigênio e nitrogênio, mas à medida que a altitude cresce estes se tornam mais rarefeitos e outros gases se destacam nesta composição, como o hidrogênio e o hélio.

Acima de certas altitudes (aproximadamente 300 km), aparecem na constituição atmosférica partículas eletricamente carregadas, cuja concentração torna-se cada vez maior com o acréscimo da altitude. Na ionosfera, a concentração de elétrons e de íons é praticamente igual, isto é, macroscopicamente o gás atmosférico apresenta-se neutro; este gás é conhecido como plasma (ODO, 1992).

O movimento de satélites num campo de plasma tem sido objeto de estudo de alguns autores – Rubincam (1982), Afonso et al (1985), Odo (1992) – com o objetivo de explicar a causa do decréscimo secular de 1,1 mm por dia na órbita do satélite LAGEOS; segundo esses autores o arrasto elétrico (arrasto provocado por partículas elétricas presente na alta atmosfera) indica ser a provável causa desse decréscimo.

Neste capítulo, abordamos a influência de partículas carregadas no movimento orbital de satélites artificiais movendo-se através de um campo de plasma. Desprezamos as perturbações causadas no plasma devido ao movimento do satélite – este tipo de perturbação pode ser encontrado em (Odo, 1992) – e supomos que o mesmo desloca-se com velocidade inferior à velocidade dos íons e elétrons que constituem o plasma. Obtemos a expressão para o arrasto elétrico em função do parâmetro de impacto e analisamos as variações dos elementos orbitais, com enfoque nas variações seculares.

#### 4.1 POTENCIAL ELÉTRICO DO SATÉLITE

Podemos observar que um satélite artificial constituído de um material condutor, inicialmente neutro, ao mover-se numa região do espaço onde exista um plasma adquire um potencial eléctrico negativo em virtude de suas colisões com os elétrons serem mais frequentes do que as colisões com os íons, visto que as primeiras partículas são mais leves e, portanto mais velozes que as últimas partículas acima citadas.

À medida que o satélite torna-se negativamente carregado, ele começa a repelir as cargas negativas e a atrair as cargas positivas (íons); uma vez estabelecido o equilíbrio electrostático, sua superfície permanece negativamente carregada adquirindo um potencial eléctrico.

Al'pert (1974) derivou as expressões para o potencial electrostático,  $U_0$ , adquirido pela superfície satélite ao mover-se num campo de plasma, a saber:

$$U_0 = -\frac{kT}{\hat{e}} \ln\left(\frac{V_e}{V_i}\right) \quad \text{se } V_s < V_i \quad (4.1)$$

$$U_0 = -\frac{kT}{\hat{e}} \ln\left(\frac{V_e}{V_s}\right) \quad \text{se } V_s > V_i \quad (4.2)$$

Sendo,  $V_e$ ,  $V_i$  e  $V_s$  as velocidades dos elétrons, dos íons e do satélite respectivamente,  $k = 1,381 \cdot 10^{-23} J/K$  constante de Boltzmann,  $\hat{e} = 1,602 \cdot 10^{-19} C$  carga elementar e  $T$  a temperatura termodinâmica na escala absoluta.

Afonso et al (1985) utilizando a equação (4.1), adotando o valor típico de  $T = 5000K$  e  $V_e/V_i = (m_i/m_e)^{1/2} = 42$ , obtiveram  $U_0 = -1,5 V$ , para o potencial adquirido pela superfície de um satélite.

É de suma importância o papel desempenhado pelo potencial da superfície do satélite para a determinação do arrasto eléctrico. Porém é muito difícil obtê-lo com

certa precisão visto que sua determinação depende de inúmeros fatores, tais como: a forma do satélite, o material de que é constituída a superfície do satélite, a velocidade do satélite, a temperatura do plasma, o número de partículas que colide com o satélite, o tipo de colisão entre ambos além de outros fatores, o que faz com que o potencial possa atingir até centenas de volts (SEHNAL, 1969). Rubincam (1982), Ciufolini (1987) adotaram os valores de  $U_0 = -1$  V, já Afonso et al (1985) preferiram trabalhar com os valores  $U_0 = -1$  V e  $U_0 = -3$  V respectivamente para o potencial eletrostático na superfície do satélite LAGEOS.

#### 4.2 POTENCIAL ELÉTRICO NAS VIZINHANÇAS DO SATÉLITE

O plasma nas proximidades do satélite não é neutro devido à atração elétrica que os elétrons da superfície do satélite exercem sobre os íons circunvizinhos ao satélite, aliada à repulsão elétrica entre os elétrons da superfície do corpo com os elétrons do plasma.

Para determinarmos o potencial elétrico  $U$  nas vizinhanças do satélite, devemos recorrer a equação de Poisson:

$$\nabla^2 U = -\rho_v / \epsilon_0 \quad (4.3)$$

Em que:  $\rho_v = e(n_i - n_e)$  é a densidade volumétrica de carga,  $n_i$  e  $n_e$  as concentrações de íons e de elétrons respectivamente,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m a permissibilidade elétrica do vácuo.

Como as velocidades dos elétrons são altas, a sua distribuição na região de plasma próxima ao satélite depende da temperatura. Considerando que esta região vizinha ao satélite esteja em equilíbrio térmico, a concentração de elétrons pode ser determinada pela distribuição de Boltzmann (AFONSO et al, 1985):

$$n_e = n \exp(\hat{e}U_0 / kT) \quad (4.4)$$

Como os íons possuem velocidades menores que as velocidades dos elétrons, sua distribuição não é afetada. Logo temos:

$$n_i = n \quad (4.5)$$

Sendo  $n$  a concentração de elétrons e íons numa região distante do satélite, isto é numa região eletricamente neutra, ( $n_e = n_i = n$ ).

Utilizando as equações (4.4) e (4.5) para encontrarmos o valor de  $\nabla^2 U$  e, a seguir, substituindo-o na equação (4.3), encontramos:

$$\nabla^2 U = \frac{\hat{e} n}{\epsilon_0} [\exp(\hat{e}U_0 / kT) - 1] \quad (4.6)$$

Debye (REITZ; MILFORD, 1967) encontrou uma solução analítica para a equação (4.6) nas proximidades de uma carga pontual, considerando  $(\hat{e}U_0 / kT) \ll 1$ .

Afonso et al (1985) adaptaram a solução encontrada Debye para o potencial eletrostático nas vizinhanças de um satélite esférico de raio ( $[$

### 4.3 PARÂMETRO DE IMPACTO

Como vimos no item 4.1, um satélite inicialmente neutro ao movimentar-se numa região de plasma torna-se carregado negativamente devido às colisões com os elétrons serem mais numerosas que as colisões com os íons.

Pois bem, se desejarmos estimar a intensidade do arrasto que atua no satélite provocado pelas colisões com os íons, precisamos saber qual a quantidade (número) de íons que colidem com a superfície do satélite.

Considere um feixe de íons paralelos entre si vindo na direção do satélite, este suposto esférico. Devido à ação atrativa do campo elétrico criado pela distribuição de elétrons na superfície do satélite, a trajetória de muitos dos íons ao se aproximarem do satélite não serão mais linhas retas; alguns íons irão colidir com o satélite, outros terão suas trajetórias desviadas, mas não chocarão com a espaçonave e outros ainda permanecerão com suas trajetórias inalteradas, conforme podemos ver na figura 3.



Figura 3 – Trajetória dos íons nas vizinhanças de um satélite (AFONSO et al, 1985).

Observe pela figura 3, que muito dos íons que atingem a superfície do satélite possuem um parâmetro de impacto  $b$  maior que o raio do satélite. O parâmetro de impacto é função da energia cinética do íon considerado e, para um feixe de íons que tiverem a mesma energia cinética, podemos determinar um parâmetro de impacto máximo  $b_m$ . Podemos observar também, que para um determinado feixe de íons que tiverem um parâmetro de impacto menor ou igual ao parâmetro de impacto máximo, os íons desse feixe chocarão com a superfície do satélite; na mesma linha de raciocínio, os íons de um determinado feixe que tiverem um parâmetro de impacto maior que o parâmetro de impacto máximo, terão suas trajetórias desviadas, mas não colidirão com a superfície do satélite, ou até mesmo permanecerão com suas trajetórias inalteradas.

É através do parâmetro de impacto máximo que teremos uma estimativa do número de íons que colidirão com a superfície do satélite.

Para determiná-lo, considere:

a) Um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  centrado no satélite onde  $r$  é o raio vetor,  $\theta$  o ângulo coordenado e eixo polar orientado na direção do movimento do satélite, conforme indica a figura 4.

b) Um íon de massa  $m_i$ , parâmetro de impacto  $b$  e carga elétrica  $q$  é movendo-se com velocidade  $V_i$  sujeito a ação de um campo elétrico cujo potencial é esfericamente simétrico, ou seja:  $U = U(r)$ .

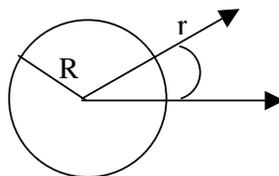


Figura 4 – Sistema de coordenadas polares.

Nestas condições, a lagrangiana ( $L$ ) do movimento do íon é dada por (GOLDSTEIN, 1981):

$$L = E_C - U = \frac{1}{2} m_i (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \hat{e}U(r) \quad (4.8)$$

Sendo:  $E_C$  a energia cinética e  $U$  a energia potencial.

Como o campo elétrico é suposto conservativo e a lagrangiana não depende explicitamente da coordenada  $\phi$ , temos a conservação da energia total  $\hat{E}$  e do momento angular  $l$ :

$$l = m_i r^2 \dot{\phi} = m_i b V_i \quad (4.9)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2} m_i (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \hat{e}U(r) = \frac{1}{2} m_i V_i^2 \quad (4.10)$$

Chang e Smith (1959) resolvendo as equações (4.9) e (4.10) com imposição da condição de que  $\dot{r} = 0$  para  $r = R$ , obtiveram a seguinte relação para o parâmetro de impacto máximo:

$$\left( \frac{b_m}{R} \right)^2 = 1 - \frac{\hat{e}U(R)}{\hat{E}} \quad (4.11)$$

Da equação (4.11), podemos observar que quando a energia  $\hat{E}$  do íon é grande comparado a  $\hat{e}U(R)$ , a partícula é fracamente afetada pelo campo elétrico da superfície do satélite; neste caso, a secção de colisão será praticamente igual a secção transversal do satélite ( $b_m \cong R$ ) e somente os íons com parâmetro de impacto  $b > R$  é que colidirão com a superfície do satélite.

Caso a energia  $\hat{E}$  do íon seja menor que  $\hat{e}U(R)$ , o parâmetro de impacto máximo será maior que o raio do satélite ( $b_m > R$ ); mas nem todas as partículas irão colidir com a superfície do satélite, somente as partículas que tiverem parâmetro de impacto  $b < b_m$  é que chocarão com o satélite.

#### 4.4 ARRASTO ELÉTRICO

Sabemos que um satélite ao mover-se na atmosfera terrestre tem seu movimento influenciado pelo atrito com o ar atmosférico causando-lhe uma força resistiva ao seu deslocamento; esta força é denominada força de arrasto e tem sido objeto de estudos de vários autores, entre eles El-Salam e Sehnal (2004). O principal efeito da força de arrasto nas órbitas dos satélites artificiais é a perda de energia por parte do satélite, fazendo com que sua órbita torne-se circular e, reduza progressivamente sua altitude.

Vimos no início deste capítulo, que a atmosfera terrestre a baixas altitudes é constituída principalmente por nitrogênio e oxigênio, mas à medida que a altitude aumenta outros gases como o hidrogênio e o hélio começam a predominar, até que por fim a elevadas altitudes partículas carregadas são os componentes predominantes na constituição da atmosfera. O arrasto provocado por partículas neutras presentes na atmosfera é comumente denominado de arrasto neutro.

Segundo Ciufolini (1987), podemos obter o módulo da força de arrasto que atua em um satélite através da expressão:

$$f = \frac{1}{2} C_D \rho A V_s^2 \quad (4.12)$$

Em que  $\rho$  é a densidade do ar,  $C_D$  o coeficiente de arrasto,  $A$  é a área do satélite,  $V_s$  a velocidade do satélite em relação à atmosfera; esta considerada em repouso em relação ao centro da Terra.

A densidade do ar  $\rho$  depende de vários fatores – entre eles a altitude do satélite – e o coeficiente de arrasto  $C_D$  – adimensional – na maioria dos casos é considerado constante; ambos os parâmetros encontram-se modelados em Vilhena de Moraes (1994).

A equação (4.12) é muito útil quando aplicada a satélites de baixa altitude, onde a velocidade do satélite  $V_S$  é maior que a velocidade térmica  $V_T$  das moléculas e o movimento do satélite é semelhante ao movimento de um corpo em um fluido estacionário. Nestas altitudes, predomina a concentração de moléculas pesadas como oxigênio e nitrogênio, portanto mais lentas.

Para altitudes mais elevadas onde ocorre o predomínio de moléculas mais leves – conseqüentemente mais velozes – como o hélio e principalmente o hidrogênio, a equação (4.12) torna-se irrelevante, pois nestas altitudes devemos levar em consideração a velocidade dessas moléculas, além da presença de íons na atmosfera.

Fixemos nossa atenção na obtenção do arrasto provocado pelas partículas neutras (arrasto neutro) e a seguir, obteremos a expressão para o arrasto provocado por partículas carregadas (arrasto elétrico).

Considere um satélite esférico de raio  $R$ , massa  $M$  deslocando com velocidade  $\vec{V}_S$  em um fluido de partículas neutras, o qual está em equilíbrio térmico a uma certa temperatura absoluta  $T$  e cujas moléculas que o constitui possui livre caminho médio muito maior que a dimensão do satélite – fluxo de partículas livres – todas deslocando-se com velocidade térmica  $\vec{V}_T$  de acordo com a figura 5:

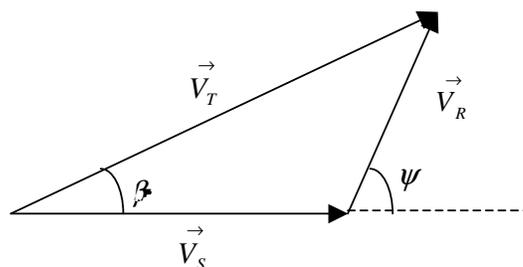


Figura 5 – Velocidade relativa do satélite em relação a um fluido (AFONSO et al, 1985).

A velocidade relativa  $\vec{V}_R$  do satélite em relação ao fluido será:

$$\vec{V}_R = \vec{V}_T - \vec{V}_S \quad (4.13)$$

O módulo da velocidade relativa pode ser obtido a partir da figura 5; então teremos:

$$V_R^2 = V_T^2 + V_S^2 - 2V_T V_S \cos \beta \quad (4.14)$$

Em que  $\beta$  é o ângulo entre a velocidade do satélite e a velocidade térmica das moléculas.

Decompondo as três velocidades nas direções paralela e perpendicular ao movimento do satélite, teremos respectivamente:

$$V_R \cos \psi = V_T \cos \beta - V_S \quad (4.15)$$

$$V_R \sin \psi = V_T \sin \beta \quad (4.16)$$

Em que  $\psi$  é o ângulo entre  $V_R$  e  $V_S$ .

Para calcularmos a força de arrasto temos que somar as contribuições de todas as partículas que colidirão com o satélite na direção de  $\psi$  e que possuem velocidades  $V_R$ .

Seja  $N$  o número de moléculas por unidade de volume que possuem velocidade térmica  $V_T$  deslocando-se na direção definida por  $\beta$  (AFONSO et al, 1985). Essas moléculas é que irão impactar com a superfície do satélite, transferindo momento linear para o mesmo; esta é a origem da força de arrasto.

O fluxo de partículas incidentes na direção de  $d\beta$  é proporcional a área delimitada por  $V_R \sin \beta d\beta$  e, cada partícula (de massa  $m$ ) possui um momento linear dado por  $mV_R \cos \psi$  ao longo da direção do movimento do satélite.

Então, de acordo com Afonso et al (1985) a força de arrasto será dada por;

$$f = \frac{1}{2} NmA \int_0^\pi V_R^2 \cos \psi \sin \beta d\beta \quad (4.17)$$

Com o auxílio das equações (4.14), (4.15) e (4.16), podemos escrever o integrando da equação (4.17) em função da velocidade relativa  $V_R$

$$f = \frac{1}{2} Nm A \int_{v_m}^{VM} \frac{V_R^2}{2V_T V_S^2} (V_T^2 - V_R^2 - V_S^2) dV \quad (4.18)$$

$$\text{Em que: } V_m = |V_T - V_S| \quad \text{e} \quad V_M = V_T + V_S$$

Para obtermos a aceleração de arrasto neutro , basta dividirmos a força de arrasto dada pela equação (4.18) pela massa  $M$  do satélite. Logo teremos:

$$= \frac{1}{2} Nm \frac{A}{M} \int_{v_m}^{VM} \frac{V_R^2}{2V_T V_S^2} (V_T^2 - V_R^2 - V_S^2) dV \quad (4.19)$$

Finalmente, estamos em condições de obter uma expressão para a aceleração de arrasto elétrico provocado pelas partículas carregadas (íons) que colidem com a superfície do satélite.

O raciocínio é análogo ao anterior, apenas acrescentando o parâmetro de impacto máximo  $b_m$  na equação (4.17), visto que agora a região de colisão dos íons com a superfície do satélite torna-se dependente do parâmetro  $\left(\frac{b_m}{R}\right)^2$ . Logo, para obtermos a força de arrasto elétrico, temos:

$$f_e = \frac{1}{2} Nm A \int_0^{\pi} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 V_R^2 \cos \psi \sin \psi d\psi \quad (4.20)$$

Do mesmo modo, podemos escrever o integrando da equação acima em função da velocidade relativa e dividindo pela massa do satélite teremos a aceleração de arrasto elétrico  $a_e$ :

$$a_e = \frac{1}{2} Nm \frac{A}{M} \int_{v_m}^{VM} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 \frac{V_R^2}{2V_T V_S^2} (V_T^2 - V_R^2 - V_S^2) dV \quad (4.21)$$

$$\text{Sendo: } \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 = 1 - \frac{\hat{e}U(R)}{\hat{E}} \text{ como visto na equação (4.11).}$$

É fácil ver comparando a equação (4.19) – arrasto neutro – com a equação (4.21) – arrasto elétrico – que elas diferem entre si apenas pelo fator  $1 - \frac{\hat{e}U(R)}{\hat{E}}$ ; ou seja:

$$e = \left(1 - \frac{\hat{e}U(R)}{\hat{E}}\right) \quad (4.22)$$

Perceba que se  $\left(\frac{b_m}{R}\right)^2 = 1$  a secção de choque será praticamente igual a área geométrica do satélite  $e$ , neste caso obtemos a equação (4.19); ou seja: a aceleração de arrasto elétrico aproxima-se da aceleração de arrasto neutro.

Para altitudes elevadas predomina-se a concentração de íons de hidrogênio ( $H^+$ ) seguidos de íons de hélio ( $He^+$ ) e oxigênio ( $O^+$ ). Essas concentrações variam com a altitude, com as condições térmicas do plasma e até mesmo com o tipo de interação entre a superfície do satélite e os íons que formam o plasma circundante ao satélite. A título de ilustração citemos Rubincam (1982), que para a altitude do satélite LAGEOS (aproximadamente 6000 km) adota os valores de  $2 \times 10^9$ ,  $2 \times 10^8$ ,  $2 \times 10^8$  partículas por  $m^3$  para as respectivas densidades das partículas acima citadas.

Um satélite não é um corpo perfeitamente absorvedor ou perfeitamente refletor das partículas que incide sobre sua superfície. Neste caso, a equação (4.21) deve conter um termo denominado coeficiente de acomodação  $\lambda$  (COOK, 1966), a fim de permitir situações intermediárias. Logo, a equação (4.21) torna-se:

$$e = \frac{1}{2} \lambda N m \frac{A}{M} \int_{v_m}^{v_M} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 \frac{V_R^2}{2V_T V_S^2} (V_T^2 - V_R^2 - V_S^2) dV \quad (4.23)$$

O coeficiente de acomodação leva em consideração o tipo de interação entre as partículas incidentes e a superfície do satélite, esta caracterizada pela sua composição química (tipo material de que é feita a sua superfície) e temperatura. De acordo com Afonso et al (1985), o coeficiente de acomodação pode variar entre  $\lambda = 1$  (para superfície perfeitamente absorvedora) até  $\lambda = 2$  (para superfície perfeitamente refletora – reflexão elástica).

No caso de reflexão inelástica, podemos obter o coeficiente de acomodação através da expressão (AFONSO et al, 1985):

$$\xi = 1 + \frac{4}{9}(1 - \sigma)^{1/2} \quad (4.24)$$

Sendo:  $\sigma = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}$ , em que  $\mu$  é a razão entre a massa atômica das partículas incidentes e a massa atômica do material de que é feito a superfície do satélite.

A tabela 1 indica o coeficiente de acomodação para algumas espécies, admitindo que o satélite seja esférico com superfície constituída de alumínio (massa atômica 27) e, assumindo um processo de reflexão difusa para um fluxo de moléculas livres incidentes na superfície do mesmo.

Tabela 1 – Coeficiente de acomodação (AFONSO et al, 1985).

Partículas	$\mu$	$\sigma$	$\xi$
Hidrogênio	0,037	0,138	1,4
Hélio	0,148	0,449	1,3
Oxigênio	0,593	0,955	1,1

A integral contida na equação (4.23) em geral não possui solução analítica simples, uma vez que a razão  $\left(\frac{b_m}{R}\right)^2$  é função da energia cinética das partículas incidentes e, esta depende de uma distribuição maxwelliana das velocidades térmicas. Então, devemos recorrer a procedimentos numéricos a fim de obtermos uma solução mais realística para a equação (4.23).

No presente trabalho, não vamos recorrer a métodos numéricos e sim adotarmos uma situação mais simples na qual consideremos um determinado fluxo de partículas livres (íons) todas com a mesma velocidade térmica (a certa temperatura

termodinâmica), conseqüentemente com a mesma energia cinética; logo, o parâmetro de impacto máximo torna-se constante uma vez que o potencial elétrico na superfície do satélite também é admitido constante. Neste caso, a solução da equação (4.23) ou o módulo da aceleração de arrasto elétrico será:

a) Se  $V_s < V_T$

$$e = \frac{1}{2} \xi Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 V_s^2 \left[ \frac{8}{3} \left( \frac{V_T}{V_s} \right) + \frac{8}{15} \left( \frac{V_s}{V_T} \right) \right] \quad (4.25)$$

b) Se  $V_s > V_T$

$$e = \frac{1}{2} \xi Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 V_s^2 \left[ 2 + \frac{4}{3} \left( \frac{V_T}{V_s} \right)^2 - \frac{2}{15} \left( \frac{V_T}{V_s} \right)^4 \right] \quad (4.26)$$

Sendo  $V_T$  dada por (ODO, 1992):

$$V_T = \left( \frac{2kT}{m_i} \right)^{1/2} \quad (4.27)$$

Nas regiões onde a velocidade do satélite é maior que a velocidade térmica das partículas carregadas (elétrons e íons) que constitui o plasma, devemos utilizar a equação (4.26); já para as regiões onde a velocidade do satélite é menor que a velocidade térmica dessas partículas constituinte do plasma, temos que utilizar a equação (4.25).

Para os casos extremos:

Se  $V_s \ll V_T$  a equação (4.25) reduz-se a:

$$e = \frac{1}{2} \xi Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left( \frac{8}{3} V_T V_s \right) \quad (4.28)$$

Se  $V_s \gg V_T$  equação (4.26) reduz-se a:

$$e = \frac{1}{2} N m \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 2V_s^2 \quad (4.29)$$

O coeficiente de arrasto da equação (4.12) é útil para baixas altitudes, onde a velocidade do satélite é bem maior que a velocidade das moléculas que constitui a atmosfera, esta na maioria das vezes considerada em repouso. Mas para o arrasto em altitudes elevadas, devido as moléculas se moverem com velocidades térmicas superiores à velocidade do satélite, é conveniente obtermos uma expressão para o coeficiente de arrasto em função da relação entre a velocidade térmica das partículas incidentes e a velocidade do satélite, a saber:

$$C_D = \left[ \frac{8}{3} \left( \frac{V_T}{V_S} \right) + \frac{8}{15} \left( \frac{V_S}{V_T} \right) \right] \quad \text{para } V_S < V_T \quad (4.30)$$

$$C_D = \left[ 2 + \frac{4}{3} \left( \frac{V_T}{V_S} \right)^2 - \frac{2}{15} \left( \frac{V_T}{V_S} \right)^4 \right] \quad \text{para } V_S > V_T \quad (4.31)$$

Tabela 2 – Coeficiente de arrasto neutro (AFOSO et al, 1985).

T (K)	H		He		O	
	$V_T/V_S$	$C_D$	$V_T/V_S$	$C_D$	$V_T/V_S$	$C_D$
800	0,72	3,71	0,36	2,82	0,18	2,25
1200	0,88	4,14	0,44	2,93	0,22	2,27
2000	1,14	4,90	0,57	3,15	0,29	2,32
5000	1,80	7,13	0,90	3,90	0,45	2,49
10000	2,54	9,79	1,28	4,97	0,64	2,77
15000	3,11	11,87	1,56	5,86	0,78	3,04

Na tabela 2 observamos alguns valores do coeficiente de arrasto neutro para três partículas diferentes em função da temperatura (coluna à esquerda) e da relação entre as velocidades.

Usando um pouco de extrapolação, podemos ver que para valores de temperatura inferior a 800 K e cuja relação  $V_T/V_S$  é pequena, o coeficiente de arrasto aproxima-se do valor  $C_D = 2,2$  comumente utilizado na equação (4.12); valor este utilizado para satélites que se movem na baixa atmosfera e cujo principal constituinte é o oxigênio. Mas para altitudes maiores, a medida que a relação  $V_T/V_S$  cresce e há predominância de moléculas leves – principalmente hidrogênio – o coeficiente de arrasto aumenta consideravelmente.

Em Rubincam (1982), encontramos valores para o coeficiente de arrasto devido as partículas carregadas (arrasto elétrico) em função da densidade dessas partículas na altitude do satélite LAGEOS (aproximadamente 6000 km) e cujo principal constituinte atmosférico é o hidrogênio.

Tabela 3 – Coeficiente de arrasto elétrico (RUBINCAM, 1982).

Partículas	Densidade ( $m^{-3}$ )	$C_{De}$
H <sup>+</sup>	$2 \times 10^9$	3,8
He <sup>+</sup>	$2 \times 10^8$	3,0
O <sup>+</sup>	$2 \times 10^8$	2,2

Na altitude do satélite LAGEOS onde predomina moléculas de hidrogênio e cuja temperatura varia entre 800 K – 1200 K, observa-se comparando as tabela 2 e 3 que os coeficientes de arrasto neutro e de arrasto elétrico são bem próximos.

É importante salientar que tanto os valores do coeficiente de acomodação quanto os valores do coeficiente de arrasto podem sofrer variações locais e temporais devido às condições atmosféricas entre outros fatores.

Um fator não considerado em nosso trabalho é o arrasto produzido pelas partículas carregadas que tem suas trajetórias desviadas pela superfície do satélite, mas que não se colidem com ele. Essas partículas trocam momento linear com o satélite provocando nele um arrasto denominado espalhamento, (AFONSO et al, 1985). Este arrasto segundo Odo (1992) é da ordem de um décimo do arrasto produzido por partículas que colidem com a superfície do satélite.

#### 4.5 VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Quando estamos trabalhando com forças de arrasto (quer seja o arrasto neutro ou quer seja o arrasto elétrico) é apropriado o uso de um sistema cujas direções são a normal a trajetória  $N$ , a tangente a trajetória  $T'$  e a normal ao plano orbital  $W$ .

As forças de arrasto que atuam sobre um satélite artificial em movimento ao redor da Terra tem a mesma direção do vetor velocidade do satélite (direção tangente à trajetória), porém sentido oposto, logo:  $f_e = -T'$ ; como não há componentes das forças de arrasto nas demais direções, então:  $N = W = 0$ .

Utilizando o sistema descrito acima e considerando regiões onde a velocidade térmica das partículas constituinte do plasma é maior que a velocidade do satélite ( $V_T > V_S$ ), a equação (4.25) torna-se:

$$e^{(T')} = -\frac{1}{2} \sum Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} (V_T V_S) + \frac{8}{15} \left( \frac{V_S^3}{V_T} \right) \right] \quad (4.32)$$

Substituindo a equação (4.32) nas equações de Lagrange na forma de Gauss (C.N.D.S., 1980), temos:

$$\frac{da}{dt} = -\sum \frac{Nm}{n^2 a} \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T V_S^2 + \frac{8}{15} \frac{V_S^4}{V_T} \right] \quad (4.33)$$

$$\text{Mas: } V_s^2 = \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (1 + 2e \cos \nu + e^2) \quad (\text{ROY, 1998}). \quad (4.34)$$

Expandindo  $\cos \nu$  em serie até a 2ª ordem da excentricidade, obtemos:

$$\cos \nu = \cos \theta + e(\cos 2\theta - 1) + \frac{9}{8}e^2(\cos 3\theta - \cos \theta) + O(e^3) \quad (4.35)$$

Substituindo a equação (4.35) na equação (4.34) e, após algumas reduções, obtemos:

$$V_s^2 = \frac{n^2 a^2}{1-e^2} [1 + 2e \cos \theta + e^2(2 \cos 2\theta - 1)] \quad (4.36)$$

Para o segundo termo do lado direito da Equação (4.33), temos:

$$V_s^4 = (V_s^2)^2 = \left( \frac{n^2 a^2}{1-e^2} \right)^2 [1 + 4e \cos \theta + 6e^2 \cos 2\theta] \quad (4.37)$$

Finalmente, substituindo as equações (4.36) e (4.37) na equação (4.33) e arrumando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -\frac{Nma}{1-e^2} \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 & \left\{ \frac{8}{3} V_T [1 + 2e \cos \theta + e^2(2 \cos 2\theta - 1)] + \right. \\ & \left. \frac{8}{15} \frac{1}{V_T} \left( \frac{n^2 a^2}{1-e^2} \right) [1 + 4e \cos \theta + 6e^2 \cos 2\theta] \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Analogamente para a excentricidade, temos:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{Nm}{M} \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \left( \frac{V_s^2}{V_T} \right) \right] (e + \cos \nu) \quad (4.39)$$

Aplicando a propriedade distributiva na equação (4.39), utilizando as equações (4.35) e (4.36) e após algumas reduções algébricas, encontramos:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{Nm}{M} \frac{A}{R} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left\{ \frac{8}{3} V_T \left[ \cos \omega + e \cos 2\omega + \frac{9}{8} e^2 (\cos 3\omega - \cos \omega) \right] + \frac{8}{15} \frac{1}{V_T} \left( \frac{n^2 a^2}{1-e^2} \right) \left[ \cos \omega + e(1 + 2 \cos 2\omega) + e^2 \left( 4 \cos \omega \cos 2\omega - \frac{17}{8} \cos \omega + \frac{9}{8} \cos 3\omega \right) \right] \right\}$$

A inclinação orbital e a longitude do nodo ascendente, não sofrem nenhuma variação devido às forças de arrasto, uma vez que essas forças não possuem componentes na direção perpendicular ao plano orbital. Então:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{r \cos(\omega + \nu)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} W = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + \nu)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin I} W = 0 \quad (4.42)$$

Para o argumento do perigeu temos:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{Nm}{eM} \frac{A}{R} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \left( \frac{V_S^2}{V_T} \right) \right] \sin \nu \quad (4.43)$$

Expandindo  $\sin \nu$  em serie até a 3ª ordem da excentricidade, obtemos:

$$\sin \nu = \sin \omega + e \cos \omega + \frac{e^2}{8} (9 \sin 3\omega - 7 \sin \omega) + e^3 \frac{4}{3} \sin 4\omega - \frac{7}{6} \sin 2\omega + O(e^4)$$

A variação na anomalia média será:

$$\frac{d\omega^*}{dt} = n + \delta \frac{Nm}{e} \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \left( \frac{V_s^2}{V_T} \right) \right] \left[ \text{sen} E' \frac{a}{r} (1-e^2) + e^2 \text{sen} E' \right] \quad (4.46)$$

$$\text{Utilizando: } \frac{a}{r} = \frac{\text{sen} \nu}{(1-e^2)^{1/2} \text{sen} E'} \quad (\text{ROY, 1998}).$$

Sendo  $E'$  a anomalia excêntrica, a equação (4.46) torna-se:

$$\frac{d\omega^*}{dt} = n + \delta Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \left( \frac{V_s^2}{V_T} \right) \right] \left[ \frac{\text{sen} \nu}{e} (1-e^2)^{1/2} + e \text{sen} E' \right] \quad (4.47)$$

Expandindo  $\text{sen} E'$  até a 2ª ordem da excentricidade, temos:

$$\text{sen} E' = \text{sen} \omega^* + \frac{e}{2} \text{sen} 2\omega^* + e^2 \left( \frac{3}{8} \text{sen} 3\omega^* - \frac{1}{8} \text{sen} \omega^* \right) + O(e^3) \quad (4.48)$$

Substituindo as equações (4.36) e (4.44) e (4.48) na equação (4.47), fazendo os respectivos produtos e após algumas reduções algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^*}{dt} = n + \delta Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \frac{8}{3} V_T \left\{ (1-e^2)^{1/2} \left[ \frac{\text{sen} \omega^*}{e} + \text{sen} 2\omega^* \right] \left( \frac{9}{8} \text{sen} 3\omega^* - \frac{7}{8} \text{sen} \omega^* \right) + \right. \\ \left. e^2 \left( \frac{4}{3} \text{sen} 4\omega^* - \frac{7}{6} \text{sen} 2\omega^* \right) \right] + e \text{sen} \omega^* \left[ \frac{e}{2} \text{sen} 2\omega^* \right] + \delta Nm \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \frac{8}{15} \frac{1}{V_T} \frac{n^2 a^2}{1-e^2} \\ \left\{ (1-e^2) \left[ \frac{\text{sen} \omega^*}{e} + \text{sen} 2\omega^* \right] \cos \omega^* \left[ \frac{9}{8} \text{sen} 3\omega^* + 2 \cos \omega^* \text{sen} 2\omega^* + 2 \cos 2\omega^* \text{sen} \omega^* - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{15}{8} \text{sen} \omega^* \right] + e^2 \left( \frac{4}{3} \text{sen} 4\omega^* + \frac{9}{4} \cos \omega^* \text{sen} 3\omega^* + 2 \cos 2\omega^* \text{sen} 2\omega^* - \frac{13}{6} \text{sen} 2\omega^* - \frac{7}{6} \cos \omega^* \text{sen} \omega^* \right) \right] + \\ \left. e \text{sen} \omega^* \left[ \frac{\text{sen} 2\omega^*}{2} + 2 \cos \omega^* \text{sen} \omega^* \right] \right\} \quad (4.49) \end{aligned}$$

#### 4.6 VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Mais uma vez como nos capítulos anteriores, concentremos nossa atenção nas variações seculares dos elementos orbitais. Analisando as equações (4.38), (4.40), (4.41), (4.42), (4.35) e (4.49), encontramos:

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{\text{sec}} = -\frac{3}{2} N m a \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \frac{1}{V_T} \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)^2} \right] \quad (4.50)$$

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\text{sec}} = -\frac{3}{2} N m a \frac{A}{M} \left( \frac{b_m}{R} \right)^2 \frac{8}{15} \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)} \frac{e}{V_T} \quad (4.51)$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{\text{sec}} = 0 \quad (4.52)$$

$$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}} = 0 \quad (4.53)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}} = 0 \quad (4.54)$$

$$\left. \frac{d\dot{\phi}}{dt} \right|_{\text{sec}} = n \quad (4.55)$$

## CAPÍTULO 5 ANÁLISE DAS VARIAÇÕES SECULARES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Nos capítulos anteriores, obtivemos as equações de variação dos elementos orbitais, em especial as chamadas variações seculares. Neste capítulo vamos fazer a integração dessas equações e as respectivas análises.

Vemos que as variações seculares no semi-eixo maior e na excentricidade são devidas apenas ao arrasto elétrico, uma vez que as perturbações de origem eletromagnéticas causam somente variações periódicas nesses elementos orbitais. Observamos também que a inclinação da órbita de um satélite artificial é o único dos três elementos orbitais métricos que não sofre variação secular pelas perturbações consideradas. Já a longitude do nodo ascendente e o argumento do perigeu sofrem variações seculares devido ao campo geomagnético e ao campo elétrico induzido; não sofrendo variação secular devido ao arrasto elétrico. Por fim a anomalia média é o único dos seis elementos orbitais que é influenciada por todas as três perturbações estudadas. Vejamos:

### a) semi-eixo maior

Utilizando as equações (2.40), (3.14) e (4.50):

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \frac{da}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{el}} + \frac{da}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{a.e}} \quad (5.1)$$

$$\frac{da}{dt} = 0 + 0 - \frac{8}{3} Nma \frac{A}{M} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \frac{1}{V_T} \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)^2} \right] \quad (5.2)$$

Integrando a equação (5.2), obtemos;

$$\Delta a = - \frac{8}{3} Nma \frac{A}{M} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 \left[ \frac{8}{3} V_T + \frac{8}{15} \frac{1}{V_T} \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)^2} \right] t \quad (5.3)$$

Observe que o semi-eixo maior tende a decrescer (variação negativa), ou seja, o satélite perde altitude; isto já era esperado, uma vez que o satélite tende a perder energia e conseqüentemente altitude em virtude do choque com as partículas elétricas presente na atmosfera.

### b) excentricidade

Das equações (2.41), (3.15) e (4.51), temos:

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \frac{de}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{el}} + \frac{de}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{a.e}} \quad (5.4)$$

$$\frac{de}{dt} = 0 + 0 - \delta Nma \frac{A}{M} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 \frac{8}{15} \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)} \frac{e}{V_T} \quad (5.5)$$

Integrando a equação (5.5), obtemos:

$$\Delta e = \left[ -\delta Nma \frac{A}{M} \left(\frac{b_m}{R}\right)^2 \frac{8}{15} \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)} \frac{e}{V_T} \right] t \quad (5.6)$$

A exemplo do semi-eixo maior, também a excentricidade orbital sofre decréscimo no seu valor a cada período de translação. A órbita do satélite tende a ser cada vez menos excêntrica, ou seja, a circularizar-se.

### c) inclinação

Utilizando as equações (2.42), (3.16) e (4.52), temos:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \frac{dI}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{el}} + \frac{dI}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{a.e}} \quad (5.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 + 0 + 0 \quad (5.8)$$

$$I_{\text{sec}} = cte \quad (5.9)$$

Como dissemos no início deste capítulo, a inclinação orbital é o único dos elementos orbitais que não sofre variação secular devido às três forças estudadas; no entanto ela é perturbada periodicamente pela força de Lorentz (força devido ao campo geomagnético e ao campo elétrico induzido). Podemos dizer que o plano orbital do satélite precessiona-se em relação ao plano de referência.

#### d) nodo ascendente

Partindo das equações (2.44), (3.17) e (4.53), encontramos:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \frac{d\Omega}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{el}} + \frac{d\Omega}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{a.e}} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{2Q}{MsenI} \sum_{=0}^{\infty} ( +1) \left(\frac{a_e}{a}\right)^{2 +3} X_0^{-(2 +3),0} g_{2 +1}^0 A_{2 +1}^{(-1)} - \\ &\frac{2Q\Omega^{\oplus} \cos I}{M.n(1 - e * e)^{1/2} senI} \sum_{=1}^{\infty} ( +1) \left(\frac{a_e}{a}\right)^{2 +3} X_0^{-(2 +1),0} g_{2 +1}^0 A_{2 +1}^{(-1)} + 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Novamente, integrando a equação (5.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \left[ \frac{2Q}{MsenI} \sum_{=0}^{\infty} ( +1) \left(\frac{a_e}{a}\right)^{2 +3} X_0^{-(2 +3),0} g_{2 +1}^0 A_{2 +1}^{(-1)} \right] t - \\ &\left[ \frac{2Q\Omega^{\oplus} \cos I}{M.n(1 - e * e)^{1/2} senI} \sum_{=0}^{\infty} ( +1) \left(\frac{a_e}{a}\right)^{2 +3} X_0^{-(2 +1),0} g_{2 +1}^0 A_{2 +1}^{(-1)} \right] t \end{aligned} \quad (5.12)$$

Observe que a longitude do nodo ascendente sofre uma precessão a cada volta completada. O sentido dessa precessão depende do valor da inclinação orbital.

#### e) argumento do perigeu

Das equações (2.45), (3.18) e (4.54):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \frac{d\omega}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{el}} + \frac{d\omega}{dt}\Big|_{\text{sec}}^{\text{a.e}} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} = & -\cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} - \frac{Q}{M} \sum_{=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} \cos I g_{2+1}^0 * \\
& \frac{(+1)(2+1)}{(4+3)} \left( \cdot \right) \left\{ \sum_{v=0}^{\min(k, +1)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} - \right. \\
& \left. \sum_{v=0}^{\min(k, \cdot)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} \right\} - \\
& \frac{2Q\Omega^{\oplus}}{M.n.e} (1-e*e)^{1/2} \sum_{=1}^{\infty} (+1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+1), 0} g_{2+1}^0 * \\
& \frac{2+1}{4+1} (A_{2+2}^{(0)} - A_2^{(0)}) - \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} + 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Integrando a equação (5.14), obtemos:

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \omega = & - \left[ \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} \right] t - \frac{Q}{M} \sum_{=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} \cos I g_{2+1}^0 * \\
& \frac{(+1)(2+1)}{(4+3)} \left( \cdot \right) \left\{ \sum_{v=0}^{\min(k, +1)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} - \right. \\
& \left. \sum_{v=0}^{\min(k, \cdot)} (-1)^v \frac{(3-\epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} \right\} t - \\
& \left[ \frac{2Q\Omega^{\oplus}}{M.n.e} (1-e*e)^{1/2} \sum_{=1}^{\infty} (+1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+1), 0} g_{2+1}^0 * \right. \\
& \left. \frac{2+1}{4+1} (A_{2+2}^{(0)} - A_2^{(0)}) - \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} \right] t
\end{aligned} \tag{5.15}$$

### f) anomalia média

Das equações (2.46), (3.19) e (4.55):

$$\frac{d\bullet^*}{dt} = \left. \frac{d\bullet^*}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \left. \frac{d\bullet^*}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} + \left. \frac{d\bullet^*}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{a.e}} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} &= n + (1 - e^2 e)^{1/2} \left\{ \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} \right\} - \\
&\frac{4Q}{M} (1 - e^2 e) \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} \cos I g_{2+1}^0 \frac{(v+1)(2+v) - (v)}{(4+v)} e^v \\
&\left\{ \sum_{v=0}^{\min(k, v+1)} (-1)^v \frac{(3 - \epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} - \sum_{v=0}^{\min(k, v)} (-1)^v \frac{(3 - \epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} \right\} + \\
&n + \frac{2Q\Omega^{\oplus}}{M.n} \sum_{v=1}^{\infty} (v+1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+v), 0} g_{2+1}^0 \frac{2+v}{4+v} e^v \\
&(A_{2+2}^{(0)} - A_2^{(0)}) - \cos I \cdot (1 - e^2 e)^{1/2} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} - (1 - e^2 e)^{1/2} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} + n
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Novamente, integrando (5.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
\phi^{\text{el}} &= nt + (1 - e^2 e)^{1/2} \left\{ \cos I \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} + \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{mag}} \right\} t - \\
&\frac{4Q}{M} (1 - e^2 e) \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} \cos I g_{2+1}^0 \frac{(v+1)(2+v) - (v)}{(4+v)} e^v \\
&\left\{ \sum_{v=0}^{\min(k, v+1)} (-1)^v \frac{(3 - \epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} - \sum_{v=0}^{\min(k, v)} (-1)^v \frac{(3 - \epsilon_v)}{2^{2k}} \binom{2k}{k-v} A_{2+2}^{2v, 2k} \right\} t + \\
&\left[ \frac{2Q\Omega^{\oplus}}{M.n} \sum_{v=1}^{\infty} (v+1) \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2+3} X_0^{-(2+v), 0} g_{2+1}^0 \frac{2+v}{4+v} e^v \right. \\
&\left. (A_{2+2}^{(0)} - A_2^{(0)}) - \cos I \cdot (1 - e^2 e)^{1/2} \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} - (1 - e^2 e)^{1/2} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sec}}^{\text{el}} \right] t
\end{aligned} \tag{5.18}$$

A exemplo do nodo ascendente, também o argumento do perigeu e a anomalia média sofrem precessão a cada período de translação, cujo sentido depende do valor da inclinação.

## CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES

No presente trabalho, procuramos estudar as perturbações que surgem no movimento orbital de satélites artificiais causadas pelo campo magnético da Terra, pelo campo elétrico induzido e pelo deslocamento do satélite em um meio ionizado (arrasto elétrico).

Na primeira parte começamos por fazer um estudo bibliográfico dos principais trabalhos relativos a ambas as perturbações e vimos que os principais obstáculos em obtermos resultados precisos para as perturbações estudadas residem no fato de termos dificuldades em obter uma densidade realística para as partículas elétricas na alta atmosfera (visto que tal concentração varia com a altitude, temperatura entre outros fatores), o valor da carga elétrica adquirida pela superfície do satélite (no caso das perturbações eletromagnéticas) e seu respectivo potencial elétrico (perturbação devido ao arrasto elétrico).

Caracterizamos cada uma dessas perturbações em separado (embora essas perturbações estejam muito próximas, visto que ambas dependem da carga elétrica e conseqüentemente do potencial elétrico adquirido pela superfície do satélite). Obtemos uma expressão para a aceleração perturbadora em função dos elementos orbitais (perturbação devido à força magnética) e em função do parâmetro de impacto e das velocidades térmicas das partículas incidentes (perturbação causada pelo arrasto elétrico); escrevemos as respectivas equações de variação dos elementos orbitais para ambas as perturbações e dedicamos especial atenção às perturbações seculares, as quais foram integradas e analisadas.

Para satélites cujas órbitas estão situadas a baixas altitudes a ordem de grandeza dessas perturbações são pequenas comparadas a outros tipos de perturbações gravitacionais (por exemplo, a distribuição não homogênea da massa da Terra) ou não gravitacionais (arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, entre outras) sendo até mesmo desprezadas. Porém para satélites orbitando a médias e principalmente a altas

altitudes, essas perturbações não podem ser desprezadas se desejarmos obter uma órbita cada vez mais precisa para tais satélites.

Os resultados obtidos indicam que, com exceção da inclinação, todos os demais elementos orbitais apresentam variação secular devidas às perturbações consideradas. Todos os elementos sofrem perturbações periódicas

As perturbações originadas do campo magnético terrestre e do campo elétrico induzido não provocam variação secular no semi-eixo maior e na excentricidade orbital de um satélite artificial; causando variações seculares somente nas variáveis angulares. O sentido da precessão desses elementos depende do valor da inclinação do satélite.

A grandes altitudes, a concentração de partículas carregadas especialmente íons  $H^+$  é considerável o que faz com que o arrasto devido a essas partículas (arrasto elétrico) provoque mudanças seculares em alguns dos elementos orbitais do satélite, principalmente no semi-eixo maior e na excentricidade, que diminuem, fazendo com que a órbita do satélite circularize.

Esses resultados são importantes para análise de missões espaciais envolvendo satélites que orbitam a grandes altitudes. Como foi observado, as perturbações consideradas são pequenas; mas podem ser úteis no estudo da evolução dos elementos orbitais durante um longo período de observação.

Importante salientar que no presente trabalho, desprezamos possíveis correções relativísticas para o campo geomagnético, uma vez que segundo Vokrouhlický (1989) tais correções são muito pequenas, da ordem de  $10^{-9}$  em primeira ordem de aproximação.

Desprezamos também (como vimos no início do capítulo 2), a existência de correntes elétricas na atmosfera terrestre. Essas correntes certamente contribuem para a intensidade do campo magnético. Porém, no presente trabalho não consideramos tais correntes.

Para trabalhos subseqüentes, apresentamos algumas sugestões que achamos interessantes serem estudadas, tais como:

Análise dos termos de curto período incluindo acoplamento de todas as três perturbações consideradas;

Influência das perturbações eletromagnéticas e do arrasto elétrico no movimento rotacional de satélites artificiais;

Estudos de acoplamento dos feitos: efeito Yarkovsky, efeito Poynting-Robertson, pressão de radiação solar direta, entre outros, no movimento translacional de satélites artificiais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFONSO, G. B.; BARLIER, F.; BERGER, C.; MINARD, F.; WALCH, J. J. Reassessment of the charge and neutral drag of Lageos and its geophysical implications. **Journal of Geophysical Research**, v.90, n. B11, p.9381-9398, 1985.

AL'PERT, Y. L. **Waves and satellites in the near-earth plasma**. New York: Consultants Bureau, 1974. 47p.

ANDERSON, P.C.; HANSON, W. B.; COLEY, W. R.; HOEGY, W. R. Spacegraf potential effects on the dynamics explorer 2 satellite. **Journal of Geophysical Research**, v.99, n.A3, p.3985-3997, 1994.

CAPDEROU, M. **Satellites orbites et missions**. Paris:Springer-Verlag, 2003. 486p.

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES SPATIALES, **Le mouvement du véhicule spatial en orbite**. 1980. 1019p.

CHANG, H. H. C.; SMITH, M. C. Electrical drag. **J. Brit. Laterplan. Soc.**, v.17, 1959.

CIUFOLINI, I.; CHIEPPA, F.; LUCCHESI, D.; VESP, F. Teste of Lense-Thirring orbital shift due to spin. **Class. Quantum Grav.**, v.14, p.2701-2726, 1997.

CIUFOLINI, I. The Lageos Lense-Thirring precession and the Lageos non-gravitational nodal perturbations-I. **Celestial Mechanics**, v.40, p.19-33, 1987.

COOK, G. E. Drag coefficients of spherical satellites. **Ann. Geophys**, v. 22, p. 53-64, 1966.

DANJON, A. **Astronomie générale**. Paris: J. & R. Sennac, 1952. 446p.

EL-SALAM; F. A. ABD; SEHNAL, L. A second order analytical atmospheric drag theory based on the TD 88 thermospheric density model. **Celestial Mechanics**, v.90, p.361-389, 2004.

FAIN, W. W.; GREER, B. J. Electrically charged bodies moving in the earth's magnetic field. **A R S Journ.**, v.29, p.451- 453, 1959.

GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. 2. ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1981. 672p.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1989. 532p.

KAULA, W. M. **Theory of satellite geodesy**. Waltham:Blaisdell, 1966. 123p.

ODO, G. Y. **Forças de arrasto em satélites artificiais**. 1992. 88 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1992.

OSÓRIO, J. P. **Perturbações de órbitas de satélites no estudo do campo gravitacional terrestre**. Porto: Imprensa Portuguesa, 1973. 126p.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J. CHRISTY, R. W. **Foundations of electromagnetic theory**, 2nd. ed., Addison-Wesley, Reading, mass., 1967.

ROY, A. E. **Orbital motion**. 3. ed. Institute of Physics, Bristol and Philadelphia, 1998. 532p.

RUBINCAM, D. P. On the secular decrease in the semimajor axis of lagesos's orbit. **Celestial Mechanics**, v.26, p.361-382, 1982.

SEHNAL, L. The motion of a charge satellite in the earth's magnetic field. **Smithsonian Astrophysical Observatory**, n.271, 1969.

VILHENA DE MORAES, R. Non-gravitational disturbing forces. **Adv. Space Res.** v.14, n.5, p.545-568, 1994.

VOKROUHLICKÝ, D. Lorentz force perturbations of the orbit of an electrically charged satellite - case of varying charge. **Bull. Astron. Inst. Czechoslovak**, v.41, p.205-211, 1990.

VOKROUHLICKÝ, D. The geomagnetic effects on the motion of an electrically charged artificial satellite. **Celestial Mechanics**, v.46, p.85-104, 1989.

WERTZ, J. R. **Spacecraft attitude determination and control**. London: Reidez, 1978. 858p.

WESTERMAN, H. R. Perturbation approach to effect of geomagnetic field on a charged satellite. **A R S Journ.**, v.30, p.204, 1960.

ZANARDI, M. C.; QUIRELLI, I. M. P.; KUGA, H. K. Analytical attitude prediction of spin stabilized spacecrafts perturbed by magnetic residual torque. **Advances in Space Research**, v.36, p.460-465, 2005

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ASSIS, S. C. **Propagação da atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação: torque residual médio com modelo de quadripolo para o campo magnético.** 2004. 233 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2004.

BITTENCOURT, J. H. **Fundamentals of plasma physics.** 2. ed. sem casa publicadora (S.C.P.), 1995. 676p.

HUGHES, S. The computation of tables of Hansen coefficients. **Celestial Mechanics**, v. 29, p.101-107, 1981.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics.** Cambridge: University Press, 1999. 592p.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)