Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre Equações Elípticas Semilineares com Condições Locais do tipo Sublinear e Superlinear

por

Paulo Xavier Pamplona

Sob orientação de

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

e co-orientação de

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Fevereiro de 2005

Sobre Equações Elípticas Semilineares com Condições Locais do tipo Sublinear e Superlinear

por

Paulo Xavier Pamplona

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação de Matemática da Universidade Federal da Paraíba Como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB

Prof. Dr. Pablo Braz e Silva - UFPE (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
CCEN-Departamento de Matemática
Curso de Pós-Graduação de Matemática

Dedico este título à minha família que é o motivo maior de minha existência e de minha perseverança.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, que é o Ser maior;
- À minha família, que foi fundamental na realização deste sonho;
- Ao meu irmão Francisco que, mesmo distante, esteve presente em todos os momentos;
- À UFPB, pela oportunidade que tive de realizar este curso;
- Ao meu orientador Everaldo Medeiros, por suas orientações precisas;
- Ao meu co-orientador João Marcos, pelo apoio nos momentos difíceis;
- A Aldo Maciel e Osmundo Alves, meus ex-professores da Graduação, pelo incentivo;
- À Suely Brito e Fátima Figueiredo, minhas ex-professoras do Ensino Médio, que ainda hoje, as considero minhas professoras;
- A todos os meus ex-professores, que de uma forma ou de outra, contribuíram para minha formação e consolidação deste título;
- A todos aqueles que acreditaram em mim e se alegraram com esta conquista. Aqueles que mesmo distante, estavam sempre presentes nas horas mais difíceis;
- A todos aqueles que estiveram prontos para ajudar quando necessário;

RESUMO

Neste trabalho, a noção usual de superlinearidade e sublinearidade para problemas semilineares do tipo $-\Delta s = f(x,s)$ e $\Delta^2 s + c\Delta s = f(x,s)$ são dados localmente e estendidos para não-linearidade indefinidas. Aqui, a não-linearidade $f(x,s)$ possui sinal indefinido ou se anula próximo de zero ou do infinito.

ABSTRACT

In this work, the usual notions of superlinearity and sublinearity for semilinear problems like $-\Delta s = f(x,s)$ and $\Delta^2 s + c\Delta s = f(x,s)$ are given a local form and extended to indefinite nonlinearities. Here $f(x,s)$ is allowed to change sign or to vanish for s near zero as well as for s near infinity.

Conteúdo

Notações

Neste trabalho, usaremos as seguintes notações:

$x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathsf{R}^N$.

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, gradiente de u.

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i} = \mathrm{div}(\nabla \mathrm{u})$, laplaciano de u.

$\Delta^2 = \Delta(\Delta u)$, biharmônico de u.

η, vetor normal unitário exterior à Ω.

$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \partial_\eta u = \eta \cdot \nabla u$, derivada normal exterior.

$\Omega \subset \mathsf{R}^N$, aberto.

$\partial\Omega$, fronteira de Ω.

$\overline{\Omega}$, fecho do conjunto Ω.

$C_0(\Omega)$, conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω.

$C^k(\Omega)$, conjunto das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre $\Omega (k \in \mathsf{Z}^+)$.

$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geq 0} C^k(\Omega)$.

$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

$C(\overline{\Omega})$, conjunto das funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$.

$W^{k,p}(\Omega)$, espaço de Sobolev com norma $||.||_{W^{k,p}(\Omega)}$ definida por

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^p dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \Big)^{1/p},$$

onde

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_N} x_N}, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathsf{N}^N, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$$

é a derivada fraca de ordem $|\alpha|$ da função u.

$W_0^{k,p}(\Omega)$, fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ com norma $||.||$ definida por

$$||u|| := \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

p , expoente conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p \ = 1$.

$W_0^{-1,p'}(\Omega)$, espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ com norma $||.||_{W_0^{-1,p'}(\Omega)}$ definida por

$$||g||_{W_0^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{||x|| \leq 1} |g(x)|.$$

$H^{-1}(\Omega) = W_0^{-1,2}(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$, espaço de Lebesgue com norma $||.||_p$ definida por

$$||u||_p = ||u||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^p dx \Big)^{1/p}.$$

q.t.p., quase em toda parte (propriedade válida a menos de um conjunto de medida nula).

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathsf{R}$ mensurável tal que existe C satisfazendo $|u(x)| \leq C$ q.t.p. em $\Omega\}$.

$< .,. >$, produto interno.

$|.|$, norma em $\mathsf{R}^N, N \geq 1$.

p , expoente crítico de Sobolev para a imersão $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, definido por

$$p \ = Np/(N-kp) \quad \text{se } kp < N \quad \text{e} \quad p \ = \infty \quad \text{se} \quad kp \geq N.$$

2 , expoente crítico de Sobolev para a imersão $W^{2,\ 2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, definido por

$$2 \ = 2N/(N-4) \quad \text{se} \quad N > 4 \quad \text{e} \quad 2 \ = \infty \quad \text{se} \quad N \leq 4.$$

$\lambda_1(\Omega)$, primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, cuja caracterização variacional é dada por:

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{||u||=0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}.$$

$(\lambda_k(\Omega))_{k\geq 1}$, seqüência de autovalores do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ $(\lambda_k(\Omega) \to +\infty)$.

u_1, autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(\Omega)$, isto é,

$$-\Delta u_1 = \lambda_1(\Omega) u_1 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad u_1 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

S, a melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{21}$

Introdução

Neste trabalho, vamos estudar duas classes de problemas elípticos semilineares com condições locais do tipo sublinear e superlinear. Mais especificamente, estudaremos os seguintes problemas:

Problema 1:
Sob algumas condições na não-linearidade $f(x,s)$, vamos estabelecer resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico semilinear envolvendo o operador laplaciano,

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -\Delta u & = & f(x,u) & & \text{em} \quad \Omega, \\ u & \geq & 0, & u \not\equiv 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio limitado e $f : \Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ é uma função de Carathéodory (c.f. Capítulo 2).

Problema 2:
Estudaremos também a multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico semilinear envolvendo o operador biharmônico:

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} \Delta^2 u & + & c\Delta u & = & g(x,u) & & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & \Delta u & = & 0 & & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio limitado, $c \in \mathsf{R}$ ($c < \lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor associado ao operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$) e $g : \Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo certas condições adicionais. Aqui, o símbolo Δ^2 representa o operador biharmônico, isto é, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ (c.f. Capítulo 3).

Problemas elípticos semilineares do tipo (1) tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores nos últimos anos. Em [2], Ambrosetti-Rabinowitz estudaram o problema (1) com uma não-linearidade satisfazendo uma condição do tipo: existem $s_0 > 0$ e $\mu > 2$ tais que:

$$0 < \mu F(x,s) \leq f(x,s)s, \quad \text{para} \;\; (x,s) \in \Omega \times [s_0, +\infty). \tag{3}$$

Esta é uma condição global denominada condição de superquadraticidade de Ambrosetti-Rabinowitz. Observamos que esta condição só é válida para $F(x,s)$ com sinal positivo.

Em [11], Djairo-Lions estudaram o problema (1) com uma não-linearidade $f(x,s)$ positiva, sublinear na origem, isto é, existem $\alpha > \lambda_1(\Omega)$ e $s_0 > 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \alpha s, \quad \text{para} \;\; (x,s) \in \Omega \times [0, s_0], \tag{4}$$

e superlinear no infinito, isto é, existem $\beta > \lambda_1(\Omega)$ e $s_1 \geq 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \beta s, \quad \text{para} \quad (x,s) \in \Omega \times [s_1, +\infty). \tag{5}$$

Eles mostraram existência de pelo menos duas soluções a partir da existência de uma super-solução estrita. Em [10], Djairo-Gossez-Ubilla estudaram o problema (1) com não-linearidades de sinal indefinido sob condições locais do tipo sublinear e superlinear. A diferença entre os trabalhos [11] e [10] é que em [11], obtém-se multiplicidade de soluções para uma não-linearidade positiva sob condições globais e o sinal das soluções não é questionado, já em [10], deseja-se encontrar soluções não-negativas para uma não-linearidade com sinal indefinido sob condições locais. Um exemplo de uma não-linearidade estudada em [10] é $f(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p$, onde $\lambda > 0, 0 \geq q < 1 < p < 2 \quad - 1$ e a, b são definidos em subconjuntos de Ω. Notamos que quando $a(x) \equiv 1$ e $b(x) \equiv 1$, recaímos num problema estudado em [1] por Ambrosetti-Brézis-Cerami. Mais especificamente, o problema (1) foi estudado em [1] por Ambrosetti-Brézis-Cerami quando $f(x,s) = \lambda s^q + s^p$, com $\lambda > 0$. Eles mostraram a existência de uma solução se $0 < q < 1 < p < +\infty$ e de duas soluções se $0 < q < 1 < p < 2 \quad - 1$. Além disso, mostraram que existe $0 < \Lambda < \infty$ tal que o problema (1) tem pelo menos duas soluções se $0 < \lambda < \Lambda$, tem pelo menos uma solução se $\lambda = \Lambda$ e não tem solução se $\lambda > \Lambda$.

Em [7], Costa-Magalhães estudaram o problema (1) com uma não-linearidade $f(x,s)$ sob condições de crescimento subcrítico, isto é, existem $c, d \geq 0$ e $0 < \sigma < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3(0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2)$, tais que

$$|f(x,s)| \leq c|s|^\sigma + d,$$

sem a hipótese de superquadráticidade no infinito. Eles mostraram a existência de uma solução não-trivial, usando técnicas variacionais.

O problema (1) tem sido bastante estudado sob a condição (3). Estudar este problema sob condições locais requer um pouco mais de sutileza e nenhum trabalho ainda tinha sido feito nesta direção até o trabalho de Djairo-Gossez-Ubilla [10] em 2003. Baseado neste artigo, estudaremos o problema (1) sob um tipo de **condição local** análoga à condição clássica de sublinearidade na origem e superlinearidade no infinito. Estudaremos o problema sublinear clássico onde essencialmente nenhuma condição de crescimento é assumido no infinito. A principal dificuldade apresentada neste trabalho, é o fato da não-linearidade ter sinal indefinido, acarretando assim uma dificuldade na prova da condição de Palais-Smale.

Em [16], o problema (1) foi estendido por Xu-Zhang para um operador mais geral, a saber, o operador biharmônico. Mais precisamente, Xu-Zhang estudaram o problema (2) com condições análogas às estudadas em [10] por Djairo-Gossez-Ubilla.

Casos particulares do problema (2) foram estudados por vários pesquisadores quando a não-linearidade era do tipo $f(x,s) = b[(s+1)^+ - 1]$ e $c < \lambda_1(\Omega)$ com condições globais sob $f(x,s)$. Por exemplo, em [15], Tarantello encontrou uma solução negativa para (2) quando $b \geq \lambda_1(\Omega)(\lambda_1(\Omega)-c)$, usando teoria do grau. Em [3], Lazer-McKenna mostraram existência de $2k-1$ soluções quando $\Omega \subset \mathsf{R}$ é um intervalo e $b > \lambda_k(\Omega)(\lambda_k(\Omega)-c)$, usando o método de bifurcação global. Em [4], Micheletti-Pistoia mostraram,usando métodos variacionais, existência de duas soluções quando $b > \lambda_k(\Omega)(\lambda_k(\Omega)-c)$ e de três soluções quando b está próximo de $\lambda_k(\Omega)(\lambda_k(\Omega)-c)$ para uma não-linearidade mais geral. Em [19], Zhang mostra existência de soluções fracas quando $f(x,s)$ é sublinear no infinito, usando métodos variacionais.

Nossa proposta é estudar o problema (2) quando $f(x,s)$ satisfaz condições locais do tipo sublinear e superlinear usando técnicas variacionais. Para o estudo do problema (2), usaremos o artigo [16] devido a Xu-Zhang. Estamos interessados em estudar apenas o caso em que a não-linearidade $f(x,s)$ possui crescimento subcrítico, além disso, não estamos interessados em saber o sinal das soluções encontradas.

Nosso trabalho está escrito como segue:

• **Capítulo 1**. Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados básicos utilizados ao longo deste trabalho. Parte destes resultados serão demonstrados, e para os demais, referimos ao leitor a bibliografia correspondente.

• **Capítulo 2**. Aqui, estudaremos multiplicidade, não-existência e existência de soluções para o problema (1) com a não-linearidade $f(x,s)$ sob condições de crescimento do tipo subcrítico, crítico e supercrítico, respectivamente. Dividiremos o capítulo em três resultados como descrevemos a seguir:

O resultado de multiplicidade de soluções para o poblema (1) é o primeiro a ser obtido. Para tanto, consideraremos a não-linearidade $f(x,s)$ sob condições de crescimento subcrítico. Para obtermos este resultado usaremos técnicas variacionais, mais precisamente, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obtermos a primeira solução e, um resultado de minimização para obtermos uma segunda solução.

O segundo resultado obtido neste capítulo, é a não-existência de soluções para o problema (1). Para isto, vamos considerar a não-linearidade sob condições de crescimento crítico e, usaremos alguns resultados de regularidade e princípios de máximo.

Finalmente, a existência de soluções para o problema (1) é obtida quando a não-linearidade tem crescimento supercrítico. As técnicas utilizadas para obtermos esta solução é o método de sub e super soluções.

• **Capítulo 3**. Neste capítulo estudaremos um problema de quarta ordem semilinear, isto é, o problema (2). Consideraremos apenas o caso em que a não-linearidade $f(x,s)$ possui crescimento subcrítico. Neste caso, obteremos um resultado de multiplicidade de soluções. Utilizaremos as mesmas técnicas utilizadas para o caso subcrítico do Capítulo 2.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho. Desta forma, não demonstraremos todos os resultados enunciados e, sempre que possível, citaremos as referências onde eles podem ser encontrados.

1.1 Resultados Básicos

Descreveremos a seguir alguns resultados que dizem respeito aos métodos que utilizamos para encontrar soluções de problemas elípticos. Estes resultados serão usados no decorrer deste trabalho.

Definição 1.1 *Seja u uma função de classe $C^2(\Omega)$. O laplaciano de u, denotado por Δu, é o operador diferencial definido por*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \mathrm{div}(\nabla \mathrm{u}). \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 (**Identidade de Green**, *c.f [24]*) *Seja $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, onde Ω é um domínio Lipschitz limitado. Então*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_{\Omega} (\Delta u) v$$

onde η é o vetor normal exterior à Ω e $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta$ na integral sobre $\partial\Omega$ é vista no sentido dos traços.

Teorema 1.2 (**Teorema da Representação de Riesz**, *c.f [17]*) *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $\varphi \in H$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$\varphi(v) = < u, v >, \ \forall \ v \in \ H.$$

Além disso,

$$||u||_H = ||\varphi||_{H'}.$$

Teorema 1.3 (**Kakutani**, *c.f [17]*) *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se,*

$$B_E = \{x \in E;\ ||x|| \leq\ 1\}$$

é compacta na topologia fraca.

Teorema 1.4 (**Desigualdade de Young**, *c.f [17]*) *Sejam $1 < p, q < \infty$, $1/p+1/q = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a,\ b\ >\ 0). \tag{1.2}$$

Teorema 1.5 (**Desigualdade de Hölder**, *c.f [17]*) *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p+1/q = 1$. Então, se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, temos $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq ||u||_p ||v||_q. \tag{1.3}$$

Teorema 1.6 (**Convergência Dominada de Lebesgue**, *c.f [23]*) *Sejam (f_n) uma seqüência de funções integráveis e f uma função mensurável tais que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(ii) *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, temos*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p.\ em \quad \Omega.$$

Então,

$$f \in L^1(\Omega) \qquad e \qquad ||f_n - f||_1 \to\ 0.$$

Teorema 1.7 (*c.f[17]*) *Sejam (f_n) uma seqüência de funções em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $||f_n - f||_p \to 0$. Então existem, uma subseqüência (f_{n_j}) e $g \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(ii) $|f_{n_j}(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em Ω para todo j.*

Teorema 1.8 (**Fubini**, *c.f [17]*) *Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad e \qquad \Big(\int_{\Omega_2} F(x, y) dy\Big) \in L^1_x(\Omega_1)$$

De forma análoga, para todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad e \qquad \Big(\int_{\Omega_1} F(x, y) dx\Big) \in L^1_y(\Omega_2)$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

1.2 Espaços de Sobolev

Teorema 1.9 (**Desigualdade de Poincaré**, *c.f [17]*) *Seja $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ aberto e limitado em alguma direção. Então existe uma constante C tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$||u||_p \leq C||\nabla u||_p.$$

Vejamos agora os teoremas fundamentais de imersões que utilizaremos neste trabalho. Lembramos que $p \; = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev.

Teorema 1.10 (**Imersões Contínuas**, *c.f [17]*) *Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{m,p}(\mathsf{R}^N) \subset L^q(\mathsf{R}^N)$, *se* $1/p - m/N > 0$, *com* $1/q = 1/p - m/N$,

(ii) $W^{m,p}(\mathsf{R}^N) \subset L^q(\mathsf{R}^N)$, *se* $1/p - m/N = 0$, $\forall\; q \in [p, +\infty[$,

(iii) $W^{m,p}(\mathsf{R}^N) \subset L^\infty(\mathsf{R}^N)$, *se* $1/p - m/N < 0$.

Como conseqüência imediata, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.1 (*c.f [17]*) *Seja $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ um aberto e limitado de classe C^1. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, *se* $1 \leq p < N$,

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *se* $p = N$, $\forall\; q \in [p, +\infty[$,

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, *se* $p > N$.

Teorema 1.11 (**Gagliardo-Nirenberg-Sobolev**, *c.f [17]*) *Seja $1 \leq p < N$, então*

$$W^{1,p}(\mathsf{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathsf{R}^N).$$

Além disso, existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\; u \in W^{1,p}(\mathsf{R}^N).$$

Como conseqüência deste teorema e da desigualdade de interpolação, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2 (*c.f [17]*) *Seja $1 \leq p < N$, então a imersão*

$$W^{1,p}(\mathsf{R}^N) \subset L^q(\mathsf{R}^N), \quad \forall\; q \in [p, p\;]$$

é contínua.

Teorema 1.12 (**Imersões Compactas-Rellich-Kondrachov**, *c.f [17]*) *Seja Ω limitado de classe C^1. Então, as seguintes imersões são compactas:*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *se* $p < N$, $\forall\; q \in [1, p\;[$ *com* $1/p \; = 1/p - 1/N$,

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *se* $p = N$, $\forall\; q \in [1, +\infty[$,

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, *se* $p > N$.

1.3 Resultados de Minimização

De uma maneira informal, um problema de minimização básico que se gostaria de resolver é o seguinte: Dados um funcional $\Phi : E \to \mathsf{R}$ em um espaço de Banach E e um subconjunto fechado e convexo K no qual ϕ é limitado inferiormente, encontrar $u_0 \in E$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{u \quad K} \Phi(u).$$

Naturalmente, da maneira que está formulado, o problema é muito geral e, assim, devemos tomar cuidado e fazer algumas hipóteses adicionais adequadas. Vejamos a seguir, algumas definições e teoremas sobre o problema anterior.

Definição 1.2 *Dizemos que um funcional* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *é semicontínuo inferiormente se* $\Phi^{-1}(a, \infty) = \{x \in E; \Phi(x) > a\}$ *é aberto em* E*, na topologia da norma, para todo* $a \in \mathsf{R}$*. Dizemos que* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *é fracamente semicontínuo inferiormente se é semicontínuo inferiormente, considerando* E *com sua topologia fraca.*

Definição 1.3 *Dizemos que* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *é coercivo se*

$$\Phi(u) \to \infty \qquad \textit{quando} \qquad ||u|| \to \infty.$$

Teorema 1.13 (*c.f [5]*) *Um funcional* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *é semicontínuo inferiormente se, e somente se,*

$$\lim_{n \to \infty} \inf \Phi(u_n) \geq \Phi(u_0) \quad \textit{sempre que} \quad u_n \to u_0.$$

Teorema 1.14 (*c.f [17]*) *Seja* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *um funcional convexo em um espaço de Banach reflexivo* E*. Então* Φ *é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Teorema 1.15 (*c.f [17]*) *Seja* E *um espaço de Banach reflexivo e* (u_n) *uma seqüência limitada em* E*. Então existe uma subseqüência* (u_{n_j}) *com* $u_{n_j} \rightharpoonup u_0$ *em* E*.*

Teorema 1.16 (*c.f [5]*) *Seja* E *um espaço topológico compacto e seja* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *um funcional semicontínuo inferiormente. Então* Φ *é limitado inferiormente e existe* $u_0 \in E$ *tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_E \Phi.$$

Como conseqüência, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.17 (*c.f [5]*) *Seja* E *um espaço de Hilbert (ou um espaço de Banach reflexivo) e suponhamos que um funcional* $\Phi : E \to \mathsf{R}$ *seja fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo. Então* Φ *é limitado inferiormente e existe* $u_0 \in E$ *tal que*

$$\Phi(u_0) = \inf_E \Phi.$$

Prova: Sendo Φ coercivo, para todo $M > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) > M, \quad \text{se } ||u|| > R.$$

Escolhendo

$$M > \Phi(0), \tag{1.4}$$

podemos considerar $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) > \Phi(0), \quad \text{se}||u|| > R.$$

Desde que E é reflexivo, a bola fechada $B_R[0]$ é fracamente compacta. Além disso, da hipótese de Φ ser fracamente semicontínuo inferiormente, segue que

$$\Phi : B_R[0] \to \mathsf{R}$$

é fracamente semicontínuo inferiormente
Logo, pelo Teorema 1.16, Φ é limitado inferiormente em $B_R[0]$ e existe $u_0 \in B_R[0]$ com

$$\Phi(u_0) = \inf_{B_R[0]} \Phi.$$

Portanto, de (1.4)

$$\Phi(u_0) = \inf_{E} \Phi.$$

■

1.4 O Passo da Montanha

Informalmente falando, a idéia básica por trás do chamado método minimax é a seguinte: Dado um funcional $\Phi \in C^1(E, \mathsf{R})$, tentar obter valores críticos como *valores de minimax* do tipo:

$$c = \inf_{A \quad M} \sup_{u \quad A} \Phi(u),$$

sobre uma classe adequada M.

Nesta seção vamos apresentar uma primeira ilustração do método minimax, o qual tem provado ser uma ferramenta poderosa na abordagem de muitos problemas não lineares em equações diferenciais, o chamado Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz. Antes porém, precisamos da seguinte noção de compacidade.

Definição 1.4 (**Condição de Palais-Smale**) *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathsf{R})$. Dizemos que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), se toda seqüência (u_n) em E satisfazendo:*

$$|\Phi(u_n)| \le C \; e \; |\Phi \, (u_n)\varphi| \le \varepsilon_n ||\varphi||, \quad \forall \; \varphi \in E \; e \; \varepsilon_n \; \to 0, \tag{1.5}$$

possui uma subseqüência convergente.

Teorema 1.18 (**Teorema do Passo da Montanha**, *c.f [5]*) *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathsf{R})$ um funcional satisfazendo a condição (PS). Se $e \in E$ e $0 < r < ||e||$ são tais que*

$$a = max\{\Phi(0), \Phi(e)\} < \inf_{||u||=r} \Phi(u) = b,$$

então

$$c = \inf_{\gamma \;\; \Gamma} \sup_{t \;\; [0,1]} \Phi(\gamma(t))$$

é um valor crítico de Φ com $c \geq b$, onde Γ é a classe de caminhos contínuos ligando 0 a e, isto é,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

1.5 Diferenciabilidade de um Funcional Não-Linear

Seja $\Omega \subseteq \mathsf{R}^N (N \geq 1)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$. Dizemos que $f(x, s)$ é uma função satisfazendo as condições de Carathéodory se:

(i) $f(., s)$ é mensurável em Ω para todo $s \in \mathsf{R}$ fixado,

(ii) $f(x, .)$ é contínua em R para quase todo $x \in \Omega$ fixado.

Denotamos por $F(x, s)$ a primitiva de $f(x, s)$, isto é, $F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt$.

Proposição 1.1 *Seja $f(x, s)$ uma função satisfazendo as condições de Carathéodory e consideremos a seguinte condição de crescimento subcrítico:*

Existem $c_1, c_2 \geq 0$ e $1 \leq \sigma < 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$ ($1 \leq \sigma < \infty$ se N=1,2) tais que

$$|f(x, s)| \leq c_1|s|^{\sigma} + c_2$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0, +\infty]$. Então o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathsf{R}$ definido por:

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x))dx,$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, t)dt$, está bem definido e é fracamente contínuo no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Além disso, $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathsf{R})$ com

$$J\,(u)\varphi = \int_{\Omega} f(x, u)\varphi \; dx, \quad \forall \; u, \varphi \; \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

onde J é a derivada de Fréchet do funcional J.

Prova: Para obtermos a prova da Proposição 1.1, mostraremos que:

1. J está bem definido;
2. J é fracamente contínuo em $H_0^1(\Omega)$;
3. $J \in C^1(H_0^1(\Omega))$;
4. J possui derivada de Fréchet dada por (1.6).

Vejamos o primeiro ítem.

1. J **está bem definido**. De fato, segue de **(iii)**

$$\int_\Omega |F(x,u)|dx \leq \frac{c_1}{\sigma+1}\int_\Omega |u|^{\sigma+1}dx + c_2\int_\Omega |u|.$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |F(x,u)|dx \leq c_3||u||_\sigma^{\sigma+1} + c_4||u||_\sigma \leq c_5||u||^{\sigma+1} + c_6||u|| < \infty.$$

Portanto, o funcional J está bem definido.

2. J **é fracamente contínuo em** $H_0^1(\Omega)$.

Sabemos que o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$ para qualquer $1 \leq p < 2N/(N-2)$. Desta forma, se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, segue que $u_n \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$. Por outro lado, a condição de crescimento (iii), nos garante que o operador $u(x) \mapsto f(x,u(x))$ leva conjuntos limitados de $L^p(\Omega)$ com $p \geq \sigma$, em conjuntos limitados de $L^{p/\sigma}(\Omega)$ de forma contínua. De fato, seja (u_n) uma seqüência limitada em $L^p(\Omega)$, ou seja, $||u_n||_p < C$. De (iii), segue

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u_n)|^{p/\sigma}dx &\leq \int_\Omega \Big(c_1|u_n|^\sigma + c_2\Big)^{p/\sigma}\\ &\leq c\int_\Omega |u_n|^p + c < \infty.\end{aligned}$$

Portanto, se $u_n \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$, temos

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \text{ fortemente em } L^{p/\sigma}(\Omega).$$

Sendo $\sigma \leq p$, segue que

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \text{ fortemente em } L^1(\Omega).$$

Isto é,

$$J(u_n) \to J(u) \quad \text{sempre que} \quad u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega).$$

Logo, J é fracamente contínuo em $H_0^1(\Omega)$.

3. $J \in C^1(H_0^1(\Omega))$.

para $1 \leq \sigma \leq \ s = 2\ $.

Sendo $r = 2N/(N+2) < s/\sigma$, segue que

$$f(x, u + th) \to f(x, u) \ \ em \ Ł^r(\Omega).$$

Portanto,

$$||f(x, u + th) - f(x, u)||_r \to 0.$$

Tomando limite quando $h \to 0$ em (1.7) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\frac{|\delta(h)|}{||h||} \leq \int_0^1 ||f(x, u + th) - f(x, u)||_r dt \ \to \ 0.$$

Logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\delta(h)|}{||h||} = \lim_{h \to 0} \frac{J(u + h) - J(u) - \int_\Omega f(x, u)hdx}{||h||} = 0.$$

Portanto, $J : H_0^1(\Omega) \to \mathsf{R}$ é (Fréchet) diferenciável.

Agora vamos mostrar que J é contínua. De fato, sendo $J \ : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
||J\ (u + v) - J\ (u)||_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{||h|| \leq 1} \Big| [J\ (u + v) - J\ (u)]h \Big| \\
&= \sup_{||h|| \leq 1} \Big| J\ (u + v)h - J\ (u)h \Big| \\
&= \sup_{||h|| \leq 1} \Big| \int_\Omega \Big[f(x, u + v) - f(x, u) \Big] h \Big| \\
&\leq \sup_{||h|| \leq 1} ||f(x, u + v) - f(x, u)||_r ||h||_s,
\end{aligned}$$

onde $r = 2N/(N+2)$ e $s = 2N/(N-2) = 2\ $.

Prosseguindo de modo análogo ao ítem anterior, obtemos

$$f(x, u + v) \to f(x, u) \ \ em \ Ł^r(\Omega),$$

donde

$$||f(x, u + v) - f(x, u)||_r \to 0 \quad \text{quando} \ \ v \to 0 \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$||J\ (u + v) - J\ (u)||_{H^{-1}(\Omega)} \to 0 \ \ \text{quando} \ \ v \to 0 \text{ em } \ H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$J\,(u+v) \rightarrow J\,(u) \text{ quando } (u+v) \rightarrow u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Logo J é contínua. Desta forma, concluímos que $J \in C^1(H_0^1(\Omega))$.

4. **A derivada de J é dada por**

$$J\,(u)h = \int_\Omega f(x,u)hdx, \quad \forall\ u,h\ \in H_0^1(\Omega).$$

De fato, se $u, h \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} J\,(u)h &= \lim_{t \to 0} \frac{J(u+th) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\int_\Omega [F(x,u+th) - F(x,u)]}{t} \\ &= \int_\Omega \lim_{t \to 0} \frac{F(x,u+th) - F(x,u)}{t} \\ &= \int_\Omega f(x,u)h \qquad \forall\ u,h\ \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

■

Proposição 1.2 (*c.f [22, 10]*) *Suponhamos que $f : \overline{\Omega} \times \mathsf{R} \rightarrow \mathsf{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição (iii) da Proposição 1.1. Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathsf{R}$ definido por*

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right]dx, \ u \in\ H_0^1(\Omega) \tag{1.8}$$

está bem definido. Além disso, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathsf{R})$ com

$$I\,(u)h = \int_\Omega (\nabla u \nabla h - f(x,u)h)dx, \quad \forall\ u,h\ \in H_0^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Prova: Considerando a norma em $H_0^1(\Omega)$ definida por $||u|| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$, a qual é equivalente à norma usual $\left(||u||_2^2 + ||\nabla u||_2^2\right)^{1/2}$ devido a desigualdade de Poincaré, podemos escrever

$$I(u) = L(u) - J(u),$$

onde $L(u) = \frac{1}{2}||u||^2$ e $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$. Pela Proposição 1.1, J está bem definido, é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$ e satisfaz (1.6). Por outro lado, podemos mostrar que o funcional L é de classe C^∞ com

$$L\,(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \qquad \forall u, \varphi \in\ H_0^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Assim, obtemos a prova da Proposição 1.2. ■

1.6 Sub e Super-Solução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Definição 1.5 *Por uma sub-solução fraca do problema* (1.11)*, entendemos* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \leq 0 \tag{1.12}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0.$
Analogamente, $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma super-solução fraca do problema* (1.11) *se*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \geq 0 \tag{1.13}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0.$

Teorema 1.19 (**Sub e Super-Solução**, *c.f [14]*) *Sejam* $\underline{u}, \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ *sub-solução e super-solução do problema* (1.11)*, respectivamente. Suponhamos que existem constantes* $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}$ *satisfazendo* $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \bar{c} < \infty$, *em* Ω *q.t.p.. Então existe uma solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (1.11)*, satisfazendo:*

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad em \quad \Omega \ q.t.p..$$

1.7 Princípios de Máximo

Vejamos agora os princípios de máximo que usaremos neste trabalho.

Teorema 1.20 (**Princípio do Máximo Fraco**, *c.f [13]*) *Seja* $u \in H^1(\Omega)$ *satisfazendo* $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) *em* Ω*. Então*

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \ (\inf_\Omega u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-). \tag{1.14}$$

Teorema 1.21 (**Princípio do Máximo Forte**, *c.f [24]*) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto limitado e conexo e* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tal que* $\Delta u \leq 0$ *em* Ω*. Então, uma das seguintes alternativas é satisfeita:*

(i) *u é constante (e assim* $\Delta u \equiv 0$*);*

(i) $u(x) > \inf_\Omega u$ *para todo* $x \in \Omega$*.*

1.8 Autofunções do Operador Laplaciano e Regularidade

Vamos considerar o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ é um aberto limitado. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma autofunção associada ao autovalor λ, se u é uma solução fraca não-trivial de (1.15).

Teorema 1.22 *(c.f [24]) Existe uma base ortonormal (u_m) de $L^2(\Omega)$ e uma seqüência de números reais positivos (λ_m) com $\lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_m \leq ...,$$

$$-\Delta u_m = \lambda_m u_m \quad \text{em } \Omega \quad e,$$

$$u_m \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega).$$

Em particular, se Ω é de classe C^∞, temos que $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Também vamos usar como problema auxiliar, o seguinte problema de autovalor com peso indefinido:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1(m,\Omega)mu & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N, (N \geq 3)$ é um domínio limitado, $m : \Omega \to \mathsf{R}$ é um peso com sinal indefinido e $\lambda_1(m,\Omega)$ é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ para o peso m. Dizemos que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ é uma autofunção associada à $\lambda_1(m,\Omega)$ se u_1 é solução fraca do problema (1.16).

Teorema 1.23 (**Krein-Rutman**, *c.f [9]) Seja $m : \Omega \to \mathsf{R}$ uma função em $L^r(\Omega)$, com $r > N/2$ (não necessariamente positiva). Suponhamos que $m > 0$ em um subconjunto de Ω com medida positiva. Então o primeiro autovalor λ_1 do problema* (1.16) *é simples (possui multiplicidades algébrica e geométrica iguais a um) e u_1 (onde u_1 é a autofunção associada a $\lambda_1(m,\Omega)$) pode ser escolhida estritamente positiva em Ω. Uma afirmação equivalente é quando $m < 0$ em um conjunto de medida positiva.*

Consideremos agora o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.17}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ é um aberto limitado e $f \in L^2(\Omega)$.

O principal resultado de regularidade que usaremos aqui é:

Teorema 1.24 (*c.f [13]*) *Sejam* $u \in H^1(\Omega)$ *uma solução fraca do problema* (1.17) *e* $f \in H^k(\Omega)$, $k \geq 1$. *Então para um subdomínio* $\Omega \subset\subset \Omega$, *temos* $u \in H^{k+2}(\Omega\ )$ *e*

$$||u||_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C(||u||_{H^1(\Omega)} + ||f||_{H^k(\Omega)}).$$

Em particular, se $f \in C^\infty(\Omega)$ *então* $u \in C^\infty(\Omega)$.

1.9 Lemas Técnicos

Nesta seção, veremos dois resultados técnicos que usaremos na demonstração de nossos resultados.

O resultado a seguir será usado para mostrarmos a existência de uma primeira solução para os problemas (1) e (2) via Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.1 *Consideremos a função* $\Psi_{A,B}(t) := t^2 - At^{q+1} - Bt^{p+1}$, $t \geq 0$, *onde* $0 \leq q < 1 < p$ *e* $A, B > 0$. *Então, máx*$\{\Psi_{A,B}(t); t \geq 0\} > 0$ *se, e somente se,*

$$A^{p-1}B^{1-q} < \frac{(p-1)^{p-1}(1-q)^{1-q}}{(p-q)^{p-q}} := \eta(p,q).$$

Além disso, para $t = t_B := \left[\dfrac{1-q}{B(p-q)}\right]^{1/(p-1)}$ *temos,*

$$\Psi_{A,B}(t_B$$

Assim, t_B é um ponto de máximo de $\Psi_{A,B}(t)$ e $\Psi_{A,B}(t_B)$ é o máximo. Temos

$$\begin{aligned}
\Psi_{A,B}(t_B) &= t_B^2 - At_B^{q+1} - Bt_B^{p+1} \\
&= t_B^2\Big\{1 - At_B^{q-1} - Bt_B^{p-1}\Big\} \\
&= t_B^2\Big\{1 - A\Big[\frac{1-q}{B(p-q)}\Big]^{(q-1)/(p-1)} - B\Big[\frac{1-q}{B(p-q)}\Big]\Big\} \\
&= t_B^2\Big\{1 - \frac{1-q}{p-q} - A\Big[\frac{B(p-q)}{1-q}\Big]^{(1-q)/(p-1)}\Big\} \\
&= t_B^2\Big\{\frac{p-1}{p-q} - AB^{(1-q)/(p-1)}\Big[\frac{p-q}{1-q}\Big]^{(1-q)/(p-1)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Logo, $\textit{máx}\{\Psi_{A,B}(t); t \geq 0\} = \Psi_{A,B}(t_B) \;\; > 0$ se, e somente se,

$$\frac{p-1}{p-q} - AB^{(1-q)/(p-1)}\Big[\frac{p-q}{1-q}\Big]^{(1-q)/(p-1)} > 0, \tag{1.18}$$

isto é,

$$AB^{(1-q)/(p-1)}\Big[\frac{p-q}{1-q}\Big]^{(1-q)/(p-1)} < \frac{p-1}{p-q}. \tag{1.19}$$

Isto implica que

$$A^{p-1}B^{1-q}\Big[\frac{p-q}{1-q}\Big]^{1-q} < \Big[\frac{p-1}{p-q}\Big]^{p-1} \tag{1.20}$$

ou seja,

$$A^{p-1}B^{1-q} < \frac{(p-1)^{p-1}}{(p-q)^{p-q}}(1-q)^{1-q}.$$

Portanto, $\textit{máx}\{\Psi_{A,B}(t); t \geq 0\} > 0$ se, e somente se,

$$A^{p-1}B^{1-q} < \frac{(p-1)^{p-1}(1-q)^{1-q}}{(p-q)^{p-q}}.$$

■

O próximo resultado será usado para mostrarmos que, sob determinadas condições, o problema (1) não tem solução.

Lema 1.2 *Sejam $A, B \geq 0$ e $0 \leq q < 1 < p$. Então existe $c(p,q) > 0$ tal que*

$$As^q + Bs^p \geq cA^{(p-1)/(p-q)}B^{(1-q)/(p-q)}s$$

para todo $s \geq 0$.

Prova: Sendo $q < 1$ e $p > 1$, segue que $(p-q)/(p-1) > 1$ e $(p-q)/(1-q) > 1$. Além disso,

$$\frac{1}{\frac{p-q}{p-1}} + \frac{1}{\frac{p-q}{1-q}} = \frac{p-1}{p-q} + \frac{1-q}{p-q} = \frac{p-q}{p-q} = 1$$

ou seja, $(p-q)/(p-1)$ e $(p-q)/(1-q)$ são conjugados. Note também que

$$\frac{q(p-1)}{p-q} + \frac{p(1-q)}{p-q} = \frac{pq - q + p - pq}{p-q} = \frac{p-q}{p-q} = 1.$$

Portanto, podemos escrever

$$s = s^1 = s^{q(p-1)/(p-q)+p(1-q)/(p-q)} = s^{q(p-1)/(p-q)} s^{p(1-q)/(p-q)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^{(p-1)/(p-q)} B^{(1-q)/(p-q)} s &= A^{(p-1)/(p-q)} B^{(1-q)/(p-q)} s^{q(p-1)/(p-q)} s^{p(1-q)/(p-q)} \\ &= (As^q)^{(p-1)/(p-q)} (Bs^p)^{(1-q)/(p-q)}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com os expoentes $(p-q)/(p-1)$ e $(p-q)/(1-q)$, obtemos

$$\begin{aligned} A^{(p-1)/(p-q)} B^{(1-q)/(p-q)} s &\leq \Big(\frac{p-1}{p-q}\Big) As^q + \Big(\frac{1-q}{p-q}\Big) Bs^p \\ &\leq máx\Big\{\frac{p-1}{p-q}, \frac{1-q}{p-q}\Big\}(As^q + Bs^p). \end{aligned}$$

Logo,

$$As^q + Bs^p \;\geq\; c(p,q) A^{(p-1)/(p-q)} B^{(1-q)/(p-q)} s,$$

onde

$$c(p,q) = \Big(máx\Big\{\frac{p-1}{p-q}, \frac{1-q}{p-q}\Big\}\Big)^{-1}.$$

■

Capítulo 2

Existência, Não-Existência e Multiplicidade de Soluções para um Problema Elíptico Semilinear Envolvendo o Operador Laplaciano

Neste Capítulo estudaremos a existência, não-existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f(x,u) & & \text{em} & \Omega, \\ u & \geq & 0, & u \not\equiv 0 & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado e, f : $\Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ é uma função satisfazendo as condições de Carathéodory.

Consideremos o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ munido do seguinte produto interno

$$< u, \varphi >= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi, \qquad \forall\ u, \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.2}$$

cuja norma proveniente é dada por

$$||u|| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Estudaremos o problema (2.1) quando a não-linearidade $f(x,s)$ tem crescimento do tipo: subcrítico, crítico e supercrítico. Na primeira seção abordaremos o caso subcrítico, para o qual, obteremos multiplicidade de soluções. Na segunda seção, estudaremos o caso crítico, e mostraremos a não-existência de soluções. Na terceira seção, analisaremos o caso supercrítico e, mostraremos a existência de pelo menos uma solução.

2.1 O Caso Subcrítico

Vamos considerar que a não-linearidade $f(x,s)$ possui crescimento subcrítico. Neste caso, obteremos um resultado de multiplicidade de soluções usando técnicas variacionais.

Seja $f : \Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ uma função satisfazendo as condições de Carathéodory, onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio limitado e suave. Para obtermos a multiplicidade de soluções para o problema (2.1) vamos assumir que $f(x,s)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_0) $f(x,0) \geq 0$ para $x \in \Omega$ q.t.p..

(f_1) Existem $1 \leq \sigma < 2$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1},$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0,+\infty)$.

(f_2) Existem $\Theta > 2$, $1 \leq r < 2$, $d \in L^{(2^*/r)'}(\Omega)$, $d \geq 0$ q.t.p. em Ω e $s_0 \geq 0$, tais que

$$\Theta F(x,s) \leq sf(x,s) + d(x)s^r,$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [s_0,+\infty)$, onde $F(x,s)$ é a primitiva de $f(x,s)$, isto é,

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt.$$

(f_3) Existem $0 \leq q < 1 < p < 2 \ -1$, $a_0 \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, com $\sigma_q := (2 \ /(q+1))$ e $a_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω , $b_0 \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, com $\sigma_p := (2 \ /(p+1))$ e $b_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω , tais que

$$f(x,s) \leq a_0(x)s^q + b_0(x)s^p,$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0,+\infty)$.

(f_4) Existem um subdomínio não vazio $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ e $s_1 > 0$, tais que

$$F(x,s) \geq \Theta_1 \frac{s^2}{2},$$

para $x \in \Omega_1$ q.t.p. e $s \in [0,s_1]$.

(f_5) Existem um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Theta_2 > 0$ e $s_2 \geq 0$, tais que

$$F(x, s) \geq \Theta_2 s^2,$$

para $x \in \Omega_2$ q.t.p. e $s \in [s_2, +\infty)$. Além disso, $d(x)$ definido na hipótese (f_2) é limitado em Ω_2.

Mostraremos a seguir, um exemplo típico de uma não-linearidade que satisfaz as hipóteses (f_0)-(f_5).

Exemplo 2.1 *Sejam $a \in L^{\tau_q}(\Omega)$ com $\tau_q > \sigma_q$ e $b \in L^{\tau_p}(\Omega)$ com $\tau_p > \sigma_p$, onde σ_q e σ_p são dados na hipótese (f_3). Suponhamos que*

(i) *existe $\Omega_1 \subset \Omega$ aberto e não vazio tal que $a(x) \geq \epsilon_1 > 0$ para todo $x \in \Omega_1$ e $b(x)$ é limitado inferiormente;*

(ii) *existe $\Omega_2 \subset \Omega$ aberto e não vazio tal que $b(x) \geq \epsilon_2 > 0$ para todo $x \in \Omega_2$ e $a(x)$ é limitado inferiormente e superiormente.*

(iii) *$a(x) \geq 0$ para $q = 0$ e para todo $x \in \Omega$ q.t.p..*

Então a função $f : \Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ definida por $f(x, s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p$, onde λ é um parâmetro positivo e $0 \leq q < 1 < p < 2 \ -1$, satisfaz as hipóteses $(f_0) - (f_5)$.

Vejamos que $f(x, s)$ assim definida, satisfaz as hipóteses $(f_0) - (f_5)$.

Hipotese (f_0) **:** Sendo $f(x, s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p$, segue que $f(x, 0) = 0$ para todo $x \in \Omega$ q.t.p., ou seja, (f_0) é satisfeita.

Hipotese (f_1) **:** Notemos que

$$|f(x, s)| \leq \lambda |a(x)||s|^q + |b(x)||s|^p. \tag{2.4}$$

Observamos que os expoentes $\sigma - 1/(\sigma - q - 1)$ e $\sigma - 1/q$ são conjugados, assim como os expoentes $\sigma - 1/(\sigma - p - 1)$ e $\sigma - 1/p$. Usando a desigualdade de Young em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x, s)| &\leq \frac{\lambda(\sigma - q - 1)}{\sigma - 1}|a|^{\sigma - 1/(\sigma - q - 1)} + \frac{\lambda q}{\sigma - 1}|s|^{\sigma - 1} \\ &\quad + \frac{\sigma - p - 1}{\sigma - 1}|b|^{\sigma - 1/(\sigma - p - 1)} + \frac{p}{\sigma - 1}|s|^{\sigma - 1} \\ &\leq C\Big(|a|^{\sigma - 1/(\sigma - q - 1)} + |b|^{\sigma - 1/(\sigma - p - 1)}\Big) + d_2|s|^{\sigma - 1}, \end{aligned}$$

onde $C = máx\Big\{\dfrac{\lambda(\sigma - q - 1)}{\sigma - 1}, \dfrac{\sigma - p - 1}{\sigma - 1}\Big\}$ e $d_2 = \frac{\lambda q + p}{\sigma - 1}$. Logo,

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1},$$

onde $d_1(x) = C\Big(|a|^{\sigma-1/(\sigma-q-1)} + |b|^{\sigma-1/(\sigma-p-1)}\Big)$.
Sendo $\sigma > 1$, segue que $d_2 > 0$. Afirmamos que $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$. De fato, basta mostrar que

$$\int_\Omega \Big(|a|^{\sigma-1/(\sigma-q-1)} + |b|^{\sigma-1/(\sigma-p-1)}\Big)^{\sigma'} < \infty,$$

onde $\sigma\ = \sigma/(\sigma - 1)$. Temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(|a|^{\sigma-1/(\sigma-q-1)} + |b|^{\sigma-1/(\sigma-p-1)}\Big)^{\sigma'} &= \int_\Omega \Big(|a|^{\sigma-1/(\sigma-q-1)} + |b|^{\sigma-1/(\sigma-p-1)}\Big)^{\sigma/(\sigma-1)} \\
&\leq 2^{\sigma/(\sigma-1)} \int_\Omega \Big(|a|^{\sigma/(\sigma-q-1)} + |b|^{\sigma/(\sigma-p-1)}\Big) \\
&= C\Big(\int_\Omega |a|^{\sigma/(\sigma-q-1)} + \int_\Omega |b|^{\sigma/(\sigma-p-1)}\Big) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

para $a \in L^{\tau_q}(\Omega)$ e $b \in L^{\tau_p}(\Omega)$ com τ_q e τ_p escolhidos de modo que

$$\frac{\sigma}{\sigma - q - 1} \leq \tau_q < 2 \quad \text{e} \quad \frac{\sigma}{\sigma - p - 1} \leq \tau_p < 2\ .$$

Logo, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e, portanto, (f_1) é satisfeita.

Hipotese (f_2)**:** Notemos que

$$F(x,s) = \lambda a(x)(q+1)^{-1}s^{q+1} + b(x)(p+1)^{-1}s^{p+1}. \tag{2.5}$$

Multiplicando ambos os membros de (2.5) por $(p+1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
(p+1)F(x,s) &= \lambda a(x)s^{q+1}\Big[(p+1)(q+1)^{-1} - 1 + 1\Big] + b(x)s^{p+1} \\
&= \lambda a(x)s^{q+1}\Big[(p+1)(q+1)^{-1} - 1\Big] + \lambda a(x)s^q s + b(x)s^p s \\
&\leq s\Big[\lambda a(x)s^q + b(x)s^p\Big] + \lambda a^+(x)\Big[(p+1)(q+1)^{-1} - 1\Big]s^{q+1} \\
&= sf(x,s) + \lambda a^+(x)\Big[(p+1)(q+1)^{-1} - 1\Big]s^{q+1}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\Theta = p+1$, $d(x) = \lambda a(x)^+\Big[(p+1)(q+1)^{-1} - 1\Big]$ e $r = q+1$, obtemos

$$\Theta F(x,s) \leq sf(x,s) + d(x)s^r.$$

Observamos que $\Theta, d(x)$ e r satisfazem as condições da hipótese (f_2). De fato, se $p > 1$, então $\Theta = p + 1 > 2$ e se $0 \leq q < 1$, então $1 \leq q + 1 < 2$, ou seja, $1 \leq r < 2$.

Afirmamos que $d \in L^{(2^*/r)'}(\Omega)$. De fato, sendo $a \in L^{\tau_q}(\Omega)$ e $\tau_q > \sigma_q$, segue que $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, e portanto, $a^+ \in L^{\sigma_q}(\Omega)$. Assim,

$$\int_\Omega |d|^{\sigma_q} = \int_\Omega |\lambda a^+(\frac{\Theta}{q+1} - 1)|^{\sigma_q} = C \int_\Omega |a^+|^{\sigma_q} < \infty.$$

Logo $d \in L^{\sigma_q}(\Omega)$ e, portanto, $d \in L^{(2^*/r)'}(\Omega)$, visto que $\sigma_q = (2 \ /(q+1)) \ = (2 \ /r)$. Portanto, a hipótese (f_2) é satisfeita.

Hipotese (f_3) **:** Para verificarmos a hipótese (f_3), basta escolher $a_0 = \lambda a^+(x)$ e $b_0 = b^+(x)$, pois desta forma,

$$f(x,s) = \lambda a(x) s^q + b(x) s^p \leq \lambda a(x)^+ s^q + b(x)^+ s^p = a_0(x) s^q + b_0(x) s^p$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0, +\infty)$. Por outro lado, sendo $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$ e $b \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, segue que $a_0 \in L^{\sigma_q}(\Omega)$ e $b_0 \in L^{\sigma_p}(\Omega)$. Portanto (f_3) é satisfeita.

Hipotese (f_4) **:** Para verificarmos (f_4), notemos primeiro que em Ω_1, $f(x,s)$ é sublinear na origem, isto é, existem $\alpha > \lambda_1(\Omega_1)$ e $s_1 > 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \alpha s, \quad \text{para } x \in \Omega_1 \text{ q.t.p. e } s \in [0, s_1]. \tag{2.6}$$

De fato, desde que $0 < q < 1 < p$ e, usando que em Ω_1, $b(x)$ é limitado inferiormente e $a(x) \geq \varepsilon_1 > 0$, obtemos

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} = \lim_{s \to 0^+} \Big(\lambda a(x) s^{q-1} + b(x) s^{p-1}\Big) = \lambda \lim_{s \to 0^+} a(x) s^{q-1} + \lim_{s \to 0^+} b(x) s^{p-1} = +\infty \tag{2.7}$$

para $x \in \Omega_1$ q.t.p e $s \in [0,1]$, onde Ω_1 é dado no item (i) do exemplo 2.1. De (2.7), obtemos

$$\frac{f(x,s)}{s} \geq \alpha \tag{2.8}$$

para $x \in \Omega_1, \ s \in [0,1]$ e para algum $\alpha > \lambda_1(\Omega_1)$. Portanto, (2.6) é satisfeito com $s_1 = 1$. De (2.8), obtemos

$$F(x,s) \geq \alpha \frac{s^2}{2} = \Theta_1 \frac{s^2}{2}$$

onde $\Theta_1 = \alpha$.
Logo, (f_4) é satisfeita.

Hipotese (f_5) **:** Vejamos que $f(x,s)$ é superlinear no infinito em Ω_2, isto é, existem $\beta > \lambda_1(\Omega_2)$ e $s_2 \geq 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \beta s, \quad \text{para } x \in \Omega_2 \text{ q.t.p. e } s \in [s_1, +\infty). \tag{2.9}$$

De fato, desde que $0 < q < 1 < p$ e, usando o fato que em Ω_2 $a(x)$ é limitado inferiormente e superiormente e $b(x) \geq \varepsilon_2 > 0$, obtemos

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s} = \lim_{s \to \infty} \left[\lambda a(x) s^{q-1} + b(x) s^{p-1}\right] = \lambda \lim_{s \to \infty} a(x) s^{q-1} + \lim_{s \to \infty} b(x) s^{p-1} = +\infty \tag{2.10}$$

para $x \in \Omega_2$ e $s \in [1, +\infty)$, onde Ω_2 é dado no item (ii) do exemplo 2.1. De (2.10), obtemos

$$\frac{f(x,s)}{s} \geq \beta \tag{2.11}$$

para $x \in \Omega_2, s \in [1, \infty)$ e para algum $\beta > \lambda_1(\Omega_2)$. Portanto, (2.9) é satisfeita com $s_2 = 1$. De (2.11), obtemos

$$F(x,s) \geq \beta \frac{s^2}{2} = \Theta_2 s^2,$$

onde $\Theta_2 = \beta/2$.

Vamos mostrar agora que $d(x)$ é limitada. De fato,

$$|d(x)| = |\lambda(\frac{\Theta}{q+1} - 1) a^+(x)| \leq |\lambda(\frac{\Theta}{q+1} - 1)||a(x)| \leq C.$$

Portanto, (f_5) é satisfeita.

Vejamos alguns comentários sobre as hipóteses $(f_0) - (f_5)$.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_0). A hipótese (f_0) nos garante que podemos estender a não-linearidade da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x,u) & \text{se } \; s \geq 0, \\ f(x,0) & \text{se } \; s < 0. \end{cases}$$

Para não sobrecarregar a notação escreveremos $\tilde{f}(x,s)$ como $f(x,s)$. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Lema 2.1 *Sob a condição (f_0), toda solução $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \textit{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

é não-negativa.

Definição 2.1 *Por uma solução fraca do problema* (2.12)*, entendemos* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0, \qquad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.13}$$

Prova: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de (2.12), ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $\varphi = -u^-$ (onde $u^- = máx\{-u, 0\}$), obtemos

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla u^- = -\int_\Omega f(x,u)u^-.$$

Logo,

$$-\int_\Omega \nabla u^+ \nabla u^- + \int_\Omega |\nabla u^-|^2 = -\int_{\{x\ \ \Omega;\ u(x)\ \geq\ 0\}} f(x,u)u^- - \int_{\{x\ \ \Omega;\ u(x)\ <\ 0\}} f(x,u)u^-.$$

Observando que $u^-(x) = 0$ quando $u(x) \geq 0$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 = -\int_{\{x\ \ \Omega;\ u(x) <\ 0\}} f(x,u)u^- = -\int_{\{x\ \ \Omega;\ u(x) <\ 0\}} f(x,0)u^- \leq 0.$$

Consequentemente,

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u^-|^2 \leq 0.$$

Assim,

$$||u^-||_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Portanto, $u = u^+ \geq 0$. ∎

Desta forma, encontrar soluções para (2.1) reduz-se a encontrar soluções não triviais para (2.12) quando assumirmos (f_0).

Consideremos o funcional de Euler Lagrange $I : H_0^1(\Omega) \to \mathsf{R}$ associado ao problema (2.1), definido por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{2.14}$$

onde $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt$.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_1). Esta hipótese nos garante que o funcional I definido em (2.14), está bem definido. Com efeito, observe que

$$I(u) := \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Portanto, basta verificarmos que o funcional

$$\psi(u) := \int_\Omega F(x,u)dx \tag{2.15}$$

está bem definido. De (f_1), temos

$$\int_\Omega |F(x,u)|dx \leq \int_\Omega d_1(x)udx + \frac{d_2}{\sigma}\int_\Omega |u|^\sigma dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para σ como em (f_1), obtemos

$$\int_\Omega |F(x,u)|dx \leq ||d_1(x)||_{\sigma'}||u||_\sigma + C||u||_\sigma^2 < \infty$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$. Portanto, o funcional I está bem definido. Além disso, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathsf{R})$ com

$$I\ (u)\varphi = \int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi - f(x,u)\varphi]dx \quad \forall\ u, \varphi\ \in H_0^1(\Omega). \tag{2.16}$$

(c.f Capítulo 1, Proposição 1.2).

Portanto, encontrar soluções para o problema (2.12), é equivalente a encontrar pontos críticos para o funcional I definido em (2.14).

• **Comentários sobre a hipótese** (f_2). A hipótese (f_2) é uma condição fraca de superquadraticidade. Neste trabalho, usaremos (f_2) para substituir a condição (3) (condição clássica de Ambrosetti-Rabinowitz), dada na introdução, pois (3) não é em geral satisfeita na formulação do problema (2.1). A hipótese (f_2) juntamente com (f_5), nos garantirá a superquadraticidade de $F(x,s)$ num subdomínio $\Omega_2 \subset \Omega$, dado na hipótese (f_5). Isto será fundamental para obtermos a primeira solução via Teorema do Passo da Montanha, pois estas duas condições nos garantem que o funcional I, definido em (2.14), satisfaz a Geometria do Passo da Montanha. Agora, veremos que a condição (f_2) é mais fraca que a condição (3).

Exemplo 2.2 *A função* $f : \Omega \times (s_0, +\infty) \to \mathsf{R},\ s_0 \geq 0$ *definida por* $f(x,s) = c(x)s^p$, *onde* $1 < p < 2\ \ -1$ *e* $c : \Omega \to (-\infty, 0)$, *satisfaz a condição* (f_2) *mas não satisfaz a condição de superquadraticidade de Ambrosetti-Rabinowitz.*

De fato, notemos que

$$F(x,s) = \frac{c(x)}{p+1}ss^p,$$

donde,

$$(p+1)F(x,s) = sc(x)s^p = sf(x,s).$$

Portanto, a condição (f_2) é satisfeita escolhendo $\Theta = (p+1) > 2$ e $d(x) \equiv 0$. Por outro lado,

$$f(x,s) \leq 0 \qquad \text{para todo} \;\; (x,s) \in \Omega \times \; (s_0, +\infty),$$

ou seja, $\Theta F(x,s) \leq 0$. Contradizendo assim, a condição de superquadraticidade de Ambrosetti-Rabinowitz (3).

• **Comentários sobre a hipótese** (f_3). Esta hipótese nos dá uma limitação por cima para a não-linearidade $f(x,s)$. Sob a hipótese (f_3) e mais algumas condições mostraremos que o funcional I assume valores positivos para toda $u \in \partial B_R(0)$, para algum $R > 0$, satisfazendo assim, a Geometria do Passo da Montanha.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_4). A hipótese (f_4) é uma conseqüência imediata da condição de sublinearidade local na origem. De fato, se $f(x,s) \geq \alpha s$ para algum $\alpha > \lambda_1(\Omega_1)$, $x \in \Omega_1$ e $s \in [0,1]$, então

$$F(x,s) \geq \alpha \frac{s^2}{2},$$

donde segue (f_4) para $\Theta_1 = \alpha$ e $s_1 = 1$. A hipótese (f_4), juntamente com outras condições sob a não-linearidade, nos garantem a existência de uma solução via Método de Minimização.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_5). A primeira parte da hipótese (f_5) é uma conseqüência da condição de superlinearidade local no infinito. De fato, se $f(x,s) \geq \beta s$ para algum $\beta > \lambda_1(\Omega_2)$, $x \in \Omega_2$ e $s \in [1, +\infty)$, então

$$F(x,s) \geq \beta \frac{s^2}{2},$$

donde segue (f_5) para $\Theta_2 = \beta/2$ e $s_2 = 1$.

Vejamos agora o resultado de multiplicidade de soluções para o problema (2.1).

Teorema 2.1 *Sob as hipóteses* $(f_0) - (f_5)$, *existe* $\eta = \eta(p,q,N) > 0$ *tal que, se* $||a_0||_{\sigma_q}^{p-1} ||b_0||_{\sigma_p}^{1-q} < \eta$, *o problema* (2.1) *tem pelo menos duas soluções não-negativas* v *e* w *satisfazendo*

$$I(w) < 0 < I(v).$$

Além disso, se $||a_0||_{\sigma_q} \to 0$ *e* b_0 *é limitado em* $L^{\sigma_p}(\Omega)$, *então* $w = w_f$ *é tal que* $||w_f|| \to 0$.

Antes de provarmos o Teorema 2.1, vejamos uma conseqüência imediata deste Teorema.

Corolário 2.1 *Sejam a, b satisfazendo as hipóteses $(i) - (ii)$ do Exemplo 2.1. Então existe $\overline{\eta} = \overline{\eta}(p, q, N) > 0$ tal que, se*

$$0 < \lambda < \frac{\overline{\eta}}{||a^+||_{\sigma_q} ||b^+||_{\sigma_p}^{(1-q)/(p-1)}}, \tag{2.17}$$

o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= & \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & em & \Omega, \\ u & \geq & 0, \quad u \not\equiv 0 & em & \Omega, \\ u &= & 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

com $0 < q < 1 < p < 2 \;\; - 1$ tem pelo menos duas soluções não-negativas $\overline{v}$ e $\overline{w}$ satisfazendo

$$I(\overline{w}) < 0 < I(\overline{v}),$$

onde I é definido por:

$$I(u) := \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega a(x)u^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(x)u^{p+1}dx.$$

Além disso, se $\lambda \to 0$, então $\overline{w} = \overline{w}_\lambda$ é tal que $||\overline{w}_\lambda|| \to 0$.

Prova: Segue diretamente do Teorema 2.1, com $f(x, u) = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p$. ■

Vamos dividir a prova do Teorema 2.1 em três etapas:

1. A existência da primeira solução será obtida via Teorema do Passo da Montanha;

2. A existência da segunda solução será obtida via argumento de minimização;

3. Analisaremos o comportamento da segunda solução em relação ao comportamento da não-linearidade.

Vejamos a primeira etapa.

2.1.1 Existência da Primeira Solução

Aqui, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obtermos existência de uma solução $v \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $I(v) > 0$. Notando que $I(0) = 0$, segue que v é não-trivial e, portanto, uma solução do problema (2.1).

Nosso próximo resultado é verificar que o funcional I satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Proposição 2.1 [**Geometria do Passo da Montanha**] *O funcional I satisfaz:*

(I_1) $I(0) = 0$;

(I_2) *Existe* $r > 0$ *tal que* $I(u) > 0$, *para* $u \in H_0^1(\Omega)$ *com* $||u|| = r$;

(I_3) *Existe* $e \in H_0^1(\Omega)$ *com* $0 < r < ||e||$ *tal que* $I(e) < 0$.

Prova: (I_1) é óbvio.

Vejamos que (I_2) é satisfeita. De fato, por (f_3) temos

$$f(x,u) \leq a_0 u^q + b_0 u^p.$$

Logo,

$$-F(x,u) \geq -\frac{a_0}{q+1}u^{q+1} - \frac{b_0}{p+1}u^{p+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega \Big[\frac{a_0 u^{q+1}}{q+1} + \frac{b_0 u^{p+1}}{p+1}\Big] dx \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - (q+1)^{-1}\int_\Omega a_0 (u^+)^{q+1} dx - (p+1)^{-1}\int_\Omega b_0 (u^+)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - (q+1)^{-1}||a_0||_{\sigma_q}\Big(\int_\Omega |u^+|^{\sigma_q'(q+1)}\Big)^{1/\sigma_q'} \\ &\quad -(p+1)^{-1}||b_0||_{\sigma_p}\Big(\int_\Omega |u^+|^{\sigma_p{}'(p+1)}\Big)^{1/\sigma_p'} \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - (q+1)^{-1}||a_0||_{\sigma_q}\Big(\int_\Omega |u^+|^{2^*}\Big)^{(q+1)/2^*} \\ &\quad -(p+1)^{-1}||b_0||_{\sigma_p}\Big(\int_\Omega |u^+|^{2^*}\Big)^{(p+1)/2^*}, \end{aligned}$$

ou seja

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - (q+1)^{-1}||a_0||_{\sigma_q}||u^+||_{2^*}^{q+1} - (p+1)^{-1}||b_0||_{\sigma_p}||u^+||_{2^*}^{p+1}. \tag{2.19}$$

Consideremos

$$S := \inf\Big\{\int_\Omega |\nabla u|^2; \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u|^{2^*} = 1\Big\}.$$

Escolhendo $v = \dfrac{u}{||u^+||_{2^*}}$, segue que $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |v|^{2^*} = 1$. Observando que

$$S \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 = \frac{||u||^2}{||u^+||_{2^*}^2},$$

obtemos

$$||u^+||_{2^*}^{q+1} \leq S^{-(q+1)/2}||u||^{q+1}. \tag{2.20}$$

Sendo $q+1 \geq 0$, segue que $-(q+1)^{-1} \leq 0$. Multiplicando (2.20) por $-(q+1)^{-1}$, obtemos

$$-(q+1)^{-1}||u^+||_{2^*}^{q+1} \ \geq \ -(q+1)^{-1}S^{-(q+1)/2}||u||^{q+1}. \tag{2.21}$$

De modo análogo, obtemos

$$-(p+1)^{-1}||u^+||_{2^*}^{p+1} \geq -(p+1)^{-1}S^{-(p+1)/2}||u||^{p+1}. \tag{2.22}$$

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.19), obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - c_1||a_0||_{\sigma_q}||u||^{q+1} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||u||^{p+1}, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.23}$$

onde $c_1 = (q+1)^{-1}S^{-(q+1)/2}$ e $c_2 = (p+1)^{-1}S^{-(p+1)/2}$.

Sejam $A = 2c_1||a_0||_{\sigma_q}$ e $B = 2c_2||b_0||_{\sigma_p}$. Observamos que $A, B > 0$, pois $c_1, c_2 > 0$ e $a_0, b_0 \neq 0$. Logo em (2.23), obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{A}{2}||u||^{q+1} - \frac{B}{2}||u||^{p+1}, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.24}$$

Escolhendo $||u|| = t_B$ em (2.24), onde t_B é dado no Lema 1.1, obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}t_B^2 - \frac{A}{2}t_B^{q+1} - \frac{B}{2}t_B^{p+1} = \frac{1}{2}\Big(t_B^2 - At_B^{q+1} - Bt_B^{p+1}\Big) = \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B).$$

Usando o Lema 1.1, obtemos $I(u) \geq \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B) > 0$ se, e somente se,

$$A^{p-1}B^{1-q} < \eta(p,q),$$

isto é,

$$||a_0||_{\sigma_q}^{p-1}||b_0||_{\sigma_p}^{1-q} < \frac{\eta(p,q)}{(2c_1)^{p-1}(2c_2)^{1-q}} = \eta(p,q,N). \tag{2.25}$$

Portanto, se $||a_0||_{\sigma_q}^{p-1}||b_0||_{\sigma_p}^{1-q} < \eta = \eta(p,q,N)$, obtemos

$$I(u) > 0 \ \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } ||u|| = r,\ r > 0. \tag{2.26}$$

O que prova (I_2).

Para verificar (I_3) é suficiente mostrar que $I(tu_2) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, para alguma $u_2 \in H_0^1(\Omega)$.

Vamos escolher s_3 suficientemente grande tal que $s_3 \geq s_0 \geq 0$, onde s_0 é dado na hipótese (f_2). Segue da hipótese (f_5), para algum $\Theta_3 > 0$,

$$F(x,s) \;\geq\; \Theta_3 s^2 + 1, \tag{2.27}$$

para $x \in \Omega_2$ q.t.p. e para todo $s \in [s_3, +\infty)$, onde $\Omega_2 \subset \Omega$. De (f_2), obtemos

$$\frac{\Theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)} + \frac{d(x)t^{r-1}}{F(x,t)}. \tag{2.28}$$

para $x \in \Omega_2$ q.t.p., $\Theta > 2$, $1 \leq r \leq 2$ e $d \in L^{(2^*/r)}(\Omega)$ não-negativo.

Integrando (2.28) de s_3 até s, obtemos

$$\ln(s/s_3)^{\Theta} \leq \ln(\ F(x,s)/F(x,s_3)\ ) + d(x)\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{F(x,t)}dt,$$

isto é,

$$\frac{(s/s_3)^{\Theta}}{F(x,s)/F(x,s_3)} \leq \exp\Big[d(x)\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{F(x,t)}dt\Big]$$

Assim,

$$F(x,s) \geq F(x,s_3)(s/s_3)^{\Theta} \exp\Big[-d(x)\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{F(x,t)}dt\Big].$$

De (2.27) e da hipótese (f_5), obtemos

$$\begin{aligned} F(x,s) \;&\geq\; [\ (\Theta_3 s_3^2 + 1)/s_3^{\Theta}\ ]\ s^{\Theta} \exp\Big[-c\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{F(x,t)}dt\Big] \\ &\geq\; cs^{\Theta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F(x,s) \geq cs^{\Theta} \qquad \text{para } x \in \Omega_2 \text{ q.t.p. e } s \in [s_3, +\infty), \tag{2.29}$$

onde $c > 0$ é uma constante.

Seja $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ uma função suave com suporte compacto em Ω_2 e $u_2 \geq 0, u_2 \not\equiv 0$. Consideremos tu_2, com $t \geq t_2$ onde t_2 é tal que $med\{x \in \Omega_2;\ tu_2\ \geq s_3\} > 0$. Então

$$\begin{aligned} I(tu_2) \;&=\; \frac{t^2}{2}||u_2||^2 - \int_{\Omega_2} F(x,tu_2)dx \\ &=\; \frac{t^2}{2}||u_2||^2 - \int_{A_1} F(x,tu_2)dx - \int_{A_2} F(x,tu_2)dx, \end{aligned}$$

onde $A_1 = \{x \in \Omega_2;\ tu_2 < s_3\}$ e $A_2 = \{x \in \Omega_2;\ tu_2 \geq s_3\}$.
Observamos que $F : \Omega_2 \times [0, s_3) \to \mathsf{R}$ é contínua. Portanto em A_1 temos

$$|F(x,tu_2)| \leq c_1, \quad \text{ou} \quad -F(x,tu_2) \leq\ c_1.$$

Em A_2, $F : \Omega_2 \times [s_3, +\infty) \to \mathsf{R}$ é tal que

$$F(x, tu_2) \geq ct^{\Theta} u_2^{\Theta},$$

devido a (2.29). Logo,

$$\begin{aligned} I(tu_2) &\leq \frac{t^2}{2}||u_2||^2 + \int_{A_1} c_1 - c_2 t^{\Theta} \int_{A_2} (u_2)^{\Theta} dx \\ &= \frac{t^2}{2}||u_2||^2 + c_1|A_1| - c_2 t^{\Theta} c_3 |A_2| \\ &= \frac{t^2}{2}||u_2||^2 + c\ - c\ t^{\Theta}. \end{aligned}$$

Sendo $\Theta > 2$, segue que $\quad I(tu_2) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.

Portanto, existe $e = tu_2 \in H_0^1(\Omega)$ com $||e|| = ||tu_2|| > r$ para algum t apropriado, tal que,

$$I(e) < 0.$$

Assim, (I_3) é satisfeita. ∎

Proposição 2.2 *O funcional I tem um ponto crítico.*

Para obtermos um ponto crítico para I usaremos o Teorema 1.18 (Teorema do Passo da Montanha). Vimos na Proposição 2.1 que I verifica a chamada Geometria do Passo da Montanha, portanto, para estarmos nas condições do Teorema 1.18, resta apenas verificar que I satisfaz a condição de Palais-Smale. Para verificarmos esta condição, mostraremos primeiro que toda seqüência que satisfaz a condição (PS) é limitada, em seguida, mostraremos que toda seqüência que satisfaz a condição (PS) possui subseqüência convergente.

Lema 2.2 *Toda seqüência que satisfaz (PS) é limitada.*

Prova: Seja (u_n) uma seqüência (PS), ou seja,

$$|I(u_n)| \leq C \text{ e } |I\ (u_n)\varphi| \leq \varepsilon_n ||\varphi||, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \varepsilon_n\ \to 0.$$

Então, para $\Theta > 2$ como em (f_2) , temos

$$\begin{aligned} \Theta I(u_n) - I\ (u_n)u_n &\leq |\Theta I(u_n) - I\ (u_n)u_n| \\ &\leq \Theta|I(u_n)| + |I\ (u_n)u_n| \\ &\leq \Theta c_1 + \varepsilon_n ||u_n||, \end{aligned}$$

ou seja

$$\Theta I(u_n) - I\ (u_n)u_n \leq C + \varepsilon_n ||u_n||. \tag{2.30}$$

Por outro lado,

$$\Theta I(u_n) = \frac{\Theta}{2}||u_n||^2 - \Theta \int_\Omega F(x, u_n), \tag{2.31}$$

e

$$I\ (u_n)u_n = ||u_n||^2 - \int_\Omega f(x, u_n)u_n. \tag{2.32}$$

Logo,

$$\Theta I(u_n) - I\ (u_n)u_n = \Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||^2 - \int_\Omega \Big(\Theta F(x, u_n) - u_n f(x, u_n)\Big). \tag{2.33}$$

De (2.30) e (2.33), obtemos

$$\Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||^2 \leq \int_\Omega \Big(\Theta F(x, u_n) - u_n f(x, u_n)\Big) + C + \varepsilon_n ||u_n||.$$

De (f_2), obtemos

$$\Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||^2 \leq \int_\Omega d(x)u_n^r \quad + C + \varepsilon_n \parallel u_n \parallel .$$

Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $(2\ /r)$ e $(2\ /r)$, obtemos

$$\Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||^2 \leq ||d||_{(2^*/r)'}||u_n||_{2^*}^r + C + \varepsilon_n||u_n||.$$

Sendo $\Theta > 2$, segue que $c_1 = \frac{\Theta}{2} - 1 > 0$. Então

$$0 < c_1||u_n||^2 \leq c_2||u_n||_{2^*}^r + c_3 + c_4||u_n||. \tag{2.34}$$

Desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ temos

$$||u_n||_{2^*} \leq c||u_n||.$$

Logo, de (2.34) temos

$$0 < c_1||u_n||^2 \leq c_5||u_n||^r + c_3 + c_4||u_n||. \tag{2.35}$$

Afirmamos que (u_n) é limitada. Com efeito, se (u_n) não fosse limitada, poderíamos tomar $||u_n||$ grande tal que

$$0 < c_1 \leq \frac{c_5}{||u_n||^{2-r}} + \frac{c_3}{||u_n||^2} + \frac{c_4}{||u_n||}. \tag{2.36}$$

Sendo $2 - r > 0$, tomando $||u_n|| \to \infty$ em (2.36), temos uma contradição. Portanto, (u_n) é limitada. ■

Lema 2.3 *Toda seqüência que satisfaz (PS) possui subseqüência convergente.*

Prova: Mostraremos que (u_n) possui uma subseqüência que converge em $H_0^1(\Omega)$. De fato, sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo e (u_n) limitada, existe uma subseqüência, a qual ainda denotaremos por (u_n), tal que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em} \qquad H_0^1(\Omega). \tag{2.37}$$

Afirmamos que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito, desde que $I\,(u_n) \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$|I\,(u_n)\varphi| \;\leq\; \varepsilon_n||\varphi|| \;\;\forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{com}\; \varepsilon_n \to 0, \tag{2.38}$$

isto é,

$$\Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi\Big| \leq\; \varepsilon_n||\varphi|| \;\;\forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{com}\; \varepsilon_n \to 0. \tag{2.39}$$

Escolhendo $\varphi = u_n - u_0$ em (2.39), obtemos

$$\Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) - \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u_0)\Big| \leq\; \varepsilon_n||u_n - u_0|| \qquad \text{com}\;\; \varepsilon_n \to 0. \tag{2.40}$$

Por outro lado,

$$\Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u_0)\Big| \leq \Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) - \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u_0)\Big| + \Big|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u_0)\Big|.$$

Usando (2.40), obtemos

$$\Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u_0)\Big| \;\leq\; \varepsilon_n||u_n - u_0|| + \Big|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u_0)\Big| \;\; \text{com}\;\; \varepsilon_n \to 0. \tag{2.41}$$

Passando o limite em (2.41) e observando que

$$\varepsilon_n||u_n - u_0|| \to 0 \qquad \text{e} \qquad \Big|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u_0)\Big| \to 0,$$

devido a continuidade de $f(.,s)$ e ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\Big|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_0\Big| \to 0,$$

isto é,

$$||u_n||^2 \to \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_0. \tag{2.42}$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_0 \to ||u_0||^2.$$

Com efeito, pelo Teorema da Representação de Riesz, dado $g \in H^{-1}(\Omega)$ existe um único $u_0 \ \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$g(v) \ = < v, u_0 > = \int_\Omega \nabla v \nabla u_0 \quad \forall \ \ v \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$g(u_n) \ = \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_0,$$

e

$$g(u_0) \ = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_0 = ||u_0||^2$$

Sendo g contínua, temos

$$g(u_n) \to g(u_0),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_0 \to ||u_0||^2.$$

De (2.42), segue que

$$||u_n||^2 \to ||u_0||^2.$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$||u_n - u_0||^2 = ||u_n||^2 - 2 < u_n, u_0 > + ||u_0||^2 \to 0.$$

Logo

$$u_n \to u_0 \ \text{ fortemente em } \quad H_0^1(\Omega).$$

Portanto, (u_n) possui uma subseqüência que converge em $H_0^1(\Omega)$. ■

Prova da Proposição 2.2: Como conseqüência dos Lemas 2.2 e 2.3, obtemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale. Por outro lado, pela Proposição 2.1, existe $e \in H_0^1(\Omega)$ e $0 < r < ||e||$ tais que

$$I(e) < I(0) = 0 < \inf_{||u||=r} I(u).$$

Portanto, aplicando o Teorema 1.18, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que v é um ponto crítico de I com

$$I(v) > 0. \tag{2.43}$$

O ponto crítico encontrado na Proposição 2.2 é uma solução não-trivial para o problema (2.12), consequentemente, uma solução para o problema (2.1).

2.1.2 Existência da Segunda Solução

Agora vamos encontrar uma segunda solução w em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I(w) < 0$. Para isto, usaremos argumentos de minimização. Construiremos esta solução numa bola $B_R[0]$ (bola fechada de centro zero e raio R), onde esta bola tem a seguinte propriedade:

$$I(u) \geq 0 \quad \text{com} \qquad ||u|| = R. \tag{2.44}$$

Observamos que é possível considerar uma bola fechada de centro zero e raio R com a propriedade (2.44). De fato, quando encontramos a primeira solução do Teorema 2.1, vimos que era possível obter a propriedade (2.44) para tal bola (c.f (2.26)). Vejamos agora um resultado crucial para obtermos a segunda solução.

Proposição 2.3 *Sob as hipóteses do Teorema* 2.1*, o funcional I satisfaz as seguintes condições:*

(i) *I é coercivo ($I(u) \to \infty$ quando $||u|| \to \infty$).*

(ii) *I é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Prova:

(i) Usando a hipótese (f_2), obtemos

$$I(u) \quad \geq \quad \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega d_1(x)u \; dx - \frac{d_2}{\sigma}\int_\Omega |u|^\sigma dx.$$

Da desigualdade de Hölder, segue

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - ||d_1||_{\sigma'}||u||_\sigma - \frac{d_2}{\sigma}||u||_\sigma^2. \tag{2.45}$$

Desde que $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e, usando a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, obtemos

$$I(u) \geq (\frac{1}{2} - C_2)||u||^2 - C_1||u||. \tag{2.46}$$

Portanto,

$$I(u) \to \infty, \quad \text{quando } ||u|| \to \infty.$$

Logo, I é coercivo.

(ii) Vejamos agora que I é fracamente semicontínuo inferiormente. De fato, observe que o funcional $L(u) := \frac{1}{2}||u||^2$ é convexo em $H_0^1(\Omega)$, que é um espaço de Banach reflexivo. Segue então do Teorema 1.14 que L é fracamente semicontínuo inferiormente.

Seja $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Uma vez que a imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega) \qquad \text{com} \qquad 1 \leq \sigma < 2 \tag{2.47}$$

é compacta, temos a menos de subseqüência,

$$u_n \to u_0 \qquad \text{em } L^\sigma(\Omega).$$

Pelo Teorema 1.7, temos

$$u_n(x) \to u_0(x) \;\; q.t.p. \;\text{ em } \Omega \tag{2.48}$$

e,

$$|u_n(x)| \leq v(x) \;\; q.t.p. \;\text{ em } \Omega, \qquad v \in L^\sigma(\Omega). \tag{2.49}$$

Sendo $F(x,u)$ uma função de Carathéodory, segue de (2.48) que

$$F(x, u_n(x)) \to F(x, u_0(x)). \tag{2.50}$$

Usando (2.49) e a hipótese (f_1), obtemos

$$F(x, u_n(x)) \leq d_1(x)|v(x)| + \frac{d_2}{\sigma}|v(x)|^\sigma = g(x). \tag{2.51}$$

Observando que $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $v \in L^\sigma(\Omega)$, obtemos que $g \in L^1(\Omega)$. Segue então de (2.50), (2.51), e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega F(x, u_n(x))dx \to \int_\Omega F(x, u_0(x))dx. \tag{2.52}$$

Da convexidade de L e de (2.52), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \inf I(u_n) &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \inf ||u_n||^2 - \lim_{n\to\infty} \sup \int_\Omega F(x, u_n(x))dx \\ &\geq \frac{1}{2}||u \end{aligned}$$

De fato, seja u_1 a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$. Então, pelo Teorema 1.24, $u_1 \in L^\infty(\Omega_1)$. Podemos tomar $t > 0$ suficientemente pequeno (por exemplo, $t \leq s_1/||u_1||_\infty$ tal que

$$0 \leq tu_1 \leq t||u_1||_\infty \leq s_1, \quad \text{ou seja,} \quad 0 \leq \; tu_1 \leq s_1.$$

De (f_4), temos

$$\begin{aligned} I(tu_1) &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2 - \frac{\Theta_1}{2}\int_{\Omega_1}(tu_1)^2 \\ &= \frac{t^2}{2}\Big[\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2 - \Theta_1\int_{\Omega_1}|u_1|^2\Big]. \end{aligned}$$

Sendo $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$, obtemos

$$I(tu_1) < \frac{t^2}{2}\Big[\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2 - \lambda_1(\Omega_1)\int_{\Omega_1}|u_1|^2\Big]. \tag{2.54}$$

Usando o fato de que

$$\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2 - \lambda_1(\Omega_1)\int_{\Omega_1}|u_1|^2 = 0.$$

Obtemos $I(tu_1) < 0$. Logo, a Afirmação 2.1 é satisfeita.

Uma vez que a bola fechada $B_R[0]$ é compacta na topologia fraca e I é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente (c.f Proposição 2.3), a restrição $I : B_R[0] \to \mathbb{R}$ é coerciva e fracamente semicontínua inferiormente. Usando o Teorema 1.17, obtemos que I é limitado inferiormente e seu ínfimo é atingido na bola fechada $B_R[0]$.

Afirmamos que este ínfimo é atingido na respectiva bola aberta $B_R(0)$. De fato, suponhamos que exista $u_0 \in B_R[0]$ tal que,

$$I(u_0) = \inf_{||u||=R} I(u). \tag{2.55}$$

Então,

$$I(u_0) \leq I(u) \;\; \forall\, u \in B_R[0]. \tag{2.56}$$

Por outro lado, de (2.44) segue

$$I(u_0) \geq 0 \;\; \text{para } u_0 \in \partial B_R. \tag{2.57}$$

Para t suficientemente pequeno e $u_1 \in B_R[0]$, segue que $tu_1 \in B_R(0)$, ou seja, $||tu_1|| < R$.

De (2.53) e (2.57) obtemos

$$I(tu_1) < 0 \leq I(u_0).$$

Contradizendo (2.56).
Logo, o ínfimo é atingido na bola aberta $B_R(0)$. Portanto, existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que w é um ponto crítico de I satisfazendo

$$I(w) < 0 \qquad \text{com} \qquad ||w|| < R. \tag{2.58}$$

Desta forma, w é uma solução não-trivial para o problema (2.12), consequentemente, uma solução para o problema (2.1).

2.1.3 O Comportamento da Segunda Solução em Relação ao Comportamento da Não Linearidade

Vejamos que, se $||a_0||_{\sigma_q} \to 0$ e b_0 é limitado em $L^{\sigma_p}(\Omega)$, então a solução $w = w_f$ (depende da não-linearidade), pode ser construída de tal forma que $||w_f|| \to 0$.

Para isto, basta vermos que é possível construir bolas, de centro zero e raio R, verificando (2.44) com $R \to 0$, pois desta forma, a solução w construída anteriormente satisfaz (2.58) e, portanto, se $R \to 0$ fica claro que $||w|| = ||w_f|| \to 0$.

Vejamos que é possível construir tais bolas. Fixemos $\alpha \in (0, 1/(1-q))$ e tomemos $R = ||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha}$. É claro que $||a_0||_{\sigma_q} \to 0$ implica $R \to 0$. Assim, para toda u com $||u|| = R$, temos em (2.23) que

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}R^2 - c_1||a_0||_{\sigma_q}R^{q+1} - c_2||b_0||_{\sigma_p}R^{p+1}\\
&= \frac{1}{2}||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha} - c_1||a_0||_{\sigma_q}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(q+1)} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p+1)}\\
&= \frac{1}{2}||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha} - c_1||a_0||_{\sigma_q}^{1+\alpha q+\alpha} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p+1)}\\
&= ||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha}\left[\frac{1}{2} - c_1||a_0||_{\sigma_q}^{1+\alpha q-\alpha} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p+1)-2\alpha}\right]\\
&= ||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha}\left[\frac{1}{2} - c_1||a_0||_{\sigma_q}^{1-\alpha(1-q)} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p-1)}\right].
\end{aligned}$$

Pela escolha de α, temos $1-\alpha(1-q) > 0$. Sendo $\alpha(p-1) > 0$, $I(u) \geq 0$ para $||a_0||_{\sigma_q} > 0$ suficientemente pequeno. Portanto,

$$I(u) \geq 0 \text{ para toda } \quad u \qquad ||u|| = .$$

2.2 O Caso Crítico

Nesta Seção, vamos estudar o problema (2.1) com a não-linearidade sob condições de crescimento crítico. Mostraremos, sob determinadas condições, que o problema (2.1) não possui soluções. Para isto, vamos considerar o problema (2.1) com $f(x,s)$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

(f_6) Existem $d_1 \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2 s^{2^*-1},$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0, +\infty)$.

(f_7) Podemos escrever $\Omega = A_+ \cup A_- \cup A_0$, onde

$$A_+ := \{x \in \Omega; f(x,.) \geq 0 \text{ com } f(x,.) \not\equiv 0\},$$
$$A_- := \{x \in \Omega; f(x,.) \leq 0 \text{ com } f(x,.) \not\equiv 0\},$$
$$A_0 := \{x \in \Omega; f(x,.) \equiv 0\}.$$

Além disso, existe $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ um domínio não vazio tal que $A_+ \subset \tilde{\Omega} \subset A_+ \cup A_0$ e $\tilde{\Omega}$ é de classe $C^{1,1}$ se $\tilde{\Omega} \neq \Omega$.

(f_8) Existem $0 \leq q < 1 < p$ e $\tilde{a}, \tilde{b}$ funções não-negativas em $\tilde{\Omega}$ tais que

$$f(x,s) \geq \tilde{a}(x)s^q + \tilde{b}(x)s^p \quad \text{para } x \in \tilde{\Omega} \text{ q.t.p. e } s \in [0,+\infty),$$
$$\tilde{m} := (\tilde{a})^{(p-1)/(p-q)}(\tilde{b})^{(1-q)/(p-q)} \not\equiv 0 \quad \text{em } \tilde{\Omega}, \quad \text{e}$$
$$\tilde{m} \in L^r(\tilde{\Omega}) \quad \text{para algum} \quad r > N/2.$$

Vejamos agora alguns comentários sobre as hipóteses $(f_6) - (f_8)$.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_6). Esta hipótese é uma condição de crescimento crítico.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_7). Esta hipótese nos garante que $f(x,s)$ tem sinal definido num determinado domínio, a saber, em $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Observamos que se $\tilde{\Omega} = \Omega$ e $f(x,s) \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, a hipótese (f_7) é satisfeita.

• **Comentários sobre a hipótese** (f_8). A condição (f_8) é uma espécie de limitação por baixo para a não-linearidade $f(x,s)$ em $\tilde{\Omega}$.

Para esta seção vamos considerar o seguinte problema de autovalor com peso indefinido:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})\ \tilde{m}\ u & \text{em} \quad \tilde{\Omega}, \\ u &= 0 & \text{sobre} \quad \partial\tilde{\Omega}, \end{cases} \tag{2.59}$$

onde $\tilde{\Omega} \subset \mathsf{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio limitado, $\tilde{m} : \tilde{\Omega} \to \mathsf{R}$ é o peso com sinal indefinido, ambos dados em (f_8) e $\lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})$ é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\tilde{\Omega})$ para o peso $\tilde{m}$. Dizemos que u_1 é uma autofunção associada à $\lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})$ se u_1 é uma solução fraca não-trivial do problema (2.59).

Observação: Sob a hipótese (f_8), segue do Teorema 1.23 que a primeira autofunção associada a $\lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})$ é positiva.

2.2.1 Resultado de Não-Existência

No que segue, apresentaremos um resultado de não-existência de soluções para o problema (2.1). Mais precisamente, temos:

Teorema 2.2 *Sob as hipóteses $(f_6),(f_7)$ e (f_8), existe $c = c(p,q) > 0$ tal que, o problema (2.1) não tem soluções se*

$$\lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega}) < c(p,q), \tag{2.60}$$

onde $\lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})$ é dado no problema (2.59).

Para a prova do Teorema 2.2, vamos usar os seguintes resultados:

Lema 2.4 *Sob as hipóteses $(f_6),(f_7)$ e (f_8), se u é uma solução do problema (2.1), então $u > 0$ em $\tilde{\Omega}$.*

Prova: Primeiro, mostraremos que $u \not\equiv 0$ em A_+. De fato, escolhendo $\varphi = u$ como função teste em (2.13), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f(x,u)u = \int_{A_+} f(x,u)u + \int_{\Omega\setminus A_+} f(x,u)u. \tag{2.61}$$

Se $u \equiv 0$ em A_+, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_{\Omega\setminus A_+} f(x,u)u \leq 0, \tag{2.62}$$

pois em $\Omega\setminus A_+$, $u \geq 0$ e $f(x,u) \leq 0$. Portanto, $u \equiv 0$ em Ω, o que é uma contradição. Logo, $u \not\equiv 0$ em $A_+ \subset \tilde{\Omega}$, ou seja, $u \not\equiv 0$ em $\tilde{\Omega}$. Por outro lado, desde que $\tilde{\Omega} \subset A_+ \cup\ A_0$, segue que

$$-\Delta u = f(x,u) \geq 0 \quad \text{em} \quad \tilde{\Omega},$$

Usando o Princípio do Máximo Forte (ver Teorema 1.21) e o fato que $u \not\equiv 0$ em $\tilde{\Omega}$, segue que $u > 0$ em $\tilde{\Omega}$. ∎

Lema 2.5 *Sob as hipóteses $(f_6), (f_7)$ e (f_8), se u é uma solução do problema (2.1), então existe $c = c(p, q)$ tal que*

$$c(p, q) \le \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}). \tag{2.63}$$

Prova: Consideremos $\varphi \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ com $\varphi \ge 0$. Primeiro mostremos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \ge \; c(p, q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi. \tag{2.64}$$

De fato,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(x, u)\; \varphi \ge \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u)\varphi \qquad \forall\; \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.65}$$

De (f_8),

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \ge \int_{\tilde{\Omega}} [\tilde{a}(x) u^q + \tilde{b}(x) u^p]\varphi \;\; \forall \;\; \varphi \in H_0^1(\tilde{\Omega}). \tag{2.66}$$

Escolhendo $A = \tilde{a}(x)$ e $B = \tilde{b}(x)$, segue que $A, B \ge 0$. Usando o Lema 1.2 em (2.66), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \ge c(p, q) \int_{\tilde{\Omega}} \Big(\tilde{a}(x)^{(p-1)/(p-q)} + \tilde{b}(x)^{(1-q)/(p-q)}\Big) u\varphi = c(p, q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi \tag{2.67}$$

para $x \in \tilde{\Omega}$ q.t.p, $s \in [0, +\infty)$ e $\tilde{m} = \tilde{a}(x)^{(p-1)/(p-q)} + \tilde{b}(x)^{(1-q)/(p-q)} \not\equiv 0$.
Logo, (2.64) acontece.

Seja φ a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})$ do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\tilde{\Omega})$ para o peso $\tilde{m}$, ou seja, φ uma solução do problema (2.59). De (f_8), obtemos $\tilde{m} \ge 0,\; \tilde{m} \not\equiv 0$ em $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{m} \in L^r(\tilde{\Omega})$ para algum $r > \frac{N}{2}$.

Vamos analisar dois casos:

1° **caso**: $\tilde{\Omega} \neq \Omega$.

Observamos da hipótese (f_7) que $\tilde{\Omega}$ é de classe $C^{1,1}$ e, do Teorema 1.24, segue que $\varphi \in C^1(\tilde{\Omega} \cup \partial\tilde{\Omega}) \cap H^2(\tilde{\Omega})$. Além disso,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \le 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\tilde{\Omega},$$

Sendo $u \geq 0$ sobre $\tilde{\Omega}$, a função traço de u sobre $\partial\tilde{\Omega}$ é não-negativa. Juntando este fato com (2.68),

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi \leq -\int_{\tilde{\Omega}} \Delta\varphi \; u. \tag{2.70}$$

Pela escolha de φ, segue que

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi \leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u. \tag{2.71}$$

Sendo $u, \varphi > 0$ e $\tilde{m} \geq 0, \tilde{m} \not\equiv 0$ em $\tilde{\Omega}$, temos que $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u > 0$. De (2.67), obtemos

$$c(p,q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u \leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi. \tag{2.72}$$

Donde,

$$c(p,q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u \leq \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi. \tag{2.73}$$

De (2.71), temos

$$c(p,q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u \leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi$$

ou seja,

$$[c(p,q) - \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})] \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u \leq 0.$$

Portanto, se $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}\varphi u > 0$, segue que

$$c(p,q) \leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}).$$

2° **caso**: $\tilde{\Omega} = \Omega$.

Prossegindo de modo análogo ao caso anterior, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \geq c(p,q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi.$$

Como em (2.64). Ou ainda, usando que $\tilde{\Omega} = \Omega$,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi \geq c(p,q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi. \tag{2.74}$$

Por outro lado,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\partial\tilde{\Omega}} u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \int_{\tilde{\Omega}} \Delta\varphi \; u = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \int_{\tilde{\Omega}} \Delta\varphi \; u \tag{2.75}$$

Pela escolha de φ e, usando que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi = \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi. \tag{2.76}$$

De (2.74) e (2.76), obtemos

$$c(p,q) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi \leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m} u \varphi.$$

Donde,

$$c(p,q) \leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}).$$

Portanto, em qualquer dos casos, obtemos (2.63). ■

Prova do Teorema 2.2: A partir dos Lemas 2.4 e 2.5 segue que se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução de (2.1), $\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) \geq c(p,q)$. Portanto, se $\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}) < c(p,q)$, u não é solução de (2.1). Donde concluímos a prova do Teorema 2.2.

2.3 O Caso Supercrítico

Neste caso, não podemos usar técnicas variacionais como as usadas no caso subcrítico. Diante disto, estudaremos a existência de soluções para o problema (2.1) usando o método de sub e super soluções.

2.3.1 Existência de Soluções

Para um resultado de existência de soluções para um possível problema supercrítico, vamos considerar o problema (2.1) com a não-linearidade $f(x,s)$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

(f_0) $f(x,0) \geq 0$ para $x \in \Omega$ q.t.p.

(f_3) Existem $0 \leq q < 1 < p$ e λ, b_0 números reais não-negativos tais que

$$f(x,s) \leq \lambda s^q + b_0 s^p,$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0, +\infty)$.

(f_4) Existem um subdomínio não vazio $\Omega_1 \subset \Omega$ de classe $C^{1,1}$ e $s_1 > 0$, tais que

$$f(x,s) \geq \lambda_1(\Omega_1) s,$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0, s_1]$.

Vejamos alguns comentários sobre as hipóteses (f_3) $-$ (f_4) .

• **Comentários sobre a hipótese** (f_3) . A hipótese (f_3) é uma espécie de limitação superior para $f(x,s)$ como na hipótese (f_3) da primeira seção deste Capítulo. A diferença aqui, é que λ e b_0 são apenas números não-negativos e agora p não está limitado. Desta forma, a não-linearidade $f(x,s)$ pode ser considerada sob condições de crescimento supercrítico. Esta condição (f_3) nos garantirá a existência de uma super-solução fraca para o problema (2.12).

• **Comentários sobre a hipótese** (f_4) . A hipótese (f_4) é uma condição de sublinearidade na origem para a não-linearidade $f(x,s)$. Esta condição nos garantirá a existência de uma sub-solução para o problema (2.12). Comparando-a com a hipótese (f_4) da primeira seção deste Capítulo, nesta, não exigimos que $F(x,s)$ seja superquadrática em Ω_1, exigimos apenas que a não-linearidade $f(x,s)$ seja sublinear na origem.

O resultado de existência de soluções para o problema (2.1) é:

Teorema 2.3 *Sob as condições* $(f_0),(f_3)$ *e* (f_4) *e assumindo que* Ω *é de classe* $C^{1,1}$*, existe* $\lambda_0 = \lambda_0(p,q,\Omega,b_0) > 0$ *tal que o problema* (2.1) *tem pelo menos uma solução se*

$$\lambda < \lambda_0. \tag{2.77}$$

Dividiremos a prova deste Teorema da seguinte forma:

1. Encontraremos uma super-solução para o problema (2.12);
2. Encontraremos uma sub-solução para o problema (2.12);
3. Encontraremos uma solução para o problema (2.1).

Como estamos considerando a hipótese (f_0), mostraremos a existência de uma solução para o problema (2.12), conseqüentemente, temos a existência de uma solução para o problema (2.1).

Lema 2.6 *O problema* (2.12) *tem uma super-solução.*

Prova: Vamos inicialmente considerar o seguinte problema de Dirichlet linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta e & = & 1 & \text{em} \quad \Omega, \\ e & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.78}$$

Usando o Teorema 1.2, verifica-se que o problema (2.78) tem solução. Usando o Teorema 1.24, segue que $e \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Vejamos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 2.2 *Existem* $M = M(p, \Omega, b_0) > 0$ *e* $\lambda_0 = \lambda_0(p, q, \Omega, b_0)$ *tal que, para* $0 \leq q < 1 < p$ *e* $\lambda \in [0, \lambda_0)$*, temos*

$$M \geq \lambda M^q ||e||_\infty^q + b_0 M^p ||e||_\infty^p. \tag{2.79}$$

De fato, supondo $||e||_\infty \leq 1$, a desigualdade (2.79) é equivalente a:

$$1 \geq (\frac{\lambda}{M^{1-q}} + b_0 M^{p-1})||e||_\infty^p. \tag{2.80}$$

Escolhendo M tal que $0 < b_0 M^{p-1} < 1$ e notando que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda}{M^{1-q}} = 0,$$

para $\lambda < \lambda_0$ suficientemente pequeno, temos

$$b_0 M^{p-1} + \frac{\lambda}{M^{1-q}} \leq 1.$$

Donde segue a afirmação 2.2.
Observando que

$$-\Delta(Me) = M, \tag{2.81}$$

segue de (2.79) e da hipótese (f_3)

$$-\Delta(Me) \geq \lambda(Me)^q + b_0(Me)^p \geq f(x, Me), \quad \forall\, x \in \ \Omega \text{ q.t.p..}$$

Donde,

$$\int_\Omega -\Delta(Me)v \geq \int_\Omega f(x, Me)v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.82}$$

Portanto, Me é uma super-solução de (2.12). ■

Lema 2.7 *O problema* (2.12) *tem uma sub-solução.*

Prova: Para mostrarmos a existência de uma sub-solução para o problema (2.12), vamos considerar um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ de classe $C^{1,1}$ como em (f_4) . Seja u_1 a primeira autofunção positiva normalizada de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$. Pelo Teorema 1.24, segue que $u_1 \in H^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega_1})$. Estendendo u_1 para 0 em $\Omega \backslash \Omega_1$, tem-se que a função estendida, a qual ainda denotaremos por u_1, pertence a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Seja $u \ = \epsilon u_1$ para $\epsilon > 0$ e escolhamos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Então

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi = \epsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla\varphi + \epsilon \int_{\Omega \backslash \Omega_1} \nabla u_1 \nabla\varphi \tag{2.83}$$

Sendo $u_1 = 0$ em $\Omega\backslash\Omega_1$, temos

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi = \epsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla\varphi. \tag{2.84}$$

Usando o Teorema 1.1, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi = \epsilon\Big\{ \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\varphi - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 \varphi \Big\}, \tag{2.85}$$

onde η é o vetor normal unitário exterior à Ω_1. Por outro lado, $\frac{\partial u_1}{\partial\eta} \leq 0$ sobre $\partial\Omega_1$ e pela escolha de φ segue de (2.85)

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi \leq -\epsilon \int_{\Omega_1} \Delta u_1 \varphi. \tag{2.86}$$

Pela escolha de u_1, temos

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi \leq \epsilon \int_{\Omega_1} \lambda_1(\Omega_1) u_1 \varphi = \int_{\Omega_1} \lambda_1(\Omega_1) u \ \varphi. \tag{2.87}$$

Para $s_1 > 0$ e $u \ \in [0, s_1]$ (por exemplo,$0 \leq u \ = \epsilon u_1 \leq \epsilon ||u_1||_\infty \leq s_1$), temos de (f_4)

$$f(x, u \ ) \geq \lambda_1(\Omega_1) u \ . \tag{2.88}$$

Logo, em (2.87), obtemos,

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi \leq \int_{\Omega_1} f(x, u \ )\varphi.$$

Donde, segue

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi \leq \int_\Omega f(x, u \ )\varphi \qquad \forall \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Deste modo, $u \ = \epsilon u_1$ é uma sub-solução fraca de (2.12). ■

Prova do Teorema 2.3**:** Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $\epsilon u_1 \leq Me$ em Ω. Pelos Lemas 2.6 e 2.7, temos que ϵu_1 e Me são sub-solução e super-solução, respectivamente, do problema (2.12). Aplicando o Teorema 1.19, temos a existência de uma solução fraca u para o problema (2.12) satisfazendo $\epsilon u_1 \leq u \leq Me$. Consequentemente, u é uma solução para o problema (2.1).

Capítulo 3

Multiplicidade de Soluções para um Problema Elíptico Não-Linear de Quarta Ordem

Neste Capítulo, estudaremos a multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico semilinear envolvendo o operador biharmônico:

$$\begin{cases} \Delta^2 u & + & c\Delta u & = & g(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u & = & \Delta u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, Δ^2 é o operador biharmônico, $c \in \mathsf{R}$ e $g : \Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo condições locais e com crescimento subcrítico.

Definição 3.1 *Dizemos que o problema* (3.1) *é sublinear (ou superlinear) na origem se existem $\alpha > \lambda_1(\Omega)(\lambda_1(\Omega) - c)$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$g(x,s) \geq (\leq) \;\; \alpha s, \quad \textit{para } x \in \Omega \textit{ q.t.p. e } s \in [0, s_0].$$

Dizemos que o problema (3.1) *é superlinear (ou sublinear) no infinito se existem $\beta > \lambda_1(\Omega)(\lambda_1(\Omega) - c)$ e $s_1 > 0$ tais que*

$$g(x,s) \geq (\leq)\beta s, \quad \textit{para } x \in \Omega \textit{ q.t.p. e } s \in [s_1, +\infty).$$

O resultado a seguir será muito importante para estudarmos o problema (3.1).

Lema 3.1 *Para toda $u \in V$, temos*

$$\int_\Omega (\Delta u)^2 \geq \lambda_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2. \tag{3.2}$$

Prova: Para obtermos (3.2), vamos considerar inicialmente, funções $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\lambda_1(\Omega) \int_\Omega (\varphi_{x_i})^2 \leq \int_\Omega |\nabla(\varphi_{x_i})|^2, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

De (3.3), segue que

$$\lambda_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \leq \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla(\varphi_{x_i})\nabla(\varphi_{x_i}), \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 &\leq -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Delta(\varphi_{x_i})\varphi_{x_i} \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega (\Delta\varphi)_{x_i}\varphi_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega (\Delta\varphi)\varphi_{x_i x_i} \\
&= \int_\Omega (\Delta\varphi)^2, \ \ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).
\end{aligned}$$

Assim, (3.2) é obtido para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. O resultado segue por densidade. ∎

Para estudarmos o problema (3.1), vamos considerar $c < \lambda_1(\Omega)$ e o seguinte espaço de Hilbert:

$$V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

munido do seguinte produto interno:

$$< u, v >= \int_\Omega \Delta u \Delta v - c \int_\Omega \nabla u \nabla v, \tag{3.5}$$

cuja norma proveniente, é dada por

$$||u||_V = \left(\int_\Omega [(\Delta u)^2 - c|\nabla u|^2] dx \right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Para verificarmos que (3.6) é uma norma em V, usamos o Lema 3.1 e o fato de $c < \lambda_1(\Omega)$. Como conseqüência imediata do Lema 3.1, segue que

$$||u||_V^2 \geq (\lambda_1(\Omega) - c)||u||^2. \tag{3.7}$$

De fato, para obtermos (3.7), basta somarmos $-c \int_\Omega |\nabla u|^2$ a ambos os membros de (3.2).

3.1 Multiplicidade de Soluções

Para estudarmos o problema (3.1), vamos considerar $N \geq 3$ e $c < \lambda_1(\Omega)$. Seja $\Omega \subset \mathsf{R}^N$ um domínio limitado e suave e $g : \Omega \times \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}$ uma função de Carathéodory. Para obtermos multiplicidade de soluções para o problema (3.1), vamos considerar $g(x, s)$ sob as seguintes hipóteses:

(g_1) Existem $1 \leq \sigma < 2$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que

$$|g(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1}$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in (0, +\infty)$, onde $2 \quad = \frac{2N}{N-4}$ se $N > 4$ e $2 \quad = \infty$ se $N \leq 4$.

(g_2) Existem $\Theta > 2$, $1 \leq r < 2$, $d \in L^{(2^{**}/r)'}(\Omega)$, com $d \geq 0$ em Ω q.t.p. e $s_0 \geq 0$, tais que

$$\Theta G(x,s) \leq sg(x,s) + d(x)s^r$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in (s_0, +\infty)$, onde $G(x, s)$ é uma primitiva de $g(x, s)$, ou seja, $G(x, s) := \int_0^s g(x, t)dt$.

(g_3) Existem $0 \leq q < 1 < p < 2 \quad -1$, $a_0 \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, com $\sigma_q := (2 \quad /(q+1))$ e $a_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω , $b_0 \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, com $\sigma_p := (2 \quad /(p+1))$ e $b_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω , tais que

$$g(x,s) \leq a_0(x)s^q + b_0(x)s^p$$

para $x \in \Omega$ q.t.p. e $s \in [0, +\infty)$.

(g_4) Existem um subdomínio não vazio $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)(\lambda_1(\Omega_1) - c)$ e $s_1 > 0$ tais que

$$G(x,s) \geq \Theta_1 \frac{s^2}{2}$$

para $x \in \Omega_1$ q.t.p. e $s \in [0, s_1]$.

(g_5) Existem um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Theta_2 > 0$ e $s_2 \geq 0$, tais que

$$G(x,s) \geq \Theta_2 s^2,$$

para $x \in \Omega_2$ q.t.p. e $s \in [s_2, +\infty)$. Além disso, $d(x)$ definido na hipótese (g_2) é limitado em Ω_2.

Definição 3.2 *$u \in V$ é uma solução fraca do problema* (3.1) *se:*

$$\int_\Omega [\Delta u \Delta \varphi - c\nabla u \nabla \varphi - g(x,u)\varphi]dx = 0, \qquad \forall\, \varphi \in V. \tag{3.8}$$

Consideremos o funcional $J : V \to \mathsf{R}$ associado ao problema (3.1), definido por

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega [(\Delta u)^2 - c|\nabla u|^2]dx - \int_\Omega G(x,u)dx. \tag{3.9}$$

A condição (g_1) nos garante que J está bem definido. De fato, observe que

$$J(u) := \frac{1}{2}||u||_V^2 - \int_\Omega G(x,u)dx.$$

Sendo a norma em V bem definida, então usando (g_1), a desigualdade de Hölder e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$, verifica-se que o funcional

$$\phi(u) := \int_\Omega G(x,u)dx. \tag{3.10}$$

está bem definido. Além disso, $J \in C^1(V, \mathsf{R})$ com

$$J\,'(u)\varphi = \int_\Omega [\Delta u \Delta \varphi - c\nabla u \nabla \varphi - g(x,u)\varphi]dx, \quad \forall\ \varphi\ \in V. \tag{3.11}$$

Portanto, encontrar soluções para o problema (3.1), é equivalente encontrar pontos críticos para o funcional J.
Vejamos agora o resultado de multiplicidade de soluções para o problema (3.1).

Teorema 3.1 *Sob as hipóteses* (g_0)–(g_5), *existe* $\eta = \eta(p,q,N) > 0$ *tal que se* $||a_0||_{\sigma_q}^{p-1}||b_0||_{\sigma_p}^{1-q} < \eta$, *o problema* (3.1) *tem pelo menos duas soluções* v *e* w *satisfazendo*

$$J(w) < 0 < J(v).$$

Além disso, se $||a_0||_{\sigma_q} \to 0$ *e* b_0 *é limitado em* $L^{\sigma_p}(\Omega)$, *então* $w = w_g$ *é tal que* $||w_g||_V \to 0$.

Antes de provarmos o Teorema 3.1, vejamos como conseqüência imediata, o seguinte resultado:

Corolário 3.1 *Sejam* a, b *satisfazendo as hipóteses* $(i) - (ii)$ *do Exemplo* 2.1. *Então existe* $\overline{\eta} = \overline{\eta}(p,q,N) > 0$ *tal que, se*

$$0 < \lambda < \frac{\overline{\eta}}{||a^+||_{\sigma_q}||b^+||_{\sigma_p}^{(1-q)/(p-1)}}, \tag{3.12}$$

o problema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \Delta^2 u & + & c\Delta u & = & \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & em & \Omega, \\ u & \geq & 0, & u & \not\equiv \quad 0 & em & \Omega, \\ u & = & \Delta u & = & 0 & sobre & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.13}$$

com $0 < q < 1 < p < 2 \quad - 1$ tem pelo menos duas soluções $\overline{v}$ e $\overline{w}$ satisfazendo

$$J(\overline{w}) < 0 < J(\overline{v})$$

onde J é definido por:

$$J(u) := \frac{1}{2}||u||_V^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega a(x)u^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(x)u^{p+1}dx.$$

Além disso, $\overline{w} = \overline{w}_\lambda$ é tal que $||\overline{w}_\lambda||_V \to 0$ quando $\lambda \to 0$.

Prova: Segue diretamente do Teorema 3.1. ■

Vamos dividir a prova do Teorema 3.1 em três etapas da seguinte forma:

1. A existência da primeira solução será obtida via Teorema do Passo da Montanha;
2. A existência da segunda solução será obtida via argumento de minimização;
3. Analisaremos o comportamento da segunda solução em relação ao comportamento da não-linearidade.

Vejamos a primeira etapa.

3.1.1 Existência da Primeira Solução

Aqui, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obtermos existência de uma solução $v \in V$, satisfazendo $J(v) > 0$. Vejamos agora que o funcional J satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Proposição 3.1 [*Geometria do Passo da Montanha*] *o funcional J satisfaz:*

(J_1) $J(0) = 0$;

(J_2) *Existe $r > 0$ tal que $J(u) > 0$, para toda $u \in V$ com $||u|| = r$;*

(J_3) *Existe $e \in V$ com $0 < r < ||e||$ tal que $J(e) < 0$.*

Prova: (J_1) é óbvio.

Vejamos que (J_2) é satisfeita. De fato, da hipótese (g_3) segue que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}||u||_V^2 - \int_\Omega \Big[\frac{a_0 u^{q+1}}{q+1} + \frac{b_0 u^{p+1}}{p+1}\Big]dx \\ &\geq \frac{1}{2}||u||_V^2 - (q+1)^{-1}\int_\Omega a_0(u^+)^{q+1}dx - (p+1)^{-1}\int_\Omega b_0(u^+)^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
J(u) \quad &\geq \quad \frac{1}{2}||u||_V^2 - (q+1)^{-1}||a_0||_{\sigma_q}\Big(\int_\Omega |u^+|^{\sigma_q'(q+1)}\Big)^{1/\sigma_q'} \\
&\quad -(p+1)^{-1}||b_0||_{\sigma_p}\Big(\int_\Omega |u^+|^{\sigma_p'(p+1)}\Big)^{1/\sigma_p'} \\
&= \quad \frac{1}{2}||u||_V^2 - (q+1)^{-1}||a_0||_{\sigma_q}\Big(\int_\Omega |u^+|^{2^*}\Big)^{(q+1)/2^*} \\
&\quad -(p+1)^{-1}||b_0||_{\sigma_p}\Big(\int_\Omega |u^+|^{2^*}\Big)^{(p+1)/2^*}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}||u||_V^2 - (q+1)^{-1}||a_0||_{\sigma_q}||u^+||_{2^*}^{q+1} - (p+1)^{-1}||b_0||_{\sigma_p}||u^+||_{2^*}^{p+1}. \tag{3.14}$$

Consideremos

$$S := \inf\Big\{\int_\Omega |\nabla u|^2; \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u|^{2^*} = 1\Big\}.$$

Escolhendo $v = \dfrac{u}{||u^+||_{2^*}}$, segue que $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |v|^{2^*} = 1$.
Observamos que

$$S \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 = \frac{||u||^2}{||u^+||_{2^*}^2},$$

ou seja,

$$||u^+||_{2^*}^{q+1} \leq S^{-(q+1)/2}||u||^{q+1}. \tag{3.15}$$

Multiplicando (3.15) por $-(q+1)^{-1}$, obtemos

$$-(q+1)^{-1}||u^+||_{2^*}^{q+1} \quad \geq \quad -(q+1)^{-1}S^{-(q+1)/2}||u||^{q+1}. \tag{3.16}$$

De modo análogo,

$$-(p+1)^{-1}||u^+||_{2^*}^{p+1} \geq -(p+1)^{-1}S^{-(p+1)/2}||u||^{p+1}. \tag{3.17}$$

Substituindo (3.16) e (3.17) em (3.14), obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}||u||_V^2 - c_1||a_0||_{\sigma_q}||u||_V^{q+1} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||u||_V^{p+1} \quad \forall \ u \in V, \tag{3.18}$$

onde $c_1 = (q+1)^{-1}[S(\lambda_1(\Omega) - c)]^{-(q+1)/2}$ e $c_2 = (p+1)^{-1}[S(\lambda_1(\Omega) - c)]^{-(p+1)/2}$.

Sejam $A = 2c_1||a_0||_{\sigma_q}$ e $B = 2c_2||b_0||_{\sigma_p}$. Observamos que $A, B > 0$, pois $c_1, c_2 > 0$ e $a_0, b_0 \neq 0$. Logo em (3.18), obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}||u||_V^2 - \frac{A}{2}||u||_0^{q+1} - \frac{B}{2}||u||_0^{p+1} \quad \forall u \in V. \tag{3.19}$$

Tomando $||u||_V = t_B$, onde t_B é dado no Lema 1.1, temos em (3.19)

$$J(u) \geq \frac{1}{2}t_B^2 - \frac{A}{2}t_B^{q+1} - \frac{B}{2}t_B^{p+1} = \frac{1}{2}\Big(t_B^2 - At_B^{q+1} - Bt_B^{p+1}\Big) = \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B). \tag{3.20}$$

Usando o Lema 1.1, obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B) > 0$$

se, e somente se,

$$A^{p-1}B^{1-q} < \eta(p,q),$$

isto é,

$$||a_0||_{\sigma_q}^{p-1}||b_0||_{\sigma_p}^{1-q} < \frac{\eta(p,q)}{(2c_1)^{p-1}(2c_2)^{1-q}} = \eta(p,q,N). \tag{3.21}$$

Portanto, para

$$||a_0||_{\sigma_q}^{p-1}||b_0||_{\sigma_p}^{1-q} < \eta = \eta(p,q,N),$$

obtemos

$$J(u) > 0 \quad \forall\ u \in V \quad \text{com} \quad ||u|| = r,\ r > 0. \tag{3.22}$$

O que prova (J_2).

Para verificarmos (J_3) é suficiente mostrar que $J(tu_2) \to -\infty$, para algum $u_2 \in V$.

Vamos escolher s_3 suficientemente grande tal que $s_3 \geq s_0 \geq 0$ (pela hipótese (g_2)) e para algum $\Theta_3 > 0$,

$$G(x,s) \ \geq \ \Theta_3 s^2 + 1. \tag{3.23}$$

para $x \in \Omega_2$ q.t.p. e para todo $s \in [s_3, +\infty)$, onde $\Omega_2 \subset \Omega$ (que é claramente possível de (g_5)). De (g_2), obtemos

$$\frac{\Theta}{t} \leq \frac{g(x,t)}{G(x,t)} + \frac{d(x)t^{r-1}}{G(x,t)} \tag{3.24}$$

para $d \in L^{(2^{**}/r)}(\Omega),\ d \geq 0, \Theta > 2$ e $1 \leq r \leq 2$.
Integrando (3.24) de s_3 até s, obtemos

$$\ln(s/s_3)^{\Theta} \leq \ln(\ G(x,s)/G(x,s_3)\ ) + d(x)\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{G(x,t)}dt.$$

Então,

$$G(x,s) \geq G(x,s_3)(s/s_3)^{\Theta} \exp\Big[-d(x)\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{G(x,t)}dt\Big].$$

Usando (3.23) e a segunda parte da hipótese (g_5), obtemos

$$\begin{aligned} G(x,s) &\geq [\ (\Theta_3 s_3^2+1)/s_3^{\Theta}\ ]\ s^{\Theta} \exp\Big[-c\int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{G(x,t)}dt\Big] \\ &\geq cs^{\Theta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$G(x,s) \geq cs^{\Theta} \qquad \text{para } x\in\Omega_2 \text{ q.t.p e } s\in[s_3,+\infty) \tag{3.25}$$

onde $c>0$ é uma constante.

Seja $u_2 \in V\cap H^{\Theta}(\Omega)$ uma função suave com suporte compacto em Ω_2 e $u_2\geq 0, u_2 \not\equiv 0$. Consideremos tu_2, com $t\geq t_2$ onde t_2 é tal que

$$med\{x\in\Omega_2; tu_2\geq s_3\}>0.$$

Temos

$$J(tu_2)=\frac{t^2}{2}||u_2||_V^2-\int_{\Omega_2}G(x,tu_2)dx.$$

Ou seja,

$$J(tu_2)=\frac{t^2}{2}||u_2||_V^2-\int_{A_1}G(x,tu_2)dx-\int_{A_2}G(x,tu_2)dx. \tag{3.26}$$

onde, $A_1=\{x\in\Omega_2;\ tu_2<s_3\}$ e $A_2=\{x\in\Omega_2;\ tu_2\geq s_3\}$.
Observamos que $G:\Omega_2\times[0,s_3)\to \mathsf{R}$ é contínua. Portanto em A_1 temos

$$|G(x,tu_2)|\leq c_1, \quad \text{o que implica que} \quad -G(x,tu_2)\leq c_1.$$

Em A_2, $G:\Omega_2\times[s_3,+\infty)\to\mathsf{R}$ é tal que

$$G(x,tu_2)\geq ct^{\Theta}u_2^{\Theta}$$

devido à (3.25).
Assim, em (3.26), temos

$$\begin{aligned} J(tu_2) &\leq \frac{t^2}{2}||u_2||_V^2+\int_{A_1}c_1-c_2t^{\Theta}\int_{A_2}(u_2)^{\Theta}dx \\ &= \frac{t^2}{2}||u_2||_V^2+c_1|A_1|-c_2t^{\Theta}c_3|A_2| \\ &= \frac{t^2}{2}||u_2||_V^2+c\ -c\ t^{\Theta}. \end{aligned}$$

Sendo $\Theta>2$, segue que $J(tu_2)\to-\infty$ quando $t\to+\infty$. Então, existe $e=tu_2\in V$ com $||e||_V=||tu_2||_V>r$, para algum t apropriado, tal que $J(e)<0$. Portanto, (J_3) é satisfeita. ■

Proposição 3.2 *O funcional J tem um ponto crítico.*

Para vermos isto, mostraremos primeiro que:

- Toda seqüência que satisfaz (PS) é limitada.
- O funcional J satisfaz a condição (PS).

Veremos isto através de dois resultados como segue:

Lema 3.2 *Toda seqüência que satisfaz (PS) é limitada.*

Prova: Seja (u_n) uma seqüência (PS), ou seja,

$$|J(u_n)| \leq C \text{ e } |J\ (u_n)\varphi| \leq \varepsilon_n ||\varphi||, \ \forall\ \varphi \in V \text{ com } \varepsilon_n \to 0.$$

Para $\Theta > 2$, temos

$$\begin{aligned} \Theta J(u_n) - J\ (u_n)u_n &\leq |\Theta J(u_n) - J\ (u_n)u_n| \\ &\leq \Theta|J(u_n)| + |J\ (u_n)u_n| \\ &\leq C + \varepsilon_n ||u_n||_V, \quad \varepsilon_n \to 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\Theta J(u_n) = \frac{\Theta}{2}||u_n||_V^2 - \Theta \int_\Omega G(x, u_n) \tag{3.27}$$

e,

$$J\ (u_n)u_n = ||u_n||_V^2 - \int_\Omega g(x, u_n)u_n. \tag{3.28}$$

Então,

$$\Theta J(u_n) - J\ (u_n)u_n = \Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||_V^2 - \int_\Omega \Big(\Theta G(x, u_n) - u_n g(x, u_n)\Big). \tag{3.29}$$

Portanto,

$$\Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||_V^2 \leq \int_\Omega \Big(\Theta G(x, u_n) - u_n g(x, u_n)\Big) + C + \varepsilon_n ||u_n||_V.$$

De (g_2), temos

$$\Big(\frac{\Theta}{2} - 1\Big)||u_n||_V^2 \leq \int_\Omega d(x)u_n^r \quad + C + \varepsilon_n ||u_n||_V.$$

Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $(2 \ /r)$ e $(2 \ /r)$, obtemos

$$\Big(\frac{\Theta}{2}-1\Big)||u_n||_V^2 \leq ||d||_{(2^{**}/r)'}||u_n||_{2^{**}}^r + C + \varepsilon_n||u_n||_V\,.$$

Sendo $\Theta > 2$, temos $c_1 = \frac{\Theta}{2} - 1 > 0$. Então

$$0 < c_1||u_n||_V^2 \leq c_2||u_n||_{2^{**}}^r + c_3 + c_4||u_n||_V\,. \tag{3.30}$$

Usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^{**}}(\Omega)$, temos

$$0 < c_1||u_n||_V^2 \leq c_5||u_n||_V^r + c_3 + c_4||u_n||_V\,. \tag{3.31}$$

Afirmamos que (u_n) é limitada. Com efeito, supondo (u_n) não limitada, podemos tomar $||u_n||_V$ grande tal que

$$0 < c_1 \leq \frac{c_5}{||u_n||_V^{2-r}} + \frac{c_3}{||u_n||_V^2} + \frac{c_4}{||u_n||_V}. \tag{3.32}$$

Sendo $2 - r > 0$, tomando $||u_n||_V \to \infty$ em (3.32), temos uma contradição. Portanto, (u_n) é limitada. ■

Lema 3.3 *O funcional J satisfaz a condição (PS).*

Prova: Mostraremos que (u_n) possui uma subseqüência que converge em V. De fato, sendo V um espaço reflexivo e (u_n) limitada, existe uma subseqüência, a qual ainda denotaremos por (u_n), tal que

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ fracamente em }\; V. \tag{3.33}$$

Afirmamos que $u_n \to u$ fortemente em V. Com efeito, desde que $J\,(u_n) \to 0$ em V, temos

$$|J\,(u_n)\varphi| \;\leq\; \varepsilon_n||\varphi||_V\,,\ \forall\, \varphi \in V \;\text{ com } \varepsilon_n \to 0, \tag{3.34}$$

isto é,

$$\Big|\int_\Omega \Delta u_n \Delta\varphi - c\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi - \int_\Omega g(x,u_n)\varphi\Big| \leq\; \varepsilon_n||\varphi||_V\,,\ \forall\varphi \in V \text{ com } \varepsilon_n \to 0. \tag{3.35}$$

Escolhendo $\varphi = u_n - u_0$ em (3.35), obtemos

$$\Big|\int_\Omega \Delta u_n \Delta(u_n-u_0) - c\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n-u_0) - \int_\Omega g(x,u_n)(u_n-u_0)\Big| \leq \varepsilon_n||u_n-u_0||_V\,,\ \varepsilon_n \to 0. \tag{3.36}$$

De (3.36), segue

$$\Big|\int_\Omega \Big[\Delta u_n \Delta(u_n - u_0) - c\nabla u_n \nabla(u_n - u_0)\Big]\Big| \leq \varepsilon_n ||u_n - u_0||_V + \Big|\int_\Omega g(x,u_n)(u_n - u_0)\Big|, \; \varepsilon_n \to 0. \tag{3.37}$$

Passando o limite em (3.37) e observando que

$$\varepsilon_n ||u_n - u_0||_V \to 0 \quad \text{e} \quad \Big|\int_\Omega g(x,u_n)(u_n - u_0)\Big| \to 0,$$

devido a continuidade de $g(.,s)$ e ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\Big|\int_\Omega \Big[(\Delta u_n)^2 - c|\nabla u_n|^2\Big] - \int_\Omega \Big[\Delta u_n \Delta u_0 - c\nabla u_n \nabla u_0\Big]\Big| \to 0,$$

isto é,

$$||u_n||_V^2 \to \int_\Omega \Big[\Delta u_n \Delta u_0 - c\nabla u_n \nabla u_0\Big]. \tag{3.38}$$

Prosseguindo como na prova do Lema 2.3, obtemos

$$\int_\Omega \Big[\Delta u_n \Delta u_0 - c\nabla u_n \nabla u_0\Big] \to ||u_0||_V^2,$$

ou seja,

$$||u_n||_V^2 \to ||u_0||_V^2.$$

Logo, se $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em V, temos

$$||u_n - u_0||_V^2 = ||u_n||_V^2 - 2 < u_n, u_0 > + ||u_0||_V^2 \to 0.$$

Isto é,

$$u_n \to u_0 \;\text{ fortemente em }\; V.$$

Assim, (u_n) possui uma subseqüência que converge fortemente em V. Portanto, J satisfaz a condição (PS). ■

Prova da Proposição 3.2: Temos pelo Lema 3.3 que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Por outro lado, pela Proposição 3.1, existe $e \in V$ e $0 < r < ||e||_V$ tais que

$$J(e) < J(0) = 0 < \inf_{||u||_V = r} J(u).$$

Portanto, aplicando o Teorema 1.18, existe $v \in V$ tal que v é um ponto crítico de J com $J(v) > 0$.

Observação: O ponto crítico encontrado na Proposição 3.2 é uma solução não-trivial para o problema (3.1). Conseqüentemente, uma solução do problema (**??**)

3.1.2 Existência da Segunda Solução

Vejamos agora que existe uma segunda solução $w \in V$ para o problema (3.1) tal que $J(w) < 0$. Para isto, usaremos argumentos de minimização. Construiremos esta solução numa bola $B_R[0]$ (bola fechada de centro zero e raio R) onde esta bola tem a seguinte propriedade:

$$J(u) \geq 0 \quad \text{com} \qquad ||u||_V = R. \tag{3.39}$$

Observamos que é possível considerar tal bola, pois quando encontramos a primeira solução do problema (3.1), vimos que era possível obter a propriedade (3.39) para a bola $B_R[0]$ (c.f (3.22)).

Nosso objetivo é encontrar uma solução $w \in B_R[0]$ tal que $J(w) < 0$. Para isto, provemos a seguinte afirmação:

Afirmação 3.1 *Existe $u_1 \in V$ tal que*

$$J(tu_1) < 0, \tag{3.40}$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, seja u_1 a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$. Segue do Teorema 1.24 que $u_1 \in L^\infty(\Omega_1)$. Podemos tomar $t > 0$ suficientemente pequeno (por exemplo, $t \leq s_1/||u_1||_\infty$) tal que

$$0 \leq tu_1 \leq t||u_1||_\infty \leq s_1, \quad \text{ou seja,} \quad 0 \leq \ tu_1 \leq s_1. \tag{3.41}$$

De (g_4), temos

$$\begin{aligned} J(tu_1) &= \frac{t^2}{2}||u_1||_V^2 - \int_{\Omega_1} G(x, tu_1) \\ &\leq \frac{t^2}{2}||u_1||_V^2 - \frac{\Theta_1}{2}\int_{\Omega_1}(tu_1)^2. \end{aligned}$$

Sendo $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)[\lambda_1(\Omega_1) - c]$, obtemos

$$J(tu_1) < \frac{t^2}{2}\Big[||u_1||_V^2 - \lambda_1(\Omega_1)[\lambda_1(\Omega_1) - c]\int_{\Omega_1}|u_1|^2\Big]. \tag{3.42}$$

Usando a desigualdade de Poincaré e o fato que $||u_1||_V^2 \leq (\lambda_1(\Omega_1) - c)\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2$, obtemos

$$J(tu_1) \leq 0.$$

Logo, a Afirmação 3.1 é satisfeita.

Prosseguindo de modo análogo à Proposição 2.3 obtemos que J é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente.

Uma vez que a bola fechada $B_R[0]$ é compacta na topologia fraca e J é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, a restrição $J : B_R[0] \to \mathsf{R}$ é coerciva e fracamente semicontínua inferiormente. Portanto, aplicando o Teorema 1.17, obtemos que J é limitado inferiormente e seu ínfimo é atingido na bola fechada $B_R[0]$.

Afirmamos que este ínfimo é atingido na respectiva bola aberta $B_R(0)$. De fato, suponhamos que exista $u_0 \in B_R[0]$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{||u||_V = R} J(u). \tag{3.43}$$

Então,

$$J(u_0) \leq J(u) \;\; \forall \, u \in B_R[0]. \tag{3.44}$$

De (3.39), temos

$$J(u_0) \geq 0 \text{ para } u_0 \; \in \; \partial B_R. \tag{3.45}$$

Temos que $tu_1 \in B_R(0)$ para $u_1 \in B_R[0]$ e para t suficientemente pequeno.
De (3.40) e (3.45) obtemos

$$J(tu_1) < 0 \leq J(u_0).$$

Contradizendo (3.44).
Logo, o ínfimo é atingido na bola aberta $B_R(0)$. Portanto, existe $w \in V$ tal que w é um ponto crítico de J satisfazendo

$$J(w) < 0 \qquad \text{com} \qquad ||w||_V < R. \tag{3.46}$$

Consequentemente, w é uma solução para o problema (3.1).

3.1.3 O Comportamento da Segunda Solução em Relação ao Comportamento da Não Linearidade

Vejamos que, se $||a_0||_{\sigma_q} \to 0$ e b_0 é limitado em $L^{\sigma_p}(\Omega)$, então a solução $w = w_g$, pode ser construída de tal forma que $||w_g||_V \to 0$.

Para isto, basta verificar que é possível construir bolas satisfazendo a propriedade (3.39) com $R \to 0$. De fato, a solução w construída anteriormente satisfaz (3.46) e, portanto, se $R \to 0$, fica claro que $||w||_V = ||w_g||_V \to 0$.

Vejamos que é possível construir tais bolas. Fixemos $\alpha \in (0, 1/(1-q))$ e tomemos $R = ||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha}$. É claro que se $||a_0||_{\sigma_q} \to 0$, então $R \to 0$.

Para toda u com $||u||_V = R$, temos em (3.18) que

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}R^2 - c_1||a_0||_{\sigma_q}R^{q+1} - c_2||b_0||_{\sigma_p}R^{p+1} \\
&= \frac{1}{2}||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha} - c_1||a_0||_{\sigma_q}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(q+1)} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p+1)} \\
&= \frac{1}{2}||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha} - c_1||a_0||_{\sigma_q}^{1+\alpha q+\alpha} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p+1)} \\
&= ||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha}\left[\frac{1}{2} - c_1||a_0||_{\sigma_q}^{1+\alpha q-\alpha} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p+1)-2\alpha}\right] \\
&= ||a_0||_{\sigma_q}^{2\alpha}\left[\frac{1}{2} - c_1||a_0||_{\sigma_q}^{1-\alpha(1-q)} - c_2||b_0||_{\sigma_p}||a_0||_{\sigma_q}^{\alpha(p-1)}\right].
\end{aligned}$$

Pela escolha de α, $1 - \alpha(1-q) > 0$. Sendo $\alpha(p-1) > 0$ temos que $J(u) \geq 0$ para $||a_0||_{\sigma_q} > 0$ suficientemente pequeno. Portanto,

$$J(u) \geq 0 \text{ para toda } \quad u \quad \text{com} \quad ||u||_V = R.$$

Prova do Teorema 3.1: Segue diretamente dos resultados obtidos nas Subseções 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3.

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519–543.

[2] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical points theory and applications*, J. Funct. Anal. **14**(1973), 349-381.

[3] A.C. Lazer, P.J. Mckenna,*Global bifurcation and a theorem of Tarantello*. J.Math. Anal.Appl.**181**(1994), 648–655.

[4] A.M. Micheletti, P.J. Pistoia, *Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem*. Nonlinear Anal. **31**(1998), 895–903.

[5] D.G. Costa, *Tópicos em Análise Não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[6] D.G. Costa, C. A. Magalhães, *Existence Results for Perturbations of the p-Laplacian*, Nonlinear Anal.**24**(1995), 409-418.

[7] D.G. Costa, C. A. Magalhães, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Anal. TMA **23**(1994), 1401-1412.

[8] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] D. G. de Figueiredo, *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, São Paulo, (1981).

[10] D. G. de Figueiredo, J.P. Gossez, P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems.* J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 2, 452–467.

[11] D. G. de Figueiredo, P. L. Lions, *On Pairs of positive solutions for class of semilinear elliptic problems.* Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 591-606.

[12] D. G. de Figueiredo, P. L. Lions, R. D. Nussbaum, *Estimations a priori pour les solutions positives de problemes elliptiques superlinearires.* (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 290 (1980), no. 5, A217-A220.

[13] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlim, 1983.

[14] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[15] G. Tarantello, *A note on a semilinear elliptic problem*, Diferential Integral Equations.**5**(1992), 561-565.

[16] G. Xu, J. Zhang, *Existence results for some fourth-order nonlinear elliptic problems of local superlinearity and sublinearity.* J. Math. Anal. **281** (2003), 633–640.

[17] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.

[18] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477.

[19] J. Zhang, *Existence results for some fourth-order nonlinear elliptic problems.* Nonlinear Anal. **45** (2001), 29–36.

[20] M. Struwe, *Variational Methods and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian systems*, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[21] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, 1996.

[22] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Vol. 65, Amer. Math. Soc. (1986).

[23] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[24] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis And Applications*, School of Mathematics Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore, India, 1989.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo