

MONITORAÇÃO DA REATIVIDADE ATRAVÉS DO HISTÓRICO DA POTÊNCIA
NUCLEAR

Alessandro da Cruz Gonçalves

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por:

Prof. Aquilino Senra Martinez, D. Sc.

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D. Sc .

Prof. Antônio Carlos Marques Alvim, Ph. D.

Prof. Hermes Alves Filho, D. Sc

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

GONÇALVES, ALESSANDRO CRUZ

Monitoração da Reatividade Através do
Histórico da Potência Nuclear [Rio de
Janeiro] 2006

VII, 64p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Nuclear, 2006)

Dissertação – Universidade Federal do
Rio de Janeiro, COPPE

1. Monitoração da Reatividade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedico esta obra
aos meus Pais,
pela inesgotável
paciência e dedicação.

Aos amigos,
pelos valiosos
momentos de descontração.

A Deus agradeço, guiar-me
dentre muitas ciência, à Física
de Reatores Nucleares.
Conduzindo-me
entre o sombrio vale da incerteza,
à lúcida compreensão
do imprevisível.

Agradeço a todos os amigos
do L.M.P. que direta ou indiretamente
estiveram envolvidos neste trabalho.

Dentre esses, em especial,
ao D.Sc Aquilino Senra Martinez
pelo seu incansável incentivo e
incontestável companheirismo e
ao D.Sc Fernando Carvalho da Silva
pela assistência e
pelos vários aconselhamentos.

Agradeço, também,
ao CNPq pelo apoio financeiro
integral a este trabalho.

Resumo da dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MONITORAÇÃO DA REATIVIDADE ATRAVÉS DO HISTÓRICO DA POTÊNCIA
NUCLEAR

Alessandro da Cruz Gonçalves

Março/2006

Orientadores: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Programa: Engenharia Nuclear

O principal objetivo desta dissertação é o desenvolvimento de um método para o cálculo da reatividade através do histórico da potência nuclear, e assim determinar explicitamente a reatividade em função do tempo, de forma a controlar a variação do nível da potência nuclear. O cálculo da reatividade é realizado com base nas equações da cinética pontual, e do valor da potência nuclear em um intervalo de tempo passado. Foi empregado para este cálculo o método inverso da solução das equações da cinética pontual. O método proposto foi validado através de inúmeros testes. Os resultados do processo de validação demonstram que o método proposto nesta tese é bastante preciso, não obstante sua simplicidade funcional.

Abstract of dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc)

REACTIVITY MONITORING USING NUCLEAR POWER HISTORY

Alessandro da Cruz Gonçalves

March/2006

Advisors: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Department: Nuclear Engineering

This dissertation presents a method for calculating reactivity based on the nuclear power history. Through this method the explicit determination of reactivity is possible, in such way as to control the variation of the nuclear power level. The calculation of reactivity is based on the point kinetics equations, and also on nuclear power levels at a previous time. The inverse method for solution of the point kinetics equations was used for this calculation. The proposed method was validated through several numerical tests. The validation process demonstrated that this method is quite accurate, despite its functional simplicity.

ÍNDICE

Capítulo I	1
Introdução	1
Capítulo II	5
Formalismo Básico da Cinética de Reatores	5
2.1 Introdução	5
2.2 Equação de Transporte de Nêutrons	5
2.3 Hipóteses Simplificadoras	7
2.4 Obtenção das Equações da Cinética de Reatores	10
2.5 Equações da Cinética Pontual	13
2.6 Limitações da Cinética Pontual	15
2.7 Discussão dos parâmetros β_j e λ_j	18
Capítulo III	22
Método Inverso para Cálculo da Reatividade	22
3.1 Introdução	22
3.2 Formulações Numéricas	25
3.2.1 Método dos Trapézios	26
3.2.2 Método de Simpson	27
3.2.3 Método Diferencial	28
3.3 Hipótese Adicionais e Limitações do Método Inverso	29
Capítulo IV	32
Validação do Método para o Cálculo da Reatividade	32
4.1 Introdução	32
4.2 Diferenças Finitas	33
4.3 Piecewise Constant Approximations – (PCA)	35
4.4 Validação do Programa para o Método de Diferenças Finitas	39
4.5 Validação do Método Inverso	41
4.6 Tratamento da Aquisição de Dados	49
4.7 Método da Média Móvel	49
4.8 Tratamento de Dados e Cálculo da Reatividade	50
Capítulo V	52
Análise dos Resultados	52
5.1 Dados Experimentais	52
5.2 Apresentação dos Resultados	54
5.3 Retardo Temporal	57
Capítulo VI	60
Conclusões	60
Referências Bibliográficas	62

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A reatividade mede essencialmente o desvio do fator de multiplicação efetivo da unidade^[1]. Logo, esta encontra-se relacionada com o nível da potência do reator nuclear e sua correspondente distribuição de temperatura^[2]. Os efeitos que proporcionam as variações na reatividade podem ser basicamente divididos em duas classes: os intrínsecos, que estariam relacionados às mudanças na temperatura e composição do sistema; e os externos, que incluem o controle da reatividade através das barras de controle e ácido bórico para alguns tipos de reatores^[2]. A reatividade é uma das propriedades mais importantes em um reator nuclear, visto que a mesma encontra-se diretamente relacionada com o controle do reator. Então, a formulação de uma metodologia que permita medir a reatividade em função do tempo é de fundamental importância para o controle de um reator nuclear.

Existem três técnicas principais de medidas da reatividade em um reator nuclear: estática, dinâmica e cinética. Na técnica estática, uma mudança a ser medida na reatividade (por exemplo a importância do xenônio) é balanceada por uma outra mudança conhecida de reatividade com a potência do reator mantida em um estado crítico. Na técnica dinâmica, a reatividade pode ser determinada, através das medidas de alguns parâmetros do reator nuclear, tal como, medida do período assintótico para determinar a reatividade através da equação Inhour^[3]. Esta técnica mostra-se eficiente para períodos positivos, porém para períodos negativos esta técnica sofre forte contribuição dos nêutrons retardados, possuindo assim uma baixa eficácia para medir reatividade negativa. Existem ainda alguns outros métodos de medidas para a técnica dinâmica, tais como, queda de barra de controle, oscilação de barra de controle^[3], etc^[4].

Na técnica cinética, as mudanças da reatividade podem ser feitas continuamente e a reatividade pode ser determinada, em cada instante de tempo, através da análise da variação temporal do nível de potência do reator nuclear utilizando-se o formalismo da cinética pontual.

Nesta dissertação de mestrado tem-se como principal objetivo o desenvolvimento de uma metodologia baseada na técnica cinética, que permita calcular a reatividade em um reator nuclear através do histórico da potência nuclear. Para tanto, utilizou-se o método inverso da solução das equações da cinética pontual, por ser conhecido o valor da potência nuclear em cada instante de tempo, e de posse desses valores foi calculada a reatividade correspondente. Foram empregadas algumas formulações matemáticas distintas na solução do método inverso da cinética pontual, a fim de se verificar quais das formulações apresentavam resultados mais precisos para a o cálculo da reatividade. Dentre as formulações empregadas pode ser destacada a solução da equação integral do histórico da potência nuclear através do método dos trapézios^[5], onde se considera que a função do integrando do histórico de potência nuclear varia linearmente dentro de um pequeno intervalo de tempo. Também resolveu-se a mesma equação integral do histórico da potência nuclear, utilizando-se o método de Simpson 3/8^[6]. Uma outra metodologia empregada consiste na transformação, através da regra de Leibniz^[7], da equação integral do histórico da potência nuclear em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, cuja solução foi realizada utilizando-se o método numérico de Runge-Kutta^[8] de terceira ordem.

O cálculo da reatividade através do histórico da potência, em uma usina nuclear tem diversas finalidades práticas, tais como:

a) determinação explícita da reatividade dependente do tempo, a qual é necessária para produzir uma variação na potência nuclear.

b) interpretação das respostas da potência nuclear em análises de transientes. Pode ser usada também para fornecer informações acerca dos mecanismos de realimentação no reator.

No capítulo II, é feita uma discussão detalhada da obtenção das equações da cinética pontual, assim como das aproximações empregadas nessa obtenção e suas limitações. É realizada também uma abordagem objetiva da determinação dos parâmetros utilizados nas equações da cinética pontual.

No capítulo III, é feita uma descrição detalhada do método inverso das equações da cinética pontual para obtenção da reatividade, assim como das formulações numéricas empregadas na solução das equações envolvidas. Também é realizada uma discussão sucinta das limitações existentes no método inverso

No capítulo IV, são utilizadas as metodologias propostas, no capítulo anterior, para cálculo da reatividade e os resultados obtidos são confrontados com os resultados obtidos através de um método de referência^[9], a fim de validar os métodos de solução propostos no capítulo III. Neste mesmo capítulo é feita uma descrição da técnica utilizada para tratamento dos dados adquiridos da potência nuclear. Para tanto, foi necessário o emprego de uma técnica capaz de tratar dados com razoáveis flutuações. Utilizou-se a técnica da média móvel^[10] para realizar uma suavização nos dados da potência nuclear, atenuando assim as flutuações existentes.

No capítulo V, são apresentados os resultados obtidos para o cálculo da reatividade, utilizando a técnica da média móvel para a suavização dos dados referentes à potência nuclear. Esses mesmos resultados são comparados com os

dados experimentais, a fim de verificar se os resultados obtidos encontram-se de acordo com os valores experimentais.

No último capítulo são apresentadas, de forma sucinta, as conclusões relevantes ao presente trabalho.

CAPÍTULO II

FORMALISMO BÁSICO DA CINÉTICA DE REATORES

2.1 Introdução

Conhecidas como equações da cinética de reatores, elas são simplesmente, o caso não estático da equação da difusão, considerando-se nêutrons retardados e, concentração de precursores como tais, podem ser obtidas da introdução de hipóteses simplificadoras na equação de transporte. Serão apresentadas as aproximações necessárias para a obtenção das equações da cinética de reatores, a partir da equação de transporte^[11], de modo a se ter uma idéia qualitativa das limitações na utilização das equações da cinética.

Utilizando-se as equações da cinética de reatores, foi possível obter as equações da cinética pontual, onde não são consideradas as variações espaciais do fluxo de nêutros. O modelo da cinética pontual é escolhido por se tratar de um modelo simples, que é capaz de oferecer respostas satisfatórias do ponto de vista físico, ou seja, com as equações da cinética pontual é possível obter respostas razoavelmente precisas sobre o comportamento da reatividade em função do tempo, exceto para algumas situações particulares, tal como a ejeção de barra de controle.

2.2 Equação de Transporte de Nêutrons

A melhor representação determinista que se pode obter da distribuição de nêutrons no interior de um reator é através da equação de transporte de nêutrons. A obtenção da equação de transporte é feita com base na conservação dos nêutrons em um pseudo-elemento de volume, que inclui as dependências angulares, energética e espaciais. Para uma geometria geral a equação de transporte pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \phi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) + s(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \quad (2.1)$$

onde:

$\phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$: o fluxo angular de nêutrons.

$\Sigma_t(\vec{r}, E, t)$: seção de choque macroscópica de total.

$\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, t)$: seção de choque diferencial macroscópica de espalhamento.

Como a equação de transporte de nêutrons representa um balanço dos processos de produção e perda de nêutrons, cada termo desta equação possui uma interpretação física, que é descrita a seguir:

Taxa da variação temporal angular de nêutrons

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

taxa de fuga dos nêutrons dentro de um elemento volume do reator

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

densidade de taxa de colisão

$$\Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

taxa de transferência energética e/ou angular de nêutrons

Ao integrar a equação (2.1) em todas as direções angulares possíveis, reduziu-se o número de variáveis independentes do espaço de fases de sete para cinco, obtendo assim a equação (2.2) que é conhecida como a equação da continuidade de nêutrons. É importante notar que desta equação surgem duas novas funções desconhecidas, que são o fluxo escalar de nêutrons $\phi(\vec{r}, E, t)$ e densidade total de corrente de nêutrons $\vec{J}(\vec{r}, E, t)$. Conseqüentemente, a solução da equação (2.2) não é possível, a menos que se gere uma informação adicional.

Esta informação adicional é obtida após a multiplicação da equação (2.1) por $\hat{\Omega}$, e posterior integração em todas as direções angulares possíveis, resultando^[1].

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \vec{\nabla} \cdot \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \vec{J}(\vec{r}, E, t) = \int_0^{\infty} dE' \Sigma_{s1}(\vec{r}, E' \rightarrow E) \vec{J}(\vec{r}, E', t) + \bar{s}_1(\vec{r}, E, t) \quad (2.3)$$

$$\text{Onde: } \bar{s}_1(\vec{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} d\hat{\Omega} s(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

$$\Sigma_{s1}(\vec{r}, E' \rightarrow E) \equiv \int_{4\pi} d\Omega \hat{\Omega}' \left[\int_{4\pi} d\Omega \hat{\Omega} \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \right]$$

A expressão acima permite que se introduzam hipóteses simplificadoras, que levem a obtenção da equação da difusão de nêutrons.

2.3 Hipóteses Simplificadoras

As hipóteses simplificadoras utilizadas nesta seção permitirão que seja possível obter as equações da cinética de reatores, assim como ter uma idéia qualitativa das limitações existentes na mesma.

A primeira hipótese impõe que o fluxo angular de nêutrons, $\phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$, tenha uma fraca dependência da variável angular $\hat{\Omega}$. Evidentemente

que esta aproximação tem restrições em aplicações práticas, como por exemplo, na proximidade e no interior de barras de controle, e na fronteira dos meios multiplicativos de nêutrons.

Tal aproximação pode ser representada matematicamente, pelo truncamento na primeira ordem da expansão em harmônicos esféricos do fluxo angular de nêutrons, e é conhecida como aproximação P_1 ^[1]:

$$\varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \cong \frac{1}{4\pi} \phi(\vec{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \vec{J}(\vec{r}, E, t) \quad (2.4)$$

Isto corresponde a supor uma variação linear do fluxo angular $\varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ com respeito a variável angular $\hat{\Omega}$. A aproximação apresentada na equação (2.4) é substituída no termo tensorial da equação (2.3), permitindo assim sua integração e resultando, após algum desenvolvimento, em $\frac{1}{3} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, t)$ ^[11].

Uma outra hipótese consiste em considerar que a fonte de nêutrons é isotrópica. Esta aproximação, do ponto de vista físico, é razoavelmente satisfatória, uma vez que, nos reatores nucleares, os nêutrons são gerados nas fissões nucleares segundo uma distribuição isotrópica, ou seja, os nêutrons das fissões não têm uma direção privilegiada. Sendo assim, esta aproximação nos leva a considerar que $\vec{s}_1(\vec{r}, E, t) = \vec{0}$ na equação (2.3).

Considerando que exista uma variação temporal suave da densidade de corrente, é possível desprezar a derivada temporal $\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$, quando comparada com a frequência de colisões de nêutrons $v \Sigma_t$ no interior do núcleo do reator. Com pequenas exceções^[1] a variação temporal da densidade de corrente de nêutrons é suave, quando comparada com a frequência de colisão cujo valor típico é da ordem de 10^5 s^{-1} ^[1].

Mais uma hipótese simplificadora a ser introduzida para a obtenção das equações da cinética de reatores, é considerar que a densidade total de correntes de nêutrons é diretamente proporcional ao gradiente espacial do fluxo de nêutrons. Esta aproximação é conhecida como Lei de Fick, $\vec{J}(\vec{r}, E, t) \cong -D(\vec{r}, E, t) \vec{\nabla} \cdot \phi(\vec{r}, E, t)$.

As simplificações apresentadas até aqui reduzem a equação de transporte de nêutrons à equação da difusão de nêutrons, qual seja,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, E, t) - \vec{\nabla} \cdot (D(\vec{r}, E, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, t)) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, t) = \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) + s(\vec{r}, E, t) \quad (2.5)$$

sendo o coeficiente de difusão $D(\vec{r}, E, t)$ definido da seguinte forma:

$$D(\vec{r}, E, t) \cong \frac{1}{3 \Sigma_{tr}(\vec{r}, E, t)} \quad (2.6)$$

onde Σ_{tr} é a seção de choque macroscópica de transporte.

Sabe-se que a aproximação da difusão não é válida nas extremidades do meio multiplicativo logo, o procedimento comum para reduzir o efeito desta limitação é impor condições especiais de contorno. Seja, por exemplo, o caso da interface de um meio multiplicativo convexo e o vácuo externo a este meio. A condição de contorno aplicável neste caso se baseia no fato de não haver nêutrons entrando no meio multiplicador através do contorno externo. Em outras palavras, a corrente incidente para o meio é nula, ou seja^[7]:

$$\int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{n}} d\hat{\Omega} \vec{J}(\vec{r}_s, E, \hat{\Omega}, t) \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.7)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário normal a superfície de contorno do meio multiplicador, apontando para o exterior deste meio, e \vec{r}_s é um ponto que pertence ao contorno.

Realizando a integração da equação (2.7), utilizando a aproximação P_1

para $\bar{J}(\bar{r}_s, E, \hat{\Omega}, t)$, a qual não é muito satisfatória no contorno, obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{1}{4}\phi + \frac{D}{2}\hat{n} \cdot \bar{\nabla}\phi = 0 \quad (2.6)$$

Na prática, a relação $\frac{\hat{n} \cdot \bar{\nabla}\phi}{\phi}$ no contorno pode ser calculada pela teoria de transporte, melhorando assim a condição de contorno associada à teoria da difusão

2.4 Obtenção das Equações da Cinética de Reatores

Para se obter as equações da cinética de reatores, deve-se caracterizar em duas frações os nêutrons que fazem parte das fissões dos núcleos. A primeira fração de nêutrons surge no momento da fissão, sendo estes nêutrons são denominados nêutrons prontos. A segunda fração de nêutrons surge quando isótopos produzidos na fissão, também chamados de precursores, decaem sendo os nêutrons oriundos deste processo de decaimento conhecidos como nêutrons retardados. Um exemplo típico do surgimento dos nêutrons retardados no processo de fissão é o caso do decaimento do ^{87}Br conforme mostrado na figura (2.1)^[12].

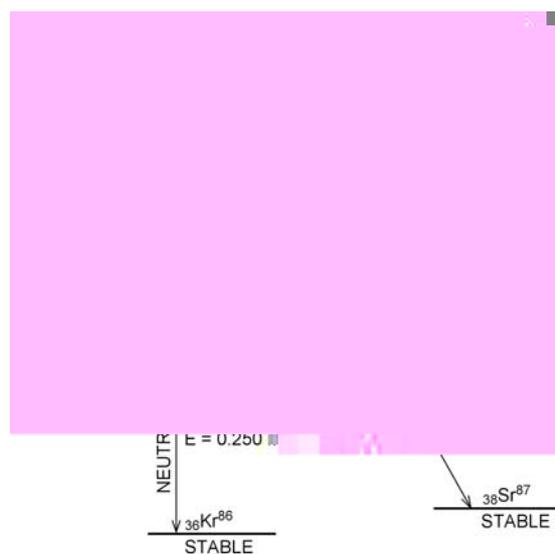


Figura (2.1) – Esquema de decaimento do ^{87}Br ^[12]

Devido ao grande número de precursores produzidos, dividem-se os precursores em grupos, por faixa do tempo médio de decaimento, sendo cada grupo de precursores caracterizado por uma constante de decaimento média. Nas tabelas (2.1) e (2.2) encontram-se os valores característicos do tempo de vida e das constantes de decaimento média, para cada um dos grupos de precursores; caracterizando os principais isótopos fissionáveis de acordo com a biblioteca de dados nucleares ENDF/ B-IV^[7].

Tabela (2.1) constantes de decaimento média e meia vida dos nêutrons retardados.

²³³ U			²³⁸ U		
Grupo	Meia Vida (s)	Constante de decaimento $\lambda(s^{-1})$	Grupo	Meia Vida (s)	Constante de decaimento $\lambda(s^{-1})$
1	55.110	0.0126	1	52.38	0.0132
2	20.740	0.0334	2	21.58	0.0321
3	5.300	0.131	3	5.00	0.139
4	2.290	0.317	4	1.93	0.358
5	0.546	1.27	5	0.493	1.41
6	0.221	3.13	6	0.172	4.02

Tabela (2.2) constantes de decaimento média e meia vida dos nêutrons retardados.

²³⁵ U			²³⁹ Pu		
Grupo	Meia Vida (s)	Constante de decaimento $\lambda(s^{-1})$	Grupo	Meia Vida (s)	Constante de decaimento $\lambda(s^{-1})$
1	54.51	0.0127	1	53.75	0.0129
2	21.84	0.0317	2	22.29	0.0311
3	6.				

$$S_f(\vec{r}, E, t) = (1 - \beta) \chi(E) \int_0^{\infty} v \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, E', t) dE' + \sum_{j=1}^n \chi^j(E) \lambda_j \eta_j(\vec{r}, t) \quad (2.9)$$

Logo, a forma geral das equações da cinética de reatores é a seguinte^[5]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, E, t) = & \vec{\nabla} \cdot (D(\vec{r}, E, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, t)) - \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, t) + \\ & + \int_0^{E_{MAX}} \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) dE' + (1 - \beta) \chi(E) \int_0^{E_{MAX}} v \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, E', t) dE' + \\ & + \sum_{j=1}^n \chi^j(E) \lambda_j \eta_j(\vec{r}, t) + S_{ext}(\vec{r}, E, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta_j(\vec{r}, t) = \beta \chi(E) \int_0^{E_{MAX}} v \Sigma_f(\vec{r}, E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) dE' - \lambda_j \eta_j(\vec{r}, t) ; j = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

Onde:

- $\phi(\vec{r}, E, t)$: fluxo escalar de nêutrons.
- $\eta_j(\vec{r}, t)$: concentração de precursores de nêutrons retardados do grupo j.
- v : velocidade dos nêutrons.
- $D(\vec{r}, E, t)$: coeficiente de difusão.
- $\Sigma_t(\vec{r}, E)$: seção de choque macroscópica de total.
- $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E)$: seção de choque diferencial macroscópica de espalhamento.
- $\Sigma_f(\vec{r}, E')$: seção de choque macroscópica de fissão.
- $S_{ext}(\vec{r}, E, t)$: fonte externa de nêutrons,
- $\chi^j(E)$: espectro de fissão dos nêutrons retardados proveniente do grupo j.
- λ_j : constante de decaimento dos precursores do grupo j.
- $\beta = \sum_{j=1}^n \beta_j$: fração total dos nêutrons que são retardados do grupo j,
- β_j : fração dos nêutrons retardados que são do grupo j,

- ν : número médio de nêutrons produzidos em uma fissão.
 n : número de grupos de precursores de nêutrons retardados.
 $\chi(E)$: espectro de fissão dos nêutrons prontos.

2.5 Equações de Cinética Pontual

Um das formas de se obter as equações da cinética pontual é impor as hipóteses que os nêutrons são monoenergéticos e o meio é homogêneo.

Aplicando-se essas hipóteses às equações (2.10) e (2.11), se obtêm um conjunto de equações independentes da variável energia, e que pode ser escrito da seguinte forma^[11]:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot (D(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t)) - \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \eta_j(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta_j(\vec{r}, t) = \beta_j \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) - \lambda_j \eta_j(\vec{r}, t); j = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

Admitindo que o fluxo de nêutrons $\phi(\vec{r}, t)$ e a concentração de precursores de nêutrons $\eta_j(\vec{r}, t)$ possam ser escritos como funções separáveis no tempo e no espaço, como representado nas equações a seguir:

$$\phi(\vec{r}, t) = \nu \cdot n(t) \cdot \psi(\vec{r}) \quad (2.14)$$

e

$$\eta_j(\vec{r}, t) = \tilde{C}_j(t) \cdot \psi(\vec{r}) \quad (2.15)$$

utilizando a equação de Helmholtz^[7]

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = -B_g^2 \cdot \psi(\vec{r}) \quad (2.16)$$

onde: B_g^2 é o buckling geométrico,

Levando as equações (2.14), (2.15) e (2.16) em (2.12) e (2.13), após algum desenvolvimento algébrico, obtém-se que:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left[(1-\beta)v v \Sigma_f - v \Sigma_a (1+L^2 B_g^2) \right] n(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{C}_j(t) \quad (2.17)$$

$$\frac{d\tilde{C}_j(t)}{dt} = -\lambda_j \tilde{C}_j(t) + \beta_j v \Sigma_f n(t) \quad (2.18)$$

Agora, definindo o fator de multiplicação como sendo

$$k \equiv \frac{v \Sigma_f / \Sigma_a}{(1+L^2 B_g^2)},$$

o tempo de vida dos nêutrons térmicos, como sendo

$$l \equiv \frac{1}{v \Sigma_a (1+L^2 B_g^2)}$$

e o tempo de geração médio entre o nascimento do nêutron e sua subsequente absorção induzindo fissão, como sendo

$$\Lambda \equiv \frac{l}{k}.$$

das equações (2.17) e (2.18) obtém-se que:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k(1-\beta)-1}{l} n(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{C}_j(t)$$

$$\frac{d\tilde{C}_j(t)}{dt} = \beta_j \frac{k}{l} n(t) - \lambda_j \tilde{C}_j(t), \quad j=1,2,\dots,n$$

Reescrevendo as equações acima, obtém-se,

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\frac{k-1}{k} - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{C}_j(t) \quad (2.19)$$

$$\frac{d\tilde{C}_j(t)}{dt} = \frac{\beta_j}{\Lambda} n(t) - \lambda_j \tilde{C}_j(t), \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.20)$$

Definindo a reatividade como a medida essencial do desvio do fator de multiplicação efetivo da unidade^[1].

$$\rho(t) \equiv \frac{k(t)-1}{k(t)}$$

E utilizando esta definição de reatividade, chega-se finalmente a um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas conhecidas como equações da cinética pontual.

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{C}_j(t) \quad (2.20)$$

$$\frac{d\tilde{C}_j(t)}{dt} = \frac{\beta_j}{\Lambda} n(t) - \lambda_j \tilde{C}_j(t), \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.21)$$

Fazendo uso novamente de mais algumas definições importantes, quais sejam,

$$P(t) \equiv w v n(t)$$

e

$$C_j(t) \equiv w v \tilde{C}_j(t)$$

Onde $P(t)$ é o nível de potência nuclear, $C_j(t)$ é a contribuição do nêutrons retardados para o nível de potência e w é a energia utilizável liberada por evento de fissão. Com base nas definições acima, as equações da cinética pontual adquirem a seguinte forma

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j(t) + S(t), \quad (2.22)$$

$$\frac{dC_j(t)}{dt} = \frac{\beta_j}{\Lambda} P(t) - \lambda_j C_j(t), \quad j=1,2,\dots,n. \quad (2.23)$$

Na seção seguinte será realizada uma breve discussão sobre as limitações da cinética pontual, devido às hipóteses empregadas na obtenção da mesma.

2.6 Limitações da Cinética Pontual

As hipóteses utilizadas na obtenção das equações da cinética pontual, tais como a aproximação da difusão a uma velocidade e a forma espacial independente do tempo, restringem o domínio de validade da mesma. Felizmente as equações da cinética pontual podem ser obtidas de uma forma muito mais geral

na qual tais hipóteses não são necessárias^[1]. Tal obtenção procede diretamente da equação de transporte e é usualmente muito formal. Ela conduz, no entanto, ao mesmo conjunto de equações (2.22) e (2.23), no qual somente as definições de β , Λ e ρ são mudadas. Conseqüentemente uma vez fornecidas expressões mais gerais para estes parâmetros, as equações da cinética pontual do reator podem ser consideradas como tendo um domínio de validade muito mais amplo.

Uma modificação importante que se introduz nas equações da cinética pontual é a inclusão dos efeitos de dependência energética. Isto surge principalmente porque os nêutrons retardados aparecem com energias mais baixas do que aquelas com que surgem os nêutrons prontos. Conseqüentemente num reator térmico eles não precisam moderar-se tanto e, portanto, são caracterizados por uma probabilidade bem mais alta de induzir fissão térmica (aproximadamente 20%). Naturalmente, isto pode trabalhar justo em direção oposta em reatores rápidos, já que os nêutrons retardados aparecem com energias abaixo do limiar para que ocorra fissão rápida. Tais efeitos podem ser levados em conta modificando-se adequadamente a definição dos parâmetros que surgem nas equações da cinética pontual, tais como, k , β_i , λ_i ^[1].

A aproximação mais séria realizada no processo de obtenção das equações da cinética pontual envolve a hipótese que o fluxo de nêutrons pode ser adequadamente representado por um único modo espacial fundamental, independente do tempo $\psi(\vec{r})$. Porém, em situações reais, o fluxo de nêutrons não pode ser representado unicamente pelo modo espacial fundamental, mas devendo sim ser representado pela soma de todos harmônicos. Contudo, é comum utilizar uma função forma $\psi(\vec{r})$ caracterizando uma configuração crítica do núcleo se o reator está próximo a um estado crítico ou num período verdadeiramente assintótico.

Quando as mudanças na composição do núcleo são suficientemente lentas, como nos estudos de depleção de combustível ou envenenamento de produtos de fissão, pode-se executar um cálculo de criticalidade instantâneo para o estado estacionário da função forma $\psi(\vec{r})$, ainda que esta forma deva mudar lentamente com o tempo.

Procedimentos mais elaborados existem para incluir a variação temporal na função forma. No entanto, para transientes variando rapidamente nos quais os efeitos espaciais são importantes, é necessário resolver a equação da difusão de nêutrons dependente do tempo, acarretando um gasto considerável de processamento computacional.

Naturalmente^[1], pode-se proceder de forma empírica notando que as equações da cinética pontual são válidas para situações mais gerais, admitindo-se que os valores corretos dos parâmetros β , Λ e ρ estão disponíveis (de medidas experimentais). Neste sentido todas as considerações detalhadas da forma espacial do fluxo são evitadas.

A reatividade $\rho(t)$ que aparece nas equações da cinética pontual depende do tamanho e composição do núcleo do reator. Conseqüentemente, mudando-se a composição, por exemplo, inserindo ou retirando barra de controle ou ajustando-se a concentração de ácido bórico, pode-se mudar $\rho(t)$ e conseqüentemente controlar o reator. Neste sentido, a reatividade se encontra sujeita ao controle do operador do reator nuclear.

No entanto, para qualquer reator operando a potência, a reatividade $\rho(t)$ deve também depender do próprio fluxo devido a vários fatores. Primeiro, o nível de potência influenciará a temperatura dos componentes do núcleo do reator. Contudo, as concentrações de materiais no núcleo dependem visivelmente de sua temperatura. Quando a temperatura muda eles podem se contrair ou se expandir ou até mesmo mudar de fase. Isto causa uma mudança nas seções de choque

macroscópicas e conseqüentemente na reatividade. Além disso, as mudanças de temperatura podem alterar as seções de choque microscópicas, por exemplo, via efeito Doppler^[1]. Finalmente, a concentração atômica dos materiais no núcleo do reator deve variar quando os produtos de fissão são produzidos ou os núcleos de combustível são fissionados e deplecionados isto influencia fortemente a reatividade.

Tais processos, por meio dos quais as condições de operações do reator devem afetar a criticalidade do núcleo, são conhecidos como efeitos de realimentação e esses feitos desempenham um papel extremamente importante na operação do reator. Esses efeitos de realimentação implicam que a reatividade deve ser considerada como uma função não linear do nível de potência $\rho[n(t),t]$. Conseqüentemente, as equações da cinética pontual são realmente um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares e acopladas que são extremamente difíceis de serem resolvidas analiticamente^[12].

2.7 Discussão dos Parâmetros β_j e λ_j

Apesar dos nêutrons retardados compreenderem menos de 1% dos nêutrons emitidos no processo de fissão eles são de fundamental importância para o controle do reator nuclear. As áreas de controle e de análise de acidentes e a transformação de período em reatividade requerem o conhecimento da fração de nêutrons retardados β_j , das abundâncias relativas (β_j / β) e das constantes de decaimento λ_j . Durante o evento da reação de fissão em cadeia, que ocorre em um reator nuclear, são formados vários nuclídeos denominados produtos de fissão, sendo vários deles (aproximadamente 271) classificados como potenciais emissores de nêutrons retardados. Devido a pequena probabilidade de produção, a identificação e caracterização experimental desses emissores de nêutrons retardados tornam-se difíceis devido ao tempo que leva para isolar fisicamente um

determinado produto de fissão. Entretanto, é possível medir o comportamento agregado desses emissores de nêutrons retardados. Essas medidas podem, posteriormente, ser utilizadas para originar um modelo de poucos grupos onde as constantes de decaimento e as abundâncias de cada grupo representam valores médios de vários emissores de nêutrons retardados como constante de decaimento similares. Esses não possuem base física (exceto a constante de decaimento do primeiro grupo, a qual está relacionada com o único precursor pertencente a esse grupo, o ^{87}Br), sendo originadas do ajuste das curvas de decaimento dos precursores de nêutrons retardados após a irradiação de material físsil específico.

Um modelo de seis grupos, primeiramente introduzidos por Keepin^[8] em 1957, tornou-se um padrão por muitos anos cujo parâmetro de grupo foi incorporado por diversas bibliotecas de dados nucleares. Os resultados desses experimentos mostraram que tanto as abundâncias quanto as constantes de decaimento dos nêutrons retardados variam de isótopo para isótopo bem como a energia dos nêutrons induzindo na fissão. No caso das abundâncias, a variação pode ser entendida considerando-se as mudanças na distribuição dos produtos de fissão com a energia do nêutron incidente e o tipo de nuclídeo físsil. Contudo, no caso das constantes de decaimento, as variações encontradas não correspondem à realidade, sendo atribuídas ao processo de mínimos quadrados quando do ajuste das curvas de decaimento dos precursores.

Atualmente tem-se proposto um modelo de oito grupos baseado em um conjunto consistente de meia-vidas^[13] onde os precursores dominantes, de meia-vida mais longa, (^{87}Br , ^{137}I e ^{88}Br) possuem respectivas constantes de decaimento no modelo e representam os primeiros três grupos. Para esses três primeiros grupos, não há dependência com tipo de nuclídeo físsil nem com a energia do nêutron induzindo a fissão. Esse modelo de ordem maior parece ser uma tendência mundial porque existe uma base física melhor do que o antigo

modelo de seis grupos de Keepin, embora esse último continue sendo amplamente utilizado.

A obtenção de parâmetros agregados de nêutrons atrasados pode ser realizada tanto em experimentos “out-of-pile”^[14], quanto em experimentos “in-pile”^[14], sendo que em ambos os casos as técnicas são consideradas macroscópicas. No caso de um experimento “out-of-pile”, geralmente o que se faz é irradiação de uma amostra de material físsil ou fértil e sua rápida remoção e transporte para um sistema de contagem. Desse modo se obtêm apenas informações referentes aos núclídeos irradiados e não do reator como um todo, em termos de parâmetros de nêutrons atrasados. Os experimentos “out-of-pile” permitem separar nêutrons atrasados de nêutrons prontos, os quais são produzidos continuamente em um sistema multiplicativo, além de fornecer resultados em que as constantes de decaimento e abundâncias relativas variam de isótopo para isótopo bem como a energia do nêutron incidente. Os resultados de um experimento “out-of-pile” constituem os dados nucleares básicos presentes em algumas bibliotecas de onde podem ser obtido os parâmetros efetivos ou dependentes do sistema, com a utilização de códigos computacionais especializados.

A análise do comportamento dinâmico de um reator em condições normais e de acidentes requer métodos precisos para a obtenção de nêutrons atrasados referentes ao núcleo como um todo. Assim, tendo em vista as características intrínsecas do reator em análise tais como, composição, temperatura, fuga de nêutrons, etc., a avaliação desses parâmetros só pode ser feita eficientemente por meio de experimentos “in-pile”, embora nesse caso não seja possível a separação entre nêutrons retardados e nêutrons prontos quando da aquisição do sinal neutrônico.

Vale destacar que diferentes bibliotecas utilizam diferentes procedimentos para a obtenção de um ou outro parâmetro. Alguns utilizam os resultados de experimentos “out-of-pile”, onde o que se mede é o comportamento agregado em poucos grupos, sendo a JENDL 3.3^[15] um exemplo da que utiliza os dados experimentais de Keepin^[16] para as constantes de decaimento. Outras utilizam os dados básicos obtidos com técnicas microscópicas para cada precursor individual e, com uma técnica conhecida como soma^[14], é possível obter os parâmetros agregados. A biblioteca ENDF/B-VI-8^[17] é um exemplo das que utilizam dados básicos de precursores individuais^[18]. Diferentes procedimentos geram, obviamente, diferentes parâmetros. É possível verificar que a discrepância entre as principais bibliotecas para o caso dos parâmetros efetivos β_j teóricos, podem alcançar no até 40%^[10].

A questão dos parâmetros cinéticos não se encontra ainda totalmente fechada^[18], existindo um grande empenho da comunidade científica mundial, tanto em caráter teórico quanto experimental, em estabelecer um conjunto consistente de parâmetros cinéticos de nêutrons retardados^[14]. Além de suporte experimental para a validação de métodos teóricos e bibliotecas de dados nucleares relacionados aos nêutrons retardados serem escassos, a não concordância entre dados das principais bibliotecas a saber, ENDF/B-VI.8^[17], sua versão revisada em Los Alamos National Laboratory (LANL), e a JENDL 3.3^[15], evidenciam esse empenho. O conhecimento atual e o estado da arte na obtenção dos parâmetros cinéticos dos nêutrons retardados e os métodos de melhoria e validação de dados nucleares estão contidos nos resultados do grupo de trabalho conhecido como WPEC, “Working Part on International Evaluation Cooperation”^[14].

CAPÍTULO III

MÉTODO INVERSO PARA O CÁLCULO DA REATIVIDADE

3.1 Introdução

As equações da cinética pontual são um bom modelo para descrever o comportamento temporal da população de nêutrons dentro de um reator nuclear. Porém, na prática existem pouquíssimos problemas para os quais é possível obter uma solução exata da equação da cinética pontual para a potência nuclear $P(t)$, dada uma específica reatividade $\rho(t)$. Na grande maioria das vezes é mais apropriado inverter o problema determinando-se qual a reatividade $\rho(t)$ que deve produzir o comportamento desejado para $P(t)$. O sistema das equações da cinética pontual pode ser escrita na forma

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(t) + S(t) , \quad (3.1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t) ; i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.2)$$

Para obter a reatividade $\rho(t)$ em termos da potência nuclear $P(t)$, é necessário o desenvolvimento do método inverso da cinética pontual^[12]. Primeiramente, resolve-se o conjunto de equações diferenciais (3.2) para a densidade efetiva de precursores em termos da potência nuclear $P(t)$.

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{dt'} \left[C_i(t') e^{\lambda_i t'} \right] dt' = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t P(t') \exp(\lambda_i t') dt'$$
$$C_i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t') \exp[-\lambda_i(t-t')] dt' \quad (3.3)$$

Utilizando a equação (3.3) pode-se calcular a condição inicial para a densidade efetiva de precursores, ou seja, $C_i(t=0)$. Admitindo que potência nuclear nesse instante encontra-se constante, pode-se escrever que^[1]:

$$C_i(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{\beta_i}{\Lambda} P_0 \exp(\lambda_i t') dt' = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} P_0$$

onde:

$$P(t') = P_0 \quad \text{para } -\infty \leq t' \leq 0$$

Aplicando-se na equação (3.3), a seguinte transformação de variáveis $\tau = t - t'$, obtém-se:

$$C_i(t) = \int_0^{\infty} \frac{\beta_i}{\Lambda} \exp(-\lambda_i \tau) P(t - \tau) d\tau \quad (3.4)$$

Substituindo-se a equação (3.4) na equação (3.1), é obtida a forma integro-diferencial das equações da cinética pontual.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t) + \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} \exp(-\lambda_i \tau) \right] P(t - \tau) d\tau + S(t) \quad (3.5)$$

Definindo-se o kernel de nêutrons retardados como^[4]:

$$D(\tau) \equiv \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i \exp(-\lambda_i \tau) \quad (3.6)$$

Vale destacar que $D(\tau)d\tau$ é a probabilidade de que um nêutron retardado deva ser emitido num tempo $d\tau$ seguindo um evento de fissão ocorrido em $\tau = 0$.

Utilizando-se a definição acima, a equação integro-diferencial (3.5), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t) + \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^{\infty} D(\tau) P(t - \tau) d\tau + S(t) \quad (3.7)$$

Através da equação (3.7) torna-se possível obter uma equação^[4] que permita expressar a reatividade como função do tempo, em termos da potência nuclear, qual seja,

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{\beta}{P(t)} \int_0^{\infty} D(\tau) P(t - \tau) d\tau - \frac{\Lambda S(t)}{P(t)} \quad (3.8)$$

Admitindo que a contribuição da fonte externa $S(t)$ seja muito pequena quando comparada à contribuição da potência nuclear $P(t)$, ou seja $\frac{S(t)}{P(t)} \ll 1$, a equação (3.8) pode ser escrita como:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{\beta}{P(t)} \int_0^{\infty} D(\tau) P(t-\tau) d\tau \quad (3.9)$$

A equação (3.9) permite a determinação instantânea da reatividade para uma conhecida variação da potência nuclear. Porém, para isso é necessário que se resolva a integral existente nessa mesma equação.

Definindo o histórico da potência nuclear como^[4]:

$$H_i(t) \equiv \int_0^{\infty} P(t-\tau) \exp(-\lambda_i \tau) d\tau \quad (3.10)$$

e utilizando a definição (3.10), é possível reescrever a equação (3.9) da seguinte forma:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i H_i(t) \quad (3.11)$$

Esta relação tem diversas finalidades práticas em uma usina nuclear, tais como:

- a) determinação explícita da reatividade dependente do tempo, a qual é necessária para produzir uma variação da potência nuclear.
- b) Interpretação das respostas da potência nuclear em análise de transientes. Pode ser usada também para fornecer informações acerca do mecanismo de realimentação do reator.

Retornando novamente a definição (3.10) e aplicando a seguinte transformação de variável $y = t - \tau$, obtém-se que:

$$H_i(t) \equiv \int_{-\infty}^t P(y) \exp[-\lambda_i(t-y)] dy \quad (3.12)$$

Para se resolver a equação (3.12) é necessário o emprego de algumas formulações numéricas que serão discutidas mais detalhadamente na seção seguinte.

3.2 Formulações numéricas

O objetivo principal desta seção é buscar uma solução para a equação integral do histórico da potência nuclear. É possível resolver a equação (3.12) utilizando-se algumas técnicas de integração numérica ou transformando a equação integral do histórico da potência nuclear em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, e assim resolver a mesma empregando-se um método numérico adequado. Contudo é necessário que se reescreva a equação (3.12) de uma forma mais conveniente, permitindo assim a utilização adequada dos métodos numéricos mencionados anteriormente^[4].

$$H_i(t) \equiv e^{(-\lambda_i t)} \left[\int_{-\infty}^0 P(y) e^{(\lambda_i y)} dy + \int_0^t P(y) e^{(\lambda_i y)} dy \right] \quad (3.13)$$

Através da equação (3.13)^[4] é possível encontrar uma expressão recursiva para o histórico da potência nuclear, conforme descrito abaixo:

$$H_i(t_1) \equiv e^{(-\lambda_i t_1)} \left[\int_{-\infty}^0 P(y) e^{(\lambda_i y)} dy + \int_0^{t_1} P(y) e^{(\lambda_i y)} dy \right] \quad (3.14)$$

$$H_i(t_1 + \Delta t) \equiv e^{(-\lambda_i \Delta t)} \left\{ e^{(-\lambda_i t_1)} \left[\int_{-\infty}^0 P(y) e^{(\lambda_i y)} dy + \int_0^{t_1} P(y) e^{(\lambda_i y)} dy \right] + e^{(-\lambda_i t_1)} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} P(y) e^{(\lambda_i y)} dy \right\}$$

Combinado-se as duas expressões acima, obtém-se que,

$$H_i(t_1 + \Delta t) \equiv e^{(-\lambda_i \Delta t)} \left[H_i(t_1) + e^{-\lambda_i t_1} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} P(y) e^{\lambda_i y} dy \right] \quad (3.15)$$

A fim de simplificar a equação (3.15) pode-se escrever que,

$$R_i(t_1 + \Delta t) \equiv \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} P(y) e^{\lambda_i y} dy \quad (3.16)$$

utilizando-se a definição acima, a equação (3.15) fica sendo,

$$H_i(t_1 + \Delta t) \equiv e^{(-\lambda_i \Delta t)} \left[H_i(t_1) + e^{-\lambda_i t_1} R_i(t_1 + \Delta t) \right] \quad (3.17)$$

A equação (3.17) representa finalmente uma expressão que permite calcular o histórico da potência nuclear em cada instante de tempo de forma recursiva. Porém, para isto é necessário que se resolva a equação (3.16).

A equação (3.16) é resolvida utilizando-se duas formas numéricas distintas, que são as seguintes:

- a) integração numérica da equação (3.16), em cada instante de tempo, utilizando o método dos trapézios^[5].
- b) integração numérica da equação (3.16), em cada instante de tempo, utilizando o método de Simpson 3/8^[6].

3.2.1 Método dos Trapézios

Uma forma de se resolver a equação (3.16), é aplicar a regra dos trapézios, ou seja, aproximar a integral pela área de um trapézio^[5]. A área do trapézio fica cada vez mais próxima do valor exato da integral quanto menor for o valor de Δt . Aplicando-se diretamente o método dos trapézios à equação (3.16), obtém-se o seguinte resultado:

$$R_i(t_1 + \Delta t) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} P(y) e^{\lambda_i y} dy \approx \left(P(t_1) e^{\lambda_i t_1} + P(t_1 + \Delta t) e^{\lambda_i (t_1 + \Delta t)} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.18) na equação (3.17), chega-se a seguinte expressão para o histórico da potência nuclear.

$$H_i(t_1 + \Delta t) = H_i(t_1) e^{-\lambda_i \Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left[P(t_1) e^{-\lambda_i \Delta t} + P(t_1 + \Delta t) \right] \quad (3.19)$$

A equação (3.19) representa a expressão recursiva para o cálculo do histórico da potência nuclear para cada instante de tempo, utilizando-se o método dos trapézios.

3.2.2 Método de Simpson

Antes de aplicar o método de Simpson 3/8^[6] à equação (3.16), é mostrado como essa regra se aplica a uma integral definida cujo integrando é uma função arbitrária.

$$I \equiv \int_a^b \Psi(y) dy \approx \frac{(b-a)}{8} \left[\Psi(a) + 3 \Psi\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3 \Psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \Psi(b) \right] \quad (3.20)$$

Aplicando o método de Simpson 3/8 diretamente à equação (3.16) conforme mostrada no exemplo (3.20), chega-se ao seguinte resultado:

$$R_i(t_1 + \Delta t) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \xi(y) dy \approx \frac{\Delta t}{8} \left[\xi(t_1) + 3 \xi\left(t_1 + \frac{\Delta t}{3}\right) + 3 \xi\left(t_1 + 2\frac{\Delta t}{3}\right) + \xi(t_1 + \Delta t) \right] \quad (3.21)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \xi(t_1) &\equiv P(t_1) e^{-\lambda_i t_1} \\ \xi\left(t_1 + \frac{\Delta t}{3}\right) &\equiv P\left(t_1 + \frac{\Delta t}{3}\right) e^{-\lambda_i \left(t_1 + \frac{\Delta t}{3}\right)} \\ \xi\left(t_1 + 2\frac{\Delta t}{3}\right) &\equiv P\left(t_1 + 2\frac{\Delta t}{3}\right) e^{-\lambda_i \left(t_1 + 2\frac{\Delta t}{3}\right)} \\ \xi(t_1 + \Delta t) &\equiv P(t_1 + \Delta t) e^{-\lambda_i (t_1 + \Delta t)} \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.21) na equação (3.17), é possível obter a seguinte expressão para o histórico da potência nuclear:

$$H_i(t_1 + \Delta t) = e^{-\lambda_i \Delta t} H_i(t_1) + \frac{\Delta t}{8} \left[P(t_1) e^{-\lambda_i \Delta t} + P\left(t_1 + \frac{\Delta t}{3}\right) e^{-2\lambda_i \frac{\Delta t}{3}} + P\left(t_1 + 2\frac{\Delta t}{3}\right) e^{-\lambda_i \frac{\Delta t}{3}} + P(t_1 + \Delta t) \right] \quad (3.22)$$

A equação (3.22) representa a expressão recursiva para o cálculo do histórico da potência nuclear para cada instante de tempo, utilizando-se o método de Simpson 3/8.

Porém, para se calcular numericamente a expressão (3.22) é necessário que se conheça os dois pontos $P\left(t_1 + \frac{\Delta t}{3}\right)$ e $P\left(t_1 + 2\frac{\Delta t}{3}\right)$ dentro do intervalo de integração. A fim de se determinar o valor numérico desses dois

pontos, realizou-se uma interpolação linear que permitiu estimar esses valores, conforme mostrado a seguir:

$$P(t_1 + \frac{\Delta t_1}{3}) \approx P(t_1) + \frac{P(t_1 + \Delta t_1) - P(t_1)}{3} \quad (3.23)$$

e

$$P(t_1 + 2\frac{\Delta t_1}{3}) \approx P(t_1) + 2\frac{P(t_1 + \Delta t_1) - P(t_1)}{3} \quad (3.24)$$

Uma outra forma de se obter um expressão equivalente a equação (3.22) é aproximar a integral (3.21) utilizando o método Heun^[6], que permiti obter diretamente os valores da potência nuclear em $P(t_1 + \frac{\Delta t_1}{3})$ e $P(t_1 + 2\frac{\Delta t_1}{3})$.

3.2.3 Método Diferencial

É possível resolver a equação (3.12) por um caminho alternativo. Para isto basta transformar a equação integral do histórico da potência nuclear em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, aplicando-se a regra de Leibniz^[6], conforme mostrado abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} \xi(x, t') dt' = \xi(x, b) \frac{db(t)}{dt} - \xi(x, a) \frac{da(t)}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \xi(x, t') dt' \quad (3.25)$$

Reescrevendo a equação (3.12) de forma adequada, a fim de aplicar a regra de Leibniz, vem,

$$H_i(t) = \lim_{t' \rightarrow -\infty} \int_{t'}^t P(y) \exp[-\lambda_i(t-y)] dy \quad (3.26)$$

Aplicando a regra de Leibniz, conforme mostrada na relação (3.25), à equação (3.26), chega-se ao seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\frac{dH_i(t)}{dt} = -\lambda_i H_i(t) + P(t); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.27)$$

O conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (3.27) representa a expressão para o histórico da potência nuclear, utilizando-se o método diferencial.

Para resolver a equação (3.27) utilizou-se um método, conhecido como Runge-Kutta de terceira ordem^[8]. Aplicando-se este método à equação diferencial (3.29), chega-se ao seguinte conjunto de equações:

$$K_1 = \Delta t [-\lambda_i H_i(t_n) + P(t_n)] \quad (3.28)$$

$$K_2 = \Delta t \left[-\lambda_i \left(H_i(t_n) + \frac{K_1}{2} \right) + P(t_n) \right] \quad (3.29)$$

$$K_3 = \Delta t [-\lambda_i (H_i(t_n) - K_1 + 2K_2) + P(t_n)] \quad (3.30)$$

e

$$H_i(t_{n+1}) = H_i(t_n) + \frac{1}{6} [K_1 + 4K_2 + K_3] \quad (3.31)$$

Acima foi descrito o método Runge Kutta de terceira ordem para resolver o conjunto de equações diferenciais do histórico da potência nuclear (3.27), onde a potência nuclear $P(t)$ é conhecida em qualquer instante de tempo.

3.3 Hipóteses Adicionais e Limitações do Método Inverso

Utilizando-se a equação (3.11), obtida através do método inverso, é possível realizar uma simplificação na mesma para o caso em que ocorram transientes lentos, a fim de se obter uma expressão mais simples para o cálculo da reatividade. Admitindo que o nível de potência mude lentamente com o tempo e que os valores típicos do tempo de geração médio e da fração total de nêutrons retardados seja muito menor que um ($\Lambda \ll 1$ e $\beta \ll 1$), em um reator de potência, temos que :

$$\frac{\Lambda}{\beta} \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} \ll 1 \quad (3.32)$$

A partir das hipóteses realizadas acima, a equação (3.11) assume uma forma muito mais simples, conforme mostrada na expressão abaixo.

$$\tilde{\rho}(t) = \beta - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i H_i(t) \quad (3.33)$$

Analisando a equação (3.33), verifica-se que a maior contribuição para o cálculo da reatividade é dada pelo termo do histórico da potência nuclear. Isso deve-se ao fato de se ter admitido que a potência nuclear esteve sujeita à variações lentas e que Λ e β eram muito menor que 1 em um reator de potência.

O valor inicial do histórico da potência nuclear, pode ser calculado admitindo que no instante inicial o nível de potência nuclear é muito baixo^[4], logo.

$$H_i(t_0) = \frac{P_0}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.34)$$

sendo P_0 a potência nuclear no instante inicial, ou seja, em $t=0$.

Utilizando a condição inicial (3.34) tanto na equação (3.11) como na equação (3.33), é possível calcular a reatividade correspondente a uma dada variação da potência nuclear em qualquer instante de tempo. Uma peculiaridade importante da utilização do método inverso da cinética pontual, aparece quando se utiliza a condição inicial dada pela equação (3.34), para calcular o valor da reatividade no instante inicial ($t=0$). Ao se substituir a equação (3.34) dentro da equação (3.11), tem-se que o primeiro e o terceiro termos do lado direito se cancelam, e o segundo termo é igual a zero devido a hipótese assumida na condição inicial. Sendo assim, obtém-se que o valor da reatividade no instante inicial é exatamente igual a zero. Isso se aplica igualmente a equação (3.33).

Através do método inverso é possível se obter uma resposta acurada do valor da reatividade em função de tempo, exceto nos casos em que ocorra uma brusca variação espacial do fluxo de nêutrons em um curto intervalo de tempo, pois o modelo de cinética pontual empregado neste trabalho não é capaz de descrever

fenômenos físicos com essas características. Para se contornar esse problema é necessário utilizar a equação da cinética espacial, contudo a solução da mesma requer um gasto de tempo computacional muito maior do que o empregado na cinética pontual. Sendo assim, não é possível mediar a reatividade de forma instantânea utilizando a cinética espacial. Contudo o modelo de cinética pontual mostra-se um modelo capaz de oferecer respostas satisfatórias do ponto de vista físico e computacional durante a operação do reator nuclear.

Neste capítulo foi descrita a utilização do método inverso para o cálculo da reatividade, onde encontraram-se diversas expressões para o histórico da potência nuclear, utilizando-se várias formulações numéricas distintas. Essas formulações foram empregadas com a finalidade de descobrir quais delas se mostra mais precisa para o cálculo da reatividade.

No capítulo seguinte serão testadas cada uma das formulações numéricas aqui desenvolvidas para o cálculo do histórico da potência nuclear, a fim de validar o método inverso da cinética pontual.

CAPÍTULO IV

VALIDAÇÃO DO MÉTODO PARA O CÁLCULO DA REATIVIDADE

4.1 Introdução

Este capítulo tem como principal objetivo validar as formulações numéricas apresentadas no capítulo anterior, assim como escolher aquela que melhor apresenta resultados mais compatíveis com os testes que serão realizados a seguir. Os testes de validação do método inverso para a obtenção da reatividade foram realizados de uma forma muito simples. Primeiramente, deve-se resolver o conjunto de equações da cinética pontual, para uma dada reatividade conhecida, e assim obter os valores discretos da potência nuclear em cada instante de tempo. Logo em seguida deve-se utilizar esses valores da potência nuclear no método inverso para obter a reatividade que deu origem a esta variação da potência nuclear. Este valor de reatividade é então comparado com aquele usado nas equações da cinética pontual, no primeiro caso.

Para dar início ao processo de validação do método inverso, para o cálculo da reatividade, resolve-se em primeiro lugar as equações da cinética pontual, utilizando-se o método de diferenças finitas e, com isso, obtêm-se os valores da potência nuclear $P(t)$ em cada instante de tempo. Esses valores obtidos foram comparados com um método de referência, conhecido como piecewise constant approximations (PCA)^[9].

O conjunto de equações da cinética pontual, qual seja,

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t) ; i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

foi resolvido com seis grupos de precursores para os seguintes tipos de inserções de reatividade:

a) Degrau de reatividade:

As equações da cinética pontual, foram solucionadas para cada um dos degraus de reatividade abaixo.

$$\rho = 0.003$$

$$\rho = 0.005$$

$$\rho = 0.007$$

$$\rho = 0.008$$

b) Rampa de reatividade:

As equações da cinética pontual, foram solucionadas para uma reatividade tipo rampa, conforme descrita abaixo.

$$\rho(t) = 0.1\beta t$$

c) Reatividade Senoidal (para um grupo de precursor):

As equações da cinética pontual, foram solucionadas para uma reatividade tipo seno, conforme descrita abaixo.

$$\rho(t) = 0.05333 \sin(\pi t / 50).$$

Nas seções seguintes será realizada uma breve descrição dos métodos de diferenças finitas e PCA empregados na solução da cinética pontual.

4.2 Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas consiste em um método de discretização onde a derivada de uma função é aproximada pelo coeficiente angular da corda secante^[6], de acordo com a expressão abaixo:

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Aplicando-se a aproximação acima à variação temporal da potência nuclear e da densidade efetiva de precursores, equações (4.1) e (4.2), obtém-se que:

$$\frac{dP(t)}{dt} \cong \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} \cong \frac{C_i(t+\Delta t) - C_i(t)}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Algumas definições se fazem necessárias, a fim de tornar mais simples a nomenclatura das equações (4.1) e (4.2), utilizando o método de diferenças finitas:

$$P^{j+1} \equiv P(t+\Delta t)$$

$$P^j \equiv P(t)$$

$$C_i^{j+1} \equiv C_i(t+\Delta t)$$

e

$$C_i^j \equiv C_i(t)$$

Descretizando as equações (4.1) e (4.2), para pequenos intervalos de tempo, e utilizando as definições citadas anteriormente, chega-se à seguinte expressão para o conjunto de equações da cinética pontual :

$$\frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta t} = \frac{\rho^j - \beta}{\Lambda} P^j + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i^j \quad (4.5)$$

$$\frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P^j - \lambda_i C_i^j \quad (4.6)$$

Reescrevendo as equações (4.5) e (4.6) de maneira que permita calcular recursivamente a potência nuclear $P(t)$ e a densidade efetiva de precursores $C_i(t)$, vem,

$$P^{j+1} = \left(1 + \Delta t \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right) P^j + \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i^j \quad (4.7)$$

$$C_i^{j+1} = \Delta t \frac{\beta_i}{\Lambda} P^j + (1 - \Delta t \lambda_i) C_i^j \quad (4.8)$$

onde:

$$P^{j=0} \equiv P_0 \quad (4.9)$$

$$C_i^{j=0} \equiv \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

O conjunto de equações (4.7) e (4.8), juntamente com as condições iniciais (4.9) e (4.10), permitem que sejam calculadas de forma marchante a potência nuclear e a densidade efetiva de precursores em cada instante de tempo. Vale destacar que quanto menor for o valor de Δt mais próximo será o valor da potência nuclear do valor exato. Observou-se através de testes, que durante a resolução numérica que é necessário escolher um valor de Δt que seja minimamente uma ordem de grandeza menor que o tempo de geração Λ , pois isso garante uma determinada estabilidade na solução, utilizando-se o método de diferenças finitas, e conduz a obtenção de resultados precisos. Porém pode-se calcular para o caso de um degrau de reatividade, o raio espectral^[6] da matriz que contém os parâmetros das equações da cinética pontual, afim de se obter o valor ótimo de Δt .

4.3 PCA – PIECEWISE CONSTANT APPROXIMATIONS.

Antes de se aplicar o método PCA^[9] ao conjunto de equações diferenciais acopladas (4.1) e (4.2), é necessário primeiramente reescrevê-las em sua forma matricial.

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A\bar{X} + B(t)\bar{X} + \bar{F}(t) \quad (4.11)$$

sendo a condição inicial dada por,

$$\bar{X}(0) = \bar{X}_0 \quad (4.12)$$

$$\bar{X}_0 = \left[P_0 \quad \frac{\beta_1}{\Lambda \lambda_1} P_0 \quad \frac{\beta_2}{\Lambda \lambda_2} P_0 \quad \dots \quad \frac{\beta_n}{\Lambda \lambda_n} P_0 \right]^T$$

onde A é definida como uma matriz quadrada de ordem n+1, qual seja,

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \frac{-\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-\beta_m}{\Lambda} & 0 & 0 & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

B(t) uma matriz quadrada de ordem n+1, qual seja

$$B(t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\rho(t)}{\Lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e F(t) uma matriz coluna (n+1) x 1, definida como.

$$\bar{F}(t) \equiv \begin{pmatrix} S(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Admitindo que a reatividade e a fonte de nêutrons variem lentamente com relação ao tempo, quando comparada com a variação da potência nuclear^[9], o método PCA permite aproximar a reatividade e a fonte de nêutrons, em cada intervalo de tempo, por funções constantes neste mesmo intervalo, ou seja,

$$\rho(t) \approx \rho \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) = \rho_i \quad \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (4.13)$$

$$\bar{F}(t) \approx \bar{S}_i \equiv \bar{S} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \quad \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (4.14)$$

Utilizando as aproximações (4.13) e (4.14), a equação (4.11) assume a seguinte forma:

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A\hat{X} + B_i(t)\hat{X} + \bar{S}_i \quad (4.15)$$

onde $B_i = B$ e $\bar{F}(t) = \bar{S}_i$, para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

Ao impor as aproximações (4.13) e (4.14), obtém-se que a solução da equação (4.15) é aproximadamente igual a solução da equação (4.11), ou seja, $\hat{X}(t) \equiv \bar{X}(t)$.

É fácil observar que a equação (4.15) pode ser resolvida analiticamente, basta multiplicar ambos os lados pelo fator integrante $e^{-(A+B_i)t}$:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-(A+B_i)t} \hat{X} \right) = e^{-(A+B_i)t} \bar{S}_i \quad (4.16)$$

Integrando ambos os lados da equação acima sobre pequenos intervalos de tempo de t_i à $t_i + \Delta t$, obtém-se que:

$$e^{-(A+B_i)t_{i+1}} \hat{X}_{i+1} - e^{-(A+B_i)t_i} \hat{X}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-(A+B_i)u} \bar{S}_i du \quad (4.17)$$

Resolvendo o lado direito da equação (4.17) é obtido finalmente uma expressão para \hat{X}_{i+1} :

$$\hat{X}_{i+1} = e^{-(A+B_i)h_i} \hat{X}_i + \left(e^{-(A+B_i)h_i} - I \right) (A+B_i)^{-1} \bar{S}_i \quad (4.18)$$

onde:

$$h_i \equiv t_{i+1} - t_i$$

A fim de se obter uma forma simples para realizar o cálculo numérico da equação (4.18), diagonaliza-se a matriz $A+B_i$.

Fazendo $(A+B_i) = \psi_i D_i \psi_i^{-1}$, onde ψ_i são os autovetores da matriz $(A+B_i)$ e D_i a matriz diagonal de autovalores, qual seja,

$$D_i = \text{diag}[\varpi_1^i, \varpi_2^i, \dots, \varpi_{n+1}^i]$$

a equação (4.18) torna-se da seguinte forma^[3]:

$$\hat{X}_{i+1} = \psi_i e^{D_i h} \psi_i^{-1} \left[\hat{X}_i + X_i D_i^{-1} X_i^{-1} \bar{S}_i \right] - \psi_i D_i^{-1} \psi_i^{-1} \bar{S}_i \quad (4.19)$$

Observe que na equação (4.19), após as matrizes ψ_i e D_i serem determinadas, torna-se possível calcular a potência nuclear e a densidade efetiva de precursores a cada passo de tempo, apenas realizando-se uma serie de multiplicações e adições de matrizes.

A fim de determinar a matriz de autovetores ψ_i e seus associados autovalores, utilizou-se a equação Inhour^[19].

$$\rho_i = \beta + \Lambda \omega - \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j \lambda_j}{\omega + \lambda_j} \quad (4.20)$$

A equação de Inhour pode ser equivalentemente expressa em forma de um polinômio $P_i(\omega)$ de grau de $n+1$ ^[19], qual seja,

$$P_i(\omega) = (\rho_i - \omega \Lambda) \prod_{j=1}^n (\lambda_j + \omega) - \omega \sum_{i=1}^n \beta_j \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_j + \omega) \quad (4.21)$$

Vale destacar que é bem conhecido na literatura que as raízes do polinômio, dado pela equação (4.21), são reais^[19]. Como consequência disso é possível calcular todos os autovalores da matriz D_i através da equação (4.21) utilizando-se um método numérico adequado.

A tarefa para o cálculo dos autovetores é bastante simples, conforme descrito por Hetrick^[19].

$$\bar{u}_k^{(i)} = \left[1, \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \omega_k^{(i)}}, \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \omega_k^{(i)}}, \dots, \frac{\mu_n}{\lambda_n + \omega_k^{(i)}} \right]^T \quad (4.22)$$

$$\bar{\eta}_k^{(i)} = \bar{v}_k^{(i)} \left[1, \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \omega_k^{(i)}}, \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \omega_k^{(i)}}, \dots, \frac{\mu_n}{\lambda_n + \omega_k^{(i)}} \right]^T \quad (4.23)$$

onde:

$$\bar{v}_k^{(i)} = \left[1 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j \lambda_j}{(\lambda_j + \omega_k^{(i)})^2} \right]^{-1} \quad (4.24)$$

$$\mu_l = \frac{\lambda_l}{\Lambda} \text{ para } l=1, 2, \dots, n$$

Onde $\bar{u}_k^{(i)}$ são as colunas da matriz ψ_i para $k=1, 2, \dots, n+1$, $\bar{\eta}_k^{(i)}$ são as colunas da matriz ψ_i^{-1} para $k=1, 2, \dots, n+1$ e $\omega_k^{(i)}$ são os respectivos autovalores. Os autovetores e autovalores são calculados, a cada passo de tempo, se a reatividade e a fonte de nêutros variam com o tempo e conseqüentemente as matrizes ψ_i e D_i são calculadas, também a cada passo tempo. Com isso, a equação (4.19) é usada para calcular a potência nuclear e a densidade efetiva dos precursores.

4.4 Validação do Programa para o Método de Diferenças Finitas

Esta seção tem como objetivo principal apresentar a solução numérica das equações da cinética pontual, utilizando o método de diferenças finitas e confrontar os resultados obtidos com os do método PCA.

Para se proceder na solução das equações (4.1) e (4.2) com seis grupos de precursores, para cada uma das inserções de reatividade citadas na

seção (4.1), utilizaram-se os seguintes parâmetros^[18] na solução das equações da cinética pontual:

$$\Lambda = 2,5 \times 10^{-5}$$

$$\lambda_i = (0.0127, 0.0317, 0.155, 0.311, 1.4, 3.87)$$

$$\beta_i = (0.000266, 0.001491, 0.001316, 0.002849, 0.00896, 0.000182).$$

$$\beta = 0.007$$

Para resolução numérica das equações (4.7) e (4.8), foi escolhido um passo de tempo da ordem de 10^{-6} s e $P_0 = 1$. A escolha adequada do passo garantiu resultados bastantes precisos conforme mostrado nas tabelas (4.1) e (4.2), assim como na figura (4.1).

Na tabela (4.1), vale destacar que na primeira coluna encontram-se os valores referentes aos degraus de reatividade. Da terceira à quinta coluna são apresentados os valores da potência nuclear, calculados pelo método PCA, diferença finitas e pela solução analítica das equações da cinética pontual que fornece a solução exata para a potência nuclear^[20,12]. Na segunda coluna são apresentados os respectivos instantes de tempos em que foram calculados cada uns dos valores referentes à potência nuclear. E na última coluna são apresentados os valores dos erros relativos percentuais, entre a solução com diferença finitas e a solução exata^[9]

Tabela (4.1) - Solução das equações da cinética pontual para reatividade constante

ρ	T(s)	$P(t)_{PCA}$	$P(t)_{D.F.}$	$^{[20]}P(t)_{exato}$	Erro relativo
0.003	1.0	2.2098	2.2098	2.2098	0 %
	10.0	8.0192	8.0192	8.0192	0 %
	20.0	2.8297×10^1	2.8297×10^1	2.8297×10^1	0 %
0.007	0.01	4.5088	4.5088	4.5088	0 %
	0.5	5.3459×10^3	5.3457×10^3	5.3459×10^3	0.004 %
	2.0	2.0591×10^{11}	2.0588×10^{11}	2.0591×10^{11}	0.01 %
0.008	0.01	6.2029	6.2027	6.2029	0.003 %
	0.1	1.4104×10^3	1.4102×10^3	1.4104×10^3	0.01 %
	1.0	6.1634×10^{23}	6.1547×10^{23}	6.1634×10^{23}	0.1 %

Tabela (4.2) – Solução das equações da cinética pontual

para uma rampa de reatividade - $\rho(t)=0.1\beta t$

T(s)	$P(t)_{PCA}$	$P(t)_{D.F.}$	$^{[16]}P(t)_{exato}$	Erro relativo
2.0	1.3382	1.3382	1.3382	0 %
4.0	2.2278	2.2284	2.2283	0.004 %
6.0	5.5802	5.5820	5.5815	0.008 %
8.0	4.2772×10^1	4.2786×10^1	4.2781×10^1	0.012 %
9.0	4.8735×10^2	4.8751×10^2	4.8745×10^2	0.012 %
10.0	5.1072×10^5	4.5115×10^5	4.5109×10^5	0.013 %
11.0	2.6464×10^{16}	1.7916×10^{16}	1.7919×10^{16}	0.017 %

Nas tabela (4.2), a última coluna faz referência ao erro relativo percentual, entre a solução com diferença finitas e a solução exata^[9]. Na tabela (4.2), os valores referentes à potência nuclear calculados pelo método PCA nos instantes de

tempos 10s e 11s, não foram fornecidos pelo trabalho referência^[9], porém os mesmos foram calculados utilizando-se o programa fornecido pelo autor^[9].

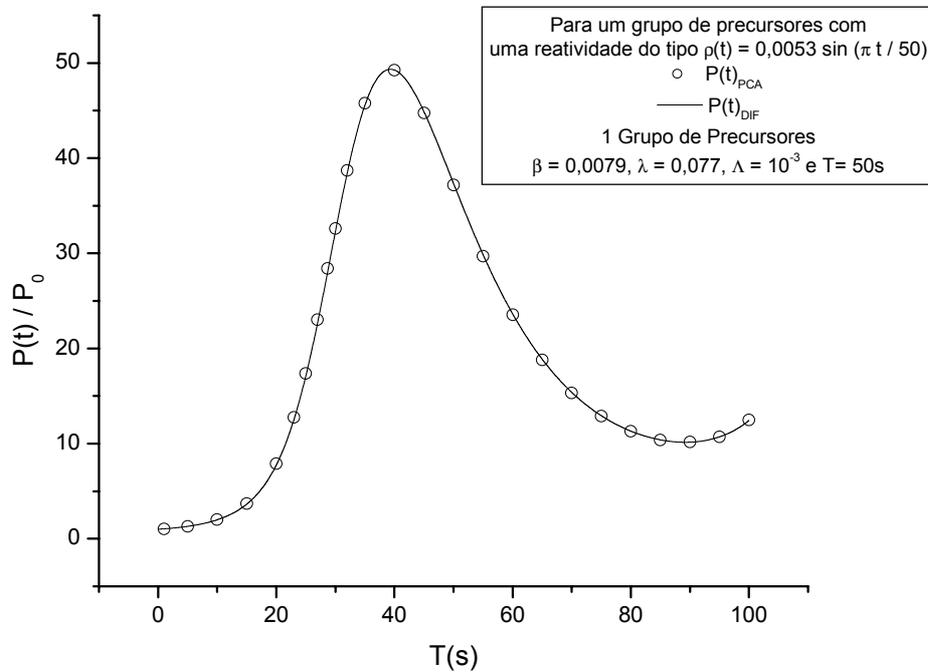


Figura (4.1) - Solução das equações da cinética pontual para uma inserção de reatividade tipo senoidal - $\rho(t)=0.005333\sin(\pi t/50)$

Pode-se facilmente observar que os resultados obtidos para a solução das equações da cinética pontual utilizando o método de diferenças finitas é bastante satisfatório, visto que os mesmos se mostram de acordo com os valores de referência, com isso pode-se concluir que a solução proposta para cinética pontual utilizando-se diferenças finitas encontra-se adequada.

4.5 Validação do Método Inverso

Na seção anterior foram apresentados os resultados obtidos para potência nuclear com diversos tipos de inserções de reatividade utilizando-se o método de diferenças finitas. A seguir são apresentados os resultados obtidos com o método inverso para o cálculo da reatividade, utilizando cada uma das formulações numéricas discutidas no capítulo anterior.

Nas tabelas (4.3) a (4.7), são apresentados os resultados obtidos para o cálculo da reatividade utilizando-se a equação inversa da cinética pontal, empregando-se cada uma das formulações numéricas discutidas no capítulo III, referentes aos casos de inserções de reatividade do tipo degrau, tais como:

- $\rho = 0.003$
- $\rho = 0.005$
- $\rho = 0.007$
- $\rho = 0.008$

Os termos $\rho_{\text{Trapézio}}$, ρ_{Simpson} , ρ_{DIF} e $\rho_{\text{DIF-APRO}}$, indicam os valores da reatividade calculados, utilizando-se os seguintes métodos: método dos trapézios, método de Simpson 3/8, método diferencial e o método diferencial utilizando-se a equação (3.35) do capítulo III, respectivamente. Os valores de Δt indicados nas tabelas (4.3) a (4.7) e na figuras (4.2) a (4.5), referem-se ao tamanho do passo utilizado para o cálculo da reatividade.

Tabela (4.3) – Cálculo da reatividade para $\rho=0.003$ com $\Delta t=0.01s$.

T(s)	$\rho_{\text{Trapézio}}$	ρ_{Simpson}	ρ_{DIF}	$\rho_{\text{DIF-APRO}}$
0.01	0.00354	0.00354	0.00354	0.00275
0.02	0.00307	0.00307	0.00307	0.00297
0.1	0.00301	0.00301	0.00300	0.00300
1	0.00300	0.00300	0.00300	0.00300
5	0.00300	0.00300	0.00300	0.00300
10	0.00300	0.00300	0.00300	0.00300

Tabela (4.4) – Cálculo da reatividade para $\rho=0.0055$ com $\Delta t=0.01s$.

T(s)	$\rho_{\text{Trapézio}}$	ρ_{Simpson}	ρ_{DIF}	$\rho_{\text{DIF-APRO}}$
0.01	0.00592	0.00592	0.00593	0.00461
0.02	0.00565	0.00565	0.00566	0.00517
0.1	0.00550	0.00550	0.00550	0.00548
1	0.00550	0.00550	0.00550	0.00548
5	0.00550	0.00550	0.00550	0.00548
10	0.00550	0.00550	0.00550	0.00548

Tabela (4.5) – Cálculo da reatividade para $\rho=0.007$ com $\Delta t=0.01s$.

T(s)	$\rho_{\text{Trapézior}}$	ρ_{Simpson}	ρ_{DIF}	$\rho_{\text{DIF-APRO}}$
0.01	0.00699	0.00699	0.00700	0.00544
0.02	0.00699	0.00699	0.00700	0.00611
0.1	0.00699	0.00699	0.00700	0.00678
1	0.00699	0.00699	0.00700	0.00678
5	0.00699	0.00699	0.00700	0.00678
10	0.00699	0.00699	0.00700	0.00678

Tabela (4.6) – Cálculo da reatividade para $\rho=0.008$ com $\Delta t=0.01s$.

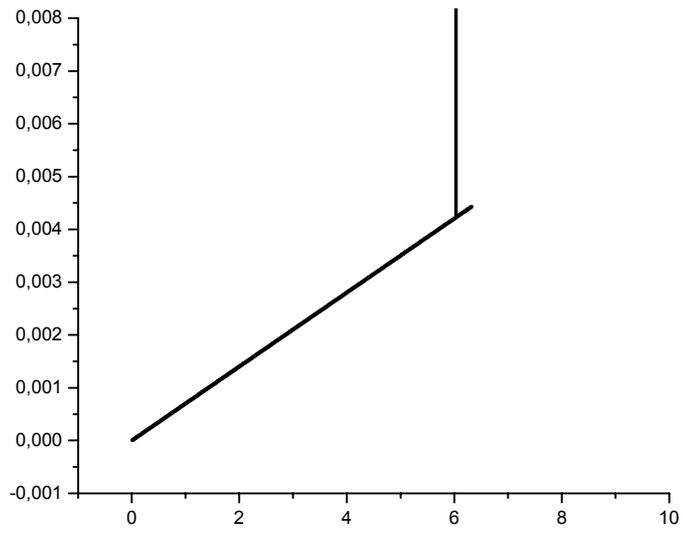
T(s)	$\rho_{\text{Trapézior}}$	ρ_{Simpson}	ρ_{DIF}	$\rho_{\text{DIF-APRO}}$
0.01	0.00753	0.00753	0.00755	0.00587
0.02	0.00767	0.00767	0.00768	0.00651
0.1	0.00776	0.00776	0.00777	0.00695
1	0.00776	0.00776	0.00777	0.00695
5	0.00776	0.00776	0.00777	0.00695
10	0.00776	0.00776	0.00777	0.00695

Tabela (4.7) – Cálculo da reatividade para $\rho=0.008$ com $\Delta t=1.0 \times 10^{-6}s$.

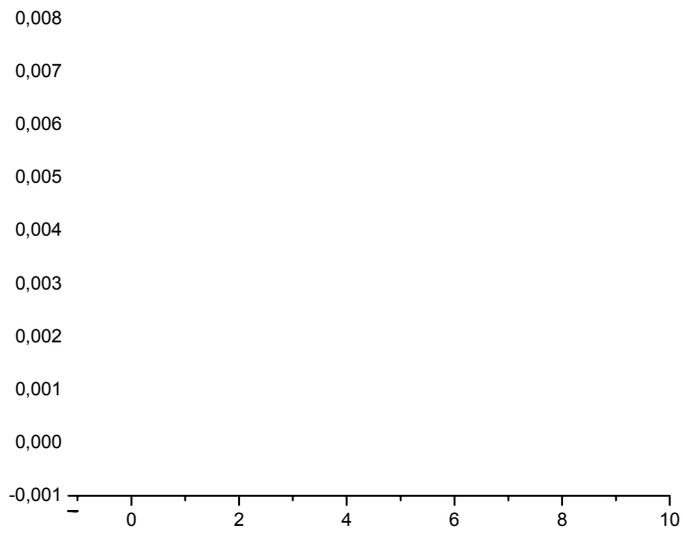
T(s)	$\rho_{\text{Trapézior}}$	ρ_{Simpson}	ρ_{DIF}	$\rho_{\text{DIF-APRO}}$
0.01	0.008	0.008	0.008	0.00585
0.02	0.008	0.008	0.008	0.00650
0.1	0.008	0.008	0.008	0.00694
1	0.008	0.008	0.008	0.00694
5	0.008	0.008	0.008	0.00694
10	0.008	0.008	0.008	0.00694

A seguir são apresentados nas figuras (4.2) a (4.4), os resultados para o cálculo da reatividade empregando-se apenas os métodos dos trapézios e o método diferencial, para cálculo do histórico da potência nuclear, no caso de uma rampa de reatividade do tipo ρ , sendo

3.352)odocraptculo



L



-

^

Através dos resultados apresentados nesta seção pode-se obter algumas conclusões importantes, tais como:

- a) Todas as formulações numéricas apresentadas mostraram-se bastante eficientes no cálculo da reatividade, conforme mostrados nos testes realizados.
- b) O método diferencial, utilizado para o cálculo da reatividade, mostrou-se o método com mais rápida e melhor convergência.
- c) Os testes indicaram que o intervalo de tempo entre duas consecutivas aquisições (Δt) é importante para a acurácia dos resultados, principalmente para os casos de altas inserções de reatividade (vide tabelas (4.6) e (4.7)).
- d) O cálculo da reatividade através da expressão (3.35), utilizando o método diferencial, mostrou-se bastante preciso para os casos em que a potência nuclear não cresce rapidamente, porém para os casos em que ocorre uma inserção de reatividade muito alta, como por exemplo $\rho=0.008$, o resultado não é satisfatório devido as hipóteses assumidas na obtenção dessa expressão.

De acordo com os testes apresentados nesta seção foi possível verificar que os resultados obtidos para o cálculo da reatividade, utilizando a expressão (3.35), foram satisfatórios apenas nos casos de pequenas inserções de reatividades. Deste modo, escolheu-se o método diferencial como a formulação numérica de referência para os testes que serão realizados no capítulo V.

4.6 Tratamento da Aquisição de Dados

Esta seção tem como objetivo apresentar uma descrição do método utilizado para tratar as aquisições de dados, realizadas na usina nuclear de Angra 1. Este método de tratamento de dados tem por finalidade atenuar as possíveis oscilações existentes nos dados adquiridos, gerando assim um conjunto de dados suavizados. A suavização dos dados adquiridos é de fundamental importância pois, somente através desta técnica é possível o cálculo da reatividade.

As oscilações existentes nos dados adquiridos, referentes ao fluxo de nêutrons, se devem ao fato de que esses dados foram adquiridos durante a partida do reator nuclear, sendo nesse instante o nível de contagem nos detectores muito baixo, ocasionando assim as oscilações.

Para realizar a suavização dos dados adquiridos utilizou-se um método conhecido como média móvel^[10].

4.7 Método da Média Móvel

O método da média móvel permite suavizar dados através de uma média pouco convencional. O termo média móvel é utilizado porque, a cada período, a observação mais antiga é substituída pela mais recente, calculando-se uma nova média^[10].

A técnica da média móvel consiste basicamente em calcular a média aritmética das N observações mais recentes, isto é,

$$L(t_i) = \frac{f(t_i) + f(t_{i-1}) + \dots + f(t_{i-N+1})}{N} \quad (5.1)$$

onde:

$\{f(t_1), f(t_2), f(t_3), \dots, f(t_n)\}$ é o conjunto de dados.

A equação (5.1) pode ser igualmente representada da seguinte forma:

$$L(t_{i/2}) = \frac{1}{N} \sum_{j=i-N+1}^i f(t_j), \quad i \geq N \quad (5.2)$$

onde:

$$i = N, N+1, N+2, \dots, N+n$$

N é conhecido como número de observações ou período da média móvel, ou seja, é o número de dados ou pontos utilizado para se realizar o cálculo da média móvel.

Vale destacar que quanto maior o número de dados envolvidos na observação da média móvel, maior será o efeito de suavização. Assim, caso os dados apresentem grandes flutuações, pode-se utilizar um número maior de observações no cálculo da média móvel, obtendo-se assim um conjunto de dados mais suavizado. Entretanto, se houver poucas flutuações nos dados, um número menor de observações deve ser incluído no conjunto de dados empregado para o cálculo da média móvel^[10].

4.8 Tratamento de Dados e o Cálculo da Reatividade

Esta seção tem como objetivo, realizar uma sucinta descrição de como o método da média móvel foi empregado na suavização dos dados experimentais referentes ao fluxo de nêutrons.

Primeiramente, houve a necessidade de se empregar um método de suavização nos dados do fluxo de nêutrons, pois, devido às grandes flutuações existentes nesses dados não era viável a utilização direta do método inverso para cálculo da reatividade. Sendo assim, fez-se a opção de se realizar uma suavização nos dados experimentais, utilizando o método da média móvel, onde se selecionou um número de 20 observações (N=20) para o cálculo desta média. Desta forma, foi possível obter um conjunto de dados suavizados, que por sua vez possibilitaram calcular a reatividade correspondente a essa variação de fluxo de nêutrons.

Ao utilizar um conjunto de 20 observações no cálculo da média móvel, para obtenção da reatividade através do método inverso, introduz-se um determinado retardo no cálculo da reatividade.

Sendo assim, só é possível obter uma resposta da reatividade após um intervalo de tempo proporcional a metade do tempo de observação utilizado para o cálculo da média móvel.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Dados experimentais

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos empregando-se o método da média móvel, para a suavização dos dados referentes ao fluxo de nêutrons, e os resultados obtidos para o cálculo da reatividade através do conjunto de dados suavizados.

As figuras (5.1) a (5.4) a seguir são referentes ao fluxo de nêutrons e a reatividade, medidos de forma experimental, durante a operação da usina nuclear de Angra 1.

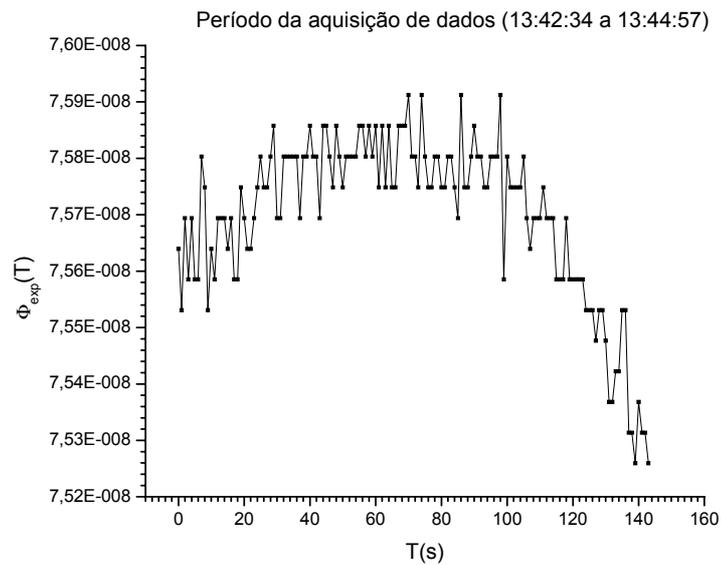


Figura (5.1) – Medidas experimentais referentes ao fluxo de nêutrons durante o período (13:42:34 às 13:44:57)hs. do dia 20/04/05

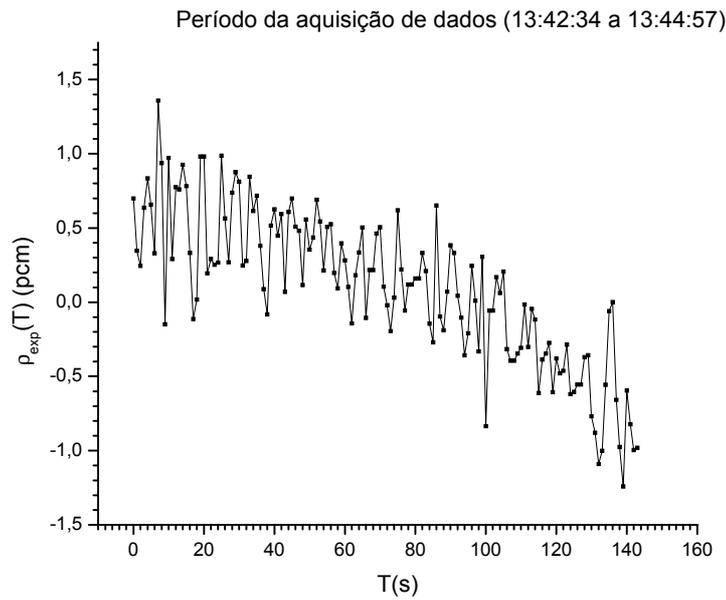


Figura (5.2) – Medidas experimentais referentes a reatividade durante o período (13:42:34 às 13:44:57)hs. do dia 20/04/05

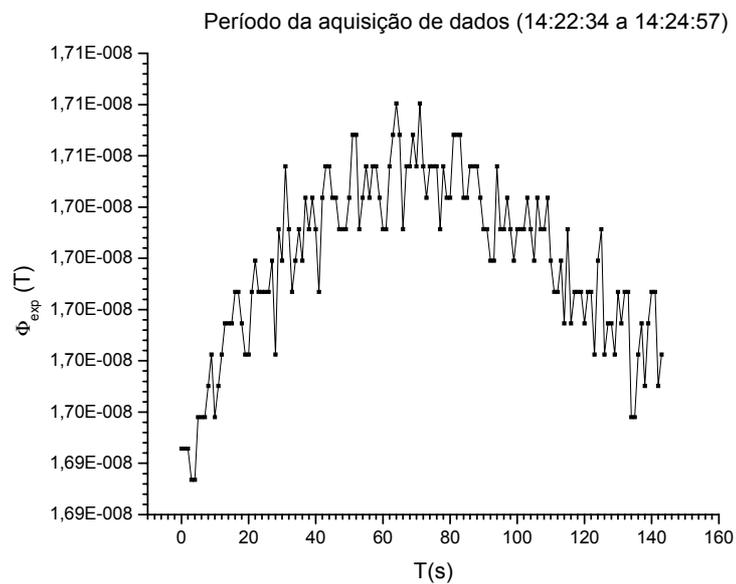


Figura (5.3) – Medidas experimentais referentes ao fluxo de nêutrons durante o período (14:22:34 às 14:24:57)hs do dia 20/04/05.

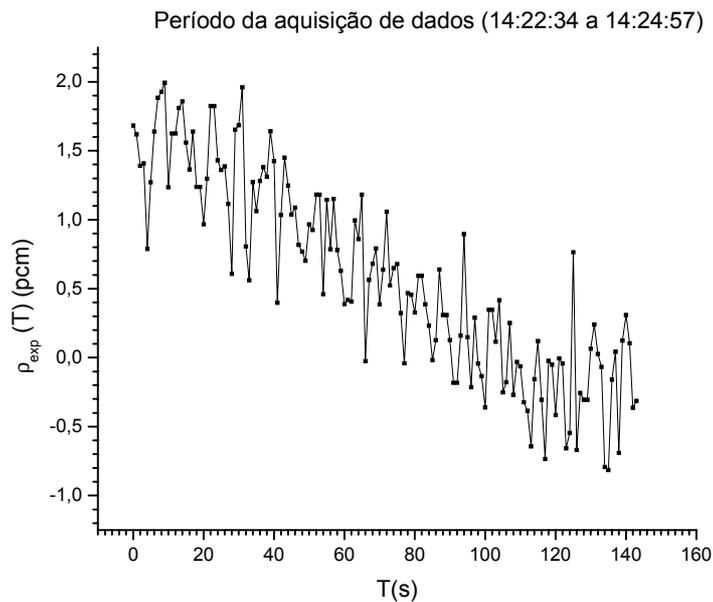


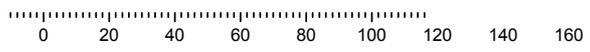
Figura (5.4) – Medidas experimentais referentes a reatividade durante o período (14:22:34 às 14:24:57)hs. do dia 20/04/05

Na próxima seção são apresentados os resultados obtidos para o cálculo da reatividade, utilizando-se a técnica da média móvel para a suavização dos dados referentes à potência nuclear.

5.2 Apresentação dos Resultados

Utilizando o método das médias móveis foi possível realizar uma suavização dos dados referentes ao fluxo de nêutrons, obtendo-se assim o seguinte conjunto de dados suavizados, conforme indicados nas figuras (5.5) e (5.6).

Vale destacar que os pontos indicados nas figuras (5.5) a (5.6), foram ligados por retas, com a finalidade de oferecer uma melhor observação do comportamento do fluxo de nêutrons.



O conjunto dos dados suavizado, representados nas figuras (5.5) e (5.6) foram calculados empregando-se um número de 20 observações (N=20), no cálculo da média móvel.

Através do conjunto de dados suavizados foi possível calcular a reatividade correspondente a cada uma das variações de fluxos de nêutrons e para tanto, utilizou-se à formulação numérica de referência para o cálculo da reatividade, cujos resultados são mostrados nas figuras (5.7) e (5.8).

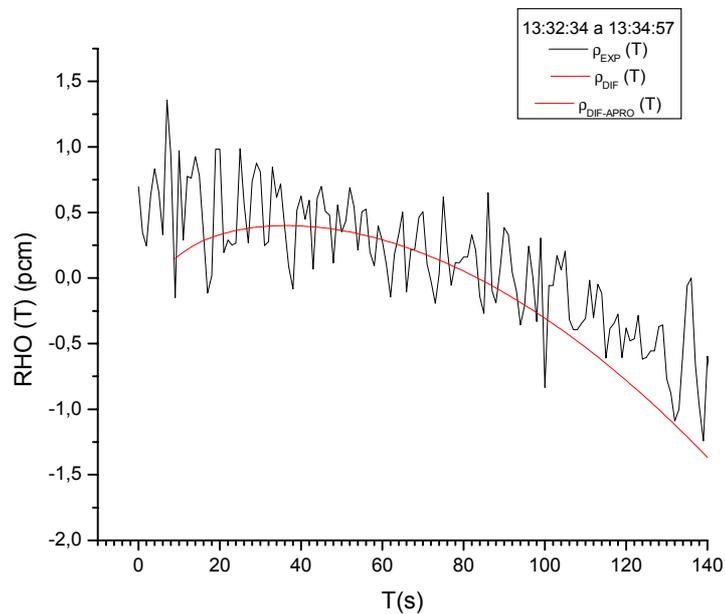


Figura (5.7) – Reatividade experimental e reatividade calculada pelo método diferencial (13:42:34 às 13:44:57)hs. do dia 20/04/05

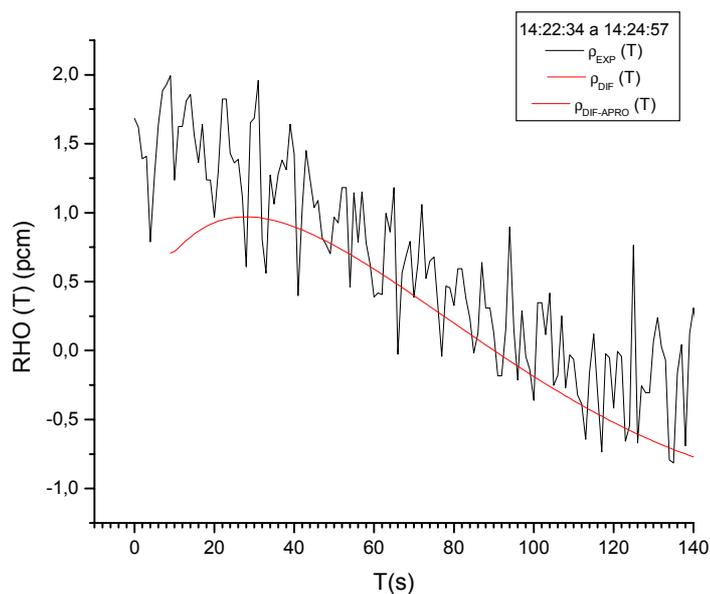


Figura (5.8) – Reatividade experimental e reatividade calculada pelo método diferencial (14:22:34 às 14:24:57)hs. do dia 20/04/05

Nas figuras (5.7) e (5.8) encontram-se a reatividade calculada através do método diferencial empregando-se o método da média móvel para suavização do fluxo de nêutrons. Pode-se observar nessas duas últimas figuras que a reatividade calculada com a formulação numérica, proposta nesse trabalho, foi capaz de descrever o comportamento médio da reatividade experimental, tanto utilizando a expressão (3.11) e (3.35) para o cálculo da reatividade.

5.3 Retardo Temporal

A utilização do método da média móvel permitiu realizar o tratamento de dados com grandes flutuações, tornando possível obter um conjunto de dados suavizados que foi utilizado para o cálculo da reatividade. Porém, ao se empregar o método da média móvel na suavização de dados introduz-se um atraso temporal no cálculo da reatividade, isso pode ser facilmente observado na figura (5.9).

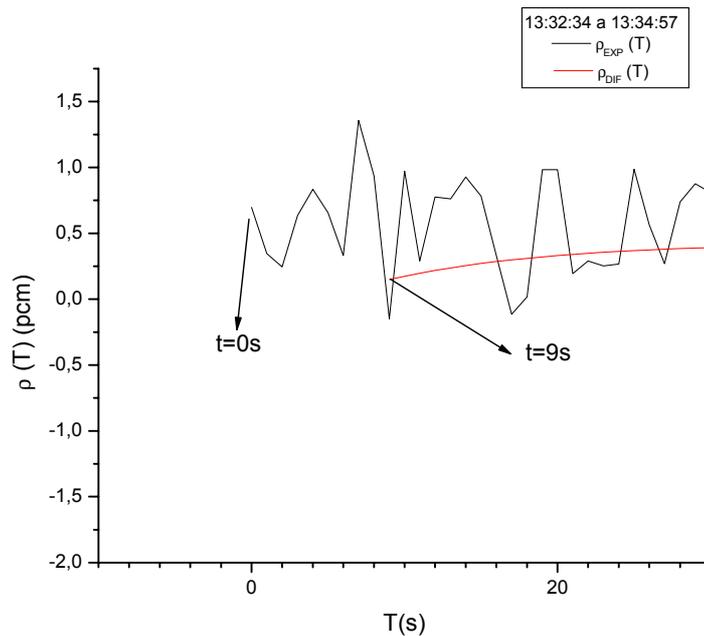


Figura (5.9) – Comparação entre a reatividade experimental e reatividade calculada (13:42:34 às 13:44:57)hs. do dia 20/04/05

A figura (5.9) destaca claramente que o cálculo da reatividade só é possível a partir de um instante ($t=9s$). Esse retardo está relacionado diretamente com o número de observações utilizado para o cálculo da média móvel. Além do retardo indicado no início do cálculo da reatividade, existirá sempre um retardo introduzido no cálculo da reatividade em qualquer instante de tempo.

Caso a metodologia empregada nesta dissertação fosse utilizada para implementação de um reatímetro, para uso em uma usina nuclear, não seria possível obter uma resposta da reatividade em tempo real devido ao retardo introduzido pelo método da média móvel. Porém, sabe-se que o retardo é diretamente proporcional a metade do número de observações, logo quanto menor for o tempo relacionado ao número de observações da média móvel menor será o tempo de atraso no cálculo da reatividade. Na prática, em uma usina nuclear tem-se que o intervalo de tempo entre duas aquisições de dados consecutivas

referentes a potência nuclear é da ordem de 10^{-2} s, sendo assim, para um número de 20 observações ($N=20$) obtém-se que o tempo de atraso introduzido no cálculo da reatividade é da ordem de 10^{-1} s. Desta forma na prática esse retardo não representa nenhum tipo de problema, tanto do ponto de vista físico como do ponto de vista de análise de segurança do reator, visto que o tempo de atraso é significativamente menor que o tempo médio de resposta de um operador.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Este trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de uma metodologia simples e precisa, que possibilitasse a determinação da reatividade em tempo real, resultando em uma dada variação da potência nuclear.

Durante o desenvolvimento deste trabalho foram implementados diversas formulações numéricas para o cálculo do método inverso da cinética pontual, a fim de se determinar a reatividade. Dentre as formulações numéricas implementadas, a do método diferencial foi a que apresentou resultados com mais rápida e melhor convergência durante os testes de validação. Este método consiste basicamente na transformação da equação integral do histórico da potência nuclear em um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, através da regra de Leibniz. Esse conjunto de equações diferenciais para o histórico da potência nuclear foi resolvido empregando-se o método de Runge Kutta de terceira ordem.

O método de validação da metodologia proposta, para cálculo da reatividade, foi realizado de uma forma muito simples. Em primeiro lugar resolveu-se o conjunto de equações da cinética pontual para uma dada reatividade conhecida, obtido fim

Os testes de validação propostos, tanto para as equações da cinética pontual, quanto para o método inverso, obtiveram excelentes resultados, conforme apresentados no capítulo IV. O método de diferenças finitas, utilizado para a solução do conjunto de equações da cinética pontual demonstrou-se bastante eficiente. A solução com este método apresentou um desvio relativo máximo de 0,1% quando comparada com a solução exata, para caso de uma reatividade $\rho=0.008$. Os resultados obtidos através da formulação numérica de referência, para o cálculo da reatividade, foram também bastantes satisfatórios, visto que os mesmos apresentaram erros relativos da ordem de 10^{-4} , conforme apresentado na figura (4.1).

O método da média móvel, empregado no tratamento dos dados referentes ao fluxo de nêutrons, mostrou-se bastante eficaz, pois através deste método foi possível suavizar as oscilações existentes no fluxo de nêutrons, conforme apresentados no capítulo V. As oscilações observadas nos dados referentes ao fluxo de nêutrons devem-se ao fato de que esses dados foram adquiridos durante a partida do reator nuclear, sendo nesse instante o nível de contagem nos detectores muito baixo, ocasionando assim estas oscilações.

Os resultados obtidos para a reatividade através da formulação numérica de referência foram bastantes satisfatórios, ou seja, estavam de acordo com os dados experimentais. Sendo assim a metodologia empregada neste trabalho permite determinar explicitamente a reatividade dependente do tempo, necessária para produzir uma variação na potência nuclear. A formulação numérica de referência empregada para o cálculo da reatividade, demonstra a viabilidade de construção de um reatímetro capaz de monitorar a reatividade com base no histórico da potência nuclear, em uma usina nuclear como as usinas de Angra 1 e Angra 2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- 1- DUDERSTADT, J.J., HAMILTON, L.J., *Nuclear Reactor Analysis*. 1ed. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1976.
- 2- FREIRE, F.S., “Determinação da Barra de Controle mais Reativa Usando o Método Pseudo-Harmônicos”, COPPE/UFRJ – PEN, 2005.
- 3- STEPHEN, E. B., ALLA, J. M. B., “Design and Development of a Personal-Computer-Based Reactivity Meter for a Research Reactor”, *Nuclear Technology*, 85, 1988.
- 4- SALEEM, A. A., “Development of On-Line Reactivity Meter for Nuclear Reactors”, *Nucl. Sci.*, 38, 129-149, 1991.
- 5- FREITAS, S. R., *Métodos Numéricos*, Departamento de Computação e Estatística, UFMS, 2000.
- 6- ALVIM, A. C. M., *Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Nuclear*, COPPE/UFRJ, 2003.
- 7- CARO, R., *Física De Reactores Nucleares*. 1ed. Madrid, Seccion de Publicaciones de la J.E.N, 1976.
- 8- GOMES, M R., LOPES, V. L., *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2ed. IMCC-UNICAMP, Makron Books, 1997.

- 9- KINARD, M., ALLEN, E.J., "Efficient numerical solution of the point kinetics equations nuclear", *Annals an Nuclear Energy*, 31, 1039 – 1051, 2004.
- 10- MORETTIN, P. A., TOLOI C. M. C., *Análise de Séries Temporais*, ABE- Projeto Fischer, Blücher, 2004.
- 11- HENRY, ALLAN F., *Nuclear Reactor Analysis*. 1ed. Cambrige, Mass, The MIT press, 1975.
- 12- AKCASU, Z., LELLOUCHE, G.S., SHOTKIN, L. M., *Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics*. 1ed. Academic Press, New York and London, 1971.
- 13- SPRIGGS, G. D., et al., "An 8-Group Delayed Neutron Model Based on Consistent Set of Half-Lives", *Progress in Nuclear Energy*, 41, 223-251, 2002.
- 14- DINIZ, R., "Obtenção das Constantes de Decaimento e Abundâncias Relativas de Nêutrons Atrasados Através da Análise de Ruído em Reatores de Potência Zero", IPEN, 2005.
- 15- SHIBATA, K., et al., "Japanese Evaluated Nuclear Data Library Version 3 Revision-3 JENDL-3.3", *J. Nucl. Sci. Technol.*, 39, 1125, 2002.
- 16- KEEPING, G. R., et al., "Delayed Neutrons from Fissionable Isotopes of Uranium, Plutonium and Thorium", *Phys. Rev.*, 107, 1044, 1957.

17- ENDF/B-VI_Summary Documentation, "BNL-NCS-17451 (ENDF-201)", 4th ed. (ENDF/B-VI), P.F. Rose, Ed., National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory (Release-8), 2000.

18- BRADY, M. C., ENGLAND, T.R., "Delayed Neutron Data and Group Parameters for 43 Fissioning Systems", Nucl. Sci. Eng., 103, 129-149, 1989.

19- HETRICK, D. L., *Dynamics of Nuclear Reactors*. 1ed. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1971.

20- SÁNCHEZ, J., "On the Numerical Solution of the Point Reactor Kinetics Equations by Generalized Runge-Kutta Methods", Nucl. Sci. Eng.103, 94-99, 1989.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)