

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO PARANÁ**  
**UNIDADE DE CURITIBA**  
**DEPARTAMENTO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**E DE MATERIAIS - PPGEM**

**EDUARDO GREGORIO OLIENICK FILHO**

**ANÁLISE DE ESTAMPAGEM DE CHAPAS PELO**  
**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS: ESTUDO DA**  
**INFLUÊNCIA TAXA DE SENSIBILIDADE**

**CURITIBA**

**AGOSTO - 2003**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**EDUARDO GREGORIO OLIVENICK FILHO**

**ANÁLISE DA ESTAMPAGEM DE CHAPAS PELO  
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS: ESTUDO DA  
INFLUÊNCIA DA TAXA DE SENSIBILIDADE**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica e de Materiais, do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, do Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, da Unidade de Curitiba, do CEFET-PR.

**Orientador:** Prof. Carlos H. Daros, Dr. Ing.

**CURITIBA**

**AGOSTO - 2003**

NESTA PÁGINA DEVERÁ SER INCLUÍDA A FICHA CATALOGRÁFICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO. ESTA FICHA SERÁ ELABORADA DE ACORDO COM OS PADRÕES DEFINIDOS PELO SETOR DE PROCESSOS TÉCNICOS DA BIBLIOTECA DO CEFET-PR.



## TERMO DE APROVAÇÃO

EDUARDO GREGORIO OLIENICK FILHO

# ANÁLISE DE ESTAMPAGEM DE CHAPAS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS: ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA TAXA DE SENSIBILIDADE

Dissertação de Mestrado aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica e de Materiais, do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, do Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, da Unidade de Curitiba, do CEFET-PR, pela seguinte banca examinadora:

**Orientador:** Prof. Carlos Henrique Daros, Dr. Ing.

Departamento de Mecânica, USP – São Carlos

Prof. Euclides de Mesquita Neto, Dr. Ing.

Departamento de Mecânica Computacional, UNICAMP

Prof. Adriano Scremin, Dr. Eng.

Departamento de Mecânica, UFPr

Prof. Jucelio Tomás Pereira, Dr. Eng.

Departamento de Mecânica, CEFET-PR

Curitiba, 28 de agosto de 2003

Aos meus pais, Eduardo e Delige (in memoriam)

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ing. Carlos Henrique Daros, pela paciência na condução e orientação deste trabalho, tendo em vista as minhas limitações no período inicial como aluno especial e dedicação parcial, além do período conturbado vivido pela instituição neste período, com greves e incertezas.

Ao PPGEMM, em particular ao professor Paulo Borges pelo apoio por ter proporcionado o equipamento necessário para a realização dos experimentos computacionais.

Ao CEFET/PR, em particular, aos Departamentos de Mecânica (DAMEC) e Pós Graduação (DEPOG) por terem me possibilitado um valioso período de afastamento parcial, que me permitiu a conclusão deste trabalho com mais tranquilidade.

Aos meus colegas do NUPEM, pela compreensão e também pela redução de outras atividades, particularmente no período anterior ao afastamento parcial.





## RESUMO

Para alcançar a compreensão da mecânica da deformação no processo de conformação de chapas metálicas é importante o estudo das características do material, da interação entre a chapa e ferramenta e, especificamente, do processo de conformação. A realização de experimentos para a obtenção das informações necessárias a cada caso particular é cara e de difícil reprodutibilidade.

O uso da teoria da plasticidade associada a métodos de análise numérica sugere uma alternativa adequada aos obstáculos acima expostos. Entre os métodos numéricos, a técnica dos elementos finitos é reconhecida como a mais poderosa para a análise de processos de conformação.

O propósito deste estudo é obter uma visão detalhada da mecânica da deformação de chapas metálicas para vários processos de estampagem. Envolvendo geometrias de chapas axisimétricas e não-axisimétricas, será usado o método dos elementos Finitos, formulação para grandes deformações, associado a teoria de materiais rígido-plásticos.

Adicionalmente, será vista a influência da sensibilidade à taxa de deformação, expressa na forma multiplicativa, no processo de deformação. Entre os efeitos observados, destacam-se a redução nos gradientes de deformação de espessura, com uma distribuição mais uniforme das deformações, permitindo uma maior penetração do punção.

Concluindo, fica comprovada a viabilidade de simular um processo de conformação metálica – o estiramento – que permitirá a obtenção de importantes parâmetros de material e processo, no projeto de estampos.

**Palavras-chave: Estampagem de Chapas Metálicas, Método de Elementos Finitos, Princípio Variacional, Materiais Rígido-Plásticos, Taxa de Sensibilidade.**

## **ABSTRACT**

The manufacturing of a great series of components using sheet metal forming, with quality and minimal rejection, brings the necessity of a better comprehension of the process, of the sheet metal forming process.

The sheet metal forming process can involve several modes of deformation: bending, drawing, stretching and the combination of one or more of these modes. For sheet metals subject to the same forming forces, the deformation mode can be different, depending on the characteristics and the interaction between the process and material. Then, it is possible to state that, in order to obtain a better comprehension of the mechanics of deformation, it is important to study the material characteristics, and the interaction between sheet and tool. However, the execution of tests to obtain the information for each forming process can be expensive and laborious.

The application of the plasticity theory associated with numerical analysis suggests an adequate alternative to overcome the afore obstacles mentioned. Among the numerical methods, the finite element method is recognized as the most powerful one in metal forming process analysis.

The purpose of this study is to obtain detailed results of the mechanics of deformation of sheet metals, employing the finite element method. In addition, the influence of the strain rate sensitivity (multiplicative form), in the deformation process is investigated. The effects noted are, the reduction in the deformation gradients and more uniform strain distributions.

The simulation of a sheet metal forming by the finite element method allows to obtain important material and process parameters in the stamp's design. Hence, the present work has undeniable applicability in metal forming industrial processes.

**Keywords: Sheet Metal Stamping, Finite Element Method, Variational Principle, Rigid Plastic Materials, Sensitivity Rate.**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Figura esquemática do processo de conformação mecânica - processo de forjamento: 1, tarugo; 2, matrizes; 3, interface; 4, deformação mecânica; 5, forja; 6, produto; 7, ambiente. Kobayashi, et al. (1989).....	16
Figura 1.2	Estampagem profunda: (A) Primeira Operação;(B) Segunda Operação; (C) Extração; Em uma estampagem profunda, a chapa é pressionada contra a matriz, através do punção, rebaixando a superfície sem alterar sensivelmente a espessura original. Kobayashi, et al. (1989).....	20
Figura 1.3	Defeitos observados em estampagem de peças ôcas. Kobayashi, et al. (1989).....	21
Figura 1.4	Diagrama Limite de conformabilidade e deformação de tiras retangular e circular (com raio de corte) .Kobayashi et al. (1989).....	22
Figura 3.5	Diagramas de Tensão: (a) Piola-Kirchhoff; (b) Cauchy (tensão verdadeira). Kobayashi et al. (1989).....	32
Figura 3.6	Ilustração Geometrica da Regra Associada de Fluxo. Chen e Han (1988) .....	35
Figura 3.7	Convexidade da Superfície e Normalidade do Fluxo Plástico.Chen et al. (1988).....	37
Figura 3.8	Representação Geométrica do Estado Plástico de Tensões no Espaço. Kobayashi et al (1989).....	40
Figura 3.9	"Locci" do escoamento no plano $\pi$ para o critério de distorção de energia e tensão cisalhante.Kobayashi et al. (1989).....	41
Figura 4.10	Área padrão de um espécime em forma de tira. Marciniak e Duncan (1993).....	54
Figura 4.11	Deformação adimensional com encruamento de material endurecido. Marciniak, Z. et al (1993).....	55
Figura 4.12	Diagrama Carga x Deformação de um espécime perfeito. Marciniak e Duncan (1993).....	56
Figura 4.13	Seção de "casca" esférica mostrando perturbação na superfície, na região D. Marciniak e Duncan (1993).....	57
Figura 4.14	Principais tensões, em uma chapa se deformando proporcionalmente. Marciniak e Duncan (1993).....	58
Figura 4.15	Diferentes valores em diferentes carregamentos para tração máxima do material. Marciniak e Duncan (1993).....	59
Figura 4.16	Estricção local, orientado com $\theta$ , em relação aos eixos principais de tensão;(b) Círculo de Mohr mostrando a orientação da linha zero extensão. Marciniak e Duncan (1993).....	61
Figura 4.17	Uma imperfeição B na região A das deformações uniformes. A imperfeição é perpendicular à direção das maiores tensões principais. Marciniak e Duncan (1993).....	62
Figura 4.18	Estado de tensões em Ao, deformação uniforme e Bo, na imperfeição, no início da deformação plástica. Marciniak e Duncan (1993).....	63
Figura 4.19	O vetor deformação rotaciona conforme o deslocamento do ponto tensão ao longo da superfície de escoamento. Marciniak e Duncan (1993).....	64

Figura 4.20	O caminho do ponto de tensão pela estria, B, se encaminhando para deformação plana onde $\alpha = \frac{1}{2}$ . Marciniak e Duncan (1993).....	65
Figura 4.21	Caminhos de deformação na estria, B, e na região uniforme A. Marciniak, e Duncan (1993).....	66
Figura 4.22	Curva Limite de Conformabilidade obtida pela união das deformações finais na região uniforme ( $\epsilon_{2A}, \epsilon_{1A}$ ) para diferentes caminhos de deformação. Marciniak e Duncan (1993).....	67
Figura 4.23	Efeito do encruamento em n na curva limite de conformabilidade. Marciniak e Duncan. (1993).....	68
Figura 4.24	Efeito de uma fratura em baixa deformação na estria, em F1, comparado com fratura a alta deformação em F2, nas deformações limite $\epsilon_{1A}$ . Mudanças em $\epsilon_1$ a F1 afetará o limite de deformação. Marciniak e Duncan. (1993)	69
Figura 4.25	Limites para um processo simples de conformação de chapas. Marciniak e Duncan(1993).....	70
Figura 4.26	Variáveis do Dobramento. Marciniak e Duncan (1993).....	72
Figura 4.27	Conformação de uma chapa circular Marciniak e Duncan (1993).....	74
Figura 4.28	Superfície de revolução gerada pela revolução da curva C. Marciniak e Duncan(1993).....	75
Figura 4.29	Conformando uma chapa fina com pressão de fluido. Marciniak e Duncan (1993).....	76
Figura 4.30	Forças atuantes em um elemento de casca. Marciniak e Duncan(1993).....	78
Figura 4.31	Comparação do estiramento com punção e com pressão hidrostática. Marciniak e Duncan (1993).....	79
Figura 4.32	Força de atrito na interface punção - chapa (a); influência do atrito na deformação (b); ruptura usualmente próxima a região B. Marciniak e Duncan (1993).....	80
Figura 5.33	Cinemática da deformação do elemento de chapa nos vários estágios. Toh (1983).....	84
Figura 5.34	Coordenadas locais do elemento triangular com os deslocamentos nodais u, v, w. Toh (1983).....	88
Figura 5.35	Sistemas de Coordenadas Cartesianas Global e Local. Toh (1983).....	92
Figura 5.36	Vista Esquemática dos Requisitos Geométricos para o Nó em Contato com o Punção. Toh (1983).....	96
Figura 6.37	Vista esquemática do (a) Estiramento e (b) Estampagem profunda. .	100
Figura 6.38	Fluxograma do programa Sheet. Toh (1983).....	103
Figura 7.39	Vista esquemática do processo de estiramento com punção hemisférico.....	107
Figura 7.40	Comparação entre os resultados atuais e de Toh (1983), para a distribuição de deformações efetivas de espessura para $\mu=0$ .....	109
Figura 7.41	Comparação entre os resultados atuais e os de Toh (1983) para a força no punção para $\mu =0$ .....	109
Figura 7.42	Comparação entre os resultados atuais e experimentais Kim et al. (1978) para a distribuição de deformações efetivas de espessura para $\mu=0,2$ .....	110

Figura 7.43	Comparação entre os resultados atuais e os de Toh (1983) para a carga no punção para $\mu = 0,2$ .....	110
Figura 7.44	Evolução da deformação total com o avanço do punção para $\mu=0$ .....	111
Figura 7.45	Continuação – Isodeformações, para $\mu=0$ .....	112
Figura 7.46	Comparação entre as iso deformações para os casos $\mu=0$ e $\mu=0,2$ ...	113
Figura 7.47	Continuação do quadro comparativo de iso deformações - $\mu=0$ e $\mu=0,2$ .....	114
Figura 7.48	Distribuição de Deformações de Espessuras para o $\alpha$ -Bronze, na condição sem atrito.....	116
Figura 7.49	Distribuição de Deformações de Espessuras para a condição com atrito $\mu=0,2$ .....	116
Figura 7.50	Carga no punção para as condições com e sem atrito para o $\alpha$ -Bronze.....	117
Figura 7.51	Distribuição de deformações de espessura, para o aço HSLA, sem atrito.....	118
Figura 7.52	Distribuição de deformações de espessura para o aço HSLA, com coeficiente de atrito $\mu=0,2$ .....	118
Figura 7.53	Carga no punção, para as condições com e sem atrito, aço HSLA....	119
Figura 7.54	Distribuição de deformações de espessura para o aço doce, condição sem atrito.....	120
Figura 7.55	Distribuição de deformações de espessura para o aço doce, condição com atrito, $\mu = 0,2$ .....	120
Figura 7.56	Carga no punção para o aço doce, condições com e sem atrito.....	120
Figura 7.57	Efeitos do número de elementos nos resultados para a deformação de espessuras e $\mu = 0$ .....	122
Figura 7.58	Efeito do número de elementos na deformação da espessura. $\mu=0,2$ .....	123
Figura 7.59	Efeito do número de elementos na carga no punção. $\mu=0$ .....	123
Figura 7.60	- Influência do número de elementos na carga no punção. $\mu=0,2$ .....	124
Figura 7.61	Evolução do processo de estiramento. $\mu=0$ .....	127
Figura 7.62	Continuação do processo de estiramento. $\mu=0$ .....	128
Figura 7.63	Distribuição de deformações de espessura. Comparação com os resultados de Toh, C. H. (1983). $\mu=0$ .....	128
Figura 7.64	Deformação Total - pontos de máxima deformação.....	128
Figura 7.65	Geometrias dos espécimes usados nas simulações.....	130
Figura 7.66	Curvas de Carga no Punção x Deslocamento para diversos valores de corte com $\mu=0$ .....	132
Figura 7.67	Curvas de Carga no Punção x Deslocamento para diversos cortes, $\mu = 0,25$ .....	132
Figura 7.68	Distribuição de deformações de espessura pra raio de corte=0, $\mu=0$ .	132
Figura 7.69	Distribuição de Deformação de Espessuras para raio de corte = 0, $\mu=0,25$ .....	132

Figura 7.70	Distribuição de deformações de espessura, para um raio de corte de 44,45 mm. $\mu=0$ .....	132
Figura 7.71	Distribuição de Deformações de Espessuras, para um raio de corte = 50,8 mm. $\mu= 0$ .....	132
Figura 7.72	Distribuição de Deformações de Espessura, para um raio de corte = 57,15 mm.....	132
Figura 7.73	Distribuição de Deformações de Espessura para um Raio de Corte de 57,15mm,.....	132
Figura 7.74	Distribuição de Deformações Efetivas para $\mu = 0$ e $\mu = 0,25$ , para raio de corte de 57,15 mm.....	134
Figura 8.75	Problema da determinação do valor inicial da taxa de deformação. Rebelo et al. (1979).....	138
Figura 8.76	Comparação de Resultados de distribuição de deformação da espessura entre os casos com taxa, ( $v=0,423$ mm/s) e sem taxa, com os resultados de Toh(1990), a 30 mm de profundidade de avanço do punção. $\mu = 0,25$ .....	140
Figura 8.77	Comparação das curvas de carga no punção x deslocamento, para as condições com taxa ( $v=0,423$ mm/s) e sem taxa, com resultados obtidos por Toh (1990). $\mu=0,25$ .....	141
Figura 8.78	Comparação da distribuição de deformações de espessura para diferentes velocidades com os resultados de Toh (1990). $\mu=0,25$ .....	141
Figura 8.79	Comparação do efeito da taxa de sensibilidade ( $m=0.012$ ) na carga do punção a várias velocidades. $\mu=0,25$ .....	141
Figura 8.80	Curvas de Carga x Deslocamento na simulação com raio de corte igual a zero, nas condições com e sem taxa de sensibilidade. $\mu = 0,15$ .....	143
Figura 8.81	Distribuição de deformações de espessura versus raio da chapa , com taxa e sem taxa, com raio de corte = 0 . $\mu = 0,15$ .....	144
Figura 8.82	Distribuição de deformações de espessura versus raio da chapa, para o raio de corte de 57, 15 mm, com e sem taxa. $\mu = 0,15$ .....	144
Figura 8.83	Curvas de Carga no Punção x Deslocamento, para um raio de corte de 57,15 mm com e sem taxa., $\mu = 0,15$ .....	144
Figura 8.84	Deformações Efetivas no plano da chapa, para as condições com e sem atrito, sem taxa de sensibilidade.....	145
Figura 8.85	Deformações Efetivas no plano da chapa indeformada, para os casos com e sem taxa, . $\mu = 0,15$ .....	145
Figura 8.86	Comparação hipotética entre três materiais , com diferentes taxas de sensibilidade (negativa, nula e positiva).....	146

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Equações Governantes.....	52
--	----



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

- PK - Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff
- PK-2 - Tensor Tensão Segundo de Piola-Kirchhoff
- DLC - Diagrama Limite de Conformabilidade
- MEF - Método de Elementos Finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	- Tensão de Cauchy
$\dot{\epsilon}$	- Taxa de Deformação
$d\epsilon$	- Deformação Infinitesimal
$\epsilon$	- Deformação Natural (Total)
$e$	- Gradiente de Deformação da Engenharia
$E_{11}$	- Componente da Deformação Lagrangeana
$P_{11}$	- Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff – Tensão da Engenharia
$\dot{w}_o$	- Taxa de Trabalho por Unidade de Volume
$s_{11}$	- Componente do Tensor Segundo de Piola-Kirchhoff (PK-2)
$\dot{\epsilon}_{ij}$	- Tensor Taxa de Deformação
$\sigma_{ij}$	- Tensor Tensão de Cauchy
$I_1$	- Invariante Tensorial
$I_2$	- Invariante Tensorial
$I_3$	- Invariante Tensorial
$\dot{\epsilon}_{ij}^p$	- Taxa de Deformação Plástica
$d\epsilon_{ij}^p$	- Deformação Plástica Infinitesimal
$f(\sigma_{ij})$	- Função de Escoamento de von Mises
$d\lambda$	- Fator de Proporcionalidade
$F$	- Parâmetro de Anisotropia (Hill)
$G$	- Parâmetro de Anisotropia (Hill)
$H$	- Parâmetro de Anisotropia (Hill)
$L$	- Parâmetro de Anisotropia (Hill)
$M$	- Parâmetro de Anisotropia (Hill)
$N$	- Parâmetro de Anisotropia (Hill)
$R$	- Relação de Anisotropia Plana de Hill
$\infty$	- Ângulo do Sistema de Referência em Relação à Direção de Laminação
$n$	- Coeficiente de Endurecimento à Deformação
$\bar{S}$	- Tensão Efetiva Atual
$\bar{S}_{ij}$	- Tensão Efetiva
$F_i$	- Força por Unidade de Superfície
$V$	- Volume

$A$	- Área Superficial do Corpo
$T$	- Tensão; Força Unitária
$t$	- Espessura
$\alpha$	- Constante
$\beta$	- Constante
$f_o$	- Relação Inicial entre Espessuras de Áreas Adjacentes
$\varepsilon_\theta$	- Componente de Deformação segundo $\theta$
$\varepsilon_\phi$	- Componente de Deformação segundo $\phi$
$\varepsilon_i$	- Deformação Intermediária
$z$	- Resultante Axial
$q$	- Tensão de Contato no Punção
$\phi_b$	- Ângulo Hemisférico
$\pi$	- Funcional
$\bar{\sigma}$	- Tensão Efetiva
$\bar{\varepsilon}$	- Deformação Efetiva
$\vec{F}_i$	- Forças de Tração na Superfície
$\delta\pi$	- Variação do Funcional $\pi$
$n_\alpha$	- Vetor Normal à Superfície $dS$
$\mathbf{g}_\beta$	- Vetor Base do Sistema de Referência $x'-y'-z'$
$t_{\alpha\beta}$	- Componente do Primeiro Tipo do Tensor PK
$\sigma_{\alpha\beta}$	- Componentes do Tensor Tensão de Cauchy
$\delta_{\beta\gamma}$	- Delta de Kronecker
$S_{\alpha\beta}$	- Componentes do Tensor Tensão PK-2.
$\mathbf{u}_i$	- Vetor Deslocamento
$F$	- Gradiente de Deformação
$w$	- Trabalho Virtual
$\mathbf{f}$	- Força de Tração
$\delta \mathbf{u}$	- Vetor de Deslocamento Virtual
$dE_{\alpha\beta}$	- Tensor de Incremento de Deformação Lagrangeano
$\mathbf{u}$	- Deslocamento
$\mathbf{v}$	- Deslocamento
$\mathbf{w}$	- Deslocamento
$\mathbf{A}$	- Matriz de Elementos

<b>N</b>	- Matriz de Interpolação
$dE_x$	- Gradiente de Deslocamento
$dE_y$	- Gradiente de Deslocamento
$dE_{xy}$	- Gradiente de Deslocamento
$dE_z$	- Gradiente de Deslocamento
<b>B</b>	- Matriz Deformação-Deslocamento
<b>x</b>	- Vetor Posição de um Ponto Arbitrário no Sistema (x,y,z)
<b>X</b>	- Vetor Posição de um Ponto Arbitrário no Sistema (X, Y, Z)
$\underline{\lambda}$	- Matriz de Transformação
<b>P*</b>	- Matriz de Rigidez Total
$\Delta u$	- Perturbações
<b>F - H*</b>	- Vetor de Carga
$p$	- Pressão Interfacial Local
$\mu$	- Coeficiente de Atrito
$\dot{\epsilon}$	- Taxa de Deformação
$f(\bar{\epsilon})$	- Função da Deformação Efetiva
$g(\dot{\epsilon})$	- Função da Taxa de Deformação Efetiva
$d\bar{\epsilon}$	- Incremento de Deformação Efetiva (Verdadeira)
$d\dot{\epsilon}$	- Taxa de Deformação Verdadeira durante o Incremento de Deformação
$d\dot{E}$	- Taxa de Deformação Lagrangeana durante o incremento de Deformação
$\Delta t$	- Intervalo de tempo durante cada incremento
$\dot{\epsilon}_o$	- Valor Inicial da Taxa de Deformação
$m$	- Taxa de Sensibilidade (Forma Multiplicativa)

# SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

<u>1. INTRODUÇÃO.....</u>	<u>16</u>
1.1 ESCOPO DO ESTUDO.....	16
1.2 CONTEÚDO DESTA DISSERTAÇÃO.....	23
1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO.....	25
<u>3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</u>	<u>27</u>
<u>4. ELEMENTOS DE PLASTICIDADE.....</u>	<u>31</u>
3.1 INTRODUÇÃO.....	31
3.2 REGRA DO FLUXO E POTENCIAL PLÁSTICO.....	34
3.3 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO.....	38
3.3.1 EQUAÇÕES DE PRANDTL-REUSS E LEVY-MISES.....	39
3.3.2 CRITÉRIO DE HILL.....	42
3.1 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA A CURVA TENSÃO DEFORMAÇÃO DE MATERIAIS RÍGIDO-PLÁSTICOS.....	47
3.2 EQUILÍBRIO E PRINCÍPIO DA TAXA DO TRABALHO VIRTUAL.....	49
3.3 ENCRUAMENTO, TENSÃO EFETIVA E DEFORMAÇÃO EFETIVA.....	51
3.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	51
<u>5. MECÂNICA DA DEFORMAÇÃO DE CHAPAS.....</u>	<u>53</u>
3.5 INTRODUÇÃO.....	53
3.6 TENSÃO UNIAXIAL EM UMA TIRA PERFEITA.....	53
3.7 OCORRÊNCIA DE ESTRICÇÃO LOCALIZADA EM CHAPAS CONTÍNUAS.....	56
3.8 CONDIÇÃO PARA A FORMAÇÃO DE UMA ESTRICÇÃO LOCAL.....	57
3.8.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ESTRICÇÃO.....	60
3.9 FORMAÇÃO DE ESTRICÇÃO EM TRAÇÃO BIAXIAL.....	61
4.5.1 ANÁLISE DO PROCESSO DE DEFORMAÇÃO.....	64
4.5.2 EXEMPLO DE ANÁLISE.....	65
3.9.1 DIAGRAMA LIMITE DE CONFORMABILIDADE.....	66

3.10	EFEITOS DO ENCRUAMENTO.....	67
3.11	FRATURA DÚTIL.....	68
3.12	ESTUDO DO DOBRAMENTO.....	72
3.13	ESTUDO DO ESTIRAMENTO.....	74
3.13.1	ESTIRAMENTO DE UM DIAFRAGMA CIRCULAR.....	74
3.13.2	CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	77
3.13.3	ESTIRAMENTO COM PUNÇÃO HEMISFÉRICO RÍGIDO.....	78
3.13.4	EFEITO DO ATRITO.....	80
<b><u>6. MODELAGEM DO PROCESSO DE ESTAMPAGEM PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....</u></b>		<b>82</b>
3.14	ABORDAGEM VARIACIONAL.....	82
3.15	CINEMÁTICA DA DEFORMAÇÃO.....	82
3.16	DISCRETIZAÇÃO.....	86
3.16.1	TRANSLAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS.....	92
3.17	MÉTODO DE SOLUÇÃO.....	93
3.18	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	96
3.18.1	CONDIÇÕES DE CONTATO.....	96
3.18.2	CONDIÇÕES DE ATRITO NA INTERFACE CHAPA-PUNÇÃO.....	97
<b><u>7. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL – O PROGRAMA SHEET.....</u></b>		<b>99</b>
3.19	FUNIONAMENTO DO PROGRAMA.....	99
3.20	ESTRUTURA DO PROGRAMA.....	101
3.21	FLUXOGRAMA.....	103
<b><u>8. RESULTADOS NUMÉRICOS DA SOLUÇÃO RÍGIDO-PLÁSTICA.....</u></b>		<b>104</b>
3.22	CASOS AXISIMÉTRICOS.....	104
3.22.1	ESTIRAMENTO DE UMA CHAPA CIRCULAR.....	105
3.22.2	CASOS ADICIONAIS DE ESTIRAMENTO DE CHAPA CIRCULAR.....	115
3.22.3	EFEITO DO NÚMERO DE ELEMENTOS NOS RESULTADOS.....	121
3.23	CASOS NÃO AXISIMÉTRICOS.....	124
3.23.1	ESTIRAMENTO DE CHAPA RETANGULAR.....	125
3.23.2	ESTIRAMENTO DE CHAPA COM CORTE SEMI CIRCULAR.....	129
<b><u>9. ESTUDO DA TAXA DE SENSIBILIDADE.....</u></b>		<b>135</b>
3.24	INTRODUÇÃO.....	135
3.25	FORMULAÇÃO.....	135
3.25.1	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	137
3.26	CASOS AXISIMÉTRICOS.....	138
3.27	CASOS NÃO AXISIMÉTRICOS.....	142
<b><u>10. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</u></b>		<b>147</b>
3.28	CONCLUSÕES.....	147
3.29	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	148
REFERÊNCIAS.....		149
APÊNDICE A – TIPOS DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADAS.....		153







# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 ESCOPO DO ESTUDO

Um processo de conformação metálica consiste em ter-se inicialmente um tarugo ou uma chapa laminada, sendo estes conformados entre duas ferramentas (matrizes, ou matriz e punção), mediante o uso da força, a quente ou a frio. Neste processo, um elemento de geometria relativamente simples é transformado em outro de geometria complexa, previamente estabelecida em um molde ou matriz. (Figura 1.1)

Às vantagens que tornam estes processos de conformação tão amplamente aplicados na indústria, (como adequação à produção em série de produtos, baixo custo e qualidade), contrapõe-se, entretanto, a falta de um domínio completo dos processos físicos envolvidos e seu inter relacionamento. Fatores como a fricção entre a ferramenta e o material de interface no fluxo metálico, a geração e transferência de calor no fluxo plástico, o relacionamento entre a microestrutura e suas propriedades, assim como as condições do processo, são difíceis de analisar e

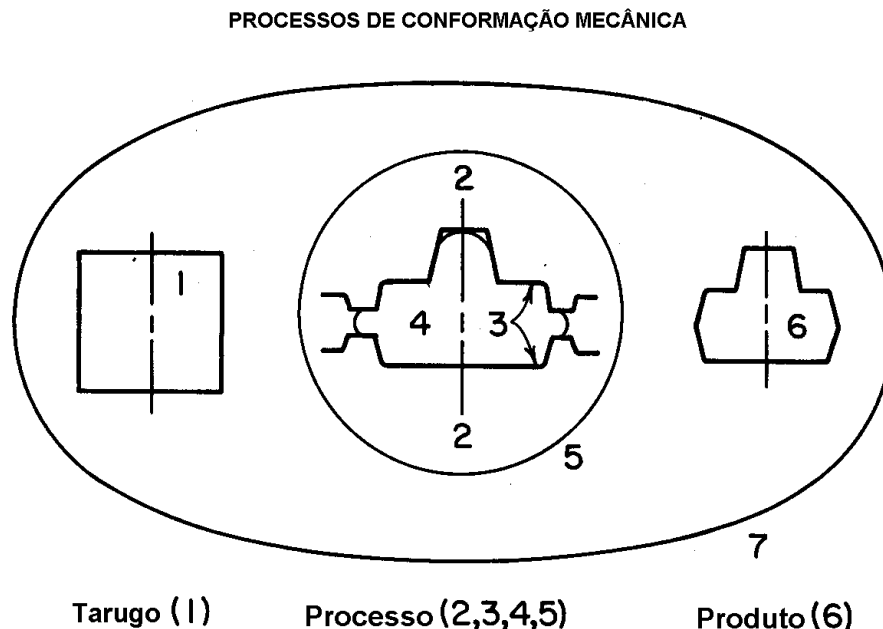


Figura 1.1 Figura esquemática do processo de conformação mecânica - processo de forjamento: 1, tarugo; 2, matrizes; 3, interface; 4, deformação mecânica; 5, forja; 6, produto; 7, ambiente. Kobayashi, et al. (1989).

predizer. Para uma análise *quantitativa* do modelo e otimização das operações de conformação metálica, é prático abordar-se o processo como um *sistema* conforme Altan et al. (1981) e classificar tais processos de uma maneira sistemática.

A abordagem de *sistema* no estudo da conformação metálica deve levar em conta os efeitos das variáveis do processo na qualidade do produto no processo econômico. A chave para uma bem sucedida operação de conformação metálica, ou seja, do produto com o contorno desejado e propriedades, está no entendimento e no controle do fluxo metálico. A direção do fluxo metálico, magnitude da deformação e a temperatura envolvida influenciam fortemente as propriedades dos elementos conformados. O fluxo metálico afeta diretamente as propriedades mecânicas relativas ao local da deformação e à formação de defeitos tais como trincas ou dobras, sob, ou na superfície. O fluxo metálico local, por sua vez, é influenciado pelas variáveis do processo, como descritas a seguir.

**Variáveis de Material:** para uma dada composição de material, deformação e tratamento térmico (microestrutura), o fluxo de tensões e a conformabilidade em várias direções (anisotropia), são as mais importantes variáveis de material na análise de um processo de conformação metálica. Para uma dada microestrutura, o fluxo de tensões (tensão efetiva) é expresso como uma função de deformação, taxa de deformação e temperatura. Para determinar um relacionamento funcional é necessário conduzir testes de torção, compressão com deformação plana e compressão uniforme axisimétrica.

Define-se *conformabilidade* como a capacidade de um material de se deformar sem falhas. Esta capacidade depende basicamente de dois fatores. O primeiro refere-se às condições existentes durante o processo de conformação (deformação) - temperatura, taxa de deformação, tensões e histórico da deformação. O segundo fator está relacionado às variáveis de material, como composição, vazios, inclusões e microestrutura inicial.

Nos processos de conformação a quente, os gradientes de temperatura na deformação do material também influenciam o fluxo de material e o surgimento de falhas.

**Ferramental e Maquinaria:** a seleção de um equipamento para um dado processo é influenciada pelo tempo, precisão e demanda de energia característicos da máquina. O processo de seleção do equipamento requer consideração de todo o sistema, incluindo tamanho do lote, condições das instalações, efeitos ambientais e requisitos de manutenção, bem como requisitos da peça e processo sob consideração. As variáveis do ferramental incluem finalidade e geometria, acabamento superficial, rigidez e, propriedades térmicas e mecânicas sob condições de uso.

**Atrito:** os mecanismos de interface são muito complexos. Uma maneira de expressar quantitativamente é através de coeficiente de atrito ( $\mu$ ) ou por um fator de atrito cisalhante  $m$ . Testes podem ser feitos para determinação do valor de  $\mu$  ou  $m$ . [American Society for Metals (1961)].

**Mecânica da Deformação:** na conformação, o material é deformado plasticamente para gerar a forma do produto desejado. O fluxo metálico é influenciado principalmente pela geometria da ferramenta, condições de atrito, características de procedência do material e condições térmicas existentes na zona de deformação.

Os detalhes do fluxo material influenciam a qualidade e propriedades do produto conformado, a força e a energia requeridos no processo. A mecânica da deformação, isto é, o fluxo metálico, deformações, taxas de deformação e tensões podem ser investigados por processo de modelagem numérica, como Elementos Finitos.

**Propriedades do produto:** a macro e micro geometrias do produto, isto é, suas dimensões e acabamento superficial são influenciados pelas variáveis do processo. As condições de processamento (temperatura, deformação e taxa de deformação) determinam as variações micro-estruturais durante a deformação e freqüentemente influenciam as propriedades finais do produto.

Os processos de conformação metálica podem ser classificados segundo Altan et al. (1983) em *processos de conformação massiva e processos de conformação de chapas metálicas*. Estes são caracterizados por:

**Processos de Conformação Massiva:** neste caso, a peça de trabalho é submetida a grandes deformações plásticas, resultando em uma apreciável mudança na forma ou seção transversal. A parte da peça de trabalho submetida à deformação plástica permanente é geralmente muito maior do que a parte submetida à deformação elástica. Deste modo, a recuperação elástica após a deformação é negligenciável.

**Processos de Conformação de Chapas Metálicas:** a peça de trabalho é uma chapa ou uma parte é conformada a partir de uma chapa. Além disso, a deformação usualmente causa significativa mudança na forma, mas não na seção transversal da chapa. Em alguns casos, as magnitudes das deformações plásticas e deformações elásticas são comparáveis. Assim, a recuperação elástica ou retorno elástico pode ser significativo.

Dentro da ampla gama de processos de conformação de chapas metálicas, objeto deste trabalho, estes ainda podem ser classificados em: dobramento e flangeamento reto, conformação superficial de chapas, perfilamento, rebaixamento leve e rebaixamento profundo ou embutimento.

O processo de estampagem é uma das mais antigas operações industriais e tem alta relevância. Este processo permite atingir acabamento superficial e tolerâncias dimensionais na obtenção de ampla gama de produtos com seção transversal constante. Na estampagem, um produto com forma oca ou sólida, é empurrado em relativamente alta velocidade através de uma matriz. As dimensões da matriz determinam as dimensões finais, a área da seção transversal do produto estampado e a redução na área. Este processo é conduzido normalmente a temperatura ambiente, usando-se um número de passes ou reduções por meio de matrizes adequadas (Figura 1.2). Em alguns casos, recozimento para alívio de tensões pode ser necessário após um certo número de passes, para em seguida continuar o processo. A deformação é acompanhada por tensões de tração e compressão criadas pela força de embutimento e extração. Yoshida (1959) propôs uma classificação geral dos processos de conformação sob pressão baseada nos mecanismos governantes da deformação. Os mecanismos básicos são dobramento, estiramento e embutimento. Dependendo da forma e das dimensões

relativas à chapa e da ferramenta, um ou mais mecanismos são envolvidos na conformação de um produto.

Segundo Johnson e Mamalis (1976), Os limites da conformação metálica de chapas são determinados pela ocorrência de defeitos tais como dobras e rupturas na chapa (*Figura 1.3*).

A taxa limite de redução na estampagem, que é a relação limite entre a máxima dimensão da chapa e a máxima dimensão da peça estampada, é uma medida do alcance da estampabilidade. Uma ocorrência que restringe a estampabilidade são as dobras. Estas dobras ou rugas se formam no flange, (sobre a superfície plana) ou na chapa (nas bordas dos vazados da matriz). As dobras sobre a superfície podem ser contidas pelo uso se uma força aplicada com uma matriz denominada *prensa-chapas*, enquanto as demais, pelo uso de raios de arredondamento em torno das arestas dos vazados da matriz. No estiramento de chapas sobre um punção, a ruptura da chapa ocorre sobre o perfil do punção. Dobras precedem a eventual ruptura. Portanto, o limite da conformabilidade é governado pela condição de instabilidade e o ponto de iniciação das dobras depende das condições de atrito na interface punção-chapa.

Operações de dobramento estão envolvidas em todas as estampagens complexas. No dobramento, em contraste com a maioria das operações de estiramento, existe uma grande variação de tensões através da espessura do material. No lado externo da dobra, existe tensão por tração, enquanto no lado

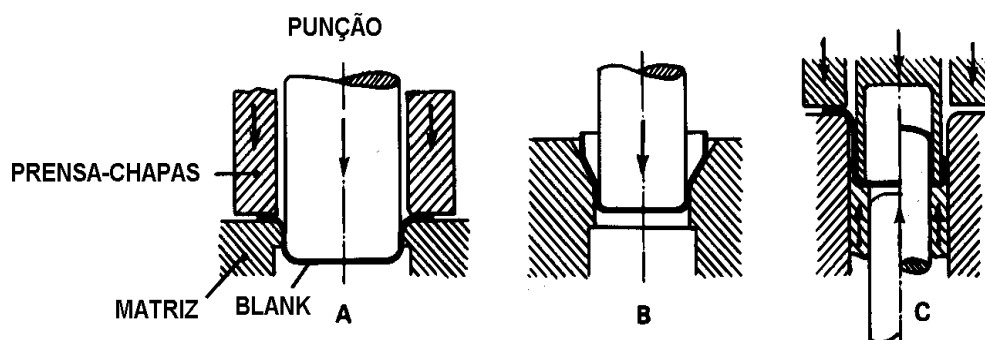


Figura 1.2 Estampagem profunda: (A) Primeira Operação;(B) Segunda Operação; (C) Extração; Em uma estampagem profunda, a chapa é pressionada contra a matriz, através do punção, rebaixando a superfície sem alterar sensivelmente a espessura original. Kobayashi, et al. (1989)

interno, há compressão ou um reduzido nível de tensão. A intensidade das deformações por tração, depende do raio, ângulo e comprimento da dobra. A fratura ocorre no lado tracionado por redução de espessura.

A conformabilidade de chapas metálicas, é freqüentemente avaliada por testes simples, tais como o ensaio de tração. Os parâmetros obtidos, desta forma, por tração simples, mais precisamente, grau de anisotropia, relação entre endurecimento devido à mudança de forma e tensão-deformação, são relacionados com a conformabilidade.

Para uma completa avaliação da conformabilidade, métodos diretos, tais como *Teste de Ericksen*, *Teste do copo de Swift* e o *teste do copo cônico de Fukui*, et al. (1952), têm sido usados para determinação da conformabilidade.

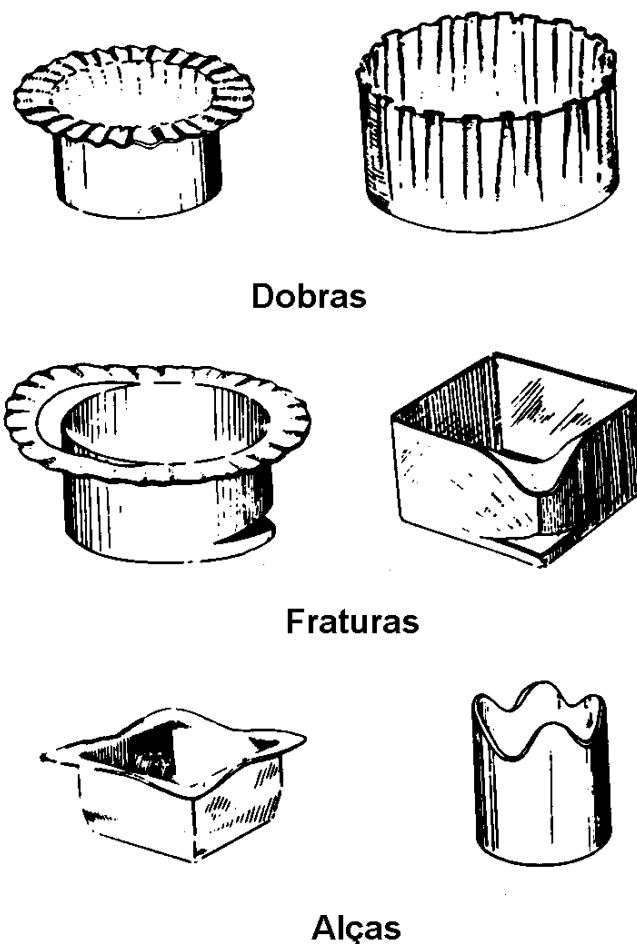


Figura 1.3 Defeitos observados em estampagem de peças ôcas. Kobayashi, et al. (1989)

O Diagrama Limite de Conformabilidade (DLC) é um importante desenvolvimento na representação da conformabilidade de chapas metálicas [Keeler e Backofen (1963)]

Neste diagrama (Figura 1.4), as maiores e menores deformações superficiais em um ponto crítico são avaliáveis, assim como o enrugamento localizado em uma chapa deformada, e os locais de deformações que produzirão falhas na operação de conformação. Métodos experimentais são usados para construir o diagrama.

O método Nakajima et al. (1968), usa um punção hemisférico e chapas retangulares com várias larguras e condições de lubrificação.

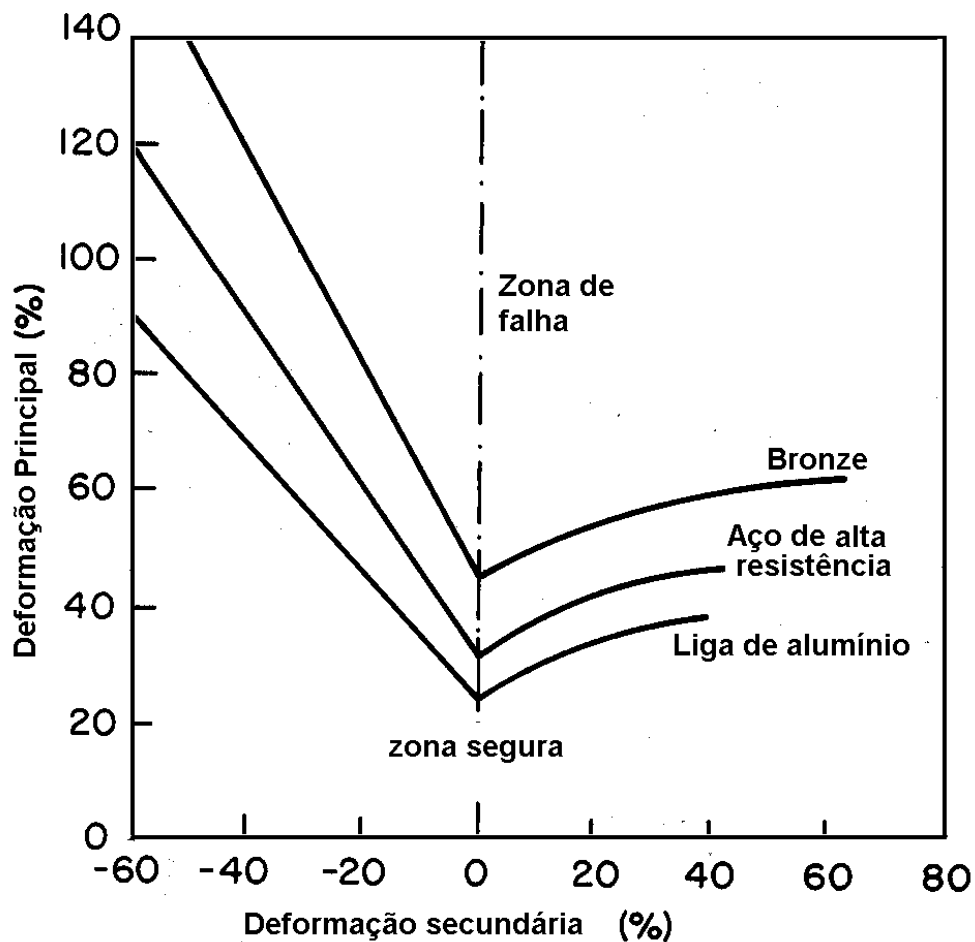


Figura 1.4 Diagrama Limite de conformabilidade e deformação de tiras retangular e circular (com raio de corte) .Kobayashi et al. (1989)

Hasek (1978), usou um punção hemisférico com chapas circulares com vários cortes. Este método tem a vantagem de eliminar o enrugamento ou reduzir o fenômeno que ocorre nas bordas das tiras retangulares do método de Nakajima.

O atrito na interface punção-estampo é um importante fator para a conformabilidade. Parâmetros materiais tais como o endurecimento devido à conformação e a taxa de sensibilidade à deformação também são importantes. Outro fator importante na conformação mecânica é a anisotropia da chapa metálica. Um exemplo da anisotropia na conformabilidade é a limitação da estampabilidade em um estampo com forma de copo, com o aumento da *relação- r*. Esta relação se refere à deformação transversal no plano da chapa e à espessura num estado uniaxial de tensões. Para Schey (1987), tal relação serve como medida da anisotropia na direção da espessura.

Deste modo, o alvo deste estudo, será a aplicação do Método dos Elementos Finitos com formulação constitutiva rígido plástica baseada na teoria da membrana, voltada para a simulação dos ensaios necessários para obtenção do comportamento de diferentes materiais empregados na estampagem metálica.

## 1.2 CONTEÚDO DESTA DISSERTAÇÃO

O conteúdo desta dissertação é dividido em nove capítulos, assim distribuídos:

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica, a qual contém um breve estudo do estado da arte, com relação à aplicação da teoria da plasticidade no estudo da conformação de chapas metálicas. Tal revisão envolve primordialmente, as formulações elasto-plásticas e rígido-plásticas, utilizadas na modelagem numérica do processo de estampagem via Método dos Elementos Finitos. Revisam-se também as técnicas de modelagem numérica para a obtenção de curvas de limite de conformabilidade.

O capítulo 3 apresenta uma abordagem sobre os elementos de plasticidade envolvidos na descrição da deformação. Este estudo inicia com o critério de escoamento, envolvendo os três critérios usualmente utilizados para a análise de deformação de metais: o critério de Tresca, de Huber-Mises e o de Hill, apropriados



para este estudo. Continua com o Princípio da Taxa do Trabalho Virtual e a Regra de Fluxo e Potencial Plástico. Neste último, são vistos o Princípio do Máximo Trabalho Plástico e as consequências da irreversibilidade do trabalho plástico na interpretação geométrica em um espaço de tensões e deformações. As consequências são respectivamente: a *convexidade* da superfície de escoamento e a *normalidade* do vetor incremento de deformação plástica. A seguir, descrevem-se as equações de Prandtl-Reuss e Levy-Mises, relacionando tensões e deformações para materiais elasto-plásticos. O estudo é concluído com um enfoque sobre o encruamento e com a regra de fluxo. Finalizando, apresenta-se um sumário das equações governantes para a solução da mecânica da deformação plástica de materiais rígido-plásticos e rígido-visco-plásticos.

O capítulo 4 trata da transmissão das tensões e deformações para o caso de chapas metálicas, iniciando por uma abordagem uniaxial e, após uma abordagem biaxial, impondo condição de imperfeição localizada em uma chapa inicialmente perfeita. As consequências da formação da estrição difusa e localizada são analisadas e os efeitos do endurecimento devido a deformação sobre a curva limite de conformabilidade também são abordados. Conclui-se este estudo com o estabelecimento dos limites seguros para a conformação metálica, na forma de um gráfico de deformações. O capítulo aborda ainda a análise dos processos isolados de dobramento e estiramento.

O capítulo 5 discute a formulação não linear de elementos finitos relativa ao processo de conformação de chapas metálicas, obtida através do Princípio do Trabalho Virtual. É apresentada a transformação entre os sistemas de coordenadas local para o global. A seguir analisam-se os requisitos de convergência numérica.

O capítulo 6 trata da implementação computacional. É feita uma descrição dos processos de conformação analisados pelo programa Sheet, do código e do fluxograma, com as subrotinas.

O capítulo 7 mostra os resultados numéricos dos casos com a formulação rígido-plástica, envolvendo simulação de tira retangular (caso não axisimétrico) submetida à estiramento e de disco circular (caso axisimétrico). Os resultados são comparados com a literatura disponível. Diversos estudos numéricos são realizados envolvendo os variados parâmetros que influem no processo de estampagem.

O capítulo 8 mostra a implementação do efeito da velocidade de deformação na formulação, através da taxa de sensibilidade, na sua forma multiplicativa. São mostrados os resultados da implementação da taxa de sensibilidade nos casos axi-simétricos e não axi-simétricos. O efeito da inclusão desta taxa é estudado através de vários ensaios numéricos demonstrando o aumento da estampabilidade (penetração do punção) dos exemplos aqui considerados.

O capítulo 9 apresenta as conclusões do presente estudo e sugestões para estudos futuros.

### 1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Um dos propósitos primordiais na realização de ensaios com espécimes reais e simulações através de métodos numéricos, como o Método de Elementos Finitos, no estudo da estampagem de chapas metálicas é estabelecer os limites seguros para conformação. A obtenção do *Diagrama Limite de Conformabilidade*, e mais especificamente, a *curva limite de conformabilidade*, para um determinado material, é o instrumento que permite chegar em um dado processo, a um resultado bem-sucedido. Os procedimentos experimentais para a obtenção destas curvas são caros e trabalhosos. Deste modo, torna-se clara a importância na obtenção de resultados através de simulações numéricas, em particular, pelo método de elementos finitos.

Os objetivos principais deste trabalho foram:

1. Estudar a mecânica da deformação das chapas metálicas, envolvendo as condições de falha mais comuns, nos processos básicos de conformação de chapas, em especial, o estiramento.
2. Estudar os variados fatores que influenciam o processo de estampagem, como atrito, força no punção, velocidade e anisotropia.
3. Estudar e implementar o efeito da velocidade de deformação, através da taxa de sensibilidade, na forma multiplicativa.

A fim de se alcançarem tais objetivos, utilizou-se o programa acadêmico em FORTRAN, denominado SHEET, desenvolvido por Toh (1983). O programa é capaz de simular o processo de estampagem via o método de Elementos Finitos utilizando

o modelo constitutivo rígido plástico. Tal programa foi detalhadamente estudado e por fim modificado para a inclusão dos efeitos da taxa de sensibilidade. Uma vez que o processo de estampagem envolve complexos fatores como a não linearidade material, contato e anisotropia, destaca-se o grau de dificuldade que as análises numéricas do processo apresentam.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os esforços para a modelagem matemática do processo de estampagem de chapas metálicas têm sido intensificados, particularmente, a partir do final dos anos 70 e início dos anos 80, no sentido de permitir reduções no tempo e custos de fabricação de produtos obtidos por meio de conformação de chapas metálicas. Destacam-se aqui apenas alguns esforços da modelagem numérica deste importante processo de fabricação.

Mehta e Kobayashi (1971) usaram uma análise elasto-plástica para configurações não axi-simétricas, com anisotropia normal, para materiais que são isotrópicos e plasticamente obedecem o critério de escoamento anisotrópico de Hill (1950).

Wifi (1976) obteve a solução completa para problemas de estampagem profunda, considerando o problema de contato, prensa-chapas, matrizes e punção.

Wang e Budiansky (1978), Toh (1985), tomaram como base as modelagem e simulação de processos de estampagem usando a teoria das membranas combinada com uma estratégia de solução implícita semi-estática.

Kim et al. (1978), aplicaram um princípio variacional à conformação de chapas metálicas, considerando a unicidade na solução aliada ao efeito da mudança da geometria. Desta formulação variacional resultou um modelo de elementos finitos baseado na teoria da membrana que propiciou a análise do estiramento de chapas metálicas com o uso de punção hemisférico. A comparação com resultados experimentais foi considerada boa. Este estudo revelou a importância dos efeitos do atrito na interface punção-chapa e serviu de base para Toh (1983) e o desenvolvimento do programa Sheet.

Toh (1983), usando formulação rígido-plástica, associada ao critério de escoamento anisotrópico de Hill (1950), efeito de endurecimento e atrito, apresentou um estudo detalhado da mecânica de deformação de chapas metálicas em vários estágios de conformação, através do uso do Método dos Elementos Finitos.

Toh et al. (1986), implementaram o Método dos Elementos Finitos com formulação rígido-plástica no estudo de conformabilidade de chapas de aço

inoxidável AISI 304. Através de uma análise detalhada dos experimentos (testes de conformabilidade de Hasek) via um programa de Elementos Finitos, obteve-se a curva limite de conformabilidade do AISI 304. Toh (1988), implementou uma condição de contorno a este método, que serviu de critério para estabelecer uma limitação às deformações e permitir a construção de curvas limite de conformabilidade de vários materiais, com base apenas em simulações numéricas.

Nakamachi (1988), desenvolveu um sistema CAE, com pré e pós-processador, destinado ao estudo da conformação de componentes automobilísticos usando o método de Elementos Finitos baseado na teoria da membrana e material elasto-plástico, perfis de punção e matriz arbitrários e elementos triangulares com deformação constante. Esta formulação permitiu definir em que estágio da conformação, realmente tem início a deformação plástica e o que ocorre em caso de remoção do carregamento durante a conformação do material.

Yang et al. (1990), propuseram um método de análise por elementos finitos rígido-plástico, para conformação de chapas metálicas com um tratamento do contato. Foi sugerido um algoritmo efetivo para o contato. Este trabalho mostrou que a abordagem da teoria da membrana tem suas limitações para os processos com regiões de deformação nos quais o efeito de dobramento não pode ser negligenciado.

Huang et al. (1993), baseado na teoria das grandes deformações, e usando o critério de densidade de energia da deformação, conseguiu prever a condição em que o produto pode vir a se danificar. Alguns parâmetros da mecânica da deformação são discutidos nesta análise.

Zhou et al. (1993), empregaram o método de elementos finitos com formulação rígido-visco-plástica, fazendo uso de critérios diversos de funções de escoamento (Hill, von Mises, etc.)

Yoshida (1995), usando elementos finitos tri-dimensionais e curvas limite de conformabilidade, conseguiu prever diversas características de produtos em chapas de aço, tais como, altura máxima do copo e localização de fraturas.

Meguid et al. (1997), usando desigualdades variacionais desenvolveram um método para tratar problemas de atrito no contato de sólidos elasto-plásticos sujeitos

a grandes deformações em processos de estampagem profunda. Neste estudo, o problema de grandes rotações encontradas durante a deformação foi tratado com o uso de tensor de taxa de tensões objetivo de Jaumann, e o atrito foi assumido como obedecendo a lei de Coulomb. Este trabalho permitiu verificar o efeito do atrito interfacial durante a carga do punção, trajetória de tensões de von Mises, a sucessão da deformação da geometria, o retorno elástico e tensões residuais na chapa metálica.

Hu et al. (2001), adotando uma formulação de elementos finitos elasto-plástica, baseada no princípio da velocidade virtual e no modelo de discretização triangular de Kirchhoff para chapa, estudaram a formação de “orelhas” em processos de estampagem profunda.

O estudo da taxa de sensibilidade pode ser brevemente descrito a seguir.

A introdução da taxa de sensibilidade para materiais sensíveis à velocidade de deformação é considerado por Ghosh (1977), o mais importante fator na estabilização das deformações no limite da formação da estrição difusa. A influência da taxa também foi observada na uniformidade da deformação, ou severidade de deformações localizadas.

Oh et al. (1979), desenvolveram uma formulação para elementos finitos para a análise de grandes deformações plásticas em materiais sensíveis à taxa de deformação. O comportamento rígido-visco-plástico foi utilizado na construção da equação constitutiva na chamada forma aditiva. Os autores apresentaram uma análise comparativa entre a análise obtida pelo MEF e resultados experimentais para chumbo e alumínio, submetidos a esforços de compressão (forjamento).

Rebelo et al.(1980), apresentaram para a modelagem do estiramento de chapas metálicas, um estudo para a introdução do efeito da taxa de sensibilidade, em uma análise rígido-visco-plástica. O estudo apresenta duas simulações, uma para aços AK sob duas condições de atrito e outra incluindo a taxa de sensibilidade, na forma aditiva. O estudo concluiu que a inclusão da taxa influi decisivamente na deformação, na medida em que o punção avança, mas o efeito é negligenciável no início do estiramento.

Toh (1990), executou uma análise comparativa da incorporação da taxa de sensibilidade em materiais sensíveis à taxa de deformação em aços AK, para duas variantes: as formas multiplicativa e aditiva. Além das constatações já indicadas por Ghosh (1977), os ensaios realizados por Toh forneceram importantes informações relativas à incorporação da taxa, no que diz respeito à conformabilidade de chapas.

## 4. ELEMENTOS DE PLASTICIDADE

### 3.1 INTRODUÇÃO

Os parâmetros básicos que podem ser utilizados para descrever a mecânica da deformação são a *tensão*, *deformação* e *taxa de deformação*. Para ilustrar estas quantidades, utiliza-se aqui um corpo de prova de formato cilíndrico com comprimento inicial  $l_0$  e área de seção transversal  $A_0$  (Figura 3.5).

Submetido a uma carga axial  $P$ , o mesmo assumirá um comprimento  $l$  e uma área de seção transversal  $A$ . O histórico da deformação pode ser visto em um diagrama tensão x deformação, onde o comportamento do material pode ser analisado. Duas formulações são tradicionalmente utilizadas na descrição deste histórico: a *Lagrangeana* e a *Euleriana*.

Na formulação Lagrangeana, as coordenadas  $X_i$  de uma partícula genérica no seu estado indeformado (variável independente) são usadas como referência. Na formulação Euleriana, as variáveis independentes são as coordenadas  $x_i$  de um ponto material no estado deformado.

Em um estado uniaxial de tensões, tensão, deformação e taxa de deformação podem ser definidos por:

- *Tensão de Cauchy (ou tensão verdadeira)*:  $\sigma = \frac{P}{A}$ ;
- *Taxa de Deformação*:  $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{l}}{l}$ ;
- *Deformação (infinitesimal)*:  $d\varepsilon = \frac{dl}{l}$

onde o ponto denota a derivação em relação ao tempo. A deformação total pode ser obtida pela integração das deformações infinitesimais:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (3.0)$$

onde  $\varepsilon$  é chamada de *deformação natural*.



A descrição Lagrangeana da deformação finita, usando tensão, deformação e taxa de deformação, pode ser expressa, tomando a posição de uma partícula na configuração deformada, em um instante  $t$ .

$$x = \chi(X, t) \tag{3.0}$$

Em um estado uniaxial de tensões, com  $X$  medido longitudinalmente ao espécime,

$$x = X + \left( \frac{l - l_0}{l_0} \right) X \tag{3.0}$$

e o gradiente de deformação relativa, usado em engenharia, é definido como:

$$e = \frac{\partial(x - X)}{\partial X} = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{3.0}$$

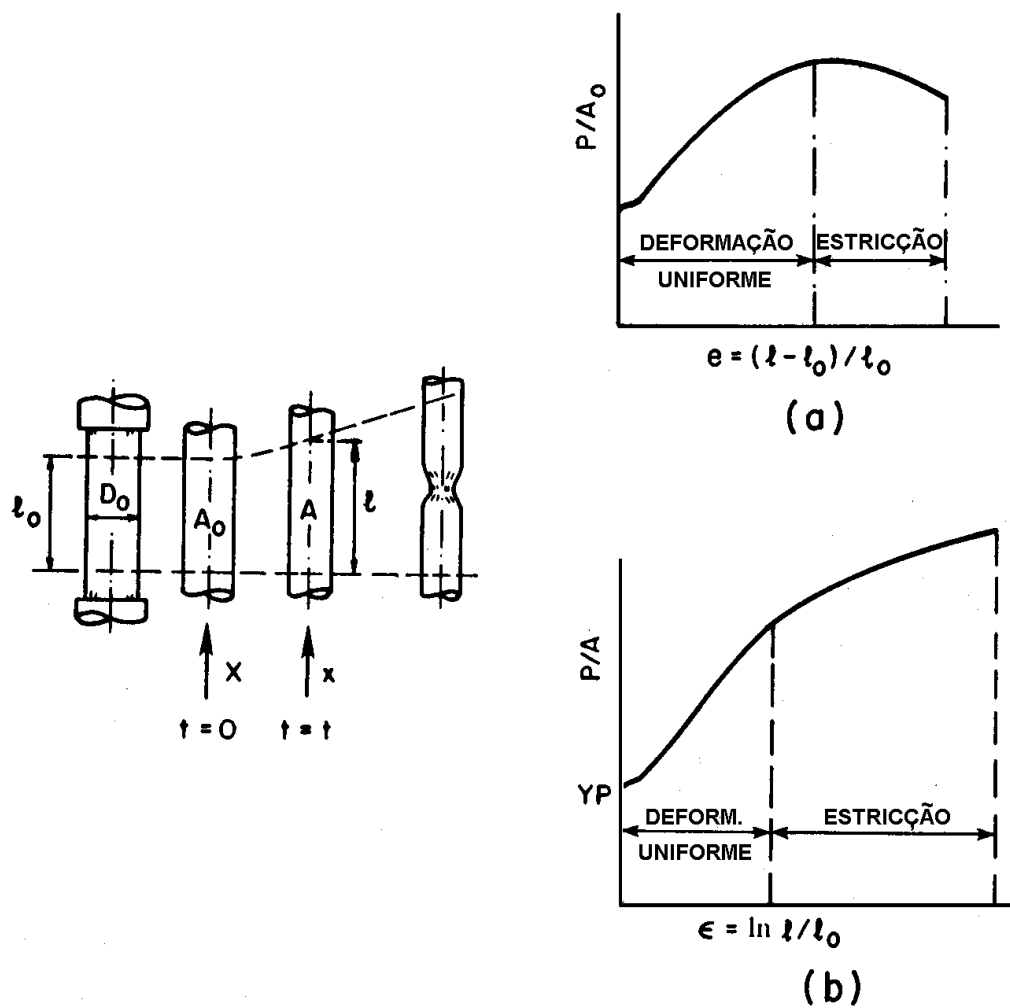


Figura 3.5 Diagramas de Tensão: (a) Piola-Kirchhoff; (b) Cauchy (tensão verdadeira). Kobayashi et al. (1989)

A componente de deformação Lagrangeana  $E_{11}$  é

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial X} - 1 \right) = \frac{1}{2} [(1+e)^2 - 1] = e + \frac{1}{2} e^2 \quad (3.0)$$

onde  $\dot{e} = \frac{\dot{l}}{l_0}$  e  $\dot{E}_{11} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} = (1+e)\dot{e}$  com  $\dot{x} = \frac{\partial \chi}{\partial t} |_{x=const}$

Um componente do tensor tensão de Piola-Kirchhoff é a tensão usada na

Engenharia, definido como  $p_{11} = \frac{P}{A_0}$ .

A taxa de trabalho por unidade de volume pode ser definida nas seguintes formas:

$$\dot{W}_o = \frac{P\dot{l}}{A_0 l_0} = p_{11} \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} = \frac{p_{11}}{1+e} \dot{E}_{11} \quad (3.0)$$

e a medida de tensão correspondente à taxa de deformação Lagrangeana é:

$$s_{11} = \frac{p_{11}}{1+e} \quad (3.0)$$

que corresponde a um componente do tensor segundo de Piola-Kirchhoff (*PK-2*), o qual é simétrico.

O tensor Tensão de Piola-Kirchhoff (*PK*) é definido considerando a área de seção transversal na configuração indeformada. Na análise dos processos de conformação metálica, formulações de fluxo e sólida envolvem a teoria das deformações finitas, daí a importância deste tensor para este estudo. Em estudos de processos que envolvem grandes deformações, as formulações sólida e de fluxo são usadas, envolvendo os tensores *PK* e *PK-2*.

Por outro lado, em vários processos de conformação mecânica (como os que envolvem as deformações no plano, por exemplo, os estudos são baseados na deformação infinitesimal.

O tensor taxa de deformação  $[\dot{\epsilon}_{ij}]$ , onde  $i, j = x, y, z$ , é simétrico e pode ser escrito para o caso tridimensional da seguinte forma:  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ , onde  $u_i$  e  $u_j$  são os deslocamentos e o ponto denota a derivação em relação ao tempo. O tensor tensão de Cauchy pode ser representado da seguinte forma:  $\sigma_{ij}$

A tensão também pode ser especificada pelos seus três componentes principais, ou, seus três invariantes tensoriais. As principais tensões ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) são as raízes da equação  $\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$ , onde onde:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (3.0)$$

### 3.2 REGRA DO FLUXO E POTENCIAL PLÁSTICO

A regra do fluxo fornece a relação ou a grandeza relativa dos componentes do tensor incremento das deformações plásticas  $d\epsilon_{ij}^p$ . Este incremento pode ser representado geometricamente por um vetor com nove componentes no espaço de deformações (Figura 3.6). Pode-se também definir a direção do vetor incremento de deformação plástica  $d\epsilon_{ij}^p$  no espaço de deformações.

Portanto, quando as deformações se estendem além do regime elástico (Lei de Hooke), as relações entre tensões e deformações são obtidas usando o conceito de potencial plástico.

#### *Regra de Fluxo e Potencial Plástico*

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (3.0)$$

onde  $g$  e  $h$  são funções escalares dos invariantes das componentes desviatórias das tensões e  $f$  é uma função de escoamento [Kobayashi et al. (1989)].

A função  $g(\sigma_{ij})$  é igual a uma constante define uma superfície (hiper superfície) do potencial plástico no espaço de tensões de nove dimensões.

Assumindo a relação  $g=f$ , as equações ( 3.0 ) ficam:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (3.0)$$

onde  $d\lambda$  é um escalar positivo, chamado fator de proporcionalidade, que é diferente de zero somente quando a deformação plástica ocorre. Interpretando geometricamente  $f$  como uma superfície,  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  são os cossenos diretores de um vetor normal à tangente a esta superfície em qualquer ponto  $\sigma_{ij}$ . O gradiente de  $f$ ,  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  no ponto  $\sigma_{ij}$  está na direção normal a esta superfície. A relação ( 3.0 ) implica que o vetor fluxo plástico  $d\epsilon_{ij}^p$  é posicionado normal à superfície do potencial plástico. Esta equação é denominada de *regra de fluxo associada* porque o fluxo plástico é associado ao critério de escoamento, enquanto que se  $f \neq g$ , a equação ( 3.0 ) é chamada uma regra de fluxo não associada.

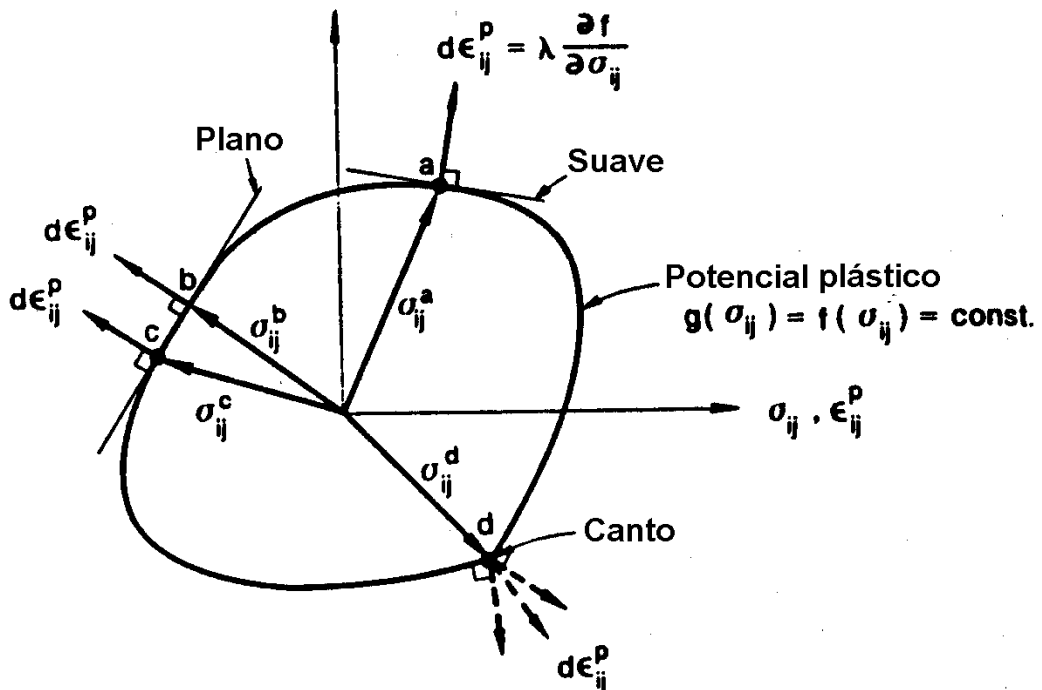


Figura 3.6 Ilustração Geométrica da Regra Associada de Fluxo. Chen e Han (1988)

*Princípio do Máximo Trabalho Plástico:* o princípio do trabalho plástico fornece, como será visto, restrições adicionais à superfície de escoamento e ao vetor  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Este princípio pode ser ilustrado através das seguintes considerações: considera-se uma unidade de volume de material no qual exista um estado de tensões homogêneo  $\sigma_{ij}^*$  sobre ou internamente à superfície de escoamento. (Figura 3.7a). A seguir supõe-se que um agente externo adicione tensões ao longo do caminho ABC, internamente à superfície até que  $\sigma_{ij}$  seja alcançado na superfície de escoamento. Até este momento, somente trabalho elástico terá sido realizado. Agora, supondo que o agente externo mantenha o estado de tensões  $\sigma_{ij}$  por um curto espaço de tempo. O fluxo plástico deverá ocorrer e somente trabalho plástico tomará lugar neste fluxo. Como toda mudança puramente elástica é completamente reversível e independente do caminho, de  $\sigma_{ij}^*$  para  $\sigma_{ij}$  e de volta à  $\sigma_{ij}^*$ , toda energia elástica é recuperada. O trabalho plástico feito pelo agente externo neste ciclo de carregamento- descarregamento é o produto escalar do vetor tensão  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$  e o vetor incremento de deformação plástica  $d\varepsilon_{ij}^p$ .

Deste modo, o *princípio do máximo trabalho plástico*, é expresso a partir da irreversibilidade e conseqüentemente, do fato de ser positivo por:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.0)$$

A interpretação geométrica ( 3.0) pode ser dada da seguinte forma: se as coordenadas das deformações plásticas são superpostas às coordenadas de tensões, como na Figura 3.7, o produto escalar positivo requer um ângulo agudo entre o vetor tensão  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  e o vetor incremento de deformação  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Uma vez que todos os possíveis vetores tensão devem satisfazer ( 3.0 ), isto conduz, inevitavelmente às seguintes conseqüências:

I – *Convexidade:* a superfície de escoamento deve ser convexa. Se não convexa como mostrado na Figura 3.7b, as direções possíveis de  $d\sigma_{ij}$  cobrem mais de 180° para alguns planos através de  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Então, o ângulo entre  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  e  $d\varepsilon_{ij}^p$  pode ser maior que 90°. Como a equação ( 3.0 ) requer que o ângulo entre eles seja menor que 90°, estabelece-se que a superfície deve ser convexa.

II – *Normalidade*: o vetor incremento de deformação plástica deve ser normal à superfície de escoamento em um ponto de superfície regular e se ajustar entre normais adjacentes em um canto. Como pode ser visto na Figura 3.7c, se a superfície é convexa e suave em um ponto A,  $d\epsilon_{ij}^p$  deve ser normal à superfície de maneira que um ângulo reto ou menor a todo  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ , e a condição ( 3.0 ) seja satisfeita. Se a superfície tem um canto no ponto B, existe uma liberdade na direção de  $d\epsilon_{ij}^p$ , mas o vetor deve se ajustar entre as normais aos pontos adjacentes ao canto de modo que ( 3.0 ) seja satisfeita.

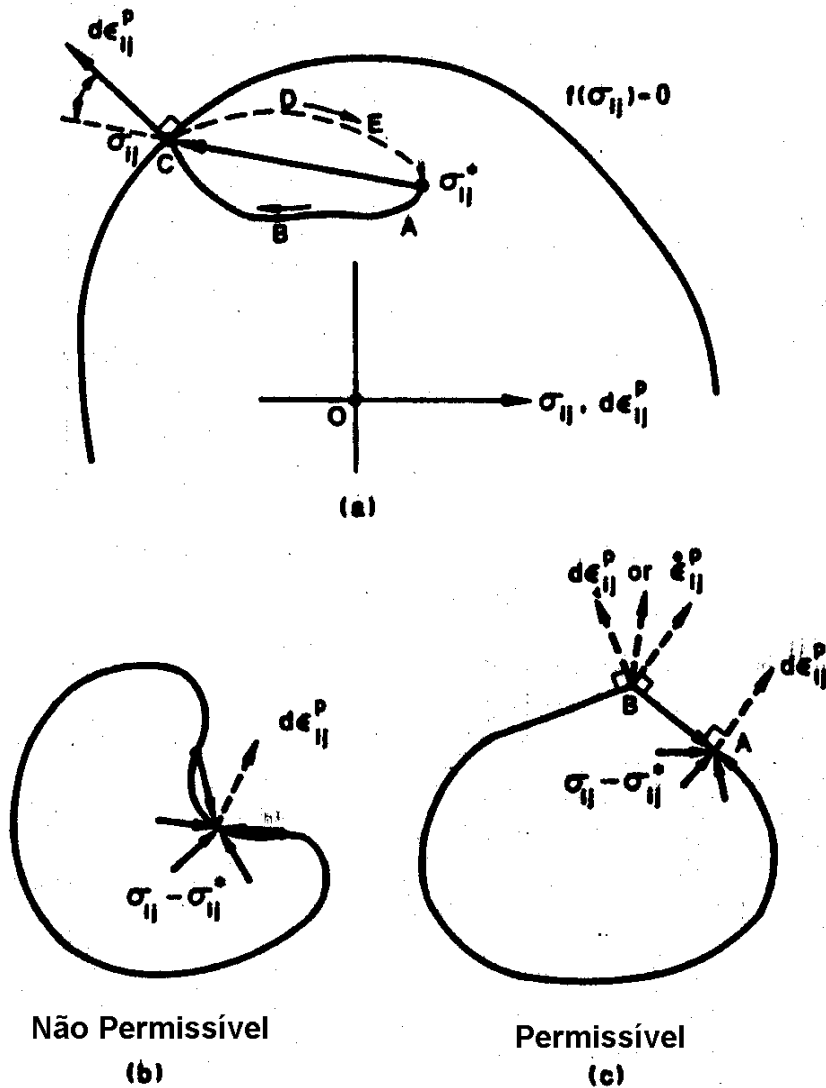


Figura 3.7 Convexidade da Superfície e Normalidade do Fluxo Plástico.Chen et al. (1988)

### 3.3 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

Um critério de escoamento, como uma lei definindo o limite de elasticidade sob qualquer combinação de tensões é expresso da seguinte forma:

$$f(\sigma_{ij}) = C(\text{constante}) \quad (3.0)$$

Nos materiais isotrópicos, o escoamento plástico depende somente da magnitude das três principais tensões e não das suas direções. Assim, pode-se definir qualquer critério de escoamento na forma:

$$f(I_1, I_2, I_3) = C$$

Experimentalmente, sabe-se que o escoamento de um material, numa primeira instância, não é afetado pela pressão hidrostática  $[1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]$ . Segue então, que o escoamento depende somente dos principais componentes desviatórios do *tensor tensão* ( $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ ):

$$f(J_2, J_3) = C \quad (3.0)$$

onde:

$$J_2 = -(\sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2' \sigma_3' + \sigma_3' \sigma_1')$$

$$J_3 = \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3'$$

*Critérios de Escoamento:* dois critérios têm sido utilizados para a análise de deformação dos metais, considerando os mesmos *isotrópicos*: o critério de Tresca e o de von Mises, que podem ser descritos de forma sumária, da seguinte forma:

*Critério de Tresca:* (critério de máxima tensão de cisalhamento):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \text{const.} \quad (3.0)$$

com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

*Critério de von Mises (Critério de Huber-Mises):* este critério estabelece que o escoamento ocorre quando  $J_2$  alcança um valor crítico, ou, que a função escoamento  $f$  de (3.0) não envolve  $J_3$ :

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = k^2$$

ou

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (3.0)$$

onde

$$k = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \quad (3.0)$$

$\sigma_o$  é a tensão de escoamento em um ensaio de tração simples. Considerando uma condição de ensaio de tração uniaxial, em que  $Y = \sigma_1 - \sigma_3$ , então:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2 \quad (3.0)$$

Deve ser notado que o critério de escoamento dado pela equação ( 3.0 ) deve depender no processo prévio, da deformação plástica. Se é assumido que ocorra encruamento, e só trabalho plástico seja feito, então a pressuposição de que o critério de escoamento é independente da componente hidrostática, implica em que não haja mudança de volume na deformação plástica.

A representação geométrica do estado de tensões acima, pode ser feita através de um vetor em um espaço tridimensional de tensões, onde as tensões principais são tomadas segundo os eixos ortogonais do sistema cartesiano (Figura 3.8 e Figura 3.9)

Neste estudo, estes critérios não são adequados. A matéria prima empregada em processos de estampagem, as chapas metálicas, são produzidas por meio de laminação. Assim, o comportamento observado neste material é anisotrópico. Hill (1950) estabeleceu um critério adequado para estes casos.

### 3.3.1 EQUAÇÕES DE PRANDTL-REUSS E LEVY-MISES

Para materiais elasto-plásticos, as equações constitutivas relacionam taxa de deformação a taxas de tensão, ao invés do valor das tensões. Conseqüentemente, é conveniente escrever a equação de campo no problema de valor de contorno para materiais elasto-plásticos em termos de equilíbrio de taxas de tensões. Pela aplicação da equação ( 3.0 ) em ( 3.0 ) e considerando a função de escoamento de



von Mises  $f(\sigma_{ij}) = J_2 - k^2 = 0$  como potencial plástico, então a regra de fluxo tem a forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma'_{ij} \dot{\lambda} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (3.0)$$

e considerando ainda:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}$$

onde os subscritos repetidos  $k$  e  $l$  indicam somatório com relação a estas quantidades. A equação (3.0) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\dot{\epsilon}_x^p}{\sigma'_x} = \frac{\dot{\epsilon}_y^p}{\sigma'_y} = \frac{\dot{\epsilon}_z^p}{\sigma'_z} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = \frac{\dot{\gamma}_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{\dot{\gamma}_{zx}^p}{2\tau_{zx}} = \dot{\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{d\epsilon_x}{\sigma'_x} = \frac{d\epsilon_y}{\sigma'_y} = d\lambda \quad (3.0)$$

em que  $d\lambda$  é um fator de proporcionalidade com o valor:

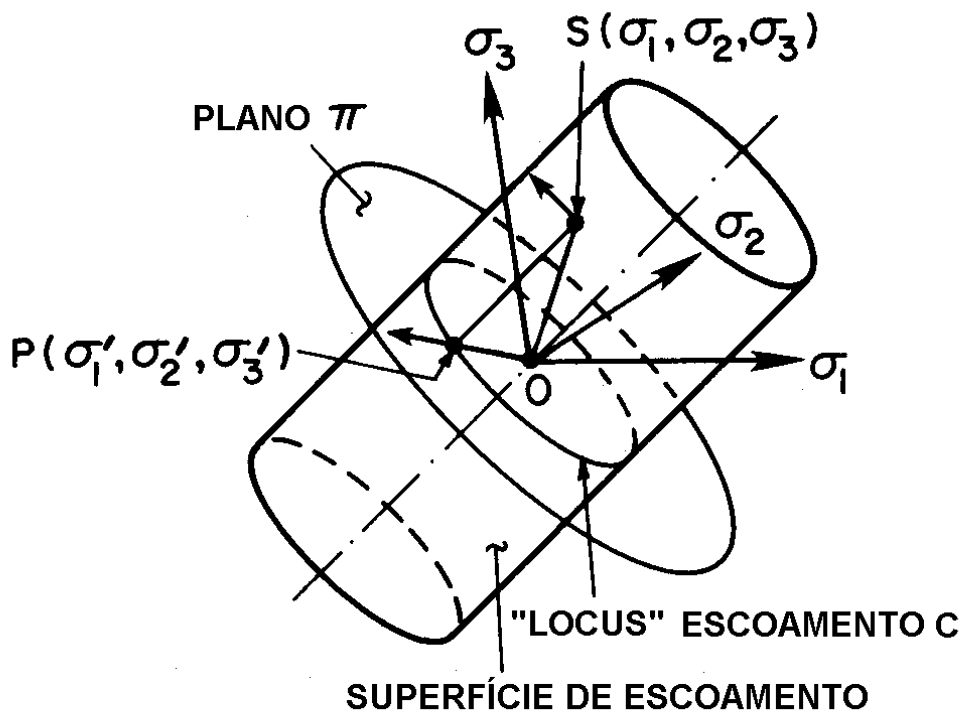


Figura 3.8 Representação Geométrica do Estado Plástico de Tensões no Espaço. Kobayashi et al (1989)

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{para } J_2 < k^2 \text{ ou } J_2 = k^2, \text{ mas } dJ_2 < 0 \\ > 0 & \text{para } J_2 = k^2 \text{ e } dJ_2 = 0 \end{cases}$$

Combinando as componentes elásticas da taxa de deformação e os componentes plásticos, na forma  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^e$ , obtemos as equações de Prandtl-Reuss, para sólidos elasto-plásticos:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma'_{ij} \dot{\lambda} + \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \left( \frac{1-2\nu}{E} \right) \dot{\sigma}_{mm} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij} \quad (3.0)$$

Para materiais rígido-plásticos, assume-se que  $\dot{\epsilon}_{ij} \cong \epsilon_{ij}^p$  e obtém-se as equações de Levy-Mises, com a remoção do superescrito  $p$  de ( 3.0 ). Estas equações são expressas em termos de componentes  $\sigma_{ij}$ , por três equações do tipo:

$$\dot{\epsilon}_x = \left\{ \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right\} \dot{\lambda} = \left\{ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right\} \frac{2}{3} \dot{\lambda} \quad (3.0)$$

e três do tipo:

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} = \tau_{xy} \dot{\lambda} \quad (3.0)$$

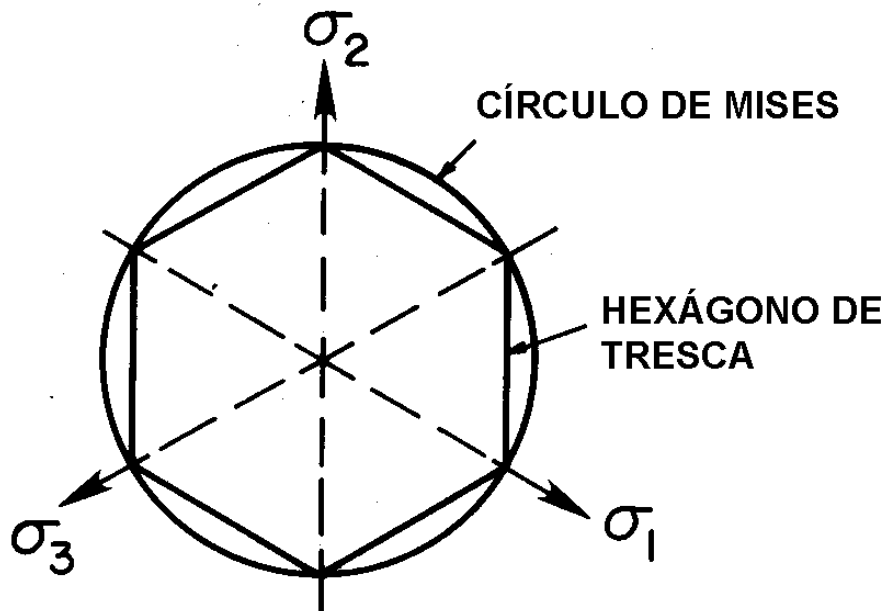


Figura 3.9 "Locci" do escoamento no plano  $\pi$  para o critério de distorção de energia e tensão cisalhante. Kobayashi et al. (1989)

### 3.3.2 CRITÉRIO DE HILL

Um material ortotrópico tem três planos mutuamente ortogonais de simetria em cada ponto. A interseção destes três planos são conhecidas como os eixos principais de anisotropia. O critério de escoamento proposto por Hill (1950) é referenciado em relação a estes três eixos na forma:

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (3.0)$$

onde  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , são os parâmetros característicos do atual estado de anisotropia. A equação ( 3.0 ) é uma expressão quadrática de tensões, representando uma espécie de energia que governa o escoamento de materiais ortotrópicos. O critério de Hill, é deste modo, considerado uma forma estendida do critério de distorção de energia de von Mises. A omissão de termos lineares e a aparição somente de diferenças entre componentes normais de tensão, implica em assumir que as respostas do material são iguais em tração e compressão e que tensões hidrostáticas não influenciam no escoamento.

Os parâmetros de material podem ser determinados a partir de três simples ensaios de tração nas direções dos eixos principais de anisotropia e três ensaios simples de cisalhamento entre estes eixos de simetria.

Outra importante consideração: este critério só se apresenta na forma da equação ( 3.0 ) se os eixos principais de anisotropia coincidirem com os eixos de referência [Hill (1950)]. Assim se  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , são as tensões de escoamento à tração, nas direções principais da anisotropia, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^2} &= G + H, & 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}, \\ \frac{1}{Y^2} &= H + F, & 2G &= \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}, \\ \frac{1}{Z^2} &= F + G, & 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \end{aligned} \quad (3.0)$$

$$\text{e,} \quad 2L = \frac{1}{R^2}, \quad 2M = \frac{1}{S^2}, \quad 2N = \frac{1}{T^2} \quad (3.0)$$

onde,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ , são as tensões de escoamento no cisalhamento, com relação aos eixos principais de anisotropia.

A equação ( 3.0) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} & \left[ (G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (F + H)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 \right] - 2(G\sigma_x + F\sigma_y)\sigma_z + \\ & + 2(L\tau_{yz}^2 + M\tau_{zx}^2) + (F + G)\sigma_z^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.0)$$

As relações entre tensões e incremento de deformação em função do potencial plástico ficam

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (3.0)$$

que expandindo fica:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)]d\lambda \\ d\varepsilon_y &= [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)]d\lambda \\ d\varepsilon_z &= [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)]d\lambda \\ d\varepsilon_{yz} &= d\gamma_{yz} = L\sigma_{yz}d\lambda = L\tau_{yz}d\lambda \\ d\varepsilon_{zx} &= d\gamma_{zx} = M\sigma_{zx}d\lambda = M\tau_{zx}d\lambda \\ d\varepsilon_{xy} &= d\gamma_{xy} = N\sigma_{xy}d\lambda = N\tau_{xy}d\lambda \end{aligned}$$

*Anisotropia Plástica de Chapas Laminadas:* considerando-se que os espécimes obtidos das chapas obedeçam o sentido da laminação, de forma que  $x$  seja a direção da laminação,  $y$  a direção transversal à laminação, no plano, e  $z$ , a direção normal ao plano (direção da espessura), e que qualquer elemento da chapa seja submetido à tensões aplicadas no plano da chapa, o critério de escoamento de Hill, torna-se:

$$(G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H + F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (3.0)$$

Em particular, se o espécime for cortado a um ângulo  $\alpha$  em relação à direção de laminação, e submetido a um ensaio uniaxial de tração, as componentes incrementais de deformação ficam:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_x &= [(G + H) \cos^2 \alpha - H \sin^2 \alpha] \sigma \cdot d\lambda, \\
 d\varepsilon_y &= [(F + H) \sin^2 \alpha - H \cos^2 \alpha] \sigma \cdot d\lambda, \\
 d\varepsilon_z &= -(F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha) \sigma \cdot d\lambda, \\
 d\gamma_{xy} &= (N \sin \alpha \cos \alpha) \sigma \cdot d\lambda
 \end{aligned} \tag{3.0}$$

enquanto as componentes de tensão ficam:

$$\sigma_x = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \tag{3.0}$$

É possível determinar a relação entre a deformação transversal no plano e a deformação (variação) na espessura (R) através da equação

$$\begin{aligned}
 R &= (de_x \sin^2 \alpha + de_y \cos^2 \alpha - 2d\gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) / de_z \\
 &= \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha}
 \end{aligned} \tag{3.0}$$

*Variação dos Parâmetros Anisotrópicos durante o trabalho a frio:* Hill (1950) assumiu que a análise considerando os seis parâmetros de (3.0) é muito complexa, e considerou um metal no qual uma orientação preferencial pronunciada está presente e que mudanças na orientação da anisotropia possam ser negligenciadas no processo de deformação. Com o estado de anisotropia permanecendo inalterado, as tensões devem aumentar na exata proporção do endurecimento do material. Assim, pode ser escrito que  $X = h \cdot X_o$ ,  $Y = h \cdot Y_o$  ....etc.

A maneira como  $h$  pode se relacionar pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h}{(F + G + H)^{\frac{1}{2}}} \\
 \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ \frac{F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2}{F + G + H} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.0}
 \end{aligned}$$

O incremento de trabalho plástico por unidade de volume conforme Hill (1950) é:

$$dw = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = 2fd\lambda = d\lambda, \tag{3.0}$$

De (3.0) também pode ser escrito:

$$Gd\epsilon_y - Hd\epsilon_z = (FG + GH + HF)(\sigma_y - \sigma_z)d\lambda$$

Então

$$\sum \left[ F \left( \frac{Gd\epsilon_y - Hd\epsilon_z}{FG + GH + HF} \right)^2 + \frac{2d\gamma_{yz}^2}{L} \right] = (d\lambda)^2 \sum \left[ F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 2L\tau_{yz}^2 \right] = (d\lambda)^2$$

que fornece a seguinte equação para o incremento de deformação para um material isotrópico:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}}(F + G + H)^{\frac{1}{2}} \left[ F \left( \frac{Gd\epsilon_y - Hd\epsilon_z}{FG + GH + HF} \right)^2 + \dots + \frac{2d\gamma_{yz}^2}{L} + \dots \right] \quad (3.0)$$

Com (3.0) e (3.0) obtém-se as seguintes relações:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}}(F + G + H)^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{h} \quad e \quad dw = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (3.0)$$

*Anisotropia Plana:* nas operações de conformação de chapas metálicas, as tensões atuantes estão basicamente no plano das chapas, e um estado plano de tensões pode ser usado para descrever esta situação.

A equação de Hill neste caso - (3.0) – pode ter seus parâmetros calculados usando-se as relações  $R$  para as seguintes direções do sistema de referência em relação à direção de laminação, conforme Toh, C. H. (1983):  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $45^\circ$ : de (3.0), obtemos as relações de  $R$  para estas situações:  $R_{0^\circ} = H/G$ ,  $R_{90^\circ} = H/F$  e  $R_{45^\circ} = [2N - (F + G)] / [2(F + G)]$ . Para a medição de  $R$ , faz-se uso de ensaios simples de tração:

$$R = \frac{\ln\left(\frac{w_o}{w}\right)}{\ln\left(\frac{t_o}{t}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{w_o}{w}\right)}{\ln\left(\frac{wl}{w_o l_o}\right)} \quad (3.0)$$

onde  $w_o$ ,  $l_o$  são respectivamente a largura e comprimento iniciais do espécime testado. As condições atuais para essas grandezas são expressas por  $w$  e  $l$ .

Na conformação de chapas metálicas, a abordagem ideal é considerar a condição isotrópica para o plano da chapa e uma anisotropia rotacional simétrica em torno do eixo  $z$  (espessura). Esta condição é chamada de anisotropia plana.

Hill (1950) demonstrou que a máxima e a mínima tensão ocorre ao longo dos eixos de anisotropia e nas direções  $\alpha$  quando

$$\tan^2 \alpha = \frac{N - G - 2H}{N - F - 2H} \quad (3.0)$$

Para a condição de anisotropia plana, a relação acima permite escrever que  $N = G + 2H = F + 2H$ , ou  $G = F$ .

As relações de tensões em ( 3.0 ) ficam:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= [(H + G)\sigma_x - H\sigma_y]d\lambda \\ d\varepsilon_y &= [(H + G)\sigma_y - H\sigma_x]d\lambda \\ d\varepsilon_{xy} &= d\gamma_{xy} = (G + 2H)\sigma_{xy}d\lambda = (G + 2H)\tau_{xy}d\lambda \end{aligned} \quad (3.0)$$

Com  $R_o = H/G$  e a condição de que  $G = F$ , a equação ( 3.0 ) pode ser expressa em função de  $R$ :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= [(1 + R)\sigma_x - R\sigma_y]d\lambda \\ d\varepsilon_y &= [(1 + R)\sigma_y - R\sigma_x]d\lambda \\ d\varepsilon_z &= -(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y) \\ d\varepsilon_{xy} &= d\gamma_{xy} = (1 + 2R)\sigma_{xy}d\lambda = (1 + 2R)\tau_{xy}d\lambda \end{aligned} \quad (3.0)$$

Fazendo  $\lambda = Fd\lambda = Gd\lambda$  obtém-se:

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_x}{(1 + R)\sigma_x - R\sigma_y} = \frac{d\varepsilon_y}{(1 + R)\sigma_y - R\sigma_x} = \frac{d\gamma_{xy}}{(1 + 2R)\tau_{xy}} \quad (3.0)$$

Para a tensão, a equação ( 3.0 ) fica:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3(1 + R)}{2(2 + R)}} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{2R}{1 + R}\sigma_x\sigma_y + \frac{2(1 + 2R)}{1 + R}\tau_{xy}^2} \quad (3.0)$$

De ( 3.0 ), com ( 3.0 ) e ( 3.0 ), sai a constante não negativa  $d\lambda$ :

$$d\lambda = \frac{1}{1 + R} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (3.0)$$

com o incremento de deformação efetiva:

$$d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2(1 + R)(2 + R)}{3(1 + 2R)}} \sqrt{d\varepsilon_x^2 + d\varepsilon_y^2 + \frac{2R}{1 + R}d\varepsilon_x d\varepsilon_y + \frac{2}{1 + R}d\gamma_{xy}^2} \quad (3.0)$$

A tensão equivalente é redefinida como:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{2R}{1 + R}\sigma_x\sigma_y + \frac{2(1 + 2R)}{1 + R}\tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\sigma}^T \underline{D}_1 \underline{\sigma}} \quad (3.0)$$

onde:

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \gamma_{xy}]$$

e

$$\underline{D}_1 = \frac{2}{3(1+R)} \begin{bmatrix} 1+R & -R & 0 \\ -R & 1+R & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+2R) \end{bmatrix}$$

com o correspondente incremento de deformação equivalente

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \frac{(1+R)}{\sqrt{1+2R}} \sqrt{d\varepsilon_x^2 + d\varepsilon_y^2 + \frac{2R}{1+R} d\varepsilon_x d\varepsilon_y + \frac{2}{1+R} d\gamma_{xy}^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} d\underline{\varepsilon}^T \underline{D} d\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.0)$$

onde

$$d\underline{\varepsilon}^T = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\gamma_{xy}]$$

e

$$\underline{D} = \frac{3(1+R)}{2(1+2R)} \begin{bmatrix} 1+R & R & 0 \\ R & 1+R & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Os valores de R, quando determinados experimentalmente, serão obtidos através da média de  $R_0$ ,  $R_{45}$  e  $R_{90}$ :

$$R = \frac{1}{4}(R_0 + 2R_{45} + R_{90}) \quad (3.0)$$

### 3.1 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA A CURVA TENSÃO DEFORMAÇÃO DE MATERIAIS RÍGIDO-PLÁSTICOS

As duas equações mais usadas para descrever as curvas de tensão deformação na análise teórica são segundo Toh (1983):

*Modelo de endurecimento elástico exponencial:*

$$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n \quad (3.0)$$



onde  $K$  é uma constante e  $n$ , o coeficiente de endurecimento pela deformação.  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\varepsilon}$  são a tensão e deformação efetivas verdadeiras, respectivamente.

*Equação de Swift:*

$$\bar{\sigma} = A(B + \bar{\varepsilon})^n \quad (3.0)$$

onde  $0 \leq n \leq 1$  e  $A, B, n$  são constantes para um dado material.

As constantes de ambas as equações são determinadas por meio de ensaios com espécimes reais.

Neste estudo, a equação constitutiva para a curva tensão deformação é baseada na consideração da dissipação de energia. Na abordagem para grandes deformações,  $\bar{S}$ , a atual tensão efetiva, tem a forma:

$$\bar{S} = \bar{S}_o + H_o(d\bar{E}) \quad (3.0)$$

onde  $\bar{S}_o$  é a tensão efetiva,  $d\bar{E}$ , incremento de deformação efetiva e  $H_o = d\bar{S}/d\bar{E}$ , ambos avaliados em  $t=t_o$ . Através da análise de uma curva tensão-deformação, pode-se facilmente estabelecer uma relação entre  $d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}$  e  $d\bar{S}/d\bar{E}$ . Assumindo que durante a deformação, a dissipação de energia seja a mesma em cada incremento, pode-se escrever

$$\int_{\bar{\varepsilon}_o}^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \int_{\bar{E}_o}^{\bar{E}} \bar{S} d\bar{E}$$

ou, aproximadamente

$$(\bar{\sigma} + \bar{\sigma}_o)(d\bar{\varepsilon}) = (\bar{S} + \bar{S}_o)(d\bar{E}) \quad (3.0)$$

substituindo  $\bar{S}_o = \bar{\sigma}_o$  e re-arranjando, obtém-se

$$\bar{S} = \left( \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{E}} - 1 \right) \bar{\sigma}_o + \left( \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{E}} \right) \bar{\sigma} \quad (3.0)$$

Expandindo em séries de Taylor, e negligenciando os termos de maior ordem,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{S}_o + H_o(d\bar{E}) \\ \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_o + h_o(d\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.0)$$

onde  $h_o = d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}$  é avaliado em  $t = t_o$ . Com a substituição da equação (3.0) em (3.0):

$$H_o = \left( \frac{d\bar{\epsilon}}{d\bar{E}} \right)^2 h_o + 2 \left( \frac{d\bar{\epsilon} - d\bar{E}}{d\bar{E}^2} \right) \bar{\sigma}_o \quad (3.0)$$

Com o incremento de deformação efetiva (verdadeira) na forma

$$d\bar{\epsilon} = \ln \left( 1 + \frac{dl}{l_o} \right) = \frac{dl}{l_o} - \frac{1}{2} \left( \frac{dl}{l_o} \right)^2 + \dots$$

e o incremento de deformação efetiva Lagrangeana

$$d\bar{E} = \frac{dl}{l_o} + \frac{1}{2} \left( \frac{dl}{l_o} \right)^2$$

onde  $dl/l_o$  é a deformação nominal ou *da engenharia* no ensaio de tração uniaxial. Assim, a equação ( 3.0 ) pode ser escrita na forma:

$$H_o = h_o - 2\bar{\sigma}_o \quad (3.0)$$

Com a substituição de ( 3.0 ) em ( 3.0 ) chega-se a

$$\bar{S} = \bar{\sigma}_o + (h_o - 2\bar{\sigma}_o)d\bar{E} \quad (3.0)$$

Esta é a equação tensão-deformação que é usada para a implementação computacional.

### 3.2 EQUILÍBRIO E PRINCÍPIO DA TAXA DO TRABALHO VIRTUAL

*Equações de Equilíbrio:* em um sistema de coordenadas cartesiano, as equações do equilíbrio, negligenciando as forças de corpo são, em notação indicial:

$$\sigma_{ij,i} = 0 .$$

*Equilíbrio com Forças de Superfície:* as tensões na superfície de contorno S em equilíbrio com uma força de superfície  $F_i$  (Força por unidade de superfície ) podem ser escritas na forma:

$$F_i = \sigma_{ij}n_j \quad (3.0)$$

Para o caso bidimensional, as equações de equilíbrio ficam:

$$F_x = \sigma_x \left( \frac{dy}{dl} \right) + \tau_{xy} \left( \frac{dx}{dl} \right) \quad (3.0)$$

$$F_y = \tau_{yx} \left( \frac{dy}{dl} \right) + \sigma_y \left( \frac{dx}{dl} \right)$$

onde  $dx$ ,  $dy$  e  $dl$ , são os incrementos de deslocamento, nas direções  $x$  e  $y$ , e tangente à superfície.

*Princípio da Taxa do Trabalho Virtual:* este princípio é a base para a derivação das equações do método de elementos finitos via variacional.

A equação do princípio do trabalho virtual estabelece dois conjuntos de condições: os conjuntos de *equilíbrio* e o de *compatibilidade*. Ambos são colocados juntos como pode ser visto na equação abaixo:

$$\int_S F_j w_j dS + \int_V B_j w_j dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (3.0)$$

onde  $F_j$ ,  $B_j$  são respectivamente, as forças de superfície e de corpo e  $\sigma_{ij}$  é um estado de tensões em equilíbrio com as forças de corpo e de superfície.  $V$  e  $S$  são o volume e área superficiais do corpo respectivamente,  $\epsilon_{ij}$  é um estado de deformações compatíveis com os deslocamentos reais ou virtuais dos pontos de aplicação das forças externas.

Vários estudos de condições de equilíbrio ou compatibilidade podem ser substituídos na equação ( 3.0 ), na forma de taxas. Considerando as condições de equilíbrio e ( 3.0 ) e negligenciando as forças de corpo, o princípio do trabalho virtual pode ser expresso por:

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV = \int_S F_j w_j dS \quad (3.0)$$

Do teorema de Gauss, da condição de equilíbrio e da simetria de  $\sigma_{ij}$ , obtém-se a equação ( 3.0 ), que substituída em ( 3.0 ), após desprezar as leis de corpo fica:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_j w_j dS \quad (3.0)$$

E para o caso bidimensional,

$$\int_V \left( \sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) dV = \int_V (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dV \quad (3.0)$$

$$= \int (F_x w_x + F_y w_y) dS$$

### 3.3 ENCRUAMENTO, TENSÃO EFETIVA E DEFORMAÇÃO EFETIVA

Um outro importante fator no estudo da conformação metálica é o encruamento. Considerando que a deformação efetiva  $\bar{\epsilon} = \int d\bar{\epsilon}$ , integrada sobre o caminho da deformação, fornece uma medida da distorção plástica, é possível assumir que as características do encruamento podem ser formuladas por

$$\bar{\sigma} = H \left( \int d\bar{\epsilon} \right) = H(\bar{\epsilon}) \quad (3.0)$$

onde  $H$  é uma função que depende do metal em estudo.

Com o objetivo de simplificar a análise, e salientando que a análise a seguir é válida para a anisotropia, será considerado o critério de Von Mises.

Da equação ( 3.0 ), é possível obter uma expressão para a taxa de deformação efetiva  $(\dot{\bar{\epsilon}})$ , pela inversão da regra do fluxo. Logo:

$$\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\lambda} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2 \bar{\sigma}}{3 \bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} \quad (3.0)$$

da qual

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})} \quad (3.0)$$

que, na forma expandida fica:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}} &= \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2)} \\ &= \frac{2}{3} \left[ \frac{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2}{2} + \frac{3}{4} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.0)$$

### 3.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes para a solução da mecânica da deformação plástica de materiais rígido-plásticos e rígido-visco-plásticos pode ser sumarizada na Tabela 3.1.

As entidades desconhecidas para a solução de um processo de deformação plástica quase estático são as seis componentes de tensão e os três componentes de velocidade. As equações governantes são três equações de equilíbrio, a condição de escoamento, cinco relações de taxas de deformação derivadas da regra de fluxo. As condições de contorno são prescritas em termos de  $\partial w$  e tração. Ao longo do contato da ferramenta e da peça, a componente  $\partial w$ , velocidade de deformação segundo à direção normal à superfície, é prescrita na direção normal à interface e a tração é especificada pela tensão de atrito na direção tangencial.

**Tabela 3.1 - Equações Governantes**

<i>Equações de Equilíbrio:</i>	
$\sigma_{ij,j} = 0$	(3.0)
<i>Critério de Escoamento:</i>	
$f(\sigma_{ij}) = C :$	
<i>Hill:</i> $2f(\sigma_{12}) = F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1$	(3.0)
<i>Equações Constitutivas:</i>	
$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{2R}{1+R}\sigma_x\sigma_y + \frac{2(1+2R)}{1+R}\tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\sigma}^T \underline{D}_1 \underline{\sigma}}$ ou $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}})$	(3.0)
$d\bar{\epsilon} = \frac{(1+R)}{\sqrt{1+2R}} \sqrt{d\epsilon_x^2 + d\epsilon_y^2 + \frac{2R}{1+R}d\epsilon_x d\epsilon_y + \frac{2}{1+R}d\gamma_{xy}^2}$ (ou $\dot{\bar{\epsilon}}$ )	
$= \sqrt{\frac{2}{3}d\epsilon^T \underline{D} d\epsilon}$	(3.0)
<i>Condições de Compatibilidade:</i>	
$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)$ , ou $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)$	(3.0)

## 5. MECÂNICA DA DEFORMAÇÃO DE CHAPAS

As chapas metálicas podem sofrer conformação através de uma grande quantidade de técnicas, e também, de uma combinação de diversas técnicas. A arte e ciência da conformação das chapas metálicas está em definir processos, nos quais, as chapas possam assumir seus contornos requeridos sem rasgamento ou enrugamento, e que ainda reste uma margem de segurança, suficiente para tolerar uma variação nas propriedades do material e ferramental, inevitáveis no processo de produção.

O propósito neste capítulo, é fazer um estudo da mecânica da conformação das chapas, dentro do contexto deste trabalho, abordando inicialmente a questão da instabilidade do material sob tensão de tração e os processos envolvidos nos diversos ensaios realizados, computacionalmente, no programa Sheet.

O estudo começa com a abordagem da instabilidade devida à tensão de tração, resumidamente abordado por Marciniak e Duncan (1992) seguido por uma abordagem objetiva dos processos de dobramento sob tensão e estiramento.

### 3.5 INTRODUÇÃO

Na conformação de chapas metálicas, o principal esforço envolvido é o de tração, transmitido pela própria chapa. Se estas forças excederem a capacidade da chapa, ocorrerá o rasgamento. A localização e o momento em que ocorre o colapso da chapa são os motivos que norteiam o estudo da instabilidade sob efeito de tração. Não obstante alguns fatores serem conhecidos, tais como, geometria da peça, forças envolvidas, propriedades do material e homogeneidade da chapa, alguns aspectos ainda não são bem entendidos e há divergências sobre a maneira como alguns mecanismos atuam.

### 3.6 TENSÃO UNIAXIAL EM UMA TIRA PERFEITA

Tomando uma tira sujeita a um carregamento axial de tração, conforme a Figura 4.10

obtem-se

$$d\varepsilon_1 = dl/l = -dA/A; \quad \varepsilon_1 = \ln(l/l_0) \quad (4.0)$$

e

$$P = \sigma_1 A = \sigma_1 A_0 (l_0/l) \quad (4.0)$$

Diferenciando ( 4.0 ) vem:

$$dP/P = d\sigma_1/\sigma_1 + dA/A = d\sigma_1/\sigma_1 - d\varepsilon_1 \quad (4.0)$$

Considerando que  $d\sigma_1/\sigma_1$  é positivo e diminui gradualmente e  $dA/A$  é negativo pela diminuição da seção transversal com a evolução da deformação, na carga máxima (isto é,  $dP=0$ ) obtém-se  $(1/\sigma_1)(d\sigma_1/d\varepsilon_1) = 1$ . Se o material obedece uma lei de variação de tensão x deformação do tipo:  $\sigma_1 = K\varepsilon_1^n$ , assim, a deformação adimensional com encruamento obedece a relação (Figura 4.11):

$$(1/\sigma_1)(d\sigma_1/d\varepsilon_1) = n/\varepsilon_1 \quad (4.0)$$

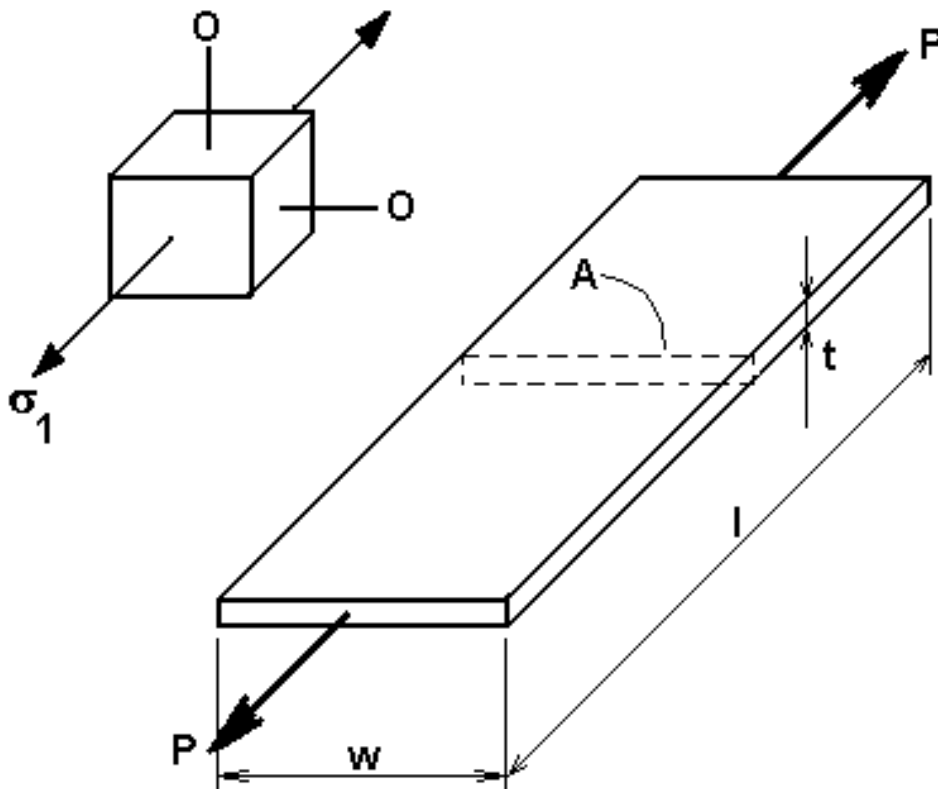


Figura 4.10 Área padrão de um espécime em forma de tira. Marciniak e Duncan (1993)

Na condição de carga máxima, a deformação é  $\epsilon_1^* = n$ , para a qual

$$P = A_o K [\ln(l/l_o)]^n (l_o/l) \quad (4.0)$$

ou, em termos de deformação,

$$P = A_o K \epsilon_1^n \exp(-\epsilon_1) \quad (4.0)$$

Estas relações podem ser representadas graficamente na Figura 4.12 . Nota-se que para um material perfeito, a curva indica uma deformação uniforme após a carga máxima, entretanto este comportamento não reflete o comportamento de espécimes reais.

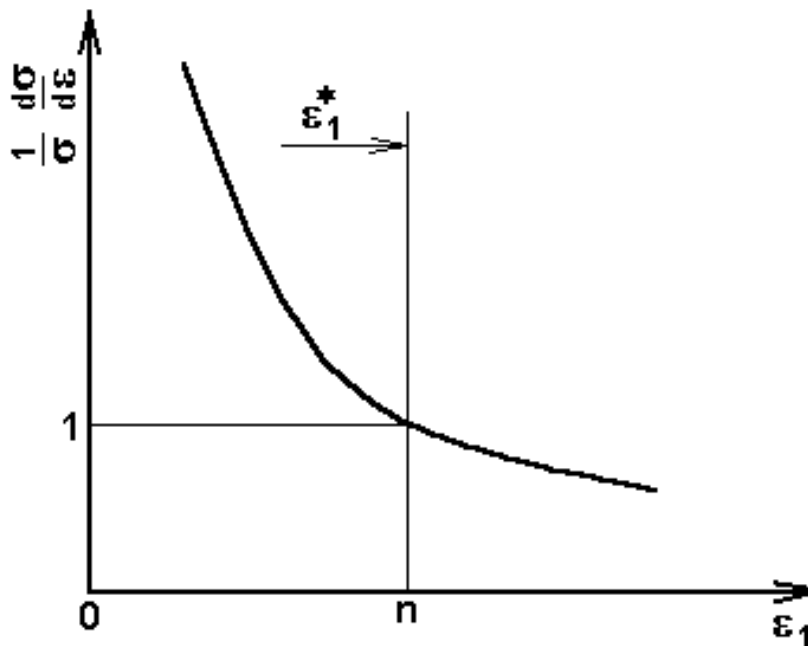


Figura 4.11 Deformação adimensional com encruamento de material endurecido. Marciniak, Z. et al (1993)



### 3.7 OCORRÊNCIA DE ESTRICÇÃO LOCALIZADA EM CHAPAS CONTÍNUAS

Em uma chapa contínua sendo conformada, a ocorrência de um fenômeno localizado de estrição – chamada de estrição difusa – causa um aumento na área. Para se ajustar a este aumento de área localizado, a superfície deve se mover, formando um perfil esférico localizado (Figura 4.13).

Fenômeno pouco comum em chapas, se ocorrer, está associado com mudanças nas tensões sobre uma área localizada, para manter uma distribuição de deformações compatível com a ferramenta. Este fato porém, não limita tecnologicamente os processos de conformação, como ocorre em ensaios de tração.

Este tipo de ocorrência é possível em chapas contínuas, desde que não influencie a distribuição global de deformações. Este fenômeno é considerado como *difuso* se sua dimensão em relação à espessura da chapa não causar uma mudança considerável na tensão normal à superfície. É considerado *localizado*, quando pequeno, se comparado com as dimensões da superfície da chapa.

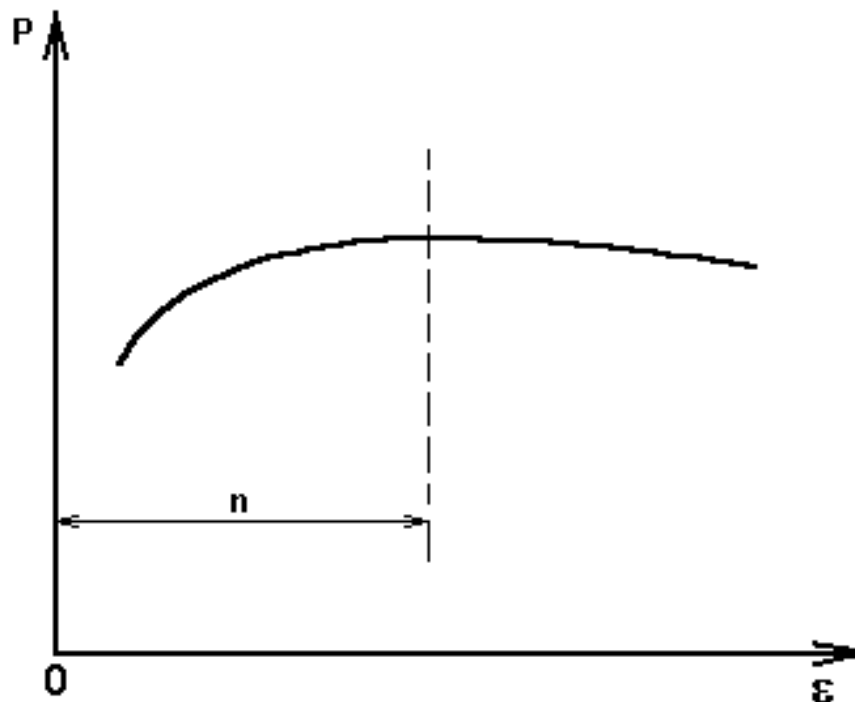


Figura 4.12 Diagrama Carga x Deformação de um espécime perfeito. Marciniak e Duncan (1993)

Estas ocorrências são percebidas como estrias na superfície e são a maior causa de fissuras em chapas dúteis, na conformação metálica.

### 3.8 CONDIÇÃO PARA A FORMAÇÃO DE UMA ESTRICÇÃO LOCAL

Considerando uma região em que a deformação da chapa esteja ocorrendo de maneira uniforme, (Figura 4.14) as tensões ou forças unitárias que são transmitidas através da chapa são definidas como:

$$T_1 = \sigma_1 t; \quad T_2 = \sigma_2 t \quad (4.0)$$

Uma condição já discutida no item 5 é que o processo de formação de estrição localizada não deve causar maior perturbação na distribuição de tensões ou outras condições de contorno. Uma condição requerida para a formação da estrição é que uma ou mais tensões nas bordas alcance o máximo valor. Para evitar o fenômeno da fratura precoce, admite-se que  $dT \leq 0$ . Deste modo, pode ser escrito, para a chapa da Figura 4.14, que as principais tensões e incrementos de deformação são:

$$\begin{aligned} \sigma_1; \quad \sigma_2 = \alpha \sigma_1; \quad \sigma_3 = 0 \\ d\varepsilon_1; \quad d\varepsilon_2 = \beta d\varepsilon_1; \quad d\varepsilon_3 = -(1 + \beta) d\varepsilon_1 \end{aligned}$$

Se somente  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes, as eq. (4.0) podem ser diferenciadas, como mostrado, as tensões alcançam valor máximo quando ( $dT_1=0$ )::

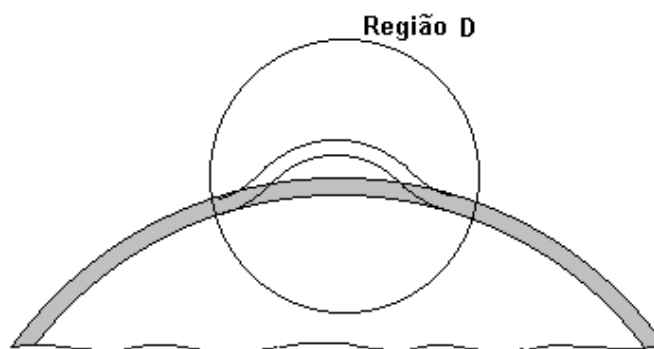


Figura 4.13 Seção de "casca" esférica mostrando perturbação na superfície, na região D. Marciniak e Duncan (1993)

$$dT_1/T_1 = d\sigma_1/\sigma_1 + dt/t = d\sigma_1/\sigma_1 - (1 + \beta)d\varepsilon_1 = 0 \quad (4.0)$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sigma_1} \left( \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} \right) = 1 + \beta \quad (4.0)$$

E, considerando que o material obedeça uma lei material de tensão-deformação do tipo definido no item 5, pode ser mostrado, que usando as relações previamente obtidas, para qualquer processo de deformação proporcional,

$$\sigma_1 = K'\varepsilon_1^n \quad (4.0)$$

onde

$$K' = K.f(\beta, n)$$

Diferenciando a eq. ( 4.0) ,

$$\frac{1}{\sigma_1} \left( \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} \right) = \frac{n}{\varepsilon_1} \quad (4.0)$$

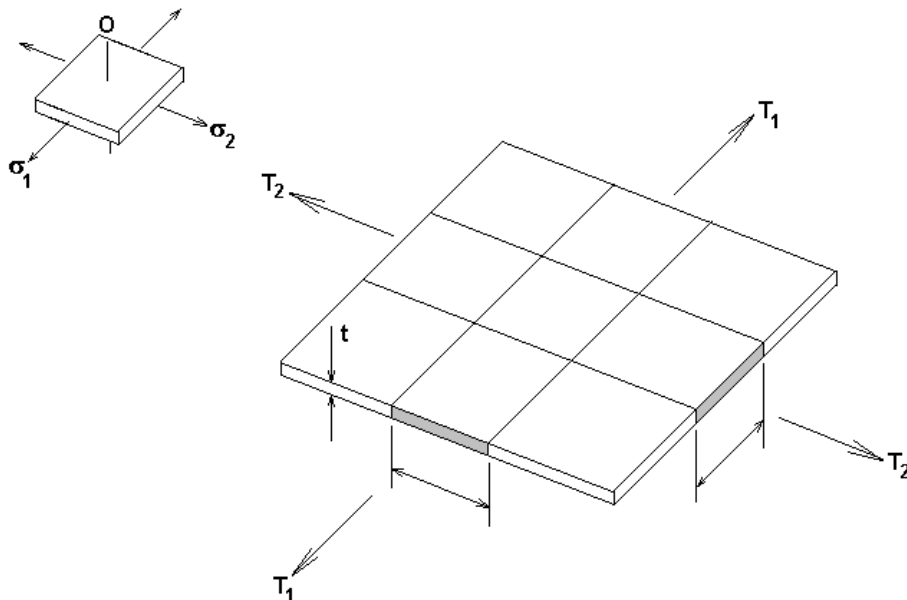


Figura 4.14 Principais tensões, em uma chapa se deformando proporcionalmente. Marciniak e Duncan (1993)

e quando \$T\_1\$ alcança um máximo (isto é \$dT\_1=0\$), as deformações no plano são:

$$\varepsilon_1^* = \frac{n}{1 + \beta}; \quad \varepsilon_2^* = \frac{\beta \cdot n}{1 + \beta} \quad (4.0)$$

OU

$$\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* = n \quad (4.0)$$

equações estas que podem ser representadas, no espaço de deformações ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ), como uma linha limite (Figura 4.15).

Considerando que a chapa foi assumida como perfeita, a existência de uma força unitária máxima foi assumida para o início da estricção, levando em conta a existência de um defeito local da chapa pré-existente, visto que, sendo perfeita, a deformação continuaria uniforme além deste ponto. Para ilustrar, em um carregamento simples de um ensaio de tração ( $\sigma_2, \sigma_3=0$ ), enquanto na imperfeição, ocorre uma deformação acelerada, nas demais regiões, o descarregamento

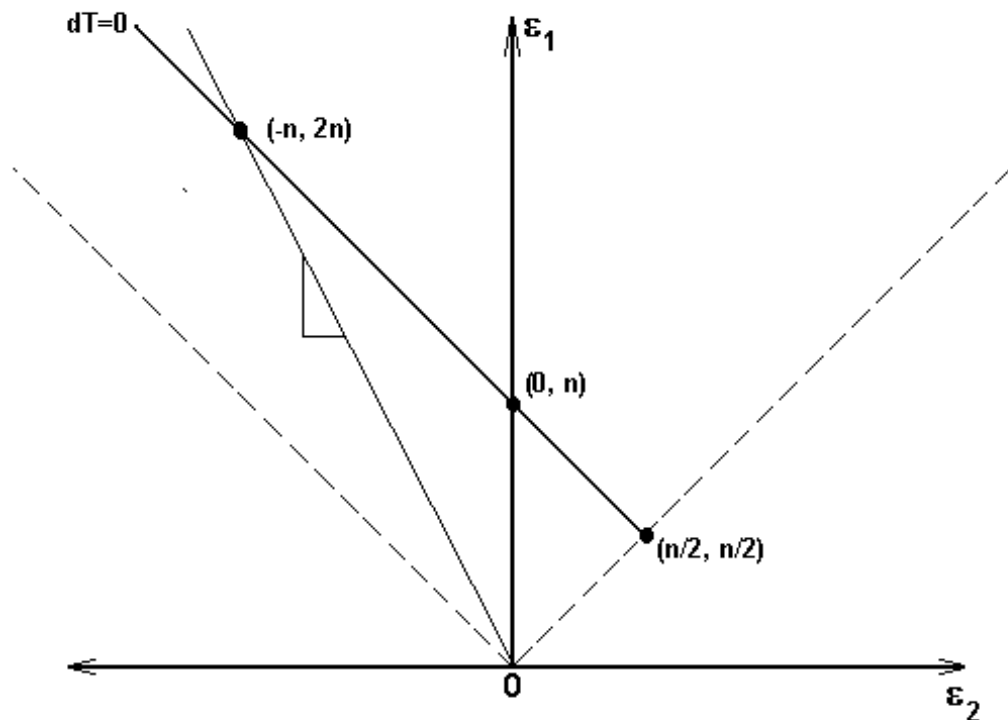


Figura 4.15 Diferentes valores em diferentes carregamentos para tração máxima do material. Marciniak e Duncan (1993)

continuará proporcional.

Além disso, duas outras condições devem ser encontradas, mas não se aplicam para o estirçamento difuso em um ensaio de tração:

- O processo de deformação na estirçamento (como definido por  $\alpha$  ou  $\beta$ ) deve permanecer imutável de maneira a assegurar que  $T_1$  seja, de fato, um máximo, como estabelecido na eq. ( 4.0).
- A deformação na região de deformação uniforme deve permanecer uniforme para assegurar que as condições de contorno na região mostrada na Figura 4.14, não sejam alteradas pelo processo da estirçamento.

### 3.8.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ESTRICÇÃO

As condições acima apontam para algumas conclusões:

A primeira condição requer que o modo de deformação na região da estirçamento seja imutável durante a ocorrência do fenômeno, e desde que a deformação na direção  $y$  antes da estirçamento também deva ser nula, ou, dito de outra forma, a estirçamento se desenvolverá ao longo de uma linha de *extensão zero*. A direção da linha *extensão zero* pode ser determinada usando o círculo de Mohr para incremento de deformação, como mostrado na Figura 4.16b. Para esta representação, é necessário conhecer:

$$\begin{aligned} \text{o centro do círculo:} & \quad \left\{ \left[ \frac{(1 + \beta)}{2} \right] d\epsilon_1, 0 \right\} \\ \text{o raio:} & \quad (1 - \beta) d\epsilon_1 / 2 \\ \cos(2\theta) & = - \left\{ (1 + \beta) / (1 - \beta) \right\} \end{aligned} \quad (4.0)$$

Para  $\beta = -1/2$ ,  $\theta = 55^\circ$  e  $\beta = 0$ , deformação plana,  $\beta = 90^\circ$ . Se, no entanto,  $\beta > 0$ , não existe solução para a equação ( 4.0 ) e nem direção no plano da chapa para a linha *extensão zero*.

A segunda condição indica que o processo da estirçamento, não cresce como uma *bolha* ou depressão como indicado na Figura 4.13. A única geometria possível para a estirçamento se desenvolver é na forma de uma *estria*, como indicado na Figura 4.16a. O ângulo  $\theta$  é determinado pela primeira condição. Se a região vizinha à

estricção ao longo do processo de carga, desprezando a deformação elástica, permanece rígida, durante o crescimento da estricção, *então a condição de compatibilidade requer que  $\varepsilon_y=0$* .

Se as imperfeições estão orientadas de maneira que as mais severas estejam orientadas em outra direção do que a *linha zero extensão*, a estricção pode se estender nesta direção. Para imperfeições distribuídas randomicamente em magnitude e orientação, o desenvolvimento de estrias ao longo da *linha zero extensão* na condição de carga máxima, é o modo de falha mais comum no estiramento.

### 3.9 FORMAÇÃO DE ESTRICÇÃO EM TRAÇÃO BIAIXIAL

Em uma chapa submetida à estricção, em uma determinada região, e considerando a pré-existência de uma imperfeição B (Figura 4.17), na forma de uma

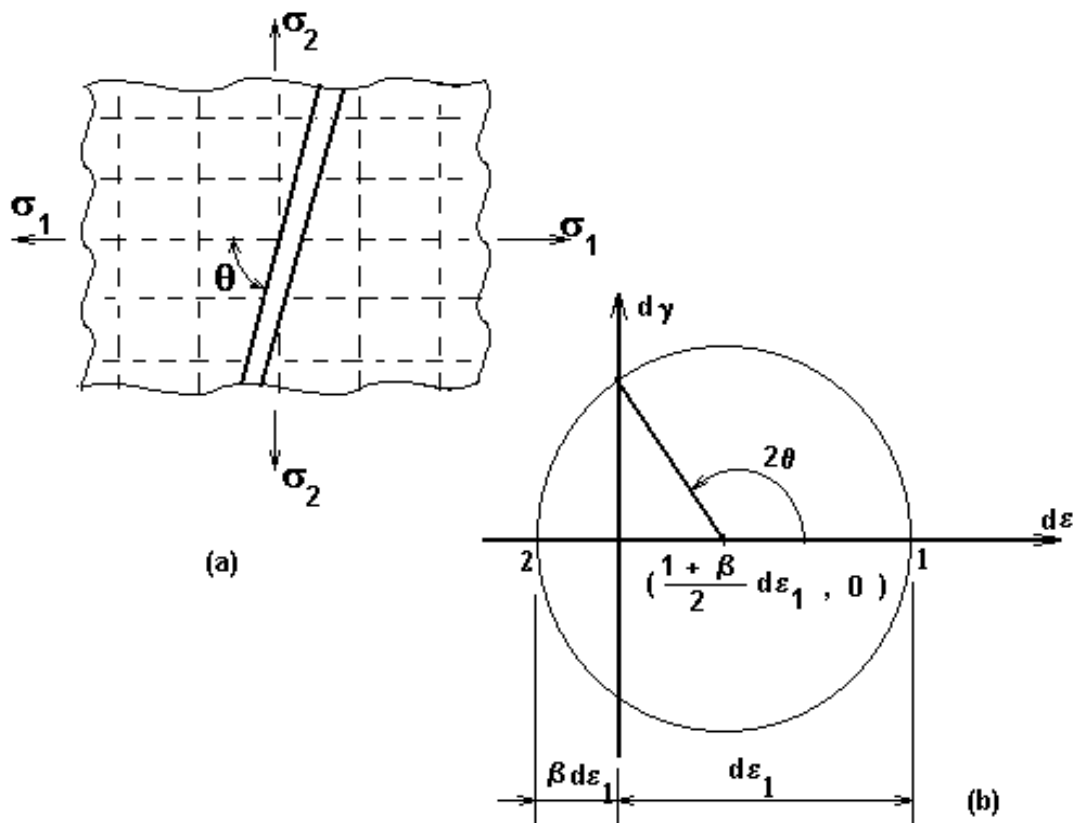


Figura 4.16 Estricção local, orientado com  $\theta$ , em relação aos eixos principais de tensão;(b) Círculo de Mohr mostrando a orientação da linha zero extensão. Marciniak e Duncan (1993)

estria perpendicular às tensões principais, a relação entre as espessuras iniciais nas regiões A e B será:

$$f_o = (t_B / t_A)_o \quad (4.0)$$

Além do máximo da carga de tração  $T_1$  a deformação pode se acelerar na imperfeição. No entanto, a compatibilidade de deslocamentos paralelos à estria requer:

$$(d\varepsilon_2)_A = (d\varepsilon_2)_B \quad (4.0)$$

Considerando a deformação da região contendo a imperfeição para alguns processos de deformação proporcional impostos na região A:

$$\begin{aligned} \sigma_{1A}; \quad \sigma_{2A} = \alpha_0 \sigma_{1A} \quad \sigma_{3A} = 0 \\ \varepsilon_{1A}; \quad \varepsilon_{2A} = \beta_0 \varepsilon_{1A} \quad \varepsilon_{3A} = (1 + \beta_0) \varepsilon_{1A} \end{aligned}$$

Como a tensão na direção 1 é transmitida ao longo da estria, então:

$$T_1 = \sigma_{1A} t_A = \sigma_{1B} t_B \quad (4.0)$$

O comportamento material em ambas as regiões é descrito pela relação constitutiva:

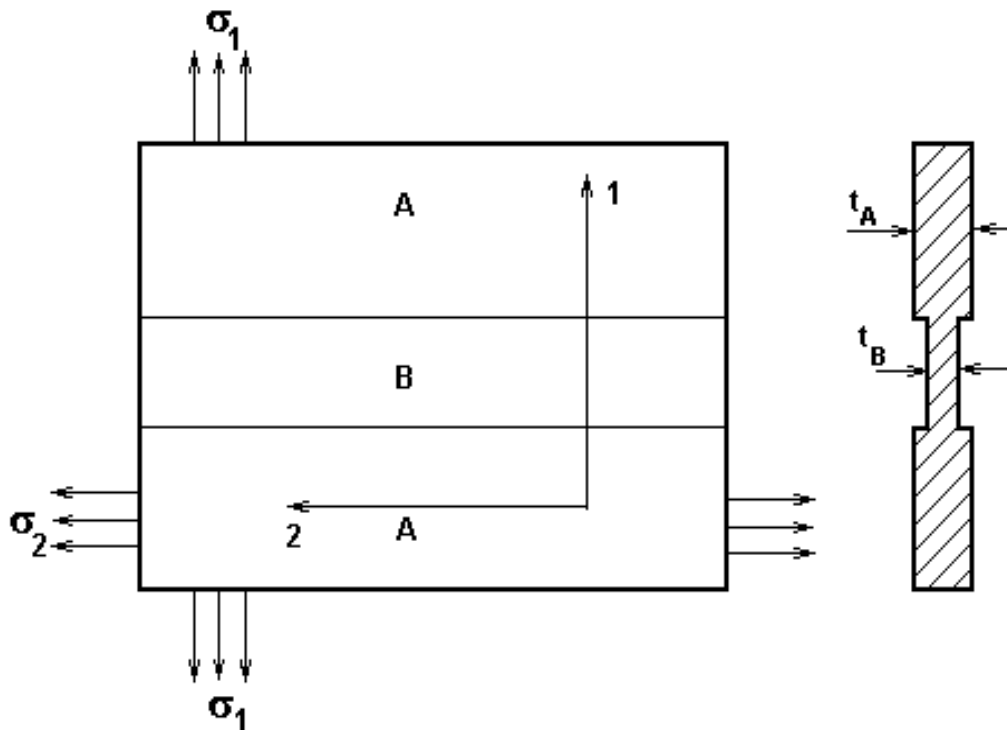


Figura 4.17 Uma imperfeição B na região A das deformações uniformes. A imperfeição é perpendicular à direção das maiores tensões principais. Marciniak e Duncan (1993)

$$\sigma_f = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \quad (4.0)$$

Como mostrado na Figura 4.18 , a superfície inicial de escoamento corresponde à tensão inicial de escoamento (elipse de von Mises). Da equação de equilíbrio nota-se que  $\sigma_B$  é sempre maior que  $\sigma_A$  e inicialmente,

$$(\sigma_{1B})_0 = (\sigma_{1B}) / f_0 \quad (4.0)$$

Como visto na eq. ( 4.0 ),  $f_0$  é ligeiramente menor do que a unidade.. A estria alcançará antes a superfície de escoamento. Pelas condições de contorno, no entanto, a deformação só poderá ocorrer quando as regiões A e B tiverem alcançado o estado de escoamento, de modo que os incrementos de deformação paralelos à estria sejam iguais. No início do escoamento, B se moverá em torno da superfície de escoamento de modo que:

$$\left( \frac{\sigma_{2B}}{\sigma_{1B}} \right)_0 = \alpha \quad (4.0)$$

onde  $\alpha < \alpha_0$ .

Então, a exceção do caso de uma estria ao longo de uma linha de extensão zero, o modo de carregamento em uma estria em uma tração biaxial mudará durante

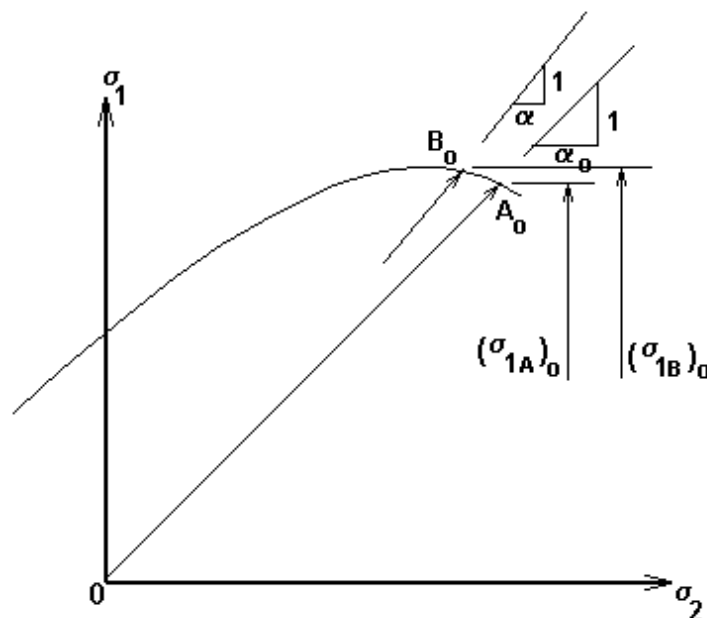


Figura 4.18 Estado de tensões em A<sub>0</sub>, deformação uniforme e B<sub>0</sub>, na imperfeição, no início da deformação plástica. Marciniak e Duncan (1993)



a deformação, ou seja,  $\alpha$  e  $\beta$ , não podem ser tomadas como constantes na região B.

### 4.5.1 ANÁLISE DO PROCESSO DE DEFORMAÇÃO

Considerando a deformação de cada região durante um pequeno incremento,  $d\varepsilon_{2A}=d\varepsilon_{2B}$ . O vetor incremento de deformação, seguindo a regra de fluxo de Levy-Mises, é normal à superfície de escoamento. Pelo que se observa na Figura 4.19, para uma estria, com  $\beta < \beta_0$ , para iguais incrementos na deformação  $d\varepsilon_2$ , paralelo à estria

$$d\varepsilon_{1B} > d\varepsilon_{1A}$$

No final deste incremento, a deformação efetiva na estria é maior do que em A, e cada ponto se coloca em uma diferente superfície de escoamento, visto que

$$|d\varepsilon_{3B}| > |d\varepsilon_{3A}|$$

E a profundidade da estria aumenta ligeiramente com

$$\sigma_{1A}/\sigma_{1B} < (\sigma_{1A}/\sigma_{1B})_0; \text{ ou } t_B/t_A < f_0$$

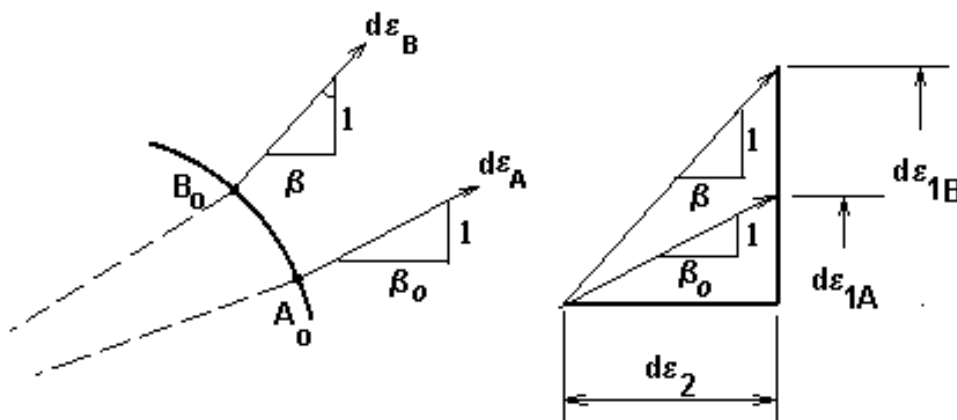


Figura 4.19 O vetor deformação rotaciona conforme o deslocamento do ponto tensão ao longo da superfície de escoamento. Marciniak e Duncan (1993)

### 4.5.2 EXEMPLO DE ANÁLISE

Através da realização de uma análise numérica, representada graficamente pela Figura 4.20, este processo pode ser simulado. Como a região A se deforma por um caminho definido, o ponto que representa B se moverá ao redor da superfície de escoamento para B, bem como a profundidade da estria aumenta. Eventualmente, B alcançará o ponto de deformação plana, na superfície de escoamento, como pode ser visto na Figura 4.20, onde

$$d\varepsilon_{1B} / d\varepsilon_{2B} = 1/\beta = \infty$$

Neste ponto, nenhuma deformação ocorre em A ( $d\varepsilon_2=0$ ), e  $\varepsilon_{1B}$  aumenta até que a falha ocorra.

O caminho da deformação durante esse processo pode ser ilustrado pela Figura 4.21.

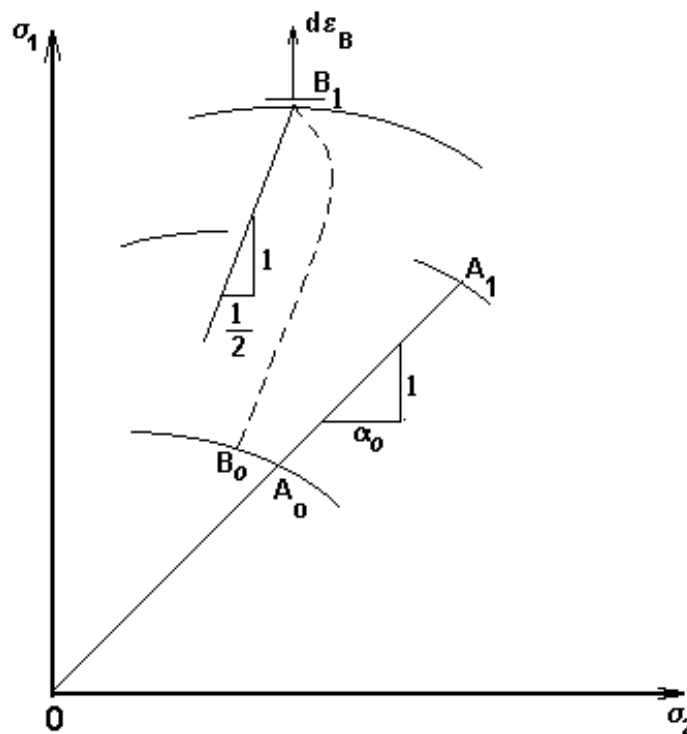


Figura 4.20 O caminho do ponto de tensão pela estria, B, se encaminhando para deformação plana onde  $\alpha = 1/2$ . Marciniak e Duncan (1993)

Na região A, o caminho da deformação é linear, mas na estria, enquanto  $d\varepsilon_{2B}=d\varepsilon_{2A}$ , a deformação  $d\varepsilon_{1B}$  corre à frente de  $d\varepsilon_{1A}$  até que a deformação plana é alcançada, e a chapa sofre uma fissura ao longo da estria. A deformação na chapa após a ocorrência da fissura é vista na região uniforme A e isto é conhecido como limite de conformação para um carregamento particular. Ou seja, o limite de conformação é

$$(\varepsilon_{1A}, \varepsilon_{2A})_{\varepsilon_{1B} \rightarrow \infty} \quad (4.0)$$

Esta é a máxima deformação uniforme que pode ser imposta, neste carregamento.

### 3.9.1 DIAGRAMA LIMITE DE CONFORMABILIDADE

Por meio de uma análise como a já mostrada, ou por estiramento de

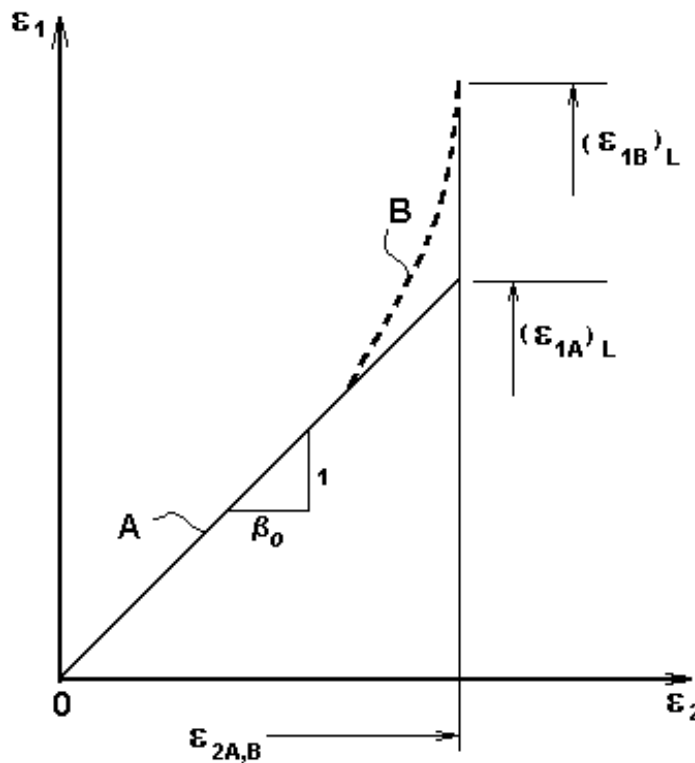


Figura 4.21 Caminhos de deformação na estria, B, e na região uniforme A. Marciniak, e Duncan (1993)

espécimes para diferentes modos de carregamento, no caso bi-axial ( $0 < \beta \leq 1$ ), um

determinado número de limites de conformabilidade pode ser determinado, como na Figura 4.22, para obter uma *Curva Limite de Conformabilidade*. Pode ser visto que para  $\beta \leq 0$ , o limite correspondente para  $dT_1$  é apropriado, mas para  $\beta > 0$ , deformação uniforme continua além da força de tração máxima.

### 3.10 EFEITOS DO ENCRUAMENTO

A partir das eqs. ( 4.0 ) e ( 4.0 ) nota-se que a redução no índice de endurecimento devido à deformação (encruamento)  $-n$  – reduzirá a altura da curva limite de conformabilidade no lado esquerdo do diagrama como, como pode ser visto na ilustração da Figura 4.23. No ensaio de tração bi-axial, no entanto, nota-se que a compatibilidade e o perfil da superfície de escoamento restringem o desenvolvimento da estricção, na ausência de encruamento. Diminuindo  $n$ , haverá diminuição do limite de conformabilidade na deformação plana muito rapidamente,

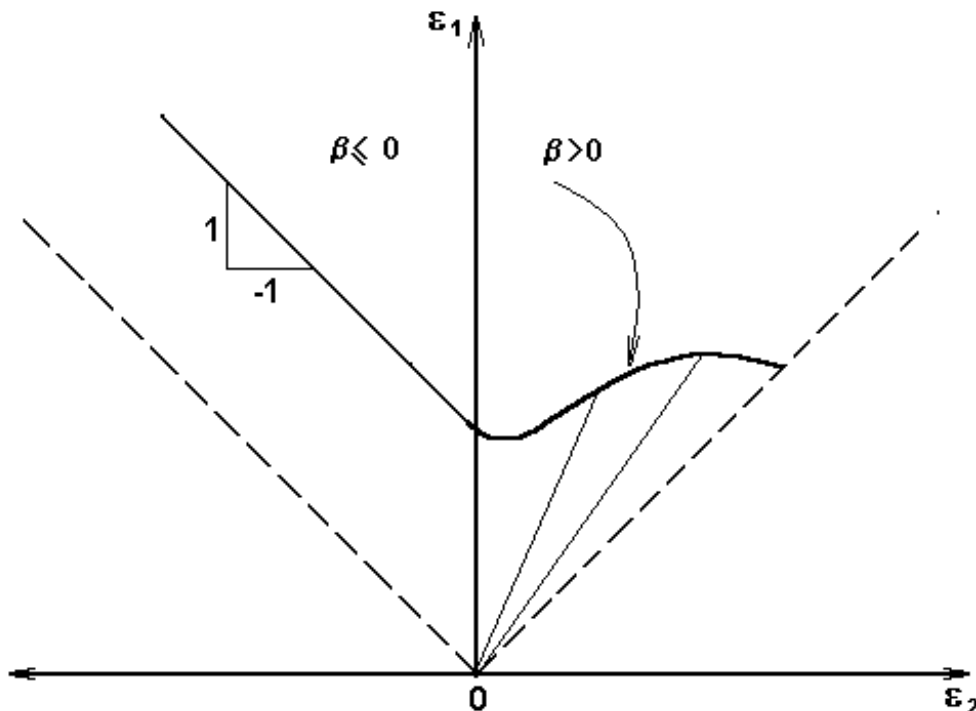


Figura 4.22 Curva Limite de Conformabilidade obtida pela união das deformações finais na região uniforme ( $\epsilon_{2A}, \epsilon_{1A}$ ) para diferentes caminhos de deformação. Marciniak e Duncan (1993)

enquanto a deformação limite em igual ensaio de tração biaxial,  $\beta=1$ , diminui menos rapidamente.

Experimentos mostram que chapas trabalhadas a frio, no qual, a conformabilidade à deformação plana é aproximadamente zero, podem, em alguns casos, ser estiradas significativamente em igual tração biaxial. O diagrama da Figura 4.23 mostra que em processos de conformação outros que a estampagem profunda pura, onde  $\beta=-1$ , o encruamento é usualmente o mais importante fator influenciando a conformabilidade.

### 3.11 FRATURA DÚTIL

No ensaio de materiais dúcteis, à tração, pode ser alcançada uma deformação na qual a falha ocorre de maneira súbita. Esta deformação onde a fratura acontece subitamente varia grandemente de um material para outro não é indicada pelos parâmetros típicos do material, tais como alongamento. A deformação de fratura pode ou não influenciar a curva limite de conformabilidade, como pode ser visto na Figura 4.24. A linha tracejada é a deformação na estria e se a deformação de fratu-

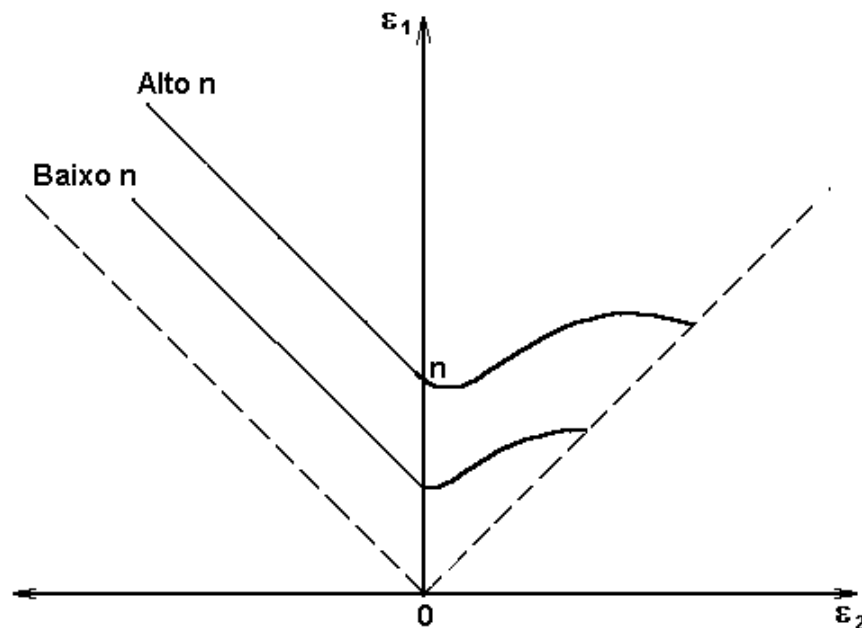


Figura 4.23 Efeito do encruamento em  $n$  na curva limite de conformabilidade. Marciniak e Duncan. (1993)

ra para o material é baixa, então a fratura da estria ocorre no ponto  $F_1$ , a curva limite de deformação na região uniforme  $(\epsilon_{1A})_1$  é menor que a estria tinha alcançado na deformação plana e a fratura toma lugar em  $F_2$ .

Fratura é sempre o resultado de deformação localizada em volume menor que a estrição local considerada. Microscopicamente, a localização aparece como bandas de cisalhamento, apesar que outras formas sejam possíveis. Existem vários critérios de fratura dúctil sugeridos. Um, que pode ser o mais adequado para chapas é o critério da tensão de cisalhamento crítica. Na Figura 4.25, isto pode ser visto, com o espaço de deformações, sendo representado por duas curvas..

No lado esquerdo alto do diagrama, o cisalhamento ocorre em um plano perpendicular à superfície, como resultado de altas tensões de estampagem,  $\alpha = -1$ ; no lado direito, cisalhamento aparece a  $45^\circ$  em relação à superfície da chapa. Se, estas deformações de fratura são grandes se comparadas com o limite de conformabilidade ou deformações de estrição, então elas não influenciam a

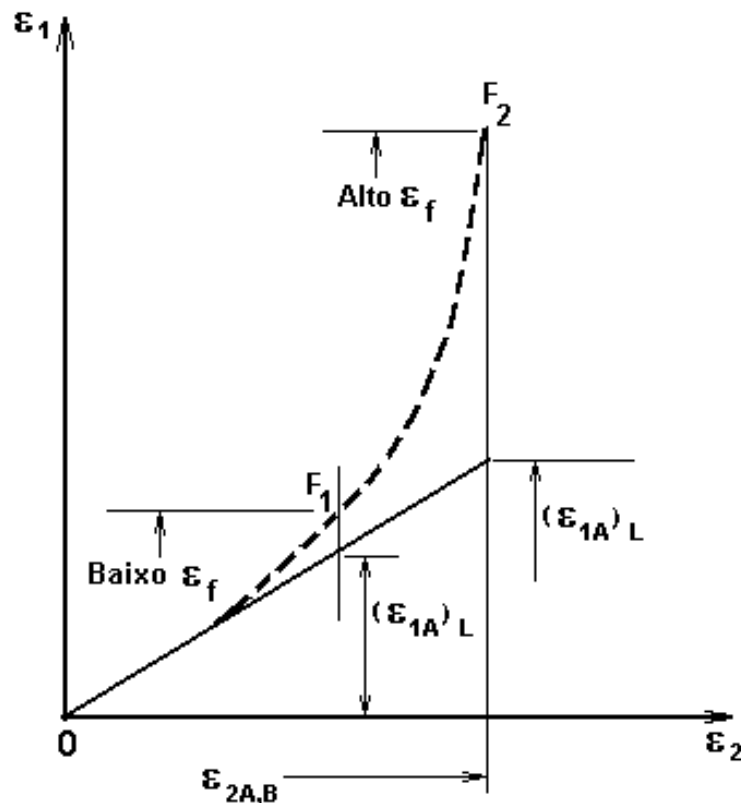


Figura 4.24 Efeito de uma fratura em baixa deformação na estria, em  $F_1$ , comparado com fratura a alta deformação em  $F_2$ , nas deformações limite  $\epsilon_{1A}$ . Mudanças em  $\epsilon_1$  a  $F_1$  afetarão o limite de deformação. Marciniak e Duncan. (1993)

estricção porque a deformação plana é alcançada antes na estricção antes da fratura. Este diagrama é usualmente empregado para indicar as regiões nas quais as tensões planas na conformação de chapas são atingidas. Para esclarecer este ponto, tensões planas implicam que as chapas sejam deformadas por tensões que se transmitem através da chapa, com a tensão através da espessura sendo negligenciável. Processos proporcionais são representados por linhas a partir da origem. Na estampagem,  $\beta = -1$ , grandes deformações são possíveis e limitadas apenas por fratura. Mas, para  $-1 < \beta < 1$ , a estricção é o modo mais usual de fratura. Para  $\beta < -1$ , existe outro limite, que é a formação de *rugos*, que não é uma propriedade de material, mas associado com a instabilidade na compressão.

Existe um limite inerente à conformação de chapas metálicas. A conformação das chapas metálicas ocorre como resultado da aplicação de forças normais aplicadas por uma ferramenta na chapa. Estas forças geralmente são de tração, mas existem condições em que forças compressivas também podem ocorrer. Existe

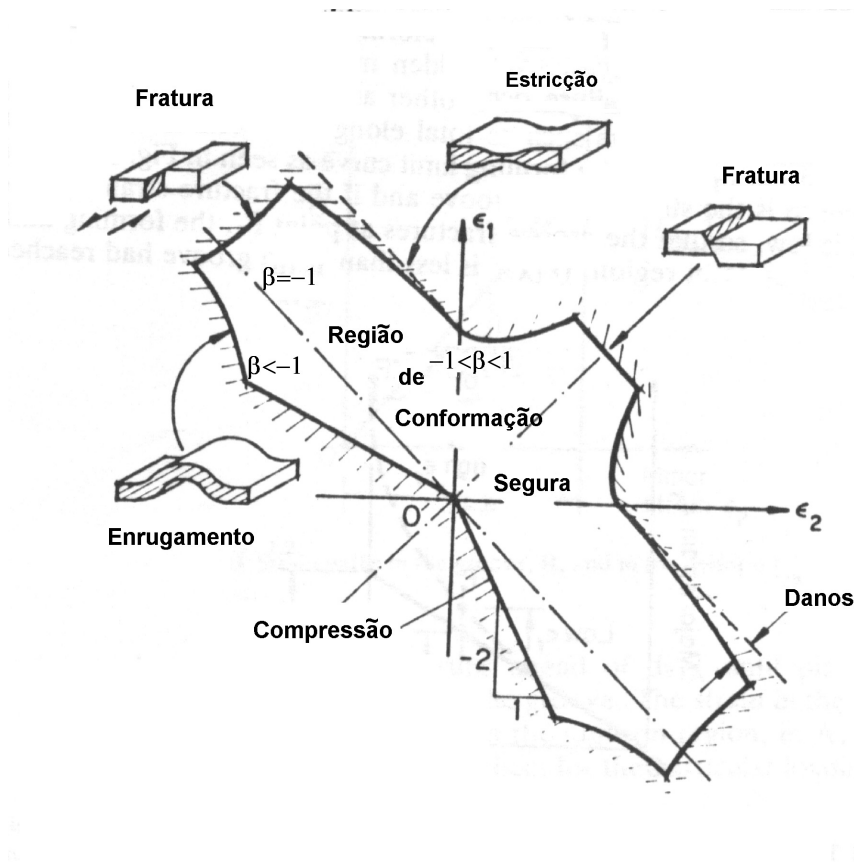


Figura 4.25 Limites para um processo simples de conformação de chapas. Marciniak e Duncan(1993)

uma tensão limitante para o caso de conformação de chapas: as tensões principais da membrana na chapa não podem ser ambas compressivas, e o limite é quando  $\sigma_2$  é negativa e  $\sigma_1$  é zero, ou,  $\beta = -2$ . Esta condição é representada pela linha de inclinação  $-1/2$  da Figura 4.25.

A Figura 4.25 ilustra que o princípio da conformação de chapas é o de um processo de tração que é limitado por estrição, fratura ou enrugamento, e a arte da conformação de chapas é proporcionar a mudança de forma requerida sem produzir deformações que se aproximem destes limites.



### 3.12 ESTUDO DO DOBRAMENTO

O estudo do dobramento de chapas metálicas remete inicialmente à resistência dos materiais e ao estudo da flexão pura. Neste tipo de conformação, dois pontos são de particular interesse para o controle do processo: a possibilidade de ruptura e o controle da forma final. O raio de dobramento e a ductilidade são importantes para o controle da possibilidade de rasgamento, enquanto a forma final é afetada pelo retorno elástico, dependente da propriedade elástica do material. O processo de conformação ocorre pela aplicação de um momento ou uma tensão sobre uma chapa apoiada em uma matriz, ou pela combinação de tensão e momento. No estudo de chapas finas, seções transversais permanecem planas no dobramento, como ilustrado na Figura 4.26.

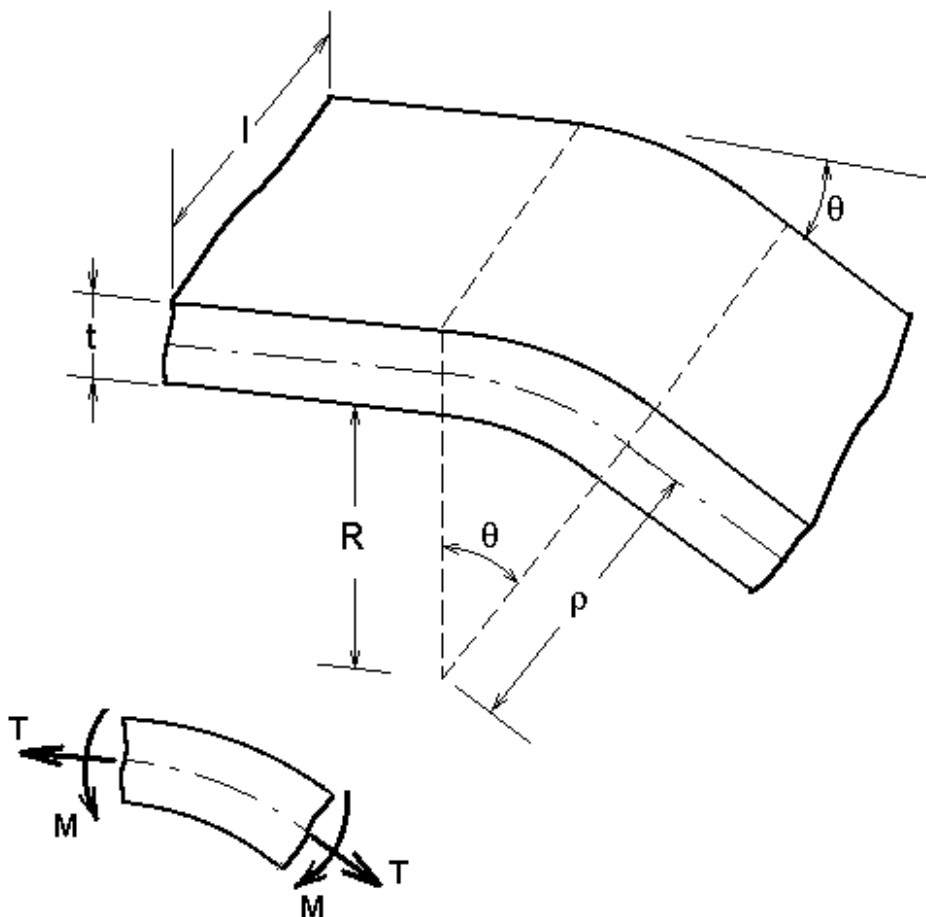


Figura 4.26 Variáveis do Dobramento. Marciniak e Duncan (1993)

Também é considerado que as direções das tensões e deformações coincidem com as direções radial e circunferencial, de modo que não exista cisalhamento no plano radial e que os gradientes de tensão e deformação sejam zero na direção circunferencial.

Considerando uma fibra  $AB_0$  situada na linha neutra, seu comprimento permanece inalterado após a dobra e pode ser expresso como:

$$l_s = \theta \cdot \rho$$

Uma fibra AB afastada de  $y$  da linha neutra, terá seu comprimento pós dobra definido por:

$$l = \theta (\rho + y) \quad (4.0)$$

então:

$$l = l_s \left( 1 + \frac{y}{\rho} \right) \quad (4.0)$$

A deformação axial da fibra AB é:

$$\varepsilon_l = \ln \left\{ \left( \frac{l_s}{l_0} \right) \left[ 1 + \left( \frac{y}{\rho} \right) \right] \right\} \quad (4.0)$$

ou

$$\varepsilon_l = \ln \left( \frac{l_s}{l_0} \right) + \ln \left[ 1 + \left( \frac{y}{\rho} \right) \right] \quad (4.0)$$

e podem ser identificadas duas componentes de deformação: uma associada à extensão da linha neutra, que será chamada de  $\varepsilon_a$ :

$$\varepsilon_a = \ln \left( \frac{l_s}{l_0} \right) \quad (4.0)$$

e a componente de deformação por dobramento,  $\varepsilon_b$ :

$$\varepsilon_b = \ln \left[ 1 + \left( \frac{y}{\rho} \right) \right] \quad (4.0)$$

então:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_a + \varepsilon_b \quad (4.0)$$

### 3.13 ESTUDO DO ESTIRAMENTO

Em um processo de conformação de uma chapa circular, como mostrado na Figura 4.27, a chapa é estirada pelo punção por forças de tração meridianas,  $T_\phi$ , que surgem da resistência à deformação plástica das regiões adjacentes. Se a posição de um ponto  $P$  originalmente no raio  $r$  na chapa, é dado por  $r'$ , então a chapa sofreu um estiramento e  $r' > r$ . Na região de deformação, há um círculo neutro de raio  $a$ , imutável, que divide a chapa em uma região de estampagem apenas, com espessura constante ( $r > a$ ) e outra de estiramento ( $r < a$ ). Neste estudo, será abordada a conformação de um disco fixo a partir do perímetro de uma circunferência de raio  $a$ .

#### 3.13.1 ESTIRAMENTO DE UM DIAFRAGMA CIRCULAR

Considerando a conformação de uma chapa circular em diafragma circular, através de uma pressão exercida por um fluido, o resultado pode ser descrito como uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva, como pode ser visto na Figura 4.28 .

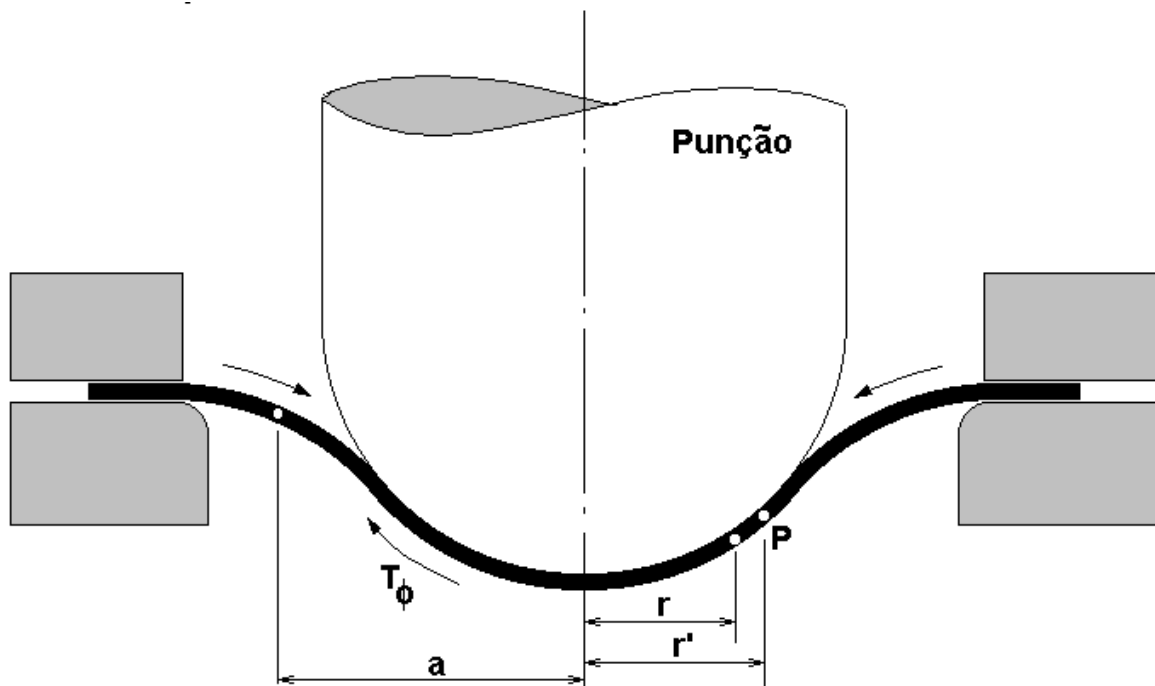


Figura 4.27 Conformação de uma chapa circular Marciniak e Duncan (1993)

Inicialmente será feito um estudo da distribuição de deformações. A partir da Figura 4.29 , pode-se afirmar que em um ponto P, de raio r', as deformações são::

$$\varepsilon_{\theta} = \ln(r'/r); \quad \varepsilon_{\phi} = \ln[dr'/(dr \cdot \cos \alpha)] \quad (4.0)$$

onde r é o raio inicial do ponto. Por simetria, estas deformações são iguais no pólo. Nas bordas da chapa, em uma circunferência de raio a, a deformação  $\varepsilon_{\theta}$  é zero. Existe também, um ponto intermediário em que um estado de deformação bi-axial seja igual:

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\phi} = -1/2 \varepsilon_i \quad (4.0)$$

E da equação ( 4.0 ),

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr'}{r' \cdot \cos \alpha} = \frac{\rho \cdot dr'}{r'(\rho^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.0)$$

onde,

$$\cos \alpha = [1 - (r'/\rho)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.0)$$

e  $\rho$  é o raio de curvatura da casca.

Integrando a eq. ( 4.0 ), obtém-se:

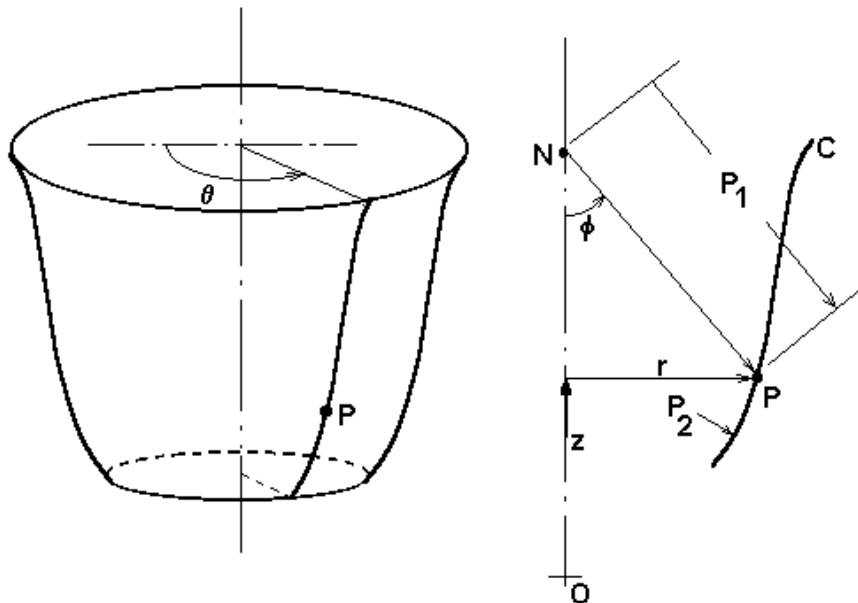


Figura 4.28 Superfície de revolução gerada pela revolução da curva C. Marciniak e Duncan(1993)

$$c_1 \cdot \ln r = c_2 \cdot \ln \left( \frac{r'}{\rho + (\rho^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.0)$$

Fazendo  $r = r' = a$ ,

$$r = r' \frac{\rho + (\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho + (\rho^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.0)$$

e

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \ln(r'/r) = \ln \left[ \frac{\rho + (\rho^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho + (\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.0)$$

A máxima deformação ocorre no pólo onde  $r = r' = 0$ . De ( 4.0 ) obtém-se:

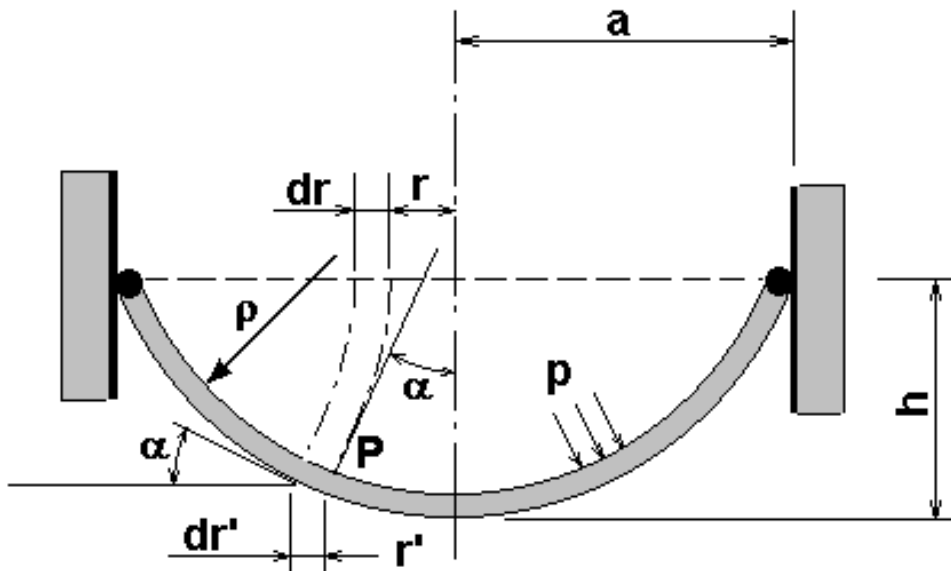


Figura 4.29 Conformando uma chapa fina com pressão de fluido. Marciniak e Duncan (1993)

$$\varepsilon_{\theta máx} = \varepsilon_{\phi máx} = \ln \left[ \frac{2\rho}{\rho + (\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.0)$$

Sendo,

$$h = \rho - (\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.0)$$

E a equação ( 4.0 ) pode ser re-escrita:

$$\varepsilon_{\theta máx} = - \ln[1 - (h/2\rho)] = \ln[1 + (h/a)^2] \quad (4.0)$$

onde

$$\rho = (a^2 + h^2)/2h$$

### 3.13.2 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para uma casca sujeita a um carregamento hidrostático, onde o momento fletor pode ser negligenciado, as forças atuantes em um elemento de casca podem ser representados na forma da Figura 4.30a.

As tensões em arco,  $T_{\theta}$ , dão origem a uma componente radial:

$$T_{\theta} \rho_2 d\phi d\theta$$

Resolvendo estas forças segundo a superfície normal, como representado na Figura 4.30b,

$$p \rho_2 d\phi .r.d\theta - T_{\theta} \rho_2 d\phi d\theta .\text{sen}\phi - T_{\theta} r d\theta .d\phi = 0$$

e a pressão normal  $p$  é:

$$p = T_{\theta} [\text{sen}(\phi / r)] + T_{\theta} / \rho_2$$

ou

$$p = T_{\theta} / \rho_1 + T_{\theta} / \rho_2 \quad (4.0)$$

Resolvendo estas forças tangencialmente, como indicado na Figura 4.30b,

$$(T_{\theta} + dT_{\theta})(r + dr)d\theta - T_{\theta} r d\theta - T_{\theta} \rho_2 d\phi d\theta \cos\phi = 0$$

Considerando que  $dr / \cos\phi = \rho_2 d\phi$ ,

$$dT_\phi / dr - (T_\theta - T_\phi) / r = 0 \tag{4.0}$$

Além disso, as tensões uniformemente distribuídas tangentes à casca, são equivalentes a uma resultante axial Z definida por:

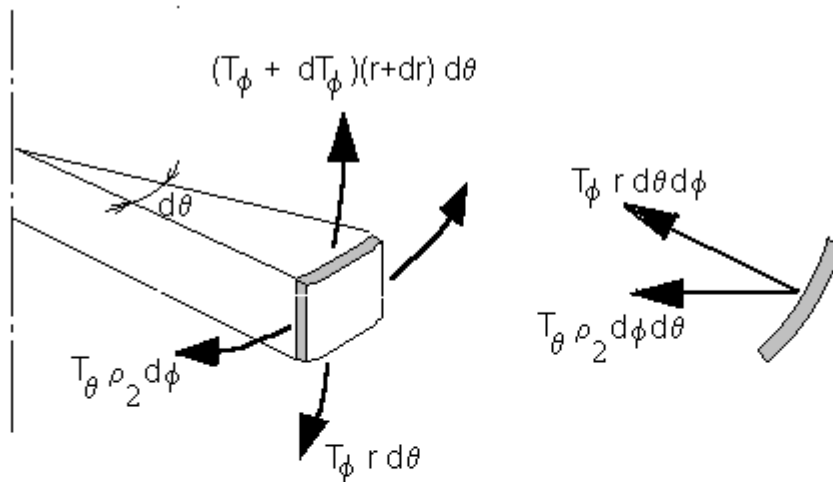
$$Z = (T_\phi)_o 2\pi r_o \text{sen}\phi_o$$

ou

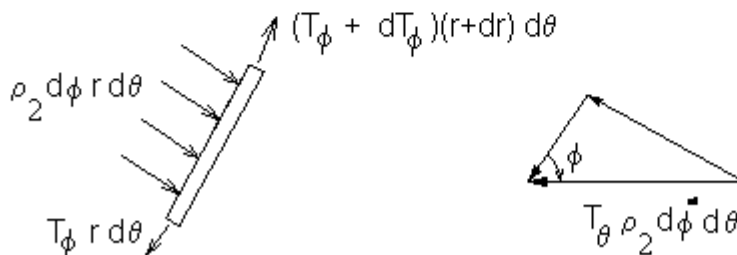
$$(T_\phi)_o = Z / (2\pi r_o \text{sen}\phi_o) \tag{4.0}$$

### 3.13.3 ESTIRAMENTO COM PUNÇÃO HEMISFÉRICO RÍGIDO

O estiramento por meio de um punção difere de várias maneiras do estiramento por pressão hidrostática. Os dois processos são comparados na Figura 4.31.



a) Forças atuando num elemento da casca com resultantes radial e normal.



b) Componentes tangencial e normal das forças em um elemento de casca.

Figura 4.30 Forças atuantes em um elemento de casca. Marciniak e Duncan(1993)

Pontos em comum aos dois processos: o estado de tensões, é o mesmo em qualquer lugar da chapa; as forças unitárias  $T_\theta$  e  $T_\phi$  são iguais:

$$T_\theta = T_\phi = T \quad (4.0)$$

O perfil da conformação nos dois processos, no entanto é diferente. Enquanto o perfil da conformação hidrostática é aproximadamente esférico, no caso do punção, isso só acontece com as regiões da chapa que entram em contato com o punção. A tensão do contato do punção será constante, e de ( 4.0 ) :

$$q = 2.T / \rho_\rho \quad (4.0)$$

Claramente, pode ser percebido, que a pressão de contato no caso do estiramento com punção é maior do que no caso do estiramento por pressão hidrostática, pois  $\rho_t > \rho_\rho$ . [Marciniak e Duncan (1993)]

No ponto de tangencia B, o ângulo esférico subtendido é  $\phi_b$  e a força axial exercida pelo punção na chapa é, da equação ( 4.0 ):

$$\begin{aligned} F_p = Z &= T.2\pi .r_b \text{sen}\phi_b \\ &= T.2\pi .\rho_\rho .\text{sen}^2\phi_b \end{aligned} \quad (4.0)$$

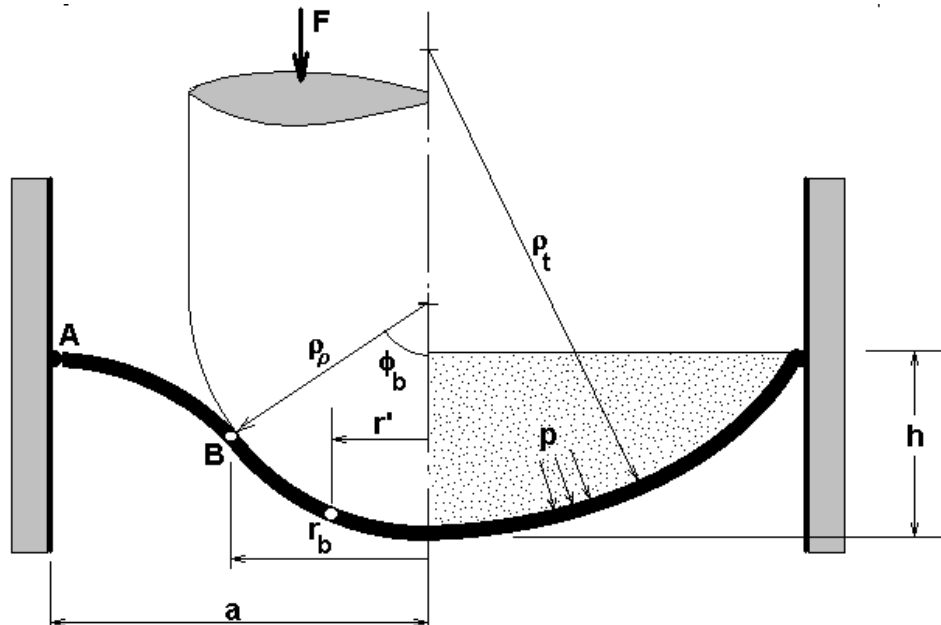


Figura 4.31 Comparação do estiramento com punção e com pressão hidrostática. Marciniak e Duncan (1993)



Na região A-B, a pressão atuante na chapa é zero e ambas as tensões principais são iguais. Segue que da equação ( 4.0 ):

$$\rho_1 = -\rho_2 \quad (4.0)$$

Como a força axial na região livre permanece constante, da equação ( 4.0 ):

$$r'.\text{sen}\phi = r_b.\text{sen}\phi_b = Z/(2\pi .T) \quad (4.0)$$

para  $r_b < r' < a$ . E isto define o perfil da região livre.

### 3.13.4 EFEITO DO ATRITO

Se não existir atrito na interface punção-chapa, a distribuição de deformação para um dado avanço do punção,  $h$ , pode remontar ao caso do estiramento hidrostático. Isto implica que, na medida em que o punção avança, o material no centro da chapa continua a “deslizar” sobre a face do punção em direção às bordas do disco. Na presença de atrito, como mostrado na Figura 4.32a , a deformação próxima ao

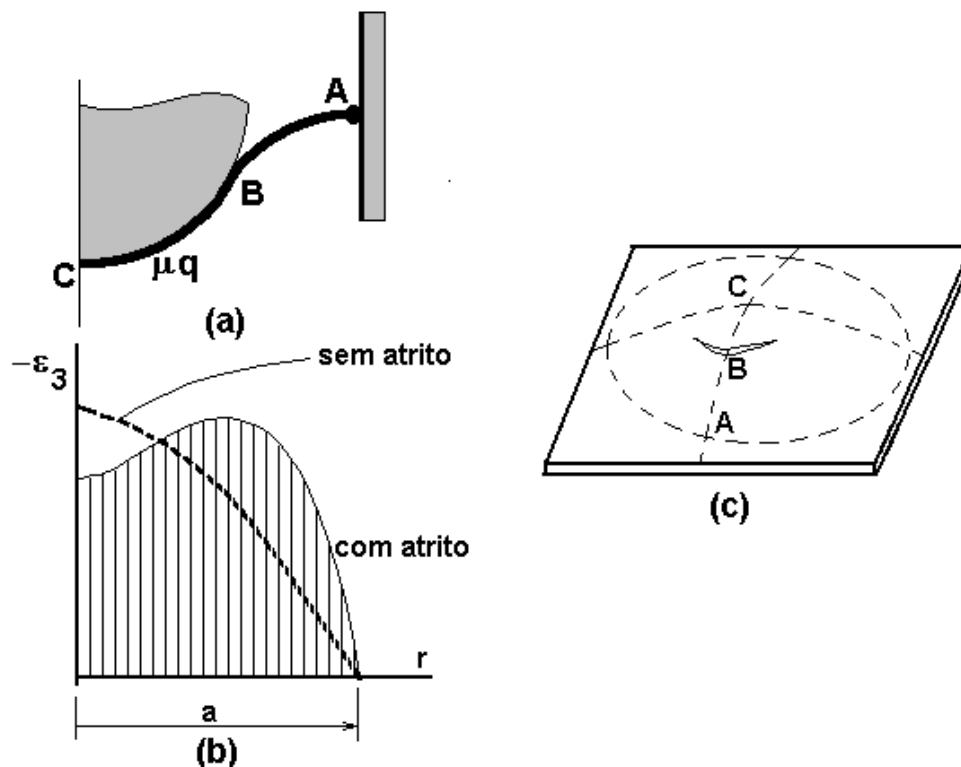


Figura 4.32 Força de atrito na interface punção - chapa (a); influência do atrito na deformação (b); ruptura usualmente próxima a região B. Marciniak e Duncan (1993)

centro da chapa é reduzida e a maior redução de espessura ocorre próximo ao ponto de tangência B. Pela Figura 4.32b nota-se que, com atrito, a região que tende a superar primeiro a deformação limite, é a região próxima a B e não o pólo. A proximidade da região limite em relação ao pólo portanto, depende da eficiência da lubrificação.

## 6. MODELAGEM DO PROCESSO DE ESTAMPAGEM PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A abordagem variacional é aqui usada para a derivação das equações básicas de elementos finitos. Ela requer que entre os deslocamentos admissíveis  $u_i$  satisfaçam as condições de compatibilidade, bem como que as condições de contorno.

### 3.14 ABORDAGEM VARIACIONAL

A solução pela abordagem variacional, dá ao funcional, um valor estacionário:

$$\pi = \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot dV - \int_{S_F} F_i \cdot u_i \cdot dS, \text{ para materiais rígido plásticos} \quad (5.0)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão efetiva,  $\bar{\varepsilon}$  é a deformação efetiva.  $F_i$  representa as forças de tração de superfície.

A solução do problema original de valor de contorno é então obtida na solução do problema variacional, onde a variação de primeira ordem do funcional é zero:

$$\delta \pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \bar{\varepsilon} \cdot dV - \int_{S_F} F_i \delta u_i \cdot dS = 0 \quad (5.0)$$

onde  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  para materiais rígido plásticos, ou  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}})$  para materiais rígido visco plásticos

A equação ( 5.0 ) é a equação básica para elementos finitos para o caso de deformações no plano definido pelas mesmas e em um estado plano de tensões.

### 3.15 CINEMÁTICA DA DEFORMAÇÃO

Um estado de tensões é dito ser plano quando a direção normal ao plano é uma direção de tensão principal e a magnitude da tensão segundo esta direção é zero. Esta situação ocorre quando uma chapa é carregada ao longo de suas

extremidades, segundo o plano da chapa. Deformação no plano da chapa, como a conformação de uma flange por estampagem é um problema de estado plano de tensões. Deformações “fora do plano” de chapas metálicas, como dobramento e estampagem profunda de produtos em forma de “copo”, por exemplo, requerem solução pelo uso da Teoria da Membrana. Esta teoria despreza variações de tensão na direção da espessura da chapa e considera a distribuição das componentes de tensão somente no plano da chapa. Deste modo, as formulações para análise de deformações *no plano* e *fora do plano* consideram somente componentes de tensão atuantes no plano da chapa. No entanto, as análises de deformações *fora do plano* requerem a consideração de *grandes deformações*, enquanto que a *teoria infinitesimal* é aplicável para análises de deformações *no plano*. [Kobayashi et al. (1989)]

A partir da Figura 5.33, tem-se uma análise da cinemática da deformação em um domínio cujo corpo é uma chapa. Focalizando inicialmente a atenção nas relações entre os estágios  $t=t_0$  e  $t=t_0+\Delta t$ , as expressões que definem o vetor força  $d\mathbf{F}$ , para os dois instantes são:

$$d\mathbf{F} = t_{\alpha\beta} N_{\alpha} \mathbf{g}_{\beta} ds \quad (5.0)$$

e,

$$d\mathbf{F} = \sigma_{\alpha\beta} n_{\alpha} \mathbf{g}_{\beta} ds \quad (5.0)$$

onde  $n_{\alpha}$  e  $N_{\alpha}$  representam o vetor normal à superfície  $dS$  ou  $ds$  do elemento, em ambas as configurações,  $\mathbf{g}_{\beta}$  é o vetor base de sistema de referência  $x'-y'-z'$ ,  $t_{\alpha\beta}$  são os componentes do primeiro tipo, do tensor tensão de Piola-Kirchhoff (tensor tensão nominal), e  $\sigma_{\alpha\beta}$  os componentes do tensor tensão de Cauchy (ou, tensor tensão verdadeira). Os sistemas de coordenadas  $x-y-z$  e  $x'-y'-z'$  podem ser curvas e não são necessariamente os mesmos.

A equação (5.0) ainda pode ser escrita, na configuração de referência, como:

$$d\mathbf{F} = [u_{\beta} + \delta_{\beta\gamma}] S_{\alpha\gamma} N_{\alpha} \mathbf{g}_{\beta} dS \quad (5.0)$$

onde  $u_{\beta}$  é a derivada do vetor deslocamento  $u$ ,  $\delta_{\beta\gamma}$  é o delta de Kronecker e  $S_{\alpha\beta}$  são os componentes do tensor tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (PK2).

A relação entre os três tensores  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $t_{\beta\gamma}$  e  $S_{\gamma\delta}$  pode ser escrita como

$$J\sigma_{\alpha\beta} = x_{\alpha,\gamma}t_{\beta\gamma} = x_{\alpha\gamma}x_{\beta,\delta}S_{\gamma\delta}$$

onde  $x_{\alpha,\gamma} = \partial x_\alpha / \partial x_\gamma$ ,  $x_{\beta,\delta} = \partial x_\beta / \partial x_\delta$  e  $J = \det(F)$ , para  $F = \text{gradiente de deformação}$ . [Belytschko et al. (2000)]

Considerando o estado de equilíbrio na configuração deformada no instante  $t = t_0 + \Delta t$ , se um vetor deslocamento virtual  $\delta u$  é imposto a uma partícula material, o trabalho virtual fica:

$$\delta w = \int_S \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dS \tag{5.0}$$

onde  $\delta w$  é o trabalho virtual total feito pelas forças de tração externas sobre a superfície  $S$ ,  $f$  é a força de tração de superfície expressa por unidade de área da configuração de referência,  $f = dF/dS$  e  $\delta u$  é o vetor deslocamento virtual.

Da equação ( 5.0 ) e da relação  $\delta u = \delta u_\gamma \mathbf{g}_\gamma$  a expressão ( 5.0 ) pode ser escrita

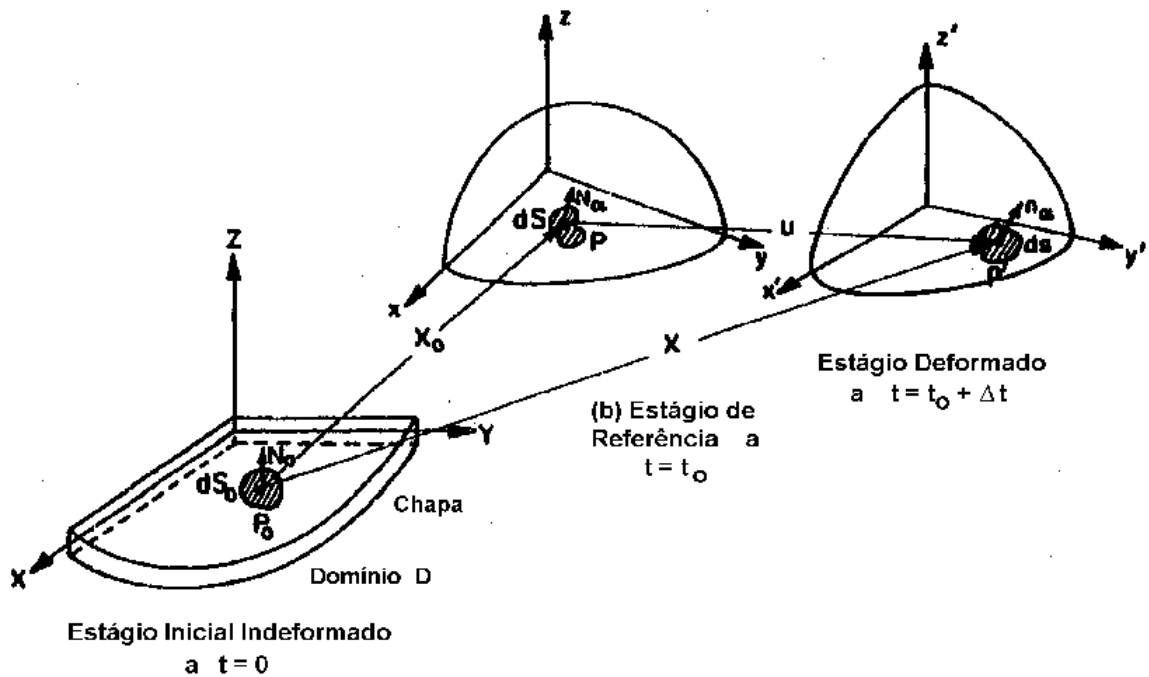


Figura 5.33 Cinemática da deformação do elemento de chapa nos vários estágios. Toh (1983)

$$\begin{aligned} \delta w &= \int_S [t_{\alpha\beta} N_\alpha \mathbf{g}_\beta][\delta u_\gamma \mathbf{g}_\gamma] dS \\ &= \int_S t_{\alpha\beta} N_\alpha \delta u_\beta dS \end{aligned} \quad (5.0)$$

desde que  $\mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{g}_\gamma = \delta_{\beta\gamma}$  é o delta de Kronecker, e pelo teorema do divergente,

$$\begin{aligned} \delta w &= \int_V [t_{\alpha\beta} \delta u_\beta]_{,\alpha} dV \\ &= \int_V [t_{\alpha\beta} \delta u_{\beta,\alpha} + t_{\alpha\beta,\alpha} \delta u_\beta] dV \end{aligned} \quad (5.0)$$

onde  $dV$  é o volume do elemento na configuração  $t = t_o$ . Considerando que no estado de equilíbrio,  $t_{\alpha\beta,\alpha}=0$  então:

$$\delta w = \int_V t_{\alpha\beta} \delta u_{\beta,\alpha} dV = \int_S \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dS \quad (5.0)$$

Usando a relação entre os tensores tensão de Piola-Kirchhoff de primeira e segunda espécie,

$$t_{\alpha\beta} = [u_{\beta,\gamma} + \delta_{\beta\gamma}] S_{\alpha\beta} \quad (5.0)$$

e a equação ( 5.0 ) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta w &= \int_V [u_{\beta,\gamma} + \delta_{\beta\gamma}] S_{\alpha\gamma} \delta u_{\beta,\alpha} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V S^{\alpha\gamma} \delta [u_{\gamma,\alpha} + u_{\alpha,\gamma} + u_{\beta\gamma} u_{\beta,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma}] dV \end{aligned} \quad (5.0)$$

Introduzindo o tensor de incremento de deformação Lagrangeano

$$dE_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta}] \quad (5.0)$$

onde  $u_{\alpha,\beta}$  e  $u_{\beta,\alpha}$  são as derivadas das covariantes dos vetores de deslocamento.

Do Princípio do trabalho Virtual obtém-se o funcional, que pode ser escrito na forma

$$\delta w = \int_S \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \int_V S_{\alpha\beta} \delta (dE_{\alpha\beta}) dV \quad (5.0)$$

Conseqüentemente, a forma variacional do funcional pode ser obtida de ( 5.0 ) e o problema de valor estacionário pode ser formulado pela condição de nulidade da variação do funcional:

$$\delta \phi = \int_V S_{\alpha\beta} \delta (dE_{\alpha\beta}) dV - \int_S f \delta u dS = 0 \quad (5.0)$$

Em virtude da expressão do trabalho incremental,

$$dw = S_{\alpha\beta} dE_{\alpha\beta} = \bar{S} \cdot d\bar{E} \quad (5.0)$$

onde  $\bar{S}$  e  $d\bar{E}$  são as tensão e deformação incremental efetivas. E a expressão ( 5.0 ) pode ser expressa na forma:

$$\delta \phi = \int_V \bar{S} \delta (d\bar{E}) dV - \int_S \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (5.0)$$

que é a equação a ser usada na discretização do método de elementos finitos.

### 3.16 DISCRETIZAÇÃO

As técnicas de elementos finitos a seguir são aplicáveis para o caso de materiais rígido plásticos. Para a discretização é usada a configuração de elementos de forma triangular, vantajosa quando são analisadas estruturas planas. É assumido que durante a deformação os elementos permanecem planos e assim, o efeito de dobramento pode ser negligenciado.

Funções polinomiais são usadas para descrever o deslocamento dos elementos, devido a sua inerente flexibilidade. Quanto maior o grau dos polinômios, melhor é a aproximação.

De modo a agilizar o procedimento, o cálculo das matrizes de elementos é feito em um sistema de coordenadas locais, e após, a transformação das matrizes para o sistema global, que é o sistema comum para todos os elementos.

Dividindo a chapa metálica em elementos triangulares, e considerando um sistema de coordenadas cartesianas local para um elemento, o campo de deslocamentos, para um elemento tipo, dado por  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , (Figura 5.34) as funções lineares de deslocamento no elemento serão:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + b_1x + c_1y \\ v &= a_2 + b_2x + c_2y \\ w &= a_3 + b_3x + c_3y \end{aligned} \tag{5.0}$$

OU

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{5.0}$$

e a equação ( 5.0 ) , para os pontos nodais fica:

$$\{\mathbf{u}\} = \mathbf{A}\{\boldsymbol{\phi}\} \tag{5.0}$$

onde

$$\{\mathbf{u}\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3],$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix},$$

e

$$\{\boldsymbol{\phi}\}^T = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad a_3 \quad b_3 \quad c_3].$$



Combinando ( 5.0 )e( 5.0 ):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \underline{N}\{\underline{u}\} \tag{5.0}$$

onde  $\underline{N}$  é a matriz de interpolação, na forma

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \underline{A}^{-1}.$$

Em geral, a equação ( 5.0 ) pode ser escrita como:

$$u = \frac{1}{2\Delta} \left\{ \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i x + c_i y) u_i \right\} \tag{5.0}$$

onde:

$$a_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3, \quad a_2 = y_1 x_3 - x_1 y_3, \quad a_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2,$$

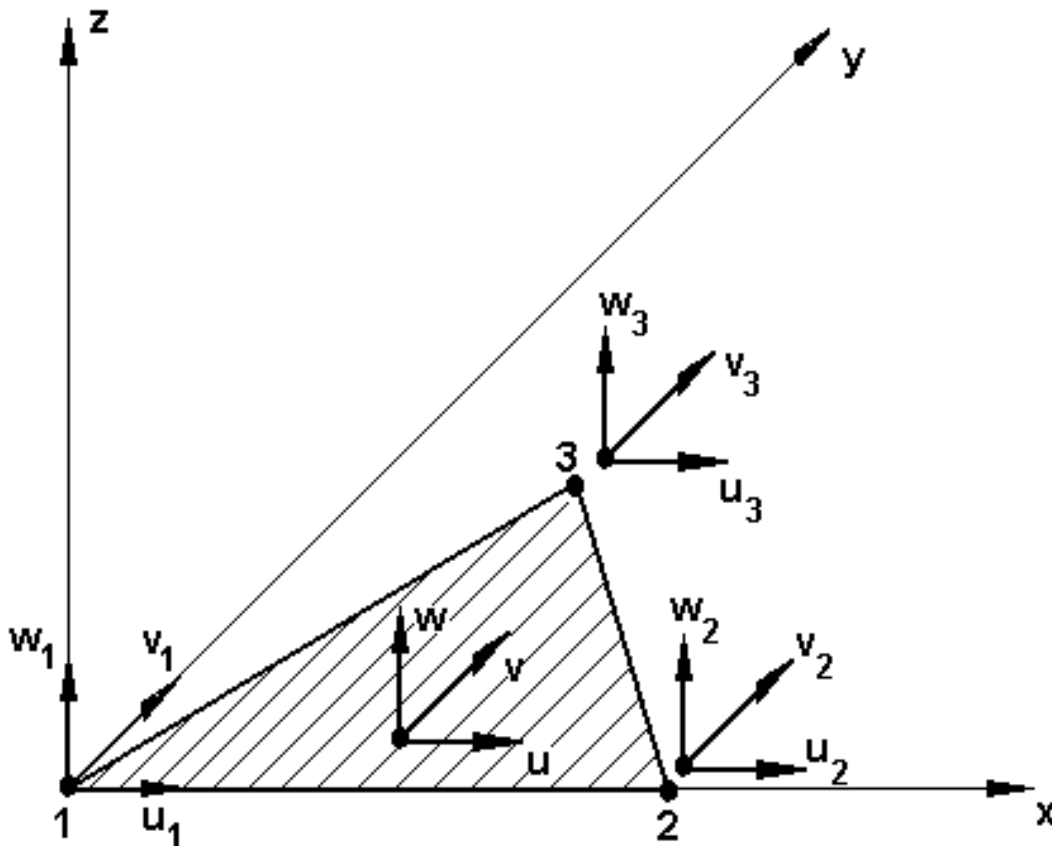


Figura 5.34 Coordenadas locais do elemento triangular com os deslocamentos nodais u, v, w. Toh (1983)

$$c_1 = x_3 - x_2, c_2 = x_1 - x_3, c_3 = x_2 - x_1$$

e

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \times \text{área do elemento triangular}$$

Os gradientes de deslocamento, de ( 5.0 ) são

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta}(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3); & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta}(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta}(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3); & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta}(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta}(b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3); & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta}(c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3) \end{aligned} \quad (5.0)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (5.0)$$

Os componentes de deformação Lagrangeano se relacionam com os gradientes de deslocamento

$$dE_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 dE_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\
 dE_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
 dE_z &= - (dE_x + dE_y)
 \end{aligned} \tag{5.0}$$

ou

$$\{d\mathbf{E}\} = \underline{B}\{\mathbf{u}\}$$

onde

$$\{d\mathbf{E}\}^T = [dE_x \quad dE_y \quad dE_{xy}] \tag{5.0}$$

A matriz de deformação-deslocamento,  $\underline{B}$ , que é uma função do deslocamento, contém termos lineares e não lineares,

$$\begin{aligned}
 \underline{B} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{b_1}{2} & 0 & \frac{c_2}{2} & \frac{b_2}{2} & 0 & \frac{c_3}{2} & \frac{b_3}{2} & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{8\Delta^2} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} & B_{19} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} & B_{27} & B_{28} & B_{29} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} & B_{39} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.0}$$

Com

$$\begin{aligned}
 XBU &= b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3, & XBV &= b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3, & XBW &= b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3, \\
 XCU &= c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3, & XCV &= c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3, & XCW &= c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3
 \end{aligned} \tag{5.0}$$

Das equações ( 5.0 ) e ( 5.0 ),

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= (XBU)b_1 & B_{21} &= (XCU)c_1 & B_{31} &= (XBU)c_1 \\
 B_{12} &= (XBV)b_1 & B_{22} &= (XCV)c_1 & B_{32} &= (XBV)c_1 \\
 B_{13} &= (XBW)b_1 & B_{23} &= (XCW)c_1 & B_{33} &= (XBW)c_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 B_{14} = (XBU)b_2 & B_{24} = (XCU)c_2 & B_{34} = (XBU)c_2 \\
 B_{15} = (XBV)b_2 & B_{25} = (XCV)c_2 & B_{35} = (XBV)c_2 \\
 B_{16} = (XBW)b_2 & B_{26} = (XCW)c_2 & B_{36} = (XBW)c_2 \\
 B_{17} = (XBU)b_3 & B_{27} = (XCU)c_3 & B_{37} = (XBU)c_3 \\
 B_{18} = (XBV)b_3 & B_{28} = (XCV)c_3 & B_{38} = (XBV)c_3 \\
 B_{19} = (XBW)b_3 & B_{29} = (XCW)c_3 & B_{39} = (XBW)c_3
 \end{array}$$

A discretização da equação ( 5.0 ) será feita utilizando as equações

$$d\bar{E} = \frac{(1+R)}{\sqrt{1+2R}} \sqrt{dE_x^2 + dE_y^2 + \frac{2R}{1+R}dE_xdE_y + \frac{2}{1+R}dE_{xy}^2} = \tag{5.0}$$

$$d\bar{E} = \sqrt{\frac{2}{3}d\bar{E}^T Dd\bar{E}}$$

e a equação ( 5.0 ).

Para a equação ( 5.0 ), tomando a variação com relação ao vetor deslocamento  $\underline{u}$ , chega-se a:

$$\delta (dE) = \frac{2}{3}(dE)^{-1}d\mathbf{E}^T \underline{D}\delta (d\mathbf{E}) \tag{5.0}$$

e da equação ( 5.0 ),

$$\delta (d\mathbf{E}) = \underline{(B + \underline{B}_{,u}\mathbf{u})}\delta \mathbf{u} \tag{5.0}$$

onde  $\underline{B}_{,u}\mathbf{u}$  é uma matriz 3 x 9.

A equação ( 5.0 ), para a discretização de cada elemento ficará:

$$\delta \phi^{(m)} = \int_V \frac{2}{3} \frac{\bar{S}}{d\bar{E}} \delta \mathbf{u}^T (\underline{B} + \underline{B}_{,u}\mathbf{u})^T \underline{D}\underline{B}\mathbf{u}dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \underline{N}^T \mathbf{f}dS. \tag{5.0}$$

que ainda deverá ser transformada para o sistema de coordenadas globais.

### 3.16.1 TRANSLAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

A partir da Figura 5.35 , com  $(X, Y, Z)$  o vetor base  $\mathbf{e}_i$ ,  $(x, y, z)$ , base do vetor  $\mathbf{G}_i$  onde  $i = 1, 2, 3$ , a transformação do sistema de coordenadas local para o global, será feita a partir da seguinte formulação:

$$\tilde{x} = \underline{\lambda}(\tilde{X} - \tilde{X}_o) \tag{5.0}$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor posição de um ponto arbitrário p referido ao sistema  $(x, y, z)$ ,

$\tilde{\mathbf{X}}$  é o vetor posição do ponto referido ao sistema  $(X, Y, Z)$ ,

$\tilde{\mathbf{X}}_o$  denota a posição do sistema  $(x, y, z)$  com relação ao sistema  $(X, Y, Z)$

e  $\underline{\lambda}$  é a matriz de transformação consistindo dos cosenos diretores:

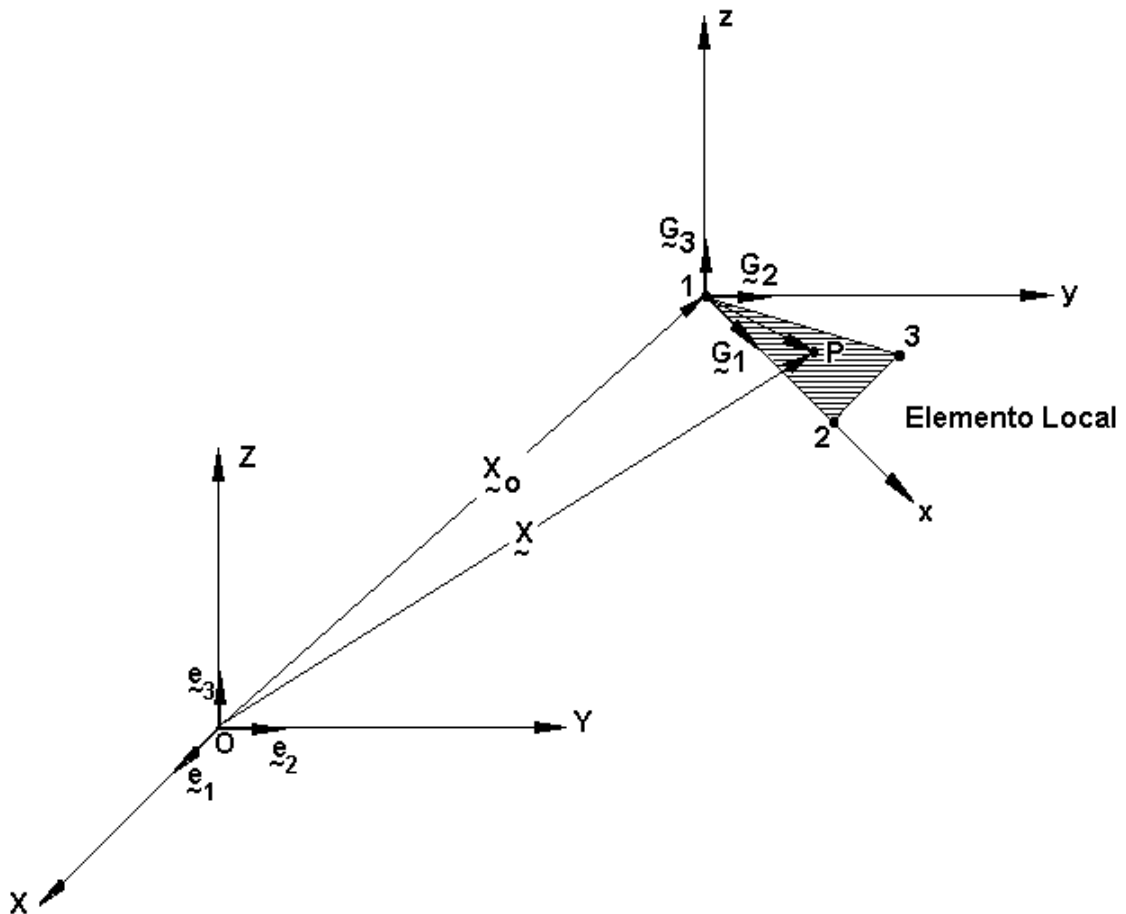


Figura 5.35 Sistemas de Coordenadas Cartesianas Global e Local. Toh (1983)

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} G_1 \cdot e_1 & G_1 \cdot e_2 & G_1 \cdot e_3 \\ \tilde{G}_2 \cdot e_1 & \tilde{G}_2 \cdot e_2 & \tilde{G}_2 \cdot e_3 \\ \tilde{G}_3 \cdot e_1 & \tilde{G}_3 \cdot e_2 & \tilde{G}_3 \cdot e_3 \end{bmatrix} \quad (5.0)$$

$$\{\underline{\mathbf{u}}\} = \underline{\Lambda} \{\mathbf{U}\} \quad (5.0)$$

onde  $\underline{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{U}$  são os vetores de incremento de deslocamento globais e locais, respectivamente. A matriz  $\underline{\Lambda}$  é 9 x 9, e representada por

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \underline{\lambda} & \underline{\lambda} \\ \underline{\lambda} & \underline{\lambda} & \underline{\lambda} \\ \underline{\lambda} & \underline{\lambda} & \underline{\lambda} \end{bmatrix} \quad (5.0)$$

Deste modo, a equação (5.31) é transformada para um sistema global de coordenadas via equação (5.34).

Assim,

$$\psi^{(m)} = \delta \phi^{(m)} = \int_V \frac{2}{3} \frac{\bar{S}}{dE} \delta \mathbf{U}^T \underline{\Lambda}^T \underline{Q}^T \underline{DB\Lambda} \mathbf{U} dV - \int \delta \mathbf{U}^T \underline{\Lambda}^T \underline{N}^T \mathbf{f} dS = 0 \quad (5.0)$$

com  $\underline{Q} = \underline{B} + B_{,u} \underline{u}$ , com o superescrito  $m$  associado ao m-ésimo elemento.

### 3.17 MÉTODO DE SOLUÇÃO

A partir de (5.0) é possível, para todo o domínio composto de elementos finitos, definir um sistema de equações simultâneas não linear.

A solução do sistema não linear é então implementada. O método empregado é o denominado de Newton-Raphson por Dahlquist (1974). Em síntese, sendo uma equação não linear  $\psi^{\mu}(\mathbf{u})=0$ , é conhecida, e  $\mathbf{u}^*$  é uma estimativa da solução e  $\mathbf{u}$ , a solução exata. A seguinte série é, expandida:

$$\psi^{(m)}(\mathbf{u}) = \psi^{(m)}(\mathbf{u}^*) + \left( \frac{d\psi^{(m)}}{d\mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\psi}{d\mathbf{u}^2} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^2 + \dots \quad (5.0)$$

onde  $\psi^{(m)}(\mathbf{u})$  é uma função contínua, diferenciável e  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$ .

No presente caso, os termos de maior ordem negligenciados, e ( 5.0 ) pode ser escrita na forma:

$$\psi^{(m)} \approx \psi^{(m)*} + \left[ \frac{d\psi^{(m)}}{d\mathbf{U}} \right]^* \Delta\mathbf{U} + \dots = 0 \quad (5.0)$$

que no presente pode ser escrita na forma:

$$\sum \left[ \frac{-\partial^2\phi^{(m)}}{\partial u_i^{(m)}\partial u_j^{(m)}} \right]^* \Delta u_j = - \sum \left[ \frac{\partial\phi^{(m)}}{\partial u_i^{(m)}} \right]^*$$

e pode ser mostrado que

$$\frac{\partial^2\phi^{(m)}}{\partial u_i^{(m)}\partial u_j^{(m)}} = P^{(m)} = \frac{2}{3} \int \frac{1}{d\bar{\mathbf{E}}} \left\{ (\bar{\sigma} + H' d\bar{\mathbf{E}}) \left( \mathbf{K} - \frac{2}{3} \frac{bb^T}{d\bar{\mathbf{E}}^2} \right) + \frac{2}{3} H' \frac{bb^T}{d\bar{\mathbf{E}}} \right\} t dA$$

onde:

$$\mathbf{b} = QDd\mathbf{E}, \quad \mathbf{K} = QDQ^T,$$

$$\frac{\partial\phi^{(m)}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} = \mathbf{H}^{(m)} - \mathbf{F}^{(m)}$$

com que

$$\mathbf{H}^{(m)} = \frac{2}{3} \int \frac{1}{d\bar{\mathbf{E}}} (\bar{\sigma} + H' d\bar{\mathbf{E}}) \mathbf{b} t dA$$

$$\mathbf{F}^{(m)} = \int N^T \hat{F} dA$$

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\mathbf{E}}}$$

e  $t$ , a espessura da chapa.

A equação ( 5.0) ainda pode ser escrita na forma:

$$\sum_{m=1}^N [\psi^{(m)}(\mathbf{u}^*)] + \sum_{m=1}^N \left[ \frac{d\psi^{(m)}}{d\mathbf{u}} \right]^* \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.0)$$

ou ainda, para um elemento,:

$$\mathbf{P}^* \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{H}^* \quad (5.0)$$

onde  $\mathbf{P}^*$  é a matriz de rigidez total,  $\mathbf{F} - \mathbf{H}^*$  o vetor de carga,  $\Delta \mathbf{u}$  as perturbações e  $N$  é o número total de elementos finitos..

A solução do problema físico é obtida pela introdução das apropriadas condições de contorno em ( 5.0 ). Para um incremento de deslocamento prescrito, as correspondentes perturbações deverão se anular e, para uma condição de contorno prescrita para forças de tração, o valor das forças de tração será fornecido através do vetor  $\mathbf{F}$ . A obtenção da força no punção, é obtida de forma indireta, fazendo-se a totalização de forças devidas aos deslocamentos verticais ( $\Delta \mathbf{u}$ ) – deslocamentos x matriz de rigidez) - com as componentes verticais das forças no plano da chapa  $\mathbf{H}$ , uma vez que a teoria da membrana não admite componentes perpendiculares ao plano da chapa (membrana). O procedimento de solução é o seguinte:

- Assumir uma estimativa inicial  $\mathbf{u}^1$  e calcular  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{H}$ , e  $\mathbf{F}$ , correspondente a esta estimativa.
- Resolver a equação ( 5.0 ) e obter  $\Delta \mathbf{u}$ .
- Obter uma nova estimativa inicial:  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^1 + \Delta \mathbf{u}$

Este processo é repetido até que a convergência seja atingida. A convergência é verificada pela norma fracional. Definindo,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 + \dots}$$

é a norma das perturbações e

$$\|\Delta \mathbf{u}\| = \sqrt{(\Delta \mathbf{u}_1)^2 + (\Delta \mathbf{u}_2)^2 + \dots}$$

é a norma das perturbações, calculadas, a partir das estimativas e correspondentes perturbações para os nós.



A norma fracional é definida pela razão  $\|\Delta \mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\|$  e quando após subseqüentes interações, este valor alcança uma magnitude menor que um valor predeterminado, ( $10^{-5}$ , por exemplo) o processo iterativo pára e a solução é obtida.

### 3.18 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A aplicação do presente método de elementos finitos, requer uma solução para a aplicação das condições de contorno, como já citado na seção 6.

#### 3.18.1 CONDIÇÕES DE CONTATO

As posições dos elementos materiais do punção e da chapa na região de contato não são independentes, mas se relacionam através da expressão matemática que exprime as condições de contato na superfície da cabeça do punção – Figura 5.36.

Esta expressão é:

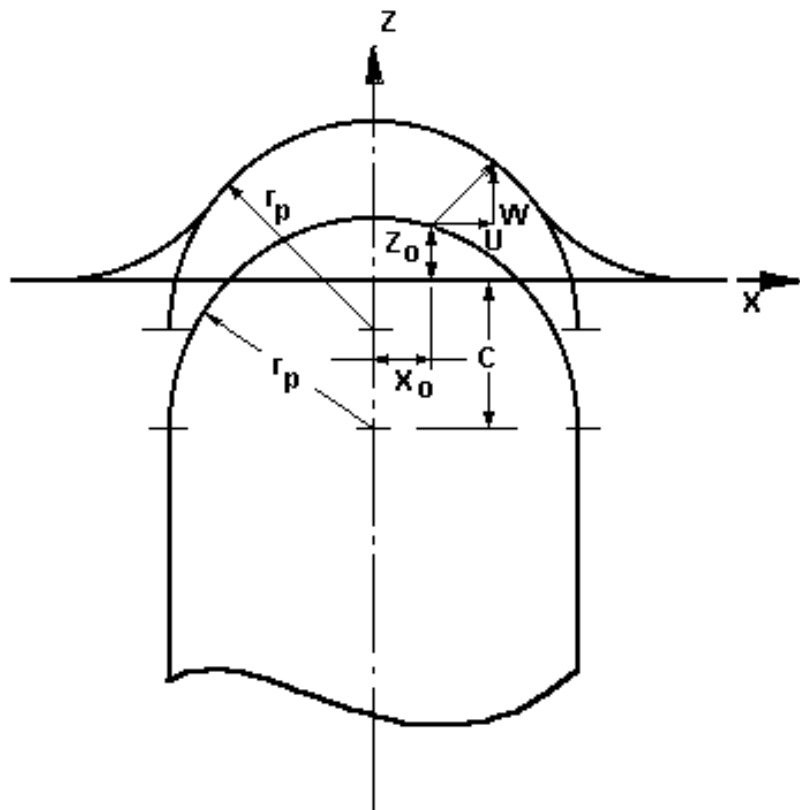


Figura 5.36 Vista Esquemática dos Requisitos Geométricos para o Nó em Contato com o Punção. Toh (1983)

$$(r_o + v)^2 + (c + z_o + w)^2 = r_p^2 \quad (5.0)$$

onde  $r_o$ ,  $z_o$  são as posições radial e axial do elemento na configuração atual;  $v$ ,  $w$  são os incrementos de deslocamento radial e axial, e  $c$  é um parâmetro relacionado com a altura do punção  $h$  dado pela expressão:

$$c = r_p - h$$

Com o avanço do punção, a porção da chapa em contato com o punção aumenta, e, conseqüentemente, muda a região de contato. Sem considerar o arredondamento de canto da matriz, a técnica consiste em assumir a posição do contorno na próxima configuração, para determinar quais nós estão em contato com o punção. Obtém-se a convergência da solução para esta situação e verifica-se se isto é verdadeiro. Ou seja, a abordagem é do tipo tentativa e erro.

### 3.18.2 CONDIÇÕES DE ATRITO NA INTERFACE CHAPA-PUNÇÃO

É importante o efeito do atrito na interface punção-chapa, principalmente, na distribuição de deformações nas partes deformadas. A diminuição do atrito nesta interface diminuirá a energia requerida para o processo de conformação, e permitirá que maior deformação seja levada a cabo com a mesma configuração de equipamento.

A condição de atrito na interface chapa-punção, neste estudo é caracterizada pela conhecida Lei de Coulomb:

$$\tau = \mu p \quad (5.0)$$

onde  $\tau$  é a magnitude da tensão de atrito ao longo da interface, e  $p$  é a pressão interfacial local. Considerando que a tensão de atrito atua na direção oposta ao deslocamento relativo entre a ferramenta e a chapa metálica, então a equação (5.0) pode ser expressa na forma:

$$\tau = -\mu p \frac{\mathbf{u}_{rel}}{|\mathbf{u}_{rel}|} \quad (5.0)$$

onde  $\mathbf{u}_{rel}/|\mathbf{u}_{rel}|$  é o vetor unitário na direção do deslocamento relativo,  $\mathbf{u}_{rel}$ . O coeficiente de atrito, é uma constante a ser determinada por testes onde as forças tangenciais e normais são medidas na superfície da matriz.



## 7. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL – O PROGRAMA SHEET

### 3.19 FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA

Desenvolvido por Toh (1983), O SHEET é um programa destinado a reproduzir importantes ensaios de conformação de chapas metálicas, que visam estabelecer os limites da conformabilidade de materiais diversos nas situações mais comuns do processo de estampagem (estiramento e estampagem profunda).

A partir de uma formulação de elementos finitos voltada para materiais rígido-plásticos – capítulo 6 - a mecânica da deformação das chapas metálicas pode ser estudada através da opção por um dos seguintes problemas:

**Opção 1 – Estiramento de tira retangular** (caso não axi-simétrico): consiste em produzir a deformação de uma chapa através da aplicação de uma força normal à sua superfície. A deformação é causada pelo deslocamento de um punção hemisférico perpendicularmente à superfície da chapa, de forma retangular, que é impedida de se deslocar nas extremidades. (Figura 6.37a)

**Opção 2 – Estiramento de chapa circular** (caso axi-simétrico): uma chapa de forma circular é impedida de se deslocar em toda a extensão do seu perímetro e submetida à deformação devida a força aplicada por um punção hemisférico que se desloca perpendicularmente (direção  $z$ ) em relação à superfície da chapa (plano  $x-y$ ).

**Opção 3 – Estiramento de chapa semi-circular** (caso não axi-simétrico): similar ao caso 2, porém a chapa circular agora tem recortes de forma circular (*cut-off*) onde não há restrição ao deslocamento.

**Opção 4 – Estampagem profunda de copo cilíndrico** (caso axi-simétrico): a chapa de forma circular tem restrição parcial ao deslocamento nas bordas, (flange) que não podem se deslocar na mesma direção que o punção hemisférico ( $z$ ). A restrição imposta pelo prensa-chapas não impede que a chapa, na flange, se desloque no plano  $x-y$ . ( Figura 6.37b)

**Opção 5 – Estampagem profunda de copo quadrado.**(caso não axi-simétrico): similar ao caso 4, porém o punção agora é de seção quadrada e fundo plano.

Os objetivos deste estudo demandaram a utilização mais intensa das opções de números 1 a 3, tendo em vista a importância destes casos para a análise de conformabilidade das chapas metálicas.

A implementação da taxa de sensibilidade teve como objetivo estudar os efeitos da velocidade no processo de conformação. Considerando a proposta de Toh, C. H. (1990), para incorporação da taxa de sensibilidade, a formulação rígido-plástica baseada na forma variacional (v. seção 6) é considerada válida para materiais sensíveis à taxa de sensibilidade. Deste modo, para inserção da taxa no programa foram necessários ajustes na rotina de cálculo das tensões e deformações baseada na lei constitutiva rígido-plástica. Estes ajustes foram feitos de maneira a

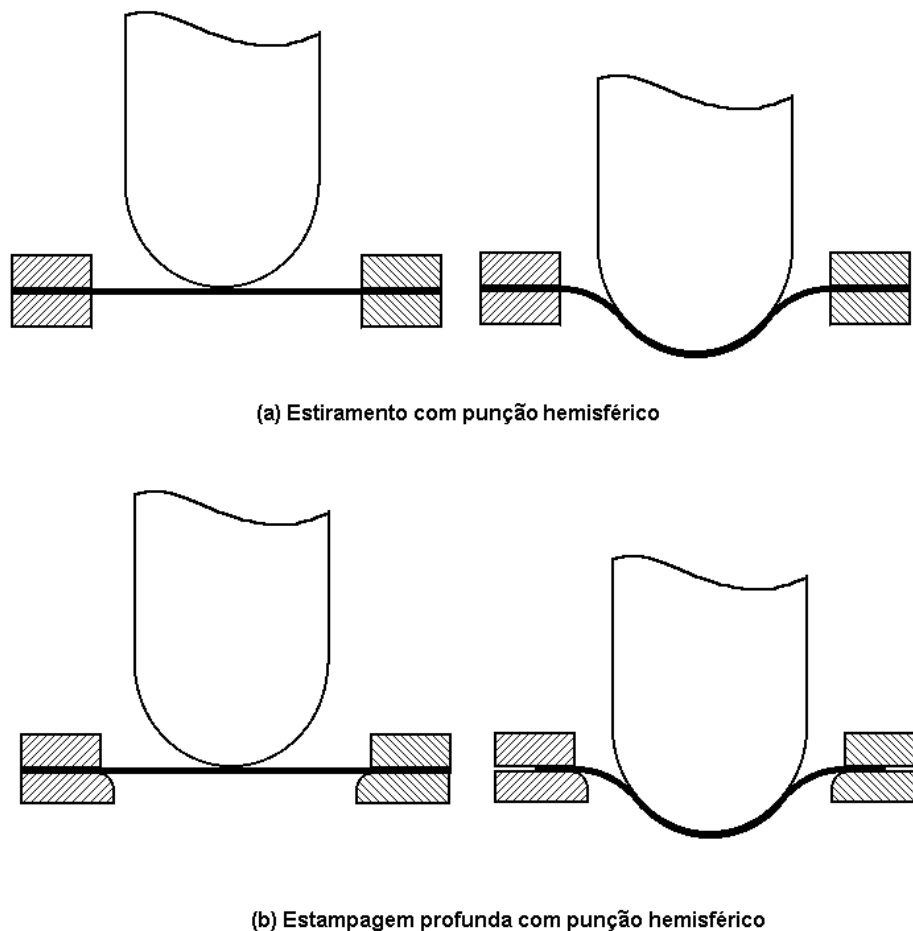


Figura 6.37 Vista esquemática do (a) Estiramento e (b) Estampagem profunda

permitir que o mesmo programa funcione com casos rígido-plásticos como aqueles casos em que a taxa é diferente de zero.

### 3.20 ESTRUTURA DO PROGRAMA

O código do programa é dividido em subrotinas, como listadas a seguir:

**Principal (SHEET):** estabelece um *vetor* para a distribuição e manuseio dos dados de entrada. Abre o arquivo de entrada de dados e cria o arquivo de saída. Verifica o tipo de problema a ser estudado.

**Stamp:** lê os dados de entrada e aloca os dados no vetor de armazenamento de dados. Lê os parâmetros de material.

**Datain:** faz a leitura da localização relativa do nó na malha, coordenadas nodais, estimativas iniciais de deslocamento (deformação) e relações de conectividade.

**Solve:** estabelece os procedimentos de solução para cada um dos casos (ordena a seqüência de execução de cada uma das subrotinas envolvidas na solução do problema específico). Controla o avanço do punção em todas as etapas previstas para o processamento e controla a interferência (penetração) do punção na chapa através da redução do avanço do punção na etapa em que isto ocorrer.

**Asembl:** faz a montagem das matrizes de cada elemento segundo a equação ( 5.0 ) e monta o sistema de equações.

**Tranfm:** transforma as coordenadas locais de cada nó do elemento em coordenadas globais. ( capítulo 6)

**Strain:** a partir da equação constitutiva rígido-plástica, faz o cálculo das tensões e deformações para cada elemento.

**Boucon:** incorpora as condições de contorno relativas às forças de tração e de geometria.

**Geombc:** faz a modificação da matriz de rigidez e do vetor de carga para as condições prescritas de deslocamento e grau de liberdade.

**Cirblk:** introduz as condições de contorno específicas para o caso da chapa circular .

**Bansol:** faz a triangularização da matriz de rigidez global pelo método de eliminação de Gauss.

**Thom:** realiza os procedimentos iterativos de solução do sistema de equações pelo método de Newton Raphson. O controle do processo é feito por um coeficiente de aceleração e a condição de convergência é verificada pela norma fracional. (seção 6). Os resultados de cada interação são impressos no arquivo de saída.

**Raph:** solução do sistema de equações para deslocamentos correspondentes aos vetores de carga.

**Datout:** imprime os resultados obtidos para os cálculos realizados para cada etapa (avanço do punção).

**Force:** calcula as forças nodais e carga total no punção.

**Update:** atualiza as geometrias e condições de contorno.

**Squa:** atualiza as condições de contorno para o punção de seção quadrada.

**Deep:** controla a movimentação dos nós localizados na flange no processo de estampagem profunda.

**Dieras:** atualiza as condições de contorno nos cantos da matriz.

**Squadi:** atualiza as condições de contorno para os cantos da matriz para o caso da estampagem profunda do copo de seção quadrada.

Uma facilidade oferecida pelo programa é a geração dos dados relativos aos nós, automaticamente, através da informação dos dados nodais adequados.

### 3.21 FLUXOGRAMA

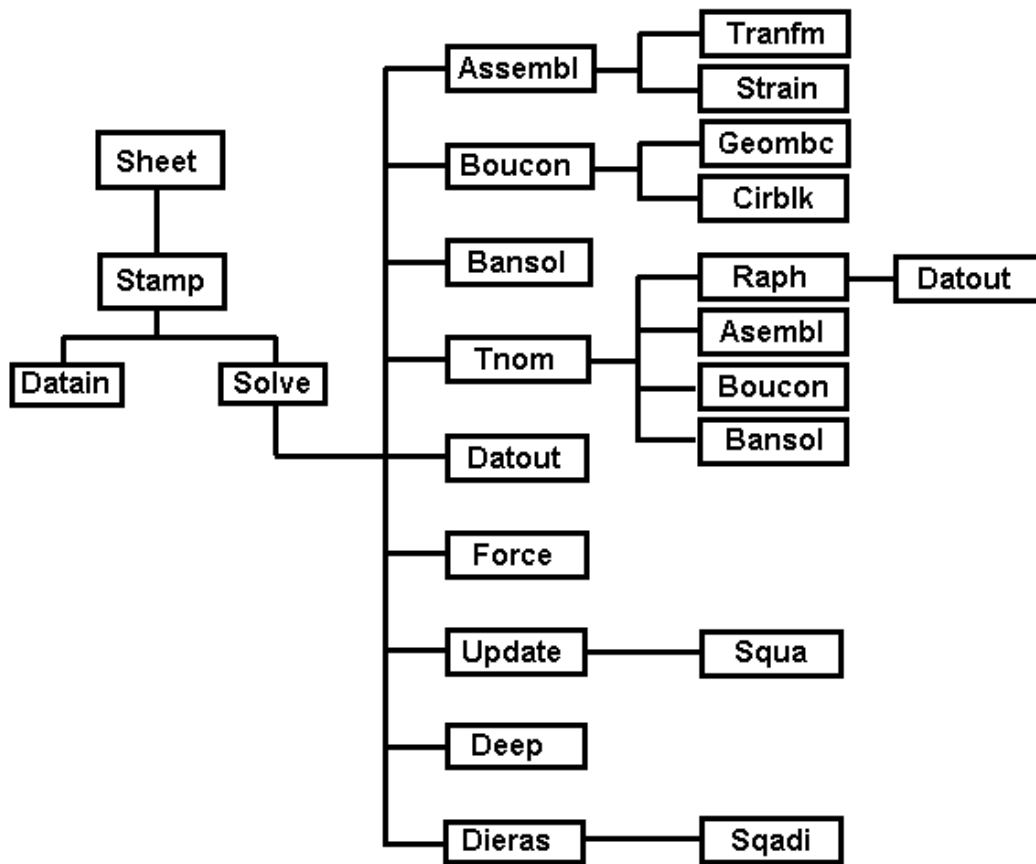


Figura 6.38 Fluxograma do programa Sheet. Toh (1983)



## 8. RESULTADOS NUMÉRICOS DA SOLUÇÃO RÍGIDO-PLÁSTICA

A forma escolhida para verificar a precisão dos resultados dos ensaios aqui conduzidos, foi a comparação com os resultados já publicados por diversos autores. Fato a ser citado, é a escassez de resultados diversos, haja vista a quantidade expressiva de referências ligadas a uma mesma série de experimentos. Dentre as principais referências para este estudo, encontra-se Toh (1983), o qual apresentou uma série de ensaios de casos axi-simétricos e não axi-simétricos para estiramento e estampagem profunda. As simulações conduzidas por Toh foram feitas com o mesmo programa empregado neste estudo, o SHEET. Em cada um dos casos, foram conduzidas simulações considerando a presença e ausência de atrito.

Assim, o objetivo neste capítulo, será inicialmente validar os experimentos realizados por Toh (1983), com a formulação rígido plástica. Entretanto, nem todos os parâmetros empregados por Toh na realização destes ensaios estão disponíveis. Ilustra-se aqui a importância de verificar a influência da variação de diversos parâmetros de controle do processo e do programa, nos resultados, tais como, tamanho e uniformidade da malha de elementos finitos, variação de tamanho do avanço do punção, para cada etapa do processamento, e na geometria, a variação de raios de arredondamento.

Na apresentação dos resultados, os casos estudados foram divididos em axisimétricos e não axisimétricos

### 3.22 CASOS AXISIMÉTRICOS

Entre os casos de conformação de chapas ditos axi-simétricos, estão o estiramento e estampagem profunda de chapas com um punção hemisférico. Estes ensaios, estão entre os mais úteis na avaliação das qualidades inerentes à boa estampabilidade das chapas metálicas.

O estiramento com punção hemisférico, por exemplo, fornece uma medida da ductilidade do material, que é dada pela profundidade da chapa deformada, quando se rompe.

A característica *estampabilidade* de uma chapa metálica é medida pela máxima redução de diâmetro que uma chapa metálica pode sofrer em uma única operação de estampagem, para transformá-la em uma peça na forma de copo, sem falhas (denominada de relação limite de estampabilidade).

A diferença fundamental entre os processos de estiramento e de estampagem está na relação de contato entre a chapa, punção e matriz. No estiramento, não há movimentação relativa entre a chapa e a matriz, e a região da chapa não suportada pela matriz, que sofre a deformação, é dividida em uma região livre e outra de contato com o punção. Os limites destas duas regiões não suportadas varia em extensão durante o processo de estampagem e é a região de interesse neste estudo.

### 3.22.1 ESTIRAMENTO DE UMA CHAPA CIRCULAR

**Parâmetros de Material:** os parâmetros básicos (essenciais) materiais empregados são os seguintes:

Material: *Liga de Alumínio 2036-T4*

Lei constitutiva:  $\bar{\sigma} = 86000(\bar{\epsilon})^{0,222} \text{ psi}$ , Toh, C. H. (1983);

Tensão de Escoamento:  $190,3 \text{ MPa} = 27600 \text{ psi}$ , Hecker, S. S. (1975);

Valor de  $R$  (coef. de anisotropia de Hill):  $0,685$ , Toh, C. H. (1983)

Espessura do material:  $1,27 \text{ mm} = 0,05''$  ;

Raio do punção:  $19,05 \text{ mm} = 0,75''$ ;

Raio do Vazado da Matriz:  $20,32 \text{ mm} = 0,80''$

Coefficiente de atrito:  $\mu = 0 \text{ e } 0,2$

**Parâmetros do Processo:** o processo de estiramento pode ser visto esquematicamente na Figura 7.39. Para a solução, foram usadas duas malhas

distintas: uma com 16 elementos e outra com 144 elementos (Anexo A), sempre triangulares, com coeficiente de aceleração de 0,2, no processo de convergência (Newton-Raphson). O problema converge rapidamente –em média, são usadas em torno de 10 interações - com deslocamentos iniciais arbitrados adequados. A obtenção de deslocamentos iniciais arbitrados pode ser facilitada, fazendo-se uso de um esquema onde a posição dos nós para a primeira parte da deformação é representada no primeiro estágio da deformação.

Algumas considerações importantes sobre o funcionamento do programa: dada a natureza não linear do problema, é importante a escolha adequada de valores iniciais de deslocamento, visando uma convergência mais rápida. Verificou-se para este caso, que um incremento de avanço do punção equivalente a  $1/20$  do raio do punção e coeficiente de aceleração de 0,2 são ideais para se chegar aos resultados desejados. Pode-se optar por dois caminhos: avanços maiores do punção para cada etapa, ou avanços menores, com maior número de etapas de avanço do punção. Os dois caminhos, no entanto, podem trazer dificuldades.

A tentativa de abreviar o processo (avanços maiores de punção) pode ser inadequada, e além de fornecer menos informações a respeito do processo de deformação, dificulta a convergência no processo iterativo. O programa pode ser obrigado, freqüentemente, a fazer correções sucessivas no valor do avanço (diminuí-lo), até que as condições de contorno de contato (interferência chapa-punção) sejam respeitadas (v. capítulo 6). Estas correções trazem dificuldades na predição das profundidades em que o punção se encontrará em cada etapa.

Para valores de avanço total maiores, o processo pode ser eventualmente até interrompido, por ultrapassar o número máximo de interações prescritas, principalmente quando a área de contato entre punção e chapa vai crescendo. Para estas situações, aplica-se um *desacelerador de avanço*. O desacelerador é um recurso, pelo qual, valor do avanço inicial (estabelecido no arquivo de entrada), vai diminuindo gradativamente o avanço do punção, na medida em que este alcança maiores profundidades. É, basicamente, um coeficiente ( $<1$ ) que multiplica o tamanho da parte (avanço do punção) prevista dentro do programa. Neste caso, o valor deste coeficiente é 0,9 e ele passa a atuar a partir da décima etapa. É também importante notar que o recurso do desacelerador não tem relação com o

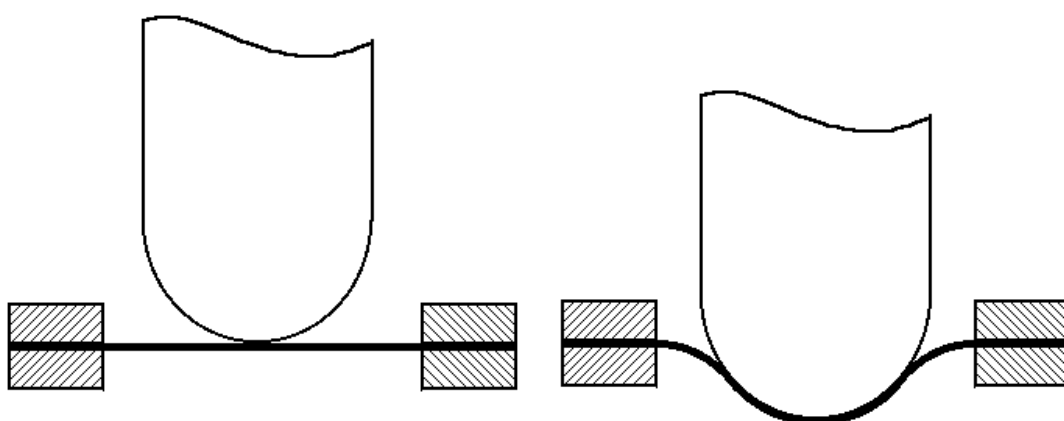
recuo que o código faz nos valores de avanço do punção, quando não respeitada a condição de contato chapa-punção. Para atingir a condição de contorno relativa ao contato, o programa funciona à base de tentativa e erro.

O fator que mais influi no tempo de processamento é o tamanho da malha. Para os modernos microprocessadores, este programa é executado rapidamente, não levando muitas vezes, mais de um minuto de tempo de processamento, como nos casos em estudo.

A opção de usar avanços bem pequenos de punção, poderia ser considerada, para um melhor acompanhamento do processo de deformação. Neste caso, o programa encontrará no *desacelerador de avanço* do punção, um importante obstáculo. O processo pode demorar ou simplesmente não alcançar a profundidade final desejada.

Com as observações acima citadas, percebe-se que muitas vezes são necessárias várias tentativas até se obter os resultados desejados, o que é uma característica dos problemas não lineares.

**Resultados:** foram dispostos gráficos que permitissem evidenciar de uma forma clara os aspectos previstos no capítulo 5 deste trabalho, sobre a mecânica da deformação das chapas. Os resultados estão dispostos da seguinte forma: no gráfico da Figura 7.40 é possível observar a variação na deformação efetiva da



(a) Estiramento com punção hemisférico

Figura 7.39 Vista esquemática do processo de estiramento com punção hemisférico

espessura ao longo do raio da chapa em quatro diferentes profundidades, sem atrito. Também é feita uma comparação com os dados obtidos por Toh (1983). Na Figura 7.41, a evolução do valor da força do punção, para condição sem atrito e comparação com os resultados de Toh(1983). A Figura 7.42 e a Figura 7.43 mostram a situação de deformação efetiva para distribuição de espessuras e carga no punção, respectivamente, considerando o atrito. A Figura 7.44 mostra a evolução da deformação total no plano da chapa, com o avanço, por meio de linhas de iso deformações, para o caso sem atrito. A Figura 7.46 mostra a comparação entre as deformações totais para diferentes avanços do punção, com e sem atrito. Para os resultados das figuras de 7.2 a 7.5, foram usadas as malhas de 144 elementos (12 elementos em linha). Nos demais, as malhas de 16 elementos (7 elementos em linha). Todas as malhas usam um setor de 10° da chapa.

**Conclusões:** na solução sem atrito, é notável a concentração de deformações de espessura (redução) no pólo – origem do sistema de referência. Como já era esperado, o coeficiente de atrito altera a distribuição de deformações na espessura. Pode ser visto ainda na (Figura 7.42), que na comparação com resultados experimentais, a variação nas condições de atrito produz resultados um pouco afastados dos previstos na simulação, conforme nota Kim et al. (1978). À medida que o punção avança, há um deslocamento do pico de deformações na direção das bordas do disco (restrição). O valor do pico também se reduz, na comparação entre os casos com (Figura 7.40) e sem atrito (Figura 7.42). Se o efeito do atrito é benéfico, reduzindo o valor de pico das deformações de espessura, em função da distribuição das deformações para outras áreas (Figura 7.44 e Figura 7.46), além do pólo, a carga no punção cresce significativamente (Figura 7.41 e Figura 7.43). Na comparação entre os resultados atuais e os de Toh (1983), - um dos objetivos desta fase de experimentos é a aferição dos resultados - é verificada uma semelhança que permite concluir que os resultados são confiáveis.

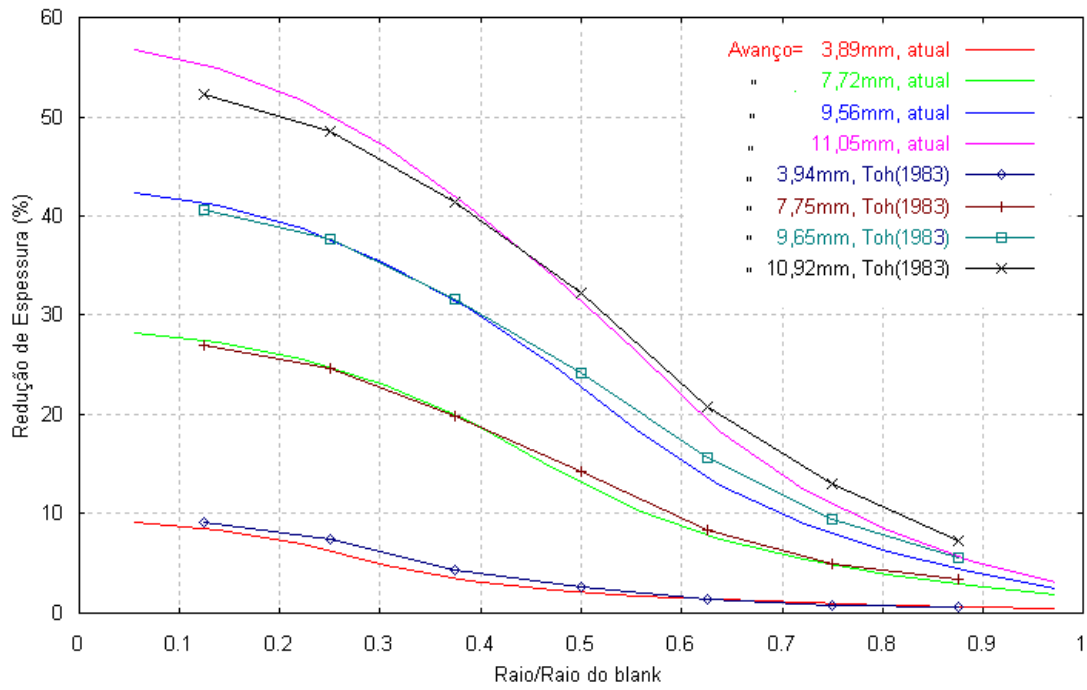


Figura 7.40 Comparação entre os resultados atuais e de Toh (1983), para a distribuição de deformações efetivas de espessura para  $\mu=0$ .

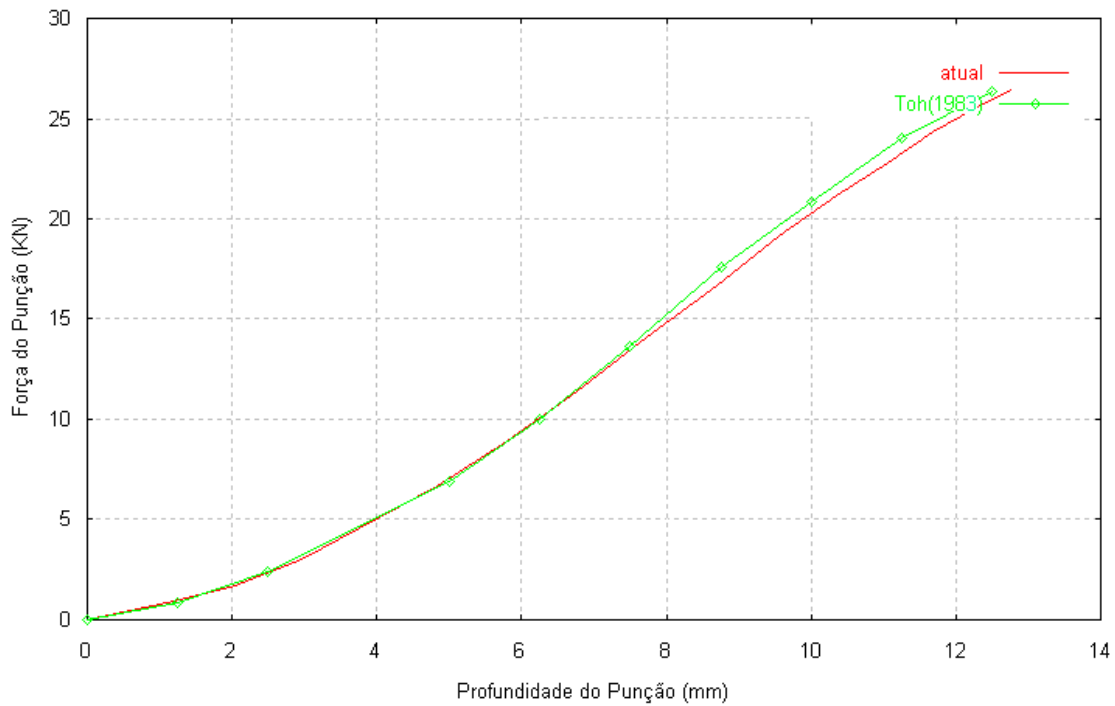


Figura 7.41 Comparação entre os resultados atuais e os de Toh (1983) para a força no punção para  $\mu = 0$

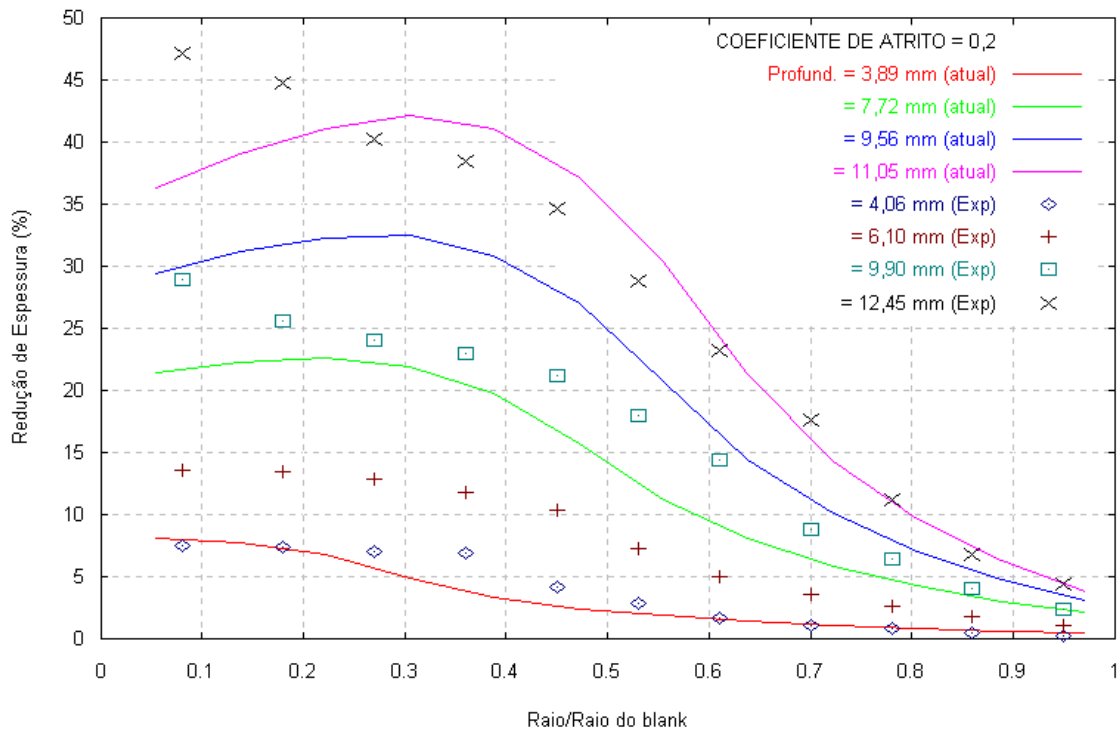


Figura 7.42 Comparação entre os resultados atuais e experimentais Kim et al.(1978) para a distribuição de deformações efetivas de espessura para  $\mu=0,2$ .

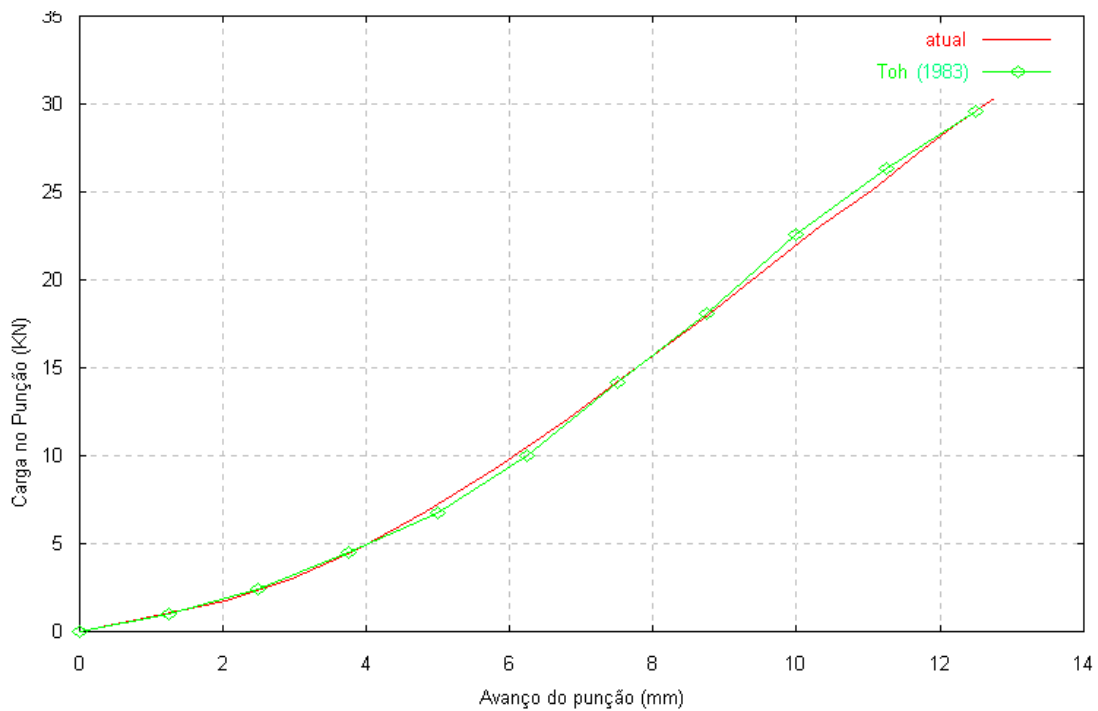


Figura 7.43 Comparação entre os resultados atuais e os de Toh (1983) para a carga no punção para  $\mu = 0,2$ .

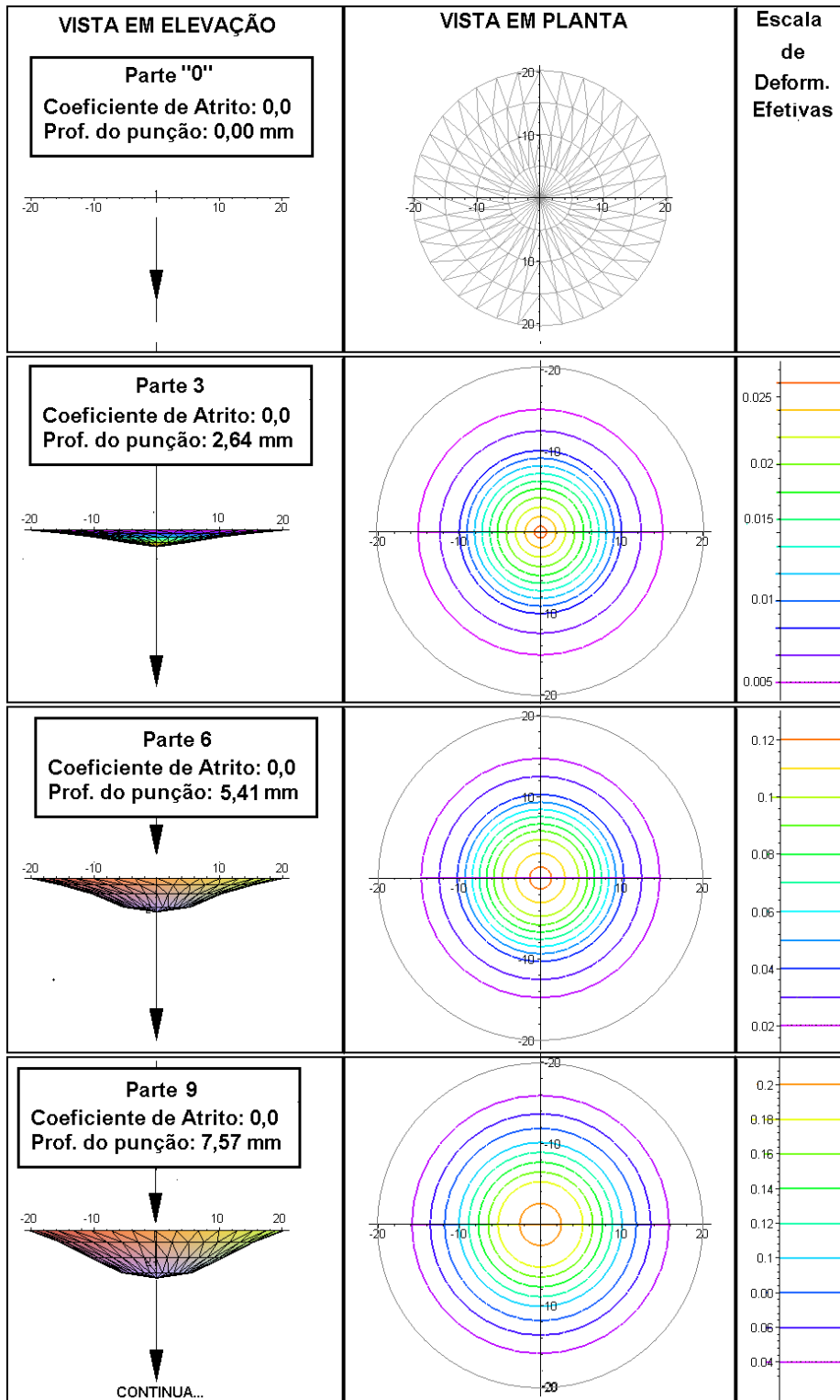


Figura 7.44 Evolução da deformação total com o avanço do punção para  $\mu=0$



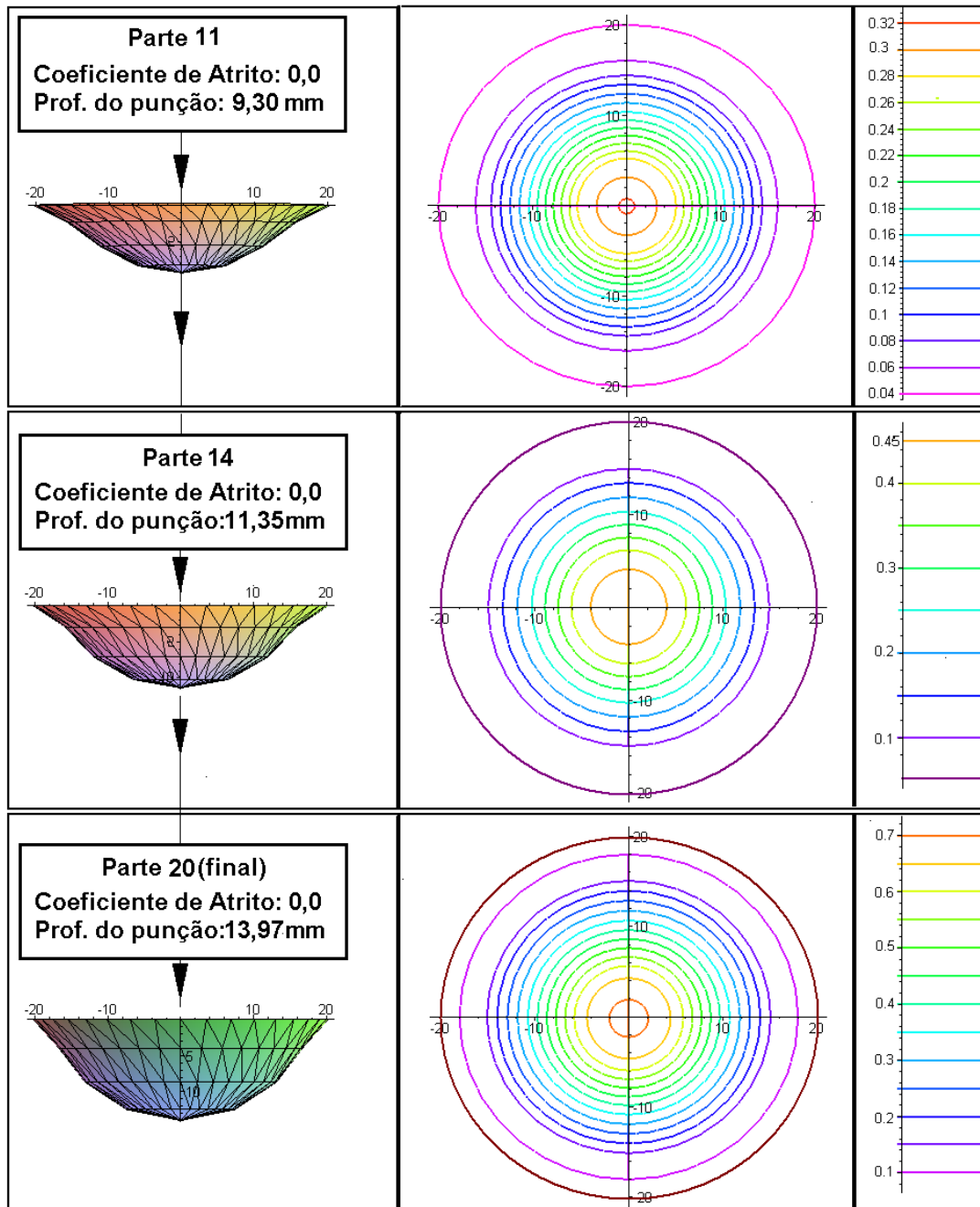


Figura 7.45 Continuação – Isodeformações, para  $\mu=0$

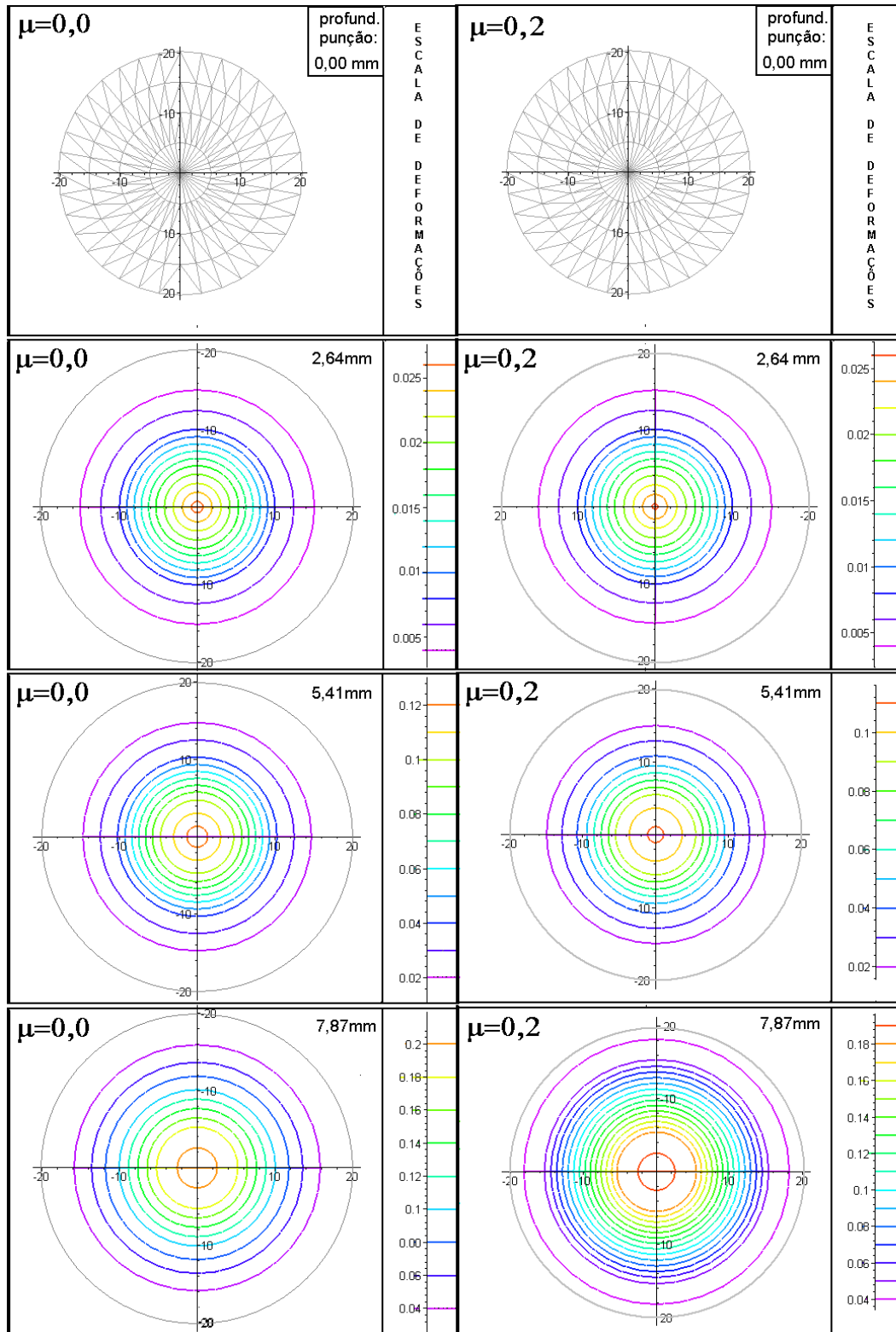


Figura 7.46 Comparação entre as iso deformações para os casos  $\mu=0$  e  $\mu=0,2$ .

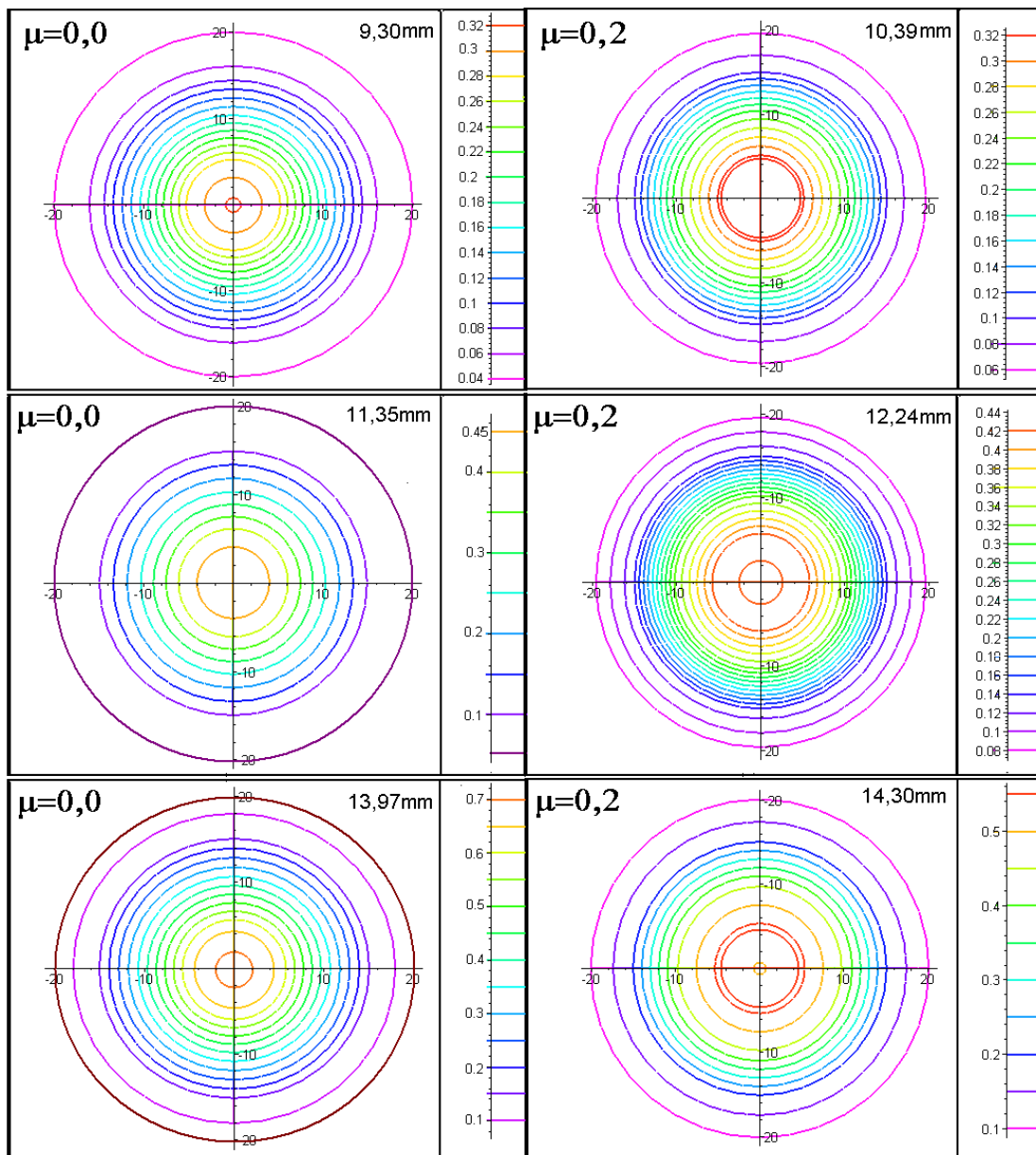


Figura 7.47 Continuação do quadro comparativo de iso deformações -  $\mu=0$  e  $\mu=0,2$

### 3.22.2 CASOS ADICIONAIS DE ESTIRAMENTO DE CHAPA CIRCULAR

A inclusão dos casos a seguir mostra que os resultados anteriores são consistentes e podem ser considerados como parâmetros de comportamento para as chapas metálicas, no estiramento, para diferentes condições de atrito.

**Parâmetros de Material:**

Material:  $\alpha$ -bronze

Lei Constitutiva:  $\bar{\sigma} = 507630\bar{\epsilon}^{-0,54}$  psi ; Toh (1988)

Valor de  $R$  (coef. de anisotropia de Hill): 0,7;

Espessura do material: 0,94 mm = 0,037”;

Raio do punção: 19,05 mm = 0,75”;

Raio do vazado da matriz: 20,32 mm = 0,80”

Coefficiente de atrito:  $\mu=0$  e 0,2

**Parâmetros do Processo:** foi usada a mesma malha do caso da liga de alumínio. Os parâmetros avanço inicial e coeficiente de aceleração (0,2) também foram iguais. O processo convergiu sem dificuldades em no máximo 10 interações, com um avanço final similar.

**Resultados:** mostrados em três gráficos – Figura 7.48 para a distribuição de deformações efetivas de espessura, sem atrito, Figura 7.49 para a distribuições de deformações efetivas de espessura com atrito ( $\mu=0,2$ ) e Figura 7.50 para a carga no punção. Os resultados obtidos na simulação por elementos finitos são compatíveis com os esperados para as condições previstas na teoria (item 5).

**Parâmetros de Material:**

Material: aço HSLA

Lei Constitutiva:  $\bar{\sigma} = 179846,8\bar{\epsilon}^{-0,123}$ , psi ; Toh (1988)

Valor de  $R$  (coef. de anisotropia de Hill): 0,94;

Espessura do material: 2,083 mm = 0,082”

Raio do punção: 19,05 mm = 0,75”

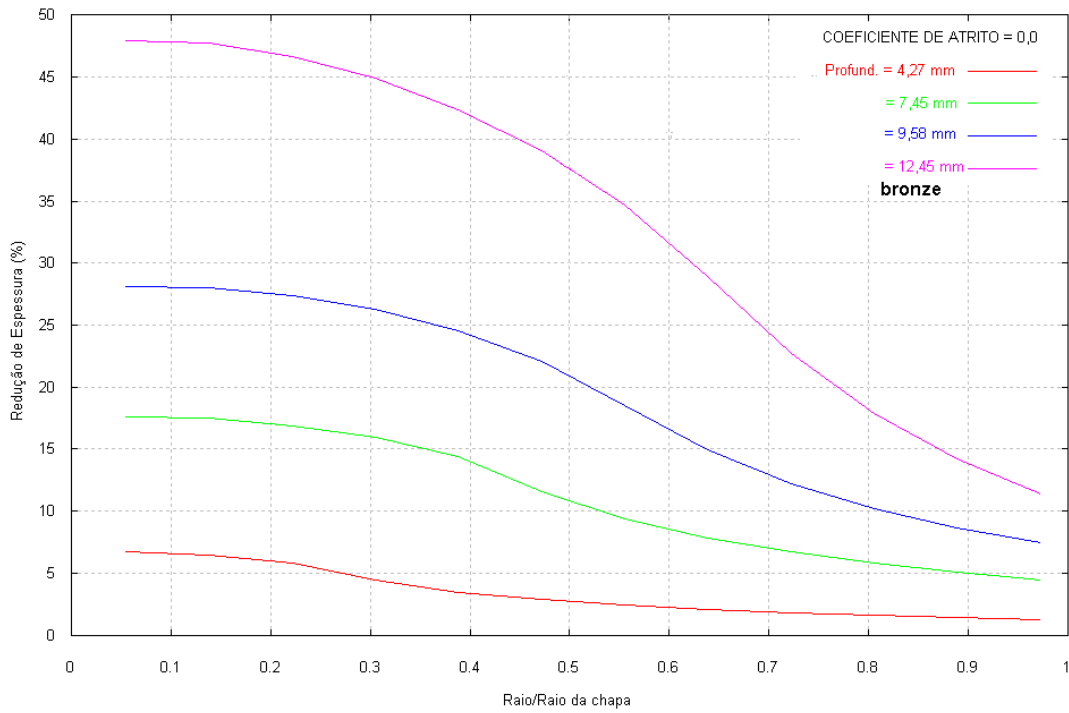


Figura 7.48 Distribuição de Deformações de Espessuras para o  $\alpha$ -Bronze, na condição sem atrito.

Raio do vazado da matriz:  $20,32 \text{ mm} = 0,80''$

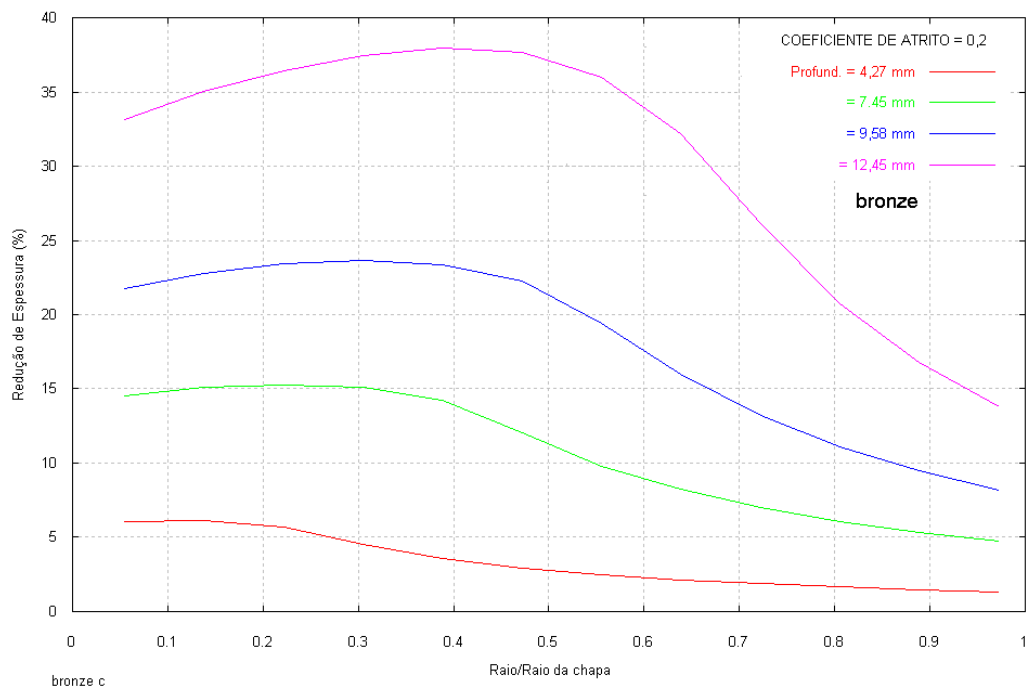


Figura 7.49 Distribuição de Deformações de Espessuras para a condição com atrito  $\mu=0,2$ .

Coeficiente de atrito:  $\mu = 0$  e  $0,2$

**Parâmetros de Processo:** foi mantida a mesma malha, bem como coeficiente de aceleração e estimativas iniciais de avanço do punção, já empregadas no caso anterior.

**Resultados:** reproduzidos em três gráficos, as distribuições de deformações efetivas de espessura, sem atrito na Figura 7.51, com atrito na Figura 7.52 e a evolução da carga no punção, na Figura 7.53.

**Parâmetros de Material:**

Material: *aço doce (mild steel)*

Lei Constitutiva:  $\bar{\sigma} = 71891,89\bar{\epsilon}^{-0,208}$  psi; Yang, D. Y. et al (1990)

Valor de  $R$  (coeficiente de anisotropia de Hill):  $1,398$

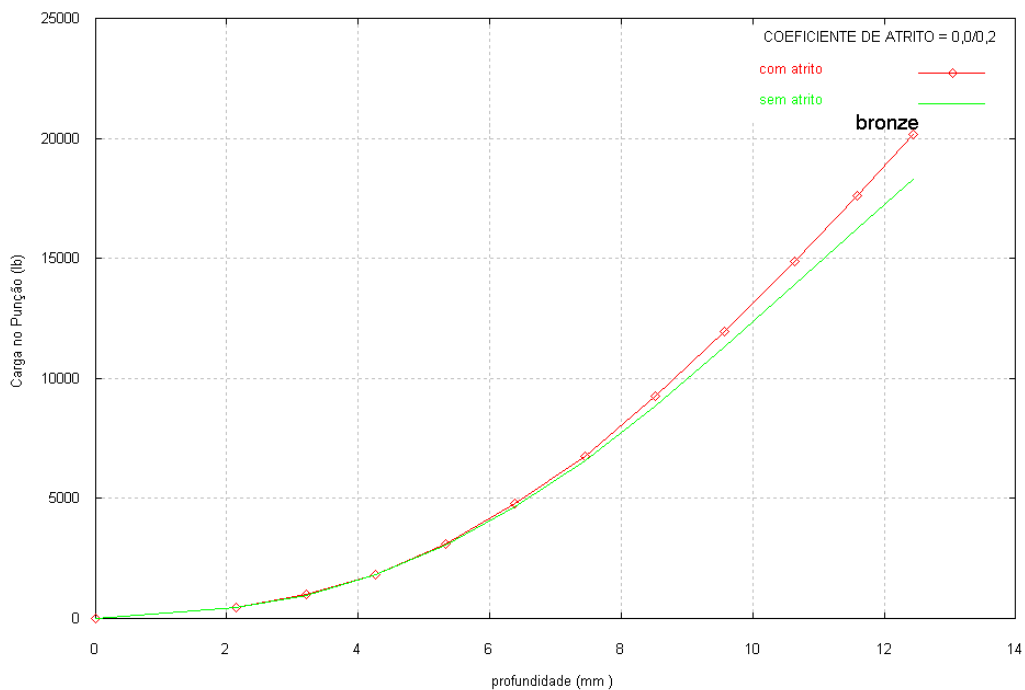


Figura 7.50 Carga no punção para as condições com e sem atrito para o  $\alpha$ -Bronze

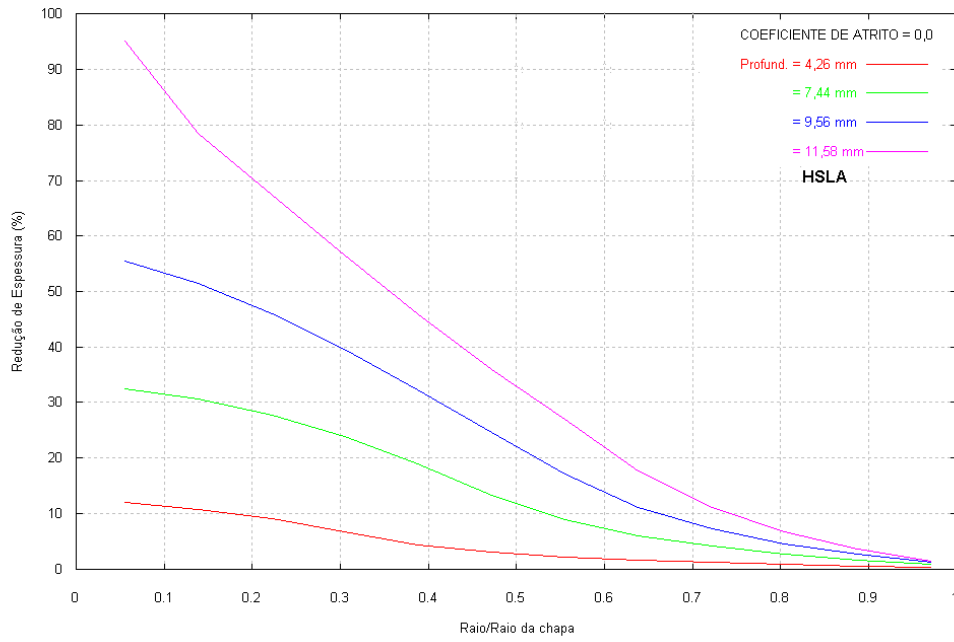


Figura 7.51 Distribuição de deformações de espessura, para o aço HSLA, sem atrito.

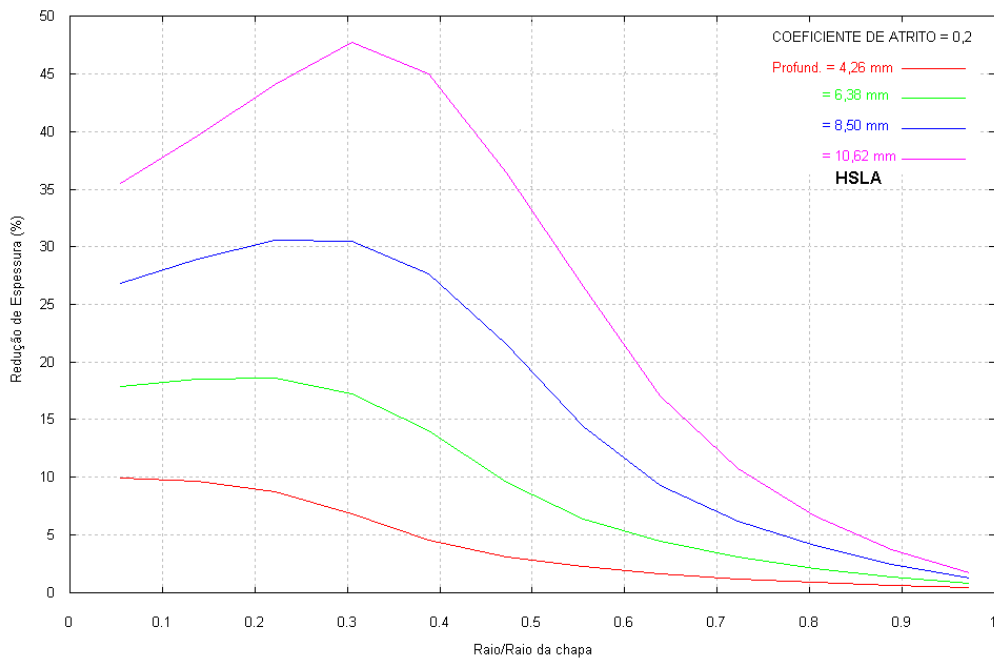


Figura 7.52 Distribuição de deformações de espessura para o aço HSLA, com coeficiente de atrito  $\mu=0,2$ .

Espessura do material:  $0,785 \text{ mm} = 0,031''$

Raio do punção:  $19,05 \text{ mm} = 0,75''$

Raio do vazado da matriz:  $20,32 \text{ mm} = 0,80''$

Coefficiente de atrito:  $\mu = 0$  e  $0,2$ .

**Parâmetros do processo:** mantém-se as condições já utilizadas nos demais casos axisimétricos.

**Resultados:** a Figura 7.54 apresenta os resultados de distribuição de deformações de espessura para a condição sem atrito, a Figura 7.55 apresenta as distribuições de deformações de espessura para a condição com atrito ( $\mu=0,2$ ) e a Figura 7.56 mostra a evolução da carga no punção.

**Conclusões:** para os três materiais, os resultados repetem o comportamento previsto na teoria e observado no primeiro experimento. As equações constitutivas dos três materiais analisados apresentam uma diferença considerável na relação entre deformações e tensões, mas isto não influenciou na distribuição de deformações de espessura, de forma a modificar as tendências já observadas.

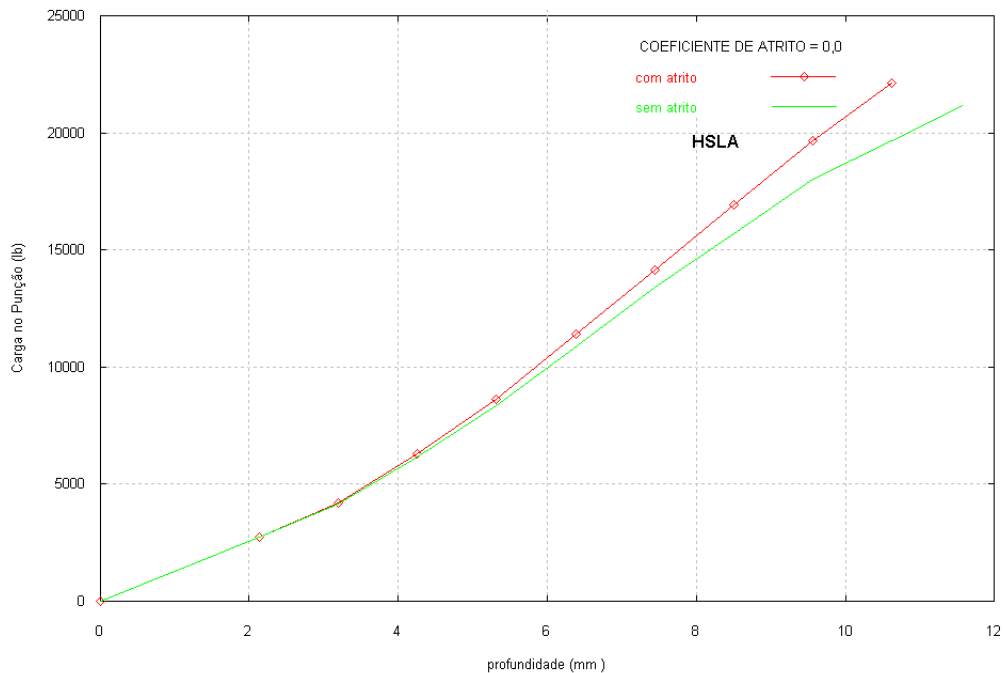


Figura 7.53 Carga no punção, para as condições com e sem atrito, aço HSLA.



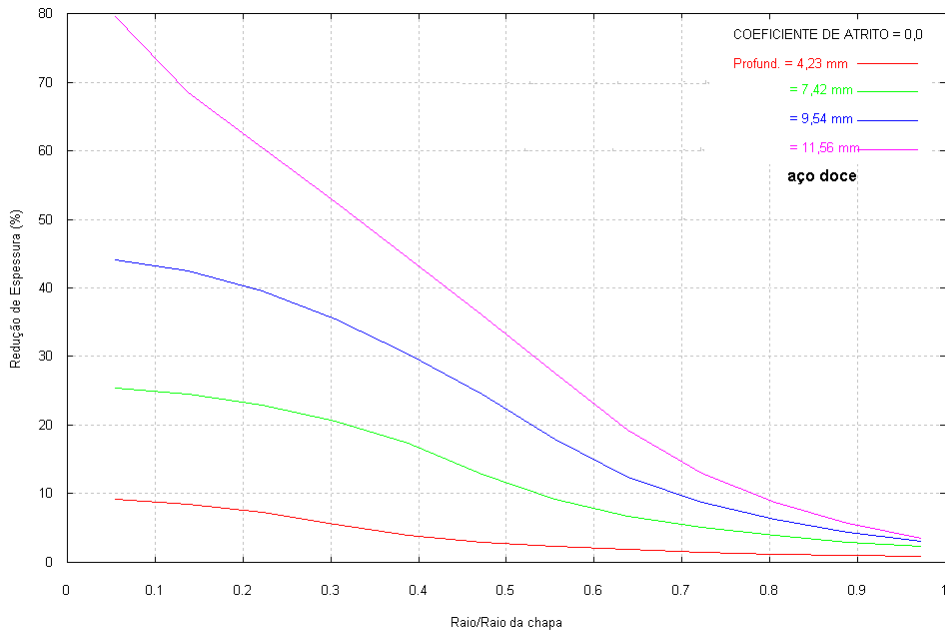


Figura 7.54 Distribuição de deformações de espessura para o aço doce, condição sem atrito.

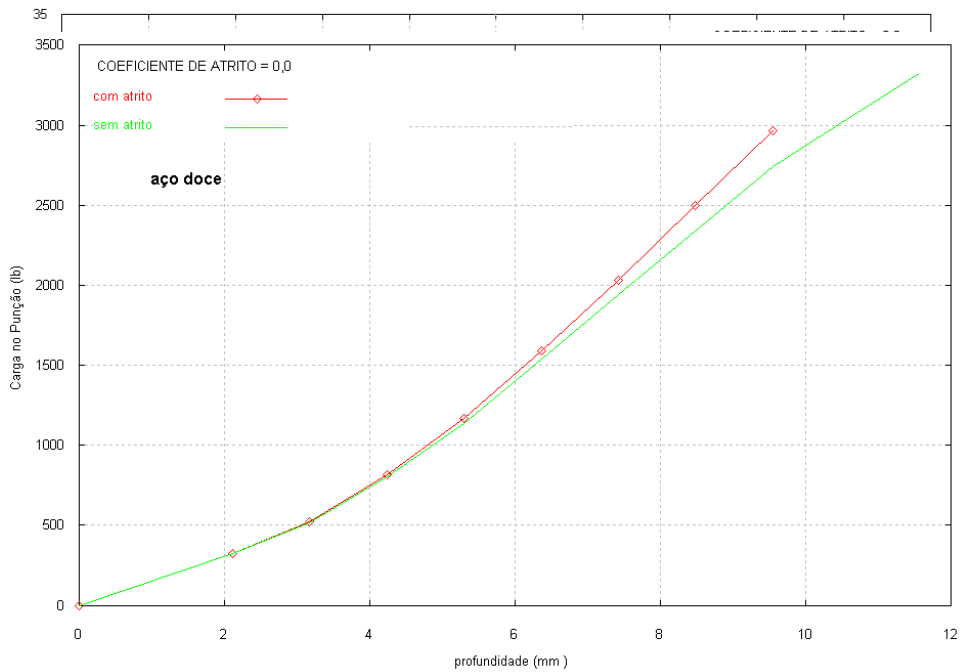


Figura 7.56 Carga no punção para o aço doce, condições com e sem atrito.

### 3.22.3 EFEITO DO NÚMERO DE ELEMENTOS NOS RESULTADOS

A precisão dos resultados pode ser avaliada pela análise das figuras a seguir. Tomando como referência os principais parâmetros analisados, deformação da espessura e carga no punção, e que a construção dos gráficos é feita a partir de elementos em linha, dispostos radialmente, a análise da precisão pode ser feita considerando diferentes números de elementos alinhados na malha. Nesta análise, foram usadas três malhas, tendo as seguintes características: malha com total de 16 elementos e 4 em linha, 64 elementos no total, com 8 elementos alinhados e 144 elementos com 12 em linha (ver Anexo A). A partir de 8 elementos em linha, em um comprimento de aproximadamente 20 mm é notada uma convergência bastante aceitável nos resultados (Figura 7.57 ).

Os resultados da malha de 4 elementos em linha, no entanto, mostra que a diferença em relação as outras curvas se deve mais à escassez de dados para plotagem do que aos valores em si, como pode ser visto na Figura 7.58.

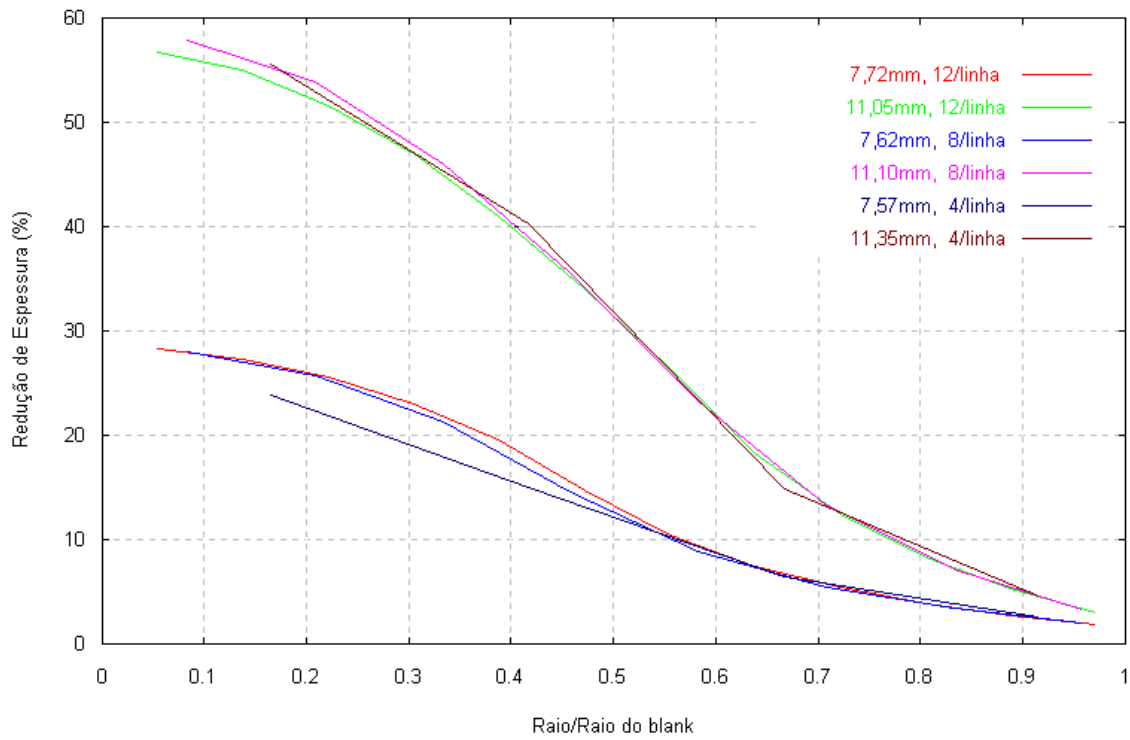


Figura 7.57 Efeitos do número de elementos nos resultados para a deformação de espessuras e  $\mu = 0$ .

Confirmando a pouca significativa diferença entre as deformações de espessura, os gráficos de carga no punção não indicam diferenças notáveis (Figura 7.59 e Figura 7.60). Em seu estudo, Toh (1983) observou ainda a influência do coeficiente de atrito na distribuição de deformações de espessura: devido ao aumento na restrição ao deslocamento entre chapa e punção, em função de um aumento no coeficiente de atrito, os gradientes de deformação ficam mais severos – as maiores deformações vão se afastando do pólo, em direção à restrição do disco, nas bordas, ao mesmo tempo em que as deformações próximas ao pólo diminuem progressivamente.

A magnitude da carga no punção não é quase afetada até um estágio relativamente avançado do avanço. Neste estudo, não foram realizados ensaios com diferentes coeficientes de atrito, pois os casos com e sem atrito aqui usados, exemplificam perfeitamente este efeito.

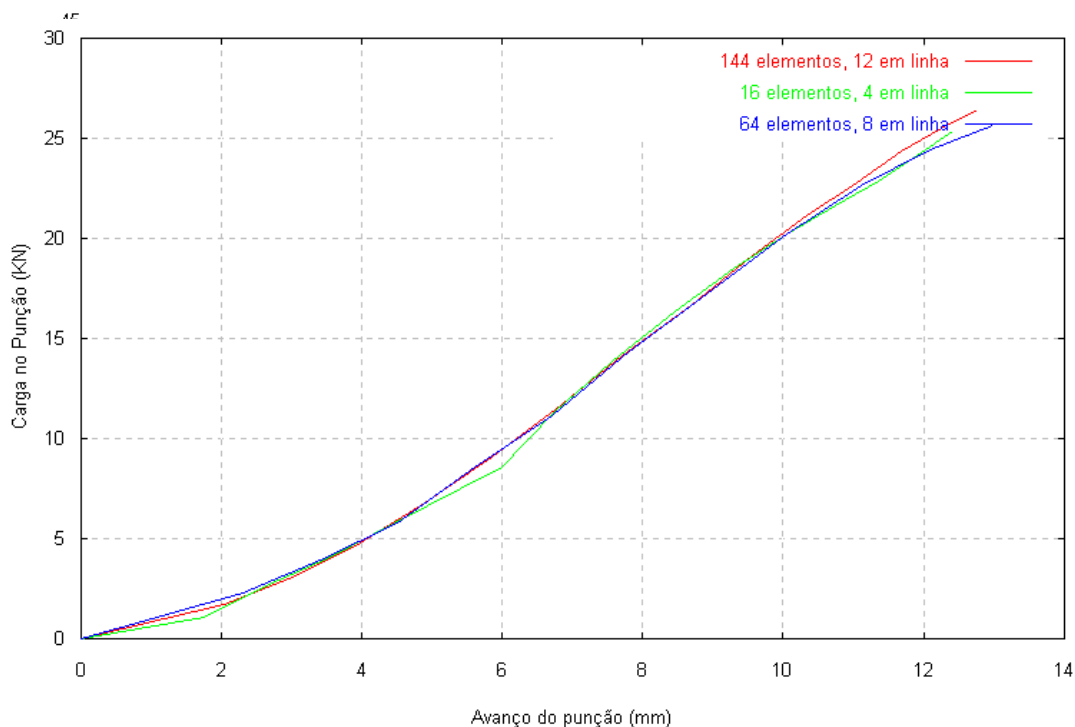
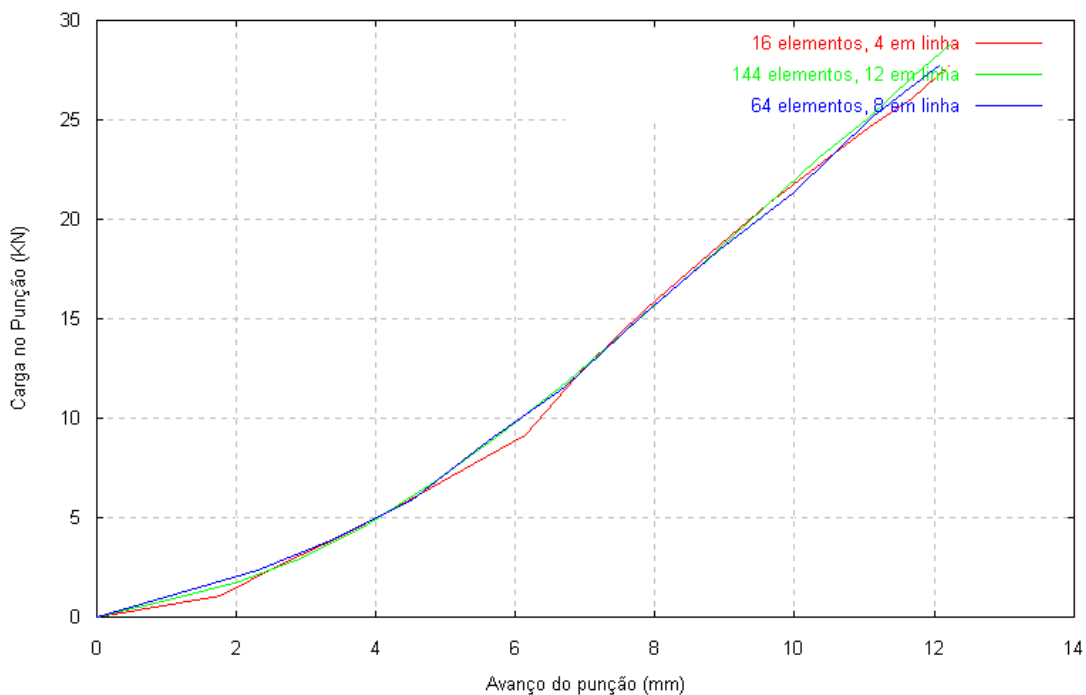


Figura 7.59 Efeito do número de elementos na carga no punção.  $\mu=0$

Figura 7.60 - Influência do número de elementos na carga no punção.  $\mu=0,2$ 

### 3.23 CASOS NÃO AXISIMÉTRICOS

No sentido de prever a conformabilidade de chapas metálicas submetidas a processos de conformação, a construção de diagramas limite de conformabilidade (DLC), empregando os métodos de Nakajima (1968) e Hasek (1978) auxiliados por outros ensaios, como tração uniaxial, estiramento no plano, p. ex., são bastante eficientes, substituindo com vantagens as limitações dos ensaios de Olsen e Erichsen.

O método de Nakajima consiste no estiramento de chapas retangulares, com diversas larguras e condições de lubrificação, através de punção hemisférico. Já o método de Hasek usa chapa circular com cortes semi circulares, conformada por punção hemisférico. Este último tem a vantagem de evitar a formação de *rugos* que ocorrem nas chapas retangulares.

O objetivo agora, é a simulação destes ensaios. Em particular, os casos a seguir reproduzem as condições usadas por Toh (1983). Os resultados serão

comparados com os obtidos por Toh, e a atenção será centrada na simulação do ensaio de Hasek..

### 3.23.1 ESTIRAMENTO DE CHAPA RETANGULAR

#### **Parâmetros de Material:**

Material: *Liga de Alumínio 2036-T4*

Lei constitutiva:  $\bar{\sigma} = 86000(\bar{\epsilon})^{0,245} \text{ psi } (*)$

Valor de  $R$  (coef. de anisotropia de Hill):  $0,78(*)$

Espessura do material:  $1,016 \text{ mm} = 0,04''$

Raio do punção:  $50,8 \text{ mm} = 2''$

Comprimento da chapa:  $203,2 \text{ mm} = 8''$

Largura da chapa:  $101,6 \text{ mm} = 4''$

Ceficiente de atrito:  $\mu = 0$

(\*) – Toh (1983)

**Parâmetros do Processo:** foi usada uma malha com 32 elementos triangulares, 27 nós (Ver Apêndice A). Foi realizado um experimento com coeficiente de atrito igual a zero. Algumas dificuldades neste processo, fizeram com que fosse preterido em relação ao uso da chapa circular com corte semi-circular. O primeiro ponto é o atrito. Um análise sobre as reais condições de atrito é requerida para este processo, pois os resultados obtidos por Toh, C. H. (1983) sugerem que o atrito pode ser maior que o previsto, dada a diferença em relação aos dados experimentais.

Outro fator a dificultar a obtenção dos resultados, é o ajuste do avanço do punção em cada etapa. Aqui estão reunidas duas condições conflitantes para a solução do problema: a primeira é que o índice do *desacelerador* do tamanho da parte (ver cap. 8) é maior que no caso axisimétrico, 0,85, e passa a atuar a partir da segunda parte. A segunda condição, é que o avanço do punção aqui requerido é bem maior.

Por último, este método não consegue determinar as condições em que ocorrem as menores deformações positivas para a construção de um DLC, devido à instabilidade causada pelo *enrugamento* da chapa nos cantos, quando a largura desta é aumentada.

**Resultados:** os gráficos a seguir mostram a evolução da deformação da tira retangular. As Figura 7.61 e Figura 7.62 apresentam a evolução do processo de conformação, sem atrito. Nas deformações de espessura, a Figura 7.63 indica a deformação máxima atingindo o pico na região próxima à restrição. A maior deformação foi encontrada no elemento 21, (18,21%) com uma concentração de grandes deformações ainda nos elementos 13 e 17. Na Figura 7.64 , as iso linhas de deformação total apontam valores máximos na mesma. região.

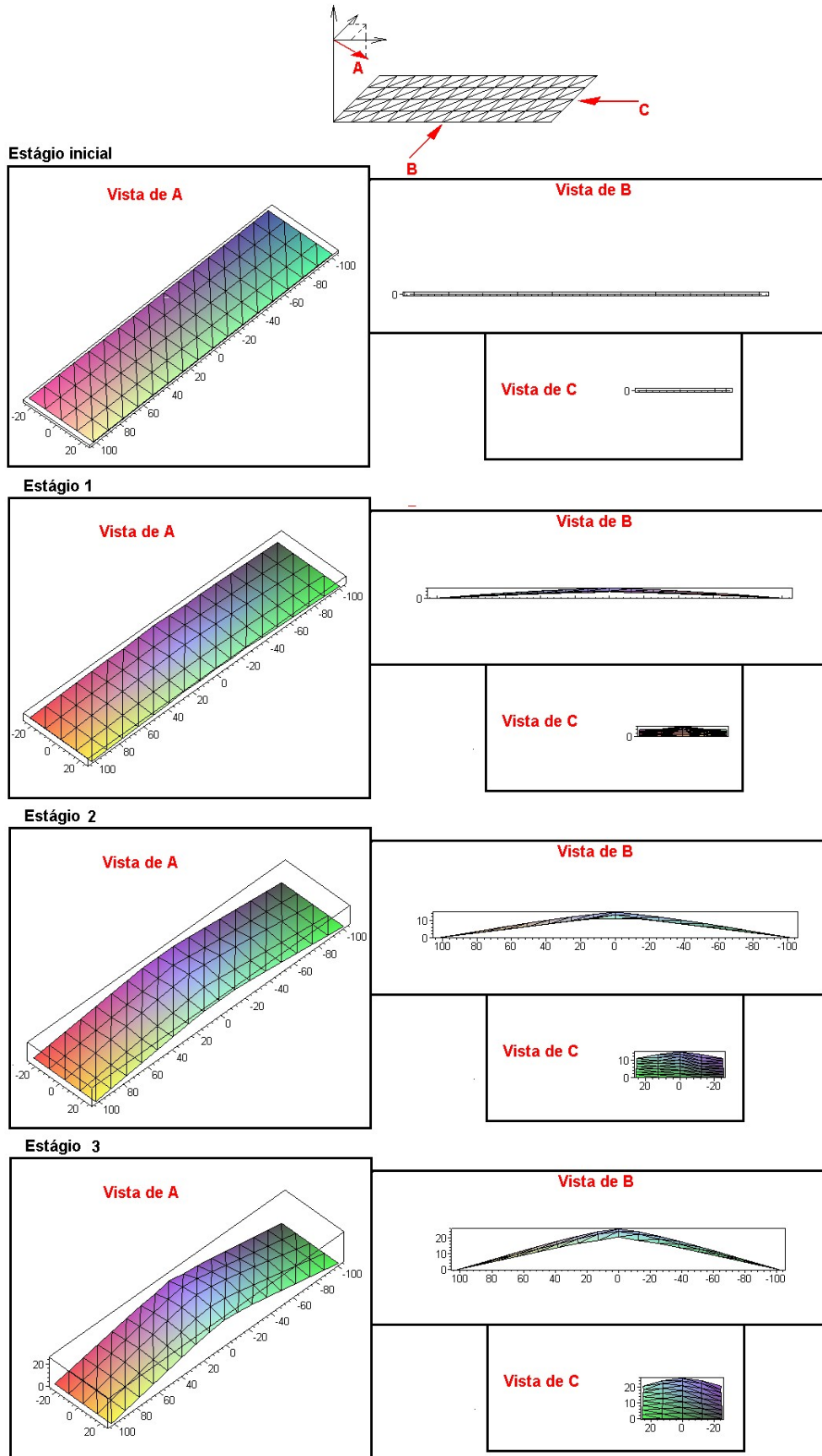


Figura 7.61 Evolução do processo de estiramento.  $\mu=0$



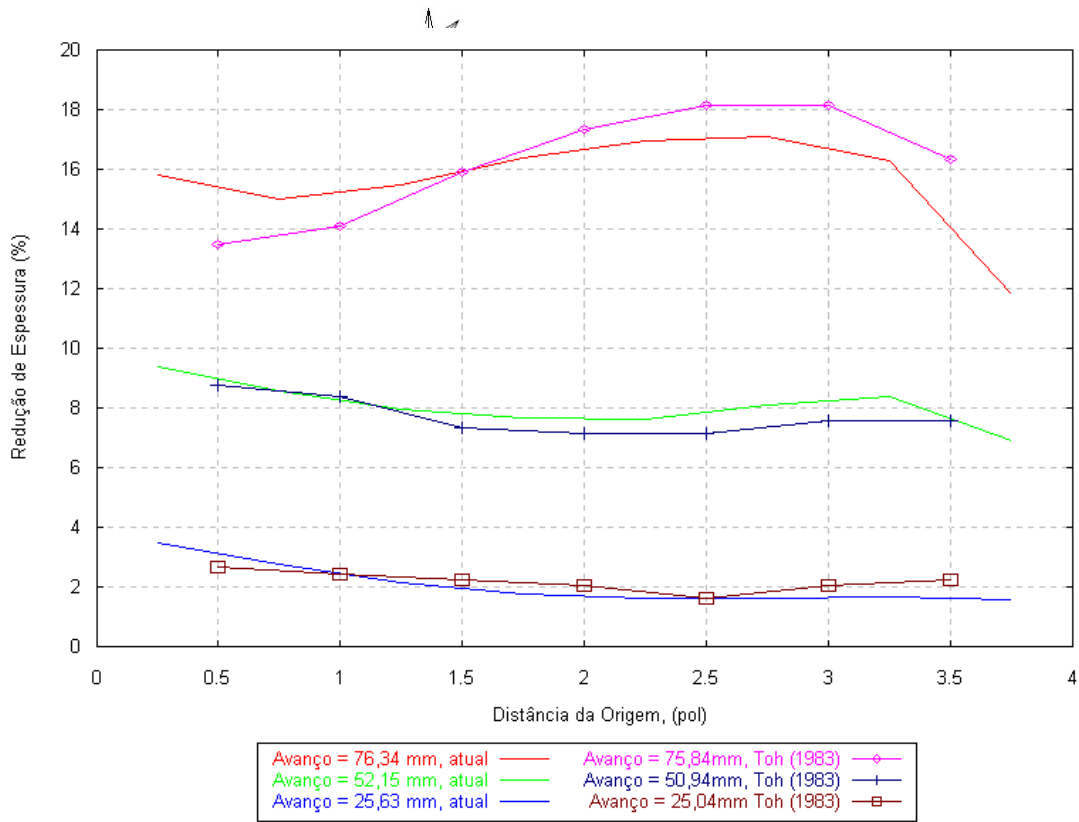


Figura 7.63 Distribuição de deformações de espessura. Comparação com os resultados de Toh, C. H. (1983).  $\mu=0$

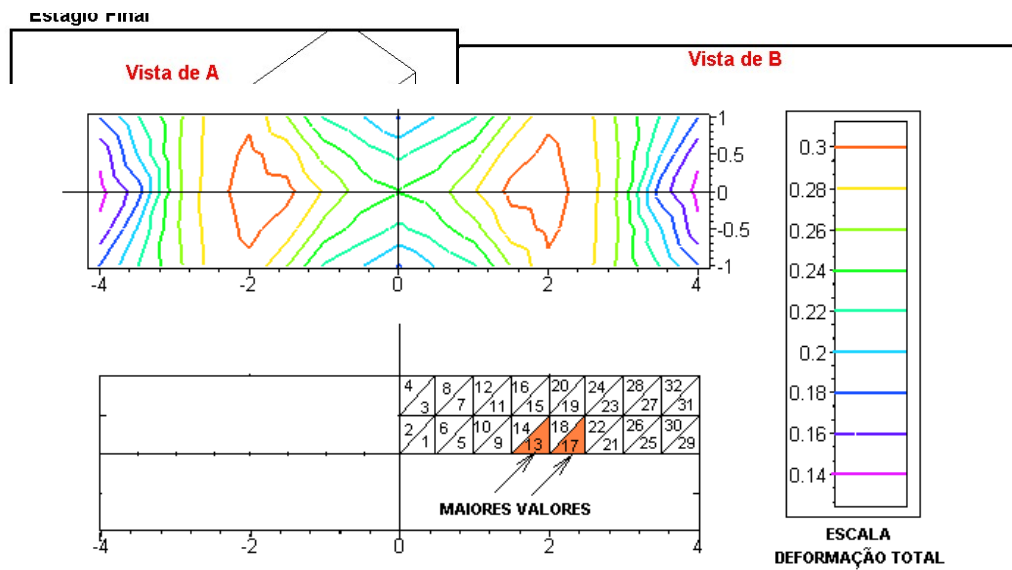


Figura 7.64 Deformação Total - pontos de máxima deformação

**Conclusões:** os resultados obtidos são comparáveis aos obtidos por Toh, C. H. (1983). Nos seus experimentos, Toh observou que estes resultados são comparáveis aos obtidos com experimentos com espécimes reais. Ainda foi observado que os resultados obtidos para este tipo de ensaio através do presente método, são limitados pela formação de *rugos* nas bordas da chapa, quando a largura é aumentada. Assim, a construção de DLC's através deste programa, por intermédio deste tipo de ensaio, fica prejudicada. Este é o motivo principal de não haver sido dedicado maior espaço para este tipo de ensaio. O desconhecimento das reais condições de atrito entre o punção e a chapa não produziram bons resultados.

### 3.23.2 ESTIRAMENTO DE CHAPA COM CORTE SEMI CIRCULAR

**Parâmetros de Material:**

Material: *Aço Inoxidável AISI 304*

Lei constitutiva:  $\bar{\sigma} = 1514(\bar{\epsilon})^{0,43} \text{ psi } (*)$

Valor de  $R$  (coef. de anisotropia de Hill):  $1,025(*)$

Espessura do material:  $0,76 \text{ mm}$

Raio do punção:  $38,1 \text{ mm}$

Raio do disco:  $82,55 \text{ mm}$

Raio da abertura da matriz:  $58,42 \text{ mm}$

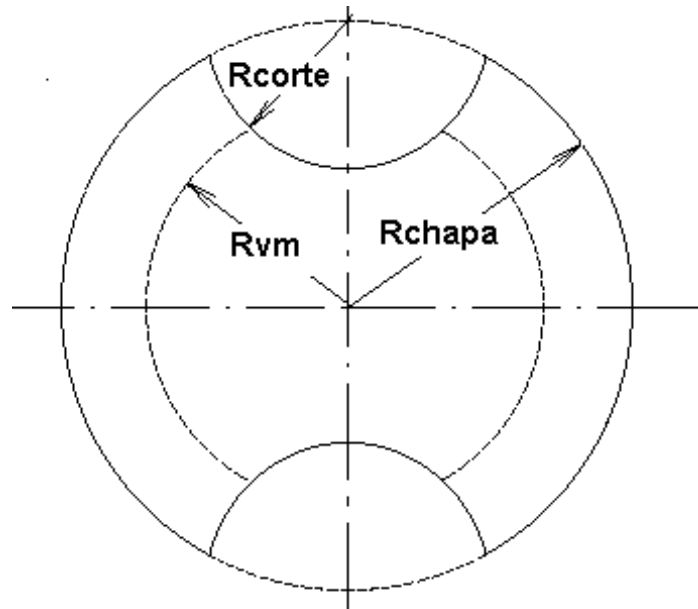
Ceficientes de atrito empregados:  $\mu = 0; \mu = 0,25$

(\*) – Toh (1983).

**Parâmetros do Processo:** foram realizadas simulações com diferentes condições de atrito e raios de corte. A variação dos valores de corte usados, pode ser vista na Figura 7.65. Os diferentes espécimes requereram a utilização de malhas com número de elementos diferentes, observando o cuidado de se manter elementos com características geométricas (base x altura do triangulo) próximas, pois se prevê dificuldades de convergência nas interações neste caso, a exemplo do

caso da tira retangular. Estimativas iniciais e tamanhos das etapas do processamento também devem ser de pequena ordem (entre 1/40 e 1/50 do avanço final). Tomados estes cuidados, o coeficiente de aceleração usado para todos os casos foi de 0,2 e a convergência obtida após 10 interações, em média.

**Resultados:** a análise pode ser feita pelas figuras 7.19 a 7.27. As Figura 7.66 e Figura 7.67 indicam o aumento da força no punção com a diminuição do raio de corte, o que de certa forma, já se poderia esperar, pois na região do corte, não há restrição ao deslocamento da chapa, como ocorre em toda a borda da chapa sem corte. Da Figura 7.68 a Figura 7.73, podem ser vistos os gráficos de deformação de espessura contra o raio da chapa – distância do pólo. Há coerência aqui entre os



Espécime N.o	Rcorte (mm)
1	0,00
2	44,45
3	50,80
4	57,15

**Obs.:** R<sub>corte</sub>= raio do corte  
 R<sub>vm</sub> = raio do vazado da matriz  
 R<sub>chapa</sub> = raio da chapa

Figura 7.65 Geometrias dos espécimes usados nas simulações.

resultados já observados nos casos anteriores, em particular, aos do axisimétrico: a

presença do atrito desloca a região crítica de redução de espessuras, do centro da chapa em direção à restrição na borda da chapa, pois o atrito atua de forma a restringir o deslizamento da chapa se deformando ao longo do perfil do punção. Um outro efeito notado para os casos com atrito, é que os gradientes de deformação são maiores nas regiões críticas, com o gráfico apontando para a região de potencial falha. Toh (1983), notou ainda que este gradiente maior resulta em redução no avanço possível do punção, ou seja, conduz à ruptura mais precocemente.

Na Figura 7.74, é possível verificar que o comportamento das deformações efetivas no plano da chapa evoluem de forma análoga às da deformação de espessura: as seções mais finas – com maior deformação de espessura coincidem com os maiores valores de deformação efetiva total. Do mesmo modo, os picos de deformação, como no caso das deformações de espessura, sem atrito, ocorrem no pólo (centro da chapa) e no caso com atrito, se desloca do centro para a borda.

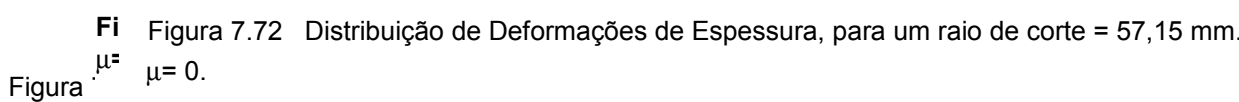
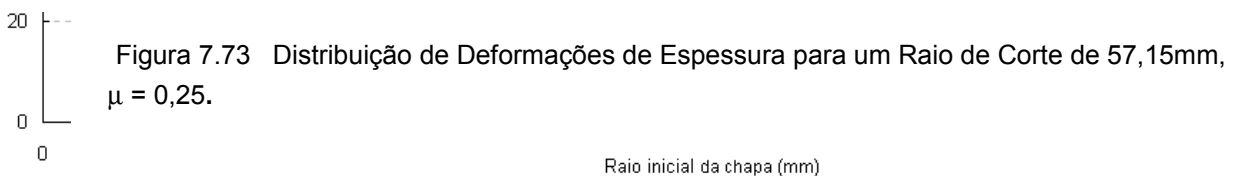
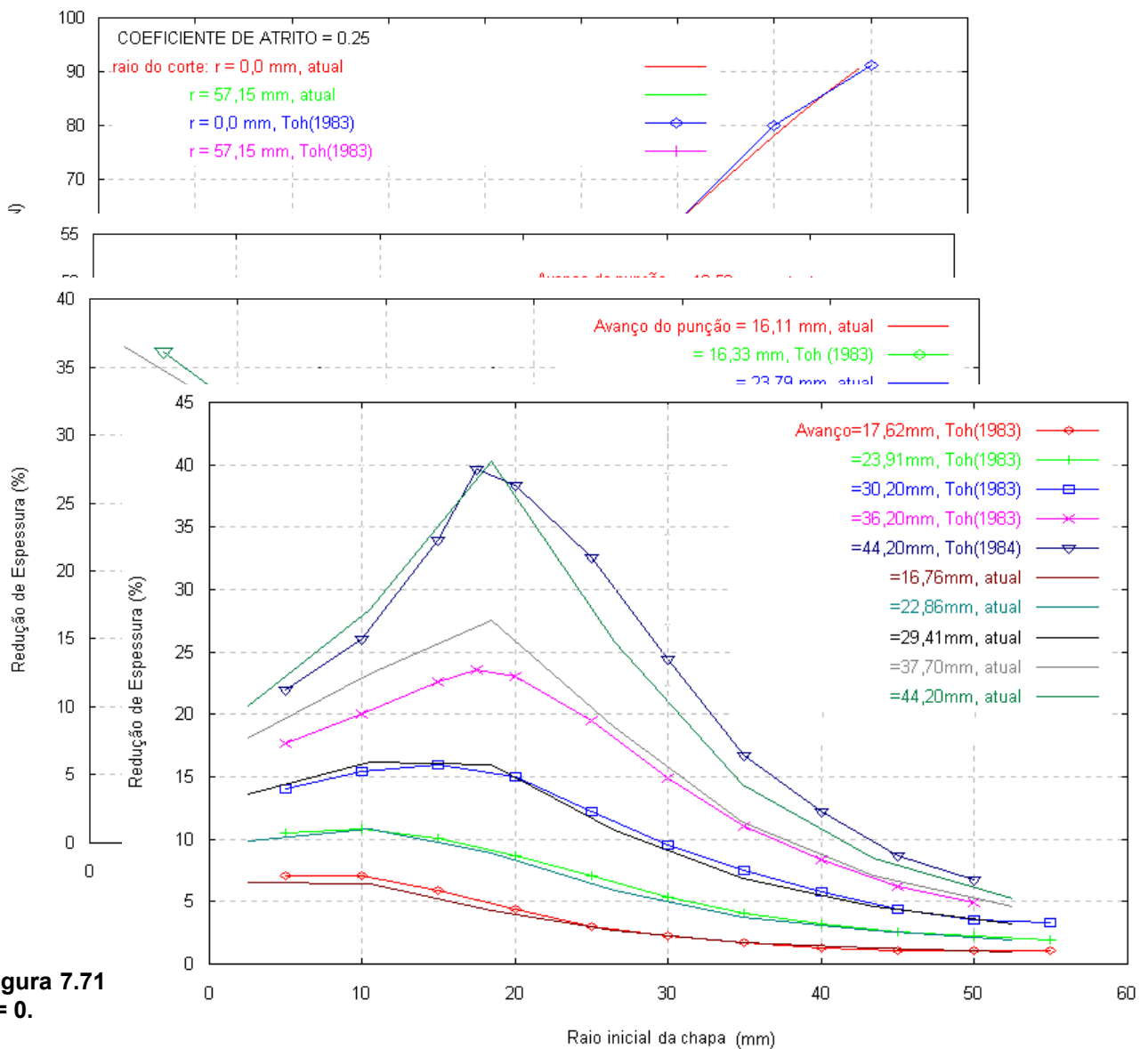
A comparação entre os resultados presentes e os obtidos por Toh (1983) mostra uma razoável semelhança. As pequenas discrepâncias encontradas em alguns resultados de deformação de espessura são decorrentes de condições diversas de realização das simulações (e.g. malhas diferentes).

**Conclusões:** as simulações apresentadas, reproduzem de maneira análoga, os testes de Nakazima. [Nakazima et al. (1968)]. A reprodutibilidade de Diagramas Limite de Conformabilidade fica limitada desta maneira, por uma completa avaliação dos fatores que influem no processo de deformação. A vantagem estabelecida neste processo é dada pelos diferentes raios de corte, que evitam o enrugamento das bordas da chapa, o que não ocorre no caso da tira retangular.

As duas condições – com e sem atrito – combinadas com adequadas condições de geometria, empregadas na presente simulação, ilustram como a combinação de fatores adequados do processo de conformação podem conduzir a uma otimização da estampabilidade do material, distribuindo as deformações de modo a evitar os altos gradientes de deformação.

O material empregado para esta simulação apresenta uma característica muito apreciável para o processo de estiramento: o alto valor do coeficiente de endurecimento ao trabalho de deformação –  $n = 0,43$ . Este índice elevado indica

que o material é capaz de manter uma distribuição mais equilibrada das deformações no processo de estiramento. Toh (1983) cita o aço AISI 304 como tendo uma excelente capacidade de suportar o estiramento, quando comparado a outros materiais.





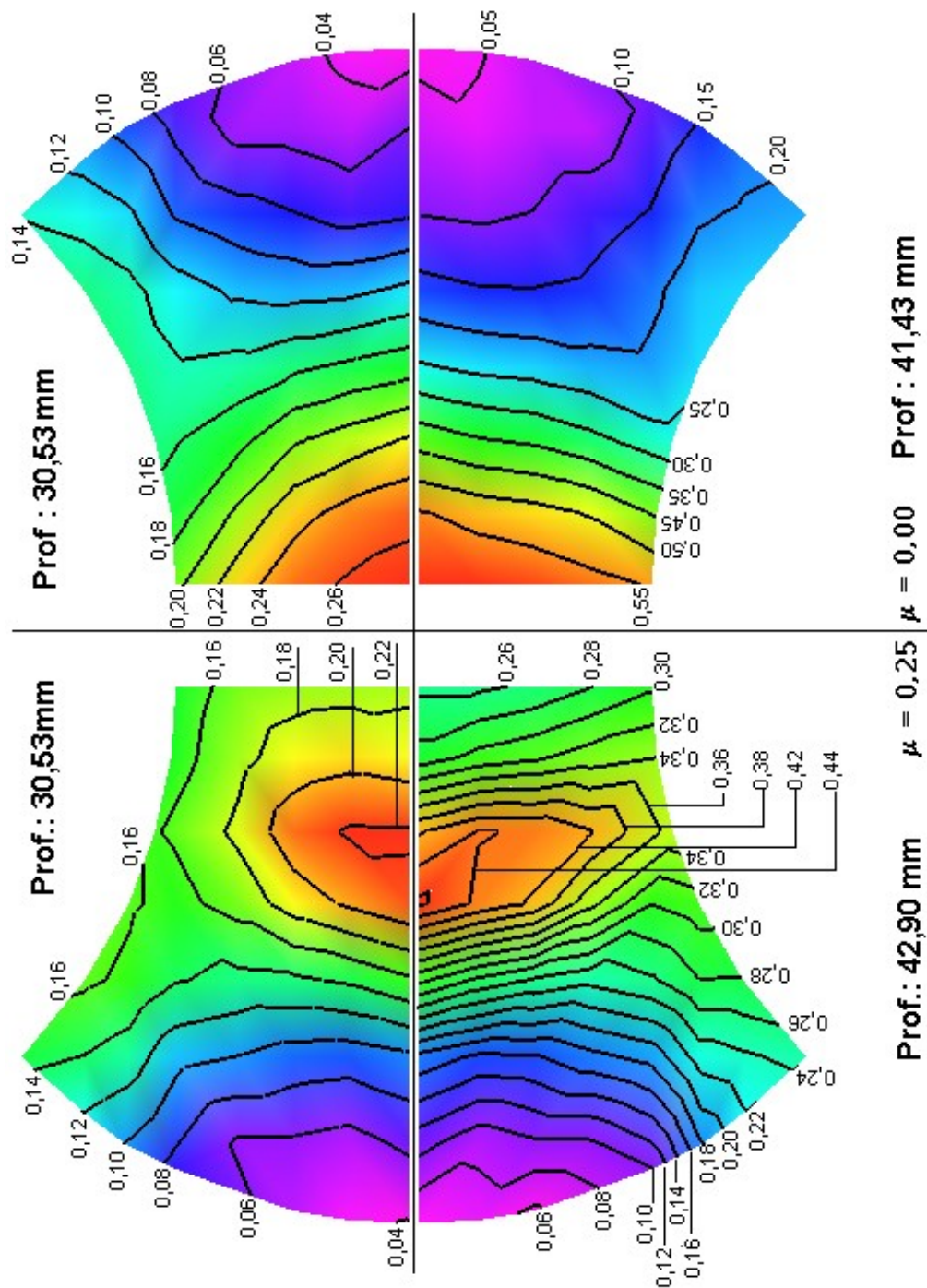


Figura 7.74 Distribuição de Deformações Efetivas para  $\mu = 0$  e  $\mu = 0,25$ , para raio de corte de 57,15 mm.

## 9. ESTUDO DA TAXA DE SENSIBILIDADE

### 3.24 INTRODUÇÃO

A causa mais comum de falha na conformação a frio de produtos a partir de chapas metálicas é o desenvolvimento de trincas ou enrugamento localizado. As regiões em que estas falhas preferencialmente se desenvolvem, são normalmente as que estão em contato com o raio do punção ou onde haja um aumento na superfície da chapa, para se ajustar ao perfil do punção. O processo de falha se desenvolve a partir do surgimento de um ponto de concentração na distribuição de deformações e culmina com a trinca ou enrugamento. Gosh (1977)

O sucesso, portanto, na conformação de produtos a partir de chapas metálicas, está na melhora da distribuição de deformações na chapa, ao longo do processo. Alguns fatores do processo podem ser trabalhados para se evitar ou retardar ao máximo o surgimento dos altos gradientes de deformação, tais como, condições de atrito entre punção e chapa e matriz com chapa, raios de curvatura adequados para os cantos no punção e cantos da matriz, por exemplo. Outra forma de se evitar os altos gradientes de deformação é a escolha de materiais com propriedades mais adequadas ao processo. Assim, o estudo de certas características, como a influência do endurecimento nos gradientes de deformação, do fenômeno da estrição e da taxa de deformação no surgimento da estrição, podem ajudar substancialmente a compreensão e prevenção das falhas na conformação.

O objetivo deste capítulo é estudar a influência de uma destas características de material, a sensibilidade à taxa de deformação – ditada igualmente por uma taxa, denominada de *taxa de sensibilidade*, no processo de conformação, através de simulações numéricas, por meio do programa Sheet, adaptado para permitir a inclusão deste efeito.

### 3.25 FORMULAÇÃO

Existem duas formas de relações constitutivas possíveis de serem usadas para a incorporação da taxa de sensibilidade nos modelos de conformação para chapas



metálicas: uma forma admite que os efeitos do encruamento e da taxa de deformação no fluxo de tensões da chapa metálica seja aditivo:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}) + g(\dot{\bar{\varepsilon}}) = f(\bar{\varepsilon})\{1 + h(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}})\} \quad (8.0)$$

onde,  $\bar{\sigma}$  é o fluxo de tensões no material,  $\bar{\varepsilon}$  representa a deformação e  $\dot{\bar{\varepsilon}}$  é a taxa de deformação.

A outra forma assume que os efeitos são multiplicativos, ou seja

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})\hat{g}(\dot{\bar{\varepsilon}}) \quad (8.0)$$

Em termos de resultados, não há uma conclusão definitiva de qual forma é mais adequada, porém, a forma multiplicativa é nitidamente mais conveniente do ponto de vista matemático e experimental, o que justifica a sua adoção para a implementação computacional .

Existem estudos, de Gosh (1977), Stevenson (1981) e Hosford e Caddell (1983), que apontam para a forma aditiva, como a mais adequada para certos materiais.

Para o propósito deste estudo, a forma multiplicativa será adotada, haja vista as suas vantagens para a implementação computacional.

Como base para o desenvolvimento a seguir, será assumido que a forma variacional da equação do equilíbrio [eq. ( 5.0 )] é válida para materiais sensíveis, a deformação do material obedeça o critério de escoamento anisotrópico de Hill, R. (1950) , para o estado plano de tensões [eq. ( 3.0 )] e sua regra de fluxo associada.

Usando da expansão por séries de Taylor, a relação de tensões efetivas assumem as formas:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_o + h_o d\bar{\varepsilon} + \hat{h}_o d\dot{\bar{\varepsilon}} \quad (8.0)$$

$$\bar{S} = \bar{S}_o + H_o d\bar{E} + \hat{H}_o d\dot{\bar{E}} \quad (8.0)$$

onde  $h_o = \partial \bar{\sigma} / \partial \bar{\varepsilon}$ ,  $\hat{h}_o = \partial \bar{\sigma} / \partial \dot{\bar{\varepsilon}}$  e  $H_o$  e  $\hat{H}_o$  deverão ser determinados;  $d\bar{\varepsilon}$  é o incremento de deformação efetiva verdadeira;  $d\dot{\bar{\varepsilon}}$  e  $d\dot{\bar{E}}$  são as taxas de

deformação verdadeira e deformação Lagrangeana durante cada incremento de deformação, respectivamente. Para estas últimas, são válidas as seguintes relações:

$$d\dot{\bar{\epsilon}} = d\bar{\epsilon}/\Delta t \quad e \quad d\dot{\bar{E}} = d\bar{E}/\Delta t$$

Considerando a necessidade de implementação no programa Sheet, as equações ( 8.0 ) e ( 8.0 ) podem ser escritas de forma análoga às equações ( 3.0 ):

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_o + \tilde{h}_o d\bar{\epsilon} \tag{ 8.0 }$$

onde  $\tilde{h}_o = h_o + \hat{h}_o / \Delta t$

e 
$$\bar{S} = \bar{S}_o + \tilde{H}_o d\bar{E} \tag{ 8.0 }$$

onde  $\tilde{H}_o = H_o + \hat{H}_o / \Delta t$

Para determinar a relação entre  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{S}$  é assumido que a taxa de dissipação de energia durante um incremento de deformação é o mesmo nas expressões ( 8.0 ) e ( 8.0 ). Deste modo, a relação entre as duas tensões pode ser expressa como:

$$(\bar{\sigma} + \bar{\sigma}_o) d\bar{\epsilon} = (\bar{S} + \bar{S}_o) d\bar{E} \tag{ 8.0 }$$

onde  $\bar{\sigma}_o$  e  $\bar{S}_o$  são calculados na etapa anterior dos cálculos. Considerando que

$$d\bar{\epsilon} = \ln\{1 + (dl/l_o)\} \quad e \quad d\bar{E} = (dl/l_o) + \frac{1}{2}(dl/l_o)^2 \quad \text{onde } dl/l_o \text{ é a deformação nominal no}$$

ensaio de tração uniaxial. Pode ser escrito então,

$$\bar{S} = \bar{\sigma}_o + (\tilde{h}_o - 2\bar{\sigma}_o) d\bar{\epsilon} \tag{ 8.0 }$$

onde 
$$\tilde{h}_o = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} \right) / \Delta t$$

$\bar{\epsilon}$  e  $\dot{\bar{\epsilon}}$  são a deformação efetiva verdadeira e taxa de deformação efetiva verdadeira, respectivamente.

### 3.25.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Considerando a forma da equação constitutiva rígido plástica, a equação ( 3.0 ) assumirá a forma:

$$\bar{\sigma} = A(B + \bar{\epsilon})^n \left[ \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right]^m \tag{8.0}$$

onde  $\dot{\bar{\epsilon}}_0$  e  $m$  são determinados experimentalmente, sendo que o valor de  $m$  corresponde à taxa de sensibilidade propriamente dita. A determinação do valor inicial da taxa pode ser visto na Figura 8.75.

As mudanças necessárias no programa Sheet tomarão como base a equação ( 8.0 ), que pode ser escrita na forma:

$$\bar{S} = \bar{\sigma}_o + \tilde{H}_o d\bar{E} \tag{8.0}$$

onde  $\tilde{H}_o = \tilde{h}_o - 2\bar{\sigma}_o$

Com  $\tilde{h}_o = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} \right) / \Delta t$ , e os termos  $\partial \bar{\sigma} / \partial \bar{\epsilon}$  e  $\partial \bar{\sigma} / \partial \dot{\bar{\epsilon}}$  obtidos diretamente de ( 8.0 ), a implementação das modificações na subrotina Strain e o programa Sheet está preparado para trabalhar com a taxa de sensibilidade.

### 3.26CASOS AXISIMÉTRICOS

A análise do comportamento de materiais sensíveis à taxa de sensibilidade a deformação - índice  $m$  da equação ( 8.0 ) – deve recair sobre aqueles materiais com

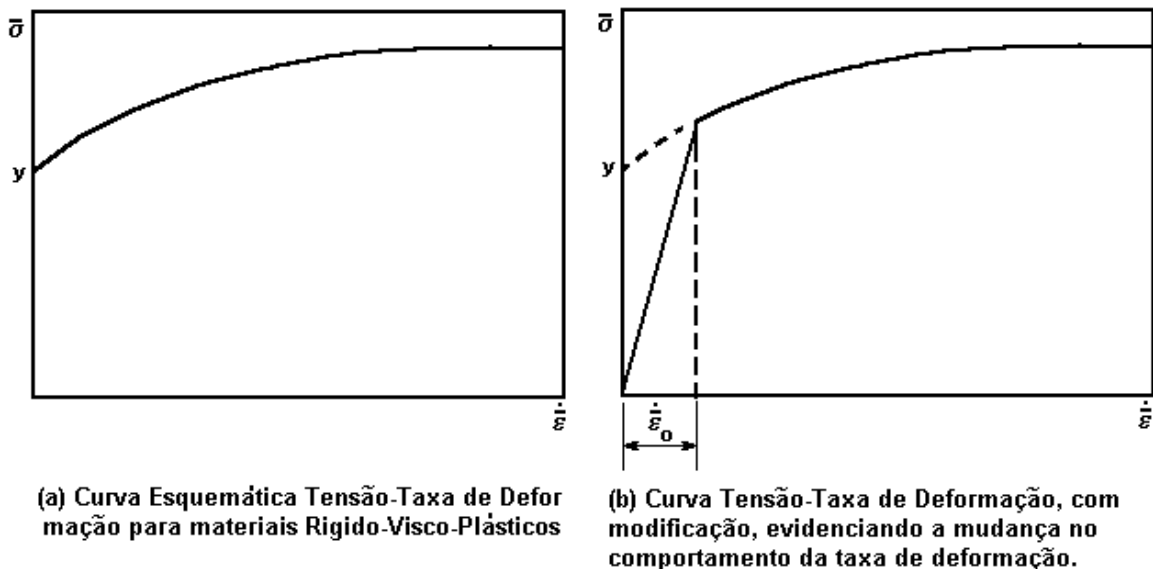


Figura 8.75 Problema da determinação do valor inicial da taxa de deformação. Rebelo et al. (1979)

índice positivo, e preferencialmente, os maiores. Os efeitos procurados nestes

materiais são basicamente, a diminuição dos gradientes de deformação e dos valores máximos de deformação, como observado por Gosh (1977). Estes efeitos, são desejáveis, pois permitem a obtenção de maiores profundidades na estampagem profunda.

**Parâmetros do Material:**

*Material:* Chapa de aço liga com alumínio, acalmado (AK).

*Equação Constitutiva:*  $\bar{\sigma} = 482,7(0,00771 + \bar{\epsilon})^{0,25} \left[ \dot{\bar{\epsilon}} / \dot{\bar{\epsilon}}_o \right]^m$ , Toh (1990)

*Taxa de sensibilidade:*  $m = 0,012$ ;

*Valor Inicial da taxa de deformação:*  $\dot{\bar{\epsilon}}_o = 0,001 \text{ s}^{-1}$

*Índice de anisotropia normal (Hill):*  $R=1,60$

**Parâmetros do Processo:**

*Raio do Punção:* 50,80 mm;

*Raio da Chapa Circular:* 59,18 mm;

*Espessura da Chapa:* 0,81 mm;

*Velocidade do Punção:* 0,423 mm/s

*Coefficiente de Atrito:* 0,25.

O coeficiente de aceleração é o mesmo para os casos axisimétricos, vistos no capítulo 7. A convergência também é obtida com um máximo de 10 interações. Foram utilizados elementos triangulares em um domínio a 10° do disco, como já empregado nos casos axisimétricos na solução rígido-plástica.

**Resultados:** um importante ponto deve ser citado, previamente. A utilização de um coeficiente de atrito constante – arbitrado em 0,25 – visou obter resultados mais próximos aos experimentais. Conforme observado por Toh (1990), as condições de atrito na interface punção-chapa é muito complexa no processo real de conformação, e particularmente, a altas velocidades de avanço do punção. Assim, para este experimento, tendo em vista os resultados experimentais obtidos, o valor de coeficiente adotado, é o que mais aproxima os resultados da computação com os experimentais. Os resultados que serão vistos a seguir são semelhantes aos

obtidos por Toh (1990) e já permitem tirar algumas conclusões. Na Figura 8.76 pode ser notada a influência da taxa na distribuição de redução de espessuras em comparação com a condição sem taxa. O principal efeito aqui é a redução do pico de deformação. Outro efeito, é um pequeno afastamento do pico de deformação em direção oposta ao centro da chapa. Na Figura 8.77, novamente comparando as situações com e sem taxa, o efeito observado pela inclusão da taxa, é a elevação da carga no punção. Na seqüência, pode ser observado, na Figura 8.78, que a variação da velocidade de avanço do punção não causa sensível variação na distribuição de deformação de espessura. Já, no caso da carga no punção, a Figura 8.79 mostra a elevação nos valores, para um aumento na velocidade.

**Conclusões:** a comparação entre os resultados atuais e os de Toh(1990) mostra uma certa diferença, com relação aos efeitos da taxa, devido provavelmente, à diferença de malhas. Apesar disso, os resultados atuais confirmam uma característica: a taxa de sensibilidade, com valor acima de zero, demonstrou exercer uma influência positiva para questões relevantes à estampagem de chapas metálicas, tais como, redução no gradiente de deformações e pico de deformação.

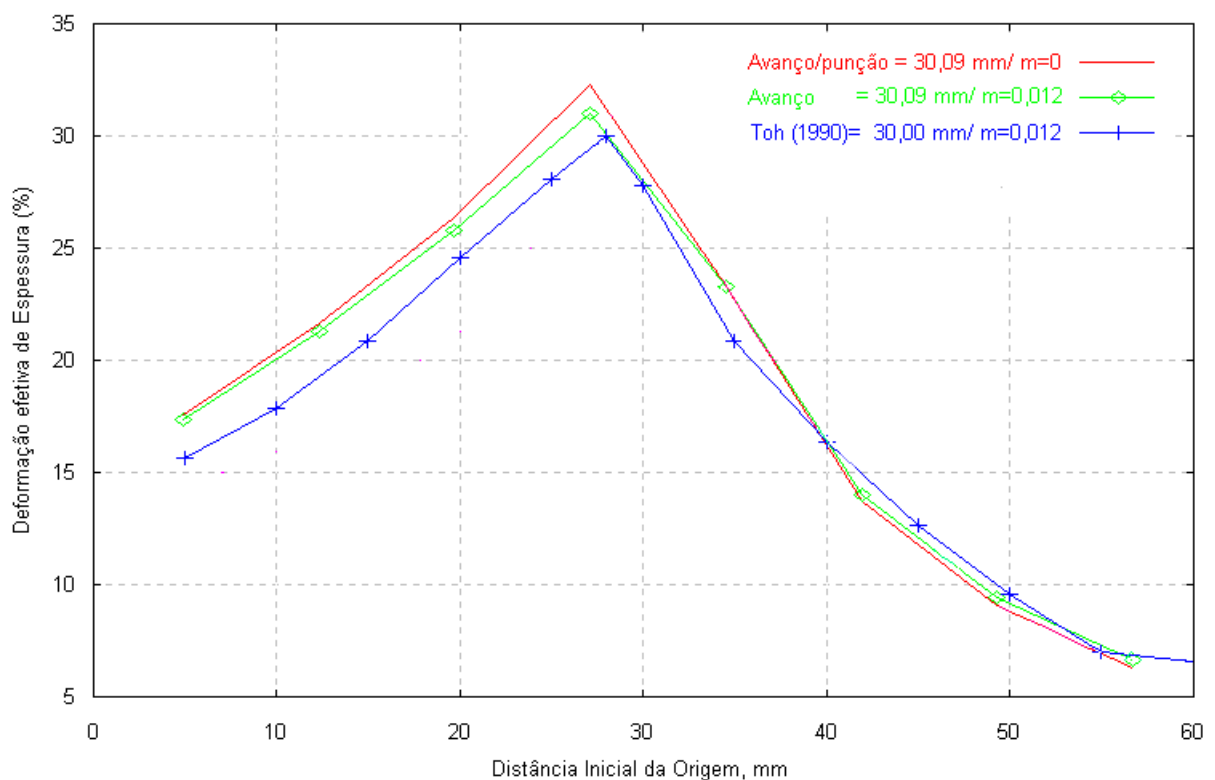


Figura 8.76 Comparação de Resultados de distribuição de deformação da espessura entre os casos com taxa, ( $v=0,423$  mm/s) e sem taxa, com os resultados de Toh(1990), a 30 mm de profundidade de avanço do punção.  $\mu = 0,25$

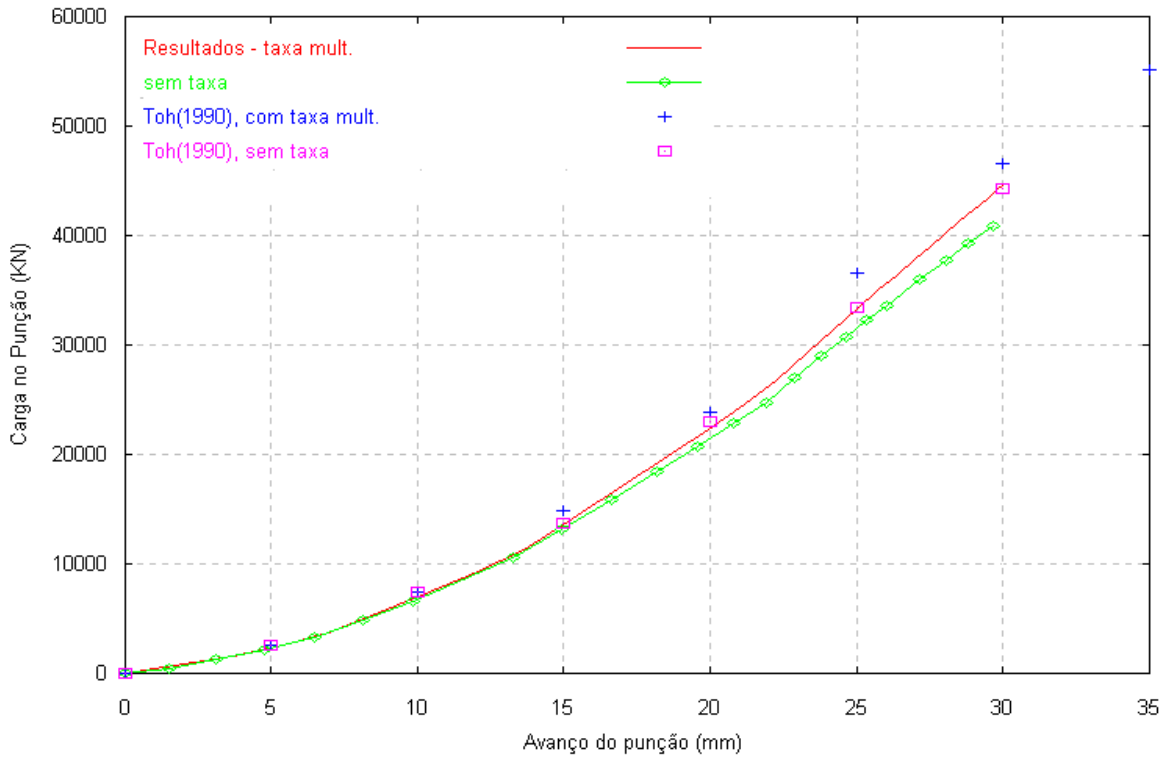


Figura 8.77 Comparação das curvas de carga no punção x deslocamento, para as condições com taxa ( $v=0,423$  mm/s) e sem taxa, com resultados obtidos por Toh (1990).  $\mu=0,25$

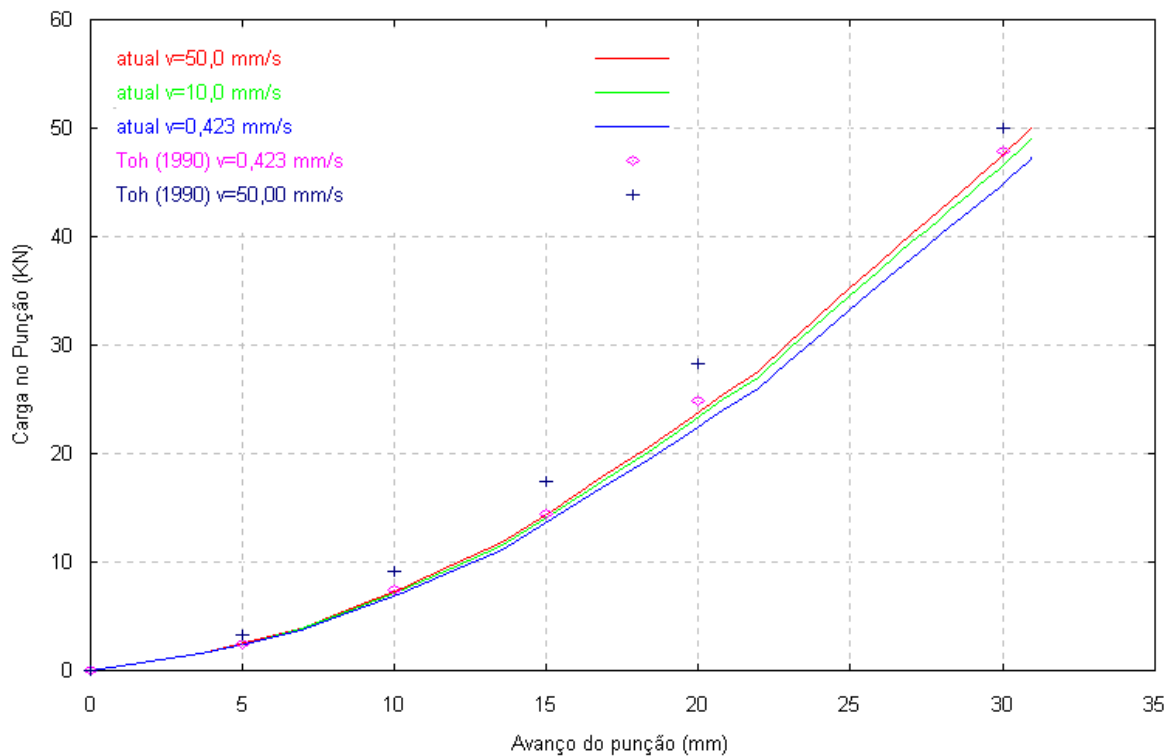


Figura 8.79 Comparação do efeito da taxa de sensibilidade ( $m=0.012$ ) na carga do punção a várias velocidades.  $\mu=0,25$

### 3.27 CASOS NÃO AXISIMÉTRICOS

Tendo em vista a importância do ensaio de Hasek para a obtenção de diagramas limite de conformabilidade, foi realizada uma simulação com chapa semi-circular – com corte – sendo que aqui, foi utilizado o aço alumínio acalmado com características ligeiramente diferentes daquelas usadas no caso axisimétrico. Um dos maiores obstáculos para a realização de uma mais extensa bateria de testes envolve a reduzida referência às características de materiais, ligadas à taxa de sensibilidade à deformação. Neste caso (não axisimétrico), não foram encontradas referências que validassem estes resultados. Assim, a validade destes resultados reside especificamente na confirmação das características encontradas nos materiais sensíveis à taxa, na seção 9. Em vista disso, foram usados avanços de punção e coeficiente de atrito relativamente conservadores.

#### **Parâmetros do Material:**

*Material:* Chapa de aço liga com alumínio, acalmado (AK).

*Equação Constitutiva:*  $\bar{\sigma} = 739 \cdot \bar{\epsilon}^{-0,228} \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^{0,012}$ , Toh (1983)

*Taxa de sensibilidade:*  $m = 0,012$ ;

*Valor Inicial da taxa de deformação:*  $\dot{\bar{\epsilon}}_0 = 0,001 \text{ s}^{-1}$

*Índice de anisotropia normal (Hill):*  $R = 1,60$

#### **Parâmetros do Processo:**

*Raio do Punção:* 38,10 mm;

*Raio da Chapa Circular:* 82,55 mm;

*Espessura da Chapa:* 0,86 mm;

*Velocidade do Punção:* 0,423 mm/s

*Coefficientes de Atrito:* 0 e 0,15.

*Raios de Corte empregados:*  $r=0$  e  $r=57,15\text{mm}$

(V. Figura 7.65)

**Resultados:** a construção dos gráficos procurou mostrar basicamente duas condições: com coeficiente de atrito  $\mu = 0,15$ , são comparados os casos com e sem taxa de sensibilidade. Inicialmente usando uma malha para casos não axisimétricos, foi feita a simulação para um disco com corte igual a zero. Os resultados são similares aos já obtidos no caso axisimétrico, observando uma variação devida às condições diferentes de atrito e espessura diferentes. A Figura 8.80 mostra que a carga no punção com taxa é ligeiramente maior, como já visto no caso axisimétrico. No presente caso, procurou-se isolar a influência da taxa de sensibilidade, por isto foi usada apenas uma velocidade de avanço do punção. Na Figura 8.81 os resultados de distribuição de deformações de espessura são também, os esperados. Considerando a não existência de referências a resultados deste tipo de ensaio, com taxa de sensibilidade, o experimento com raio de corte igual a zero serviu ao propósito de validação dos ensaios a seguir, já que foram compatíveis aos do caso axisimétrico.

Para o raio de corte igual a 57,15mm, os gráficos comparativos de carga no punção x deslocamento (Figura 8.83) e distribuição de deformações (Figura 8.82)

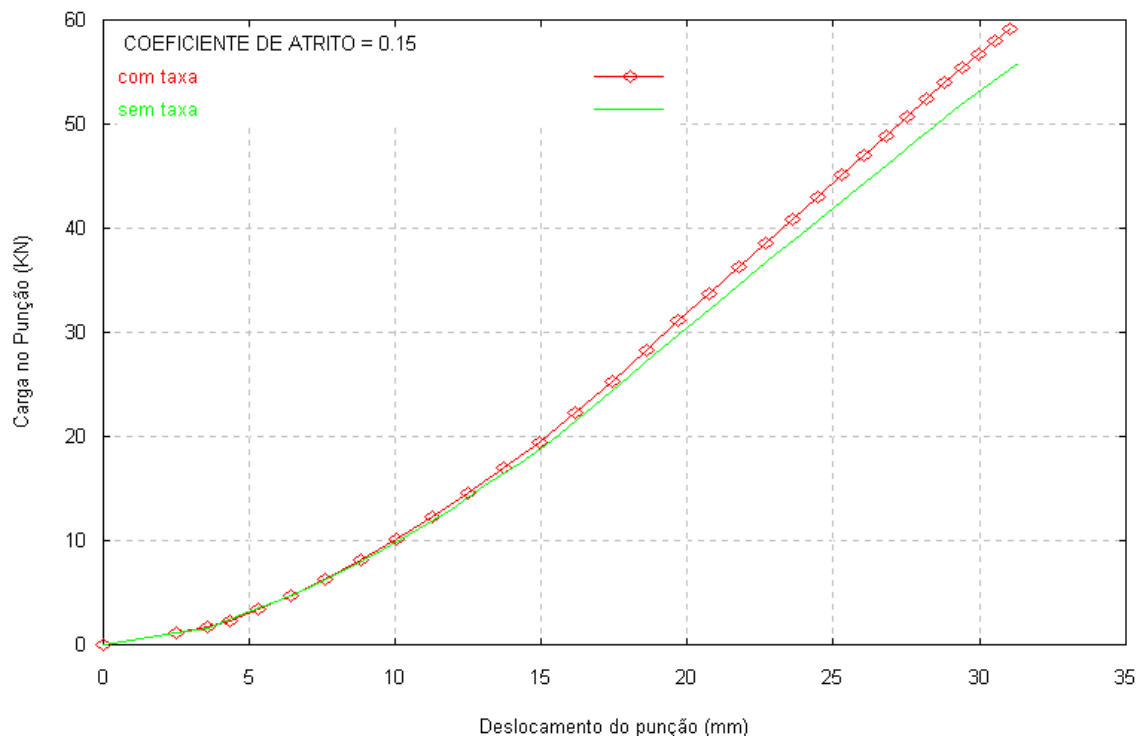


Figura 8.80 Curvas de Carga x Deslocamento na simulação com raio de corte igual a zero, nas condições com e sem taxa de sensibilidade.  $\mu = 0,15$



para as situações com e sem taxa não mostram novidades. Para os casos das deformações efetivas no plano da chapa, duas comparações mostram respectivamente, a situação sem taxa, com e sem atrito (Figura 8.84) e noutra (Figura 8.85), o efeito da presença da taxa contra a ausência da taxa. A interpretação gráfica dos resultados não mostra uma diferença sensível, mostrando que não há uma alteração na distribuição de deformações, como o ocorre no caso da presença ou não de atrito. Trata-se mesmo, de uma redução nos valores.

**Conclusões:** com resultados semelhantes aos obtidos no caso axisimétrico, o comportamento previsto se confirmou aqui, nos dois aspectos fundamentais que diferenciaram os casos com taxa de sensibilidade à deformação dos materiais insensíveis à taxa: diminuição do valor da deformação máxima e redução nos gradientes de deformação. Não foram realizados ensaios com diversas velocidades do punção, pois no caso axisimétrico foi demonstrado que com o uso da taxa na forma multiplicativa, não é notado efeito na distribuição de deformações de espessuras .

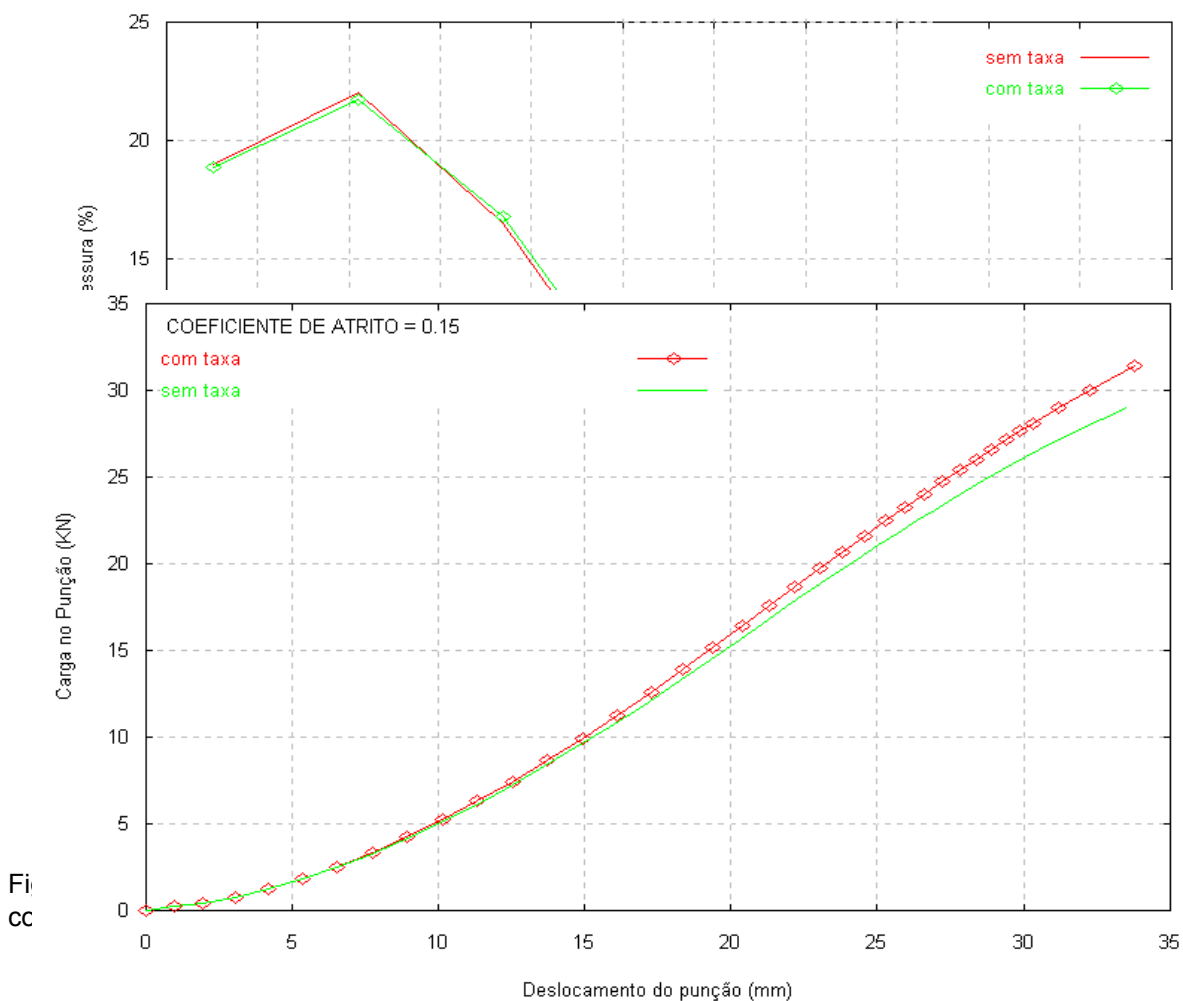


FIGURA 8.85 - Carga no Punção x Deslocamento, para um raio de corte de 57,15 mm com e sem taxa.,  $\mu = 0,15$

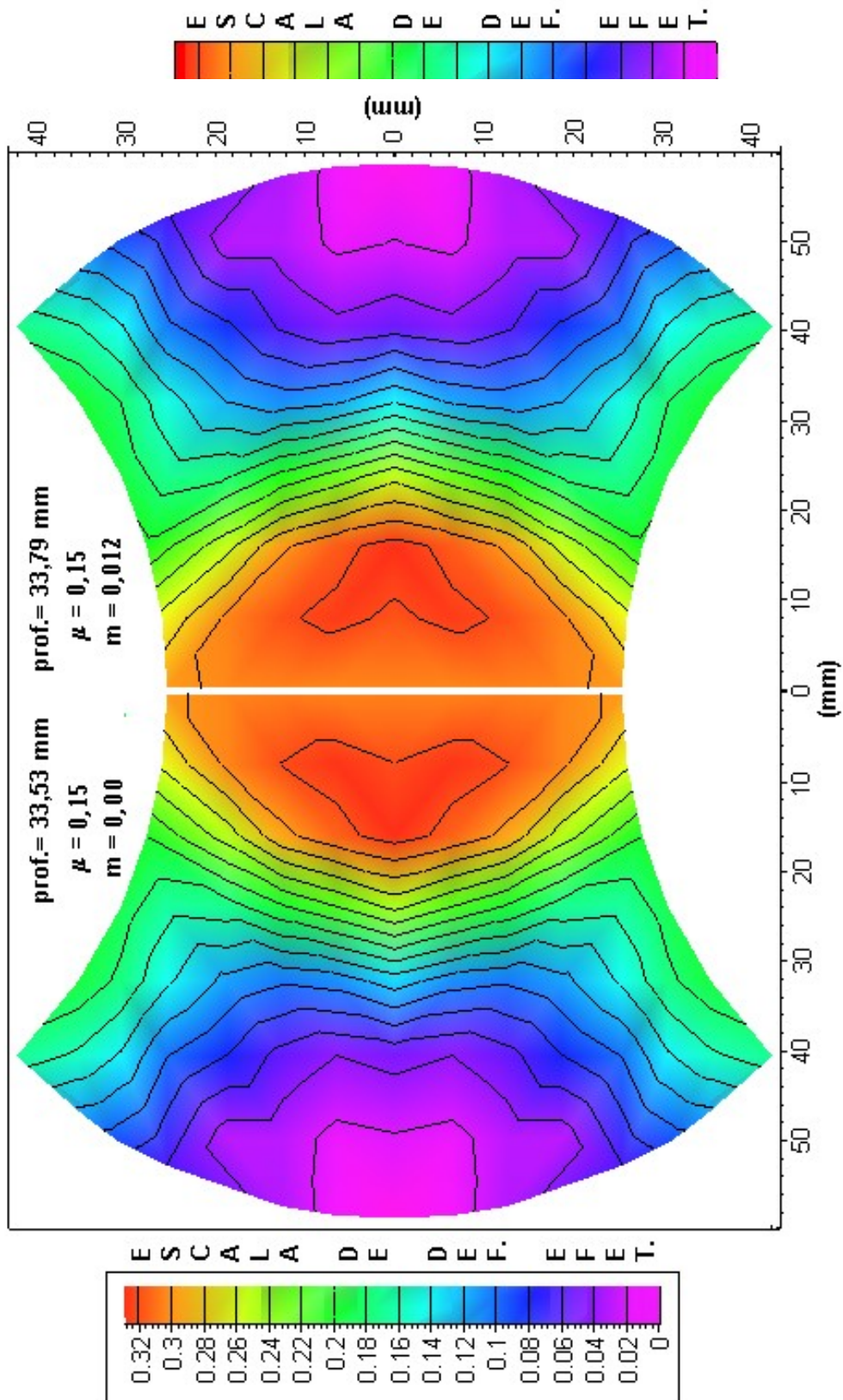


Figura 8.85 Deformações Efetivas no plano da chapa indeformada, para os casos com e sem taxa,  $\mu = 0,15$

Na Figura 8.85 o gráfico de isodeformações não mostra qualquer alteração em relação à forma como as deformações são distribuídas, mas a redução nos valores de máximo, particularmente na região de maior deformação produz uma quase imperceptível redução na área de deformações máximas definidas pelas iso linhas de deformação efetiva de maior valor (0,32). De maneira geral, pode-se considerar como positiva e relevante a influência da taxa com valores positivos, [Gosh, A. K. (1977)] na medida em que permite uma diminuição nos gradientes de deformação e conseqüente retardo na ruptura da chapa. Figura 8.86

## 10. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 3.28 CONCLUSÕES

Objetivando obter resultados compatíveis com o propósito de chegar às curvas limite de conformabilidade, as simulações com chapas circulares foram particularmente estudadas. A comparação com os resultados obtidos por Toh (1983), mostra que os valores obtidos são próximos aos experimentais (Figura 7.42). Mas, a complexidade das condições de atrito na interface chapa-punção, produz alterações significativas, para maiores valores de avanço do punção. Isto foi notado por Toh (1990), principalmente a altas velocidades, e a obtenção de resultados compatíveis requer a escolha de um coeficiente de atrito adequado. Assim, para se chegar a bons resultados, as condições de contato chapa-punção devem ser bastante estudadas, por meio de ensaios de laboratório.

Ainda, dentro do escopo de construir as curvas limite de conformabilidade para diversos materiais, os ensaios não axisimétricos com chapas circulares com cortes diversos foram realizados. As tendências observadas nos ensaios axisimétricos, com deslocamento dos valores de máxima deformação, tanto de espessuras, como planas, para a periferia da chapa ensaiada, bem como o aumento da carga no punção, na presença de atrito, se repetiram aqui.. Mas, ainda resta determinar um adequado procedimento para determinar os correspondentes valores críticos para a maiores e menores deformações. Toh (1988) apresentou um critério baseado na curva carga versus deslocamento do punção, que teve resultados razoáveis.

Não obstante os obstáculos acima citados, a compatibilidade geral dos dados obtidos nas simulações ainda permitem que sejam obtidas importantes conclusões para o desenvolvimento de um projeto. Inicialmente, olhando para os resultados dos ensaios para a solução rígido-plástica, verifica-se que os resultados são compatíveis aos esperados teoricamente. Assim, a previsão dos pontos críticos para ruptura, por exemplo, é perfeitamente possível, tomando como base, as regiões de maiores deformações, indicadas pelas simulações.

A implementação da taxa de sensibilidade à deformação permitiu verificar as vantagens que as chapas metálicas de materiais com taxa de sensibilidade positiva,

usufruem em relação àquelas com taxa nula (insensíveis à taxa de deformação) ou negativa. A forma multiplicativa da taxa de sensibilidade, apresenta as vantagens da maior simplicidade para implementação computacional, e também, esta forma permite uma definição instantânea do comportamento da chapa em relação ao processo de estampagem, se adequado (taxas de sensibilidade positivas e elevadas), ou inadequado (taxas negativas).

Concluindo, a escolha de chapas metálicas de materiais com taxas positivas permite diminuição dos gradientes de deformação e favorece maiores avanços do punção. Gosh (1977) Esta vantagem pôde ser aferida diretamente graças à simulação pelo método de elementos finitos.

### **3.29 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Um ponto fundamental na realização de simulações com resultados compatíveis aos obtidos em ensaios em condições reais é o conhecimento das reais condições existentes na interface punção chapa. A utilização da lei de Coulomb para traduzir as condições de contato é uma forma bastante simples para traduzir o que realmente ocorre neste caso.

Outra importante questão é a escassez de dados experimentais que permitam validar os resultados das simulações computacionais.

Para se chegar às curvas limite de conformabilidade, a implementação computacional de um critério que permita obter os valores de deformação máxima e mínima, para o ponto a partir do qual a falha pode ser esperada, para um determinado material, traria uma contribuição inestimável.

Por último, uma investigação sobre processo de estampagem profunda, em particular, com componentes não axisimétricos seria de grande relevância..

## REFERÊNCIAS

- ALTAN, T., LAHOTI, G. D., NAGPAL, V., “Systems Approach in Massive Forming and Application to Modeling of Forging Processes”, **J. Appl. Metal Working**, ASM, 1981, V. 1-2, p. 29.
- ALTAN, T., OH, S. I., GEGEL, H., “**Metals Forming: Fundamentals and Applications**”, ASM International, Metals Parks, 1983, Oh, USA.
- AMERICAN SOCIETY FOR METALS, “**Metals Handbook**”, Eight Edition, Vol. 1 (Properties and Selection of Metals) e Vol. 4 (Forming), American Society for Metals, 1961, Metals Park, OH, USA.
- BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B. ,”**Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**”, 2000, John Wiley & Sons, Ltd, Raffles Lane, Chichester, England, p 103.
- CHEN, W. F. , HAN, D. J., “**Plasticity for Structural Engineers**”, New York, Springer –Verlag New York Inc., 1988.
- DAHLQUIST, G., “**Numerical Methods**”, Prentice Hall, 1974.
- FUKUI, S. , KUDO, H., YOSHIDA, K., OKAWA, H., “A Method for Testing of Deep-Drawability of Sheet Metals”, Report of the **Institute of Science and Technology**, University of Tokyo, 1952, V. 6, p. 351.
- GHOSH, A. K. , “The Influence of Strain Hardening and Strain Rate Sensitivity on Sheet Metal Forming”, **J. Engng. Mater. Technol.**, 1977, pp. 264-274.
- HASEK, V., “Untersuchung und Theoretische Beschreibung wichtiger Einflussgrößen auf das Grenzformänderungsschaubild” , **Institute of Metal Forming Report**, Universidade de Stuttgart, Alemanha, 1978, pp. 213.
- HILL, R., “**The Mathematical Theory of Plasticity**”, Oxford Univ. Press., 1950, England.
- HUANG, Y. M., Liu, C. H., “An Analysis of the Square-cup Stretching Process”, **Journal of materials Processing Technology**, 1993, V. 49, pp. 229-246.

HOSFORD, W. F., CADDEL, R. M. “**Metal Forming – Mechanics and Metallurgy**”, 1983, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

HU, P., LIU, Y. Q., WANG, J. C., “Numerical Study of The Flange Earring of Deep Drawing Sheets With Stronger Anisotropy”, **International Journal of Mechanical Sciences**, 2001, V. 43, pp. 279-296.

JOHNSON, W., MAMALIS, G., “**Aspects of the Plasticity Mechanisms of Some Sheet Metal Forming Processes**”, Hellenic Steel Publications, 1978, Thessaioniki, Grécia.

KEELER, S. P., BACKOFEN, W., “Plastic Instability and Fracture in Sheets Stretched Over Rigid Punches”, **Transactions of American Society of Metals**, 1963, V. 56, p. 25.

KIM, J. H., OH, S. I., KOBAYASHI, S., “Analysis of Stretching of Sheet Metals with Hemispherical Punch”, **International Journal of Machine Design Res.**, Great Britain, Pergamon Press, 1978, V. 18, pp. 209-226.

KOBAYASHI, S., OH, I. S., ALTAN, T., “**Metal Forming and the Finite-Element Method**”, Oxford University Press, 1989, Oxford, N.Y., U.S.A

MARCINIAK, Z., DUNCAN J. L., “**The Mechanics of Sheet Metal Forming**”, Edward Arnold, a division of Hodder and Stoughton Limited, 1992, Great Britain.

MEHTA, H. S., KOBAYASHI, S., “**Finite Analysis and Experimental Investigation of Sheet Metal Stretching**”, Rep. N. MD 71-2, 1971, University of California.

MEGUID, S. A., REFAAT, M. H., “Finite Element Analysis of Deep Drawing Process Using Variational Inequalities”, **Finite Elements in Analysis and Design**, 1997, V. 28, pp. 51-67.

NAKAMACHI, E. ,”A Finite Element Simulation of the Sheet Metal Forming Process”, **International Journal of Numerical Methods an Engineering**, 1988, V. 25, pp. 283-292.

NAKAZIMA, K., KIKUMA, T., HASUKA, k., “Study on the Formability of Steel Sheets” , **Yawata Technical Report**, 1968, N. 264, pp 141-154.

OH, S. I., REBELO, N. , KOBAYASHI, S., “Finite Formulation for the Analysis of Plastic Deformation of Rate-Sensitive Materials in Metal Forming”, 1979, editado por H. Lippmann, **IUTAM Symp.**, Tutzing, Alemanha, pp. 235-238.

REBELO, N., KOBAYASHI, S. , “Axisymmetric Punch Stretching of Strain-Rate Sensitive Sheet Metals”, **Proc. 8<sup>th</sup> NAMRC, SME**, 1980, pp. 235-238

SCHEY, J., “**Manufacturing Processes of Engineering Materials**”, Addison-Wesley, Reading, 1987, MA, USA.

STEVENSON, R. , “A Comparison of Constitutive Relations Incorporating Strain Rate Hardening”, **Journal of Engineering Materials Technology**, 1981, pp261-263.

TOH, C. H., “**Process Modeling of Sheet Metal Forming of General Shapes by the Finite Element Method Based on Large Strain Formulation**”, 1983, Tese (PHD em Engenharia), Graduate Division of the University of California, Berkeley, USA.

TOH, C. H., KOBAYASHI, S., “Deformation Analysis and Blank Design in Square Cup Drawing”, **International Journal of Machine Tool Design Res.**, 1985, V 25, n. 1, p. 15.

TOH, C. H., SHIAU, Y. C., KOBAYASHI, S., “Analysis of a Test Method of Sheet Metal Formability Using The Element Finite Method”, **Journal of Engineering for Industry**, 1986, V. 108, pp. 3-8.

TOH, C. H., “Prediction of the Forming Limit Curves of Sheet Materials using the Rigid-Plastic Finite Element Method”, **Int. J. Machine Tools Manufact**, 1988, V. 29, n. 3, pp 333-343.

TOH, C. H. , “Incorporation of the Strain-Rate-Sensitive Constitutive Relations in the Analysis of Sheet Metal Forming”, **Journal of Strain Analysis**, 1990, V. 25, n. 1.

WANG, N. M., BUDIANSKYY, B., “Analysis of Sheet Metal by a Finite Element Method”, **Journal of Applied Mechanics**, 1978, V. 45, pp 73-83.

WIFI, A. S., “An Incremental Complete Solution of the Stretch-Forming and Deep Drawing of a Circular Blank Using a Hemispherical Punch”, **International Journal of Mechanical Science**, 1976, V. 18, p. 23.



YANG, D. Y., CHUNG, W. J., SHIM, H. B. ,”Rigid Plastic Finite Element Method of Sheet Metal Forming Processes with Initial Guess Generation”, **International Journal of Mechanical Science**, 1990, V. 32, pp. 687-708.

YOSHIDA, K., “Classification and Systematization of Sheet Metal Press-Forming Process” **Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research**, 1959, V. 53, N. 1514, p. 126.

YOSHIDA, T., KATAYAMA, T., USUDA, M., “Forming Limit Analysis of Hemispherical-punch Stretching Using the Three-dimensional Finite-element method”, **Journal of Materials processing Technology**, 1995, V. 50, pp. 226-237.

ZHOU, D., WAGONER, R. H., “A Numerical method for Introduction an Arbitrary Yield Function into Rigid-Viscoplastic FEM Programs”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, 1994, V. 37, pp 3467-3487.

# APÊNDICE A – TIPOS DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADAS

Aqui são apresentadas as malhas empregadas nas simulações que permitiram obter os resultados apresentados neste estudo.

## I – CASO I – ESTIRAMENTO NÃO AXISIMÉTRICO (CHAPA RETANGULAR)

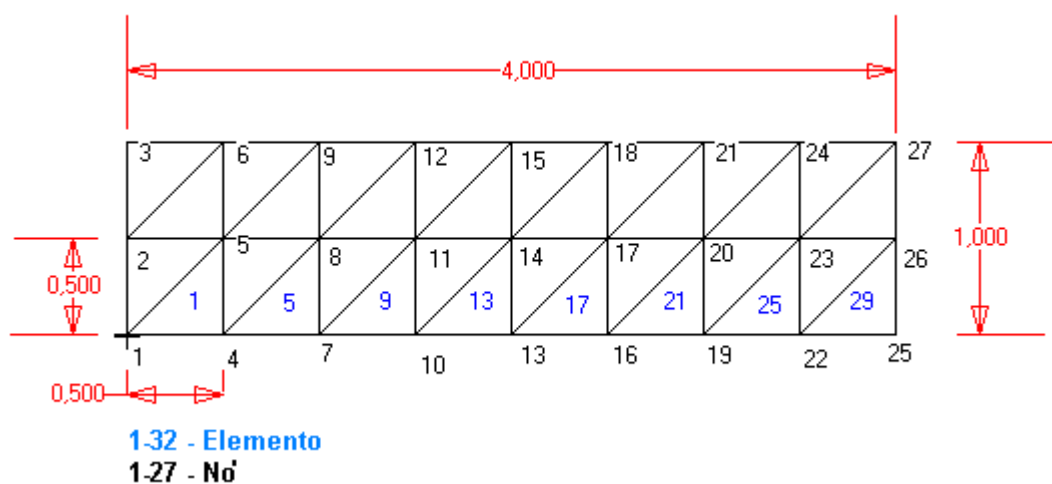
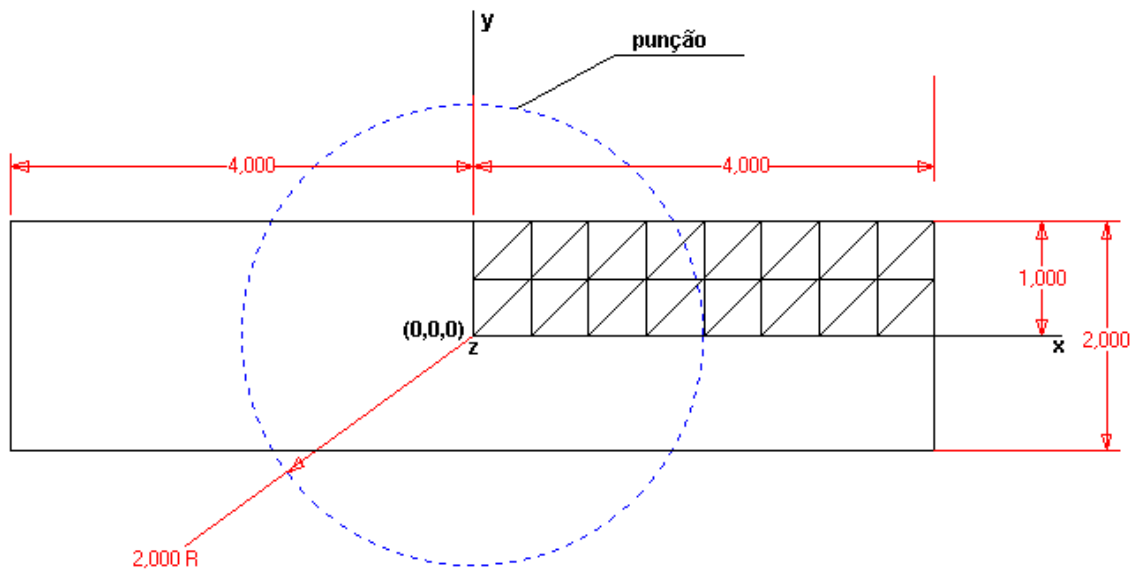


Figura B-1 - Malha Empregada no Caso 1 - Não Axisimétrico, tira retangular.

## II – CASO II – ESTIRAMENTO AXISIMÉTRICO (CHAPA CIRCULAR)

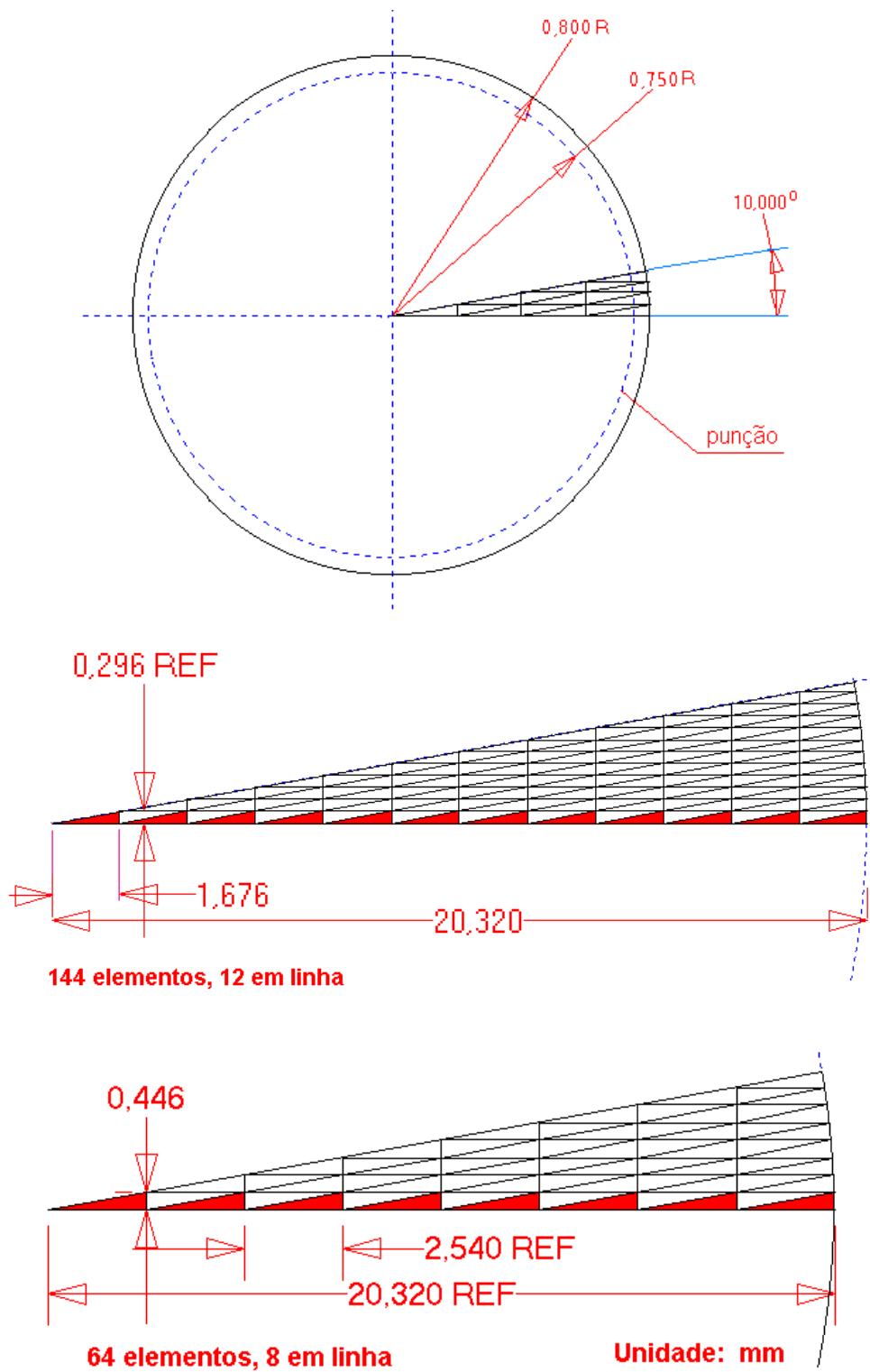


Figura B-2 Malha Axisimétrica, 15 elementos, 4 em linha (no alto), 64 elementos, 8 em linha (no meio), 144 elementos, 12 em linha (em baixo)

III – CASO III – ESTIRAMENTO NÃO AXISIMÉTRICO (CHAPA CIRCULAR COM CORTE)

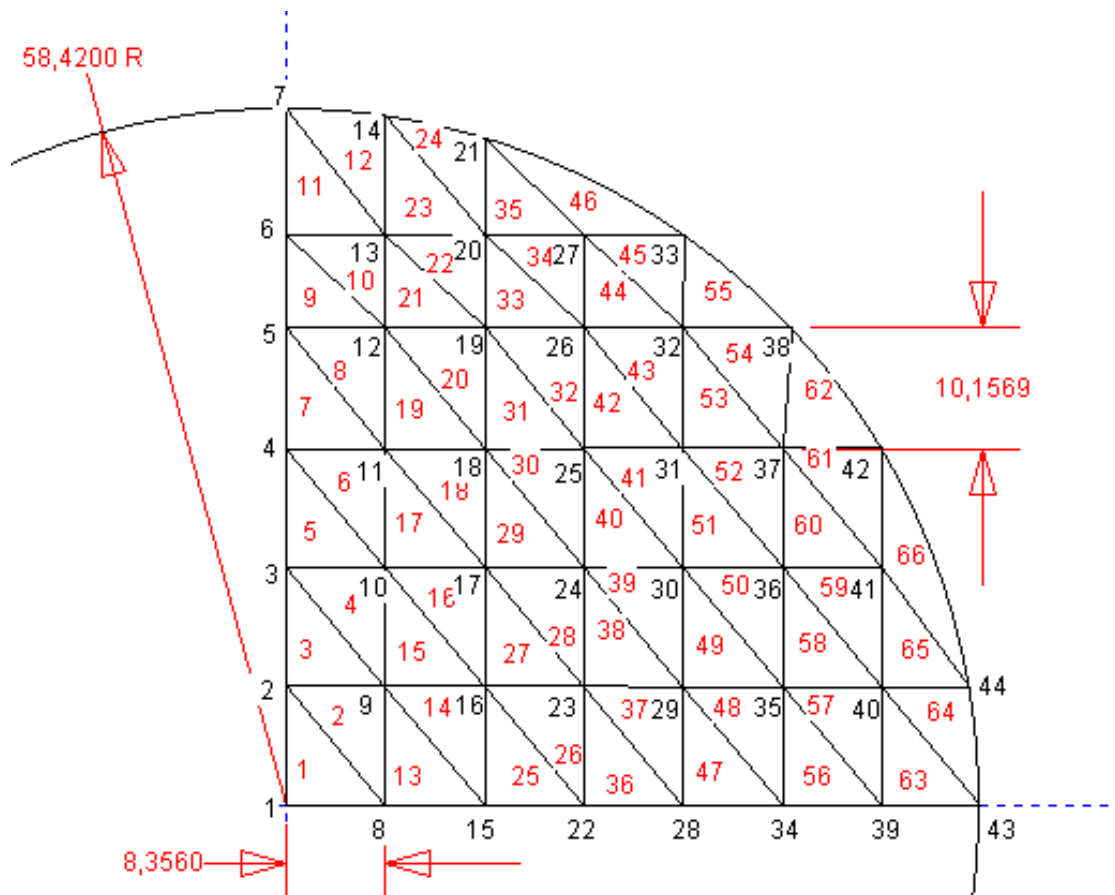


Figura B-3 Chapa Circular, com raio de corte = 0.

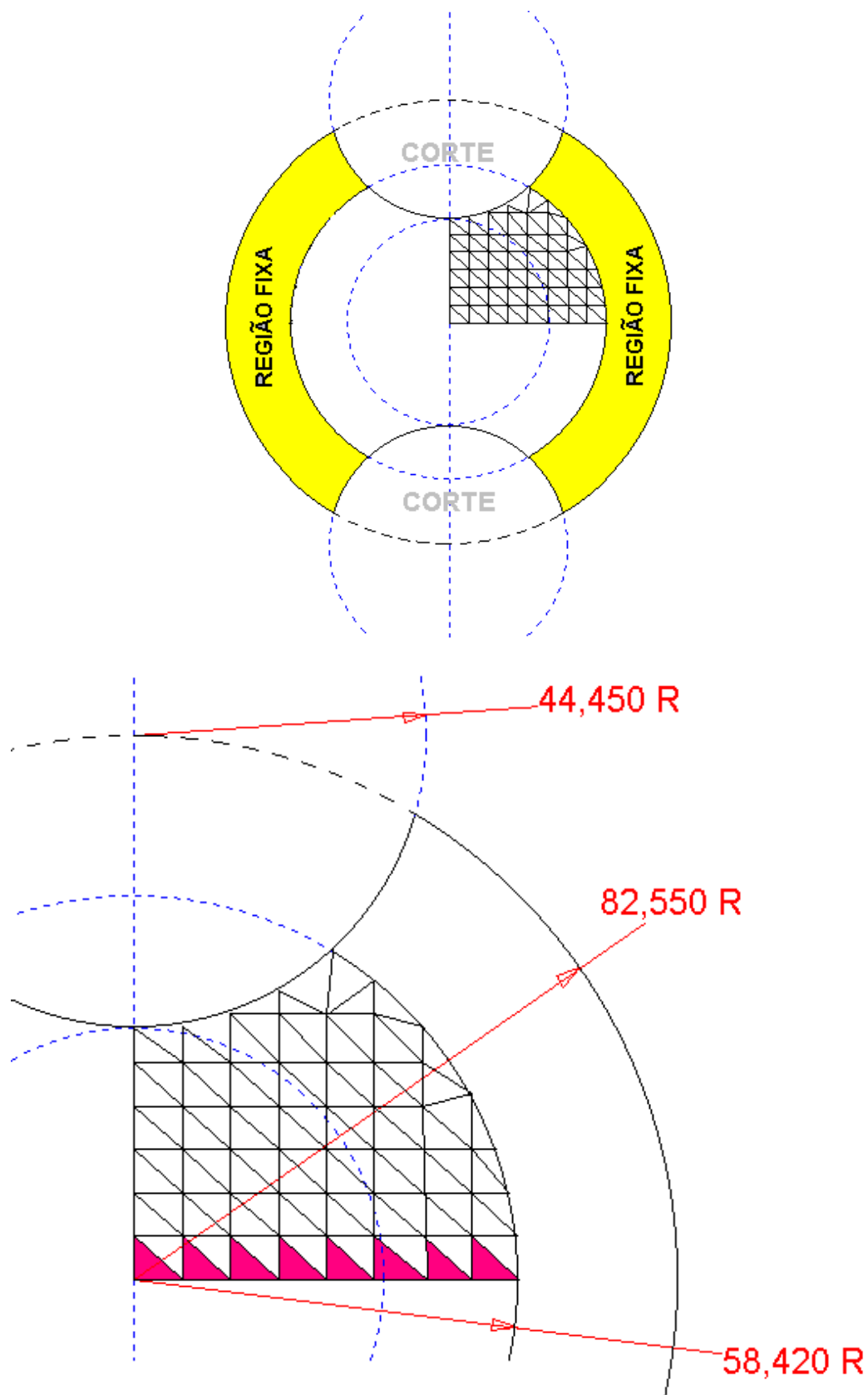


Figura B-4 Chapa Circular com raio de corte de de 44,45 mm

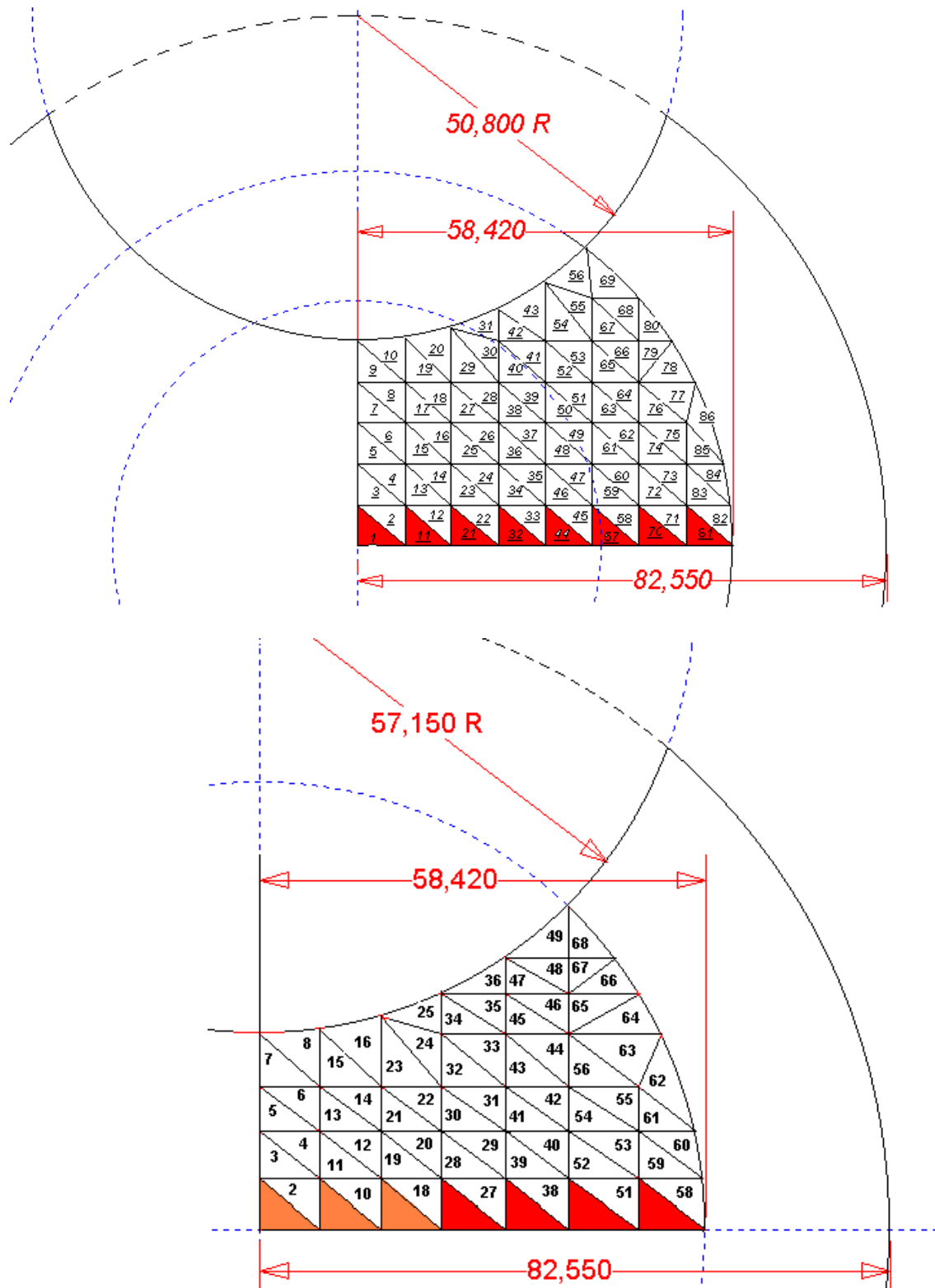


Figura B-5 Malha Empregada para Chapa Circular com Raio de Corte (em cima)  $r=50,80$  mm; (em baixo)  $r=57,15$  mm

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)