

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO**

Carlos Augusto Gonçalves Tibiriçá

**Uma Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana para
Modelagem de Incertezas**

Silvia Modesto Nassar, Dra
Orientadora

Florianópolis, março de 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Uma Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana para Modelagem de Incertezas

Carlos Augusto Gonçalves Tibiriçá

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de mestre em Ciência da Computação, área de concentração Inteligência Computacional e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Raul Sidnei Wazlawick, Dr

Coordenador do Curso

Banca Examinadora

Silvia Modesto Nassar, Dra

Orientadora

Emil Kupek, Dr

Luiz Fernando Jacintho Maia, Dr

Maria Marlene de Souza Pires, Dra

Paulo José de Freitas Filho, Dr

Rogério Cid Bastos, Dr

A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original. (Albert Einstein)

Dedico esta dissertação ao meu pai João Batista e minha
mãe Luzia pelo incomensurável apoio!

Agradecimentos

A professora e orientadora desta pesquisa Silvia Modesto Nassar pelo suporte, dedicação e como não citar os incontáveis e ímpares conselhos, sugestões e conhecimentos cedidos durante todo o decorrer da evolução desta pesquisa.

A professora Maria Marlene Pires pelas idéias e conhecimentos imprescindíveis para o correto desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores Emil Kupek, Luiz Fernando Jacintho Maia, Paulo José de Freitas Filho e Rogério Cid Bastos pelas contribuições oferecidas à conclusão desta pesquisa.

Aos meus parentes próximos que mesmo distante me apoiaram nesta jornada. Dentre estes devo citar meus pais, minha irmã Luciana, meu irmão Paulo Henrique e minha companheira Roberta.

A meus antes colegas de curso e agora amigos, Tenório, Jaqueline e ao casal Gian e Carla pelo apoio e conselhos nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus amigos Ana, André, Gabriela, Leonardo, Marcelo (Parafina), Marcelo (Dego), Muleka, Vinícius e a todos que mesmo aqui anônimos me acolheram durante todo este magistral período de minha vida.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
Lista de Siglas	xi
Resumo	xii
Abstract	xiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivo Geral	3
1.2 Objetivos Específicos	3
1.3 Justificativa	4
1.4 Estrutura do Trabalho	4
2 Tratamento de Incertezas	5
2.1 Lógica <i>Fuzzy</i>	10
2.1.1 Teoria dos Conjuntos <i>Fuzzy</i>	11
2.1.2 Propriedades, Operações e Operadores <i>Fuzzy</i>	13
2.1.3 Funções de Pertinência	16
2.1.4 Regras <i>Fuzzy</i>	17
2.2 Sistemas Especialistas <i>Fuzzy</i>	20
2.3 Teoria das Medidas <i>Fuzzy</i>	23
2.3.1 Medidas de Crença e Medidas de Plausibilidade	24

2.4	Teoria Clássica da Probabilidade	28
2.5	Teorema de Bayes	30
2.5.1	Redes Bayesianas	32
2.6	Teoria dos Conjuntos <i>Fuzzy</i> e Probabilidade	33
2.7	Aplicações Híbridas	35
3	Abordagem Híbrida <i>Fuzzy</i>-Bayesiana	39
3.1	Metodologia da Abordagem Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana	40
3.2	Prova Matemática da Inferência Híbrida <i>Fuzzy</i> - Bayesiana	46
3.3	Exemplo da Abordagem Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana	51
3.3.1	O Problema do Distúrbio Nutricional	51
3.3.2	A Inferência Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana	53
3.4	Uma Análise da Abordagem Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana	70
4	Considerações Finais	76
4.1	Conclusão	76
4.2	Trabalhos Futuros	78
	Referências	79
A	Domínio de Aplicação que Apresenta Incertezas Imprecisas e Aleatórias	83
B	Publicação	84

Lista de Figuras

2.1	Conceitos de Dados - Informação - Conhecimento	6
2.2	Barra <i>Fuzzy</i>	10
2.3	Exemplo de Conjuntos <i>Fuzzy</i> para Uma Variável Profundidade	13
2.4	Função L	17
2.5	Função PI	18
2.6	Função Triangular	18
2.7	Função Gama	18
2.8	Função Z	19
2.9	Função Pi-Sino	19
2.10	Função S	19
2.11	Estrutura dos Sistemas Especialistas <i>Fuzzy</i>	22
2.12	Exemplo de Uma Rede Bayesiana	32
3.1	Diagrama da Metodologia da Abordagem Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana	42
3.2	Diagrama de Classe do Domínio de Análise	54
3.3	Parte Qualitativa da Rede Híbrida do Domínio de Análise	56
3.4	Transição Entre os Estados Nutricionais	63
3.5	Tela Inicial do Domínio de Análise	64
3.6	Graus de Pertinência da Variável Cintura Quadril	65
3.7	Graus de Pertinência da Variável Circunferência Abdominal	66
3.8	Vetor de Probabilidades de Saída da Rede Bayesiana Tradicional	69
3.9	Vetor de Probabilidades de Saída da Rede Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana	69

3.10	Caso 1 - Típico	71
3.11	Caso 2 - Imprecisão “ALTA” para a Variável <i>Cintura Quadril</i>	72
3.12	Caso 3 - Imprecisão “ALTA” para a Variável <i>Cintura Quadril</i> e “LEVE” para a Variável <i>Circunferência Abdominal</i>	73
3.13	Caso 4 - Imprecisão “ALTA” para as Variáveis <i>Cintura Quadril</i> e <i>Circun-</i> <i>ferência Abdominal</i>	74
3.14	Caso 5 - Imprecisão “MUITO ALTA” para as Variáveis <i>Cintura Quadril</i> e <i>Circunferência Abdominal</i>	75
A.1	Rede Completa de Diagnóstico de Estado Nutricional	83

Lista de Tabelas

2.1	t-conormas	16
2.2	t-normas	16
2.3	Principais Operadores <i>Fuzzy</i>	21
3.1	Probabilidades <i>a priori</i> da Evidência Circunferência Abdominal	55
3.2	Probabilidades <i>a priori</i> da Evidência Relação Cintura Quadril	55
3.3	Probabilidades <i>a priori</i> do nó Intermediário Indicadores Antropométricos	55
3.4	Probabilidades <i>a priori</i> da Hipótese Estados Nutricionais	56
3.5	Conjuntos <i>Fuzzy</i> e Graus de Pertinência da Variável Cintura Quadril	65
3.6	Conjuntos <i>Fuzzy</i> e Graus de Pertinência da Variável Circunferência Abdominal	65

Lista de Siglas

AHFB	Abordagem Híbrida <i>Fuzzy</i> -Bayesiana
BC	Base de Conhecimento
BD	Base de Dados
CC	Conjuntos Clássicos
CF	Conjuntos <i>Fuzzy</i>
FP	Função de Pertinência
GP	Graus de Pertinência
IC	Inteligência Computacional
IMC	Índice de Massa Corporal
LF	Lógica <i>Fuzzy</i>
OMS	Organização Mundial da Saúde
PBA	Probabilidade Básica Associada
RB	Redes Bayesianas
RBC	Raciocínio Baseado em Casos
RF	Regras <i>Fuzzy</i>
SEF	Sistemas Especialistas <i>Fuzzy</i>
TCC	Teoria Clássica de Conjuntos
TCF	Teoria dos Conjuntos <i>Fuzzy</i>
TMF	Teoria das Medidas <i>Fuzzy</i>
TP	Teoria da Probabilidade
UD	Universo de Discurso
VL	Variáveis Linguísticas

Resumo

As incertezas existentes no mundo real são tratadas pela mente humana de maneira que seja possível alguma tomada de decisão baseada em fatos que não representem uma verdade absoluta.

As Redes Bayesianas e os Sistemas Especialistas *Fuzzy* são técnicas de Inteligência Computacional que modelam incertezas distintas: a primeira trata a aleatoriedade e a segunda a imprecisão. No entanto, em alguns domínios, co-existem esses dois tipos de incerteza. Esta pesquisa propõe uma abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana para modelar incertezas aleatórias e imprecisas baseada na união da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e da Teoria da Probabilidade.

O hibridismo *fuzzy*-bayes permite trabalhar com a imprecisão nas entradas de uma rede bayesiana. As variáveis imprecisas são fuzzificadas, propagadas utilizando o teorema de bayes modificado que gera uma redistribuição do vetor de probabilidades de saída da rede híbrida. Esta redistribuição ocorre devido ao reconhecimento da incerteza presente nas entradas dos dados, foi fundamentada matematicamente e avaliada considerando o problema de distúrbio nutricional. A avaliação demonstrou que com diferentes níveis de imprecisão o vetor de saída da rede variou desde a máxima entropia até a ausência de imprecisão.

Desta forma disponibiliza-se uma modelagem empírica que permite entender uma realidade envolta em incertezas, a partir de um conjunto de pesos elicitados de um especialista do domínio em análise. Estes pesos expressam graus de crença representados por valores de probabilidade e graus de pertinência.

Palavras chave: Lógica *Fuzzy*, Redes Bayesianas e Sistemas Híbridos.

Abstract

Existing uncertainties in the real world are treated by the human mind to make possible decision making based on facts that do not represent an absolute truth.

Bayesian Networks and Fuzzy Expert Systems are computational intelligence techniques that model distinct uncertainties: the first treats randomness and the latter imprecision. However, in some domains, these two types of uncertainty coexist. This research proposes a fuzzy-bayesian hybrid approach to model random and imprecise uncertainties based on the union of Fuzzy Set Theory and Probability Theory.

The fuzzy-bayesian hybridism is able to deal with the imprecision in the inputs of a Bayesian Network. The imprecise variables are fuzzyfied and propagated using the modified Bayes' Theorem which generates a redistribution of the output probabilities vector from the hybrid network. This redistribution occurs based on the recognition of the uncertainty present in the data inputs, is mathematically proven, and was evaluated using a nutritional disturbance problem. The evaluation demonstrated that different levels of imprecision change the network output vector from the maximum entropy to the absence of imprecision.

In this way, an empirical modelling is available that allows us to understand a reality surrounded by uncertainties, using a set of weights provided by an expert in the field under analysis. These weights express degrees of belief represented by probability values and membership degrees.

Key words: Fuzzy Logic, Bayesian Network, and Hybrid Systems.

Capítulo 1

Introdução

A compreensão dos mecanismos da mente humana fascina inúmeras pessoas e as tornam estudiosas do assunto em diversas áreas como filosofia, medicina, ciência cognitiva e ciência da computação. A Inteligência Computacional (IC) é a área da ciência da computação encarregada desta árdua tarefa. Entretanto neste campo não basta apenas compreender, é necessário também criar modelos computacionais que simulem ou reproduzam comportamento humano.

A maneira de representar computacionalmente os processos realizados pela mente humana entre *inputs* e *outputs* se torna ainda mais complexa quando os estímulos estão envoltos por incertezas. Em [RUS 95] é exposto que a presença de incerteza altera radicalmente o modo como os agentes¹ tomam decisões.

O seguinte ditado popular: “A única certeza que o ser humano tem na vida é a morte” (autor desconhecido), até os dias atuais, ainda não foi refutado. Mas pode-se entender que mesmo esta declaração possui uma incerteza: quando este evento irá ocorrer? Neste sentido, desenvolver sistemas computacionais inteligentes capazes de modelar e reconhecer a incerteza para simular o comportamento humano se torna importante e interessante pois a mente humana realiza inferências em situações sob incertezas.

O desenvolvimento de sistemas inteligentes apresenta etapas semelhan-

¹Neste livro, um agente é tudo que pode ser considerado capaz de perceber seu ambiente por meio de sensores e de agir sobre esse ambiente por intermédio de atuadores. Por exemplo: um agente humano tem olhos e ouvidos como sensores e tem mãos e pernas que servem como atuadores.

tes às dos sistemas que não implementam técnicas de inteligência computacional. Algumas destas etapas são [SOM 03]: a análise de requisitos, a implementação, teste e validação. Entretanto quando o domínio de aplicação apresenta incerteza(s) é necessário modelar esta(s) incerteza(s) para permitir que os sistemas inteligentes ofereçam auxílio aos seres humanos em problemas e tarefas complexas do mundo real.

A Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* (*Fuzzy Set Theory*), Teoria da Probabilidade e Teoria das Medidas *Fuzzy* (*Fuzzy Measure Theory*) são exemplos de teorias utilizadas para modelar incertezas e que podem ser aplicadas no desenvolvimento de sistemas inteligentes.

Pesquisadores da área da inteligência computacional, vêm buscando o aprimoramento do desenvolvimento de sistemas que utilizam métodos semelhantes aos dos seres humanos para inferir e concluir com o maior grau de certeza possível sobre determinado domínio.

A incerteza de um domínio de aplicação pode ser trabalhada, no desenvolvimento de sistemas inteligentes, tanto na entrada dos dados, como nos resultados obtidos e/ou no raciocínio.

Algumas técnicas de IC utilizadas no desenvolvimento de sistemas inteligentes são: sistemas especialistas probabilísticos, sistemas especialistas *fuzzy*, redes neurais, sistemas que utilizam a metodologia de Raciocínio Baseado em Casos (RBC) e sistemas que utilizam mais de uma técnica como por exemplo sistemas especialistas híbridos e redes neuro-*fuzzy*.

Dentre os sistemas especialistas probabilísticos, existem as redes bayesianas, tratando a incerteza aleatória do domínio de aplicação. Um exemplo é o raciocínio médico, onde pacientes com dois grupos similares de sintomas podem obter diagnósticos diferentes [NAS 02].

Os sistemas especialistas *fuzzy* tratam incertezas imprecisas. Por exemplo, um banco fornece crédito financeiro, pelo caixa automático, para o indivíduo que apresentar renda superior a R\$1.000,00. Assim, para um indivíduo com renda de R\$999,00 o crédito será negado, mas será que a diferença de R\$ 1,00 deve incapacitar um indivíduo de receber crédito? Problemas de classificação deste tipo podem ser tratados pela teoria

dos conjuntos *fuzzy*.

Entretanto, existem domínios onde a incerteza por imprecisão e aleatoriedade co-existem. Esta pesquisa apresenta quatro tipos de incertezas: vaga, imprecisão, ambigüidade e aleatoriedade e possíveis teorias utilizadas para tratar tais incertezas. Propõe uma abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana que permite desenvolver sistemas especialistas que modelam incertezas aleatórias e/ou imprecisas.

As buscas bibliográficas realizadas nesta pesquisa demonstraram que os tipos de hibridismos mais utilizados são as redes neurais-*fuzzy* e algoritmos genéticos *fuzzy*. O hibridismo *fuzzy*-bayesiano ainda é pouco utilizado no desenvolvimento de sistemas inteligentes, isto acontece talvez, porque alguns estudiosos da teoria da probabilidade e da lógica *fuzzy* ainda não se convenceram das vantagens da união dessas modelagens. Esta é uma questão complexa e é discutida no item 2.6.

Exposto estas idéias, cabe levantar a seguinte questão que norteia esta pesquisa: Qual a influência de variáveis imprecisas nos resultados de uma rede bayesiana? Como modelar essa imprecisão em uma rede bayesiana?

Desta forma, o problema de pesquisa nesta dissertação é: a investigação de uma modelagem *fuzzy* para tratar variáveis imprecisas nas entradas de uma rede bayesiana.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é desenvolver uma Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana (AHFB) que permita modelar incertezas aleatórias e/ou imprecisas no desenvolvimento de sistemas especialistas, visando permitir o reconhecimento de incertezas inerentes a determinados problemas do mundo real.

1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar os conceitos bayesianos e *fuzzy* fundamentais para o desenvolvimento da abordagem híbrida proposta;

- demonstrar matematicamente que a abordagem híbrida proposta pode ser generalizada para domínios com incertezas aleatórias e/ou imprecisas;
- avaliar a abordagem híbrida proposta considerando um domínio de análise de estado nutricional em mulheres adultas;

1.3 Justificativa

Esta pesquisa surgiu a partir de um problema apresentado para desenvolver um sistema especialista de diagnóstico de distúrbio nutricional. Durante o processo de modelagem do domínio foram identificados dois tipos distintos de incerteza: imprecisão e aleatoriedade. Como as abordagens *fuzzy* e bayesianas, individualmente não proporcionaram uma modelagem satisfatória que representasse o conhecimento do especialista, sobreveio à idéia de desenvolver uma abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana para modelar as incertezas presentes no domínio.

Espera-se que o desenvolvimento de uma abordagem híbrida *fuzzy* - bayesiana possa contribuir na área de inteligência computacional a respeito da modelagem de domínio sob incertezas aleatórias e imprecisas.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este documento é composto por 3 outros capítulos. No capítulo 2 encontra-se a fundamentação teórica que suporta o desenvolvimento desta pesquisa. O capítulo 3 descreve a metodologia e apresenta a prova matemática da abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana proposta, demonstra a inferência híbrida e realiza uma avaliação da abordagem em um domínio de análise. As considerações finais estão apresentadas no capítulo 4. O apêndice A ilustra um domínio de aplicação que apresenta incertezas imprecisas e aleatórias. O apêndice B apresenta a publicação gerada a partir desta pesquisa.

Capítulo 2

Tratamento de Incertezas

Os sistemas especialistas diferem-se dos sistemas convencionais principalmente por possuir uma Base de Conhecimentos (BC) ao invés de Base de Dados (BD). Apesar de estes dois conceitos serem utilizados como sinônimos fora da área da inteligência computacional, existe uma diferença fundamental.

O próprio nome atribuído a estas bases já as diferencia, pois *dados* e *conhecimento* são particularmente distintos. Existe ainda uma terceira classe que está situada entre as já citadas denominada de *informação*. A figura 2.1 apresenta os conceitos dessas classes.

O indivíduo encarregado do desenvolvimento de um sistema inteligente é o engenheiro do conhecimento. Em [HAR 86] é exposto que esse profissional se diferencia do analista de sistemas principalmente pela capacidade de elicitação do conhecimento, que é um processo mais complexo do que a análise do sistema.

A etapa de aquisição do conhecimento é, geralmente, a mais complexa no processo de desenvolvimento de sistemas inteligentes pois trata da organização, transferência e transformação de alguma fonte de conhecimento para um computador. O conhecimento pode se originar de várias fontes como filmes, livros, documentos, pessoas, etc. As principais etapas do processo de aquisição do conhecimento são: (i) identificar as características do problema; (ii) isolar os conceitos principais e suas relações; (iii) identificar inferências sobre estes conceitos.

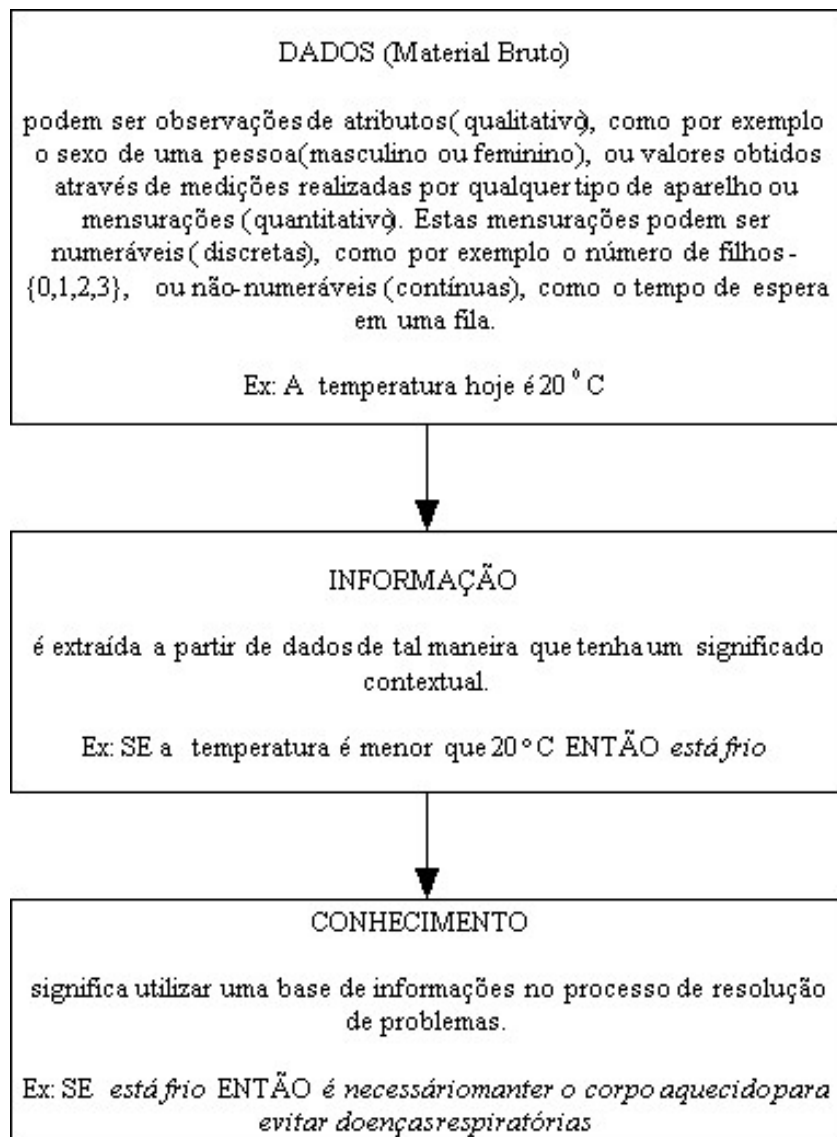


Figura 2.1: Conceitos de Dados - Informação - Conhecimento

Existem algumas possíveis formas utilizadas para aquisição de conhecimento dentre elas se destacam:

- a observação do(s) especialista(s) em seu ambiente de trabalho para obter uma visão real da maneira como o especialista trabalha. Esta técnica pode ser utilizada quando o engenheiro do conhecimento não está familiarizado com o problema.
- as entrevistas com o(s) especialista(s) podem ser utilizadas quando o engenheiro

do conhecimento têm algum conhecimento à respeito do problema. Existem duas maneiras para conduzir uma entrevista: a entrevista desestruturada, onde é realizada uma conversa livre sem muita formalidade e a entrevista estruturada, que exige um planejamento detalhado.

- ensinar de volta (teach back): o engenheiro do conhecimento “ensina” ao especialista algum aspecto previamente escolhido e tenta sintonizar o processo com o especialista;

Durante o processo de aquisição do conhecimento, geralmente ocorrem algumas dificuldades como:

- dificuldade de compreensão por parte do engenheiro do conhecimento devido ao uso de vocabulário próprio por parte do especialista;
- o especialista quase nunca está ciente de como usa o conhecimento;
- algumas soluções são intuitivas;
- o especialista tem dificuldade de verbalizar sob pressão;
- conhecimento exposto pode ser irrelevante, incompleto e/ou inconsistente;

O desenvolvimento de uma BC é complexa pois requer muita habilidade por parte do engenheiro do conhecimento para adquirir do(s) especialista(s) o conhecimento e definir qual a técnica computacional de representação e manipulação. Algumas técnicas de representação de conhecimento como lógica, redes semânticas, regras de produção, frames e os métodos de raciocínios dedutivo e indutivo podem ser utilizadas para representação de conhecimento.

Como o objetivo desta pesquisa não está diretamente relacionado com as técnicas de aquisição e representação de conhecimento elas não serão expostas com maior detalhamento, como fonte de pesquisa consulte [GON 93], [HAR 90] e [REZ 03].

Expostas estas questões é necessário esclarecer que a transição entre dados, informação e conhecimento é geralmente complexa e carregada de incerteza, devido a possível presença de incertezas nestes três conceitos.

Neste momento, é necessário esclarecer que a quantidade de publicações a respeito do termo **incerteza** é vastíssimo, complexo, apresenta diferentes opiniões e, ao que tudo indica, ainda será por um longo período assunto para dissertações, teses, artigos e livros. Portanto as informações a seguir apresentam as linhas das referências citadas, com o intuito de fornecer a base conceitual para a abordagem híbrida proposta nesta pesquisa.

O termo *incerto*, segundo as referências, pode significar: não certo, indeterminado, impreciso, duvidoso, vago, ambíguo, aleatório. Desta forma é possível classificar a incerteza em duas categorias gerais: vagueza e aleatoriedade. Zadeh [ZAD 79] expõe que imprecisão é um componente da vagueza apresentando o seguinte exemplo:

1. “Ruth tem a pele escura e é proprietária de um Porsche vermelho”;
2. “Ruth vive em algum lugar perto de Berkeley”

Na expressão 1 os adjetivos “escura” e “vermelho” são imprecisos porque eles tem graduações entretanto não são ambíguos. E o termo “algum lugar” na expressão 2 apresenta uma ambigüidade ao invés de graduação pois a imprecisão está se referindo à localização de Ruth.

Desta maneira, tem-se que a vagueza é composta pela combinação de imprecisão e ambigüidade.

Em geral, a *vagueza* está associada à dificuldade em se fazer distinções precisas ou bem definidas do mundo real, ou seja, algum domínio de interesse é vago se existe a dificuldade em se estabelecer limites bem definidos [KLI 88]. A vagueza pode estar associada com a dificuldade em se atribuir um elemento a um termo lingüístico, (e.g., a qualidade dos dados é “boa”, a estatura de Paulo é “alta” ou José é “careca”).

A *imprecisão*, geralmente, está associada a termos quantitativos (dados contáveis) e termos qualitativos [ROS 95]. Por exemplo Cristina tem “entre 30 e 50” anos de idade ou, a Lagoa da Conceição está localizada em Santa Catarina são exemplos de informação imprecisa. Para caracterizar a diferença entre imprecisão e vagueza apresenta-se o seguinte exemplo: a expressão “a Lagoa da Conceição está localizada em Santa Catarina” é imprecisa entretanto não é vaga pois os limites territoriais do estado de Santa

Catarina são bem definidos entretanto a localização precisa da Lagoa da Conceição não é bem definida nesta expressão.

Ambigüidade, por outro lado, está associada com a relação um para muitos, ou seja, situações na qual a escolha entre duas ou mais alternativas é pouco especificada [KLI 88]. A ambigüidade está relacionada com a capacidade de interpretar racionalmente em mais de uma maneira. Um exemplo simples é a palavra “manga” que pode significar tanto uma fruta quanto uma parte de uma camisa, entretanto isto ocorre quando a palavra surge isolada, se ela for inserida em um contexto como por exemplo “Ontem degustei uma manga muito saborosa” fica claro a que “manga” se está referindo. Contudo a ambigüidade pode se apresentar em situações mais complexas (e.g., o júri está deliberando a respeito da “responsabilidade” do réu - culpado ou inocente) onde existem diversos fatores influenciando a decisão do júri.

A *aleatoriedade*, na visão do senso comum, é compreendida no sentido da realização de uma tarefa sem a intencionalidade do resultado (ao acaso). Por exemplo, selecionar um indivíduo para opinar sobre algo. Na visão estatística a aleatoriedade diz respeito à fenômenos não determinísticos, ou seja, aqueles que sob as mesmas condições não se pode afirmar com certeza o que ocorrerá numa experimentação particular. A aleatoriedade está presente quando se tem o conhecimento dos possíveis resultados, mas não se pode prever com certeza qual resultado individualmente irá ocorrer. Apesar de não se poder prever o resultado particular, o fundamento da idéia de probabilidade diz que existe um certo padrão regular nos resultados que se evidencia após várias repetições do mesmo experimento [MOO 02]. Essa incerteza pode ser tratada por modelos de probabilidade que segundo [BAR 03] são modelos construídos a partir de certas hipóteses e constituem-se de duas partes: possíveis resultados e de uma certa lei que diz quão provável é cada resultado. Por exemplo aqueles experimentos onde todos os resultados possuem a mesma chance de ocorrer (modelo uniforme) ou com diferentes chances como modelos de probabilidade como normal ou exponencial. Essa diferença do termo aleatório entre o senso comum e a visão estatística está relacionada com a dificuldade de presenciar-se repetições suficientes do mesmo fenômeno aleatório para verificar a regularidade, a longo prazo, dos resultados.

As pesquisas e trabalhos técnicos abordando os tópicos mencionados já estão bastante especializadas por este motivo serão apresentados os principais conceitos de probabilidade, teoria dos conjuntos *fuzzy*, medidas *fuzzy* e as redes bayesianas. Estas que utilizam o teorema de Bayes, que trata com probabilidades condicionais. Faz-se necessário a apresentação dos conceitos de lógica *fuzzy* e redes bayesianas pois estes são a base da teoria da abordagem híbrida proposta nesta pesquisa.

2.1 Lógica *Fuzzy*

A própria definição de Lógica *Fuzzy* (LF), também conhecida como Lógica Nebulosa ou Lógica Difusa é, em geral, um pouco complexa de ser compreendida, pois trata a incerteza de maneira diferente de como é apresentada no cursos de nível médio e até mesmo em alguns cursos superiores. As principais características da lógica *fuzzy* e da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*(TCF) são apresentados a seguir.

A lógica *fuzzy* é uma estrutura de conceitos e técnicas que se relacionam com o modo de raciocínio aproximado ao invés de exato [WIL 99].

A teoria a respeito da maneira *fuzzy* de pensar foi introduzida no trabalho sobre Conjuntos *Fuzzy* (CF) de Loft A. Zadeh em 1965, mas baseado na lógica multivalorada de Jan Lukasiewicz em 1920 [GRI 97].

A LF trabalha com Variáveis Linguísticas (VL) para modelar o raciocínio humano. Uma variável linguística pode ser compreendida como sendo a forma que os seres humanos utilizam para representar seu conceito sobre diversas situações de incerteza, nestas variáveis os valores que elas podem assumir não são números, e sim palavras. Por exemplo, observe a figura 2.2



Figura 2.2: Barra *Fuzzy*

É complexo indicar um ponto da barra *fuzzy* onde se pode afirmar com

certeza quando a cor branca se transforma em preta. O que acontece é a transição gradual de uma cor para a outra, ou seja, existem pontos onde a cor é branca, outros onde ela é preta e n outros pontos na qual a cor é *um pouco* branca, *aproximadamente* preta e assim por diante. Os termos citados acima, ou outros como os seguintes, *quente, morno, jovem, idoso*, são as variáveis linguísticas. As variáveis linguísticas são os rótulos dos conjuntos *fuzzy*.

O raciocínio *fuzzy* permite inferir e concluir situações imprecisas ou vagas em graus de verdade, e não com uma possível exatidão que não represente a verdadeira realidade. Isto possibilita representar e tratar a incerteza inerente à determinados domínios em sistemas computacionais permitindo desenvolver aplicações digitais que simulem a capacidade de raciocinar de maneira similar à dos seres humanos.

Utilizar os conjuntos *fuzzy* com a aplicação das Funções de Pertinência (FP), combinados em expressões lógicas das regras de avaliação e aplicando os operadores *fuzzy*, possibilita uma maneira de modelar e implementar o raciocínio dos seres humanos em sistemas computacionais.

Os tópicos a seguir apresentam os conceitos destes componentes essenciais para a aplicação da lógica *fuzzy*.

2.1.1 Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Os conceitos de conjuntos *fuzzy* foram apresentados por Lofti A. Zadeh em 1965 [ZAD 65]. Basicamente, a principal característica destes conjuntos é, permitir que seja feita uma representação ou modelo do conhecimento e do raciocínio humano a partir de incerteza imprecisa e/ou vaga.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* pode ser vista como uma extensão da Teoria dos Conjuntos Clássicos (TCC) [REZ 03]. Entretanto, é importante ressaltar que as situações existentes na TCC, ou seja, certeza de pertinência total ou não pertinência de um elemento x a um determinado conjunto A , são duas entre algumas das situações possíveis quando se trabalha com conjuntos *fuzzy*.

Os Conjuntos Clássicos (CC) são aqueles criados a partir da Teoria

Clássica de Conjuntos. Na visão dos CC, um elemento x qualquer possui apenas duas possibilidades de se relacionar com um conjunto A , pertencer ou não pertencer a ele. Mesmo se existir uma intersecção ou união entre dois conjuntos, o elemento será membro ou não membro do conjunto formado a partir desta intersecção ou união. Este conceito pode ser apresentado pela função característica de um conjunto A .

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in A; \\ 0 & \text{se e somente se } x \notin A. \end{cases}$$

Desta maneira conclui-se que uma função mapeia elementos de um conjunto universo para um par ordenado $\{0,1\}$. Indicado por [KLI 88]

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0, 1\}$$

Entretanto, existem situações do mundo real que não podem ser modeladas utilizando a Teoria Clássica de Conjuntos, devido a incapacidade de representação da incerteza utilizando valores intermediários no intervalo $[0,1]$.

Com a aplicação dos conjuntos *fuzzy* é possível tratar valores no intervalo $[0,1]$, esses valores denominados Graus de Pertinência (GP) são atribuídos a cada elemento de cada conjunto *fuzzy* que compõe o Universo de Discurso (UD). Os GP representam a pertinência de um elemento à um conjunto *fuzzy*, estes valores podem ir da pertinência total representados pelo número um (1) à total não pertinência representados pelo número zero (0).

O universo de discurso é um intervalo formado pelos possíveis valores de uma determinada variável. Por exemplo, uma variável x possui valores em um intervalo $[30,100]$. Neste sentido o universo de discurso é o delimitador do contexto de análise e de qualquer conjunto nele definido.

A figura 2.3 apresenta um exemplo de um universo de discurso de uma variável *Profundidade* composto por três conjuntos *fuzzy*: *pequena*, *intermediária* e *grande* de um sistema *fuzzy* de perfuração de poços artesianos. Cada conjunto *fuzzy* é modelado pela sua respectiva função de pertinência.

Alguns tipos de FP e seus respectivos gráficos são apresentados no item 2.1.3.

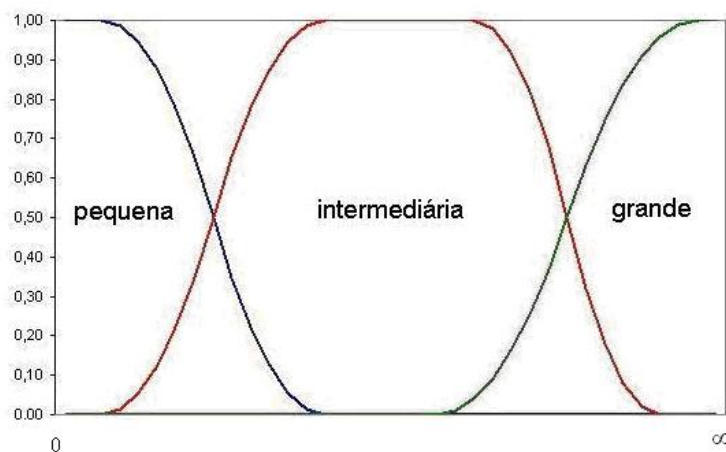


Figura 2.3: Exemplo de Conjuntos *Fuzzy* para Uma Variável Profundidade

2.1.2 Propriedades, Operações e Operadores *Fuzzy*

A maioria das definições e operações associadas com conjuntos *fuzzy* são extensões da definição correspondente da teoria dos conjuntos clássicos [KAR 86].

As propriedades básicas relacionadas aos conjuntos *fuzzy* são apresentadas a seguir, sendo que $\mu_A(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x em um conjunto *fuzzy* A e X representa o universo de discurso:

- Igualdade entre dois conjuntos *fuzzy*

Um conjunto *fuzzy* A é considerado igual a um conjunto *fuzzy* B SE E SOMENTE SE $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, onde estes valores são obtidos pela aplicação de suas respectivas funções de pertinência.

- Inclusão de um conjunto em outro conjunto

Um conjunto *fuzzy* $A \subset X$ está incluído em outro conjunto *fuzzy* $B \subset X$ SE E SOMENTE SE $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \forall x \in X$.

Exemplo: Considere o universo de discurso $X = 1, 2, 3$ e os conjuntos *fuzzy* $A = \{0.3/1, 0.5/2, 1/3\}$ e $B = \{0.5/1, 0.55/2, 1/3\}$.

Então A é um subconjunto de B .

- Cardinalidade

A cardinalidade de um conjunto clássico Z , é o número de elementos de Z . Entretanto a cardinalidade de um conjunto *fuzzy* A é representada pela soma dos valores dos graus de pertinência dos elementos $\mu_A(x_i)$.

$$CardA = \mu_A(x_1) + \dots + \mu_A(x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)$$

Exemplo: considerando-se o universo de discurso X do item anterior tem-se que $Card A = 1.80$ e $Card B = 2.05$.

- Conjunto vazio *fuzzy*

Um conjunto *fuzzy* A é um conjunto vazio SE E SOMENTE SE $\mu_A(x) = 0, \forall x \in X$.

- α - cut (corte - α) e o seu variante *strong* α - cut (corte - α forte) de um conjunto *fuzzy*

O α - cut de um conjunto *fuzzy* $A \in X$ é um conjunto clássico $A_\alpha \subset X$, tal que

$$A_\alpha = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Exemplo: Um conjunto *fuzzy* $A = \{0.3/1, 0.5/2, 1/3\}$ de um universo de discurso $X = \{1, 2, 3\}$. Então $A_{0.5} = \{2, 3\}$, $A_{0.1} = \{1, 2, 3\}$ e $A_1 = \{3\}$

O *strong* α - cut de um conjunto *fuzzy* $A \in X$ é um conjunto clássico $A_{\alpha+} \subset X$, tal que $A_{\alpha+} = \{x | A(x) > \alpha\}$

Após apresentadas as propriedades básicas dos conjuntos *fuzzy* são apresentados os operadores e as operações destes conjuntos.

Seja um universo de discurso X , tem-se os seguintes conjuntos *fuzzy*,

$$A = \{0.6 / x_1, 0.3 / x_2, 1 / x_3, 0 / x_4\}$$

$$B = \{0.8 / x_1, 0.5 / x_2, 0.1 / x_3, 0.3 / x_4\}$$

- Normal

Um conjunto *fuzzy* é considerado *normal* se existir pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $\mu_A(x)=1$.

Exemplo: O conjunto *fuzzy* A é *normal*, enquanto que B não.

- Altura

A altura de um conjunto *fuzzy* é o maior grau de pertinência de um elemento pertencente ao conjunto *fuzzy*.

Exemplo: Altura de A é 1 e a altura de B é 0.8.

- Suporte

É representado por $\text{Supp}(A)$ e é formado pelo conjunto clássico cujos elementos apresentam grau de pertinência diferente de 0.

Exemplo: $\text{Supp}(A) = \{x_1, x_2, x_3\}$

$\text{Supp}(B) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

- Complemento

O complemento de um conjunto *fuzzy* A é denotado por \bar{A} e pode ser definido por

$$\mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i)$$

Os operadores *união* e *intersecção* são conhecidos na matemática *fuzzy* como *t-conormas* e *t-normas*, respectivamente. Os principais tipos de cada uma dessas famílias de operadores são apresentados à seguir:

- União (t-conorma)

Corresponde ao conectivo lógico *OU*, denotado por $C = A \cup B$. As principais *t-conormas* estão representadas na tabela 2.1.

- Intersecção (t-norma)

Corresponde ao conectivo lógico *E*, geralmente denotado por $C = A \cap B$. As principais *t-normas* estão representadas na tabela 2.2.

Nome	Operador
União Padrão	$Max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$
Soma Algébrica	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x)$
Soma Limitada	$Min [1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$
União Drástica	$\mu_A(x)$ para $\mu_B(x) = 0$ $\mu_B(x)$ para $\mu_A(x) = 0$ 1 para outros valores

Tabela 2.1: t-conormas

Nome	Operador
Intersecção Padrão	$Min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$
Produto Algébrico	$\mu_A(x) * \mu_B(x)$
Diferença Limitada	$Max [0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$
Intersecção Drástica	$\mu_A(x)$ para $\mu_B(x) = 1$ $\mu_B(x)$ para $\mu_A(x) = 1$ 0 para outros valores

Tabela 2.2: t-normas

2.1.3 Funções de Pertinência

A forma utilizada para atribuir graus de pertinência a elementos de um conjunto *fuzzy* é a aplicação das funções de pertinência, pois estas funções permitem modelar a incerteza inerente à determinada variável. Estas funções são, também, utilizadas para representar os limites dos conjuntos *fuzzy* pertencentes a uma variável [ABR 99].

Uma variável *fuzzy* pode possuir diversos conjuntos *fuzzy*, entretanto, para cada um destes conjuntos será atribuída uma respectiva função de pertinência. Por exemplo, uma variável *temperatura* possui três conjuntos *fuzzy*: *baixa*, *agradável*, *alta*. Logo, cada um destes conjuntos estará sendo modelado e delimitado pela sua respectiva

função de pertinência que melhor o representar.

Um conjunto *fuzzy* F de um universo de discurso U possui seus graus de pertinência mapeados pela seguinte função de pertinência.

$$\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$$

que permite associar a cada elemento $x \in U$ um número real $\mu_F(x_i)$ no intervalo $[0,1]$, representando o grau de pertinência de x em F . Graus de pertinência elevados representam uma maior pertinência ao conjunto *fuzzy*, enquanto que, os valores 0 e 1 representam a total não pertinência e total pertinência, respectivamente, a um conjunto *fuzzy*.

A escolha da FP é baseada no conhecimento à respeito do domínio de aplicação. Existem diversos tipos de funções de pertinência que podem ser utilizadas, L, Triangular, PI, Z, S, Pi-Sino, Gama e deve-se analisar qual a melhor FP representa a incerteza que se deseja modelar. Estas funções são apresentadas nas figuras 2.4 a 2.10. No domínio de análise da abordagem híbrida proposta implementou-se as funções Z, Pi – Sino e S.

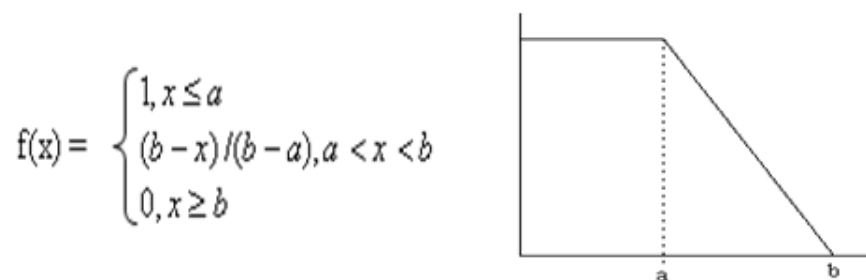


Figura 2.4: Função L

2.1.4 Regras *Fuzzy*

A estrutura do processo de inferência utilizado pela LF está fundamentalmente relacionada às Regras *Fuzzy* (RF), também chamadas de regras de avaliação. Estas regras compõem a base de conhecimento de um sistema *fuzzy*.

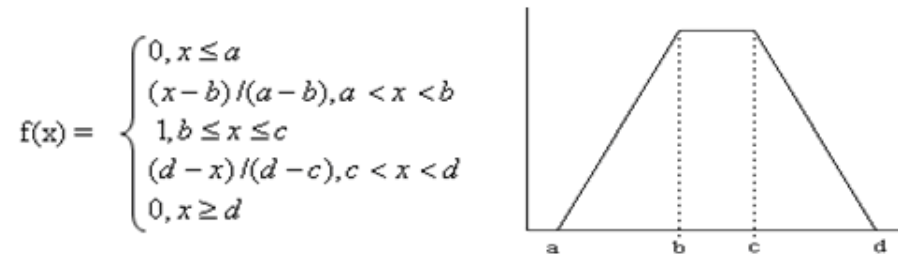


Figura 2.5: Função PI

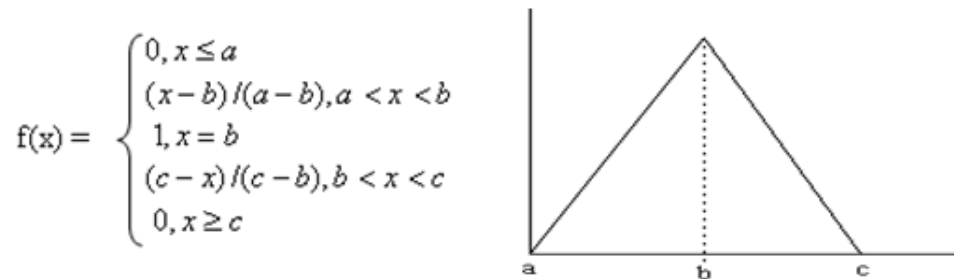


Figura 2.6: Função Triangular

As regras *fuzzy* possuem a estrutura *se-então* para combinar as variáveis de entrada e seus respectivos conjuntos *fuzzy*. Alguns exemplos de RF seriam:

- *SE* o número de falhas é pequeno *ENTÃO* máquina em bom estado.
- *SE* o clima está frio *ENTÃO* aumentar o aquecimento.

No contexto da LF a representação do conhecimento como regras de

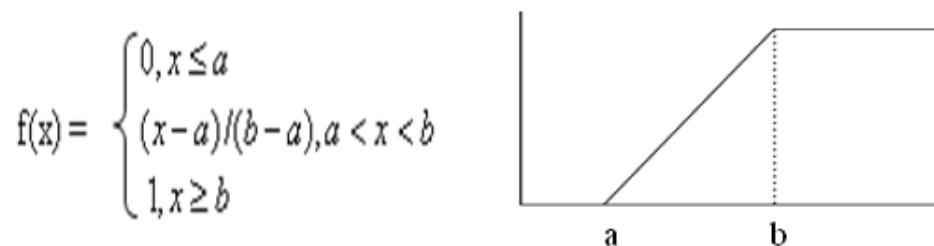


Figura 2.7: Função Gama

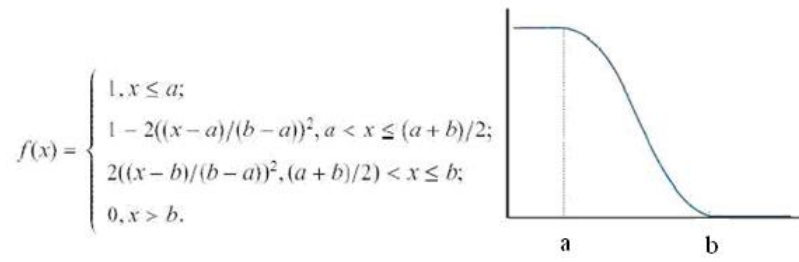


Figura 2.8: Função Z

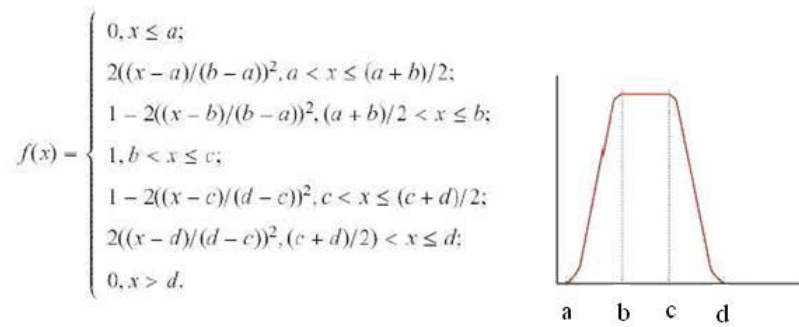


Figura 2.9: Função Pi-Sino

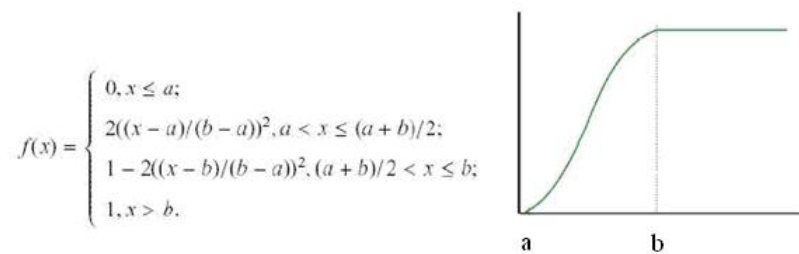


Figura 2.10: Função S

causa e efeito (se-então), geralmente, apresenta seguinte estrutura:

$$\mathbf{SE} VFE_i \text{ é } CFE_{ij} \mathbf{ENTÃO} VFS \text{ é } CFS_i$$

onde,

- $VFE_i, i= 1\dots n \rightarrow$ Variável *fuzzy* de entrada;
- $CFE_{ij} \rightarrow$ Conjunto *fuzzy* da variável de entrada VE_i ;

Onde,

- $i= 1,..n$ - identifica a variável; e
- $j= 1..n$ - identifica o conjunto *fuzzy*.

- $VFS \rightarrow$ Variável *fuzzy* de saída;
- $CFS_i, i=1..n \rightarrow$ Identifica o conjunto *fuzzy* de saída.

Na estrutura das regras, as variáveis de entrada e seus CF são os antecedentes e a(s) variável(s) de saída são os conseqüentes.

No desenvolvimento de uma base de conhecimento composta por regras *fuzzy*, geralmente são identificados diversos CF e para combiná-los é necessário a utilização dos operadores *fuzzy*.

Os principais operadores *fuzzy* utilizados nas regras *fuzzy* são apresentados na tabela 2.3 [BIT 01], onde x e y representam os graus de pertinência dos conjuntos *fuzzy*.

2.2 Sistemas Especialistas *Fuzzy*

A aplicação da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* tem crescido bastante desde a sua apresentação, principalmente na última década. Sistemas de apoio à decisão, algoritmos para aproximação de funções e sistemas de controle baseados em lógica *fuzzy* estão entre as formas mais populares de utilização desses conceitos [REZ 03].

Nome	Operador
Kleene	$\max(1 - x, y)$
Lukasiewicz	$\min(1 - x + y, 1)$
Gödel	1, se $x \leq y$ y, se não
Mandani	$\min(x, y)$
Larsen	$x \cdot y$

Tabela 2.3: Principais Operadores *Fuzzy*

Os Sistemas Especialistas *Fuzzy* (SEF), como qualquer outro sistema especialista, apresenta uma estrutura característica que necessita estar completa para gerar resultados coerentes com a teoria. A figura 2.11 mostra uma possível estrutura dos SEF e seus componentes.

O processo de desenvolvimento de um SEF inicia-se com a delimitação do domínio de aplicação pois, trabalhar com incerteza é complexo e misturar diferentes domínios ou a inserção de variáveis que não estão diretamente relacionadas com a aplicação, poderá comprometer a integridade de todo o sistema.

A fuzzificação é o processo que consiste em mapear os dados de entrada imprecisos, contidos no universo de discurso, e aplicam-se as funções de pertinência utilizadas para modelar os conjuntos *fuzzy* e que geram os graus de pertinência do dado de entrada para cada conjunto *fuzzy* do universo de discurso.

A máquina de inferência *fuzzy* é o processo que combina os conjuntos *fuzzy* e seus respectivos graus de pertinência com as regras existentes na base de regras e utiliza os operadores *fuzzy* nesta inferência, alguns dos operadores *fuzzy* foram apresentados na tabela 2.3.

A defuzzificação consiste em combinar todos os valores *fuzzy* de saída e gerar valor(es) clássico(s) de saída. Este processo é realizado com a aplicação de técnicas de defuzzificação, onde algumas são [BAR 01]:

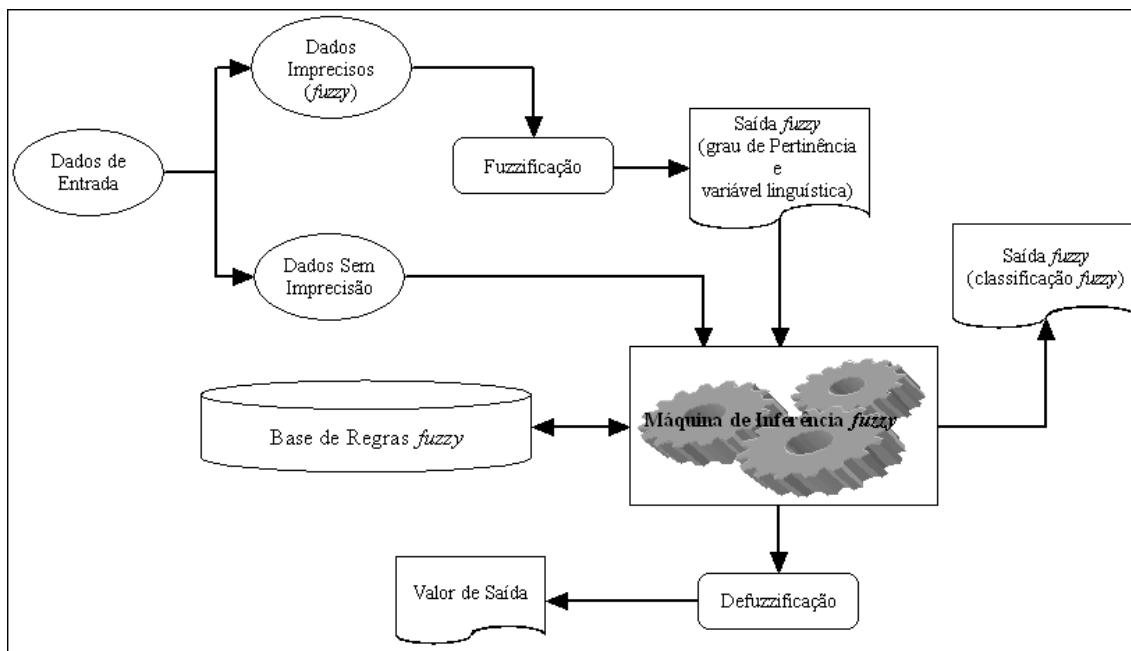


Figura 2.11: Estrutura dos Sistemas Especialistas *Fuzzy*

1. Método do máximo critério (MMC): encontra o ponto no qual a distribuição de saída possui o seu primeiro valor de máximo.
2. Método da média dos máximos (MMM): acha o valor médio onde a saída possui seus máximos valores. Isto pode ser computado como $z_0 = \sum (w_j / l)$ onde, w_j são os valores no qual a função de pertinência possui seus máximos valores e l é o número de valores máximos encontrados.
3. Método de centro de massa (MCM): esta técnica procura pelo centro de gravidade da distribuição de saída *fuzzy*.

Ao combinar-se sistemas especialistas e lógica *fuzzy* tem-se uma ferramenta poderosa para resolução de problemas envoltos em incertezas imprecisas e/ou vagas, geralmente encontrados no mundo real, pois permite modelar e implementar esses tipos de incertezas em sistemas computacionais inteligentes.

O item seguinte trata de outra possível maneira de modelagem de incerteza diferente da LF.

2.3 Teoria das Medidas *Fuzzy*

No início deste capítulo foi apresentada a diferença entre aleatoriedade e vagueza. Antes de expor as principais características da Teoria das Medidas *Fuzzy* (TMF) é importante fazer a distinção entre medidas *fuzzy* e conjuntos *fuzzy*.

A TMF trabalha com a imprecisão dos dados ou informação assim como os conjuntos *fuzzy* entretanto, a imprecisão na TMF é definida como a incerteza na atribuição de um elemento x como um membro de um universo de discurso constituído por conjuntos disjuntos [MAR 03]. É preciso colocar que, uma medida *fuzzy* não tem incerteza sobre um elemento x em questão, ou seja, a dificuldade está na atribuição deste ponto a um conjunto clássico. A incerteza está na atribuição do elemento a um conjunto, diferentemente da teoria dos conjuntos *fuzzy* onde a incerteza se apresenta na delimitação de um conjunto *fuzzy*. [ROS 95]

É importante distinguir grau de pertinência utilizado pela teoria dos conjuntos *fuzzy* e grau de certeza apesar que os dois são representados por valores no intervalo $[0,1]$ existe distinção entre eles. O primeiro informa o quanto um elemento pertence a um conjunto *fuzzy*, este que não apresenta limites abruptos. O segundo foi primeiramente apresentado por [SUG 77] e é denominado uma medida *fuzzy*, esta que representa quanto um dado elemento pertence a um conjunto *clássico*.

Por exemplo, a aprovação ou reprovação de um aluno em uma disciplina pode ser tratada como uma medida *fuzzy* pois, os conjuntos “aprovado” e “reprovado” são bem delimitados (clássico) entretanto pode existir algumas incertezas com relação aos trabalhos realizados pelo aluno ou seu comportamento em sala de aula os quais podem lhe atribuir um “grau de evidência” para cada um dos dois conjuntos.

Existem algumas formas de medidas *fuzzy*, entretanto nesta pesquisa serão apresentadas a medida de crença e a medida de plausibilidade.

Considera-se uma função $g : P(X) \rightarrow [0, 1]$, onde $P(X)$ é um conjunto denominado *power set*. O *power set* $P(X)$ é a coleção de todos os possíveis subconjuntos clássicos do universo de discurso de X [KOS 92]. Essa função necessita obedecer os seguintes axiomas [ROS 95]:

1. g_1 - (condições de limites) $g(\emptyset) = 0$ e $g(X) = 1$
2. g_2 - (monotonicidade) $g(A) \leq g(B)$ para $A, B \in P(X)$, se $A \subseteq B$

O axioma 1 significa que não existem evidências para o conjunto vazio e existe a evidência completa ao conjunto universo.

O axioma 2 diz que se um subconjunto A está completamente contido em um conjunto B então a evidência de um elemento de A deve ser menor ou igual à evidência de B .

Existe ainda um terceiro axioma [KLI 88]:

3. g_3 - (continuidade) para toda seqüência $(A_i, i \in \mathbb{N})$ dos subconjuntos de X então,

$$\lim_{\rightarrow \infty} g(A_i) = g \lim_{\rightarrow \infty} (A_i)$$

e exige que a função g seja uma função contínua e o conjunto universo seja infinito.

As principais características das medidas de crença e medidas de plausibilidade são apresentadas no item seguinte.

2.3.1 Medidas de Crença e Medidas de Plausibilidade

Os conceitos de medidas de crença e plausibilidade foram primeiramente apresentados nos trabalhos [DEM 67] e [SHA 76], onde foi desenvolvida a Teoria da Evidência também conhecida por Teoria de Dempster-Shafer.

Neste item são apresentados os principais conceitos de medidas de crença e plausibilidade.

Sabendo-se que o universo de discurso é representado por X , um subconjunto de X é representado por A e A_i é um elemento do subconjunto A .

Uma medida de crença é uma função

$$Bel : P(X) \rightarrow [0, 1],$$

que satisfaz os axiomas g_1 , g_2 e g_3 das medidas *fuzzy* e ainda o seguinte axioma:

$$\begin{aligned}
 Bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq & \sum_i Bel(A_i) - \sum_{i < j} Bel(A_i \cap A_j) \\
 & + \dots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)
 \end{aligned} \tag{2.3.1.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos os subconjuntos do universo de discurso X . Por exemplo, para $n = 2$ o axioma acima se apresenta da seguinte maneira:

$$Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2) \tag{2.3.1.2}$$

A crença pode ser interpretada como a opinião subjetiva de um observador a favor ou contra uma proposição, baseado nas evidências disponíveis [MAR 03]. Para cada subconjunto $A \in P(X)$, $Bel(A)$ é interpretado como o grau de crença de um dado elemento de X pertencer ao conjunto A .

É possível pensar nos subconjuntos de um universo de discurso X como uma resposta à uma pergunta. Por exemplo, tem-se o conjunto $X = \{\text{pato, gato, tigre, galinha}\}$ é feita a pergunta “Qual destes são felinos?” a resposta seria o subconjunto $\{\text{gato, tigre}\}$.

Se $A_1 = A$ e $A_2 = \bar{A}$ na equação 2.3.1.2. Tem-se a inequação básica da medida de crença [KLI 88]:

$$Bel(A) + Bel(\bar{A}) \leq 1 \tag{2.3.1.3}$$

Associado a cada medida de crença está uma medida de plausibilidade (Pl) que fornece a quantidade máxima de crença que pode ser atribuída à um conjunto A , definida pela equação:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \quad (2.3.1.4)$$

Para todo subconjunto $A \in P(X)$. Por similitude:

$$Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A}) \quad (2.3.1.5)$$

As medidas de crença e plausibilidade são então mutuamente duais. A medida de plausibilidade também pode ser definida como independente da medida de crença. Uma medida de plausibilidade também é mapeada no intervalo $[0,1]$ e é representada pela seguinte função: [KLI 88]

$$Pl : P(X) \rightarrow [0, 1] \quad (2.3.1.6)$$

Medidas de plausibilidade satisfazem os axiomas das medidas *fuzzy* e também um axioma adicional diferente das medidas de crença: [ROS 95]

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i < j} Pl(A_i \cup A_j) \\ + \dots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \quad (2.3.1.7)$$

Se $n = 2$, $A_i = A$ e $A_2 = \bar{A}$ na equação 2.3.1.7. Então se obtém a seguinte inequação básica de medidas de plausibilidade:

$$Pl(A) + Pl(\bar{A}) \geq 1 \quad (2.3.1.8)$$

A partir da equação 2.3.1.3, observa-se que crenças relativas a um conjunto A não implica que a crença restante corresponda à \bar{A} . A diferença $[1 - (Bel(A) + Bel(\bar{A}))]$ é denominada “ignorância”. [MAR 03]

Toda medida de crença e plausibilidade pode ser expressa pela função *massa* (m)[KLI 88]

$$m : P(X) \rightarrow [0, 1], \text{ tal que } m(\emptyset) = 0 \text{ e}$$

$$\sum_{A \in P(X)} m(A) = 1, \text{ onde} \quad (2.3.1.9)$$

A função m é definida para os elementos de $P(X)$ e todos seus subconjuntos [BAR 01]. O valor m mede o grau de evidência atribuído a um subconjunto A do conjunto $P(X)$. O grau de evidência só é atribuído aos subconjuntos do universo de discurso X aos quais se deseja designar a evidência. Por exemplo, se um universo de discurso $X = \{A, B, C, D\}$ e é feito um questionamento sobre este conjunto X e a evidência informada é de 0.6 de que a resposta se encontra entre os elementos B e D o que denota um subconjunto $\{B \cap D\}$ e pode ser expressa por

$$m_1(\{B \cap D\}) = 0.6.$$

onde m_1 representa a quantidade de evidência sobre os elementos B e D e o restante da evidência e designada ao universo de discurso: $m_1(X) = 1 - 0.6 = 0.4$.

A grande diferença com a teoria da probabilidade se dá nesta questão pois se [BAR 01]

$$P(A \cap B) = 0.6 \text{ então } P(\overline{A \cap B}) = 0.4.$$

É importante ressaltar que o valor da função m de 0.4 atribuído ao universo de discurso X não designa nenhum valor aos subconjuntos de X . Enquanto que na Teoria da Probabilidade o somatório das probabilidades dos elementos de um conjunto deve ser 1, o valor de $m(X)$ não precisa ser 1.

Uma nova evidência que indica que um elemento x pertence a um subconjunto B de A , onde seja, $B \subseteq A$ deve ser formalizada por $m(B)$ e não é necessário que $m(B) \leq m(A)$ [MAR 03].

A função m também é conhecida como probabilidade básica associada (PBA). Existe uma diferença fundamental entre função de distribuição de probabilidade e probabilidade básica associada. Tomando-se a equação 2.3.1.9 é possível observar uma semelhança com a equação para distribuição de probabilidade que é definida sobre o espaço amostral Ω entretanto a PBA é definida sobre o *power set* $P(X)$. Pode-se observar tal diferença pelas características da função $m(\cdot)$: [BOR 96]

- é possível que $m(X) \neq 1$;

- não é necessário que $m(A) \leq m(B)$ se $A \subset B$;
- $m(A)$ e $m(\bar{A})$ não são relacionados.

Por exemplo, tem-se um universo $X = \{\text{alergia } \{a\}, \text{intoxicação } \{i\}, \text{sarampo } \{s\}, \text{rubéola } \{r\}\}$ e uma evidência no diagnóstico indica 0.6 de não ser alergia. Desta maneira, $m(\{i, s, r\}) = 0.6$, $m(X) = 0.4$ e o valor de m para qualquer outro subconjunto de X é 0 (zero). E pela Teoria da Probabilidade atribuiria 0.4 à $m(\overline{\{i, s, r\}})$ o que não acontece com o valor da função m .

A PBA que resta, após as probabilidades básicas terem sido atribuídas aos subconjuntos próprios do universo X é chamada de crença não atribuída, denotada por $m(X)$. Se $m(A) = x$ e m não atribui crença a qualquer outro subconjunto de X , então $m(X) = 1 - x$. O resto da crença é pois atribuído a X , e não à negação da hipótese A , como seria no modelo probabilístico.

A seguir são apresentados os conceitos da teoria da probabilidade e do teorema de Bayes para realizar posteriores comentários sobre *fuzzy* e probabilidade.

2.4 Teoria Clássica da Probabilidade

A Teoria da Probabilidade (TP) trata as incertezas aleatórias. Dentro da TP existem duas ramificações gerais, uma objetivista e outra subjetivista. Nesta dissertação são apresentados os conceitos básicos e relevantes para esta pesquisa da escola objetivista.

A teoria da probabilidade permite medir as incertezas anteriormente aos acontecimentos de eventos (e.g., número par no lançamento de um dado, resultado de uma pesquisa para eleição municipal) atribuindo um valor no intervalo $[0,1]$ que representa a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. O exemplo do lançamento de uma moeda mostra este conceito onde, não sendo capaz de predizer, com certeza, qual será o resultado, é possível medir a chance de ocorrer cara ou coroa antes do lançamento.

O conjunto de todos os eventos simples de uma experiência aleatória é o espaço amostral S . No caso do lançamento de um dado, tem-se $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

no caso do lançamento de uma moeda $S = \{c, k\}$, onde $c = \text{cara}$ e $k = \text{coroa}$ [MAR 02]. Nesta definição, entende-se por experiência aleatória as situações cujos resultados são imprevisíveis e mutuamente excludentes (a probabilidade da intersecção entre dois conjuntos é igual à zero), ou seja, quando não se pode prever com certeza qual resultado irá ocorrer. Os possíveis resultados, mutuamente excludentes são chamados de eventos simples.

Com o intuito de melhor compreensão dos principais conceitos da TP apresenta-se as seguintes definições, segundo [TRI 99]:

- um **experimento** é qualquer processo que permite ao pesquisador fazer observações.
- um **evento** é uma coleção de resultados de um experimento.
- um **evento simples** é um resultado, ou um evento, que não comporta mais qualquer decomposição.
- o **espaço amostral** consiste em todos os eventos simples possíveis de um experimento .

Exemplificando, o arremesso de um par de dados é um *experimento*, e o resultado 7 é um *evento*, mas 7 não é um *evento simples* porque pode ser decomposto em eventos mais simples, como resultado 3 no primeiro dado e 4 no segundo ou 6 no primeiro e 1 no segundo.

Na definição clássica de probabilidade, toma-se um espaço amostral finito $S = a_1, a_2, \dots, a_n$, no qual os pontos amostrais a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) podem ter a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, são considerados equiprováveis. Então, todo subconjunto A do espaço amostral diz-se um evento, sendo sua probabilidade dada por: $P(A) = \frac{m}{n}$, onde m é o número de casos favoráveis ao evento A e n é o número de casos possíveis [MAR 02].

É necessário respeitar algumas regras da TP para utilizá-la de maneira adequada no tratamento da incerteza.

Seja ε um experimento. Seja S um espaço amostral associado a ε . A

cada evento A associa-se um número real representado por $P(A)$ e denominado probabilidade de A , que satisfaça às seguintes propriedades: [FRE 00]

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(S) = 1$.
3. Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. $P(\emptyset) = 0$.
5. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Outra questão importante na TP é a independência de eventos. Segundo [BAR 03] dois eventos são *independentes* quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro. Por exemplo, no lançamento imparcial de um dado e de uma moeda, os eventos $A = \text{número par no dado}$ e $B = \text{cara na moeda}$ podem ser admitidos como independentes, já que a ocorrência de A (ou de B) não influencia a ocorrência de B (ou de A).

2.5 Teorema de Bayes

Em [PEA 88] é exposto que os métodos bayesianos sustentam um formalismo para raciocinar sobre crenças parciais em condições de incerteza.

Existem alguns casos onde há a necessidade de se calcular a probabilidade de um evento após a ocorrência de algum(s) outro(s) evento(s). O teorema desenvolvido por Thomas Bayes é bastante útil para o cálculo de probabilidade, especificamente a probabilidade condicional. Esse teorema é um método quantitativo para a revisão de probabilidades conhecidas, com base em nova informação amostral, sendo fundamental para se analisar um conjunto de informações disponíveis e se chegar a uma conclusão objetiva, expressa numericamente [NAS 98].

A teoria da probabilidade trata da estrutura rigorosa de representação de eventos aleatórios. A probabilidade de um evento assume valor de 0 a 1. Aqui é considerado também a probabilidade de que ocorra um evento B (“conseqüência”) condicionada

a ocorrência de um outro evento A (“causa”), esta probabilidade é suportada pelo enfoque do teorema de Bayes [NAS 02].

A teoria a seguir apresenta os conceitos de [GON 93].

Suponha que x_i é algum evento. A coleção de todos os eventos, chamado espaço amostral, é definido como o conjunto X , onde:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (2.5.1)$$

A probabilidade que o evento x_i ocorra é denotada por $P(x_i)$. Toda função de probabilidade P deve satisfazer as 3 condições seguintes:

1. A probabilidade de qualquer evento x_i é não negativo. A probabilidade de um evento pode ser 0 (o evento não irá ocorrer), 1 (o evento deve ocorrer) ou algum valor no intervalo $[0, 1]$.
2. A probabilidade total do espaço amostral é 1 (e.g., algum evento na coleção de todos os eventos irá ocorrer - só não se sabe qual).
3. Se algum conjunto de eventos x_1, x_2, \dots, x_n são mutuamente exclusivos, então a probabilidade de que pelo menos um destes eventos irá ocorrer é a soma de todas as suas probabilidades individuais.

Seja o espaço de probabilidade (ϵ, P) e os eventos compostos, $H_1, H_2, \dots, H_K \subseteq \epsilon$, desde que nenhum desses eventos tenha probabilidade nula [NAS 02], então :

$$P(H_i|e) = \left(\frac{P(e|H_i) \cdot P(H_i)}{P(e)} \right) \quad (2.5.2)$$

É necessário generalizar o teorema para trabalhar com m hipóteses e n evidências, a situação normalmente encontrada nos problemas do mundo real [GON 93]. Em [NAS 02] expõe que, considerando que as evidências sejam independentes sob a hipótese H_i então:

$$P(H_i|e_1 \cap e_2 \cap \dots \cap e_n) = \left(\frac{P(e_1|H_i) \cdot P(e_2|H_i) \dots P(e_n|H_i) \cdot P(H_i)}{P(e_1 \cap e_2 \cap \dots \cap e_n)} \right) \quad (2.5.3)$$

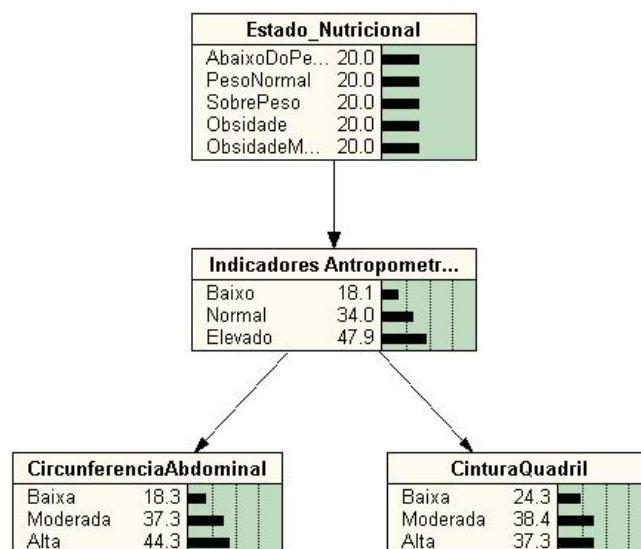


Figura 2.12: Exemplo de Uma Rede Bayesiana

Esta probabilidade é chamada probabilidade *a posteriori* das hipóteses H_i baseadas nas observações das evidências $e_1 e_2 \dots e_n$.

2.5.1 Redes Bayesianas

Redes Bayesianas (RB) são grafos direcionados acíclicos onde os *nós* representam variáveis, os arcos significam a existência de influência causal direta entre as variáveis ligadas, e a intensidade destas influências é expressa por probabilidades condicionais [PEA 88].

A figura 2.12 apresenta um exemplo uma rede bayesiana, esta rede será utilizada no domínio de análise desenvolvido que utiliza a abordagem híbrida proposta nesta pesquisa.

A estrutura de uma RB é composta por duas partes: qualitativa e quantitativa.

A parte qualitativa corresponde a estrutura gráfica da rede, composta pelas variáveis de entrada (evidência), variável de saída (hipótese) e os arcos (relação de dependência entre elas).

A parte quantitativa à base de conhecimento da rede. As incertezas tratadas pelas RB são expressas em probabilidades, desta maneira a BC é composta por probabilidades *a priori* que devem ser estabelecidas pelo especialista, representando seu conhecimento.

As regras que geram as probabilidades de saída (*a posteriori*) não são expressas como as regras SE-ENTÃO dos sistemas especialistas tradicionais ou *fuzzy*. Nas RB, o Teorema de Bayes é o responsável por gerar os valores de probabilidade de cada estado da variável de saída. Pode-se entender que a seguinte regra

SE A ENTÃO B com 90 % de certeza, pode ser representada por

$$P(B|A) = 90\%$$

usada para representar a probabilidade do evento B dada a evidência da ocorrência do evento A.

É importante ressaltar que a incerteza das RB está representada na base de conhecimento e nas probabilidades de saída pois a entrada é abrupta, ou seja, é necessário instanciar uma das opções de cada evidência e desta maneira o usuário está informando para a rede que tem certeza absoluta da ocorrência de determinado evento.

Este fato pode ocasionar uma interpretação não satisfatória por parte do usuário especialista pois às vezes a certeza absoluta, relacionada a uma evidência não existe, é inviável de ser obtida ou o próprio raciocínio do especialista não o permite aceitar uma evidência 100% concreta.

Durante a análise do domínio de aplicação o especialista pode, baseado em seu conhecimento, definir uma evidência como *fuzzy* o que inviabilizará o uso das RB tradicionais. Nestes casos, uma opção seria trabalhar com uma abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana.

2.6 Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e Probabilidade

Desde a publicação do primeiro artigo de Zadeh descrevendo os conjuntos *fuzzy* [ZAD 65] teve início as discussões entre qual das duas teorias, probabilidade

e conjuntos *fuzzy*, seria a mais adequada para modelar incerteza.

O objetivo deste trabalho não é discutir tais questões pois, tal como Zadeh expôs em [ZAD 95], acredita-se que a teoria da probabilidade e lógica *fuzzy* são complementares ao invés de competidoras.

Como apresentado na introdução deste capítulo, estas duas teorias modelam tipos distintos de incerteza. A teoria da probabilidade trata a aleatoriedade enquanto que a teoria dos conjuntos *fuzzy* trata a imprecisão e/ou vagueza.

Em [BAS 94] é exposto que a teoria dos conjuntos difusos (*fuzzy*) desenvolvida por Zadeh fornece um instrumento adequado para modelar situações em que ocorram imprecisões.

Apesar de possuírem seus possíveis valores no intervalo $[0, 1]$ isto não as caracteriza como iguais. Quando se trabalha com a TCF utilizam-se graus de pertinência enquanto que na TP esses valores são chamados de probabilidades, e a diferença não está somente na nomenclatura atribuída aos valores que elas utilizam. Exemplificando, quando a meteorologia indica que a probabilidade de chover forte amanhã à tarde é de 65%, este valor representa a crença dos meteorologistas, baseada em fatores por eles analisados, que irá ocorrer chuva forte. Entretanto, verificou-se que na tarde em questão choveu mas em pouca quantidade, desta maneira pode-se atribuir um grau de pertinência de 0.4 de chuva para o conjunto *fuzzy* “chuva forte”, esta é a visão da TCF.

A probabilidade representa a chance de algo ocorrer à determinado conjunto anteriormente ao seu acontecimento pois, após o evento ter ocorrido existe apenas duas possíveis alternativas, pertencer ou não pertencer ao conjunto. O exemplo clássico do lançamento de uma moeda não viciada retrata bem essa idéia pois, anteriormente ao lançamento da moeda existe a chance de 50% para ambos possíveis resultados (cara ou coroa), mas após o lançamento (acontecimento do evento) a probabilidade não existe mais e sim a certeza qual foi o resultado. Enquanto que os graus de pertinência utilizados pela TCF indicam a pertinência de algo fazer parte de um ou mais conjuntos *fuzzy*. Por exemplo, uma pessoa que possui 1.75m de altura pode pertencer ao conjunto *fuzzy* das pessoas com altura “Normal” bem como ao conjunto *fuzzy* das pessoas “Altas”.

Outro ponto de distinção entre estas duas teorias é que, na TP não é

possível que um evento ocorra simultaneamente a dois conjuntos mutuamente excludentes (exemplo A e \bar{A}), ou seja, ou algo pertence ou não pertence a determinado conjunto. Por exemplo, pela visão da probabilidade, após realizada uma análise na qualidade de um produto qualquer, este poderá pertencer ou não pertencer ao conjunto “boa qualidade”. Enquanto que na TCF isto é possível. Por exemplo, o mesmo produto anteriormente citado pode ser a ele atribuído um grau de pertinência de 0.5 ao conjunto “boa qualidade” e 0.6 ao conjunto “qualidade ruim”, ou seja, ele é “bom” mas nem tanto assim.

Esta discussão à respeito de qual a melhor entre estas duas teorias, probabilidade e teoria dos conjuntos *fuzzy*, não é recente e parece estar distante de um final devido a um certo ceticismo por parte de alguns estudiosos. Mas o fato é que existe espaço para as duas teorias pois elas modelam tipos diferentes de incerteza e por este motivo a aplicação de uma ou de outra irá depender do domínio de aplicação que se deseja modelar. Para maiores detalhamentos entre as discussões entre probabilidade e teoria dos conjuntos *fuzzy* consulte [COS 99], [IBR 04] [KOS 92], [RUS 95] e [LAV 94].

Existem ainda alguns domínios que podem ser melhor modelados pela fusão entre estas duas teorias, ou seja, domínios que apresentam variáveis aleatórias e imprecisas. O capítulo 3 demonstra a modelagem proposta nesta pesquisa que se apresenta como uma alternativa para modelagem de incertezas no desenvolvimento de sistemas inteligentes.

2.7 Aplicações Híbridas

O desenvolvimento de sistemas inteligentes teve como marco inicial o sistema especialista MYCIN [SHO 74], utilizado para diagnóstico e tratamento de doenças infecciosas do sangue. O MYCIN possui uma base de conhecimento baseada em regras e introduziu a explicação da inferência utilizada para gerar o resultado e também apresentou uma boa interface com usuário. Desde então foram desenvolvidos diversos sistemas inteligentes e observou-se a utilidade deste tipo de sistemas devido aos resultados satisfatórios que estas aplicações produziram [BAR 01].

Sistemas especialistas probabilísticos, sistemas especialistas *fuzzy*, re-

des neurais e raciocínio baseado em casos são exemplos de aplicações de técnicas de inteligência computacional para auxiliar na resolução de problemas complexos. Cada uma das técnicas citadas, apresentam características próprias para solucionar problemas. Entretanto, a incerteza relativa a um determinado domínio de aplicação, necessita de um tratamento mais complexo e integrado. A necessidade do tratamento de grandes quantidades de informações e as incertezas inerentes aos sistemas complexos leva à fusão de metodologias, como métodos simbólicos e conexionistas, representada pelos sistemas híbridos [VIE 99].

O processo de desenvolvimento e implementação de sistemas híbridos é mais complexo de ser realizado devido á necessidade de trabalhar com módulos de representação de incerteza separados e depois realizar a comunicação entre estes módulos. Existem pelo menos dois motivos principais para utilizar sistemas híbridos para solucionar problemas: (i) o primeiro é o fato de que algumas exigências para a solução de um problema não sejam possíveis de serem encontradas através de apenas um método; (ii) existem modelos para solucionar problemas de inteligência computacional que não podem ser implementados utilizando apenas um método [KAS 96].

É importante ressaltar que a integração de duas técnicas permite que uma complemente as deficiências da outra objetivando obter desempenhos mais adequados. E baseando-se no fato de que os engenheiros do conhecimento desenvolvem sistemas inteligentes buscando simular o raciocínio dos seres humanos e, que às vezes este raciocínio utiliza métodos diferentes de resolução de problema, torna-se atrativo o desenvolvimento de sistemas híbridos inteligentes para as situações complexas que necessitam diferentes representações de incerteza para uma solução mais especializada.

Desde os anos 80, um grande número de ferramentas para controle *fuzzy*, sistemas especialistas *fuzzy* e análise de dados *fuzzy* vêm surgindo e deram suporte para o crescimento da área da tecnologia *fuzzy* [HJZ 99]. A LF também vêm sendo utilizada para compor os tipos de hibridismos mais utilizados como as redes neuro-*fuzzy* e algoritmos genéticos *fuzzy*. Em [REZ 03] são relatadas algumas aplicações que utilizam essas técnicas. As áreas onde já foram desenvolvidos sistemas inteligentes híbridos na resolução de problemas são bastante diversificadas e não é difícil de encontrar al-

gumas aplicações em sites de busca na internet como *google* (www.google.com) e *citeseer* (<http://citeseer.ist.psu.edu>). O *International Journal of Hybrid Intelligent System* (<http://ijhis.hybridsystem.com>) também é uma fonte interessante de aplicações e teorias na área de desenvolvimento de sistemas híbridos. Outro tipo de hibridismo existente é a utilização da lógica *fuzzy* em raciocínios baseado em casos como apresentado em [THE 01].

A abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana se diferencia das citadas pois permite modelar e trabalhar com incertezas aleatórias e imprecisas. O fato de utilizar uma modelagem híbrida no desenvolvimento de sistemas inteligentes que combina teoria da probabilidade e lógica *fuzzy* pode não ser analisada pelo ângulo adequado, talvez devido aos “atritos” existentes entre os estudiosos destas teorias, como discutido na seção 2.6. Entretanto, o objetivo desta pesquisa é propor uma modelagem híbrida que permita trabalhar com estas duas teorias e não de questionar qual das duas teorias é a melhor.

Em [BRI 01] é apresentada uma abordagem híbrida *fuzzy*-probabilística que se difere da abordagem proposta nesta pesquisa na parte qualitativa. Pois a primeira permite modelar apenas *nós* dicotômicos enquanto que a segunda não apresenta esta restrição. A inferência também se difere na questão do tratamento dos graus de pertinência dos conjuntos *fuzzy* criados para cada variável. A inferência híbrida da abordagem proposta é demonstrada no capítulo 3.

O artigo [HAL 01] apresenta uma teoria para trabalhar com raciocínio *fuzzy* e probabilístico exemplificada por uma aplicação simples em uma rede bayesiana. Esta teoria difere da abordagem híbrida proposta nesta pesquisa na forma de tratamento das variáveis de entrada, na inferência utilizada e na forma de apresentar os resultados de saída.

Outro artigo que apresenta uma abordagem híbrida para modelar a fusão entre redes causais de probabilidade (redes bayesianas) e lógica *fuzzy* é apresentado em [PAN 98], entretanto difere da abordagem híbrida proposta nesta pesquisa na estrutura geral da rede, pelo método de inferência utilizado e pela maneira como os resultados são apresentados.

Em [SIL 02] é apresentado um modelo híbrido para tratar redes bayesi-

anas e lógica *fuzzy* e se difere da abordagem híbrida proposta nesta pesquisa na estrutura da rede, nas variáveis de entrada do sistema, no método de inferência utilizado e na forma de apresentar os resultados.

Esta seção teve como objetivo comentar a questão do desenvolvimento de sistemas híbridos inteligentes e realizar uma breve comparação entre as abordagens híbridas correlatas à abordagem proposta nesta pesquisa. A seções a seguir apresenta, a metodologia da abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana proposta, um domínio de análise que implementa a abordagem híbrida comparando os resultados da rede híbrida *fuzzy*-bayesiana com os de uma rede bayesiana tradicional e uma avaliação da abordagem proposta.

Capítulo 3

Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

Modelar a incerteza da informação no desenvolvimento de sistemas inteligentes é de responsabilidade do engenheiro do conhecimento que determina qual é a abordagem mais adequada, baseado na análise do domínio da aplicação.

As redes bayesianas, como exposto no capítulo 2, são uma alternativa para modelar domínios que apresentam incertezas probabilísticas, contudo se forem identificadas incertezas imprecisas no domínio de aplicação esta técnica pode não ser a mais adequada. Isto ocorre pois é necessário creditar certeza absoluta a apenas um estado para cada evidência.

Entretanto, se no processo de aquisição de dados para inserção no sistema for identificado um valor x que parece pertencer a dois estados de uma mesma variável, como resolver este problema se o sistema não trata esse tipo de incerteza? Por exemplo, suponha que no caso do domínio de análise apresentado na figura 2.12 tenha sido identificado um valor de cintura quadril que deixasse o especialista ou usuário do sistema indeciso entre qual estado (categoria) instanciar. Que atitude deveria ser tomada?

A proposta desta pesquisa é permitir solucionar esta questão, aplicando inferência *fuzzy* nos dados imprecisos, objetivando reconhecer imprecisão dos dados de entrada. A teoria sobre lógica *fuzzy*, teoria dos conjuntos *fuzzy* e redes bayesianas foram descritas no capítulo 2.

A abordagem híbrida desenvolvida nesta pesquisa visa apresentar uma

alternativa para modelar as incertezas inerentes à determinados domínios em sistemas computacionais inteligentes. Como apresentado em ítems anteriores os conjuntos *fuzzy* modelam a incerteza imprecisa e/ou vaga, enquanto uma abordagem bayesiana trata a incerteza aleatória. Entretanto, alguns domínios são envoltos por estes dois tipos de incerteza. Desta maneira torna-se atraente a aplicação de uma abordagem híbrida nestes casos.

A motivação deste trabalho surgiu no desenvolvimento de um domínio que apresenta imprecisão e aleatoriedade. O domínio em questão aborda o diagnóstico de distúrbio nutricional, um problema que está se agravando rapidamente e preocupa os pesquisadores da área da saúde bem como toda a população em geral.

Com o intuito de demonstrar o reconhecimento das incertezas imprecisas e comparar as alterações ocorridas no vetor de probabilidades de saída da rede bayesiana tradicional e da rede híbrida *fuzzy*-bayesiana proposta, modelou-se apenas uma parte do domínio de diagnóstico de distúrbio nutricional.

As variáveis utilizadas para realizar esta análise são: a relação cintura quadril e a circunferência abdominal. Estas variáveis estão detalhadas no item 3.3.1.

A seguir é apresentada a metodologia da abordagem híbrida proposta. No item 3.3 são apresentados os cálculos realizados na inferência bayesiana tradicional e também na inferência híbrida *fuzzy*-bayesiana. A fundamentação matemática demonstrada no item 3.2 tem como objetivo dar sustentação teórica para a validação da AHFB e possibilitando que a abordagem híbrida proposta se apresente como uma alternativa para modelar domínios envoltos por características similares à do domínio de análise desenvolvido. Como por exemplo a classificação de aquíferos na área geológica, que possui variáveis imprecisas como profundidade e vazão e variável aleatória como tipo de rocha.

3.1 Metodologia da Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

Na metodologia desta pesquisa utilizou-se o método dedutivo, onde primeiramente desenvolveu-se a concepção da abordagem híbrida proposta, seguida da prova matemática demonstrando que a saída da rede híbrida atende a propriedade de

soma unitária da teoria da probabilidade e finalmente aplicou-se a abordagem em um domínio de análise. Esta aplicação permitiu verificar o reconhecimento da imprecisão e conseqüentemente a alteração dos valores do vetor de probabilidades de saída da rede híbrida quando comparados com a rede bayesiana tradicional (sem hibridismo).

A abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana, proposta nesta pesquisa, trata a incerteza por imprecisão nas entradas de uma rede bayesiana. Desta maneira, permite modelar as evidências da rede quando há a presença de incertezas aleatórias e/ou imprecisas no domínio de aplicação. É importante ressaltar que, os cálculos realizados na inferência da abordagem híbrida utilizam os graus de pertinência aos estados das variáveis de entrada (evidências). Desta maneira esta abordagem também infere como uma rede bayesiana tradicional quando ocorrem graus de pertinência iguais a 1 ou zero, considerados como evidência total e total não evidência, respectivamente.

A figura 3.1 apresenta o diagrama da metodologia da abordagem híbrida proposta nesta pesquisa. Todas as etapas estão identificadas nos processos do diagrama facilitando a identificação do ponto inicial (análise do domínio da aplicação) desta metodologia.

As etapas desta metodologia são apresentadas a seguir:

A (Analisar o domínio da aplicação) - é realizado, conjuntamente, entre o engenheiro do conhecimento e o(s) especialista(s), objetivando identificar os tipos de incerteza presentes no domínio de aplicação. Caso sejam identificadas evidências imprecisas e aleatórias a modelagem híbrida se apresenta como uma alternativa. Caso contrário o uso da modelagem *fuzzy* ou da probabilística, isoladamente, pode satisfazer as necessidades. Esta etapa incorpora o desenvolvimento da parte qualitativa da rede híbrida utilizando grafos direcionados.

B (Identificar evidências e hipóteses) - identificar quais as evidências apresentam características de imprecisão, ou seja, aquelas que precisam ser fuzzificadas e quais não apresentam características de imprecisão somente de aleatoriedade. Evidências probabilísticas devem ser tratadas como conjuntos clássicos e as evidências imprecisas devem ser tratadas como conjuntos *fuzzy*. Após o reconhecimento das

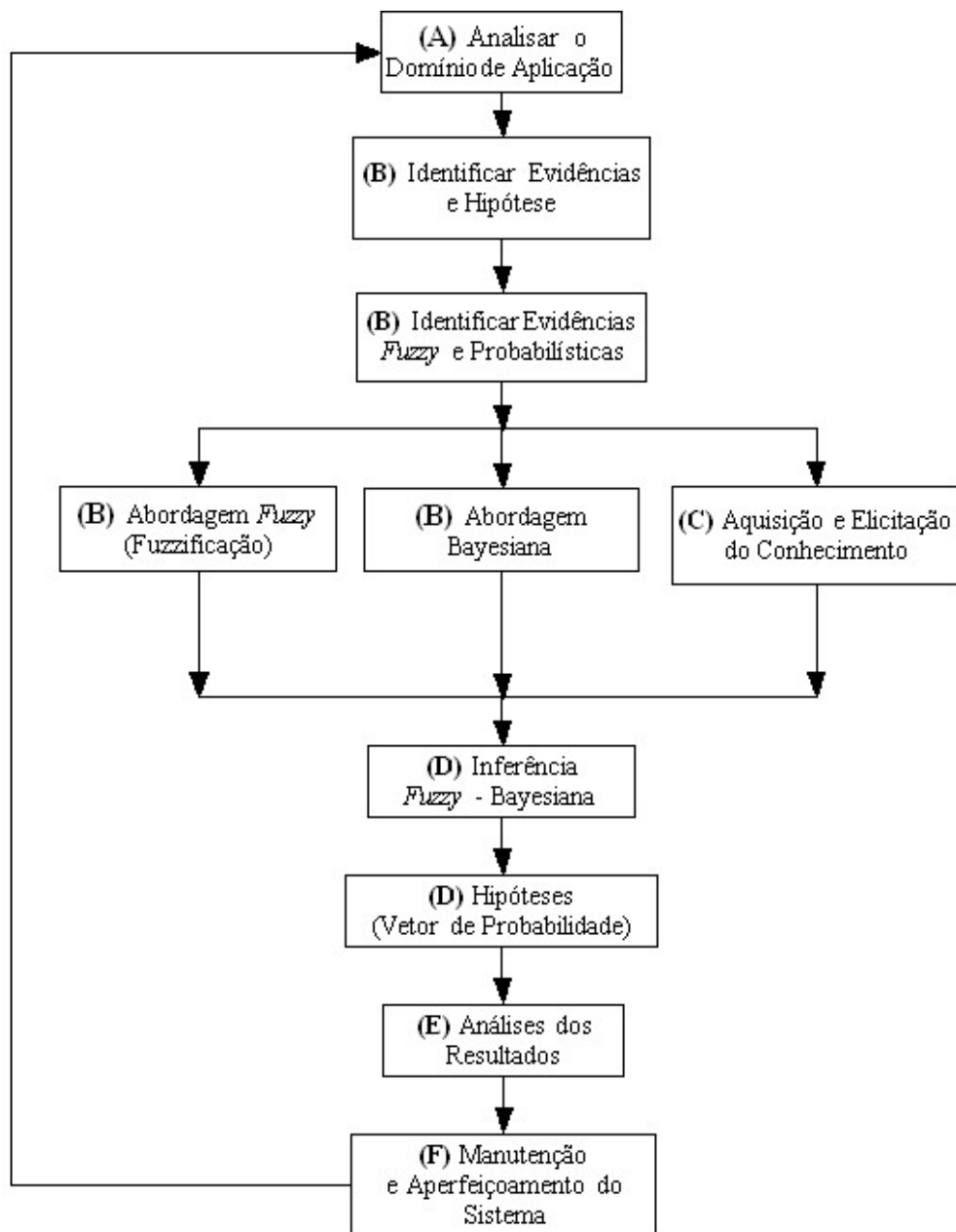


Figura 3.1: Diagrama da Metodologia da Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

evidências *fuzzy* é necessário que sejam modeladas as funções de pertinência que melhor as representem.

Sendo um conjunto V de variáveis do sistema

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (3.1.1)$$

onde:

v_j pode ser uma variável categórica ou variável contínua. Este conjunto é representado na AHFB pelas evidências (variáveis de entrada).

Realizar a previsão do nó de saída H considerando evidências e_i , e a presença de imprecisão Δ_{ir} em cada nó de entrada e_i . Definindo os seguintes conjuntos:

$$H = \{H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_m\} \quad (3.1.2)$$

onde:

$H_{i's}$ representam as m hipóteses do nó de saída.

$$e = \{e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_n\}, \text{ onde} \quad (3.1.3)$$

$e_{j's}$ representam as n evidências (variáveis de entrada).

$$e_j = \{e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jl}, \dots, e_{jr}\}, \text{ onde} \quad (3.1.4)$$

$e_{j'l's}$ representam os r estados de cada variável e_j .

Sendo e_j uma variável cuja distribuição de probabilidade respeita a propriedade soma unitária da TP, então:

$$\sum_{l=1}^r P(e_{jl}) = 1 \quad (3.1.5)$$

O vetor Δ representa os graus de pertinência do elemento x aos estados de cada uma das evidências e_j :

$$\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}, \text{ onde} \quad (3.1.6)$$

$$\Delta_j = \{\mu_{j1}, \mu_{j2}, \dots, \mu_{jr}\}, \text{ onde} \quad (3.1.7)$$

$\mu_{jl} = [0, 1]$, para $l = 1, \dots, r$,

se uma evidência e_j não apresentar imprecisão então $\mu_{jl} = 1$ para a instanciação do estado l e 0 para os outros estados.

C (Aquisição e Elicitação do Conhecimento) - esta é a etapa mais complexa no desenvolvimento de sistemas compostos por uma base de conhecimento. A aquisição e elicitação do conhecimento envolve a identificação do conhecimento técnico relevante e a representação no computador para ser utilizado pela máquina de inferência do sistema especialista [WIL 99]. Para a AHFB proposta, é necessário que o conhecimento do especialista seja representado na forma de tabelas de probabilidades condicionais formando a base de conhecimento do sistema bayesiano sem hibridismo (parte quantitativa). Outro aspecto importante nesta etapa é a modelagem da imprecisão das variáveis de entrada onde define-se o universo de discurso e os parâmetros das funções de pertinência.

D (Implementar a inferência da AHFB) - Apresenta-se a seguinte equação para o teorema de Bayes (equação 2.5.2), reconhecendo as evidências \tilde{e} imprecisas:

$$P(H_i|\tilde{e}) = [P(\tilde{e}|H_i) * P(H_i)] * [P(\tilde{e})]^{-1} \quad (3.1.8)$$

para

$$\sum P(H_i|\tilde{e}_j) = 1 \quad (3.1.9)$$

onde para cada evidência e_j tem-se

$$\tilde{\Delta} = P(\tilde{e}_j|H_i) = \sum_{i=1}^n [((P(e_j|H_i) * \mu_{ijm}) + (1 - P(e_j|H_i) * \mu_{ijp})) * P(H_i)] \quad (3.1.10)$$

onde:

- μ_{ijm} representa o maior grau de pertinência obtido.
- μ_{ijp} representa o menor grau de pertinência positivo obtido para cada variável.
- $P(e_j|H_i)$ é a probabilidade condicional da evidência j relativa a hipótese i , obtida nas tabelas de probabilidades condicionais da rede bayesiana tradicional.

É importante ressaltar que tanto o maior grau de pertinência, quanto o menor, podem assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$, ou seja, calcula-se cada grau de pertinência utilizando a respectiva função de pertinência de cada conjunto *fuzzy* e este valor será utilizado na inferência híbrida. Desta forma o somatório destes valores não necessita ser igual a 1.

A saída da AHFB é um vetor de probabilidades baseada nas evidências imprecisas e/ou aleatórias.

O item 3.2 demonstra matematicamente a generalização da equação 3.1.10 com o intuito de validá-la para domínios que apresentarem variáveis compostas por n categorias. O item 3.2 também mostra que a equação 3.1.10 mantém a propriedade da soma unitária da teoria da probabilidade, ou seja, o somatório do vetor de probabilidades de saída da rede híbrida é 1.

E (Análises dos Resultados) - testar o sistema com alguns dados de entrada e verificar, junto ao(s) especialista(s), se os resultados obtidos representam o conhecimento especialista no domínio de aplicação.

F (Manutenção e Aperfeiçoamento do Sistema) - manter a base de conhecimento do sistema especialista sempre atualizada agregando novas evidências caso seja necessário. Esta tarefa é realizada pelo especialista em conjunto com o engenheiro do conhecimento. Um exemplo pode ser quando o especialista perceber que determinada variável necessita de algum ajuste: nos possíveis valores assumidos, dos parâmetros das funções de pertinência ou nas tabelas de probabilidades condicionais.

3.2 Prova Matemática da Inferência Híbrida *Fuzzy* - Bayesiana

O item 3.3.2 apresenta os cálculos da inferência híbrida *fuzzy*-bayesiana para variáveis compostas por 3 categorias. Este item apresenta a generalização da equação 3.1.10 visando validá-la para n categorias da(s) variável(is) imprecisas.

É importante expor que, este item busca demonstrar matematicamente pelo método da indução que, as alterações propostas nesta pesquisa no cálculo do Δ (delta) tradicional gerando um $\tilde{\Delta}$ (delta *fuzzy*), mantiveram a propriedade da soma unitária da teoria da probabilidade para o vetor de probabilidades de saída da rede híbrida.

Observando-se a equação a seguir (equação 3.1.10):

$$\tilde{\Delta} = P(\tilde{e}_j|H_i) = \sum_{i=1}^n [(P(e_j|H_i) * \mu_{ijm}) + (1 - P(e_j|H_i) * \mu_{ijp}) * P(H_i)]$$

onde:

- $P(e_j|H_i)$: representa(m) a(s) probabilidade(s) da evidência j dado uma hipótese i . A probabilidade a ser utilizada será a que apresentar maior grau de pertinência e este valor é obtido da base de conhecimento. Esta(s) probabilidade(s) possui(em) valor(es) no intervalo $[0, 1]$.
- μ_{ijm} : é o maior grau de pertinência obtido pela aplicação de uma função de pertinência. É um valor no intervalo $[0, 1]$.
- $(1 - P(e_j))$: representa(m) o(s) complemento(s) da(s) probabilidade(s) da categoria j que apresentar maior grau de pertinência. Esta(s) probabilidade(s) é(são) valor(es) no intervalo $[0, 1]$.
- μ_{ijp} : é o menor grau de pertinência obtido pela aplicação de uma função de pertinência. É um valor no intervalo $[0, 1]$.
- $P(H_i)$: é(são) a(s) probabilidade(s) da(s) categoria(s) da hipótese i . Esta(s) probabilidade(s) é(são) valor(es) no intervalo $[0, 1]$.

- n : representa a quantidade de categorias que possui a hipótese (variável de saída).

Observe os exemplos a seguir que apresentam a variação do n que representa a quantidade de categorias de uma hipótese H . Mostram também que independentemente do crescimento do valor de n a soma do vetor de probabilidades da hipótese H mantêm a propriedade de soma unitária da teoria da probabilidade. Desta maneira tem-se que

$$\sum_{i=1}^n [P(H_i)] = 1 \quad (3.2.1)$$

A inferência híbrida *fuzzy*-bayesiana funciona da seguinte maneira: primeiro calcula-se o $\tilde{\Delta}$ depois o α e então utiliza-se o α e os componentes do $\tilde{\Delta}$ para calcular o vetor de probabilidades de saída. Caso ocorra algum problema com o entendimento dos cálculos consulte o item 3.3.2.

Apesar que criar uma hipótese com apenas uma categoria seja uma modelagem incoerente, para esta generalização este será o ponto inicial.

Nota-se que os valores das probabilidades e dos graus de pertinência se alteram para cada exemplo, isto porque cada exemplo é independente. Para o objetivo desta generalização tem-se as seguintes exigências: (i) as probabilidades e os graus de pertinências estejam no intervalo $[0, 1]$; (ii) o somatório das probabilidades da hipótese de saída H é 1.

A seguir são apresentados cinco exemplos bastante distintos quanto aos valores de probabilidade e graus de pertinência. É possível observar que o somatório dos graus de pertinência não precisam, necessariamente, somar 1.

- **exemplo 1** : $n = 1$, $P(e_1|H_1) = 0.20$, $\mu_{11m} = 0.71$, $\mu_{11p} = 0.28$, $P(H_1) = 1$,

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^n [((0.20 * 0.71) + ((1 - 0.20) * 0.28)) * 1] = 0.3660 \quad (3.2.2)$$

$$\alpha = (1/\tilde{\Delta}) = 2.7322 \quad (3.2.3)$$

$$P(H_1) = 0.3660 * 2.7322 = 1.0 \Rightarrow 100\% \quad (3.2.4)$$

- **exemplo 2** : $n = 2$, $P(e_1|H_1) = 0.54$, $P(e_2|H_1) = 0.32$, $\mu_{11m} = 0.92$, $\mu_{11p} = 0.35$,
 $P(H_1) = 0.80$, $P(H_2) = 0.20$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \sum_{i=1}^n [((0.54 * 0.92) + ((1 - 0.54) * 0.35)) * 0.80] + \dots \\ &\dots + [((0.32 * 0.92) + ((1 - 0.32) * 0.35)) * 0.20] = 0.630 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\alpha = (1/\tilde{\Delta}) = 1.5873 \quad (3.2.6)$$

$$P(H_1) = 0.8348 * 1.5873 = 0.83 \Rightarrow 83\% \quad (3.2.7)$$

$$P(H_2) = 0.1680 * 1.5873 = 0.17 \Rightarrow 17\% \quad (3.2.8)$$

$$\sum_{i=1}^2 [P(H_i)] = 1 \quad (3.2.9)$$

- **exemplo 3** : $n = 3$, $P(e_1|H_1) = 0.40$, $P(e_2|H_1) = 0.60$, $P(e_3|H_1) = 0.80$, $\mu_{11m} = 0.52$,
 $\mu_{11p} = 0.34$, $P(H_1) = 0.50$, $P(H_2) = 0.25$, $P(H_3) = 0.25$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \sum_{i=1}^n [((0.40 * 0.52) + ((1 - 0.40) * 0.34)) * 0.50] + \dots \\ &\dots + [((0.60 * 0.52) + ((1 - 0.60) * 0.34)) * 0.25] + \dots \\ &\dots + [((0.80 * 0.52) + ((1 - 0.80) * 0.34)) * 0.25] = 0.4390 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\alpha = (1/\tilde{\Delta}) = 2.2779 \quad (3.2.11)$$

$$P(H_1) = 0.2060 * 2.2779 = 0.47 \Rightarrow 47\% \quad (3.2.12)$$

$$P(H_2) = 0.1120 * 2.2779 = 0.25 \Rightarrow 25\% \quad (3.2.13)$$

$$P(H_3) = 0.1210 * 2.2779 = 0.28 \Rightarrow 28\% \quad (3.2.14)$$

$$\sum_{i=1}^3 [P(H_i)] = 1 \quad (3.2.15)$$

- **exemplo 4** : $n = 4$, $P(e_1|H_1) = 0.50$, $P(e_2|H_1) = 0.20$, $P(e_3|H_1) = 0.80$, $P(e_4|H_1) =$
 0.40 , $\mu_{11m} = 0.86$, $\mu_{11p} = 0.45$, $P(H_1) = 0.20$, $P(H_2) = 0.20$, $P(H_3) = 0.30$,
 $P(H_4) = 0.30$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} &= \sum_{i=1}^n [((0.50 * 0.86) + ((1 - 0.50) * 0.45)) * 0.20] + \dots \\
&\dots + [((0.20 * 0.86) + ((1 - 0.20) * 0.45)) * 0.20] + \dots \\
&\dots + [((0.80 * 0.86) + ((1 - 0.80) * 0.45)) * 0.30] + \dots \\
&\dots + [((0.40 * 0.86) + ((1 - 0.40) * 0.45)) * 0.30] = 0.6550 \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

$$\alpha = (1/\tilde{\Delta}) = 1.5267 \quad (3.2.17)$$

$$P(H_1) = 0.1310 * 1.5267 = 0.20 \Rightarrow 20\% \quad (3.2.18)$$

$$P(H_2) = 0.1064 * 1.5267 = 0.16 \Rightarrow 16\% \quad (3.2.19)$$

$$P(H_3) = 0.2334 * 1.5267 = 0.36 \Rightarrow 36\% \quad (3.2.20)$$

$$P(H_4) = 0.1842 * 1.5267 = 0.28 \Rightarrow 28\% \quad (3.2.21)$$

$$\sum_{i=1}^4 [P(H_i)] = 1 \quad (3.2.22)$$

- **exemplo 5** : $n = 5$, $P(e_1|H_1) = 0.40$, $P(e_2|H_1) = 0.60$, $P(e_3|H_1) = 0.15$, $P(e_4|H_1) = 0.53$, $P(e_5|H_1) = 0.75$, $\mu_{11m} = 0.63$, $\mu_{11p} = 0.52$, $P(H_1) = 0.30$, $P(H_2) = 0.25$, $P(H_3) = 0.15$, $P(H_4) = 0.20$, $P(H_5) = 0.10$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} &= \sum_{i=1}^n [((0.40 * 0.63) + ((1 - 0.40) * 0.52)) * 0.30] + \dots \\
&\dots + [((0.60 * 0.63) + ((1 - 0.60) * 0.52)) * 0.25] + \dots \\
&\dots + [((0.15 * 0.63) + ((1 - 0.15) * 0.52)) * 0.15] + \dots \\
&\dots + [((0.53 * 0.63) + ((1 - 0.53) * 0.52)) * 0.20] + \dots \\
&\dots + [((0.75 * 0.63) + ((1 - 0.75) * 0.52)) * 0.10] = 0.5722 \quad (3.2.23)
\end{aligned}$$

$$\alpha = (1/\tilde{\Delta}) = 1.7476 \quad (3.2.24)$$

$$P(H_1) = 0.1692 * 1.7476 = 0.30 \Rightarrow 30\% \quad (3.2.25)$$

$$P(H_2) = 0.1465 * 1.7476 = 0.26 \Rightarrow 26\% \quad (3.2.26)$$

$$P(H_3) = 0.0805 * 1.7476 = 0.14 \Rightarrow 14\% \quad (3.2.27)$$

$$P(H_4) = 0.1157 * 1.7476 = 0.20 \Rightarrow 20\% \quad (3.2.28)$$

$$P(H_5) = 0.0603 * 1.7476 = 0.10 \Rightarrow 10\% \quad (3.2.29)$$

$$\sum_{i=1}^5 [P(H_i)] = 1 \quad (3.2.30)$$

A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares [POL 04]. Em [MAO 98] é exposto que por indução se uma fórmula for verdadeira para todos os valores de n até m , então ela também deve ser verdadeira para $n = m + 1$.

A prova por indução é uma forma poderosa de demonstração porque permite ao matemático provar que uma declaração é válida para um número infinito de casos demonstrando apenas um único caso [SIN 98].

Pelo método da indução entende-se que, se forem seguidos os requisitos definidos anteriormente, a equação 3.1.10 é adequada como inferência híbrida *fuzzy*-bayesiana para a modelagem proposta em domínios que apresentarem j categorias de evidências (variável de entrada) e i categorias de hipótese (variável de saída).

Portanto, fica provado por indução que a equação 3.1.10 mantém a propriedade da teoria da probabilidade de soma unitária das probabilidades das categorias da hipótese.

É importante frisar que a metodologia proposta nesta pesquisa possui a seguinte restrição para ser utilizada adequadamente: o domínio de aplicação necessita apresentar as características definidas anteriormente neste capítulo, ou seja, basicamente estar envolto por variáveis aleatórias e imprecisas, e conseqüentemente possuir características similares à do domínio de análise apresentado a seguir.

Desenvolveu-se um programa que implementa a prova matemática da inferência híbrida *fuzzy*-bayesiana proposta com o intuito de permitir testes com n categorias de hipótese. O programa foi desenvolvido em JSP (Java Server Pages) e está disponível a partir de qualquer *browser* em

<http://www.myjavaserver.com/~carlosfuzzy/provamatematica.jsp>

Qualquer problema de acesso ao endereço acima contate

carlosaanalista@gmail.com.

3.3 Exemplo da Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

Este item apresenta um domínio de análise da aplicação da abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana desenvolvida nesta pesquisa para ilustrar os resultados encontrados. Também expõe uma comparação dos resultados deste exemplo com o hibridismo e sem o hibridismo com o objetivo de demonstrar o reconhecimento da incerteza na rede híbrida *fuzzy*-bayesiana em comparação com a rede bayesiana tradicional.

3.3.1 O Problema do Distúrbio Nutricional

Um problema que não é recente mas que vem recebendo uma atenção especial do mundo todo devido aos níveis alarmantes que estão sendo divulgados, é a obesidade.

A obesidade é definida como um excesso de gordura no corpo e está associada a um grande número de doenças que debilitam e ameaçam a vida [IOT 04].

O site da Organização Mundial da Saúde (OMS) <http://www.who.int/en/>, apresenta informações importantes e preocupantes sobre a evolução da obesidade em todo o mundo. Em 1995 havia uma estimativa de 200 milhões de adultos obesos por todo mundo e outros 18 milhões de crianças abaixo dos cinco anos que apresentavam sobrepeso. A obesidade já vem sendo tratada como uma epidemia e não está restrita aos países desenvolvidos. Pois nos países em desenvolvimento a estimativa é de que 115 milhões de pessoas sofrem com problemas relacionados com a obesidade.

A OMS ainda explica que, geralmente, os homens apresentam maiores taxas de sobrepeso e as mulheres maiores taxas de obesidade. Para ambos, a obesidade apresenta um alto risco de doenças como: diabetes, doenças cardiovasculares, hipertensão, alguns tipos de câncer entre outras, reduzindo a qualidade de vida e levando a uma morte prematura.

No domínio de análise desta pesquisa é abordada a questão do distúrbio nutricional e seus possíveis estados, tendo em vista que é um problema grave e que apresenta as características de incerteza modeladas pela abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana. Pois, este domínio apresenta variáveis onde o especialista possui dificuldade em estabele-

cer limites para elas (imprecisão), e outras variáveis que não apresentam esta dificuldade podendo ser diretamente instanciadas em uma rede bayesiana tradicional.

A obesidade vem crescendo em todas as idades, etnias e grupos raciais durante as últimas três décadas. Para pessoas entre 5 e 20 anos a prevalência de obesidade é de 15% [OGD 02].

O estado nutricional é um dos indicadores de saúde de um indivíduo. É obtido por meio de medidas antropométricas, indicadores antropométricos, composição corporal, exames bioquímicos e de imagem. A avaliação do estado nutricional de um indivíduo é feita de acordo com a necessidade investigativa de saúde considerando o custo dos dados e o benefício da informação. Um modelo de uma rede bayesiana tradicional modelada para este domínio é apresentada no apêndice A.

Um possível diagnóstico do estado nutricional de um indivíduo é baixo peso, peso normal, sobrepeso, obesidade e obesidade mórbida.

Para o domínio de análise desta pesquisa está sendo usado a circunferência abdominal e a relação cintura quadril como evidências (variáveis de entrada).

Na obtenção dessas medidas é utilizada uma fita métrica não extensiva (fibra de vidro).

A cintura é a medida do menor perímetro da região abdominal acima do umbigo. As técnicas de mensuração da cintura e o procedimento são [PET 99]:

Técnica: o indivíduo deve estar em posição ortostática (de pé). O avaliador de frente para o avaliado.

Procedimento: passar a fita em torno do avaliado de trás para frente, tendo o cuidado de manter a fita no plano horizontal e após uma expiração normal do avaliado, fazer a leitura da medida.

O quadril é a medida da maior porção da região glútea (nádegas). As técnicas de mensuração do quadril e o procedimento são:

Técnica: o indivíduo avaliado deve estar em pé, na posição ereta, coxas unidas e braços na cintura. E o avaliador coloca-se ao lado direito do avaliado.

Procedimento: é feita a mensuração no maior perímetro do quadril, levando-se em consideração a porção mais volumosa das nádegas, esta porção que é localizada observando-se a pelve.

O abdômen é a medida do maior perímetro da região abdominal à altura do umbigo. As técnicas de mensuração do abdômen e o procedimento são:

Técnica: o avaliado deve estar em posição ortostática e de frente para o avaliado.

Procedimento: passar a fita em torno do avaliado de trás para frente, tendo o cuidado de manter a fita no plano horizontal e após uma expiração normal do avaliado, fazer a leitura da medida.

3.3.2 A Inferência Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

O domínio de análise considera apenas duas possíveis causas para o distúrbio nutricional em mulheres adultas: circunferência abdominal e a relação cintura quadril.

O diagnóstico dos níveis de obesidade é um processo envolto em incerteza, pois existe a complexidade de determinação dos valores delimitadores de cada variável.

As tabelas 3.1 e 3.2 mostram as probabilidades *a priori* para as variáveis de entrada (evidências). A tabela 3.3 apresenta as probabilidades *a priori* do nó intermediário **Indicadores Antropométricos** (este nó da rede representa o conhecimento encapsulado do especialista) e a tabela 3.4 apresenta as probabilidades *a priori* para a variável de saída da rede (hipótese), utilizou-se a entropia máxima para esta variável.

A figura 3.2 mostra o diagrama de classe da aplicação desenvolvida.

A figura 3.3 apresenta a rede bayesiana tradicional do exemplo desenvolvido. Como pode ser observado foram instanciados os estados **Moderada** para a variável **Circunferência Abdominal** e **Moderada** para a variável **Cintura Quadril**. Nota-se que não ocorreu a instanciação de nenhum dos estados do nó intermediário **Indicadores Antropométricos** pois, o vetor de probabilidades para este nó da rede é gerado

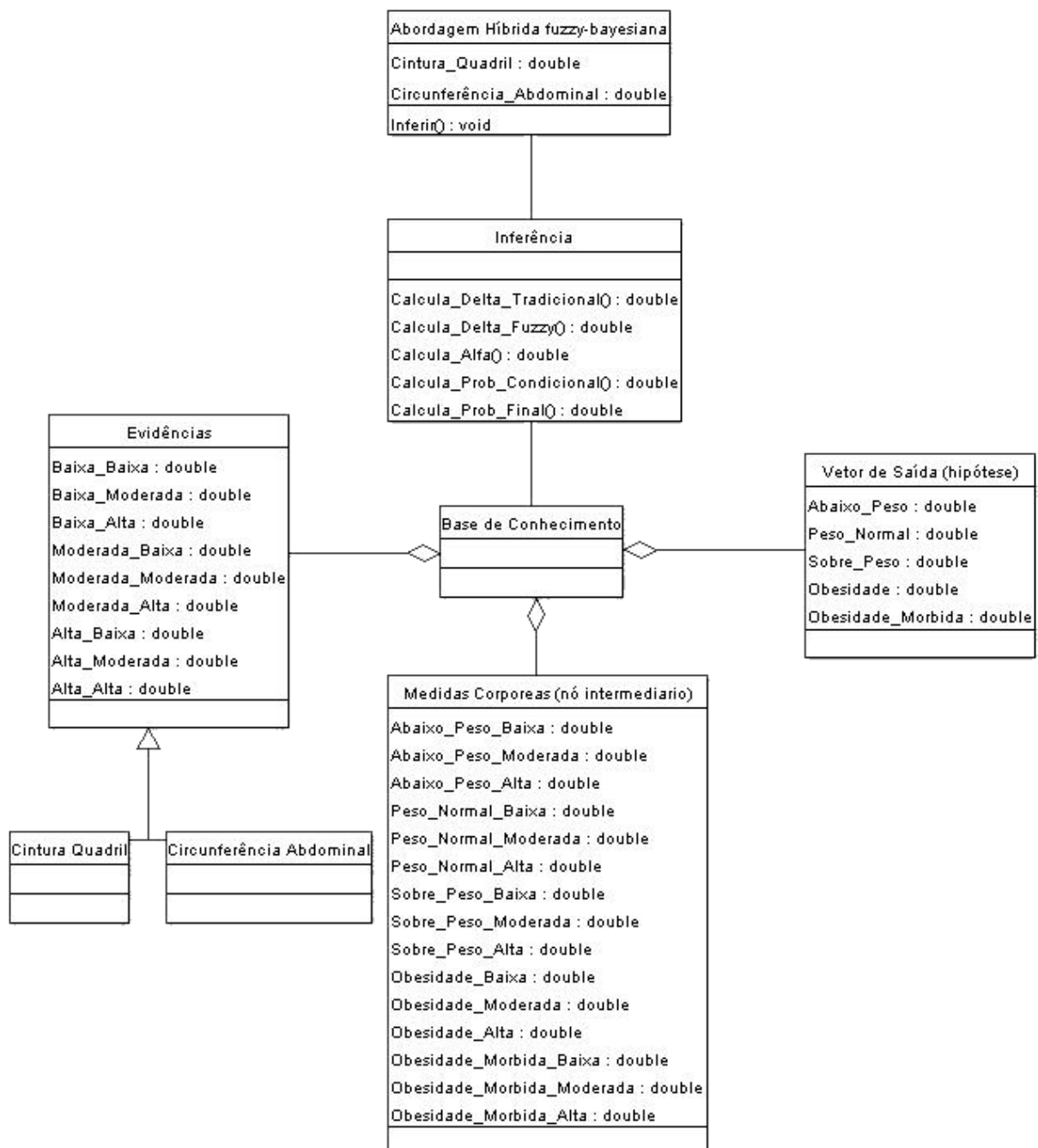


Figura 3.2: Diagrama de Classe do Domínio de Análise

Indicadores Antropométricos	Baixa	Moderada	Alta
Baixo	0.800	0.150	0.050
Normal	0.100	0.750	0.150
Elevado	0.010	0.190	0.800

Tabela 3.1: Probabilidades *a priori* da Evidência Circunferência Abdominal

Indicadores Antropométricos	Baixa	Moderada	Alta
Baixo	0.700	0.200	0.100
Normal	0.200	0.600	0.200
Elevado	0.100	0.300	0.600

Tabela 3.2: Probabilidades *a priori* da Evidência Relação Cintura Quadril

Estados Nutricionais	Baixo	Normal	Elevado
Abaixo do Peso	0.690	0.300	0.010
Peso Normal	0.200	0.700	0.100
Sobrepeso	0.010	0.600	0.390
Obesidade	0.003	0.097	0.900
Obesidade Mórbida	0.001	0.005	0.994

Tabela 3.3: Probabilidades *a priori* do nó Intermediário Indicadores Antropométricos

pela inferência que utiliza as instanciações de cada variável de entrada. Salienta-se que, caso o nó **Indicadores Antropométricos** seja instanciado implicaria na anulação dos nós **Circunferência Abdominal** e **Cintura Quadril** e por este motivo esta ação não deve ocorrer.

A inferência utilizada para gerar os resultados apresentados na figura 3.3 são obtidos pelos seguintes passos:

1. Calcular a probabilidade inicial do nó **Indicadores Antropométricos**, equação

Abaixo do Peso	Peso Normal	Sobrepeso	Obesidade	Obesidade M3rbita
0.200	0.200	0.200	0.200	0.200

Tabela 3.4: Probabilidades *a priori* da Hip3tese Estados Nutricionais

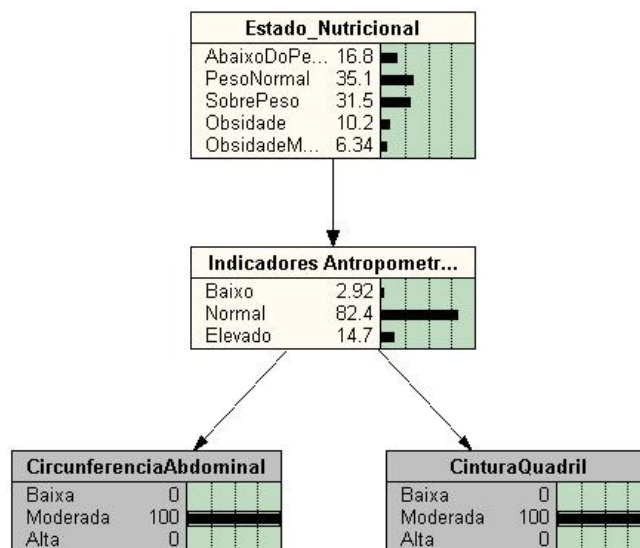


Figura 3.3: Parte Qualitativa da Rede H3brida do Dom3nio de An3lise

3.3.2.1.

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) * P(e_i), \text{ onde} \quad (3.3.2.1)$$

$P(H_i)$ representa as probabilidades *a priori* dos estados da hip3tese da vari3vel **Estados Nutricionais** e $P(e_i)$ representam as probabilidades *a priori* da vari3vel **Indicadores Antropom3tricos**.

Por exemplo, para calcular as probabilidades iniciais dos estados **Baixo**, **Moderado** e **Alto** para a vari3vel **Indicadores Antropom3tricos** apresentadas na figura 2.12, utilizam-se as tabelas 3.3 e 3.4 ent3o tem-se que:

$$P(\text{InicialBaixoIndicadoresAntropometricos}) = [(0.2 * 0.69) + (0.2 * 0.2) + \dots$$

$$\dots + (0.2 * 0.01) + (0.2 * 0.003) + (0.2 * .001)] * 100 = 18,10\% \quad (3.3.2.2)$$

$$P(\text{InicialModeradoIndicadoresAntropometricos}) = [(0.2 * 0.3) + (0.2 * 0.7) + \dots \\ \dots + (0.2 * 0.6) + (0.2 * 0.097) + (0.2 * .005)] * 100 = 34,00\% \quad (3.3.2.3)$$

$$P(\text{InicialAltoIndicadoresAntropometricos}) = [(0.2 * 0.01) + (0.2 * 0.1) + \dots \\ \dots + (0.2 * 0.39) + (0.2 * 0.9) + (0.2 * .994)] * 100 = 47,90\% \quad (3.3.2.4)$$

2. Calcular as probabilidades iniciais das variáveis de entrada, **Circunferência Abdominal** e **Cintura Quadril**.

Para esta inferência utilizam-se as tabelas 3.1 e 3.2 e a equação 3.3.2.1, onde $P(H_i)$ são as probabilidades iniciais da variável **Indicadores Antropométricos**, ou seja os resultados das equações 3.3.2.2, 3.3.2.3 e 3.3.2.4.

Por exemplo, as probabilidades das variáveis de entrada mostrados na figura 2.12 foram obtidos da seguinte maneira:

$$P(\text{InicialBaixaCircunferenciaAbdominal}) = [(0.181 * 0.80) + (0.34 * 0.10) + \dots \\ \dots + (0.479 * 0.01)] * 100 = 18,30\% \quad (3.3.2.5)$$

$$P(\text{InicialModeradaCircunferenciaAbdominal}) = [(0.181 * 0.15) + (0.34 * 0.75) + \dots \\ \dots + (0.479 * 0.19)] * 100 = 37,30\% \quad (3.3.2.6)$$

$$P(\text{InicialAltaCircunferenciaAbdominal}) = [(0.181 * 0.05) + (0.34 * 0.15) + \dots$$

$$\dots + (0.479 * 0.80)] * 100 = 44,30\% \quad (3.3.2.7)$$

$$P(\text{InicialBaixaCinturaQuadril}) = [(0.181 * 0.70) + (0.34 * 0.20) + \dots \\ \dots + (0.479 * 0.10)] * 100 = 24,30\% \quad (3.3.2.8)$$

$$P(\text{InicialModeradaCinturaQuadril}) = [(0.181 * 0.20) + (0.34 * 0.60) + \dots \\ \dots + (0.479 * 0.30)] * 100 = 38,40\% \quad (3.3.2.9)$$

$$P(\text{InicialAltaCinturaQuadril}) = [(0.181 * 0.10) + (0.34 * 0.20) + \dots \\ \dots + (0.479 * 0.60)] * 100 = 37,30\% \quad (3.3.2.10)$$

3. Calcular as probabilidades condicionais da variável **Indicadores Antropométricos**.

Suponha-se que tenha sido instanciada o primeiro estado *Moderada* para a evidência *Cintura Quadril* então calcula-se as probabilidades condicionais da variável **Indicadores Antropométricos** da seguinte maneira:

Para este cálculo são necessárias as probabilidades condicionais da tabela 3.2 e as probabilidades iniciais dos **Indicadores Antropométricos**, anteriormente calculados.

Primeiro calcula-se o Δ que é o somatório da multiplicação entre as probabilidades da evidência e as probabilidades iniciais dos **Indicadores Antropométricos** relacionados para cada estado,

$$\Delta = [(0,2 * 0,181) + \dots \\ \dots + (0,6 * 0,34) + (0,3 * 0,479) = 0,3839 \quad (3.3.2.11)$$

então calcula-se o α que é representado por

$$\alpha = \sum_{i=1}^n [P(H_i)]/\Delta, \text{ onde} \quad (3.3.2.12)$$

$P(H_i)$ representa as probabilidades da hipótese **Indicadores Antropométricos**. Tem-se que:

$$\alpha = 1/0,3839 = 2,60 \quad (3.3.2.13)$$

finalmente calcula a probabilidade condicional para cada estado da variável **Indicadores Antropométricos** utilizando-se a seguinte equação:

$$ProbCond(H_i) = ((ProbAprioriEvidencia_i * ProbIniciP(H_i)) * \alpha) \quad (3.3.2.14)$$

Obtendo-se então o seguinte cálculo.

$$ProbCondBaixaIndAntropCinturaQuadril = (((0,2*0,181)*2,60))*100 = 9.41\% \quad (3.3.2.15)$$

Utilizando-se o mesmo raciocínio encontra-se as outras probabilidades condicionais para esta variável e com esta instanciação.

Depois de instanciado o estado *Moderada* para a evidência **Circunferência Abdominal** e utilizando o mesmo raciocínio anteriormente explicado, encontram-se as probabilidades condicionais para a variável **Indicadores Antropométricos** apresentados na figura 3.3. Lembrando-se que as probabilidades utilizadas no cálculo do Δ não são mais as iniciais e sim as condicionais.

Por exemplo, utilizando a tabela 3.1 e as probabilidades condicionais de **Indicadores Antropométricos**, encontra-se a probabilidade *Baixo* quando ocorrer a instanciação dos estados *Moderada* para as duas evidências da seguinte maneira:

$$\Delta = [(0,15 * 0,0942) + ...$$

$$\dots + (0,75 * 0,532) + (0,19 * 0,374) = 0,4841 \quad (3.3.2.16)$$

$$\alpha = 1/0,4841 = 2,06 \quad (3.3.2.17)$$

$$ProbCondBaixoIndAntropCinturaQuadril \cap CircunAbdom = \dots$$

$$(((0,15 * 0,0942) * 2,06)) * 100 = 2,92\% \quad (3.3.2.18)$$

$$ProbCondModeradoIndAntropCinturaQuadril \cap CircunAbdo = \dots$$

$$(((0,75 * 0,532) * 2,06)) * 100 = 82,4\% \quad (3.3.2.19)$$

$$ProbCondAltoIndAntropCinturaQuadril \cap CircunAbdom = \dots$$

$$(((0,19 * 0,374) * 2,06)) * 100 = 14,7\% \quad (3.3.2.20)$$

4. Calcular as probabilidades finais do diagnóstico da variável de saída (hipótese) *Estado Nutricional*.

Para esta inferência utilizam-se as tabelas 3.3 e 3.4 e as probabilidades condicionais de *Indicadores Antropométricos*.

Por exemplo, a inferência da probabilidade final do estado *Abaixo do Peso* é feita da seguinte maneira:

Primeiro utiliza-se a equação 3.3.2.1, onde $P(H_i)$ representa a entropia máxima e e_i representam as probabilidades condicionais da tabela 3.3.

$$BaixaIndAntrop*Entropia = [(0,69*0,2)+(0,2*0,2)+(0,01*0,2)+(0,003*0,2)...$$

$$\dots + (0,001 * 0,2)] = 0,1808 \quad (3.3.2.21)$$

$$\begin{aligned} \text{ModeradoIndAntrop*Entropia} &= [(0,30*0,2)+(0,7*0,2)+(0,6*0,2)+(0,097*0,2)... \\ &\dots + (0,005 * 0,2)] = 0,3404 \end{aligned} \quad (3.3.2.22)$$

$$\begin{aligned} \text{AltoIndAntrop*Entropia} &= [(0,01 * 0,2) + (0,1 * 0,2) + (0,39 * 0,2) + (0,9 * 0,2)... \\ &\dots + (0,994 * 0,2)] = 0,4788 \end{aligned} \quad (3.3.2.23)$$

$$P(\text{AbaixoPesoBaixaIndAntrop}) = [(0,69 * 0,2)/0,1808] = 0,7632 \quad (3.3.2.24)$$

$$P(\text{PesoNormalBaixaIndAntrop}) = [(0,2 * 0,2)/0,1808] = 0,2212 \quad (3.3.2.25)$$

$$P(\text{SobrepesoBaixaIndAntrop}) = [(0,01 * 0,2)/0,1808] = 0,0110 \quad (3.3.2.26)$$

$$P(\text{ObesidadeBaixaIndAntrop}) = [(0,003 * 0,2)/0,1808] = 0,0033 \quad (3.3.2.27)$$

$$P(\text{ObesidadeMorbidaBaixaIndAntrop}) = [(0,001 * 0,2)/0,1808] = 0,0011 \quad (3.3.2.28)$$

$$P(\text{AbaixoPesoModeradoIndAntrop}) = [(0,30 * 0,2)/0,3404] = 0,1762 \quad (3.3.2.29)$$

$$P(\text{PesoNormalModeradoIndAntrop}) = [(0,7 * 0,2)/0,3404] = 0,4112 \quad (3.3.2.30)$$

$$P(\text{SobrepesoModeradoIndAntrop}) = [(0,6 * 0,2)/0,3404] = 0,3525 \quad (3.3.2.31)$$

$$P(\text{ObesidadeModeradoIndAntrop}) = [(0,097 * 0,2)/0,3404] = 0,0569 \quad (3.3.2.32)$$

$$P(\text{ObesidadeMorbidaModeradoIndAntrop}) = [(0,005 * 0,2)/0,3404] = 0,0029 \quad (3.3.2.33)$$

$$P(\text{AbaixoPesoAltoIndAntrop}) = [(0,01 * 0,2)/0,4788] = 0,0041 \quad (3.3.2.34)$$

$$P(\text{PesoNormalAltoIndAntrop}) = [(0,1 * 0,2)/0,4788] = 0,0417 \quad (3.3.2.35)$$

$$P(\text{SobrepesoAltoIndAntrop}) = [(0,39 * 0,2)/0,4788] = 0,1629 \quad (3.3.2.36)$$

$$P(\text{ObesidadeAltoIndAntrop}) = [(0,9 * 0,2)/0,4788] = 0,3759 \quad (3.3.2.37)$$

$$P(\text{ObesidadeMorbidaAltoIndAntrop}) = [(0,994 * 0,2)/0,4788] = 0,4152 \quad (3.3.2.38)$$

Então encontra-se a probabilidade final da hipótese

$$\begin{aligned} &P(\text{AbaixoPesoModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) = \\ &[(0,7632 * 0,0292) + (0,1762 * 0,8240) + (0,0041 * 0,1470)] = 0,1680 = 16.8\% \end{aligned} \quad (3.3.2.39)$$

$$\begin{aligned} &P(\text{PesoNormalModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) = \\ &[(0,2212 * 0,0292) + (0,4112 * 0,8240) + (0,0417 * 0,1470)] = 0,3514 = 35.14\% \end{aligned} \quad (3.3.2.40)$$

$$\begin{aligned} &P(\text{SobrepesoModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) = \\ &[(0,0110 * 0,0292) + (0,3525 * 0,8240) + (0,1629 * 0,1470)] = 0,3150 = 31.50\% \end{aligned} \quad (3.3.2.41)$$

$$\begin{aligned} &P(\text{ObesidadeModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) = \\ &[(0,0033 * 0,0292) + (0,0569 * 0,8240) + (0,3759 * 0,1470)] = 0,1020 = 10.20\% \end{aligned} \quad (3.3.2.42)$$

$$P(\text{ObesidadeMorbidaModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) =$$

$$[(0,0011 * 0,0292) + (0,0029 * 0,8240) + (0,4152 * 0,1470)] = 0,0634 = 6.34\%$$

(3.3.2.43)

A figura 3.4 [KRA 92] apresenta a graduação de medidas e pesos que um indivíduo apresenta, e pode-se perceber que o diagnóstico do estado nutricional é um processo complexo.

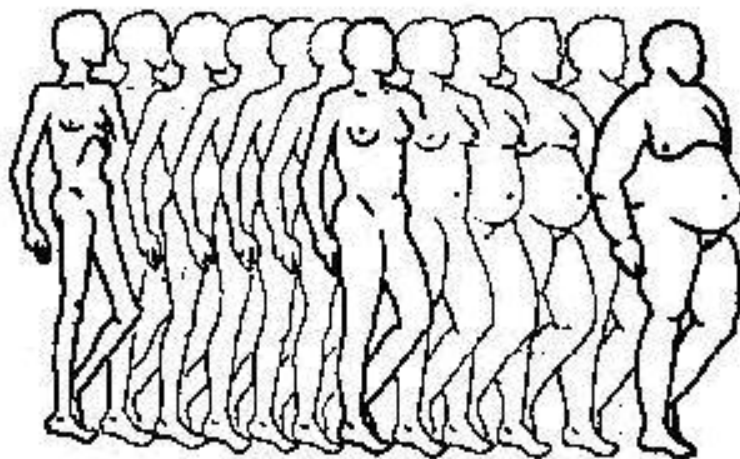


Figura 3.4: Transição Entre os Estados Nutricionais

A abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana proposta, trata a entrada do sistema de maneira alternativa pois, para as variáveis que apresentarem imprecisão deve-se indicar apenas os *dados* de entrada e o sistema faz a inferência *fuzzy* transformando estes *dados* em informação. Esse processo da transformação de *dado* em *informação* é realizado pela fuzzificação das entradas.

No caso do exemplo do distúrbio nutricional, as variáveis de entrada *Circunferência Abdominal* e *Cintura Quadril* são imprecisas, pois o especialista pode apresentar dificuldades em delimitar os estados de cada uma destas variáveis.

Para cada uma das variáveis de entrada foram criados três conjuntos *fuzzy*: *Baixa*, *Moderada* e *Alta*.

A figura 3.5 mostra a tela inicial do sistema desenvolvido para o domínio de análise que utiliza a abordagem híbrida *fuzzy*- bayesiana proposta.

VARIÁVEIS DE ENTRADA OU EVIDÊNCIAS	
Cintura Quadril - UD [0.6 , 0.9]	0.79
Circunferência Abdominal - UD [60 , 150]	81

INFERIR

Figura 3.5: Tela Inicial do Domínio de Análise

Foram usados os seguintes dados de entrada para demonstrar o funcionamento da rede: Circunferência Abdominal=81 e Cintura Quadril=0.79.

As tabelas 3.5 e 3.6 apresentam os graus de pertinência obtidos pela fuzzificação dos dados de entrada. Neste exemplo foram utilizadas funções de pertinência do tipo Z, Pi-Sino e S.

Nota-se que os conjuntos *fuzzy Moderada* foram os que apresentaram maior pertinência para cada variável. Entretanto percebe-se que os dados de entrada geraram pertinência também ao CF *Alta* para Cintura Quadril *Baixa* para Circunferência Abdominal o que demonstra a imprecisão dos dados.

Conjuntos <i>fuzzy</i>	Graus de Pertinência
Baixa	0.00
Moderada	0.71
Alta	0.28

Tabela 3.5: Conjuntos *Fuzzy* e Graus de Pertinência da Variável Cintura Quadril

Conjuntos <i>fuzzy</i>	Graus de Pertinência
Baixa	0.41
Moderada	0.58
Alta	0.00

Tabela 3.6: Conjuntos *Fuzzy* e Graus de Pertinência da Variável Circunferência Abdominal

As figuras 3.6 e 3.7 podem facilitar a compreensão das atribuições dos graus de pertinência, baseados nos dados entradas em questão.

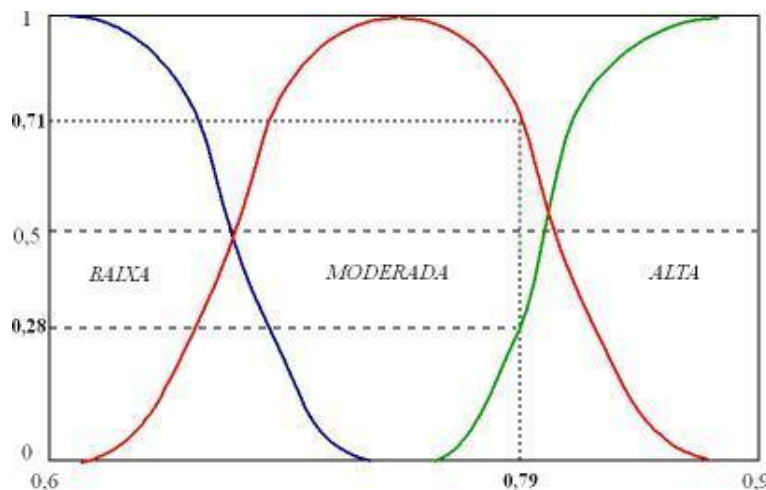


Figura 3.6: Graus de Pertinência da Variável Cintura Quadril

O processo de inferência híbrido *fuzzy*-bayesiano propõe alterações no cálculo do Δ (delta), gerando um $\tilde{\Delta}$ (delta *fuzzy*), isto ocorre para reconhecer a imprecisão dos dados de entrada. Esta incerteza, representada pelos graus de pertinência, interage

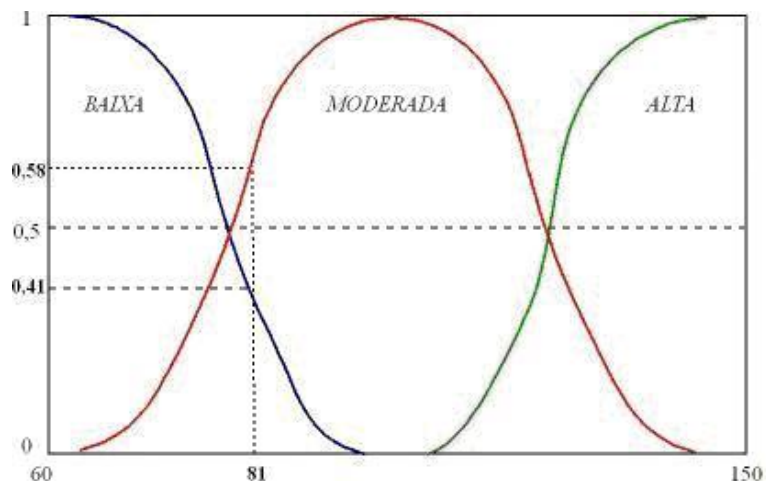


Figura 3.7: Graus de Pertinência da Variável Circunferência Abdominal

com as probabilidades condicionais da base de conhecimento.

As probabilidades condicionais *a priori* que devem ser utilizadas são aquelas do estado que apresentar o maior grau de pertinência.

No caso do exemplo apresentado, foram utilizadas as probabilidades dos estados *Moderada* apresentadas nas tabelas 3.2 e 3.1, pois estes estados apresentaram maiores graus de pertinência.

O cálculo das probabilidades iniciais é feito da mesma maneira da rede sem hibridismo como apresentado nas equações 3.3.2.2 a 3.3.2.10.

O cálculo das probabilidades híbridas condicionais do nó *Indicadores Antropométricos* é feito da seguinte maneira dado a entrada 0.79 para a evidência *Cintura Quadril* e utilizando as probabilidades iniciais de *Indicadores Antropométricos*:

$$\tilde{\Delta} = (((0.2*0.71)+((1-0.2)*0.28))*0.1808)+(((0.6*0.71)+((1-0.6)*0.28))*0.3404)+...$$

$$... + (((0.3 * 0.71) + ((1 - 0.3) * 0.28)) * 0.4788)) = 0.4451 \quad (3.3.2.44)$$

$$\alpha = (1/0.4451) = 2.2466 \quad (3.3.2.45)$$

$$P(\text{HibridaBaixoIndAntropModeradaCintQuadril}) = (((0.2*0.71)+((1-0.2)*0.28))*... \\ ... * 0.1808) * 2.2466) = 0.1486 \quad (3.3.2.46)$$

$$P(\text{HibridaModeradoIndAntropModeradaCintQuadril}) = (((0.6*0.71)+((1-0.6)*0.28))*... \\ ... * 0.3404) * 2.2466) = 0.4114 \quad (3.3.2.47)$$

$$P(\text{HibridaAltoIndAntropModeradaCintQuadril}) = (((0.3*0.71)+((1-0.3)*0.28))*... \\ ... * 0.4788) * 2.2466) = 0.4399 \quad (3.3.2.48)$$

Seguindo o mesmo raciocínio pode-se calcular as probabilidades condicionais de *Indicadores Antropométricos* dado a entrada de *Circunferência Abdominal* = 81.

Agora utilizam-se as probabilidades condicionais de *Indicadores Antropométricos* calculadas anteriormente ao invés das probabilidades iniciais e as probabilidades *a priori* do estado *Moderada* apresentadas na tabela 3.6, obtendo os seguintes cálculos:

$$\tilde{\Delta} = (((0.15*0.58)+((1-0.15)*0.41))*0.1486)+(((0.75*0.58)+((1-0.75)*0.41))*0.4114)+... \\ ... + (((0.19 * 0.58) + ((1 - 0.19) * 0.41)) * 0.4399)) = 0.4804 \quad (3.3.2.49)$$

$$\alpha = (1/0.4804) = 2.0815 \quad (3.3.2.50)$$

$$P(\text{HibridaBaixoIndAntropModeradaCintQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdomin}) = ... \\ (((0.15 * 0.58) + ((1 - 0.15) * 0.41)) * 0.1486) * 2.0815) = 0.1347 \quad (3.3.2.51)$$

$$P(\text{HibridaModeradoIndAntropModeradaCintQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdomin}) = \dots$$

$$((((0.75 * 0.58) + ((1 - 0.75) * 0.41)) * 0.4114) * 2.0815) = 0.4602 \quad (3.3.2.52)$$

$$P(\text{HibridaModeradoIndAntropModeradaCintQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdomin}) = \dots$$

$$((((0.19 * 0.58) + ((1 - 0.19) * 0.41)) * 0.4399) * 2.0815) = 0.4049 \quad (3.3.2.53)$$

Os cálculos das probabilidades finais são feitos da mesma maneira como é feito na rede sem hibridismo.

$$P(\text{AbaixoPesoModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) =$$

$$[(0,7632 * 0.1347) + (0,1762 * 0.4602) + (0,0041 * 0.4049)] = 0,1856 = 18.56\% \quad (3.3.2.54)$$

$$P(\text{PesoNormalModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) =$$

$$[(0,2212 * 0.1347) + (0,4112 * 0.4602) + (0,0417 * 0.4049)] = 0,2360 = 23.60\% \quad (3.3.2.55)$$

$$P(\text{SobrepesoModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) =$$

$$[(0,0110 * 0.1347) + (0,3525 * 0.4602) + (0,1629 * 0.4049)] = 0,2297 = 22.97\% \quad (3.3.2.56)$$

$$P(\text{ObesidadeModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) =$$

$$[(0,0033 * 0.1347) + (0,0569 * 0.4602) + (0,3759 * 0.4049)] = 0,1789 = 17.89\% \quad (3.3.2.57)$$

$$P(\text{ObesidadeMorbidaModeradaCinturaQuadril} \cap \text{ModeradaCircunfAbdom}) =$$

$$[(0,0011 * 0.1347) + (0,0029 * 0.4602) + (0,4152 * 0.4049)] = 0,1696 = 16.96\%$$

(3.3.2.58)

As figuras 3.8 e 3.9 apresentam os histogramas de saídas da rede bayesiana tradicional (sem hibridismo) e da rede híbrida *fuzzy*-bayesiana proposta.



Figura 3.8: Vetor de Probabilidades de Saída da Rede Bayesiana Tradicional



Figura 3.9: Vetor de Probabilidades de Saída da Rede Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

Pelos dados de entrada e observando-se as tabelas 3.5 e 3.6 é possível perceber que para o caso instanciado, a variável *Cintura Quadril* está gradualmente deixando de pertencer ao conjunto *fuzzy Moderada* e começando a pertencer ao conjunto *fuzzy Alta*. Da mesma maneira, pode-se perceber que para a variável *Circunferência Abdominal*, do caso instanciado, está deixando de pertencer ao conjunto *fuzzy Baixa* e já pertence consideravelmente ao conjunto *fuzzy Moderada*.

Nota-se que existe uma imprecisão nos dados de entrada, pois cada uma das instanciações deles pertencem a dois conjuntos *fuzzy* simultaneamente. Esta impre-

cisão foi reconhecida pela rede híbrida *fuzzy*-bayes que redistribuiu o vetor de probabilidades de saída, devido a esta incerteza presente nos dados de entrada. A figura 3.4 exemplifica a graduação que sofre um indivíduo no processo de distúrbio nutricional. Observa-se que, para os dados de entrada do exemplo, há a incerteza representada pelos graus de pertinência aos conjuntos *fuzzy*, então a rede híbrida redistribui as probabilidades de saída.

Pode-se ter uma pseudo impressão de que o vetor de probabilidades de saída da rede híbrida *fuzzy*-bayesiana tenha aumentado a incerteza em relação à saída da rede bayesiana tradicional. Entretanto, o que ocorreu foi o reconhecimento da incerteza dos dados de entrada, ou seja, o resultado final da rede tradicional encapsula o erro gerado pela incerteza omitida ou não reconhecida nos dados de entrada.

Este domínio de análise foi implementado utilizando-se PHP versão 4.3.6 e o banco de dados MySQL 5.0.

3.4 Uma Análise da Abordagem Híbrida *Fuzzy*-Bayesiana

Este item visa demonstrar a influência da imprecisão reconhecida nos dados de entrada da rede híbrida proposta pela observação dos casos apresentados à rede. Estes casos foram baseados no domínio de análise desenvolvido para avaliar a abordagem híbrida. As funções de pertinência utilizadas foram Z, Pi-Sino e S para os conjuntos *fuzzy* *BAIXA*, *MODERADA* e *ALTA*, respectivamente, para cada variável de entrada.

Para o caso 1, figura 3.10, os dados de entrada foram: *Cintura Quadril* = 0.60 e *Circunferência Abdominal* = 86.0. Após fuzzificados obtiveram grau de pertinência 1 para o conjunto *fuzzy* *BAIXA* para a variável *Cintura Quadril* e grau de pertinência 1 para o conjunto *fuzzy* *MODERADA* para a variável *Circunferência Abdominal*. Quando ocorre grau de pertinência 1 para uma variável é denominado, nesta pesquisa de caso típico para a variável considerada. Nota-se que, os casos típicos não apresentam imprecisão então a rede híbrida infere da mesma maneira que a rede bayesiana tradicional.

Para o caso 2, figura 3.11, os dados de entrada foram: *Cintura Quadril* = 0.65 e *Circunferência Abdominal* = 86.0. Após fuzzificados obtiveram grau de per-



Figura 3.10: Caso 1 - Típico

tinência 0.65 para o conjunto *fuzzy* *BAIXA* e 0.34 para o conjunto *fuzzy* *MODERADA* para a variável *Cintura Quadril* e grau de pertinência 1 para o conjunto *fuzzy* *MODERADA* para a variável *Circunferência Abdominal*. Nota-se que, o valor de entrada da variável *Cintura Quadril* aumentou 0.05 o que gerou uma imprecisão “ALTA” para esta variável. É importante frisar que todos os graus de imprecisão estão diretamente relacionados à modelagem das funções de pertinência e esta modelagem é específica para cada domínio de aplicação.

É possível observar que a imprecisão reconhecida no caso 2 gerou uma redistribuição do vetor de probabilidades de saída da rede híbrida e que o não reconhecimento da imprecisão pela rede bayesiana tradicional resultou em um resultado idêntico ao do caso 1.

O caso 3, figura 3.12, os dados de entrada são: *Cintura Quadril* = 0.65 e *Circunferência Abdominal* = 83.0. Após fuzzificados obtiveram grau de pertinência 0.65 para o conjunto *fuzzy* *BAIXA* e 0.34 para o conjunto *fuzzy* *MODERADA* para a variável *Cintura Quadril* e grau de pertinência 0.14 para o conjunto *fuzzy* *BAIXA* e grau de pertinência 0.85 para o conjunto *fuzzy* *MODERADA* para a variável *Circunferência Abdomi-*

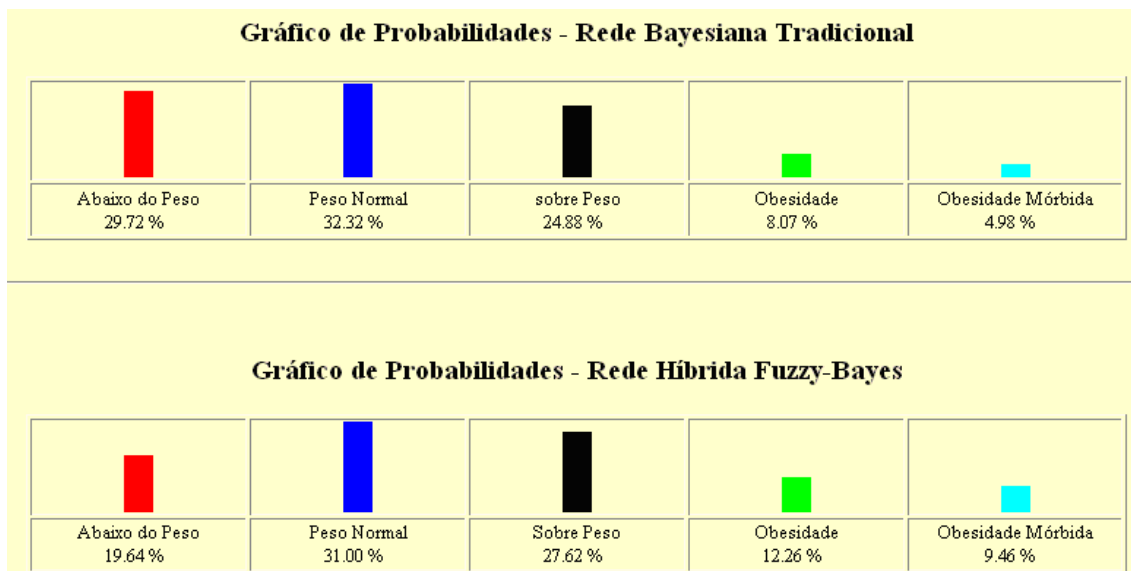


Figura 3.11: Caso 2 - Imprecisão “ALTA” para a Variável *Cintura Quadril*

nal. Nota-se que, o valor de entrada e graus de pertinência da variável *Cintura Quadril* permaneceram os mesmos. Entretanto, a redução de 03 *cm* no valor de entrada da variável *Circunferência Abdominal* gerou uma imprecisão “LEVE” para esta variável. O reconhecimento destes valores de imprecisão redistribuiu novamente o vetor de probabilidades de saída da rede híbrida o que não ocorreu com a rede bayesiana tradicional.

É possível perceber que a imprecisão nos dados de entrada fica aparente e altera a entropia na rede híbrida, isto é, leva a um espalhamento no vetor de probabilidade da hipótese (variável de saída).

Observando-se o caso 4, figura 3.13, tem-se os seguintes dados de entrada: *Cintura Quadril* = 0.65 e *Circunferência Abdominal* = 83.0. Após fuzzificados obtiveram grau de pertinência 0.65 para o conjunto *fuzzy BAIXA* e 0.34 para o conjunto *fuzzy MODERADA* para a variável *Cintura Quadril* e grau de pertinência 0.41 para o conjunto *fuzzy BAIXA* e grau de pertinência 0.58 para o conjunto *fuzzy MODERADA* para a variável *Circunferência Abdominal*. Nota-se que, o valor de entrada e graus de pertinência da variável *Cintura Quadril* permaneceram os mesmos, em relação aos casos apresentados anteriormente. Entretanto, a redução de 02 *cm* no valor de entrada da variável *Circunferência Abdominal* em relação ao caso 3 gerou uma imprecisão “ALTA”

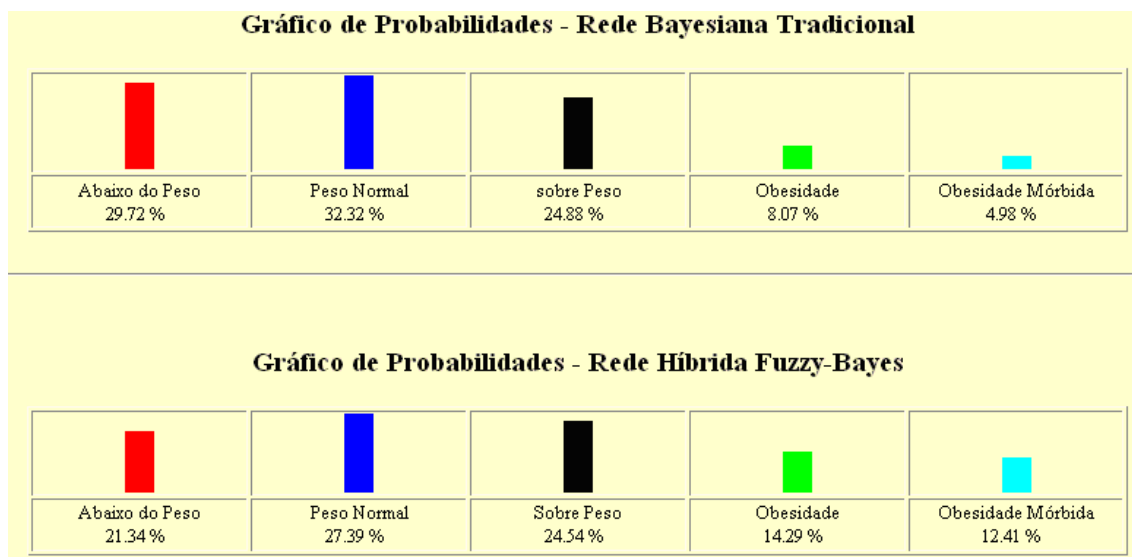


Figura 3.12: Caso 3 - Imprecisão “ALTA” para a Variável *Cintura Quadril* e “LEVE” para a Variável *Circunferência Abdominal*

para esta variável. Nota-se, novamente, a redistribuição do vetor de probabilidades de saída da rede híbrida o que não ocorreu com a rede bayesiana tradicional.

É necessário observar que, o nível elevado de imprecisão nos dados de entrada está conduzindo os resultados da rede híbrida à uma entropia máxima. Esta questão pode ser observada e é discutida no caso 5.

Segundo [GAT 72] de forma geral e intuitiva a entropia refere-se ao nível de aleatoriedade de um sistema. Em [Pri 03] é exposto que a máxima entropia possui a característica de atribuir valores iguais de probabilidade (assumindo que o número de estados seja finito) se não houver informações adicionais sobre o sistema.

A máxima entropia de acordo com [AYY 01] ocorre em resultados de inferências e soluções que não vão além das premissas existentes. Neste sentido, pode-se entender que a entropia máxima ocorre devido à impossibilidade de distinção entre o resultado correto e o incorreto tendo como base as informações disponíveis. Outras fontes sobre este assunto são: [BOU 99], [JAY 79] e [PAS 02].

Desta maneira ao observar o caso 5 (figura 3.14) foram informados à rede os seguintes dados de entrada: *Cintura Quadril* = 0.66 e *Circunferência Abdominal*

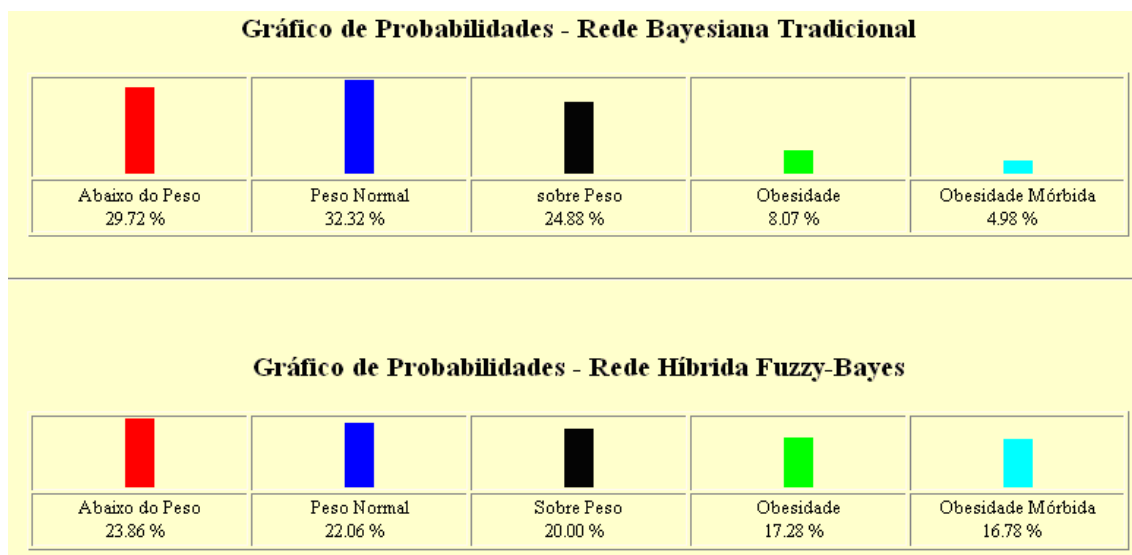


Figura 3.13: Caso 4 - Imprecisão “ALTA” para as Variáveis *Cintura Quadril* e *Circunferência Abdominal*

= 80.5 que após fuzzificados obtiveram graus de pertinência 0.5 para os conjuntos *fuzzy* *BAIXA* e *MODERADA* para a variável *Cintura Quadril* e graus de pertinência 0.5 para os conjuntos *fuzzy* *BAIXA* e *MODERADA* para a variável *Circunferência Abdominal*. Nota-se que, o valor de entrada da variável *Cintura Quadril* aumentou 0.01 *cm* e o valor de entrada da variável *Cintura Quadril* reduziu 0.5 *cm* em relação aos casos apresentados anteriormente. Os graus de pertinência 0.5 indicam um nível de imprecisão “MUITO ALTA” e este fator, após a redistribuição do vetor de probabilidades de saída, conduziu a rede híbrida à entropia máxima.

Como descrito no item 3.3.2, as probabilidades condicionais utilizadas na inferência são as referentes aos estados que apresentam maior grau de pertinência para cada variável. Entretanto neste caso especial onde os graus de pertinência são idênticos, neste domínio de análise optou-se por utilizar as probabilidades condicionais do estado que possuir maior risco, pois se está trabalhando com doença (distúrbio nutricional). Porém, esta escolha fica a cargo do engenheiro do conhecimento e do especialista durante o processo de modelagem do domínio de aplicação.

Pelos casos demonstrados pode-se concluir que, quando há imprecisão

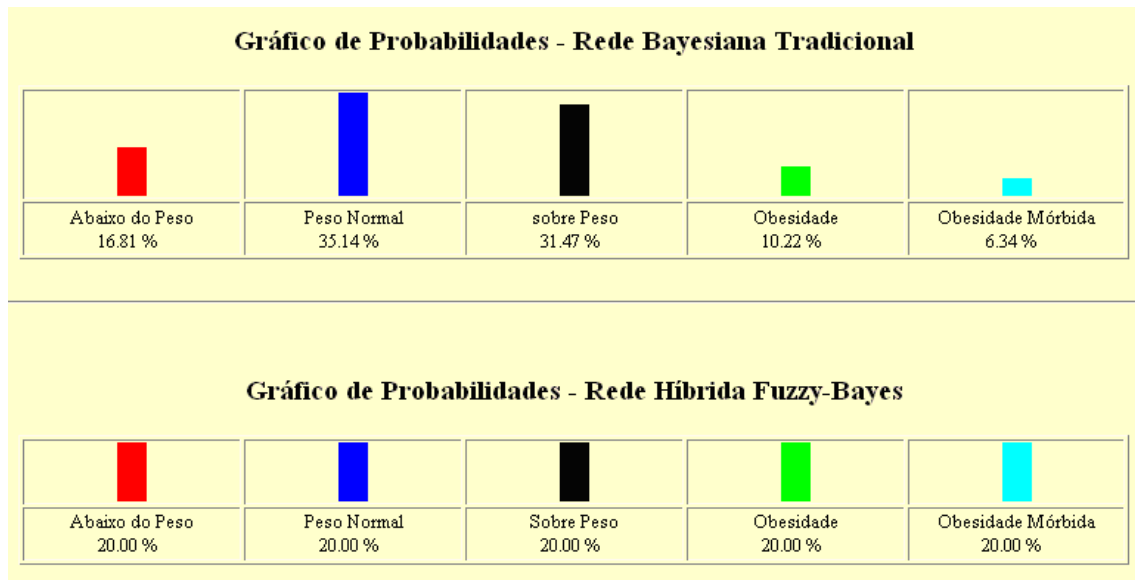


Figura 3.14: Caso 5 - Imprecisão “MUITO ALTA” para as Variáveis *Cintura Quadril* e *Circunferência Abdominal*

nos dados de entrada fica evidenciado que a abordagem híbrida proposta, ao reconhecer tal imprecisão, torna o sistema especialista mais fidedigno ao raciocínio do especialista humano aumentando sua especificidade e sensibilidade e portanto diminuindo a chance de erro na classificação de um caso.

Capítulo 4

Considerações Finais

Nesta pesquisa foi desenvolvida uma abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana que permite reconhecer a imprecisão dos dados de entrada e propagá-la na distribuição de probabilidade de uma rede bayesiana tradicional. A seguir são apresentados os resultados obtidos e as sugestões para futuras pesquisas.

4.1 Conclusão

Esta pesquisa apresenta uma modelagem empírica que permite entender uma realidade envolta em incertezas. Trabalha a partir de um conjunto de pesos elicitados de um especialista do domínio em análise. Estes pesos expressam graus de crença representados por valores de probabilidade e valores de graus de pertinência e são utilizados no processo de inferência *fuzzy*-bayes da abordagem híbrida proposta.

Inicialmente foi apresentada a teoria dos conjuntos *fuzzy* e as redes bayesianas e utilizou-se estas técnicas como suporte teórico essencial para o desenvolvimento da abordagem híbrida.

A metodologia desta abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana inicia com a análise do domínio de aplicação, identifica as evidências (variáveis de entrada), a hipótese (variável de saída) e as respectivas categorias destas variáveis. A abordagem proposta permite a modelagem da rede híbrida tanto para *nós* dicotômicos quanto para *nós* não-

dicotômicos. Na etapa de identificação de evidências e hipótese também é necessário distinguir quais dentre elas são imprecisas e quais são somente aleatórias. A etapa de aquisição de conhecimento é posterior à identificação das variáveis, apresenta uma grande complexidade devido à inúmeros fatores que a envolve, tais como: a escolha da técnica de aquisição e disponibilidade do especialista. Após esta etapa seguem a implementação, avaliação e manutenção da rede híbrida.

A abordagem híbrida está fundamentada matematicamente pelo método da indução. Nos inúmeros casos de teste observou-se que esta abordagem manteve a propriedade da soma unitária (teoria da probabilidade) para o vetor de probabilidades de saída da rede híbrida.

A inferência híbrida desta abordagem permite reconhecer a imprecisão dos dados de entrada. Utiliza os graus de pertinência, obtidos pelo processo de fuzzificação, das variáveis imprecisas na atualização da distribuição de probabilidade da rede híbrida *fuzzy*-bayesiana. Sendo que estes graus podem assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$.

Na avaliação da abordagem híbrida utilizou-se casos com diferentes níveis de imprecisão, variando desde a máxima entropia até a ausência de imprecisão. O reconhecimento de diferentes níveis de imprecisão nos dados de entrada resulta em diferentes distribuições de probabilidade. Para os casos com máxima entropia a distribuição de probabilidade torna-se equiprovável.

Um ponto relevante a esclarecer é que, para modelar algum domínio aplicando-se a abordagem híbrida *fuzzy*-bayesiana o engenheiro do conhecimento deve ter conhecimento das técnicas utilizadas, e este fato aumenta a complexidade da abordagem proposta.

Os seres humanos quando apresentados à situações onde não podem indicar uma resposta baseado nas informações disponíveis, geralmente, buscam informações adicionais para concluir sobre determinado assunto. De forma similar, a rede híbrida *fuzzy*-bayesiana faz inferências baseada nos níveis de incerteza nos dados de entrada. E em situações de máxima entropia ela aponta para a necessidade de novos conhecimentos para elucidar a situação analisada.

4.2 Trabalhos Futuros

- investigar outras formas de hibridismo. Por exemplo, fuzzificar o vetor de probabilidades de saída considerando regras *fuzzy* com diferentes t-conormas.
- aplicar a abordagem híbrida em algum domínio de aplicação e confrontar os resultados com especialista(s) humano(s).
- armazenar casos de consulta à uma rede híbrida *fuzzy*-bayesiana para descobrir novos conhecimentos do domínio de aplicação por meio de regras *fuzzy*.

Referências

- [ABR 99] ABREU, V. C. **Desenvolvimento de uma Metodologia de Distribuição de Viagens com Aplicação da Lógica Fuzzy**. Universidade da Brasília, 1999. Dissertação de Mestrado.
- [AYY 01] AYYUB, B. M. **Elicitation of Expert Opinions for Uncertainty and Risks**. CRC Press LLC, 2001.
- [BAR 01] BARRETO, M. J. **Inteligência Artificial No Limiar do Século XXI**. *ppp* Edições, 2001.
- [BAR 03] BARBETTA, P. A. **Estatística Aplicada Às Ciências Sociais**. Editora da UFSC, 2003.
- [BAS 94] BASTOS, R. C. **Avaliação de Desempenho de Sistemas Educacionais: Uma Abordagem Utilizando Conjuntos Difusos**. Universidade Federal de Santa Catarina, 1994. Tese de Doutorado.
- [BIT 01] BITTENCOURT, G. **Inteligência Artificial Ferramentas e Teorias**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [BOR 96] BORGES, P. S. S. **A Model of Strategy Games Based on The Paradigm of The Iterated Prisoner's Dilemma Employing Fuzzy Sets**. Universidade Federal de Santa Catarina, 1996. Tese de Doutorado.
- [BOU 99] BOURNE, R. A. **Default reasoning using maximum entropy and variable strength defaults**. University of London, 1999. Tese de Doutorado.
- [BRI 01] BRIGNOLI, J. T. **Modelo Híbrido Difuso-Probabilístico: Uma Alternativa Para Sistemas Especialistas**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Dissertação de Mestrado.
- [COS 99] COSTA, P. A. B. **Um Enfoque Segundo a Teoria de Conjuntos Difusos para a Meta Análise**. Universidade Federal de Santa Catarina, 1999. Tese de Doutorado.
- [DEM 67] DEMPSTER, A. P. Upper and lower probabilities induced by multivalued mappings. **Annals of Mathematical Statistics**, [S.l.], v.38, p.325–329, 1967.
- [FRE 00] FREUND, J. E.; SIMON, G. A. **Estatística Aplicada**. Bookman, 2000.

- [GAT 72] GATLIN, L. L. **Information theory and the living system**. Columbia University Press, 1972.
- [GON 93] GONZALEZ, A. J.; DANKEL, D. D. **The Engineering of Knowledge-Based System Theory and Practice**. Alan Apt, 1993.
- [GRI 97] GRINT, K. **Fuzzy Management: Contemporary Ideas and Practices at Work**. Oxford University Press, 1997.
- [HAL 01] HALLIWELL, J.; SHEN, Q. From fuzzy probabilities to linguistic probability theory. In: WORKSHOP ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE - UK. [s.n.], 2001. p.129–135.
- [HAR 86] HART, A. **Knowledge acquisition for expert systems**. McGraw-Hill, Inc., 1986.
- [HAR 90] HARMON, P.; SAWYER, B. **Creating Expert Systems for Business and Industry**. John Wiley and Sons, Inc., 1990.
- [HJZ 99] HANS-JRGEN ZIMMERMANN, ELITE FOUNDATION, A. G. T. H. O. F. S. . **Practical Applications of Fuzzy Technologies**. kluwer Academic Publishers, 1999.
- [IBR 04] IBRAHIM, A. M. **Fuzzy Logic for Embedded Systems Applications**. Elsevier, 2004.
- [IOT 04] IOTF, I. I. T. F. **The Global Challenge of Obesity - IOTF document**. Disponível em <<http://www.iotf.org/>>. Acesso em: Maio de 2004.
- [JAY 79] JAYNES, E. T. **Where do we stand on maximum entropy?** MIT PRESS, 1979.
- [KAR 86] KARWOWSKI, W.; A., M. **Aplications of Fuzzy Set Theory in Human Factors**. Elsevier Science Publishers, 1986.
- [KAS 96] KASABOV, N. K. **Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering**. The MIT Press, 1996.
- [KLI 88] KLIR, G. J.; FOLGER, T. A. **Fuzzy Sets, Uncertainty And Information**. Prentice Hall, 1988.
- [KOS 92] KOSKO, B. **Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical System Approach to Machine intelligence**. Prentice-Hall, Inc, 1992.
- [KRA 92] KRAUSE, M. V.; MAHAN, L. K. **Food, Nutrition and Diet Therapy - A Textbook of Nutritional Care**. W. B. Saunders Company, 1992.
- [LAV 94] LAVIOLETTE, M.; SEAMAN, J. W. J. The efficacy of fuzzy representations of uncertainty. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, [S.l.], v.2, n.1, 1994.
- [MAO 98] MAOR, E. **e: The Story of a Number**. Princeton University Press, 1998.

- [MAR 02] MARTINS, G. D. A. **Estatística Geral e Aplicada**. Atlas, 2002.
- [MAR 03] MARSEGUERRA, M. Introductory fuzzy reasoning. In: ATTI DEL CONVEGNO 3ASI SU LA PROTEZIONE DELL' AMBIENTE, L'AFFIDABILITA' E LA SICUREZZA INDUSTRIALE - ALGHERO. [s.n.], 2003. p.117–146.
- [MOO 02] MOORE, D. S.; MCCABE, G. P. **Introdução Á Prática da Estatística**. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 2002.
- [NAS 98] NASSAR, S.; KOEHLER, C.; PIRES, M. Uma abordagem probabilística para sistemas especialistas: Avaliação do estado nutricional em crianças de 0 a 2 anos. In: III SIMPÓSIO NACIONAL DE INFORMÁTICA. [s.n.], 1998.
- [NAS 02] NASSAR, S. M. **Tratamento de Incerteza: Sistemas Especialistas Probabilísticos**. Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC. Notas de Aula: Disciplina de Sistemas Especialistas Probabilísticos.
- [OGD 02] OGDEN, C. L. et al. Prevalence and trends in overweight among us children and adolescents, 1999-2000. **Journal of the American Medical Association**, [S.1.], 2002.
- [PAN 98] PAN, H.; MCMICHAEL, D. Fuzzy causal probabilistic network - a new ideal and practical inference engine. In: FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON MULTISOURCE-MULTISENSOR DATA FUSION - USA. [s.n.], 1998. p.101–108.
- [PAS 02] PASKIN, M. A. Maximum entropy probabilistic logic. Computer Science Division (EECS) University of California, 2002. Relatório técnico.
- [PEA 88] PEARL, J. **Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference**. Morgan Kaufman Publishers, 1988.
- [PET 99] PETROSKI, E. L. **Antropometria: Técnicas e Padronizações**. Gráfica Editora Pallotti, 1999.
- [POL 04] POLYA, G. **How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method**. Princeton University Press, 2004.
- [Pri 03] Principle of maximum entropy: Simple form. Department of Electrical Engineering and Computer Science Department of Mechanical Engineering, 2003. MIT Course.
- [REZ 03] REZENDE, S. O. **Sistemas Inteligentes: Fundamentos e Aplicações**. Monole, 2003.
- [ROS 95] ROSS, T. J. **Fuzzy Logic with Engineering Applications**. McGraw Hill, 1995.
- [RUS 95] RUSSEL, S.; NORVIG, P. **Artificial Intelligence: a modern approach**. Alan Apt, 1995.

- [SHA 76] SHAFER, G. **A Mathematical Theory of Evidence**. Princeton University Press - New Jersey - USA, 1976.
- [SHO 74] SHORTLIFFE, H. E. **MYCIN: a rule-based computer program for advising physicians regarding antimicrobial therapy selection**. Stanford University, California, 1974. Tese de Doutorado.
- [SIL 02] SILVA, A. O. **Um Modelo Híbrido de Rede Bayesiana e Lógica Nebulosa como Alternativa para as Limitações das Redes Bayesianas**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2002. Dissertação de Mestrado.
- [SIN 98] SINGH, S. **Fermat's Last Theorem**. Fourth Estate, 1998.
- [SOM 03] SOMMERVILLE, I. **Software Engineering**. Pearson Education, Inc, 2003.
- [SUG 77] SUGENO, M. **Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: A Survey**. M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines (eds.) - Fuzzy Automata and Decision Processes.
- [THE 01] THE, M. A. L. **Raciocínio Baseado em Casos: Uma Abordagem fuzzy para Diagnóstico Nutricional**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Tese de Doutorado.
- [TRI 99] TRIOLA, M. F. **Introdução À Estatística**. LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.
- [VIE 99] VIEIRA, R.; OSORIO, F. S. Sistemas híbridos inteligentes. In: XIX CONGRESSO DA S.B.C - ENIA99 ENCONTRO NACIONAL DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL, UNISINOS, RIO DE JANEIRO. [s.n.], 1999.
- [WIL 99] WILSON, R. A.; C., K. F. **The MIT encyclopedia of the cognitive sciences**. The MIT Press, London, 1999.
- [ZAD 65] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, p.338–353, 1965.
- [ZAD 79] ZADEH, L. A. A theory of approximate reasoning. **Machine Intelligence, J. Hayes, D. Michie, and L. I Mikulich (eds.) New York: Halstead Press**, [S.l.], v.9, p.149–194, 1979.
- [ZAD 95] ZADEH, L. A. Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive. **A Journal of Statistics for the Physical, Chemical, and Engineering Sciences**, [S.l.], v.37, Issue 3, p.271 – 276, 1995.

Apêndice A

Domínio de Aplicação que Apresenta Incertezas Imprecisas e Aleatórias

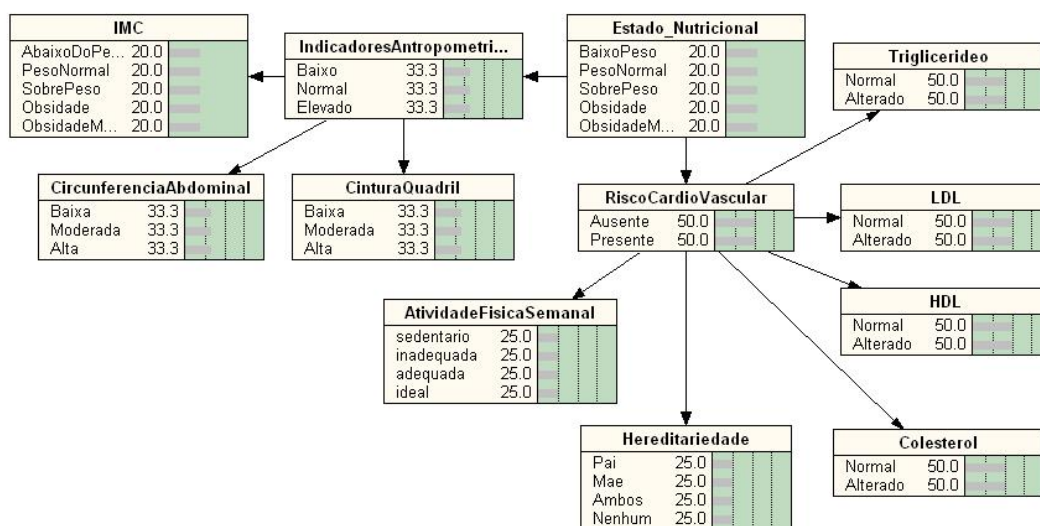


Figura A.1: Rede Completa de Diagnóstico de Estado Nutricional

Apêndice B

Publicação

- Desenvolvimento de Uma Abordagem Difuso-Probabilística para a Modelagem de Incertezas. Tibiriçá, Carlos Augusto G.; Nassar, Silvia Modesto. Congresso Nacional de Tecnologia da Informação e Comunicação, Florianópolis 2004.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)