

RICARDO BECHT FLATSCHART

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA PARALELA DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE RISERS**

SÃO PAULO

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

RICARDO BECHT FLATSCHART

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA PARALELA DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE RISERS**

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para
a obtenção do título de Doutor em
Engenharia.

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Julio Romano Meneghini

SÃO PAULO
2007

Para Claudia, minha esposa, pelo apoio, carinho e compreensão ao longo desta jornada.

Agradecimentos

Aos amigos Cassio Takeshi Yamamoto, Rodrigo de Andrade Fregonesi, José Ignacio Hernandez Lopes, Gustavo Roque da Silva Assi.

À Ivone Margarido, por todos os “galhos” quebrados durante e após minha permanência no NDF.

Aos professores do NDF José Augusto Penteado Aranha, Clóvis de Arruda Martins, Fábio Saltara, Jorge Baliño.

Ao meu orientador, prof. Julio Romano Meneghini, pelo auxílio, orientação e por proporcionar todos os recursos necessários para a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro oferecido durante o doutorado.

À Petrobrás, nas pessoas dos Engenheiros Enrique Casaprima e Francisco Roveri.

À minha família e a minha esposa Claudia, por todo o apoio oferecido durante estes anos.

E a todos que não foram aqui mencionados, e que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, a resposta dinâmica de um *riser* marítimo devido à geração e desprendimento alternado de vórtices é investigada numericamente. O *riser* é dividido em seções bidimensionais ao longo de seu comprimento. O Método dos Vórtices Discretos é empregado para a determinação das forças hidrodinâmicas que agem nestas seções bidimensionais. As seções hidrodinâmicas são resolvidas independentemente, e o acoplamento entre as mesmas é feito através da solução da estrutura no domínio do tempo pelo Método dos Elementos Finitos. Os resultados numéricos são comparados com resultados obtidos experimentalmente.

Processamento paralelo é empregado para melhorar a performance do método. As simulações são realizadas através de uma metodologia mestre-escravo, utilizando MPI – *Message Passing Interface* – para explorar o paralelismo. A escalabilidade do algoritmo é mostrada e discutida.

Este trabalho representa o desenvolvimento de um simulador que permite, efetivamente, a análise dinâmica de um *riser* com características e dimensões representativas das condições reais encontradas em campo, a um custo computacional factível para seu uso como uma ferramenta de engenharia. Isto é obtido por meio da técnica de processamento paralelo, aliada à solução do escoamento através de um método eficiente de CFD – Método dos Vórtices Discretos – e à solução da estrutura através do Método dos Elementos Finitos.

Abstract

In this work the dynamic response of a marine riser due to vortex shedding is numerically investigated. The riser is divided in two-dimensional sections along the riser length. The Discrete Vortex Method is employed for the assessment of the hydrodynamic forces acting on these two-dimensional sections. The hydrodynamic sections are solved independently, and the coupling among the sections is taken into account by the solution of the structure in the time domain by the Finite Element Method. The numerical results are compared with results obtained experimentally.

Parallel processing is employed to improve the performance of the method. The simulations are carried out through a master-slave approach using MPI – Message Passing Interface – to exploit the parallelism. Scalability of the algorithm is shown and discussed.

This work represents the development of a simulator that effectively allows the dynamic analysis of a riser with representative characteristics and dimensions of real field conditions, with a feasible computational cost for its use as an engineering tool. This is obtained by means of the parallel processing technique, together with an efficient CFD solution of the flow with the Discrete Vortex Method and the solution of the structure with the Finite Element Method.

Lista de Siglas

CFD	Computational Fluid Dynamics
EP	Elemento de Processamento
LAN	Local Area Network
MEF	Método dos Elementos Finitos
MIMD	Multiple Instruction Multiple Data
MISD	Multiple Instruction Single Data
MPI	Message Passing Interface
MVD	Método dos Vórtices Discretos
MVF	Método dos Volumes Finitos
NUMA	Non-Uniform Memory Access
PVM	Parallel Virtual Machine
SISD	Single Instruction Single Data
SIMD	Single Instruction Multiple Data
SMP	Symmetric Multi Processing
VIV	Vibração Induzida por Vórtices
WAN	Wide Area Network

Lista de Símbolos

A	Área
C	Amortecimento
C_d	Coefficiente de arrasto
C_l	Coefficiente de sustentação
D	Diâmetro
D_0	Parâmetro de amalgamação
E	Módulo de Young
F	Força; fração do processo
I	Momento de inércia
K	Matriz de rigidez
L	Comprimento
$M; m$	Massa; momento
$p; P$	Pressão
r	Raio
Re	Número de Reynolds
S	Área; número de Strouhal
T	Tração; período
t	Tempo
U	Velocidade
V	Volume
V_0	Tolerância de amalgamação
$u; v$	Deslocamento
Z	Posição do vórtice
Γ	Circulação
θ	Deslocamento angular
ν	Viscosidade cinemática
$\rho; \gamma$	Densidade
ψ	Função linha de corrente
σ	Tamanho do núcleo do vórtice
ω	Vorticidade

Lista de Figuras

2.1	Fragmento do Codex Leicester	8
2.2	Esteira de vórtices de von Kármán	9
2.3	Modelo de formação do vórtice (GERRARD, 1966)	10
2.4	Regimes de emissão de vórtices para cilindros lisos (BLEVINS, 1990)	11
2.5	Relação entre números de Strouhal e Reynolds, cilindros fixos (BLEVINS, 1990)	12
2.6	Esquema de um <i>riser</i> rígido típico	14
3.1	Discretização do corpo. Reproduzido de FREGONESI (2002)	31
3.2	Determinação da posição inicial do vórtice. Extraído de FREGONESI (2002)	35
3.3	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32, V_0=1 \times 10^{-5}, Ut/D=0,05$)	43
3.4	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64, V_0=1 \times 10^{-5}, Ut/D=0,05$)	43
3.5	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128, V_0=1 \times 10^{-5}, Ut/D=0,05$)	44
3.6	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32, V_0=1 \times 10^{-6}, Ut/D=0,05$)	44
3.7	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64, V_0=1 \times 10^{-6}, Ut/D=0,05$)	45
3.8	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128, V_0=1 \times 10^{-6}, Ut/D=0,05$)	45
3.9	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32, V_0=1 \times 10^{-5}, Ut/D=0,1$)	46
3.10	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64, V_0=1 \times 10^{-5}, Ut/D=0,1$)	46
3.11	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128, V_0=1 \times 10^{-5}, Ut/D=0,1$)	47
3.12	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32, V_0=1 \times 10^{-6}, Ut/D=0,1$)	47
3.13	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64, V_0=1 \times 10^{-6}, Ut/D=0,1$)	48
3.14	Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128, V_0=1 \times 10^{-6}, Ut/D=0,1$)	48

3.15	Esteira de vórtices ($Nw = 32, V_0 = 1 \times 10^{-5}, Ut/D = 0,1$)	49
3.16	Esteira de vórtices ($Nw = 128, V_0 = 1 \times 10^{-6}, Ut/D = 0,05$)	49
3.17	Contorno de vorticidade ($Nw = 32, V_0 = 1 \times 10^{-5}, Ut/D = 0,1$)	50
3.18	Contorno de vorticidade ($Nw = 128, V_0 = 1 \times 10^{-6}, Ut/D = 0,05$)	50
4.1	Elemento de barra submetido a tração/compressão.	56
4.2	Elemento de viga com quatro graus de liberdade.	62
4.3	Elemento de viga com seis graus de liberdade.	68
5.1	Supercomputador Cray YMP	71
5.2	<i>Cluster</i> de PCs	71
5.3	Exemplo de código FORTRAN com paralelização via OpenMP	80
5.4	Exemplo de código FORTRAN com paralelização via MPI	81
6.1	Elemento infinitesimal de um riser. Extraído de FERRARI (1998)	83
6.2	Diagrama de corpo livre para um elemento de viga em flexão	92
6.3	Diagrama de corpo livre para um elemento de barra em tração	94
6.4	Sistema de coordenadas do cilindro acelerado. Reproduzido de YAMAMOTO (2002)	114
6.5	Operação <i>Broadcast</i>	122
6.6	Operações <i>Scatter/Gather</i>	123
6.7	Exemplo de distribuição de dados do riser entre os nós	124
6.8	Exemplo do acoplamento entre o MEF e MVD	125
6.9	Fluxograma - análise estática e determinação das matrizes estruturais	127
6.10	Fluxograma - análise dinâmica	127
6.11	Validação do modelo estático - Envoltórias dos deslocamentos na direção x	130
6.12	Corrente constante - Envoltórias dos deslocamentos na direção x	134
6.13	Corrente constante - Envoltórias dos deslocamentos na direção y	134
6.14	Corrente variável - Envoltórias dos deslocamentos na direção x	135
6.15	Corrente variável - Envoltórias dos deslocamentos na direção y	135

7.1	Esquema da montagem experimental	141
7.2	Vista do canal de ensaio	141
7.3	Vista do canal, mostrando o carro de reboque e o tubo de vácuo	142
7.4	Detalhe do tubo de vácuo	142
7.5	Detalhe do riser. Vista lateral	143
7.6	Detalhe da seção transversal do riser	143
7.7	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 1	151
7.8	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 2	152
7.9	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 3	153
7.10	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 4	154
7.11	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 5	155
7.12	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 6	156
7.13	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 7	157
7.14	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 8	158
7.15	Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 9	159
7.16	Comparação dos códigos avaliados - Caso 1	160
7.17	Comparação dos códigos avaliados - Caso 3	161
7.18	Comparação dos códigos avaliados - Caso 6	162
7.19	Comparação dos códigos avaliados - Caso 9	163
7.20	Comparativo de tempos de execução do código	166
7.21	Curva de aceleração de desempenho	166

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros utilizados na validação do MVD	42
3.2	Resultados - validação MVD	42
3.3	Resultados obtidos na literatura para cilindros lisos fixos, $Re = 10.000$	42
6.1	Validação do modelo estático – Dados estruturais	129
6.2	Deslocamentos obtidos - Validação do modelo estático	129
6.3	Validação - Dados estruturais do <i>riser</i>	132
7.1	Dados estruturais do riser	149
7.2	Condições estudadas. A tensão no topo é a observada durante o experimento.	149
7.3	Freqüências naturais e modos de vibração, oscilações forçadas	150

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Metodologia	4
1.2	Formato da tese	5
2	Revisão Bibliográfica	7
2.1	O Mecanismo de Geração e Desprendimento de Vórtices: Aspectos Físicos e Revisão Histórica	7
2.2	Vibrações Induzidas pelo Escoamento em Risers	13
3	O Método dos Vórtices Discretos	21
3.1	Introdução	21
3.2	Formulação do MVD	22
3.3	Considerações sobre o MVD	37
3.4	Validação do MVD	40
4	O Método dos Elementos Finitos	51
4.1	Introdução	51
4.2	Conceitos Iniciais	52
4.3	Aplicação do MEF a Elementos Estruturais Básicos	55
4.3.1	Elemento de Barra Submetido a Tração/Compressão	56
4.3.2	Elemento de Viga com Quatro Graus de Liberdade	61
4.3.3	Elemento de Viga com Seis Graus de Liberdade	67

5	Processamento Paralelo	69
5.1	Aceleração de Desempenho ou <i>Speed-up</i>	73
5.2	Modelos de Programação Paralela	75
6	Modelamento do Riser	82
6.1	Modelo Estrutural do Riser	82
6.1.1	Análise estática	82
6.1.2	Análise Dinâmica	91
6.2	Forças Hidrodinâmicas	111
6.3	Simulação Paralela do Riser	120
6.4	Modelo Completo do Riser	126
6.5	Validação do Modelo Estático do Riser	128
6.6	Validação do Modelo Dinâmico do Riser	131
7	Resultados	136
7.1	Delta Flume	136
7.1.1	Descrição do Experimento	136
7.1.2	Detalhamento do Riser	144
7.1.3	Condições Estudadas	145
7.1.4	Modelagem Numérica do Riser	145
7.2	Aceleração de Desempenho Através do Processamento Paralelo	164
8	Conclusões e Comentários	167
	Referências Bibliográficas	172

Capítulo 1

Introdução

O estudo do fenômeno de Vibração Induzida por Vórtices (VIV) tem sido um grande desafio para a indústria de exploração de petróleo. Nessa indústria, são comumente utilizadas estruturas chamadas *risers*, que são dutos rígidos ou flexíveis, utilizados respectivamente na perfuração e transporte do petróleo desde o leito do oceano até a superfície. Na Bacia de Campos, onde a Petrobrás concentra seu esforço de produção em águas profundas, estes *risers* têm comprimento suspenso da ordem de 1.000 a 2.000 metros, e podem estar sujeitos a condições ambientais diversas, como ondas de superfície, ventos e correntes marítimas de intensidade e direção variáveis.

É sabido que corpos rombudos submetidos a uma corrente fluida levam à geração e ao desprendimento alternado de vórtices, fenômeno conhecido como *vortex shedding*. Estes vórtices, por sua vez, interagem com a estrutura através da formação de campos de pressão cíclicos. As forças cíclicas resultantes podem levar ao surgimento de oscilações do corpo que, dependendo da frequência de excitação, são capazes de sintonizar simultaneamente diferentes modos naturais destes elementos, podendo em casos extremos levar à fadiga e ao colapso da estrutura.

É fundamental que as características críticas de uma nova estrutura que esteja sujeita a VIV sejam reconhecidas em uma fase inicial do projeto. No entanto, algumas das fontes do fenômeno de VIV envolvem a complexa interação entre forças hidrodinâmicas e a resposta da estrutura. Estas forças não são facilmente previstas sem que se recorra

à realização de experimentos ou à simulação completa do escoamento conjuntamente com a resposta dinâmica da estrutura.

Para um melhor entendimento dos fenômenos envolvidos, uma descrição detalhada do complexo campo de velocidades desenvolvido ao redor da estrutura é de grande importância. Neste sentido, a Dinâmica dos Fluidos Computacional ou CFD (do inglês *Computational Fluid Dynamics*), por oferecer a capacidade de descrever de forma detalhada o campo de velocidades ao redor das estruturas em questão, vem se tornando uma ferramenta de crescente importância na fase de projeto das mesmas.

Dentre as metodologias comumente utilizadas em CFD, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). Estes métodos baseiam-se na solução numérica das equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento, as chamadas equações de Navier-Stokes. Nestes métodos, o domínio de cálculo é resolvido de forma discreta, através de uma malha. Para se obter uma boa resolução, a malha deve ser extremamente refinada em regiões onde se concentram os gradientes elevados, como por exemplo na camada limite do corpo. Devido à necessidade de utilização destas malhas computacionais, tais métodos tornam-se extremamente caros em termos de capacidade computacional e utilização de memória. Estes inconvenientes levaram a um forte desenvolvimento de métodos lagrangeanos, que não utilizam malha. Um destes métodos de particular interesse é o Método dos Vórtices Discretos (MVD). De forma geral, o MVD difere dos métodos puramente eulerianos, tais como o MVF e o MEF, na medida em que as propriedades do escoamento são transportadas através de partículas, no caso os chamados vórtices discretos. Este enfoque lagrangeano apresenta a grande vantagem de não necessitar de uma discretização total do escoamento, mas apenas nas regiões onde a vorticidade é concentrada.

Um aspecto comum de todos os métodos aqui mencionados é a elevada demanda por recursos computacionais, tanto em termos de uso de memória como da capacidade de processamento propriamente dita. Uma das formas encontradas para aumentar a eficiência dos códigos computacionais é através da técnica de processamento paralelo.

A idéia principal desta técnica é dividir a carga computacional entre diversos computadores, interligados entre si através de uma rede, barramento, ou mesmo por um espaço comum de memória. O problema pode então ser dividido em sub-problemas menores, que são resolvidos mais rapidamente, com menor requerimento de memória e de forma simultânea.

O processamento paralelo pode ser realizado por meio de diretivas de compilação ou através do uso de bibliotecas de rotinas específicas para este fim. As ferramentas de processamento paralelo mais comuns na atualidade são o *Message Passing Interface* (MPI) e o OpenMP. OpenMP é utilizado em máquinas com arquitetura de memória compartilhada, também chamadas de *Symmetric Multi Processing* (SMP). O MPI, por sua vez, pode ser utilizado tanto em sistemas com arquitetura de memória compartilhada como de memória distribuída, como por exemplo *clusters* de computadores.

Neste trabalho, é utilizado o MVD para a solução do campo de escoamento ao redor do *riser*. Esta técnica é capaz de fornecer de forma expedita, porém com um grau de confiabilidade considerado satisfatório para a faixa de números de Reynolds onde encontram-se boa parte das aplicações aqui estudadas, as forças hidrodinâmicas às quais a estrutura é submetida.

A utilização do MVD juntamente à técnica de processamento paralelo, aplicados ao problema de VIV em *risers* marítimos, consiste no aspecto inédito e principal foco deste trabalho. A associação destas duas ferramentas viabiliza a simulação de *risers* com características e dimensões representativas das condições reais encontradas em campo, a um custo computacional factível com os requerimentos necessários para sua utilização como uma ferramenta de engenharia, apesar das limitações inerentes ao MVD que serão explicitadas ao longo deste trabalho.

Deve-se salientar que, apesar dos avanços recentes em capacidade computacional e no desenvolvimento de algoritmos, o uso da CFD em tecnologia marítima no estágio atual restringe-se a casos simplificados, face à elevada complexidade do fenômeno e às condições a que os corpos são submetidos. Porém, com o desenvolvimento de métodos

computacionais mais robustos e com o crescente aumento da capacidade computacional que vem sendo observado atualmente, espera-se ampliar ainda mais a gama de utilização da CFD como uma ferramenta de engenharia neste tipo de aplicação.

1.1 Metodologia

A metodologia empregada neste trabalho é essencialmente numérica, utilizando um modelo estrutural em Elementos Finitos baseado na teoria de vigas Euler-Bernoulli para modelar um *riser* marítimo, como descrito em FERRARI (1998). A resposta dinâmica do *riser* é obtida através da solução da equação geral do movimento no domínio do tempo. O *riser* é dividido em seções bidimensionais ao longo do seu comprimento, e as forças hidrodinâmicas atuantes na estrutura são avaliadas nestas seções bidimensionais através do MVD. As seções bidimensionais são resolvidas de forma independente entre si, e o acoplamento entre as diversas seções hidrodinâmicas se dá somente através da estrutura. Assim, a análise pode ser considerada como quase-tridimensional. Com esta formulação, características tridimensionais do escoamento são negligenciadas. No entanto, segundo WILLDEM e GRAHAM (2000), assumindo que a principal componente da vorticidade ainda está alinhada com o cilindro, e os gradientes de todas as variáveis do escoamento na direção da envergadura podem ser considerados muito menores do que os gradientes nas demais direções, então pode-se assumir que uma simulação bidimensional, em uma primeira aproximação, deva fornecer bons resultados.

O processamento paralelo é utilizado para melhorar a eficiência computacional do código. Um esquema mestre-escravo é empregado através de MPI, onde os processos escravos resolvem um determinado número de seções hidrodinâmicas, e o processo mestre é o responsável pela distribuição e controle das tarefas, bem como pela solução do problema estrutural.

São apresentadas comparações das simulações para um *riser* vertical em uma corrente uniforme com resultados obtidos experimentalmente no tanque de provas da Delft

Hydraulics, na Holanda (CHAPLIN et al. (2004b)).

1.2 Formato da tese

Este trabalho foi estruturado na forma descrita a seguir:

- O capítulo 1 apresenta a motivação para a realização deste trabalho, no que tange à sua aplicação para a simulação numérica do fenômeno de vibração em estruturas *offshore* devido ao desprendimento de vórtices, e descreve a metodologia empregada.
- O capítulo 2 faz uma breve revisão histórica do fenômeno de vibração induzida pela emissão de vórtices em geral, e em estruturas marítimas como *risers* em particular, descrevendo os principais aspectos físicos envolvidos.
- O capítulo 3 discorre sobre o Método dos Vórtices Discretos, empregado neste trabalho para a modelagem das forças hidrodinâmicas atuantes no *riser*.
- O capítulo 4 fornece uma visão geral sobre o Método dos Elementos Finitos.
- O capítulo 5 faz uma breve introdução à técnica de processamento paralelo, descrevendo os recursos computacionais, ferramentas e técnicas comumente empregadas, e destacando os principais fatores que influenciam no desempenho computacional.
- O capítulo 6 trata da modelagem numérica do *riser*, contemplando a união das técnicas mencionadas nos capítulos anteriores: MEF, MVD e processamento paralelo.
- No capítulo 7 são apresentados os resultados das simulações. Os mesmos são comparados com resultados obtidos experimentalmente.

- No capítulo 8 é feita uma discussão da metodologia empregada e dos resultados obtidos, bem como sugestões para aprimoramento do trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 O Mecanismo de Geração e Desprendimento de Vórtices:

Aspectos Físicos e Revisão Histórica

As primeiras observações do fenômeno de emissão de vórtices foram registradas pelos antigos gregos, que verificaram que, quando cordas tensionadas eram expostas ao vento, as mesmas vibravam, emitindo sons. No século XV, LEONARDO DA VINCI, no famoso *Codex Leicester*, reproduziu em uma figura uma esteira de vórtices que se formava atrás do pilar de uma ponte. No texto, da Vinci escreve que “...o turbilhonar das águas que se juntam após o objeto que as dividiu irá recircular em direção ao objeto atingido ... e este movimento tortuoso prosseguirá, como uma concha helicoidal, inclinando sempre com a corrente de água”.

No entanto, somente a partir do século XIX os primeiros estudos formais acerca do fenômeno de emissão de vórtices foram realizados. STROUHAL, em 1878, verificou que as vibrações nas cordas causadas pelo vento, descritas pelos antigos gregos como os tons eólicos, eram proporcionais à velocidade do vento dividido pelo diâmetro da corda. Também observou que a intensidade do som aumentava consideravelmente quando as frequências excitadas coincidiam com os tons naturais da corda.



Figura 2.1: Fragmento do Codex Leicester

Em 1879, RAYLEIGH, repetindo o experimento dos antigos gregos, verificou que uma corda de violino submetida a um fluxo de ar, contrariamente ao que se supunha, vibrava principalmente na direção transversal do escoamento. E em 1896, definiu um parâmetro adimensional – que mais tarde passou a ser conhecido como número de Strouhal – que relaciona a velocidade do escoamento com a frequência de emissão de vórtices:

$$S = \frac{f_s D}{U} \quad (2.1)$$

onde f_s é a frequência de emissão de vórtices, D o diâmetro da corda e U a velocidade do escoamento.

A periodicidade da esteira de um cilindro foi associada com a formação de vórtices por BERNARD em 1908, e pela formação de duas fileiras de vórtices por VON KÁRMÁN em 1912. A análise de von Kármán mostra que esta configuração só é estável se

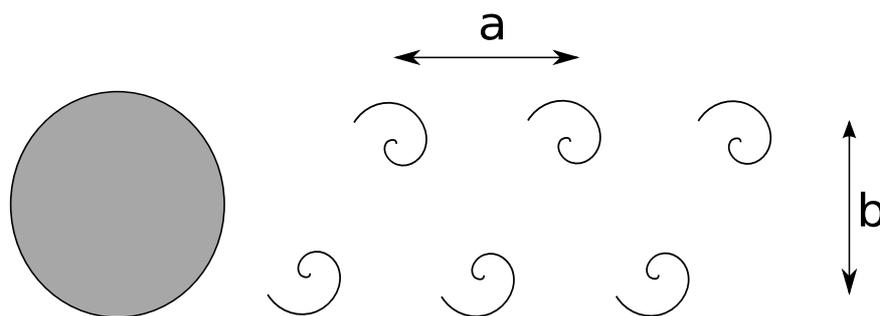


Figura 2.2: Esteira de vórtices de von Kármán

for obedecida uma razão de espaçamento b/a igual a 0,281, onde a é o espaçamento longitudinal e b o espaçamento transversal.

HELMHOLTZ (1868) apud SARPKEYA (1989) propôs que as regiões com vorticidade elevada poderiam ser modeladas através de partículas discretas, com determinada circulação e seção transversal infinitesimal, ou seja, linhas de vórtices. Esta abordagem constitui-se em uma das bases da classe de métodos numéricos da qual provém o MVD, como será mencionado mais tarde.

A partir do conceito proposto por Helmholtz, ROSENHEAD (1931) estudou o fenômeno da instabilidade entre duas camadas fluidas cisalhantes. Para isto, modelou a superfície de contato entre as camadas cisalhantes como uma fileira de vórtices discretos.

Um corpo rombudo é definido por BEARMAN (1984) como um corpo que, quando imerso em um escoamento, gera a separação do escoamento sobre uma porção substancial de sua superfície. A separação do escoamento em um corpo rombudo leva à criação de duas camadas cisalhantes na parte posterior deste corpo. A interação entre estas camadas cisalhantes, que carregam fluido com vorticidade de sinais opostos, representa a razão essencial do surgimento da esteira de vórtices atrás do corpo. GERRARD (1966) propôs um modelo de formação dos vórtices, mostrado na Figura 2.3. Segundo este modelo, o vórtice é continuamente alimentado de vorticidade pela camada cisalhante

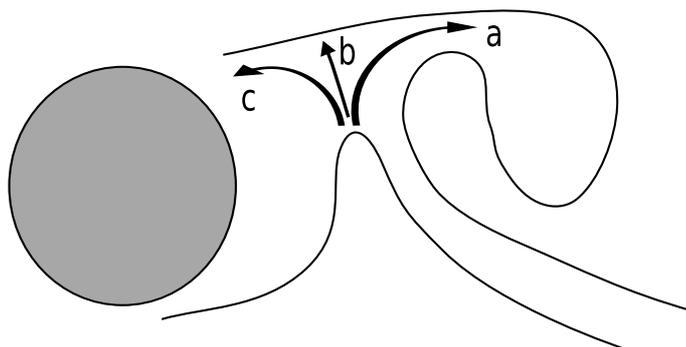


Figura 2.3: Modelo de formação do vórtice (GERRARD, 1966)

à qual o mesmo está conectado. Em um dado instante, este vórtice torna-se de tal forma intenso que é capaz de atrair a camada cisalhante oposta. As partículas fluidas pertencentes à camada cisalhante atraída podem então:

- a) serem incorporadas pelo vórtice em formação, diminuindo a circulação deste vórtice;
- b) cortar o suprimento de vorticidade para o vórtice em formação, causando o desprendimento do mesmo;
- c) formar um novo vórtice, com circulação de sinal contrário ao do vórtice anterior e na parte oposta da esteira.

Os principais regimes de emissão de vórtices para um cilindro liso em relação ao número de Reynolds foram descritos por LIENHARD (1966), e são mostrados na Figura 2.4, extraída de BLEVINS (1990). O número de Reynolds é definido como a relação entre as forças inerciais e as forças viscosas, e é definido como:

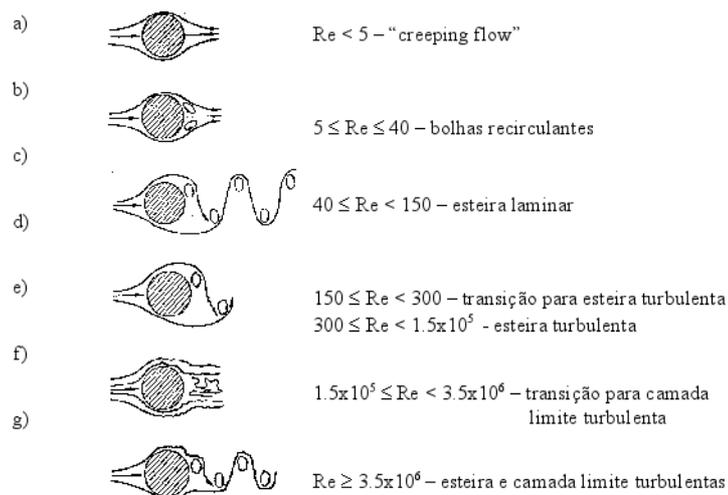


Figura 2.4: Regimes de emissão de vórtices para cilindros lisos (BLEVINS, 1990)

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (2.2)$$

onde U é a velocidade da corrente, D é uma dimensão característica do corpo (no caso de cilindros, o diâmetro) e ν é a viscosidade cinemática.

O regime *a)* também é chamado de “creeping flow”. Neste regime, que ocorre para $Re < 5$, o fluido segue o contorno do cilindro, não havendo separação. No regime *b)*, que ocorre entre $5 \leq Re < 40$, ocorre separação do escoamento, porém não há emissão de vórtices, apenas a formação de duas bolhas de recirculação. Aumentando-se o número de Reynolds a esteira torna-se instável, e começa o desprendimento alternado de vórtices, caracterizado pelo regime *c)*, para $40 \leq Re < 150$. Nesta faixa de Reynolds, a esteira é laminar. Para valores de Reynolds entre $150 \leq Re < 300$, correspondentes ao regime *d)*, a esteira torna-se turbulenta, porém a camada limite permanece laminar.

A faixa de números de Reynolds compreendida entre 300 e $1,5 \times 10^5$ é chamada faixa subcrítica. Nesta faixa, a separação ocorre a um ângulo de cerca de 80 graus, e a emissão de vórtices é forte e periódica. Na chamada faixa de transição $1,5 \times 10^5 \leq Re < 3,5 \times 10^6$, a camada limite torna-se turbulenta, o ponto de separação ocorre a

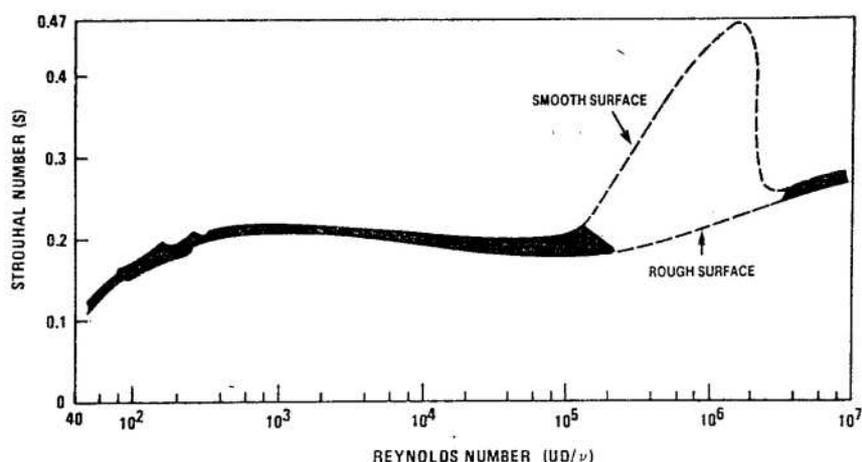


Figura 2.5: Relação entre números de Strouhal e Reynolds, cilindros fixos (BLEVINS, 1990)

cerca de 140 graus, e o arrasto cai dramaticamente. Esta é a chamada crise do arrasto. Nesta faixa, caracterizada pelo regime f), a emissão regular de vórtices é quebrada, devido a bolhas de separação laminar e efeitos tridimensionais, e a esteira apresenta-se desorganizada e estreita. No regime g), para $Re > 3,5 \times 10^6$, a emissão regular de vórtices é restabelecida, com a esteira e a camada limite completamente turbulentas.

O gráfico da Figura 2.5 de autoria de LIENHARD (1966), ACHEMBACH e HEINECKE (1981) e extraído de BLEVINS (1990), mostra a relação entre o número de Strouhal e o número de Reynolds para cilindros fixos de superfície lisa e rugosa. Observa-se que a frequência de emissão de vórtices apresenta um valor praticamente constante, em torno de 0,21, para uma larga faixa de número de Reynolds. Na faixa correspondente à faixa de transição, onde a camada limite torna-se turbulenta, o número de Strouhal para cilindros lisos apresenta um salto, chegando a um valor igual a 0,47 e a seguir uma recuperação para cerca de 0,25.

2.2 Vibrações Induzidas pelo Escoamento em Risers

Na indústria petrolífera *offshore*, é de suma importância o dimensionamento dos *risers* utilizados na perfuração e na extração do petróleo a partir do leito do oceano. Estes *risers* são estruturas esbeltas que tem a função de fazer a ligação da plataforma marítima com o leito do oceano, com a finalidade de realizar atividades de perfuração e extração.

Os *risers* podem ser separados em dois tipos: rígidos e flexíveis. Os *risers* rígidos são formados por seções tubulares de aço, cada uma com comprimento típico da ordem de 12 a 18 metros, e acopladas entre si. O *riser* é mantido suspenso pela aplicação de uma tensão axial na sua extremidade superior, para evitar que o mesmo seja submetido a uma elevada carga axial de compressão, o que poderia causar a flambagem da estrutura. Muitas vezes, são utilizados elementos flutuadores em volta de algumas das seções do *riser*, com o objetivo de diminuir a tração no topo do mesmo. São comumente empregados em atividades de perfuração.

Os *risers* flexíveis são dutos formados por diversas camadas de materiais metálicos e sintéticos, entrelaçados em volta de uma armadura metálica. São projetados para resistir a grandes tensões axiais, porém mantendo uma flexibilidade suficiente para acompanhar os movimentos da plataforma, causada por ventos e ondas. Podem ser utilizados em configurações em catenária, e são normalmente empregados em atividades de extração de petróleo.

Como comentado anteriormente, quando um corpo rombudo – como é o caso de um *riser* – é imerso em uma corrente, ocorre a formação e desprendimento alternado de vórtices, com o conseqüente surgimento de um campo de pressão cíclico atuando no *riser*. Este campo de pressão cíclico gera uma força resultante na direção transversal ao escoamento, podendo levar ao surgimento de oscilações da estrutura. Se a frequência desta excitação coincidir com a frequência de vibração da estrutura, ocorre um fenômeno chamado de sincronização, também conhecido como *lock-in*. Nesta faixa de sincronização, as amplitudes de oscilação da estrutura aumentam, podendo levar ao

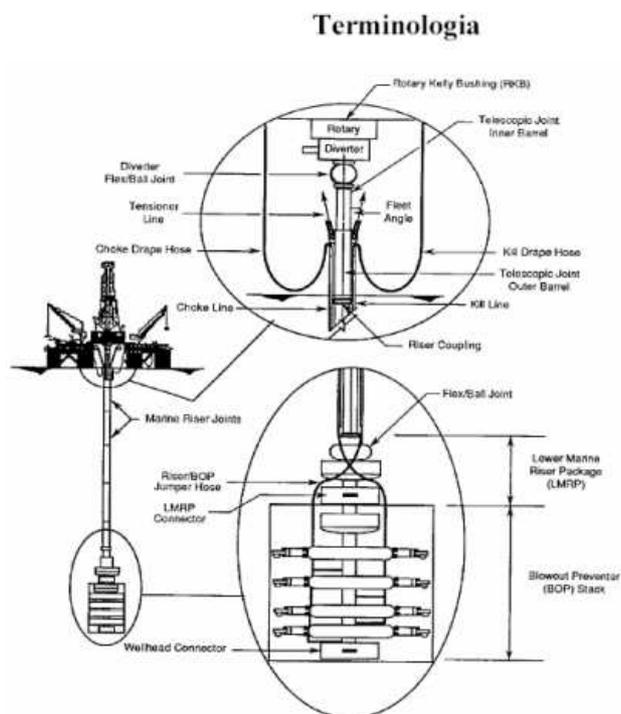


Figura 2.6: Esquema de um *riser* rígido típico

colapso da mesma.

Além do fenômeno de vibração induzida por vórtices – VIV, outros fatores contribuem para aumentar a complexidade da tarefa de dimensionamento dos *risers*, como cargas dinâmicas ambientais devido a ondas e ventos, a presença de correntes de intensidades e direções variáveis com a profundidade, efeitos de interferência no escoamento causados por outras estruturas, entre outros. À medida que novas jazidas de petróleo são encontradas em profundidades cada vez maiores, torna-se de capital importância um estudo aprofundado dos complexos fenômenos que permeiam a atividade de exploração de petróleo em águas profundas. Este desafio tem atraído a atenção de diversos pesquisadores nos últimos anos, através de análise tanto experimentais como de técnicas numéricas.

BLEVINS (1990), em seu livro, apresenta uma série de ferramentas analíticas para o estudo de vibrações induzidas pelo escoamento. Trata-se de uma das referências mais completas no assunto.

PATEL e WITZ (1991), através de uma análise de equilíbrio dos esforços atuantes em um elemento, propuseram um modelo estrutural baseado em elementos finitos para estudar a resposta de um *riser* submetido a um carregamento hidrodinâmico, modelado através da equação de Morison. Uma boa precisão foi obtida para os esforços na direção do escoamento, porém tal precisão é extremamente influenciada pela escolha dos coeficientes empíricos utilizados na equação de Morison.

FERRARI (1998) apresentou um modelo semelhante ao de PATEL e WITZ (1991), porém incorporando ao carregamento dinâmico a ação de ondas. As forças na direção do escoamento foram calculadas através da equação de Morison, porém as forças na direção transversal ao escoamento foram estimadas por meio de uma formulação “quase-permanente”, proposta por BEARMAN et al. (1984).

MOURELLE (1993) realizou uma análise dinâmica não-linear através do método de elementos finitos, utilizando uma formulação de elemento de pórtico espacial co-rotacionado, para o estudo de *risers* e linhas de amarração. As forças hidrodinâmicas foram estimadas através da equação de Morison.

LARSEN e HALSE (1995) apresentaram um estudo comparativo de diferentes modelos utilizados na predição de VIV em estruturas marítimas, desenvolvidos por diversas instituições de pesquisa.

KHALAK e WILLIAMSON (1996) realizaram experimentos com cilindros rígidos em água. Foi observado que, nos resultados onde os cilindros possuíam baixas razões de massa (razão entre a massa do cilindro e a massa de fluido deslocada) e amortecimento (razão entre amortecimento e o amortecimento crítico), havia dois regimes de ressonância, ou seja, existiam dois níveis distintos de limite de amplitude na ressonância, e não um como era assumido anteriormente.

PESCE (1997) estudou de forma analítica o problema da determinação da configuração estática de equilíbrio e da resposta dinâmica de linhas submersas em configuração catenária, comparando os resultados obtidos com dados experimentais.

FUJARRA et al. (2001) realizaram um estudo analítico-experimental para um ci-

lindro flexível engastado e um cilindro rígido montado em uma base elástica, com o propósito de compreender o mecanismo de acoplamento das oscilações transversais e longitudinais ao escoamento, e investigar o patamar de resposta ressonante típico de cilindros com baixo coeficiente de massa-amortecimento reduzido.

WILLIAMSON e GOVARDHAN (2004) apresentaram um resumo de resultados fundamentais e avanços obtidos no estudo de vibração induzida por vórtices nos últimos vinte anos, abrangendo tanto técnicas experimentais quanto computacionais. Os autores focaram principalmente aspectos como baixos parâmetros de massa e amortecimento, a dinâmica dos vórtices e a transferência de energia que dão origem aos modos de vibração, o conceito de massa crítica, a relação entre força e vorticidade, entre outros. São apresentados mapas de modos de formação de vórtices, compilados a partir de estudos de vibração forçada, e discussões sobre tópicos atuais acerca do problema de interação fluido-estrutura.

Outro aspecto interessante acerca de VIV está relacionado ao efeito de interferência, quando temos um agrupamento de cilindros. Quando há mais de um corpo imerso na corrente, padrões não triviais de emissão e desprendimento de vórtices são obtidos devido à proximidade entre os corpos, levando a interações entre os mesmos de difícil predição. O fenômeno de VIV em *risers* e agrupamento dos mesmos, particularmente para a exploração de óleo em águas profundas, passa a ser um problema potencialmente complexo, com grande dificuldade para definição dos parâmetros de projeto.

BEARMAN e WADCOCK (1973) realizaram experimentos com dois cilindros circulares dispostos lado a lado em relação à corrente, para diferentes espaçamentos. Foi constatada uma força média de repulsão entre os cilindros, causada pelo deslocamento dos pontos de estagnação frontais dos mesmos em direção ao vão formado entre eles, e na direção oposta para os pontos de separação externos. Esta força de repulsão era tanto maior quanto mais próximos se encontravam os cilindros.

WILLIAMSON (1985) realizou um estudo similar, porém mais focado nos diferentes padrões de emissão de vórtices observados na esteira dos cilindros, para diferentes espa-

çamentos entre os mesmos. Foi verificado que existe uma predominância de emissão de vórtices em anti-fase, na faixa de espaçamento entre um e cinco diâmetros, gerando uma esteira formada por duas esteiras paralelas em anti-fase. Esta configuração mostrou-se estável para grandes distâncias a jusante, porém pode ocorrer do escoamento mudar para emissão em fase, e vice-versa. No entanto, foi constatado que o escoamento em fase leva ao desenvolvimento de uma única esteira de maior escala, onde os vórtices de mesmo sinal se emparelham e rodam um em torno do outro. O pareamento leva à formação de uma única esteira de vórtices binários. Pode-se deduzir que, em alguma região a jusante, cada vórtice binário coalesce em um único vórtice, assim formando uma esteira de vórtices de von Kármán de maior escala.

ZDRAVKOVICH (1977, 1987) produziu uma extensa revisão do fenômeno de emissão de vórtices para agrupamentos de dois ou mais cilindros em configurações lado a lado, tandem e oblíquo. Os efeitos de interferência devido à proximidade e à esteira foram categorizados em relação aos diversos tipos de arranjos entre os cilindros. Foram examinados aspectos como as forças atuando nos cilindros em função do espaçamento entre os mesmos, distribuições de pressão, perfis de velocidade e características da esteira. Foi verificado que, para arranjos em tandem, a emissão de vórtices atrás do primeiro cilindro era suprimida, para um espaçamento entre os mesmos entre 3,5 e 3,8 diâmetros. Uma longa esteira fechada era formada atrás do primeiro cilindro, sem emissão de vórtices. No entanto, uma vigorosa emissão de vórtices ocorria atrás do segundo cilindro. Para espaçamentos maiores, constatou-se que ocorria emissão de vórtices em ambos os cilindros. Segundo ZDRAVKOVICH (1977), normalmente supõe-se que dois cilindros colocados próximos num escoamento comportem-se como cilindros isolados. Porém, essa suposição só é justificada quando os cilindros estão suficientemente distantes. A proximidade entre os cilindros afeta fortemente o escoamento entre eles, produzindo forças e campos de pressão muito diferentes dos observados em cilindros isolados.

Devido à complexidade do fenômeno, e às dificuldades para a obtenção de parâ-

metros que auxiliem na estimativa das forças atuantes em estruturas offshore com os *risers*, tem ocorrido uma grande procura por parte da indústria de exploração de petróleo por métodos para se calcular o escoamento ao redor das estruturas através de simulações numéricas. Embora ainda se encontre em um estágio ainda incipiente para a solução completa do escoamento ao redor destas estruturas, apesar dos grandes avanços alcançados em termos de algoritmos e capacidade computacional, espera-se que num futuro próximo a Dinâmica dos Fluidos Computacional – ou CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics* – venha a apresentar uma crescente de importância como ferramenta de engenharia para o projeto de estruturas offshore.

Basicamente, existem duas grandes classes de métodos empregados em CFD. No primeiro grupo, encontram-se os métodos puramente eulerianos, como o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método de Elementos Finitos (MEF). Estes métodos baseiam-se na solução das equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento, as chamadas equações de Navier-Stokes. Nesta abordagem, o domínio de cálculo é resolvido de forma discreta, através de uma malha. Embora apresentem bons resultados, estes métodos são geralmente muito caros em termos de capacidade computacional e utilização de memória.

Por seu custo computacional relativamente baixo, face aos resultados satisfatórios obtidos, e pela relativa simplicidade de implementação, um dos métodos mais empregados para esta classe de problema é denominado Método dos Vórtices Discretos – MVD. Suas origens remontam ao trabalho de HELMHOLTZ (1868). Neste método, as propriedades do escoamento são transportadas de forma lagrangeana através de partículas, os chamados vórtices discretos. Estas partículas carregam a vorticidade gerada na camada limite, devido à viscosidade do fluido.

CLEMENTS (1973) foi um dos primeiros a desenvolver um algoritmo utilizando o MVD. Em seu trabalho, uma distribuição de vórtices discretos foi usada para representar a camada cisalhante ao redor de um corpo semi-infinito de seção quadrada. O fluido foi considerado invíscido e a velocidade de cada vórtice discreto calculada pela

superposição da velocidade do escoamento ao longe e das velocidades induzidas pelos outros vórtices. Os resultados obtidos em seu trabalho mostram uma boa concordância em termos do número de Strouhal, quando comparado aos resultados experimentais obtidos por BEARMAN (1965).

CHORIN (1973) apresentou um método numérico para a resolução das equações de Navier-Stokes escritas no plano, baseado no conceito de vórtices discretos. Nesse esquema, efeitos difusivos são modelados através da técnica denominada *random walk*.

SPALART e LEONARD (1981) apresentaram um algoritmo no qual os vórtices são criados em volta do corpo e emitidos a cada intervalo de tempo. A circulação era calculada impondo-se a condição de velocidade normal nula na parede do corpo, e a convecção dos vórtices realizada pela lei de Biot-Savart.

NAGANO et al. (1982) estenderam o modelo proposto por SPALART e LEONARD (1981), para modelar a difusão viscosa. O método utilizado consistia em fazer o vórtice discreto possuir um diâmetro que aumentava com o tempo, simulando assim os efeitos de difusão viscosa da vorticidade.

GRAHAM (1988) propôs uma técnica híbrida conhecida como *vortex-in-cell*, na qual a difusão da vorticidade é modelada de forma euleriana sobre uma malha, e a convecção da vorticidade é feita de forma lagrangeana, através dos vórtices discretos.

PARK e HIGUCHI (1989), utilizando um modelo baseado no descrito no trabalho de SPALART e LEONARD (1981), apresentaram resultados de simulações realizadas para corpos com seções retangular e circular. Foi destacada a facilidade da adaptação do método para geometrias arbitrárias.

LEWIS (1991) realizou uma extensa revisão sobre diferentes implementações do MVD, tanto na sua forma puramente lagrangeana como na formulação híbrida euleriana-lagrangeana, fazendo comparações entre estes e sua aplicação prática dentro de diversos campos de aplicação de engenharia.

MENEGHINI (1993) utilizou a técnica proposta por para simular o escoamento ao redor de cilindros submetidos a oscilações transversais forçadas. Aspectos como os

modos de emissão de vórtices para diferentes amplitudes de oscilação do cilindro e a dinâmica associada também foram estudados.

SIQUEIRA (1999) analisou o escoamento tridimensional ao redor de um cilindro a baixos valores de número de Reynolds, utilizando o Método da Resolução por Partes das equações de Navier-Stokes. A solução do escoamento foi feita através do Método dos Elementos Finitos utilizando malhas não-estruturadas de tetraedros. Foi observada boa concordância com dados experimentais obtidos por WILLIAMSON e ROSHKO (1988) e NORBERG (1994) para número de Strouhal e coeficiente de pressão, bem como em relação ao padrão das estruturas vorticiais ao longo do comprimento do cilindro.

SALTARA (1999), através do Método dos Volumes Finitos em malhas não-estruturadas de triângulos, e empregando o Método da Resolução por Partes das equações de Navier-Stokes, realizou simulações bidimensionais a baixos valores de número de Reynolds do escoamento em torno de dois cilindros dispostos em diferentes arranjos, e do escoamento ao redor de um cilindro isolado livre para oscilar. Foi constatado que a máxima amplitude de oscilação do cilindro obtida foi cerca de metade da amplitude observada experimentalmente.

WILLDEM e GRAHAM (2000) utilizaram uma técnica quase-tridimensional para simular o escoamento em torno de cilindros. Um método híbrido euleriano-lagrangeano foi utilizado para resolver o escoamento em torno de faixas bidimensionais da estrutura. Um modelo estrutural em Elementos Finitos foi utilizado para resolver a parte dinâmica estrutural do problema. As principais limitações do modelo empregado são a desconsideração do amortecimento estrutural, o baixo número de Reynolds empregado e à limitação de oscilação da estrutura apenas na direção transversal.

YAMAMOTO (2002), utilizando um modelo estrutural baseado no trabalho de FERRARI (1998), e empregando o Método dos Vórtices Discretos para a avaliação das forças hidrodinâmicas, analisou o escoamento ao redor de dois *risers* dispostos lado a lado. FREGONESI (2002), utilizando a mesma metodologia, estudou a interferência no escoamento ao redor de dois *risers* em configuração tandem.

Capítulo 3

O Método dos Vórtices Discretos

3.1 Introdução

O MVD tem sido objeto de grande desenvolvimento em anos recentes, e provado ser um método particularmente interessante para a análise de escoamentos incompressíveis, transitórios e com grandes regiões de separação. Este método baseia-se na discretização do campo de vorticidade, em lugar do campo de velocidades, em uma série de partículas chamadas vórtices discretos. Cada uma destas partículas possui um núcleo de tamanho finito, e carrega consigo uma determinada quantidade de circulação. As partículas são carregadas pelo escoamento livre e pelas velocidades induzidas por elas mesmas. A natureza lagrangeana do método reduz significativamente alguns dos problemas associados a métodos tradicionais, baseados em malhas computacionais como, por exemplo, difusão numérica, maior complexidade dos algoritmos, elevado custo computacional, e dificuldades em se obter uma boa resolução das estruturas vorticiais de pequena escala. A concentração de partículas vorticiais em regiões de vorticidade não nula permite à classe de métodos como o MVD capturar estas estruturas com um elevado nível de detalhe.

Neste método, o corpo é dividido em uma série de painéis, que fornecem uma representação poligonal da superfície. Condições de contorno são impostas para garantir fluxo de massa nulo e a condição de aderência em cada painel, fornecendo assim a

intensidade de cada vórtice discreto formado. A intensidade dos vórtices representa a distribuição da vorticidade na superfície do corpo. Os vórtices são criados a uma determinada distância da superfície e depois emitidos para a esteira a cada passo de tempo, sendo convectados pelo escoamento livre e pelas velocidades induzidas pelos demais vórtices, calculada pela lei de Biot-Savart.

Como são criados novos vórtices a cada passo de tempo, o número total de vórtices pode rapidamente chegar a níveis muito elevados, fazendo com que o cálculo das velocidades induzidas, através da lei de Biot-Savart, torne-se impraticável. Para evitar este inconveniente, utiliza-se o conceito de amalgamação. Tal técnica consiste em juntar pares de vórtices que satisfaçam determinadas condições, tornando-os um único vórtice cujas propriedades são ponderadas a partir dos vórtices originais.

3.2 Formulação do MVD

Um escoamento incompressível pode ser descrito matematicamente através da equação da continuidade

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.1)$$

e das equações de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\vec{U} \quad (3.2)$$

onde \vec{U} é a velocidade vetorial do escoamento, ρ a densidade do fluido, P a pressão e ν

a viscosidade cinemática do fluido. As equações estão sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}_c \text{ em } S_c \\ \vec{U} &= \vec{U}_\infty \text{ em } S_\infty\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde S_c e S_∞ representam respectivamente a fronteira do corpo e a fronteira de escoamento livre.

Para o caso de um escoamento bidimensional no plano xy , e utilizando a definição de vorticidade, temos

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U}\tag{3.4}$$

onde o vetor vorticidade $\vec{\omega} = 2\omega\vec{k}$. Para o caso de um escoamento bidimensional, podemos considerar a vorticidade como sendo uma grandeza escalar. Aplicando-se o operador rotacional na equação (3.2), e utilizando a expressão (3.4), o termo do gradiente de pressão é eliminado da equação, obtendo-se:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega\tag{3.5}$$

A equação (3.5) é a equação de transporte da vorticidade. O corpo, devido à condição de impenetrabilidade do fluido, é considerado como uma linha de corrente. Para um escoamento incompressível bidimensional, define-se a função linha de corrente ψ

tal que:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo-se (3.6) em (3.4) obtém-se uma equação de Poisson para a função linha de corrente e vorticidade:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \tag{3.7}$$

onde as condições de contorno agora são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= U_\infty; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ em } S_\infty \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ em } S_c \end{aligned} \tag{3.8}$$

A equação (3.7) satisfaz automaticamente a equação da continuidade. Sendo assim, ao invés de termos que resolver de forma simultânea as equações de Navier-Stokes e da continuidade para a pressão e velocidade, têm-se que resolver uma única equação de transporte para a variável ψ . Como a equação (3.7) é linear, a função linha de corrente pode ser escrita para cada vórtice discreto individualmente,

$$\nabla^2 \psi_i = -\omega_i \tag{3.9}$$

A função linha de corrente para um dado ponto no escoamento pode ser escrita como a somatória das contribuições das funções linha de corrente de cada um dos vórtices existentes no escoamento mais o escoamento livre, que pode ser escrito em termos da função linha de corrente como:

$$\psi = U_{\infty}y \quad (3.10)$$

Para descrevermos como a vorticidade carregada por cada vórtice discreto influencia o escoamento, partimos da definição de circulação,

$$\Gamma = \oint_c \vec{U} \cdot d\vec{l} \quad (3.11)$$

e lançando mão do Teorema de Stokes, podemos relacionar a circulação com a vorticidade:

$$\Gamma = \int \vec{\omega} \cdot \vec{n}dA = \oint_c \vec{U} \cdot d\vec{l} \quad (3.12)$$

Γ é também chamado de intensidade do vórtice. Integrando-se a equação (3.11), obtemos a velocidade induzida por um vórtice de intensidade Γ em um ponto situado

a uma distância r :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_c \vec{U} \cdot d\vec{l} = U_\theta (2\pi r) \\ U_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Pela equação acima, nota-se que existe uma singularidade no centro do vórtice. Para evitar problemas numéricos, SPALART e LEONARD (1981) propuseram uma formulação alternativa, onde o vórtice não é pontual, mas possui um núcleo com uma dimensão finita σ . No centro do núcleo do vórtice a velocidade é nula, e cresce até um valor máximo dado pela equação (3.13). Com esta formulação, a velocidade induzida pelo vórtice passa a ser:

$$U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r^2 + \sigma^2}\tag{3.14}$$

Para modelar a difusão viscosa dos vórtices na esteira, PARK e HIGUCHI (1989) apud MENEGHINI (1993) propuseram uma lei exponencial para a velocidade induzida:

$$U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)\tag{3.15}$$

Esta expressão no entanto não é eficiente em termos computacionais, devido à função exponencial. Uma maneira de modelar o processo da difusão da vorticidade é fazer com que o núcleo do vórtice cresça ao longo do tempo. Em vez de utilizar a

equação (3.15), PARK e HIGUCHI (1989) apud MENEHINI (1993) apresentaram uma expressão para a taxa de crescimento do núcleo do vórtice com o tempo, conforme descrito a seguir.

A máxima velocidade induzida por um vórtice, pela equação (3.15), é obtida para $r = \sigma$. Assim,

$$\sigma = 2,242\sqrt{\nu t} \quad (3.16)$$

ou seja, o núcleo do vórtice cresce proporcionalmente à raiz quadrada do produto entre a viscosidade e a “idade” do vórtice. Porém, como novos vórtices são criados a cada passo de tempo, o armazenamento da idade de cada um dos vórtices torna-se custosa em termos de requerimento de memória. Pode-se reescrever a expressão acima de uma forma mais apropriada para implementação computacional:

$$(\sigma_{t+\Delta t})^2 = (\sigma_t)^2 + 5,026\nu\Delta t \quad (3.17)$$

Assim, o tamanho do núcleo do vórtice em um novo passo de tempo pode ser calculado diretamente a partir do tamanho do mesmo no passo de tempo anterior, sem nenhuma referência à “idade” do vórtice.

A técnica do núcleo crescente do vórtice fornece uma maneira eficiente, em termos computacionais, para a modelagem da difusão viscosa da vorticidade, e que fornece resultados satisfatórios para escoamentos com números de Reynolds elevados, entre $1 \times 10^4 \leq Re \leq 1 \times 10^5$. No entanto, GREENGARD (1985) mostrou que esta técnica

não converge de maneira correta para a solução da equação de Navier-Stokes. Assim, deve-se aplicar esta técnica com cuidado, respeitando os limites nos quais a mesma apresenta bons resultados.

Como novos vórtices são criados a cada passo de tempo, o número total de vórtices presente no domínio de cálculo durante a simulação pode ficar extremamente elevado, aumentando excessivamente o custo computacional e inviabilizando simulações mais longas. Para evitar este problema, utiliza-se a técnica da amalgamação dos vórtices da esteira. Tal técnica consiste em juntar pares de vórtices que satisfaçam determinadas condições, tornando-os um único vórtice cujas propriedades são ponderadas a partir dos vórtices originais.

É importante manter uma maior resolução das estruturas vorticais nas regiões próximas ao corpo. Assim, um dos critérios para amalgamação dos vórtices é justamente estarem suficientemente distantes do corpo.

A cada passo de tempo são verificados os vórtices que podem ser unidos. A amalgamação entre os vórtices é feita somente aos pares, entre vórtices com circulações de mesmo sinal, e os vórtices que já tenham sido submetidos ao processo de amalgamação são excluídos da pesquisa. Supondo dois vórtices de circulações Γ_1 e Γ_2 , localizados respectivamente nas posições z_1 e z_2 , a velocidade induzida pelos mesmos em um dado ponto z antes da amalgamação pode ser escrita, em notação complexa, na forma:

$$U(z) = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_1}{|z - z_1|} + \frac{\Gamma_2}{|z - z_2|} \right) \quad (3.18)$$

A velocidade induzida após a amalgamação é dada por

$$U'(z) = \frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma_3}{|z - z_3|} \quad (3.19)$$

onde Γ_3 e z_3 são respectivamente a circulação e a posição do vórtice resultante da amalgamação. Fazendo uma expansão da diferença $U(z) - U'(z)$ para um valor de z grande, obtemos:

$$U(z) - U'(z) = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{(\Gamma_3 - \Gamma_1 - \Gamma_2)}{z} + \frac{(\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2 - \Gamma_3 z_3)}{z^2} \right] + \frac{i}{2\pi} \left[\frac{(\Gamma_3 z_3^2 - \Gamma_1 z_1^2 - \Gamma_2 z_2^2)}{z^3} + O(|z|^{-4}) \right] \quad (3.20)$$

A circulação total deve ser conservada, e a posição do novo vórtice deve ser ponderada pelas circulações e distâncias dos vórtices originais. Assim:

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ z_3 &= \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Inserindo (3.21), os dois primeiros termos da equação (3.20) podem ser eliminados. O terceiro termo é uma estimativa do erro introduzido pelo processo de amalgamação. O critério para a amalgamação entre dois vórtices ser realizada é o seguinte:

$$\frac{|\Gamma_1 \Gamma_2|}{|\Gamma_1 + \Gamma_2|} \frac{|z_1 - z_2|^2}{(D_0 + d_1)^{1.5} (D_0 + d_2)^{1.5}} < V_0 \quad (3.22)$$

onde d_1 e d_2 são as distâncias entre as posições dos vórtices em z_1 e z_2 até o ponto mais próximo da parede do corpo, V_0 uma tolerância de amalgamação, normalmente

da ordem de $10^{-4}U_\infty$ ou menos, e D_0 um parâmetro que controla a densidade da esteira. Altos valores de D_0 geram grande amalgamação perto da parede do corpo e, conseqüentemente, a esteira longe do corpo tem uma densidade uniforme de vórtices. Para pequenos valores de D_0 a amalgamação será realizada longe da parede, havendo uma concentração maior de vórtices perto da mesma.

A tolerância de amalgamação V_0 não precisa necessariamente ser constante. Pode-se mantê-la com um valor baixo nas primeiras iterações – o que dificulta a amalgamação, gerando em conseqüência um crescimento acelerado do número de vórtices – e progressivamente aumentá-la durante a simulação, para manter sob controle o número total de vórtices.

Quando dois vórtices são amalgamados, o tamanho do núcleo do novo vórtice σ é obtido através da conservação do momento angular:

$$\sigma = \frac{\sigma_1\Gamma_1 + \sigma_2\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (3.23)$$

A convecção dos vórtices é feita através de um esquema de primeira ordem explícito,

$$Z_i^{t+\Delta t} = Z_i^t + U_i\Delta t \quad (3.24)$$

onde Z^t e $Z^{t+\Delta t}$ são respectivamente as posições do vórtice no instante de tempo atual e futuro, U_i é a velocidade induzida no vórtice i por todos os demais vórtices presentes no escoamento mais a velocidade da corrente livre, e Δt o passo de tempo utilizado. Este esquema exige que o passo de tempo seja menor do que o necessário em um

Pelo princípio da superposição, a função corrente ψ_i em um ponto i da parede é a soma das contribuições da função corrente ψ_{cl} da corrente livre, da função corrente ψ_{vc} dos vórtices criados ao redor do corpo e da função corrente ψ_{ve} dos vórtices já existentes no escoamento, ou seja:

$$\psi_i = \psi_{cl} + \psi_{vc} + \psi_{ve} \quad (3.25)$$

onde, em coordenadas complexas:

$$\psi_{cl} = \text{Im} [Zw_i (U - iV)] \quad (3.26)$$

$$\psi_{vc} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nw} \Gamma_j \ln (|Zw_i - Zc_j|^2 + \sigma_0^2) \quad (3.27)$$

$$\psi_{ve} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nv} \Gamma_j \ln (|Zw_i - Zk_j|^2 + \sigma^2) \quad (3.28)$$

N_v é o número de vórtices na esteira. Logo, a função de corrente no ponto i é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_i = & \text{Im} [Zw_i (U - iV)] \\ & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nw} \Gamma_j \ln (|Zw_i - Zc_j|^2 + \sigma_0^2) \\ & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{Nv} \Gamma_j \ln (|Zw_i - Zk_j|^2 + \sigma^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

O escoamento deve satisfazer a condição de impenetrabilidade na superfície do corpo. Assim, a superfície do corpo é modelada como uma linha de corrente. Para que isso ocorra, temos a seguinte condição:

$$\psi_{i+1} - \psi_i = 0 \quad (3.30)$$

Desta maneira, garante-se que não há fluxo de massa através da superfície do corpo. A equação acima é válida para um corpo em repouso. Caso o mesmo esteja em movimento, a velocidade do corpo deve ser levada em consideração:

$$\psi_{i+1} - \psi_i = -\vec{V}_{corpo} \cdot \vec{n} \cdot \Delta S \quad (3.31)$$

onde ΔS é o comprimento do painel e \vec{V}_{corpo} é velocidade do corpo tomada em um referencial inercial. Substituindo-se a equação (3.29) em (3.31), obtemos então um sistema linear na forma

$$[A] \{\Gamma\} = \{B\} \quad (3.32)$$

onde os coeficientes da matriz A e do vetor B são dados por:

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|Zw_{i+1} - Zc_j|^2 + \sigma_0^2}{|Zw_i - Zc_j|^2 + \sigma_0^2} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} b_i &= \text{Im} [(Zw_{i+1} - Zw_i)(U - iV)] \\ &- \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{Nv} \Gamma_k \ln \left(\frac{|Zw_{i+1} - Z_k|^2 + \sigma^2}{|Zw_i - Z_k|^2 + \sigma^2} \right) \\ &- \vec{V}_{\text{corpo}} \cdot \vec{n} \cdot \Delta S \end{aligned} \quad (3.34)$$

As incógnitas são as circulações dos vórtices recém-criados ao redor do corpo, Γ_i . Pode-se notar que a matriz A depende apenas da geometria do corpo, e o vetor B depende da velocidade do escoamento livre, da velocidade do corpo e dos vórtices já existentes na esteira. O vetor B deve ser recalculado a cada passo de tempo.

O valor de σ representa o tamanho do núcleo do vórtice existente na esteira, que depende da “idade” do mesmo, e é calculado de acordo com a fórmula (3.17) para cada vórtice. O valor inicial do núcleo do vórtice σ_0 é determinado, em uma primeira aproximação, a partir da condição de velocidade tangencial nula – condição de aderência – na superfície do corpo, como descrito a seguir.

Um vórtice pontual colocado a uma distância δ_0 da parede induzirá sobre a mesma uma velocidade igual a

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi\delta_0} \quad (3.35)$$

Para que a condição de aderência seja satisfeita, a velocidade induzida pelo vórtice deve ser igual à velocidade do escoamento livre. Assim, temos:

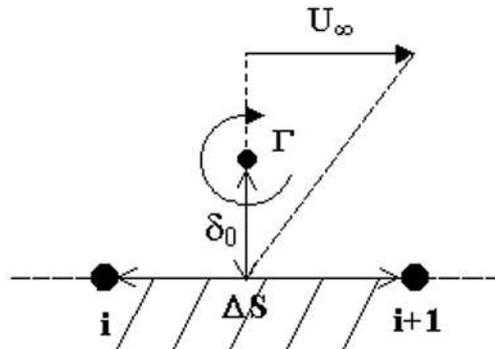


Figura 3.2: Determinação da posição inicial do vórtice. Extraído de FREGONESI (2002)

$$\delta_0 = \frac{\Gamma}{2\pi U_\infty} \quad (3.36)$$

A intensidade do vórtice para que o mesmo induza uma velocidade igual à da corrente livre pode ser estimada em função do comprimento do painel ΔS :

$$\Gamma = \oint U \cdot dl = U_\infty \Delta S \quad (3.37)$$

Substituindo a equação (3.37) em (3.36), temos:

$$\delta_0 = \frac{\Delta S}{2\pi} \quad (3.38)$$

O valor δ_0 é utilizado também como o valor inicial do núcleo do vórtice, σ_0 .

Quando os vórtices criados ao redor do corpo são convectados, ou quando o corpo é deslocado, pode ocorrer de os vórtices colidirem com o corpo. Quando isso ocorre, estes vórtices são eliminados da simulação. Porém, de acordo com o teorema de Kelvin, a circulação total no escoamento deve ser mantida constante ao longo do tempo. Para isso, a somatória das circulações dos vórtices recém-criados ao redor do corpo mais a somatória das circulações dos vórtices presentes na esteira deve ser nula:

$$\sum_{i=1}^{N_w} \Gamma_i + \sum_{k=1}^{N_v} \Gamma_k = 0 \quad (3.39)$$

Esta equação deve ser incluída de alguma forma no sistema linear dado por (3.32), para evitar a propagação de erros numéricos. Existem duas formas de se incluir esta relação: substituindo-se uma das equações do sistema linear por (3.39), ou adicionando-se (3.39) ao sistema linear sem retirar nenhuma das equações, resultando em um sistema linear sobre-determinado. De acordo com PARK e HIGUCHI (1989), a segunda metodologia é mais vantajosa, pois permite a inclusão de mais de um corpo no escoamento sem perda da precisão numérica. O sistema sobre-determinado pode ser resolvido através de uma técnica de mínimos quadrados.

Podemos resumir o algoritmo do MVD pela seqüência de etapas abaixo:

- Discretização do corpo em painéis;
- Determinação das posições Z_w , da distância δ_0 e tamanho inicial do núcleo do vórtice σ_0 para cada painel;

- Para cada passo de tempo:
 1. Resolver o sistema de equações (3.32), obtendo a circulação Γ dos novos vórtices criados ao redor do corpo;
 2. Calcular as velocidades induzidas através da lei de Biot-Savart (3.14);
 3. Convectar todos os vórtices no escoamento, através de (3.24);
 4. Calcular os novos valores de σ , de acordo com a equação (3.17);
 5. Calcular as forças no corpo;
 6. Verificar colisão dos vórtices com o corpo;
 7. Acumular a circulação perdida devido à eliminação destes vórtices;
 8. Fazer a amalgamação dos vórtices na esteira;
- Avançar para um novo passo de tempo.

3.3 Considerações sobre o MVD

O MVD, como aqui apresentado, pode ser descrito como um método de passo fracionado, ou seja, as partes viscosa e invíscida das equações de Navier-Stokes são tomadas em passos sucessivos: inicialmente, a convecção da vorticidade é feita de forma lagrangeana e invíscida, e a seguir os efeitos viscosos são inseridos nos vórtices presentes na esteira, modelados através de um dos diversos esquemas disponíveis para o MVD, como por exemplo a técnica do núcleo crescente do vórtice, como descrito em SPALART e LEONARD (1981), ou através da técnica *Random Walk*, como visto em CHORIN (1973). Os efeitos viscosos devido às fronteiras sólidas são tradicionalmente levados em consideração pela geração de vorticidade, implementada através da imposição da condição de aderência.

O MVD possui características que são desejáveis sob o ponto de vista numérico. Domínios computacionais mais compactos são obtidos, pois somente as estruturas vorticais

são discretizadas. As partículas vorticais são convectadas sem dissipação numérica, em contraste aos métodos eulerianos tradicionais. Outra característica interessante é a eliminação do gradiente de pressão das equações, fazendo com que o mesmo somente seja calculado quando for necessário – por exemplo, para a determinação de forças sobre o corpo.

As características aqui descritas apresentam tanto os mais atraentes aspectos do MVD sob o ponto de vista computacional, como também as suas maiores dificuldades. O MVD apresenta uma convergência lenta em termos espaciais, necessitando de um elevado número de partículas para reproduzir o escoamento com uma precisão razoável. O sinal das forças obtido geralmente apresenta um ruído elevado, devendo ser estimado por meio de uma média durante um determinado número de passos de tempo. Somente escoamentos pouco viscosos podem ser modelados, sendo adotado como regra geral um limite inferior de número de Reynolds em torno de 100 – BARBA et al. (2005).

A imposição da função linha de corrente é uma das formas de forçar a condição de contorno de impenetrabilidade – ou seja, fluxo de massa nulo através das paredes do corpo. A imposição da condição de contorno de aderência, que é satisfeita através da determinação das circulações dos vórtices dispostos ao redor do corpo, é responsável pela aproximação, em primeira ordem, da distribuição de vorticidade ao redor do corpo, devido aos efeitos da viscosidade.

Esta aproximação, que emula os efeitos da camada limite, é um dos responsáveis pelos resultados insatisfatórios do MVD para escoamentos a baixos valores de número de Reynolds, devido ao fato de que tal aproximação não consegue capturar corretamente a distribuição de velocidades dentro da camada limite. No entanto, a aproximação da camada limite introduzida pelo MVD, da forma como é aqui apresentada, é satisfatória para uma larga faixa de números de Reynolds, faixa esta correspondente à região subcrítica, onde é observada boa parte das condições ambientais encontradas na operação de *risers* típicos. Na região subcrítica, os pontos de separação no cilindro permanecem em uma posição próxima a 80° a partir do ponto de estagnação, para uma larga faixa

de números de Reynolds, e o coeficiente de arrasto apresenta-se praticamente constante ao longo desta faixa. O MVD consegue capturar corretamente a posição dos pontos de separação sobre a superfície do cilindro, na faixa subcrítica.

Outro fator a ser destacado é que a introdução dos efeitos viscosos através da técnica do núcleo crescente do vórtice é inconsistente, pois não converge para as equações de Navier-Stokes, como demonstrado matematicamente por GREENGARD (1985). Esta inconsistência deve-se à forma como é feita a advecção dos vórtices, sem um limitante para o crescimento do núcleo vortical ao longo do tempo. Como visto em BARBA et al. (2005), foram criadas algumas técnicas para superar esta limitação, como por exemplo dividir os vórtices e redistribuí-los em estruturas menores quando uma determinada dimensão de corte é alcançada, o que fornece um esquema que converge às equações de Navier-Stokes, ou através do emprego de técnicas híbridas eulerianas-lagrangeanas. Tais soluções apresentam também inconveniências: no primeiro caso, uma dissipação numérica é introduzida no método, além de gerar um crescimento exponencial do número de vórtices presentes na simulação, e no segundo perde-se a característica puramente lagrangeana do método.

Apesar das limitações acima expostas, segundo BARBA et al. (2005), o MVD associado à técnica do crescimento do núcleo tem sido utilizado com sucesso para escoamentos pouco viscosos e com grandes regiões de separação. No caso particular de escoamentos ao redor de cilindros, apresenta bons resultados para a faixa de números de Reynolds subcrítica, fornecendo um método simples, computacionalmente atrativo e que apresenta bons resultados para a aplicação aqui estudada.

3.4 Validação do MVD

Visando a validação do código, foram realizadas simulações ao redor de um cilindro estacionário para um valor de número de Reynolds igual a 10.000. Foram realizados testes de sensibilidade com diferentes parâmetros do MVD, e os resultados comparados aos disponíveis na literatura.

Foram variados os seguintes parâmetros: número de painéis utilizados na discretização, valor do passo de tempo adimensional e parâmetro de amalgamação V_0 , como mostrado na Tabela 3.1. As simulações abrangem um tempo adimensional total igual a 2.000. Os valores do coeficiente de arrasto médio e número de Strouhal obtidos são mostrados na Tabela 3.2.

As Figuras 3.3 a 3.14 mostram as séries temporais obtidas nas simulações. O número total de vórtices presentes na esteira variou entre cerca de 600 ($Nw = 32$, $V_0 = 1 \times 10^{-5}$ e $Ut/D = 0,1$) a até aproximadamente 3.500 ($Nw = 128$, $V_0 = 1 \times 10^{-6}$ e $Ut/D = 0,05$). As Figuras 3.15 e 3.16 mostram as esteiras de vórtices obtidas para estes dois casos.

Pode-se observar que os sinais dos coeficientes de sustentação e arrasto apresentam um ruído elevado, devido à natureza descontínua da discretização empregada pelo MVD. O sinal apresenta-se mais ruidoso para baixos valores de passo de tempo adimensional embora, de uma forma geral, os valores médios apresentem boa concordância com os experimentais obtidos por ROSHKO (1961), tanto para o coeficiente de arrasto como para o número de Strouhal.

A tolerância de amalgamação V_0 permite o controle do número total de vórtices ao longo da simulação, embora pequenas variações acarretem em grandes diferenças na amalgamação. Por exemplo, para o caso com 128 painéis e passo de tempo adimensional igual a 0,1, a utilização dos valores de V_0 iguais a 1×10^{-5} e 1×10^{-6} forneceram números de vórtices em torno de 900 e 2.700, respectivamente, o que acarreta uma maior carga computacional para este último caso. No entanto, os coeficientes médios de arrasto e número de Strouhal não apresentam grandes variações, devido ao fato de que a amalgamação é realizada a uma certa distância do corpo, minimizando assim a

sua influência.

A discretização com 32 painéis apresenta os maiores desvios em relação aos dados experimentais, mesmo quando utilizada uma amalgamação menos severa. Com o aumento da discretização do corpo, os valores de coeficiente de arrasto apresentam uma tendência de aproximação aos valores experimentais, conforme esperado. Porém, uma maior discretização do corpo acarreta também em uma maior carga computacional.

As Figuras 3.17 e 3.18 mostram contornos de vorticidade para os casos mostrados nas Figuras 3.15 e 3.16, respectivamente. Os contornos foram obtidos através da distribuição das circulações dos vórtices presentes na simulação sobre uma malha de fundo. Pode-se observar a estrutura da esteira de vórtices representada pelos conjuntos de vórtices discretos emitidos de forma intermitente. Quando um maior número de vórtices é empregado, como no caso das Figuras 3.16 e 3.18, a esteira de vórtices apresenta-se melhor definida.

Passo de tempo adimensional Ut/D	0,05 e 0,1
Parâmetro de amalgamação V_0	1×10^{-5} e 1×10^{-6}
Número de painéis	32, 64 e 128

Tabela 3.1: Parâmetros utilizados na validação do MVD

$$Ut/D = 0,05 \quad V_0 = 1 \times 10^{-5}$$

Nw	\bar{C}_d	Strouhal
32	1,13	0,21
64	1,13	0,21
128	1,16	0,20

$$Ut/D = 0,05 \quad V_0 = 1 \times 10^{-6}$$

Nw	\bar{C}_d	Strouhal
32	1,14	0,21
64	1,14	0,22
128	1,18	0,21

$$Ut/D = 0,1 \quad V_0 = 1 \times 10^{-5}$$

Nw	\bar{C}_d	Strouhal
32	1,09	0,19
64	1,17	0,20
128	1,20	0,21

$$Ut/D = 0,1 \quad V_0 = 1 \times 10^{-6}$$

Nw	\bar{C}_d	Strouhal
32	1,13	0,19
64	1,17	0,21
128	1,19	0,21

Tabela 3.2: Resultados - validação MVD

Autor	Metodologia	\bar{C}_d	Strouhal
Yamamoto, 2002	Numérico, 2D	1,28	0,19
Flatschart, 2000	Numérico, 2D	1,55	0,21
Saltara, 1999	Numérico, 2D	1,73	0,24
Selvan, 1997	Numérico, 2D	1,34	0,15
Nomura, 1994	Numérico, 2D	1,35	0,19
Tamura, 1990	Numérico, 3D	1,20	–
Roshko, 1961	Experimental	1,20	0,20

Tabela 3.3: Resultados obtidos na literatura para cilindros lisos fixos, $Re = 10.000$

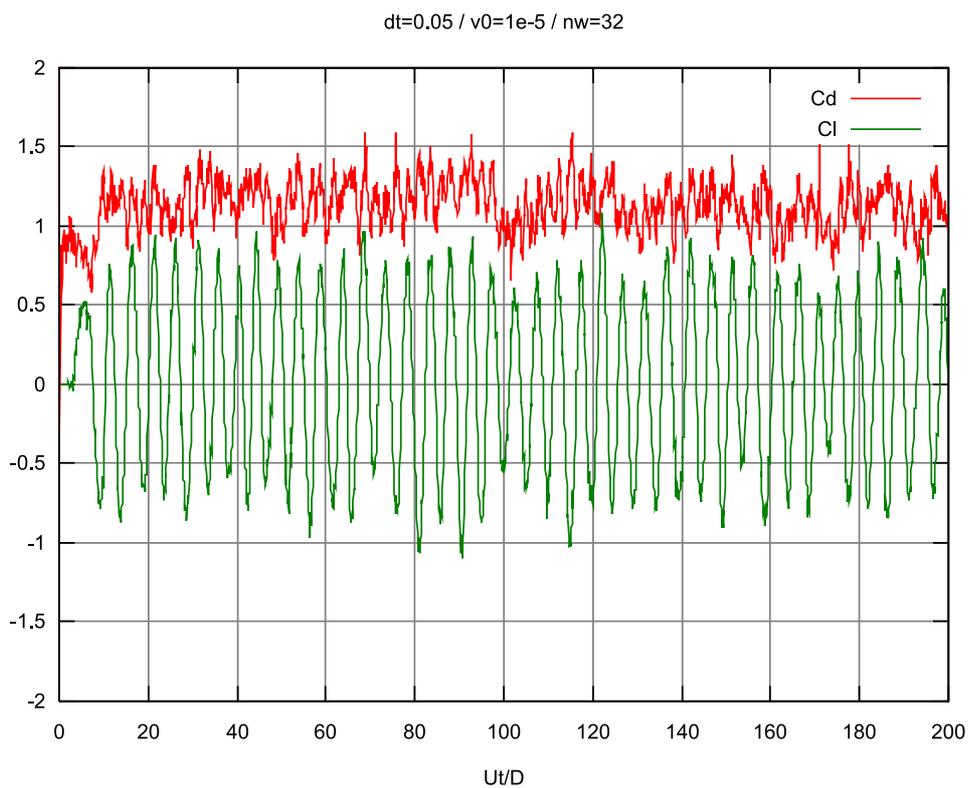


Figura 3.3: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32$, $V_0=1 \times 10^{-5}$, $Ut/D=0,05$)

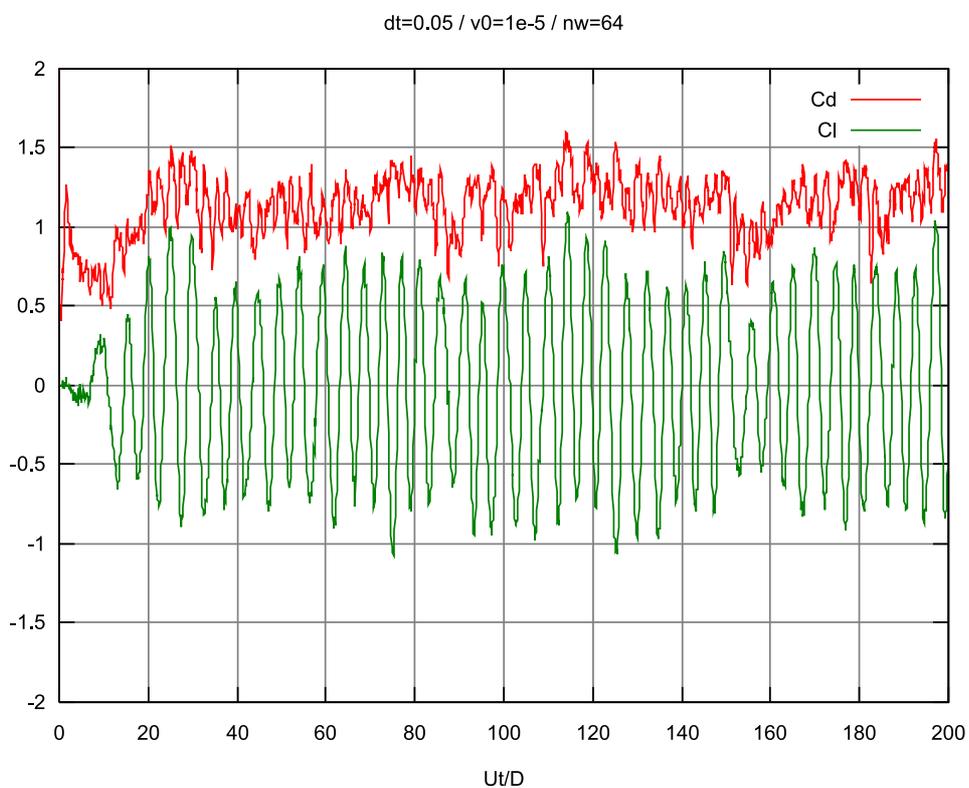


Figura 3.4: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64$, $V_0=1 \times 10^{-5}$, $Ut/D=0,05$)

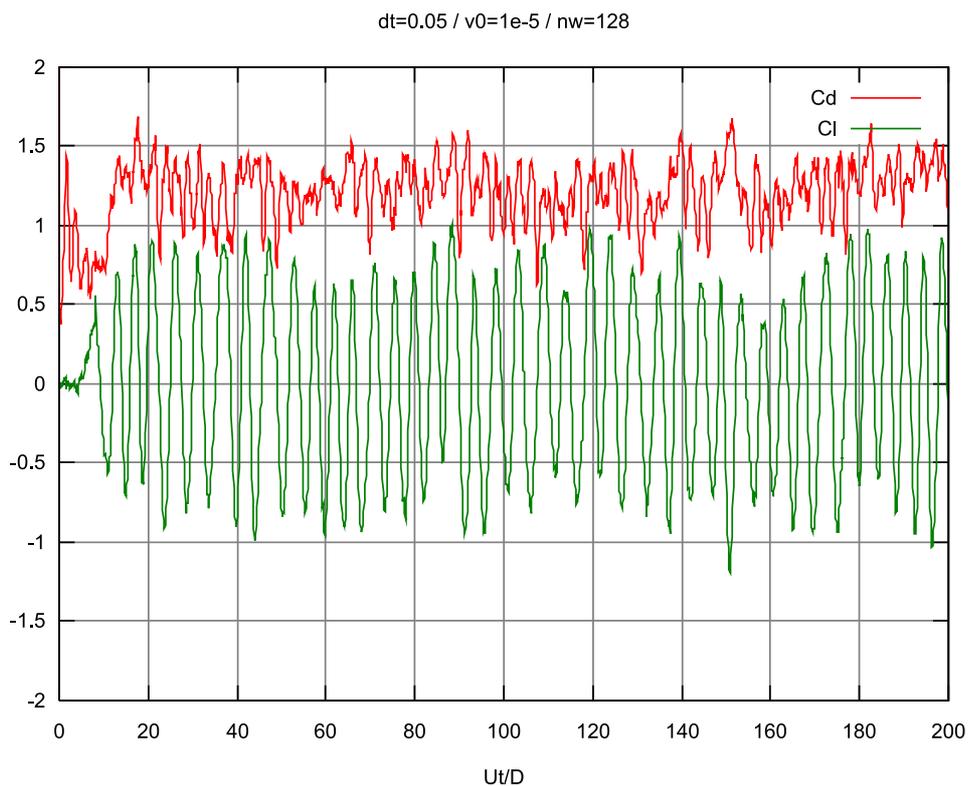


Figura 3.5: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128$, $V_0=1 \times 10^{-5}$, $Ut/D=0,05$)

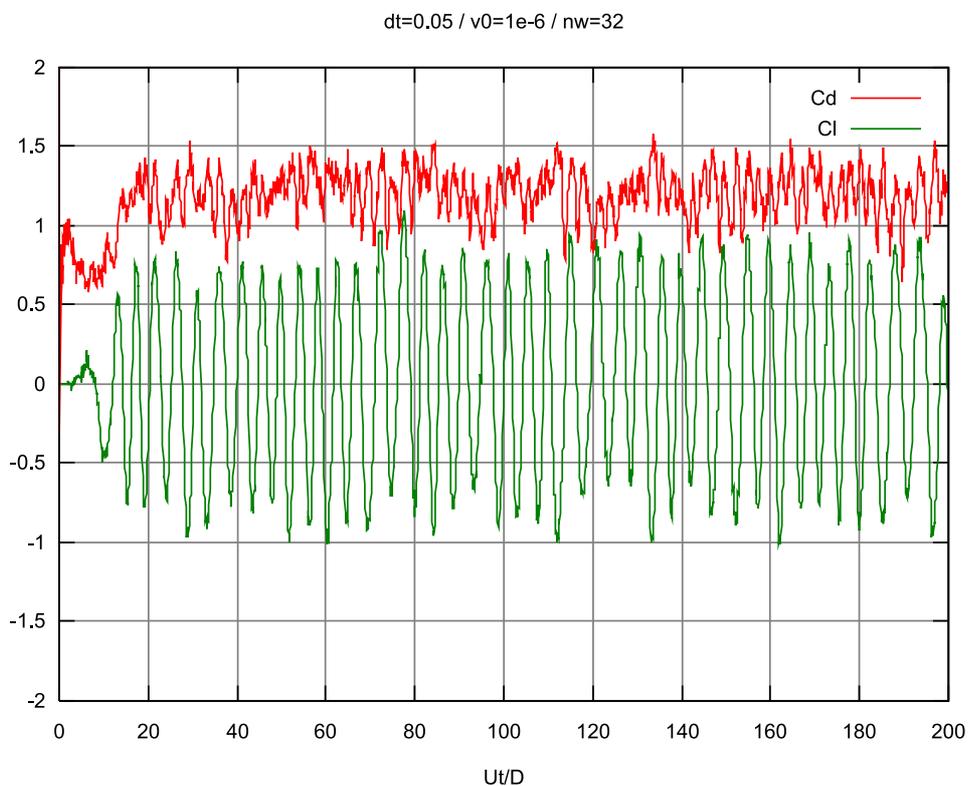


Figura 3.6: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32$, $V_0=1 \times 10^{-6}$, $Ut/D=0,05$)

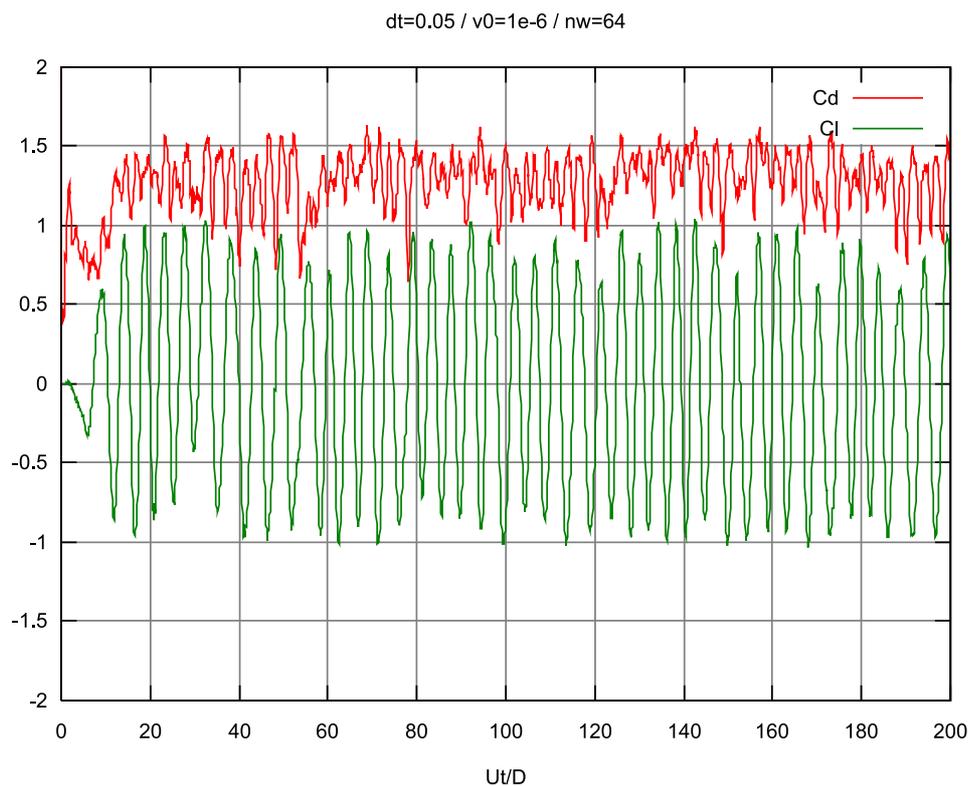


Figura 3.7: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64$, $V_0=1 \times 10^{-6}$, $Ut/D=0,05$)

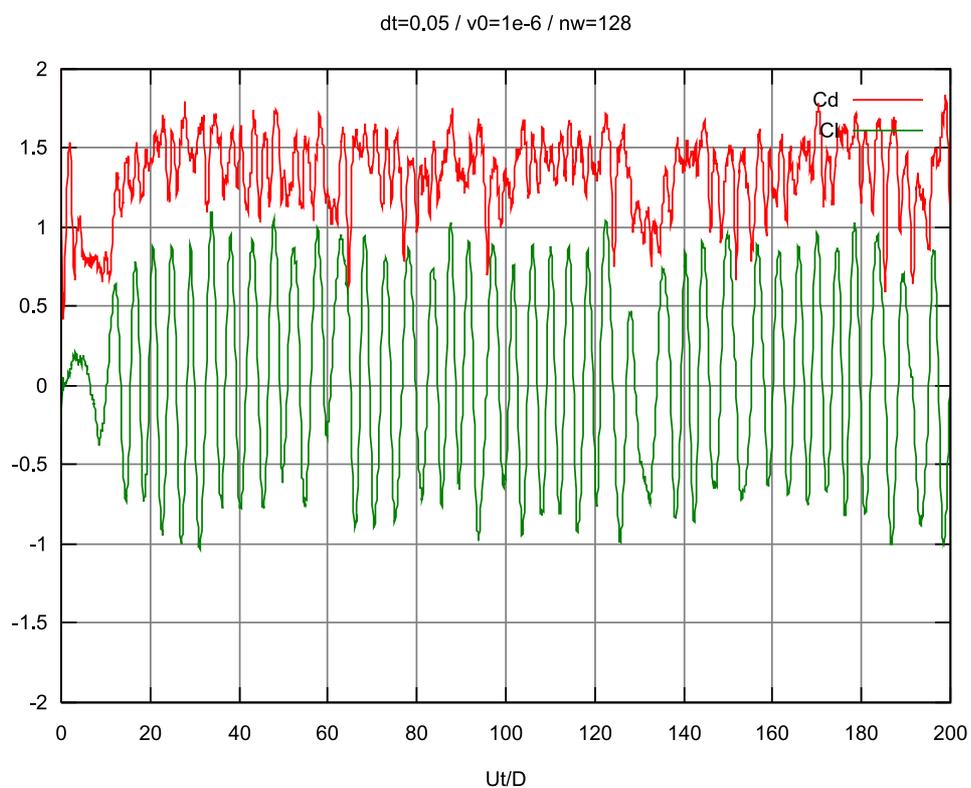


Figura 3.8: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128$, $V_0=1 \times 10^{-6}$, $Ut/D=0,05$)

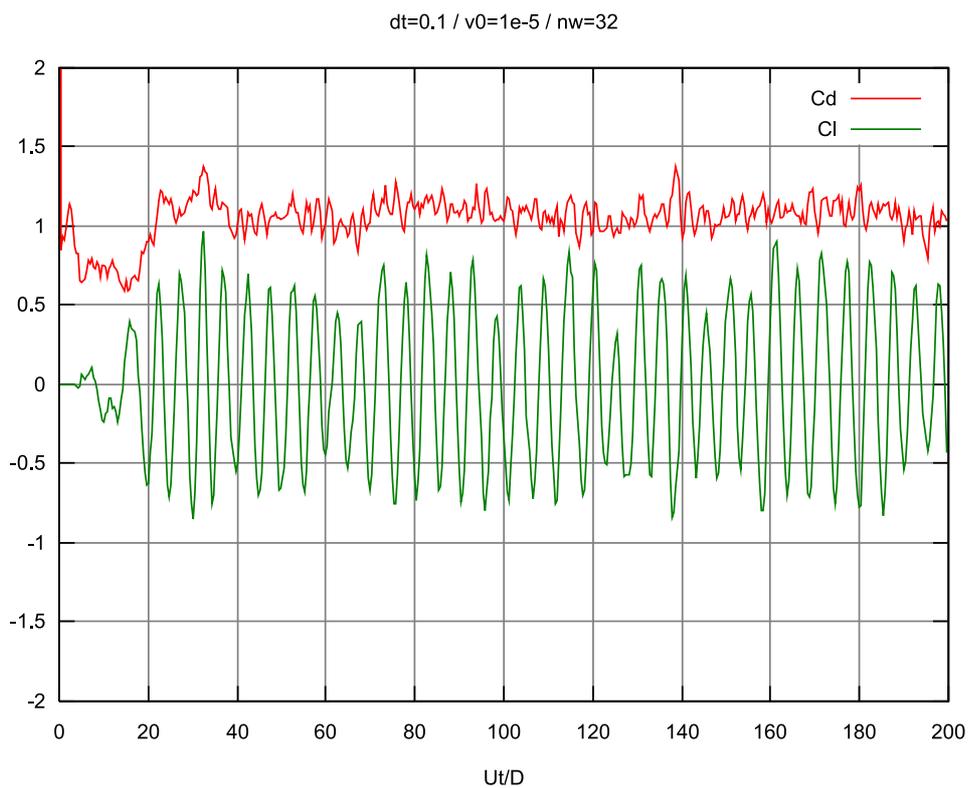


Figura 3.9: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32$, $V_0=1 \times 10^{-5}$, $Ut/D=0,1$)

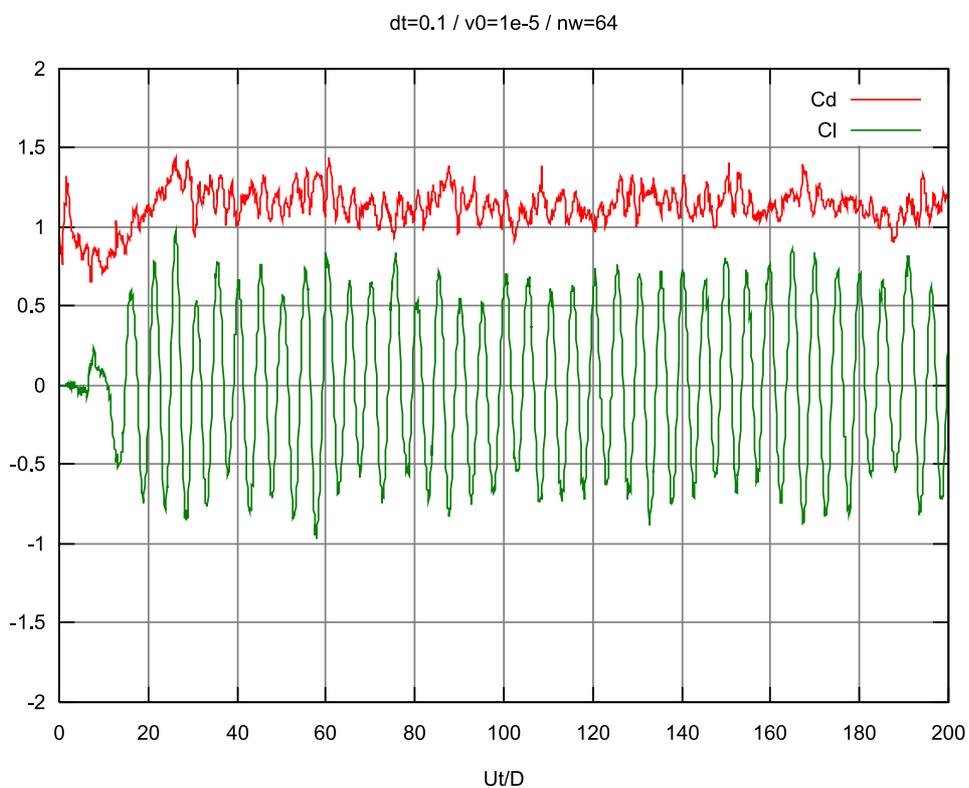


Figura 3.10: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64$, $V_0=1 \times 10^{-5}$, $Ut/D=0,1$)

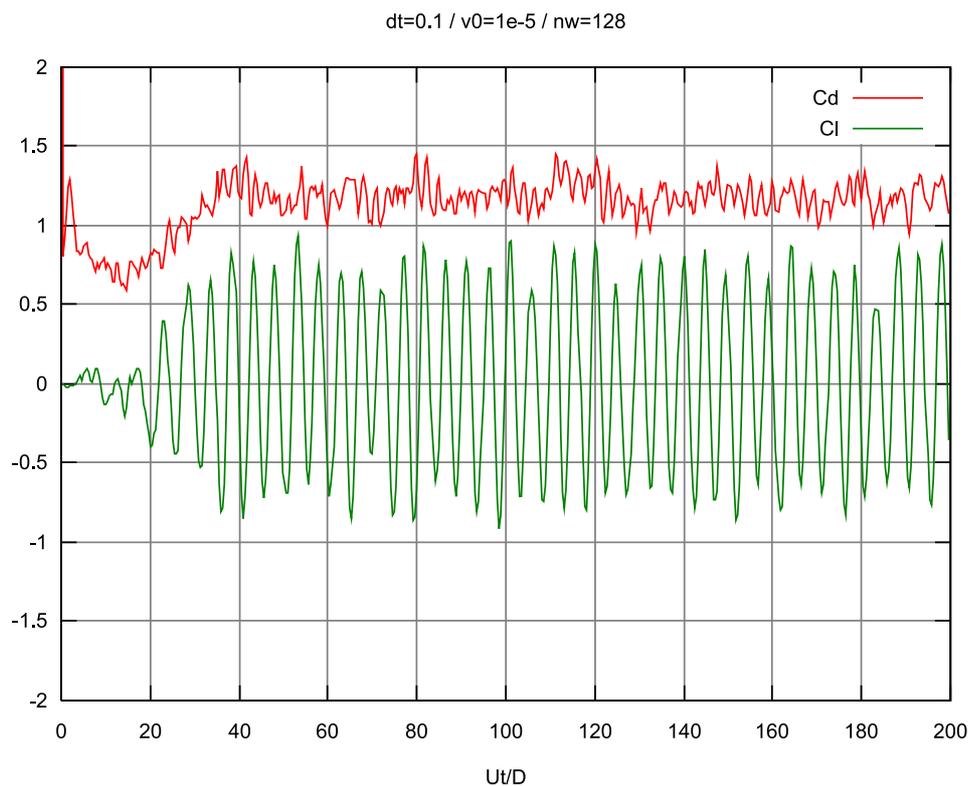


Figura 3.11: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128$, $V_0=1 \times 10^{-5}$, $Ut/D=0,1$)

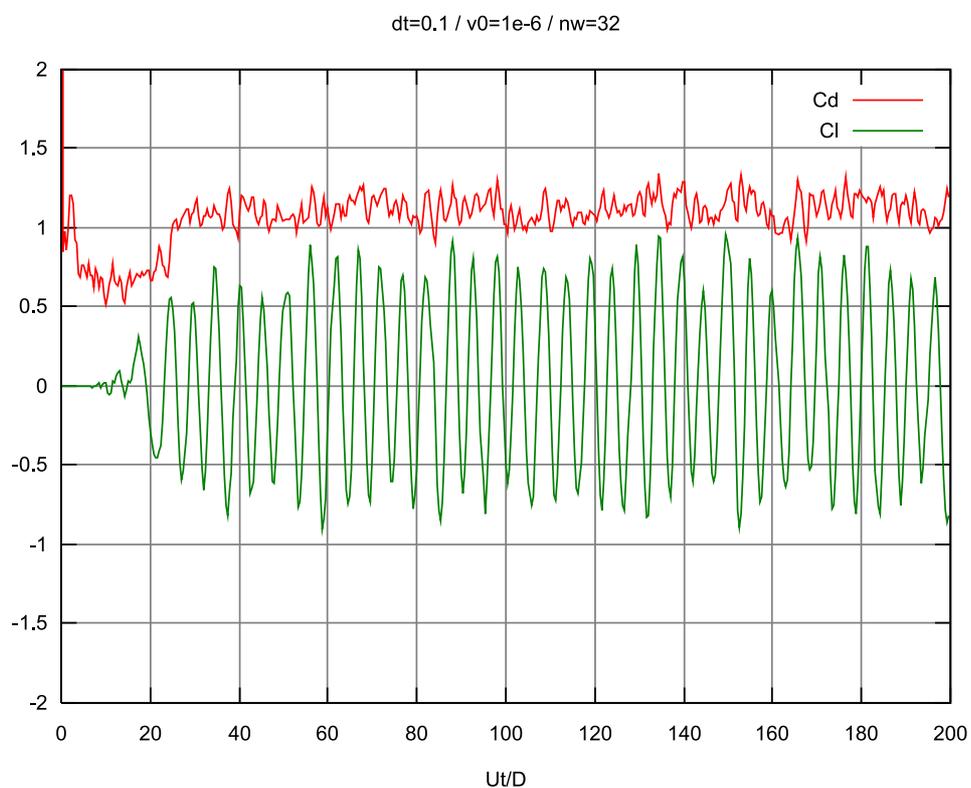


Figura 3.12: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=32$, $V_0=1 \times 10^{-6}$, $Ut/D=0,1$)

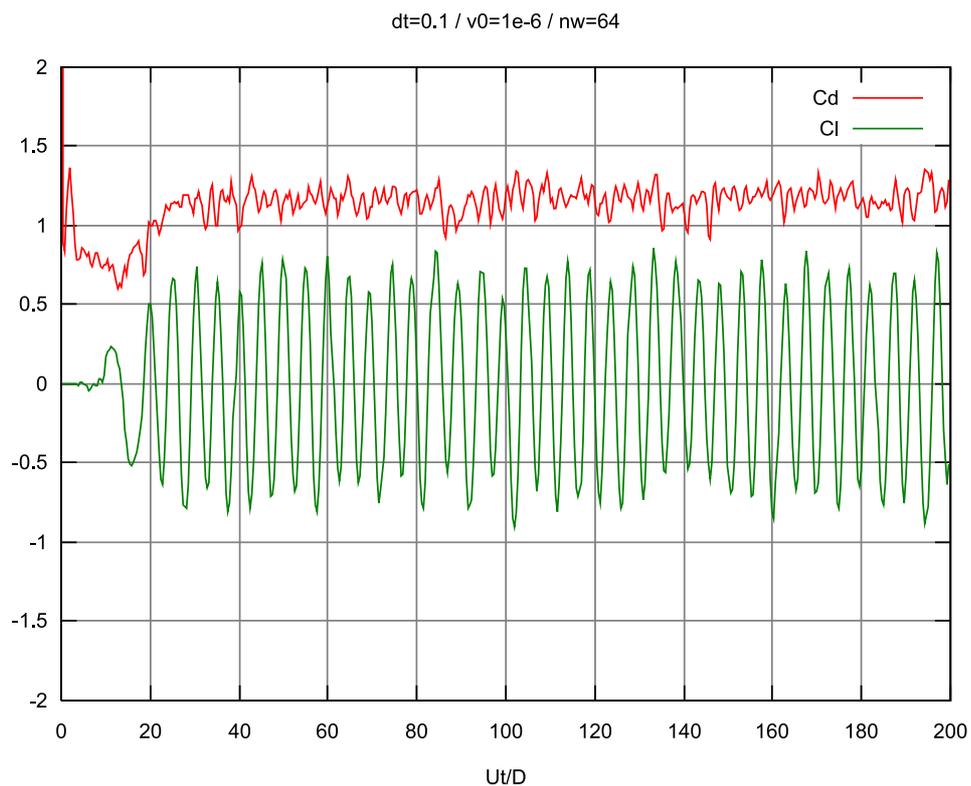


Figura 3.13: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=64$, $V_0=1 \times 10^{-6}$, $Ut/D=0,1$)

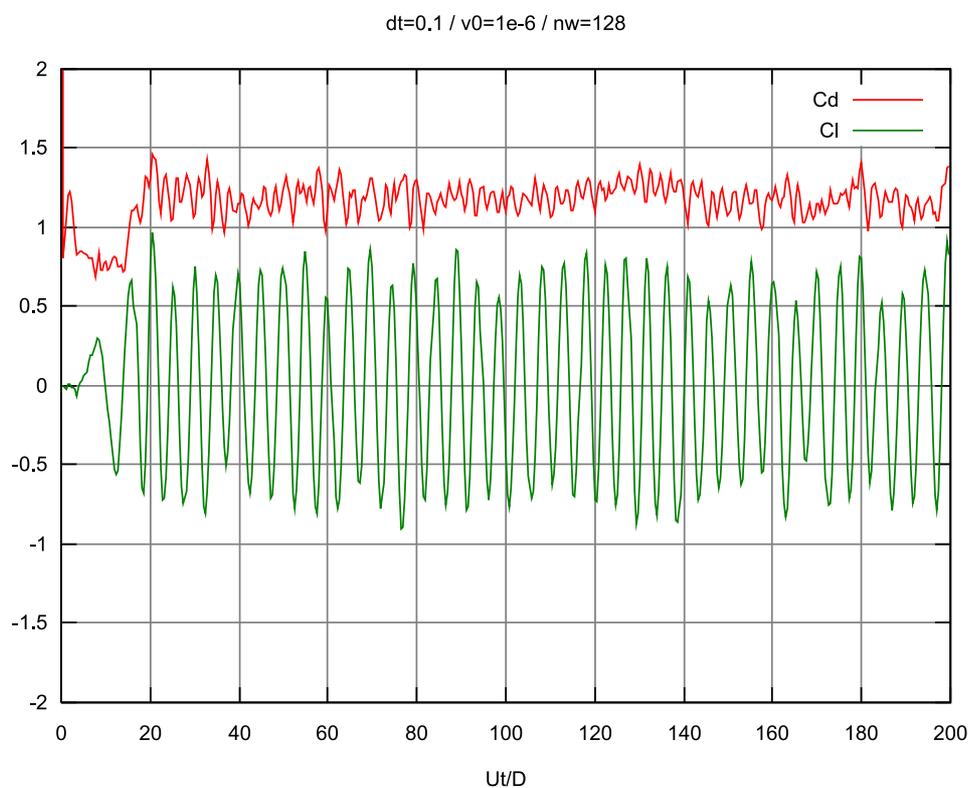


Figura 3.14: Série temporal dos coeficientes de força ($Nw=128$, $V_0=1 \times 10^{-6}$, $Ut/D=0,1$)

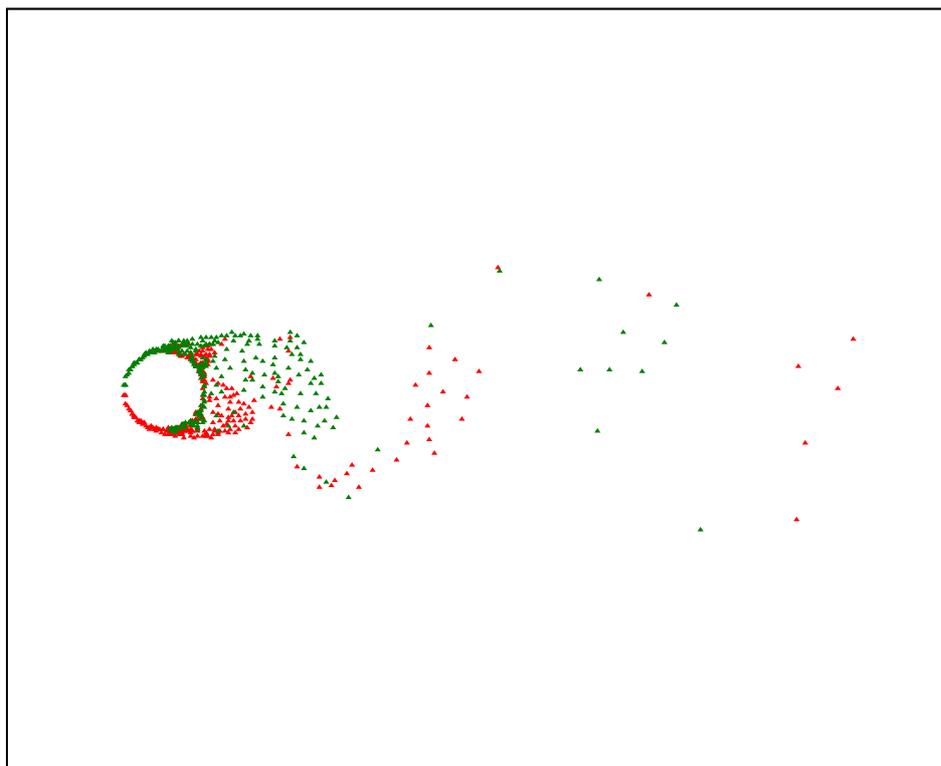


Figura 3.15: Esteira de vórtices ($Nw = 32$, $V_0 = 1 \times 10^{-5}$, $Ut/D = 0,1$)

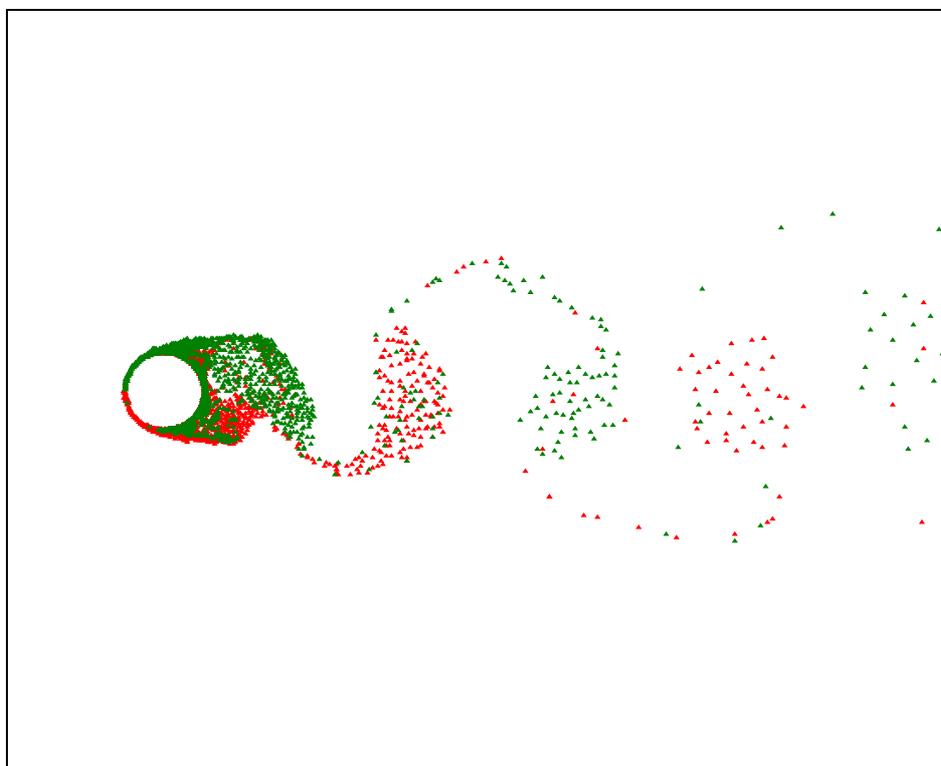


Figura 3.16: Esteira de vórtices ($Nw = 128$, $V_0 = 1 \times 10^{-6}$, $Ut/D = 0,05$)

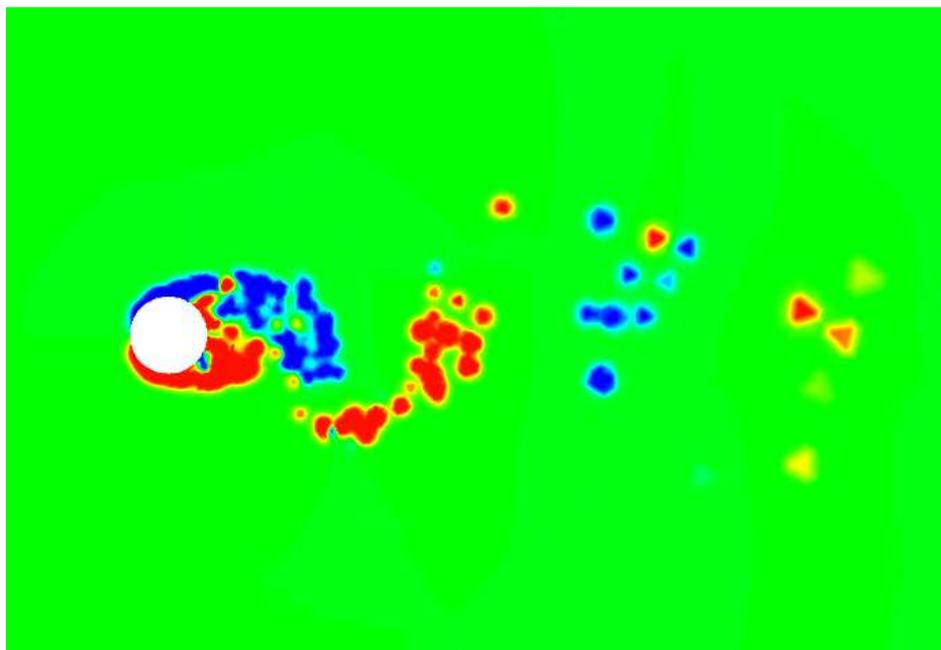


Figura 3.17: Contorno de vorticidade ($Nw = 32$, $V_0 = 1 \times 10^{-5}$, $Ut/D = 0,1$)

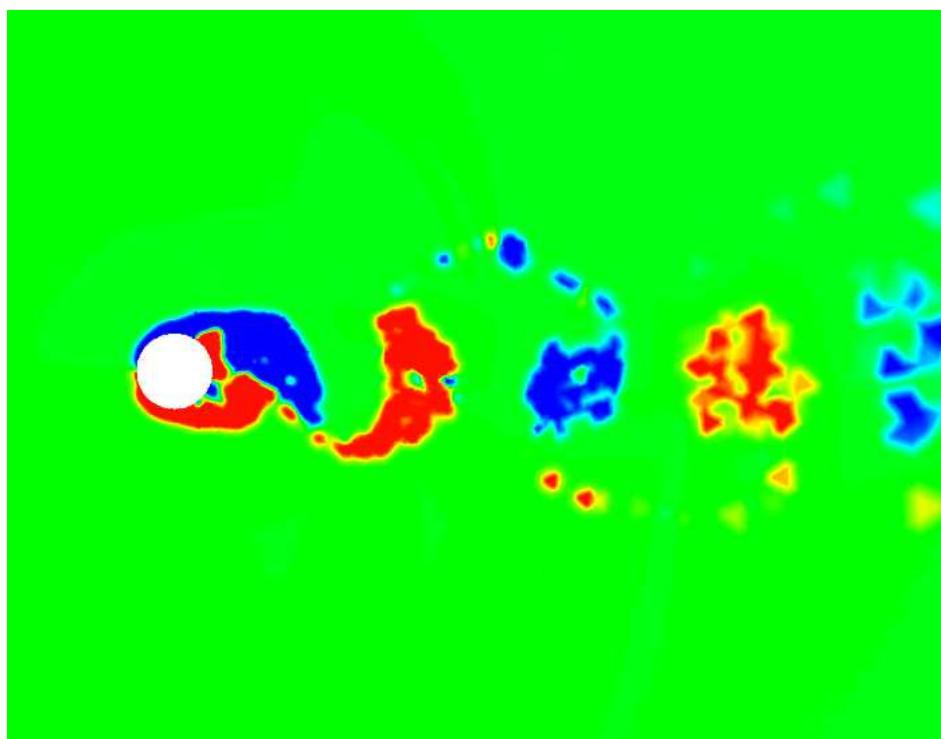


Figura 3.18: Contorno de vorticidade ($Nw = 128$, $V_0 = 1 \times 10^{-6}$, $Ut/D = 0,05$)

Capítulo 4

O Método dos Elementos Finitos

4.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) originou-se da necessidade de resolver problemas complexos de análise estrutural em engenharia civil e aeronáutica. O seu desenvolvimento inicial pode ser atribuído ao trabalho de A. Hrennikoff (1941) e R. Courant (1942). Embora as abordagens utilizadas por estes dois pesquisadores fossem diferentes, as mesmas compartilhavam uma característica essencial: a discretização de um domínio contínuo em um conjunto de subdomínios discretos. O desenvolvimento do MEF propriamente dito iniciou em meados dos anos 1950, para o estudo de estruturas aeronáuticas, utilizando princípios de equilíbrio de forças e análise matricial. Desde então, tem sido generalizado em uma ampla gama de campos que envolvem o modelamento numérico de sistemas físicos como, por exemplo, eletromagnetismo, mecânica dos fluidos, análise de tensões, vibrações, acústica, etc, tanto para fenômenos lineares como não-lineares.

O MEF é um dos métodos numéricos mais conhecidos e utilizados, juntamente com o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Volumes Finitos, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. Os três primeiros métodos são métodos de domínio, isto é, a discretização é ao longo de toda a região. Já no Método dos Elementos de Contorno, como o próprio nome diz, necessita-se apenas a

discretização ao longo da fronteira da região de estudo.

De uma forma geral, o MEF pode ser encarado como uma técnica computacional, utilizada para a resolução de equações diferenciais parciais que emergem de aplicações científicas e de engenharia, com uma precisão que seja aceitável para o problema em questão. Ao invés de aproximar as equações diferenciais parciais diretamente como, por exemplo, através de métodos de diferenças finitas, o MEF utiliza um problema variacional que envolve uma integral da equação diferencial sobre o domínio do problema. Este domínio é dividido em um número de subdomínios, chamados de elementos finitos, e a solução das equações diferenciais parciais é aproximada por uma função polinomial mais simples em cada elemento. Estes polinômios devem ser determinados de tal forma que a solução aproximada tem um grau apropriado de suavidade sobre todo o domínio. Uma vez feito isso, a integral variacional é avaliada como uma soma das contribuições de cada elemento finito. O resultado é um sistema algébrico para a solução aproximada, de dimensão finita, ao invés da solução contínua da equação diferencial parcial original. Assim, ao contrário do método de diferenças finitas, o MEF provê uma solução aproximada das equações diferenciais parciais como funções polinomiais em todo o domínio, ao invés de em pontos discretos, como no caso do método das diferenças finitas.

4.2 Conceitos Iniciais

Para a representação de fenômenos físicos, os engenheiros e físicos geralmente estabelecem um sistema de equações diferenciais válidas em certa região (domínio) e impõem nesse sistema condições de contorno e condições iniciais. Até esse estágio, o modelo matemático está completo e, para aplicações práticas, necessita-se “somente” a solução para um conjunto particular de dados numéricos. Aqui surge a maior dificuldade, pois apenas formas muito simples de equações, dentro de contornos triviais, são possíveis de serem resolvidas exatamente através de métodos matemáticos. Equações diferenci-

ais ordinárias, com coeficientes constantes são alguns exemplos para os quais soluções analíticas são possíveis.

Para solucionar tais dificuldades, há a necessidade da utilização de métodos numéricos, obtendo-se assim soluções aproximadas da equação diferencial que se deseja resolver, sujeita a certas condições de contorno e condições iniciais. A idéia básica dos métodos numéricos para solucionar tal classe de problemas é “discretizar” o problema contínuo. Ou seja, o conjunto infinito de números que representam a função ou funções desconhecidas é substituído por um conjunto finito de parâmetros desconhecidos, sendo que esse processo requer alguma forma de aproximação. Os parâmetros desconhecidos são encontrados através de solução algébrica, ou seja, obtém-se um sistema algébrico de equações do tipo

$$[A] \{x\} = \{b\} \quad (4.1)$$

onde $[A]$ é uma matriz quadrada e não-singular, $\{b\}$ é o vetor independente e $\{x\}$ é o vetor que contém os parâmetros desconhecidos da solução aproximada, ou seja, é o vetor solução. Por vezes a matriz $[A]$ pode depender do vetor $\{x\}$, caracterizando um problema não-linear. Ou ainda $[A]$, $\{x\}$ e $\{b\}$ podem ser todos dependentes do tempo, desejando-se a solução não somente para um instante, mas para um determinado intervalo de tempo, necessitando solucionar a equação (4.1) ao longo do tempo.

Seja a equação diferencial que rege um dado problema físico, com condições especificadas no contorno (problema de valor no contorno)

$$\begin{aligned} Du - f &= 0 \text{ no domínio } \Omega \\ Bu - g &= 0 \text{ no contorno } \Gamma \text{ (condições de contorno)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Considerando o caso unidimensional, em geral desconhece-se a solução $u(x)$ do problema em questão, e procura-se uma solução aproximada $\tilde{u}(x)$. Tipicamente, $\tilde{u}(x)$ é um polinômio que satisfaz as condições de contorno essenciais, e contém coeficientes a determinar a_1, a_2, \dots, a_n . Assim, para se obter a solução aproximada $\tilde{u}(x)$ deve-se determinar os coeficientes a_i tal que u e \tilde{u} sejam suficientemente próximas, segundo um determinado critério estabelecido. Ou seja, $\tilde{u} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, sendo os coeficientes a_i determinados segundo critérios que serão vistos.

Substituindo \tilde{u} no lugar de u na equação diferencial, obtém-se o erro, ou resíduo

$$\begin{aligned} R_D &= R_D(\tilde{u}) = D\tilde{u} - f \text{ (resíduo no domínio)} \\ R_C &= R_C(\tilde{u}) = B\tilde{u} - g \text{ (resíduo no contorno)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Os resíduos podem se anular para alguns valores de x , mas só serão nulos para todos os valores de x se a solução aproximada \tilde{u} for a solução exata, isto é, se $\tilde{u}(x) \equiv u(x)$. Presume-se que, se \tilde{u} é uma boa aproximação de u , os resíduos sejam pequenos. Resíduos pequenos podem ser alcançados de várias maneiras, cada uma delas resultando num sistema de equações algébricas de ordem n a ser resolvido, onde as incógnitas são os coeficientes a_i .

Um dos métodos mais utilizados no MEF para a minimização do resíduo é o de Galerkin, na sua formulação fraca. Nesse método, selecionam-se funções peso $W_i = W_i(x)$ e impõe-se que a média ponderada do resíduo R_D com relação às funções peso seja igual a zero. Em termos matemáticos, R_D é feito ortogonal às funções peso (o produto interno entre W_i e R_D é nulo):

$$R_i = \int_{\Omega} W_i R_D(a_i, x) d\Omega = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

No método de Galerkin, as funções peso são os coeficientes das coordenadas generalizadas a_i . Assim,

$$W_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i} \quad (4.5)$$

ou seja, a base de funções para aproximar \tilde{u} e para aproximar W_i são as mesmas. Maiores detalhes sobre o MEF e o método de Galerkin podem ser encontrados em CRAIG (1981) e ZIENKIEWICZ e MORGAN (1983).

4.3 Aplicação do MEF a Elementos Estruturais

Básicos

Os princípios da aplicação do MEF serão descritos a seguir, para o caso de elementos estruturais básicos, como desenvolvido nos trabalhos de ZIENKIEWICZ e MORGAN (1983) e SMITH e GRIFFITHS (1988). No Capítulo 6, a descrição aqui apresentada será estendida para o caso de um *riser*, modelado como uma composição dos elementos estruturais básicos, e os carregamentos serão fornecidos pela solução do escoamento através do MVD. da modelagem do riser.

4.3.1 Elemento de Barra Submetido a Tração/Compressão

A figura abaixo mostra o mais simples tipo de elemento a ser considerado, uma barra elástica, com extremidades dadas pelos nós 1 e 2. O elemento tem comprimento L , e deslocamento longitudinal dos nós designado por u . A barra é submetida somente a esforços axiais.

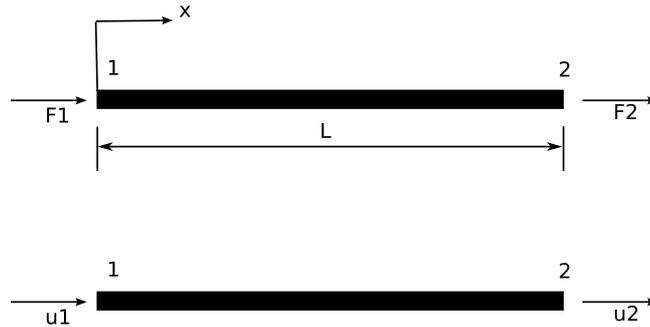


Figura 4.1: Elemento de barra submetido a tração/compressão.

Se P é a força axial por unidade de comprimento na barra em uma seção determinada, e F a força aplicada por unidade de comprimento, então:

$$P = \sigma A = EA\varepsilon = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.6)$$

e, considerando a condição de equilíbrio

$$\frac{\partial P}{\partial x} - F = 0 \quad (4.7)$$

a equação diferencial a ser resolvida é

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F \quad (4.8)$$

Pela técnica de elementos finitos, a variável contínua u é aproximada em termos de seus valores nodais u_1 e u_2 , através de funções de interpolação, ou seja:

$$u \simeq N_1 u_1 + N_2 u_2$$
$$u \simeq \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = Nu \quad (4.9)$$

Assumindo uma variação linear de u , as funções aproximadas podem ser escritas como:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) em (4.8) temos:

$$EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = F \quad (4.11)$$

assim, a equação diferencial parcial foi substituída por uma equação aproximada nas variáveis u_1 e u_2 . O problema agora reduz-se a determinar valores apropriados para u_1 e u_2 . Diversas técnicas aqui descritas, como colocação, subdomínio, Galerkin ou mínimos quadrados, podem ser utilizadas. Das mencionadas, Galerkin é a mais amplamente utilizada, e será a técnica aqui empregada. O método, como já mencionado, consiste em multiplicar as equações (4.11) pelas funções de forma e integrar o resíduo resultante sobre o elemento. Assim:

$$\int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} F dx \quad (4.12)$$

Integrando por partes a equação acima obtemos:

$$\int N_i \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx = - \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx + \text{termos referentes às condições de contorno} \quad (4.13)$$

onde as condições de contorno serão ignoradas por enquanto. Assim, a equação (4.12) fica:

$$EA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = F \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx \quad (4.14)$$

Avaliando as integrais, temos:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

O caso acima refere-se a uma barra com carregamento distribuído F atuando ao longo da barra. Para o caso em que o carregamento somente é aplicado nos nós, temos:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

ou em notação matricial:

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (4.17)$$

onde $[K]$ é chamada de matriz de rigidez do elemento.

Considerando agora o caso em que a barra não tem a sua movimentação longitudinal restrita, as forças de corpo para o elemento de barra são agora dadas pela segunda lei de Newton. Se a massa por unidade de volume é expressa por ρ , a equação diferencial agora é dada por:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

Aplicando elementos finitos, o primeiro termo em (4.18) é claramente igual a $[K]$. O segundo termo toma a forma

$$- \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} dx \quad (4.19)$$

ou ainda:

$$- \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Resolvendo a integral, temos:

$$- \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

ou em notação matricial:

$$[K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{0\} \quad (4.22)$$

onde $[M]$ é chamada de matriz de massa do elemento, ou matriz de inércia do elemento. Note que $[M]$, como deduzida aqui, é a matriz de massa “consistente”, e difere da sua equivalente “concentrada”, que levaria a termos iguais a $\frac{1}{2}\rho AL$ na diagonal da matriz e nulos fora da diagonal. Assim, o termo inercial da equação (4.18) ficaria:

$$-\rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

4.3.2 Elemento de Viga com Quatro Graus de Liberdade

O segundo elemento unidimensional é a viga mostrada na figura abaixo. Os nós das extremidades 1 e 2 são sujeitos a forças cortantes e momentos, que resultam em movimentos de rotação e translação. Desta forma, cada nó tem dois graus de liberdade.

O elemento possui comprimento L , rigidez à flexão EI e é submetido a um carregamento transversal q por unidade de comprimento. As equações de equilíbrio do elemento são dadas pela equação:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = q \quad (4.24)$$

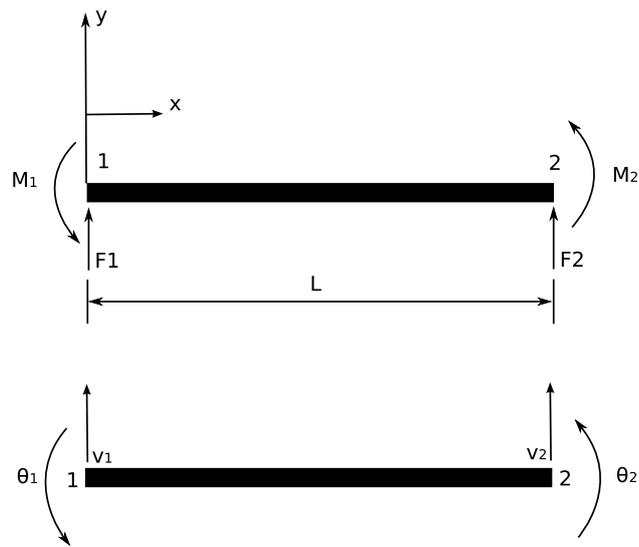


Figura 4.2: Elemento de viga com quatro graus de liberdade.

Novamente, a variável contínua (no caso v) é aproximada em termos dos valores nodais, porém agora não somente v mas também suas derivadas são utilizadas nas aproximações. Assim, podemos escrever:

$$v \simeq \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

onde $\theta_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ no nó 1 e assim sucessivamente. Neste caso, a equação (4.25) pode ser escrita de forma exata através de uma função de forma cúbica:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{L^3} (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \\
N_2 &= \frac{1}{L^2} (L^2x - 2Lx^2 + x^3) \\
N_3 &= \frac{1}{L^3} (3Lx^2 - 2x^3) \\
N_4 &= \frac{1}{L^2} (x^3 - Lx^2)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Note que as funções de forma têm a propriedade de apresentar derivada unitária no nó correspondente e nula nos demais. Substituindo em (4.24) e aplicando o método de Galerkin, obtém-se as equações para o elemento:

$$\int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} q dx \tag{4.27}$$

Novamente, o teorema de Green é utilizado para evitar a diferenciação quatro vezes. Por exemplo:

$$\int N_i \frac{\partial^4 N_j}{\partial x^4} dx = - \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial^3 N_j}{\partial x^3} dx = \int \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx + \text{termos referentes às c.c.} \tag{4.28}$$

Assim, assumindo que EI e q não são funções de x , a equação (4.27) fica

$$EI \int_0^L \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = q \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} dx \quad (4.29)$$

Resolvendo as integrais obtém-se:

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \text{Sim} & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = q \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

O caso acima foi obtido para um carregamento uniformemente distribuído na viga. Para o caso de um carregamento aplicado somente nos nós da estrutura temos

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \text{Sim} & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Em notação matricial temos:

$$[K]\{v\} = \{F\} \quad (4.32)$$

Se o elemento de viga vibra transversalmente, o mesmo é submetido a uma força restauradora de magnitude $-\rho A (\partial^2 v / \partial t^2)$, ou seja:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\rho A (\partial^2 v / \partial t^2) \quad (4.33)$$

A matriz de massa ou inércia do elemento, por analogia à equação (4.20) é:

$$-\rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Resolvendo as integrais obtém-se:

$$-\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ Sim & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

ou em notação matricial:

$$[K]\{v\} + M\{\ddot{v}\} = \{0\} \quad (4.36)$$

Se a viga é submetida a uma força axial adicional P , uma modificação simples na equação (4.24) resulta na equação diferencial

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \pm P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = q \quad (4.37)$$

onde o sinal positivo corresponde a carga de compressão. A discretização por elementos finitos e a aplicação do método de Galerkin leva à obtenção de uma matriz adicional, associada às contribuições das forças axiais:

$$\mp P \int_0^L \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (4.38)$$

Resolvendo as integrais obtém-se:

$$+ P \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ & & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ Sim & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ ov_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Denominando a matriz obtida em (4.39) por $[KP]$, temos em notação matricial

$$([K] - [KP])\{v\} = \{F\} \quad (4.40)$$

4.3.3 Elemento de Viga com Seis Graus de Liberdade

Combinando-se a solução unidimensional para uma barra submetida a carregamento axial com a solução bidimensional para um elemento de viga, e aplicando o método de Galerkin, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ Sim & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

A matriz da equação (4.41) é chamada de matriz de rigidez elástica do elemento.

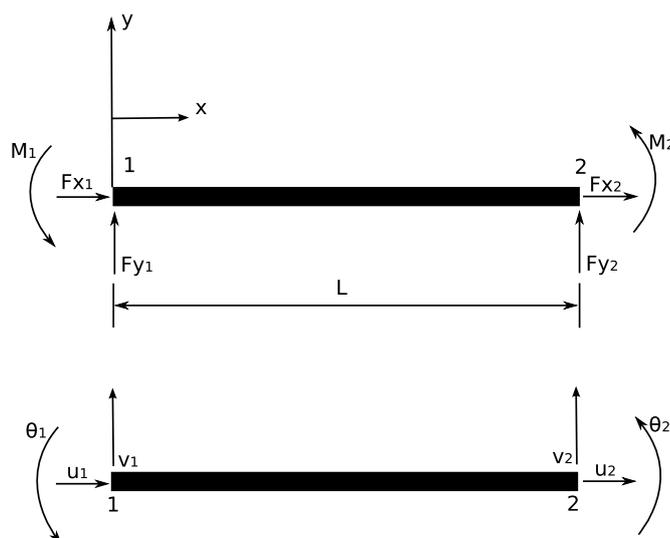


Figura 4.3: Elemento de viga com seis graus de liberdade.

Considerando os termos de inércia do elemento de barra e do elemento de viga combinados, obtém-se:

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & -156 & -22L \\ Sim & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

A matriz (4.42) é chamada matriz de massa consistente, e considera a massa do elemento distribuída ao longo do mesmo.

Capítulo 5

Processamento Paralelo

Processamento paralelo consiste na execução simultânea de uma mesma tarefa – dividida e especialmente adaptada – em múltiplos processadores, de forma a se obter o resultado de um cálculo numérico mais rapidamente. A idéia baseia-se no fato de que o processo de resolução de um problema pode ser dividido em tarefas menores, que por sua vez podem ser realizadas de forma simultânea, com alguma forma de coordenação entre as mesmas.

Existem diversos tipos diferentes de arquiteturas paralelas. Estas são diferenciadas pelo tipo de interconexão entre os processadores – também chamados de elementos de processamento, EPs – e entre os processadores e a memória. Quanto ao arranjo físico, tradicionalmente os sistemas computacionais paralelos são divididos em:

- Sistemas multiprocessados – denominação comumente empregada para designar o uso de diversos processadores em um único sistema. Neste tipo de arquitetura, a comunicação de dados entre os EPs pode ser feita através de um espaço de memória comum aos mesmos (*Symmetric Multiprocessing*, SMP), por meio de um barramento, através de uma hierarquia de memória híbrida local e compartilhada (*Non-Uniform Memory Access*, NUMA), ou através da recente tecnologia *multicore*, onde mais de um processador e o barramento de comunicação entre

os mesmos são encapsulados em um único chip. Exemplos de sistemas multiprocessados são os supercomputadores Cray T3E, as estações de trabalho Compaq AlphaServer e os sistemas SGI Altix.

- Sistemas distribuídos – também chamados de *clusters*, consistem em sistemas independentes, normalmente interligados entre si por intermédio de um dispositivo de rede – Gigabit Ethernet e Myrinet, como exemplos entre as tecnologias de redes mais recentes. As configurações de *clusters* mais comuns são aquelas formadas por máquinas padrão PC interligadas via rede ethernet, sob o sistema operacional Linux.

Dentro desta classificação básica, existem ainda arquiteturas híbridas, como *clusters* compostos por máquinas multiprocessadas.

Existe ainda um outro tipo de sistema distribuído, onde os EPs individuais não são máquinas dedicadas, e a interconexão entre os mesmos é feita tanto por rede locais – *Local Area Network* ou LAN – como por redes abertas – *Wide Area Network* ou WAN – ou até mesmo via Internet. Tal arquitetura é denominada *grid* ou *computer farm*, e seu crescente desenvolvimento engloba aplicações como modelagem climática e sequenciamento de DNA. Um exemplo de *grid* é o projeto *SETI@home*¹.

Sistemas multiprocessados usualmente oferecem uma melhor performance e são fisicamente mais compactos do que sistemas distribuídos, porém são historicamente mais caros e apresentam obsolescência elevada. Sistemas distribuídos, por sua vez, normalmente são compostos por hardware comum, apresentando baixo custo, facilidade de expansão e atualização. Com o avanço da tecnologia de redes, a diferença de performance entre sistemas multiprocessados e distribuídos tem apresentado uma diminuição contínua e significativa, fazendo dos sistemas distribuídos a solução padrão da indústria e academia.

Um aspecto relevante para o processamento paralelo diz respeito à forma como são tratados as instruções e o fluxo de dados. A classificação proposta por Flynn

¹<http://setiathome.ssl.berkeley.edu>



Figura 5.1: Supercomputador Cray YMP



Figura 5.2: *Cluster* de PCs

(1972) diferencia sistemas paralelos e seriais de acordo com a forma como as tarefas concorrentes são realizadas. As quatro classificações básicas propostas por Flynn são:

- *Single Instruction, Single Data* (SISD) – um computador sequencial que não é capaz de explorar o paralelismo, tanto em instruções como em fluxo de dados. Exemplos de arquiteturas SISD são maquinas uniprocessadas tradicionais, como PCs comuns ou antigos servidores.
- *Multiple Instruction, Single Data* (MISD) – incomuns, devido ao fato de que fluxo múltiplo de instruções geralmente requer um fluxo múltiplo de dados para serem efetivos. No entanto, este tipo de arquitetura é usado quando se deseja redundância, como por exemplo em sistemas aeronáuticos embarcados.
- *Single Instruction, Multiple Data* (SIMD) – um sistema computacional que explora fluxo de dados múltiplos através de instruções únicas, para processar tarefas que podem ser naturalmente paralelizadas. Por exemplo, um computador vetorial.
- *Multiple Instruction, Multiple Data* (MIMD) – múltiplos processadores autônomos que executam simultaneamente diferentes instruções sobre diferentes conjuntos de dados. Sistemas distribuídos como *clusters* de computadores são geralmente classificados como arquiteturas MIMD, tanto utilizando um espaço de memória comum como espaço de memória distribuída.

Existe ainda uma extensão comum à classificação acima, denominada *Single Program, Multiple Data* (SPMD), onde múltiplos processadores autônomos executam simultaneamente o mesmo conjunto de instruções – porém em pontos independentes – em conjuntos diferentes de dados.

5.1 Aceleração de Desempenho ou *Speed-up*

O processamento paralelo normalmente é empregado de forma cooperativa, para acelerar a solução de um determinado problema através da distribuição da carga computacional entre diversos EPs. Diversos fatores influenciam o desempenho global da solução: a arquitetura física do sistema computacional paralelo, os algoritmos empregados na solução do problema, e até mesmo o tipo de problema em questão.

Em processamento paralelo, o termo granularidade refere-se à relação entre quantidade de processamento e volume de comunicação de dados. Paralelismo de granularidade fina significa que as tarefas individuais são relativamente pequenas em termos de tamanho de código e tempo de execução, ou seja, tarefas pequenas para um conjunto de dados grande. Paralelismo de granularidade grosseira tem o significado oposto. Problemas com características de granularidade fina têm um maior potencial de paralelização e, portanto, de melhoria de desempenho computacional. Porém, devido à quantidade elevada de dados que precisam ser trocados entre os EPs, têm maiores custos de comunicação e sincronização. Assim, o tipo de arquitetura computacional deve contemplar o tipo de problema a ser resolvido.

Deve-se salientar que a aceleração do desempenho através do processamento paralelo não segue uma tendência linear, ou seja, se uma tarefa é realizada em um dado tempo total com um processador, a mesma tarefa não será realizada em um décimo do tempo quando se utilizam dez processadores. Na prática, aceleração de desempenho ou *speed-up* linear é muito difícil de ser atingido, devido ao fato de que muitos algoritmos serem essencialmente seqüenciais por natureza.

Sistemas computacionais paralelos são modelados de forma teórica ignorando-se o custo de comunicação entre as unidades de processamento que o constituem. Esta simplificação, embora longe da realidade, é útil no sentido de fornecer um limite superior na capacidade de resolução paralela de um dado problema. Os limites superiores de desempenho podem assim serem estimados através da Lei de Amdahl.

A Lei de Amdahl é comumente utilizada para se determinar a máxima melhoria

de desempenho esperada em um sistema global quando somente parte deste sistema é melhorada. De uma forma simplificada, a Lei de Amdahl indica que é o algoritmo que determina o *speed-up*, não o número de processadores. Eventualmente, não é obtido nenhum ganho significativo com uma maior paralelização do algoritmo.

A Lei de Amdahl fornece o máximo desempenho a ser obtido, quando a melhoria em uma fração P do processo afeta somente uma porção S do processo total:

$$\frac{1}{(1 - P) + \frac{P}{S}} \quad (5.1)$$

Para o caso especial de processamento paralelo, a Lei de Amdahl indica que, se F é a porção seqüencial do algoritmo que não pode ser beneficiada com a paralelização, e $(1 - F)$ é a porção paralelizável, então o máximo *speed-up* que pode ser atingido utilizando-se N processadores é:

$$\frac{1}{F + (1 - F)/N} \quad (5.2)$$

No limite quando N tende a infinito, o máximo *speed-up* tende a $1/F$. Na prática, a relação custo/performance cai rapidamente quando N aumenta, pois $(1 - F)/N$ é pequeno comparado a F .

Por exemplo, se F é 10%, o problema pode ser acelerado somente até um fator de 10, independentemente do número de processos N utilizados. Por essa razão, o processamento paralelo somente é vantajoso para pequeno número de processadores, ou problemas com baixos valores de F . Uma grande parcela na tarefa de elaborar

algoritmos paralelos consiste na tentativa de reduzir F para o menor valor possível.

5.2 Modelos de Programação Paralela

Normalmente, os algoritmos computacionais devem ser redesenhados para a obtenção da máxima eficiência paralela possível. Diversas abordagens têm sido criadas, tanto no nível do sistema operacional como através de softwares específicos. Os sistemas paralelos devem prover mecanismos para o particionamento do problema em tarefas menores a serem alocadas para os EPs. Estes mecanismos podem fornecer tanto paralelismo implícito – o sistema paralelo, através de um compilador ou outro programa particiona o problema e aloca as tarefas aos EPs automaticamente – ou paralelismo explícito, onde o programador deve informar como o problema deve ser particionado. A maioria das implementações também fornece meios para sincronização de tarefas, para permitir aos processos dividir recursos sem conflitos entre os mesmos.

Um modelo de programação paralela é um conjunto de tecnologias de software utilizadas como ferramentas nos algoritmos paralelos, contemplando o tipo de sistema paralelo onde será implementado. Este modelo engloba aplicativos, linguagens de programação, compiladores, bibliotecas, sistemas de comunicação e mecanismos de entrada/saída de dados. Para o desenvolvimento do algoritmo, deve-se escolher o modelo de programação paralela apropriado à aplicação – ou uma combinação de modelos – para uma plataforma em particular.

Os modelos paralelos podem ser implementados de diversas formas: como chamadas a bibliotecas de software a partir de um código seqüencial tradicional, como extensões à linguagem de programação, ou como modelos de execução completamente novos. São também categorizados de acordo com o tipo de sistema paralelo onde são implementados: sistemas de memória distribuída ou de memória compartilhada, embora atualmente seja comum existir implementações comuns aos dois tipos de sistemas, fazendo com que estas definições não sejam tão rígidas.

Atualmente, os modelos de programação paralela mais difundidos são:

- PVM² – *Parallel Virtual Machine* (PVM) é um conjunto de ferramentas de software desenvolvido para sistemas distribuídos. Foi desenvolvido de forma a permitir que uma rede de máquinas, heterogêneas ou similares, possa ser utilizada como um único EP paralelo distribuído. A primeira versão do PVM foi desenvolvida em 1989, sofrendo continuas melhorias até por volta da metade dos anos 1990. Embora na atualidade o PVM não seja mais ativamente desenvolvido, ainda é considerado um passo significativo em direção às tendências modernas acerca de processamento paralelo distribuído e *grid computing*.
- MPI³ – *Message Passing Interface* (MPI) é um protocolo de comunicação entre sistemas distribuídos. Atualmente, é o modelo padrão da indústria e academia para comunicação de dados entre EPs dedicados à programação paralela. Consiste em uma biblioteca de rotinas que podem ser invocadas em códigos escritos nas linguagens FORTRAN, C, C++ e ADA. As principais vantagens do MPI sobre bibliotecas paralelas anteriores são tanto portabilidade (foi desenvolvido para praticamente todas as arquiteturas distribuídas existentes) como velocidade (cada implementação foi otimizada para o tipo de arquitetura onde será executada).
- OpenMP⁴ – O modelo OpenMP consiste em um conjunto de diretivas de compilação em linguagem C/C++ e/ou FORTRAN, rotinas de bibliotecas e variáveis de ambiente que influenciam o comportamento em tempo de execução do código computacional. Foi desenvolvido especificamente para arquiteturas multiprocessadas de memória compartilhada, por intermédio de um grupo constituído pelos principais fabricantes de hardware e software. O OpenMP é uma solução portátil, simples e flexível para o desenvolvimento de aplicativos paralelos. Muitas

²<http://www.csm.ornl.gov/pvm>

³<http://www.mpi-forum.org>

⁴<http://www.openmp.org>

vezes, em arquiteturas híbridas como *clusters* de máquinas multiprocessadas, é utilizado conjuntamente com o MPI.

O OpenMP trata o paralelismo basicamente nos trechos do código compostos por laços ou *loops*. No início de cada *loop*, uma diretiva de compilação estabelece que o mesmo deve ser desmembrado e os componentes de dados sejam distribuídos entre os EPs, aqui denominados *threads*, para execução do código. Esta abordagem muitas vezes é chamada de paralelismo de dados, ou *data parallelism*. Os trechos do código que não são compostos por loops são executados de forma seqüencial pelo EP principal, chamado de *master thread*, o que em princípio limita o desempenho da execução. Uma grande vantagem do OpenMP é que o mesmo código paralelo pode também ser executado em uma arquitetura serial, sem qualquer alteração no código fonte, pois as diretivas de compilação são tratadas como comentários. Isto possibilita portabilidade e facilidade de manutenção do código.

O MPI, por sua vez, exige que tanto o fluxo de dados como as tarefas sejam explicitamente divididas pelo programador, através de chamadas às rotinas da biblioteca MPI. A comunicação é feita através de troca de mensagens entre os processos, que pode ser feita tanto ponto a ponto – ou seja, diretamente entre dois EPs – como coletivamente – de um EP para vários outros, de vários para um, ou de vários para vários. Esta comunicação usualmente se dá através de interfaces de rede. Por esse motivo, cuidados devem ser tomados para minimizar a comunicação, tanto em quantidade de mensagens como no volume de informação, devido à alta latência de comunicação destas interfaces, se comparado à capacidade de processamento dos EPs atuais. Embora o MPI apresente uma desvantagem em termos de complexidade do código computacional, permite uma maior flexibilidade em termos de algoritmos em relação ao OpenMP – o código pode ser implementado tanto seguindo uma filosofia de *data parallelism* como de *task parallelism*, ou paralelismo de tarefas, ou uma combinação de ambas. Outro destaque importante é que o OpenMP é utilizado especificamente em sistemas de memória compartilhada. Já o MPI pode ser utilizado tanto em arquiteturas de memória distribuída como de

memória compartilhada, sem alteração do código. Neste caso, beneficia-se da baixa latência de comunicação oferecida pela arquitetura compartilhada, várias ordens de grandeza inferior à obtida até mesmo pelas interfaces de rede mais rápidas existentes na atualidade.

O envio e recebimento de mensagens de dados pelos EPs é o mecanismo básico de comunicação do MPI. As operações de comunicação ponto a ponto podem ser resumidas nas seguintes:

- **Send** – o processo de origem aguarda a sinalização para envio dos dados, e envia-os para o processo de destino;
- **Receive** – o processo de destino aguarda a sinalização para recebimento dos dados, e recebe-os do processo de origem;

Com apenas estas duas operações, a princípio já torna-se possível explorar o paralelismo do código computacional. É importante salientar que para cada operação de envio é associada uma operação de recebimento. Por isso, é importante a ordem no envio de dados, uma vez que uma operação *Send* só é considerada completada quando já existe uma sinalização para uma operação de *Receive* correspondente. Caso não seja tomado cuidado, pode ocorrer uma situação de *deadlock*, ou seja, as comunicações são bloqueadas pela existência de operações de envio e recebimento pendentes.

Apesar das rotinas de comunicação ponto a ponto atenderem às necessidades gerais de comunicação de dados entre os processos, é possível otimizar as mesmas pelo uso de comunicação coletiva. A comunicação coletiva é realizada entre grupos de processos. As subrotinas de comunicação coletiva mais utilizadas são as seguintes:

- **Broadcast** – envio dos dados de um membro do grupo de comunicação para todos os demais membros;
- **Gather** – recebimento dos dados de todos os membros do grupo para somente um membro;

- **Scatter** – distribuição dos dados de um membro do grupo para todos os demais;
- **Reduction** – o resultado de uma operação com os dados de todos os grupos é enviado para um ou todos os membros do grupo de comunicação;

A Figura 5.3 apresenta um código paralelo OpenMP escrito em FORTRAN, para o cálculo do produto escalar de dois vetores a e b . Note que, exceto pelas diretrizes de compilação `!$OMP PARALLEL DO` e `!$OMP END PARALLEL DO`, o código paralelo é exatamente igual ao código serial equivalente. Na verdade, se o programa for compilado em um ambiente sem suporte ao OpenMP, as diretrizes de compilação serão tratadas como comentários no código, e ignoradas pelo compilador.

O código da Figura 5.4 é equivalente ao da Figura 5.3, porém utiliza o MPI para a distribuição da carga de processamento. Note que os dados devem ser explicitamente distribuídos entre os processos. O código neste caso é consideravelmente mais complexo que o código OpenMP, tornando mais difícil a elaboração, depuração e manutenção do mesmo.

O código MPI apresentado na Figura 5.4 apresenta apenas chamadas a subrotinas de comunicação coletiva, ou seja, envolve grupos de processos, ao invés de comunicação ponto a ponto, através do envio explícito da mensagem para determinado EP. Cada processo recebe um identificador único quando da inicialização paralela, através da chamada à subrotina `MPI_INIT`. O identificador (ou *rank*) do processo pode ser acessado através da chamada à subrotina `MPI_COMM_RANK`, e o número total de processos através de `MPI_COMM_SIZE`. Todas as operações são realizadas dentro de um grupo denominado comunicador – no presente caso identificado por `MPI_COMM_WORLD`. Usualmente, só é criado um comunicador para o envio e recebimento de dados, ao longo da execução de todo o código paralelo.

O código fonte é acessado por todos os processos, e a diferenciação quando às operações a serem realizadas é feita através do *rank* do processo. Note que, a menos que haja uma operação de troca de mensagens dentro de um condicional, a não ocorrência

```
c234567
  program dotomp
  integer i,n
  real a(10),b(10),dot

  n=10
  data a/0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.0/
  data b/0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.0/

  dot=0.0

!$OMP PARALLEL DO REDUCTION(+:dot)
  do i=1,n
    dot=dot+a(i)*b(i)
  end do
!$OMP END PARALLEL DO

  write(*,*)'dot',dot

  stop
  end
```

Figura 5.3: Exemplo de código FORTRAN com paralelização via OpenMP

de *deadlocks* é automaticamente satisfeita quando a comunicação coletiva no MPI é empregada.

```
c234567
  program dotmpi
  include 'mpif.h'
  integer i,n,rank,nproc,ierr,world,size
  real a(10),b(10),dot,a_loc(10),b_loc(10),dot_loc

  call MPI_INIT(ierr)
  world=MPI_COMM_WORLD
  call MPI_COMM_SIZE(world,nproc,ierr)
  call MPI_COMM_RANK(world,rank,ierr)

  if (rank.eq.0) then
    n=10
    data a/0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.0/
    data b/0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.0/
  endif

  call MPI_BCAST(n,1,MPI_INTEGER,0,world,ierr)

  size=n/nproc
  call MPI_SCATTER(a,size,MPI_REAL,a_loc,size,MPI_REAL,0,world,ierr)
  call MPI_SCATTER(b,size,MPI_REAL,b_loc,size,MPI_REAL,0,world,ierr)

  dot_loc=0.0
  do i=1,size
    dot_loc=dot_loc+a_loc(i)*b_loc(i)
  end do

  call MPI_ALLREDUCE(dot_loc,dot,1,MPI_REAL,MPI_SUM,world,ierr)

  write(*,*)'rank,dot',rank,dot

  call MPI_FINALIZE(ierr)

  stop
end
```

Figura 5.4: Exemplo de código FORTRAN com paralelização via MPI

Capítulo 6

Modelamento do Riser

6.1 Modelo Estrutural do Riser

A metodologia aqui descrita é a proposta por PATEL e WITZ (1991) apud FERRARI (1998). Como uma viga, um riser é submetido a deslocamentos e rotações devido a carregamentos axiais e laterais. Considerando o elemento infinitesimal mostrado na Figura 6.1, um riser pode ser modelado como um tubo de seção circular, submetido aos seguintes carregamentos:

- Tensão axial e cisalhamento nas paredes do tubo;
- Força horizontal devido à resultante das pressões hidrostáticas externa e interna;
- Força vertical devido à resultante das pressões hidrostáticas externa e interna;
- Peso do elemento, agindo na direção vertical;
- Força horizontal devido ao carregamento hidrodinâmico.

6.1.1 Análise estática

A análise estática do riser fornece a deflexão do riser, considerando um carregamento constante ao longo do comprimento do mesmo. O carregamento é calculado utilizando-se um perfil de velocidades prescrito e um coeficiente de arrasto constante. Esta etapa

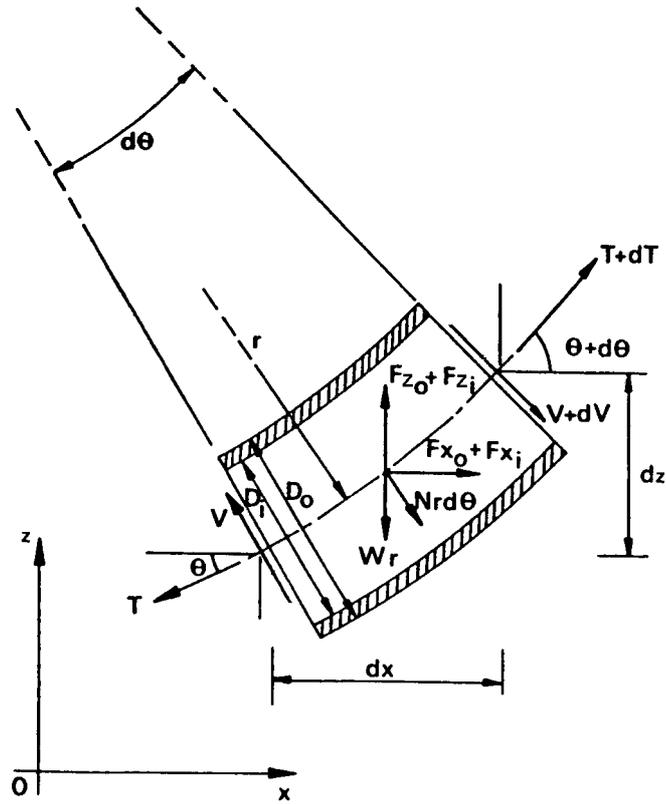


Figura 6.1: Elemento infinitesimal de um riser. Extraído de FERRARI (1998)

é necessária para o cálculo da matriz de amortecimento da estrutura, como será visto mais adiante.

Considerando apenas carregamentos estáticos, com um carregamento hidrodinâmico constante devido somente ao arrasto, podemos somar as componentes das forças acima descritas com se segue:

$$\text{direção } x: \sum F_x = 0$$

$$(T + dT) \cos(\theta + d\theta) - T \cos \theta + (V + dV) \sin(\theta + d\theta) - V \sin \theta + (F_{x0} + F_{xi}) + N \sin \theta r d\theta = 0 \quad (6.1)$$

$$\text{direção } y: \sum F_y = 0$$

$$(T + dT) \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta - (V + dV) \cos(\theta + d\theta) + V \cos \theta + (F_{y0} + F_{yi}) - W + N \cos \theta r d\theta = 0 \quad (6.2)$$

Considerando deslocamentos rotacionais $d\theta$ pequenos, as equações podem ser simplificadas como:

$$- (T \operatorname{sen}\theta - V \cos\theta) d\theta + dT \cos\theta + dV \operatorname{sen}\theta + (F_{x_o} + F_{x_i}) + N \operatorname{sen}\theta r d\theta = 0 \quad (6.3)$$

$$(T \cos\theta + V \operatorname{sen}\theta) d\theta + dT \operatorname{sen}\theta - dV \cos\theta + (F_{y_o} + F_{y_i}) - W - N \cos\theta r d\theta = 0 \quad (6.4)$$

Multiplicando a equação (6.3) por $\operatorname{sen}\theta$ e (6.4) por $\cos\theta$, e combinando-as, obtém-se:

$$T d\theta - dV + (F_{y_i} + F_{y_o} - W) \cos\theta - (F_{x_o} + F_{x_i}) \operatorname{sen}\theta - N r d\theta = 0 \quad (6.5)$$

Considerando a pressão, a área da seção transversal e o peso específico do fluido, pode-se deduzir as seguintes equações:

$$F_{x_o} + F_{x_i} = [(p_i A_i - p_o A_o) + (\gamma_i A_i - \gamma_o A_o) r (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta d\theta)] \operatorname{sen}\theta d\theta \quad (6.6)$$

$$F_{y_o} + F_{y_i} = [(p_o A_o - p_i A_i) + (\gamma_o A_o - \gamma_i A_i) r (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta d\theta)] \cos\theta d\theta \quad (6.7)$$

onde os subscritos i e o referem-se às propriedades consideradas na parte interna e externa da seção do riser, respectivamente. Substituindo as equações (6.6) e (6.7) em (6.5) obtemos:

$$(T + p_o A_o - p_i A_i) d\theta - dV + ((\cos \theta - \text{sen}\theta d\theta) (\gamma_o A_o - \gamma_i A_i) - \gamma_s A_s \cos \theta - N) r d\theta = 0 \quad (6.8)$$

onde o subscrito s refere-se às propriedades da parede do riser, e:

$$W = \gamma_s A_s r d\theta \quad (6.9)$$

Transformando a equação (6.8) em coordenadas polares, e assumindo que o riser é submetido a deflexões não desprezíveis ($ds \neq dx$ e $\theta \neq d\theta$), temos:

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (6.10)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (6.11)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{d(\arctan dy/dx)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (6.12)$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dV}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1/2} \quad (6.13)$$

Dividindo a equação (6.13) por ds , temos:

$$\begin{aligned} & (T + p_o A_o - p_i A_i) \frac{d^2y}{dx^2} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-1} - \frac{dV}{dx} + (\gamma_o A_o - \gamma_i A_i - \gamma_s A_s) - \\ & N \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

A equação (6.14) é a equação geral estática do riser. O termo $(T + p_o A_o - p_i A_i)$ é chamado de tração efetiva, e engloba a tensão axial e os efeitos laterais do diferencial das pressões externa e interna. O termo $(\gamma_o A_o - \gamma_i A_i - \gamma_s A_s)$ representa o peso por unidade de comprimento do riser e seu conteúdo, e leva em consideração efeitos de empuxo.

A equação (6.14) pode ser simplificada para o caso de um riser quase vertical, assumindo que as deflexões sejam pequenas. Baseado na equação de deflexão de uma viga,

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2x}{dy^2} \right) \quad (6.15)$$

onde E é o Módulo de Young, I o momento de inércia e EI a rigidez à flexão do riser.

Multiplicando (6.14) por (dx/dy) , usando a equação (6.15) e assumindo pequenas deflexões, temos:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2x}{dy^2} \right) - (T + p_o A_o - p_i A_i) \frac{d^2x}{dy^2} = N - (\gamma_s A_s + \gamma_i A_i - \gamma_o A_o) \frac{dx}{dy} \quad (6.16)$$

A equação (6.16) é a equação diferencial para um riser vertical submetido a um carregamento estático devido à corrente. O sistema de coordenadas global considera y medido a partir da base do riser, enquanto x é a deflexão do riser na direção da corrente. No caso acima, consideramos a corrente alinhada com o eixo x . Mais tarde, quando da análise dinâmica do riser, o movimento das seções do mesmo será considerado como um movimento plano, a ser decomposto tanto na direção transversal como na longitudinal, utilizando equações semelhantes à obtida para cada uma das direções.

Considerando agora o riser como uma viga submetida a esforços axiais (peso próprio e tração) e transversais (corrente), podemos aplicar o método de Galerkin à equação anterior conforme deduzido no Capítulo 4. Analisando a equação (6.16), nota-se que o termo referente à tração efetiva é equivalente ao segundo termo da equação (4.37). Reescrevendo este termo, temos por comparação à equação (4.39):

$$[KG(d)] = \pm \frac{(T + p_o A_o - p_i A_i)}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ Sim & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

onde o sinal positivo indica tração e o negativo compressão. A matriz em (6.17) é denominada matriz de rigidez geométrica do elemento, e é uma função da força axial no elemento.

A matriz (4.41), repetida abaixo, é também chamada de matriz de rigidez elástica do elemento, e refere-se a um sistema de coordenadas cujo eixo x coincide com o eixo axial do elemento.

$$[KE] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \text{Sim} & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Combinando a equação (6.18) com a equação (6.17), e transformando para um sistema de coordenadas global, obtemos a equação básica para um riser rígido, com a forma geral

$$([KE] + [KG(d)]) \{d\} = \{F\} \quad (6.19)$$

onde $[KE]$ é a matriz de rigidez elástica global, e $[KG(d)]$ é a matriz de rigidez geométrica global, formadas pela montagem das matrizes de rigidez elástica e geométrica para cada elemento. A soma destas duas matrizes produz a matriz de rigidez global do sistema.

O vetor $\{d\}$ é o vetor de deslocamentos, composto por dois graus de liberdade de translação e um de rotação, para cada nó:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \Theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

O vetor de carregamento $\{F\}$ é composto pelas forças longitudinais (peso próprio), transversais (arrasto e inércia devido à corrente) e momentos fletores em cada nó:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wL/2 \\ qL/2 \\ qL^2/12 \\ -wL/2 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

onde w é o peso por unidade de comprimento da seção considerada, L o comprimento da mesma e q o carregamento estático no elemento.

Geralmente, é conveniente adotar um sistema de coordenadas global nos quais a deflexão da viga é determinada. Para isso, pode-se adotar a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i &= u_i \cos \beta + v_i \operatorname{sen} \beta \\
\bar{v}_i &= u_i \operatorname{sen} \beta + v_i \cos \beta \\
\bar{\theta}_i &= \theta_i
\end{aligned} \tag{6.22}$$

onde β representa o ângulo formado entre o eixo global x e o eixo local axial, medido no sentido anti-horário. Aplicando a transformação, obtém-se a matriz de rigidez elástica global $[KE]$:

$$[KE] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} Rc^2 + \frac{12}{L^2}s^2 & \left(R - \frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s & -Rc^2 - \frac{12}{L^2}s^2 & \left(-R + \frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s \\ & Rs^2 + \frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c & \left(-R + \frac{12}{L^2}\right)cs & -Rs^2 - \frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c \\ & & 4 & \frac{6}{L}s & -\frac{6}{L}c & 2 \\ & & & Rc^2 + \frac{12}{L^2}s^2 & \left(R - \frac{12}{L^2}\right)cs & \frac{6}{L}s \\ & \operatorname{Sim} & & & Rs^2 + \frac{12}{L^2}c^2 & -\frac{6}{L}c \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

onde R é a razão entre a área da seção transversal A e o momento de inércia I , e c e s são respectivamente o cosseno e o seno do ângulo β .

A matriz de rigidez geométrica global $[KG(d)]$ é escrita como:

$$[KG(d)] = \pm \frac{(T + p_o A_o - p_i A_i)}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s & -\frac{6}{5}s^2 & \frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s \\ & \frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c & \frac{6}{5}sc & -\frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c \\ & & \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10}s & -\frac{L}{10}c & -\frac{L^2}{30} \\ & & & \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & \frac{L}{10}s \\ & Sim & & & \frac{6}{5}c^2 & -\frac{L}{10}c \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

A tração T é calculada como o peso do riser no ar por unidade de comprimento. Assim, a mesma é calculada como:

$$T(y) = T_{topo} - \gamma_s A_s (y_{topo} - y) \quad (6.25)$$

Nota-se que a solução estática do riser vertical é não-linear, uma vez que a matriz de rigidez geométrica é função dos deslocamentos dos nós, exigindo portanto uma solução iterativa. De fato, a tensão axial T no elemento depende da deformação a que o mesmo é submetido. Para a solução iterativa, é utilizado neste trabalho o Método da Secante da Rigidez, conforme descrito em FERRARI (1998).

6.1.2 Análise Dinâmica

Segundo BATHE (1982) apud MOURELLE (1993), a resposta dinâmica de uma estrutura difere da resposta estática devido à presença de efeitos inerciais. Um carregamento constante ao longo do tempo não é capaz de despertar efeitos de inércia, a não ser que

seja aplicado de forma repentina como uma carga de impacto. A possibilidade de uma estrutura responder dinamicamente a um dado carregamento periódico depende de suas características intrínsecas, traduzidas por seus modos e períodos naturais de vibração. Um sistema estrutural apresenta resposta dinâmica significativa quando o carregamento tem um período ou componente harmônico próximo de um de seus períodos naturais, e uma distribuição espacial não ortogonal ao modo natural correspondente.

Para a análise dinâmica do riser, podemos aplicar a segunda lei de Newton sobre um elemento infinitesimal de massa Δm , como mostrado na Figura 6.2. Para os deslocamentos transversais:

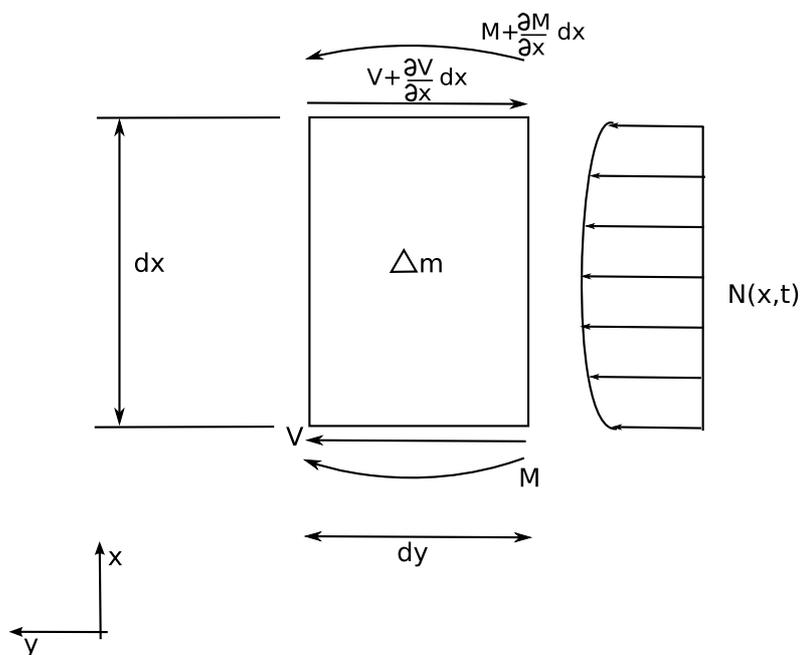


Figura 6.2: Diagrama de corpo livre para um elemento de viga em flexão

$$\Delta m = \rho A dx$$

$$\sum F_y = (\Delta m) a_y \Rightarrow V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + N dx = \Delta m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (6.26)$$

$$\sum M = (\Delta I) \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - V \frac{dx}{2} - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} = 0$$

Assim, temos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} = N(x, t) \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = 0$$

Assumindo $M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ para pequenas curvaturas, e combinando com as equações (6.27), obtém-se:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = N(x, t) \quad (6.28)$$

Se considerarmos que o riser é submetido a uma tração de topo imposta de magnitude T , a equação (6.28) fica:

$$EI(x) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - T(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = N(x, t) \quad (6.29)$$

A equação (6.29) é a equação para o movimento transversal de uma viga submetida a um carregamento forçado, e é válida somente para vigas relativamente longas e finas, como é o caso dos risers. Nota-se que a equação (6.29) é muito semelhante à solução estática para o riser (6.16), exceto pelo termo temporal presente na equação acima, e pela ausência do termo de peso efetivo $(\gamma_o A_o - \gamma_i A_i - \gamma_s A_s) \frac{dx}{dy}$. Segundo SPARKS (1980) apud FERRARI (1998), este termo pode ser considerado desprezível para a vibração em flexão do riser.

A equação acima pode ser resolvida pelo MEF, como descrito no Capítulo 4, aplicando-se o método de Galerkin à equação (6.29), como demonstrado em (4.33).

Da mesma forma que na análise estática, a equação do movimento para um elemento de barra como o da Figura 6.3 pode ser obtida pela segunda lei de Newton:

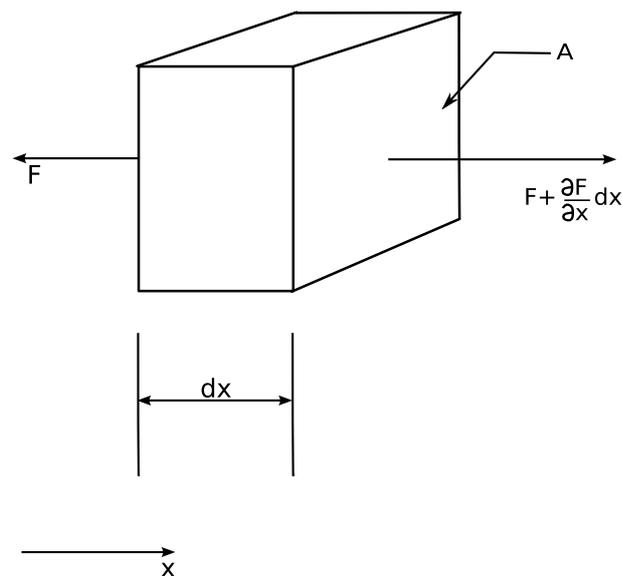


Figura 6.3: Diagrama de corpo livre para um elemento de barra em tração

$$\Sigma F_x = (\Delta m) \ddot{u}(x)$$

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx - F = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Pela lei de Hooke temos:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.31)$$

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

Derivando em relação a x , obtém-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.32)$$

Finalmente, combinando as equações (6.31) e (6.32):

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.33)$$

que difere da solução estática pelo termo temporal.

Novamente, a equação acima pode ser resolvida pelo MEF, aplicando-se o método de Galerkin à equação (6.33), como demonstrado em (4.18).

Os termos dependentes do tempo são modelados como na equação (4.42). Utilizando a transformação de coordenadas dada pelas equações (6.22), obtém-se a matriz de massa global:

$$\rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3}c^2 + \frac{13}{35}s^2 & -\frac{4}{105}cs & -\frac{11}{210}sL & \frac{c^2}{6} + \frac{9}{70}s^2 & \frac{4}{105}cs & \frac{13}{420}sL \\ & \frac{1}{3}s^2 + \frac{13}{35}c^2 & \frac{11}{210}cL & \frac{4}{105}cs & \frac{s^2}{6} + \frac{9}{70}c^2 & -\frac{13}{420}cL \\ & & \frac{1}{105}L^2 & -\frac{13}{420}sL & \frac{13}{420}cL & -\frac{1}{140}L^2 \\ & & & \frac{1}{3}c^2 + \frac{13}{35}s^2 & -\frac{4}{105}cs & \frac{11}{210}sL \\ & & & & \frac{1}{3}s^2 + \frac{13}{35}c^2 & -\frac{11}{210}cL \\ \text{Sim} & & & & & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (6.34)$$

onde c é definido como $\cos \beta$ e s como $\sin \beta$, sendo β o ângulo entre o eixo global x e o eixo local x , medido no sentido anti-horário.

Combinando-se as matrizes elementais advindas do MEF, obtém-se um sistema de equações na forma:

$$[M] \{\ddot{d}\} + [C] \{\dot{d}\} + [K] \{d\} = \{F_{exc}\} \quad (6.35)$$

A equação que descreve a vibração do riser é análoga à de um sistema massa-mola-amortecedor. onde $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ a matriz de amortecimento estrutural

e $[K]$ a matriz de rigidez global (elástica e geométrica) da estrutura. Os vetores $\{d\}$, $\{\dot{d}\}$ e $\{\ddot{d}\}$ são respectivamente os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura, que são considerados separadamente nas direções transversal e *in-line*. O vetor $\{F_{exc}\}$ é a força de excitação hidrodinâmica, que será calculada através do MVD, como descrito mais adiante.

É importante salientar que os deslocamentos do riser são calculados de forma desacoplada, nas direções x e y independentemente. É necessário então resolver dois sistemas de equações na forma da equação (6.35), um na direção do escoamento e outro para a direção transversal ao escoamento:

$$\begin{aligned} [M_x] \{\ddot{x}\} + [C_x] \{\dot{x}\} + [K_x] \{x\} &= \{F_x\} \\ [M_y] \{\ddot{y}\} + [C_y] \{\dot{y}\} + [K_y] \{y\} &= \{F_y\} \end{aligned} \tag{6.36}$$

A maioria dos termos da equação (6.35) já foram desenvolvidos anteriormente, quando da formulação estática do riser, restando apenas a definição da matriz de amortecimento estrutural e o tratamento dos termos dependentes do tempo. No entanto, serão feitas mais algumas simplificações com o intuito de facilitar o cálculo da estrutura.

Como comentado anteriormente, a equação (6.35) se aplica a uma estrutura elástica, modelada como um elemento de viga com seis graus de liberdade. Quando todos os graus de liberdade são considerados para a montagem das matrizes da estrutura, é utilizada a chamada formulação consistente. Embora de um ponto de vista teórico a formulação consistente leve a uma maior precisão para o cálculo da deformação da estrutura, em contrapartida exige um maior esforço computacional e maior uso de memória, pois todos os graus de liberdade da estrutura são considerados. Como alternativa, pode-se utilizar a chamada abordagem concentrada no cálculo das matrizes da estrutura.

Na matriz de massa concentrada, a massa de cada elemento discreto é concentrada sobre as extremidades do elemento, somente os graus de liberdade translacionais são considerados, e os termos fora da diagonal principal da matriz são eliminados, uma vez que a aceleração da massa em cada nó da estrutura somente produz forças de inércia nestes pontos. Desta forma, menos graus de liberdade são envolvidos, levando a uma simplificação da definição das propriedades do elemento. Segundo FERRARI (1998), a utilização da formulação concentrada gera uma diferença da ordem de 3% sobre a formulação global – considerando os seis graus de liberdade – para o problema estático. A matriz de massa concentrada tem a seguinte forma:

$$[M_{LUMPED}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\rho_s A_s + \rho_i A_i) L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (\rho_s A_s + \rho_i A_i) L \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Um riser rígido típico é composto por diversas seções tubulares de aço conectadas entre si, cada uma com um comprimento de cerca de 12 metros. O riser pode ter variações no seu peso imerso ao longo do comprimento, como no caso do emprego de módulos flutuadores em volta de algumas das seções tubulares que o compõem. Tais módulos flutuadores são comumente empregados para diminuir a tração no topo, necessária para evitar a flambagem da estrutura. Neste trabalho, quando aplicável, os elementos flutuadores são modelados através de uma variação do peso linear das seções, ao longo do comprimento do riser.

Na matriz de rigidez concentrada, todos os graus de liberdade horizontais da matriz de rigidez global devem ser segregados. Os graus de liberdade de translação vertical podem ser eliminados, uma vez que as forças verticais não são significantes para o movimento do riser e os termos tanto da rigidez axial como da rigidez flexional não são acoplados na matriz de rigidez global. Assim, a matriz de rigidez global dada por (6.23) e (6.24) pode ser escrita como:

$$[K_{GLOBAL}] = \begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VV} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

onde os subscritos H e VR referem-se aos graus de liberdade horizontal e ao agrupamento entre os graus de liberdade vertical e rotacional, respectivamente. Assim, a equação elástica pode ser escrita como:

$$[K_{GLOBAL}] \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ F_{VR} \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

Eliminando a contribuição das forças verticais e momentos, obtém-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VV} \end{bmatrix}}_{[K_{GLOBAL}]} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

Assim, da equação (6.40) obtemos as seguintes relações:

$$[K_{VRH}] \{D_H\} + [K_{VV}] \{D_{VR}\} = 0 \quad (6.41)$$

Separando os deslocamentos verticais e rotacionais:

$$\{D_{VR}\} = -[K_{VV}]^{-1}[K_{VRH}]\{D_H\} \quad (6.42)$$

Também de (6.40) temos:

$$[K_{HH}]\{D_H\} + [K_{HVR}]\{D_{VR}\} = \{F_H\} \quad (6.43)$$

Combinando (6.42) e (6.43), temos:

$$\underbrace{\left([K_{HH}] - [K_{HRV}][K_{VV}]^{-1}[K_{VRH}]\right)}_{[K_{LUMPED}]} \{D_H\} = \{F_H\} \quad (6.44)$$

Logo, a matriz de rigidez condensada é escrita como:

$$[K_{LUMPED}] = [K_{HH}] - [K_{HRV}][K_{VV}]^{-1}[K_{VRH}] \quad (6.45)$$

Considerando que exista um dispositivo de tensionamento no topo do riser, a matriz de rigidez global é praticamente constante, mesmo com o deslocamento do riser. Assim, a mesma é mantida inalterada ao longo de toda a simulação.

6.1.2.1 Determinação da Matriz de Amortecimento Estrutural

O amortecimento estrutural é resultado da dissipação de energia na estrutura devido aos próprios componentes estruturais, como por exemplo o atrito nas juntas do riser ou ao amortecimento interno do material que constitui a estrutura. Note que o amortecimento viscoso decorrente da viscosidade do fluido ao redor do riser não é contabilizado nesta matriz.

A matriz de amortecimento pode se obtida na forma consistente em um procedimento análogo ao usado na matriz de rigidez consistente mostrado anteriormente. Porém, como visto em CRAIG (1981), PATEL e WITZ (1991) e FERRARI (1998) a tarefa de definir as propriedades de amortecimento do material juntamente com a definição do atrito na juntas que conectam o riser é extremamente difícil e imprecisa, preferindo-se então definir o amortecimento estrutural de uma forma global, considerando o sistema como um todo ao invés da soma de propriedades de elementos individuais.

Uma maneira usualmente utilizada para definir a matriz de amortecimento do sistema é através da aplicação de um método de amortecimento proporcional, também chamado de amortecimento de Rayleigh, que define o amortecimento como:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (6.46)$$

As constantes a_0 e a_1 podem ser escolhidas de forma a produzir o efeito do amortecimento de dois modos de vibrar dados, uma vez que sejam definidos os seus fatores de amortecimento. A matriz de amortecimento é escrita como a soma da matriz de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$, ponderadas pelas constantes a_0 e a_1 .

Considere um riser submetido a uma oscilação livre sem amortecimento. A expressão que descreve o seu movimento é dada por

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{0\} \quad (6.47)$$

Supondo que a oscilação seja harmônica, então todos os deslocamentos nodais também serão harmônicos, na forma

$$\{d\} = \{d_0\} \cos(\omega t - \alpha) \quad (6.48)$$

onde $\{d_0\}$ é o vetor correspondente à amplitude dos deslocamentos, ω a frequência natural e α o ângulo de fase. Substituindo a solução harmônica (6.48) na equação (6.47) temos:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{d_0\} \cos(\omega t - \alpha) = \{0\} \quad (6.49)$$

A equação (6.49) descreve um problema de autovalores generalizado, e para o mesmo tenha uma solução além da trivial é necessário que:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (6.50)$$

A equação (6.50) é chamada de equação característica do sistema. A expansão desta equação fornece um polinômio cujas raízes são os autovalores ω_n^2 , correspondentes ao quadrado das frequências naturais do sistema. Para cada autovalor, existe um autovetor associado, também chamado de modo natural d_n :

$$d_n = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (6.51)$$

O problema de autovalores generalizado é descrito na forma:

$$[A] \{x\} = \lambda [B] \{x\} \quad (6.52)$$

A equação (6.52) tem a mesma forma da equação (6.49), com a constante λ igual a ω^2 . Para problemas onde a matriz $[M]$ é não-singular, pode-se substituir a relação anterior pela equivalente:

$$([M]^{-1} \cdot [K]) \{x\} = \omega^2 \{x\} \quad (6.53)$$

Assumindo que $[K]$ e $[M]$ são simétricas e $[M]$ seja positiva e definida, então $[M]$ tem somente autovalores positivos. A matriz $[M]^{-1}[K]$ não é simétrica, mas pode-se retornar a um problema de autovalores simétrico através da decomposição de Cholesky $[M] = [L][L]^t$, onde a matriz $[L]$ é a parte triangular inferior da matriz $[M]$, e cuja transposta $[L]^t$ corresponde à parte triangular superior. Assim, temos:

$$\begin{aligned} [K] \{x\} &= \omega^2 [L] [L]^t \{x\} \\ [L]^{-1} [K] \{x\} &= \omega^2 [L]^t \{x\} \end{aligned} \tag{6.54}$$

Multiplicando ambos os lados pela matriz identidade $I = [L^t]^{-1}[L^t]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} [L]^{-1} [K] [L^t]^{-1} [L^t] \{x\} &= \omega^2 [L]^t I \{x\} \\ [N] ([L^t] \{x\}) &= \omega^2 ([L^t] \{x\}) \end{aligned} \tag{6.55}$$

onde a matriz $[N] = [L]^{-1}[K][L^t]^{-1}$ é simétrica e cujos autovalores são os mesmos do problema original. Os autovetores correspondentes são $[L^t]x$. Um método eficiente para resolver a matriz $[N]$ é resolver a equação:

$$[Y] [L]^t = [K] \tag{6.56}$$

para a parte triangular inferior da matriz $[Y]$, e a seguir:

$$[L][C] = [Y] \quad (6.57)$$

para a parte triangular inferior da matriz simétrica $[N]$. Sabendo-se os termos da matriz $[N]$, o problema de autovalores é recuperado. Uma metodologia amplamente utilizada para resolver este problema é aplicar em um primeiro estágio o método de Householder, que reduz a matriz $[N]$ a uma matriz tridiagonal, e numa segunda etapa a matriz tridiagonal é fatorizada na forma QR , onde $[Q]$ é a matriz ortogonal e $[R]$ é a matriz triangular superior.

Para construir a matriz de amortecimento estrutural através do método de Rayleigh, é necessário saber previamente as frequências naturais de dois modos de vibrar de interesse. Estas são obtidas através da solução do problema de autovalor generalizado descrito anteriormente. Com os modos de vibrar de interesse e as respectivas frequências naturais, a matriz de amortecimento é calculada da maneira a seguir descrita.

Sejam ω_r a frequência natural e ϕ_r o autovetor associado ao modo r , respectivamente, de tal forma que tenhamos

$$([K] - \omega_r^2[M])\phi_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6.58)$$

onde N é o número de modos. Baseado nas propriedades de ortogonalidade dos modos naturais de vibrar, temos:

$$\begin{aligned}\phi_r^T[M]\phi_s &= \bar{M}_r\delta_{rs} \\ \phi_r^T[K]\phi_s &= \omega_r^2\bar{M}_r\delta_{rs}\end{aligned}\tag{6.59}$$

onde \bar{M}_r é a massa modal do modo r , definida como $\bar{M}_r = \phi_r^T[M]\phi_r$, o sobrescrito T denota a transposta da matriz, e δ_{rs} é o Delta de Kronecker, que possui a seguinte propriedade:

$$\delta = \begin{cases} \delta_{rs} = 1 & \text{se } r = s \\ \delta_{rs} = 0 & \text{se } r \neq s \end{cases}\tag{6.60}$$

Pela equação (6.46), o amortecimento de Rayleigh é definido como:

$$\phi_r^T[C]\phi_s = (a_0 + a_1\omega_r^2)\bar{M}_r\delta_{rs}\tag{6.61}$$

De maneira análoga à matriz de massa modal, podemos definir a matriz de amortecimento modal:

$$\bar{C}_r = \phi_r^T[C]\phi_r\tag{6.62}$$

e também de maneira análoga o fator de amortecimento para um sistema com um único

grau de liberdade:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (6.63)$$

onde ζ é o fator de amortecimento, m a massa, c o amortecimento e ω_n a frequência natural do sistema com um grau de liberdade. Podemos obter a seguinte relação do amortecimento para um sistema com múltiplos graus de liberdade:

$$\bar{C}_r = \phi_r^T [C] \phi_r = 2\bar{M}_r \omega_r \zeta_r \quad (6.64)$$

onde \bar{C}_r é a matriz de amortecimento modal do modo r e ζ é o fator de amortecimento modal correspondente a este modo.

A seguir, podemos construir um sistema de equações com os fatores de amortecimento, igualando o lado direito da equação (6.61) com o lado direito da expressão (6.64), fornecendo:

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_r} + a_1 \omega_r \right) \quad (6.65)$$

Assim, pode-se construir a matriz de amortecimento de Rayleigh, uma vez definidos dois modos principais em que a estrutura pode vibrar. Dados os modos e seus respectivos fatores de amortecimento ζ_r , e calculando suas frequências naturais ω_r , podemos

encontrar os coeficientes a_0 e a_1 . A desvantagem desse método de obtenção da matriz de amortecimento estrutural reside na impossibilidade de se definir o amortecimento para todos os modos de interesse, ficando-se restrito a dois modos principais.

Para a obtenção da matriz de amortecimento proporcional de Rayleigh, são utilizadas as matrizes de rigidez e de massa na forma consistente. Uma consideração importante é quanto à questão da massa adicional. O conceito de massa adicional é uma simplificação empregada comumente na Mecânica dos Fluidos, e que corresponde à inércia adicionada a um sistema devido à aceleração de um corpo imerso em um fluido – FALTINSEN (1990). A movimentação do corpo no fluido também carrega o fluido em seu entorno, devido ao fato de que os mesmos não podem ocupar o mesmo lugar no espaço ao mesmo tempo. Por simplificação, este efeito pode ser modelado como uma certo volume do fluido sendo movido juntamente com o corpo, adicionando a sua massa ao sistema, embora na realidade “todo” o fluido seja acelerado de uma certa magnitude.

Na construção das matrizes de massa e amortecimento para a solução dinâmica, a massa adicional não é introduzida, uma vez que a reação do fluido sobre a estrutura já é levada em consideração pela solução hidrodinâmica do escoamento, ou seja, o seu efeito já é computado nos termos do lado direito da equação 6.36. No entanto, em alguns casos aqui apresentados, a massa adicional é introduzida para a avaliação estática das frequências naturais do *riser*, quando o mesmo encontra-se imerso.

6.1.2.2 Integração Temporal

A solução temporal da equação (6.35) pode ser feita utilizando-se uma aproximação numérica das variações dos deslocamentos ou aceleração em pequenas intervalos de tempo. Uma das técnicas mais comumente empregadas para a solução desta classe de problemas é o método Newmark β , que utiliza uma abordagem incremental em relação aos deslocamentos, velocidades e acelerações entre os intervalos de tempo discretos. No

método Newmark β , os deslocamentos e velocidades em um dado instante de tempo $t + \Delta t$ são dados pelo deslocamento, velocidade e aceleração no instante de tempo anterior t e pela aceleração no instante $t + \Delta t$. Assumindo que a aceleração é constante durante o intervalo de tempo Δt , e igual à média entre os instantes de tempo inicial e final, e por simplificação assumindo apenas o movimento na direção x , temos segundo CRAIG (1981):

$$\ddot{x}(t') = \frac{1}{2}(\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}) \quad t \leq t' \leq t + \Delta t \quad (6.66)$$

Integrando-se a equação (6.66) duas vezes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{t+\Delta t} &= \dot{x}_t + \frac{1}{2}\Delta t [\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}] \\ \text{e} \\ x_{t+\Delta t} &= x_t + \Delta t \dot{x}_t + \frac{1}{4}(\Delta t)^2 \ddot{x}_t + \frac{1}{4}(\Delta t)^2 \ddot{x}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (6.67)$$

É numericamente mais conveniente escrever as relações anteriores na forma de quantidades incrementais Δx_t , $\Delta \dot{x}_t$, $\Delta \ddot{x}_t$, ΔF_t . Assim, as equações (6.67) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{x}_t &= \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta x_t - \dot{x}_t \Delta t) - 2\ddot{x}_t \\ \text{e} \\ \Delta \dot{x}_t &= \frac{2}{\Delta t} \Delta x_t - 2\dot{x}_t \end{aligned} \quad (6.68)$$

Uma vez que a equação (6.35) é satisfeita tanto no tempo t como no tempo $t + \Delta t$, temos então:

$$[M] \{\Delta \ddot{x}\} + [C] \{\Delta \dot{x}\} + [K] \{\Delta x\} = \{\Delta F_x\} \quad (6.69)$$

As equações (6.68) e (6.69) podem ser combinadas como:

$$[K_t^*] \{\Delta x_t\} = \{\Delta F_t^*\} \quad (6.70)$$

onde

$$[K_t^*] = [K] + \frac{2}{\Delta t}[C] + \frac{4}{\Delta t^2}[M] \quad (6.71)$$

e

$$\{\Delta F_t^*\} = \{\Delta F_t\} + \left[\frac{4}{\Delta t}[M] + 2[C] \right] \{\dot{x}_t\} + 2[M] \{\ddot{x}_t\}$$

A equação (6.70) deve ser resolvida através de algum método de solução de sistemas lineares, tanto direto como iterativo, fornecendo os deslocamentos incrementais Δx_t . Neste trabalho, é utilizado o método iterativo de Gauss-Seidel, devido à sua implementação simples – vide BARRETT et al. (1992).

Uma vez que Δx_t tenha sido calculado pela equação (6.70), $\Delta \dot{x}_t$ e $\Delta \ddot{x}_t$ podem ser obtidos de (6.68), e os valores atualizados de x , \dot{x} e \ddot{x} determinados de:

$$\begin{aligned}
 x_{t+\Delta t} &= x_t + \Delta x_t \\
 \dot{x}_{t+\Delta t} &= \dot{x}_t + \Delta \dot{x}_t \\
 \ddot{x}_{t+\Delta t} &= \ddot{x}_t + \Delta \ddot{x}_t
 \end{aligned}
 \tag{6.72}$$

A regra prática para o cálculo do intervalo de tempo Δt é que seja adotado $\Delta t \leq T_n/10$, onde T_n é o menor período natural da estrutura. Porém o intervalo de tempo efetivamente utilizado na solução da estrutura é muito menor que o requerido por esta regra, uma vez que o mesmo é limitado pela solução numérica do escoamento através do MVD.

6.2 Forças Hidrodinâmicas

As forças hidrodinâmicas no riser são calculadas através do MVD, na sua formulação explícita. Para isso, a discretização do riser utilizada no MEF, é também utilizada para dividir o riser em seções hidrodinâmicas, sob as quais atuarão as forças calculadas pelo MVD. Assim, cada nó da estrutura discretizada pelo MEF terá uma seção hidrodinâmica correspondente, e as forças oriundas do MVD fornecem as componentes do carregamento em cada um destes nós.

Deve-se salientar que as seções hidrodinâmicas são resolvidas independentemente, e a única forma de comunicação entre as seções provém do movimento da própria estrutura.

O cálculo das forças atuantes no corpo pode ser feito através da integração do campo de pressões e das tensões de cisalhamento. A expressão que relaciona a pressão e a circulação gerada ao redor do corpo é derivada das equações de Navier-Stokes. Escrevendo a equação em função das coordenadas tangenciais e normais, temos:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \quad (6.73)$$

onde v_s e v_n são as velocidades tangencial e normal a parede e s e n são os versores nestas direções. Pelo princípio da aderência completa na parede e pela condição de que cada painel é considerado uma linha de corrente, a equação (6.73) pode ser reescrita como:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \right) \quad (6.74)$$

Aplicando-se a equação da continuidade, temos:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \nu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) \quad (6.75)$$

A equação (6.75) pode ser escrita em termos da vorticidade como:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial n} \quad (6.76)$$

De acordo com COTTET e KOUMOUTSAKOS (2000) apud FREGONESI (2002), a equação de transporte de vorticidade pode ser integrada sobre a parede do corpo e

aplicando-se o teorema de Stokes, origina-se a seguinte equação:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} = \nu \int \frac{\partial\omega}{\partial n} \partial S \quad (6.77)$$

Admitindo-se que o termo da derivada normal da vorticidade é constante sobre o painel, podemos reescrever a equação (6.77) como:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} = \nu \frac{\partial\omega}{\partial n} \Delta S \quad (6.78)$$

Substituindo (6.78) em (6.76), obtemos a distribuição da pressão ao longo da parede do corpo em função da variação da circulação e da aceleração, ou seja:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \underbrace{-\rho \frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} \frac{1}{\Delta S}}_A \underbrace{-\rho \vec{a}_{corpo} \cdot \vec{e}_S}_B \quad (6.79)$$

onde $\Delta\Gamma$ é a diferença entre a circulação do vórtice criado sobre o painel e a soma das circulações dos vórtices que foram absorvidos pelo mesmo painel. A equação (6.79) mostra que a variação da pressão ao longo da parede do corpo é função do fluxo de circulações nos painéis (termo A) e da aceleração do corpo projetada na direção tangencial de cada painel (termo B).

Conforme desenvolvido em SALTARA (2002) apud YAMAMOTO (2002), a força total que o fluido exerce sobre o corpo pode ser obtida de duas maneiras: 1) integrar os

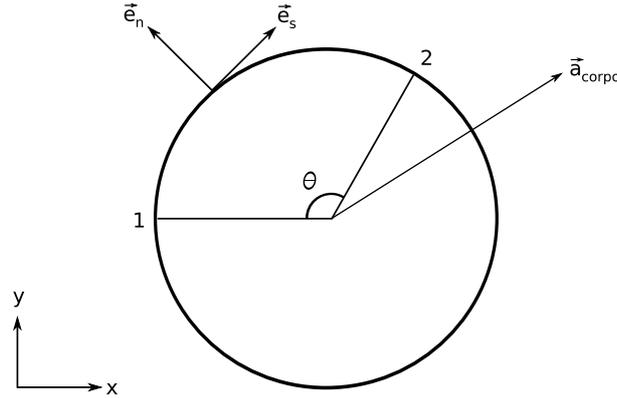


Figura 6.4: Sistema de coordenadas do cilindro acelerado. Reproduzido de YAMAMOTO (2002)

dois termos do lado direito da equação (6.79) sobre a parede do corpo obtendo, desta maneira, a força total do fluido sobre o corpo ou 2) integrar somente a parcela correspondente ao fluxo de vorticidade (termo A) e desconsiderar a parcela da aceleração (termo B) obtendo, deste modo, apenas uma parcela da força total do fluido que age no corpo, sendo a outra parcela obtida separadamente como será explicado a seguir.

Considerando um corpo de raio r e que tenha uma aceleração dada por:

$$\vec{a}_{corpo} = a_{corpo} \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \quad (6.80)$$

conforme indicado na Figura 6.4, onde \vec{e}_s e \vec{e}_n são, respectivamente, o versor tangencial e normal à parede do corpo e são definidos como:

$$\begin{aligned} \vec{e}_s &= \text{sen}\theta \vec{e}_x + \text{cos}\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_n &= -\text{cos}\theta \vec{e}_x + \text{sen}\theta \vec{e}_y \end{aligned} \quad (6.81)$$

A pressão no ponto B localizado na parede do corpo, devida somente à parcela da aceleração, é dada por:

$$P_B = P_A - \rho \int_A^B \vec{a}_{corpo} \cdot \vec{e}_s dS \quad (6.82)$$

Adotando P_A igual a zero e substituindo $dS = r d\theta$, a_{corpo} e \vec{e}_s na equação anterior, tem-se:

$$P_B = -\rho \int_0^\theta a_{corpo} \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \cdot (\text{sen}\theta \vec{e}_x + \text{cos}\theta \vec{e}_y) r d\theta \quad (6.83)$$

E, trabalhando com os termos da equação, obtém-se:

$$P_\theta = -\rho a_{corpo} \int_0^\theta (\text{sen}\theta + \text{cos}\theta) r d\theta \quad (6.84)$$

Resolvendo a integral anterior, determina-se a pressão em um ponto qualquer localizado na superfície do corpo.

$$P_\theta = -\rho a_{corpo} r [(1 - \text{cos}\theta) + \text{sen}\theta] \quad (6.85)$$

A força devida à pressão é calculada pela integral da pressão sobre a superfície do corpo.

$$\vec{F} = - \oint_{S_{\text{corpo}}} P_{\theta} \cdot \vec{e}_n dS = - \oint_{S_{\text{corpo}}} P_{\theta} \cdot \vec{e}_n r d\theta \quad (6.86)$$

Substituindo P_{θ} e \vec{e}_n na equação anterior, tem-se:

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} -\rho a_{\text{corpo}} r [(1 - \cos \theta) + \text{sen}\theta] (-\cos \theta \vec{e}_x + \text{sen}\theta \vec{e}_y) r d\theta \quad (6.87)$$

Separando a força na direção x e y , tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= +\rho a_{\text{corpo}} r^2 \int_0^{2\pi} [(1 - \cos \theta) + \text{sen}\theta] (-\cos \theta \vec{e}_x) d\theta \\ \vec{F}_y &= +\rho a_{\text{corpo}} r^2 \int_0^{2\pi} [(1 - \cos \theta) + \text{sen}\theta] (\text{sen}\theta \vec{e}_y) d\theta \end{aligned} \quad (6.88)$$

Distribuindo os termos das duas equações, tem-se:

$$\vec{F}_x = \rho a_{\text{corpo}} r^2 \left(- \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \text{sen}\theta \cos \theta d\theta \right) \cdot \vec{e}_x \quad (6.89)$$

Resolvendo as integrais separadamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta &= [\text{sen}\theta]_0^{2\pi} = 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \\
\int_0^{2\pi} \text{sen}\theta \cos \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}2\theta}{2} d\theta = \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Determina-se a parcela da força do fluido no corpo, na direção x , devido à aceleração do corpo:

$$\vec{F}_x = \rho a_{\text{corpo}} \pi r^2 \cdot \vec{e}_x \tag{6.91}$$

Tratando a força na direção y de forma análoga, tem-se:

$$\vec{F}_y = \rho a_{\text{corpo}} r^2 \left(\int_0^{2\pi} \text{sen}\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \theta \text{sen}\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta \right) \cdot \vec{e}_y \tag{6.92}$$

E novamente, resolvendo as integrais separadamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \text{sen}\theta d\theta &= [-\cos \theta]_0^{2\pi} = 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos \theta \text{sen}\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}2\theta}{2} d\theta = \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{2\pi} = 0 \\
\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Determina-se a parcela da força do fluido no corpo, na direção y , devido à aceleração do corpo:

$$\vec{F}_y = \rho a_{\text{corpo}} \pi r^2 \cdot \vec{e}_y \quad (6.94)$$

Portanto, a força $\vec{F}_{\text{aceleração}}$ que corresponde à força do fluido sobre o corpo devido à aceleração é dada por:

$$\vec{F}_{\text{aceleração}} = \rho \pi r^2 a_{\text{corpo}} \cdot \vec{e}_x + \rho \pi r^2 a_{\text{corpo}} \cdot \vec{e}_y \quad (6.95)$$

Retornando à equação (6.79), a pressão local em um determinado painel i devida à variação da circulação $\Delta\Gamma_i$ no mesmo é determinada pelo termo A da equação (6.79) ou seja:

$$P_i = P_{i-1} - \rho \frac{\Delta\Gamma_i}{\Delta t} \quad (6.96)$$

E a força correspondente $\vec{F}_{\text{circulação}}$ é obtida pela integração das pressões determinadas em cada painel, ou seja:

$$\vec{F}_{circula\tilde{c}\tilde{a}\tilde{o}} = - \int_{S_{corpo}} P_i \cdot \vec{e}_n dS \quad (6.97)$$

Em termos das pressões locais:

$$\vec{F}_{circula\tilde{c}\tilde{a}\tilde{o}} = \sum_{i=1}^{N_w} -P_i \Delta S_i \cdot \vec{e}_n \quad (6.98)$$

A outra parcela da força resultante é oriunda dos efeitos viscosos do fluido, ou seja, devido às tensões de cisalhamento. Sendo o fluido considerado ideal ou Newtoniano, a tensão de cisalhamento é proporcional ao gradiente de velocidades na parede do corpo.

$$\vec{\tau} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n} \cdot \vec{e}_n \quad (6.99)$$

Portanto, a força viscosa é determinada da seguinte forma:

$$\vec{F}_{cisalhamento} = \int_{S_{corpo}} \vec{\tau} dS \quad (6.100)$$

A força total do fluido sobre o corpo é a soma das forças de pressão e de cisalhamento.

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{circulação} + \vec{F}_{aceleração} + \vec{F}_{cisalhamento} \quad (6.101)$$

Adimensionalizando as forças em termos da densidade do fluido ρ , da velocidade ao longe do fluido U e do diâmetro do corpo D , pode-se determinar os coeficientes de arrasto e de sustentação, que são definidos como:

$$C_d = \frac{(\vec{F}_{circulação} + \vec{F}_{cisalhamento}) \cdot \vec{e}_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (6.102)$$

$$C_l = \frac{(\vec{F}_{circulação} + \vec{F}_{cisalhamento}) \cdot \vec{e}_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 D}$$

Os valores das forças nas direções do escoamento e transversal, calculadas através do MVD para cada passo de tempo, são inseridas como as forças de excitação da estrutura na equação (6.36).

6.3 Simulação Paralela do Riser

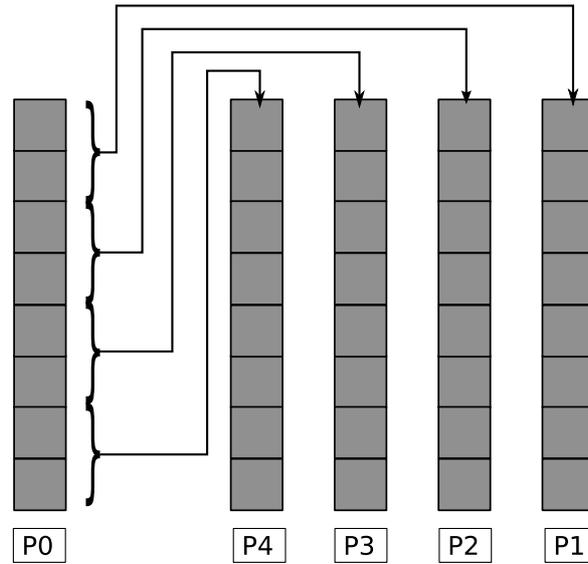
Para a captar a dinâmica da vibração do riser, é necessário discretizar o riser em um número razoável de elementos finitos. Cada um destes elementos finitos terá associado a cada um de seus nós uma seção hidrodinâmica correspondente, que fornecerá as forças nas direções transversal e longitudinal atuando sobre cada nó. Por sua vez, para cada seção hidrodinâmica, deve-se utilizar um número razoável de painéis para discretizar a seção transversal do riser. Em cada um destes painéis será criado um vórtice discreto a cada passo de tempo, que será convectado pela ação conjunta da corrente livre e pela influência de cada um dos vórtices presentes na esteira, através

da lei de Biot-Savart. A esteira de vórtices também deve ser bem reproduzida pelos vórtices discretos emitidos do corpo, impondo um limite para o processo de amalgamação dos vórtices presentes na esteira. Assim, ao longo da simulação, o número total de vórtices pode se tornar elevado, e como o MVD é um método que demanda um esforço computacional de ordem N^2 , onde N é o número de vórtices presentes na simulação, fica evidente que simulações de risers de dimensões tipicamente encontradas em situações práticas tornam-se inviáveis com metodologias tradicionais. Assim sendo, foi necessário utilizar uma abordagem para maximizar o desempenho computacional da metodologia proposta, explorando através do processamento paralelo uma divisão da carga computacional.

Para a simulação paralela do riser, foi escolhido um modelo tipo mestre-escravo baseado no MPI. A escolha do MPI justifica-se principalmente pela arquitetura computacional a ser utilizada – um *cluster* dedicado, cujas características são descritas abaixo.

- Nós: 64 máquinas Intel Pentium IV de 2.4 GHz com 512 MB de memória cada uma, interligadas por meio de uma rede composta por *switches* e interfaces de rede gigabit ethernet;
- Servidor biprocessado Intel Xeon de 2.5 GHz e 2 GB de memória;
- Sistema operacional: Linux RedHat 8.0 - kernel 2.4.20;
- LAM-MPI versão 7.0
- Compilador Intel Fortran versão 7.0
- Compilador GNU gcc versão 3.2-7

Como mostrado anteriormente, as seções hidrodinâmicas utilizadas no MVD são resolvidas independentemente umas das outras. Não há informação externa necessária para a avaliação das forças hidrodinâmicas atuando na estrutura, exceto aquelas

Figura 6.5: Operação *Broadcast*

advindas da própria estrutura. Este é o motivo pelo qual o presente método pode ser considerado como um método quase-tridimensional.

Esta característica do método pode ser eficientemente explorada através de processamento paralelo. Uma vez que as forças hidrodinâmicas são resolvidas independentemente, pode-se dividir a tarefa do cálculo das “fatias” hidrodinâmicas pelo MVD em um determinado número de nós do *cluster*. Os coeficientes de força provenientes do cálculo das seções são passados para um EP ou processo mestre (no caso, um nó específico do *cluster*), que é responsável pelo cálculo dos deslocamentos da estrutura através do MEF, bem como pelo controle do fluxo de dados. A nova posição da estrutura é então passada para os EPs ou processos escravos, e o ciclo recomeça.

A comunicação de dados entre o processo mestre e os escravos é feita por intermédio das operações coletivas de comunicação *broadcast* e *scatter/gather*. Uma representação gráfica destas operações é mostrada nas Figuras 6.5 e 6.6. Na operação *broadcast*, os dados de um dos processos – usualmente o mestre – são enviados para todos os demais. Esta operação é empregada para variáveis que são necessárias em todos os processos para a correta execução do código. As operações *scatter* e *gather* são empregadas para distribuir e coletar as informações dos processos escravos, respectivamente. A operação

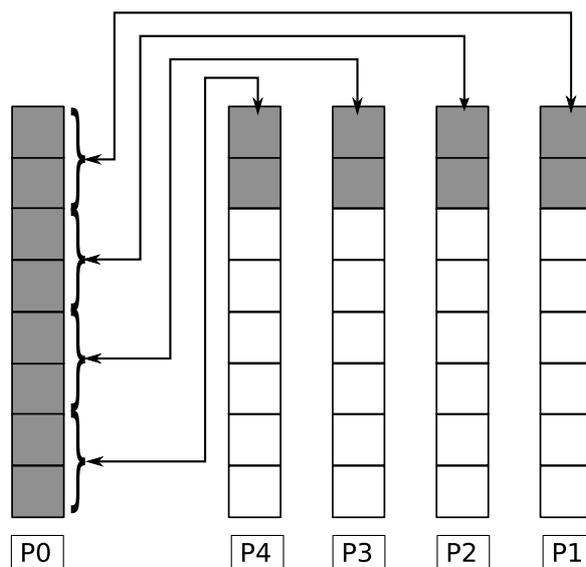


Figura 6.6: Operações *Scatter/Gather*

scatter é útil, por exemplo, para enviar as novas posições da estrutura do processo mestre para os escravos. Os coeficientes de força obtidos nas seções são coletados no processo mestre através de uma operação *gather*.

Para garantir um equilíbrio de tarefas entre os processo, as seções do riser são divididas igualmente entre os nós do *cluster*, como mostrado esquematicamente na Figura 6.7. Cada processo resolve as seções hidrodinâmicas a ele designadas. Deve-se notar que todos os processos, com exceção do processo mestre, resolvem exatamente o mesmo problema, porém sobre um conjunto de dados diferente, caracterizando um modelo SIMD.

O processo mestre é responsável pela parte serial do código – entrada e saída de dados, solução da estrutura, e também pelo cálculo de algumas seções hidrodinâmicas. Os processos escravos devem aguardar pelo término da análise via MEF, por parte do processo mestre, para obter as novas posições das seções. Isto, a princípio, pode causar uma baixa eficiência do código computacional, pois uma parte substancial do mesmo é serializada. Porém, neste caso foi utilizado a máquina servidora do *cluster* como processo mestre. Esta máquina tem uma especificação diferente dos demais nós do *cluster*, apresentando desempenho superior, tendo portanto maior poder computacional

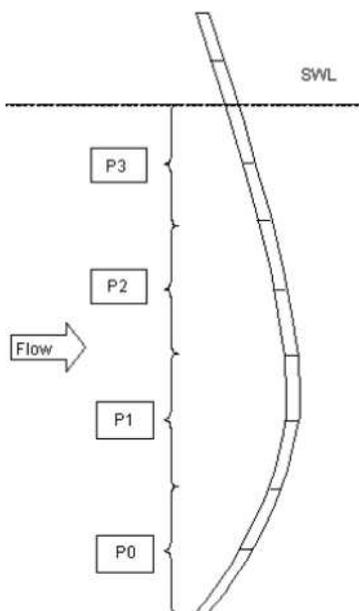


Figura 6.7: Exemplo de distribuição de dados do riser entre os nós

para suportar esta sobrecarga de trabalho. E ainda, testes demonstraram que a solução da estrutura pelo MEF não é a tarefa mais exigente do ponto de vista computacional, e portanto acredita-se que o impacto global no desempenho não seja muito significativo com esta metodologia.

Nota-se também que a parte superior do riser acima na linha d'água não é paralelizada, uma vez que estas seções não recebem a sollicitação hidrodinâmica de corrente. No entanto, as mesmas são resolvidas pela parte estrutural do código por meio do MEF, impondo-se um carregamento nulo.

É necessário manter o volume de dados trocados entre os processos através das mensagens MPI em um patamar baixo, devido à latência de comunicação, que causa um grande impacto no desempenho do código. Mesmo com os atuais avanços na tecnologia de redes, este impacto ainda é elevado. No presente método, procurou-se manter o número de trocas de mensagens MPI entre os processos o mais baixo possível, para minimizar a latência de comunicação. Excluindo-se as operações de *broadcast* necessárias para iniciar a solução, somente informações das posições e das forças hidrodinâmicas das seções são trocadas entre o processo mestre e os escravos, fazendo do método aqui descrito muito apropriado para processamento paralelo.

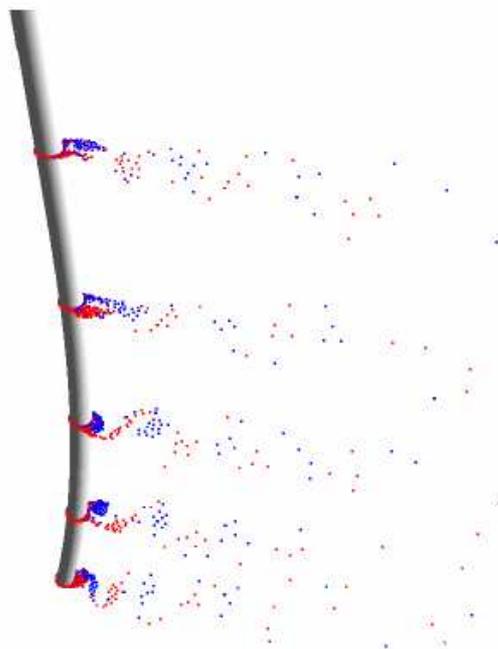


Figura 6.8: Exemplo do acoplamento entre o MEF e MVD

Para simplificar a paralelização e manter um bom balanço de carga computacional na execução do código, as operações de distribuição e coleta de dados, implementadas através de operações de *scatter* e *gather*, são realizadas sempre com pacotes de dados de mesmo tamanho, ou seja, cada processo independente recebe a mesma quantidade de dados – traduzido em número de seções hidrodinâmicas – para realizar o processamento. Assim, o número de seções hidrodinâmicas a serem calculadas deve ser um múltiplo inteiro do número de elementos processadores disponíveis para a execução da tarefa.

A Figura 6.8 mostra um instante de uma simulação de um riser vertical hipotético. No exemplo, é mostrado o acoplamento da estrutura, resolvida através do MEF, com a parte hidrodinâmica, resolvida pelo MVD. A esteira de vórtice é mostrada apenas para algumas seções hidrodinâmicas, para facilitar a visualização.

6.4 Modelo Completo do Riser

O modelo completo do *riser* é representado através dos fluxogramas apresentados nas Figuras 6.9 e 6.10. A modelagem pode ser dividida em duas partes: uma parte estática, onde são determinadas as matrizes de rigidez, massa e amortecimento da estrutura, e que serão posteriormente utilizadas na solução dinâmica do *riser*. Também são obtidas a solução estática e as frequências naturais, tanto em ar ($C_a = 0$) como em água ($C_a = 1$), utilizando a formulação consistente para a montagem das matrizes. Para a solução dinâmica, as matrizes são obtidas através da formulação concentrada, e as matrizes de massa e amortecimento são obtidas utilizando-se coeficiente de massa adicional igual a zero.

O fluxograma da Figura 6.10 mostra a solução dinâmica do *riser*. Conforme já salientado, a solução dinâmica é feita através de uma metodologia mestre-escravo, como mostrado esquematicamente no fluxograma. O processo mestre é responsável pelo controle geral do processo e pela solução da estrutura no domínio do tempo, utilizando como dados de entrada as forças hidrodinâmicas calculadas pelos processos escravos através do MVD.

A troca de informações entre os processos mestre e escravos é feita através de chamadas às funções MPI *Scatter* e *Gather*. Basicamente, apenas as posições das seções calculadas através da solução da estrutura, e as forças hidrodinâmicas calculadas através do MVD para cada seção, são trocadas entre o processo mestre e os escravos, possibilitando assim um baixo volume de informações e, conseqüentemente, reduzindo a latência de comunicação do processo. Há também operações do tipo *Broadcast* – não mostradas no fluxograma – a partir do processo mestre, e que são utilizadas para inicialização da sequência de cálculo, como por exemplo os parâmetros de amalgamação, viscosidade, passo de tempo, entre outros.

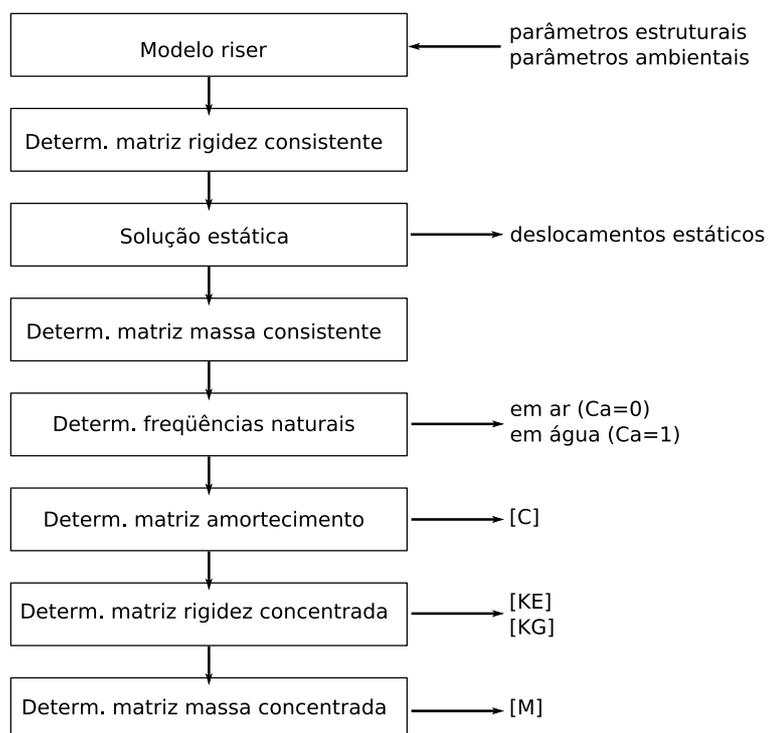


Figura 6.9: Fluxograma - análise estática e determinação das matrizes estruturais

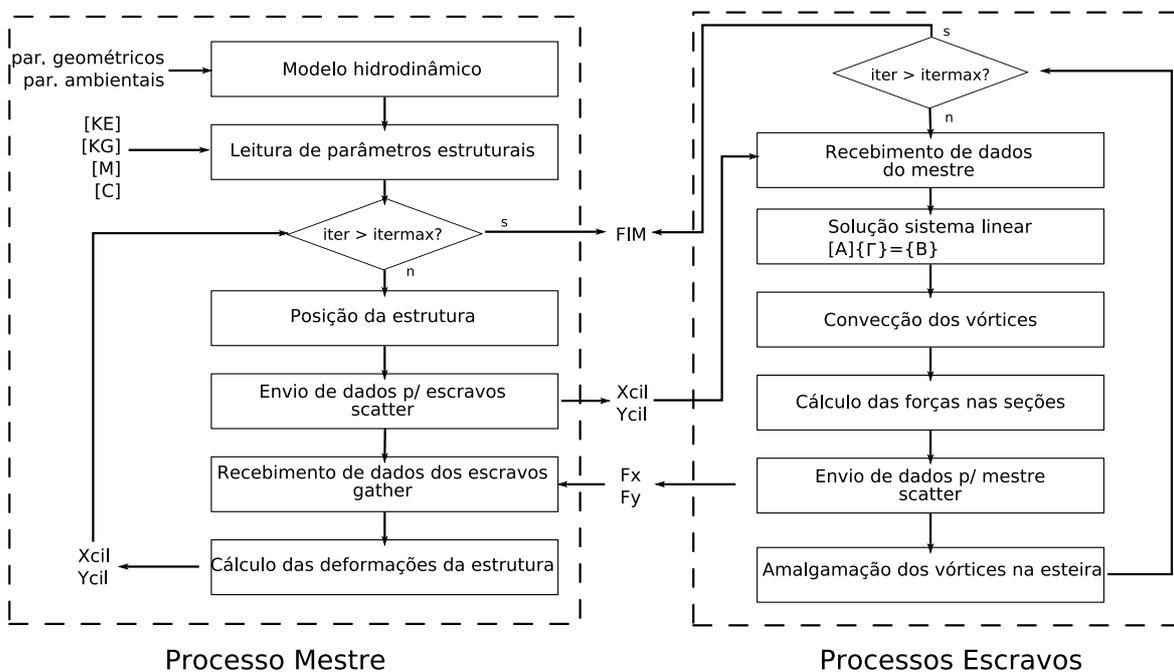


Figura 6.10: Fluxograma - análise dinâmica

6.5 Validação do Modelo Estático do Riser

Podemos validar o modelo de elementos finitos utilizado para a solução estática do *riser* através da comparação com a solução analítica da equação (6.16). A comparação pode ser feita assumindo as seguintes condições especiais: o peso próprio do *riser* é desprezado, a tensão ao longo do comprimento é assumida constante, bem como o diâmetro e o carregamento lateral do *riser*. Adotando-se estas simplificações, a equação (6.16) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^4x}{dz^4} - \left(\frac{T}{EI}\right) \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{N}{EI} \quad (6.103)$$

onde T é a tração axial e N o carregamento. Segundo SPIEGEL (1981) apud FERRARI (1998), a equação (6.103) possui uma solução analítica dada por:

$$x = \frac{N}{EI n^4} \left(\frac{e^{nL} - 1}{e^{2nL} - 1} \right) e^{nz} + \frac{N}{EI n^4} \left(1 - \left(\frac{e^{nL} - 1}{e^{2nL} - 1} \right) \right) e^{-nz} - \frac{N}{EI n^4} + \frac{Nz(L - z)}{2EI n^2} \quad (6.104)$$

onde $n = T/EI$ e L é o comprimento total do *riser*. A Tabela 6.1 mostra os parâmetros estruturais utilizados na validação. O *riser* é considerado articulado nas duas extremidades, ou seja, somente os graus de liberdade rotacionais são permitidos nos nós da base e do topo. A Tabela 6.2 mostra uma comparação entre os deslocamentos nodais obtidos da solução analítica e a solução numérica, utilizando-se diferentes níveis de discretização. Pode-se notar uma excelente concordância com a solução analítica, mesmo com uma discretização não muito refinada. A maior diferença encontrada foi

da ordem de 0,02%. No entanto, uma discretização grosseira não é capaz de reproduzir corretamente as curvaturas corretas do *riser*, como é mostrado na Figura 6.11, que apresenta as envoltórias dos deslocamentos obtidos para os diferentes níveis de refinamento analisados.

Comprimento do riser:	100 <i>m</i>
Diâmetro externo:	0,50 <i>m</i>
Diâmetro interno:	0,40 <i>m</i>
Tração no topo:	500 <i>kN</i>
Módulo de Young:	$6,4 \times 10^7$ <i>kN/m²</i>
Densidade do fluido ao redor do riser:	1025 <i>kg/m³</i>
Densidade do fluido no interior do riser:	1025 <i>kg/m³</i>
Velocidade da corrente:	1,0 <i>m/s</i>
Coefficiente de arrasto:	0,7

Tabela 6.1: Validação do modelo estático – Dados estruturais

Z [m]	Analítico	10 elementos	20 elementos	50 elementos	100 elementos
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,12156	0,12154	0,12154	0,12154	0,12153
20	0,22660	0,22656	0,22655	0,22655	0,22655
30	0,30594	0,30589	0,30588	0,30588	0,30588
40	0,35495	0,35490	0,35489	0,35489	0,35489
50	0,37140	0,37145	0,37144	0,37144	0,37144
60	0,35495	0,35490	0,35489	0,35489	0,35489
70	0,30594	0,30590	0,30589	0,30588	0,30589
80	0,22660	0,22657	0,22656	0,22656	0,22656
90	0,12156	0,12154	0,12154	0,12154	0,12154
100	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 6.2: Deslocamentos obtidos - Validação do modelo estático

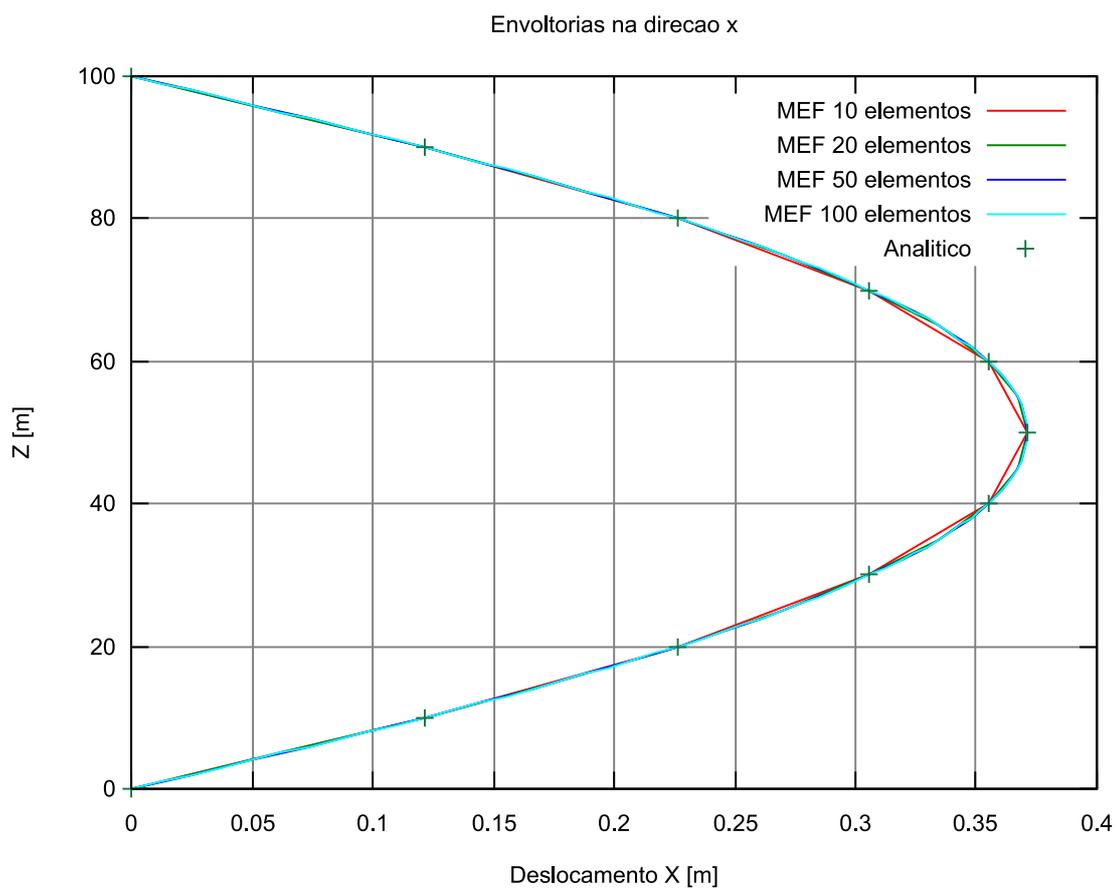


Figura 6.11: Validação do modelo estático - Envoltórias dos deslocamentos na direção x

6.6 Validação do Modelo Dinâmico do Riser

Para validar o modelo dinâmico é empregado um *riser* vertical hipotético de 120 *m* de comprimento e 100 *m* de lâmina d'água, como descrito em FREGONESI (2002). São analisadas duas diferentes condições de corrente. No primeiro caso, a velocidade da corrente é constante ao longo de toda a lâmina d'água e com intensidade igual a 0,4 *m/s*. O segundo caso corresponde a uma situação de corrente cisalhante, com velocidade constante igual a 1,2 *m/s* até uma profundidade de 15 *m*, e variando linearmente até o leito, onde a intensidade é de 0,2 *m/s*. Em ambos os casos, a direção da corrente é alinhada à direção *x*. As extremidades do *riser* são rotuladas, permitindo apenas deslocamentos rotacionais. Os dados estruturais do *riser* hipotético são mostrados na Tabela 6.3.

Os resultados para o riser em questão são comparados através de duas metodologias distintas: através de uma metodologia *quasi-steady*, como descrito em FERRARI (1998), e utilizando o Método dos Vórtices Discretos, como em FREGONESI (2002).

A metodologia *quasi-steady* implementada por FERRARI (1998) assume basicamente que, a cada instante de tempo, a força na direção transversal é similar à submetida em um cilindro em uma corrente constante com a mesma velocidade. Como a velocidade em um escoamento oscilatório muda com o tempo, a frequência de emissão de vórtices é ajustada considerando-se a média cumulativa das velocidades instantâneas a cada meio ciclo da oscilação transversal. O carregamento na direção do escoamento é calculado através da equação de Morison, supondo um coeficiente de arrasto constante especificado.

FREGONESI (2002) emprega um método simplificado, proposto por WARBURTON (1976) para a determinação das frequências naturais da estrutura.

O *riser* é discretizado em sessenta elementos de mesmo comprimento na região submersa e dez elementos na região emersa. Cada seção circular do riser é dividida em 64 painéis. É utilizado um intervalo de tempo adimensional Ut/D igual a 0,1 e um total de 2.000 iterações. A matriz de amortecimento é calculada considerando-se

Comprimento imerso do riser:	100 <i>m</i>
Comprimento emerso do riser:	20 <i>m</i>
Diâmetro externo:	0,25 <i>m</i>
Diâmetro interno:	0,21106 <i>m</i>
Tração no topo:	200 <i>kN</i>
Módulo de Young:	$2,1 \times 10^8$ <i>kN/m²</i>
Densidade do fluido ao redor do riser:	1025 <i>kg/m³</i>
Densidade do fluido no interior do riser:	800 <i>kg/m³</i>
Densidade do material do riser:	7700 <i>kg/m³</i>
Parâmetro de massa:	4,24 <i>kg/m</i>
Fator de amortecimento:	0,02

Tabela 6.3: Validação - Dados estruturais do *riser*

o primeiro e o segundo modos de vibração como preponderantes, tanto na direção do escoamento como na direção transversal.

Os parâmetros de amalgamação são ajustados de forma a manter cerca de 3.000 vórtices por seção hidrodinâmica. As seções hidrodinâmicas a serem calculadas são divididas igualmente entre os EPs. São utilizados 10 nós do *cluster* como EPs para a solução da parte hidrodinâmica – ou seja, são destinadas seis seções para cada EP – e a máquina servidora do *cluster* para o cálculo da estrutura. O gráfico da Figura 6.12 mostra uma comparação das envoltórias de máximos deslocamentos na direção *x*, obtidas por FREGONESI (2002) e pela presente metodologia, para o caso de corrente constante. A Figura 6.13 mostra os deslocamentos máximos na direção *y* para a mesma situação. Nota-se uma boa concordância nas amplitudes obtidas, tanto na direção paralela ao escoamento como na direção transversal. Na direção *x*, a máxima amplitude obtida é cerca de duas vezes o diâmetro do *riser*. Já na direção transversal, é observado o segundo modo de vibração, com uma amplitude máxima de aproximadamente 0,7 vezes o diâmetro da seção.

As Figuras 6.14 e 6.15 mostram as envoltórias de deslocamentos máximos nas direções paralela e transversal do escoamento, respectivamente, para o caso de corrente cisalhante. Para este caso, é utilizado um tempo adimensional igual a 0,04, e os modos de vibração preponderantes utilizados são o primeiro e segundo na direção do escoamento, e o terceiro e quarto modos na direção transversal. Observa-se uma boa

concordância com os resultados obtidos por FREGONESI (2002) com o MVD, apesar de ser obtida uma amplitude ligeiramente menor na direção x . A máxima amplitude obtida foi de cerca de 6,5 vezes o diâmetro do *riser*, resultado superior ao obtido através da metodologia *quasi-steady*. Tal diferença deve-se principalmente ao valor do coeficiente de arrasto na metodologia *quasi-steady*. Nesta metodologia, assume-se um valor constante para o coeficiente de arrasto, que é inserido na equação de Morison para a obtenção da resposta do *riser*. No presente caso, foi utilizado um valor de 1,2 para o coeficiente de arrasto, valor inferior ao observado nas simulações com o MVD – C_d médio em torno de 1,5. O MVD, empregado no cálculo das forças hidrodinâmicas, leva em conta naturalmente o fenômeno de amplificação do arrasto devido à vibração do corpo, o que não ocorre com a metodologia *quasi-steady*.

Na direção transversal, é observado o quarto modo de vibração. A máxima amplitude observada é próxima de 0,4 vezes o diâmetro da seção. Nota-se uma certa diferença de amplitudes entre a presente metodologia e a obtida por FREGONESI (2002), notadamente na região inferior do *riser*. Nesta região, o comportamento assemelha-se ao obtido através da metodologia *quasi-steady*. Provavelmente, a diferença deve-se à forma como são obtidas as matrizes de amortecimento da estrutura. Na metodologia aqui apresentada, utiliza-se um método de autovalores generalizado para a obtenção das frequências naturais da estrutura. FREGONESI (2002) utiliza uma metodologia analítica simplificada, baseada na formulação concentrada das matrizes da estrutura.

A seguir, para validar a técnica da paralelização, os casos apresentados são analisados novamente com um número diferente de processos. Dividindo-se a carga entre 6, 12, 15, 20 e 30 EPs, são obtidos exatamente os mesmos resultados obtidos anteriormente, comprovando assim que a paralelização não influencia a resposta dinâmica da estrutura, desde que as limitações físicas dos EPs – notadamente a capacidade de memória – não sejam ultrapassadas. Tal constatação é essencial para a utilização da técnica – a paralelização por si mesma não pode de forma alguma influenciar no resultado do cálculo, somente no tempo total para que o mesmo seja executado.

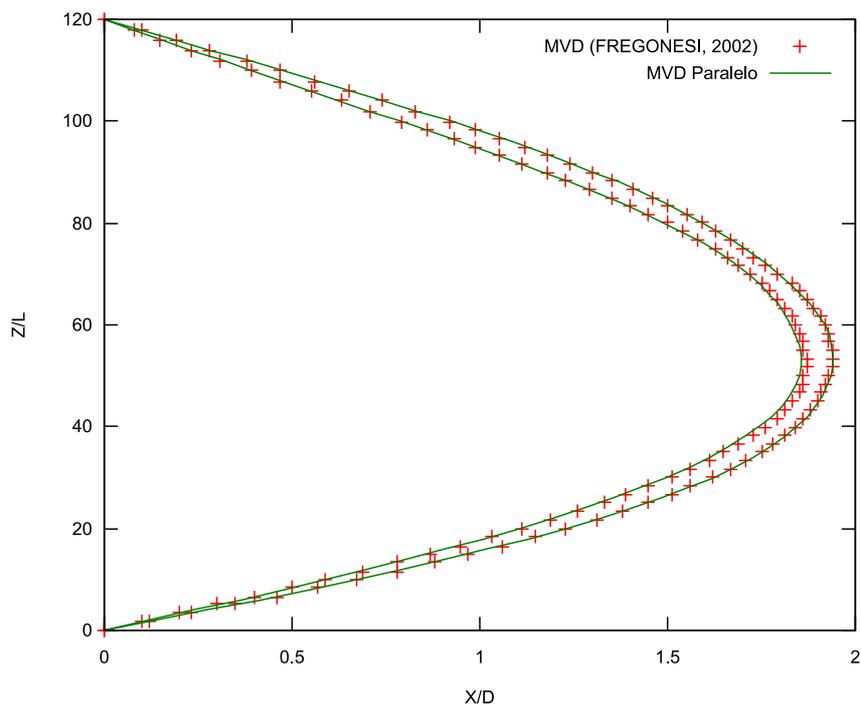


Figura 6.12: Corrente constante - Envoltórias dos deslocamentos na direção x

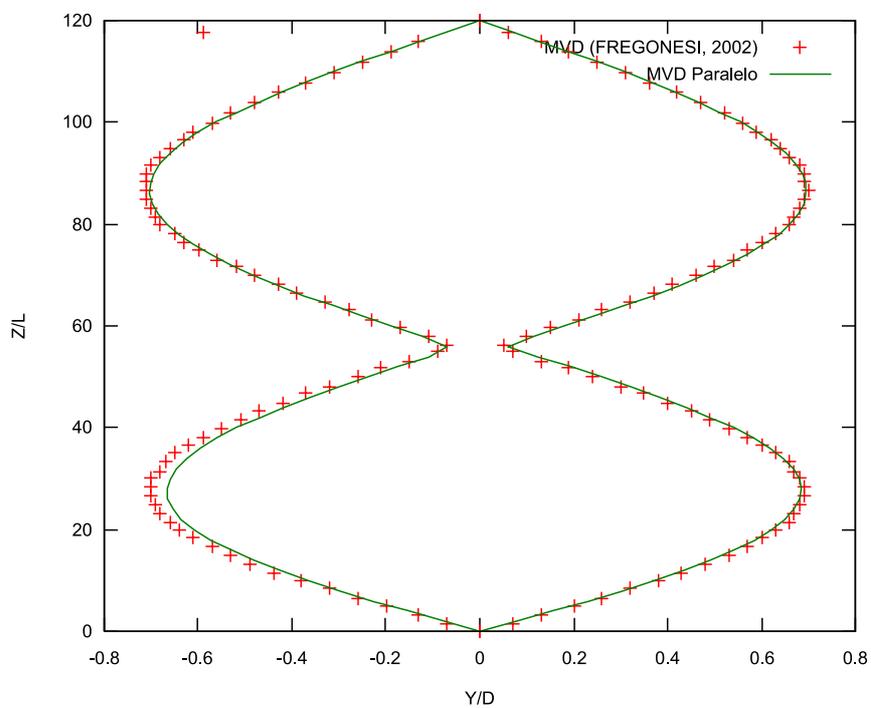


Figura 6.13: Corrente constante - Envoltórias dos deslocamentos na direção y

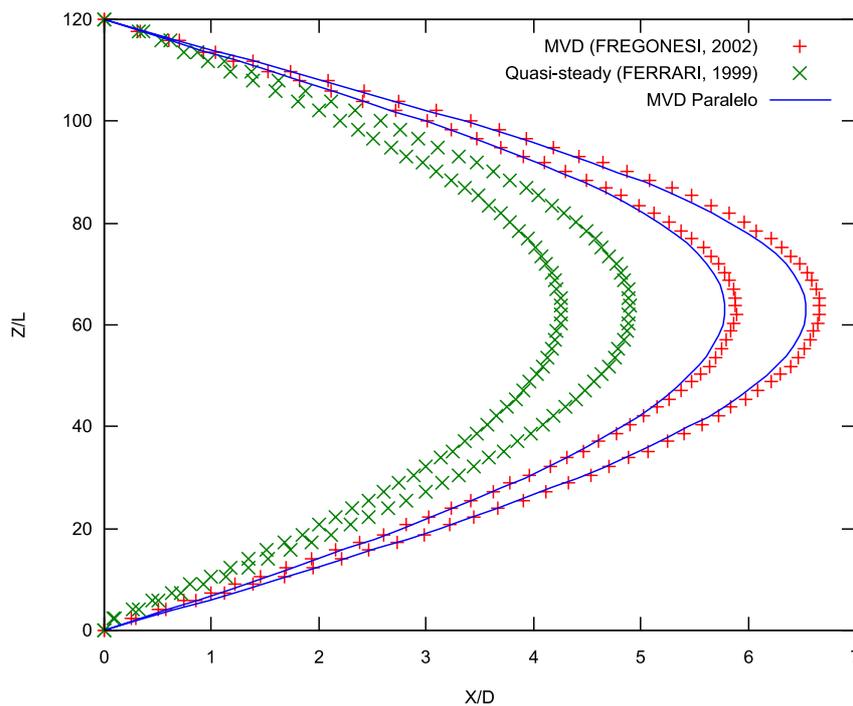


Figura 6.14: Corrente variável - Envoltórias dos deslocamentos na direção x

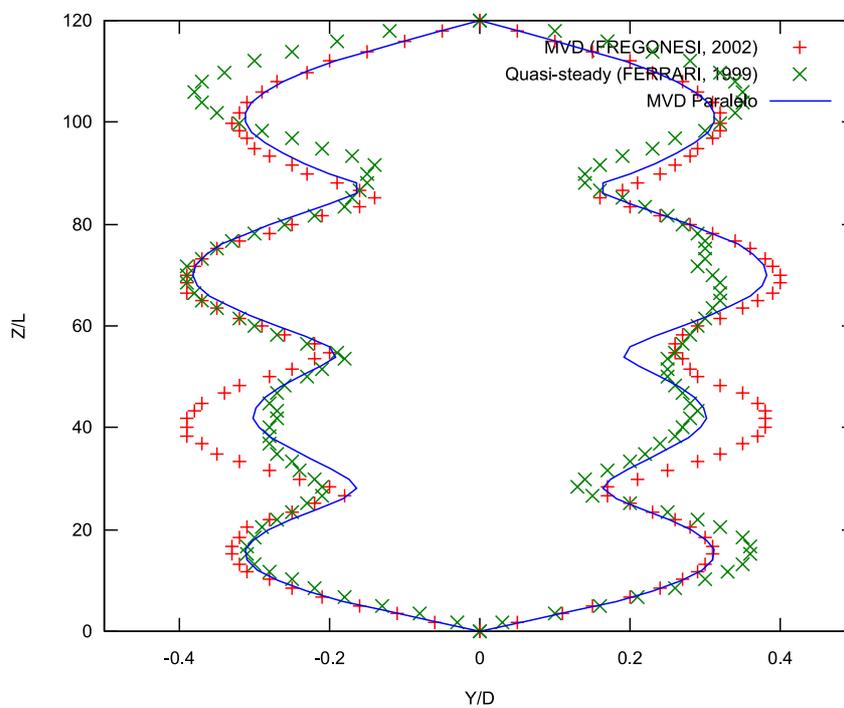


Figura 6.15: Corrente variável - Envoltórias dos deslocamentos na direção y

Capítulo 7

Resultados

Neste capítulo, o modelo numérico do *riser* é comparado com resultados experimentais, obtidos em laboratório sob condições controladas. São mostrados os resultados dos experimentos realizados no canal Delta da Delft Hydraulics, na Holanda. As seções a seguir trazem o detalhamento da montagem experimental, com as características do *riser* analisado. A modelagem numérica do *riser* segue, em linhas gerais, como explicado no capítulo anterior. Particularidades na modelagem são detalhadas quando necessário.

7.1 Delta Flume

7.1.1 Descrição do Experimento

Localizado na Delft Hydraulics, na Holanda, o Delta Flume é um tanque de água com 240 m de comprimento, 5 m de largura e profundidade entre 7 e 9,5 m, onde são também realizados ensaios de ondas regulares e irregulares. O tanque é equipado com um carro de reboque, capaz de atingir velocidade máxima de 1,0m/s em ambas as direções do tanque. O experimento em questão foi concebido com o propósito de fornecer resultados de alta qualidade da resposta multimodal de um *riser* tensionado submetido a uma corrente, para a avaliação de modelos numéricos utilizados tanto na

indústria como para fins de pesquisa. Posteriormente, foi realizada uma comparação cega dos resultados experimentais com os obtidos através de códigos computacionais desenvolvidos por diversos institutos de pesquisa (CHAPLIN et al. (2004a,b, 2005a,b)). Para a comparação cega dos códigos, foi dado ao conhecimento dos pesquisadores somente as propriedades mecânicas do *riser*, descritas na Tabela 7.1 e as condições dos experimentos, mostradas na Tabela 7.2. Um esquema da montagem do *riser* é mostrado na Figura 7.1.

Além do código computacional aqui descrito, foram também avaliados na comparação cega os seguintes códigos, descritos a seguir:

- **Norsk Hydro** – Este código é composto por dois programas básicos: Navsim (um código interno de CFD da Norsk Hydro (Herfjord, 1996), para o cálculo do carregamento hidrodinâmico. A parte estrutural da análise é realizada por um código não-linear comercial, Usfos, (Eberg et al., 1993). A comunicação entre os dois programas é realizada por um módulo de de acoplamento, descrito em Herfjord et al. (1998, 1999). O código CFD usa uma solução 2D das equações de Navier-Stokes através do Método dos Elementos Finitos, com funções de interpolação lineares em uma malha de elementos triangulares. A cada passo de tempo, o código de acoplamento faz a comunicação de dados entre o código CFD e o estrutural.
- **Orcina wake oscillator model** – Um modelo de oscilador de onda acopla a equação de movimento de onda com a equação de movimento do cilindro, formando um sistema não linear para a predição da excitação devido à vorticidade na direção transversal. O sistema não tem uma conexão direta com a física do problema, mas sim a modelos de resposta característicos do problema de VIV: oscilatório, auto-excitado e auto-limitante. O modelo utilizado é o modelo Milan (Falco, 1999). Como no modelo Orcina, o código estrutural OrcaFlex é utilizado para calcular a resposta do riser sob a ação das forças hidrodinâmicas, calculadas em planos paralelos.

- **Orcina vortex tracking model** – Utiliza um modelo bidimensional de vórtices discretos baseado no trabalho de Sarpkaya & Shoaff (1979). O mesmo tem dois elementos principais: um modelo de camada limite para determinar a posição angular dos dois pontos de separação e a taxa de geração de vorticidade nos mesmos, e um modelo de convecção para calcular o movimento subsequente dos vórtices e as forças hidrodinâmicas. Esta metodologia tem como vantagem ser muito menos dispendiosa em termos computacionais do que CFD, porém tem como limitações utilizar um modelo de camada limite permanente e um termo heurístico de decaimento da vorticidade, baseado em calibrações a partir de modelos reduzidos.
- **MARINTEK/NTNU: VIVANA** – Utiliza a versão standard do código VIVANA, com os mesmos modelos de elementos finitos, e opção para cálculo do modelo hidrodinâmico. A versão utilizada calcula somente vibrações transversais. Para o presente caso, a deflexão média in-line é calculada pela aplicação de um fator de amplificação (VANDIVER, 1983) ao coeficiente de arrasto, para modelar o efeito no arrasto das vibrações transversais. O código VIVANA também não usa superposição de modos para a análise dinâmica, e a solução se apresenta apenas em frequências discretas. Desta forma, amplitudes modais individuais não são apresentadas.
- **MIT: VIVA** - O código VIVA calcula somente a resposta transversal, utilizando modelos empíricos para a excitação causada pelos vórtices. Regiões de *lock-in* são localizadas e utilizadas para identificar quais dos possíveis modos de excitação é o mais provável de ocorrer. As amplitudes do movimento são calculadas a partir de um banco de dados para a componente do coeficiente de sustentação que possa estar em fase, ou anti-fase, com a velocidade. O programa calcula primeiramente todos os modos possíveis individualmente, e estes são usados para comparação da contribuição modal e frequências. O código também realiza um cálculo multifrequência, assumindo todos os possíveis modos presentes. Estes dados são

utilizados para comparação das envoltórias dos deslocamentos e curvaturas, e seus valores máximos.

- **NTNU: VICoMo** - VICoMo utiliza dados de modelos de ensaio (Gopalkrishnan, 1993; Wu, 1989) em oscilações harmônicas forçadas de um cilindro em um plano normal a uma corrente constante uniforme. As condições são variadas sistematicamente para construir um banco de dados de coeficientes de força, como função da velocidade reduzida, amplitude e número de Reynolds. No código, estes coeficientes são aplicados com um método de “strip theory” no qual as interações entre o escoamento e as seções vizinhas do riser são ignoradas. Uma abordagem de elementos finitos leva a um problema de autovalores no qual os autovalores complexos consistem na frequência e amortecimento do movimento (Moe e Arntsen, 2002), (Moe e Wu, 1990).
- **Institut Francais du Pétrole: DeepFlow** - Cálculos de CFD são realizados em um grande número de seções bidimensionais do riser. Em cada seção, é feita uma simulação RANS, utilizando uma formulação de vorticidade/linha de corrente (Etienne, 1999). A equação de Poisson é resolvida com um método espectral na direção azimutal, e um esquema Hermitiano de diferenças finitas de quarta ordem na direção radial. A equação de transporte é discretizada utilizando uma técnica de volumes finitos. Os termos convectivos são tratados através dos esquemas QUICK e TVD, enquanto os difusivos são avaliados através de um esquema centrado de segunda ordem. Para a interação fluido/estrutura, este código é acoplado ao software de elementos finitos DeepLines (2002).

O riser analisado possui diâmetro externo de 28 mm, 13,12 m de comprimento e uma razão de massa (massa/massa deslocada) igual a 3. O experimento foi montado de forma a expor à corrente somente a porção inferior do riser correspondente a 45% de seu comprimento total, enquanto o restante do riser era mantido em uma região com corrente nula. Isto foi obtido graças à instalação de um tanque de vácuo de 7,54 m de

comprimento, no carro de reboque, selado na parte superior e com uma abertura na extremidade inferior, a uma cota logo abaixo do nível de água do tanque. Durante o experimento, o ar era extraído do topo do tanque de vácuo, fazendo com que o mesmo ficasse praticamente cheio de água, como mostra o esquema da Figura 7.1. Desta forma, ao se mover o carro de reboque, o riser é submetido a uma corrente em degrau, constituída por uma distribuição de velocidade constante na parte inferior e corrente nula na superior.

O topo do riser é fixado na extremidade superior do tanque de vácuo. Uma estrutura metálica foi instalada na parte inferior do carro de reboque, com o propósito de prover um ponto de fixação para a extremidade inferior do riser, e suportar a estrutura do tanque de vácuo. A parte submersa da estrutura metálica é mantida sempre a jusante do riser durante os testes, de forma a não interferir no experimento. O riser foi instalado com juntas universais em ambas as extremidades, e um sistema de tensionamento na parte superior, constituído por um conjunto de molas paralelas, instaladas na parte externa do tanque de vácuo. Assim, a tensão no riser pode ser ajustada, de forma a não exceder o limite de tensão à medida em que aumenta-se o carregamento associado ao arrasto do riser. As Figuras 7.2 a 7.4 mostram o canal e um aspecto geral da montagem da estrutura de suporte do riser.

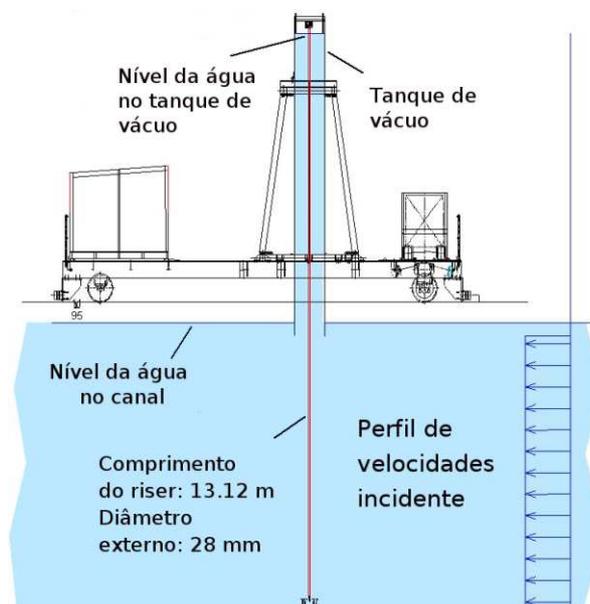


Figura 7.1: Esquema da montagem experimental



Figura 7.2: Vista do canal de ensaio



Figura 7.3: Vista do canal, mostrando o carro de reboque e o tubo de vácuo



Figura 7.4: Detalhe do tubo de vácuo

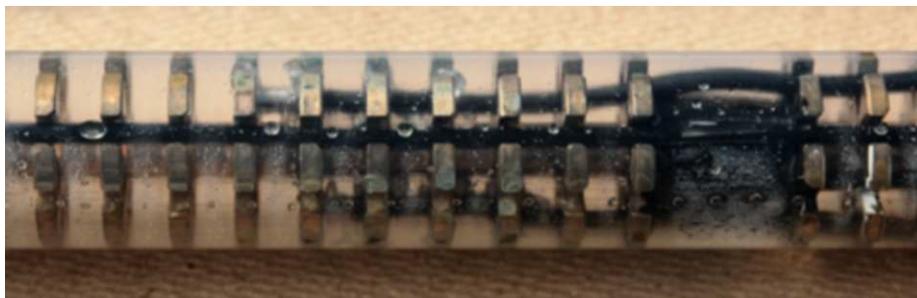


Figura 7.5: Detalhe do riser. Vista lateral

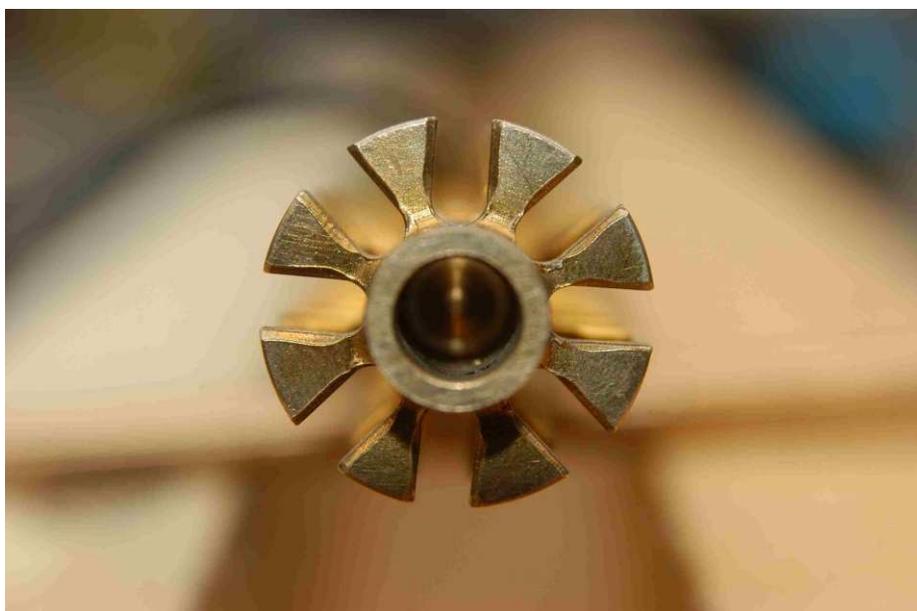


Figura 7.6: Detalhe da seção transversal do riser

7.1.2 Detalhamento do Riser

O riser é constituído por um tubo de uma liga metálica de fósforo-bronze, usinado em seções circulares de 8 mm de diâmetro e comprimento de 820 mm. Na usinagem, foram criadas aletas circulares de 3 mm de espessura e 27 mm de diâmetro, colocadas a intervalos de 9 mm. O riser é montado dentro de um tubo plástico com espessura de parede 0,5 mm e diâmetro externo de 28 mm. As aletas suportam o tubo plástico externo, e contém furos para a passagem dos cabos elétricos necessários à instrumentação do riser. O comprimento total do riser é de 13,12 m.

Extensômetros foram instalados em regiões planas usinadas na parede do núcleo metálico do riser, a intervalos de 410 mm ao longo de todo o comprimento, com o propósito de medir a curvatura do mesmo nos dois eixos, em um total de 64 meias-pontes. Foram também instalados três acelerômetros, para comparação com a medida dos deslocamentos obtidas por intermédio dos acelerômetros. As Figuras 7.5 e 7.6 mostram detalhes construtivos do riser.

Na montagem do riser, as seções foram conectadas através de juntas usinadas e preenchidas com epoxi, de forma a evitar qualquer movimento relativo entre as mesmas. Durante os experimentos, o riser era mantido inundado. Uma vez instalado no carro de reboque, os deslocamentos longitudinais e transversais a partir da posição não defletida, $x(z, t)$ e $y(z, t)$, são avaliados pela integração numérica das curvaturas obtidas através dos extensômetros, em relação à cota z medida a partir da extremidade inferior do riser. A Tabela 7.1 mostra as características estruturais do riser estudado.

7.1.3 Condições Estudadas

Antes dos ensaios com o riser submetido ao carregamento hidrodinâmico, foram verificadas as frequências naturais associadas aos modos de vibração do riser, tanto no ar como na água, para três diferentes valores de tensão no topo. Tais medidas foram utilizadas para uma checagem inicial da consistência dos modelos estruturais utilizados na comparação cega. As frequências foram medidas por meio da imposição de uma excitação forçada, de frequência crescente, na base do riser.

Em cada ensaio, o carro de reboque era acelerado até uma velocidade constante especificada, e mantido nesta velocidade para a aquisição de dados por um período de 60 segundos. A faixa de números de Reynolds ensaiada variou entre 2.500 a 25.000. Foram disponibilizadas nove condições, com diferentes velocidades e valores de tração no topo, para a análise comparativa dos códigos computacionais. Estas condições são mostradas na Tabela 7.2.

7.1.4 Modelagem Numérica do Riser

Devido à complexidade geométrica, foram feitas diversas suposições para a modelagem numérica do riser em questão. Assumiu-se que a rigidez flexional do riser seria devido somente ao núcleo metálico, não havendo contribuição dos demais elementos (envoltório plástico, cabos elétricos dos extensômetros, etc). O riser foi considerado completamente inundado, e sua massa dada pela massa linear especificada.

O código foi adaptado para suportar a condição de corrente nula no tubo de vácuo. Frequentemente, problemas numéricos ocorrem no MVD quando o valor da corrente é muito baixa. Assim, para evitar tais problemas, um gatilho numérico foi implementado. Caso a velocidade da corrente relativa – no caso, devido somente ao deslocamento do riser no interior do tubo de vácuo – ficasse abaixo de um dado valor limite, a seção hidrodinâmica correspondente é desligada, não contribuindo mais para a integração das forças sobre o cilindro.

O riser foi dividido em 60 seções hidrodinâmicas ao longo do comprimento. Cada seção foi dividida em 128 painéis. Foi utilizado um passo de tempo computacional de 0,01 segundos. As frequências naturais, utilizadas para a avaliação estática e para o cálculo dinâmico da estrutura, foram calculadas através do problema de autovalores generalizado, como descrito nos capítulos anteriores. No caso dinâmico, não foi introduzida a massa adicional.

7.1.4.1 Comparação dos Resultados

A Tabela 7.3 mostra uma comparação entre resultados experimentais e calculados numericamente, das frequências naturais associadas aos modos de vibração da estrutura. Foram calculadas as frequências para três valores diferentes de tração no topo, tanto com o riser em ar como em água (inundado). No experimento, o riser foi posto a vibrar forçadamente, até que o modo de vibração correspondente fosse obtido, utilizando-se a frequência de excitação como resultado. Para o cálculo dos casos com o riser em água, foi utilizado um coeficiente de massa adicional C_a igual a 1. Os resultados calculados são, de uma forma geral, maiores do que os obtidos no experimento, notadamente para os modos mais elevados. No entanto, a maior diferença percentual observada foi da ordem de 3%, diferença considerada aceitável para esta análise.

As Figuras 7.7 a 7.15 mostram as envoltórias máximas dos deslocamentos transversais e longitudinais do riser, comparados aos dados experimentais. Os deslocamentos foram adimensionalizados em relação ao diâmetro do riser nas direções x e y , e em relação ao comprimento na direção z . De uma forma geral, observa-se uma concordância razoável nas envoltórias dos modos de vibração mais baixos. Porém, os deslocamentos máximos são sempre inferiores aos resultados experimentais. Tais resultados foram observados recorrentemente em todos os códigos avaliados na comparação cega, como mostram as Figuras 7.16 a 7.19.

Para os Casos 1 e 2, a simulação numérica conseguiu recuperar com boa fidelidade

as envoltórias de deslocamentos máximos, tanto na direção in-line como na transversal. Para o Caso 1, observa-se que o segundo modo de vibração foi o modo excitado, e no Caso 2 o terceiro modo é observado nas simulações numéricas, em aderência com o experimento. Nota-se uma concordância razoável nas amplitudes máximas de vibração observadas em ambos os casos, embora os resultados numéricos apresentem uma amplitude ligeiramente inferior às observadas no experimento.

A partir do Caso 3, as simulações numéricas passa a não reproduzir o comportamento observado nos experimentos, tanto para as amplitudes máximas como nos modos de vibração predominantes. Para os casos simulados, a máxima amplitude na direção transversal de um modo geral não ultrapassa o valor de 0,5 vezes o diâmetro do riser, enquanto que nos experimentos, dependendo da intensidade da corrente, são observadas amplitudes máximas da ordem de um diâmetro do riser. É sabido que, via de regra, as simulações numéricas bidimensionais do escoamento ao redor de risers livres para vibrar não são capazes de reproduzir a amplitude adimensional máxima igual à unidade. Esta incapacidade pode ser explicada basicamente pelo fato de que, segundo MENEGHINI et al. (2001), uma simulação bidimensional não consegue capturar corretamente a diferença de fase entre a força de sustentação e o deslocamento do cilindro. A incapacidade é proveniente da componente da força hidrodinâmica que está em fase com a velocidade do corpo, ou seja, a parcela correspondente ao amortecimento hidrodinâmico.

Em algumas das demais simulações, observa-se ainda uma diferença do modo de vibrar predominante, em relação ao experimento. Nos Casos 4 a 8, as simulações numéricas apresentam um modo de vibrar acima do caso experimental correspondente.

Na direção alinhada ao escoamento, a diferença das amplitudes máximas entre o experimental e o numérico varia entre uma unidade adimensional – Caso 3 – a até cerca de quatro unidades adimensionais – Caso 9. Uma observação importante é que, via de regra, as amplitudes transversais observadas em simulações numéricas são inferiores às experimentais, para as mesmas condições. No entanto, as amplitudes na

direção do escoamento normalmente têm uma boa concordância com os experimentos. Considerando ainda que todos os códigos avaliados apresentaram esta tendência – ver CHAPLIN et al. (2005a). Tal constatação leva à hipótese de que, para os casos simulados, provavelmente existe alguma falha na modelagem estrutural do riser. As Figuras 7.16 a 7.19 mostram um comparativo dos resultados obtidos pelos diferentes códigos. Pode-se notar que todos apresentam deslocamentos *in-line* menores do que os valores experimentais. Nos quatro códigos de CFD, isto também pode estar relacionado ao fato de que a menor amplitude de deslocamento na direção transversal leva a uma subestimação da amplificação do arrasto. Outro fator que pode ter contribuído para a diferença de resultados é a presença de molas no sistema de tensionamento do topo do riser, adicionando um fator de complexidade no cálculo dos deslocamentos de alta amplitude. O comprimento extra médio obtido pela mola de topo teria um potencial significativo de afetar os deslocamentos máximos na direção *in-line*. Deve-se salientar que, no presente código, as extremidades do riser são consideradas como rótulas, com graus de liberdade apenas rotacionais.

Diâmetro externo	28 <i>mm</i>
Material externo	FEP
Comprimento entre juntas	13,12 <i>m</i>
Massa	1,47 <i>kg/m</i>
Massa (riser inundado)	1,85 <i>kg/m</i>
Peso submerso	12,1 <i>N/m</i>
Rigidez flexional	EI=29,9 <i>Nm²</i>
Amortecimento estrutural	0,33% do crítico
Rigidez axial	EA=5.88 <i>MN</i>
Rigidez da mola de topo	11,4 ou 38,1 <i>kN/m</i>

Tabela 7.1: Dados estruturais do riser

Caso	Veloc. corrente (m/s)	Tensão no topo (N)	Desv. padrão da tensão no topo (N)
1	0.16	405	2
2	0.21	407	3
3	0.31	457	3
4	0.40	506	8
5	0.54	598	15
6	0.60	670	14
7	0.70	743	8
8	0.85	923	14
9	0.95	1002	65

Tabela 7.2: Condições estudadas. A tensão no topo é a observada durante o experimento.

Tração no topo: 1018 N

Modo	Em ar (medido)	Em ar (calculado)	Dif. abs %
1	0,968	0,965	0,31
2	1,907	1,935	1,47
3	2,885	2,915	1,04
4	3,879	3,912	0,85
5	4,872	4,929	1,17
6	5,848	5,971	2,10
7	6,849	7,044	2,85
8	7,874	8,151	3,52

Tração no topo: 798 N

Modo	Em água (medido)	Em água (calculado)	Dif. abs %
1	0,660	0,649	1,70
2	1,327	1,302	1,88
3	1,966	1,965	0,06
4	2,635	2,641	0,24
5	3,323	3,336	0,39
6	4,043	4,053	0,24
7	4,767	4,796	0,60
8	5,516	5,568	0,95

Tração no topo: 1904 N

Modo	Em água (medido)	Em água (calculado)	Dif. abs %
1	1,037	1,034	0,29
2	2,046	2,071	1,21
3	3,084	3,113	0,95
4	4,099	4,165	1,60
5	5,127	5,228	1,96
6	6,222	6,305	1,33
7	7,298	7,399	1,38
8	8,371	8,513	1,69

Tabela 7.3: Freqüências naturais e modos de vibração, oscilações forçadas

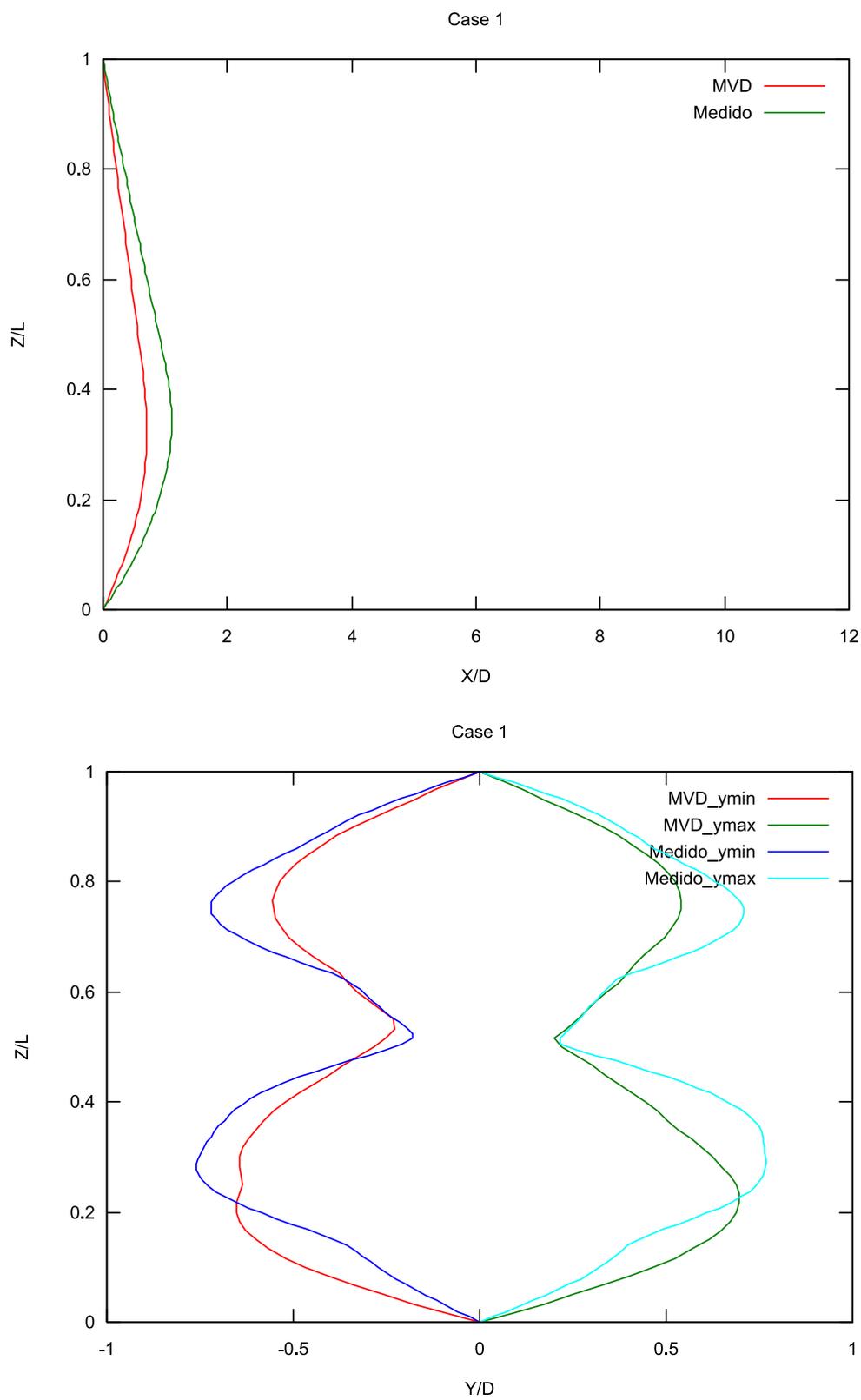


Figura 7.7: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 1

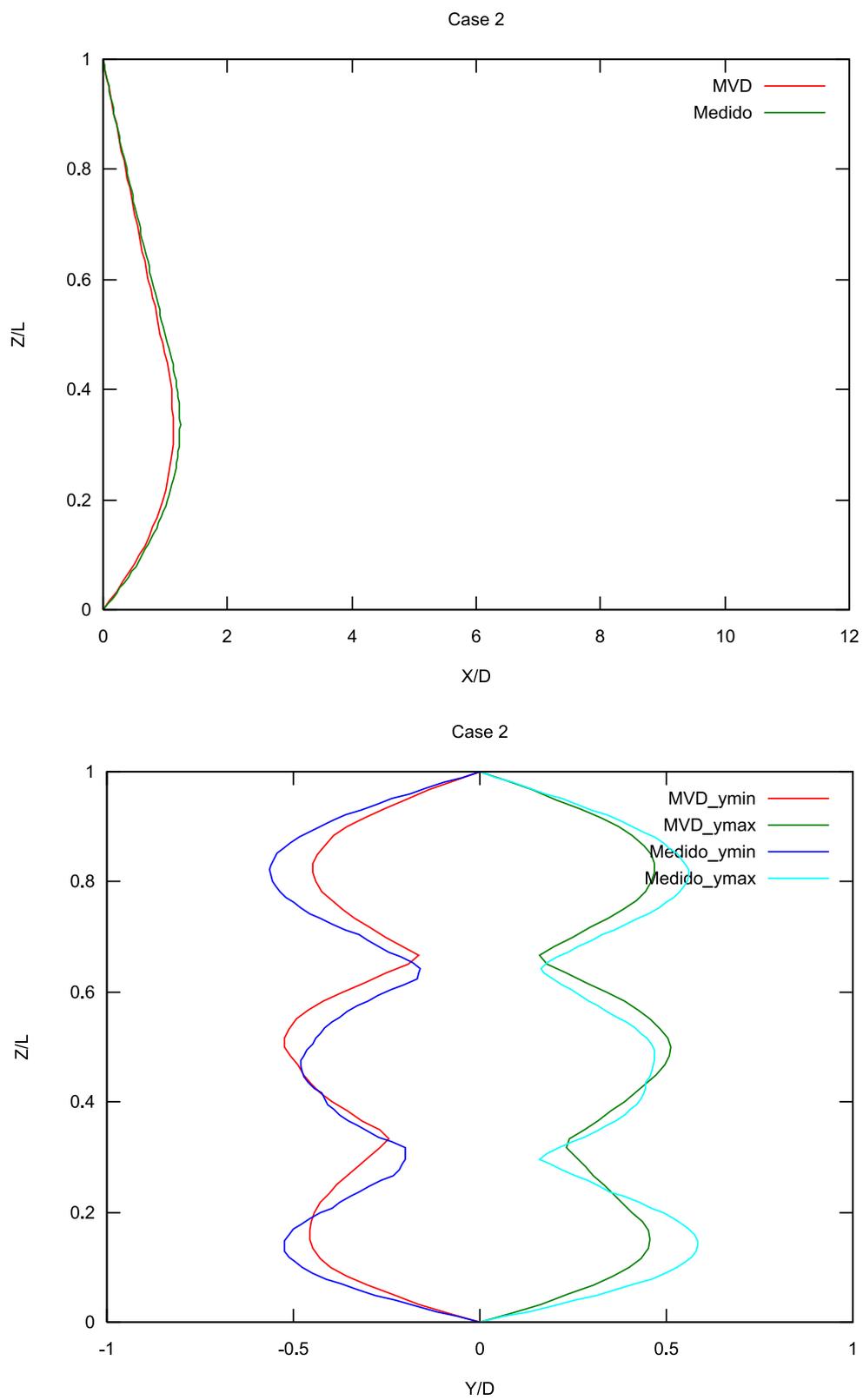


Figura 7.8: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 2

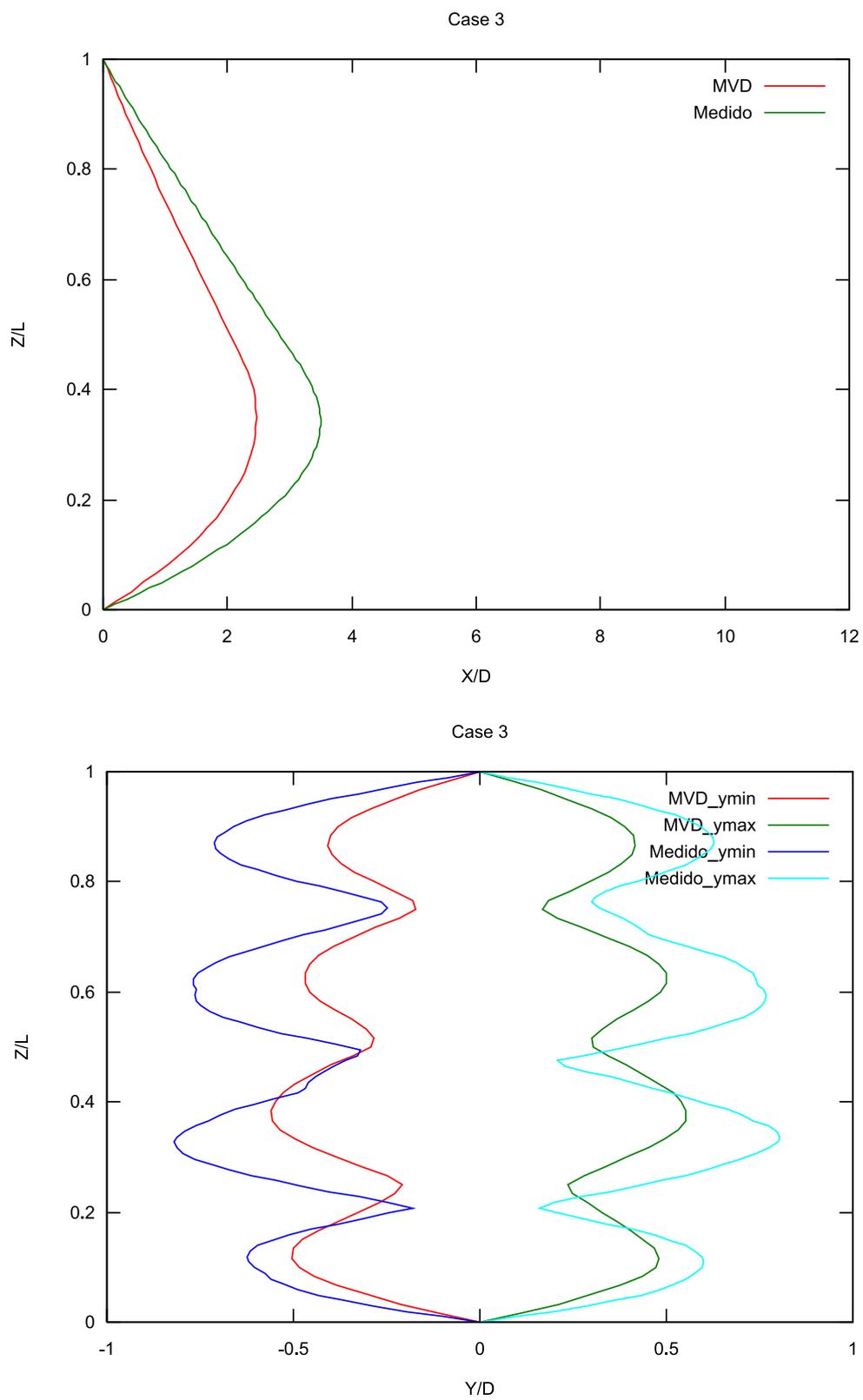


Figura 7.9: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 3

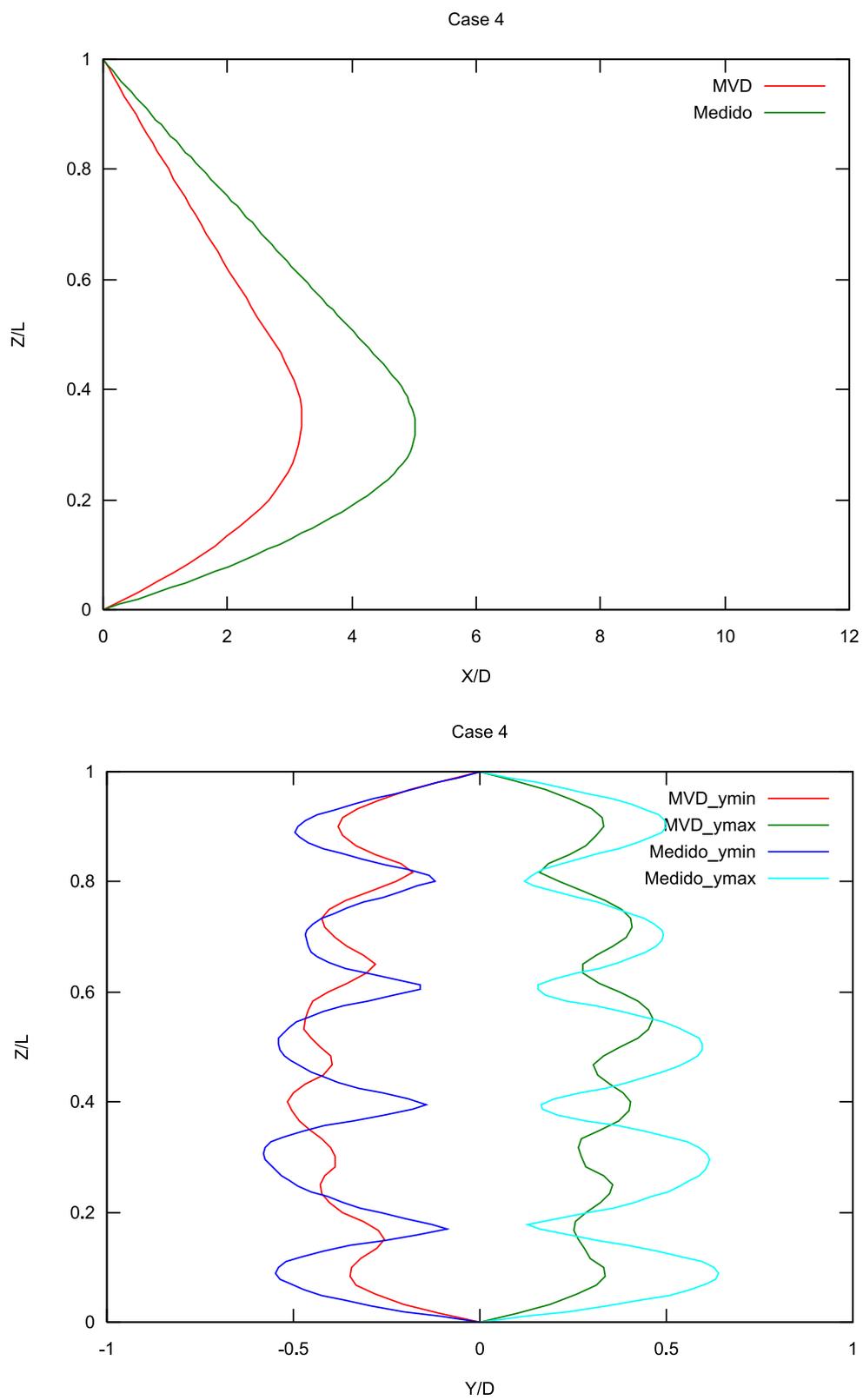


Figura 7.10: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 4

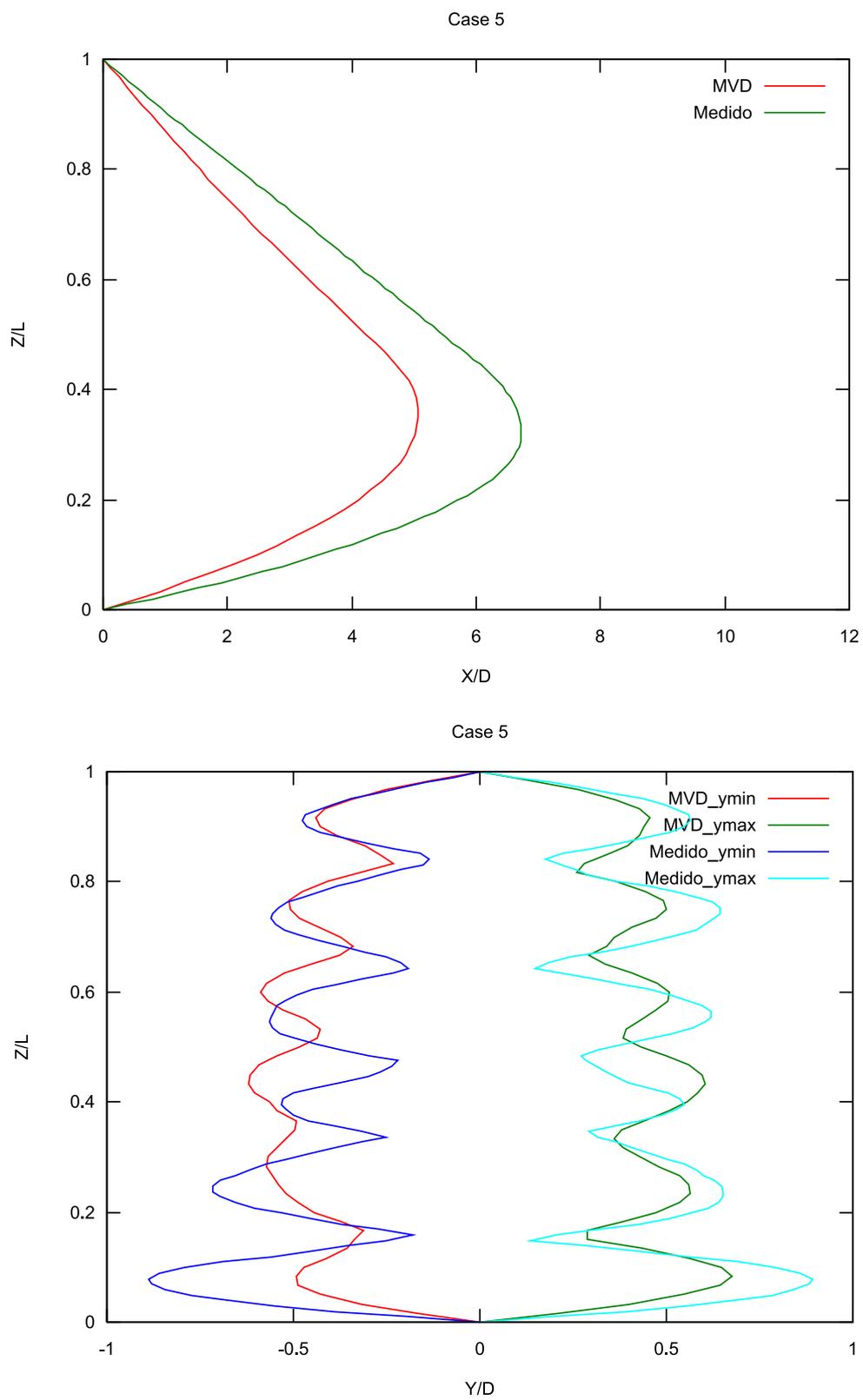


Figura 7.11: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 5

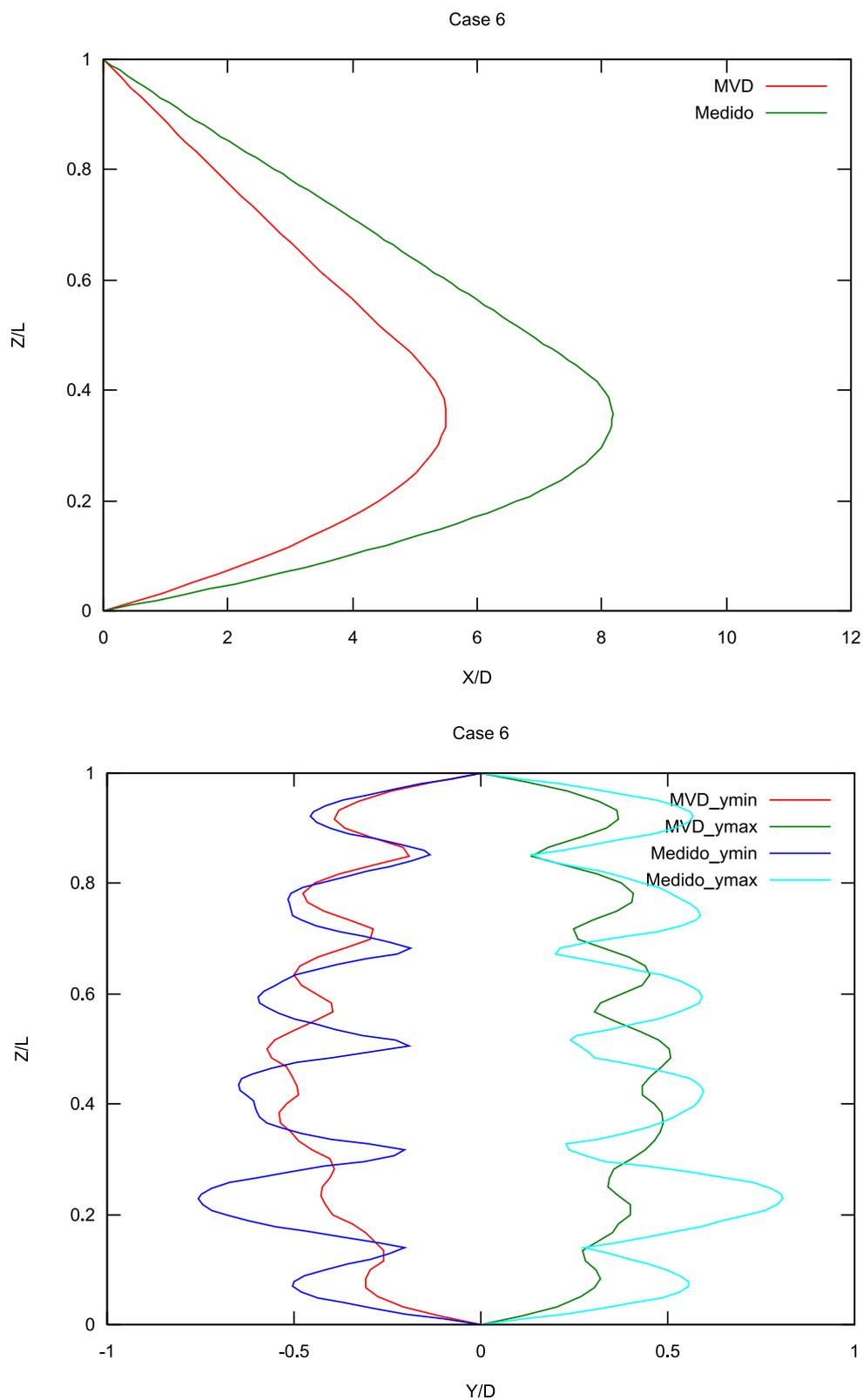


Figura 7.12: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 6

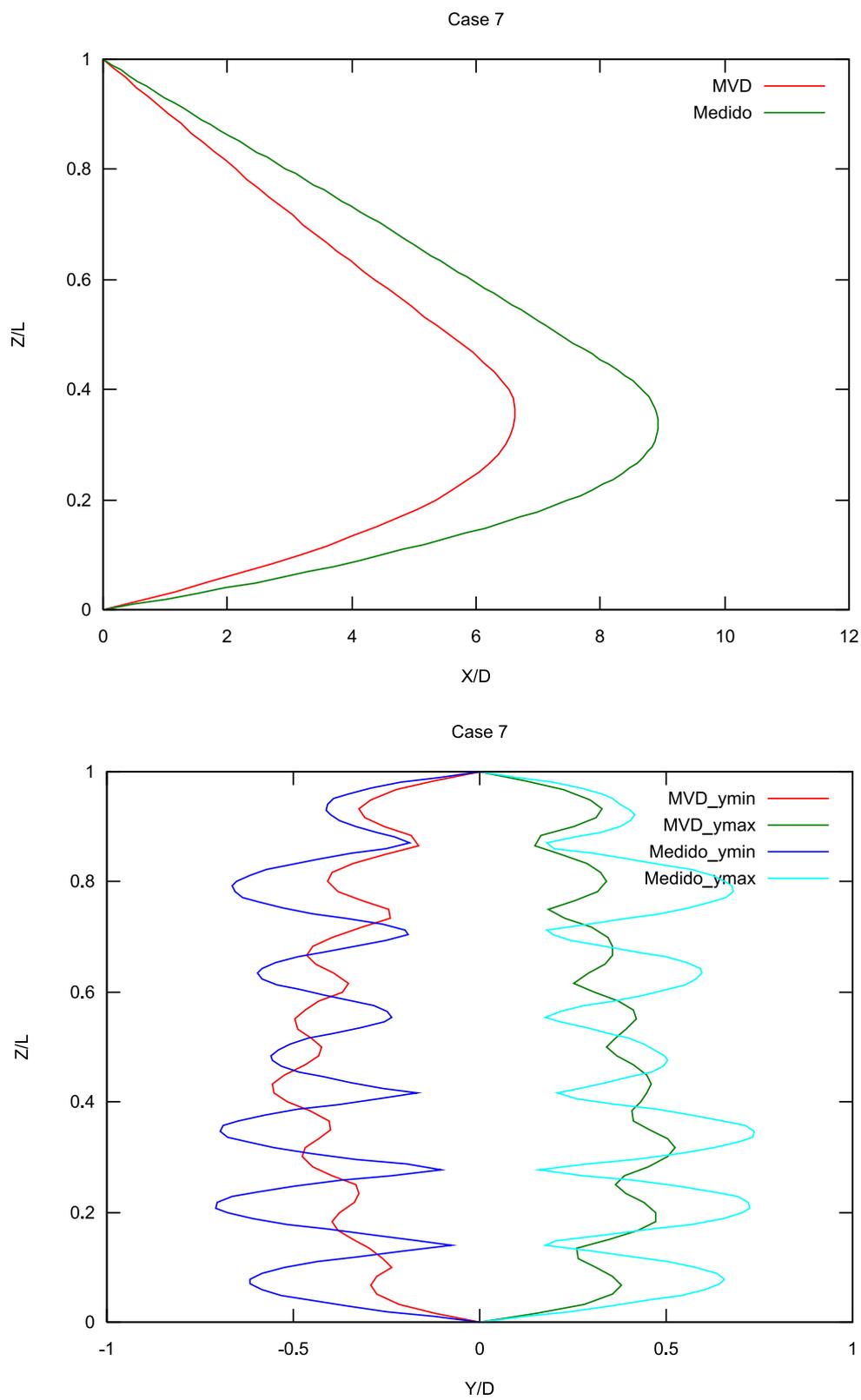


Figura 7.13: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 7

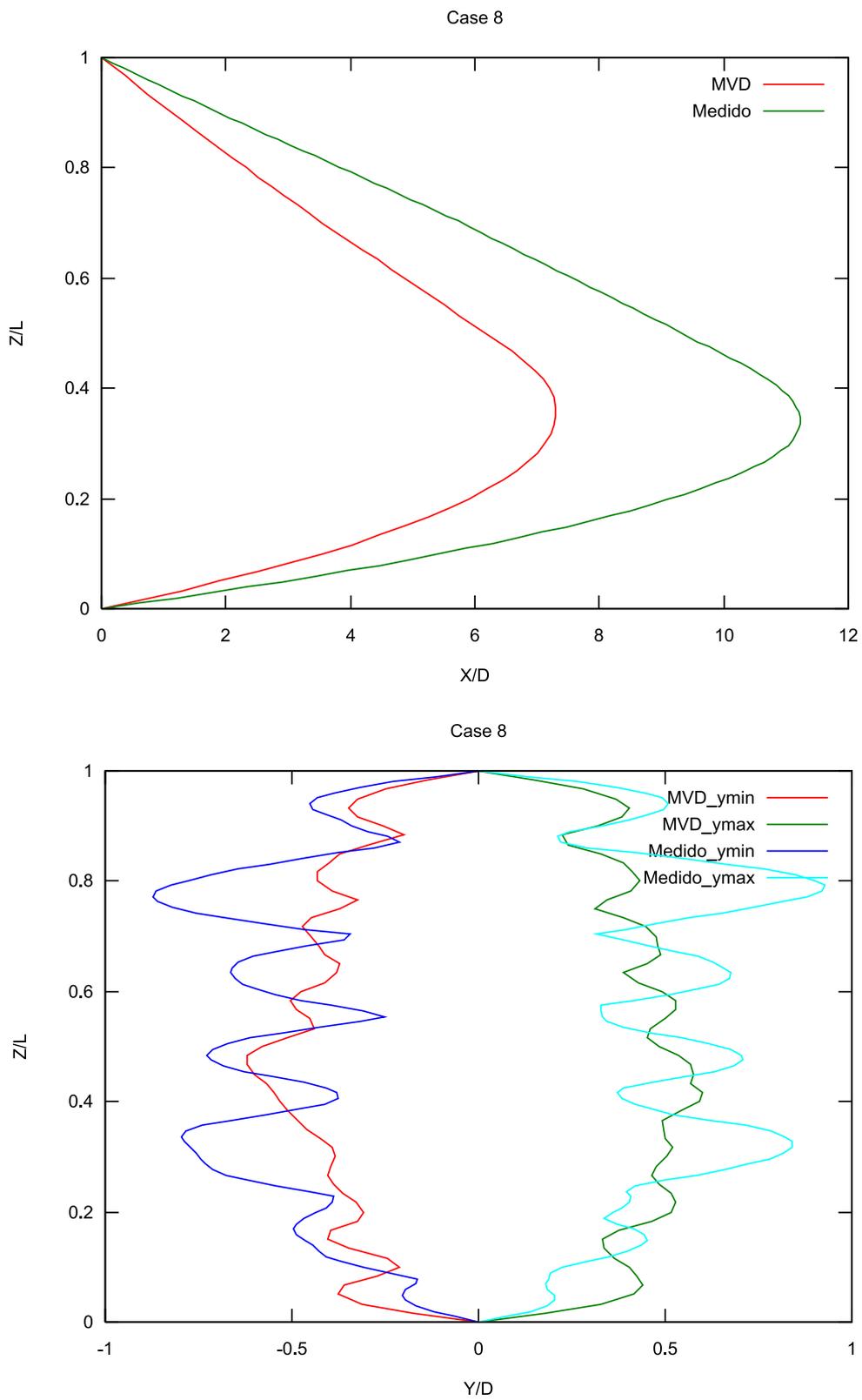


Figura 7.14: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 8

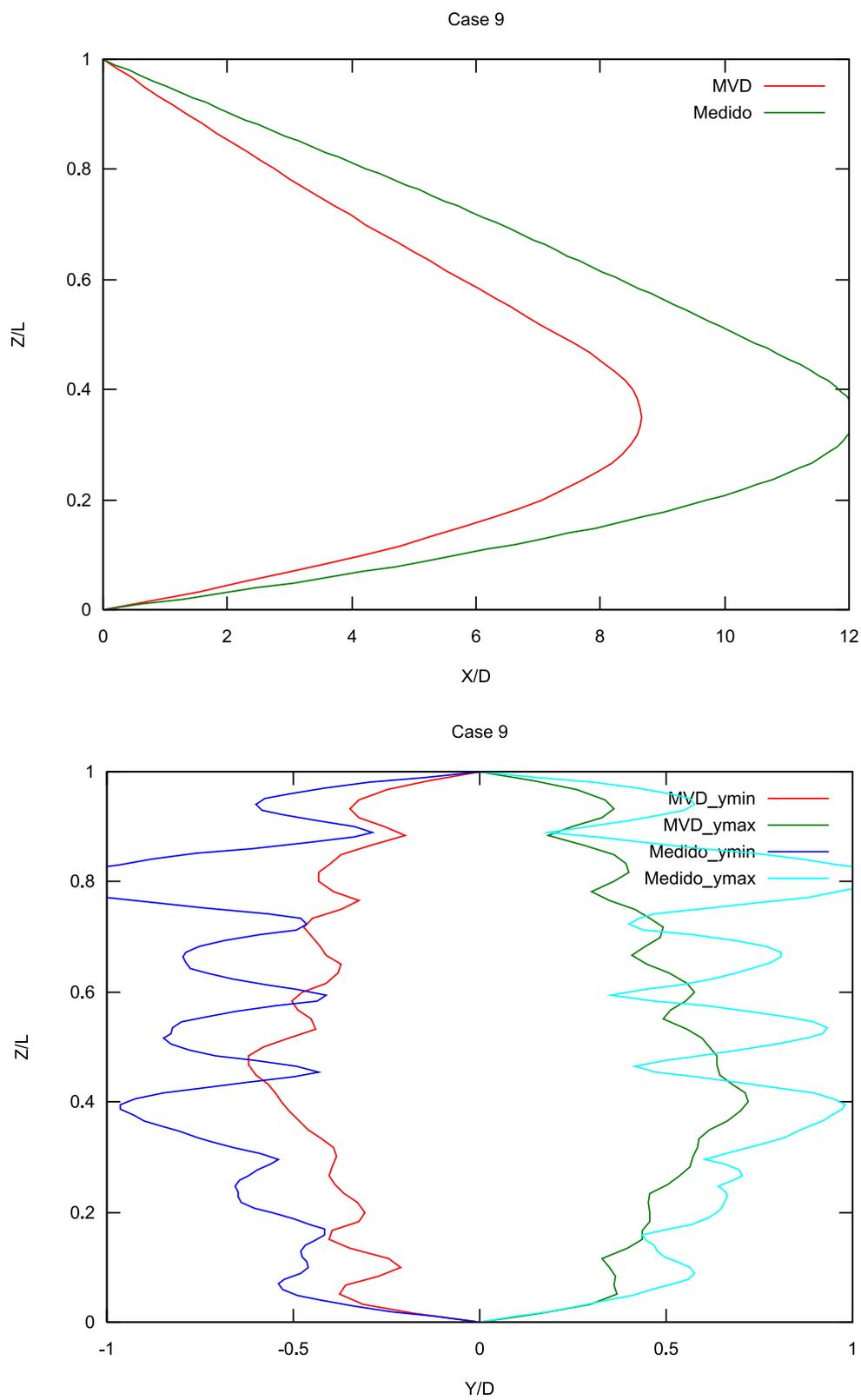


Figura 7.15: Deslocamentos longitudinais e transversais - Caso 9

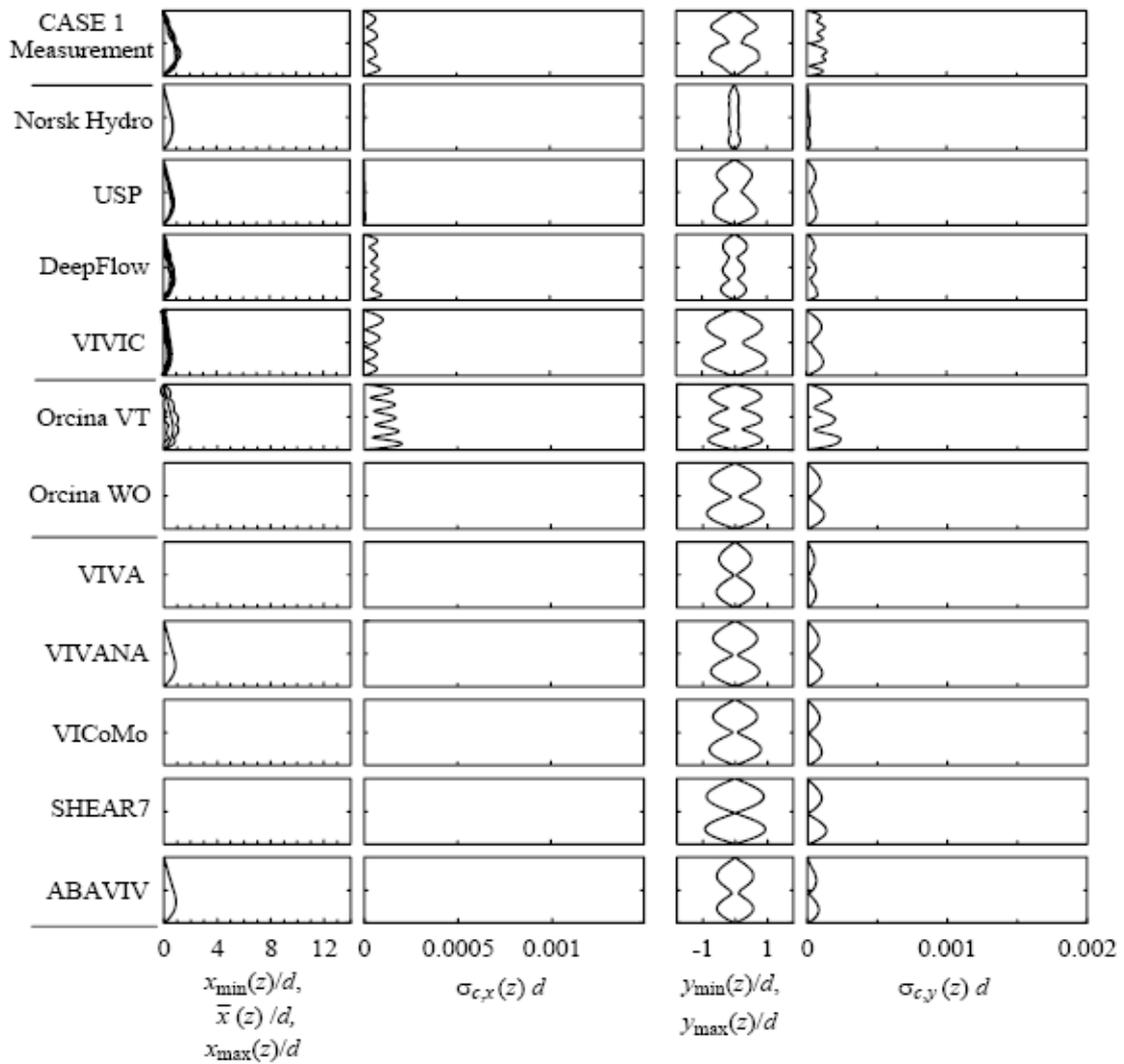


Figura 7.16: Comparação dos códigos avaliados - Caso 1

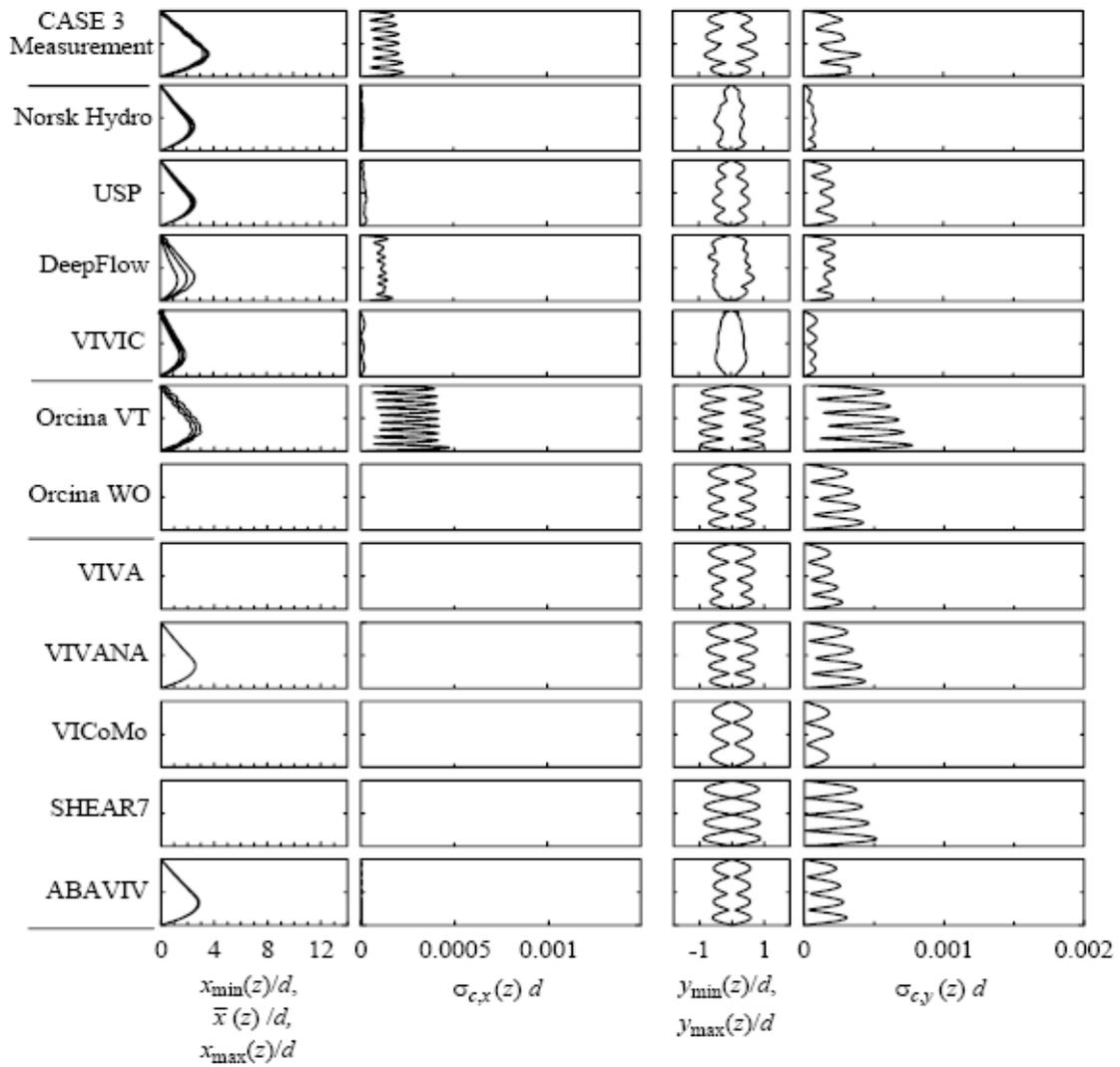


Figura 7.17: Comparação dos códigos avaliados - Caso 3

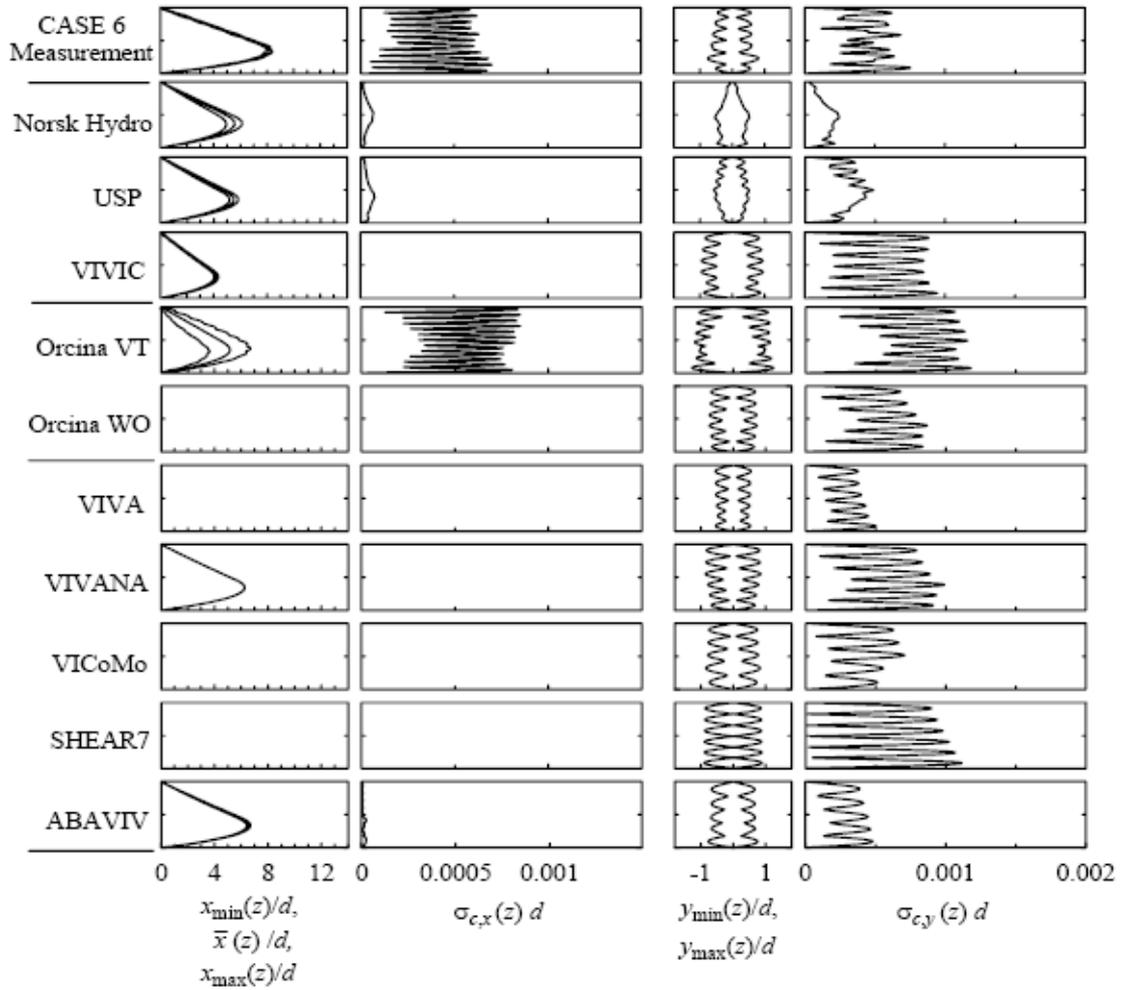


Figura 7.18: Comparação dos códigos avaliados - Caso 6

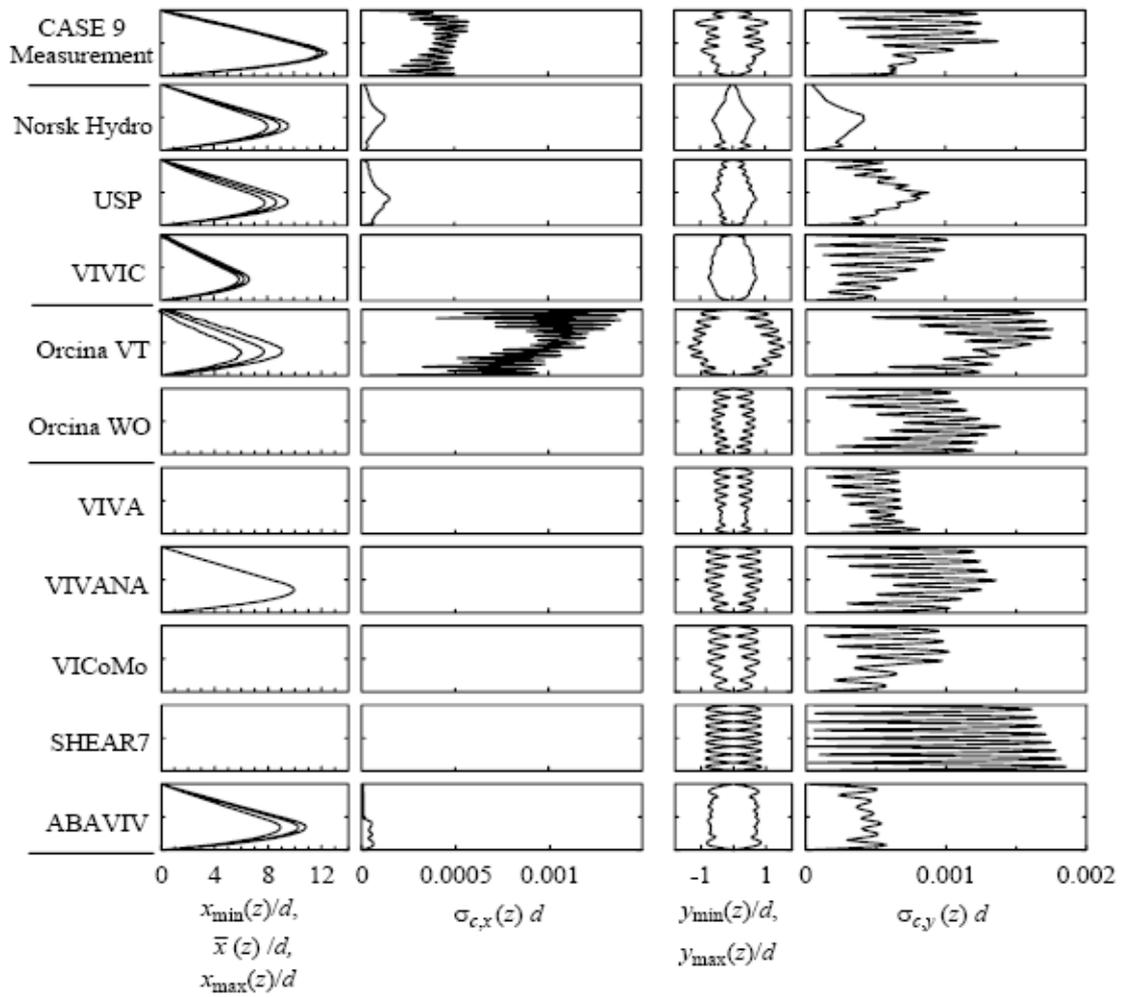


Figura 7.19: Comparação dos códigos avaliados - Caso 9

7.2 Aceleração de Desempenho Através do Processamento Paralelo

A Figura 7.20 mostra o tempo computacional total necessário para a simulação de um caso típico, utilizando-se diferentes números de processos. Nestas simulações, foram utilizadas as condições do Caso 1, especificadas na Tabela 7.2. Na figura, está também incluído o tempo teórico de simulação, em relação a uma simulação rodando de forma serial, considerando-se uma eficiência de 100% da paralelização, ou seja, desconsiderando-se as latências de comunicação e as chamadas às subrotinas necessárias à paralelização com o MPI. Não há diferenças significativas de desempenho, comparando-se o código serial com o código paralelo rodando em apenas um processo, o que denota o baixo impacto das chamadas às subrotinas paralelas no desempenho global do código. No entanto, nota-se uma redução dramática no tempo necessário para o término da simulação quando o código é paralelizado.

Conforme o esperado, o tempo total de simulação apresenta um comportamento aproximadamente igual a t/N , onde t é o tempo da simulação serial e N o número de processos empregados. Em uma situação ideal, o tempo da simulação paralela seria igual a t/N , desconsiderando-se as latências de comunicação inerentes à técnica empregada. Para uma melhor percepção do comportamento do desempenho do código quando um número maior de processos é utilizado na simulação – a chamada *escalabilidade* – um procedimento comumente utilizado é traçar a curva de aceleração de desempenho em comparação com o caso idealizado (linear), como mostrado na Figura 7.21. Esta curva apresenta de forma mais clara o impacto da latência de comunicação no desempenho global do método. Nota-se que o código apresenta um comportamento muito bom em termos de escalabilidade, pois há sempre uma aceleração de desempenho – embora com desvio continuamente maior da aceleração linear – com o aumento do número de processos utilizados na solução do problema, até o limite máximo testado de 60 processos. Este comportamento pode ser considerado normal, dada a maior latência

para a coleta e distribuição de dados com um número maior de processos. Muitas vezes, um código paralelizado apresenta uma estagnação ou até mesmo queda no desempenho com o aumento de EPs, dependendo do tipo e granularidade de dados do problema a ser resolvido e da arquitetura computacional utilizada. O código aqui demonstrado não apresenta tais características, pelo menos até o número de processos utilizados.

A análise foi restrita a até 60 processos pois, como comentado no Capítulo 6, a distribuição de dados entre os processos foi realizada através de chamadas do tipo *scatter* e *gather*, com pacotes de dados de mesmo tamanho. Como o cluster onde foram rodadas as simulações possui 64 máquinas, optou-se por limitar o número de processos a 60, para uma maior flexibilidade na construção da curva de escalabilidade.

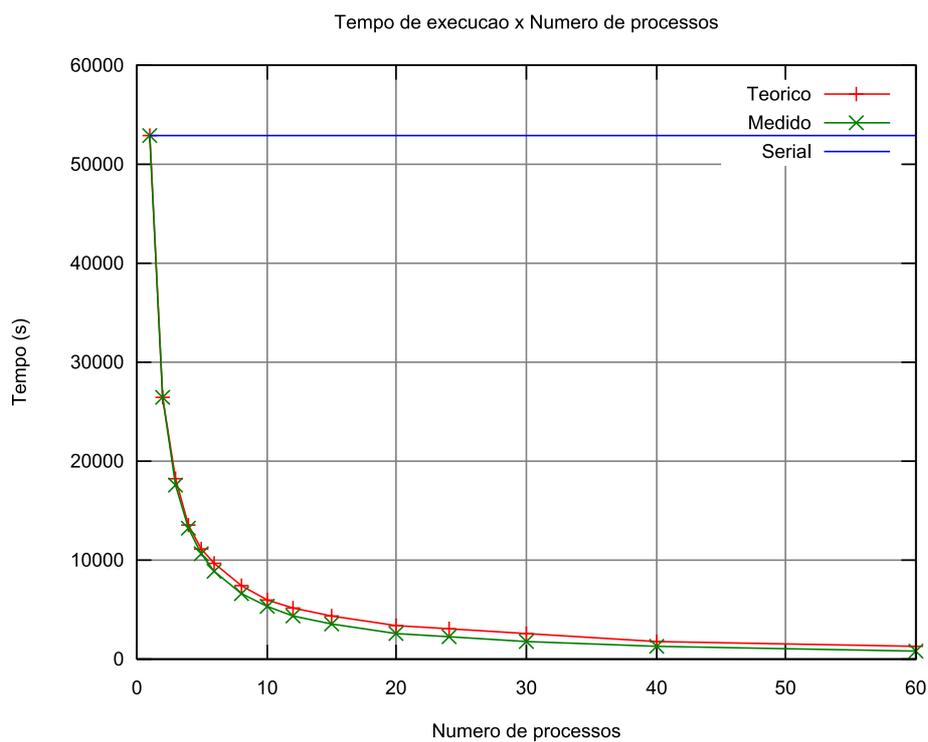


Figura 7.20: Comparativo de tempos de execução do código

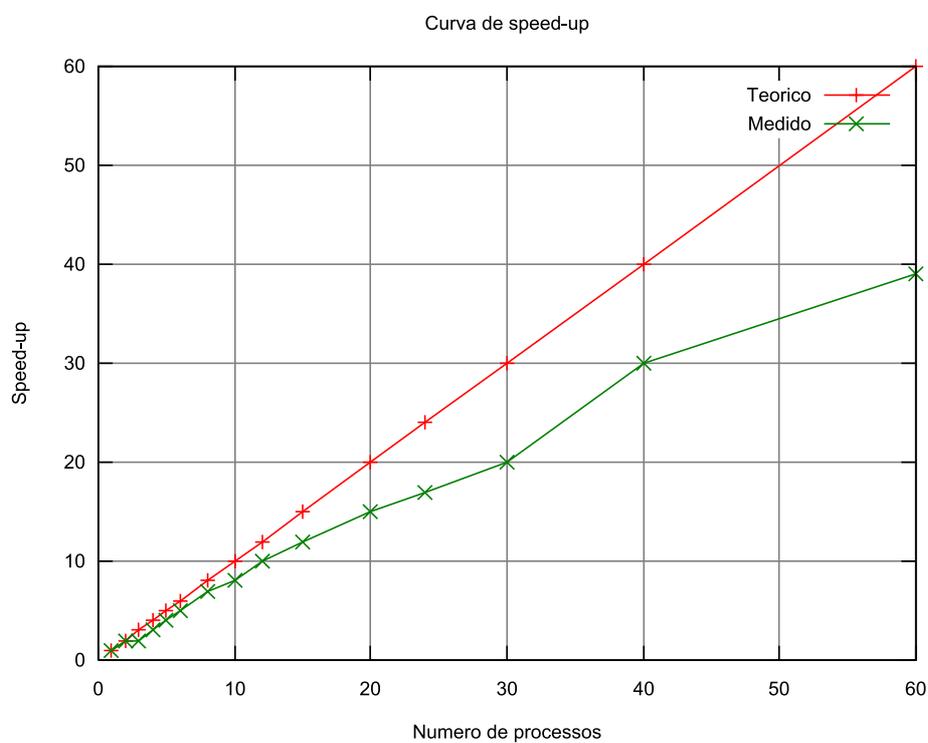


Figura 7.21: Curva de aceleração de desempenho

Capítulo 8

Conclusões e Comentários

Neste trabalho, foi demonstrada a aplicabilidade da técnica de paralelização para problemas envolvendo a interação hidroelástica de *risers* marítimos. O problema foi desmembrado em duas partes: a solução da estrutura no domínio do tempo, e a solução hidrodinâmica. A estrutura do *riser* foi modelada como elementos de viga do tipo Euler-Bernoulli, e resolvida no domínio do tempo através do Método dos Elementos Finitos. Em cada um dos nós da estrutura discretizada do *riser* é feita uma seção bidimensional, e em cada uma destas seções são avaliadas as forças hidrodinâmicas, tanto na direção do escoamento como a direção transversal, através do Método dos Vórtices Discretos, em uma formulação puramente lagrangeana. Efeitos viscosos foram modelados através da técnica do núcleo crescente. O acoplamento entre as faixas hidrodinâmicas se dá somente através da solução da estrutura. Desta forma, pode-se considerar a abordagem aqui descrita como uma técnica quase-tridimensional.

Como as forças hidrodinâmicas são avaliadas através de seções bidimensionais do escoamento, as características tridimensionais do mesmo são ignoradas pela presente metodologia. No entanto, assumindo que a componente preponderante da vorticidade da esteira está alinhada com a seção bidimensional do cilindro, e assumindo a hipótese de que os gradientes de todas as variáveis do escoamento na direção do comprimento do *riser* são menos importantes, uma abordagem bidimensional, como uma primeira aproximação, deve a princípio fornecer resultados satisfatórios. Deve-se destacar que,

como ferramenta de engenharia, uma simulação tridimensional completa do escoamento ao redor do *riser* se mostraria impraticável no nível atual de capacidade computacional disponível.

A metodologia aqui apresentada foi avaliada em relação à metodologia *quasi-steady* proposta por FERRARI (1998), e ao MVD descrito em FREGONESI (2002), apresentando boa aderência para os casos analisados. Os casos utilizados na validação foram também rodados para diferentes números de EPs, sendo obtidos sempre os mesmos resultados. Assim, confirma-se que a paralelização, como aqui abordada, não influencia a resposta dinâmica do *riser*, fator primordial para a validade da utilização da técnica.

Embora a abordagem até aqui descrita permita, a princípio, a simulação de um *riser* completo, na prática ainda é muito custosa em termos de tempo computacional. Para solucionar este problema, a técnica de processamento paralelo foi implementada. Através desta técnica, o esforço computacional pode ser dividido entre um determinado número de elementos de processamento – que podem ser tanto de memória compartilhada, como no caso de supercomputadores, quanto de memória distribuída, como no caso de *clusters* de computadores.

A técnica de processamento paralelo foi aplicada através do MPI, que consiste em uma biblioteca de subrotinas codificadas especificamente para processamento paralelo, e que pode ser utilizada em arquiteturas tanto de memória distribuída como de memória compartilhada. O MPI, no estágio atual, é uma ferramenta de uso bastante disseminado, sendo facilmente portátil para diferentes arquiteturas e com um ativo desenvolvimento pela indústria e comunidade científica.

Como as seções hidrodinâmicas são resolvidas de forma independente umas das outras, o cálculo das mesmas pode ser feito de maneira simultânea, ou em paralelo, sem interferência com as demais seções em um mesmo nível temporal. Assim, uma metodologia mestre-escravo foi implementada neste trabalho. Ao processo mestre é delegada a tarefa da solução da estrutura através do MEF, a distribuição e coleta de dados das diversas seções hidrodinâmicas utilizadas para descrever o escoamento

ao redor da estrutura, e a sincronização de todas as tarefas. Os processos escravos recebem as informações da posição e velocidade da estrutura, através dos dados enviado pelo processo mestre, e as utilizam no cálculo do escoamento através do MVD. Como resposta, enviam ao processo mestre as forças nas direções longitudinal e transversal, que por sua vez as utiliza na solução da estrutura.

A comunicação de dados entre os processos mestre e escravos foi feita através de operações do tipo *scatter/gather*, com pacotes de dados de mesmos tamanhos entre os processos. Esta abordagem permite uma alta eficiência de comunicação, melhor portabilidade e maior capacidade de depuração e manutenção do código computacional. A quantidade de operações de comunicação entre os processos foi mantida no menor nível possível, com o intuito de diminuir a latência de comunicação entre os processos. O código paralelo foi concebido de uma maneira modular, para maior facilidade de manutenção e expansão. Na implementação atual, o código serial pode ser recuperado a partir do paralelo, simplesmente comentando-se as chamadas às subrotinas paralelas no código fonte. A portabilidade do código fonte para diversas arquiteturas computacionais é obtida utilizando-se somente chamadas às bibliotecas padrão do MPI.

A utilização do processamento paralelo permite uma grande otimização do desempenho computacional, como mostram as curvas de tempo e de *speed-up* apresentadas neste trabalho. Nota-se uma redução dramática no tempo necessário para o término da simulação quando o código é paralelizado. O código apresenta um comportamento muito bom em termos de escalabilidade, pois há sempre uma aceleração de desempenho com o aumento do número de processos utilizados na solução do problema, não apresentando estagnação ou queda de desempenho até o limite máximo de processos testado na arquitetura disponível – *cluster* com 64 nós de processamento.

A curva de aceleração de desempenho mostra um desvio do comportamento linear. Este resultado é esperado, uma vez que o *speed-up* linear é uma condição idealizada, não levando em conta a latência de comunicação inerente à técnica de processamento paralelo e nem as regiões não paralelizadas do código. A latência de comunicação,

no entanto, pode ser diminuída e a curva aproximar-se da curva idealizada, com a utilização de interfaces de comunicação mais rápidas do que a disponível, como por exemplo Gigabit Ethernet ou Mirinet.

O código computacional para a simulação do *riser* poderia ainda ser otimizado através da paralelização de algumas regiões que ainda são resolvidas de forma serial, como por exemplo a solução da estrutura. Como esta etapa, no código aqui demonstrado, é realizada apenas no elemento processador mestre, e sendo o mesmo uma máquina biprocessada com arquitetura de memória compartilhada, os laços ou *loops* necessários para a solução da parte estrutural podem ser paralelizados através do OpenMP. Para os casos aqui demonstrados, a solução da parte estrutural não é a etapa limitante em termos de tempo computacional. Porém, para estruturas maiores, discretizadas em até milhares de elementos, a solução da estrutura pode representar uma parte significativa do esforço computacional, justificando assim a sua paralelização.

O código aqui apresentado pode ser estendido, com algumas modificações, para o caso de agrupamentos de *risers*, o que constitui em uma sugestão para possíveis trabalhos futuros. A inserção de um ou mais corpos por seção hidrodinâmica implica em alguns cuidados adicionais a serem implementados, como a checagens da colisão dos vórtices com os corpos, checagem de colisão entre os corpos, amalgamação dos vórtices somente nas regiões afastadas dos corpos, adaptação das condições de contorno, entre outros. A parte estrutural, a princípio, não sofre alterações com a inclusão de mais estruturas ao cálculo. Porém, com o aumento da demanda computacional para o cálculo das deformações das demais estruturas, a paralelização da parte estrutural do código pode se tornar necessária.

Neste trabalho, a solução do escoamento é realizada através do MVD, que possibilita a obtenção do carregamento imposto à estrutura com um custo computacional relativamente baixo. No entanto, a implementação do código permite a substituição do MVD, sem grandes dificuldades, por outros métodos de solução, como por exemplo o Método dos Volumes Finitos ou o Método de Elementos Finitos Espectral, entre

outros. Com estas técnicas, a solução do escoamento pode ser realizada de forma bidimensional, apenas substituindo o MVD como ferramenta de cálculo, como também pela solução tridimensional do escoamento.

A técnica de processamento paralelo, como abordada neste trabalho, viabiliza a simulação de *risers* com características e dimensões representativas das condições reais encontradas em campo, a um custo computacional factível com os requerimentos necessários para sua utilização como uma ferramenta de engenharia. A perspectiva aberta com a utilização do processamento paralelo talvez seja a característica que mais se destaca neste trabalho. Exemplificando para os casos aqui demonstrados, uma simulação que, se executada de forma serial levaria algo em torno de dezesseis horas para ser concluída, pôde ser completada em um período de tempo cerca de 35 vezes menor. Deve-se destacar, no entanto, que as características de granularidade do problema, na forma como foi abordado neste trabalho são particularmente favoráveis à paralelização, com baixa quantidade e volume de comunicação inter-processual.

Referências Bibliográficas

- BARBA, L.; LEONARD, A. e ALLEN, C. (2005). Advances in viscous vortex methods – meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47:387–421.
- BARRETT, R. et al. (1992). *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. National Science Foundation.
- BATHE, K. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall.
- BEARMAN, P. (1965). Investigation of the flow behind a two-dimensional model with a blunt trailing edge fitted with splitter plates. *J. Fluid Mech.*, 21:241–255. Part 2.
- BEARMAN, P.; GRAHAM, J. e OBASAJU, E. (1984). A model equation for the transverse forces on cylinders in oscillatory flows. *Applied Ocean Research*, 6(3):166–172.
- BEARMAN, P. W. (1984). Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Fluid Mechanics*, 16:195–222.
- BEARMAN, P. W. e WADCOCK, A. J. (1973). The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream. *Journal of Fluid Mechanics*, 61:499–511.
- BLEVINS, R. D. (1990). *Flow Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York, 2a. edição.

- CHAPLIN, J. et al. (2004a). Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. In de Langre & Axisa ed., editor, *Flow Induced Vibrations*.
- CHAPLIN, J. et al. (2004b). Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser in a stepped current. In *Proceedings of FIV2004*.
- CHAPLIN, J. et al. (2005a). Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. *Journal of Fluids and Structures*, 21.
- CHAPLIN, J. et al. (2005b). Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a steeped current. *Journal of Fluids and Structures*, 21.
- CHORIN, A. J. (1973). Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 57:785–769.
- CLEMENTS, R. R. (1973). An inviscid model of two-dimensional vortex shedding. *Journal of Fluid Mechanics*, 57(2):321–336.
- COTTET, G. e KOUMOUTSAKOS, P. (2000). *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University, UK.
- CRAIG, R. R. (1981). *Structural Dynamics – An Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons.
- FALTINSEN, O. (1990). *Sea loads on ships and offshore structures*. Cambridge University Press.
- FERRARI, J. A. (1998). *Hydrodynamic Loading and Response of Offshore risers*. Ph.d. thesis, University of London, UK.
- FREGONESI, R. (2002). Simulação numérica do escoamento tridimensional ao redor de um agrupamento de cilindros em tandem. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil.

- FUJARRA, A.; PESCE, C.; FLEMMING, F. e WILLIAMSON, C. (2001). Vortex-induced vibration of a flexible cantilever. *J. Fluids and Structures*, 15:651–658.
- GERRARD, J. (1966). The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *J. Fluid Mech.*, 25(Part 2):401–413.
- GRAHAM, J. M. R. (1988). Computation of viscous separated flow using a particle method. In *Numerical Methods in Fluid Mechanics*, volume 3, pp. 310–317. Oxford University Press.
- GREENGARD, C. (1985). The core spreading vortex method approximates the wrong equation. *Journal of Computational Physics*, 61:345–348.
- KHALAK, A. e WILLIAMSON, C. H. K. (1996). Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures*.
- LARSEN, C. e HALSE, K. (1995). Comparisons of models for vortex-induced vibrations of slender marine structures. In *Proceedings of the 6th Conference on Flow-Induced Vibration*, London, UK. A.A. Balkema Publishers.
- LEWIS, R. I. (1991). *Vortex Element Methods for fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge.
- MENEGHINI, J. (1993). *Numerical Simulation of Bluff Body Flow Control Using a Discrete Vortex Method*. Phd thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London.
- MENEGHINI, J.; SALTARA, F.; SIQUEIRA, C. e FERRARI Jr., J. (2001). Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements. *J. Fluids and Structures*, 15:327–350.
- MOURELLE, M. (1993). *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Constituídos por Linhas Marítimas*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- NAGANO, S.; NAITO, M. e TANAKA, H. (1982). A numerical analysis of two-dimensional flow past a rectangular prism by a discrete vortex method. *Computers and Fluids*, 10(4):243–259.
- PARK, W. e HIGUCHI, H. (1989). Computation of flow past single and multiple bluff bodies by a vortex tracing method. Tech. report, University of Minnesota, Mineapolis, USA.
- PATEL, M. H. e WITZ, J. A. (1991). *Compliant Offshore Structures*. Butterworth-Heinemann, England.
- PESCE, C. (1997). *Mechanics of Submerged Tubes and Cables in Catenary Configuration: analytical and experimental approaches*. Tese de livre docência, Universidade de São Paulo. (in portuguese).
- ROSHKO, A. (1961). Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 10:354.
- SALTARA, F. (1999). *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Cilindros*. Tese de doutorado, EPUSP Universidade de São Paulo, Brasil.
- SALTARA, F. (2002). Comunicação pessoal.
- SARPKAYA, T. (1989). Computational methods with vortices: the 1988 freeman scholar lecture. *Journal of Fluids Engineering*, 111:5–52.
- SIQUEIRA, C. R. (1999). *Simulação numérica do escoamento ao redor de cilindros: aplicação a problemas bi e tridimensionais*. Tese de doutorado, EPUSP Universidade de São Paulo, Brasil.
- SMITH, I. e GRIFFITHS, D. (1988). *Programming the Finite Element Method*. John Wiley & Sons.
- SPALART, P. e LEONARD, A. (1981). Computation of separated flow by a vortex algorithm. *AIAA*, 81:1246.

- WARBURTON, G. (1976). *The dynamical behaviour of structures*. Pergamon Press, 2a. edição.
- WILLDEM, R. H. J. e GRAHAM, J. M. R. (2000). Numerical prediction of viv on long flexible circular cylinders. *Journal of Fluid and Structures*, 15:659–669.
- WILLIAMSON, C. e GOVARDHAN, R. (2004). Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:413–455.
- WILLIAMSON, C. e ROSHKO, A. (1988). Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *J. Fluids and Structures*, 2:355–381.
- WILLIAMSON, C. H. K. (1985). Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 159:1–18.
- YAMAMOTO, C. (2002). Simulação numérica do escoamento tridimensional ao redor de cilindros em configuração lado-a-lado. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil.
- ZDRAVKOVICH, M. M. (1977). Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 99:618–633.
- ZDRAVKOVICH, M. M. (1987). The effects of interference between circular cylinders in cross flow. *Journal of Fluids and Structures*, 1:239–261.
- ZIENKIEWICZ, O. e MORGAN, K. (1983). *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons, New York.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)