

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES EM VIGAS COM**  
**COMPORTAMENTO GEOMETRICAMENTE**  
**NÃO-LINEAR**

**Autor: Ivan Henrique Gonçalves**

**Orientador: Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide**

Itajubá, Março de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES EM VIGAS COM**  
**COMPORTAMENTO GEOMETRICAMENTE**  
**NÃO-LINEAR**

**Autor: Ivan Henrique Gonçalves**

**Orientador: Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide**

**Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica**

**Área de Concentração: Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica

Itajubá, Março de 2006

MG. - Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES EM VIGAS COM  
COMPORTAMENTO GEOMETRICAMENTE  
NÃO-LINEAR**

**Autor: Ivan Henrique Gonçalves**

**Orientador: Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide**

**Composição da Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Danilo Amaral –UFMG**

**Prof. Dr. Sebastião Simões da Cunha Jr. - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide – IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira, Presidente – IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*À minha esposa Mariana,  
aos meus filhos José Henrique e Pedro Henrique,  
à minha irmã Vânia e aos meus pais José e Célia.*

## **Agradecimentos**

À Deus e Nossa Senhora Aparecida que me imbuíram de força.

Aos meus Orientadores, Wlamir Carlos de Oliveira e Paulo Shigueme Ide, pela competência, dedicação, paciência e amizade.

Ao CNPq, através do Programa de bolsas, pelo apoio financeiro.

*“Seja bom com os outros. A distância que você caminha na vida vai depender da sua ternura com os jovens, da sua compaixão com os idosos, sua compreensão com aqueles que lutam, da sua tolerância com os fracos e os fortes. Porque algum dia na vida você poderá ser um deles.”*

George Washington Carver

## Resumo

**GONÇALVES, I. H. (2005)**, *Análise de Deformações em Vigas com Comportamento Geometricamente Não-Linear*, Itajubá, 171p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Apresentam-se neste trabalho quatro métodos aproximados para obtenção dos deslocamentos verticais e angulares de vigas com comportamento geometricamente não-linear. Como base de comparação, será utilizada uma viga engastada em balanço, com um carregamento concentrado em sua extremidade livre. A forma da linha elástica que determina os deslocamentos é obtida de uma equação diferencial não-linear de segunda ordem, cuja solução exata não é atualmente conhecida. O primeiro, é o método de solução linear que consiste em desprezar o termo da equação diferencial que contém o quadrado da declividade, possibilitando a utilização de solução analítica para obtenção da linha elástica. O segundo, é o método numérico de Runge-Kutta 4ª ordem na solução da equação diferencial em sua forma completa. O terceiro método é o *sistema pseudolinear equivalente*, cuja solução possui uma curva de deflexão igual ao problema não-linear inicial. Neste método o sistema pode ser resolvido aplicando-se a análise linear. O quarto é o método dos elementos finitos aplicado na análise linear e não-linear de vigas. Tais métodos terão seus resultados comparados tanto para pequenos como para grandes deslocamentos e deformações angulares. Conclui-se que, para as estruturas convencionais, como por exemplo, na utilização em estruturas que utilizam materiais como aço e alumínio, o método linear é adequado. No entanto, para materiais que possibilitam grandes deformações no regime elástico, como alguns polímeros, um outro método dentre os estudados deve ser utilizado.

Palavras-chave: Vigas, Não-Linearidade, Deformações, Elementos Finitos.

## Abstract

**GONÇALVES, I. H. (2005)**, *Analysis of the Deformations on Beams with Nonlinear Geometric Behavior*, Itajubá, 171p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Is show in this work four approximated methods solutions to obtain the vertical and angular displacements of a cantilever beam with geometrically nonlinear behavior. To compare the solutions will be used a beam under a concentrated load in its free end. The problem is represented by the second order nonlinear differential equation whose exact solution is not available in the literature. The first method is the linearization of the equation that consists of despising the term of the differential equation that contains the square of the slope, facilitating the use of analytic solution for obtaining of the elastic line. The second is the fourth order Runge- Kutta method in the solution of the differential equation in its completes form. The third method is the *pseudolinear equivalent system* whose solution results in the same deflection curve of the initial nonlinear problem. In this last method, the nonlinear differential problem is transformed into a system that can be solved using the linear analysis. The fourth is finite elements method applied in the linear and nonlinear analysis of beams. Such methods will have its compared results so much for small as for great displacements and angular deformations. The conclusion are that for the conventional structures, such as structures that use materials as steel and aluminum, the linear method is acceptable. While for materials that allow large deformations in the elastic regime, as some polymeric ones, another method among them studied should be used.

Keywords: Beams, Nonlinearity, Strains, Finite Elements.

## Sumário

<b>SUMÁRIO</b>	I
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	VI
<b>LISTA DE TABELAS</b>	IX
<b>SIMBOLOGIA</b>	XX
<b>LETRAS LATINAS</b>	XX
<b>LETRAS GREGAS</b>	XXI
<b>SUPERESCRITOS</b>	XXI
<b>SUBSCRITOS</b>	XXI
<b>ABREVIATURAS</b>	XXII
<b>SIGLAS</b>	XXII
<b>CAPÍTULO 1</b>	1
<b>INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 Revisão da Literatura	1
1.2 Conteúdo	2
<b>CAPÍTULO 2</b>	4
<b>A TEORIA DA LINHA ELÁSTICA</b>	4
2.1 Introdução	4
2.2 Equação da Linha Elástica	6
<b>CAPÍTULO 3</b>	9
<b>FORMULAÇÃO LINEAR</b>	9
3.1 Introdução	9
3.2 Análise Linear de uma Viga Engastada	9
3.3 Princípio da Superposição	12
<b>CAPÍTULO 4</b>	13
<b>FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR – MÉTODO DE RUNGE KUTTA 4ª ORDEM</b>	13
4.1 Introdução	13
4.2 Problemas de Valor Inicial	16
4.3 Métodos de Passo Um – Métodos de Runge-Kutta	17
4.4 Método de Runge-Kutta de 1ª Ordem – Método de Euler	18

	x
4.5 Método de Runge-Kutta de 2ª Ordem -----	18
4.6 Forma Geral dos Métodos de Runge-Kutta de 2ª Ordem -----	22
4.7 Métodos de Runge-Kutta de Ordens Superiores -----	23
4.7.1 Método de Runge-Kutta 3ª Ordem -----	24
4.7.2 Método de Runge-Kutta 4ª Ordem -----	24
4.7.3 Algoritmo -----	25
CAPÍTULO 5 _____	26
FORMULAÇÃO <i>PSEUDOLINEAR EQUIVALENTE</i> _____	26
5.1 Introdução -----	26
5.2 Formulação -----	26
5.3 Carregamento e Rigidez na Geometria da Deformação -----	31
5.4 Viga em Balanço de Seção Transversal Variável -----	34
5.5 Viga em Balanço de Seção Transversal Constante -----	43
CAPÍTULO 6 _____	48
ELEMENTO FINITO DE VIGA _____	48
6.1 Introdução -----	48
6.2 Função de Deslocamento Transversal -----	49
6.3 Relação Deformação-Deslocamento -----	51
6.4 Mariz de Rigidez do Elemento de Viga-----	52
6.5 Método do Trabalho Equivalente-----	54
6.6 Energia Potencial -----	56
6.7 Método Clássico para Obtenção de $[K]_E$ -----	60
6.8 Análise Linear por MEF -----	64
6.9 Análise Não-Linear por MEF -----	66
6.10 Sobre o Programa Computacional -----	69
CAPÍTULO 7 _____	72
VALIDAÇÃO DAS EQUAÇÕES APRESENTADAS NOS CAPÍTULOS 3 a 5 _____	72
7.1 Introdução -----	72
7.2 Validação da Solução Linear Apresentada no Capítulo 3 -----	72
7.3 Validação da Solução pelo Método de Runge-Kutta Apresentada no Capítulo 4 -----	74
7.4 Validação da Solução <i>Pseudolinear Equivalente</i> Apresentada no Capítulo 5 -----	76
CAPÍTULO 8 _____	78
RESULTADOS _____	78

8.1	Introdução	78
8.2	Viga de Alumínio	79
8.2.1	Solução Linear	81
8.2.2	Formulação Não-Linear – Método de Runge Kutta	82
8.2.3	Solução Pseudolinear	93
8.2.4	Solução pelo Método de Elementos Finitos	99
8.3	Viga de Aço	100
8.3.1	Solução Linear	102
8.3.2	Formulação Não-Linear – Método de Runge Kutta	102
8.3.3	Solução Pseudolinear	104
8.3.4	Solução pelo Método de Elementos Finitos	104
8.4	Viga de Acrílico	104
8.4.1	Solução Linear	107
8.4.2	Formulação Não-Linear – Método de Runge Kutta	107
8.4.3	Solução Pseudolinear	109
8.4.4	Solução pelo Método de Elementos Finitos	109
8.5	Método de Elementos Finitos Aplicado a Outros Casos	110
8.5.1	MEF Aplicado a Viga em Balanço Sujeita a Carga Distribuída	110
8.5.2	MEF Aplicado a Viga Bi-Apoiada Sujeita a Carga Concentrada	113
8.5.3	MEF Aplicado a Viga Bi-Apoiada Sujeita a Carga Distribuída	115
8.6	Análise de Uma Viga de Concreto	117
8.7	Ensaio Prático Utilizando um Régua de Acrílico	119
8.7.1	Introdução	119
8.7.2	Condições da Viga Ensaída	119
8.7.3	Resultados do Ensaio Prático	121
8.7.4	Resultados Teóricos	122
8.7.5	Análise Comparativa entre os Resultados Teóricos de Práticos	123
CAPÍTULO 9		125
CONCLUSÕES E SUGESTÕES		125
9.1	Introdução	125
9.2	Conclusões para o Caso da Viga N° 1 de Alumínio	126
9.2.1	Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear	126
9.2.2	Comparação entre as soluções linear e pseudolinear	128
9.2.3	Comparação entre as soluções linear e MEF	129

9.3 Conclusões para o Caso da Viga Nº 2 de Alumínio-----	129
9.3.1 Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear -----	130
9.3.2 Comparação entre as soluções linear e pseudolinear-----	131
9.3.3 Comparação entre as soluções linear e MEF-----	132
9.4 Conclusões para o Caso da Viga Nº 3 de Aço -----	134
9.4.1 Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear -----	134
9.4.2 Comparação entre as soluções linear e pseudolinear-----	135
9.4.3 Comparação entre as soluções linear e MEF-----	136
9.5 Conclusões para o Caso da Viga Nº 4 de Aço -----	137
9.5.1 Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear -----	137
9.5.2 Comparação entre as soluções linear e pseudolinear-----	138
9.5.3 Comparação entre as soluções linear e MEF-----	139
9.6 Conclusões para o Caso da Viga Nº 5 de Acrílico -----	141
9.6.1 Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear -----	141
9.6.2 Comparação entre as soluções linear e pseudolinear-----	143
9.6.3 Comparação entre as soluções linear e MEF-----	144
9.7 Conclusões para o Caso da Viga Nº 6 de Acrílico -----	144
9.7.1 Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear -----	145
9.7.2 Comparação entre as soluções linear e pseudolinear-----	145
9.7.3 Comparação entre as soluções linear e MEF-----	147
9.8 Conclusões sobre o MEF Aplicado a Viga em Balanço Sujeita a Carreg. Distribuído	148
9.9 Conclusões sobre o MEF Aplicado a Viga Bi-Apoiada Sujeita a Carga Concentrada	149
9.10 Conclusões sobre o MEF Aplicado a Viga Bi-Apoiada Sujeita a Carga Distribuída	151
9.11 Conclusões sobre o MEF Aplicado a Viga de Concreto -----	152
9.12 Conclusões Finais -----	153
9.13 Sugestões para Trabalhos Futuros -----	157
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	158
APÊNDICE A _____	160
ALGORÍTMO DE RUNGE-KUTTA _____	160
APÊNDICE B _____	163
DEFINIÇÃO DO PASSO $h$ NA APLICAÇÃO DO MÉT. DE RUNGE-KUTTA _____	163
B.1 Definição do Passo $h$ -----	163
B.2 Simulação de Passos $h$ -----	164

	xiii
APÊNDICE C _____	165
DEFLEXÃO DAS VIGAS PELO MÉTODO DOS MOMENTOS DE ÁREA _____	165
C.1 Introdução -----	165
C.2 Teoremas Relativos as Áreas do Diagrama de Momentos -----	165
C.2.1 Primeiro Teorema -----	166
C.2.2 Segundo Teorema -----	168
C.3 Aplicação a Vigas em Balanço -----	170

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – (a) Deformação de viga de seção uniforme em balanço; (b) Diagrama de corpo livre do elemento da viga. -----	5
Figura 3.1 – Viga submetida a pequenos deslocamentos. -----	10
Figura 4.1 – Representação gráfica do Método de Euler Aperfeiçoado -----	19
Figura 5.1 – Viga em balanço com estreitamento, carregada com um carregamento uniformemente distribuído $w_0$ . -----	27
Figura 5.2 – (a) configuração não deformada de um segmento de comprimento de arco $dx_0$ ; (b) configuração deformada de $dx_0$ ..-----	31
Figura 5.3 – gráfico de diversos casos de $\Delta(x)$ .. -----	33
Figura 5.4 – Viga em balanço. (a) elemento original de rigidez variável; (b) diagrama do momento $M'_e$ do sistema pseudolinear com a forma aproximada por três segmentos de reta; (c) sistema pseudolinear equivalente de rigidez constante-----	36
Figura 5.5 – Viga em balanço.de seção constante -----	43
Figura 6.1 – Elemento de viga. -----	48
Figura 6.2 – (a) Configuração não deformada da viga; (b) Configuração deformada da viga; (c) inclinação na linha-----	51
Figura 6.3 – Sentidos positivos dos momentos, rotações, forças e deslocamentos nodais. ----	53
Figura 6.4 – Convenção de sinais usada na teoria elementar de viga. -----	53
Figura 6.5 – Elemento de viga submetido a um carregamento distribuído $q(x)$ . -----	54
Figura 6.6 – Elemento de viga com carregamento uniforme distribuído e as forças nodais equivalentes.-----	56
Figura 6.7 – Elemento de viga. -----	57
Figura 8.1 – Viga em balanço.de seção constante. -----	79

Figura 8.2 – Viga em balanço.com representação da deformada. -----	82
Figura 8.3 – Viga em balanço.com indicação de início do eixo $x$ . -----	84
Figura 8.4 – $M'_e$ ao longo da viga N° de alumínio. -----	97
Figura 8.5 –Viga em balanço sujeita a carga distribuída.-----	110
Figura 8.6 –Viga bi-apoiada sujeita a carga concentrada. -----	112
Figura 8.7 –Viga bi-apoiada sujeita a carga distribuída.-----	114
Figura 8.8 –Viga em balanço de seção constante. -----	116
Figura 8.9 – Viga em balanço de seção constante, representada em escala. -----	118
Figura 8.10 – Representação da viga deformada pelo carregamento $P$ de 1,77 [N].-----	120
Figura 9.1 – Variação porcentual entre solução Pseudolinear e Runge-Kutta - viga N° 1 de alumínio. -----	125
Figura 9.2 – <b>Variação porcentual entre solução Pseudolinear e Linear - viga N° 1 de alumínio</b> .-----	126
Figura 9.3 – Variação porcentual entre sol. Pseudolinear e Linear para viga N° 2 de alumínio. -----	130
Figura 9.4 – Variação porcentual entre sol. MEF e Linear - viga N° 2 de alumínio. -----	131
Figura 9.5 – <b>Variação porcentual entre sol. Pseudolinear e Linear para viga N° 3 de aço.</b> -----	134
Figura 9.6 – <b>Variação porcentual entre sol. Pseudolinear e Linear - viga N° 4 de aço.</b> -----	137
Figura 9.7 – <b>Variação porcentual entre sol. MEF e Linear - viga N° 4 de aço.</b> -----	138
Figura 9.8 – <b>Variação porcentual entre Pseudolinear e Runge-Kutta - viga N° 5 de acrílico.</b> -----	140
Figura 9.9 – <b>Variação porcentual entre sol. Pseudolinear e Linear para viga N° 5 de acrílico.</b> -----	141
Figura 9.10 – <b>Variação porcentual entre sol. Pseudolinear e Linear - viga N° 6 de acrílico.</b> -----	144

Figura 9.11 – <b>Variação porcentual entre sol. MEF e Linear - viga Nº 6 de acrílico.</b> .....	145
Figura 9.12 – <b>Variação porcentual entre sol. MEF e Linear - viga em balanço sujeita a carregamento distribuído.</b> .....	147
Figura 9.13 – <b>Variação porcentual entre sol. MEF e Linear - viga bi-apoiada sujeita a carregamento concentrado.</b> .....	148
Figura 9.14 – <b>Variação porcentual entre sol. MEF e Linear - viga bi-apoiada sujeita a carregamento distribuído.</b> .....	150
Figura 9.15 – Comparação porcentual do deslocamento na ponta da viga entre as metodologias pseudolinear e linear, seção 0,01 x 0,04 [m] (pequenas seções) e 2,5 [m] de comprimento. ....	154
Figura 9.16 – Comparação porcentual do deslocamento na ponta da viga entre as metodologias pseudolinear e linear, seção 0,1 x 0,3 [m] e 3 [m] de comprimento. ---	154
Figura C.1 – (a) Viga submetida a um carregamento arbitrário; (b) diagrama da variação de $M/EI$ ; (c) declividades nos pontos $F$ e $G$ ; (d) tangentes à linha elástica em $F$ e $G$ . -	165
Figura C.2 – Pontos $P$ e $P'$ situados entre $F$ e $G$ e separados de uma distância $dx$ . .....	166
Figura C.3 – Elemento de área $(M/EI)dx$ . .....	167
Figura C.4 – Área limitada pelo diagrama $(M/EI)$ e $\bar{x}_1$ é a distância do centróide da área até o eixo vertical que passa por $F$ . .....	167
Figura C.5 – Variação Viga em balanço. ....	168

## Lista de Tabelas

Tabela 7.1 – Características da viga da solução de Dorn & Mc Craken (1981). -----	73
Tabela 7.2 – Resultados comparativos Dorn & Mc Craken (1981) vs Dissertação. -----	74
Tabela 7.3 – Características da viga da solução Campos F° (2001). -----	74
Tabela 7.4 – Resultados comparativos Campos F° (2001) vs Dissertação. -----	75
Tabela 7.5 – Características da viga da solução de Fertis (1993). -----	76
Tabela 7.6 – Resultados comparativos Fertis (1993) vs Dissertação. -----	77
Tabela 7.7 – Desvios Percentuais dos Resultados. -----	77
Tabela 8.1 – Características das vigas de alumínio. -----	79
Tabela 8.2 – Resultados da solução linear - vigas de alumínio. -----	82
Tabela 8.3 – Valores de $\Delta$ - vigas de alumínio. -----	84
Tabela 8.4 – Dados para cálculo dos deslocamentos - método de Runge-Kutta. -----	85
Tabela 8.5 – Resultados do método Runge-Kutta - vigas de alumínio. -----	92
Tabela 8.6 – Condições iniciais para solução pseudolinear - viga N° 1 de alumínio -----	92
Tabela 8.7 – Cálculo de $M_e'$ - viga N° 1 de alumínio.	
Tabela 8.8 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de alumínio. ---	98
Tabela 8.9 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de alumínio. ---	99
Tabela 8.10 – Características das vigas de aço. -----	100
Tabela 8.11 – Resultados da solução linear- vigas de aço. -----	101
Tabela 8.12 – Valores de $\Delta$ - vigas de aço. -----	102
Tabela 8.13 – Resultados do método Runge-Kutta - vigas de aço. -----	102
Tabela 8.14 – Resultados de deslocamentos e deformações angulares - vigas de aço. -----	103
Tabela 8.15 – Resultados de deslocamentos e deformações angulares - vigas de aço. -----	104
Tabela 8.16 – Características das vigas de acrílico. -----	105
Tabela 8.17 – Resultados da solução linear - vigas de acrílico. -----	106

Tabela 8.18 – Valores de $\Delta$ - vigas de acrílico. -----	107
Tabela 8.19 – Resultados do método Runge-Kutta - vigas de acrílico.-----	107
Tabela 8.20 – Resultados de deslocamentos e deformações angulares para vigas de acrílico.	108
Tabela 8.21 – Resultados de deslocamentos e deformações angulares para vigas de acrílico.	109
Tabela 8.22 – Características da viga em balanço sujeita a carga distribuída.-----	110
Tabela 8.23 – Resultados obtidos pela solução linear e pelo método de elementos finitos. -	111
Tabela 8.24 – Características da viga bi-apoiada sujeita a carga concentrada. -----	112
Tabela 8.25 – Resultados obtidos pela solução linear e pelo método de elementos finitos. -	113
Tabela 8.26 – Características da viga bi-apoiada sujeita a carga distribuída.-----	114
Tabela 8.27 – Resultados obtidos pela solução linear e pelo método de elementos finitos. -	115
Tabela 8.28 – Características da viga em balanço sujeita a carga concentrada. -----	116
Tabela 8.29 – Resultados obtidos pela sol. linear / MEF /mét. pseudolinear. -----	117
Tabela 8.30 – Características da viga de acrílico. -----	119
Tabela 8.31 – Cargas $P$ e tensões normais.-----	119
Tabela 8.32 – Resultados do ensaio prático. -----	120
Tabela 8.33 – Resultados do equacionamento teórico. -----	121
Tabela 8.34 – Desvios percentuais.-----	122
Tabela 9.1 – Resultados da viga N° 1 de alumínio. -----	124
Tabela 9.2 – Desvio porcentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 1 de alumínio.	125
Tabela 9.3 – Desvio porcentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 1 de alumínio. -----	126
Tabela 9.4 – Resultados da viga N° 2 de alumínio. -----	128
Tabela 9.5 – Desvio porcentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 2 de alumínio.	129
Tabela 9.6 – Desvio porcentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 2 de alumínio. -----	129
Tabela 9.7 – Desvio porcentual entre MEF e Linear - viga N° 2 de alumínio. -----	131
Tabela 9.8 – Resultados da viga N° 3 de aço. -----	132
Tabela 9.9 – Desvio porcentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 3 de Aço. -----	133
Tabela 9.10 – Desvio porcentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 3 de aço. -----	134
Tabela 9.11 – Resultados da viga N° 4 de aço. -----	135
Tabela 9.12 – Desvio porcentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 4 de Aço.-----	136
Tabela 9.13 – Desvio porcentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 4 de aço. -----	136
Tabela 9.14 – Desvio porcentual entre MEF e Linear - viga N° 4 de aço. -----	138
Tabela 9.15 – Resultados da viga N° 5 de acrílico.-----	139
Tabela 9.16 – Desvio porcentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 5 de acrílico.	140
Tabela 9.17 – Desvio porcentual entre Linear e Pseudolinear - viga N° 5 de acrílico. -----	141

Tabela 9.18 – Resultados da viga N° 6 de acrílico.-----	142
Tabela 9.19 – Desvio porcentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 6 de acrílico.	143
Tabela 9.20 – Desvio porcentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 6 de acrílico. -----	144
Tabela 9.21 – Desvio porcentual entre MEF e Linear - viga N° 6 de acrílico.-----	145
Tabela 9.22 – Desvio porcentual entre MEF e Linear - viga em balanço sujeita a carregamento distribuído.-----	146
Tabela 9.23 – Desvio porcentual entre MEF e Linear - viga bi-apoiada sujeita a carregamento concentrado. -----	148
Tabela 9.24 – Desvio porcentual entre MEF e Linear - viga bi-apoiada sujeita a carregamento distribuído.-----	149
Tabela 9.25 – Desvio porcentual entre MEF, linear e pseudolinear - viga de concreto em balanço sujeita a carga concentrada. -----	151
Tabela B.1 – Resultados para diversos passos $h$ - viga de acrílico. -----	162

## Simbologia

### Letras Latinas

$dy/dx$ ou $y'$	primeira derivada da função $y(x)$	
$M$	momento fletor	Nm
$r$	raio de curvatura	m
$E$	módulo de elasticidade longitudinal	Pa
$I$	momento de inércia	m <sup>4</sup>
$A$	Área da seção transversal	m <sup>2</sup>
$x_0$	coordenada medida ao longo do comprimento do arco deformado	m
$P$	carregamento concentrado	N
$B$	ponto na extremidade livre da viga não deformada	
$B'$	ponto na extremidade livre da viga deformada	
$A$	ponto na extremidade engastada da viga	
$x$	coordenada na direção do eixo da viga	m
$g(x_0)$	variação de $E_x$ em relação ao valor referência $E_1$	
$f(x_0)$	variação de $I_x$ com relação ao valor referência $I_1$	
$L$	comprimento da viga	m
$w_0$	carga distribuída	N/m
$h_x$	variação da altura da viga	m

$n$	estreitamento da viga	
$y$	eixo perpendicular ao eixo da viga	
$d^2y/dx^2$ ou $y''$	segunda derivada da função $y(x)$	
$q$	carga uniformemente distribuída	N/m
$z$	eixo perpendicular ao plano $xy$	
$N$	função de forma	
$V$	força cortante	
$W$	carregamento	

## Letras Gregas

$\theta$	deslocamento angular da viga	rad
$\Delta$	deslocamento horizontal da viga	m
$\partial^2u/\partial^2$	derivada parcial segunda de $u(x, y)$	
$v$	deslocamento transversal	m

## Superescritos

$l$	comprimento	
$T$	transposta	

## Subscritos

$x$	direção	
$y$	direção	

e	elemento	
---	----------	--

## Abreviaturas

geom.	geométrico	
máx.	máximo	
dist.	distribuído	
conc.	concentrada	

## Siglas

IEM	Instituto de Engenharia Mecânica	
PVI	Problema de valor inicial	
LN	Linha neutra	
MEF	Método de Elementos Finitos	
PVC	Problema de valor de contorno	

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

## 1.1 REVISÃO DA LITERATURA

A forma da linha elástica de vigas pode ser obtida através da solução linearizada da equação diferencial não-linear de segunda ordem, como mostrado em livros de Resistência dos Materiais (Beer & Johnston, 1995), Mecânica dos Materiais (Hibbeler, 1997) e Teoria da Elasticidade (Timoshenko & Goodier, 1980). Isto em se tratando de projetos de estruturas convencionais, como por exemplo, na utilização em estruturas que utilizam materiais como aço e alumínio.

Em projetos estruturais, é importante minimizar o peso de cada elemento. A crescente utilização de materiais poliméricos, que podem suportar grandes deslocamentos sem exceder o limite elástico, leva a um interesse na análise de estruturas flexíveis. Eventualmente, tais materiais podem substituir os convencionais. De fato, desde o fim da Segunda Guerra Mundial, o campo dos materiais foi virtualmente revolucionado pelo advento dos polímeros sintéticos (Callister Jr., 2002). Os materiais sintéticos podem ser produzidos a baixo custo. Suas propriedades mecânicas, em alguns casos, são superiores a outros materiais de engenharia, pois possuem, tipicamente, baixas densidades e podem ser extremamente flexíveis. Em algumas aplicações, peças metálicas podem ser substituídas por plásticos.

Devido à geometria das deformações dos materiais poliméricos, o comportamento dessas estruturas é não-linear. Variações na seção transversal são frequentemente utilizadas para atender os requisitos de forças e pesos. Em alguns casos, no projeto de estruturas, engenheiros e arquitetos usam elementos de seção transversal variável para melhorar a estética arquitetônica. Estruturas com comportamento não-linear e seção transversal variável não admitem a utilização do princípio da superposição, o que torna complexa a solução (Fertis, 1993).

É interessante determinar se a linearização da equação inicial que não é linear, pode ser realmente aplicada para os casos tradicionais. Para os novos materiais que vêm sendo desenvolvidos pela engenharia, é necessário definir quais métodos de solução podem ser utilizados.

## 1.2 CONTEÚDO

No capítulo 1 faz-se uma revisão da literatura. Mostra-se que existem soluções simplificadas para a determinação dos deslocamentos verticais e angulares de uma viga. Salienta-se que para determinados materiais, tais soluções podem não fornecer resultados confiáveis, sendo necessário então a utilização de soluções completas.

A conhecida teoria da elástica é discutida no capítulo 2, assim como os métodos utilizados para obter sua equação.

No capítulo 3, a equação diferencial não-linear de segunda ordem é linearizada. Considera-se pequeno o deslocamento angular  $\alpha$  que a viga está sujeita. Portanto, é desprezado na equação o termo que contém a declividade elevada ao quadrado, pois o mesmo tem valor desprezível quando comparado com a unidade. Após tal simplificação, a equação obtida passa a ser uma equação diferencial linear de segunda ordem, que rege o comportamento da linha elástica para uma solução linear.

No capítulo 4, a equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem, é resolvida pelo método numérico de Runge-Kutta 4ª Ordem. As vantagens da solução através de tal método são enumeradas, assim como a aplicabilidade do mesmo.

No capítulo 5, o problema inicial não-linear é resolvido usando-se um sistema *pseudolinear equivalente*, que possui uma curva de deflexão igual ao problema não-linear inicial. Quando o sistema *pseudolinear equivalente* de rigidez constante é obtido, a teoria elementar das deflexões lineares pode ser usada. Os deslocamentos verticais e angulares obtidos, serão idênticos aqueles do elemento não-linear original de rigidez constante ou variável.

No capítulo 6, o método de elementos finitos é utilizado para a formulação do elemento de viga sujeito a flexão, um programa computacional é desenvolvido para a análise linear e não-linear de vigas.

No capítulo 7, o equacionamento desenvolvido nos capítulos 3, 4 e 5 é aplicado em exemplos descritos pela bibliografia. A validação do desenvolvimento teórico é obtida através da verificação dos desvios desprezíveis entre os resultados fornecidos por esse equacionamento e os resultados da bibliografia.

No capítulo 8, as teorias anteriormente expostas são aplicadas a diversos exemplos práticos de vigas. Os resultados obtidos são analisados no capítulo 9, determinando as condições de aplicação para os diversos tipos de teoria estudados. São apresentadas ainda sugestões para trabalhos futuros.

O apêndice A traz um algoritmo do método de Runge-Kutta 4ª Ordem, o apêndice B faz uma discussão do passo  $h$  ideal na aplicação desse método. O apêndice C trata do método dos momentos de área na determinação dos deslocamentos de vigas.

## Capítulo 2

# A TEORIA DA LINHA ELÁSTICA

## 2.1 INTRODUÇÃO

Fertis (1993) apresenta o seguinte histórico da teoria da “elástica”. A teoria que examina as deformações elásticas de vigas retas sujeitas a uma flexão e é um processo clássico, foi desenvolvido no século XVIII por Jacob Bernoulli, pelo seu irmão mais novo Johann Bernoulli e Leonhard Euler. O primeiro trabalho publicado que se refere a grandes deslocamentos de elementos flexíveis foi escrito por Euler em 1774. Euler, em seu trabalho, expôs que a inclinação  $dy/dx$  não pode ser omitida da expressão da curvatura, a menos que a deflexão seja muito pequena. Este problema também foi analisado por Lagrange. Como mostrado mais tarde por Plana, a solução de Lagrange continha resultados errôneos.

A lei de Euler-Bernoulli extensivamente usada afirma que o momento fletor  $M$  é inversamente proporcional ao raio de curvatura  $r$  da curva produzida pela ação do carregamento, isto é,

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx_0} = \frac{M}{EI} \quad (2.1)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material,  $I$  o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra LN,  $\theta$  é a inclinação no ponto  $x_0$ , o qual é medido ao longo do comprimento do arco como mostrado na Figura 2.1a. Em coordenadas retangulares  $(x, y)$ , a Equação (2.1) é escrita como

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \quad (2.2)$$

As Equações (2.1) e (2.2) serão detalhadamente estudadas a seguir.

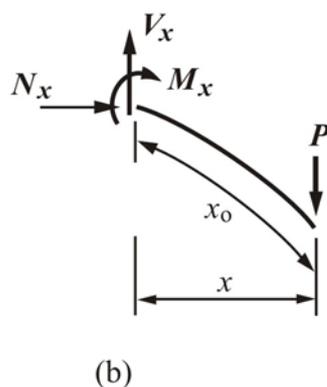
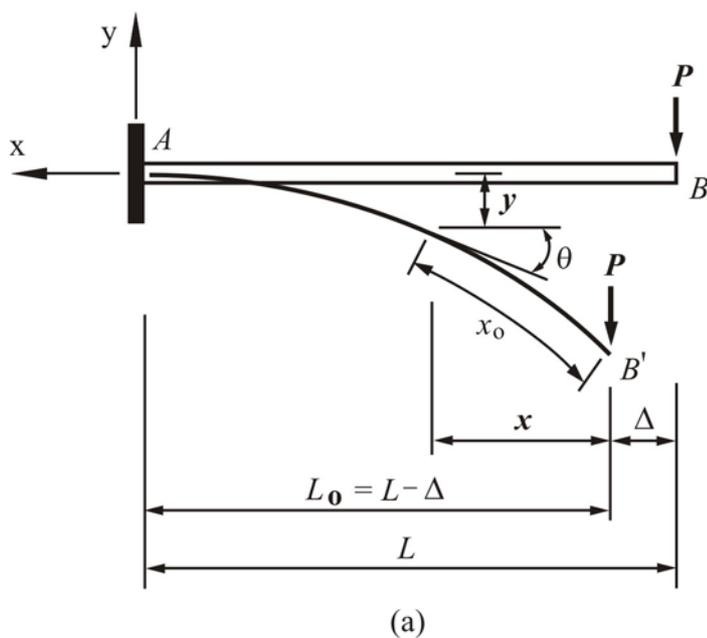


Figura 2.1 – (a) Deformação de viga de seção uniforme em balanço; (b) Diagrama de corpo livre do elemento da viga.

## 2.2 - EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA

A forma exata da deformada de um elemento flexível é chamada de “elástica”. Alguns problemas simples da elástica foram, inicialmente, investigados por Bernoulli, Lagrange, Euler e Plana. Outras soluções também foram obtidas por Fresch-Fay (Fertis, 1993). Uma viga flexível em balanço, de seção uniforme, sob a ação de um carregamento  $P$  concentrado na extremidade livre, é mostrada na figura 2.1a.

A configuração para grandes deformações da viga em balanço causada por um carregamento  $P$ , é também mostrada na figura 2.1a. Nota-se que na extremidade livre, o ponto  $B$  move-se para o ponto  $B'$  durante a deformação do elemento. O símbolo  $\Delta$  é usado para denotar o deslocamento horizontal do ponto  $B$ . A viga é considerada como inextensível. Assim o comprimento do arco  $AB'$  da deformada é igual ao comprimento inicial  $AB$ .

Usando o diagrama de corpo (Almeida, Labegalini & Oliveira, 1984) livre na figura 2.1b, a expressão para o momento fletor  $M_x$ , em  $0 \leq x \leq L_0$  é

$$M_x = -Px \quad (2.3)$$

Em coordenadas retangulares, a Equação de Euler-Bernoulli é dada por

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = -\frac{M_x}{E_x I_x} \quad (2.4)$$

onde  $E_x$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material do elemento e  $I_x$  o momento de inércia da área da seção transversal com relação à linha neutra. Substituindo a Equação (2.3) na Equação (2.4) e assumindo que  $E$  e  $I$  são uniformes ao longo da viga, pode-se obter

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{Px}{EI} \quad (2.5)$$

A Equação (2.4) pode também ser escrita em termos de comprimento de arco  $x_0$  como

$$E_{x_0} I_{x_0} \frac{d\theta}{dx_0} = -M_x \quad (2.6)$$

Usando a Equação (2.3) e assumindo que  $E$  e  $I$  são constantes, tem-se

$$\frac{d\theta}{dx_0} = \frac{Px}{EI} \quad (2.7)$$

Derivando a Equação (2.7) uma vez com relação a  $x_0$ , onde  $x = x_0 \cos \theta$ , obtém-se

$$\frac{d^2\theta}{dx_0^2} = \frac{P}{EI} \cos \theta \quad (2.8)$$

Considerando

$$E_x I_x = E_1 I_1 g(x_0) f(x_0) \quad (2.9)$$

onde  $g(x_0)$  representa a variação de  $E_x$  em relação ao valor de referência  $E_1$ , e  $f(x_0)$  representa a variação de  $I_x$  com relação ao valor de referência  $I_1$ .

Derivando a Equação (2.6), obtém-se

$$\frac{d}{dx_0} \left\{ E_1 I_1 g(x_0) f(x_0) \frac{d\theta}{dx_0} \right\} = -V_{x_0} \cos \theta \quad (2.10)$$

Para elementos de seção transversal uniforme e de material linearmente elástico, tem-se que  $g(x_0) = f(x_0) = 1,0$ .

As Equações (2.5) e (2.8) são equações diferenciais não lineares de segunda ordem, cujas soluções exatas não são atualmente conhecidas. Soluções por integrais elípticas completas e incompletas foram utilizadas por pesquisadores, como por exemplo, Frisch-Fay (Fertis, 1993). Embora sejam muito complicadas, elas podem ser usadas para solução de problemas simples de vigas uniformes envolvendo apenas carregamentos concentrados (Gradsnteym e Ryzhik, 1986). A dificuldade associada a este método está no fato de que não pode ser aplicado a uma viga com carregamento distribuído e/ou com rigidez variável  $EI$ .

As soluções de tais equações, envolvendo séries de potência, também são extremamente difíceis de serem obtidas, pois a rotação  $\theta$  é expressa como uma função de  $x_0$  por utilização de séries de Maclaurin, isto é:

$$\theta(x_0) = \theta(c) + (x_0 - c) \cdot \theta'(c) + \frac{(x_0 - c)^2}{2!} \cdot \theta''(c) + \frac{(x_0 - c)^3}{3!} \cdot \theta'''(c) + \dots \quad (2.11)$$

onde  $c$  é o ponto arbitrário tomado ao longo do comprimento do arco do elemento deformado. A dificuldade na utilização da aproximação por séries de potência advém que  $\theta$  depende de  $x$  e  $x_0$ , o que torna, conseqüentemente, a equação diferencial em uma equação integral diferencial cuja solução por análise de séries de potência é extremamente difícil (Fertis, 1993).

As soluções das Equações (2.5) e (2.8) serão discutidas em detalhes nos capítulos posteriores, onde os métodos de solução linear, método numérico de Runge-Kutta, método do sistema *pseudolinear equivalente* e o método dos elementos finitos serão utilizados para a solução de tais problemas.

## Capítulo 3

# FORMULAÇÃO LINEAR

### 3.1 INTRODUÇÃO

As Equações (2.4) e (2.6) são equações diferenciais de segunda ordem não lineares que expressam a forma exata da deformada da viga. Nas aplicações convencionais, estas equações são linearizadas desprezando-se o quadrado da inclinação  $y'$  na Equação (2.4), cujo valor é bem menor em comparação com a unidade. Esta linearização é permitida, quando se considera pequeno os deslocamentos angulares, quando comparados com o comprimento da viga.

### 3.2 - ANÁLISE LINEAR DE UMA VIGA ENGASTADA

A Equação (2.4), reproduzida abaixo, fornece a curvatura de uma curva plana.

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = -\frac{M_x}{E_x I_x} \quad (3.1)$$

Neste caso, quando  $y'$  for pequeno quando comparado a unidade, tem-se que

$$\left[1 + (y')^2\right]^{3/2} \cong 1 \quad (3.2)$$

Portanto, a Equação (3.1), pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Px}{EI} \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Integrando-se a equação duas vezes em relação a  $x$ , são obtidos os deslocamentos e deformações angulares.

O procedimento para a determinação das deformações de uma viga engastada mostrada na Figura 3.1 é mostrado a seguir.

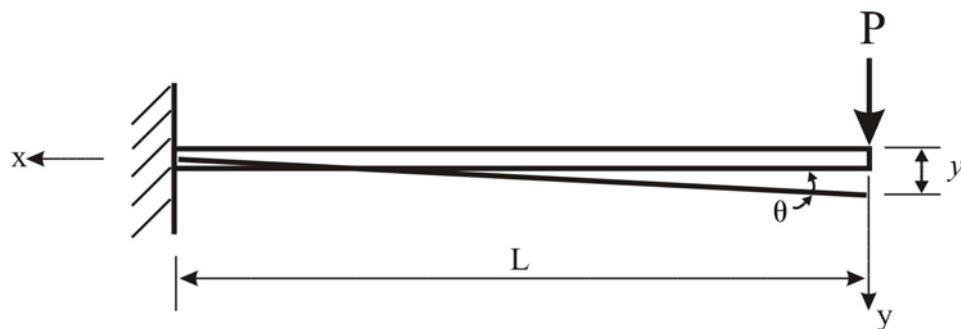


Figura 3.1 – Viga submetida a pequenos deslocamentos

A primeira integração da Equação (3.3) fornece

$$\int EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int Px dx \quad (3.4)$$

então,

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (3.5)$$

Na extremidade fixa  $x=L$  tem-se que  $dy/dx=0$ . Substituindo esta condição de contorno na Equação (3.5), vem que

$$0 = \frac{PL^2}{2} + C_1 \quad (3.6)$$

então,

$$C_1 = -\frac{PL^2}{2} \quad (3.7)$$

Portanto,

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - \frac{PL^2}{2} \quad (3.8)$$

A integração da Equação (3.8) é escrita como

$$\int EI \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{Px^2}{2} dx - \int \frac{PL^2}{2} dx \quad (3.9)$$

resultando em

$$EIy = \frac{Px^3}{6} - \frac{PL^2x}{2} + C_2 \quad (3.10)$$

A outra condição de contorno é que, na extremidade fixa  $x = L$ , o valor de  $y$  é nulo, então

$$0 = \frac{PL^3}{6} - \frac{PL^3}{2} + C_2 \quad (3.11)$$

Portanto,

$$C_2 = \frac{PL^3 - 3PL^3}{6} = \frac{PL^3}{3} \quad (3.12)$$

que substituído na Equação (3.10) fornece

$$EIy = \frac{Px^3}{6} - \frac{PL^2x}{2} + \frac{PL^3}{3} \quad (3.13)$$

Pela teoria linear, portanto, a flecha  $y$  e a declividade  $dy/dx$  são expressas por

$$y = \frac{P}{EI} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{2} + \frac{L^3}{3} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{P}{EI} \left( + \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right) \quad (3.15)$$

### 3.3 – PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Este princípio afirma que o efeito provocado em uma estrutura por determinado carregamento combinado, pode ser obtido determinando-se separadamente os efeitos dos vários carregamentos, e combinando-se os resultados obtidos. Duas condições se fazem necessárias para a aplicação do princípio.

A primeira condição determina que cada efeito seja diretamente proporcional à carga que o produziu.

A segunda condição determina que a deformação causada por qualquer dos carregamentos é pequena e não afeta as condições de aplicação dos outros carregamentos.

No caso de estado múltiplo de carregamentos, a primeira condição será satisfeita se as tensões não excederem o limite de proporcionalidade do material, enquanto a segunda condição fica satisfeita se as tensões de uma das faces não causarem em outra face do elemento deformação que possa alterar o cálculo das tensões nessa segunda face.

Para uma viga submetida a vários carregamentos distribuídos ou concentrados, torna-se conveniente calcular separadamente as flechas e declividades provocadas graças a cada um dos carregamentos e aplicar o princípio da superposição. A flecha e a declividade provocadas pelo carregamento total são então determinadas pela soma vetorial dos valores encontrados para cada carregamento isoladamente.

## Capítulo 4

# FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR – MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

## 4.1 INTRODUÇÃO

Equações diferenciais aparecem com grande frequência em modelos que descrevem quantitativamente fenômenos em diversas áreas, como por exemplo, mecânica dos fluidos, fluxo de calor, vibrações, reações químicas e nucleares, economia, biologia, resistência dos materiais, etc.

Se uma equação diferencial tem apenas uma variável independente, então ela é uma equação diferencial ordinária (Ruggiero e Lopes, 1997). Este é o tipo de equação que surge no caso estudado neste trabalho. São exemplos de equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$y' = x^2 + y^2 \quad (4.1)$$

$$y' + (1 - y^2)y + y = 0$$

Se a equação diferencial envolve mais que uma variável independente, então ela é uma equação diferencial parcial, como por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2)$$

sendo que  $u = u(x, y)$  e  $\partial^2 u / \partial^2$  indica a derivada parcial segunda de  $u(x, y)$  em relação às variáveis  $x$  e  $y$ .

A solução de uma equação diferencial ordinária é uma função da variável independente. Assim,

i)  $dy/dx = y' = y$  tem como solução  $y(x) = a e^x$ ,  $a \in R$

ii)  $u''' = 0$  é satisfeita para  $u(x) = p_2(x)$ , onde  $p_2(x)$  é qualquer polinômio de grau 2.

Isto ilustra um fato bem geral: uma equação diferencial possui uma família de soluções e não apenas uma.

A equação do exemplo (i) é de primeira ordem, ao passo que a do exemplo (ii) é de terceira ordem. Assim, ordem de uma equação diferencial é a mais alta ordem de derivação que aparece na equação.

Uma equação diferencial ordinária é dita linear se a função e suas derivadas aparecem linearmente na equação. Assim,  $x y' = x - y$  é linear, e

$$y'' + (1 - y^2)y' + y = 0 \quad (4.3)$$

$$u'' + e^{-u} = f(x)$$

são não-lineares.

Como ilustram os exemplos (i) e (ii), uma equação diferencial não possui solução única. Para individualizar uma solução, tem-se de impor condições suplementares. Em geral, uma equação de ordem  $m$  requer  $m$  condições adicionais a fim de se ter uma única solução. Em princípio, estas condições podem ser de qualquer tipo, por exemplo,

$$y(0) = 1$$

$$y'(4) = -5 \quad (4.4)$$

$$y(2) + 5y'(3) = 6$$

Se, dada uma equação de ordem  $m$ , a função, assim como suas derivadas até ordem  $m-1$ , são especificadas em um mesmo ponto, então tem-se um problema de valor inicial, PVI, como são os casos

$$y'(x) = y \quad (4.5)$$

$$y(0) = 1$$

e

$$y''' + (x+1)y'' + \cos xy' - (x^2 - 1)y = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(x+y) \quad (4.6)$$

$$y(0) = 1.1; \quad y'(0) = 2.2; \quad y''(0) = 3.3$$

Se, em problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias de ordem  $m$ ,  $m \geq 2$ , as  $m$  condições fornecidas para busca de solução única não são todas dadas num mesmo ponto, então tem-se um problema de valor de contorno, PVC.

Um exemplo de problema de contorno é o de uma viga de comprimento  $L$  sujeita a uma carga uniforme  $q$ . Se, no ponto  $x_0 = 0$  esta viga está engastada, e em  $x_L = L$  ela está somente apoiada, este problema é descrito pelo seguinte problema de contorno,

$$y^{(iv)}(x) + ky(x) = q$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (4.7)$$

$$y(L) = y''(L) = 0$$

onde  $k$  é uma constante que depende do material da viga.

Ao contrário do que ocorre com os PVI, é comum que problemas de contorno não tenham unicidade de solução. Por exemplo, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \alpha(1+x)$  é solução do PVC,

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ y(-1) &= 0 \\ y(1) - 2y'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

## 4.2 - PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

A razão mais forte de se introduzir métodos numéricos para obter soluções aproximadas de problemas de valor inicial, PVI, é a dificuldade de encontrar, analiticamente, as soluções da equação. Em muitos casos, a teoria garante existência e unicidade de solução, mas não se sabe qual é a expressão analítica desta solução.

O método de Runge-Kutta, que será apresentado, se baseia no seguinte PVI (Ruggiero e Lopes, 1997)

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Constrói-se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  igualmente espaçados, embora não seja necessário, ou seja:  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Calculam-se, em seguida, as aproximações  $y_i \cong y(x_i)$  nestes pontos, usando informações anteriores.

Se para calcular  $y_j$  se usar apenas  $y_{j-1}$ , o método é definido ser passo simples ou passo um. Porém, se forem usados mais valores, é definido por método de passo múltiplo.

Trabalhando com PVI de primeira ordem, tem-se uma aproximação inicial  $y(x_0)$  para a solução. Assim, os métodos de passo um são classificados como auto-iniciantes. Já para os

métodos de passo múltiplo deve-se lançar mão de alguma estratégia como, por exemplo, usar métodos de passo simples na obtenção das aproximações iniciais necessárias.

Outras características dos métodos de passo simples são:

- i) em geral, deve-se calcular o valor de  $f(x, y)$  e suas derivadas em muitos pontos;
- ii) apresentam dificuldades em estimar o erro.

### **4.3 - MÉTODOS DE PASSO UM - MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA**

A idéia básica destes métodos é aproveitar as qualidades dos métodos de série de Taylor, e ao mesmo tempo eliminar a desvantagem que consiste no cálculo de derivadas de  $f(x, y)$  que, como sabe-se, torna os métodos de série de Taylor (Ruggiero e Lopes, 1997) computacionalmente inviáveis.

Pode-se dizer que os métodos de Runge-Kutta de ordem  $p$  se caracterizam pelas três propriedades:

- i) são de passo um;
- ii) não exigem o cálculo de qualquer derivada de  $f(x, y)$ , mas apresenta o inconveniente de calcular  $f(x, y)$  em vários pontos, e
- iii) após expandir  $f(x, y)$  por Taylor, para função de duas variáveis em torno de  $(x_n, y_n)$  e agrupar os termos semelhantes, sua expressão coincide com a do método de série de Taylor de mesma ordem.

## 4.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 1ª ORDEM – MÉTODO DE EULER

O método de Euler é um método de série de Taylor de 1ª ordem, como

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Então,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

é o método de Euler que satisfaz as três propriedades mencionadas no item anterior que o caracterizam como um método de Runge-Kutta de ordem  $p = 1$ .

## 4.5 MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE 2ª ORDEM

Será exposto, inicialmente, um método particular que é o método de Heun, ou método de *Euler aperfeiçoado*, pois ele tem uma interpretação geométrica bastante simples.

Conforme o próprio nome indica, este método consiste em fazer mudanças no método de Euler para assim conseguir um método de ordem mais elevada.

Na figura 4.1 tem-se a representação gráfica do Método de *Euler aperfeiçoado*.

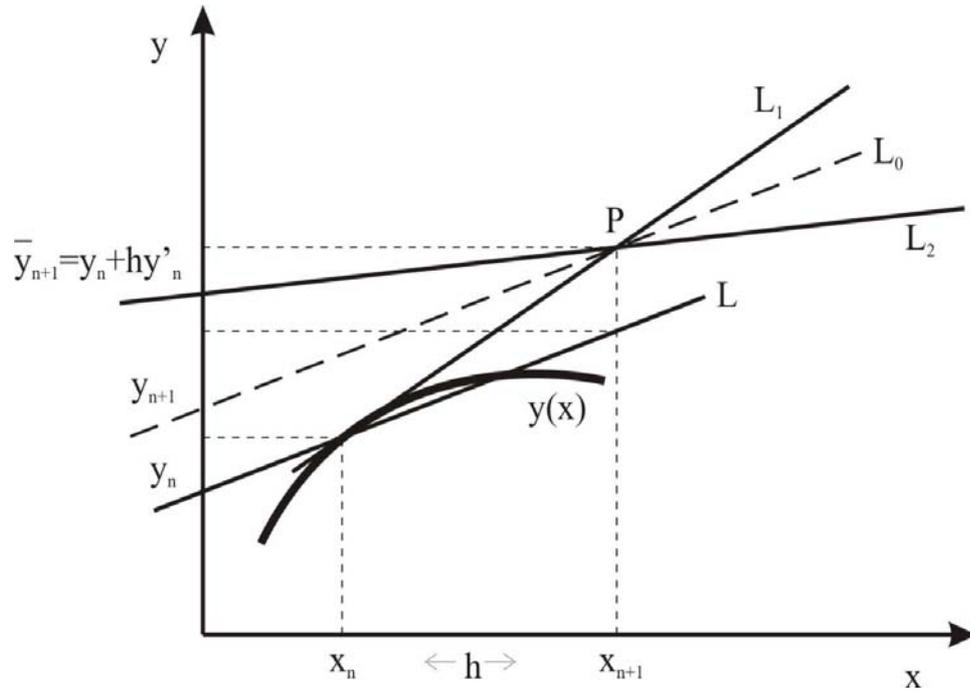


Figura 4.1 - Representação gráfica do Método de *Euler aperfeiçoado*

Dada a aproximação  $(x_n, y_n)$ , supõe-se a situação ideal em que a curva desenhada com linha cheia seja a solução  $y(x)$  da equação. Isto só acontece em  $(x_0, y_0)$ .

Pelo ponto  $(x_n, y_n)$  é traçada a reta  $L_1$  cujo coeficiente angular é  $y'_n = f(x_n, y_n)$ , ou seja,

$$L_1 : z_1(x) = y_n + (x - x_n)y'_n = y_n + (x - x_n)f(x_n, y_n) \quad (4.12)$$

Assim, dado o passo  $h$ , tem-se

$$z_1(x_{n+1}) = z_1(x_n + h) = y_{n+1} \quad (4.13)$$

do método de Euler, que pode ser denotado por

$$\bar{y}_{n+1} \quad (4.14)$$

Seja,

$$P \equiv (x_n + h, y_n + hy'_n) = (x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \quad (4.15)$$

um ponto da reta  $L_1$ .

Por  $P$  é traçada a reta  $L_2$ ,

$$L_2 : z_2(x) = (y_n + h y'_n) + [x - (x_n + h)] f(x_n + h, y_n + h y'_n) \quad (4.16)$$

cujo coeficiente angular é

$$f(x_n + h, y_n + h y'_n) = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \quad (4.17)$$

A reta pontilhada  $L_0$  passa por  $P$  e tem por inclinação a média das inclinações das retas  $L_1$  e  $L_2$ , ou seja, sua inclinação é

$$\frac{[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h y'_n)]}{2} \quad (4.18)$$

A reta  $L$  passa por  $(x_n, y_n)$  e é paralela à reta  $L_0$ , donde

$$L : z(x) = y_n + (x - x_n) [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h y'_n)] / 2 \quad (4.19)$$

O valor fornecido para  $y_{n+1}$  pelo método de *Euler aperfeiçoado* é  $z(x_n + h) = z(x_{n+1})$ , ou seja

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h y'_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Este método é de passo um e só utiliza cálculos de  $f(x, y)$ , não envolvendo suas derivadas. Assim, para verificar se ele realmente é um método de Runge-Kutta de 2ª ordem, deve-se verificar se sua fórmula concorda com a do método de série de Taylor até os termos de 2ª ordem em  $h$ ,

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \left(\frac{h^2}{2}\right) f_x(x_n, y_n) + \left(\frac{h^2}{2}\right) f(x_n, y_n) f_x(x_n, y_n) \quad (4.21)$$

com

$$e(x_{n+1}) = \frac{h^2}{3!} y'''(\xi_{x_{n+1}}) \quad (4.22)$$

No método de *Euler aperfeiçoado* deve-se trabalhar com  $f(x_n + h, y_n + h y'_n)$ .  
Desenvolvendo  $f(x, y)$  por Taylor em torno de  $(x_n, y_n)$ ,

$$f(x, y) = f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n)(x - x_n) + f_y(x_n, y_n)(y - y_n) + \\ + \frac{1}{2} \left[ f_{xx}(\alpha, \beta)(x - x_n)^2 + 2 f_{xy}(\alpha, \beta)(x - x_n)(y - y_n) + f_{yy}(\alpha, \beta)(y - y_n)^2 \right] \quad (4.23)$$

com  $\alpha$  entre  $x$  e  $x_n$  e  $\beta$  entre  $y$  e  $y_n$ .

Assim,

$$f(x_n + h, y_n + h y'_n) = f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n)h + f_y(x_n, y_n)h y'_n + \\ + \frac{h^2}{2} \left[ f_{xx}(\alpha, \beta) + 2 f_{xy}(\alpha, \beta) y'_n + f_{yy}(\alpha, \beta) y_n'^2 \right] \quad (4.24)$$

o método de *Euler aperfeiçoado* fica

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left\{ f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) + h f_x(x_n, y_n) + h f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + \right. \\ \left. \frac{h^2}{2} \left[ f_{xx}(\alpha, \beta) + 2 f(x_n, y_n) f_{xy}(\alpha, \beta) + f^2(x_n, y_n) f_{yy}(\alpha, \beta) \right] \right\} \quad (4.25)$$

então,

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[ f_x(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) \right] + \\ \frac{h^3}{4} \left[ f_{xx}(\alpha, \beta) + 2 f(x_n, y_n) f_{xy}(\alpha, \beta) + f^2(x_n, y_n) f_{yy}(\alpha, \beta) \right] \quad (4.26)$$

Esta fórmula concorda com a do método de série de Taylor até os termos de ordem  $h^2$ , provando assim ser um método de Runge-Kutta de 2ª ordem.

## 4.6 FORMA GERAL DOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM

O método de *Euler aperfeiçoado* é um método de Runge-Kutta de segunda ordem que pode-se enquadrar a uma classe mais geral de métodos do tipo,

$$y_{n+1} = y_n + h a_1 f(x_n, y_n) + h a_2 f(x_n + b_1 h, y_n + b_2 h y_n') \quad (4.27)$$

Para o método de *Euler aperfeiçoado*,

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 1 \quad (4.28)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 1$$

Para obtenção da forma geral do método de Runge-Kutta de segunda ordem, quatro parâmetros livres  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  serão utilizados. Para que haja concordância com a série de Taylor até os termos de ordem  $h^1$  é necessário apenas um parâmetro. Considerando agora  $f(x_n + b_1 h, y_n + b_2 h y_n')$  calculado pela série de Taylor de  $f(x, y)$  em torno de  $(x_n, y_n)$ , vê-se que, para haver concordância desta fórmula com a do método de série de Taylor até os termos de ordem  $h^2$  são necessários mais dois parâmetros, visto que há a considerar os termos  $h^2 f_x$  e  $h^2 f_y$ . O último parâmetro que resta, obviamente, não é suficiente para que se exija concordância até os termos de ordem de  $h^3$ .

Porém, com quatro parâmetros disponíveis e apenas três exigências, têm-se uma infinidade de métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem.

Como,

$$\begin{aligned} & f(x_n + b_1 h, y_n + b_2 h y_n') \\ &= f(x_n, y_n) + b_1 h f_x(x_n, y_n) + b_2 h f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + \text{termos em } h^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & y_n + a_1 h f(x_n, y_n) + \\ & a_2 h \left[ f(x_n, y_n) + b_1 h f_x(x_n, y_n) + b_2 h f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) \right] + \text{termos em } h^3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Então,

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 + a_2) h f(x_n, y_n) + (a_2 b_1) h^2 f_x(x_n, y_n) + (a_2 b_2) h^2 f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + \text{termos em } h^3 \quad (4.31)$$

Assim, para haver concordância com o método de série de Taylor até os termos em  $h^2$  é preciso, conforme já foi observado, que

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 b_1 = \frac{1}{2} \quad (4.32)$$

$$a_2 b_2 = \frac{1}{2}$$

que fornece um sistema de três equações e quatro variáveis.

Escolhendo um dos parâmetros arbitrariamente, como por exemplo  $a_2 = w \neq 0$ , tem-se

$$a_1 = 1 - w \quad (4.33)$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} w$$

A forma geral dos métodos de Runge-Kutta de segunda ordem é, portanto, dada por

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ (1-w) f(x_n, y_n) + w f\left(x_n + \frac{h}{2w}, y_n + \frac{h}{2w} f(x_n, y_n)\right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

## 4.7 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE ORDENS SUPERIORES

De forma análoga, métodos de Runge-Kutta de terceira ordem, quarta ordem, etc, podem ser obtidos. Nos próximos itens serão mencionadas as fórmulas para os métodos de Runge-Kutta de terceira e quarta ordens.

### 4.7.1 MÉTODO DE KUNGE-KUTTA TERCEIRA ORDEM

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3k_2}{4}\right)$$

(4.35)

### 4.7.2 MÉTODO DE KUNGE-KUTTA QUARTA ORDEM

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

(4.36)

Deve-se atentar ao fato de que os métodos de Runge-Kutta, apesar de serem auto-iniciáveis, pois são de passo um, e não trabalharem com derivadas de  $f(x, y)$ , apresentam a desvantagem de não haver para eles uma estimativa simples para o erro, o que inclusive poderia ajudar na escolha do passo  $h$ .

### **4.7.3 ALGORÍTMO**

No apêndice A é mostrado um algoritmo de uma rotina baseada em métodos de Runge-Kutta para resolução de problemas de valor inicial que foi utilizada na obtenção dos resultados apresentados neste trabalho.

## Capítulo 5

# FORMULAÇÃO PSEUDOLINEAR EQUIVALENTE

## 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, o problema inicial da viga não-linear será resolvido usando um sistema *pseudolinear equivalente* que possui uma curva de deflexão igual ao problema inicial. Em outras palavras, o problema não-linear inicial é transformado em um sistema que pode ser resolvido aplicando-se a análise linear. A viga pode ter momento de inércia e módulo de elasticidade variável ao longo de seu comprimento, e ainda condições variáveis de carregamento. O sistema *pseudolinear equivalente* sempre será de rigidez uniforme ao longo do comprimento, mas seu carregamento pode ser variável. A utilização dessa metodologia simplifica as soluções de problemas de grandes deslocamentos, como os que serão discutidos nos capítulos 8 e 9.

## 5.2 FORMULAÇÃO

A obtenção de um sistema *pseudolinear equivalente* de rigidez constante (Fertis, 1993), pode ser iniciada empregando-se a lei de Euler-Bernoulli dada pela Equação (2.4). Esta equação é escrita novamente abaixo.

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = -\frac{M_x}{E_x I_x} \quad (5.1)$$

onde o momento fletor  $M_x$ , módulo de elasticidade  $E_x$ , e o momento de inércia  $I_x$ , são assumidos como variáveis ao longo da viga.

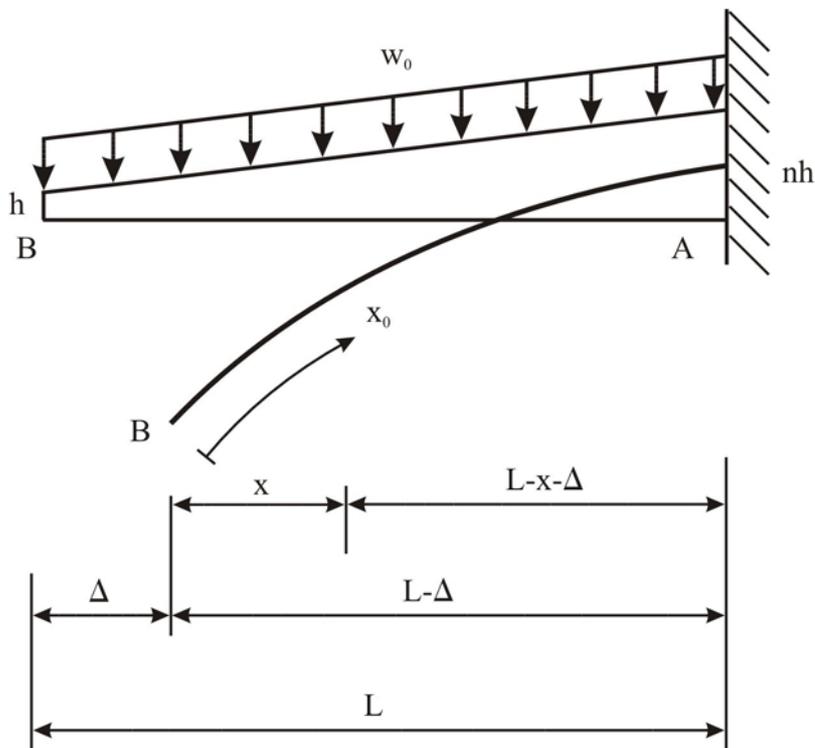


Figura 5.1 - Viga em balanço com estreitamento, com carregamento uniformemente distribuído  $w_0$ .

A curvatura do elemento, que é representada pelo termo do lado esquerdo da Equação (5.1) é de natureza geométrica. Isto requer que os parâmetros  $M_x$ ,  $E_x$  e  $I_x$  no lado direito da equação, também estejam associados com a configuração deformada do elemento. Quando o carregamento no elemento é concentrado e/ou distribuído, e/ou o momento de inércia da seção transversal é variável, as expressões para estes parâmetros são, em geral, integrais de Equações não-lineares da deformação, e contém funções de deslocamento horizontal. Isto é, o momento fletor  $M_x$ , profundidade  $h_x$  do elemento, e o momento de inércia  $I_x$ , são todos funções de  $x$  e  $x_0$ . Isto é facilmente observado ao se examinar a configuração de uma viga em balanço estreita na extremidade livre, como mostra a Figura 5.1. Portanto, o momento fletor  $M_x$  deve ser definido com respeito ao segmento deformado. Por outro lado, o

carregamento sobre o segmento não deformado do elemento, não modifica o segmento deformado. Na Figura 5.1  $n$  é a relação da variação da altura  $h$ .

A rigidez variável  $E_x I_x$  pode ser expressa como

$$E_x I_x = E_1 I_1 g(x) f(x) \quad (5.2)$$

onde  $g(x)$  representa a variação de  $E_x$  com respeito ao valor de referência  $E_1$  e  $f(x)$  representa a variação de  $I_x$  com respeito ao valor de referência  $I_1$ . Se o elemento possui  $E$  e  $I$  constantes por todo o elemento, então  $g(x) = f(x) = 1,00$  e  $E_x I_x = E_1 I_1 = EI$ . Neste caso, se preferido, a constante  $EI$  pode ser tomada como o valor referente da rigidez  $E_1 I_1$ ; no entanto, isto não é obrigatório.

Por substituição da Equação (5.2) em (5.1), obtém-se

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = -\frac{1}{E_1 I_1} \frac{M_x}{g(x) f(x)} \quad (5.3)$$

Integrando-se duas vezes a Equação (5.3), a expressão para o deslocamento vertical  $y$  pode ser escrito como

$$y(x) = \frac{1}{E_1 I_1} \int \left\{ - \int [1 + (y')^2]^{3/2} \frac{M_x}{g(x) f(x)} dx \right\} dx + C_1 \int dx + C_2 \quad (5.4)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes de integração que podem ser determinadas usando-se as condições de contorno do elemento.

Para um elemento de rigidez constante  $E_1 I_1$ , com comprimento e sistema de referência idênticos aos usados pela Equação (5.4), a expressão para a deflexão  $y_e$  pode ser escrita como

$$y_e = \frac{1}{E_1 I_1} \int \left\{ - \int [1 + (y_e')^2]^{3/2} M_e dx \right\} dx + C_1' \int dx + C_2' \quad (5.5)$$

onde  $M_e$  é momento fletor em qualquer seção transversal  $x$  e  $C_1'$  e  $C_2'$  são constantes de integração.

As curvas de deflexão  $y$  e  $y_e$  dadas pelas Equações (5.4) e (5.5), respectivamente, são idênticas se

$$C_1 = C_1' \quad \text{e} \quad C_2 = C_2' \quad (5.6)$$

e

$$\int \left\{ -\int \left[ 1 + (y')^2 \right]^{3/2} \frac{M_x}{f(x)g(x)} dx \right\} dx = \int \left\{ -\int \left[ 1 + (y_e')^2 \right]^{3/2} M_e dx \right\} dx \quad (5.7)$$

As condições na Equação (5.6) são satisfeitas se os dois elementos forem iguais em comprimento e condições de contorno. A Equação (5.7) é satisfeita se  $y_e' = y'$  e se

$$M_e = \frac{M_x}{f(x)g(x)} \quad (5.8)$$

Nestas condições, tem-se

$$\left[ 1 + (y_e')^2 \right]^{3/2} M_e = \left[ 1 + (y')^2 \right]^{3/2} \frac{M_x}{f(x)g(x)} \quad (5.9)$$

Para pequenas deflexões, a Equação (5.9) se reduz na Equação (5.8), pois  $(y_e')^2$  e  $(y')^2$  são muito pequenos comparados com a unidade, portanto, podem ser omitidos. Deste modo, para pequenas deflexões, o diagrama de momento  $M_e$  do sistema equivalente, de rigidez constante  $E_1 I_1$ , pode ser obtido da Equação (5.8). Da mesma maneira para a força cortante  $V_e$  e carregamento  $W_e$  que podem ser obtidos pela derivada da Equação (5.8), isto é,

$$V_e = \frac{d}{dx}(M_e) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{M_x}{f(x)g(x)} \right] \quad (5.10)$$

$$W_e = \frac{d}{dx}(V_e) \cos \theta = -\frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{M_x}{f(x)g(x)} \right] \cos \theta \quad (5.11)$$

onde  $\cos \theta \approx 1$  para pequenas rotações  $\theta$  do elemento. O sistema equivalente, de rigidez constante, neste caso é linear, e a teoria de pequenas deflexões lineares pode ser usada para solucioná-lo.

Quando as deflexões e rotações são grandes,  $(y')^2$  e  $(y_e')^2$ , não podem ser omitidos. As Equações (5.3) e (5.9) levam para uma análise do *pseudolinear equivalente*. O momento  $M_e'$  do sistema *pseudolinear equivalente* de rigidez constante  $E_1 I_1$  deve ser obtido da equação

$$M_e' = [1 + (y')^2]^{3/2} M_e = [1 + (y')^2]^{3/2} \frac{M_x}{f(x) g(x)} = \frac{Z_e}{f(x) g(x)} M_x \quad (5.12)$$

onde

$$Z_e = [1 + (y')^2]^{3/2} \quad (5.13)$$

e  $\theta = \arctg(y')$  representa a inclinação do sistema não-linear inicial. Se  $f(x) = g(x) = 1,00$ , o sistema não-linear inicial terá uma rigidez uniforme  $E I$ .

A força cortante  $V_e'$  e o carregamento  $W_e'$  do sistema *pseudolinear equivalente* de rigidez constante pode ser determinado através da expressão:

$$V_e' = \frac{d}{dx}(M_e') = \frac{d}{dx} [1 + (y')^2]^{3/2} M_e' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{Z_e}{f(x) g(x)} \right] M_x \quad (5.14)$$

$$W_e' = \frac{d}{dx}(V_e') \cos \theta = -\frac{d^2}{dx^2} [1 + (y')^2]^{3/2} M_e' \cos \theta = -\frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{Z_e}{f(x) g(x)} \right] M_x \cos \theta \quad (5.15)$$

Quando o sistema *pseudolinear equivalente* de rigidez constante é obtido, a teoria elementar das deflexões lineares pode ser usada para resolvê-lo. As deflexões e rotações obtidas serão idênticas daquelas do elemento não-linear original de rigidez variável. Isto é adequado, pois o diagrama de momento equivalente  $M_e$  na Equação (5.8) é corrigido, multiplicando-se este pela expressão  $[1 + (y')^2]^{3/2}$ , como mostrado na Equação (5.12).

A fim de simplificar a matemática em consideração, os cálculos de  $V_e'$  e  $W_e'$ , ou  $V_e$  e  $W_e$ , a inclinação do diagrama de momento representada pela Equação (5.12), ou pela (5.8), pode ser aproximada por linhas retas criteriosamente selecionadas. Assim, o pseudolinear de rigidez constante  $E_1 I_1$  será sempre carregado por poucos carregamentos concentrados. Esta

simples aproximação permite a solução de uma larga extensão de complexos problemas de deflexão, possibilitando a obtenção de resultados precisos. Isto também produz um caminho conveniente para a resolução de problemas de grandes deslocamentos, onde a rigidez  $EI$  e os carregamentos variam arbitrariamente, ao longo do comprimento do elemento.

### 5.3 CARREGAMENTO E RIGIDEZ NA GEOMETRIA DA DEFORMAÇÃO

A fim de aplicar o método discutido na Seção 5.2, deve-se notar que as expressões para o momento fletor  $M_x$  e o momento de Inércia  $I_x$  são geralmente, funções não-lineares de grandes deformações do elemento, isto é,

$$M_x = M(x, x_0) \quad (5.16)$$

$$I_x = I_1 f(x, x_0) \quad (5.17)$$

onde  $x$  é a abscissa do eixo da configuração deformada do elemento,  $x_0$  é o comprimento do arco do segmento deformado e  $I_1$  é o momento de inércia referencial. Também, deve-se notar aqui, que o momento fletor equivalente  $M_e$ , ou  $M'_e$ , deve ser definido com a respectiva configuração deformada do elemento, onde a exata solução para  $M_e$ ,  $V_e$  e  $W_e$  são funções do deslocamento horizontal  $\Delta(x)$  do elemento.

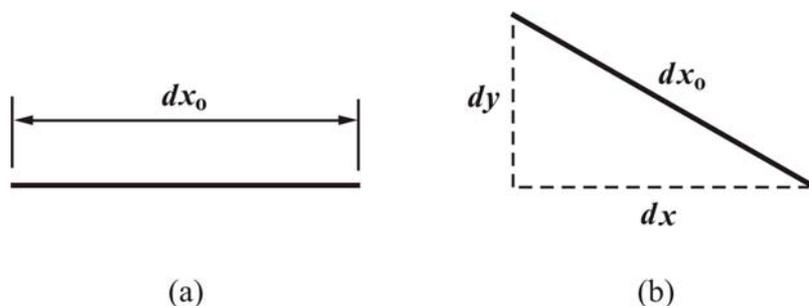


Figura 5.2 - (a) configuração não deformada de um segmento de comprimento de arco  $dx_0$  ;  
(b) configuração deformada de  $dx_0$  .

Objetivando reduzir a complexidade destes problemas, expressa-se o comprimento do arco  $x_0(x)$  em termos de deslocamento horizontal  $\Delta(x)$  do elemento, onde  $0 \leq x \leq (L-x)$ , isto é

$$x_0(x) = x + \Delta(x) \quad (5.18)$$

A expressão para  $x_0(x)$  é uma função integral da deformação, que pode ser expressa como

$$x_0(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (5.19)$$

A derivação da Equação (5.18) pode ser iniciada considerando-se um segmento  $dx_0$  antes e depois da deformação, como mostrado na Figura 5.2. Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$[dx_0]^2 = [dx]^2 + [dy]^2 \quad (5.20)$$

Assumindo-se que

$$dx_0 = dx + d\Delta(x) \quad (5.21)$$

e substituindo na Equação (5.20), obtém-se

$$[dx + d\Delta(x)]^2 = [dx]^2 + [dy]^2 \quad (5.22)$$

ou

$$dx + d\Delta(x) = \left\{ 1 + [y'(x)]^2 \right\}^{1/2} dx \quad (5.23)$$

A integral da Equação (5.23) com o respectivo  $x$  permite que:

$$x + \Delta(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (5.24)$$

a qual apresenta resultados idênticos aos das Equações (5.18) e (5.19).

Para vigas onde é permitido o movimento em uma de suas extremidades na direção horizontal, tal como vigas em balanço, vigas simplesmente apoiadas, etc., expressões

aproximadas para a variação de  $\Delta(x)$  podem ser usadas, facilitando a solução do problema. Os casos de  $\Delta(x)$  investigados (Fertis, 1993), e que fornecem resultados mais precisos, são

$$\Delta(x) = \text{constante} = \Delta \quad (5.25)$$

$$\Delta(x) = \Delta \frac{x}{L_0} \quad (5.26)$$

$$\Delta(x) = \Delta \sqrt{\frac{x}{L_0}} \quad (5.27)$$

$$\Delta(x) = \Delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L_0}\right) \quad (5.28)$$

onde  $\Delta$  é o deslocamento horizontal da extremidade móvel e  $L_0 = (L - \Delta)$ . Um gráfico da variação de  $\Delta(x)$  dado pelas Equações (5.25) a (5.28) é mostrado na Figura 5.3.

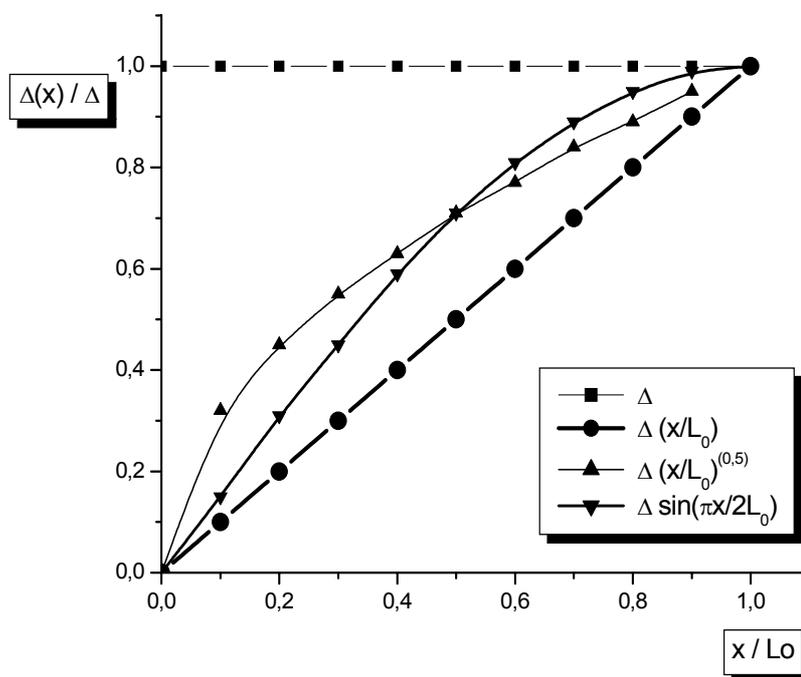


Figura 5.3 - Gráfico de diversos casos de  $\Delta(x)$ .

Os diversos casos examinados por Fertis e Afonta, e Fertis e Lee (Fertis, 1993), indicam que uma solução razoável com um desvio em torno de três por cento ou menor, pode ser obtida usando-se a Equação (5.25). Isto significa que a variação do momento fletor  $M(x)$ , e conseqüentemente a deformação do elemento, são dependentes das condições de contorno de  $\Delta(x)$  na extremidade móvel do elemento, e insensível para a variação de  $\Delta(x)$  entre as extremidades do elemento. Isto é particularmente verdade quando as deformações são muito grandes. Deve ser notado aqui que a Equação (5.25) é uma fronteira superior, como indicado pelo gráfico na Figura 5.3.

A variação do momento de inércia  $I_x$  de um elemento flexível, como já apresentado, é também uma função não-linear da deformação. Para elementos uniformes com estreitamento e que possuem apenas carregamentos concentrados, a variação da altura  $h(x)$  do elemento pode ser aproximada pela expressão

$$h(x) = (n-1) \left[ \frac{1}{n-1} + \frac{x}{L-\Delta} \right] h \quad (5.29)$$

onde  $x$  é a abscissa dos pontos do eixo do elemento nesta configuração deformada,  $n$  representa o estreitamento,  $h$  refere-se à altura, e  $L$  é o comprimento do elemento não deformado. O desvio de três por cento ou menor que é associado a utilização da Equação (5.29) é considerado pequeno para aplicações práticas. Sobre esta adoção, a solução do elemento flexível que possui apenas carregamentos concentrados não requer a utilização de Equações integrais ou o uso das Equações (5.25) a (5.28) (Fertis, 1993).

## 5.4 VIGA EM BALANÇO DE SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL

Considerando uma viga em balanço com estreitamento, como na Figura 5.4, que possui um carregamento concentrado  $P$ , na extremidade livre  $B$ . O módulo de elasticidade  $E$  é assumido como constante, e o momento de inércia  $I_x$  em  $0 \leq x \leq (L-\Delta)$ , onde  $\Delta$  é o deslocamento horizontal da extremidade livre  $B$ , é dado pela expressão

$$I_x = \frac{b h^3}{12} [f(x_0)] = I_B \left[ 1 + \frac{(n-1)}{L} x_0 \right]^3 = I_B f(x) \quad (5.30)$$

onde

$$I_B = \frac{b h^3}{12} \quad (5.31)$$

$$x_0 = \int_0^x \left\{ 1 + [y'(\xi)]^2 \right\}^{1/2} dx \quad (5.32)$$

$$f(x) = \left[ 1 + \frac{(n-1)}{L} x_0 \right]^3 \quad (5.33)$$

sendo  $b$  a largura constante do elemento e  $\xi$  uma variável secundária dependente de  $x$ .

Da Figura 5.4.a, o momento fletor  $M_x$  para cada  $x$  a partir da extremidade livre  $C$  é:

$$M_x = Px \quad (5.34)$$

Substituindo as Equações (5.30) e (5.34) na Equação (5.3), com  $g(x) = 1$ , vem que

$$\frac{y''}{\left[ 1 + (y')^2 \right]^{3/2}} = - \frac{P}{EI_B} \frac{x}{\left\{ 1 + \frac{(n-1)}{L} \int_0^x \left[ 1 + (y'(\xi))^2 \right]^{1/2} d\xi \right\}^3} \quad (5.35)$$

A Equação diferencial (5.35) é em função de uma integral cuja solução é complexa.

A solução pode ser simplificada usando-se a expressão aproximada por  $h(x)$  dada pela Equação (5.29). Então,

$$I_x = \frac{b h^3}{12} \left[ 1 + (n-1) \frac{x}{L - \Delta} \right]^3 = I_1 f(x) \quad (5.36)$$

$$I_1 = I_B = \frac{b h^3}{12} \quad (5.37)$$

$$f(x) = \left[ 1 + (n-1) \frac{x}{L - \Delta} \right]^3 \quad (5.38)$$

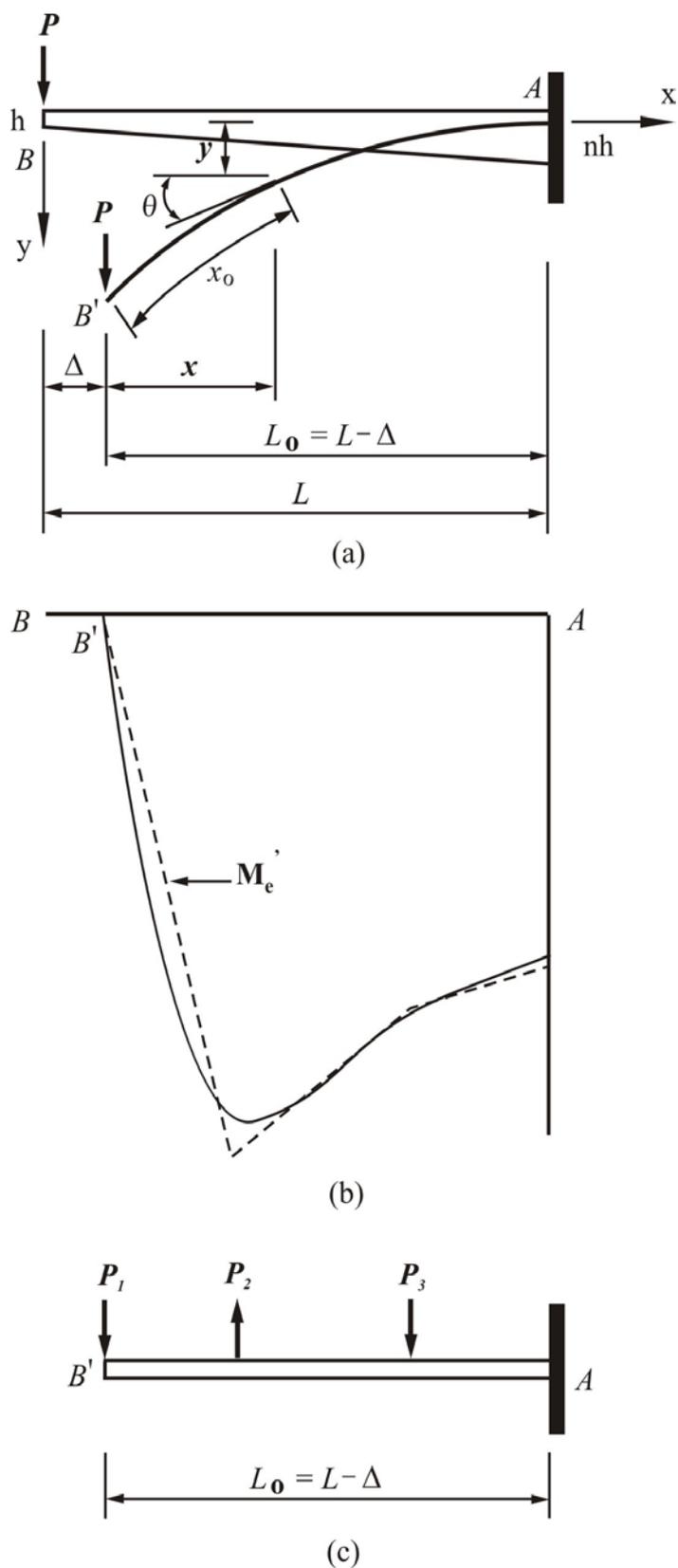


Figura 5.4 - Viga em balanço: (a) elemento original de rigidez variável; (b) diagrama do momento  $M'_e$  do sistema pseudolinar com a forma aproximada por três segmentos de reta; (c) sistema pseudolinar equivalente de rigidez constante.

Desta forma substituindo-se na Equação (5.3),

$$\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = -\frac{P(L-\Delta)^3}{EI_B} \frac{x}{\{(n-1)x+(L-\Delta)\}^3} \quad (5.39)$$

Integrando a Equação (5.39), onde para se determinar a constante de integração, a condição de contorno de rotação zero em  $x=(L-\Delta)$  é considerada (Munem e Foulis, 1982).

As seguintes constantes são definidas para simplificar a integração,

$$\frac{P(L-\Delta)^3}{EI_B} = A$$

$$(n-1) = a \quad (5.40)$$

$$(L-\Delta) = b$$

Portanto a Equação (5.39) torna-se,

$$\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = -A \frac{x}{[ax+b]^3} \quad (5.41)$$

Fazendo a substituição

$$y' = z \quad (5.42)$$

na Equação (5.41),

$$\frac{z'}{(1+z^2)^{3/2}} = -A \frac{x}{[ax+b]^3} \quad (5.43)$$

Fazendo

$$z' = \frac{dz}{dx} \quad (5.44)$$

que substituído em (5.43) e integrando uma vez membro a membro,

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{x_0}^x -A \frac{x}{[ax+b]^3} dx \quad (5.45)$$

Cujos termos serão resolvidos separadamente.

Resolvendo o 1º Termo de (5.45):

Fazendo a seguinte substituição de variáveis,

$$z = \operatorname{tg} \theta \quad (5.46)$$

$$dz = \sec^2 \theta d\theta$$

então

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(1+\operatorname{tg}^2 \theta)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \frac{d\theta}{\sec \theta} = \int_{z_0}^z \cos \theta d\theta \quad (5.47)$$

Portanto

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \cos \theta d\theta = \operatorname{sen} \theta \quad (5.48)$$

Substituindo de volta:

$$z = \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (5.49)$$

Elevando ambos os termos ao quadrado:

$$z^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$z^2 - z^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$z^2 = \operatorname{sen}^2 \theta + z^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$z^2 = (1 + z^2) \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\frac{z^2}{(1 + z^2)} = \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}} \quad (5.50)$$

Portanto,

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = \operatorname{sen} \theta = \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}} \Bigg|_{z_0}^z \quad (5.51)$$

Resolvendo o 2º Termo de (5.45):

Multiplicando e dividindo por  $a$ ,

$$-A \int_{x_0}^x \frac{x}{[ax + b]^3} dx = -\frac{A}{a} \int_{x_0}^x \frac{ax}{[ax + b]^3} dx \quad (5.52)$$

Somando e subtraindo  $b$ ,

$$-\frac{A}{a} \int_{x_0}^x \frac{ax + b - b}{[ax + b]^3} dx = -\frac{A}{a} \int_{x_0}^x \left\{ \frac{ax + b}{[ax + b]^3} - \frac{b}{[ax + b]^3} \right\} dx \quad (5.53)$$

$$-\frac{A}{a} \int_{x_0}^x \left\{ \frac{ax + b}{[ax + b]^3} - \frac{b}{[ax + b]^3} \right\} dx = -\frac{A}{a} \left\{ \int_{x_0}^x \frac{1}{[ax + b]^2} dx - \int_{x_0}^x \frac{b}{[ax + b]^3} dx \right\}$$

Portanto,

$$-A \int_{x_0}^x \frac{x}{[ax+b]^3} dx = -\frac{A}{a} \left\{ \int_{x_0}^x \frac{1}{[ax+b]^2} dx - \int_{x_0}^x \frac{b}{[ax+b]^3} dx \right\} \quad (5.54)$$

Resolvendo separadamente as duas integrais por partes,

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{[ax+b]^2} dx$$

onde  $\Rightarrow u = ax+b \Rightarrow du = a dx$  (5.55)

$$\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{a(ax+b)} \Big|_{x_0}^x$$

e

$$-b \int_{x_0}^x \frac{1}{[ax+b]^3} dx$$

onde  $\Rightarrow u = ax+b \Rightarrow du = a dx$  (5.56)

$$\frac{-b}{a} \int_{x_0}^x \frac{1}{u^3} du = +\frac{b}{2a(ax+b)^2} \Big|_{x_0}^x$$

Então,

$$-A \int_{x_0}^x \frac{x}{[ax+b]^3} dx = -\frac{A}{a} \left[ -\frac{1}{a(ax+b)} \Big|_{x_0}^x + \frac{b}{2a(ax+b)^2} \Big|_{x_0}^x \right] \quad (5.57)$$

$$-A \int_{x_0}^x \frac{x}{[ax+b]^3} dx = -\frac{A}{a} \left[ \frac{-2ax-2b+b}{2a(ax+b)^2} \Big|_{x_0}^x \right]$$

Portanto, após solução do 2º Termo (5.57) e do 1º Termo (5.51), voltando em (5.45),

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{x_0}^x -A \frac{x}{[ax+b]^3} dx$$

$$\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} \Big|_{z_0=0}^{z=z} = -\frac{A}{a} \left[ \frac{-2ax-2b+b}{2a(ax+b)^2} \Big|_{x_0=L-\Delta=b}^{x=x} \right] \quad (5.58)$$

$$\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} = -\frac{A}{2a^2} \left[ \frac{-2ax-b}{(ax+b)^2} - \frac{-2ab-b}{(ab+b)^2} \right]$$

Denominando o último termo  $Q(x)$ , por

$$Q(x) = A \left[ \frac{2ax+b}{2a^2(ax+b)^2} - \frac{b(2a+1)}{2a^2b^2(a+1)^2} \right] \quad (5.59)$$

Fazendo as substituições de volta das Equações (5.40) em (5.59),

$$Q(x) = \frac{P(L-\Delta)^3}{EI_B} \left[ \frac{2(n-1)x+(L-\Delta)}{2(n-1)^2((n-1)x+(L-\Delta))^2} - \frac{(2n-1)}{2(n-1)^2(L-\Delta)n^2} \right] \quad (5.60)$$

Substituindo (5.60) em (5.58),

$$\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} = Q(x) \quad (5.61)$$

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = Q(x)$$

Elevando ambos os termos ao quadrado,

$$\begin{aligned}
y'^2 &= Q(x)^2 + Q(x)^2 y'^2 \\
y'^2 - Q(x)^2 y'^2 &= Q(x)^2 \\
y'^2 (1 - Q(x)^2) &= Q(x)^2 \\
y' &= \frac{Q(x)}{[1 - (Q(x))^2]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Portanto,

$$y'(x) = \frac{Q(x)}{\{1 - [Q(x)]^2\}^{1/2}} \tag{5.63}$$

Onde,

$$Q(x) = \frac{P(L - \Delta)^3}{EI_B} \left[ \frac{2(n-1)x + (L - \Delta)}{2(n-1)^2((n-1)x + (L - \Delta))^2} - \frac{(2n-1)}{2(n-1)^2(L - \Delta)n^2} \right] \tag{5.64}$$

Sendo o deslocamento horizontal  $\Delta$  na Equação (5.63) desconhecido. O valor de  $\Delta$  pode ser determinado a partir da Equação,

$$L = \int_0^{L-\Delta} [1 + (y')^2]^{1/2} dx \tag{5.65}$$

pelo processo de tentativa e erro, isto é, assume-se um valor para  $\Delta$  na Equação (5.63) e integra-se a Equação (5.65) para determinar o valor do comprimento  $L$ . O procedimento deve ser repetido para vários valores de  $\Delta$ , até que o correto comprimento  $L$  seja obtido. Conhecido o  $\Delta$ , os valores de  $y'$  em  $0 \leq x \leq (L - \Delta)$  podem ser obtidos pelo uso da Equação (5.63). Deste modo, conhecido  $y'$ , os valores de qualquer  $x$  do diagrama de momento  $M'_e$  do sistema pseudolinear de rigidez constante  $EI_B$ , pode ser determinado usando-se a Equação (5.12).

## 5.5 VIGA EM BALANÇO DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE

Para o caso de uma viga em balanço de seção constante, pode-se obter  $y'$  e  $\Delta$  conforme abaixo.

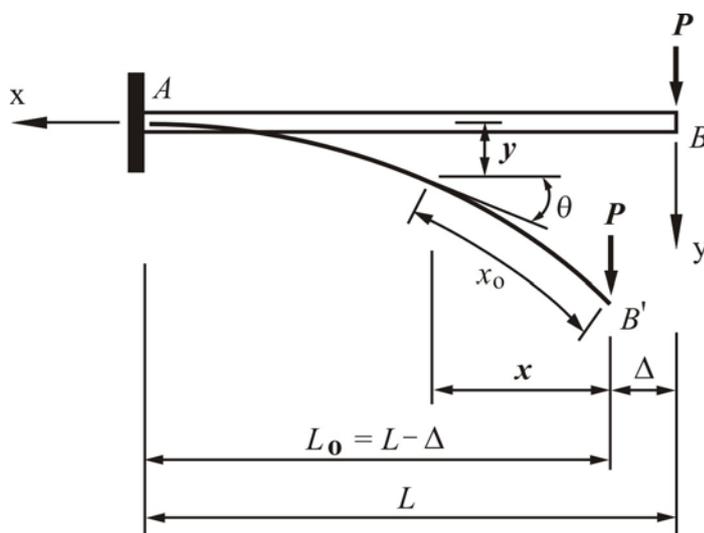


Figura 5.5 - Viga em balanço de seção constante.

Para a Figura 5.5, faz-se a integração da Equação (2.5), que é reproduzida novamente como

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{Px}{EI} \quad (5.66)$$

Fazendo a substituição,

$$y' = z \quad (5.67)$$

em (5.66),

$$\frac{z'}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{Px}{EI} \quad (5.68)$$

Tem-se que,

$$z' = \frac{dz}{dx} \quad (5.69)$$

Substituindo em (5.68) e integrando uma vez membro a membro,

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{x_0}^x \frac{Px}{EI} dx \quad (5.70)$$

Resolvendo os termos separadamente,

Resolvendo o 1º Termo de (5.70).

Fazendo a seguinte substituição de variáveis,

$$z = tg \theta \quad (5.71)$$

$$dz = \sec^2 \theta d\theta$$

então,

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(1+tg^2 \theta)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \frac{d\theta}{\sec \theta} = \int_{z_0}^z \cos \theta d\theta \quad (5.72)$$

Portanto,

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \int_{z_0}^z \cos \theta d\theta = \text{sen } \theta \quad (5.73)$$

Substituindo de volta,

$$z = tg \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{(1-\text{sen}^2 \theta)}} \quad (5.74)$$

Elevando ambos os termos ao quadrado:

$$z^2(1 - \text{sen}^2\theta) = \text{sen}^2\theta$$

$$z^2 - z^2 \text{sen}^2\theta = \text{sen}^2\theta$$

$$z^2 = \text{sen}^2\theta + z^2 \text{sen}^2\theta$$

$$z^2 = (1 + z^2) \text{sen}^2\theta$$

$$\frac{z^2}{(1 + z^2)} = \text{sen}^2\theta$$

$$\text{sen}\theta = \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}} \quad (5.75)$$

Portanto,

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = \text{sen}\theta = \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}} \Bigg|_{z_0}^z \quad (5.76)$$

Resolvendo o 2º Termo de (5.70).

$$\int_{x_0}^x \frac{Px}{EI} dx = \frac{P}{EI} \int_{x_0}^x x dx \quad (5.77)$$

Portanto,

$$\frac{P}{EI} \int_{x_0}^x x dx = \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^2}{2} \Bigg|_{x_0}^x \right] \quad (5.78)$$

Então, após a solução do 2º Termo (5.78) e do 1º Termo (5.76), voltando em (5.70),

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{P}{EI} \int_{x_0}^x x dx$$

$$\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} \Big|_{z_0=0}^{z=z} = \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0=L-\Delta}^{x=x} \right] \quad (5.79)$$

$$\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} = \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{(L-\Delta)^2}{2} \right]$$

Chamando de  $G(x)$  o segundo termo.

$$G(x) = \frac{P}{2EI} \left[ x^2 - (L-\Delta)^2 \right] \quad (5.80)$$

Substituindo (5.80) em (5.79),

$$\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} = G(x) \quad (5.81)$$

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = G(x)$$

Elevando ambos os termos ao quadrado,

$$y'^2 = G(x)^2 + G(x)^2 y'^2$$

$$y'^2 - G(x)^2 y'^2 = G(x)^2$$

$$y'^2 (1 - G(x)^2) = G(x)^2$$

$$y' = \frac{G(x)}{[1 - (G(x))^2]^{1/2}} \quad (5.82)$$

Portanto,

$$y'(x) = \frac{G(x)}{\{1 - [G(x)]^2\}^{1/2}} \quad (5.83)$$

Onde,

$$G(x) = \frac{P}{2EI} [x^2 - (L - \Delta)^2] \quad (5.84)$$

Agora, a grande deformação  $y$  em  $0 \leq x \leq L_0$  pode ser obtida integrando a Equação (5.83) e impondo condição de contorno de deslocamento vertical zero em  $x = L_0$ , para a determinação da constante de integração. No entanto, esta Equação  $G(x)$  em (5.84) é uma função do deslocamento horizontal desconhecido  $\Delta$  da extremidade livre da viga. O valor de  $\Delta$  pode ser determinado a partir da Equação:

$$L = \int_0^{L_0} [1 + (y')^2]^{1/2} dx \quad (5.85)$$

por um processo de tentativa e erro. Isto é, assume-se um valor de  $\Delta$  na Equação (5.83) e então integra-se a Equação (5.85) para se determinar o comprimento  $L$ . O procedimento deve ser repetido para vários valores de  $\Delta$  até o valor correto de  $L$  ser obtido. Conforme descrito anteriormente, os valores de  $y$  podem ser determinados através da Equação (5.12) e da teoria elementar das deflexões lineares.

## Capítulo 6

# ELEMENTO FINITO DE VIGA

## 6.1 INTRODUÇÃO

A formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para o elemento de viga sujeito à flexão é apresentada neste capítulo. O elemento de viga mostrado na Figura 6.1 é considerado reto com área da seção transversal  $A$ , momento de inércia  $I$  da área da seção transversal em relação ao eixo centroidal paralelo ao eixo  $z$  (perpendicular ao plano  $xy$ ), comprimento  $\ell$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E$ . O material é considerado linear e elástico.

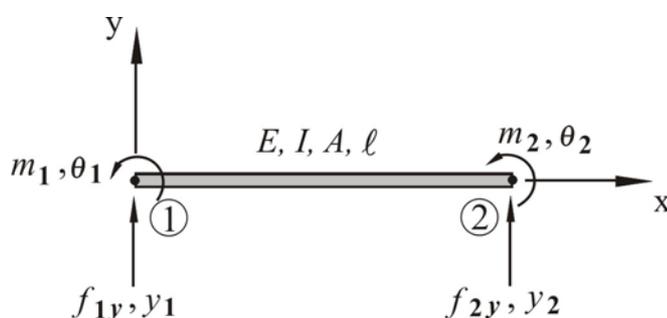


Figura 6.1 – Elemento de viga.

Cada nó do elemento tem um deslocamento transversal na direção  $y$  e uma rotação em torno do eixo  $z$ . O elemento de viga tem, no total, quatro graus de liberdade.

## 6.2 – FUNÇÃO DE DESLOCAMENTO TRANSVERSAL

Os deslocamentos transversais são  $y_1$  e  $y_2$  e as rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . As forças nodais são representadas por  $f_{1y}$  e  $f_{2y}$  e os momentos por  $m_1$  e  $m_2$ , como mostrado na Figura 6.1, a equação diferencial da viga é (Oliveira, 2006)

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0 \quad (6.1)$$

onde  $y(x)$  é a função de deslocamento transversal na direção do eixo  $y$ .

A função de deslocamento transversal pode ser expressa como

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (6.2)$$

e pode ser colocada como uma função dos graus de liberdade nodais  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $y_2$  e  $\theta_2$ . O número de termos no polinômio deve ser igual ao número de graus de liberdade do elemento. Esta função preserva a continuidade das deflexões, mas não das inclinações ao longo da superfície do elemento. Para fins práticos, entretanto, em muitos casos, a precisão da solução baseada na equação (6.2) é aceitável (Ugural, 1981).

Utilizando a equação (6.2) tem-se, nos pontos nodais, que

$$\begin{aligned} y(0) &= y_1 = a_1 \\ \frac{dy(0)}{dx} &= \theta_1 = a_2 \\ y(\ell) &= y_2 = a_1 + a_2 \ell + a_3 \ell^2 + a_4 \ell^3 \\ \frac{dy(\ell)}{dx} &= \theta_2 = a_2 + 2a_3 \ell + 3a_4 \ell^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

A solução para  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) do sistema formado pelas equações (6.3) é

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 \\ a_2 &= \theta_1 \\ a_3 &= -\frac{3}{\ell^2} y_1 - \frac{2}{\ell} \theta_1 + \frac{3}{\ell^2} y_2 - \frac{1}{\ell} \theta_2 \\ a_4 &= \frac{2}{\ell^3} y_1 + \frac{1}{\ell^2} \theta_1 - \frac{2}{\ell^3} y_2 + \frac{1}{\ell^2} \theta_2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Levando os valores de  $a_i$  da equação (6.4) na equação (6.2), tem-se que

$$y(x) = y_1 + \theta_1 x + \left[ -\frac{3}{\ell^2}(y_1 - y_2) - \frac{1}{\ell}(2\theta_1 + \theta_2) \right] x^2 + \left[ \frac{2}{\ell^3}(y_1 - y_2) + \frac{1}{\ell^2}(\theta_1 + \theta_2) \right] x^3$$

ou,

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{\ell^3}(2x^3 - 3x^2\ell + \ell^3)y_1 + \frac{1}{\ell^3}(x^3\ell - 2x^2\ell^2 + x\ell^3)\theta_1 \\ & + \frac{1}{\ell^3}(-2x^3 + 3x^2\ell)y_2 + \frac{1}{\ell^3}(x^3\ell - x^2\ell^2)\theta_2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Denotando por

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\ell^3}(2x^3 - 3x^2\ell + \ell^3) \\ N_2 &= \frac{1}{\ell^3}(x^3\ell - 2x^2\ell^2 + x\ell^3) \\ N_3 &= \frac{1}{\ell^3}(-2x^3 + 3x^2\ell) \\ N_4 &= \frac{1}{\ell^3}(x^3\ell - x^2\ell^2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

a equação (6.5) pode ser escrita como

$$y(x) = N_1 y_1 + N_2 \theta_1 + N_3 y_2 + N_4 \theta_2 \quad (6.7)$$

onde, na formulação isoparamétrica do MEF,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  e  $N_4$  são chamadas de funções de forma para o elemento de viga (Zienkiewicz, 1989).

A equação (6.7) pode ser colocada como

$$y(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Chamando de  $[N]$  a matriz formada pelas funções de forma e fazendo

$$\{d\}_e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

pode-se expressar a equação (6.8) na forma matricial como

$$y(x) = [N] \{d\}_e \quad (6.10)$$

onde,

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (6.11)$$

### 6.3 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

A relação deformação-deslocamento axial é deduzida como sendo

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du}{dx} \quad (6.12)$$

onde  $u$  é a função de deslocamento axial.

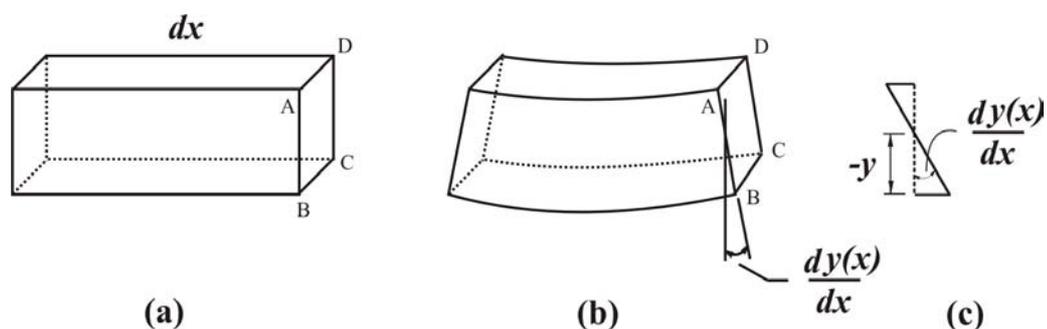


Figura 6.2 – (a) Configuração não deformada da viga; (b) Configuração deformada da viga; (c) inclinação na linha.

Considerando a configuração deformada da viga mostrada na Figura 6.2.b, a relação do deslocamento axial com o deslocamento transversal é

$$u = -y \frac{dy(x)}{dx} \quad (6.13)$$

Vale lembrar a hipótese básica da teoria elementar de viga que a seção reta da viga (tal como a seção ABCD mostrada na Figura 6.2.b) que é plana antes da deformação devido a flexão permanece plana após a deformação. Esta seção em geral gira de um ângulo  $dy(x)/dx$ .

A substituição da Equação (6.13) na Equação (6.12), obtém-se

$$\varepsilon_x(x, y) = -y \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (6.14)$$

Da teoria elementar de viga, o momento de flexão e a força de cisalhamento são (Beer e Johnston, 1995),

$$M = EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad Q = EI \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \quad (6.15)$$

## 6.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA

Em todos os nós da viga, usaremos as seguintes convenções de sinais:

- Os momentos são positivos no sentido anti-horário;
- As rotações são positivas no sentido anti-horário;
- As forças são positivas no sentido positivo do eixo  $y$ ;
- Os deslocamentos são positivos no sentido positivo do eixo  $y$ .

Os sentidos positivos dos momentos, rotações, forças e deslocamentos nodais são mostrados na Figura 6.3

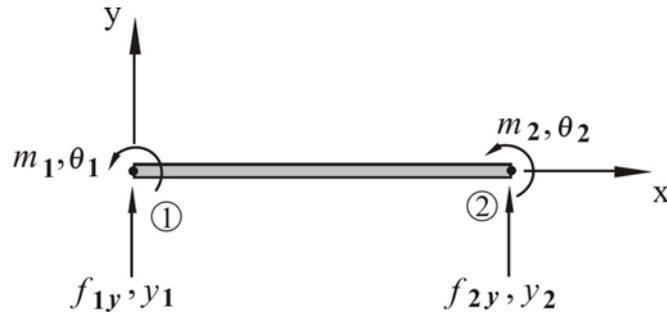


Figura 6.3 – Sentidos positivos dos momentos, rotações, forças e deslocamentos nodais.

A convenção de sinais usada na teoria elementar de viga para as forças positivas de cisalhamento  $Q$  e para os momentos positivos de flexão  $M$  é mostrada na Figura 6.4.



Figura 6.4 – Convenção de sinais usada na teoria elementar de viga.

Aplicando as Equações (6.5) e (6.15), podemos obter as forças de cisalhamento e os momentos de flexão nodais, como

$$\begin{aligned}
 f_{1y} = Q_1 &= EI \frac{d^3 y(0)}{dx^3} = \frac{EI}{\ell^3} (12y_1 + 6\ell\theta_1 - 12y_2 + 6\ell\theta_2) \\
 m_1 = -M_1 &= -EI \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = \frac{EI}{\ell^3} (6\ell y_1 + 4\ell^2\theta_1 - 6\ell y_2 + 2\ell^2\theta_2) \\
 f_{2y} = -Q_2 &= -EI \frac{d^3 y(\ell)}{dx^3} = \frac{EI}{\ell^3} (-12y_1 - 6\ell\theta_1 + 12y_2 - 6\ell\theta_2) \\
 m_2 = M_2 &= EI \frac{d^2 y(\ell)}{dx^2} = \frac{EI}{\ell^3} (6\ell y_1 + 2\ell^2\theta_1 - 6\ell y_2 + 4\ell^2\theta_2)
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Colocando a Equação (6.16) na forma matricial, vem

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \{f\}_e = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{6.17}$$

sendo que

$$[K]_e = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ Sim. & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

é a matriz de rigidez do elemento de viga.

## 6.5 MÉTODO DO TRABALHO EQUIVALENTE

Quando o elemento de viga recebe carregamento distribuído, este deve ser substituído por forças e momentos nodais de tal forma que provoquem o mesmo efeito na viga quando submetida ao carregamento distribuído real. O método do trabalho equivalente será aplicado para substituir a carga distribuída por um conjunto de “cargas” concentradas nodais. Esse método é baseado no conceito de que o trabalho do carregamento distribuído é igual ao trabalho de cargas concentradas equivalentes para deslocamentos nodais equivalentes.

O método do trabalho equivalente é usado a seguir para o elemento de viga submetido a um carregamento distribuído  $q(x)$  mostrado na Figura 6.5.

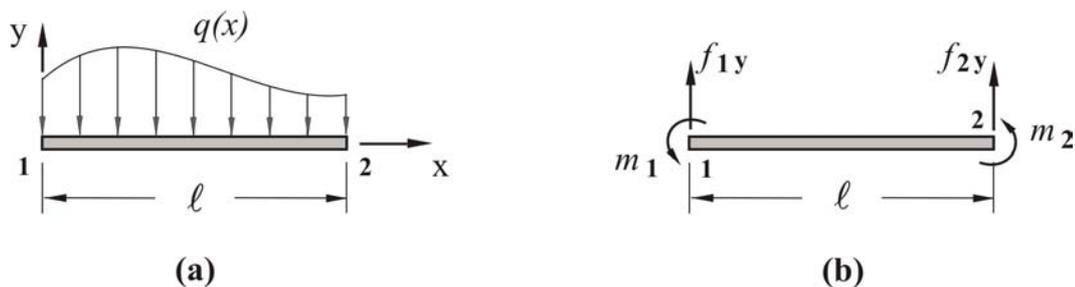


Figura 6.5 – Elemento de viga submetido a um carregamento distribuído  $q(x)$ .

O trabalho devido ao carregamento distribuído é

$$W_{dist.} = -\int_0^{\ell} q(x) y(x) dx \quad (6.19)$$

O trabalho devido às forças nodais concentradas é

$$W_{conc.} = m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + f_{1y}y_1 + f_{2y}y_2 \quad (6.20)$$

As forças e momentos nodais podem ser determinados fazendo  $W_{dist.} = W_{conc.}$ .

Usando as Equações (6.19) e (6.20) com  $W_{dist.} = W_{conc.}$ , tem-se que

$$-\int_0^{\ell} q(x)y(x)dx = f_{1y}y_1 + f_{2y}y_2 + m_1\theta_1 + m_2\theta_2 \quad (6.21)$$

Usando a Equação (6.5) e com  $q(x)=\text{constante}$ , iremos obter o trabalho devido ao carregamento uniformemente distribuído como,

$$\begin{aligned} -\int_0^{\ell} q(x)y(x)dx &= -q\ell y_1 - q\frac{\ell^2}{2}\theta_1 + q\ell(y_1 - y_2) \\ &+ q\frac{\ell^2}{3}(2\theta_1 + \theta_2) - q\frac{\ell}{2}(y_1 - y_2) - q\frac{\ell^2}{4}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Igualando as Equações (6.21) e (6.22) com  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 0$ ,  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = 0$  teremos

$$f_{1y} = -q\ell + q\ell - q\frac{\ell}{2} = -q\frac{\ell}{2} \quad (6.23)$$

Analogamente, fazendo  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 1$ ,  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = 0$ , tem-se que

$$f_{2y} = -q\ell + q\frac{\ell}{2} = -q\frac{\ell}{2} \quad (6.24)$$

Fazendo, agora, todos os deslocamentos iguais a zero exceto, primeiramente, para  $\theta_1$  e, posteriormente, para  $\theta_2$ , obtemos

$$m_1 = -q\frac{\ell^2}{2} + \frac{2}{3}q\ell^2 - q\frac{\ell^2}{4} = -q\frac{\ell^2}{12} \quad (6.25)$$

$$m_2 = q\frac{\ell^2}{3} - q\frac{\ell^2}{4} = q\frac{\ell^2}{12} \quad (6.26)$$

A Figura 6.6 ilustra o elemento de viga com carregamento uniforme distribuído e as forças nodais equivalentes.

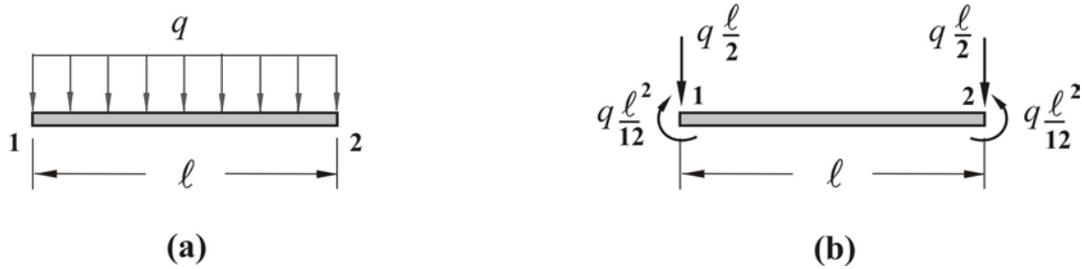


Figura 6.6 – Elemento de viga com carregamento uniforme distribuído e as forças nodais equivalentes.

## 6.6 ENERGIA POTENCIAL

O princípio da energia potencial mínima pode ser usado para determinar a matriz de rigidez do elemento de viga.

A energia potencial total de um elemento é

$$\Pi_p = U - V \quad (6.27)$$

onde a energia de deformação  $U$  para uma viga é dada por

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (6.28)$$

e a energia potencial devido a carregamento distribuído e cargas nodais concentradas por

$$V = \iint_S P_y(x) y(x) dS + \sum_{i=1}^2 F_{iy} y_i + \sum_{i=1}^2 M_i \theta_i \quad (6.29)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (6.29) representa a energia potencial devido ao carregamento transversal distribuído  $P_y(x)$ .

Considere um elemento de viga como mostrado na Figura 6.7.

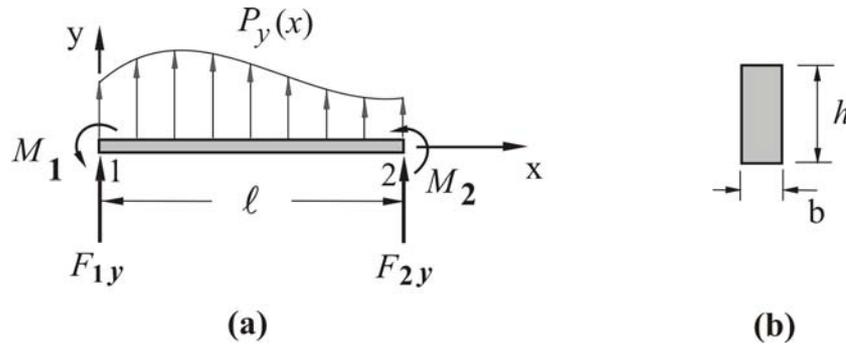


Figura 6.7 – Elemento de viga.

O diferencial de volume é

$$dV = dA \, dx \quad (6.30)$$

e o diferencial de área sobre a qual age as forças de superfície é

$$dS = b \, dx \quad (6.31)$$

onde  $b$  é a largura constante da viga. Levando as Equações (6.30) e (6.31) nas Equações (6.28) e (6.29), a expressão da energia potencial total, Equação (6.27), torna-se

$$\Pi_p = \int_x \iint_A \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \, dA \, dx - \int_0^\ell b P_y(x) y(x) \, dx - \sum_{i=1}^2 (F_{iy} y_i + M_i \theta_i) \quad (6.32)$$

A derivada de segunda ordem do deslocamento transversal  $y(x)$  é

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{1}{\ell^3} \left[ (12x - 6\ell) y_1 + (6\ell x - 4\ell^2) \theta_1 + (6\ell - 12x) y_2 + (6\ell x - 2\ell^2) \theta_2 \right] \quad (6.33)$$

que na forma matricial, torna-se

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{12x - 6\ell}{\ell^3} & \frac{6\ell x - 4\ell^2}{\ell^3} & \frac{6\ell - 12x}{\ell^3} & \frac{6\ell x - 2\ell^2}{\ell^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.34)$$

ou simplesmente,

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = [B] \{d\}_e \quad (6.35)$$

sendo

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{12x-6l}{l^3} & \frac{6lx-4l^2}{l^3} & \frac{6l-12x}{l^3} & \frac{6lx-2l^2}{l^3} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Levando a Equação (6.35) na Equação (6.14) a qual relaciona a deformação com o deslocamento, a deformação  $\varepsilon_x$  em termos dos deslocamentos e rotações nodais é expressa como

$$\varepsilon_x = -y[B]\{d\}_e \quad (6.37)$$

A relação tensão-deformação é dada por

$$\{\sigma\}_e = [D]\{\varepsilon\}_e \quad (6.38)$$

sendo que para o elemento de viga, tem-se

$$\{\sigma\}_e = \sigma_x \quad (6.39a)$$

$$[D] = [E] = E \quad (6.39b)$$

e

$$\{\varepsilon\}_e = \varepsilon_x \quad (6.39c)$$

Inserindo a Equação (6.37) na Equação (6.38) com o uso das Equações (6.39b) e (6.39c), obtém-se

$$\{\sigma\}_e = -y[E][B]\{d\}_e \quad (6.40)$$

ou

$$\{\sigma\}_e^T = -y\{d\}_e^T [B]^T [E]^T = -y\{d\}_e^T [B]^T E \quad (6.41)$$

A energia potencial total, Equação (6.32), pode ser colocada como

$$\Pi_p = \int_0^\ell \iint_A \frac{1}{2} \{\sigma\}_e^T \{\varepsilon\}_e dA dx - \int_0^\ell b P_y(x) y(x) dx - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc}. \quad (6.42)$$

Substituindo as Equações (6.37) e (6.41) na Equação (6.42), vem que,

$$\Pi_p = \int_0^\ell \frac{1}{2} \iint_A y^2 E \{d\}_e^T [B]^T [B] \{d\}_e dA dx - \int_0^\ell q(x) y(x) dx - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc}. \quad (6.43)$$

e, usando a Equação (6.10), tem-se que

$$\Pi_p = \int_0^\ell \frac{E}{2} \{d\}_e^T [B]^T [B] \{d\}_e \iint_A y^2 dA dx - \int_0^\ell q(x) \{d\}_e^T [N]^T dx - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc}. \quad (6.44)$$

Usando a definição de momento de inércia de área como

$$I = \iint_A y^2 dA \quad (6.45)$$

a energia potencial  $\Pi_p$  é expressa como uma função de  $\{d\}_e$ . Com  $E$  e  $I$  constantes, a Equação (6.44) torna-se

$$\Pi_p = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \{d\}_e^T [B]^T [B] \{d\}_e dx - \int_0^\ell q(x) \{d\}_e^T [N]^T dx - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc}. \quad (6.46)$$

Diferenciando o funcional  $\Pi_p$  (Bathe, 1996) da Equação (6.46) com relação aos deslocamentos nodais  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $y_2$  e  $\theta_2$  e igualando a zero cada uma das equações para minimizar  $\Pi_p$ , iremos obter um sistema de quatro equações que escritas na forma matricial tornam-se

$$\left( EI \int_0^\ell [B]^T [B] dx \right) \{d\}_e - \int_0^\ell q(x) [N]^T dx - \{f\}_e^{conc} = 0 \quad (6.47)$$

Representando o vetor força nodal total como a soma das forças nodais devido ao carregamento distribuído e das forças nodais concentradas, temos que

$$\{f\}_e = \int_0^\ell q(x) [N]^T dx + \{f\}_e^{conc}. \quad (6.48)$$

onde a solução da integral que aparece na Equação (6.48) resulta no vetor de cargas nodais equivalentes ao carregamento distribuído  $q(x)$ . O resultado dessa integral, no caso em que  $q(x) = q = \text{constante}$ , pode ser confirmado como mostrado na Seção 6.5 pelo método do trabalho equivalente.

Usando a Equação (6.48), a Equação (6.47) torna-se

$$\left( EI \int_0^{\ell} [B]^T [B] dx \right) \{d\}_e = \{f\}_e \quad (6.49)$$

Desde que  $\{f\}_e = [K]_e \{d\}_e$ , identificamos pela Equação (6.49) que

$$[K]_e = EI \int_0^{\ell} [B]^T [B] dx \quad (6.50)$$

Com o uso da Equação (6.36), a matriz  $[K]_e$  da Equação (6.50) pode ser avaliada na forma explícita como

$$[K]_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ \text{Sim.} & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

a qual representa a matriz de rigidez do elemento de viga.

## 6.7 MÉTODO CLÁSSICO PARA OBTENÇÃO DE $[K]_E$

Cada deslocamento nodal do elemento de viga tem duas componentes: uma deflexão  $y$  na direção do eixo  $y$  e uma rotação  $\theta$  na direção do eixo  $z$ , conforme Figura 6.1. A rotação é relacionada com a inclinação como

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (6.52)$$

Como o vetor de deslocamentos nodal para o elemento de viga é

$$\{d\}_e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

A função de deslocamento que define a deflexão de um ponto qualquer do elemento é escolhida, como na Seção 6.2, ser um polinômio de terceira ordem da forma

$$y(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6.54)$$

A Equação (6.54) é aplicada para os quatro “deslocamentos” nodais  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $y_2$  e  $\theta_2$  como

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3 \\ \theta_1 &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{1^\circ \text{ nó}} = 0 + a_2 + 2a_3x_1 + 3a_4x_1^2 \\ y_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_2^3 \\ \theta_2 &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{2^\circ \text{ nó}} = 0 + a_2 + 2a_3x_2 + 3a_4x_2^2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

As Equações (6.55) podem ser colocadas na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

ou, concisamente

$$\{d\}_e = [C]\{a\}_e \quad (6.57)$$

sendo que

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Os parâmetros  $a_i$  podem ser relacionados através da Equação (6.57) como

$$\{a\}_e = [C]^{-1} \{d\}_e \quad (6.59)$$

A Equação (6.58) mostra que a matriz  $[C]$  é dependente apenas das coordenadas dos pontos nodais do elemento.

A Equação (6.54) pode ser reescrita como

$$y(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (6.60)$$

ou

$$y(x) = [P] \{a\}_e \quad (6.61)$$

sendo que

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

A substituição da Equação (6.59) na Equação (6.61) fornece

$$y(x) = [P][C]^{-1} \{d\}_e \quad (6.63)$$

Usando a Equação (6.62), a substituição da Equação (6.54) na Equação (6.14) resulta em

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 y}{dx^2} = -y \frac{d^2}{dx^2} ([P] \{a\}_e)$$

ou seja

$$\varepsilon_x = -y [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \{a\}_e \quad (6.64)$$

Fazendo

$$[H] = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \quad (6.65)$$

a Equação (6.64) torna-se

$$\varepsilon_x = -y [H] \{a\}_e \quad (6.66)$$

A relação deformação-deslocamento é obtida com a substituição da Equação (6.59) em (6.66) resultando em

$$\varepsilon_x = -y [H] [C]^{-1} \{d\}_e \quad (6.67)$$

Comparando a Equação (6.37) com a Equação (6.67), identificamos que

$$[B] = [H] [C]^{-1} \quad (6.68)$$

Com o uso das Equações (6.38) e (6.67), o funcional  $\Pi_p$  da Equação (6.42) pode ser representado por

$$\Pi_p = \int_0^\ell \int_A \frac{1}{2} (-y [D] [H] [C]^{-1} \{d\}_e)^T (-y) [H] [C]^{-1} \{d\}_e dA dx - \int_0^\ell b P_y(x) y(x) dx - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc.}$$

Usando as Equações (6.10) e (6.68) e como  $[D] = [D]^T$ ,

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \iiint_V y^2 \{d\}_e^T [B]^T [D] [B] \{d\}_e dV - \int_0^\ell b P_y(x) \{d\}_e^T [N]^T dx - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc.}$$

Fazendo  $[D]^* = y^2 [D]$  tem-se que

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \{d\}_e^T \left( \iiint_V [B]^T [D]^* [B] dV \right) \{d\}_e - \{d\}_e^T \left( \int_0^\ell b P_y(x) [N]^T dx \right) - \{d\}_e^T \{f\}_e^{conc.}$$

que minimizado com relação a  $\{d\}_e$  resulta em

$$\left( \iiint_V [B]^T [D]^* [B] dV \right) \{d\}_e = \int_0^\ell b P_y(x) [N]^T dx + \{f\}_e^{conc.}$$

fornecendo  $[K]_e \{d\}_e = \{f\}_e$ , sendo que

$$[K]_e = \iiint_V [B]^T [D]^* [B] dV \quad (6.69)$$

Para um elemento de viga de comprimento  $\ell$ , a matriz  $[C]$  da Equação (6.58) é

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

A inversa de  $[C]$  é

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell} & \frac{3}{\ell^2} & -\frac{1}{\ell} \\ \frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} & -\frac{2}{\ell^3} & \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Substituindo as Equações (6.65) e (6.71) na Equação (6.68), tem-se que

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{12x-6\ell}{\ell^3} & \frac{6\ell x-4\ell^2}{\ell^3} & \frac{6\ell-12x}{\ell^3} & \frac{6\ell x-2\ell^2}{\ell^3} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Inserindo a Equação (6.72) na Equação (6.69) com  $[D]^* = y^2 E$  e  $dV = dA dx$ , a integração fornece

$$[K]_e = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ Sim. & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

que é a matriz de rigidez do elemento de viga para análise linear.

## 6.8 ANÁLISE LINEAR POR MEF

A expressão da Equação (6.17) leva a

$$[K]_e \{d\}_e = \{f\}_e \quad (6.74)$$

para o equilíbrio de forças nodais do elemento.

A equação que governa a viga inteira é

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (6.75)$$

onde

$$[K] = \sum_1^N [K]_e^{linear} \quad \text{e} \quad \{F\} = \sum_1^N \{f\}_e \quad (6.76)$$

sendo que  $[K]_e^{linear}$  é a matriz encontrada pela Equação (6.73).

A matriz de rigidez global  $[K]$  da viga e o vetor de força nodal global  $\{F\}$  são determinadas pela superposição das matrizes de rigidez e do vetor de forças nodais de todos os  $N$  elementos, respectivamente.

O procedimento geral para a solução de problemas de vigas pelo MEF pode ser resumido através dos seguintes passos:

(1) Determinar  $[K]_e^{linear}$  através da Equação (6.73) em termos das propriedades do elemento.

$$\text{Gerar } [K] = \sum_1^N [K]_e^{linear}$$

(2) Determinar  $\{f\}_e$  através da Equação (6.23) à Equação (6.26) em termos das cargas concentradas e equivalentes.

$$\text{Gerar } \{F\} = \sum_1^N \{f\}_e$$

(3) Determinar os deslocamentos nodais  $\{X\}$  da Equação (6.75) satisfazendo as condições de contorno. Gerar os deslocamentos nodais a nível de elemento  $\{d\}_e$ .

(4) Determinar a tensão  $\sigma_x$  nos elementos através da Equação (6.40).

## 6.9 ANÁLISE NÃO-LINEAR POR MEF

Para grandes deflexões da viga, o plano médio sofre deformações durante a flexão. A relação deformação-deslocamento, nestes casos, é dada por (Ugural, 1981),

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (6.77)$$

A deformação no plano médio do elemento é representada por

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (6.78)$$

Pela lei de Hooke, a tensão  $\bar{\sigma}$  no plano médio e a deformação  $\bar{\varepsilon}$  são relacionadas por

$$\bar{\sigma} = E\bar{\varepsilon} \quad (6.79)$$

Usando a Equação (6.54), podemos escrever que

$$\theta = \frac{dy}{dx} = 0 + a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

que pode ser colocada como

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (6.80a)$$

ou simplesmente como

$$\theta = [S]\{a\}_e \quad (6.80b)$$

onde

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

Aplicando a Equação (6.59), temos que

$$\frac{dy}{dx} = \theta = [S][C]^{-1}\{d\}_e = [G]\{d\}_e \quad (6.82)$$

na qual

$$[G] = [S][C]^{-1} \quad (6.83)$$

A expressão da energia potencial devido à deformação não linear, Equação (6.78), é

$$\Pi_p^{n\tilde{a}o\ linear} = \frac{A}{2} \int_0^\ell \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \bar{\sigma} dx \quad (6.84)$$

Agora, a expressão da energia potencial total é representada pela soma da energia potencial dada pela Equação (6.32) e da energia potencial devida à deformação não linear, Equação (6.84), ou seja

$$\Pi_p = \int_x \int_A \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x d_A dx - \int_0^\ell b P_y(x) y(x) dx - \sum_{i=1}^2 (F_{iy} y_i + M_i \theta_i) + \frac{bh}{2} \int_0^\ell \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \bar{\sigma} dx \quad (6.85)$$

A minimização da energia potencial das três primeiras parcelas da Equação (6.85) foi feita na Seção 6.6 que resultou na Equação (6.49). Falta agora minimizar a parcela da energia potencial devido à deformação não-linear, Equação (6.84).

Levando a Equação (6.82) na Equação (6.84), tem-se que

$$\Pi_p^{n\tilde{a}o\ linear} = \frac{A}{2} \int_0^\ell \left( [S][C]^{-1}\{d\}_e \right)^T \bar{\sigma} [S][C]^{-1}\{d\}_e dx$$

ou

$$\Pi_p^{n\tilde{a}o\ linear} = \frac{A}{2} \{d\}_e^T \left( \int_0^\ell [C]^{-1} [S]^T \bar{\sigma} [S] [C]^{-1} dx \right) \{d\}_e \quad (6.86)$$

A minimização de  $\Pi_p^{n\tilde{a}o\ linear}$  resulta em uma matriz que é conhecida como matriz de tensões iniciais ou matriz de tensões geométricas do elemento de viga como sendo

$$[K]_e^{geom.} = A [C^{-1}]^T \left( \int_0^{\ell} [S]^T \bar{\sigma} [S] dx \right) [C^{-1}] \quad (6.87)$$

A matriz de rigidez total do elemento é, portanto,

$$[K]_e^{total} = [K]_e^{linear} + [K]_e^{geom.} \quad (6.88)$$

O procedimento generalizado para resolver problemas de vigas com grandes deflexões é resumido nos seguintes passos:

(1) Assumir valor zero para a tensão inicial  $\bar{\sigma}$ , ou seja, fazer  $[K]_e^{geom.} = [0]$ . Aplicar o procedimento (passos 1 a 3) da Seção 6.7 para obter  $[K]_e^{linear}$  e  $\{f\}_e$ .

Gerar  $[K] = \sum_1^N [K]_e^{linear}$ . Usar  $\{F\} = \sum_1^N \{f\}_e$  da Seção 6.7 em termos das cargas concentradas e equivalentes e resolvendo  $[K]\{X\} = \{F\}$ , determinar os deslocamentos nodais  $\{d\}_e$  a nível de elemento.

(2) Determinar a declividade em um ponto interno do elemento (por exemplo, no centróide) através da Equação (6.82):  $\theta = [G]\{d\}_e$ .

(3) Determinar a deformação  $\bar{\epsilon}$  através da Equação (6.78).

(4) Calcular a correspondente tensão  $\bar{\sigma}$  pela Equação (6.79).

(5) Calcular a matriz geométrica  $[K]_e^{geom.}$  da Equação (6.87) em termos das propriedades do elemento.

(6) Determinar a matriz de rigidez total do elemento através da Equação (6.88).

(7) Repetir os passos (1) a (4) para uma nova matriz  $[K]_e^{total}$ , encontrada pela aplicação dos passos (5) e (6) até atingir uma convergência satisfatória para a tensão  $\bar{\sigma}$ .

(8) Determinar a tensão  $\sigma_x$  nos elementos através da Equação (6.40).

## 6.10 SOBRE O PROGRAMA COMPUTACIONAL

Foi desenvolvido um programa computacional em linguagem FORTRAN para a análise linear e não linear de vigas. Alguns aspectos importantes do programa são aqui citados.

1º.) O programa foi elaborado para analisar as tensões e deflexões de vigas considerando quatro tipos de configuração: viga em balanço com carga concentrada em sua extremidade livre, viga em balanço com carregamento distribuído, viga bi-apoiada com carga concentrada no centro e viga bi-apoiada com carregamento distribuído.

2º.) Nos casos de vigas com carregamento distribuído foi utilizado o método do trabalho equivalente para determinar, nos elementos, as cargas nodais equivalentes ao carregamento distribuído.

3º.) O programa principal lê o arquivo de dados, chama as subrotinas e imprime os resultados.

4º.) Foram implementadas dez subrotinas computacionais com as seguintes funções:

- uma subrotina para gerar automaticamente o vetor de cargas nodais para os casos de carregamento distribuído e gerar, também, o vetor de cargas globais.

- uma subrotina para gerar automaticamente a malha de elementos finitos. Esta subrotina gera as incidências nodais e as incidências das variáveis nodais para todos os elementos da malha. Esta subrotina determina também, dependendo das condições de apoio, a posição das variáveis nulas e o número de graus de liberdade do sistema global.

- uma subrotina para determinar a largura da banda da matriz de rigidez global. Esta subrotina calcula também o número de elementos dentro da banda.

- uma subrotina para determinar a matriz de rigidez de cada elemento para a análise linear.

- uma subrotina para determinar a matriz geométrica de cada elemento para a análise não linear.

- uma subrotina para determinar a matriz de rigidez total de cada elemento para a análise não linear.

- uma subrotina para determinar a matriz de rigidez global.
- uma subrotina para resolver o sistema de equações. O método utilizado foi o de Choleski com armazenamento comprimido em banda.
- uma subrotina para determinar o tradutor da posição dos elementos dentro da banda da matriz de rigidez global.
- uma subrotina para determinar as deflexões e tensões a nível de elemento para as análises linear e não linear.

A Figura 6.8 mostra o fluxograma do programa computacional.

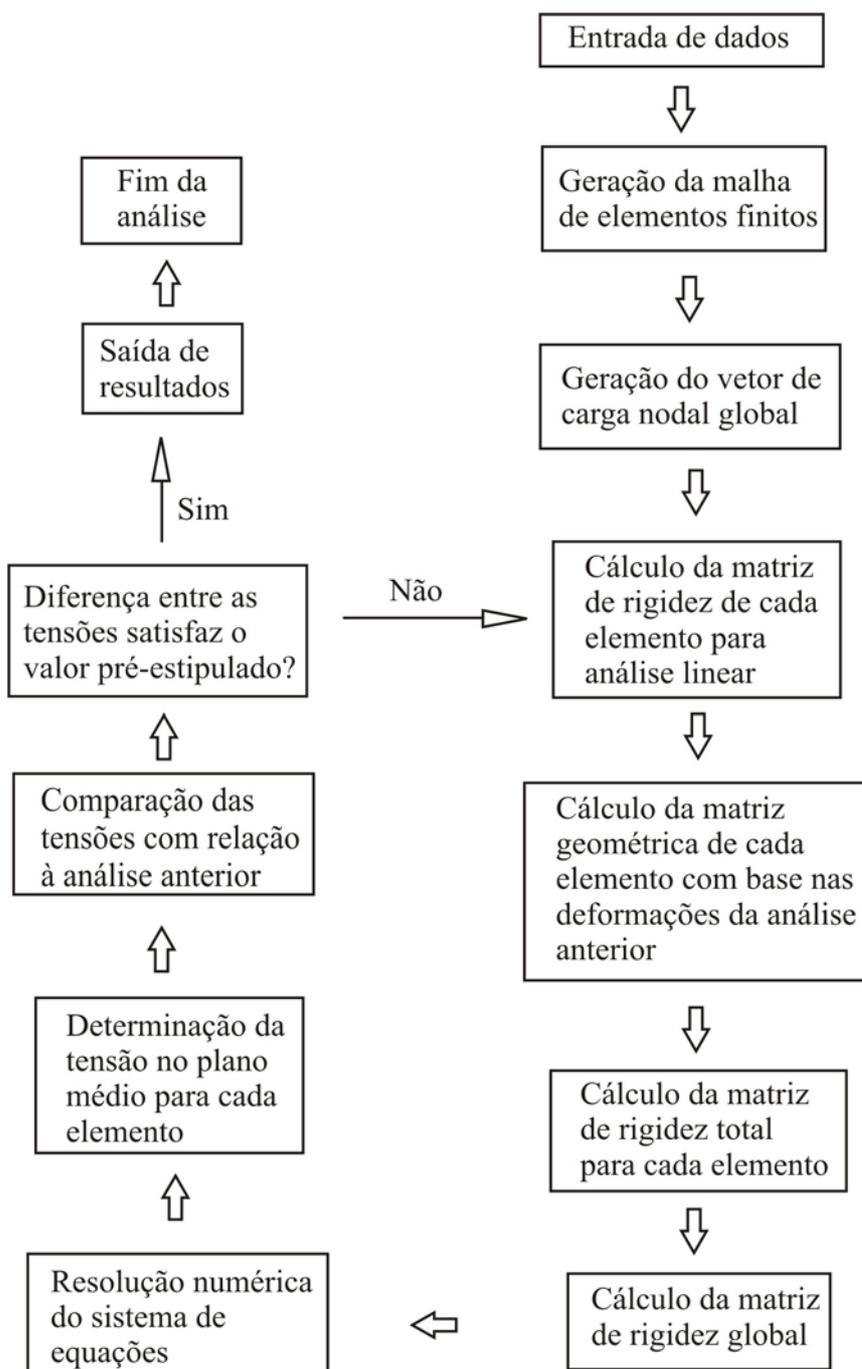


Figura 6.8 – Fluxograma do programa computacional.

## Capítulo 7

# VALIDAÇÃO DAS EQUAÇÕES APRESENTADAS NOS CAPÍTULOS 3, 4 E 5

## 7.1 INTRODUÇÃO

Para a validação das equações apresentadas nos Capítulos 3, 4 e 5, torna-se necessário aplicar as mesmas em casos descritos pela bibliografia. Os resultados obtidos pela bibliografia e os fornecidos pelas equações apresentadas devem apresentar desvios desprezíveis para que as mesmas sejam consideradas válidas.

## 7.2 VALIDAÇÃO DA SOLUÇÃO LINEAR APRESENTADA NO CAPÍTULO 3

A Tabela 7.1 apresenta as características da viga utilizada na solução linear por Dorn & Mc Craken (1981). Trata-se de uma viga retangular engastada, com uma carga  $P$  concentrada na extremidade livre.

Tabela 7.1 – Características da viga da solução de Dorn &amp; Mc Craken (1981).

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\max}}$	255
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$68,6 \times 10^9$
Comprimento [m]	$L$	2,50
Base [m]	$b$	0,01
Altura [m]	$h$	0,04
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$5,33 \times 10^{-08}$

A Tabela 7.2 apresenta os resultados obtidos do deslocamento vertical  $y$  na extremidade livre da viga através da aplicação da Equação (3.15) do Capítulo 3 desta Dissertação. São também apresentados os resultados obtidos por Dorn & Mc Craken (1981). A análise limita-se a região elástica.

Tabela 7.2 – Resultados comparativos: Dorn & Mc Craken (1981) *versus* Dissertação.

Carga	Capítulo 3	Dorn & Mc Craken (1981)	Variação
$P$ [N]	$y$ [m]	$y$ [m]	%
49,03	-0,0698	-0,0698	0,00
98,06	-0,1396	-0,1395	0,07
147,09	-0,2094	-0,2093	0,05
196,12	-0,2792	-0,2790	0,07

245,15	-0,3490	-0,3488	0,06
--------	---------	---------	------

A análise da Tabela 7.2 confirma a exatidão dos resultados produzidos pelo equacionamento apresentado no Capítulo 3. Os erros provenientes da aplicação da Equação do Capítulo 3 em relação a bibliografia são menores do que 0,07%, portanto desprezíveis, e provenientes de arredondamentos numéricos.

### 7.3 VALIDAÇÃO DA SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA APRESENTADA NO CAPÍTULO 4

A Tabela 7.3 apresenta as características da viga utilizada na solução pelo método de Runge-Kutta 4ª Ordem por Campos Fº (2001). Trata-se de uma viga retangular engastada, com uma carga  $P$  concentrada na extremidade livre.

Tabela 7.3 – Características da viga da solução Campos Fº (2001).

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\max}}$	500
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$2 \times 10^9$
Comprimento [m]	$L$	2,00
Base [m]	$b$	0,024
Altura [m]	$h$	0,05
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$2,5 \times 10^{-07}$

A Tabela 7.4 apresenta os resultados obtidos por Campos Fº (2001), e os resultados obtidos através das equações do Capítulo 4 desta Dissertação. A viga foi dividida em 20 subintervalos e a carga  $P$  de 15 [N] se move da extremidade engastada à extremidade livre.

Tabela 7.4 – Resultados comparativos: Campos F° (2001) *versus* Dissertação.

Comprimento	Capítulo 4		Campos F° (2001)	
	$x$ [m]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
0,00	0	0	0	0
0,10	0,0003	0,0059	0,0003	0,0059
0,20	0,0012	0,0114	0,0012	0,0114
0,30	0,0026	0,0167	0,0026	0,0167
0,40	0,0045	0,0216	0,0045	0,0216
0,50	0,0069	0,0263	0,0069	0,0263
0,60	0,0097	0,0306	0,0097	0,0306
0,70	0,0130	0,0347	0,0130	0,0347
0,80	0,0166	0,0384	0,0166	0,0384
0,90	0,0207	0,0419	0,0207	0,0419
1,00	0,0250	0,0451	0,0250	0,0451
1,10	0,0297	0,0479	0,0297	0,0479
1,20	0,0346	0,0505	0,0346	0,0505
1,30	0,0397	0,0527	0,0397	0,0527
1,40	0,0451	0,0547	0,0451	0,0547
1,50	0,0507	0,0563	0,0507	0,0563
1,60	0,0564	0,0577	0,0564	0,0577
1,70	0,0622	0,0588	0,0622	0,0588
1,80	0,0681	0,0595	0,0681	0,0595
1,90	0,0741	0,0600	0,0741	0,0600
2,00	0,0801	0,0601	0,0801	0,0601

A análise da Tabela 7.4 confirma a exatidão dos resultados produzidos pelo equacionamento apresentado no Capítulo 4. Os valores provenientes da aplicação das equações do Capítulo 4 em relação à bibliografia não apresentam desvios.

## 7.4 VALIDAÇÃO DA SOLUÇÃO PSEUDOLINEAR EQUIVALENTE APRESENTADA NO CAPÍTULO 5

A Tabela 7.5 apresenta as características da viga utilizada na solução pelo método *pseudolinear equivalente* por Fertis (1993). Trata-se de uma viga retangular engastada, com uma carga  $P$  concentrada na extremidade livre.

Tabela 7.5 – Características da viga da solução de Fertis (1993).

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\max}}$	1500
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$206 \times 10^9$
Comprimento [m]	$L$	25,40
Base [m]	$b$	0,044
Altura [m]	$h$	0,088
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$2,5 \times 10^{-06}$
Carga concentrada na extremidade livre [N]	$P$	4448

A Tabela 7.6 apresenta os resultados do deslocamento vertical  $y$  na extremidade livre da viga, obtidos por Fertis (1993), e os resultados obtidos através das equações do Capítulo 5 desta Dissertação. A análise limita-se à região elástica.

Tabela 7.6 – Resultados comparativos: Fertis (1993) *versus* Dissertação.

Carga	Capítulo 5		Fertis (1993)	
$P$ [N]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]
4448	-18,6630	1,2588	-18,6025	1,2559

Tabela 7.7 – Desvios Percentuais dos Resultados.

Carga	Desvio entre Equacionamento do Capítulo 5 e Fertis (1993)	
$P$ [N]	$y$ [%]	$\theta$ [%]
4448	0,33	0,23

A Tabela 7.7 mostra que os desvios percentuais entre os resultados do equacionamento apresentado no Capítulo 5 da Dissertação e a bibliografia são desprezíveis, abaixo de 0,34%. Tais desvios são consequência de erros acumulados pelos arredondamentos numéricos.

## Capítulo 8

# RESULTADOS

## 8.1 INTRODUÇÃO

Para comparar os métodos de solução da elástica desenvolvidos nos capítulos anteriores (solução linear, solução não-linear pelo método de Runge-Kutta, solução *pseudolinear equivalente* e solução pelo Método de Elementos Finitos), são estudadas três vigas em balanço de materiais distintos, sendo, aço, alumínio e acrílico. Cada viga é analisada considerando duas seções retangulares constantes. As vigas estão sujeitas à carga concentrada na extremidade livre.

Cada caso será simulado considerando diversos valores de cargas, sendo que a máxima carga utilizada é definida de acordo com a tensão normal máxima de escoamento.

Exclusivamente para o método de Elementos Finitos, na Seção 8.5, também são estudadas vigas bi-apoiadas sujeitas a carga concentrada ou distribuída e uma viga em balanço sujeita à carga distribuída. Os resultados obtidos são comparados com a solução linear.

A Seção 8.6 estuda uma viga em balanço de concreto. A Seção 8.7 analisa um ensaio experimental realizado, comparando os resultados com a teoria apresentada.

## 8.2 – VIGA DE ALUMÍNIO

A Figura 8.1 representa uma viga em balanço, sendo que as dimensões e características são definidas na Tabela 8.1. As propriedades referem-se à liga 6061 tratada termicamente e envelhecida (revenida T6), sendo então material de aplicações estruturais.

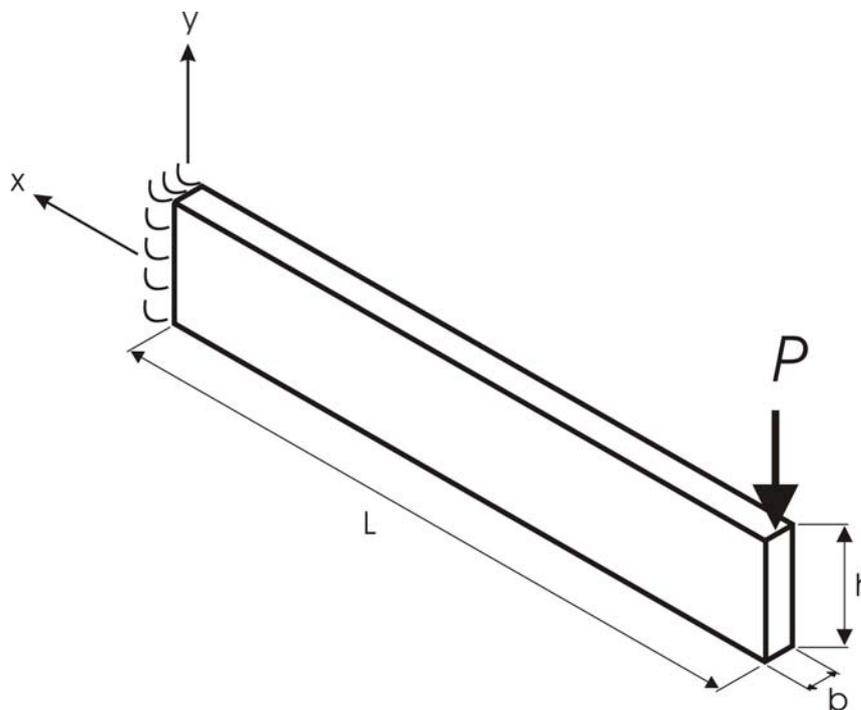


Figura 8.1 - Viga em balanço de seção constante.

Tabela 8.1 – Características das vigas de alumínio.

		Viga Nº 1	Viga Nº 2
Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y\text{máx}}$	276	276
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$69 \times 10^9$	$69 \times 10^9$
Tensão normal de ruptura [MPa]	$\sigma_{r\text{máx}}$	310	310
Coefficiente de poisson	$\nu$	0,33	0,33
Alongamento	%	17	17
Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$	2700	2700
Comprimento [m]	$L$	2,50	3,00
Base [m]	$b$	0,01	0,1
Altura [m]	$h$	0,04	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$5,33 \times 10^{-8}$	$2,25 \times 10^{-4}$

A determinação da carga  $P$  máxima admissível no regime elástico, desprezando o peso próprio da viga, é obtida através da tensão normal de escoamento máxima, cuja Equação é,

$$\sigma_{y\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}} \times L \times \left(\frac{h}{2}\right)}{I} \quad (8.1)$$

Isolando  $P$  para obter a carga máxima na extremidade livre da viga,

$$P_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{y\text{máx}} \times I}{L \times \left(\frac{h}{2}\right)} \quad (8.2)$$

Substituindo, para a viga Nº 1, a título de exemplo,

$$P_{\text{máx}} = \frac{276 \times 10^6 \times 5,33 \times 10^{-8}}{2,5 \times \left(\frac{0,04}{2}\right)} = 294 \text{ [N]} \quad (8.3)$$

que é a carga máxima suportada pela viga no regime elástico.

Para que se possa visualizar completamente através de gráficos o comportamento da viga em termos de deslocamento vertical e deformação angular, cargas intermediárias são definidas, e para cada carga são obtidos os resultados. Sendo a carga máxima o valor calculado dentro do regime elástico.

As seguintes cargas são utilizadas nas simulações da viga Nº 1.  $P$ : 294 N, 272 N, 217 N, 163 N, 109 N e 54 N.

De maneira análoga para a viga Nº 2, as seguintes cargas calculadas dentro do regime elástico são utilizadas nas simulações.  $P$ : 137000 N, 114000 N, 91000 N, 68000 N, 45000 N e 22000 N.

### 8.2.1 – Solução Linear

Do equacionamento desenvolvido no capítulo 3, tem-se na extremidade livre onde  $x = 0$ , o deslocamento vertical  $y$  (flecha) utilizando a Equação (3.14), reproduzida abaixo,

$$y = \frac{P}{EI} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{L^2 x}{2} - \frac{L^3}{3} \right) \quad (8.4)$$

Para ilustrar os cálculos necessários, a carga  $P$  de 272 [N] da viga Nº 1 foi selecionada. Substituindo os valores, tem-se que

$$y = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left( -\frac{0^3}{6} + \frac{L^2 0}{2} - \frac{2,5^3}{3} \right) \quad (8.5)$$

$$y = -0,385 \text{ [m]}$$

Da Equação (3.15), também reproduzida abaixo, tem-se a deformação angular,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{P}{EI} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{2} \right) \quad (8.6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left( -\frac{0^2}{2} + \frac{2,5^2}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \theta = 0,231 \quad (8.7)$$

$$\theta = 0,227 \text{ [rad]} = 13,01^\circ$$

A Tabela 8.2 mostra os resultados obtidos pela solução das Equações (8.4) e (8.6), para os valores de  $P$  estabelecidos.

Tabela 8.2 – Resultados da solução linear - vigas de alumínio.

Viga Nº 1			Viga Nº 2		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
294	-0,245	-0,416	137000	-0,0397	-0,0794
272	-0,227	-0,385	114000	-0,0330	-0,0661
217	-0,183	-0,309	91000	-0,0264	-0,0528
163	-0,138	-0,232	68000	-0,0197	-0,0394
109	-0,093	-0,155	45000	-0,0130	-0,0261
54	-0,046	-0,077	22000	-0,0064	-0,0128

### 8.2.2 – Formulação Não-Linear – Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é obtido conforme mostrado no capítulo 4.

O momento fletor e o momento de inércia são funções não-lineares dependentes do segmento deformado do elemento, então torna-se necessário calcular o deslocamento horizontal  $\Delta$ , que pode ser visualizado na Figura 8.2.

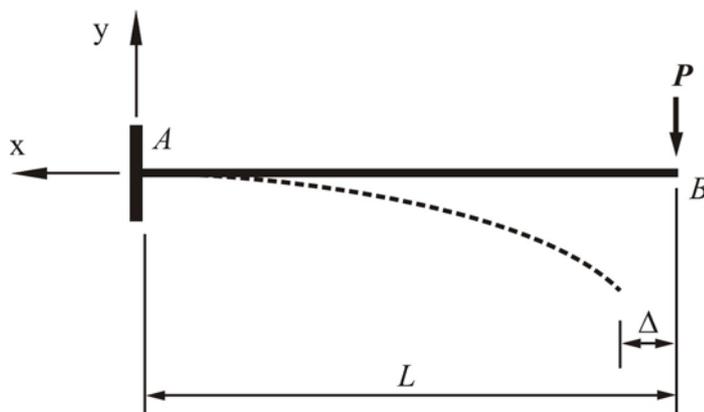


Figura 8.2 - Viga em balanço com representação da deformada.

Das Equações (5.83) a (5.85) pode-se determinar  $\Delta$  por um procedimento de tentativa e erro. A seguir, para servir de exemplo, tem-se o cálculo aplicado para a carga  $P$  de 272 [N] da viga N° 1.

Faz-se uma primeira tentativa para um valor de  $\Delta$  escolhido aleatoriamente, por exemplo,  $\Delta = 0,025$  [m], e verifica-se o  $L$  resultante. A Equação (5.84) é reproduzida abaixo,

$$G(x) = \frac{P}{2EI} [x^2 - (L - \Delta)^2] \quad (8.8)$$

$$G(x) = \frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} [0^2 - (2,5 - 0,025)^2] \quad (8.9)$$

Substituindo na Equação (5.83) que também é repetida abaixo,

$$y'(x) = \frac{G(x)}{\{1 - [G(x)]^2\}^{1/2}} \quad (8.10)$$

$$y'(x) = \frac{\frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} [0^2 - (2,5 - 0,025)^2]}{\left\{ 1 - \left[ \frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} [0^2 - (2,5 - 0,025)^2] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.11)$$

Levando na Equação (5.85) reproduzida abaixo,

$$L = \int_0^{L_0} [1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}} dx \quad (8.12)$$

$$L = \int_0^{(2,5-0,025)} [1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}} dx \quad (8.13)$$

$$L = \int_0^{(2,5-0,025)} \left[ 1 + \left( \frac{\frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} [0^2 - (2,5 - 0,025)^2]}{\left\{ 1 - \left[ \frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} [0^2 - (2,5 - 0,025)^2] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (8.14)$$

Resolvendo a integral obtém-se,

$$L = 2,51 \text{ [m]} \quad (8.15)$$

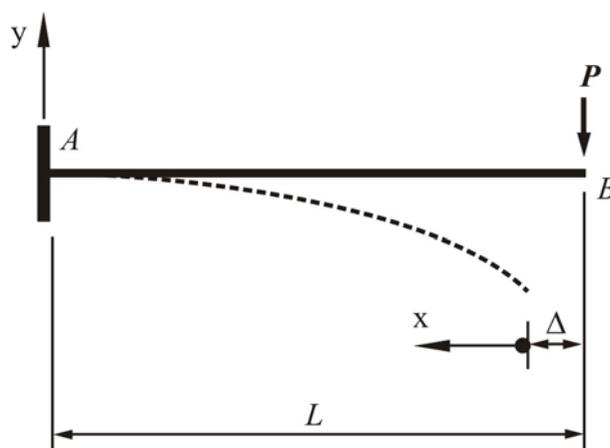
Como o valor de  $L$  obtido foi diferente de 2,50 [m], após várias tentativas, conforme a seqüência demonstrada, o valor de  $\Delta$  para  $L = 2,50$  [m] é 0,034 [m].

A Tabela 8.3 mostra os valores de  $\Delta$  para as cargas  $P$  consideradas.

Tabela 8.3 – Valores de  $\Delta$  - vigas de alumínio.

Viga N° 1		Viga N° 2	
$P$ [N]	$\Delta$ [m]	$P$ [N]	$\Delta$ [m]
294	0,045	137000	0,003
272	0,034	114000	0,002
217	0,022	91000	0,001
163	0,012	68000	0
109	0,006	45000	0
54	0,0014	22000	0

Do equacionamento desenvolvido no Capítulo 4, abaixo será aplicado o método de Runge-Kutta 4ª ordem. O exemplo do cálculo será para  $P = 272$  [N] da viga N° 1.

Figura 8.3 - Viga em balanço com indicação de início do eixo  $x$ .

A seqüência de cálculo é a mostrada no algoritmo do Apêndice A. Os dados iniciais necessários aos cálculos são apresentados na Tabela 8.4.

Tabela 8.4 – Dados para cálculo dos deslocamentos - método de Runge-Kutta.

$P$	272 [N]
$\Delta$	0,034 [m]
$a$ (limite inferior – cota $x$ na extremidade fixa)	2,466 [m]
$b$ (limite superior – cota $x$ na extremidade livre)	0 [m]
$L$	2,50 [m]

A Equação diferencial não-linear de 2ª ordem obtida no capítulo 2 é reproduzida abaixo para ser equacionada pelo método de Runge-Kutta 4ª ordem.

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{Px}{EI} \quad (8.16)$$

Isolando o termo  $y''$ ,

$$y'' = \frac{P}{EI} [1+(y')^2]^{3/2} x \quad (8.17)$$

Fazendo a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y_1' \end{aligned} \quad (8.18)$$

Levando na Equação 8.17,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{P}{EI} [1+(y_2)^2]^{3/2} x \end{aligned} \quad (8.19)$$

Considerando 20 subintervalos (no Apêndice B, são testados outros subintervalos, concluindo ser 20 um número apropriado), ou seja, dividindo a viga em 20 partes para os cálculos,

$$y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \quad (8.20)$$

$$y_2' = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (y_2)^2 \right]^{3/2} x = f_2(x, y_1, y_2) \quad (8.21)$$

e

$$h = \left( \frac{b-a}{m} \right) = \left( \frac{0-2,466}{20} \right) = -0,1233 \quad (8.22)$$

Usando as seguintes condições iniciais na extremidade engastada da viga,

$$\begin{aligned} \text{para } \rightarrow i = 0 \\ x_t = a = 2,466; \\ y_{1t} = y_{10} = 0; \\ y_{2t} = y_{20} = 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

As condições acima são do engastamento, onde os deslocamentos e as deformações angulares são zero (condições de contorno para o caso estudado). Como tem-se 20 subintervalos é necessário calcular  $y$  e  $dy/dx$  para cada intervalo. A seguir, a título de exemplo, será feito o cálculo para o primeiro e o último subintervalos.

Primeiro subintervalo,  $i = 1$ .

Cálculo de  $k_{11}$  e  $k_{12}$ :

$$\begin{aligned} x = x_t = 2,466 \\ y_1 = y_{1t} = 0 \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$y_2 = y_{2t} = 0$$

$$\begin{aligned} k_{11} \leftarrow f_1(x, y_1, y_2) \\ k_{11} = y_2 = 0; \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} &\leftarrow f_2(x, y_1, y_2) \\
 k_{12} &= \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (0)^2 \right]^{\frac{3}{2}} 2,466 \\
 k_{12} &= 0,182
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Cálculo de  $k_{21}$  e  $k_{22}$ :

$$\begin{aligned}
 x &= xt + \frac{h}{2} = 2,404 \\
 y_1 &= y_1t + \left( \frac{h}{2} \times k_{11} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

$$y_2 = y_2t + \left( \frac{h}{2} \times k_{12} \right) = -0,011$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} &\leftarrow f_1(x, y_1, y_2) \\
 k_{21} &= y_2 = -0,011;
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} &\leftarrow f_2(x, y_1, y_2) \\
 k_{22} &= \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,011)^2 \right]^{\frac{3}{2}} 2,404 \\
 k_{22} &= 0,178
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Cálculo de  $k_{31}$  e  $k_{32}$ :

$$y_1 = y_1t + \left( \frac{h}{2} \times k_{21} \right) = 0,001 \tag{8.30}$$

$$y_2 = y_2t + \left( \frac{h}{2} \times k_{22} \right) = -0,011$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} &\leftarrow f_1(x, y_1, y_2) \\
 k_{31} &= y_2 = -0,011;
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

$$k_{32} \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$$

$$k_{32} = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,011)^2 \right]^{3/2} 2,404 \quad (8.32)$$

$$k_{32} = 0,178$$

Cálculo de  $k_{41}$  e  $k_{42}$ :

$$x = x_t + h = 2,343$$

$$y_1 = y_{1t} + (h \times k_{31}) = 0,001 \quad (8.33)$$

$$y_2 = y_{2t} + (h \times k_{32}) = -0,022$$

$$k_{41} \leftarrow f_1(x, y_1, y_2)$$

$$k_{41} = y_2 = -0,022 \quad (8.34)$$

$$k_{42} \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$$

$$k_{42} = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,022)^2 \right]^{3/2} 2,343 \quad (8.35)$$

$$k_{42} = 0,173$$

$$x_t \leftarrow a + i \times h$$

$$x_t = 2,466 + 1 \times (-0,1233) \quad (8.36)$$

$$x_t = 2,3427$$

$$y_{1t} = y_{1t} + \left( \frac{h}{6} \right) (k_{11} + (2(k_{21} + k_{31})) + k_{41})$$

$$y_{1t} = 0 + \left( \frac{-0,1233}{6} \right) (0 + (2(-0,011 - 0,011)) + (-0,022)) \quad (8.37)$$

$$y_{1t} = 0,0014$$

$$y_{2t} = y_{2t} + \left( \frac{h}{6} \right) (k_{12} + (2(k_{22} + k_{32})) + k_{42})$$

$$y_{2t} = 0 + \left( \frac{-0,1233}{6} \right) (0,182 + (2(0,178 + 0,178)) + 0,173) \quad (8.38)$$

$$y_{2t} = -0,0219$$

Portanto, para  $i = 1$ , os valores de saída para deslocamento vertical e deformação angular são:

$$y1 = 0,0014 \text{ [m]} \quad (8.39)$$

$$y2 = \arctg(-0,0219) = -0,022 \text{ [rad]}$$

Para o cálculo do último subintervalo,  $i = 20$ , é necessário que já tenham sido calculos os deslocamentos e deformações angulares para os dezenove subintevalos anteriores, seguindo a mesma metodologia utilizada para  $i = 1$ . Portanto do cálculo para  $i = 19$ , têm-se os valores,

$$y1 = 0,348 \text{ [m]} \quad (8.40)$$

$$y2 = \arctg(-0,230) = -0,226 \text{ [rad]}$$

Para o último subintervalo,  $i = 20$ :

Cálculo de  $k11$  e  $k12$ :

$$x = xt = 0,1233$$

$$y1 = y1t = 0,348 \quad (8.41)$$

$$y2 = y2t = -0,230$$

$$\begin{aligned} k11 &\leftarrow f1(x, y1, y2) \\ k11 &= y2 = -0,230 \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$k12 \leftarrow f2(x, y1, y2)$$

$$k12 = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,230)^2 \right]^{3/2} 0,1233 \quad (8.43)$$

$$k12 = 0,010$$

Cálculo de  $k21$  e  $k22$ :

$$x = x_t + \frac{h}{2} = 0,062$$

$$y_1 = y_{1t} + \left( \frac{h}{2} \times k_{11} \right) = 0,362 \quad (8.44)$$

$$y_2 = y_{2t} + \left( \frac{h}{2} \times k_{12} \right) = -0,231$$

$$\begin{aligned} k_{21} &\leftarrow f_1(x, y_1, y_2) \\ k_{21} &= y_2 = -0,231 \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$k_{22} \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$$

$$k_{22} = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,231)^2 \right]^{3/2} 0,062 \quad (8.46)$$

$$k_{22} = 0,005$$

Cálculo de  $k_{31}$  e  $k_{32}$ :

$$y_1 = y_{1t} + \left( \frac{h}{2} \times k_{21} \right) = 0,362 \quad (8.47)$$

$$y_2 = y_{2t} + \left( \frac{h}{2} \times k_{22} \right) = -0,230$$

$$\begin{aligned} k_{31} &\leftarrow f_1(x, y_1, y_2) \\ k_{31} &= y_2 = -0,230 \end{aligned} \quad (8.48)$$

$$k_{32} \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$$

$$k_{32} = \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,230)^2 \right]^{3/2} 0,062 \quad (8.49)$$

$$k_{32} = 0,005$$

Cálculo de  $k_{41}$  e  $k_{42}$ :

$$x = x_t + h = 0$$

$$y_1 = y_{1t} + (h \times k_{31}) = 0,376 \quad (8.50)$$

$$y_2 = y_{2t} + (h \times k_{32}) = -0,231$$

$$\begin{aligned}k_{41} &\leftarrow f_1(x, y_1, y_2) \\k_{41} &= y_2 = -0,231\end{aligned}\quad (8.51)$$

$$\begin{aligned}k_{42} &\leftarrow f_2(x, y_1, y_2) \\k_{42} &= \frac{272}{69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 1 + (-0,231)^2 \right]^{\frac{3}{2}} 0 \\k_{42} &= 0\end{aligned}\quad (8.52)$$

$$\begin{aligned}x_t &\leftarrow a + i \times h \\x_t &= 0,1233 + 1 \times (-0,1233) \\x_t &= 0\end{aligned}\quad (8.53)$$

$$\begin{aligned}y_{1t} &= y_{1t} + \left( \frac{h}{6} \right) (k_{11} + (2(k_{21} + k_{31})) + k_{41}) \\y_{1t} &= 0,348 + \left( \frac{-0,1233}{6} \right) (-0,230 + (2(-0,231 - 0,230)) + (-0,231)) \\y_{1t} &= 0,376\end{aligned}\quad (8.54)$$

$$\begin{aligned}y_{2t} &= y_{2t} + \left( \frac{h}{6} \right) (k_{12} + (2(k_{22} + k_{32})) + k_{42}) \\y_{2t} &= -0,230 + \left( \frac{-0,1233}{6} \right) (0,010 + (2(0,005 + 0,005)) + 0) \\y_{2t} &= -0,231\end{aligned}\quad (8.55)$$

Portanto, para  $i = 20$ , os valores de saída para deslocamento vertical e deformação angular são,

$$y_1 = 0,376 \text{ [m]}\quad (8.56)$$

$$y_2 = \arctg(-0,231) = -0,227 \text{ [rad]}$$

Para obtenção dos deslocamentos e deformações na extremidade livre da viga, para as cargas  $P$  estudadas, procede-se os cálculos como demonstrado acima. Os resultados são visualizados na Tabela 8.5.

Tabela 8.5 – Resultados do método Runge-Kutta - vigas de alumínio.

Viga Nº 1			Viga Nº 2		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
294	-0,243	-0,402	137000	-0,0396	-0,0792
272	-0,227	-0,376	114000	-0,0330	-0,0660
217	-0,182	-0,303	91000	-0,0264	-0,0528
163	-0,138	-0,229	68000	-0,01970	-0,0394
109	-0,092	-0,154	45000	-0,0130	-0,0261
54	-0,046	-0,076	22000	-0,0064	-0,0128

### 8.2.3 – Solução Pseudolinear

A solução pseudolinear também utiliza o deslocamento horizontal  $\Delta$ , já calculado na Seção 8.2.2. Abaixo será aplicada a solução pseudolinear desenvolvida no capítulo 5. Como exemplo de cálculo é utilizada a carga  $P = 272$  [N] para a viga Nº 1.

Tabela 8.6 – Condições iniciais para solução pseudolinear – viga Nº 1 de alumínio.

$P$	272 [N]
$\Delta$	0,034 [m]
$y$ (para $x = 2,466$ , no engastamento)	0 [m]
$dy/dx$ (para $x = 2,466$ , no engastamento)	0 [m]
$L$	2,50 [m]

A Figura 8.3 representa a viga em balanço e os eixos coordenados.

A solução pseudolinear consiste em transformar a Equação diferencial de segunda ordem não-linear em um sistema pseudolinear, que pode ser resolvido aplicando-se o método do momento estático de área. Para tal é necessário traçar o gráfico  $M_e'$ . A viga será dividida em 20 partes e o  $M_e'$  será calculado em 20 pontos. Para exemplificar este método, o equacionamento desenvolvido no capítulo 5 será aplicado para os pontos onde  $x=0$  e  $x=2,466$  [m] (extremidade livre e extremidade engastada da viga), para a carga  $P=272$  [N] da viga N° 1, conforme Tabela. 8.6.

Extremidade livre da viga,  $x=0$ :

A Equação (5.84), é reproduzida abaixo,

$$G(x) = \frac{P}{2EI} \left[ x^2 - (L - \Delta)^2 \right] \quad (8.57)$$

Substituindo os valores,

$$G(0) = \frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} \left[ 0^2 - (2,5 - 0,034)^2 \right] \quad (8.58)$$

$$G(0) = -0,225$$

Levando na Equação (5.83) que é repetida abaixo,

$$y'(x) = \frac{G(x)}{\left\{ 1 - [G(x)]^2 \right\}^{1/2}} \quad (8.59)$$

$$y'(0) = \frac{G(0)}{\left\{ 1 - [G(0)]^2 \right\}^{1/2}} \quad (8.60)$$

$$y'(0) = \frac{-0,225}{\left\{ 1 - [-0,225]^2 \right\}^{1/2}} = -0,231 \quad (8.61)$$

O arco tangente de  $y'$  fornece o deslocamento angular em  $x=0$ .

$$\theta = \arctg(y'(0)) = \arctg(-0,231) \quad (8.62)$$

$$\theta = -0,227 \text{ [rad]} = -12,99^\circ$$

O deslocamento  $y$  pode ser determinado aplicando análises lineares elementares, como o método do momento estático de área. Para obtenção do gráfico de  $M'_e$ , utiliza-se a Equação (5.12), reproduzida abaixo, calculada para os pontos determinados.

$$M'_e = [1 + (y')^2]^{3/2} M_e = [1 + (y')^2]^{3/2} \frac{M_x}{f(x)g(x)} = \frac{Z_e}{f(x)g(x)} M_x \quad (8.63)$$

Calculando o momento  $M_x$ ,

$$M_x = P x = 272 \times 0 = 0 \quad (8.64)$$

Calculando o termo  $Z_e$ ,

$$Z_e = [1 + (y')^2]^{3/2} = [1 + (-0,231)^2]^{3/2} = 1,081 \quad (8.65)$$

Como a viga possui  $E$  e  $I$  constantes para o elemento inteiro, então  $g(x) = f(x) = 1,00$ . Inserindo as Equações (8.46) e (8.47) na Equação (8.45),

$$M'_e = \frac{0}{1 \times 1} 0 = 0 \quad (8.66)$$

que é o valor de  $M'_e$  para o ponto  $x = 0$ .

Cálculo de  $y'$  e  $M'_e$  para a extremidade engastada da viga,  $x = 2,466$ :

Substituindo os valores na Equação (8.57),

$$G(2,466) = \frac{272}{2 \times 69 \times 10^9 \times 5,33 \times 10^{-8}} [2,466^2 - (2,5 - 0,034)^2] \quad (8.67)$$

$$G(2,466) = 0$$

Levando na Equação (8.59),

$$y'(2,466) = \frac{G(2,466)}{\{1 - [G(2,466)]^2\}^{1/2}} \quad (8.68)$$

$$y'(2,466) = \frac{0}{\{1 - [-0]^2\}^{1/2}} = 0 \quad (8.69)$$

O arco tangente de  $y'$  fornece o deslocamento angular em  $x=0$ .

$$\theta = \text{arctg}(y'(2,466)) = \text{arctg}(0) \quad (8.70)$$

$$\theta = 0 \text{ [rad]} = 0^\circ$$

Cujo resultado já esperado, pois trata-se da extremidade engastada da viga.

Para obtenção de  $M'_e$ , utiliza-se a Equação (8.63).

Calculando o momento  $M_x$ ,

$$M_x = P x = 272 \times 2,466 = 670,752 \quad (8.71)$$

Calculando o termo  $Z_e$ ,

$$Z_e = [1 + (y')^2]^{3/2} = [1 + (0)^2]^{3/2} = 1 \quad (8.72)$$

Como a viga possui  $E$  e  $I$  constantes por todo o elemento, então  $g(x) = f(x) = 1,00$ , então levando as Equações (8.71) e (8.72) na Equação (8.63), tem-se

$$M'_e = \frac{1}{1 \times 1} 670,752 = 670,752 \quad (8.73)$$

Seguindo o mesmo procedimento de cálculo para os valores de entre  $x = 0$  e  $x = 2,466$  [m] (extremidade engastada da viga), obtém-se os resultados da Tabela 8.7.

Tabela 8.7 – Cálculo de  $M'_e$  - Viga Nº 1 de alumínio.

$x$ [m]	$G(x)$	$y'$	$\theta$ [rad]	$\theta$ [°]	$M_x$	$Z_e$	$M'_e$
2,4660	0,000	0,000	0,000	0,000	670,752	1,000	-670,752
2,3427	-0,022	-0,022	-0,022	-1,256	637,214	1,001	-637,674
2,2194	-0,043	-0,043	-0,043	-2,447	603,677	1,003	-605,332
2,0961	-0,062	-0,062	-0,062	-3,576	570,139	1,006	-573,482
1,9728	-0,081	-0,081	-0,081	-4,641	536,602	1,010	-541,914
1,8495	-0,098	-0,099	-0,098	-5,643	503,064	1,015	-510,448
1,7262	-0,115	-0,115	-0,115	-6,582	469,526	1,020	-478,933
1,6029	-0,130	-0,131	-0,130	-7,457	435,989	1,026	-447,241
1,4796	-0,144	-0,145	-0,144	-8,270	402,451	1,032	-415,271
1,3563	-0,157	-0,159	-0,157	-9,019	368,914	1,038	-382,941
1,233	-0,169	-0,171	-0,169	-9,704	335,376	1,044	-350,193
1,1097	-0,179	-0,182	-0,180	-10,325	301,838	1,050	-316,989
0,9864	-0,189	-0,192	-0,190	-10,882	268,301	1,056	-283,310
0,8631	-0,197	-0,201	-0,199	-11,374	234,763	1,061	-249,156
0,7398	-0,205	-0,209	-0,206	-11,801	201,226	1,066	-214,544
0,6165	-0,211	-0,216	-0,212	-12,163	167,688	1,070	-179,507
0,4932	-0,216	-0,221	-0,217	-12,459	134,150	1,074	-144,093
0,3699	-0,220	-0,225	-0,221	-12,690	100,613	1,077	-108,362
0,2466	-0,222	-0,228	-0,224	-12,855	67,075	1,079	-72,383
0,1233	-0,224	-0,230	-0,226	-12,954	33,538	1,080	-36,234
0	-0,225	-0,231	-0,227	-12,987	0,000	1,081	0,000

A Figura 8.4 mostra a variação de  $M_e'$  ao longo da viga.

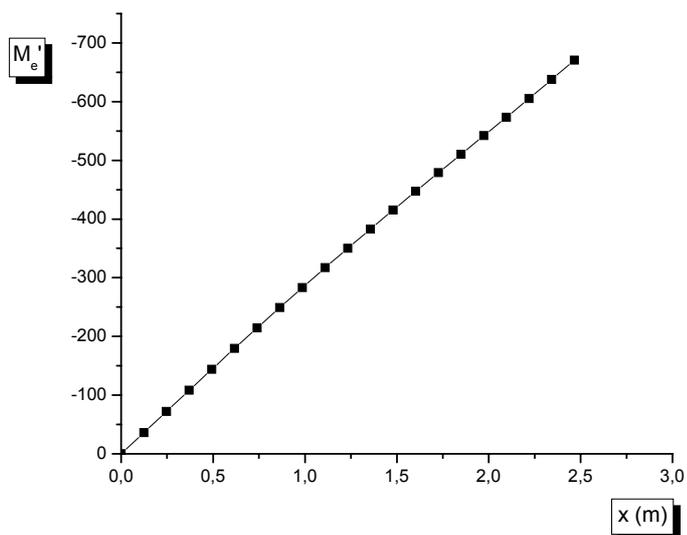


Figura 8.4 –  $M_e'$  ao longo da viga N° 1 de alumínio.

A curva representa o diagrama de momento  $M_e'$  do sistema pseudolinear,  $y$  pode ser obtido pelo momento estático de área.

$$y = \bar{x} \sum_{x=0}^{x=2,466} \frac{M_e'}{EI} \quad (8.74)$$

Novamente dividindo o gráfico em 20 partes e calculando parte a parte, tem-se o resultado abaixo,

$$y = -0,376 \text{ [m]} \quad (8.75)$$

Executando os calculo acima para as cargas  $P$  em estudo, das vigas N° 1 e N° 2, tem-se,

Tabela 8.8 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de alumínio.

Viga Nº 1			Viga Nº 2		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
294	-0,243	-0,402	137000	-0,0396	-0,0792
272	-0,227	-0,376	114000	-0,0330	-0,0659
217	-0,182	-0,302	91000	-0,0264	-0,0527
163	-0,138	-0,229	68000	-0,01970	-0,0394
109	-0,092	-0,154	45000	-0,0130	-0,0261
54	-0,046	-0,076	22000	-0,0064	-0,0127

### 8.2.4 – Solução pelo Método de Elementos Finitos

A solução pelo método de elementos finitos, utiliza um programa computacional desenvolvido para o elemento de viga apresentado no Capítulo 6. As condições geométricas, físicas e de carregamento das vigas Nº 1 e Nº 2 da Figura 7.1, são mostradas na Tabela 8.1.

A Tabela 8.9 mostra os resultados obtidos através do método de elementos finitos para a viga Nº 2. Para a viga Nº 1, os resultados não convergem.

Tabela 8.9 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de alumínio.

Viga Nº 1			Viga Nº 2		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
294	-	-	137000	-0,0328	-0,0668
272	-	-	114000	-0,0284	-0,0576
217	-	-	91000	-0,0238	-0,0480
163	-	-	68000	-0,0185	-0,0373
109	-	-	45000	-0,0127	-0,0255
54	-	-	22000	-0,0064	-0,0127

### 8.3 – VIGA DE AÇO

As mesmas condições geométricas consideradas na Seção 8.2 são utilizadas para as vigas Nº 3 e Nº 4 desta Seção, tendo como alteração apenas o material. A liga de aço 1040 laminada, utilizada para os cálculos, têm suas propriedades reproduzidas abaixo (Chiaverini, 1990).

A Figura 8.1 representa novamente a viga em estudo.

Tabela 8.10 – Características das vigas de aço.

		Viga Nº 3	Viga Nº 4
Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\max}}$	290	290
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	207 x 10 <sup>9</sup>	207 x 10 <sup>9</sup>
Tensão normal de ruptura [MPa]	$\sigma_{r_{\max}}$	520	520
Coefficiente de poisson	$\nu$	0,30	0,30
Alongamento	%	18	18
Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$	7850	7850
Comprimento [m]	$L$	2,5	3
Base [m]	$b$	0,01	0,1
Altura [m]	$h$	0,04	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	5,33 x 10 <sup>-8</sup>	2,25 x 10 <sup>-4</sup>

A carga  $P$  máxima calculada conforme Equação (8.1) fornece, para a viga Nº 3,

$$P = \frac{290 \times 10^6 \times 5,33 \times 10^{-8}}{2,5 \times \left(\frac{0,04}{2}\right)} = 310 \text{ [N]} \quad (8.76)$$

que é a carga máxima suportada pela viga no regime elástico.

As seguintes cargas são utilizadas nas simulações.  $P$ : 310 N, 258 N, 206 N, 155 N, 103 N e 52 N.

De maneira análoga para a viga Nº 4, as seguintes cargas obtidas no regime elástico são utilizadas nas simulações.  $P$ : 144000 N, 120000 N, 96000 N, 72000 N, 48000 N e 24000 N.

### 8.3.1 – Solução Linear

Utilizando a mesma metodologia da Seção 8.2.1, os resultados para viga de aço são visualizados na Tabela 8.11.

Tabela 8.11 – Resultados da solução linear - vigas de aço.

Viga Nº 3			Viga Nº 4		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
310	-0,088	-0,146	144000	-0,0139	-0,0278
258	-0,073	-0,122	120000	-0,0116	-0,0232
206	-0,058	-0,097	96000	-0,0093	-0,0186
155	-0,044	-0,073	72000	-0,0070	-0,0139
103	-0,029	-0,049	48000	-0,0046	-0,0093
52	-0,015	-0,025	24000	-0,0023	-0,0046

### 8.3.2 – Formulação Não-Linear – Método de Runge Kutta

Utilizando a mesma metodologia da Seção 8.2.2, é necessário determinar os valores do deslocamento horizontal  $\Delta$  para cada carga  $P$  das simulações, conforme Figura 8.2.

A Tabela 8.12 traz os valores de  $\Delta$  para as vigas de aço.

Tabela 8.12 – Valores de  $\Delta$  - vigas de aço.

Viga Nº 3		Viga Nº 4	
$P$ [N]	$\Delta$ [m]	$P$ [N]	$\Delta$ [m]
310	0,005	144000	0,002
258	0,004	120000	0,001
206	0,002	96000	0
155	0,001	72000	0
103	0,0006	48000	0
52	0,0002	24000	0

De posse dos valores de  $\Delta$  e seguindo o mesmo procedimento da Seção 8.2.2, são calculados os valores dos deslocamentos e deformações angulares para as vigas de aço que são mostrados na Tabela 8.13.

Tabela 8.13 – Resultados do método Runge-Kutta - vigas de aço.

Viga Nº 3			Viga Nº 4		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
310	-0,088	-0,146	144000	-0,0139	-0,0278
258	-0,073	-0,121	120000	-0,0116	-0,0231
206	-0,058	-0,097	96000	-0,0093	-0,0186
155	-0,044	-0,073	72000	-0,0070	-0,0139
103	-0,029	-0,049	48000	-0,0046	-0,0093
52	-0,015	-0,025	24000	-0,0023	-0,0046

### 8.3.3 – Solução Pseudolinear

O deslocamento horizontal  $\Delta$ , necessário ao cálculo pode ser visualizado na Tabela 8.12, para as vigas N° 3 e N° 4.

O procedimento para obtenção da solução pseudolinear para as vigas de aço é o mesmo adotado na Seção 8.2.3 para as vigas de alumínio.

A Tabela 8.14 apresenta os valores de  $y$  e  $\theta$  para as vigas de aço.

Tabela 8.14 – Resultados de deslocamentos e deformações angulares - vigas de aço.

Viga N° 3			Viga N° 4		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
310	-0,088	-0,146	144000	-0,0139	-0,0278
258	-0,073	-0,121	120000	-0,0116	-0,0231
206	-0,058	-0,097	96000	-0,0093	-0,0185
155	-0,044	-0,073	72000	-0,0070	-0,0139
103	-0,029	-0,049	48000	-0,0046	-0,0093
52	-0,015	-0,025	24000	-0,0023	-0,0046

### 8.3.4 – Solução pelo Método de Elementos Finitos

Seguindo a mesma metodologia da Seção 8.2.4, e utilizando as características físicas, geométricas e de carregamento da Tabela 8.10, obtém-se a Tabela 8.15 abaixo, com os resultados obtidos pelo método de elementos finitos para a viga N° 4. Para a viga N° 3, os resultados convergem apenas para a carga com valor de 52 [N].

Tabela 8.15 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de aço.

Viga Nº 3			Viga Nº 4		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
310	-	-	144000	-0,0135	-0,0271
258	-	-	120000	-0,0114	-0,0228
206	-	-	96000	-0,0092	-0,0183
155	-	-	72000	-0,0069	-0,0138
103	-	-	48000	-0,0046	-0,0093
52	-0,0088	-0,0154	24000	-0,0023	-0,0046

## 8.4 – VIGA DE ACRÍLICO

As mesmas condições geométricas da Seção 8.2 são utilizadas, tendo como alteração apenas o material. A viga de acrílico (polimetil metacrilato – PMMA) utilizada para os cálculos têm suas propriedades mostradas na Tabela 8.16.

A Figura 8.1 representa, mais uma vez, a viga em questão.

Tabela 8.16 – Características das vigas de acrílico.

		Viga N° 5	Viga N° 6
Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\max}}$	73,1	73,1
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	3,24 x 10 <sup>9</sup>	3,24 x 10 <sup>9</sup>
Tensão normal de ruptura [MPa]	$\sigma_{r_{\max}}$	72,4	72,4
Coefficiente de poisson	$\nu$	-	-
Alongamento	%	5,5	5,5
Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$	1130	1130
Comprimento [m]	$L$	2,5	3,0
Base [m]	$b$	0,01	0,1
Altura [m]	$h$	0,04	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	5,33 x 10 <sup>-8</sup>	2,25 x 10 <sup>-4</sup>

A carga  $P$  máxima calculada conforme Equação (8.1) fornece, para a viga N° 5,

$$P = \frac{73,1 \times 10^6 \times 5,33 \times 10^{-8}}{2,5 \times \left(\frac{0,04}{2}\right)} = 78 \text{ [N]} \quad (8.77)$$

que é a carga máxima suportada pela viga no regime elástico.

As seguintes cargas são utilizadas nas simulações da viga N° 5.  $P$ : 78 N, 65 N, 52 N, 39 N, 26 N e 13 N.

De maneira análoga para a viga N° 6, as seguintes cargas obtidas no regime elástico são utilizadas nas simulações.  $P$ : 36000 N, 30000 N, 24000 N, 18000 N, 12000 N e 6000 N.

### 8.4.1 – Solução Linear

Utilizando a mesma metodologia da Seção 8.2.1, os resultados para as vigas de acrílico são visualizados na Tabela 8.17.

Tabela 8.17 – Resultados da solução linear - vigas de acrílico.

Viga N° 5			Viga N° 6		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
78	-0,954	-2,351	36000	-0,2187	-0,4444
65	-0,866	-1,959	30000	-0,1831	-0,3704
52	-0,755	-1,567	24000	-0,1471	-0,2963
39	-0,614	-1,176	18000	-0,1107	-0,2222
26	-0,440	-0,784	12000	-0,0739	-0,1481
13	-0,231	-0,392	6000	-0,0370	-0,0741

### 8.4.2 – Formulação Não-Linear – Método de Runge Kutta

Utilizando a mesma metodologia da Seção 8.2.2, é necessário determinar os valores do deslocamento horizontal  $\Delta$  para cada carga  $P$  das simulações, conforme Figura 8.2.

A Tabela 8.18 traz os valores de  $\Delta$  para as vigas de acrílico.

Tabela 8.18 – Valores de  $\Delta$  - vigas de acrílico.

Viga Nº 5		Viga Nº 6	
$P$ [N]	$\Delta$ [m]	$P$ [N]	$\Delta$ [m]
78	0,597	36000	0,040
65	0,489	30000	0,030
52	0,371	24000	0,020
39	0,246	18000	0,010
26	0,128	12000	0,005
13	0,035	6000	0,002

De posse dos valores de  $\Delta$  e seguindo o mesmo procedimento da Seção 8.2.2, têm-se os valores para os deslocamentos e deformações angulares para as vigas de acrílico que são mostrados na Tabela 8.19.

Tabela 8.19 – Resultados do método Runge-Kutta - vigas de acrílico.

Viga Nº 5			Viga Nº 6		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
78	-0,957	-1,472	36000	-0,2181	-0,4340
65	-0,864	-1,348	30000	-0,1825	-0,3635
52	-0,751	-1,189	24000	-0,1467	-0,2926
39	-0,611	-0,984	18000	-0,1106	-0,2209
26	-0,437	-0,716	12000	-0,0739	-0,1477
13	-0,231	-0,383	6000	-0,0370	-0,0740

### 8.4.3 – Solução Pseudolinear

O deslocamento horizontal  $\Delta$ , necessário ao cálculo pode ser visualizado na Tabela 8.18.

O procedimento para obtenção da solução pseudolinear para as vigas de acrílico é o mesmo adotado na Seção 8.2.3 para as vigas de alumínio.

A Tabela 8.20 apresenta os valores de  $y$  e  $\theta$  para as vigas de acrílico.

Tabela 8.20 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de acrílico.

Viga Nº 5			Viga Nº 6		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
78	-0,957	-1,472	36000	-0,2181	-0,4337
65	-0,864	-1,348	30000	-0,1825	-0,3633
52	-0,751	-1,188	24000	-0,1467	-0,2924
39	-0,611	-0,984	18000	-0,1106	-0,2208
26	-0,437	-0,715	12000	-0,0739	-0,1476
13	-0,231	-0,382	6000	-0,0370	-0,0739

### 8.4.4 – Solução pelo Método de Elementos Finitos

Seguindo a mesma metodologia da Seção 8.2.4, e utilizando as características físicas, geométricas e de carregamento da Tabela 8.16, obtém-se a Tabela 8.21 abaixo, com os resultados do método de elementos finitos para a viga Nº 6. Para a viga Nº 5, os resultados não convergem.

Tabela 8.21 – Resultados dos deslocamentos e deformações angulares - vigas de acrílico.

Viga Nº 5			Viga Nº 6		
$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$P$ [N]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
78	-	-	36000	-	-
65	-	-	30000	-	-
52	-	-	24000	-	-
39	-	-	18000	-0,0609	-0,1289
26	-	-	12000	-0,0488	-0,1015
13	-	-	6000	-0,0311	-0,0632

## 8.5 – MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A OUTROS CASOS

O programa computacional desenvolvido, além da solução de deslocamentos verticais e angulares para vigas em balanço com carregamento concentrado na extremidade livre, também possibilita a obtenção dos deslocamentos para os casos: viga em balanço sujeita a carga distribuída, viga bi-apoiada sujeita à carga concentrada no centro e viga bi-apoiada sujeita à carga distribuída.

### 8.5.1 – M. E. F. Aplicado a Viga em Balanço Sujeita a Carga Distribuída

A Figura 8.5 abaixo ilustra a viga de aço em análise. As características físicas e geométricas da viga estão na Tabela 8.22.

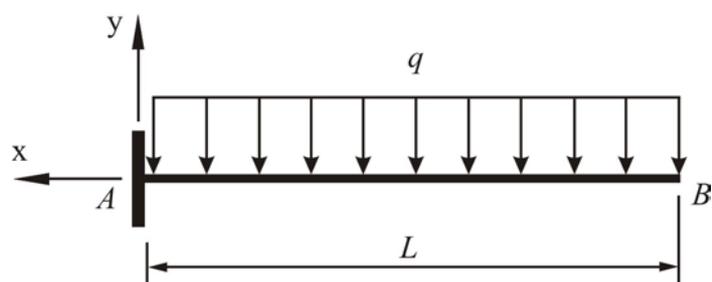


Figura 8.5 - Viga em balanço sob carga distribuída.

Tabela 8.22 – Características da viga em balanço sujeita a carga distribuída.

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y\text{máx}}$	290
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$207 \times 10^9$
Tensão normal de ruptura [MPa]	$\sigma_{r\text{máx}}$	520
Coefficiente de poisson	$\nu$	0,30
Alongamento	%	18
Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$	7850
Comprimento [m]	$L$	3
Base [m]	$b$	0,1
Altura [m]	$h$	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$2,25 \times 10^{-4}$

A carga  $q$  máxima é calculada fazendo,

$$\sigma_{y_{máx}} = \frac{q_{máx} \times \frac{L^2}{2} \times \left(\frac{h}{2}\right)}{I} \quad (8.78)$$

ou seja,

$$q_{máx} = \frac{290 \times 10^6 \times 2,24 \times 10^{-4}}{\frac{3^2}{2} \times \left(\frac{0,3}{2}\right)} = 96000 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad (8.79)$$

que é a carga máxima por metro linear suportada pela viga no regime elástico.

As seguintes cargas distribuídas uniformemente são utilizadas nas simulações da viga.  
 $q$ : 96000 N/m, 72000 N/m, 48000 N/m, e 24000 N/m.

A Tabela 8.23 mostra os resultados para  $y$  e  $\theta$  na extremidade livre da viga, obtidos através do programa computacional desenvolvido, e comparativamente os resultados obtidos pela solução linear desenvolvida no Capítulo 3.

Tabela 8.23 – Resultados obtidos pela solução linear e pelo método de elementos finitos.

$P$ [N]	Solução linear		Solução mét. de elem. finitos	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
96000	-0,0093	-0,0209	-0,0091	-0,0205
72000	-0,0070	-0,0157	-0,0069	-0,0155
48000	-0,0046	-0,0104	-0,0046	-0,0104
24000	-0,0023	-0,0052	-0,0023	-0,0052

## 8.5.2 – MEF Aplicado a Viga Bi-Apoiada Sujeita a Carga Concentrada

A Figura 8.6 abaixo ilustra a viga de aço em análise. As características físicas e geométricas da viga estão na Tabela 8.24.

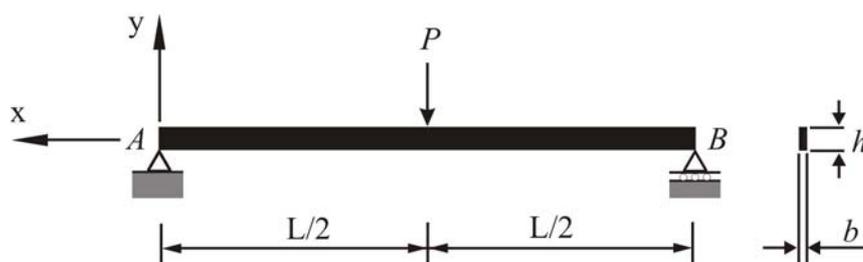


Figura 8.6 - Viga bi-apoiada sujeita à carga concentrada

Tabela 8.24 – Características da viga bi-apoiada sujeita a carga concentrada.

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\text{máx}}}$	290
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$207 \times 10^9$
Tensão normal de ruptura [MPa]	$\sigma_{r_{\text{máx}}}$	520
Coefficiente de poisson	$\nu$	0,30
Alongamento	%	18
Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$	7850
Comprimento [m]	$L$	3
Base [m]	$b$	0,1
Altura [m]	$h$	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$2,25 \times 10^{-4}$

A carga  $P$  máxima é calculada fazendo,

$$\sigma_{y_{máx}} = \frac{\frac{P_{máx}L}{4} \times \left(\frac{h}{2}\right)}{I} \quad (8.80)$$

ou seja,

$$P_{máx} = \frac{290 \times 10^6 \times 2,24 \times 10^{-4}}{\frac{3}{4} \times \left(\frac{0,3}{2}\right)} = 580\,000 \text{ [N]} \quad (8.81)$$

que é a carga máxima suportada pela viga no regime elástico.

As seguintes cargas são utilizadas nas simulações da viga.  $P = 580000 \text{ N}$ ,  $435000 \text{ N}$ ,  $290000 \text{ N}$ , e  $145000 \text{ N}$ .

A Tabela 8.25, mostra os resultados para  $\theta$  nos apoios e  $y$  no centro, obtidos através do programa computacional desenvolvido, e comparativamente os resultados obtido pela solução linear desenvolvida no Capítulo 3.

Tabela 8.25 – Resultados obtidos pela solução linear e pelo método de elementos finitos.

$P$ [N]	Solução linear		Solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
580000	-0,0070	-0,0070	-0,0069	-0,0069
435000	-0,0053	-0,0053	-0,0052	-0,0052
290000	-0,0035	-0,0035	-0,0035	-0,0035
145000	-0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0018

### 8.5.3 – MEF Aplicado a Viga Bi-Apoiada Sujeita a Carga Distribuída

A Figura 8.7 abaixo ilustra a viga de aço em análise. As características físicas e geométricas da viga estão na Tabela 8.26.

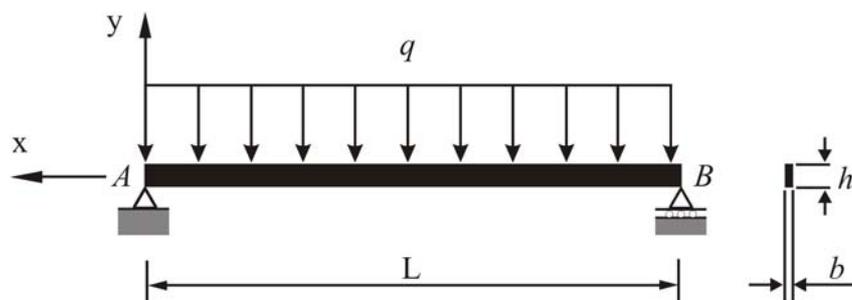


Figura 8.7 - Viga bi-apoiada sujeita à carga distribuída

Tabela 8.26 – Características da viga bi-apoiada sujeita a carga distribuída.

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y_{\text{máx}}}$	290
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$207 \times 10^9$
Tensão normal de ruptura [MPa]	$\sigma_{r_{\text{máx}}}$	520
Coefficiente de poisson	$\nu$	0,30
Alongamento	%	18
Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$	7850
Comprimento [m]	$L$	3
Base [m]	$b$	0,1
Altura [m]	$h$	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$2,25 \times 10^{-4}$

A carga  $q$  máxima é calculada usando,

$$\sigma_{y_{máx}} = \frac{q_{máx} \times \frac{L^2}{8} \times \left(\frac{h}{2}\right)}{I} \quad (8.82)$$

ou seja,

$$q_{máx} = \frac{290 \times 10^6 \times 2,24 \times 10^{-4}}{\frac{3^2}{8} \times \left(\frac{0,3}{2}\right)} = 385000 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad (8.83)$$

que é a carga máxima por metro linear suportada pela viga no regime elástico.

As seguintes cargas uniformemente distribuídas são utilizadas nas simulações da viga.  
 $q$ : 385000 N/m, 288000 N/m, 192000 N/m, e 96000 N/m.

A Tabela 8.27, mostra os resultados obtidos através do programa computacional desenvolvido, e comparativamente os resultados obtidos pela solução linear desenvolvida no Capítulo 3.

Tabela 8.27 – Resultados obtidos pela solução linear e pelo método de elementos finitos.

$P$ [N/m]	Solução linear		Solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
385000	-0,0093	-0,0087	-0,0092	-0,0086
288000	-0,0070	-0,0065	-0,0069	-0,0065
192000	-0,0046	-0,0044	-0,0046	-0,0044
96000	-0,0023	-0,0022	-0,0023	-0,0022

## 8.6. ANÁLISE DE UMA VIGA DE CONCRETO

A Figura 8.8 abaixo ilustra a viga em análise. As características físicas e geométricas da viga estão na Tabela 8.28.



Figura 8.8 - Viga em balanço de seção constante.

Tabela 8.28 – Características da viga em balanço sujeita a carga concentrada.

Tensão de ruptura a tração [MPa]	$\sigma_{y_{\text{máx}}}$	10
Módulo de elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]	$E$	$30 \times 10^9$
Comprimento [m]	$L$	3
Base [m]	$b$	0,1
Altura [m]	$h$	0,3
Momento de inércia [m <sup>4</sup> ]	$I$	$2,25 \times 10^{-4}$

A determinação da carga  $P$  máxima admissível no regime elástico, desprezando o peso próprio da viga, é obtida através da tensão normal de escoamento máxima, cuja Equação é,

$$\sigma_{y_{m\acute{a}x}} = \frac{P_{m\acute{a}x} \times L \times \left(\frac{h}{2}\right)}{I} \quad (8.84)$$

Isolando  $P$  para obter a carga máxima na extremidade livre da viga,

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{y_{m\acute{a}x}} \times I}{L \times \left(\frac{h}{2}\right)} \quad (8.85)$$

Substituindo,

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{10 \times 10^6 \times 2,24 \times 10^{-4}}{3 \times \left(\frac{0,3}{2}\right)} = 5000 \text{ [N]} \quad (8.86)$$

que  a carga máxima suportada pela viga no regime elástico.

As seguintes cargas são utilizadas nas simulaoes da viga.  $P$ : 5000 N, 3750 N, 2500 N e 1250 N.

A Tabela 8.29, mostra os resultados obtidos para  $\theta$  e  $y$  na extremidade livre, através do programa computacional desenvolvido, e comparativamente os resultados obtidos pela solução linear desenvolvida no Capítulo 3. Têm-se ainda os resultados obtidos através da aplicação do sistema *pseudolinear equivalente* desenvolvido no Capítulo 5.

Tabela 8.29 – Resultados obtidos pela sol. linear / MEF / mét. pseudolinear.

$P$ [N]	Solução linear		Solução MEF		Sistema pseudolinear	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
5000	-0,0033	-0,0067	-0,0033	-0,0067	-0,0033	-0,0067
3750	-0,0025	-0,0050	-0,0025	-0,0050	-0,0025	-0,0050
2500	-0,0017	-0,0033	-0,0017	-0,0033	-0,0017	-0,0033
1250	-0,0008	-0,0017	-0,0008	-0,0017	-0,0008	-0,0017

## 8.7. ENSAIO EXPERIMENTAL : RÉGUA DE ACRÍLICO

### 8.7.1 – INTRODUÇÃO

Visando estabelecer os desvios de resultados que advém da aplicação dos equacionamentos desenvolvidos nos Capítulos 3 a 5, em relação a uma situação real, um ensaio foi executado em uma viga de acrílico.

### 8.7.2 CONDIÇÕES DA VIGA ENSAIADA

Foi escolhida uma viga de acrílico engastada e carregada com uma carga  $P$  em sua extremidade livre, tal viga trata-se na verdade uma *régua* de 30 cm comumente encontrada em papelarias.

Condições do ensaio:

- A régua foi engastada com o auxílio de um torno mecânico, sendo a mesma originalmente de 30 cm, 5 cm foram engastados, restando em balanço a régua de 25 cm;
- As cargas foram aplicadas conforme Figura 8.9 com o auxílio de um linha, o que garantiu a aplicação no extremo da régua;
- As medições dos deslocamentos foram efetuadas com um escala milimétrica.

A Figura 8.9 representa a viga em escala.

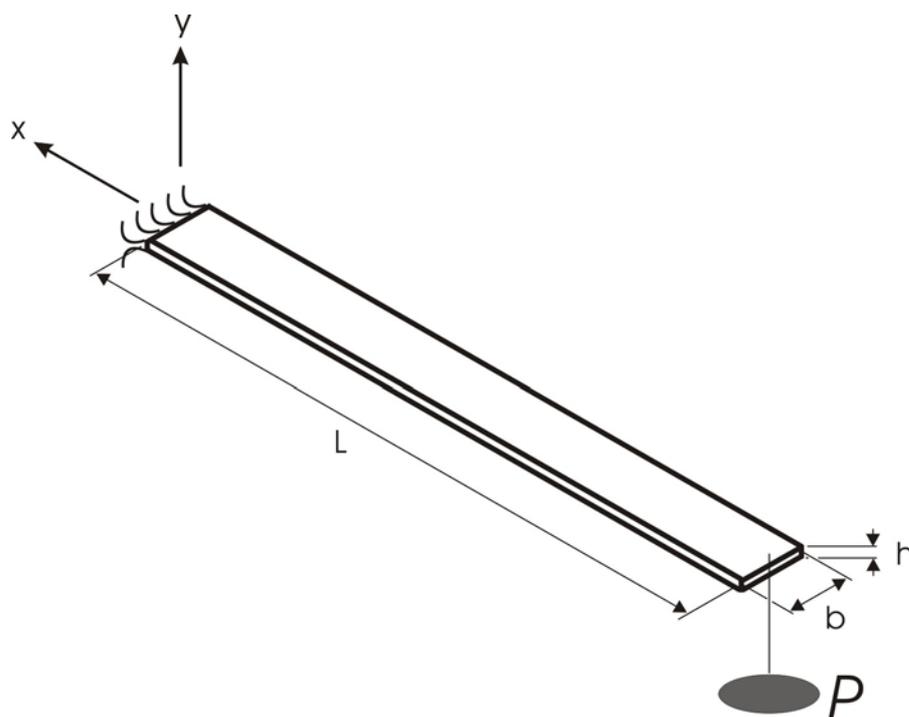


Figura 8.9 - Viga em balanço de seção constante, representada em escala reduzida.

A Tabela 8.30 apresenta as características e dimensões da viga.

Tabela 8.30 – Características da viga de acrílico (Callister, 2002).

Tensão normal de escoamento máxima [MPa]	$\sigma_{y\text{máx}}$	73,1
Módulo de elasticidade [ $\text{N/m}^2$ ]	$E$	$3,24 \times 10^9$
Comprimento [m]	$L$	0,25
Base [m]	$b$	0,025
Altura [m]	$h$	0,0012
Momento de inércia [ $\text{m}^4$ ]	$I$	$3,60 \times 10^{-12}$

Três cargas  $P$  foram aplicadas a viga, sendo a maior determinada de acordo com a tensão normal máxima de escoamento. A Tabela 8.31 apresenta as cargas utilizadas no ensaio e as respectivas tensões normais.

Tabela 8.31 – Cargas  $P$  e tensões normais.

Carga [N]	Tensão normal [MPa]
$P$	$\sigma_y$
0,59	24,5
0,88	36,8
1,77	73,6

### 8.7.3 RESULTADOS DO ENSAIO EXPERIMENTAL

Ensaioando a viga de acordo com as condições descritas na Seção 8.7.2, para as três cargas definidas, obtêm-se os resultados da Tabela 8.32.

Tabela 8.32 – Resultados do ensaio experimental.

Carga [N]	Tensão normal [MPa]	Deslocamento Horizontal [m]	Deslocamento Vertical [m]
$P$	$\sigma_y$	$\Delta$	$y$
0,59	24,5	0,068	-0,150
0,88	36,8	0,088	-0,174
1,77	73,6	0,135	-0,203

A Figura 8.10 representa em escala reduzida o deslocamento horizontal  $\Delta$  e o deslocamento vertical  $y$  para carga  $P$  de 1,77 [N].

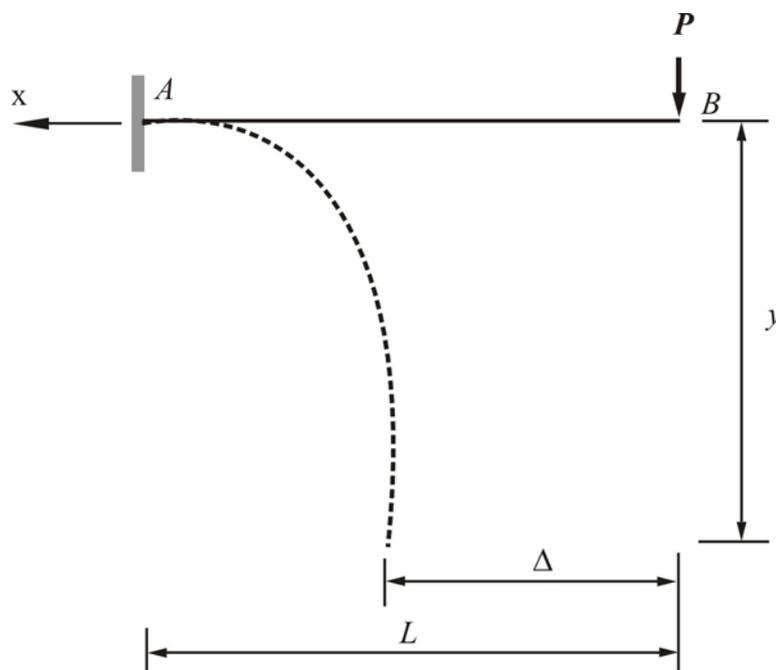


Figura 8.10 – Representação da viga deformada pelo carregamento  $P$  de 1,77 [N].

#### 8.7.4 RESULTADOS TEÓRICOS

Aplicando as Equações desenvolvidas nos Capítulos 3, 4 e 5, obtêm-se os deslocamentos verticais  $y$  pelos métodos linear, Runge-Kutta e pseudolinear, para a viga de acrílico em estudo. A obtenção do deslocamento horizontal  $\Delta$  foi apresentada nos Capítulos 4 e 5. As soluções por tais métodos seguem a sequência de cálculo demonstrada na Seção 7.2. A Tabela 8.33 fornece os resultados.

Tabela 8.33 – Resultados do equacionamento teórico.

Carga [N]	Solução Linear	Solução Pseudolinear	Solução Mét. Runge-Kutta	Solução Pseudolinear/ Runge Kutta
$P$	$y$ [m]	$y$ [m]	$y$ [m]	$\Delta$ [m]
0,59	-0,263	-0,155	-0,155	0,067
0,88	-0,394	-0,176	-0,176	0,093
1,77	-0,789	-0,200	-0,200	0,136

Conforme será discutido em detalhes no Capítulo 9, os resultados para um material extremamente elástico, como é o caso, são satisfatórios tanto pela solução pseudolinear com pela solução por Runge-Kutta 4ª ordem. Os resultados obtidos pela aplicação do método linear não devem ser utilizados para este tipo de configuração e material, pois como pode-se observar da Tabela 8.33 apresentam grande divergência em relação as outras soluções, chegando a solução linear a ser absurda, pois para uma viga engastada de 0,25[m] de comprimento, apresenta deslocamentos de dimensões maiores do que o comprimento, o que não condiz com a realidade física do problema.

### 8.7.5 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

A Tabela 8.34 apresenta os desvios percentuais entre os resultados teóricos e experimentais.

Tabela 8.34 – Desvios percentuais.

Carga [N]	Desvio para $y$ entre o Ensaio Experimental e a Solução Linear	Desvio para $y$ entre o Ensaio Experimental e a Solução Pseudolinear	Desvio para $y$ entre o Ensaio Experimental e a Solução Mét. Runge-Kutta	Desvio para $\Delta$ entre o Ensaio Experimental e a Solução Pseudolinear/ Runge Kutta
$P$	%	%	%	%
0,59	-42,9	-3,35	-3,41	2,26
0,88	-55,9	-0,97	-0,97	-5,68
1,77	-74,3	1,35	-1,40	-0,55

A análise dos desvios da Tabela 8.34 antecipa as conclusões do Capítulo 9. O método Linear apresenta um desvio inaceitável em relação ao ensaio experimental. Os métodos Pseudolinear e Runge-Kutta 4<sup>a</sup> Ordem que apresentam pequenos desvios entre si, também apresentam pequenos desvios em relação ao ensaio experimental. Tanto nos deslocamentos verticais como nos horizontais, os desvios percentuais são menores do que 6%, sendo que estes erros em grande parte são decorrência de deficiências nos métodos de medição.

Portanto para materiais extremamente flexíveis em tal configuração, a solução Linear não deve ser empregada. Fica determinado também que as soluções pelos métodos Pseudolinear e Runge-Kutta podem ser utilizadas como critério de comparação para verificar a aplicabilidade da solução Linear.

## **CAPÍTULO 9**

# **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

### **9.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo serão discutidos os resultados obtidos no capítulo 8. As soluções obtidas para os materiais alumínio, aço e acrílico pelos métodos, linear, Runge-Kutta, pseudolinear e Elementos Finitos serão comparadas. Tal comparação utiliza vigas em balanço sujeitas a carga concentrada na extremidade livre. A aplicabilidade de cada método para cada caso será discutida.

Também serão discutidos os resultados obtidos pelos MEF e solução linear para vigas bi-apoiadas sujeitas à carga concentrada ou distribuída e para viga em balanço sujeita a carga distribuída. Ainda serão analisados os resultados obtidos do estudo de uma viga de concreto em balanço e de um ensaio real.

## 9.2 – CONCLUSÕES PARA O CASO DA VIGA Nº 1 DE ALUMÍNIO

A Tabela 9.1 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelos quatro métodos empregados para a viga Nº 1 de alumínio. Trata-se da viga com seção de 0,01 [m] x 0,04 [m], cujas características são apresentadas na Tabela 8.1.

Tabela 9.1 – Resultados da viga Nº 1 de alumínio.

$P$ [N]	solução linear		solução pseudolinear		solução não-linear (Runge-Kutta)			solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [°]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
294	-0,245	-0,416	-0,243	-0,402	-0,243	-0,402	-13,93	-	-
272	-0,227	-0,385	-0,227	-0,376	-0,227	-0,376	-12,99	-	-
217	-0,183	-0,309	-0,182	-0,302	-0,182	-0,303	-10,43	-	-
163	-0,138	-0,232	-0,138	-0,229	-0,138	-0,229	-7,88	-	-
109	-0,093	-0,155	-0,092	-0,154	-0,092	-0,154	-5,29	-	-
54	-0,046	-0,077	-0,046	-0,076	-0,046	-0,076	-2,63	-	-

### 9.2.1 – Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear

A Tabela 9.2 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.2 – Desvio percentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga Nº 1 de alumínio.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
294	0,00	0,06
272	0,00	0,06
217	0,00	0,06
163	0,00	0,06
109	0,00	0,06
54	0,00	0,06

A Figura 9.1 ilustra a comparação entre as duas soluções.

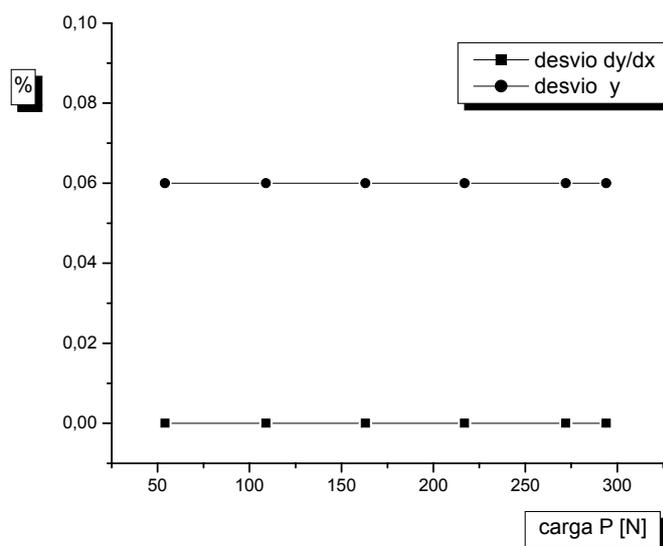


Figura 9.1 – Variação percentual entre solução Pseudolinear e Runge-Kutta - viga N° 1 de alumínio.

Pode-se concluir que a metodologia pseudolinear é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias é sempre igual ou menor do que 0,06% tanto para a deformação angular como para o deslocamento linear.

## 9.2.2 – Comparação entre as soluções linear e pseudolinear

A Tabela 9.3 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.3 – Desvio percentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 1 de alumínio.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
294	0,62	3,53
272	0,14	2,43
217	0,10	1,59
163	0,01	0,86
109	0,01	0,43
54	0,01	0,16

Na Figura 9.2 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

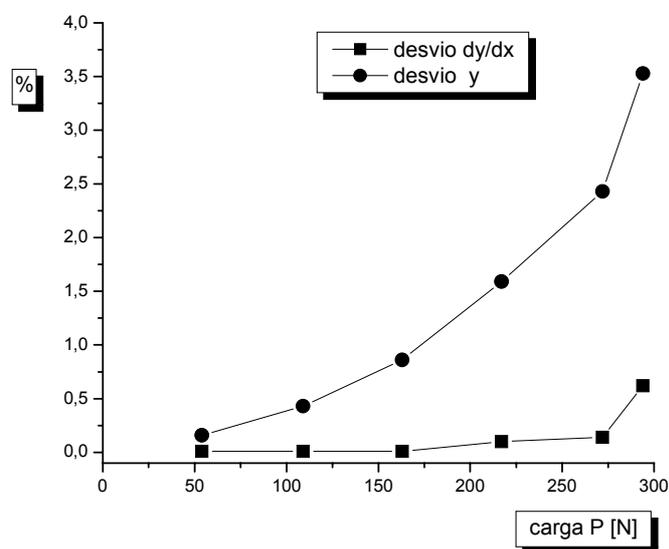


Figura 9.2 – Variação percentual entre solução Pseudolinear e Linear – viga N° 1 de alumínio.

Pode-se concluir que a metodologia linear é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias é menor do que 3,53% tanto para a

deformação angular como para o deslocamento linear, desvio este que para aplicações práticas pode ser aceitável.

### 9.2.3 – Comparação entre as soluções linear e MEF

Para a viga N° 1, os resultados obtidos aplicando o método de elementos finitos não convergiram, pois a relação entre altura da viga e comprimento é de 62,5. Região em que o método não atinge resultados devido à formulação teórica utilizada.

## 9.3 – CONCLUSÕES PARA O CASO DA VIGA N° 2 DE ALUMÍNIO

A Tabela 9.4 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelos quatro métodos empregados para a viga N° 2 de alumínio. Trata-se da viga com seção de 0,1 [m] x 0,3 [m], cujas características são apresentadas na Tabela 8.1.

Tabela 9.4 – Resultados da viga N° 2 de alumínio.

	solução linear	solução	solução não-linear	solução MEF

$P$ [kN]			pseudolinear		(Runge-Kutta)				
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [°]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
137	-0,0397	-0,0794	-0,0396	-0,0792	-0,0396	-0,0792	-2,2713	-0,0328	-0,0668
114	-0,0330	-0,0661	-0,0330	-0,0659	-0,0330	-0,0660	-1,8911	-0,0284	-0,0576
91	-0,0264	-0,0528	-0,0264	-0,0527	-0,0264	-0,0528	-1,5115	-0,0238	-0,0480
68	-0,0197	-0,0394	-0,0197	-0,0394	-0,0197	-0,0394	-1,1294	-0,0185	-0,0373
45	-0,0130	-0,0261	-0,0130	-0,0261	-0,0130	-0,0261	-0,7474	-0,0127	-0,0255
22	-0,0064	-0,0128	-0,0064	-0,0127	-0,0064	-0,0128	-0,3654	-0,0064	-0,0127

### 9.3.1 – Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear

A Tabela 9.5 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções para a viga N° 2.

Tabela 9.5 – Desvio percentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 2 de alumínio.

$P$ [kN]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
137	0,00	0,06
114	0,00	0,06
91	0,00	0,06
68	0,00	0,06
45	0,00	0,06
54	0,00	0,06

A Figura 9.1 da Seção 9.2.1 ilustra a comparação entre as duas soluções. Os resultados são idênticos, independente da carga aplicada entre as duas seções de viga estudadas.

As conclusões também são as mesmas da Seção 9.2.1.

### 9.3.2 – Comparação entre as soluções linear e pseudolinear

A Tabela 9.6 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.6 – Desvio percentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 2 de alumínio.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
137000	0,12	0,31
114000	0,08	0,23
91000	-0,03	0,04
68000	-0,02	0,05
45000	-0,01	0,06
22000	-0,00	0,06

Na Figura 9.3 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

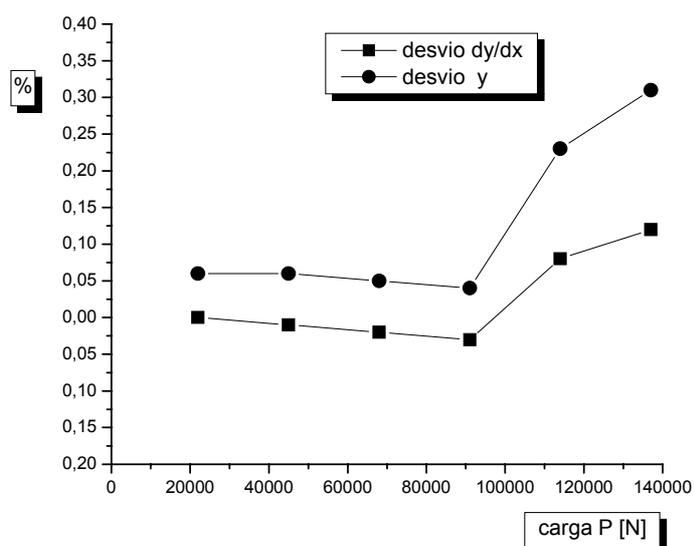


Figura 9.3 – Variação percentual entre sol. Pseudolinear e Linear – viga N° 2 de alumínio.

Pode-se concluir que a metodologia linear é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias é menor do que 0,31% tanto para a deformação angular como para o deslocamento linear, desvio este que para aplicações práticas é aceitável.

### 9.3.3 – Comparação entre as soluções linear e MEF

A Tabela 9.7 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções. Na Figura 9.4 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções

Tabela 9.7 – Desvio percentual entre MEF e Linear - viga N° 2 de alumínio.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
137000	21,04	18,86
114000	16,20	14,76
91000	10,92	10,00
68000	6,49	5,63
45000	2,36	2,35
22000	0,00	0,79

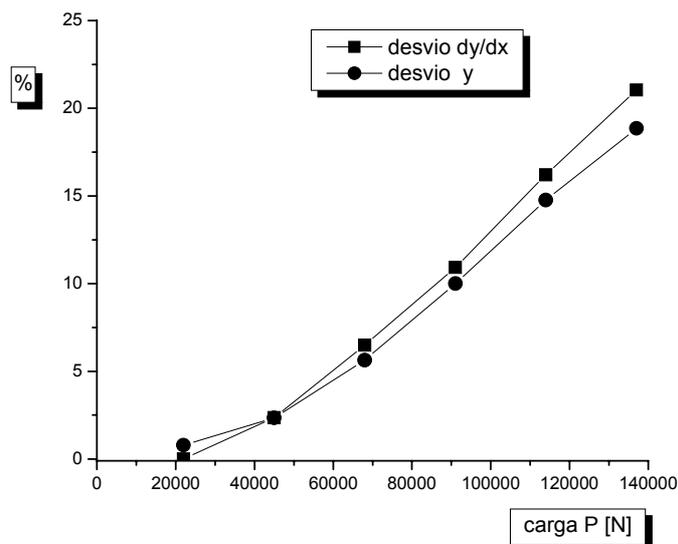


Figura 9.4 – Variação percentual entre solução MEF e Linear – viga N° 2 de alumínio.

Da Seção 9.3.2 tem-se que a solução linear é aceitável para a viga 2. O resultado obtido pelo MEF dentro do regime elástico em relação a metodologia linear teve variações de até 21,04% (Tabela 9.7). Conclui-se que o mesmo (MEF) não pode ser adotado sem uma análise criteriosa, mesmo para relações de altura da viga *versus* comprimento igual a 10. Na verdade pode-se concluir que o MEF é aceitável para os casos em que o deslocamento vertical máximo seja ao redor de 1% do comprimento da viga. Nesses casos a diferença de resultados (linear *versus* MEF) é menor do que 5%, o que é considerado aceitável para projetos de engenharia.

## 9.4 – CONCLUSÕES PARA O CASO DA VIGA N° 3 DE AÇO

A Tabela 9.8 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelos quatro métodos empregados para a viga N° 3 de aço. Trata-se da viga com seção de 0,01 [m] x 0,04 [m], cujas características são apresentadas na Tabela 8.10.

Tabela 9.8 – Resultados da viga N° 3 de aço.

$P$ [N]	solução linear		solução pseudolinear		solução não-linear (Runge-Kutta)			solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [°]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
310	-0,088	-0,146	-0,088	-0,146	-0,088	-0,146	-5,01	-	-
258	-0,073	-0,122	-0,073	-0,121	-0,073	-0,121	-4,18	-	-
206	-0,058	-0,097	-0,058	-0,097	-0,058	-0,097	-3,34	-	-
155	-0,044	-0,073	-0,044	-0,073	-0,044	-0,073	-2,51	-	-
103	-0,029	-0,049	-0,029	-0,049	-0,029	-0,049	-1,67	-	-
52	-0,015	-0,025	-0,015	-0,025	-0,015	-0,025	-0,84	0,0088	0,0154

#### 9.4.1 – Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear

A Tabela 9.9 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.9 – Desvio percentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 3 de Aço.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
310	0,00	0,06
258	0,00	0,06
206	0,00	0,06
155	0,00	0,06

103

0,00

0,06

52	0,00	0,06
----	------	------

A Figura 9.1 da Seção 9.2.1 ilustra a comparação entre as duas soluções. Os resultados são idênticos, independente da carga aplicada entre os dois materiais estudados.

As conclusões também são as mesmas da Seção 9.2.1.

#### 9.4.2 – Comparação entre as soluções linear e pseudolinear

Na Tabela 9.10 têm-se os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.10 – Desvio percentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 3 de aço.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
310	0,02	0,40
258	0,01	0,30
206	0,01	0,22
155	0,00	0,14
103	0,01	0,11
52	0,00	0,07

Na Figura 9.5 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

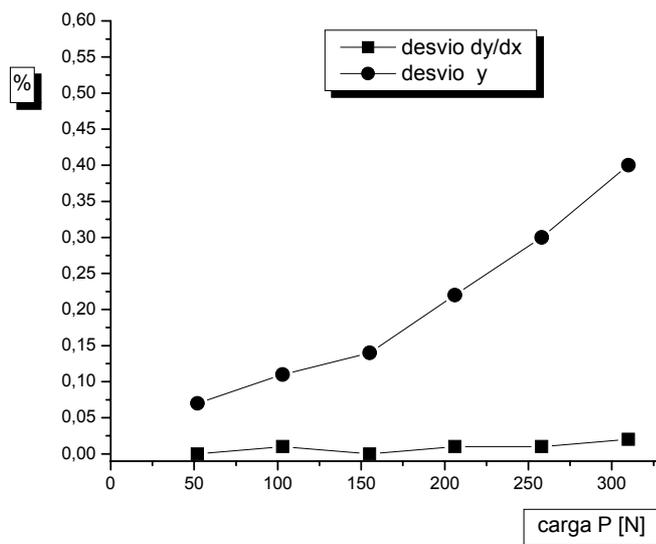


Figura 9.5 – Variação percentual entre solução Pseudolinear e Linear para viga N° 3 de aço.

Como já era esperado, os resultados são equivalentes aos da Seção 9.2.2 (viga de alumínio). A metodologia linear é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias é menor do que 0,4 % tanto para a deformação angular como para o deslocamento linear, desvio este que para aplicações práticas é totalmente aceitável.

### 9.4.3 – Comparação entre as soluções linear e MEF

Para a viga N° 3, assim como já foi concluído para a viga N° 1 na Seção 9.2.3, o método de elementos finitos não convergiu, pois a relação entre altura da viga e comprimento é de 62,5.

No caso da viga N° 3, para carga  $P$  de 52 [N], embora o MEF tenha convergido para um valor, apresenta desvio de 38% em relação à solução linear.

## 9.5 – CONCLUSÕES PARA O CASO DA VIGA Nº 4 DE AÇO

A Tabela 9.11 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelos quatro métodos empregados para a viga Nº 4 de aço. Trata-se da viga com seção de 0,1 [m] x 0,3 [m], cujas características são apresentadas na Tabela 8.10.

Tabela 9.11 – Resultados da viga Nº 4 de aço.

$P$ [kN]	solução linear		solução pseudolinear		solução não-linear (Runge-Kutta)			solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [°]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
144	-0,0139	-0,0278	-0,0139	-0,0278	-0,0139	-0,0278	-0,7961	-0,0135	-0,0271
120	-0,0116	-0,0232	-0,0116	-0,0231	-0,0116	-0,0231	-0,6634	-0,0114	-0,0228
96	-0,0093	-0,0186	-0,0093	-0,0185	-0,0093	-0,0186	-0,5314	-0,0092	-0,0183
72	-0,0070	-0,0139	-0,0070	-0,0139	-0,0070	-0,0139	-0,3986	-0,0069	-0,0138
48	-0,0046	-0,0093	-0,0046	-0,0093	-0,0046	-0,0093	-0,2657	-0,0046	-0,0093
24	-0,0023	-0,0046	-0,0023	-0,0046	-0,0023	-0,0046	-0,1329	-0,0023	-0,0046

### 9.5.1 – Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear

A Tabela 9.12 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções para a viga Nº 4.

Tabela 9.12 – Desvio percentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga Nº 4 de aço.

$P$ [kN]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]

144	0,00	0,06
120	0,00	0,06
96	0,00	0,06
72	0,00	0,06
48	0,00	0,06
24	0,00	0,06

A Figura 9.1 da Seção 9.2.1 ilustra a comparação entre as duas soluções. Os resultados são idênticos, independente da carga aplicada entre os dois materiais ou seções de vigas estudadas.

As conclusões também são as mesmas da Seção 9.2.1.

### 9.5.2 – Comparação entre as soluções linear e pseudolinear

A Tabela 9.13 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.13 – Desvio percentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 4 de aço.

$P$ [kN]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
144	0,14	0,26
120	0,13	0,25
96	0,00	0,06
72	0,00	0,06
48	0,00	0,06
24	0,00	0,06

Na Figura 9.6 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

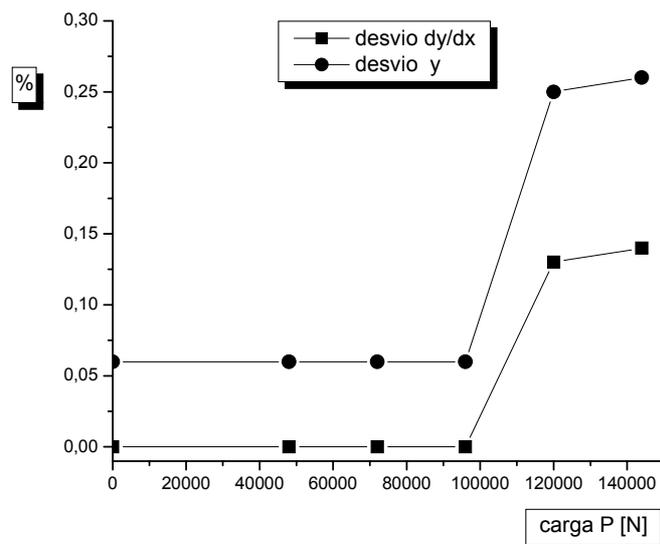


Figura 9.6 – Variação percentual entre sol. Pseudolinear e Linear – viga N° 4 de aço.

Pode-se concluir que a metodologia linear é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias é menor do que 0,26% tanto para a deformação angular como para o deslocamento linear, desvio este que para aplicações práticas é aceitável.

### 9.5.3 – Comparação entre as soluções linear e MEF

A Tabela 9.14 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções. Na Figura 9.7 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

Tabela 9.14 – Desvio percentual entre MEF e Linear - viga N° 4 de aço.

$P$ [kN]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
144	2,88	2,52
120	1,72	1,72
96	1,08	1,61
72	1,43	0,72
48	0,00	0,00
24	0,00	0,00

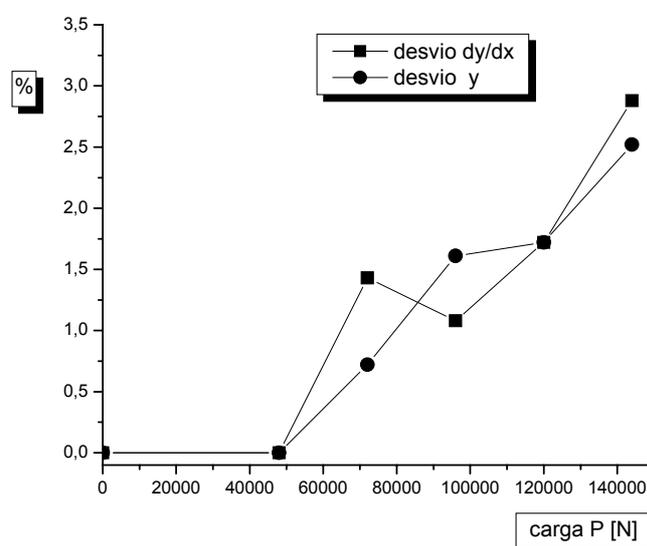


Figura 9.7 – Variação percentual entre sol. MEF e Linear – viga N° 4 de aço.

Da Seção 9.3.2 tem-se que a solução linear é aceitável para a viga N° 4. O MEF dentro do regime elástico em relação à metodologia linear teve variações de até 2,88% (Tabela 9.14). Conclui-se que o mesmo (MEF) pode ser adotado para o caso em questão. Na verdade pode-se concluir que o MEF é aceitável para os casos em que o deslocamento vertical máximo seja ao redor de 1% do comprimento da viga (neste caso específico é de 0,9%). Nesses casos a diferença de resultados (linear *versus* MEF) é menor do que 5%, o que é considerado aceitável para projetos de engenharia.

## 9.6 – CONCLUSÕES PARA O CASO DA VIGA Nº 5 DE ACRÍLICO

A Tabela 9.15 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelos quatro métodos empregados para a viga Nº 5 de acrílico. Trata-se da viga com seção de 0,01 [m] x 0,04 [m], cujas características são apresentadas na Tabela 8.16.

Tabela 9.15 – Resultados da viga Nº 5 de acrílico.

$P$ [N]	solução linear		solução pseudolinear		solução não-linear (Runge-Kutta)			solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [°]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
78	-0,954	-2,351	-0,957	-1,471	-0,957	-1,472	-54,82	-	-
65	-0,866	-1,959	-0,864	-1,348	-0,864	-1,348	-49,52	-	-
52	-0,755	-1,567	-0,750	-1,188	-0,750	-1,189	-43,00	-	-
39	-0,614	-1,175	-0,611	-0,984	-0,611	-0,984	-34,98	-	-
26	-0,440	-0,784	-0,437	-0,715	-0,437	-0,716	-25,04	-	-
13	-0,231	-0,392	-0,231	-0,382	-0,231	-0,383	-13,21	-	-

### 9.6.1 – Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear

A Tabela 9.16 traz os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.16 – Desvio percentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga Nº 5 de acrílico.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
78	0,00	0,05
65	0,00	0,05
52	0,00	0,05
39	0,00	0,05
26	0,00	0,06
13	0,00	0,06

Na Figura 9.8 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

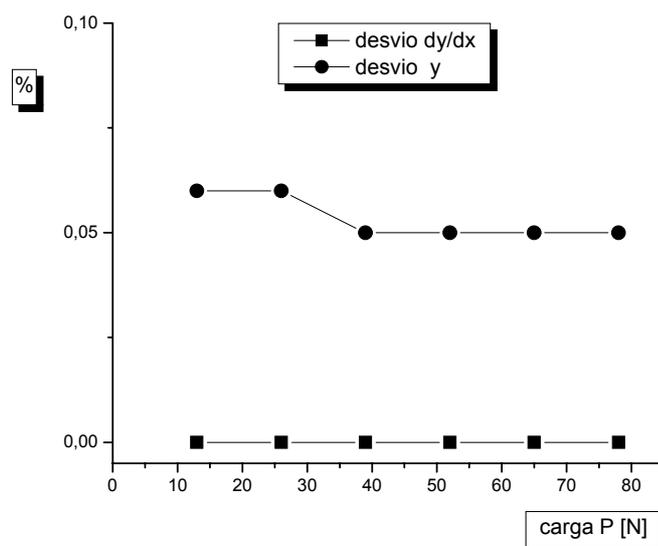


Figura 9.8 – Variação percentual entre Pseudolinear e Runge-Kutta - viga N° 5 de acrílico.

Os resultados são semelhantes aos obtidos nas Seções 9.2.1 e 9.4.1, o que qualifica o método pseudolinear a soluções de problemas não-lineares, tanto para materiais que admitem pequenas deformações como para materiais que permitem grandes deformações, como é o caso em estudo. Para a viga de acrílico, a variação entre o método de Runge-Kutta e o método Pseudolinear é igual ou menor do que 0,06%, tanto para o deslocamento angular como para o deslocamento linear.

## 9.6.2 – Comparação entre as soluções linear e pseudolinear

A Tabela 9.17 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.17 – Desvio percentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 5 de acrílico.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
78	0,28	59,77
65	0,19	45,38
52	0,56	31,89
39	0,61	19,51
26	0,56	9,58
13	0,13	2,49

Na Figura 9.9 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

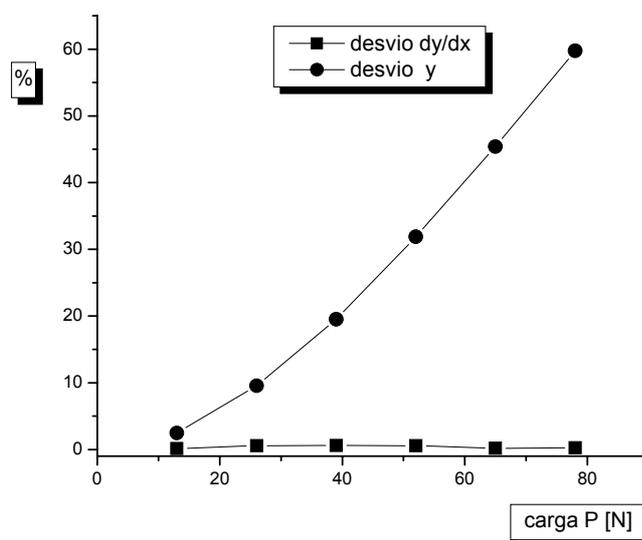


Figura 9.9 – Variação percentual entre solução Pseudolinear e Linear - viga N° 5 de acrílico.

Pode-se concluir que a metodologia linear não é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias chega a 60% para o deslocamento linear, desvio este que para aplicações práticas não é razoável.

### 9.6.3 – Comparação entre as soluções linear e MEF

Para a viga N° 5, o método de elementos finitos não convergiu, pois a relação entre altura da viga e comprimento é de 62,5. Região em que o método não atinge resultados devido à formulação teórica utilizada.

## 9.7 – CONCLUSÕES PARA O CASO DA VIGA N° 6 DE ACRÍLICO

A Tabela 9.18 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelos quatro métodos empregados para a viga N° 6 de acrílico. Trata-se da viga com seção de 0,1 [m] x 0,3 [m], cujas características são apresentadas na Tabela 8.16.

Tabela 9.18 – Resultados da viga N° 6 de acrílico.

$P$ [N]	solução linear		solução pseudolinear		solução não-linear (Runge-Kutta)			solução MEF	
	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]	$\theta$ [°]	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
36000	-0,2187	-0,4444	-0,2181	-0,4337	-0,2181	-0,4340	-12,494	-	-
30000	-0,1831	-0,3704	-0,1825	-0,3633	-0,1825	-0,3635	-10,457	-	-
24000	-0,1471	-0,2963	-0,1467	-0,2924	-0,1467	-0,2926	-8,406	-	-
18000	-0,1107	-0,2222	-0,1106	-0,2208	-0,1106	-0,2209	-6,337	-0,0609	-0,1289
12000	-0,0739	-0,1481	-0,0739	-0,1476	-0,0739	-0,1477	-4,234	-0,0488	-0,1015
6000	-0,0370	-0,0741	-0,0370	-0,0739	-0,0370	-0,0740	-2,120	-0,0311	-0,0632

### 9.7.1 – Comparação entre as soluções não-linear (Runge-Kutta) e pseudolinear

A Tabela 9.19 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções para a viga N° 6.

Tabela 9.19 – Desvio percentual entre Runge-Kutta e Pseudolinear - viga N° 6 de acrílico.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
36000	0,00	0,06
30000	0,00	0,06
24000	0,00	0,06
18000	0,00	0,06
12000	0,00	0,06
6000	0,00	0,06

A Figura 9.1 da Seção 9.2.1 ilustra a comparação entre as duas soluções. Os resultados são idênticos, independente da carga aplicada entre os dois materiais ou seções de vigas estudadas.

As conclusões também são as mesmas da Seção 9.2.1.

### 9.7.2 – Comparação entre as soluções linear e pseudolinear

A Tabela 9.20 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.20 – Desvio percentual entre Pseudolinear e Linear - viga N° 6 de acrílico.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
36000	0,28	2,48
30000	0,33	1,95
24000	0,25	1,34
18000	0,05	0,65
12000	0,06	0,38
6000	0,06	0,22

Na Figura 9.10 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

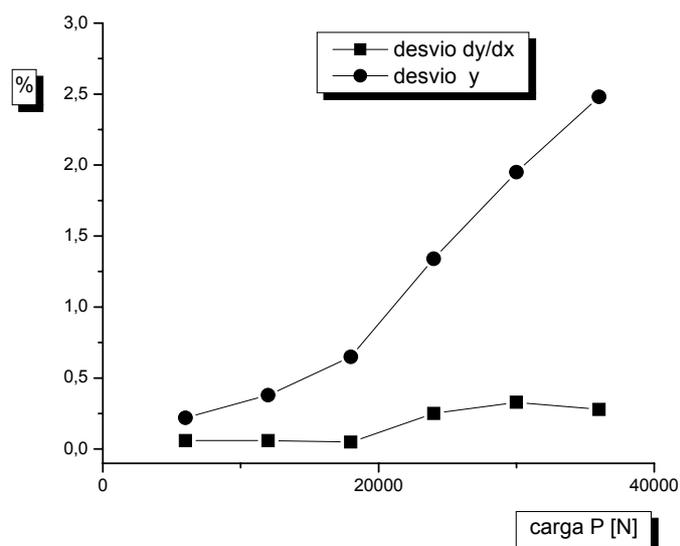


Figura 9.10 – Variação percentual entre sol. Pseudolinear e Linear – viga N° 6 de acrílico.

Pode-se concluir que a metodologia linear é válida para resolver o problema não-linear proposto, pois o desvio entre as duas metodologias é menor do que 2,48% tanto para a deformação angular como para o deslocamento linear, desvio este que para aplicações práticas é aceitável.

### 9.7.3 – Comparação entre as soluções linear e MEF

A Tabela 9.21 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.21 – Desvio percentual entre MEF e Linear - viga N° 6 de acrílico.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
36000	-	-
30000	-	-
24000	-	-
18000	44,99	41,99
12000	33,96	31,47
6000	15,95	14,71

Na Figura 9.11 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

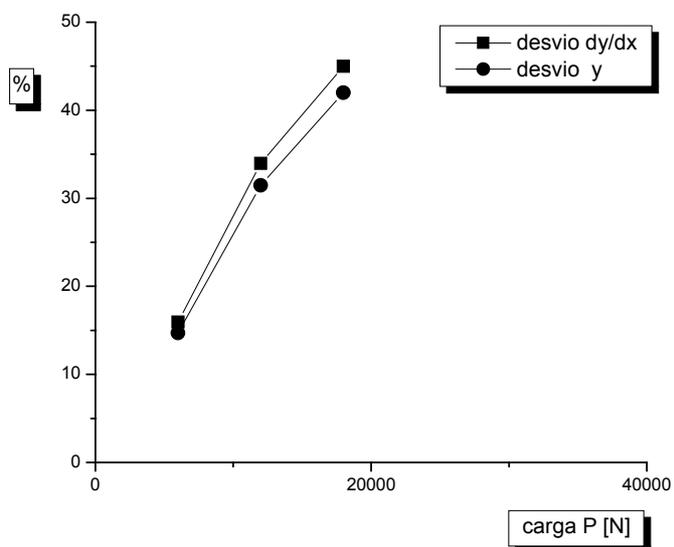


Figura 9.11 – Variação percentual entre sol. MEF e Linear – viga N° 6 de acrílico.

Da Seção 9.7.2 tem-se que a solução linear é aceitável para a viga N° 2. O MEF dentro do regime elástico em relação a metodologia linear teve variações de até 44,99% para as cargas menores e não apresentou resultados para as demais cargas (Tabela 9.21). Conclui-se que o mesmo (MEF) não pode ser adotado sem uma análise criteriosa, mesmo para relações de altura da viga *versus* comprimento igual a 10. Na verdade, pode-se concluir que o MEF é aceitável para os casos em que o deslocamento vertical máximo seja ao redor de 1% do comprimento da viga. Nesses casos a diferença de resultados (linear *versus* MEF) é menor do que 5%, o que é considerado aceitável para projetos de engenharia.

## 9.8 – CONCLUSÕES SOBRE O MEF APLICADO A VIGA EM BALANÇO SUJEITA A CARREGAMENTO DISTRIBUIDO

A Tabela 9.22 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções.

Tabela 9.22 – Desvio percentual entre MEF e Linear - viga em balanço sujeita a carregamento distribuído.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
96000	2,15	1,91
72000	1,43	1,27
48000	0	0
24000	0	0

Na Figura 9.12 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

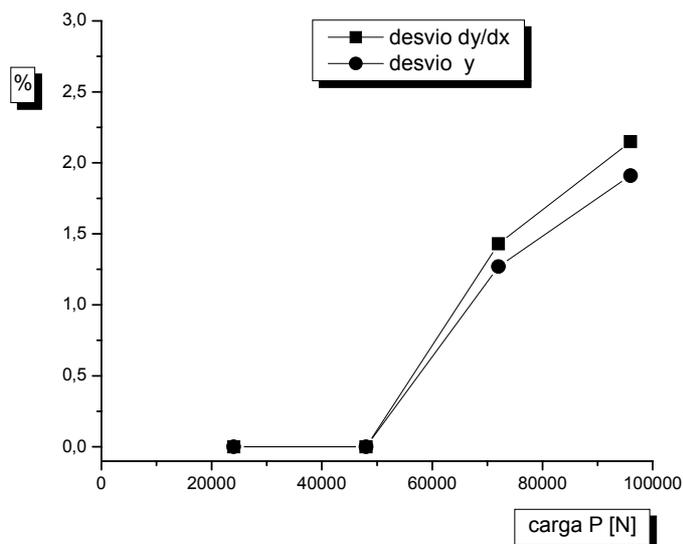


Figura 9.12 – Variação percentual entre sol. MEF e Linear – viga em balanço sujeita a carregamento distribuído.

A variação entre a solução pelo método de elementos finitos e a solução linear desenvolvida no Capítulo 3, utilizando cargas dentro do regime elástico, foi de no máximo 2,15%. O que habilita o programa desenvolvido para tais cálculos. E também confirma para vigas em balanço sujeitas a carga distribuída a aceitabilidade do MEF para os casos em que o deslocamento vertical máximo seja ao redor de 1% do comprimento da viga. Nesses casos a diferença de resultados (linear *versus* MEF) é menor do que 5%, o que é considerado aceitável para projetos de engenharia.

## 9.9 – CONCLUSÕES SOBRE O MEF APLICADO A VIGA BI-APOIADA SUJEITA A CARGA CONCENTRADA

A Tabela 9.23 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções. Tais soluções foram discutidas no Capítulo 8.5.2.

Tabela 9.23 – Desvio percentual entre MEF e Linear - viga bi-apoiada sujeita a carregamento concentrado.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
580000	1,43	1,43
435000	1,89	1,89
290000	0	0
145000	0	0

Na Figura 9.13 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

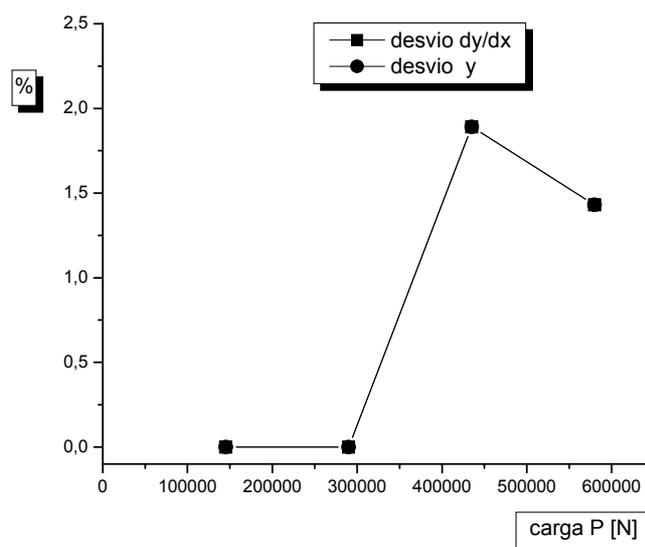


Figura 9.13 – Variação percentual entre sol. MEF e Linear – viga bi-apoiada sujeita a carregamento concentrado.

As mesmas conclusões da Seção 9.8 podem ser adotadas novamente. A variação entre a solução pelo método de elementos finitos e a solução linear, utilizando cargas dentro do regime elástico, foi de no máximo 1,89%. O que habilita o programa desenvolvido para tais cálculos. E também confirma para vigas em balaço sujeitas a carga distribuída a aceitabilidade

do MEF para os casos em que o deslocamento vertical máximo seja ao redor de 1% do comprimento da viga.

## 9.10 – CONCLUSÕES SOBRE O MEF APLICADO A VIGA BI-APOIADA SUJEITA A CARGA DISTRIBUÍDA

A Tabela 9.24 apresenta os desvios percentuais entre as duas soluções. Tais soluções foram discutidas no Capítulo 8.5.3.

Tabela 9.24 – Desvio percentual entre MEF e Linear - viga bi-apoiada sujeita a carregamento distribuído.

$P$ [N]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
385000	1,08	1,15
288000	1,43	0,00
192000	0	0
96000	0	0

Na Figura 9.14 tem-se um gráfico comparativo entre as duas soluções.

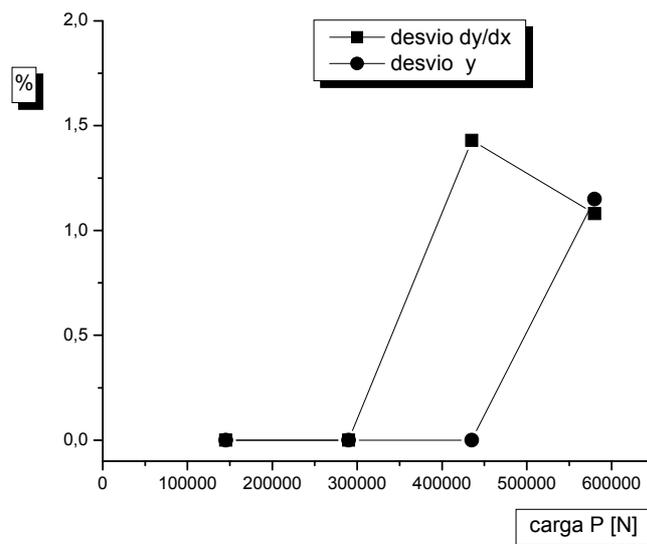


Figura 9.14 – Variação percentual entre sol. MEF e Linear – viga bi-apoiada sujeita a carregamento distribuído.

As mesmas conclusões da Seção 9.9 podem ser adotadas novamente. A variação entre a solução pelo método de elementos finitos e a solução linear, utilizando cargas dentro do regime elástico, foi de no máximo 1,43%. O que habilita o programa desenvolvido para tais cálculos.

## 9.11 – CONCLUSÕES SOBRE O MEF APLICADO A VIGA DE CONCRETO

A viga de concreto foi analisada pela metodologia linear, pseudolinear e MEF. Tais soluções foram discutidas na Seção 8.6. A Tabela 9.25 apresenta os desvios percentuais entre as soluções.

Tabela 9.25 – Desvio percentual entre MEF, linear e pseudolinear - viga de concreto em balanço sujeita a carga concentrada.

$P$ [N]	Solução Linear		Sol. MEF		Sistema Pseudolinear	
	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]	Desvio para $\theta$ [%]	Desvio para $y$ [%]
5000	0	0	0	0	0	0
3750	0	0	0	0	0	0
2500	0	0	0	0	0	0
1250	0	0	0	0	0	0

Como pode-se observar da Tabela 9.25 acima, para a viga de concreto analisada, não houve diferença de resultados entre as metodologias analisadas, o que as habilita para a solução de tais problemas. Considerando para o caso do MEF, quando o deslocamento vertical  $y$  apresentar valores máximos por volta de 1% do comprimento da viga, tal solução pode ser adotada. No caso específico em estudo, o valor de  $y$  em relação a  $L$  foi de 0,22%.

## 9.12 – CONCLUSÕES FINAIS

A formulação linear, apresentada analiticamente no Capítulo 3, e através de análises práticas no Capítulo 8, apresenta resultados satisfatórios para vigas de materiais convencionais utilizados na engenharia. Portanto para materiais como aço, alumínio, latão, ferro fundido entre outros, a equação diferencial não-linear de segunda ordem pode ser linearizada, independente da seção ou comprimento da viga. Para vigas de pequenos momentos de inércia (relações  $h/L$  de 0,016) como analisado nas Seções 9.2 e 9.4 (vigas V1 e V3) do presente trabalho, onde o comprimento da viga representa 62,5 vezes a altura, utilizando sempre cargas no regime elástico do material, a linearização apresentou desvios de no máximo 3,53% em relação às soluções pelos métodos de Runge-Kutta ou *pseudolinear equivalente*. Pois embora as comparações tenham sido efetuadas entre os métodos *pseudolinear equivalente* e linear, como as variações entre os métodos *pseudolinear equivalente* e Runge-Kutta são desprezíveis, as conclusões do método *pseudolinear*

*equivalente* em relação ao método linear podem ser estendidas ao método de Runge-Kutta. Esse desvio é perfeitamente aceitável nas aplicações práticas da engenharia. Para vigas de momentos de inércia maiores (relações  $h/L$  de 0,1), analisadas nas Seções 9.3 e 9.5 (vigas V2 e V4), onde o comprimento da viga representa 10 vezes a altura, os desvios foram ainda menores (no máximo 0,31%).

A formulação linear aplicada às vigas do material polimérico acrílico (polimetil metacrilato – PMMA), analisadas nas Seções 9.6 e 9.7 (vigas V5 e V6), e o mesmo resultado pode ser estendido para poliestireno (PS), tereftalato de polietileno (PET), entre outros, levam as seguintes conclusões: Na Seção 9.6, para pequenas seções da viga, a linearização da equação diferencial não-linear de segunda ordem, não deve ser utilizada. Nestes casos aplicando cargas dentro do regime elástico, a solução da equação linearizada comparada com os resultados usando o método de Runge-Kutta 4ª ordem ou com o método pseudolinear apresenta diferença que chega a 60%, o que acarretará colapso ao projeto. A diferença entre os resultados obtidos pelos métodos, linear e pseudolinear, ultrapassa 10%, mesmo utilizando somente 30% do valor máximo da carga admitida no regime elástico. Nos casos de estruturas bastante flexíveis, as grandes deformações não são funções lineares do momento fletor.

Agora, para o caso analisado na Seção 9.7, também com a viga de acrílico, onde a altura da viga representa um décimo do comprimento, a linearização é possível, os desvios encontrados com relação às soluções pelo método Runge-Kutta e *pseudolinear equivalente*, são menores do que 2,48%, valor perfeitamente aceitável. Então, a solução linear é aplicável a grande maioria dos casos, necessitando cuidados em casos de grandes relações da altura *versus* comprimento da viga e materiais poliméricos, onde outros métodos devem ser adotados. Para os casos onde a linearização é possível, o princípio da superposição é aplicável, o que torna viável a solução de problemas complexos da engenharia. Tais problemas podem apresentar carregamentos de vários tipos ou condições onde a seção transversal da viga é variável.

O método de Runge-Kutta 4ª ordem e a formulação *pseudolinear equivalente*, apresentados teoricamente nos Capítulos 4 e 5, apresentaram resultados satisfatórios para todos os materiais e seções de viga analisados, como pode ser percebido nas Seções 9.2 a 9.7 (vigas V1 a V6). A variação entre os resultados das duas metodologias é praticamente nula. As Tabelas 9.2, 9.5, 9.9, 9.12, 9.16 e 9.19 mostram as pequenas variações, resultados também alcançado por Fertis, 1993. Ambos os métodos representam soluções aproximadas da equação

não-linear em sua forma completa. Portanto, o método do sistema pseudolinear pode ser uma alternativa para a solução de problemas onde a linearização não é possível.

Não sendo possível o método da linearização, para materiais que permitem grandes deformações dentro do regime elástico, o princípio da superposição, não é aplicável. Esta restrição cria enormes dificuldades na solução de problemas de vigas com condições de carregamentos variáveis. A solução torna-se ainda mais complicada quando o momento de inércia varia, arbitrariamente, ao longo do comprimento da viga. Portanto, outro método deve ser aplicado. Dentre os estudados, tem-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem apresentado no capítulo 4. Nos casos mais simples de carregamento, a solução através deste método, embora trabalhosa, não é complexa, podendo ser obtida por meio de programas computacionais (Campos Fº, 2001). Em casos de carregamentos múltiplos, a utilização do método torna-se extremamente difícil, pois as equações do momento fletor envolvem integrais de equações que são funções da deformação. Para os casos de carregamento e geometria variáveis, torna-se interessante aplicar o método pseudolinear apresentado no capítulo 5. Este método fornece solução através da obtenção de um modelo matemático equivalente mais simples. Este modelo reduz a complexidade do problema não-linear inicial. Com essa técnica, é obtido um problema equivalente que pode ser resolvido por métodos existentes em análises lineares.

O ensaio prático mostrado no Capítulo 8.7, confirma as conclusões acima em relação às metodologias linear, pseudolinear e Runge-Kutta para uma viga sujeita a grandes deflexões.

As Figuras 9.15 e 9.16 exemplificam tais conclusões, onde no eixo  $x$  tem-se a percentagem da carga máxima aplicada no regime elástico, e no eixo  $y$ , tem-se a variação percentual entre a solução pseudolinear e a linear para os materiais e seções de viga estudados.

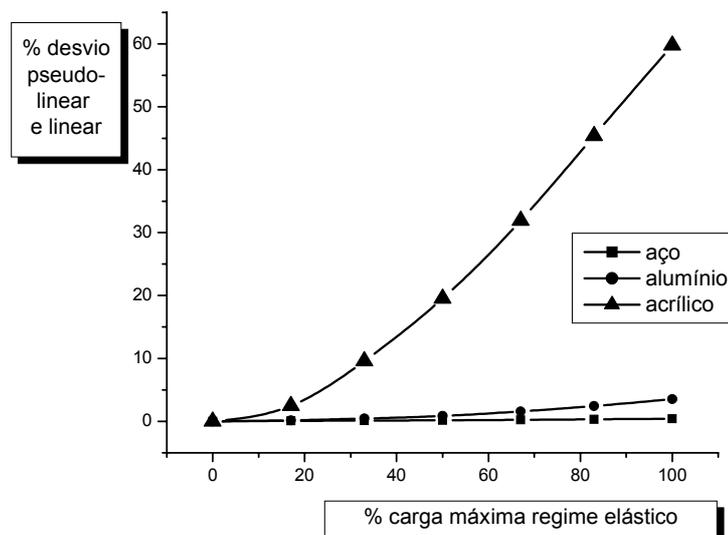


Figura 9.15 – Comparação percentual do deslocamento na ponta da viga entre as metodologias pseudo-linear e linear, seção 0,01 [m] x 0,04 [m] (pequenas seções) e 2,5 [m] de comprimento (vigas V1, V3 e V5).

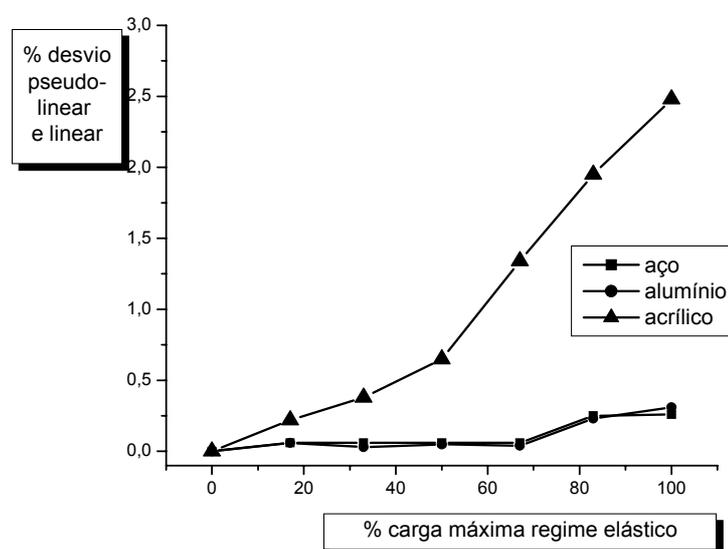


Figura 9.16 – Comparação percentual do deslocamento na ponta da viga entre as metodologias pseudo-linear e linear, seção 0,1 [m] x 0,3 [m] e 3 [m] de comprimento (vigas V2, V4 e V6).

O método de elementos finitos, apresentado teoricamente no Capítulo 6, e analisado nas Seções 9.2 a 9.11, mostrou-se viável para todos os casos analisados, onde o

deslocamento vertical  $y$ , representa aproximadamente 1% do comprimento da viga, sempre analisando carregamentos no regime elástico do material.

Nas Seções 9.2, 9.4 e 9.6, as vigas analisadas têm comprimento 62,5 vezes a altura das mesmas, nesses casos o MEF não convergiu, pois os deslocamentos verticais variaram de 6 a 60%. O mesmo ocorreu nas Seções 9.3 e 9.7, onde as vigas têm comprimento 10 vezes sua altura. Nesses casos, o deslocamento vertical máximo em relação ao comprimento ficou entre 2,7% e 15%. Na seção 9.5, o MEF apresentou resultados satisfatórios, pois o deslocamento vertical máximo foi de 1%, confirmando tal conclusão.

Nas Seções 9.8 a 9.11, o MEF mostrou-se apto. Tais Seções tratam de vigas bi-apoiadas sujeitas a carregamentos concentrados ou distribuídos, viga em balanço sujeita à carregamento distribuído e a Seção 9.11 de viga em balanço de concreto.

Conclui-se que a utilização do MEF é possível para os casos de deslocamento vertical de aproximadamente 1% do comprimento da viga, independente do material da viga ou de sua configuração, se em balanço ou bi-apoiada. Pois nesses casos o desvio em relação a solução linear é menor do que 5%.

## 9.13 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

1. Aplicação do método pseudolinear *equivalente* para cálculo de deflexões de vigas com carregamento e seção transversal variáveis.
2. Análise de deflexões em placas finas usando o método pseudolinear *equivalente*.
3. Determinação de tensões em placas finas para o caso de grandes deformações usando o método dos elementos finitos.
4. Aplicação do método pseudolinear *equivalente* elementos estruturais formados por materiais compósitos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K. J. (1996)**, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1051p.
- BEER, F. P., JOHNSTON JR., E. R. (1995)**, *Resistência dos Materiais*, Makron Books, São Paulo.
- CALLISTER JR., W. D. (2002)**, *Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução*, LTC, Rio de Janeiro.
- CAMPOS Fº, F. F. (2001)**, *Algoritmos Numéricos*, LTC, São Paulo.
- CHIAVERINI, V. (1990)**, *Aços e Ferros Fundidos*, Associação Brasileira de Metalurgia e Materiais, São Paulo.
- DORN, W. S., MC CRAKEN, D. D. (1981)**, *Cálculo Numérico com Estudos de Casos em Fortran IV*, Editora Campus, Rio de Janeiro-RJ. P. 500-512.
- FERTIS, D. G. (1993)**, *Nonlinear Mechanics*, CRC Press, Florida.
- GRADSNTEYM, I. S., RYZHIK, I. W. (1986)**, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press.
- HIBBELER, R. C. (1997)**, *Mechanics of Materials – Third Edition*, Prentice Hall, New Jersey.

**MUNEM, M. A., FOULIS, D. J. (1982)**, *Cálculo Volume 1*, Editora LTC, Rio de Janeiro - RJ.

**OLIVEIRA, W. C. (2006)**, *Método dos Elementos Finitos aplicado à Mecânica Estrutural*, Apostila da Pós-Graduação, 4ª versão, 385 p., Itajubá-MG.

**OLIVEIRA, W. C., LABEGALINI, P. R., ALMEIDA, M. T. (1984)**, *Mecânica Geral - Estática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo.

**RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R. (1997)**, *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books, São Paulo.

**TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. (1980)**, *Teoria da Elasticidade*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro-RJ.

**UGURAL, A. C. (1981)**, *Stress in Plates and Shells*, Mc Graw-Hill Book Company, 317 p.

**ZIENKIEWICZ, O. C. (1989)**, *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill International Editions, 4<sup>th</sup> Edition, Vol. 1, 647p.

## Apêndice A

### ALGORITMO DE RUNGE-KUTTA

Neste apêndice é mostrado um algoritmo (Campos F<sup>o</sup>, 2001) de uma rotina baseada em métodos de Runge-Kutta para resolução de problemas de valor inicial que foi utilizada na obtenção dos resultados apresentados neste trabalho.

Basicamente esta rotina exige quatro cálculos de  $f$  por passo, os quais são combinados com um conjunto de coeficientes para produzir um método de quarta ordem.

Algoritmo RK4:

{Objetivo: Resolver sistema de EDO pelo método de Runge-kutta de quarta ordem}

parâmetros de entrada a, b, m, y10, y20

{ limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valores iniciais }

parâmetros de saída VetX, VetY1, VetY2

{Abscissas e soluções do PVI}

$h \leftarrow (b-a)/m;$

```
xt ← a;

y1t ← y10;

y2t ← y20;

VetX(1) ← xt;

VetY1(1) ← y1t;

VetY2(1) ← y2t;

escreva 0, xt, y1t, y2t

para i ← 1 até m faça

    x ← xt;

    y1 ← y1t;

    y2 ← y2t

    k11 ← f1(x, y1, y2); { Avaliar f1(x, y1, y2)}

    k12 ← f2(x, y1, y2); { Avaliar f2(x, y1, y2)}

    x ← xt + h/2;

    y1 ← y1t + h/2 * k11;

    y2 ← y2t + h/2 * k12

    k21 ← f1(x, y1, y2); { Avaliar f1(x, y1, y2)}

    k22 ← f2(x, y1, y2); { Avaliar f2(x, y1, y2)}

    y1 ← y1t + h/2 * k21;

    y2 ← y2t + h/2 * k22

    k31 ← f1(x, y1, y2); { Avaliar f1(x, y1, y2)}
```

$k_{32} \leftarrow f_2(x, y_1, y_2); \{ \text{Avaliar } f_2(x, y_1, y_2) \}$

$x \leftarrow x_t + h;$

$y_1 \leftarrow y_{1t} + h * k_{31};$

$y_2 \leftarrow y_{2t} + h * k_{32}$

$k_{41} \leftarrow f_1(x, y_1, y_2); \{ \text{Avaliar } f_1(x, y_1, y_2) \}$

$k_{42} \leftarrow f_2(x, y_1, y_2); \{ \text{Avaliar } f_2(x, y_1, y_2) \}$

$x_t \leftarrow a + i * h;$

$y_{1t} \leftarrow y_{1t} + h/6 * (k_{11} + 2 * (k_{21} + k_{31}) + k_{41})$

$y_{2t} \leftarrow y_{2t} + h/6 * (k_{12} + 2 * (k_{22} + k_{32}) + k_{42})$

escreva  $i, x_t, y_{1t}, y_{2t}$

$VetX(i + 1) \leftarrow x_t;$

$VetY1(i + 1) \leftarrow y_{1t};$

$VetY2(i + 1) \leftarrow y_{2t}$

fim para

fim algoritmo

## Apêndice B

# DEFINIÇÃO DO PASSO $h$ NA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

## B.1 DEFINIÇÃO DO PASSO $h$

Para os cálculos obtidos no Capítulo 7, onde o método de Runge-Kutta foi aplicado a três casos práticos de vigas em balanço, vigas com a mesma dimensão e com materiais distintos, o passo  $h$  utilizado foi 20.

Conforme a teoria apresentada no Capítulo 4, o método de Runge-Kutta se baseia no seguinte PVI,

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}\tag{4.9}$$

Onde constrói-se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  igualmente espaçados, embora não seja necessário, ou seja:  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Calculam-se, em seguida, as aproximações  $y_i \cong y(x_i)$  nestes pontos, usando informações anteriores.

Para demonstrar que o passo  $h$  escolhido no Capítulo 7 apresenta resultados aceitáveis, este Apêndice irá simular cálculos com passos 3 e 100.

## B.2 SIMULAÇÃO DE PASSOS $h$

Para verificar as diferenças entre os resultados, o método de Runge-Kutta 4ª ordem com passos  $h$  de 3 e 100 será aplicado a mesma viga de acrílico da Seção 8.4.2. A carga  $P$  selecionada para esta simulação será 78 [N].

Para obtenção dos deslocamentos e deformações na extremidade livre da viga, procedese os cálculos como demonstrado na Seção 8.2.2. Os resultados são visualizados na Tabela B.1.

Tabela B.1 – Resultados para diversos passos  $h$  - viga de acrílico.

$h$	$\theta$ [rad]	$y$ [m]
3	0,9570	-1,4736
20	0,9568	-1,4721
100	0,9568	-1,4721

A análise dos resultados da Tabela B.1, mostra que o passo escolhido no Capítulo 7,  $h = 20$ , apresenta excelentes resultados nos casos estudados.

Na simulação para passo  $h = 3$ , a variação percentual em relação ao passo  $h = 20$  é pequena, sendo de 0,2% para  $\theta$  e de 0,1% para  $y$ .

Na simulação para passo  $h = 100$ , a variação percentual em relação ao passo  $h = 20$  é inexistente, considerando os algarismos significativos utilizados.

Tais resultados demonstram que aumentar o passo em relação a  $h = 20$  não altera os resultados, sendo que a redução do passo poderia até ser adotado para os casos estudados, o que reduziria os esforços computacionais.

## Apêndice C

# DESLOCAMENTOS DAS VIGAS PELO MÉTODO DOS MOMENTOS DE ÁREA

## C.1 INTRODUÇÃO

Usando algumas propriedades geométricas da linha elástica é possível determinar os deslocamentos de uma viga, em um dado ponto. Através do diagrama representativo do momento fletor  $M / EI$ , traçado sobre o comprimento da viga, pode-se obter dois teoremas do método dos momentos de área.

O primeiro teorema possibilita o cálculo do ângulo entre as tangentes a dois pontos da viga. O segundo teorema do método dos momentos de área, é usado para calcular a distância vertical, desde um ponto sobre a viga até a tangente pelo segundo ponto.

## C.2 TEOREMAS RELATIVOS ÀS ÁREAS DO DIAGRAMA DE MOMENTOS

### C.2.1 PRIMEIRO TEOREMA

Considerando a viga  $AB$  submetida a um carregamento arbitrário conforme Figura C.1.a, o diagrama que representa a variação de  $M/EI$  é representado pela Figura C.1.b, sendo  $M$  o momento fletor e  $EI$  a rigidez flexional.

A equação diferencial linear de segunda ordem que rege o comportamento da linha elástica, equação (3.3), obtida no Capítulo 3, é reproduzida abaixo,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Px}{EI} \quad (\text{C.1})$$

A equação (3.15) define,

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg} \theta \quad (\text{C.2})$$

que pode ser igualado a  $\theta$  para pequenas deformações.

Levando à equação (C.1),

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (\text{C.3})$$

Portanto,

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (\text{C.4})$$

Considerando dois pontos quaisquer da viga,  $F$  e  $G$ , e integrando os dois membros da equação (C.4) de  $F$  até  $G$ , obtém-se,

$$\int_{\theta_F}^{\theta_G} d\theta = \int_{x_F}^{x_G} \frac{M}{EI} dx \quad (\text{C.5})$$

ou

$$\theta_G - \theta_F = \int_{x_F}^{x_G} \frac{M}{EI} dx \quad (\text{C.6})$$

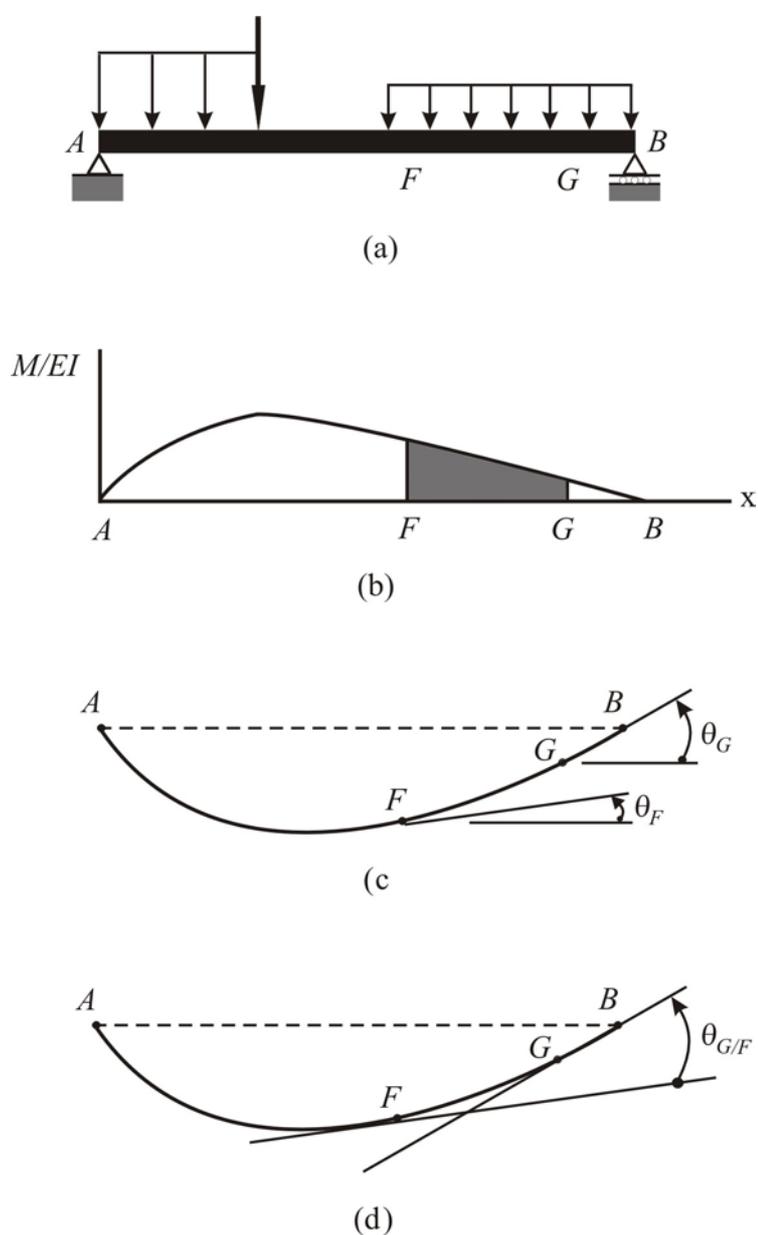


Figura C.1 – (a) Viga submetida a um carregamento arbitrário; (b) diagrama da variação de  $M/EI$ ; (c) declividades nos pontos  $F$  e  $G$ ; (d) tangentes à linha elástica em  $F$  e  $G$ .

onde  $\theta_F$  e  $\theta_G$  são as declividades nos pontos  $F$  e  $G$ , respectivamente conforme Figura C.1.c. Mas o segundo membro da equação (C.6), representa a área sob o diagrama de  $(M/EI)$  entre

os pontos  $F$  e  $G$ , e o primeiro membro representa o ângulo formado pelas tangentes à linha elástica em  $F$  e  $G$  conforme Figura C.1.d. Chamando esse ângulo de  $\theta_{G/F}$ , então

$$\theta_{G/F} = \text{Área sob o diagrama de } (M/EI) \text{ entre } F \text{ e } G \quad (\text{C.7})$$

Este é o primeiro teorema relativo à área do diagrama de momentos.

## C.2.2 SEGUNDO TEOREMA

Considerando agora os pontos  $P$  e  $P'$  situados entre  $F$  e  $G$  e separados de uma distância  $dx$ , conforme Figura C.2. As tangentes à linha elástica interceptam a vertical pelo ponto  $F$  em pontos que forma o comprimento  $dt$ . A declividade em  $P$  e o ângulo  $d\theta$ , formado pelas tangentes à linha elástica por  $P$  e  $P'$ , são valores muito pequenos, e pode-se adotar que  $dt$  é igual ao comprimento do arco de circunferência de raio  $x_1$  subtendido pelo ângulo  $d\theta$ . Desse modo,

$$dt = x_1 d\theta \quad (\text{C.8})$$

ou, substituindo o valor de  $d\theta$  da equação (C.4),

$$dt = x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (\text{C.9})$$

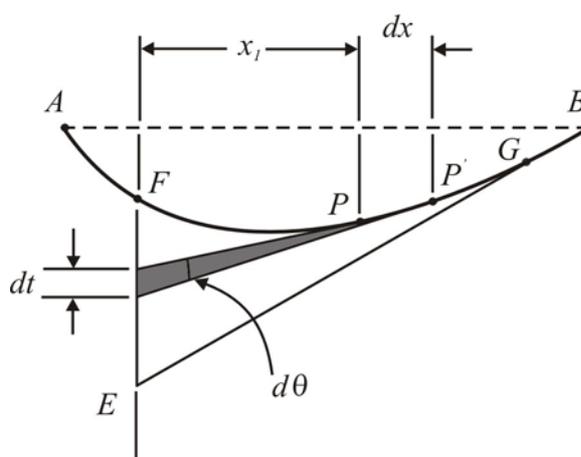


Figura C.2 - Pontos  $P$  e  $P'$  situados entre  $F$  e  $G$  e separados de uma distância  $dx$ .

Integrando a equação (C.9) de  $F$  até  $G$ , tem-se que, enquanto o ponto  $P$  percorre a linha elástica de  $F$  a  $G$ , a tangente pelo ponto  $P$  varre a vertical traçada por  $F$  desde  $F$  até  $E$ . A integral do primeiro membro representa então, a distância, medida na vertical, do ponto  $F$  à tangente pelo ponto  $G$ . Essa distância, designada por  $t_{F/G}$ , é chamada desvio tangencial de  $F$  em relação a  $G$ . Tem-se dessa forma,

$$t_{F/G} = \int_F^G x_1 \frac{M}{EI} dx \quad (C.10)$$

Nota-se que  $(M/EI)dx$  representa um elemento de área sob o diagrama de  $(M/EI)$  e  $x_1(M/EI)dx$  representa o momento estático desse elemento de área em relação a um eixo vertical que passa por  $F$  conforme Figura C.3. Assim, o segundo membro da equação (C.10) é o momento estático em relação a esse eixo da área de diagrama  $(M/EI)$  situado entre  $F$  e  $G$ .

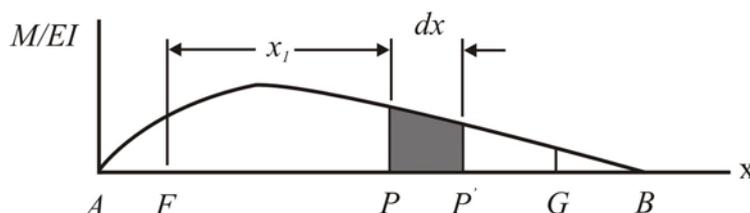


Figura C.3 - Elemento de área  $(M/EI)dx$ .

Portanto o segundo teorema relativo à área do diagrama de momentos determina que o desvio tangencial de  $F$  em relação a  $G$ ,  $t_{F/G}$ , é igual ao momento estático da área limitada pelo diagrama  $(M/EI)$  entre os pontos  $F$  e  $G$  em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto  $F$ .

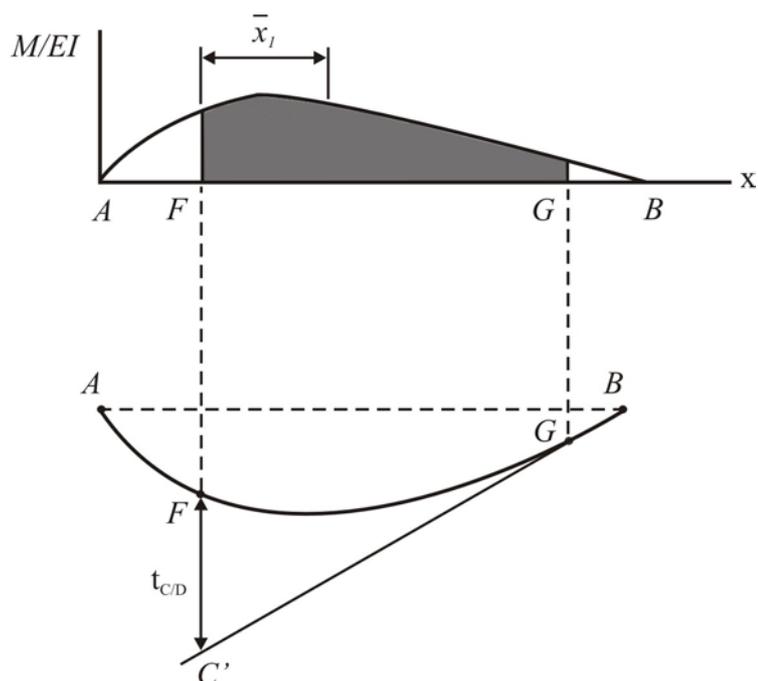


Figura C.4 - Área limitada pelo diagrama  $(M/EI)$  e  $\bar{x}_1$  é a distância do centróide da área até o eixo vertical que passa por  $F$ .

Sendo o momento estático de uma área em relação a um eixo igual ao produto da área pela distância do seu centróide até o eixo, pode-se escrever o segundo teorema na forma,

$$t_{F/G} = (\text{Área entre } F \text{ e } G) \bar{x}_1 \quad (\text{C.11})$$

onde a área se refere àquela limitada pelo diagrama  $(M/EI)$  e onde  $\bar{x}_1$  é a distância do centróide da área até o eixo vertical que passa por  $F$ , conforme Figura C.4.

### C.3 APLICAÇÃO A VIGAS EM BALANÇO

O primeiro teorema relativo à área do diagrama de momentos deduzida na Seção C.2.1, define o ângulo  $\theta_{G/F}$  entre as tangentes em dois pontos  $F$  e  $G$  da linha elástica. Assim, o ângulo  $\theta_G$  que a tangente no ponto  $G$  forma com a horizontal, quer dizer, a declividade no ponto  $G$ , pode ser obtido somente se a declividade em  $F$  for conhecida. Do mesmo modo, o segundo teorema relativo à área do diagrama de momentos define a distância entre um ponto da linha elástica e a tangente traçada por outro ponto. O desvio tangencial  $t_{F/G}$  fornece a posição no ponto  $F$  somente se é conhecida a tangente no ponto  $G$ . Conclui-se então que os

dois teoremas só poderão ser aplicados efetivamente na determinação da declividade e flechas, se uma *tangente de referência* à linha elástica for estipulada inicialmente.

No caso de uma viga em balanço, conforme Figura C.5, a tangente à linha elástica na extremidade engastada  $A$  é conhecida e pode ser usada como tangente de referência. Como  $\theta_A = 0$ , a declividade da viga em qualquer ponto  $G$  é  $\theta_G = \theta_{G/A}$ , podendo ser obtida pelo primeiro teorema. Por outro lado, a flecha  $y_G$  do ponto  $G$  é igual ao desvio tangencial  $t_{G/A}$  medido da tangente de referência horizontal em  $A$ , podendo ser obtido pelo segundo teorema.

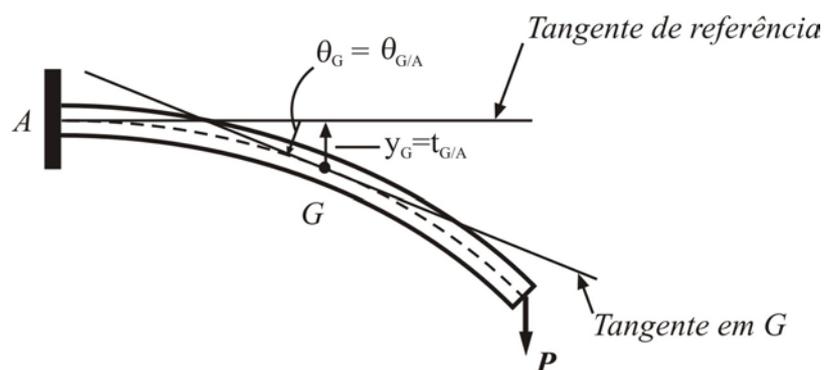


Figura C.5 – Viga em balanço.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)