

ANÁLISE DE ESTRUTURAS FORMADAS PELA ASSOCIAÇÃO DE
PLACAS E CHAPAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO

Daniel Dias Monnerat

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS - GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.

Prof. Leandro Palermo Júnior, D.Eng.

Prof. Jorge Roberto Abrahão Hijjar, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MONNERAT, DANIEL DIAS

Análise de Estruturas Formadas pela
Associação de Placas e Chapas Utilizan-
do o Método dos Elementos de Contorno
[Rio de Janeiro] 2008

XII, 115p. 29,7cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Civil, 2008).

Dissertação - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, COPPE

1. Método dos Elementos de Contorno
 2. Teoria de Placas de Reissner
 3. Elasticidade Plana
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pelas mãos estendidas nos momentos difíceis.

A meu pai Eloilton, minha mãe Edla e minha irmã Naíla, as três pessoas mais importantes de minha vida, que estiveram e estão sempre ao meu lado apoiando e aconselhando.

Ao professor José Antônio Fontes Santiago, muito mais que um orientador, um amigo, sempre incentivando e acreditando no meu potencial, desde a graduação, na primeira bolsa de iniciação científica.

Ao professor José Claudio de Faria Telles, co-orientador neste trabalho, que muito me auxiliou, principalmente, no tratamento do método dos elementos de contorno.

A Exactum Consultoria e Projetos Ltda, em especial a Mario e Cintia, que permitiram a realização deste trabalho.

Aos professores e colegas do curso de Engenharia Civil da Escola Politécnica/UFRJ e do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, que me acompanharam durante essa longa caminhada.

A todos só tenho uma simples e sincera palavra a dizer: Obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DE ESTRUTURAS FORMADAS PELA ASSOCIAÇÃO DE
PLACAS E CHAPAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO

Daniel Dias Monnerat

Março/2008

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago
José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho consiste na análise de estruturas compostas pela associação de placas e chapas, submetidas a carregamentos quaisquer, para as quais as teorias de estado plano de tensão e de flexão de placas com deformação por cisalhamento transversal são acopladas.

As formulações do método dos elementos de contorno, baseadas nas teorias de placas de Reissner e da elasticidade bidimensional, são apresentadas para placas e chapas isotrópicas e de comportamento elástico-linear, considerando pequenas mudanças de configuração.

A técnica de sub-região é empregada para associar placas e chapas horizontais, verticais e inclinadas, podendo várias delas compartilharem da mesma interface. Após a transformação padrão de coordenadas, cada região pode ser combinada levando em consideração a compatibilidade dos deslocamentos e as equações de equilíbrio, para a obtenção do sistema final de equações lineares.

Finalmente, vários exemplos numéricos são apresentados e os resultados são comparados com algumas soluções analíticas e com o método dos elementos finitos, mostrando a validade da formulação proposta.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF ASSEMBLED PLATE STRUCTURES USING THE
BOUNDARY ELEMENT METHOD

Daniel Dias Monnerat

March/2008

Advisors: José Antônio Fontes Santiago
José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This paper deals with the analysis of assembled plate structures, subjected to arbitrary loadings, for which plane stress elasticity and shear deformable plate bending theories are coupled.

The direct boundary elements formulations, based upon Reissner's plate and 2-D elasticity theories are present for elastostatic problems, considering isotropic materials, small deformations and small displacements.

The multi-region technique is employed to assemble the plates. Here, several plates sharing common interface boundaries are accommodated, including inclined ones. After a standard coordinate transformation, each region can be combined taking into account displacement compatibility and equilibrium equations in order to obtain the final equations system.

Finally, several numerical examples are presented and results are compared with some exact analytical and finite element solutions to demonstrate the efficiency of the proposed formulation.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Elasticidade Plana	5
2.1 Introdução	5
2.2 Estados Planos	5
2.2.1 Estado Plano de Tensão (EPT)	5
2.2.2 Estado Plano de Deformação (EPD)	6
2.3 Equações Gerais da Elasticidade Plana	7
2.3.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio	7
2.3.2 Relações Deformação-Deslocamento	9
2.3.3 Equações Constitutivas	10
2.4 Condições de Contorno	11
3 Teoria de Placas de Reissner	14
3.1 Introdução	14
3.2 Hipóteses Básicas	15
3.3 Tensões	16
3.4 Esforços Solicitantes	17
3.5 Equações de Equilíbrio	18
3.6 Deslocamentos Generalizados	19
3.7 Deformações Generalizadas	20
3.8 Expressões dos Esforços	20

SUMÁRIO

3.9	Equações de Reissner	21
3.10	Condições de Contorno	22
4	Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Elasticidade Plana	24
4.1	Introdução	24
4.2	Identidade de Somigliana	25
4.3	Solução Fundamental	28
4.4	Equação Integral de Contorno	31
4.5	Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos	33
4.5.1	Deslocamentos	33
4.5.2	Tensões	33
4.6	Tensões no Contorno	34
4.7	Regiões Infinitas	36
5	Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Teoria de Placas de Reissner	38
5.1	Introdução	38
5.2	Equação Integral	38
5.3	Solução Fundamental	44
5.3.1	Deslocamentos Generalizados	44
5.3.2	Forças de Superfície Generalizadas	47
5.4	Equação Integral de Contorno	48
5.5	Transformação da Integral de Forças de Domínio em Integral de Contorno	50
5.6	Expressões Referentes às Forças de Domínio na Integral de Contorno	52
5.7	Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos	52
5.7.1	Deslocamentos	52
5.7.2	Esforços Solicitantes	53
5.8	Regiões Infinitas	55
6	Implementação Computacional	60
6.1	Introdução	60
6.2	Discretização e Elementos Empregados	61
6.2.1	Elemento Quadrático Isoparamétrico Contínuo	61
6.2.2	Elemento Quadrático Isoparamétrico Descontínuo	66
6.3	Descontinuidade da Normal ou da Condição de Contorno	68

SUMÁRIO

6.3.1	Emprego do Nó Duplo	68
6.3.2	Emprego do Elemento Descontínuo	69
6.4	Equações Integrais Discretizadas	70
6.4.1	Equações Integrais Discretizadas para Elasticidade Plana	70
6.4.2	Equações Integrais Discretizadas para Placas	71
6.4.3	Matrizes dos Coeficientes de Influência do Elemento	73
6.4.4	Montagem do Sistema Global de Equações	74
6.4.5	Cálculo dos Deslocamentos nos Pontos Internos	81
6.5	Integrais Singulares	82
6.5.1	Submatrizes da Diagonal de $\tilde{\mathbf{G}}$	82
6.5.2	Submatrizes da Diagonal de $\tilde{\mathbf{H}}$	85
6.5.3	Subvetores de \mathbf{b}	86
7	Aplicações Numéricas	87
7.1	Introdução	87
7.2	Aplicações	88
7.2.1	Exemplo 1 - Placa com Espessura e Módulo de Elasticidade Variáveis	88
7.2.2	Exemplo 2 - Estrutura de Seção Transversal L	91
7.2.3	Exemplo 3 - Barra de Seção Transversal I	97
7.2.4	Exemplo 4 - Estrutura de Seção Transversal Arbitrária	104
8	Conclusões	109
	Referências Bibliográficas	111

Lista de Figuras

2.1	Estado plano de tensão	6
2.2	Estado plano de deformação	7
2.3	Corpo sólido com carregamento no plano x_1x_2	8
2.4	Tensões e forças de volume	8
2.5	Forças de superfície	12
3.1	Sistema de eixos de referência	15
3.2	Distribuição das tensões $\sigma_{\alpha\beta}$ ao longo da espessura da placa	16
3.3	Sentidos positivos para os momentos	17
3.4	Sentidos positivos para os esforços cortantes	18
3.5	Elemento de placa em equilíbrio	19
4.1	Sólido submetido à ação de forças e deslocamentos prescritos	25
4.2	Região contendo o corpo $\Omega \cup \Gamma$	25
4.3	Forças concentradas unitárias aplicadas no ponto $\xi \in \Omega^*$	26
4.4	Carga concentrada unitária aplicada na região infinita	29
4.5	Deformações fundamentais	30
4.6	Tensões fundamentais	30
4.7	Ponto singular ξ removido por um setor circular	31
4.8	Sistema de referência local ao elemento	35
4.9	Região infinita com cavidade	36
5.1	Região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ contendo a placa $\Omega \cup \Gamma$	39
5.2	Placa com ponto ξ no contorno	49
5.3	Direção da normal à região	51
5.4	Região infinita com cavidade	56

LISTA DE FIGURAS

5.5	Coordenadas polares do ponto x	57
6.1	Discretização do contorno Γ em elementos	61
6.2	Elemento quadrático isoparamétrico contínuo	62
6.3	Elemento quadrático isoparamétrico contínuo em relação à coordenada adimensional η	62
6.4	Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo	66
6.5	Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo em relação à coordenada adimensional η	67
6.6	Descontinuidade da normal	68
6.7	Nó duplo	69
6.8	Elemento descontínuo	69
6.9	Sistema de referência local de cada lâmina	74
6.10	Associação de duas lâminas	77
6.11	Associação quatro lâminas em uma mesma interface	79
7.1	Dimensões geométricas da placa	88
7.2	Placa engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído	89
7.3	Malha empregada para o problema	89
7.4	Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos verticais da placa	91
7.5	Dimensões geométricas da estrutura de seção transversal L ($\theta = 90^\circ$)	92
7.6	Estrutura engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído ($\theta = 90^\circ$)	93
7.7	Malha empregada para o problema ($\theta = 90^\circ$)	93
7.8	Dimensões geométricas da estrutura de seção transversal L ($\theta = 120^\circ$)	95
7.9	Estrutura engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído ($\theta = 120^\circ$)	95
7.10	Malha empregada para o problema ($\theta = 120^\circ$)	96
7.11	Dimensões geométricas da barra de seção transversal I	98
7.12	Malha empregada para o problema	98
7.13	Barra engastada e livre submetida a um carregamento uniforme de tração	99
7.14	Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos longitudinais	101

LISTA DE FIGURAS

7.15 Barra engastada sujeita a um carregamento triangular na alma da extremidade oposta	101
7.16 Transformação do carregamento triangular em momento concentrado	102
7.17 Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos verticais	103
7.18 Dimensões geométricas da estrutura de seção transversal arbitrária .	104
7.19 Estrutura engastada e livre sujeita a dois carregamentos uniforme- mente distribuídos	105
7.20 Malha empregada para o problema	106
7.21 Estrutura deformada devido aos carregamentos aplicados	107

Lista de Tabelas

7.1	Deslocamentos verticais na borda livre da placa	90
7.2	Deslocamentos verticais na borda livre da lâmina horizontal	94
7.3	Deslocamentos verticais na borda livre da lâmina inclinada	97
7.4	Deslocamentos longitudinais da barra	100
7.5	Deslocamentos verticais da barra	103
7.6	Deslocamentos verticais da estrutura	106
7.7	Deslocamentos transversais da estrutura	107

Capítulo 1

Introdução

Estruturas constituídas pela associação de elementos planos, de seção transversal aberta ou fechada, são cada vez mais utilizadas em diversos campos da engenharia - civil, naval, mecânica, aeronáutica, etc - por apresentarem a vantagem de permitirem a obtenção de elevada rigidez flexional com peso próprio relativamente pequeno.

As estruturas são tratadas como uma associação no espaço de lâminas¹ retas, onde em cada lâmina existe um estado plano de tensões somado ao de flexão de placas. As análises são realizadas em regime linear-elástico, ou seja, considerando pequenas mudanças de configuração.

Para solução do problema é empregado o método dos elementos de contorno. Esta técnica consiste na transformação das equações diferenciais que regem o problema (comportamento da solução no interior e na superfície do corpo) numa equação integral que relaciona somente valores das variáveis no contorno.

Pelo fato das aproximações serem feitas apenas no contorno, a dimensão do problema se reduz em uma unidade, acarretando uma diminuição significativa na quantidade de dados de entrada fornecidos, visto que o sistema de equações gerado, apesar de ser cheio e não simétrico, tem geralmente dimensões menores do que os obtidos com os métodos que discretizam o domínio.

O método dos elementos de contorno pode ser formulado de duas maneiras diferentes, através dos métodos indiretos ou dos diretos.

Os métodos indiretos são conhecidos como métodos de contorno menos sofisticados. Nestes as equações integrais são expressas em termos de densidade de

¹A palavra lâmina será empregada neste trabalho para designar o plano médio das placas e chapas associadas.

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

fontes, as quais não apresentam significado físico.

Uma vez obtidos os valores destas densidades, determinam-se os deslocamentos e forças de superfície. KUPRADZE [1] estabeleceu as bases das formulações indiretas, adotando a solução fundamental de Kelvin [2] para resolver problemas no regime linear-elástico.

Já as formulações diretas, baseiam-se na adoção das variáveis físicas do problema (deslocamentos e forças de superfície) como incógnitas no sistema de equações. O ponto inicial das formulações diretas deve-se a RIZZO [3] em 1967, que apresentou a solução do problema linear-elástico bidimensional e a CRUSE [4] para o caso tridimensional.

Assim, no presente trabalho é empregada a formulação direta e o conceito de região no sentido definido por KELLOGG [5], ou seja, região onde o contorno é representado por superfícies regulares.

Trabalhos como os de PALERMO [6] e PALERMO *et al.* [7] já contemplam a análise de estruturas de seção aberta ou fechada, através do emprego dos efeitos do estado plano de tensões somados aos de flexão de placas. Nestes trabalhos a teoria de placas empregada é a de Kirchhoff, onde a deformação cisalhante transversal é desprezada e os efeitos da espessura sobre os valores calculados não são levados em consideração.

Outros trabalhos como os de DIRGANTARA e ALIABADI [8] e BAIZ e ALIABADI [9] também contemplam a análise de estruturas submetidas aos efeitos simultâneos de flexão e extensão. Entretanto, em tais trabalhos a teoria de placas empregada é a de Reissner sendo, portanto, os efeitos de deformação por cisalhamento transversal considerados.

A proposta deste trabalho é o emprego da teoria de flexão de placas de Reissner associada à teoria de estado plano de tensões para proceder a análise de estruturas constituídas pela associação espacial de placas e chapas submetidas a carregamentos quaisquer. Além disso, ao contrário do que ocorre em [8, 9], onde apenas duas sub-regiões convergem para uma mesma interface, neste trabalho várias sub-regiões podem compartilhar de uma mesma interface, possibilitando uma maior generalidade nas análises.

Um sistema final de equações é obtido tratando cada lâmina individualmente como uma sub-região. Após as transformações de coordenadas nas equações de cada sub-região, procede-se à compatibilização de deslocamentos e o equilíbrio das forças.

Logo, para uma lâmina isolada os efeitos de extensão e de flexão estão to-

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

talmente desacoplados e os mesmos só acoplam-se a partir da existência de duas lâminas não coplanares.

Para descrição do corpo da dissertação, esta foi dividida em oito capítulos, sendo o primeiro a introdução e os demais comentados de forma sucinta a seguir.

No Capítulo 2, são apresentados, primeiramente, alguns conceitos básicos relativos à elasticidade plana para problemas no regime elástico-linear. Os problemas elásticos são analisados através da consideração de que os estados de tensão e de deformação independem de uma das coordenadas. Desta forma, o fenômeno elástico ocorre de forma igual em todos os planos perpendiculares a essa coordenada independente. Fazem parte desses problemas os denominados estado plano de tensão (EPT) e estado plano de deformação (EPD).

No Capítulo 3 são descritos os fundamentos da teoria de flexão de placas de Reissner. A teoria de Reissner, quando comparada à teoria clássica de Kirchhoff, apresenta a vantagem de considerar os efeitos de deformação transversal por cisalhamento. Assim, a teoria de Reissner é válida tanto para placas delgadas como para placas espessas.

No Capítulo 4, são obtidas a Identidade de Somigliana para problemas de elasticidade plana e a equação integral de contorno utilizando a dedução formal. Além disso, são apresentados os tensores da solução fundamental para um meio elástico infinito e as expressões necessárias para o cálculo dos deslocamentos e das tensões nos pontos internos e do contorno.

Já no Capítulo 5, as equações diferenciais de flexão de placas de Reissner são transformadas em equações integrais através do emprego do segundo teorema de Betti. Além disso, são apresentados os tensores da solução fundamental para um meio elástico infinito e obtidas as equações para a solução de problemas de flexão de placas, tanto no contorno como nos pontos internos.

No Capítulo 6, são comentadas as implementações numéricas empregadas, expondo acerca dos elementos aplicados nas análises (contínuos e descontínuos), as funções de interpolação adotadas, os procedimentos empregados nos casos de descontinuidade da normal ou das condições de contorno e as integrações numéricas utilizadas. Descreve-se, também, o processo de associação de cada lâmina, que contém equações desacopladas de extensão e de flexão, utilizando-se a técnica de sub-região para a definição do sistema geral de equações. Em seguida, apresenta-se o processo de obtenção dos deslocamentos nos pontos internos a partir dos valores obtidos no contorno.

Alguns exemplos numéricos são apresentados no Capítulo 7, sendo os resultados

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

obtidos comparados com outras sistemáticas de análises dos problemas propostos, como por exemplo a teoria da resistência dos materiais e o método dos elementos finitos (MEF).

Finalmente no Capítulo 8, são expostas as conclusões gerais referentes aos estudos desenvolvidos neste trabalho e feitas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Elasticidade Plana

2.1 Introdução

Em alguns casos, o problema elástico pode ser analisado através da consideração de que os estados de tensão e de deformação independem de uma das coordenadas. O fenômeno elástico ocorre da mesma forma em todos os planos perpendiculares a essa coordenada independente. Fazem parte destes problemas os denominados estado plano de tensão e estado plano de deformação.

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos e hipóteses básicas da teoria da elasticidade bidimensional, necessárias ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

A importância do estudo da elasticidade bidimensional está no fato de que durante a associação de placas e chapas, os efeitos de extensão serão analisados através do emprego do conceito de estado plano de tensão.

Para um estudo mais detalhado do assunto, recomenda-se as referências [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

2.2 Estados Planos

2.2.1 Estado Plano de Tensão (EPT)

Os problemas de estado plano de tensão são caracterizados por estruturas na forma de chapas delgadas de espessura constante, sendo o carregamento aplicado nas direções paralelas ao plano xy e distribuído na espessura b da chapa (Figura 2.1).

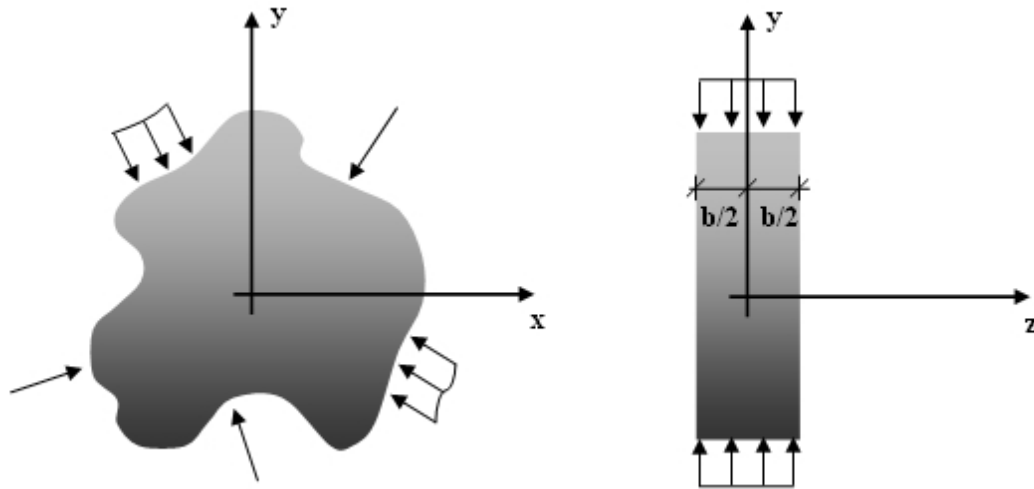


Figura 2.1: Estado plano de tensão

Neste caso, sendo pequena a espessura, admite-se que o estado de tensão é completamente definido pelas componentes de tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , independentes de z . As demais componentes σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} , são tomadas iguais a zero, uma vez que as faces $z = \pm \frac{b}{2}$ estão livres de forças externas.

As componentes de deformação γ_{xz} e γ_{yz} são nulas e a deformação específica ε_z pode ser obtida em função de ε_x e ε_y , da seguinte forma¹:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad (2.1)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

2.2.2 Estado Plano de Deformação (EPD)

Os problemas de estado plano de deformação ocorrem em sólidos prismáticos, em que as cargas são paralelas ao plano xy e não variam na direção da coordenada z . Assume-se que os deslocamentos na direção z sejam restringidos nos apoios (Figura 2.2), e que estes não oferecem atrito para deslocamentos no plano xy .

Desta forma, qualquer seção transversal (paralela ao plano xy) encontra-se submetida ao mesmo estado de deformações, onde as componentes ε_z , γ_{xz} e γ_{yz}

¹No estado plano de tensão, onde a deformação na direção transversal z não é impedida, ocorre ε_z pelo efeito de Poisson.

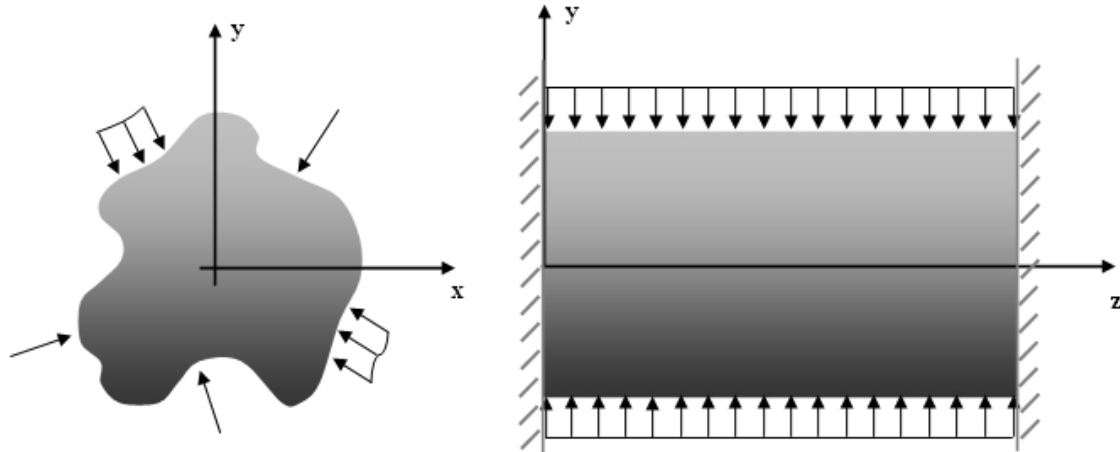


Figura 2.2: Estado plano de deformação

são iguais a zero e a tensão normal σ_z pode ser obtida em função das tensões normais σ_x e σ_y , da seguinte forma:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.2)$$

A existência de tensões normais σ_z na direção longitudinal do sólido deve-se ao fato de que cada lâmina entre seções adjacentes, que tenderia a se deformar na direção z pelo efeito de Poisson, tem essa deformação impedida pelas lâminas vizinhas [10]. Esse impedimento à deformação na direção z acarreta o surgimento da tensão σ_z .

2.3 Equações Gerais da Elasticidade Plana

Para a simplificação das equações obtidas para os problemas de estado plano de tensão e estado plano de deformação, utiliza-se a notação cartesiana indicial, ou seja, os índices 1 e 2 são empregados em substituição a x e y , respectivamente (Figura 2.3). Assim, os símbolos de somatório são desnecessários sempre que o mesmo índice aparecer duas vezes em um termo qualquer.

2.3.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Em um sólido em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças, considere um paralelepípedo retangular de arestas dx_1 e dx_2 , paralelas aos eixos coordenados (Figura 2.4).

CAPÍTULO 2. ELASTICIDADE PLANA

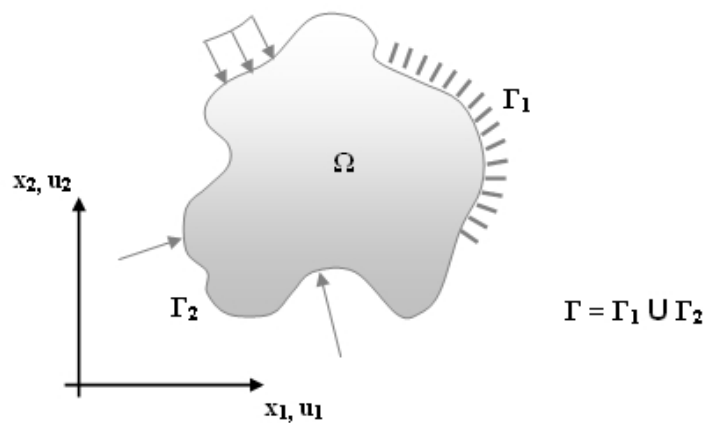


Figura 2.3: Corpo sólido com carregamento no plano x_1x_2

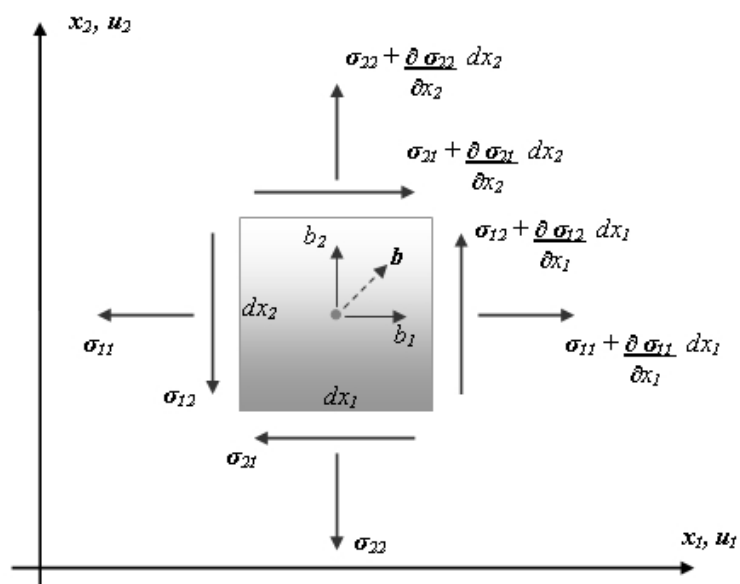


Figura 2.4: Tensões e forças de volume

CAPÍTULO 2. ELASTICIDADE PLANA

Devido a continuidade das tensões, pode-se concluir que as componentes de tensão correspondentes em faces paralelas do elemento diferem entre si de uma quantidade infinitesimal. Além disso, sobre o paralelepípedo elementar pode agir uma força de volume \mathbf{b} , cujas componentes são designadas por b_1 e b_2 .

Tendo em vista o equilíbrio de forças e de momentos do elemento e observando que as componentes de forças de volume e os incrementos infinitesimais nas tensões dão contribuições de ordem superior para o equilíbrio de momentos, obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio estático:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2; \quad (2.3)$$

onde σ_{ij} representam as componentes do tensor de tensões e b_j as componentes das forças de volume. As derivadas espaciais são indicadas por vírgulas, ou seja, $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \sigma_{ij,i}$.

As equações (2.3) devem ser atendidas em todos os pontos no interior do domínio Ω . Além disso, se não há momentos aplicados no corpo sólido, as condições de equilíbrio conduzem a:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.4)$$

Portanto, a matriz de tensões para um ponto no interior do domínio Ω é simétrica e representada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Cabe ressaltar que, como x_1 e x_2 representam condições indeformadas do corpo, as condições de equilíbrio são implementadas na configuração inicial e não na configuração deformada [10, 11]. Tal simplificação deve-se a hipótese de pequenas mudanças de configuração (linearidade geométrica).

2.3.2 Relações Deformação-Deslocamento

As relações deformação-deslocamento representam relações de natureza geométrica entre as componentes u_i de deslocamento e as componentes ε_{ij} de deformação.

Assim, dados os deslocamentos, as componentes de deformação são obtidas por derivação, da seguinte forma:

CAPÍTULO 2. ELASTICIDADE PLANA

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.5)$$

O estado de deformação de um ponto no interior do corpo é definido pelo tensor de deformações específicas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Tendo em vista a preservação da continuidade do meio sólido quando o mesmo se deforma, passando da configuração inicial à configuração final deformada, é necessário que o correspondente campo de deslocamentos seja representado por funções contínuas e unívocas [10]. Em problemas de estado plano, essa continuidade e forma única tem como condição necessária e suficiente o atendimento a equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.6)$$

2.3.3 Equações Constitutivas

As equações constitutivas consistem em relações que ligam as componentes de tensão às de deformação, caracterizando o comportamento do material.

As seguintes hipóteses são admitidas:

i) quanto ao material: admite-se o sólido constituído de material homogêneo, isótropo e de comportamento elástico-linear:

– *material homogêneo:* possui as mesmas propriedades em todos os pontos;

– *material isótropo:* em cada ponto as propriedades são as mesmas em todas as direções;

– *material elástico-linear:* as componentes de tensão relacionam-se linearmente com as componentes de deformação.

ii) quanto ao estado inicial: admite-se o estado inicial neutro, ou seja, as deformações são nulas quando todas as tensões são nulas.

Assim, as relações tensão-deformação podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.7)$$

CAPÍTULO 2. ELASTICIDADE PLANA

onde C_{ijkl} é o tensor de quarta ordem contendo as constantes elásticas do material, assim expresso:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.8)$$

sendo:

- G - Módulo de Elasticidade Transversal:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad (2.9)$$

- E - Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young;
- ν - Coeficiente de Poisson;
- δ_{ij} - Delta de Kroneker:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, & \text{se } i &= j \\ \delta_{ij} &= 0, & \text{se } i &\neq j. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substituindo as equações (2.8) nas equações (2.7), obtém-se a Lei de Hooke Generalizada, dada por:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}. \quad (2.11)$$

As equações (2.3), (2.5) e (2.11) definem o problema de elasticidade linear para o estado plano de deformação. Para o caso de estado plano de tensão deve-se substituir ν por $\bar{\nu}$, onde:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}. \quad (2.12)$$

Introduzindo, agora, as equações (2.5) nas equações (2.11), têm-se as expressões das tensões em termos das derivadas de deslocamentos, que substituídas nas equações (2.3), levam às equações de equilíbrio de Navier no domínio Ω :

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0. \quad (2.13)$$

2.4 Condições de Contorno

Na formulação do problema elástico, além das equações que devem ser satisfeitas no domínio Ω , outras condições devem ser atendidas no contorno Γ do sólido.

CAPÍTULO 2. ELASTICIDADE PLANA

De maneira geral, pode-se ter (vide Figura 2.3):

- i*) deslocamentos prescritos na região Γ_1 do contorno;
- ii*) forças de superfície prescritas na região Γ_2 do contorno.

No primeiro caso, as condições são representadas a seguir, onde as quantidades com barra referem-se aos valores prescritos das grandezas.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_1. \quad (2.14)$$

No segundo caso, tendo em vista as expressões de Cauchy para as tensões em um plano qualquer do corpo sólido:

$$\rho_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (2.15)$$

onde ρ_i são as componentes do vetor tensão e n_j os cossenos diretores da normal, e conforme ilustrado na figura 2.5, pode-se obter as seguintes condições de equilíbrio no contorno Γ_2 do corpo:

$$\bar{p}_i = p_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{em } \Gamma_2, \quad (2.16)$$

onde \bar{p}_i representa as componentes do vetor de forças de superfície prescritas numa faceta cuja normal aponta para fora do corpo.

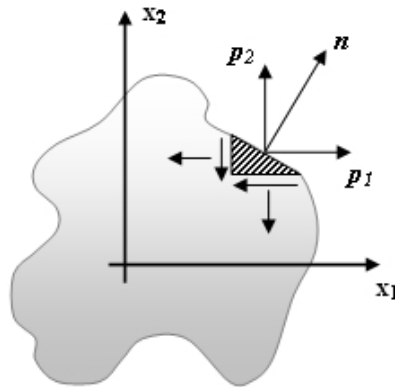


Figura 2.5: Forças de superfície

As equações (2.16) podem ser escritas na forma seguinte, mediante a substituição das equações (2.5) nas equações (2.11), e o resultado desta substituído nas equações (2.16):

CAPÍTULO 2. ELASTICIDADE PLANA

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = \bar{p}_i. \quad (2.17)$$

As equações (2.13), sujeitas às condições de contorno (2.14) e (2.17), definem o problema de estado plano com formulação em termos de deslocamentos.

Teoria de Placas de Reissner

3.1 Introdução

As placas são elementos estruturais planos, submetidas a carregamentos transversais e com a espessura muito menor que as demais dimensões, podendo ser classificadas como delgadas ou espessas, de acordo com a relação entre a espessura e a menor dimensão no plano. Placas cuja relação estabelecida não ultrapasse $1/20$ são classificadas pela maioria dos autores como delgadas e são analisadas pelo que é conhecido na literatura como teoria de Kirchhoff. Nos casos em que a relação acima citada ultrapassa $1/20$, as placas são consideradas em geral como espessas, e devem ser tratadas no âmbito de uma teoria de placas como a de Reissner.

A diferença básica entre as duas teorias citadas reside no fato de que a teoria de Reissner leva em consideração os efeitos de deformação transversal por cisalhamento, o que é desprezado pela teoria clássica de Kirchhoff. Assim, a teoria de Reissner é válida tanto para placas delgadas como para placas espessas sendo, em função disso, empregada no presente trabalho.

A teoria de Reissner para flexão de placas baseia-se na teoria da elasticidade e no princípio de Hellinger-Reissner, recaindo em um problema de integração de sexta ordem, que deve satisfazer a três condições de contorno por bordo.

São apresentados neste capítulo, as equações básicas para o cálculo de placas pela formulação de REISSNER [18, 19, 20], bem como a definição das condições de contorno do problema.

Assim, através do estudo da teoria de Reissner para placas, juntamente com os aspectos teóricos da elasticidade plana, apresentados no Capítulo 2, ficam estabelecidas as formulações necessárias para o desenvolvimento do processo de associação

de chapas e placas.

3.2 Hipóteses Básicas

Conforme mencionado no item 2.3, neste trabalho é empregada a notação cartesiana indicial, que é extremamente útil em derivadas e na simplificação das equações.

Para o presente capítulo, referente a teoria de placas de Reissner, e para o Capítulo 5, onde é aplicado o método dos elementos de contorno para a teoria de placa de Reissner, a notação indicial adotada é a seguinte:

- i) índices $i, j, k \rightarrow$ variam de 1 a 3;
- ii) índices $\alpha, \beta, \gamma, \theta \rightarrow$ variam de 1 a 2.

Assim, seja uma placa homogênea, isotrópica e de comportamento elástico-linear, com espessura h e solicitada por um carregamento uniforme transversal q por unidade de área.

Sejam, ainda, x_i eixos cartesianos ortogonais, com x_α na superfície média e x_3 na direção transversal à placa (Figura 3.1). A origem do sistema de eixos encontra-se em um ponto qualquer sobre o plano médio da placa.

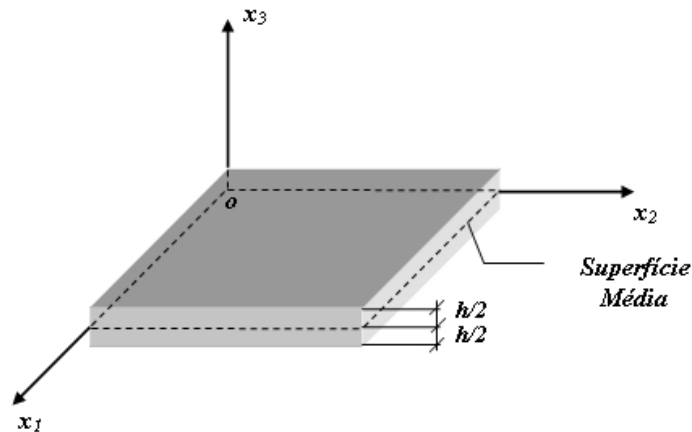


Figura 3.1: Sistema de eixos de referência

A teoria de flexão de placas de Reissner admite, como hipótese básica, a variação linear das tensões $\sigma_{\alpha\beta}$ ao longo da espessura da placa [21].

3.3 Tensões

Sendo as condições de carga nas faces da placa dadas por $\sigma_{33} = \pm \frac{q}{2}$ e $\sigma_{\alpha 3} = 0$, para $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ [22, 23], e admitindo a hipótese básica das tensões $\sigma_{\alpha\beta}$ variarem linearmente na espessura (item 3.2), pode-se obter as expressões das tensões em termo dos esforços solicitantes:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3}x_3. \quad (3.1)$$

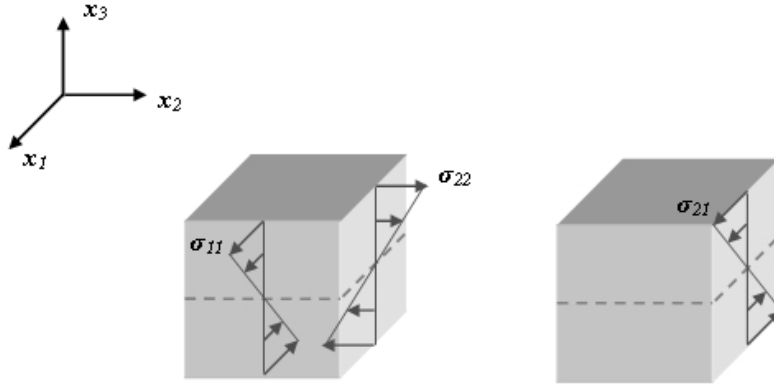


Figura 3.2: Distribuição das tensões $\sigma_{\alpha\beta}$ ao longo da espessura da placa

Pela consideração do equilíbrio de um elemento infinitesimal, obtêm-se as demais componentes de tensão¹:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \frac{3Q_{\alpha}}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \\ \sigma_{33} &= \frac{qx_3}{2h} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹Verifica-se que as tensões $\sigma_{\alpha 3}$ apresentam uma variação parabólica ao longo da espessura da placa e σ_{33} uma variação cúbica.

3.4 Esforços Solicitantes

Os esforços solicitantes, momentos $M_{\alpha\beta}$ e esforços cortantes Q_α , são obtidos de forma análoga ao considerado na teoria clássica, ou seja, mediante a integração da distribuição das tensões ao longo da espessura da placa [21].

Assim, os esforços solicitantes por unidade de comprimento, atuando na superfície média da placa, são dados por:

i) Momentos fletores e momento de torção:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 \, dx_3; \quad (3.3)$$

ii) Esforços cortantes:

$$Q_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} \, dx_3. \quad (3.4)$$

Os sentidos positivos adotados para os momentos e para os esforços cortantes são indicados nas Figuras 3.3 e 3.4, respectivamente.

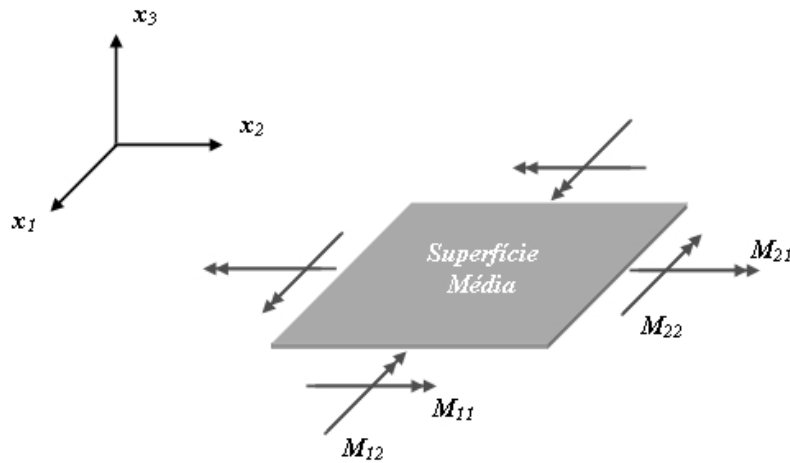


Figura 3.3: Sentidos positivos para os momentos

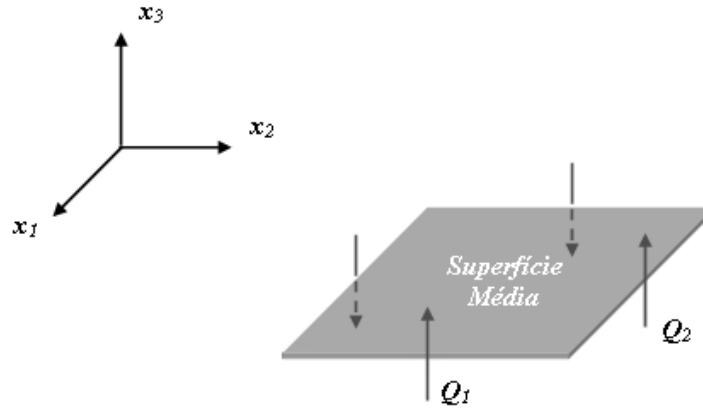


Figura 3.4: Sentidos positivos para os esforços cortantes

3.5 Equações de Equilíbrio

Considerando a teoria da elasticidade para pequenas mudanças de configuração e fazendo o equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa (Figura 3.5), de dimensões dx_α ao longo da superfície média e dx_3 na direção transversal à placa, obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio [21]:

i) Equilíbrio de forças na direção x_3 :

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0; \quad (3.5)$$

ii) Equilíbrio de momentos em relação aos eixos x_α ²:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0. \quad (3.6)$$

Visto que não há nenhuma força aplicada na direção x_α e nenhum momento em relação ao eixo x_3 , as três equações dadas por (3.5) e (3.6) definem completamente o equilíbrio do elemento de placa.

²O momento produzido pela carga q e o momento devido a $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$, em relação ao eixo x_α , são negligenciados em função de representarem parcelas de ordem superior em relação aos demais termos.

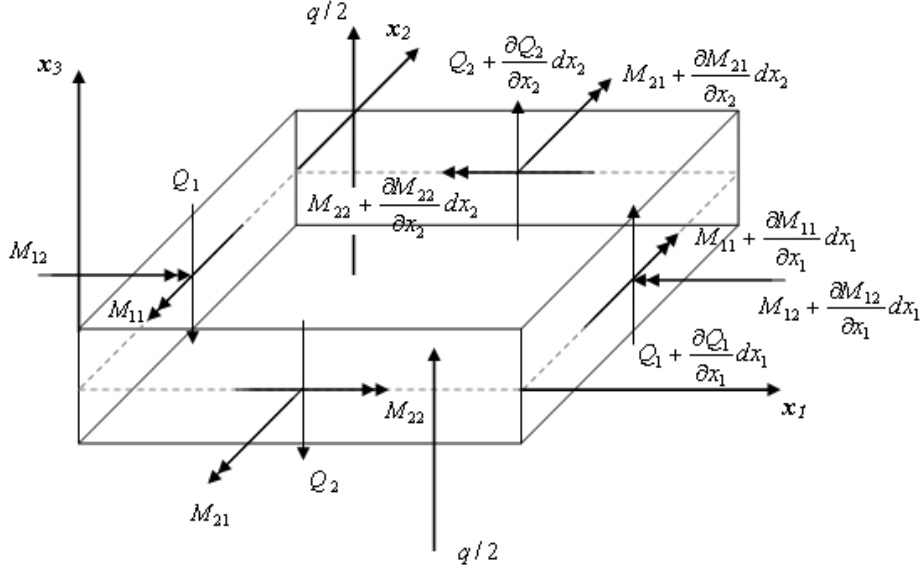


Figura 3.5: Elemento de placa em equilíbrio

3.6 Deslocamentos Generalizados

Para pontos situados na superfície média da placa, serão considerados deslocamentos generalizados ϕ_α e w que representam a média ponderada dos deslocamentos v_i de pontos situados ao longo da espessura nas direções dos eixos coordenados.

Define-se os deslocamentos generalizados ϕ_α e w através da equação obtida pela igualdade do trabalho dos esforços solicitantes sobre os deslocamentos médios e do trabalho total das tensões correspondentes sobre os deslocamentos v_i da mesma seção³:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} v_\beta \, dx_3 = M_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (3.7)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} v_3 \, dx_3 = Q_\alpha w.$$

Substituindo as equações (3.1) e (3.2) nas equações (3.7), obtêm-se os deslocamentos generalizados ϕ_α e w em função dos deslocamentos v_i [21, 22, 23]:

³E. Reissner, no tratamento deste assunto, fez uso do princípio do trabalho mínimo de Castigliano [24], para a introdução das condições de compatibilidade na análise.

CAPÍTULO 3. TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

i) Rotação da normal à superfície média nos planos $x_\alpha x_3$:

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_\alpha x_3 dx_3; \quad (3.8)$$

ii) Deslocamento transversal:

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3. \quad (3.9)$$

3.7 Deformações Generalizadas

As expressões das deformações generalizadas de flexão e de cisalhamento, para a teoria elástica-linear, em função dos deslocamentos generalizados ϕ_α e w , são expressas por:

i) Deformações de flexão:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}); \quad (3.10)$$

ii) Deformações cisalhantes transversais:

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha}. \quad (3.11)$$

Na teoria de Reissner, as deformações cisalhantes transversais não são desprezadas, ao contrário do que ocorre na teoria clássica, onde elas são negligenciadas ($\psi_\alpha = 0$). Assim, as rotações na teoria clássica são obtidas por simples derivação do deslocamento transversal ($\phi_\alpha = -w_{,\alpha}$).

3.8 Expressões dos Esforços

Utilizando-se a teoria da elasticidade para pequenas mudanças de configuração, aliada a princípios variacionais, pode-se obter as expressões dos momentos e dos esforços cortantes em função dos deslocamentos generalizados ϕ_α e w [22, 23]:

CAPÍTULO 3. TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

i) Momentos:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta}; \quad (3.12)$$

ii) Esforços cortantes:

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (\phi_\alpha + w_{,\alpha}), \quad (3.13)$$

sendo:

- D - Rigidez à flexão da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (3.14)$$

- λ - Constante característica das equações de Reissner:

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}; \quad (3.15)$$

- $\delta_{\alpha\beta}$ - Delta de Kroneker.

3.9 Equações de Reissner

As equações de equilíbrio (3.5) e (3.6), acrescidas das equações para os esforços solicitantes em termos dos deslocamentos generalizados ϕ_α e w , dadas em (3.12) e (3.13), formam um sistema com oito equações, que devem satisfazer a três condições de contorno por bordo da placa.

Através da substituição das equações (3.12) e (3.13) nas equações de equilíbrio (3.5) e (3.6), condensa-se essas oito equações, permitindo assim a obtenção de um sistema com três equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned} Q_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_\alpha + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} q_{,\alpha} &= -D \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\nabla^2 w) \\ D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 q &= q, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \rightarrow \text{Operador de Laplace}$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$$

3.10 Condições de Contorno

Na formulação do problema de flexão de placas de Reissner, além das equações que devem ser satisfeitas no domínio Ω , outras condições devem ser atendidas no contorno Γ da placa.

Devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo, podendo-se prescrever em cada uma das três direções generalizadas o deslocamento ou a força de superfície correspondente.

Sendo Γ_1 a parte do contorno onde os deslocamentos generalizados ϕ_α e w são prescritos e Γ_2 onde as forças de superfície generalizadas p_α e p_3 são prescritas, têm-se:

i) Em Γ_1 :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &= \bar{\phi}_\alpha \\ w &= \bar{w}; \end{aligned} \tag{3.17}$$

ii) Em Γ_2 :

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \bar{p}_\alpha \\ p_3 &= \bar{p}_3, \end{aligned} \tag{3.18}$$

sendo:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta \\ p_3 &= Q_\beta n_\beta \end{aligned} \tag{3.19}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}_\alpha &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \\ \bar{p}_3 &= \bar{Q}_\beta n_\beta, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde n_β são os cossenos diretores da normal exterior ao contorno.

CAPÍTULO 3. TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

Na teoria de Reissner, ao contrário do que ocorre na teoria clássica, as três condições de contorno físicas do problema são satisfeitas independentemente e a influência da espessura sobre os deslocamentos e esforços resultantes é levada em consideração [19].

Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Elasticidade Plana

4.1 Introdução

As equações diferenciais da elasticidade plana, apresentadas no Capítulo 2, serão transformadas em equações integrais através do emprego do método dos elementos de contorno [25, 26, 27, 28].

O método dos elementos de contorno, que pode ser deduzido a partir da segunda ou terceira identidades de Green, do método dos resíduos ponderados ou do princípio dos trabalhos virtuais, será formulado a partir do segundo teorema de Betti [25].

O segundo teorema de Betti estabelece que se dois estados de tensão (a) e (b) existem e satisfazem às equações de equilíbrio, então o trabalho realizado pelas forças do sistema (a) sobre os deslocamentos do sistema (b) é igual ao trabalho realizado pelas forças de (b) sobre os deslocamentos de (a). Escolhendo o sistema (a) como solução fundamental e o sistema (b) como o problema real, o resultado é uma equação integral de contorno relacionando os deslocamentos e forças de superfície.

Neste capítulo, serão apresentados, também, os tensores da solução fundamental da elasticidade plana para um meio elástico infinito e as expressões empregadas no cálculo dos deslocamentos e das tensões no contorno e nos pontos internos.

No final serão feitas considerações acerca do tratamento de regiões regulares infinitas, onde se faz necessária a consideração de algumas hipóteses adicionais relativas ao comportamento das funções envolvidas.

4.2 Identidade de Somigliana

Seja o corpo definido por $\Omega \cup \Gamma$ (Figura 4.1) que encontra-se em equilíbrio sob a ação de cargas prescritas em Γ_2 e deslocamentos prescritos em Γ_1 . Este estado de equilíbrio é representado pelo grupo σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , p_i e b_i .

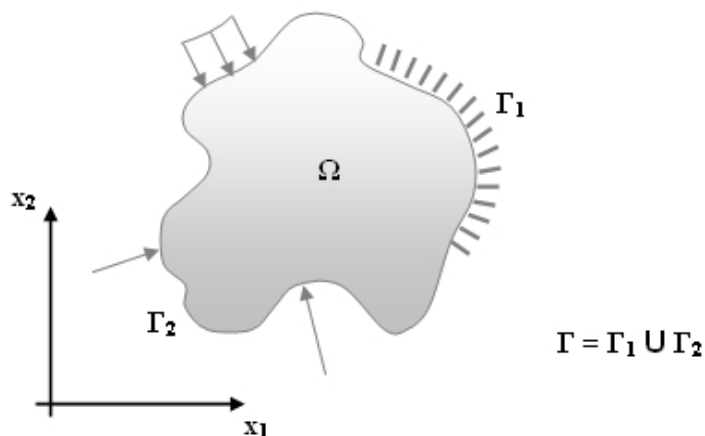


Figura 4.1: Sólido submetido à ação de forças e deslocamentos prescritos

Adotando a existência de um domínio Ω^* com contorno Γ^* , contendo o corpo $\Omega \cup \Gamma$ (Figura 4.2), tem-se que esta nova região também encontra-se em estado de equilíbrio representado por σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* , p_i^* e b_i^* .

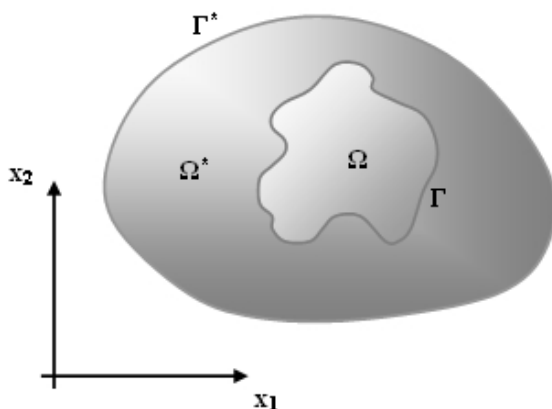


Figura 4.2: Região contendo o corpo $\Omega \cup \Gamma$

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

Se as propriedades elásticas são válidas para ambos os casos, a integral de reciprocidade pode ser deduzidas por simples simetria dos tensores envolvidos, isto é¹:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* d\Omega. \quad (4.1)$$

Integrando duas vezes por partes ambos os lados da equação (4.1) e empregando as equações (2.5) e (2.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma, \quad (4.2)$$

que corresponde ao segundo teorema de Betti ou teorema da reciprocidade [25].

A equação (4.2) pode ser modificada, assumindo que as componentes das forças de volume b_i^* correspondem a forças concentradas unitárias aplicadas no ponto $\xi \in \Omega^*$ em cada uma das direções definidas pelo vetor de componentes P_i (Figura 4.3):

$$b_j^* = \Delta(\xi, x) P_j, \quad (4.3)$$

onde $\Delta(\xi, x)$ representa a "função" Delta de Dirac, ξ o ponto fonte e x o ponto campo ($x \in \Omega^*$).

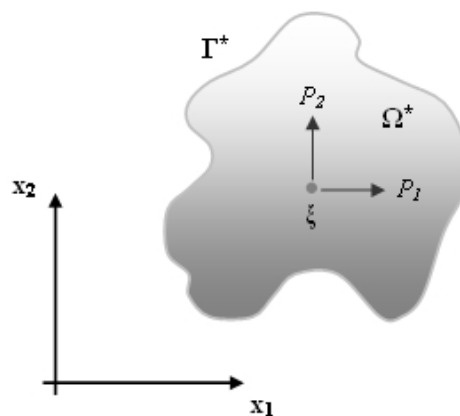


Figura 4.3: Forças concentradas unitárias aplicadas no ponto $\xi \in \Omega^*$

¹ Assume-se que a solução para σ_{ij}^* existe e que satisfaz as equações que governam o problema, incluindo as condições de equilíbrio.

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À ELASTICIDADE PLANA

A "função" Delta de Dirac apresenta as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, x) &= 0 \quad \text{se } \xi \neq x \\ \Delta(\xi, x) &\rightarrow \infty \quad \text{quando } \xi \rightarrow x \\ \int_{\Omega^*} f(x) \Delta(\xi, x) d\Omega(x) &= f(\xi). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Assim, a primeira integral da equação (4.2) pode ser substituída por:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) P_i. \quad (4.5)$$

Além disso, se for adotada cada carga concentrada atuando independentemente, os deslocamentos e forças de superfície podem ser escritas nas formas:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{ij}^*(\xi, x) P_i \\ p_j^* &= p_{ij}^*(\xi, x) P_i, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ representam os deslocamentos e forças de superfície na direção j no ponto x , devido a uma força unitária aplicada na direção i no ponto ξ .

Alternativamente, então, pode-se escrever a equação (4.2) para representar cada componente do deslocamento no ponto ξ em separado:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (4.7)$$

As equações (4.7) são conhecidas como identidade de Somigliana para deslocamentos [25] e são obtidas em reciprocidade com a solução singular da equação de Navier, satisfazendo:

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \Delta(\xi, x) P_j = 0. \quad (4.8)$$

Conseqüentemente, as soluções das equações (4.8) são chamadas soluções fundamentais.

4.3 Solução Fundamental

As soluções para as equações de equilíbrio de Navier (4.8) são chamadas soluções fundamentais. Existem soluções diferentes para essas equações que podem ser igualmente empregadas. Contudo, estas soluções variam tanto em relação à região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ como também em relação às condições de contorno.

No presente trabalho, considera-se Ω^* como um meio elástico infinito e, conseqüentemente, Γ^* está situado a uma distância infinita do corpo. A correspondente solução fundamental é devida a Kelvin [2] e as expressões para os deslocamentos e forças de superfície, representadas na figura 4.4, são dadas por [29, 30]:

i) Deslocamentos:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix};$$

ii) Forças de superfície:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}$$

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

onde $r=r(\xi, x)$ representa a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x e suas derivadas são tomadas com referência às coordenadas do ponto x , ou seja:

$$\begin{aligned} r &= (r_i r_i)^{\frac{1}{2}}, \\ r_i &= x_i(x) - x_i(\xi), \\ r_{,i} &= \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Além disso, as componentes de deformações ε_{ij}^* (Figura 4.5) e de tensões σ_{ij}^* (Figura 4.6) em um ponto x , devido a uma carga unitária aplicada no ponto ξ na direção i , podem ser escritas como:

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

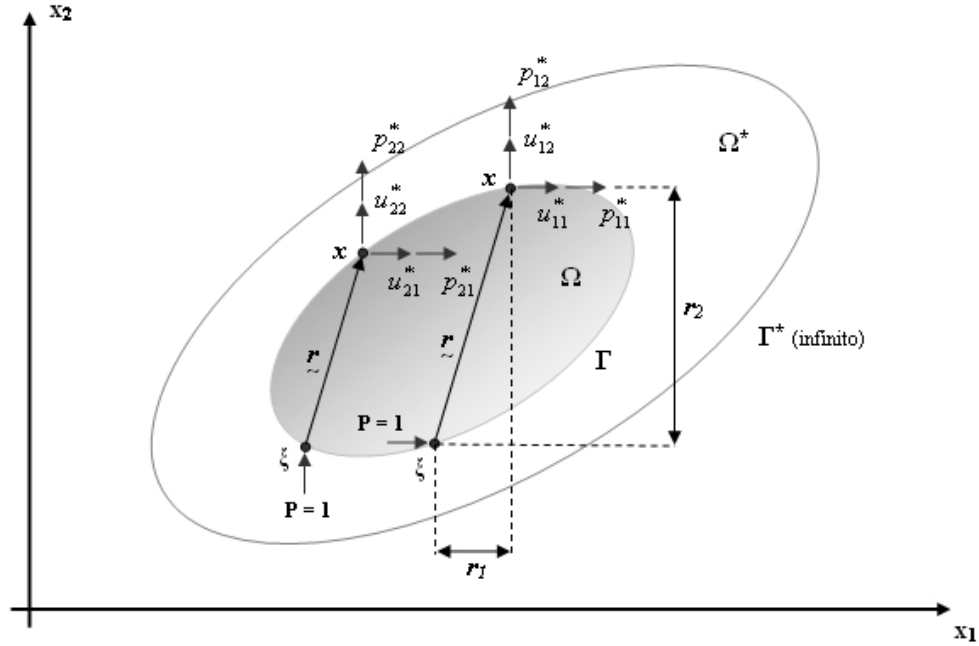


Figura 4.4: Carga concentrada unitária aplicada na região infinita

i) Deformações:

$$\varepsilon_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \{(1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,k}\delta_{ij}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111}^* & \varepsilon_{112}^* & \varepsilon_{211}^* & \varepsilon_{212}^* \\ \varepsilon_{121}^* & \varepsilon_{122}^* & \varepsilon_{221}^* & \varepsilon_{222}^* \end{bmatrix};$$

ii) Tensões:

$$\sigma_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,k}\delta_{ij} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^* & \sigma_{112}^* & \sigma_{211}^* & \sigma_{212}^* \\ \sigma_{121}^* & \sigma_{122}^* & \sigma_{221}^* & \sigma_{222}^* \end{bmatrix}.$$

As expressões para o estado plano de deformações são válidas para o estado plano de tensão desde que ν seja substituído por $\bar{\nu}$, conforme apresentado na equação (2.12).

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

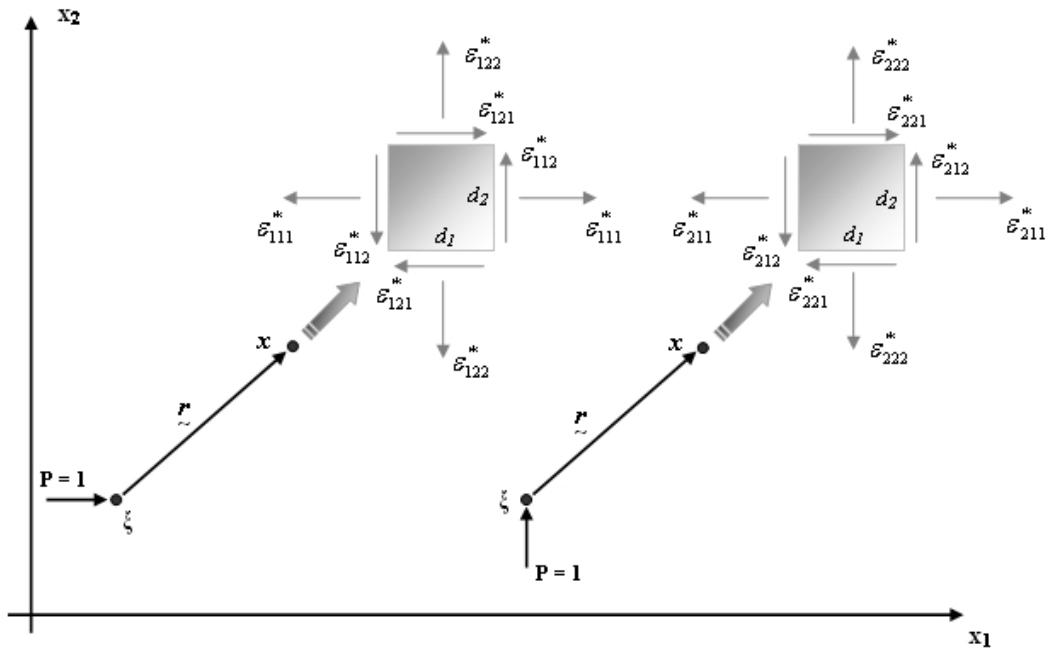


Figura 4.5: Deformações fundamentais

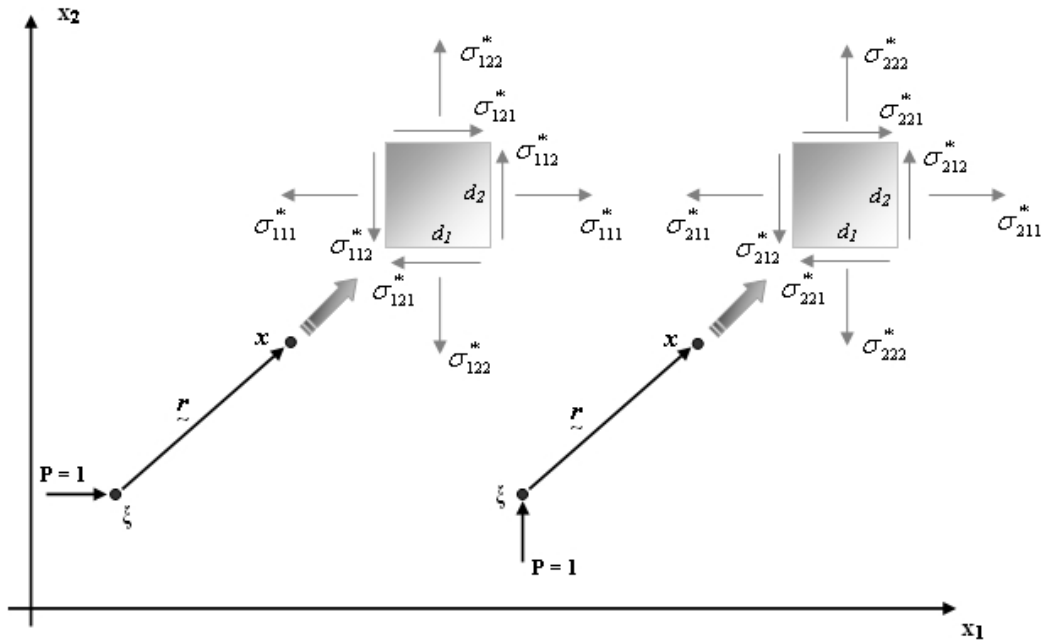


Figura 4.6: Tensões fundamentais

4.4 Equação Integral de Contorno

Mesmo conhecendo a solução de Kelvin [2], a identidade de Somigliana não pode ser empregada para a obtenção dos deslocamentos (ou tensões) enquanto não forem conhecidos os deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno Γ (forças de volume são sempre prescritas).

Para que as equações (4.7) representem deslocamentos no contorno, pode-se utilizar a seguinte alternativa [25, 26]: do domínio Ω do corpo é subtraído um setor circular Ω_ε , conforme figura 4.7, com o centro no ponto fonte ξ e de raio ε .

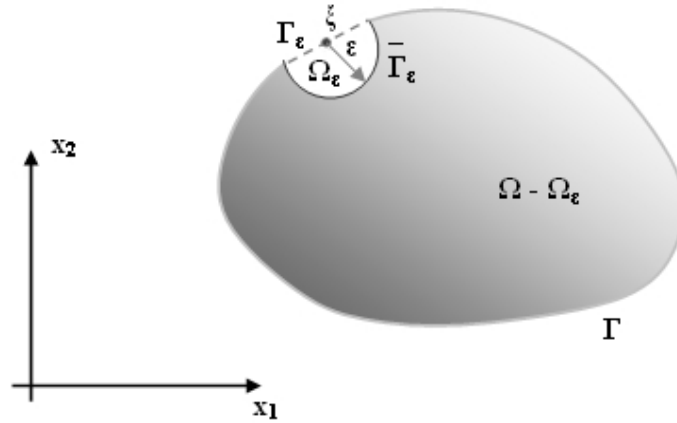


Figura 4.7: Ponto singular ξ removido por um setor circular

Assim, a equação (4.1) pode ser escrita para o corpo apresentado na Figura 4.7 da seguinte forma:

$$\int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* d\Omega, \quad (4.14)$$

onde $\Omega - \Omega_\varepsilon$ é o domínio removido do setor circular.

Como o ponto fonte ξ não pertence mais ao domínio $\Omega - \Omega_\varepsilon$, os tensores fundamentais não são mais singulares. Integrando por partes a equação (4.14) e tendo em vista que $\Delta(\xi, x) = 0$ em todo o domínio $\Omega - \Omega_\varepsilon$, tem-se:

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x), \quad (4.15)$$

onde a hipótese de que cada carga unitária atua em separado já foi feita.

Examinando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ de cada integral da equação (4.15), tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x), \quad (4.16)$$

onde a primeira integral à direita pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\}. \quad (4.17)$$

Claramente, a primeira integral à direita da equação (4.17) desaparece devido às condições de continuidade de $u_j(x)$ e a segunda integral pode ser escrita como:

$$C_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x). \quad (4.18)$$

Voltando à equação (4.16), verifica-se que a segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfizer às condições de Hölder [3, 5]:

$$|u_k(x) - u_k(\xi)| \leq \beta r^\alpha, \quad (4.19)$$

onde β e α são constantes positivas.

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

Portanto, tomando-se o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, as equações (4.15) fornecem:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x), \quad (4.20)$$

onde a integral do lado esquerdo é no sentido do valor principal de Cauchy.

Os coeficientes $C_{ij}(\xi)$ foram definidos nas equações (4.18). Se o contorno for suave $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$; Caso contrário, expressões fechadas para esses coeficientes podem ser obtidas nas referências [31, 32]. Para pontos no domínio, têm-se $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$ e para pontos externos ao corpo $C_{ij}(\xi) = 0$. O cálculo dos coeficientes $C_{ij}(\xi)$ é em geral trabalhoso, o que faz com que em aplicações práticas eles sejam obtidos de forma indireta, através do emprego de movimentos de corpo rígido.

As equações (4.20) fornecem uma relação que deve ser satisfeita pelas forças de superfície e deslocamentos no contorno (incluindo forças de volume que são conhecidas). Portanto, quando as condições de contorno são aplicadas, as equações (4.20) podem ser utilizadas para calcular as demais incógnitas no contorno.

4.5 Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos

4.5.1 Deslocamentos

Os deslocamentos para um ponto interno ξ qualquer podem ser obtidos a partir da identidade de Somigliana (equações (4.7)).

4.5.2 Tensões

As equações (4.7) são uma representação contínua dos deslocamentos em pontos no interior do corpo. Conseqüentemente, as componentes de tensões em pontos internos podem ser obtidas a partir da substituição dos resultados da derivação das

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

equações (4.7) em relação à coordenada ξ^2 na Lei de Hooke Generalizada (equações (2.11)). As expressões finais são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Deve-se observar que as derivadas foram tiradas diretamente dentro das integrais. Tal procedimento é válido neste caso, porém não é sempre aplicável nas integrais de domínio.

Para a solução fundamental de Kelvin, os novos tensores são escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_{ijk}^* &= -\sigma_{ijk}^* \quad (\text{apresentado no item 4.3}), \\ p_{ijk}^* &= \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \right. \\ & \quad \left. + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + \right. \\ & \quad \left. + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.6 Tensões no Contorno

Em muitas aplicações é de interesse o conhecimento não apenas das tensões no interior do corpo, mas também do tensor de tensões completo no contorno [12, 33].

Empregando a matriz de transformação para tensor de primeira ordem [34], obtêm-se os deslocamentos e as forças de superfície em relação a um sistema de referência local ao elemento (Figura 4.8).

As equações de Cauchy (2.15), para o sistema de referência local, fornecem:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2, \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1. \end{aligned} \quad (4.23)$$

²Para obtenção das deformações específicas.

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTICIDADE PLANA

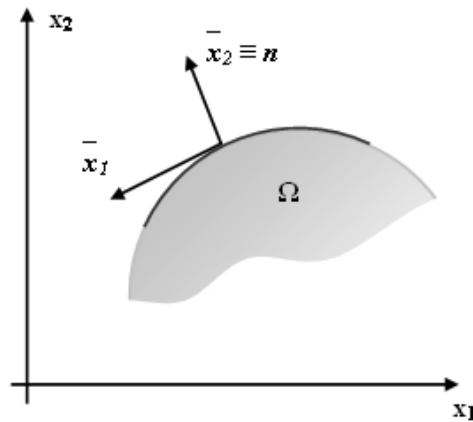


Figura 4.8: Sistema de referência local ao elemento

A componente de deformação $\bar{\epsilon}_{11}$ para este sistema de referência é facilmente calculado por:

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1}. \quad (4.24)$$

Para o estado plano de deformação, a Lei de Hooke Generalizada (equação(2.11)) fornece:

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{1}{1 - \nu} \left[(1 - 2\nu) \frac{\bar{\sigma}_{22}}{2G} - \nu \bar{\epsilon}_{11} \right]. \quad (4.25)$$

Substituindo a equação (4.25) em (2.11), agora para obter $\bar{\sigma}_{11}$, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{1 - \nu} [\nu \bar{\sigma}_{22} + 2G \bar{\epsilon}_{11}]. \quad (4.26)$$

A equação (4.26), juntamente com as equações (4.23), fornece o tensor de tensões completo em qualquer ponto ao longo do contorno, em relação a um sistema de referência local do elemento. Empregando a matriz de transformação para tensor de segunda ordem, obtêm-se as tensões em relação ao sistema de referência global.

4.7 Regiões Infinitas

Nesta seção, a solução fundamental de Kelvin será estendida para problemas com regiões regulares infinitas. Regiões regulares infinitas representam regiões limitadas por uma superfície regular e contendo pontos suficientemente distantes.

A extensão das equações (4.20) para o caso de regiões infinitas deve ser feita levando-se em consideração algumas hipóteses adicionais relativas às funções envolvidas. Estas hipóteses estão associadas ao comportamento das funções em uma superfície infinitamente distante de ξ , e são chamadas condições de regularidade no infinito.

Seja o raio ρ de uma esfera de superfície Γ_ρ , centrada em ξ , que envolve as cavidades do problema externo, representado na figura 4.9. As equações (4.20) podem ser escritas para a região entre Γ e Γ_ρ ($b_j = 0$ para simplificar) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x). \end{aligned} \quad (4.27)$$

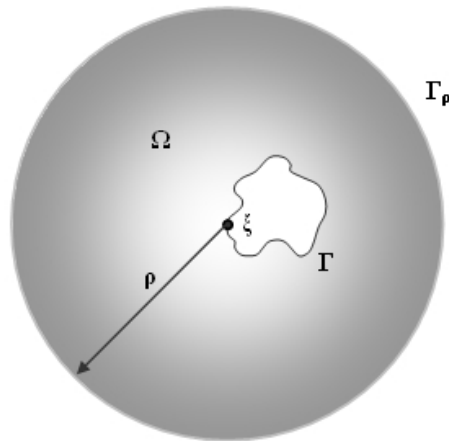


Figura 4.9: Região infinita com cavidade

Se for tomado o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, as equações (4.27) podem ser escritas em termos de integrais sobre Γ apenas se as seguintes condições de regularidade

CAPÍTULO 4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À ELASTICIDADE PLANA

forem satisfeitas:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} [p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) - u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x)] d\Gamma(x) = 0. \quad (4.28)$$

Para problemas bidimensionais, considerando o contorno no infinito ($x \in \Gamma_\rho$), têm-se³:

$$\begin{aligned} d\Gamma(x) &= |J| d\phi \Rightarrow |J| = O(\rho), \\ u_{ij}^*(\xi, x) &= \begin{cases} O(\ln \rho + 1), & j = k \\ O(1), & j \neq k \end{cases}, \\ p_{ij}^*(\xi, x) &= O(\rho^{-1}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Portanto, para garantir que cada termo da equação (4.28) se anule separadamente, deve-se ter $u_j(x) = O(\rho^{-1})$ e $p_j(x) = O(\rho^{-2})$ [35]. Este caso, não corresponde ao comportamento da solução fundamental no infinito.

Porém, pode-se substituir $u_j(x)$ e $p_j(x)$ pelas soluções fundamentais e verificar que as equações (4.28) são satisfeitas. A diferença é que os termos não se anulam separadamente, mas se cancelam quando $\rho \rightarrow \infty$.

Assim, as equações (4.28) são sempre satisfeitas se, na pior das hipóteses, $u_j(x)$ e $p_j(x)$ se comportarem como a solução fundamental no infinito.

Neste caso, sendo as condições de regularidade atendidas, os problemas de cavidade em meio infinito podem ser representados por:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x). \quad (4.30)$$

³ $O(f(\rho))$ significa de ordem $f(\rho)$.

Capítulo 5

Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Teoria de Placas de Reissner

5.1 Introdução

As equações diferenciais da teoria de flexão de placas de Reissner, apresentadas no Capítulo 3, serão transformadas em equações integrais através do emprego do segundo teorema de Betti ou teorema da Reciprocidade.

Serão apresentados, também, os tensores da solução fundamental para um meio elástico infinito (deslocamentos e forças de superfície generalizadas) e obtidas as equações tanto para a solução do problema no contorno como para o cálculo dos deslocamentos e esforços solicitantes (momentos e cortantes) nos pontos internos da placa.

No final do capítulo, serão feitas considerações acerca do cálculo de placas infinitas, onde se faz necessária a introdução de algumas hipóteses adicionais, relativas às funções envolvidas.

5.2 Equação Integral

Para maior conveniência nas equações que serão deduzidas e empregadas, os deslocamentos generalizados ϕ_α e w , definidos no item 3.6, serão representados por u_α e u_3 , ou ainda, genericamente por u_k .

Assim, seja uma placa definida por um domínio Ω e um contorno Γ , em estado de equilíbrio, sujeita a um carregamento q atuando em Ω e de espessura h .

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

As condições de contorno para as três direções generalizadas da placa, são dadas por:

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{u}_k \quad \text{em } \Gamma_1 \\ p_k &= \bar{p}_k \quad \text{em } \Gamma_2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

com $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Adotando a existência de um domínio Ω^* com contorno Γ^* , contendo a referida placa (Figura 5.1), tem-se que esta nova região também encontra-se em estado de equilíbrio.

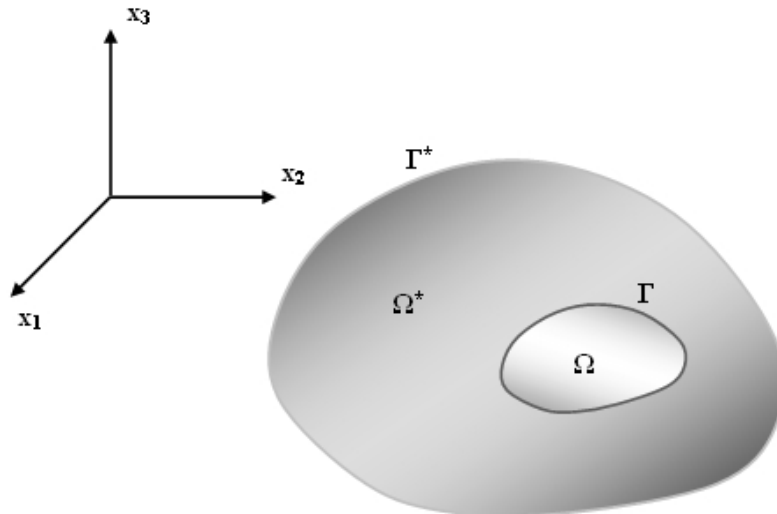


Figura 5.1: Região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ contendo a placa $\Omega \cup \Gamma$

Para cada uma das regiões apresentadas, têm-se as seguintes equações¹:

i) Região $\Omega \cup \Gamma$:

- Deslocamentos generalizados: u_k ;
 - Forças de Superfície: p_k
- sendo:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta \\ p_3 &= Q_\alpha n_\alpha; \end{aligned} \tag{5.2}$$

¹Equações apresentadas no Capítulo 3.

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

- Deformações:

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ \psi_{\alpha} &= u_{\alpha} + u_{3,\alpha};\end{aligned}\tag{5.3}$$

- Esforços:

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta} &= D\frac{1-\nu}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2}\delta_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha} &= D\frac{(1-\nu)\lambda^2}{2}(u_{\alpha} + u_{3,\alpha});\end{aligned}\tag{5.4}$$

- Equações de Equilíbrio:

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + q &= 0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

ii) Região $\Omega^* \cup \Gamma^*$:

- Deslocamentos generalizados: u_k^* ;

- Forças de Superfície: p_k^*

sendo:

$$\begin{aligned}p_{\alpha}^* &= M_{\alpha\beta}^*n_{\beta} \\ p_3^* &= Q_{\alpha}^*n_{\alpha};\end{aligned}\tag{5.6}$$

- Deformações:

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*) \\ \psi_{\alpha}^* &= u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*;\end{aligned}\tag{5.7}$$

- Esforços:

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta}^* &= D\frac{1-\nu}{2}\left(u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu}u_{\gamma,\gamma}^*\delta_{\alpha\beta}\right) \\ Q_{\alpha}^* &= D\frac{(1-\nu)\lambda^2}{2}(u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*);\end{aligned}\tag{5.8}$$

- Equações de Equilíbrio:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + F_\alpha^* &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde as componentes F_k^* representam as forças de domínio, definidas para a obtenção da solução fundamental. Essas componentes apresentam as seguintes distribuições ao longo da espessura da placa:

$$\begin{aligned} f_\alpha^* &= \frac{12x_3}{h^3} F_\alpha^* \\ f_3^* &= \frac{3F_3^*}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A primeira das equações (5.4) pode ser reescrita da seguinte forma²:

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{(1)} + M_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad (5.11)$$

onde:

$$M_{\alpha\beta}^{(1)} = D \frac{1-\nu}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (5.12)$$

$$M_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.13)$$

Assim, sejam as equações abaixo, relacionando os esforços solicitantes (momentos e cortantes) com as deformações:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^{(1)} &= C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta} \\ M_{\alpha\beta}^* &= C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta}^* \\ Q_\beta &= C_{3\beta 3\theta} \psi_\theta \\ Q_\beta^* &= C_{3\beta 3\theta} \psi_\theta^*, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $C_{i\beta j\theta}$ representa o tensor de constantes elásticas para o caso isotrópico.

A partir das equações (5.14), pode-se escrever:

$$M_{\alpha\beta}^{(1)} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_\beta \psi_\beta^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta} \chi_{\alpha\beta}^* + C_{3\beta 3\theta} \psi_\theta \psi_\beta^*, \quad (5.15)$$

ou ainda, através da consideração de simetria $C_{i\beta j\theta} = C_{j\theta i\beta}$:

²As equações (5.4) para momentos são divididas na soma de duas parcelas. A primeira $M_{\alpha\beta}^{(1)}$ envolvendo apenas derivadas dos deslocamentos generalizados e a segunda $M_{\alpha\beta}^{(2)}$ envolvendo apenas as contribuições do carregamento q atuante em Ω .

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

$$M_{\alpha\beta}^{(1)}\chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta}\psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} (C_{\gamma\theta\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}^*) + \psi_{\theta} (C_{3\theta3\beta}\psi_{\beta}^*). \quad (5.16)$$

Substituindo as equações (5.14) em (5.16), têm-se:

$$M_{\alpha\beta}^{(1)}\chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta}\psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta}M_{\gamma\theta}^* + \psi_{\theta}Q_{\theta}^*. \quad (5.17)$$

Isolando $M_{\alpha\beta}^{(1)}$ nas equações (5.11) e substituindo (5.13), pode-se reescrever a equação (5.17) da seguinte forma:

$$\left(M_{\alpha\beta} - \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2}\delta_{\alpha\beta} \right) \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta}\psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta}M_{\gamma\theta}^* + \psi_{\theta}Q_{\theta}^*. \quad (5.18)$$

Integrando ambos os lados da equação (5.18) no domínio Ω , tem-se:

$$\int_{\Omega} (M_{\alpha\beta}^*\chi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha}\psi_{\alpha}^*) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha}\psi_{\alpha}^*) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q\delta_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}^* d\Omega. \quad (5.19)$$

Substituindo as equações (5.3) e (5.7) em (5.19) e aplicando o teorema da divergência em ambos os lados, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}^*u_{\alpha}n_{\beta}d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^*u_{\alpha}d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^*u_{\alpha}d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha}^*u_{\alpha}n_{\alpha}d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^*u_{\alpha}d\Omega = \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}u_{\alpha}^*n_{\beta}d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}u_{\alpha}^*d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}u_{\alpha}^*d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} Q_{\alpha}u_{\alpha}^*n_{\alpha}d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}u_{\alpha}^*d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} qu_{\alpha,\alpha}^*d\Omega. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Empregando as equações (5.2) e (5.6), e ainda, as equações de equilíbrio (5.5) e (5.9), tem-se que a equação (5.20) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} p_{\alpha}^*u_{\alpha}d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^*u_{\alpha}d\Omega + \int_{\Omega} F_{\alpha}^*u_{\alpha}d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^*u_{\alpha}d\Omega + \int_{\Gamma} p_3^*u_3d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} F_3^*u_3d\Omega = \int_{\Gamma} p_{\alpha}u_{\alpha}^*d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha}u_{\alpha}^*d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}u_{\alpha}^*d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} p_3u_3^*d\Gamma + \int_{\Omega} qu_3^*d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} qu_{\alpha,\alpha}^*d\Omega. \end{aligned} \quad (5.21)$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

Eliminando os termos iguais e escrevendo de forma genérica para as três direções, tem-se que a equação (5.21) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left(u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega, \quad (5.22)$$

que corresponde ao segundo teorema de Betti ou teorema da Reciprocidade.

As forças de domínio F_j^* , definidas nas equações (5.22), representam forças generalizadas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região Ω^* .

Essas forças de domínio podem ser representadas pelas seguintes equações:

$$F_j^* = \Delta(\xi, x) P_j, \quad (5.23)$$

onde $P_j = 1$.

Considerando as equações (5.23) e (4.4), a integral do lado esquerdo de (5.22) pode ser expressa na forma:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = u_j(\xi) P_j. \quad (5.24)$$

Adotando cada carga concentrada generalizada unitária atuando independentemente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{ij}^*(\xi, x) P_i \\ p_j^* &= p_{ij}^*(\xi, x) P_i, \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ representam os deslocamentos e forças de superfície generalizados na direção j no ponto x , devido a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção i no ponto ξ .

Pode-se então, escrever a equação (5.22) para representar cada componente do deslocamento no ponto ξ em separado:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x). \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3 Solução Fundamental

A solução fundamental atende as equações de equilíbrio (5.9), escritas em termos dos deslocamentos generalizados (equações (5.8)), quando se considera que as forças atuantes no domínio são forças concentradas generalizadas unitárias aplicadas no ponto fonte ξ .

Ela será caracterizada pelos tensores dos deslocamentos generalizados $u_{ij}^*(\xi, x)$ e correspondentes forças de superfície generalizadas $p_{ij}^*(\xi, x)$.

5.3.1 Deslocamentos Generalizados

As expressões para os deslocamentos generalizados u_{ij}^* podem ser obtidas pelo método de Hörmander [22, 36], e são dadas por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B(\lambda r) - (1-\nu)(2\ln(\lambda r) - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A(\lambda r) + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \}$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln(\lambda r) - 1) r r_{,\alpha} \quad (5.27)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)(\lambda r)^2 (\ln(\lambda r) - 1) - 8\ln(\lambda r)],$$

onde $r=r(\xi, x)$, como no capítulo anterior, representa a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x e suas derivadas são tomadas com referência às coordenadas do ponto x , ou seja:

$$\begin{aligned} r &= (r_\alpha r_\alpha)^{\frac{1}{2}}, \\ r_\alpha &= x_\alpha(x) - x_\alpha(\xi), \\ r_{,\alpha} &= \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{r_\alpha}{r}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

As funções $A(\lambda r)$ e $B(\lambda r)$ dependem das funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(\lambda r)$ e $K_1(\lambda r)$, sendo dadas pelas seguintes equações:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

$$A(\lambda r) = K_0(\lambda r) + \frac{2}{\lambda r} \left[K_1(\lambda r) - \frac{1}{\lambda r} \right] \quad (5.29)$$

$$B(\lambda r) = K_0(\lambda r) + \frac{1}{\lambda r} \left[K_1(\lambda r) - \frac{1}{\lambda r} \right].$$

Empregando funções polinomiais [37], pode-se calcular as funções $K_0(\lambda r)$ e $K_1(\lambda r)$:

i) para $0 < \lambda r \leq 2$:

$$\begin{aligned} K_0(\lambda r) = & -\ln\left(\frac{\lambda r}{2}\right) I_0(\lambda r) - 0.57721566 + 0.42278420 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^2 + \\ & + 0.23069756 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^4 + 0.03488590 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^6 + \\ & + 0.00262698 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^8 + 0.00010750 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{10} + \\ & + 0.00000740 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{12} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} K_1(\lambda r) = & \frac{1}{\lambda r} \left[\lambda r \ln\left(\frac{\lambda r}{2}\right) I_1(\lambda r) + 1.0000 + 0.15443144 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^2 - \right. \\ & - 0.67278579 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^4 - 0.18156897 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^6 - \\ & - 0.01919402 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^8 - 0.00110404 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{10} - \\ & \left. - 0.00004686 \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{12} \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde:

$$\begin{aligned} I_0(\lambda r) = & 1 + 3.5156229 \left(\frac{\lambda r}{3.75}\right)^2 + 3.0899424 \left(\frac{\lambda r}{3.75}\right)^4 + \\ & + 1.2067492 \left(\frac{\lambda r}{3.75}\right)^6 + 0.2659732 \left(\frac{\lambda r}{3.75}\right)^8 + \\ & + 0.0360768 \left(\frac{\lambda r}{3.75}\right)^{10} + 0.0045813 \left(\frac{\lambda r}{3.75}\right)^{12} \end{aligned} \quad (5.32)$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

$$\begin{aligned}
 I_1(\lambda r) = \lambda r & \left[0.5 + 0.87890594 \left(\frac{\lambda r}{3.75} \right)^2 + 0.51498869 \left(\frac{\lambda r}{3.75} \right)^4 + \right. \\
 & + 0.15084934 \left(\frac{\lambda r}{3.75} \right)^6 + 0.02658733 \left(\frac{\lambda r}{3.75} \right)^8 + \\
 & \left. + 0.00301532 \left(\frac{\lambda r}{3.75} \right)^{10} + 0.00032411 \left(\frac{\lambda r}{3.75} \right)^{12} \right]
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

ii) para $\lambda r \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 K_0(\lambda r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda r} e^{\lambda r}} & \left[1.25331414 - 0.07832358 \left(\frac{2}{\lambda r} \right) + \right. \\
 & + 0.02189568 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^2 - 0.01062446 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^3 + \\
 & + 0.00587872 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^4 - 0.00251540 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^5 + \\
 & \left. + 0.00053208 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^6 \right]
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(\lambda r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda r} e^{\lambda r}} & \left[1.25331414 + 0.23498619 \left(\frac{2}{\lambda r} \right) - \right. \\
 & - 0.03655620 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^2 + 0.01504268 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^3 - \\
 & - 0.00780353 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^4 + 0.00325614 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^5 - \\
 & \left. - 0.00068245 \left(\frac{2}{\lambda r} \right)^6 \right]
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Derivando as equações (5.29) e reagrupando os termos, obtêm-se:

$$A'(\lambda r) = -K_1(\lambda r) - \frac{2}{\lambda r} \left[K_0(\lambda r) + \frac{2}{\lambda r} K_1(\lambda r) - \frac{2}{(\lambda r)^2} \right] \tag{5.36}$$

$$B'(\lambda r) = -K_1(\lambda r) - \frac{1}{\lambda r} \left[K_0(\lambda r) + \frac{2}{\lambda r} K_1(\lambda r) - \frac{2}{(\lambda r)^2} \right],$$

ou ainda, substituindo a primeira das equações de (5.29), têm-se:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

$$\begin{aligned}
 A'(\lambda r) &= -\frac{1}{\lambda r} [\lambda r K_1(\lambda r) + 2A(\lambda r)] \\
 B'(\lambda r) &= -\frac{1}{\lambda r} [\lambda r K_1(\lambda r) + A(\lambda r)].
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

Quando o ponto fonte ξ e o ponto campo x forem coincidentes ($r = 0$), o tensor u_{ij}^* apresenta singularidade.

Expandindo as equações (5.29), através da substituição das expressões de $K_0(\lambda r)$ e $K_1(\lambda r)$, observa-se que as parcelas que possuem singularidades de ordem r^{-2} se cancelam tanto em $A(\lambda r)$ quanto em $B(\lambda r)$. Contudo, as parcelas com singularidade logarítmica apenas se cancelam em $A(\lambda r)$.

Assim, levando em conta as considerações acima e as equações (5.27), pode-se concluir que o tensor u_{ij}^* possui singularidade de ordem $\ln(r)$.

5.3.2 Forças de Superfície Generalizadas

As expressões das soluções fundamentais para forças de superfície p_{ij}^* , são dadas por [38, 39]:

$$\begin{aligned}
 p_{\gamma\alpha}^* &= -\frac{1}{4\pi r} [(4A(\lambda r) + 2\lambda r K_1(\lambda r) + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_\gamma) + (4A(\lambda r) + \\
 &\quad + 1 + \nu)r_{,\gamma} n_\alpha - 2(8A(\lambda r) + 2\lambda r K_1(\lambda r) + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n}] \\
 p_{\gamma 3}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(\lambda r) n_\gamma - A(\lambda r) r_{,\gamma} r_{,n}] \\
 p_{3\alpha}^* &= -\frac{(1 - \nu)}{8\pi} \left[\left(2\frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \ln(\lambda r) - 1 \right) n_\alpha + 2r_{,\alpha} r_{,n} \right] \\
 p_{33}^* &= -\frac{1}{2\pi r} r_{,n},
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

onde $r_{,n}$ é a derivada de r em relação a normal no ponto x , ou seja:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha} n_\alpha.
 \tag{5.39}$$

Além disso, têm-se as componentes dos esforços solicitantes, devido ao carregamento concentrado unitário nas direções γ e 3:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

i) Momentos:

$$M_{\alpha\beta}^{*(\gamma)} = -\frac{1}{4\pi r} [(4A(\lambda r) + 2\lambda r K_1(\lambda r) + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} + \delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta}) - 2(8A(\lambda r) + 2\lambda r K_1(\lambda r) + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A(\lambda r) + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma}]$$

$$M_{\alpha\beta}^{*(3)} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln(\lambda r) - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]. \quad (5.40)$$

ii) Esforços cortantes:

$$Q_{\beta}^{*(\gamma)} = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(\lambda r) \delta_{\gamma\beta} - A(\lambda r) r_{,\gamma} r_{,\beta}] \quad (5.41)$$

$$Q_{\beta}^{*(3)} = -\frac{1}{2\pi\lambda} r_{,\beta}.$$

Em função das considerações feitas no item 5.3.1 acerca das singularidades de $A(\lambda r)$ e $B(\lambda r)$ e devido ao comportamento das equações (5.38), pode-se concluir que o tensor de forças de superfície generalizadas p_{ij}^* apresenta singularidades de ordem $\ln(r)$ e r^{-1} , quando o ponto fonte ξ e o ponto campo x forem coincidentes ($r = 0$).

5.4 Equação Integral de Contorno

As equações (5.26) não podem ser empregadas enquanto não forem conhecidos os deslocamentos e as forças de superfície em todo o contorno Γ . Portanto, para resolver o problema, torna-se necessário escrever as equações (5.26) para um ponto ξ situado no contorno.

Para que as equações (5.26) representem deslocamentos no contorno da placa, utiliza-se a seguinte alternativa: ao domínio Ω da placa é adicionado um setor circular Ω_{ε} (Figura 5.2), com centro no ponto fonte ξ e de raio ε .

Neste caso, o contorno Γ é acrescido de um contorno em arco de círculo $\bar{\Gamma}_{\varepsilon}$ e suprimido da parcela Γ_{ε} . O ponto ξ passa a pertencer ao domínio e as equações (5.26) ficam:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

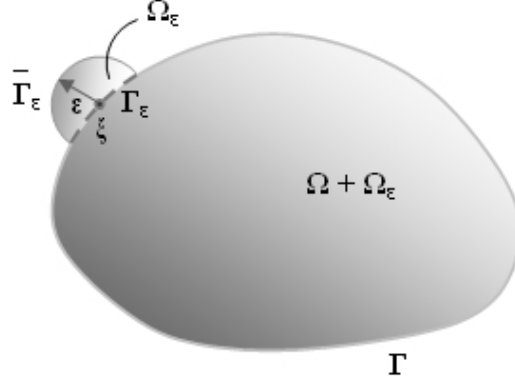


Figura 5.2: Placa com ponto ξ no contorno

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x). \quad (5.42)$$

Pode-se examinar separadamente o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ de cada integral das equações (5.42) [38, 40, 41].

Assim, a segunda integral em (5.42) pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x), \quad (5.43)$$

onde a primeira das integrais à direita pode ser representada por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right]. \quad (5.44)$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

A primeira integral do lado direito de (5.44) desaparece devido a condição de continuidade de $u_j(x)$ enquanto que a segunda integral, juntamente com o lado esquerdo de (5.42), fornece:

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x). \quad (5.45)$$

Voltando às equações (5.43), verifica-se que a segunda integral do lado direito deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfizer as condições de Hölder [3, 5].

As demais integrais das equações (5.42) não apresentam problemas, por possuírem singularidades mais fracas.

Assim, pode-se escrever, para um ponto ξ do contorno:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi) u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x), \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde a primeira integral do lado direito é no sentido do valor principal de Cauchy.

Os coeficientes $C_{ij}(\xi)$ definidos nas equações (5.45) dependem da geometria do contorno no ponto ξ . Se o contorno for suave $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$; Caso contrário, expressões fechadas para esses coeficientes podem ser obtidas nas referências [31, 32]. Para pontos no domínio, têm-se $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$ e para pontos externos ao corpo $C_{ij}(\xi) = 0$.

Em geral, o cálculo dos coeficientes $C_{ij}(\xi)$ é trabalhoso, o que faz com que em aplicações práticas eles sejam obtidos de forma indireta, através do emprego de movimentos de corpo rígido.

5.5 Transformação da Integral de Forças de Domínio em Integral de Contorno

Considerando-se as equações (5.46), observa-se que o efeito do carregamento transversal $q(x)$ é calculado através das integrais sobre o domínio Ω .

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

No presente trabalho, o carregamento transversal $q(x)$ é considerado constante ($q(x) = q = \text{constante}$), ou seja, $q(x)$ é um carregamento uniformemente distribuído. Assim, utilizando as transformações apresentadas por [22, 23], as integrais de carga distribuída podem ser transformadas em integrais sobre o contorno Γ :

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} q(x) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x). \quad (5.47)$$

Considerando as seguintes equações de Poisson, para qual v_i^* é uma solução:

$$v_{i, \alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x), \quad (5.48)$$

e aplicando o teorema da divergência nas equações(5.47), têm-se:

$$I_i(\xi) = q \int_{\Gamma} \left[v_{i, \alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x), \quad (5.49)$$

onde a normal n_{α} aponta para fora da região (Figura 5.3).

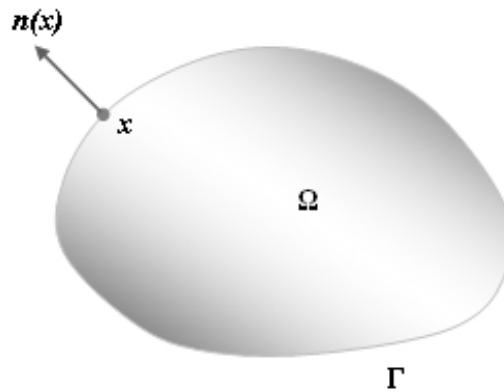


Figura 5.3: Direção da normal à região

Assim, as equações (5.46) podem ser escritas da seguinte forma, envolvendo apenas integrais de contorno:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] d\Gamma(x) + \\ + q \int_{\Gamma} \left[v_{i, \alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x). \quad (5.50)$$

5.6 Expressões Referentes às Forças de Domínio na Integral de Contorno

Conforme apresentado no item anterior, as expressões referentes às forças de domínio estão associadas a $u_{i\alpha}^*$ e $v_{i,\alpha}^*$.

Os tensores referentes aos deslocamentos generalizados $u_{i\alpha}^*$, já foram apresentados no item 5.3.1 e suas expressões são obtidas das equações (5.27).

Com relação a v_i^* , sabe-se do item 5.5 que elas devem satisfazer as equações (5.48). Funções que apresentam essas características são apresentadas em [22] e valem:

$$v_{\alpha}^* = \frac{1}{128\pi D\lambda^2} r_{,\alpha} \lambda^2 r^3 (4 \ln(\lambda r) - 5)$$

$$v_3^* = -\frac{r^2}{256\pi D\lambda^2 (1-\nu)} [(64 \ln(\lambda r) - 1) - (\lambda r)^2 (1-\nu) (2 \ln(\lambda r) - 3)].$$
(5.51)

As expressões das derivadas das funções (5.51) são dadas por [38, 40]:

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha\beta} (4 \ln(\lambda r) - 5) + 2 (4 \ln(\lambda r) - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta}]$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D\lambda^2 (1-\nu)} [32 (2 \ln(\lambda r) - 1) - (\lambda r)^2 (1-\nu) (4 \ln(\lambda r) - 5)].$$
(5.52)

5.7 Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos

5.7.1 Deslocamentos

Os deslocamentos para um ponto interno ξ qualquer, são obtidos através do emprego das equações (5.50) com $C_{ij} = \delta_{ij}$, ou seja:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\beta}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\beta}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x).
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

5.7.2 Esforços Solicitantes

Através da substituição das equações (5.53) e suas respectivas derivadas nas equações (5.4), pode-se obter as expressões para o cálculo dos esforços solicitantes (momentos e cortantes) nos pontos internos. Assim, têm-se as seguintes equações:

i) Momentos:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\
 & + q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta};
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

ii) Esforços cortantes:

$$\begin{aligned}
 Q_{\beta}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\
 & + q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x).
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Os tensores $u_{i\beta k}^*$, $p_{i\beta k}^*$ e $w_{i\beta}^*$ que multiplicam as forças de superfície $p_k(x)$, os deslocamentos $u_k(x)$ e a carga distribuída q , respectivamente, nas equações (5.54) e (5.55), apresentam as seguintes expressões [38]:

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

i) para u_{ik}^* :

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{1}{4\pi r} [(4A + 2\lambda r K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - 2(8A + \\
 &\quad + 2\lambda r K_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma}] \\
 u_{\alpha\beta 3}^* &= -\frac{(1 - \nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \ln(\lambda r) - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \\
 u_{3\beta\gamma}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\gamma\beta} - Ar_{,\gamma} r_{,\beta}] \\
 u_{3\beta 3}^* &= \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta};
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

ii) para p_{ik}^* :

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1 - \nu)}{4\pi r^2} \{ (4A + 2\lambda r K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\alpha} n_{\beta} + \delta_{\gamma\beta} n_{\alpha}) + \\
 &\quad + (4A + 1 + 3\nu) \delta_{\alpha\beta} n_{\gamma} - (16A + 6\lambda r K_1 + \lambda^2 r^2 K_0 + 2 - 2\nu) \\
 &\quad [(n_{\alpha} r_{,\beta} + n_{\beta} r_{,\alpha}) r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha}) r_{,n}] - 2(8A + 2\lambda r K_1 + \\
 &\quad + 1 + \nu) (\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + n_{\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta}) + 4(24A + 8\lambda r K_1 + \lambda^2 r^2 K_0 + \\
 &\quad + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \} \\
 p_{\alpha\beta 3}^* &= \frac{D(1 - \nu) \lambda^2}{4\pi r} [(2A + \lambda r K_1) (r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,\alpha} n_{\beta}) - 2(4A + \\
 &\quad + \lambda r K_1) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + 2A \delta_{\alpha\beta} r_{,n}] \\
 p_{3\beta\gamma}^* &= -\frac{D(1 - \nu) \lambda^2}{4\pi r} [(2A + \lambda r K_1) (\delta_{\gamma\beta} r_{,n} + r_{,\gamma} n_{\beta}) + 2A n_{\gamma} r_{,\beta} - \\
 &\quad - 2(4A + \lambda r K_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n}] \\
 p_{3\beta 3}^* &= \frac{D(1 - \nu) \lambda^2}{4\pi r^2} [(\lambda^2 r^2 B + 1) n_{\beta} - (\lambda^2 r^2 A + 2) r_{,\beta} r_{,n}];
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

iii) para $w_{i\beta}^*$:

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \left\{ (4 \ln(\lambda r) - 3) [(1 - \nu)(r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) + (1 + 3\nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,n}] + \right. \\ \left. + 4[(1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta}] r_{,n} \right\} - \frac{\nu}{(1 - \nu) \lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (5.58)$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} [(2 \ln(\lambda r) - 1) n_\beta + 2r_{,\beta} r_{,n}] - \frac{\nu}{(1 - \nu) \lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma.$$

5.8 Regiões Infinitas

Como foi mencionado no capítulo anterior, para problemas envolvendo placas infinitas é necessário a consideração de algumas hipóteses relativas ao comportamento das funções envolvidas em um contorno infinitamente distante do ponto fonte ξ .

Seja o raio ρ de uma esfera de superfície Γ_ρ , centrada em ξ que envolve as cavidades do problema externo (Figura 5.4). As equações (5.50) podem ser escritas para a região entre Γ e Γ_ρ , da seguinte forma:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x), \quad (5.59)$$

onde q é considerada nula.

Se for tirado o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, as equações (5.59) podem ser escritas em termos de integrais sobre Γ , apenas se as seguintes condições de regularidade forem atendidas:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} [p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) - u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x)] d\Gamma(x) = 0. \quad (5.60)$$

Para que as equações (5.60) sejam atendidas, é necessário portanto, analisar tanto o comportamento da solução fundamental como dos deslocamentos $u_j(x)$ e forças de superfície $p_j(x)$ no infinito.

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

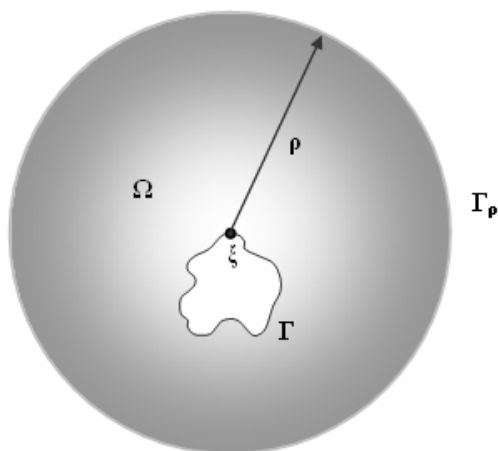


Figura 5.4: Região infinita com cavidade

Assim, conforme observado na figura 5.5, têm-se para um ponto x pertencente ao contorno Γ_ρ :

$$\begin{aligned}
 r &= \rho \\
 r_{,1} &= \frac{x_1(x) - x_1(\xi)}{\rho} = \cos \beta \\
 r_{,2} &= \frac{x_2(x) - x_2(\xi)}{\rho} = \text{sen} \beta
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$n_1 = \cos \beta$$

$$n_2 = \text{sen} \beta$$

$$r_{,n} = 1.$$

Para o contorno Γ_ρ , têm-se que as equações de A e B , dadas em (5.29), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A(\lambda r) &= -\frac{2}{\lambda^2 r^2} \\
 B(\lambda r) &= -\frac{1}{\lambda^2 r^2},
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

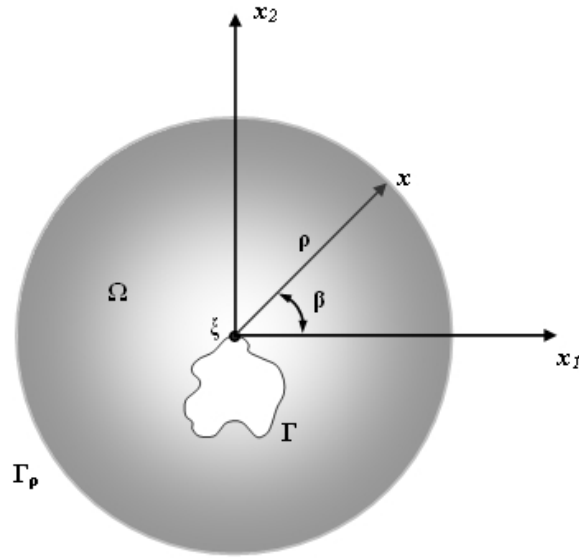


Figura 5.5: Coordenadas polares do ponto x

visto que, quando $\rho \rightarrow \infty$, têm-se:

$$\begin{aligned} K_0 &\rightarrow 0 \\ K_1 &\rightarrow 0 \\ \rho K_1 &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Substituindo as equações (5.61) e (5.62) nas equações dos tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* da solução fundamental (equações (5.27) e (5.38) respectivamente), obtêm-se:

i) Deslocamentos u_{ij}^* :

$$\begin{aligned} u_{11}^* &= -\frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + (1-\nu)(2 \ln(\lambda \rho) - 1) - 2 \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} - (1-\nu) \right) \cos^2 \beta \right] \\ u_{12}^* &= u_{21}^* = \frac{1}{4\pi D(1-\nu)} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} - (1-\nu) \right] \cos \beta \sin \beta \end{aligned} \tag{5.64}$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO
À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

$$\begin{aligned}
 u_{22}^* &= -\frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + (1-\nu)(2 \ln(\lambda\rho) - 1) - 2 \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} - (1-\nu) \right) \text{sen}^2 \beta \right] \\
 u_{13}^* &= -u_{31}^* = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln(\lambda\rho) - 1) \rho \cos \beta \\
 u_{23}^* &= -u_{32}^* = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln(\lambda\rho) - 1) \rho \text{sen} \beta \\
 u_{33}^* &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)\lambda^2 \rho^2 (\ln(\lambda\rho) - 1) - 8 \ln(\lambda\rho)].
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

ii) Forças de superfície p_{ij}^* :

$$\begin{aligned}
 p_{11}^* &= -\frac{1}{4\pi\rho} \left[1 + (2\cos^2\beta - 1) \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \right] \\
 p_{12}^* &= p_{21}^* = -\frac{1}{2\pi\rho} \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \cos \beta \text{sen} \beta \\
 p_{22}^* &= -\frac{1}{4\pi\rho} \left[1 + (2\text{sen}^2\beta - 1) \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \right] \\
 p_{13}^* &= \frac{1}{2\pi\rho^2} \cos \beta \\
 p_{23}^* &= \frac{1}{2\pi\rho^2} \text{sen} \beta \\
 p_{31}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left(2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \ln(\lambda\rho) + 1 \right) \cos \beta \\
 p_{32}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left(2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \ln(\lambda\rho) + 1 \right) \text{sen} \beta \\
 p_{33}^* &= -\frac{1}{2\pi\rho}.
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

Pelo princípio de Saint-Venant³ [42], as funções $u_j(x)$ e $p_j(x)$ devem apresentar o comportamento no infinito, no pior caso, igual ao da solução fundamental para uma carga concentrada na direção da resultante das forças aplicadas em Γ .

Para verificar a condição de regularidade, pode-se portanto, substituir $u_j(x)$ e $p_j(x)$ nas equações (5.60) pelos tensores da solução fundamental. Assim, para cada uma das três direções das resultantes, têm-se que:

$$u_j(x) = u_{kj}^*(\xi, x) \tag{5.66}$$

$$p_j(x) = p_{kj}^*(\xi, x).$$

Substituindo agora (5.66) em cada uma das equações dadas em (5.60), obtêm-se:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [u_{ij}^* p_{kj}^* - p_{ij}^* u_{kj}^*] \rho d\beta = 0, \tag{5.67}$$

onde:

$$d\Gamma = \rho d\beta. \tag{5.68}$$

Expandindo as equações (5.67), substituindo os tensores da solução fundamental (equações (5.27) e (5.38)) e integrando, verifica-se que as integrais de cada parcela são nulas, e conseqüentemente os limites também. Logo as condições de regularidade são atendidas.

Assim, as equações (5.67) são sempre satisfeitas, se na pior das hipóteses, $u_j(x)$ e $p_j(x)$ se comportarem como a solução fundamental no infinito. Neste caso, os problemas de cavidades em meio infinito podem ser representados por:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x). \tag{5.69}$$

³O princípio de Saint-Venant pode ser enunciado em linhas gerais da seguinte forma: Seja um corpo em equilíbrio sobre o qual atuam forças de superfície. Se a distribuição de forças agindo numa região pequena em relação as dimensões globais do corpo for substituída por uma outra distribuição estaticamente equivalente, os correspondentes estados tensionais em pontos suficientemente afastados da região carregada serão essencialmente os mesmos.

Capítulo 6

Implementação Computacional

6.1 Introdução

As equações apresentadas nos capítulos anteriores, representam as expressões básicas para a solução de problemas de associação espacial de lâminas, utilizando o método dos elementos de contorno.

Sendo muito difícil, e algumas vezes até impossível, a obtenção de soluções analíticas para a maioria dos problemas no campo da engenharia, foram desenvolvidos procedimentos numéricos (aproximados) para a solução de tais problemas. Os procedimentos empregados nesse trabalho [12, 43, 44] são descritos nos itens a seguir.

De forma geral, os contornos e as interfaces de cada lâmina são discretizadas em uma série de elementos, sobre os quais deslocamentos e forças de superfície são interpolados em função dos valores nodais.

As equações integrais de estado plano e de placas são escritas, de forma discretizada, para cada ponto fonte ξ aplicado nos pontos nodais funcionais, e as integrais sobre cada elemento são calculadas. Um sistema final de equações algébricas é obtido tratando cada lâmina individualmente como uma sub-região.

Após as transformações de coordenadas nas equações de cada sub-região, procede-se à compatibilização de deslocamentos e equilíbrio de forças entre elas. O sistema de equações pode então ser resolvido, obtendo as incógnitas nos contornos e interfaces.

Os valores dos deslocamentos, em qualquer ponto do domínio, podem então ser calculados em função dos deslocamentos obtidos nos contornos e interfaces.

Neste capítulo, são apresentados também os elementos empregados no pro-

grama, os procedimentos adotados nos casos de descontinuidade da normal ou das condições de contorno e são comentadas as integrações numéricas utilizadas.

6.2 Discretização e Elementos Empregados

Para a solução numérica das equações integrais apresentadas nos Capítulos 4 e 5, o contorno Γ é dividido em uma série de elementos Γ_j , conforme ilustrado na figura 6.1.

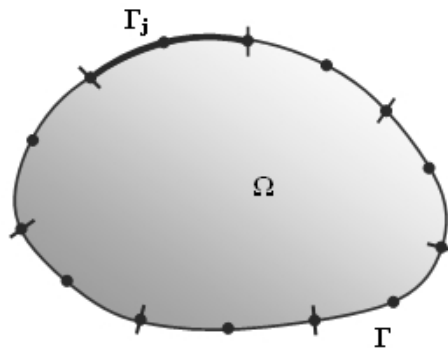


Figura 6.1: Discretização do contorno Γ em elementos

Os valores das incógnitas e das coordenadas em um ponto qualquer do elemento são obtidos interpolando os valores nodais. Para isso, emprega-se funções de interpolação e funções de forma de ordem quadrática, onde são necessários três pontos para a definição de cada elemento.

Assim, os elementos empregados são elementos quadráticos isoparamétricos, que permitem uma melhor representação da geometria do sólido e da variação das incógnitas, podendo ser contínuos ou descontínuos.

6.2.1 Elemento Quadrático Isoparamétrico Contínuo

Consiste em um elemento formado por três pontos nodais, situados sobre uma curva, sendo um em cada uma das extremidades e o terceiro localizado entre os dois (Figura 6.2).

No elemento contínuo, os nós geométricos extremos coincidem com os nós funcionais, assegurando a continuidade das funções consideradas entre os elementos

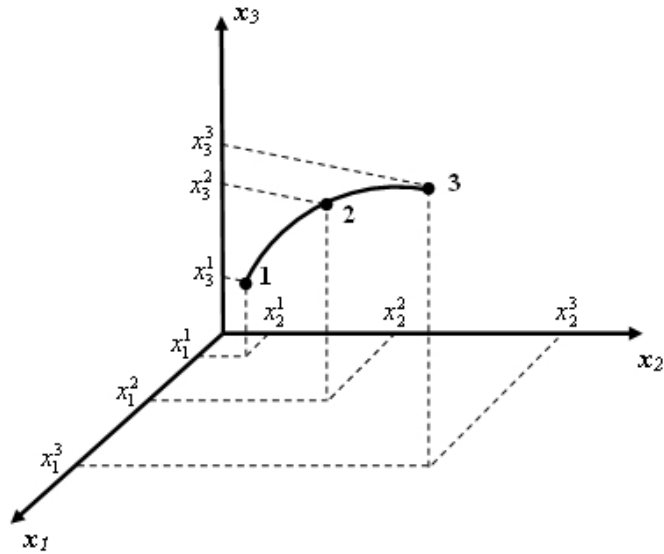


Figura 6.2: Elemento quadrático isoparamétrico contínuo

adjacentes.

As funções de interpolação¹, dadas em relação a coordenada adimensional η (Figura 6.3), são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2}\eta(\eta - 1) \\
 N_2 &= (1 - \eta)(1 + \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{2}\eta(\eta + 1),
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

apresentando valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos demais.

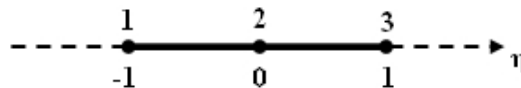


Figura 6.3: Elemento quadrático isoparamétrico contínuo em relação à coordenada adimensional η

¹Como as funções de interpolação e de forma são as mesmas, doravante só a primeira será empregada.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Um ponto qualquer do elemento Γ_j tem suas coordenadas (x_1, x_2, x_3) calculadas em função das coordenadas nodais, ou seja:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^1 N_1 + x_1^2 N_2 + x_1^3 N_3 \\ x_2 &= x_2^1 N_1 + x_2^2 N_2 + x_2^3 N_3 \\ x_3 &= x_3^1 N_1 + x_3^2 N_2 + x_3^3 N_3, \end{aligned} \tag{6.2}$$

ou ainda em forma matricial:

$$\mathbf{x}^j = \mathbf{N} \mathbf{x}^n, \tag{6.3}$$

sendo:

$$\mathbf{x}^j = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^n = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \\ x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{Bmatrix}.$$

Para um ponto qualquer do elemento Γ_j , os deslocamentos e as forças de superfície são interpoladas em função dos valores nodais, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^j &= \mathbf{N} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p}^j &= \mathbf{N} \mathbf{p}^n, \end{aligned} \tag{6.4}$$

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

onde:

i) para elasticidade plana:

$$\mathbf{u}^j = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^j = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^n = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^n = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}.$$

ii) para placas:

$$\mathbf{u}^j = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^j = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ Q \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^n = \begin{Bmatrix} \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \\ w^1 \\ \phi_1^2 \\ \phi_2^2 \\ w^2 \\ \phi_1^3 \\ \phi_2^3 \\ w^3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^n = \begin{Bmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ Q^1 \\ M_1^2 \\ M_2^2 \\ Q^2 \\ M_1^3 \\ M_2^3 \\ Q^3 \end{Bmatrix}$$

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix},$$

sendo²:

$$M_\alpha = M_{\alpha\beta}\eta_\beta \tag{6.5}$$

$$Q = Q_\beta\eta_\beta.$$

Assim, de forma genérica, tem-se para uma lâmina sujeita aos efeitos simultâneos de extensão e de flexão:

$$\mathbf{u}^j = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^j = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ Q \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^n = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \\ w^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \phi_1^2 \\ \phi_2^2 \\ w^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ \phi_1^3 \\ \phi_2^3 \\ w^3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^n = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ M_1^1 \\ M_2^1 \\ Q^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ M_1^2 \\ M_2^2 \\ Q^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ M_1^3 \\ M_2^3 \\ Q^3 \end{Bmatrix}$$

² η_β são os cossenos diretores da normal exterior ao contorno.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

Como as funções de interpolação são normalmente expressas em termos da coordenada adimensional η , deve-se escrever $d\Gamma$ em relação a esse sistema de coordenadas intrínsecas:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta, \quad (6.6)$$

onde o jacobiano de transformação $|\mathbf{J}|$ é dado por:

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\eta}\right)^2}. \quad (6.7)$$

6.2.2 Elemento Quadrático Isoparamétrico Descontínuo

Nos elementos descontínuos não é exigido que os nós geométricos extremos coincidam com os nós funcionais (Figura 6.4).

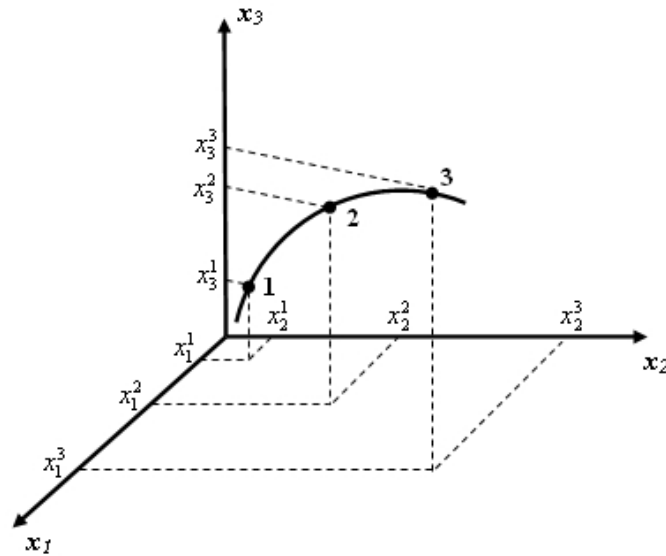


Figura 6.4: Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesse tipo de elemento, assim como no elemento quadrático isoparamétrico contínuo, as funções de interpolação possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos demais. Contudo, como o primeiro e o último nós não estão mais situados nas extremidades do elemento (Figura 6.5), não haverá continuidade das funções envolvidas nessas extremidades.

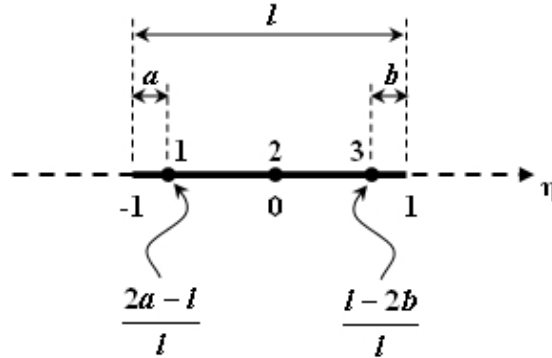


Figura 6.5: Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo em relação à coordenada adimensional η

As funções de interpolação para este tipo de elemento são dadas por³:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{l\eta(l\eta - l + 2b)}{2(l - a - b)(l - 2a)} \\
 N_2 &= \frac{l\eta(2(a - b) - l\eta)}{(l - 2a)(l - 2b)} + 1 \\
 N_3 &= \frac{l\eta(l\eta + l - 2a)}{2(l - a - b)(l - 2b)},
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

onde:

- $l \rightarrow$ comprimento total do elemento;
- $a \rightarrow$ afastamento do nó inicial do elemento;
- $b \rightarrow$ afastamento do nó final do elemento.

Para o caso em que apenas um dos nós geométricos coincide com o nó funcional ($a = 0$ e $b \neq 0$ ou $a \neq 0$ e $b = 0$), têm-se os elementos semi-contínuos ou de transição, onde pode-se utilizar as equações (6.8), com $a = 0$ ou $b = 0$, dependendo do nó em que ocorre a descontinuidade.

³Para o caso em que se tem a e b iguais a zero, as equações (6.8) recaem nas equações (6.1).

6.3 Descontinuidade da Normal ou da Condição de Contorno

Quando o contorno não apresenta continuidade da normal, a continuidade das forças de superfície não é assegurada, podendo-se ter direções da normal diferentes para um mesmo nó que pertença a dois elementos adjacentes (Figura 6.6)

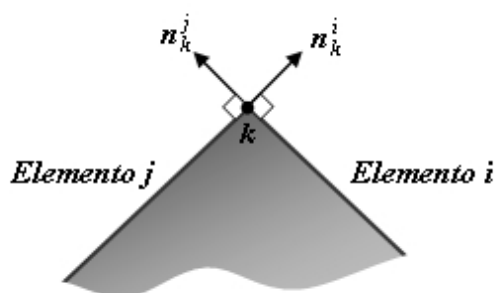


Figura 6.6: Descontinuidade da normal

Uma alternativa para resolver esse problema é o emprego do nó duplo e do elemento descontínuo.

Cabe ressaltar que o procedimento acima também pode ser empregado para o caso em que existe continuidade da normal, porém as condições de contorno são descontínuas.

6.3.1 Emprego do Nó Duplo

O nó duplo consiste em dois nós de contorno, com exatamente as mesmas coordenadas geométricas e sem nenhum elemento entre eles [31, 45] (Figura 6.7).

O nó duplo é empregado quando, para uma dada direção do ponto de inserção de dois elementos, no qual existe descontinuidade da normal ou da condição de contorno, têm-se as forças de superfície conhecidas nos dois elementos adjacentes ou, então, o deslocamento conhecido num elemento e a força de superfície conhecida no outro.

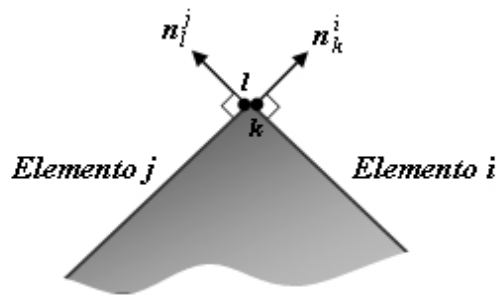


Figura 6.7: Nó duplo

6.3.2 Emprego do Elemento Descontínuo

Quando, em uma determinada direção de um nó onde haja descontinuidade da normal, as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos dois elementos adjacentes, o emprego do nó duplo não resolve o problema.

Isso ocorre porque, para esse nó, tem-se um número de equações independentes menor que o número de incógnitas, visto que os deslocamentos são contínuos no ponto, mas as forças de superfície podem não ser.

Assim, para a solução do problema, utiliza-se o elemento descontínuo, onde os dois pontos nodais ficam adequadamente afastados (Figura 6.8), o que faz com que se tenha equações independentes no sistema para cada um dos dois nós.

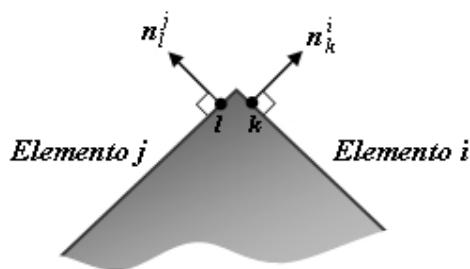


Figura 6.8: Elemento descontínuo

6.4 Equações Integrais Discretizadas

As equações integrais para a elasticidade plana (apresentadas no Capítulo 4) e para placas (apresentadas no Capítulo 5) são escritas de forma discretizadas para cada ponto funcional ξ do contorno Γ .

A forma discretizada das equações integrais será apresentada inicialmente para o estado plano e depois para a flexão de placas, independentemente, pois as equações estão totalmente desacopladas.

As integrais são calculadas sobre cada elemento do contorno, obtendo-se, conforme será apresentado adiante, um sistema de $6n$ equações algébricas no sistema global, que envolvem $6n$ valores nodais de deslocamentos e $6n$ valores nodais de forças de superfície, sendo n o número de nós funcionais.

As condições de contorno são impostas e, conseqüentemente, $6n$ valores nodais (forças de superfície ou deslocamentos) são prescritos. O sistema pode, então, ser resolvido de maneira usual para a obtenção dos valores nodais restantes (incógnitas).

6.4.1 Equações Integrais Discretizadas para Elasticidade Plana

Para a solução numérica das equações (4.20)⁴, com as condições de contorno dadas em (2.15) e (2.17), têm-se as seguintes equações discretizadas para a elasticidade plana, escritas para um ponto nodal funcional ξ_i em forma matricial⁵:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i^{(E)} = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_{ij}^{*(E)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}_j^{(E)} - \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ij}^{*(E)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}_j^{(E)}, \quad (6.9)$$

sendo⁶:

$\mathbf{C}_i = \mathbf{C}(\xi_i) \rightarrow$ Matriz dos coeficientes que aparecem nas equações (4.20);

$\mathbf{u}_i^{(E)} = \mathbf{u}^{(E)}(\xi_i) \rightarrow$ Vetor deslocamento do ponto fonte ξ_i ;

$\mathbf{N} \rightarrow$ Matriz que contém as funções de interpolação para a elasticidade plana (dado no item 6.2.1);

⁴Componentes de forças de volume são nulas ($b_j = 0$).

⁵Convenção de somatório não é mais implícita.

⁶O índice (E) faz referência à elasticidade plana.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$\mathbf{U}_{ij}^{*(E)} = \mathbf{U}^{*(E)}(\xi_i, x_j) \rightarrow$ Matriz que contém as componentes do tensor solução fundamental para os deslocamentos;

$\mathbf{P}_{ij}^{*(E)} = \mathbf{P}^{*(E)}(\xi_i, x_j) \rightarrow$ Matriz que contém as componentes do tensor solução fundamental para as forças de superfície;

$\mathbf{u}_j^{(E)} \rightarrow$ Vetor que contém as componentes dos deslocamentos relativos aos pontos nodais funcionais do elemento Γ_j ;

$\mathbf{p}_j^{(E)} \rightarrow$ Vetor que contém as componentes das forças de superfície relativos aos pontos nodais funcionais do elemento Γ_j ;

$NE \rightarrow$ Número de elementos.

Chamando:

$$\mathbf{G}_{ij}^{(E)} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_{ij}^{*(E)} \mathbf{N} d\Gamma \quad (6.10)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(E)} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ij}^{*(E)} \mathbf{N} d\Gamma, \quad (6.11)$$

têm-se que as equações (6.9) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i^{(E)} = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}_{ij}^{(E)} \mathbf{p}_j^{(E)} - \sum_{j=1}^{NE} \hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(E)} \mathbf{u}_j^{(E)}, \quad (6.12)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^{NE} \mathbf{H}_{ij}^{(E)} \mathbf{u}_j^{(E)} = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}_{ij}^{(E)} \mathbf{p}_j^{(E)}, \quad (6.13)$$

com:

$$\mathbf{H}_{ij}^{(E)} = \hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(E)} \quad \text{para } i \neq j \quad (6.14)$$

$$\mathbf{H}_{ij}^{(E)} = \hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(E)} + \mathbf{C}_i \quad \text{para } i = j.$$

6.4.2 Equações Integrais Discretizadas para Placas

Para placas, a solução numérica das equações (5.50), com as condições de contorno (5.1), apresenta a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i^{(P)} = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_{ij}^{*(P)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}_j^{(P)} - \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ij}^{*(P)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}_j^{(P)} + \sum_{j=1}^{NE} \left(q \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right) \quad (6.15)$$

sendo⁷:

$\mathbf{C}_i = \mathbf{C}(\xi_i) \rightarrow$ Matriz dos coeficientes que aparecem nas equações (5.50);

$\mathbf{u}_i^{(P)} = \mathbf{u}^{(P)}(\xi_i) \rightarrow$ Vetor deslocamento do ponto fonte ξ_i ;

$\mathbf{N} \rightarrow$ Matriz que contém as funções de interpolação para placas (dado no item 6.2.1);

$\mathbf{U}_{ij}^{*(P)} = \mathbf{U}^{*(P)}(\xi_i, x_j) \rightarrow$ Matriz que contém as componentes do tensor solução fundamental para os deslocamentos;

$\mathbf{P}_{ij}^{*(P)} = \mathbf{P}^{*(P)}(\xi_i, x_j) \rightarrow$ Matriz que contém as componentes do tensor solução fundamental para as forças de superfície;

$\mathbf{u}_j^{(P)} \rightarrow$ Vetor que contém as componentes dos deslocamentos relativos aos pontos nodais funcionais do elemento Γ_j ;

$\mathbf{p}_j^{(P)} \rightarrow$ Vetor que contém as componentes das forças de superfície relativos aos pontos nodais funcionais do elemento Γ_j ;

$\mathbf{s}_i^* \rightarrow$ Vetor cujas componentes são dadas por:

$$s_i^* = \left(v_{i,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^* \right) n_\alpha. \quad (6.16)$$

Empregando a definição:

$$\mathbf{G}_{ij}^{(P)} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_{ij}^{*(P)} \mathbf{N} d\Gamma \quad (6.17)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(P)} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ij}^{*(P)} \mathbf{N} d\Gamma \quad (6.18)$$

$$\mathbf{b}_{ij}^{(P)} = q \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma, \quad (6.19)$$

têm-se que as equações (6.15) podem ser reescritas na forma:

⁷O índice (P) faz referência à placa.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i^{(P)} = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}_{ij}^{(P)} \mathbf{p}_j^{(P)} - \sum_{j=1}^{NE} \hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(P)} \mathbf{u}_j^{(P)} + \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{b}_{ij}^{(P)}, \quad (6.20)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^{NE} \mathbf{H}_{ij}^{(P)} \mathbf{u}_j^{(P)} = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}_{ij}^{(P)} \mathbf{p}_j^{(P)} + \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{b}_{ij}^{(P)}, \quad (6.21)$$

com:

$$\mathbf{H}_{ij}^{(P)} = \hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(P)} \quad \text{para } i \neq j \quad (6.22)$$

$$\mathbf{H}_{ij}^{(P)} = \hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(P)} + \mathbf{C}_i \quad \text{para } i = j.$$

6.4.3 Matrizes dos Coeficientes de Influência do Elemento

A partir do exposto nos itens 6.4.1 e 6.4.2, tem-se que para uma estrutura submetida aos efeitos simultâneos de extensão e flexão, as matrizes dos coeficientes de influência do elemento, \mathbf{H}_{ij} e \mathbf{G}_{ij} , podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{H}_{ij}^{(E)} & \mathbf{0} & {}^2\mathbf{H}_{ij}^{(E)} & \mathbf{0} & {}^3\mathbf{H}_{ij}^{(E)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^1\mathbf{H}_{ij}^{(P)} & \mathbf{0} & {}^2\mathbf{H}_{ij}^{(P)} & \mathbf{0} & {}^3\mathbf{H}_{ij}^{(P)} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{G}_{ij}^{(E)} & \mathbf{0} & {}^2\mathbf{G}_{ij}^{(E)} & \mathbf{0} & {}^3\mathbf{G}_{ij}^{(E)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^1\mathbf{G}_{ij}^{(P)} & \mathbf{0} & {}^2\mathbf{G}_{ij}^{(P)} & \mathbf{0} & {}^3\mathbf{G}_{ij}^{(P)} \end{bmatrix},$$

sendo⁸:

$$\begin{aligned} {}^m\mathbf{H}_{ij}^{(E)} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}^{*(E)}(\xi_i, x_j) N_m d\Gamma \\ {}^m\mathbf{G}_{ij}^{(E)} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^{*(E)}(\xi_i, x_j) N_m d\Gamma \\ {}^m\mathbf{H}_{ij}^{(P)} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}^{*(P)}(\xi_i, x_j) N_m d\Gamma \\ {}^m\mathbf{G}_{ij}^{(P)} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^{*(P)}(\xi_i, x_j) N_m d\Gamma, \end{aligned} \quad (6.24)$$

⁸O índice m faz referência ao nó.

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{ij}^{(E)} &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{H}_{ij}^{(E)} & {}^2\mathbf{H}_{ij}^{(E)} & {}^3\mathbf{H}_{ij}^{(E)} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}_{ij}^{(E)} &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{G}_{ij}^{(E)} & {}^2\mathbf{G}_{ij}^{(E)} & {}^3\mathbf{G}_{ij}^{(E)} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_{ij}^{(P)} &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{H}_{ij}^{(P)} & {}^2\mathbf{H}_{ij}^{(P)} & {}^3\mathbf{H}_{ij}^{(P)} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G}_{ij}^{(P)} &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{G}_{ij}^{(P)} & {}^2\mathbf{G}_{ij}^{(P)} & {}^3\mathbf{G}_{ij}^{(P)} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

6.4.4 Montagem do Sistema Global de Equações

Para a dedução e conseqüente aplicação das equações integrais de flexão de placas e da elasticidade plana, empregou-se um sistema de referência local⁹, conforme apresentado na figura (6.9).

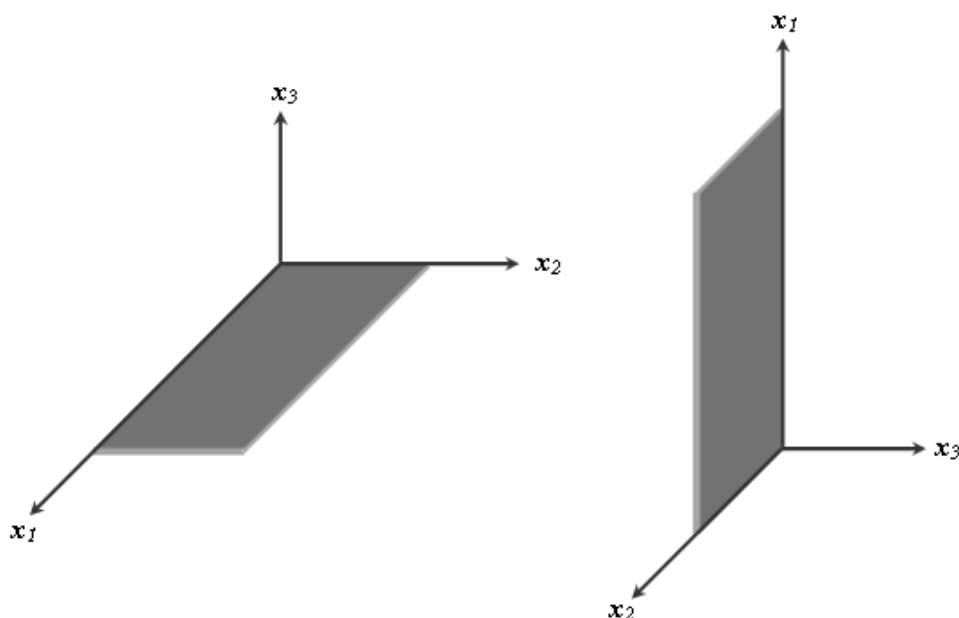


Figura 6.9: Sistema de referência local de cada lâmina

⁹O eixo x_1 é sempre referente ao comprimento da estrutura, enquanto que o eixo x_3 encontra-se sempre perpendicular a lâmina.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Por esta razão, torna-se necessário o emprego de matrizes de transformação de coordenadas, para que a mudança no sistema de referência possa ser realizada.

Assim, partindo de um sistema global¹⁰ de coordenadas \bar{x}_i , obtém-se um sistema local x_i através do emprego de uma matriz de transformação de coordenadas \mathbf{R} e de um vetor translação \mathbf{t} , ou seja:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{t}, \quad (6.26)$$

onde:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{Bmatrix} \text{ com } \lambda_{ij} = \cos \alpha_{ij},$$

sendo α_{ij} o ângulo entre os eixos globais \bar{x}_j e os locais x_i .

Aplicando as equações (6.9) e (6.15) aos n nós funcionais, obtêm-se $5n$ equações lineares, contendo $5n$ incógnitas, entre elas deslocamentos e forças de superfície. Das $5n$ variáveis incógnitas, $2n$ vem do problema de estado plano de tensão e $3n$ do problema de flexão de placas. Cabe ressaltar que os estados de flexão e de extensão estão totalmente desacoplados.

Para que o sistema final de equações possa ser obtido e conseqüentemente resolvido, torna-se necessário que as equações obtidas para cada lâmina estejam em um mesmo sistema de referência.

As matrizes dos coeficientes de influência de cada elemento \mathbf{H}_{ij} e \mathbf{G}_{ij} , indicadas no item 6.4.3, são obtidas no sistema de referência local. Os deslocamentos e forças

¹⁰As grandezas com barra passarão a designar o sistema de referência global.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

de superfície podem ser escritos do sistema local para o global através do emprego de uma matriz \mathbf{M} de transformação de coordenadas, definida por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Por conseguinte têm-se:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}_j \quad (6.28)$$

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{M}\bar{\mathbf{p}}_j.$$

As equações (6.13) e (6.21) podem ser acopladas e escritas em termos das variáveis no sistema global como:

$$\sum_{j=1}^{NE} \mathbf{H}_{ij} \mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}_{ij} \mathbf{M}\bar{\mathbf{p}}_j + \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{b}_{ij}, \quad (6.29)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^{NE} \bar{\mathbf{H}}_{ij} \bar{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=1}^{NE} \bar{\mathbf{G}}_{ij} \bar{\mathbf{p}}_j + \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{b}_{ij}, \quad (6.30)$$

com:

$$\bar{\mathbf{H}}_{ij} = \mathbf{H}_{ij} \mathbf{M} \quad (6.31)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{ij} = \mathbf{G}_{ij} \mathbf{M}.$$

Quando o sistema de referência é transformado do local para o global, um novo grau de liberdade ϕ_3 (ou M_3) é adicionado ao sistema de equações.

Como as teorias apresentadas comportam no máximo 5 graus de liberdade, 2 graus da teoria da elasticidade plana e 3 da teoria de flexão de placas, torna-se necessário a adição de uma nova equação. Assim, emprega-se a equação que o momento M_3 é igual a zero no sistema de referência local, ou seja:

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$$M_3 = \lambda_{31}\bar{M}_1 + \lambda_{32}\bar{M}_2 + \lambda_{33}\bar{M}_3 = 0 \quad (6.32)$$

sendo λ_{3i} o cosseno do ângulo formado entre os eixos \bar{x}_i e x_3 .

No presente trabalho o eixo longitudinal local x_1 é coincidente com o eixo global \bar{x}_1 para todas as lâminas, o que faz com que o cosseno λ_{32} seja sempre igual a zero. Logo a equação (6.32) pode ser reescrita na forma:

$$M_3 = \lambda_{31}\bar{M}_1 + \lambda_{33}\bar{M}_3 = 0 \quad (6.33)$$

Para análise das interfaces de uma associação de lâminas (Figura 6.10), surgem mais incógnitas. Admitindo que as lâminas da figura 6.10 possuam $(n+m)$ nós, onde n nós encontram-se no contorno e m nós encontram-se na interface, tem-se um total de $5(n+2m)$ equações para $10n$ incógnitas no contorno e $20m$ incógnitas na interface.

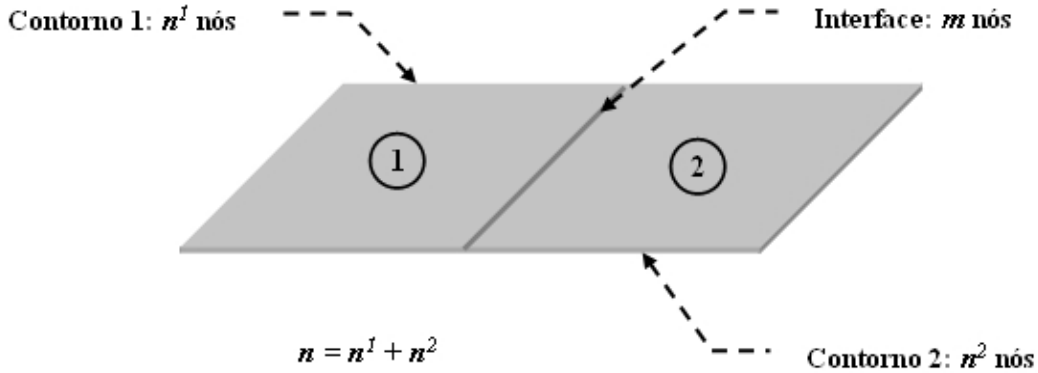


Figura 6.10: Associação de duas lâminas

Aplicando a matriz de transformação \mathbf{M} , da associação de duas lâminas resultarão $6(n+2m)$ equações, das quais $5(n+2m)$ são obtidas a partir do método e $(n+2m)$ vêm da condição de restrição (6.33). Quanto às incógnitas, têm-se $6n$ no contorno (já incluindo $6n$ condições de contorno), acrescidas de $24m$ na interface (12 incógnitas de cada lâmina). As restantes $12m$ condições necessárias para a solução do problema vêm [46]:

i) da compatibilidade de deslocamentos ($\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\phi}_3, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ e \bar{w}) no sistema de referência global para cada nó da interface, resultando $6m$ condições:

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1^1 &= \bar{u}_1^2 \\
 \bar{u}_2^1 &= \bar{u}_2^2 \\
 \bar{\phi}_3^1 &= \bar{\phi}_3^2 \\
 \bar{\phi}_1^1 &= \bar{\phi}_1^2 \\
 \bar{\phi}_2^1 &= \bar{\phi}_2^2 \\
 \bar{w}^1 &= \bar{w}^2,
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

onde os índices superiores referem-se ao número da lâmina.

ii) do equilíbrio de forças (\bar{p}_1 , \bar{p}_2 , \bar{M}_3 , \bar{M}_1 , \bar{M}_2 e \bar{Q}) no sistema de referência global para cada nó da interface, resultando $6m$ condições:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1^1 + \bar{p}_1^2 &= 0 \\
 \bar{p}_2^1 + \bar{p}_2^2 &= 0 \\
 \bar{M}_3^1 + \bar{M}_3^2 &= 0 \\
 \bar{M}_1^1 + \bar{M}_1^2 &= 0 \\
 \bar{M}_2^1 + \bar{M}_2^2 &= 0 \\
 \bar{Q}^1 + \bar{Q}^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Para o caso, onde mais de duas lâminas convergem para a mesma interface, por exemplo 4 lâminas apresentando uma mesma interface (Figura 6.11), têm-se que as equações (6.34) e (6.35) podem ser reescritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1^1 &= \bar{u}_1^2 = \bar{u}_1^3 = \bar{u}_1^4 \\
 \bar{u}_2^1 &= \bar{u}_2^2 = \bar{u}_2^3 = \bar{u}_2^4 \\
 \bar{\phi}_3^1 &= \bar{\phi}_3^2 = \bar{\phi}_3^3 = \bar{\phi}_3^4 \\
 \bar{\phi}_1^1 &= \bar{\phi}_1^2 = \bar{\phi}_1^3 = \bar{\phi}_1^4 \\
 \bar{\phi}_2^1 &= \bar{\phi}_2^2 = \bar{\phi}_2^3 = \bar{\phi}_2^4 \\
 \bar{w}^1 &= \bar{w}^2 = \bar{w}^3 = \bar{w}^4;
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1^1 + \bar{p}_1^2 + \bar{p}_1^3 + \bar{p}_1^4 &= 0 \\
 \bar{p}_2^1 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_2^3 + \bar{p}_2^4 &= 0 \\
 \bar{M}_3^1 + \bar{M}_3^2 + \bar{M}_3^3 + \bar{M}_3^4 &= 0 \\
 \bar{M}_1^1 + \bar{M}_1^2 + \bar{M}_1^3 + \bar{M}_1^4 &= 0 \\
 \bar{M}_2^1 + \bar{M}_2^2 + \bar{M}_2^3 + \bar{M}_2^4 &= 0 \\
 \bar{Q}^1 + \bar{Q}^2 + \bar{Q}^3 + \bar{Q}^4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

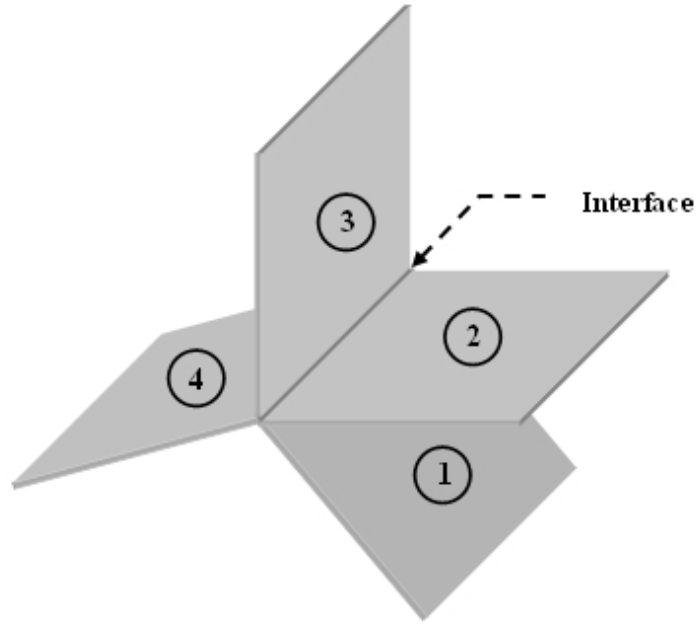


Figura 6.11: Associação quatro lâminas em uma mesma interface

O que foi descrito, pode ser expresso matricialmente:

i) Aplicando as equações integrais (6.9) e (6.15) para todos os pontos nodais funcionais ξ_i do contorno, e aplicando a matriz de transformação de coordenadas \mathbf{M} , obtém-se um sistema com um número total de equações igual a 6 vezes o número de nós, com a seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{b}, \quad (6.38)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$ representam os deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, dos pontos nodais funcionais, sendo organizadas em cada nó da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{u}}_j = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{w} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{p}}_j = \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}, \quad (6.39)$$

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

e $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{G}}$ são as matrizes dos coeficientes de influência da estrutura. O vetor \mathbf{b} representa os valores prescritos do carregamento uniformemente distribuído da placa.

O sistema dado em (6.38) pode ser reordenado, colocando todas as incógnitas em um único vetor \mathbf{y} e todos os valores prescritos multiplicados pelos respectivos coeficientes de $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{G}}$, juntamente com a parcela referente à carga distribuída, em um outro vetor, que será denominado de \mathbf{f} .

Conseqüentemente, obtém-se um novo sistema de equações com a seguinte configuração:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad (6.40)$$

sendo \mathbf{A} a matriz dos coeficientes que multiplica as incógnitas.

Esse sistema é então resolvido, sendo obtidos os valores dos deslocamentos e forças de superfície incógnitos.

ii) Para a análise da associação de duas lâminas, o sistema de equações do conjunto tem o arranjo final dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1^1 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{H}}_I^1 & -\bar{\mathbf{G}}_I^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{H}}_2^2 & \bar{\mathbf{H}}_I^2 & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{G}}_I^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^1 \\ \bar{\mathbf{u}}^2 \\ \bar{\mathbf{u}}_I \\ \bar{\mathbf{p}}_I^1 \\ \bar{\mathbf{p}}_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_1^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{G}}_2^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^1 \\ \bar{\mathbf{p}}^2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (6.41)$$

onde as condições de compatibilidade de deslocamentos, apresentadas nas equações (6.34), e de equilíbrio de forças, apresentadas nas equações (6.35), já foram aplicadas. Além disso, têm-se que:

- $\bar{\mathbf{u}}^1$ e $\bar{\mathbf{u}}^2$ são os deslocamentos no contorno das sub-regiões 1 e 2, respectivamente;
- $\bar{\mathbf{p}}^1$ e $\bar{\mathbf{p}}^2$ são as forças de superfície no contorno das sub-regiões 1 e 2, respectivamente;
- $\bar{\mathbf{u}}_I$, $\bar{\mathbf{p}}_I^1$ e $\bar{\mathbf{p}}_I^2$ são os deslocamentos e forças de superfície na interface;
- $\bar{\mathbf{H}}_i^k$ e $\bar{\mathbf{G}}_i^k$ são as sub-matrizes de coeficientes de influência;
- \mathbf{I} é a matriz identidade.

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Conhecendo-se os deslocamentos e as forças correspondentes, procede-se a troca de colunas e variáveis para a obtenção de um sistema de equações, análogo a (6.40), o que permite a determinação das incógnitas.

No programa computacional desenvolvido, utiliza-se a resolução do sistema de equações pelo método de Gauss e a matriz \mathbf{A} é montada diretamente, sem chegar a montar as matrizes $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{G}}$ globais.

Após a solução do problema no contorno, os deslocamentos em qualquer ponto interno podem ser calculados a partir dos valores dos deslocamentos obtidos no contorno.

6.4.5 Cálculo dos Deslocamentos nos Pontos Internos

Determinados todos os deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais funcionais do contorno, os deslocamentos em qualquer ponto ξ_i , do domínio Ω , podem então ser obtidos:

i) para elasticidade plana:

Utilizam-se as equações (4.7)¹¹ discretizadas ao longo do contorno:

$$\mathbf{u}_i^{(E)} = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_{ij}^{*(E)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}_j^{(E)} - \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ij}^{*(E)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}_j^{(E)} \quad (6.42)$$

ii) para placas:

Empregam-se as equações (5.53) discretizadas ao longo do contorno:

$$\mathbf{u}_i^{(P)} = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_{ij}^{*(P)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}_j^{(P)} - \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ij}^{*(P)} \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}_j^{(P)} + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} q \mathbf{s}_{ij}^* d\Gamma \right) \quad (6.43)$$

¹¹Componentes de forças de volume são nulas ($b_j = 0$).

6.5 Integrais Singulares

Quando o ponto fonte ξ e o ponto campo x estiverem situados no mesmo elemento ($r = 0$), os tensores da solução fundamental u_{ij}^* e p_{ij}^* apresentam singularidades de ordem $\ln r$ e r^{-1} (ver itens 4.3 e 5.3), e conseqüentemente as matrizes $\bar{\mathbf{G}}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ e o vetor \mathbf{b} (no caso de placas) também serão singulares.

Devido ao fato de as funções de interpolação apresentarem valor unitário no ponto nodal considerado, e zero nos demais pontos nodais de elemento, as singularidades só existirão quando o ponto fonte ξ e o ponto campo x forem coincidentes.

Assim, as singularidades nas integrais estarão presentes nas submatrizes da diagonal de $\bar{\mathbf{G}}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ e, ainda, no vetor \mathbf{b} . Procedimentos para contornar esses casos são descritos nos itens subseqüentes.

6.5.1 Submatrizes da Diagonal de $\bar{\mathbf{G}}$

As submatrizes da diagonal de $\bar{\mathbf{G}}$, que envolvem integrais dos tensores u_{ij}^* , possuem singularidades de ordem logarítmica ($\ln r$).

Uma forma de resolver o problema é utilizar uma transformação quadrática envolvendo a coordenada adimensional η e a coordenada γ dos pontos de integração [38, 47, 48]. Este procedimento é descrito a seguir.

Considere a integral:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta, \quad (6.44)$$

onde $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$.

Adota-se a seguinte relação quadrática:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c, \quad (6.45)$$

para a qual são impostas as condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta}{d\gamma} \Big|_{\bar{\eta}} = 0 \\ \eta(1) = 1 \\ \eta(-1) = -1. \end{array} \right. \quad (6.46)$$

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Resolvendo a equação (6.45) para γ e impondo as condições (6.46), obtêm-se:

$$\begin{aligned} a &= -c \\ b &= 1 \\ c &= \frac{\bar{\eta} \pm \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Observando que $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$, conclui-se de (6.47) que os coeficientes a e c somente serão reais se $|\bar{\eta}| = 1$. Logo, têm-se:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\bar{\eta}}{2} \\ b &= 1 \\ c &= \frac{\bar{\eta}}{2}. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Substituindo os valores dos coeficientes (6.48) em (6.45), obtêm-se:

$$\eta(\gamma) = (1 - \gamma^2) \frac{\bar{\eta}}{2} + \gamma. \tag{6.49}$$

Da equação (6.49), tem-se:

$$d\eta = (1 - \bar{\eta}\gamma) d\gamma. \tag{6.50}$$

Portanto, a equação (6.44) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[(1 - \gamma^2) \frac{\bar{\eta}}{2} + \gamma \right] (1 - \bar{\eta}\gamma) d\gamma, \tag{6.51}$$

sendo válido para $\bar{\eta} = -1$ e $\bar{\eta} = 1$.

Quando o ponto singular $\bar{\eta}$ estiver situado entre -1 e 1 , a integral (6.44) pode ser dividida em duas:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^{\bar{\eta}} f(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 f(\eta) d\eta. \tag{6.52}$$

As duas integrais do lado direito podem ter seus limites alterados para -1 e 1 através de uma mudança conveniente de variáveis. Assim, têm-se:

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

i) para primeira integral:

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\theta^{(1)} (1 + \bar{\eta}) - 1 + \bar{\eta} \right] \quad (6.53)$$

$$d\eta = \frac{1}{2} (\bar{\eta} + 1) d\theta^{(1)};$$

ii) para segunda integral:

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\theta^{(2)} (1 - \bar{\eta}) + 1 + \bar{\eta} \right] \quad (6.54)$$

$$d\eta = \frac{1}{2} (1 - \bar{\eta}) d\theta^{(2)}.$$

Substituindo as equações (6.53) e (6.54) na equação (6.52) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} (\bar{\eta} + 1) \theta^{(1)} - 1 + \bar{\eta} \right] \frac{(\bar{\eta} + 1)}{2} d\theta^{(1)} + \\ &+ \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} (1 - \bar{\eta}) \theta^{(2)} + 1 + \bar{\eta} \right] \frac{(1 - \bar{\eta})}{2} d\theta^{(2)}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

onde a primeira integral do lado direito apresenta singularidade em $\theta^{(1)} = 1$ e a segunda em $\theta^{(2)} = -1$.

Empregando as equações (6.49) e (6.50) escritas para $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$, e considerando os pontos singulares acima mencionados, pode-se reescrever a equação (6.55) na forma:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left((\bar{\eta} + 1) \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma^2) + \gamma \right] + \bar{\eta} - 1 \right) \right] \left(\frac{(\bar{\eta} + 1)(1 - \gamma)}{2} \right) d\gamma + \\ &+ \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left((1 - \bar{\eta}) \left[\frac{1}{2} (\gamma^2 - 1) + \gamma \right] + \bar{\eta} + 1 \right) \right] \left(\frac{(1 - \bar{\eta})(1 + \gamma)}{2} \right) d\gamma, \end{aligned} \quad (6.56)$$

que resolve o problema de singularidade logarítmica.

6.5.2 Submatrizes da Diagonal de $\bar{\mathbf{H}}$

As submatrizes localizadas na diagonal de $\bar{\mathbf{H}}$, que correspondem aos coeficientes das submatrizes \mathbf{C}_i somados às submatrizes $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$, podem ser calculadas através da imposição de que movimentos de corpo rígido implicam em forças de superfície nulas. Portanto, a equação (6.38) fica:

$$\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (6.57)$$

Assim, têm-se:

i) para regiões finitas:

Aplicando translações independentes, têm-se que as submatrizes $\bar{\mathbf{H}}_{pp}$ da diagonal de $\bar{\mathbf{H}}$ podem ser obtidas pelas seguintes expressões [12, 38]:

$$\bar{\mathbf{H}}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{NN} \bar{\mathbf{H}}_{pq}(\mathbf{D}_{qp}\mathbf{T}) \quad (p = 1, \dots, NN), \quad (6.58)$$

sendo:

$\bar{\mathbf{H}}_{pq} \rightarrow$ Submatriz de $\bar{\mathbf{H}}$;

$NN \rightarrow$ Número de pontos nodais;

$$\mathbf{D}_{qp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1(p) - x_1(q) & x_2(p) - x_2(q) & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^T \end{bmatrix}.$$

ii) para regiões infinitas:

Como as translações de corpo rígido violam as condições de regularidade, têm-se que as submatrizes $\bar{\mathbf{H}}_{pp}$ da diagonal de $\bar{\mathbf{H}}$ podem ser calculadas pelas expressões [12, 38]:

CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\bar{\mathbf{H}}_{pp} = \mathbf{I} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{NN} \bar{\mathbf{H}}_{pq}(\mathbf{D}_{qp} \mathbf{T}) \quad (p = 1, \dots, NN), \quad (6.59)$$

sendo NN , \mathbf{D}_{qp} e \mathbf{T} conforme definidos no caso de regiões finitas e \mathbf{I} é a matriz identidade.

Deve-se observar que as equações (6.59) diferem das equações (6.58) apenas pela matriz identidade somada à diagonal principal de \mathbf{H} .

6.5.3 Subvetores de \mathbf{b}

Os subvetores do vetor \mathbf{b} que aparecem na equação (6.38) e que representam os efeitos do carregamento uniformemente distribuído q , também apresentam singularidades quando o ponto fonte ξ e o ponto campo x forem coincidentes ($r = 0$). Neste caso, a singularidade está associada exclusivamente aos tensores $u_{i\alpha}^*$, visto que $v_{i,\alpha}^*$ não possui singularidade.

Como essas singularidades também são de ordem logarítmica, pode-se adotar os mesmos procedimentos descritos no item 6.5.1.

Aplicações Numéricas

7.1 Introdução

Para testar o programa desenvolvido, no qual foram implementadas as teorias e as técnicas computacionais descritas nos capítulos anteriores, analisar-se-á alguns exemplos de estruturas compostas pela associação no espaço de lâminas retas, onde para cada lâmina existe um estado plano de tensões associado ao de flexão de placas.

Os resultados obtidos para os deslocamentos no contorno e nos pontos internos serão comparados com outras sistemáticas de análises dos problemas propostos, como por exemplo a teoria da resistência dos materiais e o método dos elementos finitos (MEF).

Para que os resultados obtidos possam ser comparados com o método dos elementos finitos, empregou-se o programa de análise estrutural **GT Strudl** (Georgia Technology Research Corporation), cuja licença pertence a Exactum Consultoria e Projetos Ltda. O tipo de elemento que será empregado é o SBHQ6 (*Stretching and Bending Hybrid Quadrilateral with 6 Degree of Freedom*), intrínseco ao próprio programa **GT Strudl**.

A seguir, são apresentados os referidos exemplos numéricos e as respectivas análises de resultados.

7.2 Aplicações

7.2.1 Exemplo 1 - Placa com Espessura e Módulo de Elasticidade Variáveis

Neste exemplo, duas lâminas de mesmo tamanho, porém de espessuras diferentes, são conectadas para formação de uma placa.

As dimensões geométricas da placa são apresentadas na figura 7.1, sendo:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = L_3 = 200 \text{ cm}; \\ t_1 &= 30 \text{ cm} \quad (\text{Espessura da Região 1}); \\ t_2 &= 15 \text{ cm} \quad (\text{Espessura da Região 2}). \end{aligned}$$

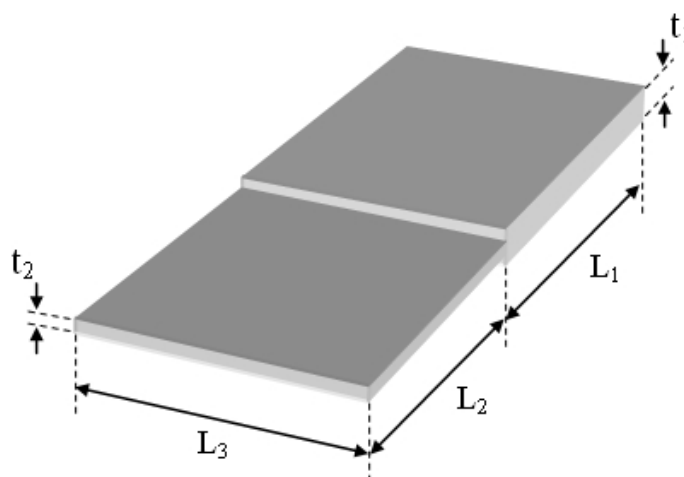


Figura 7.1: Dimensões geométricas da placa

A placa apresenta as seguintes constantes físicas:

$$\begin{aligned} E_1 &= 20000 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{Módulo de Elasticidade Longitudinal da Região 1}); \\ E_2 &= 10000 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{Módulo de Elasticidade Longitudinal da Região 2}); \\ \nu_1 &= \nu_2 = 0,0 \quad (\text{Coeficiente de Poisson}). \end{aligned}$$

A estrutura é engastada em uma de suas extremidades e submetida a um carregamento uniformemente distribuído q de $0,005 \text{ kN/cm}^2$ (Figura 7.2).

Para análise, emprega-se uma malha composta por 28 elementos e 63 nós dispostos nos contornos e interfaces, conforme figura 7.3.

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

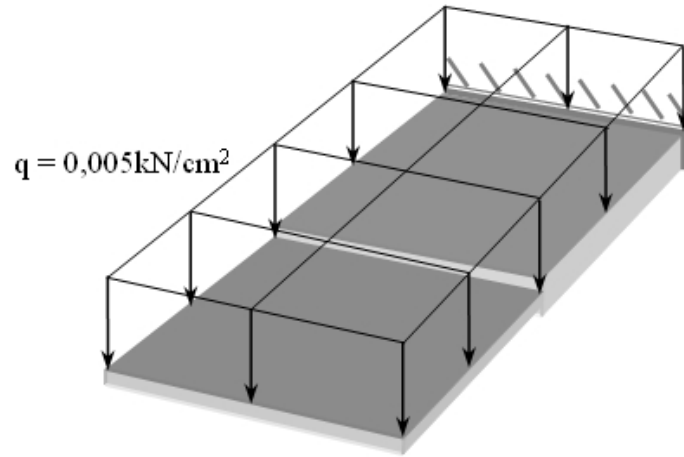


Figura 7.2: Placa engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído

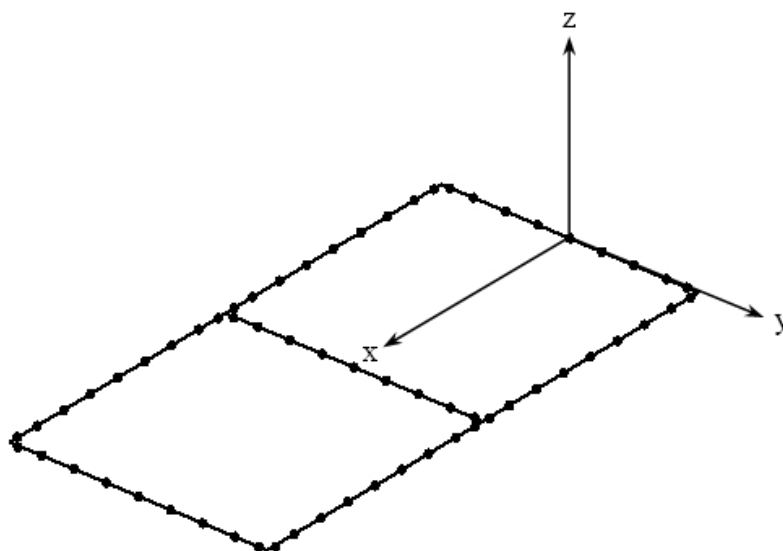


Figura 7.3: Malha empregada para o problema

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Os resultados para os deslocamentos verticais na borda livre da placa são comparados com os valores fornecidos pela resistência dos materiais e pelo método dos elementos finitos (MEF).

Pela teoria da resistência dos materiais, tem-se que a solução do problema é dada por [8, 49, 50]:

$$w = \frac{15qL_3L_1^4}{8E_1I_1} + \frac{qL_3L_2^4}{8E_2I_2}. \quad (7.1)$$

Para o problema em questão:

$$I_1 = \frac{L_3t_1^3}{12};$$
$$I_2 = \frac{L_3t_2^3}{12}.$$

Logo, os deslocamentos verticais na borda livre da placa são dados pela seguinte equação:

$$w = \frac{45qL_1^4}{2E_1t_1^3} + \frac{3qL_2^4}{2E_2t_2^3}. \quad (7.2)$$

Para que os resultados do problema possam ser comparados com o método dos elementos finitos, utilizou-se o mesmo número de nós no contorno e na interface da discretização feita pelo método dos elementos de contorno.

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais na borda livre da placa são apresentados na tabela 7.1.

Tabela 7.1: Deslocamentos verticais na borda livre da placa

Deslocamentos Verticais (cm)		
Res. dos Mat.	MEF	MEC
-0,68890	-0,69097	-0,69156

A comparação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos para os deslocamentos verticais na seção de coordenada $x = 100cm$ são apresentados na figura 7.4.

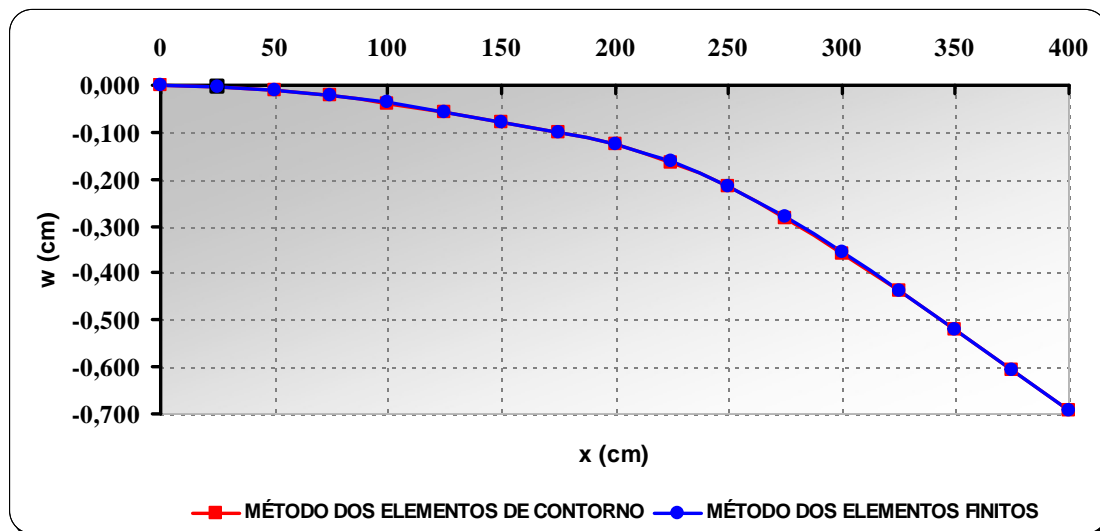


Figura 7.4: Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos verticais da placa

A partir dos resultados acima apresentados, pode-se verificar que os valores obtidos empregando o método dos elementos de contorno praticamente coincidiram com os obtidos empregando o método dos elementos finitos e a teoria da resistência dos materiais, uma vez que o erro relativo do método dos elementos de contorno para a teoria da resistência dos materiais foi de $0,4\%$ e para o método dos elementos finitos foi de $0,1\%$.

7.2.2 Exemplo 2 - Estrutura de Seção Transversal L

Neste exemplo, duas lâminas de mesmo tamanho e espessura são conectadas para formação de uma estrutura de seção transversal L.

A estrutura apresenta as seguintes constantes físicas:

$$E = 20000kN/cm^2;$$

$$\nu = 0,0.$$

São analisadas duas situações distintas:

i) estrutura de seção L com um ângulo de 90° entre as lâminas:

As dimensões geométricas da estrutura são apresentadas na figura 7.5, sendo:

$$L_1 = L_2 = 100 \text{ cm};$$

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

$$L_3 = 200 \text{ cm};$$

$$t = 10 \text{ cm};$$

$$\theta = 90^\circ.$$

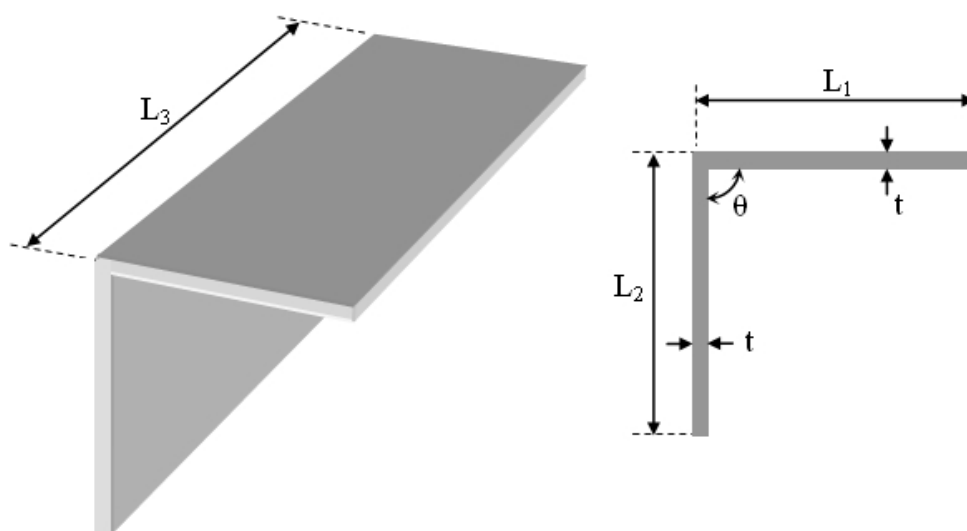


Figura 7.5: Dimensões geométricas da estrutura de seção transversal L ($\theta = 90^\circ$)

A estrutura é engastada em uma das extremidades e submetida a um carregamento uniformemente distribuído q de 2 kN/cm ao longo da borda livre da lâmina horizontal (Figura 7.6).

Para análise, emprega-se uma malha composta por 20 elementos e 47 nós dispostos nos contornos e interfaces (Figura 7.7).

Os resultados para os deslocamentos verticais na borda livre da lâmina horizontal são comparados com os valores fornecidos pela resistência dos materiais e pelo método dos elementos finitos (MEF).

Pela teoria da resistência dos materiais, tem-se que a solução do problema é dada por [8, 49, 50]:

$$w = \frac{qL_3L_2^3}{3EI} + \frac{qL_3L_2^2L_1}{EI}. \quad (7.3)$$

Para o problema em questão:

$$I = \frac{L_3t^3}{12}.$$

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

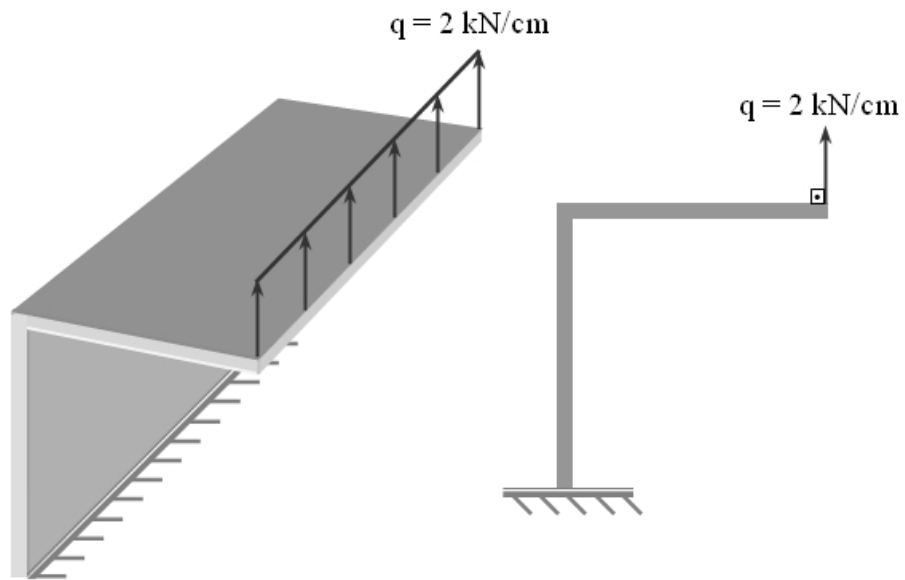


Figura 7.6: Estrutura engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído ($\theta = 90^\circ$)

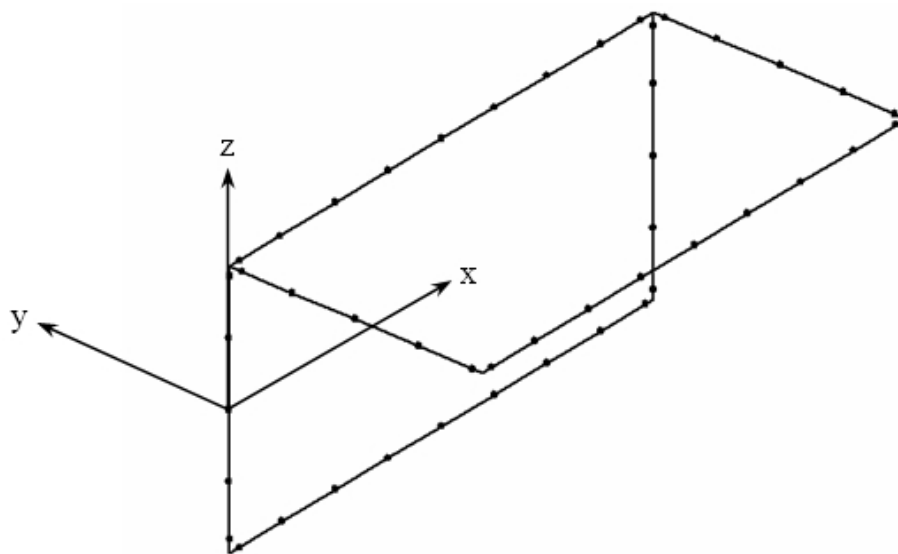


Figura 7.7: Malha empregada para o problema ($\theta = 90^\circ$)

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Logo, os deslocamentos verticais na borda livre da lâmina horizontal são dados pela seguinte equação:

$$w = \frac{4qL_2^3}{Et^3} + \frac{12qL_2^2L_1}{Et^3}. \quad (7.4)$$

Para que os resultados do problema possam ser comparados com o método dos elementos finitos, utilizou-se o mesmo número de nós no contorno e na interface da discretização feita pelo método dos elementos de contorno.

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais na borda livre da lâmina horizontal são apresentados na tabela 7.2.

Tabela 7.2: Deslocamentos verticais na borda livre da lâmina horizontal

Deslocamentos Verticais (cm)		
Res. dos Mat.	MEF	MEC
1,60000	1,60051	1,60922

Analisando os valores acima apresentados, pode-se constatar que os resultados obtidos empregando o método dos elementos de contorno praticamente coincidiram com os obtidos empregando o método dos elementos finitos e a teoria da resistência dos materiais, uma vez que o erro relativo do método dos elementos de contorno para a teoria da resistência dos materiais foi de $0,6\%$ e para o método dos elementos finitos foi de $0,5\%$.

ii) estrutura de seção L com um ângulo de 120° entre as lâminas:

As dimensões geométricas da estrutura são apresentadas na figura 7.8, sendo:

$$L_1 = L_2 = 100 \text{ cm};$$

$$L_3 = 200 \text{ cm};$$

$$t = 10 \text{ cm};$$

$$\theta = 120^\circ.$$

A estrutura é engastada em uma das extremidades e submetida a um carregamento uniformemente distribuído q de 2 kN/cm ao longo da borda livre da lâmina inclinada (Figura 7.9).

Para análise, emprega-se uma malha composta por 20 elementos e 47 nós dispostos nos contornos e interfaces (Figura 7.10).

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

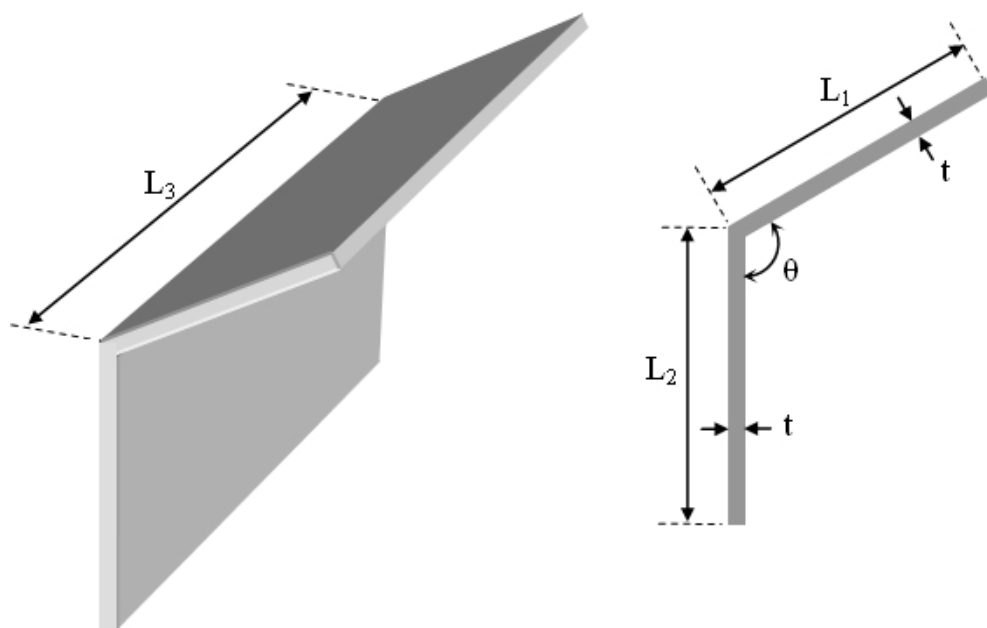


Figura 7.8: Dimensões geométricas da estrutura de seção transversal L ($\theta = 120^\circ$)

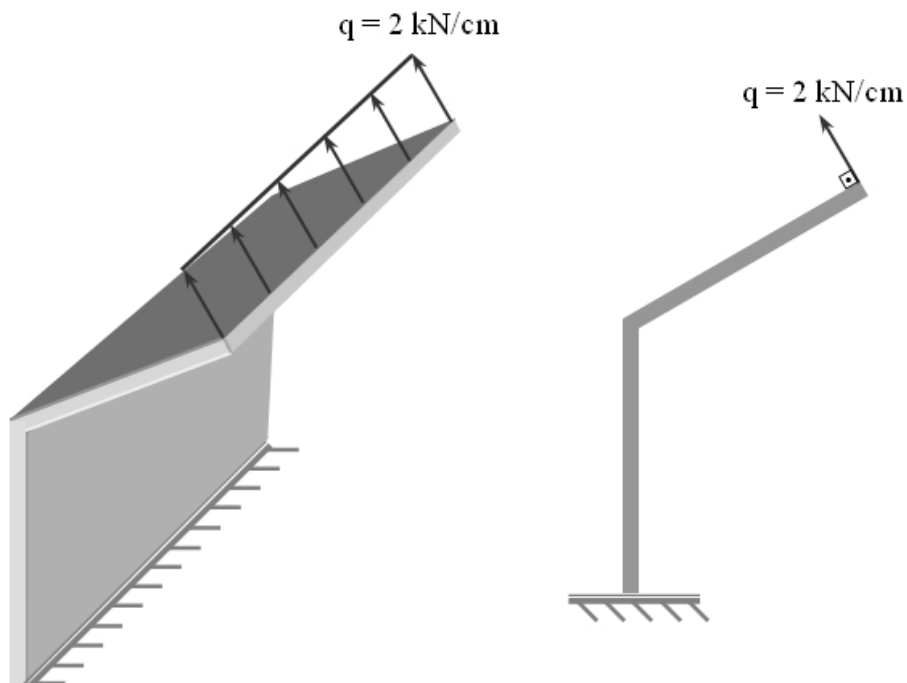


Figura 7.9: Estrutura engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído ($\theta = 120^\circ$)

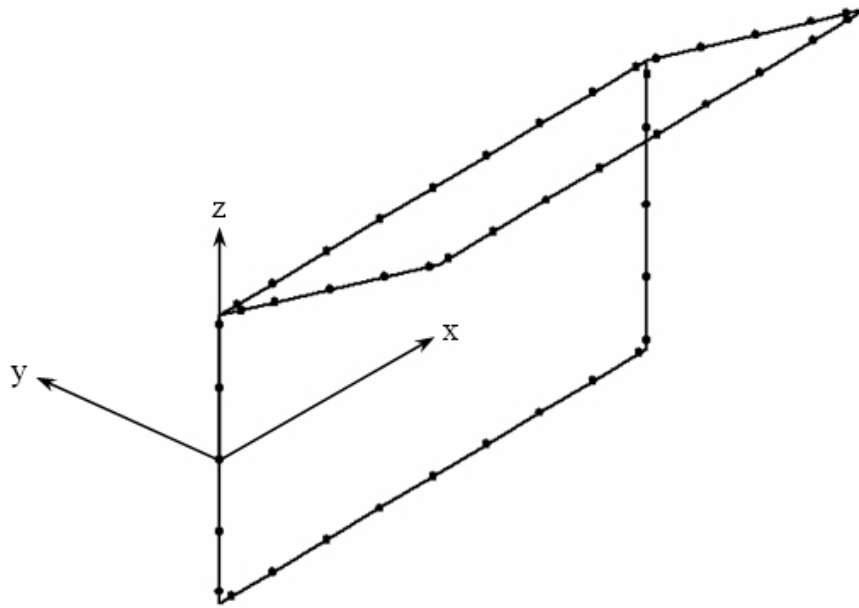


Figura 7.10: Malha empregada para o problema ($\theta = 120^\circ$)

Os resultados para os deslocamentos verticais na borda livre da lâmina inclinada são comparados com os valores fornecidos pela resistência dos materiais e pelo método dos elementos finitos (MEF).

Pela teoria da resistência dos materiais, tem-se que a solução do problema é dada por [8, 49, 50]:

$$w = \frac{qL_3}{EI} [L_2 \cos(\theta - 90^\circ)] \left(L_2L_1 + \frac{L_1^2 \sin(\theta - 90^\circ)}{2} + \frac{L_2^2}{3} \right). \quad (7.5)$$

Para o problema em questão:

$$I = \frac{L_3 t^3}{12}.$$

Logo, os deslocamentos verticais na borda livre da lâmina inclinada são dados pela seguinte equação:

$$w = \frac{q}{Et^3} [L_2 \cos(\theta - 90^\circ)] (12L_2L_1 + 6L_1^2 \sin(\theta - 90^\circ) + 4L_2^2). \quad (7.6)$$

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Para que os resultados do problema possam ser comparados com o método dos elementos finitos, utilizou-se o mesmo número de nós no contorno e na interface da discretização feita pelo método dos elementos de contorno.

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais na borda livre da lâmina inclinada são apresentados na tabela 7.3.

Tabela 7.3: Deslocamentos verticais na borda livre da lâmina inclinada

Deslocamentos Verticais (cm)		
Res. dos Mat.	MEF	MEC
1,64545	1,64589	1,65221

A partir dos resultados acima apresentados, pode-se verificar que os valores obtidos empregando o método dos elementos de contorno praticamente coincidiram com os obtidos empregando o método dos elementos finitos e a teoria da resistência dos materiais, uma vez que o erro relativo do método dos elementos de contorno para a teoria da resistência dos materiais e para o método dos elementos finitos foi de $0,4\%$.

7.2.3 Exemplo 3 - Barra de Seção Transversal I

Neste exemplo, analisa-se uma barra com seção transversal em I. As dimensões geométricas da referida barra são apresentadas na figura 7.11.

A barra apresenta as seguintes constantes físicas:

$$E = 21000kN/cm^2;$$
$$\nu = 0,3.$$

Para a análise, emprega-se uma malha composta por 42 elementos e 100 nós dispostos nos contornos e interfaces da estrutura (Figura 7.12).

São analisadas duas situações distintas:

i) barra engastada e livre tracionada:

A barra é engastada em uma de suas extremidades e tracionada por um carregamento uniforme de $20kN/cm^2$ na outra extremidade, conforme apresentado na figura 7.13.

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

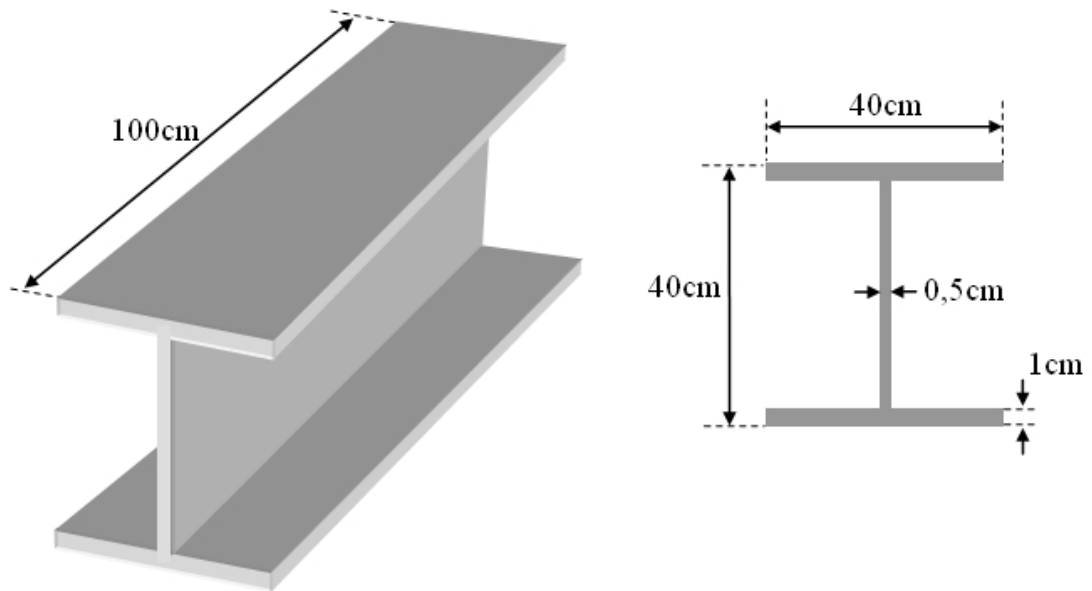


Figura 7.11: Dimensões geométricas da barra de seção transversal I

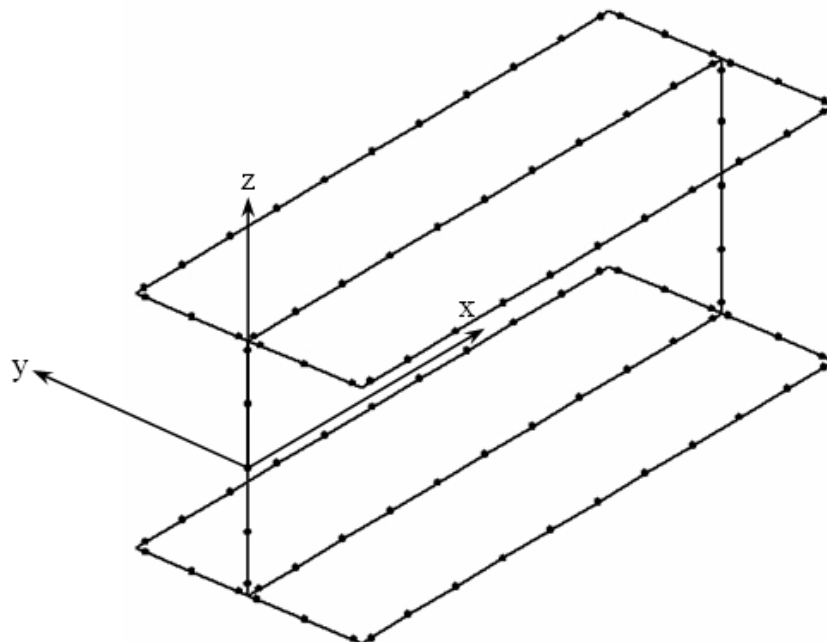


Figura 7.12: Malha empregada para o problema

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

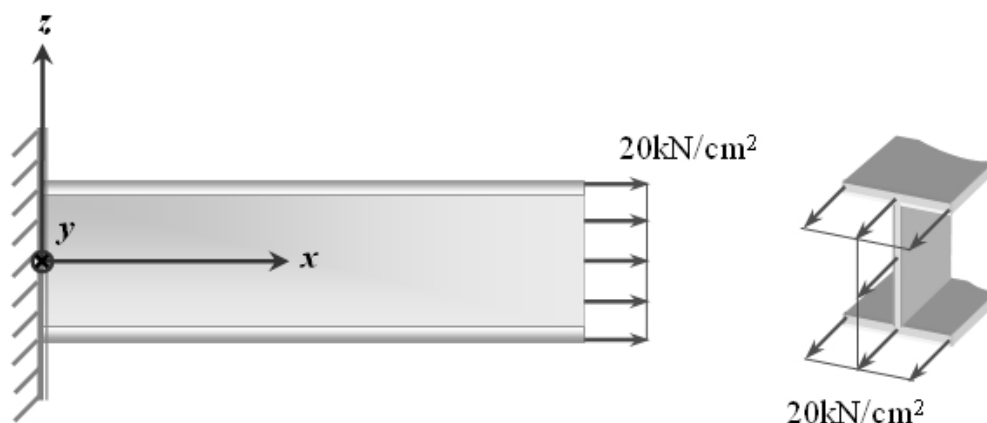


Figura 7.13: Barra engastada e livre submetida a um carregamento uniforme de tração

Os resultados obtidos são comparados com a teoria de barras tracionadas da resistência dos materiais e com o método dos elementos finitos (MEF).

Para a teoria de barras tracionadas da resistência dos materiais, tem-se que a solução do problema é dada por [49, 50]:

$$u(x) = \frac{P}{EA}x, \quad (7.7)$$

onde:

P : carregamento axial;

A : área da seção transversal;

E : módulo de elasticidade longitudinal.

Para o problema em questão:

$$A = 99\text{cm}^2$$

$$P = q \times A \rightarrow P = 20 \times 99 = 1980\text{kN}.$$

Logo, os deslocamentos ao longo da barra tracionada são dados pela seguinte equação:

$$u(x) = \frac{1980}{21000 \times 99}x \rightarrow u(x) = 9,524 \times 10^{-4}x. \quad (7.8)$$

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Para que os resultados do problema possam ser comparados com o método dos elementos finitos, utilizou-se o mesmo número de nós nos contornos e nas interfaces da discretização feita pelo método dos elementos de contorno.

Os resultados obtidos para os deslocamentos longitudinais da barra devido ao carregamento de tração são apresentados na tabela 7.4, enquanto que a comparação entre os valores obtidos para os diversos métodos de análise podem ser verificados na figura 7.14.

Tabela 7.4: Deslocamentos longitudinais da barra

Coordenadas (cm)			Deslocamentos (cm)		
x	y	z	Res. dos Mat.	MEF	MEC
0,000	0,000	0,000	0,00000	0,00000	0,00000
10,000	0,000	0,000	0,00952	0,00848	0,00921
20,000	0,000	0,000	0,01905	0,01775	0,01841
30,000	0,000	0,000	0,02857	0,02736	0,02762
40,000	0,000	0,000	0,03810	0,03696	0,03683
50,000	0,000	0,000	0,04762	0,04656	0,04603
60,000	0,000	0,000	0,05714	0,05617	0,05524
70,000	0,000	0,000	0,06667	0,06577	0,06445
80,000	0,000	0,000	0,07619	0,07538	0,07365
90,000	0,000	0,000	0,08571	0,08465	0,08286
100,000	0,000	0,000	0,09524	0,09313	0,09207

A partir dos resultados apresentados, pode-se verificar que os valores obtidos empregando o método dos elementos de contorno ficaram bastante próximos dos obtidos empregando o método dos elementos finitos e a teoria de barras tracionadas da resistência dos materiais.

ii) barra engastada sujeita a um carregamento triangular na alma da extremidade oposta:

A barra é engastada em uma de suas extremidades e submetida a um carregamento triangular, variando de $100kN/cm$ à $-100kN/cm$ na alma da extremidade oposta, conforme apresentado na figura 7.15.

Os resultados obtidos são comparados com a teoria de vigas da resistência dos materiais e com o método dos elementos finitos (MEF).

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

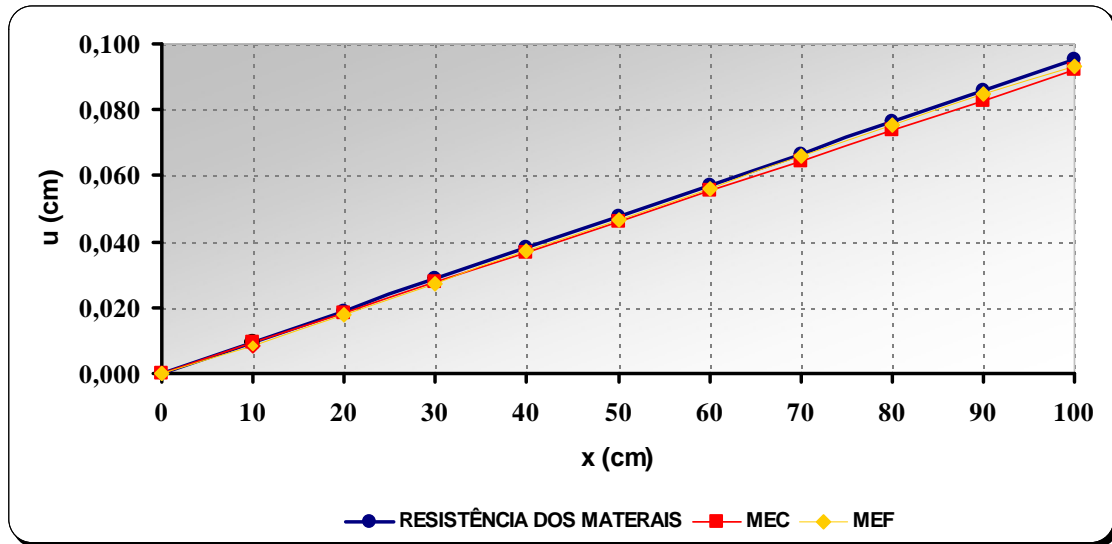


Figura 7.14: Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos longitudinais

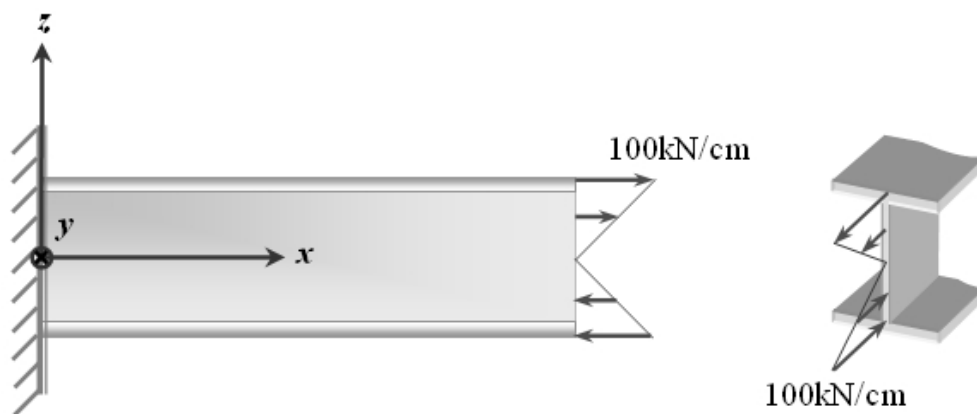


Figura 7.15: Barra engastada sujeita a um carregamento triangular na alma da extremidade oposta

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Pela teoria de vigas da resistência dos materiais, tem-se que a solução do problema é dada por [49, 50]:

$$w(x) = \frac{M}{2EI}x^2, \quad (7.9)$$

onde:

M : momento fletor aplicado;

I : momento de inércia;

E : módulo de elasticidade longitudinal;

L : comprimento da barra.

Para o problema em questão:

$$I = 32710\text{cm}^4$$

$$M = P \times d \rightarrow M = -1000 \times 26,6667 = -26666,7\text{kN.cm} \quad (\text{ver figura 7.16}),$$

sendo:

P : resultante de carga triangular;

d : distância entre as resultantes de carga.

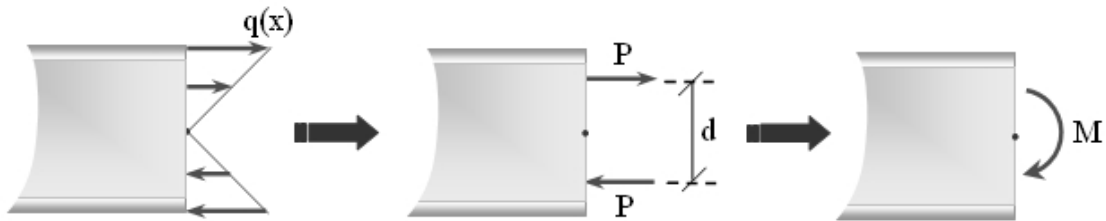


Figura 7.16: Transformação do carregamento triangular em momento concentrado

Logo, os deslocamentos verticais ao longo do eixo neutro da barra são dados pela seguinte equação:

$$w(x) = \frac{26666,7}{2 \times 21000 \times 32710}x^2 \rightarrow w(x) = 1,941 \times 10^{-5}x^2. \quad (7.10)$$

Para que os resultados do problema possam ser comparados com o método dos elementos finitos, utilizou-se o mesmo número de nós nos contornos e nas interfaces da discretização feita pelo método dos elementos de contorno.

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais da barra ao longo de seu eixo neutro são apresentados na tabela 7.5, enquanto que a comparação entre os valores obtidos para os diversos métodos de análise podem ser verificados na figura 7.17.

Tabela 7.5: Deslocamentos verticais da barra

Coordenadas (cm)			Deslocamentos (cm)		
x	y	z	Res. dos Mat.	MEF	MEC
0,000	0,000	0,000	0,00000	0,00000	0,00000
10,000	0,000	0,000	-0,00194	-0,00083	-0,00282
20,000	0,000	0,000	-0,00776	-0,00597	-0,00774
30,000	0,000	0,000	-0,01747	-0,01483	-0,01607
40,000	0,000	0,000	-0,03106	-0,02735	-0,02785
50,000	0,000	0,000	-0,04853	-0,04355	-0,04317
60,000	0,000	0,000	-0,06988	-0,06339	-0,06224
70,000	0,000	0,000	-0,09511	-0,08704	-0,08546
80,000	0,000	0,000	-0,12423	-0,11476	-0,11400
90,000	0,000	0,000	-0,15723	-0,14924	-0,14809
100,000	0,000	0,000	-0,19411	-0,19461	-0,18769

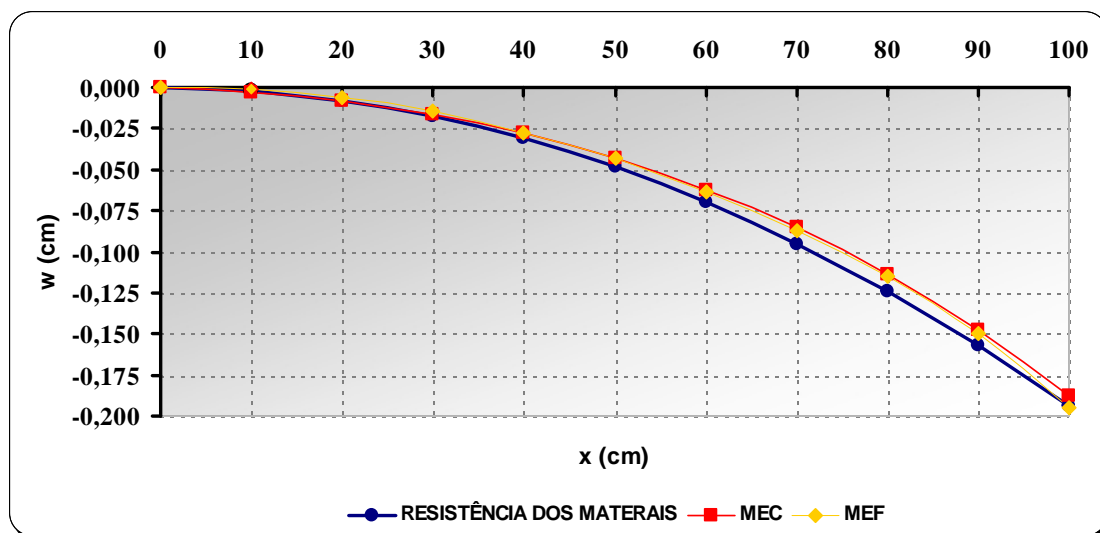


Figura 7.17: Comparação entre os valores obtidos para os deslocamentos verticais

A partir dos resultados acima apresentados, pode-se verificar que os valores obtidos empregando o método dos elementos de contorno ficaram bastante pró-

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

ximos dos obtidos empregando o método dos elementos finitos e a teoria de vigas da resistência dos materiais.

7.2.4 Exemplo 4 - Estrutura de Seção Transversal Arbitrária

Neste exemplo, três lâminas de tamanhos diferentes, porém de mesma espessura, são conectadas para formação de uma estrutura com seção transversal arbitrária.

As dimensões geométricas da estrutura são apresentadas na figura 7.18, sendo:

$$L_1 = L_2 = 100 \text{ cm};$$

$$L_3 = L_4 = 50 \text{ cm};$$

$$t = 5 \text{ cm};$$

$$\theta = 120^\circ.$$

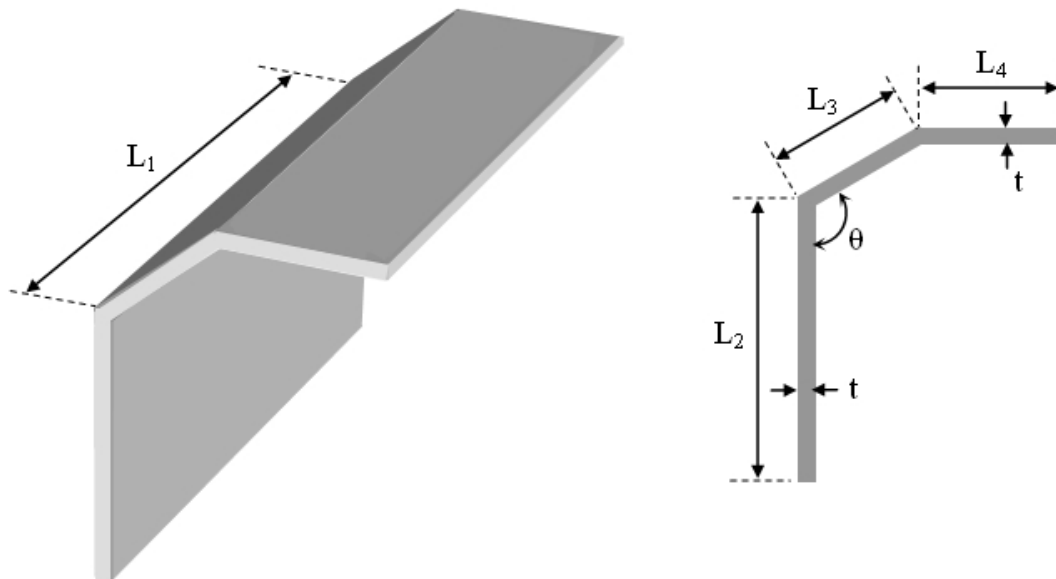


Figura 7.18: Dimensões geométricas da estrutura de seção transversal arbitrária

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

As constantes físicas do problema são as seguintes:

$$E = 7000kN/cm^2;$$

$$\nu = 0,33.$$

A estrutura é engastada em uma de suas extremidades e submetida a dois carregamentos uniformemente distribuídos ao longo da borda livre da lâmina horizontal, um na direção transversal e de magnitude $0,05kN/cm$ e outro na direção vertical e de magnitude $0,05kN/cm$ (Figura 7.19).

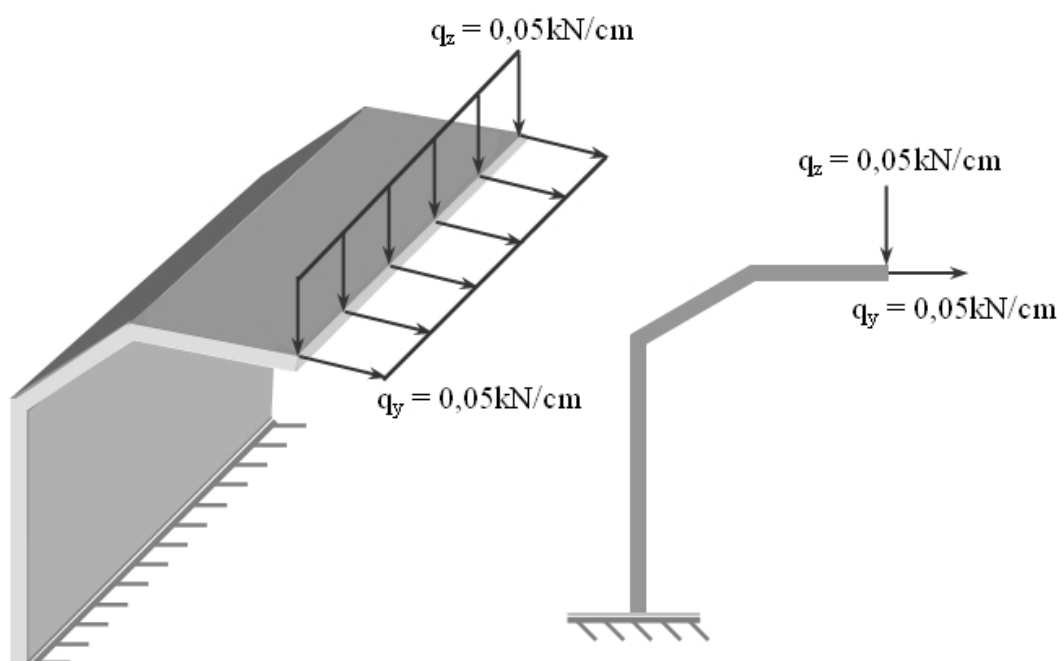


Figura 7.19: Estrutura engastada e livre sujeita a dois carregamentos uniformemente distribuídos

Para análise, emprega-se uma malha composta por 16 elementos e 42 nós dispostos nos contornos e interfaces, conforme figura 7.20.

Os resultados para os deslocamentos verticais e transversais são comparados com os valores fornecidos pelo método dos elementos finitos (MEF).

Para que os resultados do problema possam ser comparados com o método dos elementos finitos, utilizou-se o mesmo número de nós no contorno e na interface da discretização feita pelo método dos elementos de contorno.

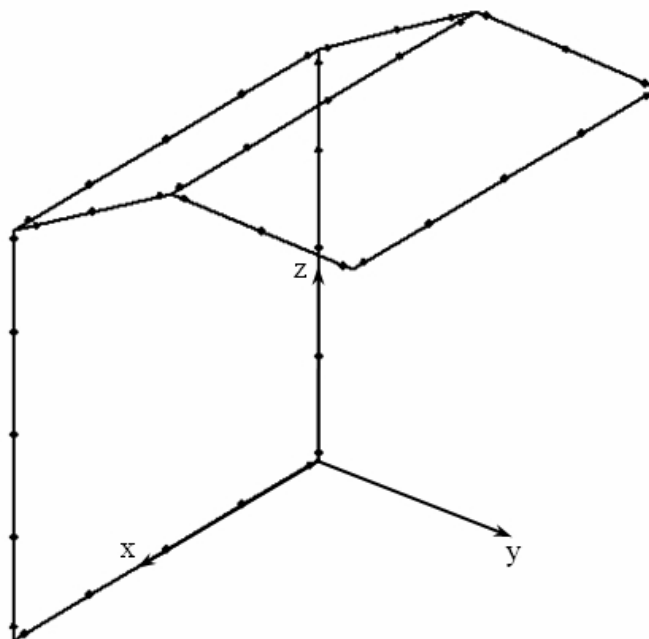


Figura 7.20: Malha empregada para o problema

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais e transversais na seção de coordenada $x = 50 \text{ cm}$ da estrutura são apresentados nas tabelas 7.6 e 7.7, respectivamente. Na figura 7.21 é apresentada a configuração deformada da estrutura, sendo os valores amplificados em dez vezes para facilitar a visualização.

Tabela 7.6: Deslocamentos verticais da estrutura

Coordenadas (cm)			Deslocamentos verticais (cm)	
x	y	z	MEF	MEC
50,000	0,000	0,000	0,00000	0,00000
50,000	0,000	25,000	-0,00004	-0,00017
50,000	0,000	50,000	-0,00011	-0,00019
50,000	0,000	75,000	-0,00024	-0,00025
50,000	0,000	100,000	-0,00029	-0,00089
50,000	21,651	112,500	-0,25027	-0,25076
50,000	43,301	125,000	-0,52913	-0,54777
50,000	68,301	125,000	-0,87149	-0,89276
50,000	93,301	125,000	-1,22359	-1,26603

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Tabela 7.7: Deslocamentos transversais da estrutura

Coordenadas (cm)			Deslocamentos transversais (cm)	
x	y	z	MEF	MEC
50,000	0,000	0,000	0,00000	0,00000
50,000	0,000	25,000	0,04336	0,03444
50,000	0,000	50,000	0,16269	0,15397
50,000	0,000	75,000	0,34675	0,35018
50,000	0,000	100,000	0,58696	0,59699
50,000	21,651	112,500	0,73126	0,73930
50,000	43,301	125,000	0,89219	0,91069
50,000	68,301	125,000	0,89221	0,91069
50,000	93,301	125,000	0,89221	0,91069

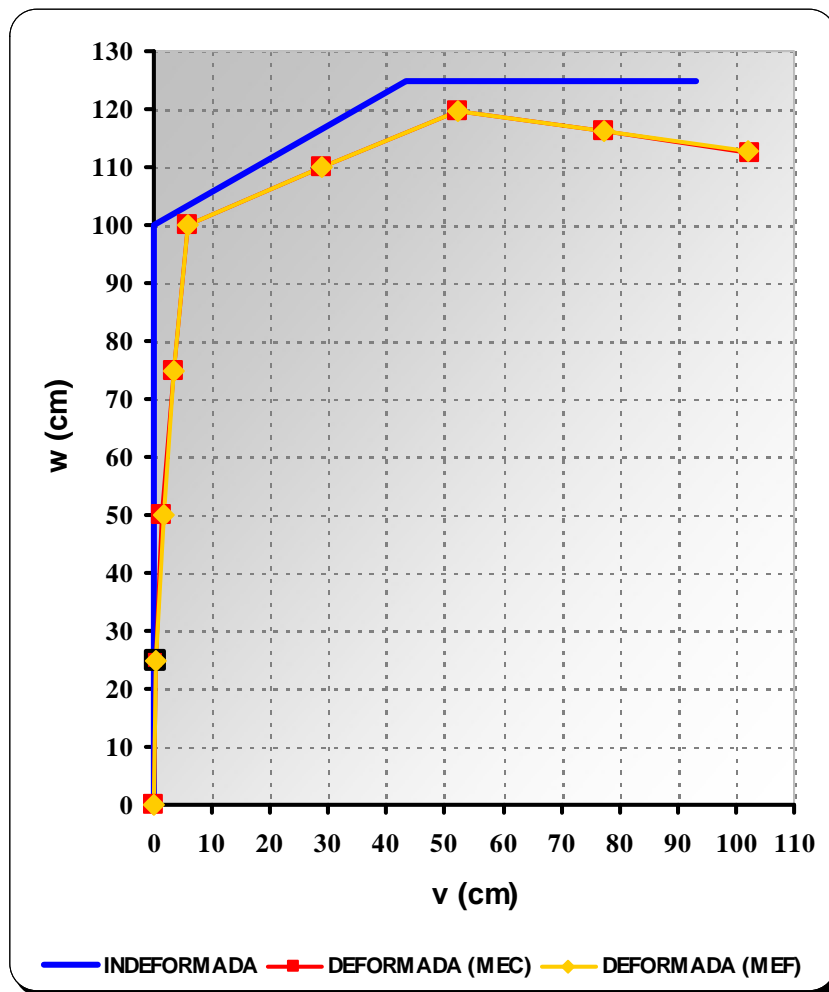


Figura 7.21: Estrutura deformada devido aos carregamentos aplicados

CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Analisando os valores apresentados, pode-se constatar que os resultados obtidos empregando o método dos elementos de contorno ficaram bastante próximos dos obtidos empregando o método dos elementos finitos.

Capítulo 8

Conclusões

A análise de estruturas constituídas pela associação espacial de lâminas retas, sujeitas aos efeitos simultâneos de flexão e extensão nas paredes, foi considerada satisfatória em virtude dos resultados obtidos com os diversos exemplos apresentados.

Apesar de terem sido apresentados exemplos relativamente simples, os resultados obtidos mostraram todo o poder das formulações aqui expostas, uma vez que as respostas praticamente coincidiram com os valores fornecidos por outras sistemáticas de análise dos problemas propostos, como por exemplo o método dos elementos finitos e as teorias da resistência dos materiais.

Quanto ao método numérico empregado, pode-se concluir que o método dos elementos de contorno constitui-se em uma boa representação das estruturas utilizadas, mesmo quando o número de elementos empregados é reduzido. Além disso, o emprego do método dos elementos de contorno acarreta a diminuição significativa na quantidade de dados de entrada fornecidos, visto que o sistema de equações gerado apresenta normalmente dimensões menores do que os obtidos com os métodos que discretizam o domínio.

Assim, a utilização desta técnica constitui-se em uma importante ferramenta para a análise de estruturas laminares sujeitas aos efeitos de flexão e de extensão, cada vez mais empregados em diversos campos da engenharia, uma vez que permitem a obtenção de elevada rigidez flexional com peso próprio relativamente reduzido.

Para continuidade deste trabalho, são apresentadas algumas sugestões para estudos futuros, uma vez que as formulações aqui expostas são passíveis de serem empregadas em análises muito mais abrangentes e complexas. Assim, são dadas

CAPÍTULO 8. CONCLUSÕES

como sugestões:

- i)* Implementação de não linearidade física e geométrica;
- ii)* Implementação dos efeitos de peso próprio e de temperatura;
- iii)* Desenvolvimento de outras formas de carregamentos, como por exemplo cargas concentradas;
- iv)* Implementação de efeitos dinâmicos na estrutura.

Referências Bibliográficas

- [1] KUPRADZE, V.D., "Potential Methods in Theory of Elasticity", *Israel Program for Scientific Translations*, Jerusalém, 1965.
- [2] LOVE, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4ed. New York, Dover Publications, 1944.
- [3] RIZZO, F.J., "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics", *Quart. Appl. Math.* v. 25, pp.83-85, 1967.
- [4] CRUSE, T.A., "Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics", *Int. J. Solids Struct.*, v. 5, pp. 1259-1274, 1969.
- [5] KELLOGG, O.D., *Foudations of Potential Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1929.
- [6] PALERMO JR., L., *Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno*. Tese de D.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos/USP, São Carlos, SP, Brasil, 1989.
- [7] PALERMO JR., L., RACHID, M., VENTURINI, W.S., "Analysis of Thin Walled Structures Using the Boundary Element Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 9, pp. 359-363, 1992.
- [8] DIRGANTARA, T., ALIABADI, M.H., "Boundary Element Analysis of Assembled Plate Structures", *Commun. Numer. Meth. Engng.*, v. 17, pp. 749-760, 2001.
- [9] BAIZ, P.M., ALIABADI, M.H., "Local Buckling of Thin Walled Structures by BEM", *Advances in Boundary Element Techniques*, pp. 39-44, 2007.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [10] VILLAÇA, S.F., GARCIA, L.F.T., *Introdução à Teoria da Elasticidade*, 4ed. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 2000.
- [11] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., *Teoria da Elasticidade*, 3ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
- [12] SANTIAGO, J.A.F., *Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional com o Uso de Microcomputadores*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1987.
- [13] DYM, C.L., SHAMES, I.H., *Solid Mechanics - A Variational Approach*, Tokyo, McGraw-Hill, 1973.
- [14] SHAMES, I.H., *Mechanics of Deformable Solids*, New Jersey, Prentice Hall, 1964.
- [15] SOKOLNIKOFF, I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*, New York, McGraw-Hill, 1956.
- [16] FUNG, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, New Jersey, Prentice-Hall, 1965.
- [17] NOVOZHILOV, V.V., *Theory of Elasticity*, London, Pergamon Press, 1961.
- [18] REISSNER, E., "On the Theory of Bending of Elastic Plates", *Journal of Mathematics and Physics*, v. 23, pp. 184-191, 1944.
- [19] REISSNER, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, 1945.
- [20] REISSNER, E., "On the Bending of Elastic Plates", *Quarterly of Applied Mechanics*, v. 5, pp. 55-58, 1947.
- [21] TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, 2ed. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1959.
- [22] VANDER WEEËN, F., "Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 18, pp. 1-10, 1982.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [23] VANDER WEEËN, F., "Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model", *Boundary Element Method in Engineering*, Proceedings of the 4th International Seminar, Southampton, UK, 1982.
- [24] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.E., *Mecânica dos Sólidos*, v. 2, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1994.
- [25] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [26] TELLES, J.C.F., *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems: Lecture Notes in Engineering*, v. 1, Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [27] ALIABADI, M.H., *The Boundary Element Method: Applications to Solid and Structures*, v. 2, Chichester, Wiley, 2002.
- [28] BECKER, A.A., *The Boundary Element Method in Engineering*, London, McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [29] BREBBIA, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, London, Petech Press, 1978.
- [30] BREBBIA, C.A., WALKER, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, London, Butterworths, 1980.
- [31] RICARDELLA, P.C., *An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity*. In: Report N° SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University, Pittsburg, 1973.
- [32] HARTMANN, F., "Computing the C - Matrix in Non-Smooth Boundary Points", *New Developments in Boundary Element Methods*, pp. 367-379, London, Butterworths, 1980.
- [33] BREBBIA, C.A., *Topics in Boundary Element Research: Computations Aspects*, v. 3, Berlin, Springer-Verlag, 1987.
- [34] CROUCH, S.L., STARFIELD, A.M., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, London, George Allen & Unwin, 1983.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [35] CRUSE, T.A., *Mathematical Foundations of the Boundary Integral Equation Method*. In: Report N^o AFOSR-TR-77-1002, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977.
- [36] HÖRMANDER, H., *Linear Partial Differential Operators*, Berlin, Springer Verlag, 1963.
- [37] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications, 1965.
- [38] KARAM, V.J., *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1986.
- [39] KARAM, V.J., TELLES, J.C.F., "On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory", *Engineering Analysis*, v. 5, n. 1, pp. 21-27, 1988.
- [40] RIBEIRO, G.O., *Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner*. Tese de D.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos/USP, São Carlos, SP, Brasil, 1992.
- [41] RIBEIRO, G.O., VENTURINI, W.S., "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno no Cálculo de Placas Através da Teoria de Reissner". In: *Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Numéricos em Engenharia*, pp. 10, Porto, Portugal, 1989.
- [42] MALVERN, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, New Jersey, Prentice-Hall, 1969.
- [43] CROUCH, S.L., STARFIELD, A.M., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, London, George Allen & Unwin, 1983.
- [44] JASWON, M.A., SYMM, G.T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, London, Academic Press, 1977.
- [45] CHAUDONNERET, M., *On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis*. In: *Recent Advances in Boundary Element Methods* (C. A. Brebia, ed.), London, Pentech Press, 1978.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [46] VENTURINI, W. S., *Application of the Boundary Element Formulation to Solve Geomechanical Problems*, Ph.D. Dissertation, University of Southampton, Southampton, United Kingdom, 1982.
- [47] TELLES, J.C.F., "A Self-Adaptive Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, pp. 959-973, 1987.
- [48] TELLES, J.C.F., OLIVEIRA, R.F., "Third Degree Polynomial Transformation for Boundary Element Integrals: Further Improvements", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 13, pp. 135-141, 1994.
- [49] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.E., *Mecânica dos Sólidos*, v. 1, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1994.
- [50] CRAIG JR., R.R., *Mecânica dos Materiais*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)