

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**  
**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
DUAL (DBEM) INCORPORANDO UM MODELO DE  
ZONA COESIVA PARA ANÁLISE DE FRATURAS**

Eng°. Luiz Gustavo de Figueiredo

**Campinas – SP**  
**2008**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**  
**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

# **O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL (DBEM) INCORPORANDO UM MODELO DE ZONA COESIVA PARA ANÁLISE DE FRATURAS**

Eng<sup>o</sup>. Luiz Gustavo de Figueiredo

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

**Campinas - SP**  
**2008**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F469m Figueiredo, Luiz Gustavo de  
O método dos elementos de contorno dual (DBEM) incorporando um modelo de zona coesiva para análise de fraturas / Luiz Gustavo de Figueiredo.--Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Leandro Palermo Júnior  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Métodos dos elementos de contorno. 2. Mecânica da fratura. 3. Equações integrais. 4. Análise numérica. I.Palermo Júnior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês: The dual boundary element method (DBEM) incorporating a cohesive zone model to cracks analysis

Palavras-chave em Inglês: Boundary element method, Dual boundary element method, Linear elastic fracture mechanic, Cohesive models, Propagation of cracks

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: José Luiz Antunes de Oliveira e Souza, Humberto Breves Coda

Data da defesa: 22/02/2008

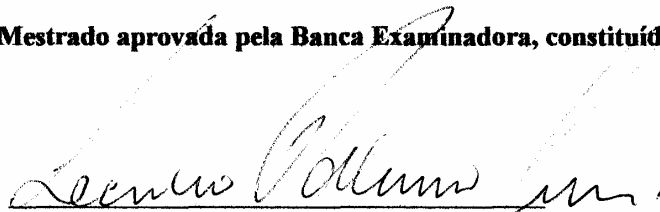
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E  
URBANISMO**

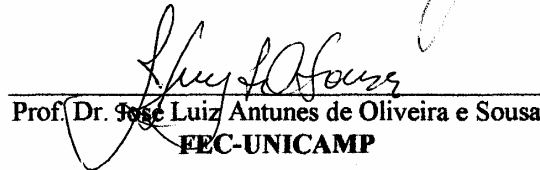
**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO  
DUAL (DBEM) INCORPORANDO UM MODELO DE  
ZONA COESIVA PARA ANÁLISE DE FRATURAS**

**Luiz Gustavo de Figueiredo**

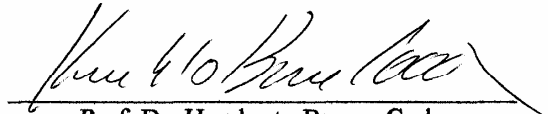
**Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:**



**Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior  
Presidente e Orientador/FEC-UNICAMP**



**Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa  
FEC-UNICAMP**



**Prof. Dr. Humberto Breves Coda  
EESC-USP**

**Campinas, 22 de fevereiro de 2008**

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, Eliana e José Haroldo,  
Aos meus avós, Aparecida (†) e Sebastião,  
Orminda e José Sabino (†).

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pela oportunidade de realizar este trabalho com saúde e paz.

À minha família, pelo apoio e incentivo ao longo de anos de estudos.

À Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior, agradeço pelo apoio, compreensão, paciência, por confiar em minha capacidade e vontade de pesquisar e trabalhar com engenharia ao longo destes cinco anos.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença, pelas horas de orientação dedicada a esta pesquisa no *campus* da USP em São Carlos - SP.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, com os quais aprendi a pesquisar e trabalhar com engenharia.

Aos meus amigos, em especial ao Flávio Gaiga, Paulo e Luís Pedro, que nunca negaram apoio nas horas difíceis.

## RESUMO

FIGUEIREDO, L. G. **O Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) incorporando um modelo de zona coesiva para análise de fraturas**. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 169 p. Dissertação (Mestrado).

A avaliação da influência de um modelo coesivo de fratura no comportamento estrutural e a simulação de propagação de fraturas pré-existentes, com a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), em problemas bidimensionais, usando o Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM), é o principal objetivo deste estudo. Problemas elásticos lineares em meio contínuo podem ser resolvidos com a equação integral de contorno de deslocamentos. O Método dos Elementos de Contorno Dual pode ser utilizado para resolver os problemas de fratura, onde a equação integral de contorno de forças de superfície é implementada em conjunto com a equação integral de contorno de deslocamentos. Elementos contínuos, descontínuos e mistos podem ser usados no contorno. Diferentes estratégias de posicionamento dos pontos de colocação são discutidas neste trabalho, onde os fatores de intensidade de tensão são avaliados com técnica de extrapolação de deslocamentos em fraturas existentes dos tipos: borda, inclinada e em forma de 'v'. Um modelo coesivo é utilizado para avaliação de comportamento estrutural de um corpo de prova com fratura de borda segundo diferentes estratégias desenvolvidas: uma análise coesiva geral e uma análise coesiva iterativa, as quais são comparadas com o comportamento não coesivo. A força normal coesiva relaciona-se com o valor da abertura de fratura na direção normal na lei constitutiva na Zona de Processos Coesivos (ZPC). A simulação de propagação de



uma fratura de borda existente e sua implementação numérica no DBEM, sob deslocamento imposto, é realizada utilizando o critério da máxima tensão circunferencial.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno; Métodos dos Elementos de Contorno Dual; Mecânica da Fratura Elástica Linear; Modelos Coesivos; Propagação de Fraturas.

## **ABSTRACT**

**FIGUEIREDO, L. G. The Dual Boundary Element Method (DBEM) incorporating a cohesive zone model to cracks analysis.** Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 169 p. Dissertação (Mestrado).

An evaluation of the effect of the cohesive fracture model on the structural behavior and the crack propagation in pre-existing cracks with the Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), for two dimensional problems, using the Dual Boundary Element Method (DBEM), is the main purpose of the present study. Linear elastic problems in continuum media can be solved with the boundary integral equation for displacements. The Dual Boundary Element Method can be used to solve fracture problems, where the traction boundary integral equation is employed beyond the displacement boundary integral equation. Conformal and non-conformal interpolations can be employed on the boundary. Different strategies for positioning the collocation points are discussed in this work, where the stress intensity factors are evaluated with the displacement extrapolation method to an existing single edge crack, central slant crack and central kinked crack. A cohesive model is used to evaluate the structural behavior of the specimen with a single edge crack under different strategies: a general cohesive analysis and an iterative cohesive analysis; which are compared with the non-cohesive behavior. The normal cohesive force is dependent of the crack opening value in the normal direction in the constitutive law of the Cohesive Process Zone (CPZ). A crack propagation of an existing single edge crack and its numerical implementation in DBEM, under constrained displacement, is analyzed using the maximum hoop stress criterion.

**Key Words:** Boundary Element Method; Dual Boundary Element Method; Linear Elastic Fracture Mechanic; Cohesive Models; Propagation of Cracks.

## SUMÁRIO

Lista de Figuras	xvii	
Lista de Tabelas	xx	
Lista de Símbolos	xxi	
Resumo	ix	
1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	3
3	Estado plano de tensão e deformação e equações integrais para o Método dos Elementos de Contorno (MEC)	9
3.1	Introdução	9
3.2	Generalidades	9
3.3	Equações de equilíbrio	11
3.4	Relação deformação – deslocamento	13
3.5	Lei de Hooke	15
3.6	Estado plano de tensão generalizado	17
3.7	Estado plano de deformação	18
3.8	Equação de equilíbrio de deslocamento – equação de Navier	20
3.9	Vetor de Galerkin	21
3.10	Solução fundamental	22
3.11	Equações integrais	29
4	Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL)	35
4.1	Introdução	35
4.2	Modos de fraturamento	36
4.3	Princípios da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL)	36

4.4	Modelos coesivos	40
4.5	Distribuição de tensões em um corpo de prova com fratura em modo I	41
4.6	Distribuição de tensões em um corpo de prova com fratura em modo II	42
4.7	Distribuição de tensões em um corpo de prova com fratura em modo III	43
4.8	Taxa de liberação de energia	44
4.9	Dimensões da zona plástica em estado plano de tensão	45
4.10	Dimensões da zona plástica em estado plano de deformação	47
4.11	Representação gráfica da zona plástica pelos critérios de von Mises e Tresca	48
5	Implementação numérica das equações integrais pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC)	49
5.1	Introdução	49
5.2	Generalidades	49
5.3	Discretização do contorno	50
5.4	Elementos de contorno	51
5.4.1	Elemento linear contínuo	55
5.4.2	Elemento linear descontínuo	56
5.4.3	Elemento misto	56
5.5	Estratégia de modelagem do contorno do problema em estudo	58
5.6	Implementação numérica	60
5.7	Pontos de carregamento	61
5.8	Posicionamento de eixos de coordenadas sobre o elemento linear	62
5.9	Integração numérica dos núcleos das equações integrais	63
5.10	Aplicação das condições de contorno	68
5.11	Solução das equações algébricas	70
5.12	Determinação das tensões nos pontos internos	70
5.13	Implementações analíticas	73
5.14	Relações entre coordenadas N e S em termos das direções 1 e 2	74
5.15	Expressões analíticas de força e deslocamento no contorno para elementos lineares	75
5.16	Determinação das tensões no contorno para elementos lineares	78
5.17	Expressões analíticas para os núcleos $D_{kij}$ e $S_{kij}$ da equação integral de tensões	79

6	Análise de problemas com fraturas pelo Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM)	81
6.1	Introdução	81
6.2	As duas equações integrais de contorno	82
6.3	Estratégia de modelagem da fratura	84
6.4	Tratamento das partes finitas das integrais	84
6.5	Considerações de corpo rígido	87
6.6	Cálculo dos fatores de intensidade de tensão	88
7	Exemplos de análise bidimensional de fraturas utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM)	91
7.1	Introdução	91
7.2	Exemplos de chapas solicitadas em regime elástico	92
7.2.1	Corpo com fratura de borda	92
7.2.2	Corpo com fratura interna inclinada	94
7.2.3	Corpo com fratura interna em forma de “v”	96
7.3	Conclusões	99
8	Fraturamento coesivo utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual	101
8.1	Introdução	101
8.2	Modelo de Zona Coesiva	101
8.3	Modelo coesivo de dois parâmetros	105
8.4	Espécime com fratura de canto sob deslocamento controlado	106
8.5	Primeira análise (incremental explícita): o modelo coesivo de dois parâmetros	107
8.6	Segunda análise (incremental iterativa não tangente): modelo coesivo com procedimento iterativo	109
8.6.1	Análise da convergência como medida de controle local	110
8.7	Terceira análise: modelo estrutural não coesivo	111
8.8	Exemplo 1: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,03$	113
8.9	Exemplo 2: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,2$	115
8.10	Análise da distribuição de forças e deslocamentos normais na zona de processos coesivos	118
8.11	Exemplo 3: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,2$ com restrição adicional de	

	deslocamento horizontal no eixo x (face vertical)	120
8.12	Exemplo 4: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,2$ com restrição adicional de deslocamento horizontal no eixo x (face horizontal)	122
8.13	Conclusão	123
9	Propagação de fraturas utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual	127
9.1	Introdução	127
9.2	Critério de propagação de fratura utilizado	127
9.3	Estratégia de implementação	128
9.4	Análise da sensibilidade da propagação para diferentes comprimentos de elementos de contorno de propagação	129
9.4.1	Simulação de propagação para um deslocamento imposto igual a $1 \times 10^{-5}$	131
9.4.2	Simulação de propagação para um deslocamento imposto igual a $1 \times 10^{-4}$	134
9.5	Conclusão	137
10	Bibliografia	139

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 -	Elemento infinitesimal	11
Figura 3.2 -	Representação das componentes de força de superfície	12
Figura 3.3 -	Estado de deformação de um sólido	13
Figura 3.4 -	Relação entre variáveis e equações	15
Figura 3.5 -	Corpo com pequena espessura	17
Figura 3.6 -	Domínio físico bidimensional	23
Figura 3.7 -	Função delta de Dirac	24
Figura 3.8 -	Acréscimo de um domínio infinitesimal	32
Figura 3.9 -	Ponto externo ao domínio	34
Figura 4.1 -	Modos de solitação de fratura	36
Figura 4.2 -	Estado de tensão no sistema polar	41
Figura 4.3 -	Energia de fraturamento	45
Figura 4.4 -	Esquema de correção de zona plástica de Irwin	46
Figura 4.5 -	Forma esquemática para zona plástica para o modo I de fratura: a) critério de von Mises e b) critério de Tresca	48
Figura 5.1 -	Discretização do perímetro em elementos de contorno	51
Figura 5.2 -	Funções de forma linear e sistema de coordenadas	52
Figura 5.3 -	Descrição do elemento linear	53
Figura 5.4 -	Elemento linear contínuo	55
Figura 5.5 -	Elemento linear descontínuo	56
Figura 5.6 -	Elemento linear misto	57
Figura 5.7 -	Definição de nó duplo	57



Figura 5.8 -	Modelagem com elementos lineares	59
Figura 5.9 -	Sistema de coordenadas r	63
Figura 5.10 -	Esquema geral de uma análise com o MEC para elementos lineares	68
Figura 5.11 -	Relação entre N e S	75
Figura 6.1 -	Elementos lineares DB e CE na ponta da fratura	88
Figura 7.1 -	Modelo com fratura de borda	93
Figura 7.2 -	Modelo com fratura inclinada	94
Figura 7.3 -	Modelo com fratura em forma de “v”	97
Figura 8.1 -	Fratura coesiva representada por uma linha em formato de mola	103
Figura 8.2 -	Lei constitutiva da zona coesiva em termos de força de superfície e deslocamento – linha em formato de mola	104
Figura 8.3 -	Modelo de fratura coesiva representando a extremidade da zona coesiva	105
Figura 8.4 -	Modelo coesivo linear de dois parâmetros	106
Figura 8.5 -	Modelo com fratura inicial $a_0$	107
Figura 8.6 -	Esquema geral de solução do modelo coesivo	108
Figura 8.7 -	Região com fratura inicial ( $a_0$ ) e ZPC	110
Figura 8.8 -	Esquema geral de solução do modelo coesivo iterativo	112
Figura 8.9 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 21000$	114
Figura 8.10 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 10$	115
Figura 8.11 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 21000$	116
Figura 8.12 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 10$	117
Figura 8.13 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 12$	118
Figura 8.14 -	Forças normais ao longo da ZPC	119
Figura 8.15 -	Abertura normal ao longo da ZPC. $E = 10$	119
Figura 8.16 -	Modelo com restrição adicional na face vertical	120
Figura 8.17 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 10$ . Restrição adicional de deslocamento na face vertical	121
Figura 8.18 -	Modelo com restrição adicional na face horizontal (inferior e superior)	122
Figura 8.19 -	Diagrama carga-alongamento. $E = 10$ . Restrição adicional de deslocamento na face horizontal	122
Figura 9.1 -	Ângulo de propagação para um incremento <b>da</b> de fratura	128

Figura 9.2 -	Esquema geral de simulação de propagação para um alongamento fixo	129
Figura 9.3 -	Modelo sob deslocamento controlado	130
Figura 9.4 -	Históricos de $K_I$ e $K_{II}$ para elemento de propagação de comprimento $l = 0.002$ (Alongamento $1 \times 10^{-5}$ )	131
Figura 9.5 -	Históricos de $K_I$ e $K_{II}$ para elemento de propagação de comprimento $l = 0.001$ (Alongamento $1 \times 10^{-5}$ )	132
Figura 9.6 -	Históricos de $K_I$ e $K_{II}$ para elemento de propagação de comprimento $l = 0.0005$ (Alongamento $1 \times 10^{-5}$ )	132
Figura 9.7 -	Trajectoria de propagação de fratura (Alongamento $1 \times 10^{-5}$ )	133
Figura 9.8 -	Históricos de $K_I$ e $K_{II}$ para elemento de propagação de comprimento $l = 0.002$ (Alongamento $1 \times 10^{-4}$ )	134
Figura 9.9 -	Históricos de $K_I$ e $K_{II}$ para elemento de propagação de comprimento $l = 0.001$ (Alongamento $1 \times 10^{-4}$ )	135
Figura 9.10 -	Históricos de $K_I$ e $K_{II}$ para elemento de propagação de comprimento $l = 0.0005$ (Alongamento $1 \times 10^{-4}$ )	136
Figura 9.11 -	Trajectoria de propagação de fratura (Alongamento $1 \times 10^{-4}$ )	137

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 -	Variáveis prescritas e incógnitas	60
Tabela 5.2 -	Estratégia de posicionamento dos pontos de colocação	61
Tabela 7.1 -	Fator de intensidade de tensão $K_I$ para fratura de borda	93
Tabela 7.2 -	Fator de intensidade de tensão $K_I$ para fratura inclinada	95
Tabela 7.3 -	Fator de intensidade de tensão $K_{II}$ para fratura inclinada	95
Tabela 7.4 -	Fator de intensidade de tensão $K_I$ em P	98
Tabela 7.5 -	Fator de intensidade de tensão $K_{II}$ em P	98
Tabela 7.6 -	Fator de intensidade de tensão $K_I$ em Q	98
Tabela 7.7 -	Fator de intensidade de tensão $K_{II}$ em Q	99
Tabela 8.1 -	Tabela comparativa das análises realizadas	125

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_{ij}$	Tensor de Tensões
$\epsilon_{kl}, \epsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$b_i$	Vetores das forças de volume
$T_i$	Vetores das forças de superfície
$U_i$	Vetor de deslocamentos
$n_i$	Componente normal à superfície de contorno
$S_i$	Componente tangencial à superfície de contorno
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$C_{ijkl}$	Tensor das constantes elásticas do material
$\mu, \lambda$	Constantes de Lamé
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal.
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$G_i$	Vetor de Galerkin
$\nabla^2$	Operador diferencial escalar (Laplace), $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
$\Delta(\xi, x)$	Delta de Dirac
$r(p, Q)$	Distancia entre o ponto campo e o ponto de carregamento (fonte)
$U_{ij}$	Solução fundamental de deslocamentos
$P_{ij}$	Solução fundamental das forças superficiais
$\Omega$	Domínio

$\Omega_\varepsilon$	Domínio infinitesimal
$\varepsilon$	Raio infinitesimal de acréscimo de domínio
(p,Q)	Coordenadas dos pontos fonte e campo
$\Gamma$	Contorno
$\Gamma_\varepsilon$	Variável do acréscimo de contorno infinitesimal
$\gamma$	Comprimento em radianos do arco descrito por $\Gamma_\varepsilon$
$\pi$	3,14159265358979
$[c_{ik}]$	Matriz que depende da geometria do contorno
$\xi$	Variável intrínseca local
$\phi_i(\xi)$	Funções de forma
$J$	Jacobiano
$[H]_{ij}$	Matriz na formulação do MEC, cujos componentes multiplicam o vetor de deslocamentos
$[G]_{ij}$	Matriz na formulação do MEC, cujos componentes multiplicam o vetor de forças superficiais
$[u_c]$	Constante de deslocamento arbitrário
$l$	Extensão do elemento de contorno
$S_{kij}$	Núcleo de terceira ordem da equação integral de tensões
$D_{kij}$	Núcleo de terceira ordem da equação integral de tensões
$\sigma$	Tensão nominal (longe da fratura)
$a$	Comprimento da fratura
$y$	Parâmetro adimensional
$w$	Largura que está solicitada pelo carregamento
$K$	Fator de intensidade de tensão
$K_c$	Fator de intensidade de tensão crítico
$K_{Ic}$	Tenacidade à fratura (modo I) em estado de deformação plana ou fator de intensidade de tensão crítico (modo I)
$K_I$	Fator de intensidade de tensão (modo I)
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão (modo II)
$K_{III}$	Fator de intensidade de tensão (modo III)

$G$	Taxa de liberação de energia de deformação elástica
$G_c$	Taxa de liberação de energia de deformação elástica crítica
$\theta$	Coordenada polar
$u, v, w$	Deslocamentos
$d\Pi$	Varição de energia potencial
$dA$	Varição da área da fissura
$r_y$	Raio da zona plástica
$p$	Vetor de força de superfície na região coesiva
$w$	Distância de separação entre dois pontos originalmente coincidentes na fratura
$K(w_d)$	Rigidez da zona coesiva
$p_y$	Força de superfície máxima na região coesiva
$w_f$	Máxima distância de separação na região coesiva
$\Delta$	Alongamento total imposto
$a_0$	Fratura real
$E_r$	Valor de tolerância de erro
$da$	Incremento de fratura

## **1 – INTRODUÇÃO**

As soluções de problemas físicos, em geral, excetuando-se os casos simples, podem ser muito difíceis de serem encontradas pelos métodos analíticos. Para a obtenção de soluções aproximadas de problemas de grande complexidade de análise recorre-se aos métodos numéricos de análise, a exemplo do Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas (MDF) ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi escolhido como a ferramenta utilizada neste trabalho. As equações diferenciais que regem determinado problema físico são transformadas em equação integral de contorno para a superfície do problema. Estas integrais são numericamente resolvidas para os elementos discretizados no contorno. O método fornece resultados no contorno e no domínio de problemas físicos em geral.

O Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) pode ser utilizado para análise de problemas com fraturas. A avaliação da influência de um modelo coesivo de fratura no comportamento estrutural e a simulação de propagação de fraturas pré-existentes, com a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), em problemas bidimensionais, usando o Método dos Elementos de Contorno Dual, é o principal objetivo deste trabalho.

Este trabalho está dividido em dez capítulos. A revisão bibliográfica está no capítulo dois. A bibliografia encontra-se no capítulo dez.

No capítulo três são apresentadas generalidades sobre o estado plano de tensão e deformação, as hipóteses da Teoria da Elasticidade e a formulação das equações integrais utilizadas no Método dos Elementos de Contorno.

Os princípios da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) são apresentados no capítulo quatro.

A implementação numérica das equações integrais de forças e deslocamentos, a dedução da equação integral de tensões, as integrais analíticas utilizadas no Método dos Elementos de Contorno estão no capítulo cinco. Neste capítulo é definida a estratégia de modelagem e análise de problemas de fratura.

A formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual, a partir da equação integral de deslocamento e equação integral de forças de superfície e o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, estão no capítulo seis.

Exemplos de problemas bidimensionais com fratura existente, analisados em regime elástico linear com a MFEL, são apresentados no capítulo sete. O cálculo dos fatores de intensidade de tensão por duas estratégias distintas de posicionamento de pontos de colocação, utilizando o DBEM, é avaliado com dados numéricos e experimentais.

O fraturamento coesivo, utilizando o DBEM, é apresentado no capítulo oito, onde se desenvolvem duas estratégias distintas de análise coesiva. As simulações numéricas para abertura de fratura, sem propagação, são realizadas sob deslocamento imposto. É apresentada a influência do comportamento coesivo de fratura nos resultados das análises.

A estratégia computacional de simulação de propagação de fraturas, no meio bidimensional, utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno Dual, é apresentada no capítulo nove, onde exemplos de propagação de fraturas pré-existentes são avaliados.

As conclusões são apresentadas no final dos capítulos sete, oito e nove, respectivamente.



## 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo da aplicação de técnicas de equações integrais como alternativa à resolução de equações diferenciais data desde o século XIX.

Betti [33] em 1872 foi o primeiro a estudar a teoria da elasticidade com equações integrais relacionando forças de superfície e deslocamentos aplicados no contorno.

Em 1886, Somigliana apresentou a equação integral que estabelece uma relação entre forças e deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos. Esta relação é conhecida como identidade de Somigliana.

Em 1903, Fredholm [34] aplicou equações integrais para formular os problemas de valor de contorno e demonstrou a existência de soluções. O advento de computadores de alta velocidade de processamento permitiu implementações de procedimentos numéricos para a rápida solução dos problemas de engenharia.

Para problemas lineares, as equações integrais podem ser formuladas a partir do teorema de Green, como apresentou Kellog [35] para problemas de potenciais em 1927.

Equações integrais de Fredholm [34] foram aplicadas em problemas de potencial.

Kupradze [36] em 1965 introduziu equações integrais vetoriais, no contexto da teoria da elasticidade.

Em 1963, Jawson [37] e Symm [38] apresentaram uma técnica numérica para resolução das equações integrais de Fredholm. A técnica consistia em dividir o contorno em uma série de segmentos (elementos), e as equações integrais de contorno serão aplicadas a um número particular de pontos (nós) pertencente ao contorno. Um sistema de equações lineares é obtido e determinam-se as incógnitas do problema. Entre 1970 e 1977 Jawson [37] e Symm [38] aprimoraram sua técnica.

Hess e Smith em 1967 usaram uma técnica similar para o cálculo do fluxo de um problema potencial em torno de corpos arbitrários. As integrais sobre cada elemento eram calculadas por técnicas de quadratura, e os termos singulares por meio de expansão em séries.

Em 1967, Rizzo [39] propôs a diferenciação da identidade de Somigliana para deslocamentos e, subsequentemente a aplicação da lei de Hooke obteve através de uma equação integral de contorno para tensões no interior do corpo elástico, linear e isotrópico. Em 1969 Cruse derivou uma forma explícita desta representação para corpos elásticos tridimensionais.

Em 1977, Cruse [40] apresentou uma representação bidimensional de tensão, semelhante à identidade de Somigliana e a denominou de identidade de Somigliana para tensões.

Os primeiros textos do Método dos Elementos de Contorno (MEC) foram publicados por Brebbia [41] no fim da década de setenta e início dos anos oitenta, seguindo-se grande volume de trabalhos.

Nos primórdios dos estudos de materiais, a primeira contribuição feita em relação ao estudo da mecânica da fratura foi feita por Leonardo Da Vinci, que mediu a resistência de arames de ferro e percebeu que esta resistência variava inversamente com o comprimento dos mesmos. A partir desses resultados concluiu que defeitos ou fraturas existentes no material controlavam sua resistência. A um arame mais longo correspondia uma maior probabilidade de amostrar uma região contendo esses defeitos, por conseguinte, uma menor resistência.

Em 1913, Inglis [42] publicou uma análise matemática de tensões para a condição de uma placa finita com orifício elíptico central, modelando uma fratura como uma abertura elíptica longa e estimando fatores de concentração de tensões. Introduziu o conceito da singularidade na ponta da fratura.

Posteriormente em 1920, Griffith [43, 44] usou os trabalhos de Inglis [42] para a partir das Leis da Termodinâmica, formular um critério de energia capaz de prever se uma fratura propagar-se-ia de maneira instável em um material idealmente frágil, resultando em falha. Valeu-se de uma metodologia de energia, abandonando a abordagem de tensões de Inglis [42], por não conseguir explicar fisicamente a singularidade de tensões na ponta da fratura. De acordo com Griffith, considerando-se uma placa fraturada de um dado material, se a taxa de variação da energia elástica armazenada nesta placa igualasse ou excedesse o trabalho necessário para produzir uma superfície de fratura, então o crescimento de fratura ocorreria. O modelo de Griffith era capaz de prever corretamente a relação quantitativa entre resistência do material e tamanho de fratura em corpos de prova de vidro. No entanto quanto a materiais mais dúcteis, como os metais, não eram capazes de apresentar resultados satisfatórios.

Em 1948 e 1949, trabalhando separadamente, Irwin e Orowan, sugeriram alterações no modelo original de Griffith, de forma a torná-lo aplicável a metais. Foi então definido o Modelo de Griffith Generalizado, onde se admitia que o trabalho de fratura, em um material genérico, seria ocasionado pela combinação de duas parcelas: a primeira, devida à energia superficial, e outra, função do escoamento e da deformação plástica ocorrendo ao redor da ponta da fratura, sendo que para materiais metálicos a parcela da energia superficial é desprezível [45].

Irwin e Kies, em 1952 definiram o parâmetro  $G$ , a partir do Método de Griffith Generalizado. Em 1957, Irwin [46], utilizando-se do trabalho de Westgaard [47], propôs uma abordagem de fratura baseada no campo de tensões na região da ponta da fratura, conhecida como metodologia de  $K$  (especula-se na literatura que a metodologia recebeu este nome de  $K$  devido ao nome Kies), o fator de intensidade de tensão. Irwin [46] mostrou que a fratura ocorre quando uma determinada distribuição de tensões à frente da ponta da fratura é atingida.

A aplicação da mecânica da fratura ao problema de fadiga em metais foi feita por Paris e Erdogan em 1961, onde observaram que a taxa de crescimento de fratura por fadiga estava relacionada com o intervalo de fatores de intensidade de tensão dos carregamentos cíclicos [45].

Em 1968, Rice desenvolveu a abordagem da integral J para a Mecânica da Fratura Não Linear (acredita-se que o nome integral J é devido ao nome James Rice) [45]. Rice demonstrou que o valor J é nulo quando a integral é aplicada a um contorno fechado. A integral J tem aplicação em mecânica da fratura elástico-plástica e também na linear.

Para a modelagem de corpos com fraturas em métodos numéricos, como o Método dos Elementos de Contorno, há vários tipos de estratégias que podem ser adotadas para discretizar a fratura matemática (trinca em que ambas as superfícies tem pontos em superfícies opostas com mesmas coordenadas) [48].

A simples aplicação do MEC para problemas de fratura leva a uma degeneração matemática se duas superfícies de fratura são consideradas coplanares [49]. Para corpos de geometrias de fratura simétrica, a dificuldade da modelagem pode ser superada pela imposição da condição de contorno de simetria e então se modela somente uma superfície de fratura. Entretanto, para problemas em que não há geometria com simetria de fratura outros caminhos foram explorados. Cruse e Van Buren [50] analisaram a possibilidade de modelar a fratura com uma fratura elíptica, entretanto esta modelagem requer muitos elementos para discretizar a ponta da fratura elíptica. Esta análise é considerada pobre porque acarreta erros da ordem de quatorze por cento.

Snyder e Cruse [51] introduziram uma forma especial de soluções fundamentais para fraturas em meio anisotrópico. A solução fundamental (função de Green) contém a forma exata da fratura livre de forças superficiais em um meio infinito, então a modelagem de superfícies não é requerida. A técnica da função de fratura de Green é precisa, mas limitada a fraturas retas bidimensionais. O primeiro método aplicável de acordo com a presença de duas superfícies de fraturas coplanares foi desenvolvido por Blandford et al [14]. Esta aproximação, que tem por base a formulação em um domínio múltiplo, é geral e pode ser aplicada para problemas de

fraturas simétricos e anti-simétricos em análise de configuração bidimensional e tridimensional. O método do domínio múltiplo ou sub-regiões introduz contornos artificiais no corpo, que conectam a fratura ao contorno, de modo que cada região contenha a superfície de fratura. A principal desvantagem deste método é que a introdução de contornos artificiais não é a única, e dificulta a implementação em procedimento automático. Em adição ao dito anteriormente, o método degenera quando um sistema algébrico grande é requerido. Ignorando-se essas desvantagens, o método das sub-regiões pode ser usado amplamente em problemas com fraturas.

Mais recentemente, o Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) tem sido desenvolvido por Portela, Aliabadi e Rooke [5] para problemas de corpos com fraturas bidimensionais e por Mi e Aliabadi [53] para problemas de corpos com fraturas tridimensionais. No contexto da aplicação direta do MEC, as duas equações integrais de contorno, que se usam no método, foram primeiramente apresentadas por Watson [39], em formulação baseada na equação de deslocamento e na derivada da equação de deslocamento em relação a normal. Para problemas tridimensionais na elasticidade, a formulação do DBEM foi apresentada por Gray et al [54]. Muitas outras contribuições foram feitas por Gray e Giles [55], Lutz [56], Hong e Chen [4] no DBEM para vários tipos de aplicações do método para fraturas.

As formulações matemáticas capazes de representar o fraturamento coesivo começaram a ser desenvolvidas a partir do modelo proposto por Dugdale em 1960 [57], mas o grande desenvolvimento nessa área ocorreu a partir do final dos anos setenta com o modelo de fissura fictícia de Hillerborg [58].

Em 1988, Yang [24] apresenta a formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual incorporando um modelo de zona coesiva para análise de fraturas elastostáticas e discute exemplos de aplicação.

Em 1999, Bueno [25] apresenta uma ferramenta computacional para simulação do fraturamento coesivo bidimensional, utilizando o Método dos Elementos Finitos (FEM). Bittencourt [66] descreve os processos de fraturamento do concreto estrutural, onde são

abordados aspectos teóricos, computacionais e experimentais, ligados à aplicação da mecânica da fratura do concreto.

Em 2001, Moës et al [62] apresenta a propagação de fraturas coesivas para diferentes espécimes de concreto com a utilização do Método dos Elementos Finitos Extendido (X-FEM). Wells [63] também apresenta a modelagem de fraturas utilizando elementos finitos.

Em 2002, Moës et al [60,61] apresenta a modelagem de propagação de fraturas tridimensionais não coplanares com o Método dos Elementos Finitos Extendido (X-FEM) e exemplos de aplicações numéricas.

Em 2003, Sukumar et al [31,59] apresenta a implementação da modelagem de propagação de fraturas com o Método dos Elementos Finitos Extendido (X-FEM) e exemplos de aplicações numéricas.

Trabalhos recentes têm sido apresentados por Bittencourt [64] abordando a modelagem de fraturas coesivas por meio do Método dos Elementos Finitos. Bittencourt et al [65] apresenta a aplicação do modelo de fratura fictícia para problemas bidimensionais com a utilização de elementos de interface e o Método dos Elementos Finitos.

Em 2004, Prado [27] apresenta pesquisas sobre a influência da estrutura interna do material na simulação computacional de elementos estruturais de concreto, onde apresenta abordagens para representação do material e da fissuração, dentre elas, o modelo coesivo.

Pesquisas recentes têm comprovado a validade de generalizações dos modelos bidimensionais em processos de fraturamento coesivo tridimensional [67,68].

## **3 - ESTADO PLANO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO E EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)**

### **3.1 – Introdução**

Neste capítulo é apresentado um resumo sobre a elasticidade linear, estado plano de tensão e deformação, as formulações das equações integrais de deslocamento e equações integrais de forças de superfície, as quais servirão de base para o estudo proposto.

### **3.2 – Generalidades**

Os materiais utilizados em engenharia deformam-se com a atuação de agentes externos, como os carregamentos, pressão, efeito do tempo e efeitos de curta duração, como as colisões entre dois ou mais corpos deformáveis. São de grande interesse na engenharia estrutural o estudo de uma variedade de materiais quanto à resistência, fratura e fadiga, assim como suas relações de comportamento sob esses efeitos.

A Teoria da Elasticidade assume como hipóteses básicas condições de homogeneidade, isotropia e que os corpos sejam perfeitamente elásticos.

Os materiais homogêneos são aqueles que apresentam as mesmas propriedades físicas para qualquer elemento infinitesimal. Admite-se que a matéria esteja continuamente distribuída para qualquer região do elemento em estudo.

O comportamento dos materiais é dependente da intensidade da ação aplicada. Os corpos perfeitamente elásticos são aqueles que retornam a sua geometria inicial depois de cessado a atuação dos agentes externos, ou seja, não há deformação residual após a retirada dos carregamentos. No comportamento inelástico, os corpos não retornam a sua geometria inicial quando cessados os carregamentos. Muitas estruturas são projetadas admitindo-se o comportamento do material em regime elástico sob condições de serviço. Os materiais isotrópicos são aqueles que apresentam as mesmas propriedades elásticas para qualquer direção de sollicitação de carregamento.

Algumas simplificações da Lei de Hooke podem ser feitas para a análise bidimensional de tensão e deformação. Um elemento estrutural pode ser analisado em estado plano de tensão ou estado plano de deformação. Uma estrutura composta de um material deformável sofre deformações normais e de cisalhamento quando sollicitada estruturalmente. A sollicitação do elemento gera deformações e tensões no plano que contém as cargas e nos demais planos fora da aplicação das cargas.

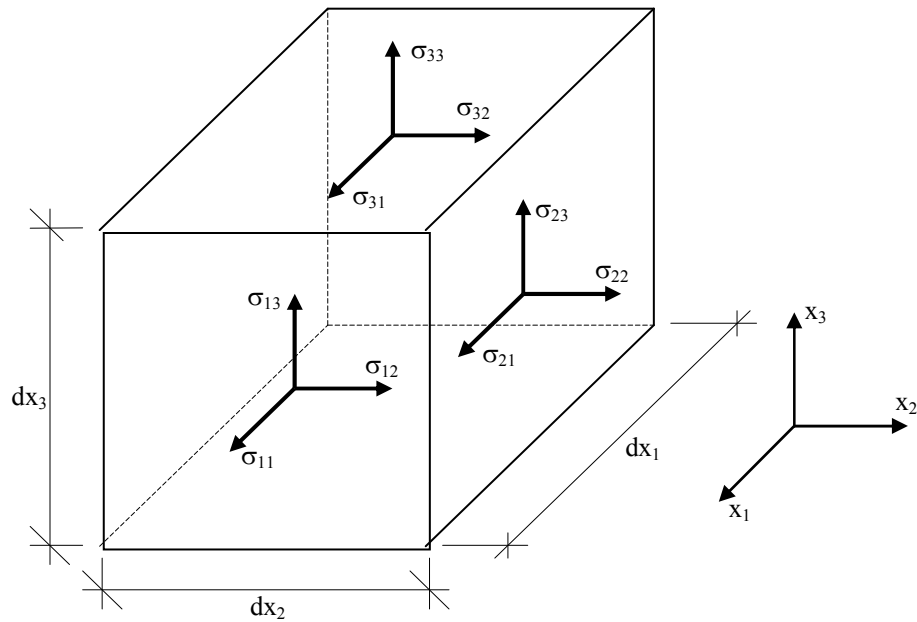
Para o estado plano de tensão admite-se a inexistência de restrição aos deslocamentos e deformações fora do plano de aplicação das cargas. Como a estrutura está livre de restrições para a direção  $z$ , as tensões  $\sigma_z$  são nulas e verifica-se a existência de deformações normais para o eixo  $z$ , enquanto que as deformações por cisalhamento no eixo  $z$  são nulas. Como exemplos de aplicação têm-se as estruturas finas, como chapas, membranas e placas quando sollicitadas no plano.

Para o estado plano de deformação admite-se que existem restrições de deslocamento e de deformações segundo o eixo  $z$ . Com o efeito dessa condição, têm-se valores nulos para as deformações normais em  $z$  ( $\epsilon_z$ ) e tensões  $\sigma_z$  não nulas devido a essa restrição. As deformações por cisalhamento no eixo  $z$  também são nulas. Como exemplos de aplicação têm-se as estruturas que apresentam grandes dimensões segundo o eixo  $z$  e seção prismática, como túneis, muros de arrimo, tubo cilíndrico com pressão interna, dentre outras.



### 3.3 - Equações de equilíbrio

Seja um elemento infinitesimal com dimensões  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , em equilíbrio, sujeito a tensões internas. As seguintes equações de equilíbrio de tensões podem ser escritas:



**Figura 3.1** – Elemento infinitesimal.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad (3.3)$$

Onde  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são os vetores das forças de volume para a direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,

respectivamente.

Em notação indicial, tem-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.4)$$

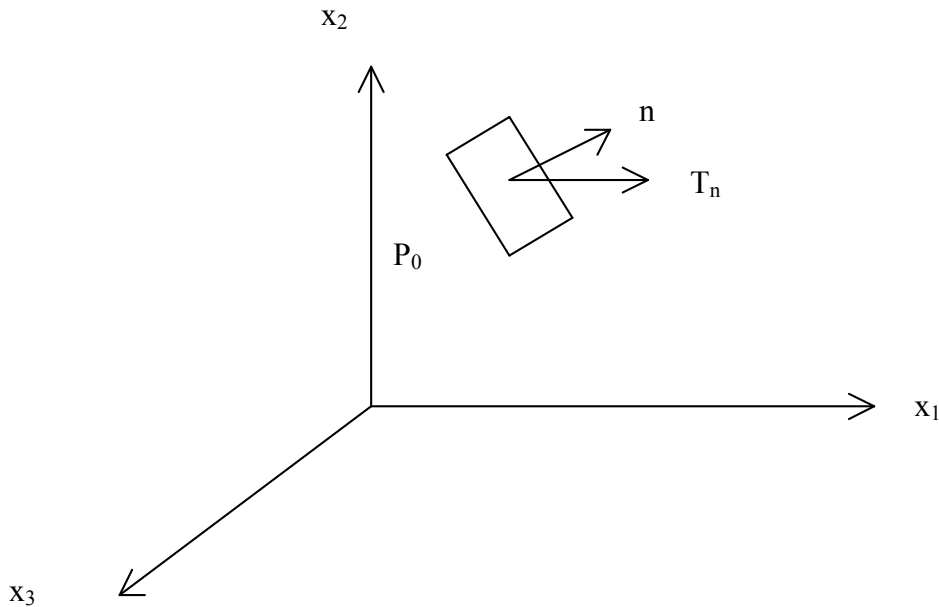
As componentes do tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  estão em equilíbrio com as forças superficiais agindo em um elemento diferencial  $d\Gamma$ . Para a superfície do elemento, as forças de superfície  $T_i$  são dadas por:

$$T_1 = \sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \quad (3.5)$$

$$T_2 = \tau_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \quad (3.6)$$

$$T_3 = \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \quad (3.7)$$

$n_1, n_2$  e  $n_3$  são os cossenos diretores da normal à superfície do elemento em relação aos eixos  $x, y$  e  $z$ .



**Figura 3.2** – Representação das componentes de força de superfície.

Escrevendo-se as equações anteriores em notação indicial, tem-se:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (3.8)$$

### 3.4 - Relação deformação – deslocamento

Pela teoria da elasticidade, assume-se que um corpo sob ação de forças externas e restrito a deslocamento ou rotação comporta-se como um corpo deformável, ou seja, não há deslocamento do corpo sem que ele sofra deformações.

Um corpo constituído de material homogêneo, posicionado genericamente no espaço, possui coordenadas do ponto P dadas por  $x_i$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) tendo como referência os eixos  $x_1, x_2, x_3$ . As coordenadas do mesmo ponto P do corpo após a deformação são dadas por  $\xi_i$  ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) com referência aos mesmos eixos. Seja a distância entre o ponto P ( $x_i$ ) e o ponto Q ( $x_i + dx_i$ ) dada por  $ds_0$  no estado indeformado, após a deformação os pontos P e Q serão deformados para as novas posições  $P'(\xi_i)$  e  $Q'(\xi_i + d\xi_i)$  e a nova distância entre eles será  $ds$ . O vetor deslocamento é dado por  $u_i$ .

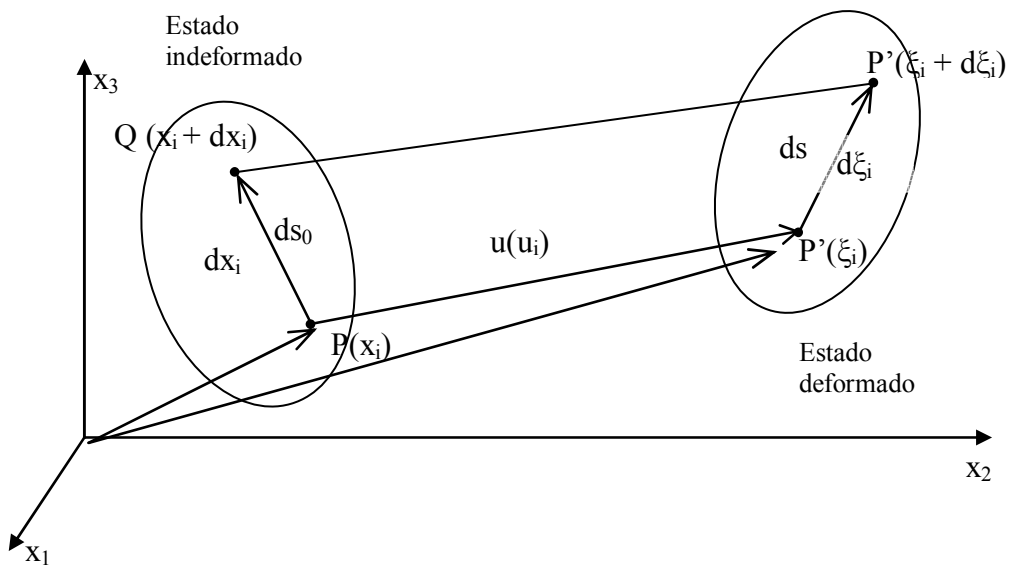


Figura 3.3 – Estado de deformação de um sólido.

Têm-se para o estado indeformado, em notação indicial:

$$ds_0^2 = dx_i dx_i \quad (3.9)$$

$$ds^2 = d\xi_i d\xi_i \quad (3.10)$$

Para a posição P', têm-se:

$$\xi_i = x_i + u_i \quad (3.11)$$

$$d\xi_i = dx_i + u_{i,j} dx_j \quad (3.12)$$

$$d\xi_i = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j \quad (3.13)$$

$$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j \quad (3.14)$$

Quando as grandezas  $ds_0^2$  e  $ds^2$  permanecem iguais para o estado deformado e indeformado, pode-se afirmar que houve apenas um deslocamento de corpo rígido. Portanto o valor da diferença entre  $ds_0^2$  e  $ds^2$  pode ser tomado como o parâmetro de medida de deformação.

A partir das equações (3.9), (3.10) e (3.11), têm-se:

$$\begin{aligned} ds_0^2 - ds^2 &= d\xi_i d\xi_i - dx_i dx_i = d\xi_r d\xi_r - dx_r dx_r = (\delta_{ri} + u_{ri}) dx_i (\delta_{rj} + u_{rj}) dx_j - \\ & dx_r dx_r \\ ds_0^2 - ds^2 &= (u_{ij} + u_{ji} + u_{ri} u_{rj}) dx_i dx_j \\ ds_0^2 - ds^2 &= 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

O tensor  $\varepsilon_{ij}$  é definido como:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{ij} + u_{ji} + u_{ri} u_{rj}) \quad (3.16)$$

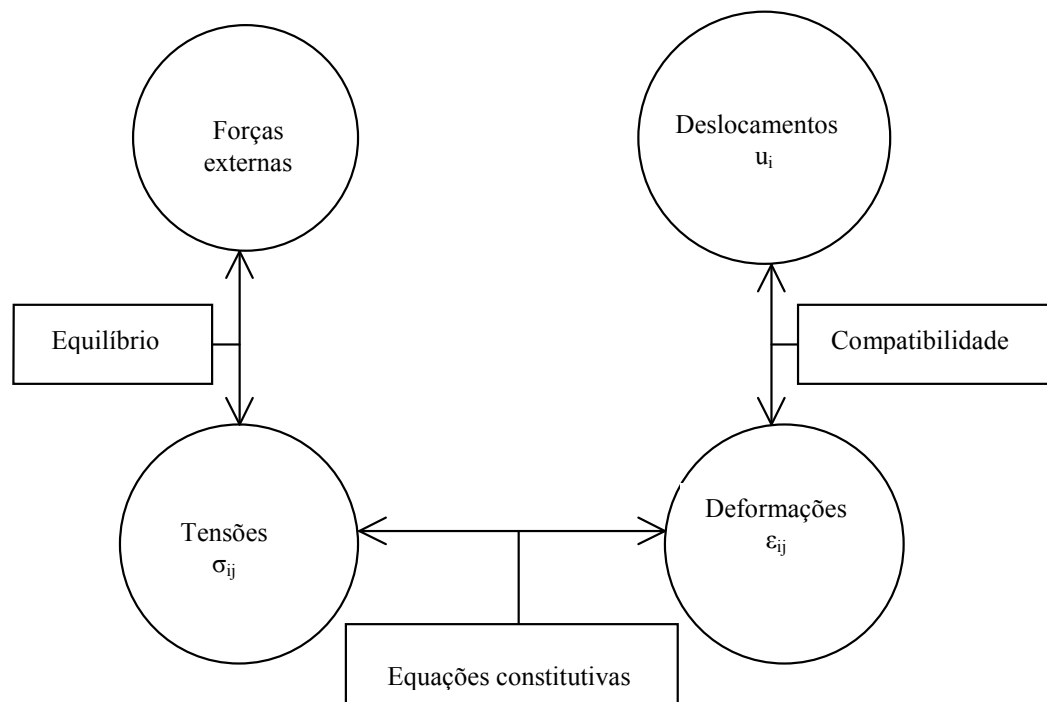
Considerando os deslocamentos  $u_i$  e suas derivadas como pequenos valores, os termos de segunda ordem da equação (3.16) podem ser omitidos. Para as pequenas deformações despreza-se o produto de derivadas, as deformações obtidas são linearizadas, o tensor de deformação obtido é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.17)$$

sendo  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes do tensor Lagrangeano das deformações.

### 3.5 - Lei de Hooke

Para o volume do material, as três equações de equilíbrio (3.1), (3.2) e (3.3), as seis equações de compatibilidade entre deformação e deslocamento (3.17) representam um total de nove equações envolvendo quinze variáveis desconhecidas (seis tensões, seis deformações e três deslocamentos). A formulação geral para a solução de problemas de mecânica dos sólidos é dependente das equações constitutivas dos materiais, as quais acrescentam mais seis relações entre tensões e deformações, totalizando assim quinze equações.



**Figura 3.4** – Relação entre variáveis e equações.

Para alguns materiais homogêneos, elásticos e lineares, as relações entre tensões e deformações apresentam um comportamento linear. Esta relação é definida pela Lei de Hooke e sua forma generalizada pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.18)$$

$C_{ijkl}$  é o tensor de quarta ordem que contém as constantes elásticas do material.

$\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{kl}$  são os tensores de segunda ordem.

Pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.19)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.20)$$

$\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé (material isotrópico). O símbolo  $\mu$  recebe o nome de módulo de deformação transversal. Pode-se escrever:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.21)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (3.22)$$

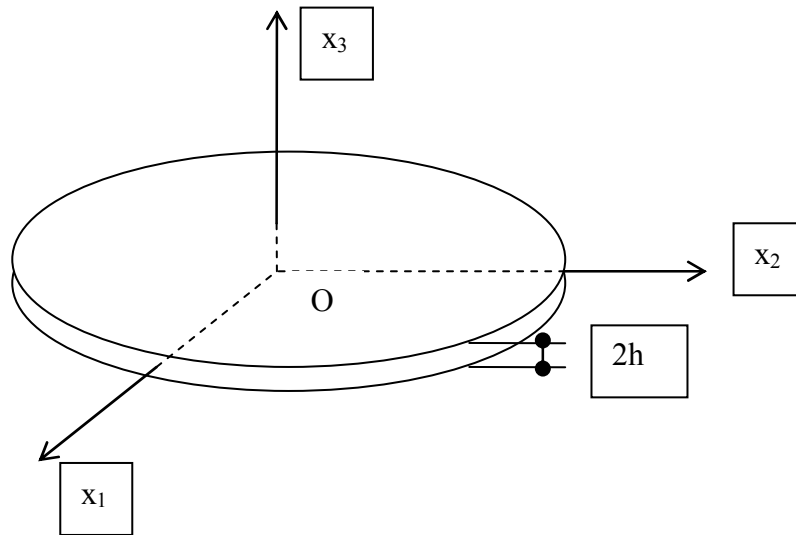
$E$  é o módulo de deformação longitudinal do material (material isotrópico).

$\nu$  é o coeficiente de Poisson (material isotrópico).

### 3.6 - Estado plano de tensão generalizado

A figura, a seguir, ilustra um corpo com pequena dimensão na direção  $x_3$ . Se a tensão  $\sigma_{33}$  for desprezível ao longo da espessura dessa chapa e as tensões tangenciais também puderem ser desprezadas nas faces perpendiculares a  $x_3$ , então os valores das deformações, deslocamentos e tensões ao longo da espessura podem ser tomados como iguais aos seus valores médios. Pode-se escrever:

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (3.23)$$



**Figura 3.5** – Corpo com pequena espessura.

Os pontos no plano médio da chapa não sofrem qualquer deslocamento  $u_3$  na direção  $Ox_3$ . Os deslocamentos  $u_3$  nos demais pontos, nos planos paralelos ao plano médio, também são muito pequenos. Pode-se concluir que as variações das componentes  $u_1$  e  $u_2$  de deslocamentos ao longo da espessura também são pequenas. A aproximação será tanto melhor quanto mais fina for a chapa. Este estado é chamado de estado plano de tensões generalizado.

Para o estado plano de tensão generalizado admite-se a existência de tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$

no plano de atuação das forças externas. As forças externas são aplicadas ao longo da chapa e distribuídas uniformemente ao longo da espessura da chapa. Admitem-se as seguintes condições:

$$\sigma_z = 0 \quad (3.24)$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad (3.25)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (3.26)$$

Para o estado plano de tensão generalizado, a Lei de Hooke pode ser reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

A deformação para a direção  $z$  é dada por:

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.29)$$

### 3.7 - Estado plano de deformação

Para o estado plano de deformação admite-se a existência de tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  no plano da seção transversal de elementos prismáticos com grandes dimensões segundo a direção  $z$ .



As forças externas são aplicadas uniformemente ao longo do eixo  $z$  e não variam ao longo do comprimento. Como o sólido apresenta grande dimensão no sentido do eixo  $z$ , admite-se que as deformações normais ( $\varepsilon_z$ ) e de cisalhamento ( $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$ ) sejam nulas, para uma seção transversal em análise.

Tem-se para o estado plano de deformação:

$$\varepsilon_z = 0 \quad (3.30)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (3.31)$$

$$\gamma_{zx} = 0 \quad (3.32)$$

Para o estado plano de deformação, a Lei de Hooke pode ser reduzida, em termos de tensão e de deformação para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

As deformações por cisalhamento segundo o eixo  $z$  são nulas. A componente de tensão normal em  $z$  é dada por:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.35)$$

Pode-se representar a deformação, para estados planos de tensão, fazendo-se as seguintes substituições (1) e (2):

(1) Para o estado plano de deformação:

$$E^* = E \quad (3.36)$$

$$\nu^* = \nu \quad (3.37)$$

$$G^* = G \quad (3.38)$$

(2) Para o estado plano de tensões:

$$E^* = \frac{E(1 + 2\nu)}{(1 + \nu)^2} \quad (3.39)$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (3.40)$$

$$G^* = G \quad (3.41)$$

Para a consideração da espessura da chapa a ser analisada e obtenção dos valores médios de deformação e deslocamentos, no estado plano de tensão generalizado, os módulos de deformação longitudinal e transversal deverão ser multiplicados pela espessura da chapa.

### 3.8 - Equação de equilíbrio de deslocamento - Equação de Navier

As relações entre deformação e deslocamento (3.17) podem ser substituídas nas relações tensão – deformação (3.19). As expressões que relacionam tensão e deslocamento podem ser substituídas nas equações gerais de equilíbrio em termos de tensões (3.1) e (3.2), têm-se as seguintes expressões, para o caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) = \frac{-b_1}{G} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) = \frac{-b_2}{G} \quad (3.43)$$

As equações diferenciais de equilíbrio de deslocamentos anteriores são conhecidas como equações de Navier.

### 3.9 Vetor de Galerkin

O desacoplamento das equações de Navier, em termos de deslocamento  $u_i$ , pode ser realizado substituindo-se as componentes de deslocamento por uma expressão envolvendo outro vetor  $G$ , de derivadas de segunda ordem, chamado de vetor de Galerkin.

As equações diferenciais de Navier podem ser transformadas em equações diferenciais biarmônicas, realizando as seguintes substituições, utilizando a aproximação do vetor de Galerkin.

$$u_x = \frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.44)$$

$$u_y = \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.45)$$

Têm-se as seguintes equações:

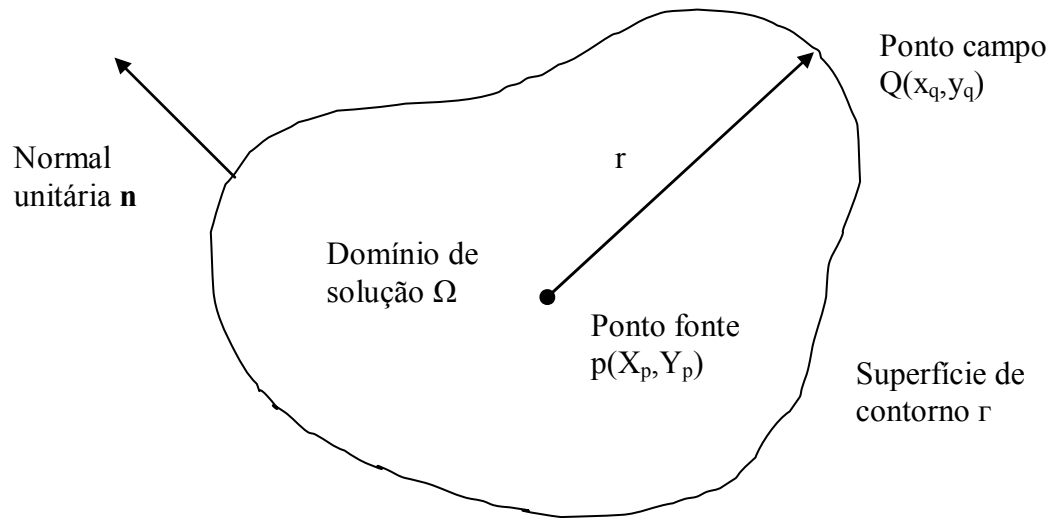
$$\nabla^4 G_x = \nabla^2(\nabla^2 G_x) = \frac{-b_1}{G} \quad (3.46)$$

$$\nabla^4 G_y = \nabla^2(\nabla^2 G_y) = \frac{-b_2}{G} \quad (3.47)$$

O operador mostrado nesta equação é chamado de operador biarmônico, quando as forças de volume são iguais a zero nas equações (3.46) e (3.47), a equação é chamada biarmônica.

### 3.10 - Solução fundamental

A solução fundamental de uma equação diferencial é uma função complementar que satisfaz a equação, definida como uma solução singular da equação de Laplace com não homogeneidade, dada pela função delta de Dirac  $\Delta(\xi, x)$ . A solução fundamental fornece a resposta de um ponto genérico de um domínio (geralmente infinito), chamado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto desse domínio.



**Figura 3.6** – Domínio físico bidimensional.

Algumas propriedades da função delta de Dirac são:

a)  $\Delta(x - \xi) = 0$ , para  $x \neq \xi$ ;

b)  $\Delta(x - \xi) = \infty$ , para  $x = \xi$ ;

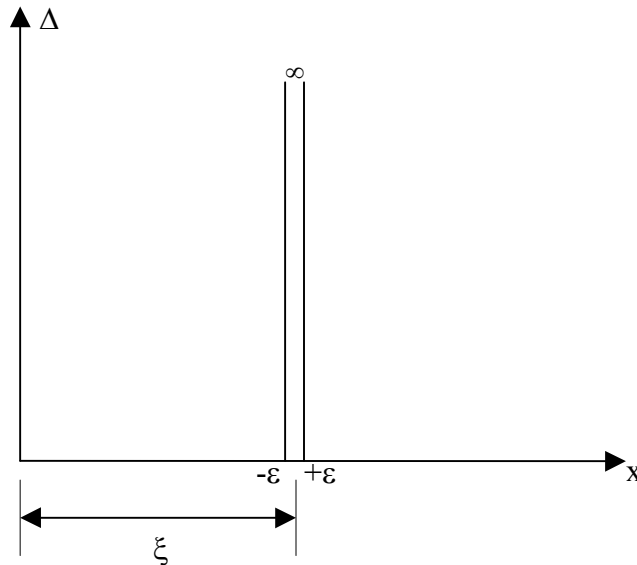
c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x - \xi) dx = 1$ , para  $\xi$  contido no intervalo de integração;

d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x - \xi) dx = 0$ , para  $\xi$  não contido no intervalo de integração;

e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(x - \xi) dx = f(\xi)$ , para  $\xi$  não contido no intervalo de integração.

A função delta de Dirac é uma alternativa para representar grandezas físicas, como por

exemplo, a excitação pontual das cargas concentradas nos problemas de mecânica.



**Figura 3.7** - Função delta de Dirac.

A solução fundamental é baseada na solução clássica tridimensional de uma carga pontual em um meio infinito, conhecida como solução de Kelvin. O problema de Kelvin na elasticidade tridimensional envolve a contribuição em um meio elástico infinito, homogêneo e isotrópico de um dado ponto de carregamento.

Admite-se que a força unitária é aplicada em um ponto  $p$  interno do corpo e deseja-se monitorar os efeitos desta força em outro ponto  $Q$  em qualquer posição no domínio. A solução deve satisfazer a duas condições:

- 1) Todas as tensões devem desaparecer quando a distância entre  $p$  e  $Q$  tende ao infinito.
- 2) As tensões devem ser 'singulares' no próprio ponto  $p$  (isto é, tende ao infinito assim como a distância entre  $p$  e  $Q$  tende a zero).

A solução fundamental é a solução que satisfaz as equações de deslocamentos (Navier) e atende às hipóteses de um carregamento singular em um meio infinito.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla u) = \frac{-b}{G} \quad (3.48)$$

As equações de Navier na forma vetorial anterior são de difícil solução analítica. É possível mostrar o vetor deslocamento em termos de outro vetor (Galerkin), também em notação vetorial:

$$u = \nabla^2 g - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla g) \quad (3.49)$$

A substituição da equação (3.49) em (3.48) leva a uma expressão com derivadas de quarta ordem.

$$\nabla^4 g_i = \nabla^2(\nabla^2 g_i) = \frac{-b_i}{G} \quad (3.50)$$

Pode ser verificado que o vetor de Galerkin a seguir é a solução mais simples da equação (3.50) e satisfaz as duas condições físicas mencionadas.

$$g_i = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln \left[ \frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (3.51)$$

Onde  $r(p, Q)$  é definido como a distância entre o ponto de colocação  $p$  (fonte) e o ponto no contorno  $Q$  (campo).

Substituindo a equação (3.51) na equação de deslocamentos, têm-se as seguintes expressões para o vetor de deslocamento, expressos como funções  $U_{ij}(p, Q)$ :

$$U_{xx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.52)$$

$$U_{xy}(p, Q) = U_{yx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (3.53)$$

$$U_{yy}(p, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (3.54)$$

Em notação indicial, tem-se:

$$U_{ij}(p, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left[\frac{1}{r(p, Q)}\right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (3.55)$$

O primeiro índice da função refere-se à direção do deslocamento do ponto  $Q$ , causado pela carga unitária no ponto  $p$  aplicado, dado pela direção do segundo índice.

A derivada do raio vetor  $r$  em relação às coordenadas de campo é dada por:

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{X_Q - X_p}{r(p, Q)} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{Y_Q - Y_p}{r(p, Q)} \quad (3.57)$$

Em notação indicial:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = r_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.58)$$

A partir da Lei de Hooke (3.18), para uma carga unitária na direção  $j$ , pode-se escrever:

$$\sigma_{ak} = C_{akim} u_{i,m} \quad (3.59)$$



Modificando-se os índices, a equação (3.20) pode ser escrita como:

$$C_{akim} = \lambda \delta_{ak} \delta_{im} + G(\delta_{ai} \delta_{km} + \delta_{am} \delta_{ki}) \quad (3.60)$$

A expressão de  $\lambda$  é dada por:

$$\lambda = \frac{2\nu G}{(1 - 2\nu)} \quad (3.61)$$

A derivada do núcleo  $U_i$ , para uma carga unitária na direção  $j$ , em relação à coordenada  $m$ , é dada por:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_m} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)r} \left[ -(3 - 4\nu)\delta_{ij}r_m + \delta_{jm}r_i + \delta_{im}r_j - 2r_i r_j r_m \right] \quad (3.62)$$

Verificada a igualdade de primeiro índice entre dois deltas, têm-se as seguintes condições para que o produto de deltas não seja nulo:

$$\delta_{im} \delta_{ij} = \delta_{mj} \quad (3.63)$$

Substituindo-se as equações (3.61) em (3.60), e (3.60) e (3.62) em (3.59), tem-se a seguinte expressão para o tensor de tensões, considerando a carga unitária na direção  $j$ :

$$\sigma_{ak} = \frac{1}{4\pi(1 - \nu)r} \left[ (1 - 2\nu)(\delta_{ak}r_j - \delta_{aj}r_k - \delta_{kj}r_a) - 2r_a r_k r_j \right] \quad (3.64)$$

Trocando-se os índices, pode-se escrever a expressão anterior para a carga unitária na direção  $m$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi(1 - \nu)r} \left[ (1 - 2\nu)(\delta_{ij}r_m - \delta_{im}r_j - \delta_{jm}r_i) - 2r_i r_j r_m \right] \quad (3.65)$$

Substituindo-se a expressão anterior na equação (3.8), tem-se:

$$t_i = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu)\delta_{im} + 2r_i r'_m] + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} (n_i r'_m - n_m r'_i) \quad (3.66)$$

A expressão anterior, para a carga unitária na direção j, é escrita como:

$$t_i = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r'_j] + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} (r_j n_i - r_i n_j) \quad (3.67)$$

A expressão anterior, para a carga unitária na direção i, é escrita como:

$$t_j = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r'_j] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} (r_j n_i - r_i n_j) \quad (3.68)$$

O raio r derivado em relação à normal é dado por:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (3.69)$$

Em notação indicial:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial n} = r_j n_j \quad (j = 1,2) \quad (3.70)$$

Em que as derivadas das coordenadas x e y em relação a normal, na superfície de contorno, são as componentes unitárias nas direções x e y.

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n} \quad (3.71)$$

$$n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (3.72)$$

Em notação indicial:

$$n_i = \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad (i = 1,2) \quad (3.73)$$

Têm-se as seguintes expressões para o vetor de forças de superfície, expressos como funções  $T_{ij}(p, Q)$ :

$$T_{xx}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[ (1-2\nu) + 2 \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.74)$$

$$T_{xy}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right) \right] \quad (3.75)$$

$$T_{yx}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right) \right] \quad (3.76)$$

$$T_{yy}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[ (1-2\nu) + 2 \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.77)$$

### 3.11 - Equações integrais

Obtidas as soluções fundamentais, segue-se com o desenvolvimento das equações integrais para as implementações numéricas envolvendo os problemas de engenharia pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC). A transformação das equações integrais pode ser

feita de diversas maneiras, pelo Teorema da Reciprocidade devido a Betti [1], pelo Teorema de Green, aplicando a segunda identidade de Green, ou pela Técnica dos Resíduos Ponderados. A formulação obtida do Teorema de Betti é mais facilmente compreendida, por envolver conceitos mais comuns em problemas de engenharia. A dedução do método é feita segundo esse teorema.

O teorema dos trabalhos recíprocos tem sido amplamente utilizado numa variedade de aplicações na mecânica dos meios contínuos. Considerando-se um corpo em equilíbrio em dois diferentes estados de tensão e de deformação:

- a) Um estado a de tensões  $\sigma_i^*$  e deformações  $\varepsilon_i^*$ .
- b) Um estado b de tensões  $\sigma_i$  e deformações  $\varepsilon_i$ .

O Teorema de Betti estabelece que o trabalho realizado pelas tensões do estado a nos deslocamentos do estado b é igual ao trabalho realizado pelas tensões do estado b nos deslocamentos do estado a [1]. Pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_i^* \varepsilon_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_i \varepsilon_i^* d\Omega \quad (3.78)$$

Substituindo-se a equação linearizada de tensões na expressão anterior, tem-se uma expressão escrita em termos de deslocamentos:

$$\int_{\Omega} \sigma_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega \quad (3.79)$$

O segundo membro da equação pode ser expandido:

$$\int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_i u_i^*) - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} u_i^* \right] d\Omega \quad (3.80)$$

A equação de equilíbrio pode ser usada para introduzir as forças de domínio (forças de volume) no último termo do segundo membro da equação anterior, resultando em:

$$\int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_i u_i^*) d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (3.81)$$

O teorema da divergência pode ser aplicado no primeiro termo do segundo membro da equação anterior:

$$\int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_i u_i^*) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (3.82)$$

Substituindo-se a equação de forças de superfície no primeiro termo do segundo membro da anterior, as tensões  $\sigma_i$  são eliminadas:

$$\int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (3.83)$$

Retornando à equação (3.79), adotando-se um procedimento semelhante ao primeiro membro da equação, tem-se:

$$\int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (3.84)$$

Podem-se impor quaisquer dois estados, compatíveis, de tensão e deformação à equação anterior. Se for adotado o estado a, de  $\sigma_i^*$  e  $\epsilon_i^*$  sendo o problema de Kelvin tem-se:

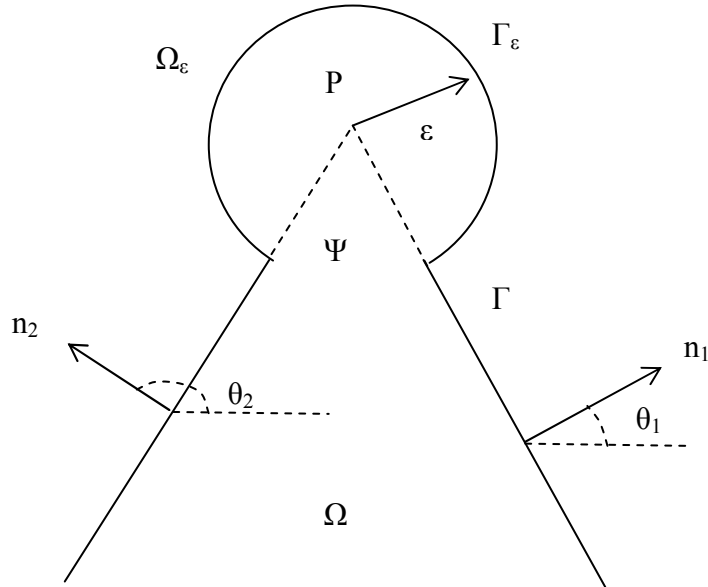
$$u_i^* = u_{ik}^*(X, P) \quad p_i^* = p_{ik}^*(X, P) \quad b_i = \Delta(X, P) \delta_{ik} \quad (3.85)$$

Substituindo as expressões (3.85) na equação (3.84), fazendo o uso das propriedades da função delta de Dirac, tem-se uma nova equação, conhecida como identidade Somigliana para os deslocamentos:

$$u_i(P) = - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (3.86)$$

Com esta relação torna-se possível escrever os deslocamentos de qualquer ponto interno ao contorno  $\Gamma$  em função dos deslocamentos e forças do contorno e das forças de domínio. O ponto  $\mathbf{P}$ , onde se está calculando o deslocamento recebe o nome de ponto de colocação.

Para determinar os deslocamentos de pontos do contorno, é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região, de raio  $\epsilon$ , com seu centro sobre o ponto  $\mathbf{P}$ , cujos deslocamentos se desejam conhecer, e faz-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .



**Figura 3.8** – Acréscimo de um domínio infinitesimal.

Para isso, subtrai-se do contorno original uma pequena porção  $\Psi$  e adiciona-se, em seu lugar, um contorno  $\Gamma_\epsilon$ . A equação (3.86) passa a ser escrita como:

$$u_i(P) = - \int_{\Gamma - \Psi} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma - \Psi} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (3.87)$$

Fazendo-se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , as integrais sobre  $\Gamma - \Psi$  devem ser entendidas como um valor principal de Cauchy [2]. As integrais sobre  $\Gamma_\varepsilon$  e  $\Omega_\varepsilon$  são nulas, com a seguinte exceção:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma = \bar{c}_{ik} u_k(P) \quad (3.88)$$

Onde  $\bar{c}_{ik}$  depende da geometria do contorno.

Substituindo-se a equação (3.88) na equação (3.86), chega-se a:

$$c_{ik} u_k(P) = - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (3.89)$$

A matriz  $c_{ik}$  tem seus valores tomados da expressão a seguir:

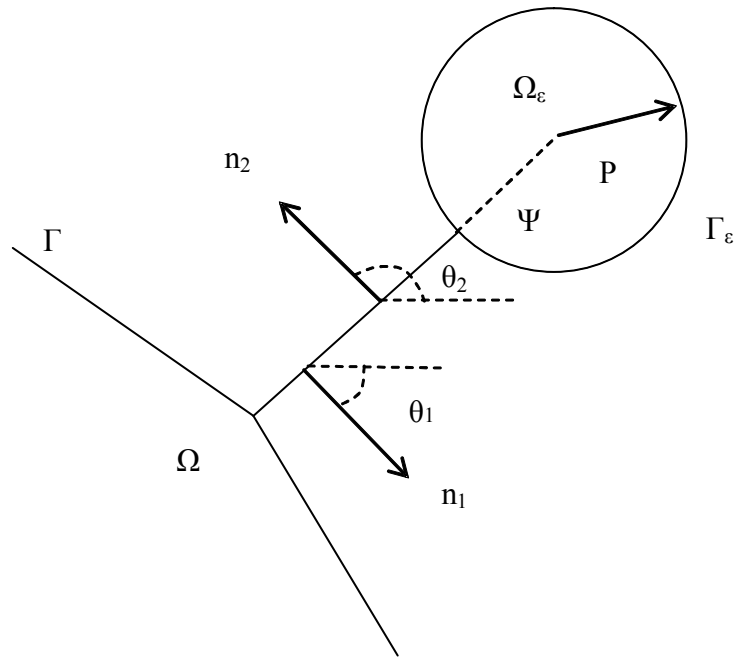
$$[c] = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)\gamma + \text{sen}2\theta_1 - \text{sen}2\theta_2 - 1 & \cos2\theta_2 - \cos2\theta_1 \\ \cos2\theta_2 - \cos2\theta_1 & 4(1-\nu)\gamma - \text{sen}2\theta_1 + \text{sen}2\theta_2 - 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Os arcos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  estão representados na figura a seguir. O valor de  $\gamma$  corresponde ao comprimento em radianos do arco descrito por  $\Gamma_\varepsilon$ . Tem-se:  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ .

Imaginando-se uma situação limite, onde o arco  $\gamma$  tende a  $2\pi$ , o contorno degenera em uma linha, conforme a figura a seguir. Nesta situação não há nenhuma região de domínio unindo o ponto de colocação  $\mathbf{P}$  ao restante do contorno. Por conseguinte, o ponto  $\mathbf{P}$  é externo ao domínio e a matriz  $\mathbf{c}$  torna-se uma matriz nula.

Mostra-se que, para qualquer ponto de colocação externo ao domínio, a equação (3.89) resulta um valor nulo.

Tomando-se uma situação contrária, ou seja, de um ponto interno, a matriz  $\mathbf{c}$  torna-se uma matriz identidade, confirmando a equação (3.86). A equação (3.89) pode ser usada para qualquer posição do espaço bidimensional.



**Figura 3.9** - Ponto externo ao domínio.



## **4 - MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR (MFEL)**

### **4.1 - Introdução**

Neste capítulo são apresentadas noções sobre a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), que é utilizada nos exemplos apresentados posteriormente.

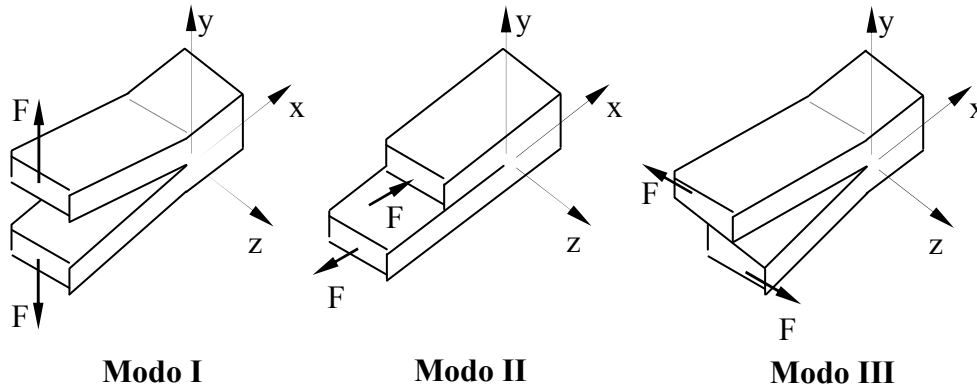
O desenvolvimento da mecânica da fratura foi impulsionado por uma série de acidentes graves ocorridos. Um grande número de investigações foi realizado em muitos países, principalmente nos Estados Unidos. As causas dos problemas estruturais eram decorrentes de imperfeições nos materiais e de concentrações de tensões. Apesar de este campo de engenharia ter experimentado grande avanço nos últimos anos, o estudo das distribuições de tensões e de deformações próximo à ponta da fratura encontra-se em desenvolvimento até os dias atuais [6].

A mecânica da fratura é uma área da engenharia que estuda a capacidade de materiais e de elementos estruturais submetidos a defeitos, tais como fissuras, resistir à aplicação de carregamentos. Imperfeições existentes em uma estrutura sob condições de serviço podem ser analisadas com o auxílio da mecânica da fratura, assim como o tamanho de fissura crítico. A resistência residual do material pode ser avaliada em função do tamanho da fissura, por meio de análises com o auxílio da mecânica da fratura, que passa a ser uma das melhores ferramentas.

Irwin [7] desenvolveu uma abordagem para o tratamento da mecânica da fratura, com a definição do fator de intensidade de tensões “K”.

## 4.2 Modos de fraturamento

As fissuras podem se propagar em um sólido de três maneiras distintas, dependendo do tipo de sollicitação a qual está sendo submetido. Essas maneiras distintas de propagação são chamados de modos de fraturamento.



**Figura 4.1** – Modos de sollicitação de fratura.

Quando a fissura se propaga de tal maneira que os esforços forcem a abertura da fissura, tem-se o modo I (“opening mode” ou “modo de abertura”). A fratura se propaga no plano por abertura normal à sua face.

O modo II (“shear mode” ou “modo cisalhante”) é caracterizado por uma propagação no plano, provocada pelo escorregamento entre as faces na direção do comprimento da fissura.

O modo III (“tearing mode” ou “modo de rasgamento”) é caracterizado por uma propagação no espaço por escorregamento entre as faces na direção normal ao comprimento da fissura.

## 4.3 Princípios da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL)

A fissuração em estruturas e elementos estruturais pode ser provocada devido diversos fatores, como as tensões oriundas da atuação de sobrecargas, vibrações térmicas, efeitos da

umidade, atuação de sobrecargas, deformação excessiva, recalques diferenciais de fundação, retração de produtos químicos, alterações químicas de materiais de construção, dentre outros.

O comportamento de uma estrutura com fratura é dependente de alguns fatores como o nível de tensão no material, a dimensão do defeito existente e das propriedades do material (tenacidade à fratura).

Griffith estabeleceu o critério de propagação de uma fratura. Uma fratura se propaga quando a diminuição de energia de deformação elástica armazenada no corpo é maior do que a energia requerida para criar uma nova superfície de fratura [8].

Irwin e Orowan sugeriram que a teoria de Griffith fosse modificada para ser aplicada a fratura frágeis de metais, em que o valor de energia superficial específica por unidade de área fosse substituído por uma quantidade crítica de energia  $G_c$ , energia esta capaz de criar uma área adicional da superfície da fratura. O valor de  $G_c$  era determinado para cada metal em um ensaio de fratura. O valor de  $G_c$  é a taxa de liberação de energia de deformação elástica crítica.

A fratura se propaga quando a energia “G” atinge o valor de “ $G_c$ ”, sendo este valor um propriedade intrínseca do material dentro de certos limites.

A Mecânica da Fratura Elástica Linear é baseada na análise elástica de um campo de tensões para pequenas deformações, onde o valor crítico da taxa de liberação de energia ( $G_F$ ), o fator de intensidade de tensões crítico em estado plano de deformação ( $K_{Ic}$ ) e a Integral J representam condições precisas de análise de fraturamento para um meio fissurado.

A partir do modelo de Irwin – Orowan, pode-se determinar a tensão de fratura ( $\sigma_f$ ).

Para o estado plano de tensão:

$$\sigma_f = \left( \frac{E G_c}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

Para o estado plano de deformação:

$$\sigma_f = \left( \frac{E G_c}{\pi a(1-\nu^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

Onde  $E$  é o módulo de deformação longitudinal e “ $a$ ” é o comprimento da fratura.

O fator de intensidade de tensão “ $K$ ” definido a partir de  $G_c$  para uma fratura elástica em uma chapa de largura infinita, solicitada em modo I, é dado por:

$$K_I = y \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.3)$$

Onde  $\sigma$  é a tensão nominal (longe da fratura),  $y$  é um parâmetro adimensional que depende da geometria da fratura e do corpo em função da relação  $a/w$ ,  $a$  é o comprimento da fratura e  $w$  é a dimensão da largura que está solicitada pelo carregamento.

O valor crítico da taxa de dissipação de energia de deformação “ $G_c$ ” pode relacionar-se com o fator de intensidade de tensão crítico “ $K_c$ ”. Os valores de  $\sigma_f$  dado pelas expressões anteriores podem relacionar-se com a equação (4.3).

Para o estado plano de tensões:

$$\sigma_f^2 = \frac{E G_c}{\pi a} \quad (4.4)$$

$$K_c = \sigma_f \sqrt{\pi a} \quad (4.5)$$

$$K_c^2 = E G_c \quad (4.6)$$

Assim:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \quad (4.7)$$

Para o estado plano de deformação:

$$\sigma_f^2 = \frac{E G_c}{\pi a(1-\nu^2)} \quad (4.8)$$

$$K_c^2 = \frac{E G_c}{1 - \nu^2} \quad (4.9)$$

Assim:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (4.10)$$

O fator de intensidade crítico de tensões  $K_{Ic}$  no modo I é chamado também de tenacidade à fratura em estado de deformação plana. Esse fator de intensidade de tensão crítico é uma propriedade do material, comumente referido como tenacidade à fratura.

A Teoria da Elasticidade é usada para calcular o campo de tensões existentes na região da ponta da fissura e o material é considerado como isotrópico, homogêneo e elástico, seguindo a Lei de Hooke. A Mecânica da Fratura Elástica Linear pode ser utilizada quando a área plastificada em frente a ponta da fissura (zona de processos inelásticos) seja muito pequena, quando comparada com as outras dimensões do sólido.

A “Integral J” é um parâmetro de fraturamento que quantifica o fluxo de energia através de um contorno fechado em torno da ponta da fissura. Este parâmetro foi desenvolvido para materiais elásticos não lineares. A utilização da integral J independe de trajetória para análises de fraturamento, prova que o valor desta integral é a taxa de energia de dissipação calculada para um corpo de material não linear com uma fissura e comportamento elástico [25]. Com utilização da “Integral J”, torna-se possível a simulação de fraturamento em materiais frágeis, que apresentam uma região significativa de plastificação na ponta da fissura, que não poderiam ser representados pela Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL).

Com a ocorrência da plasticidade e da viscoplasticidade, torna-se necessária a análise no campo da Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL). Esse é o caso de alguns materiais dúcteis, como o caso de aços com baixo teor de carbono, aços inoxidáveis, certas ligas de alumínio e polímeros, além do concreto.

## 4.4 Modelos coesivos

O modelo de fraturamento coesivo foi desenvolvido para representar o comportamento de fissuras que apresentam uma região capaz de transmitir esforços entre suas faces, sendo que os esforços transmitidos diminuem de maneira gradual até que seja anulada a transmissão de esforços entre as faces da fratura.

A região coesiva da fissura, como mostra a figura a seguir, é o comprimento ao longo do qual há transmissão de esforços. Nesta região ocorrem fenômenos de comportamento não linear, tais como o intertravamento de grãos e o efeito de ponte entre grãos e fibras. Materiais quase-frágeis e frágeis, rochas, concretos, cerâmicas, compósitos reforçados com fibras, apresentam comportamento de fraturamento coesivo.

O modelo de faixa de escoamento ou modelo coesivo para chapas finas fissuradas de Dugdale-Barenblatt [69] é um tipo de modelo de fraturamento que apresenta escoamento localizado, baseado em extensões da MFEL. Experimentalmente foi determinado que o raio da zona plastificada ao redor da fissura é aproximadamente igual à espessura da chapa. É aplicado em estado plano de tensões. Dugdale [57] constatou que a zona de plastificação, em estado plano de tensão, é muito maior que a espessura do material e modelou a região plastificada de forma alongada na frente da ponta da fissura. Considera-se o material elasto-plástico perfeito, então a tensão ao longo da região plastificada é constante e igual à tensão de escoamento do material. Este modelo considera que o efeito do escoamento aumenta o tamanho da fissura e que este comprimento adicional tem o comprimento da região plastificada em frente à ponta da fissura [25].

No entanto, o grande desenvolvimento dessa área se deu com o desenvolvimento do modelo de fissura fictícia (“Fictitious Crack Model”) proposto por HILLERBORG et al [58]. Por meio de ensaios de tração uniaxial em corpos de prova de concreto, foi possível observar que após a carga máxima, a fissura inicial surgia numa pequena região com localização de deformações [25]. Quando a tensão  $f_t$  é atingida em algum ponto do sólido, ocorre a localização de deformações e a formação de uma fissura. A resposta do material na região da fissura deve ser, agora, expressa em função da abertura da mesma, de forma similar ao modelo de Barenblatt. Fora da zona coesiva, considera-se que o material esteja em regime elástico linear [27].

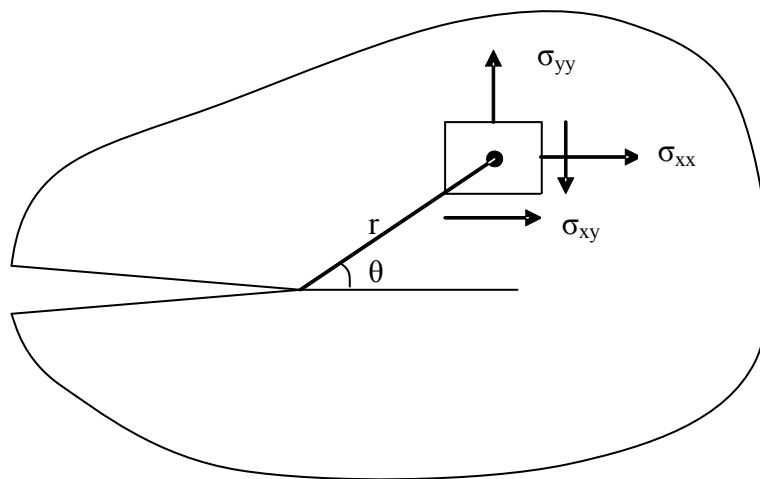
## 4.5 – Distribuição de tensões em um corpo de prova com fratura em modo I

Para pontos próximos à ponta da fratura, as tensões relacionam-se com fator de intensidade de tensões  $K_I$  da seguinte forma:

$$\sigma_{xx} = \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (4.11)$$

$$\sigma_{yy} = \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (4.12)$$

$$\tau_{xy} = \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.13)$$



**Figura 4.2** – Estado de tensão no sistema polar.

Os deslocamentos  $u$  e  $v$ , para o modo I de fratura, são dados por:

$$u = \frac{K_I}{2G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \beta - 1 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (4.14)$$

$$v = \frac{K_I}{2G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \beta + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (4.15)$$

No estado plano de deformação:

$$\beta = 4 - 4\nu \quad (4.16)$$

No estado plano de tensões:

$$\beta = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (4.17)$$

## 4.6 - Distribuição de tensões em um corpo de prova com fratura em modo II

Para pontos próximos à ponta da fratura, as tensões relacionam-se com fator de intensidade de tensões  $K_{II}$  da seguinte forma:

$$\sigma_{xx} = \left( \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \left[ -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (4.18)$$

$$\sigma_{yy} = \left( \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.19)$$



$$\tau_{xy} = \left( \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (4.20)$$

Os deslocamentos  $u$  e  $v$  são dados por:

$$u = \frac{K_{II}}{2G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \beta + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (4.21)$$

$$v = \frac{K_{II}}{2G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[ \beta - 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (4.22)$$

As expressões para  $\beta$  foram definidas anteriormente.

#### 4.7 - Distribuição de tensões em um corpo de prova com fratura em modo III

Para pontos próximos à ponta da fratura, as tensões relacionam-se com fator de intensidade de tensões  $K_{III}$  da seguinte forma:

$$\tau_{xy} = \left( \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \left[ -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (4.23)$$

$$\tau_{yz} = \left( \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.24)$$

O deslocamento  $w$  é dado por:

$$w = 2 \frac{K_{III}}{G} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.25)$$

## 4.8 - Taxa de liberação de energia

A taxa de liberação de energia  $G$ , que é a taxa de energia dissipada no processo de propagação de fissura, para um incremento de comprimento  $d$ , é dada por:

$$G = \frac{d\Pi}{dA} \quad (4.26)$$

Onde:

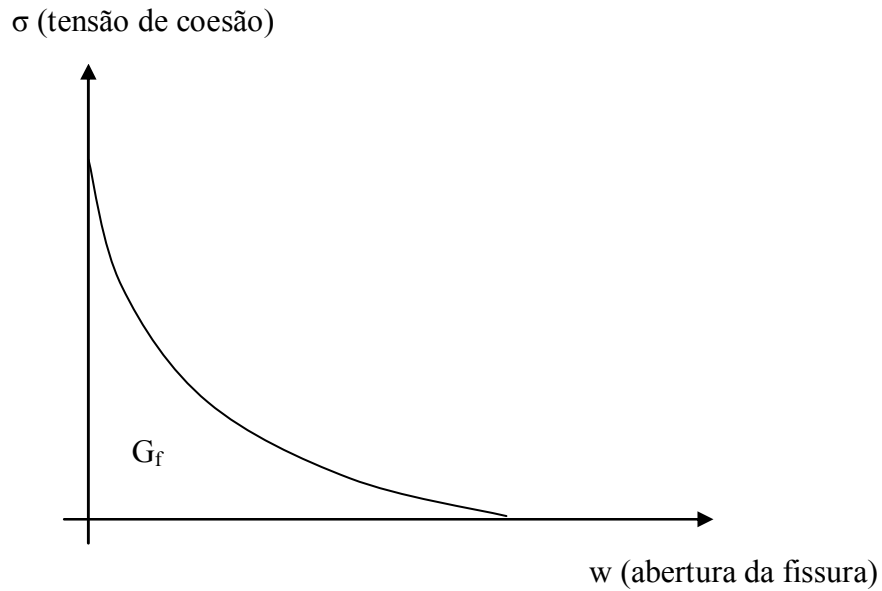
$d\Pi$  é a variação de energia potencial.

$dA$  é a variação da área da fissura.

A propagação da fissura ocorrerá quando  $G$  se igualar à energia de fraturamento do material ( $G_c$ ).

A energia liberada ao se propagar uma fissura é chamada de energia de fraturamento ( $G_f$ ) e é obtida da área sob o gráfico “tensão de coesão x abertura de fissura” para o modo I. O valor da área é obtido calculando-se a integral a seguir:

$$G_f = \int \sigma dw \quad (4.27)$$



**Figura 4.3** – Energia de fraturamento.

#### 4.9 - Dimensões da zona plástica em estado plano de tensão

As equações (4.11), (4.12) e (4.13), aplicadas para pontos próximos à ponta da fratura, conduzem à resultados de tensões tendendo ao infinito, caracterizando a singularidade. Como os materiais possuem uma resistência ao escoamento finita, isso faz com que apareça uma região com deformações plásticas próximas à ponta da fratura. Esta deformação localizada caracteriza a zona plástica. Para  $\theta$  igual a 0, têm-se:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.28)$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (4.29)$$

Aplicando-se o critério de von Mises, obtêm-se a seguinte expressão:

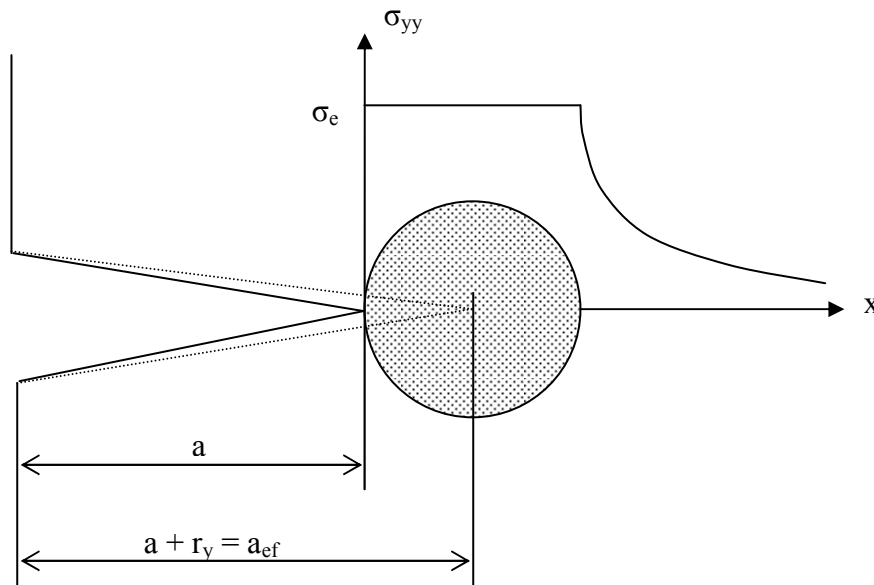
$$\sigma_{eq} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.30)$$

Quando a tensão, na equação anterior é atingida, o material escoá.

A partir da equação(4.30), obtêm-se o valor do raio de uma zona plástica localizada.

$$r = r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (4.31)$$

Onde  $r_y$  é conhecido como correção da zona plástica de Irwin [9] ou zona plástica ajustada [6]. O comprimento efetivo da fratura é considerado como o comprimento inicial da fratura “a” mais o raio da zona plástica  $r_y$ .



**Figura 4.4** – Esquema de correção de zona plástica de Irwin.

#### 4.10 Dimensões da zona plástica em estado plano de deformação

Analogamente ao item anterior, para  $\theta$  igual a 0, tem-se as mesmas expressões para  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ . Em estado plano de deformação, têm-se a tensão normal em z,  $\sigma_{zz}$ , que é dada por:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2\nu \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.32)$$

Aplicando-se o critério de von Mises, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{eq} = (1 - 2\nu) \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.33)$$

O comprimento da zona plástica  $r_y$ , é dado por:

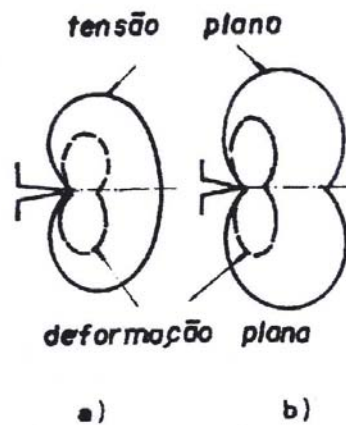
$$r_y = (1 - 2\nu)^2 \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (4.34)$$

A zona plástica ajustada, em modo I, no estado plano de deformação, foi estimada por McClintock e Irwin [10], como sendo:

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (4.35)$$

#### 4.11 - Representação gráfica da zona plástica pelos critérios de von Mises e Tresca

A forma completa da zona plástica pode ser obtida a partir das equações (4.18) e (4.19), variando-se o ângulo  $\theta$  de zero a  $180^\circ$ , e adotando-se um critério de escoamento. Broek [9] fornece a forma da zona plástica para os modos II e III.



**Figura 4.5** – Forma esquemática da zona plástica para o modo I de fratura: a) critério de von Mises e b) critério de Tresca.

## **5 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)**

### **5.1 - Introdução**

No capítulo 3, a equação integral de contorno para problemas elásticos bidimensionais foi obtida pelo Teorema de Betti e a identidade Somagliana para deslocamentos. Considerando um sistema (a) com a solução fundamental conhecida e um sistema (b) com o problema incógnito, o resultado será uma equação integral de contorno que contém os deslocamentos e forças de superfície no contorno.

Neste capítulo é apresentada a implementação numérica das equações integrais de forças e deslocamentos e a obtenção da equação integral de tensões.

### **5.2 – Generalidades**

As soluções de problemas físicos em geral, excetuando-se os casos simples, podem ser muito difíceis de serem encontradas pelos métodos analíticos. Para a obtenção de soluções aproximadas de problemas de grande complexidade de análise recorre-se aos métodos numéricos de análise, a exemplo do Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas (MDF) ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi escolhido como a ferramenta utilizada neste trabalho. As equações diferenciais que regem determinado problema físico são transformadas em equação integral de contorno para a superfície do problema. Estas integrais são numericamente resolvidas para os elementos discretizados na superfície do problema em análise. Os chamados elementos de contorno obtidos pela discretização do perímetro do problema em estudo são adotados como isoparamétricos lineares, tanto a geometria do elemento quanto suas variáveis de força e deslocamento são descritas pela mesma função de interpolação. Definidas as condições físicas de contorno, um sistema de equações é resolvido e as variáveis desconhecidas são encontradas. O método fornece resultados no contorno e no domínio de problemas físicos em geral.

### 5.3 - Discretização do contorno

A partir de um contorno genérico definido podem-se aplicar as equações integrais. A figura a seguir representa um contorno  $\Gamma$  e um domínio  $\Omega$  para um problema em análise. Para a implementação das equações integrais definidas no capítulo 3, o contorno físico em estudo é discretizado em trechos menores, chamados de elementos de contorno.

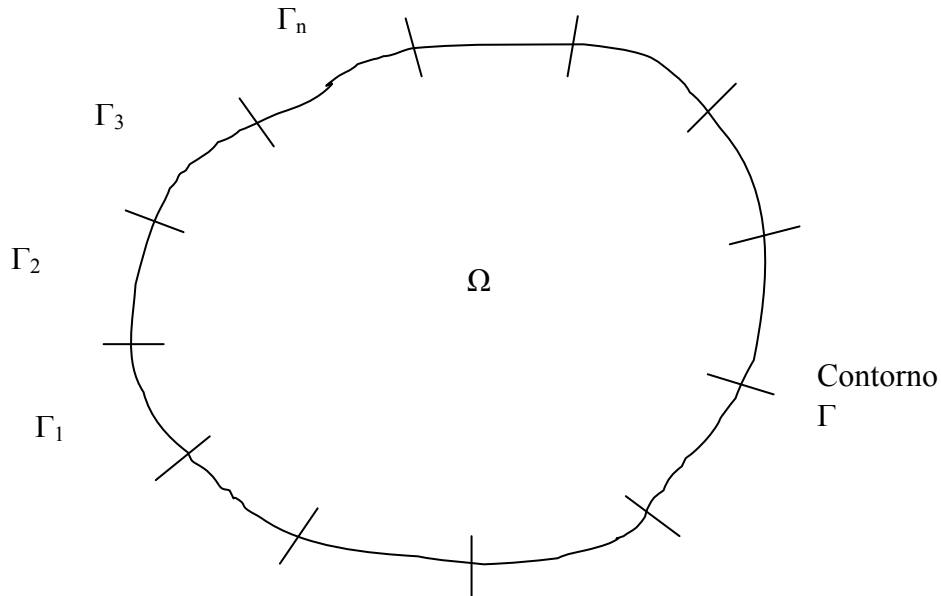
O contorno  $\Gamma$  é dividido em trechos menores  $\Gamma_n$ , de tal forma que o somatório destes elementos menores recompõe o contorno original. O ponto de ligação entre os trechos é chamado de nó. Cada trecho discretizado pode ter sua geometria descrita por uma função de interpolação de coordenadas dos nós. Tem-se:

$$\Gamma = \sum_{n=1}^n \Gamma_n \quad (5.1)$$

A equação (3.89) do capítulo 3 pode ser escrita agora como:



$$c_{ik} u_k(P) = - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma_j + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma_j + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.2)$$



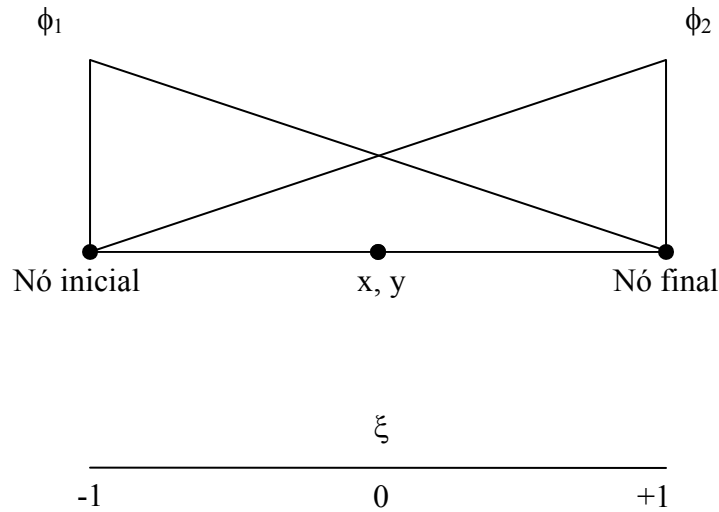
**Figura 5.1** - Discretização do perímetro em elementos de contorno.

## 5.4 - Elementos de contorno

A partir de um ponto fonte de colocação, ou seja, para cada nó onde se posiciona a fonte para escrever a equação integral, é adotada uma função de interpolação linear para a realização das integrações nos elementos. É adotado um sistema de coordenadas locais nos elementos, onde a variável intrínseca  $\xi$  adimensional tem origem no ponto médio do elemento e é válida no intervalo  $-1 \leq \xi \leq +1$ . As funções de forma para os elementos lineares de dois nós são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.3)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.4)$$



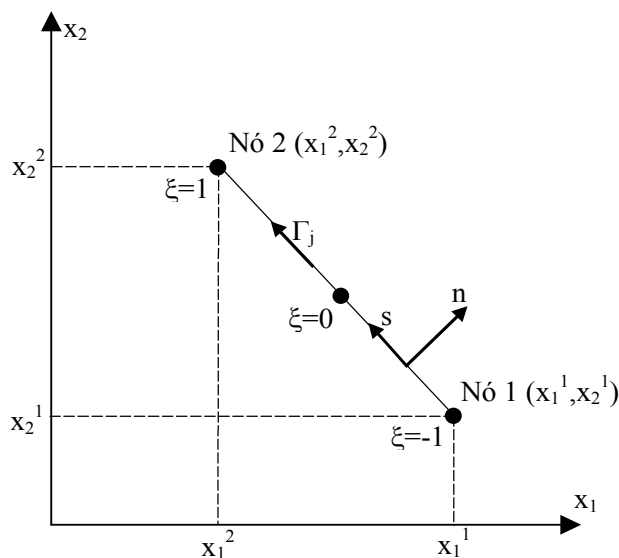
**Figura 5.2** – Funções de forma linear e sistema de coordenadas.

A geometria dos elementos isoparamétricos, suas variáveis de deslocamento e força podem ser descritas pela seguinte equação a seguir, sendo  $\mathbf{j}$  o índice do nó do elemento (nó 1 = nó inicial ou nó 2 = nó final) e  $\mathbf{k}$  o índice relacionado com a coordenada, tem-se:

$$X_s = \phi_i(\xi) X_k^j \quad (5.5)$$

O índice  $\mathbf{s}$  varia de 1 a 2,  $X_s$  corresponde às coordenadas cartesianas  $x_i$  de um ponto interno, aos deslocamentos  $\mathbf{u}_i$  ou aos esforços  $\mathbf{t}_i$  no elemento .

$\phi_i(\xi)$  corresponde à função de interpolação (função de forma).



**Figura 5.3** - Descrição do elemento linear.

A partir da equação (5.5), para as coordenadas internas  $\mathbf{X}_s$  do elemento, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$X_1(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi) x_k^j = \phi_1(\xi) x_1^1 + \phi_2(\xi) x_1^2 \quad (5.6)$$

$$X_2(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi) x_k^j = \phi_1(\xi) x_2^1 + \phi_2(\xi) x_2^2 \quad (5.7)$$

Na forma matricial, as equações (5.6) e (5.7) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Analogamente à equação (5.5), para as aproximações de deslocamentos e forças ao longo do elemento, têm-se as seguintes expressões:

$$u_s = \phi_i(\xi)U_k^j \quad (5.9)$$

$$t_s = \phi_i(\xi)T_k^j \quad (5.10)$$

As variáveis de deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  são dadas por:

$$u_1(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi)U_k^j = \phi_1(\xi)U_1^1 + \phi_2(\xi)U_1^2 \quad (5.11)$$

$$u_2(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi)U_k^j = \phi_1(\xi)U_2^1 + \phi_2(\xi)U_2^2 \quad (5.12)$$

Na forma matricial, as equações (5.11) e (5.12) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Para as forças  $t_x$  e  $t_y$ , aos elementos internos no contorno, tem-se:

$$t_1(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi)T_k^j = \phi_1(\xi)T_1^1 + \phi_2(\xi)T_1^2 \quad (5.14)$$

$$t_2(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi)T_k^j = \phi_1(\xi)T_2^1 + \phi_2(\xi)T_2^2 \quad (5.15)$$

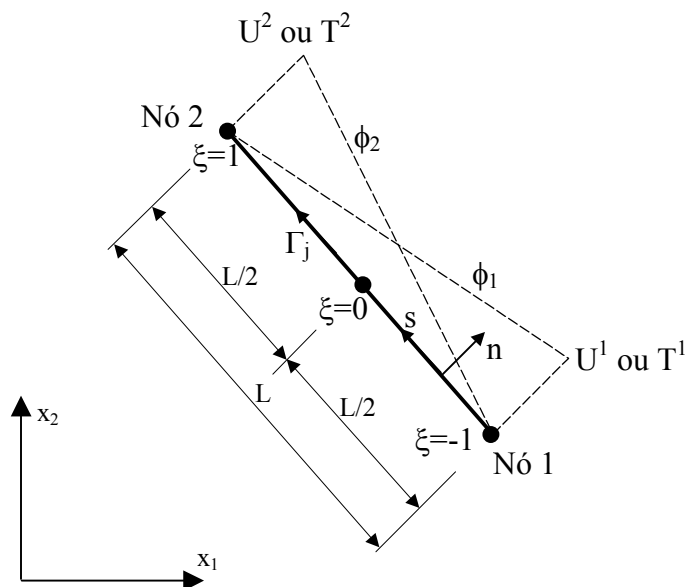
Na forma matricial, as equações (5.14) e (5.15) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_1^2 \\ T_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

A posição dos nós dos elementos de contorno define se eles são contínuos, descontínuos ou mistos. As funções aproximadoras estão diretamente relacionadas com a posição dos pontos nodais do elemento.

### 5.4.1 - Elemento linear contínuo

O elemento é chamado de linear contínuo quando os pontos nodais são comuns aos elementos adjacentes, assumindo, nos mesmos, valores únicos. É geralmente usado em contornos sem angulosidades e sem variação de vinculações. A figura a seguir representa um elemento linear contínuo, suas funções de forma  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são definidas pelas equações (5.3) e (5.4).



**Figura 5.4** – Elemento linear contínuo.

### 5.4.2 - Elemento linear descontínuo

O elemento linear descontínuo ocorre quando existem dois nós de elementos adjacentes com a mesma coordenada geométrica do nó. A introdução dos nós duplos permite a descontinuidade do valor de uma das variáveis entre elementos adjacentes. Pode-se colocar o ponto de colocação para dentro dos elementos concorrentes ao nó duplo para a obtenção de duas equações integrais diferentes para a mesma coordenada geométrica, permitindo-se assim a descontinuidade.

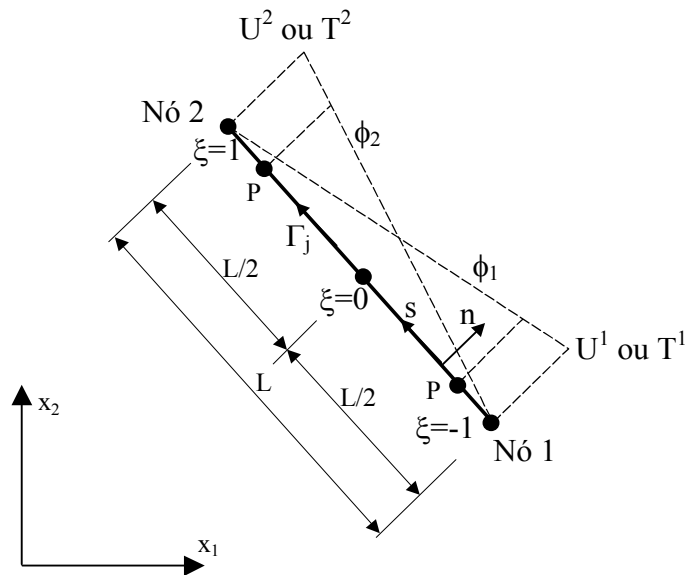
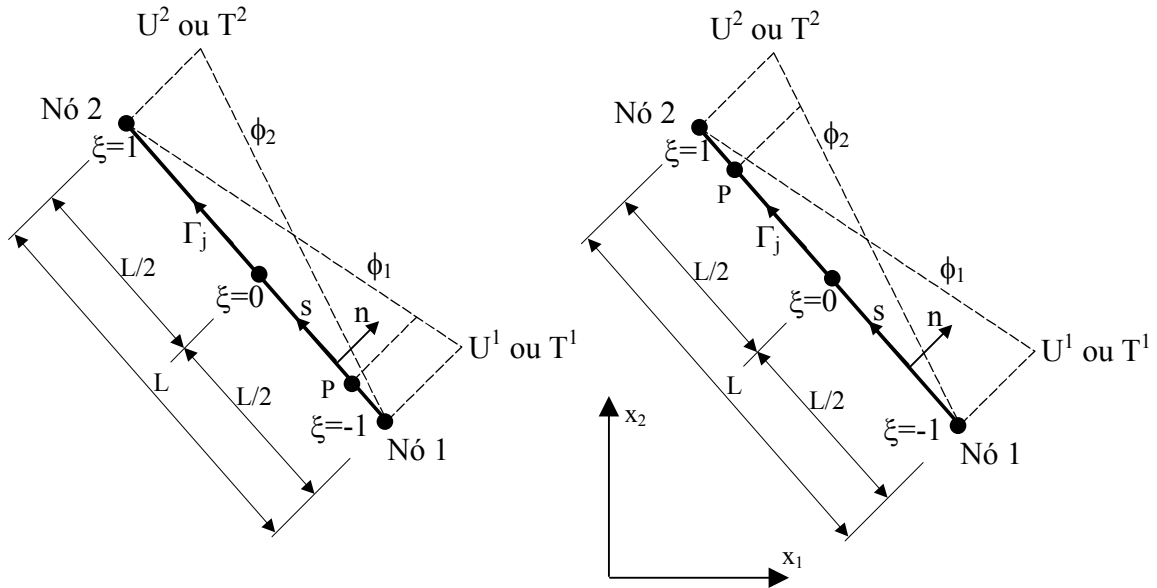


Figura 5.5 – Elemento linear descontínuo.

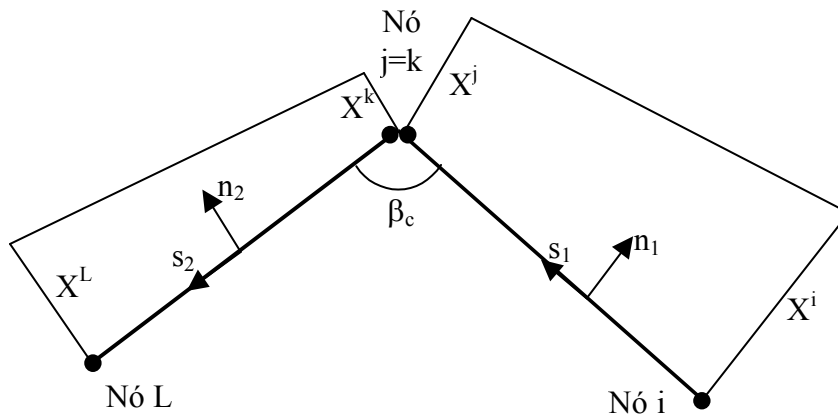
### 5.4.3 - Elemento misto

O elemento misto é utilizado quando há a necessidade de descontinuidade em apenas uma das extremidades do elemento. Desta forma, existe a possibilidade de conexão entre um

elemento contínuo e um elemento descontínuo. Quando é necessária a utilização de elementos descontínuos ou mistos, adotam-se dois nós com a mesma coordenada geométrica.



**Figura 5.6** – Elemento linear misto.



**Figura 5.7** - Definição de nó duplo.

A figura (5.7) representa a angulosidade de uma placa num ponto com dois nós de mesma coordenada geométrica, denominado nós duplos.

## **5.5 - Estratégia de modelagem do contorno do problema em estudo**

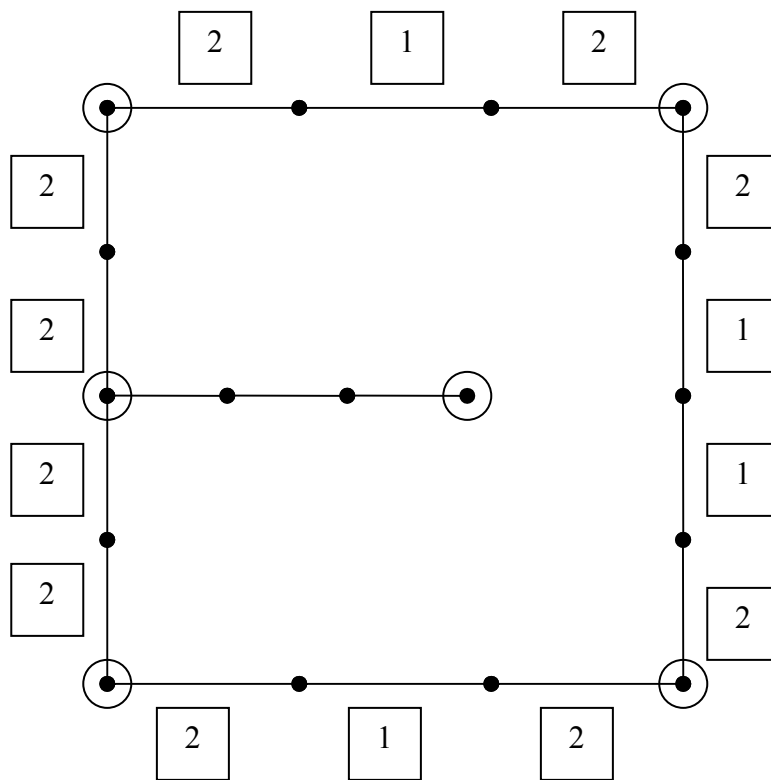
A continuidade do contorno definida pela existência de um nó entre cada elemento leva à continuidade dos parâmetros associados aos nós. Os elementos que satisfazem esta condição são chamados de contínuos. Para melhorar a performance da solução numérica podem-se associar dois valores para cada parâmetro nodal que existe numa interface entre elementos. Logo, cada parâmetro estará associado a cada um dos elementos que concorrem ao nó. Assim, permite-se a descontinuidade de parâmetros associados a um nó de contorno, mas a geometria permanece contínua.

Os elementos que possuem descontinuidade de parâmetros nodais somente em um extremo são chamados de elementos mistos.

Os elementos que possuem descontinuidade de parâmetros nodais nos dois extremos são chamados de elementos descontínuos.

Para os elementos lineares, utiliza-se neste trabalho a seguinte estratégia de modelagem do contorno do problema em estudo:





Legenda:

- Nó simples
- Nó duplo
- 1 Elemento contínuo
- 2 Elemento misto

**Figura 5.8** – Modelagem com elementos lineares.

## 5.6 - Implementação numérica

A implementação numérica de uma equação integral é dividida em estágios para maior conveniência:

Estágio 1: Divisão em elementos.

Estágio 2: Integração numérica ou analítica dos núcleos das equações integrais.

Estágio 3: Determinação das condições de contorno.

Estágio 4: Solução do sistema de equações.

Estágio 5: Cálculo das variáveis internas (deslocamentos ou tensões).

Estágio 6: Cálculo das tensões no contorno.

Estágio 7: Determinação das forças de superfície no contorno.

Para resolver a equação integral, o contorno do problema em estudo é dividido em elementos, chamados **elementos de contorno**, e estes são conectados por ponto nodais denominados **nós de contorno**.

Para um dado problema em estudo, cada nó de contorno apresenta quatro variáveis (prescritas ou não), sendo dois deslocamentos ( $U_x$  e  $U_y$ ) e duas forças de superfície ( $T_x$  e  $T_y$ ). Portanto assume-se que para  $N$  nós de contorno existem  $4N$  variáveis. Cada nó de contorno apresenta dois valores prescritos (conhecidos) e dois valores incógnitos. Um nó de contorno pode ter ambos os deslocamentos, forças de superfície, ou uma força de superfície e um deslocamento conhecido para uma dada direção.

**Tabela 5.1** – Variáveis prescritas e incógnitas.

	Variável prescrita	Variável incógnita
Variável de contorno	$T_x$	$U_x$
	$T_y$	$U_y$
	$U_x$	$T_x$
	$U_y$	$T_y$

Para  $N$  nós de contorno existem  $2N$  variáveis prescritas e  $2N$  variáveis incógnitas para cada direção (x ou y). Um problema em estudo apresenta  $2N$  variáveis desconhecidas, portanto

precisa-se de  $2N$  equações para a resolução do sistema, tornando a solução possível e determinada. Duas equações integrais são associadas a cada nó de contorno, onde a carga unitária é colocada na direção 1 para a primeira equação e na direção 2 para a segunda equação. Esta operação é repetida para  $N$  pontos do contorno (nós) de modo a obter-se  $2N$  equações. Tem-se  $2N$  equações e  $2N$  variáveis desconhecidas que levam a uma solução única [1].

## 5.7 - Pontos de carregamento

Os pontos de carregamento, também denominados pontos de colocação, são os pontos onde se posiciona a fonte para escrever as equações integrais.

Os nós de contorno podem ser utilizados como ponto de colocação. Para permitir a descontinuidade de parâmetros nodais em elementos descontínuos ou mistos, foram utilizados pontos internos ao elemento como ponto de colocação. Têm-se as seguintes condições:

**Tabela 5.2** – Estratégia de posicionamento dos pontos de colocação.

Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
a)	a)
b)	b)
c)	c)

A situação 1 refere-se ao trabalho utilizado inicialmente por ALMEIDA [20].

Para a situação 2, a estratégia de posicionamento do ponto de colocação foi modificada e os efeitos dessa modificação são apresentados na forma de tabelas ao final do trabalho. Nesse caso, o ponto de colocação é levado ao nó inicial do elemento de contorno apenas nos elementos onde se aplica a equação integral de deslocamentos. Nos elementos onde se aplica a equação integral de forças de superfície, na face “oposta da fratura”, o ponto de colocação é mantido ao longo do elemento.

O ponto de colocação para os elementos contínuos foi posicionado no nó inicial para a situação 2 e a  $-2/3$  do centro do elemento para a situação 1.

Para o caso de elementos mistos com nó inicial simples e nó final duplo, para a situação 2, foi posicionado um ponto de colocação sobre o nó inicial e um ponto de colocação a  $+2/3$  do centro do elemento. Para a situação 1, o ponto de colocação foi posicionado a  $+2/3$  e a  $-2/3$  do centro do elemento.

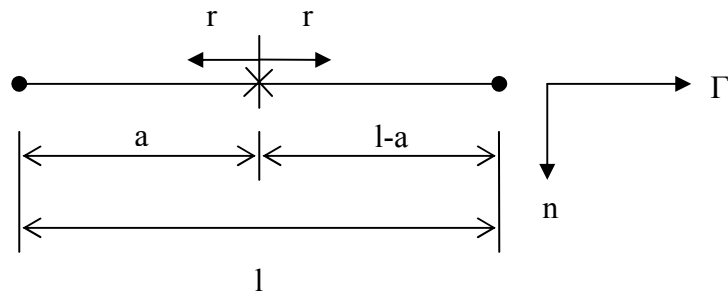
Para o caso de elementos mistos com nó inicial duplo e nó final simples, o ponto de colocação manteve-se a  $-2/3$  do centro do elemento para ambas as situações.

Utilizando-se esta estratégia de posicionamento dos pontos de colocação, tem-se uma igualdade entre o número de nós de contorno e o número de pontos de carregamento de um modelo em estudo, tornando-se possível a resolução de um sistema de equações.

## **5.8 - Posicionamento de eixos de coordenadas sobre o elemento linear**

No Método dos Elementos de Contorno (MEC) são utilizados dois sistemas de coordenadas, um sistema global onde as coordenadas são expressas em termos da coordenada  $\Gamma$  e um sistema local com coordenada intrínseca  $\xi$ . O sistema global e o sistema local estão relacionados com o uso do Jacobiano da transformação, como será mostrado posteriormente.

O sistema de coordenadas para elementos lineares, que possui o sistema local  $\xi$  com origem no centro do elemento e variação de  $-1$  a  $+1$ , é substituído por um sistema  $r$ , que possui origem no centro do elemento e está relacionado com a distância  $a$  de localização do ponto de colocação e o comprimento  $l$ . A posição relativa do ponto de colocação varia do centro aos extremos do elemento linear.



**Figura 5.9** – Sistema de coordenadas  $r$ .

As deduções das integrais analíticas, utilizadas para a integração dos elementos que contém o ponto de colocação, são deduzidas considerando-se o sistema de coordenadas  $r$ , onde se tem:

Para o primeiro tramo:  $\Gamma = -r$

Para o segundo tramo:  $\Gamma = r$

## 5.9 - Integração numérica dos núcleos das equações integrais

As integrações nos elementos lineares, para o ponto de colocação fora do elemento, foram realizadas numericamente com a quadratura de Gauss-Legendre, onde é estabelecido o número de pontos de Gauss para o cálculo das integrais. Estas integrais são calculadas numericamente para as funções  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$ , demonstradas no capítulo 3.

Quando a integração for realizada sobre o elemento que contém o ponto de colocação, são deduzidas integrais analíticas, no sentido do valor principal de Cauchy, para as integrações dos núcleos  $T_{ij}$ . O núcleo  $T_{ij}$  apresenta uma singularidade ( $1/r$ ), que é tratada analiticamente.

A equação integral de tensões, com núcleos  $S_{kij}$  e  $D_{kij}$ , é demonstrada posteriormente. Analogamente à equação integral de deslocamentos, as integrações nos elementos, para o ponto de colocação fora, são realizadas numericamente com a quadratura de Gauss-Legendre. Para a integração no elemento que contém o ponto de colocação, são deduzidas integrais analíticas, onde

a integral sobre o núcleo  $S_{kij}$  é representada pela parte finita da integral de Hadamard. O núcleo  $S_{kij}$  apresenta a hipersingularidade ( $1/r^2$ ), que é tratada analiticamente.

Os limites do sistema de coordenadas locais  $\xi$  para os elementos são os mesmos utilizados na quadratura de Gauss-Legendre.

Os elementos de contorno são integrados analiticamente ou numericamente, dependendo da posição do ponto de carregamento, utilizando-se o parâmetro de contorno  $\Gamma$  e a coordenada intrínseca  $\xi$ .

A variável de contorno  $\Gamma$ , utilizada na equação integral de deslocamento (5.2), é transformada em coordenada intrínseca  $\xi$ , com a utilização do Jacobiano  $J$ . Com essa transformação torna-se possível a integração numérica dos elementos de contorno para o sistema de coordenadas locais.

O Jacobiano da transformação  $J$  deve ser calculado da seguinte forma:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left[\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right]^2} \quad (5.17)$$

Para a componente tangencial unitária externa ao contorno, tem-se:

$$s = \frac{s_x}{|s|} e_x + \frac{s_y}{|s|} e_y \quad (5.18)$$

O módulo do vetor  $s$  é dado por:

$$|s| = \sqrt{(s_x)^2 + (s_y)^2} = \sqrt{\left[\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right]^2} \quad (5.19)$$

O módulo do vetor  $s$  é igual ao Jacobiano  $J(\xi)$ . As componentes do vetor unitário tangencial são dadas por:

$$\begin{aligned}
s_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] \\
s_y &= \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

Seja um vetor unitário na direção z,  $e_z$  (normal ao plano bidimensional xy). O vetor unitário normal ao contorno é dado pelo produto vetorial de s e  $e_z$ :

$$\begin{aligned}
n &= s \times e_z \\
&= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] & \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] e_x - \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] e_y
\end{aligned}
\tag{5.21}$$

As componentes do vetor normal unitário ao contorno são dadas por:

$$\begin{aligned}
n_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \\
n_y &= \frac{-1}{J(\xi)} \left[ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

O diferencial das coordenadas  $x(\xi)$  e  $y(\xi)$ , em relação ao sistema local para os elementos lineares, são dados por:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} x_1 + \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi} x_2 \\
\frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} y_1 + \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi} y_2
\end{aligned}
\tag{5.23}$$

A equação integral de deslocamentos pode ser agora escrita em termos de coordenadas locais  $\xi$ :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \left( \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} T_{xx}(P,Q) & T_{xy}(P,Q) \\ T_{yx}(P,Q) & T_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} \phi_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \\ & = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \left( \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} U_{xx}(P,Q) & U_{xy}(P,Q) \\ U_{yx}(P,Q) & U_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} \phi_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Onde M é o número total de elementos. A equação anterior pode ser escrita em novas funções [H] e [G]:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \\ & = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

As matrizes [H] e [G] contém o núcleo das integrais  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$ . O parâmetro  $C_{ij}(P)$  contribui para os coeficientes da matriz [H], quando o ponto de colocação é levado ao contorno. A formulação das matrizes [H] e [G] é muito similar ao da formulação dos problemas de potencial, exceto que cada coeficiente das matrizes é uma sub-matriz 2x2.

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{12} & [H]_{13} & [H]_{14} & \cdots \\ [H]_{21} & [H]_{22} & [H]_{23} & [H]_{24} & \cdots \\ [H]_{31} & [H]_{32} & [H]_{33} & [H]_{34} & \cdots \\ [H]_{41} & [H]_{42} & [H]_{43} & [H]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [u]_2 \\ [u]_3 \\ [u]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} & [G]_{13} & [G]_{14} & \cdots \\ [G]_{21} & [G]_{22} & [G]_{23} & [G]_{24} & \cdots \\ [G]_{31} & [G]_{32} & [G]_{33} & [G]_{34} & \cdots \\ [G]_{41} & [G]_{42} & [G]_{43} & [G]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t]_1 \\ [t]_2 \\ [t]_3 \\ [t]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

As sub-matrizes [H] e [G] são definidas como:

$$[H]_{ij} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}_{ij} ; \quad [G]_{ij} = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}_{ij} \quad (5.27)$$



Os vetores  $[u]$  e  $[t]$  representam os deslocamentos e forças nas direções x e y, para os pontos nodais:

$$[u]_i = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_i ; [t]_i = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}_i \quad (5.28)$$

Ao final do processo obtêm-se as duas matrizes  $[H]$  e  $[G]$  globais, compostas a partir das sub-matrizes de forças e deslocamentos.

$$[H][u] = [G][t] \quad (5.29)$$

O movimento de corpo rígido, em análise estática em regime elástico, é caracterizado por deslocamentos unitários de todos os nós em cada direção. Este movimento resulta em forças iguais a zero. Assim, o lado direito da equação de deslocamentos é igual a zero.

$$[H][u_c] = 0 \quad (5.30)$$

O termo  $[u_c]$  da expressão anterior é uma constante de deslocamento arbitrário em qualquer direção. Portanto, a soma de todos os coeficientes em qualquer linha da matriz  $[H]$  deve ser zero para que seja verificada a expressão anterior. Este processo permite que os termos da diagonal de  $[H]$  possam ser determinados com a soma de todos os outros coeficientes fora da diagonal.

$$[H]_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [H]_{ij} \quad \text{Para } i=1, 2, 3, \dots, N \quad (5.31)$$

Os índices i e j são os contadores das linhas e colunas, respectivamente, onde N é o número total de nós de contorno.

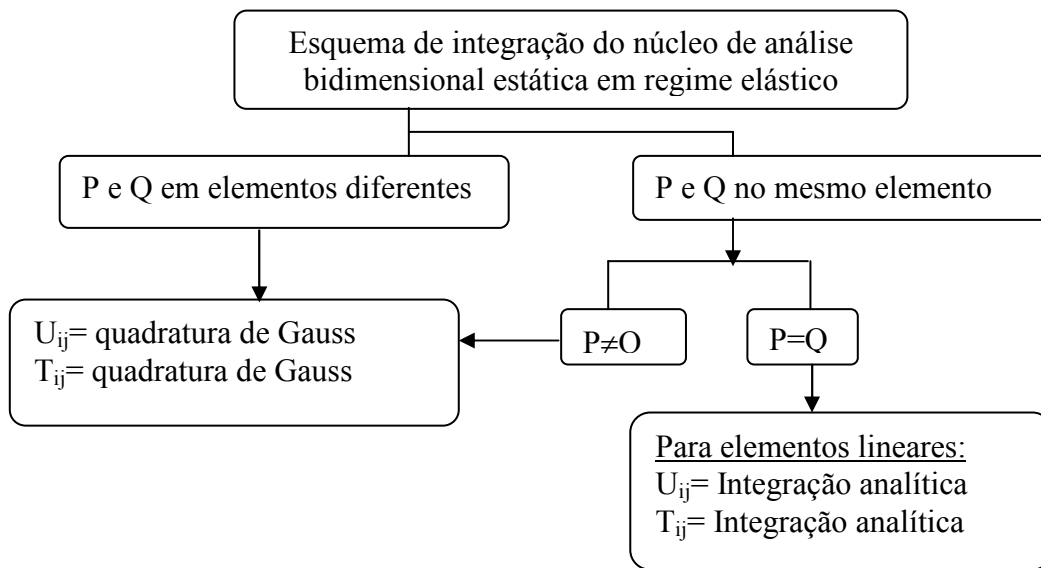
Este procedimento é realizado quando não se utilizam expressões para a matriz  $C$  da equação (5.25), ou seja, quando o ponto de colocação não pertence ao elemento que esteja integrando. Neste caso, tem-se:

$$[C] = 0 \tag{5.32}$$

Para o ponto de colocação levado ao contorno, utilizam-se expressões para a matriz  $[C]$ , que depende da geometria do contorno. A atribuição direta dos valores das diagonais é dependente da posição do ponto de carregamento e da função de forma.

### 5.10 - Aplicação das condições de contorno

Na análise de um problema de estática em regime elástico, têm-se dois tipos de condições de contorno possíveis, os deslocamentos prescritos e as forças superficiais prescritas.



**Figura 5.10** – Esquema geral de uma análise com o MEC para elementos lineares.

Para um modelo em estudo, onde há  $2N$  equações, necessitam-se  $2N$  valores prescritos, ou seja, para cada direção, deve-se conhecer força ou deslocamento.

As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  devem ser rearranjadas com todas as variáveis conhecidas no lado direito da equação e com todas as variáveis desconhecidas do lado esquerdo, possibilitando a resolução do sistema de equações algébricas seguinte.

$$[A][x] = [B] \quad (5.33)$$

A matriz  $[B]$  contém os coeficientes conhecidos,  $[x]$  contém as variáveis incógnitas para cada direção (deslocamento ou força).

Este “entrelaçamento” dos coeficientes  $[H]$  e  $[G]$  para acomodar as condições de contorno é muito comum no MEC. Para demonstrar a multiplicação das matrizes, se for considerado um exemplo simplificado onde o nó 2 e 4 têm deslocamentos prescritos  $[UU]_2$  e  $[UU]_4$  e onde os nós 1 e 3 têm forças prescritas  $[TT]_1$  e  $[TT]_3$ , respectivamente [1].

As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  podem ser escritas a seguir:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{12} & [H]_{13} & [H]_{14} & \cdots \\ [H]_{21} & [H]_{22} & [H]_{23} & [H]_{24} & \cdots \\ [H]_{31} & [H]_{32} & [H]_{33} & [H]_{34} & \cdots \\ [H]_{41} & [H]_{42} & [H]_{43} & [H]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [UU]_2 \\ [u]_3 \\ [UU]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} & [G]_{13} & [G]_{14} & \cdots \\ [G]_{21} & [G]_{22} & [G]_{23} & [G]_{24} & \cdots \\ [G]_{31} & [G]_{32} & [G]_{33} & [G]_{34} & \cdots \\ [G]_{41} & [G]_{42} & [G]_{43} & [G]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [TT]_1 \\ [t]_2 \\ [TT]_3 \\ [t]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Os coeficientes da matriz  $[H]$  multiplicando os deslocamentos  $[UU]_2$  e  $[UU]_4$  são agora transferidos para o lado direito (com o sinal trocado) e, no seu lugar correspondente, o coeficiente  $[G]$ , multiplicando  $[t]_2$  e  $[t]_4$ , são colocados (com o sinal trocado), como a seguir:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & -[G]_{12} & [H]_{13} & -[G]_{14} & \cdots \\ [H]_{21} & -[G]_{22} & [H]_{23} & -[G]_{24} & \cdots \\ [H]_{31} & -[G]_{32} & [H]_{33} & -[G]_{34} & \cdots \\ [H]_{41} & -[G]_{42} & [H]_{43} & -[G]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [t]_2 \\ [u]_3 \\ [t]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & -[H]_{12} & [G]_{13} & -[H]_{14} & \cdots \\ [G]_{21} & -[H]_{22} & [G]_{23} & -[H]_{24} & \cdots \\ [G]_{31} & -[H]_{32} & [G]_{33} & -[H]_{34} & \cdots \\ [G]_{41} & -[H]_{42} & [G]_{43} & -[H]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [TT]_1 \\ [UU]_2 \\ [TT]_3 \\ [UU]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Com esta transformação das matrizes [H] e [G], a equação está pronta para ser resolvida, pois o lado direito é completamente conhecido.

O procedimento é genérico e aplicado a qualquer tamanho de malha.

Depois de resolvido o sistema de equações, separa-se os valores de deslocamentos e forças superficiais em seus respectivos vetores.

### 5.11 – Solução das equações algébricas

A matriz [A] resultante da aplicação das condições de contorno, não é simétrica ou gradualmente preenchida com coeficientes diferentes de zero. Por isso, a escolha do método de solução implementado deve levar em conta outros métodos como a eliminação gaussiana, decomposição LU ou qualquer outra técnica direta. Neste trabalho foi utilizado o método de resolução computacional de refinamento iterativo.

### 5.12 – Determinação das tensões nos pontos internos

As componentes de tensão  $\sigma_{ij}$  são obtidas pela diferenciação da equação de deslocamentos para pontos pertencentes ao domínio (pontos internos) e com a aplicação da Lei de Hooke.

Derivando a equação integral de deslocamentos em relação às coordenadas de ponto fonte  $x_k$ , tem-se:

$$u_{i,k}(P) = - \int_{\Gamma} T_{ij,k}(P,Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij,k}(P,Q) t_j(Q) d\Gamma \quad k = 1,2 \quad (5.36)$$

A derivada do raio vetor dos núcleos da equação de deslocamento,  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$  são realizadas em relação às coordenadas do ponto campo (contorno do problema). Para o cálculo da

derivada para pontos pertencentes ao domínio (pontos internos), estas devem ser realizadas em função das coordenadas do ponto fonte. Têm-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial r}{\partial x_f} = -\frac{\partial r}{\partial x_c} \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y_f} = -\frac{\partial r}{\partial y_c} \quad (5.38)$$

Ambos os membros da equação (5.36) podem ser multiplicados pelo tensor de constantes elásticas do material  $C_{mnik}$ .

$$C_{mnik} u_{i,k}(P) = -\int_{\Gamma} C_{mnik} T_{ij,k}(P,Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} C_{mnik} U_{ij,k}(P,Q) t_j(Q) d\Gamma \quad (5.39)$$

Assim:

$$\sigma_{mn}(P) = -\int_{\Gamma} C_{mnik} T_{ij,k}(P,Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} C_{mnik} U_{ij,k}(P,Q) t_j(Q) d\Gamma \quad (5.40)$$

A expressão anterior pode se expressa em termos de núcleos de terceira ordem  $D_{kij}$  e  $S_{kij}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(P) \\ \sigma_{xy}(P) \\ \sigma_{yy}(P) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} S_{1xx}(P,Q) & S_{2xx}(P,Q) \\ S_{1xy}(P,Q) & S_{2xy}(P,Q) \\ S_{1yy}(P,Q) & S_{2yy}(P,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) = \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} D_{1xx}(P,Q) & D_{2xx}(P,Q) \\ D_{1xy}(P,Q) & D_{2xy}(P,Q) \\ D_{1yy}(P,Q) & D_{2yy}(P,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (5.41)$$

A expressão anterior também pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij}(P) + \int_{\Gamma} S_{kij}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} D_{kij}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (5.42)$$

O núcleo de deslocamentos para carga unitária na direção  $i$ ,  $U_j$  da equação integral demonstrada no capítulo 3, é derivado em relação à  $X_k$  e  $X_j$ . Estas derivadas são substituídas no tensor de deformações.

$$\frac{\partial U_j}{\partial X_k} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [-(3-4\nu)\delta_{ij}r_k + \delta_{ik}r_j + \delta_{jkr_i} - 2r_i r_j r_k] \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial X_j} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [-(3-4\nu)\delta_{ik}r_j + \delta_{ij}r_k + \delta_{jkr_i} - 2r_i r_j r_k] \quad (5.44)$$

Substituindo-se as duas expressões anteriores no tensor de deformações, têm-se:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [-(1-2\nu)(\delta_{ik}r_j + \delta_{ij}r_k) + \delta_{jkr_i} - 2r_i r_j r_k] \quad (5.45)$$

A partir da expressão anterior, têm-se:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [-2(1-2\nu)r_i] \quad (5.46)$$

A Lei de Hooke, apresentada no capítulo 3, pode ser escrita como:

$$\sigma_{jk} = 2G \left[ \varepsilon_{jk} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \sigma_{jk} \varepsilon_{mm} \right] \quad (5.47)$$

Substituindo-se as equações (5.45) e (5.46) em (5.47), trocando-se o sinal das derivadas a partir das relações nas equações (5.37) e (5.38), têm-se as seguintes expressões, para carga unitária na direção  $i$ :

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(-\delta_{jk}r_i + \delta_{ik}r_j + \delta_{ij}r_k) + 2r_i r_j r_k] \quad (5.48)$$

Para a obtenção do núcleo  $D_{kij}$ , a expressão anterior, para carga unitária na direção  $k$ , torna-se:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{jkr_i} + \delta_{ikr_j} - \delta_{ijr_k}) + 2r_i r_j r_k] \quad (5.49)$$

A derivada do núcleo  $T_j$ , para a carga unitária na direção  $i$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j}{\partial X_k} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ijr_k} + 4r_i r_j r_k - \delta_{ikr_j} - \delta_{jkr_i}] + \right. \\ \left. + 2(1-2\nu)[r_k r_j n_i - r_k r_i n_j] - 2r_i r_j n_k + (1-2\nu)(\delta_{ikn_j} - \delta_{ijn_k} - \delta_{jkn_i}) \right\} \quad (5.50) \end{aligned}$$

A expressão do núcleo  $S_{kij}$  é obtida pela multiplicação da expressão anterior (5.50) pelo tensor  $C_{mnik}$ . Trocando-se o sinal das derivadas a partir das relações nas equações (5.37) e (5.38), para a carga unitária na direção  $k$ , têm-se a seguinte expressão para o núcleo  $S_{kij}$ :

$$\begin{aligned} S_{kij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} [2\nu r_j r_k + (1-2\nu)\delta_{jk}] n_i + \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} [2\nu r_i r_k + (1-2\nu)\delta_{ik}] n_j + \\ \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} [2(1-2\nu)r_i r_j - (1-4\nu)\delta_{ij}] n_k + \\ \frac{G}{\pi(1-\nu)r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu)\delta_{ijr_k} + \nu(\delta_{jkr_i} + \delta_{ikr_j}) - 4r_i r_j r_k] \quad (5.51) \end{aligned}$$

### 5.13 - Implementações analíticas

Quando o ponto de colocação pertence ao elemento de contorno que está sendo

integrado, torna-se necessária a utilização de integrais analíticas para o cálculo das contribuições nos nós de contorno. As integrais são deduzidas para a equação integral de deslocamentos e para a equação integral de tensões no contorno. Para o cálculo de tensões no domínio, os núcleos da equação integral de tensões são calculados numericamente.

A singularidade dos núcleos é tratada com técnicas matemáticas como o valor principal de Cauchy ou utiliza-se a parte finita da integral de Hadamard e de outras simplificações estratégicas ao longo do desenvolvimento das integrais singulares.

#### **5.14 – Relações entre coordenadas N e S em termos das direções 1 e 2**

Quando o ponto de colocação é posicionado no meio do elemento, a derivada do raio vetor  $r$  em relação às coordenadas de campo está relacionada com os cossenos do vetor normal ao elemento.

Para o primeiro trecho, têm-se:

$$r_i = -s_i \quad (5.52)$$

Para o segundo trecho, têm-se:

$$r_i = s_i \quad (5.53)$$

Onde  $s_i$  são os cossenos diretores do vetor normal ao elemento.



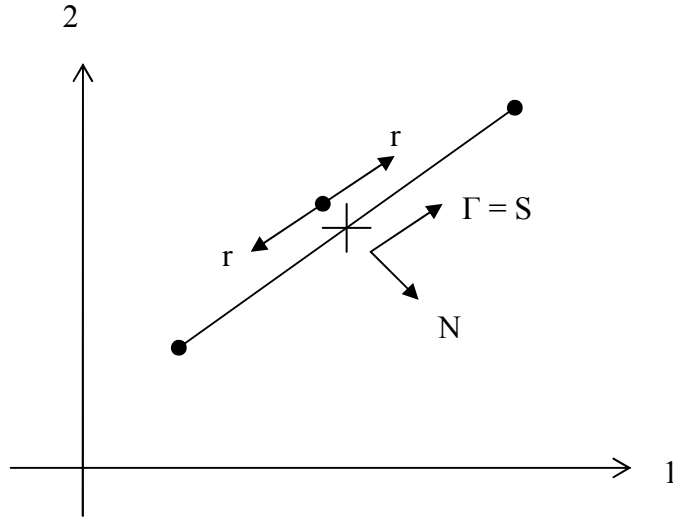


Figura 5.11 - Relação entre N e S.

### 5.15 - Expressões analíticas de força e deslocamento no contorno para elementos lineares

Quando o ponto de colocação é levado ao contorno, torna-se necessária a dedução de integrais analíticas para o cálculo das contribuições nos núcleos das equações integrais.

Quando o ponto de colocação está localizado no meio do elemento, a contribuição do núcleo  $T_{ij}$ , para o nó inicial do elemento de contorno, é dada por:

$$AH_{ij} = \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi(1 - \nu)l} \left[ (l - a) \ln\left(\frac{a}{l - a}\right) + l \right] (s_{jni} - s_{mj}) \quad (5.54)$$

Logo:

$$AH_{11} = 0 \quad (5.55)$$

$$AH_{12} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)l} \left[ (l-a) \ln\left(\frac{a}{l-a}\right) + l \right] (s_{2n_1} - s_{1n_2}) \quad (5.56)$$

$$AH_{21} = -AH_{12} \quad (5.57)$$

$$AH_{22} = 0 \quad (5.58)$$

Para contribuição do núcleo  $T_{ij}$ , no nó final do elemento de contorno, têm-se:

$$AH_{ij} = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)l} \left[ a \ln\left(\frac{l-a}{a}\right) + l \right] (s_{jn_i} - s_{in_j}) \quad (5.59)$$

Logo:

$$AH_{11} = 0 \quad (5.60)$$

$$AH_{12} = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)l} \left[ a \ln\left(\frac{l-a}{a}\right) + l \right] (s_{2n_1} - s_{1n_2}) \quad (5.61)$$

$$AH_{21} = -AH_{12} \quad (5.62)$$

$$AH_{22} = 0 \quad (5.63)$$

Quando o ponto de colocação está localizado sobre o nó inicial do elemento ( $a = 0$ ), a contribuição no nó inicial vale:

$$AH_{12} = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} [\ln(l-a) - 1] (s_{2n_1} - s_{1n_2}) \quad (5.64)$$

A contribuição para o nó final ( $a = 0$ ) vale:

$$AH_{12} = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}(s_2n_1 - s_1n_2) \quad (5.65)$$

Quando o ponto de colocação está localizado sobre o nó final do elemento ( $l - a = 0$ ), a contribuição no nó inicial vale:

$$AH_{12} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}(s_2n_1 - s_1n_2) \quad (5.66)$$

A contribuição para o nó final ( $l - a = 0$ ) vale:

$$AH_{12} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}[\ln a - 1](s_2n_1 - s_1n_2) \quad (5.67)$$

Quando o ponto de colocação está localizado no meio do elemento, a contribuição do núcleo  $U_{ij}$ , para o nó inicial do elemento de contorno, é dada por:

$$AG_{ij} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)l} \left[ (l-a)K_3 + \frac{1}{4}K_4 \right] \quad (5.68)$$

Onde:

$$K_3 = ls_1s_j - (3-4\nu)\delta_{ij}[(l-a)\ln(l-a) + a\ln a - l] \quad (5.69)$$

$$K_4 = (3-4\nu)\delta_{ij}\{a^2(1-2\ln a) - (l-a)^2[1-2\ln(l-a)]\} + 2l(2a-l)s_1s_j \quad (5.70)$$

Quando o ponto de colocação está localizado no meio do elemento, a contribuição do núcleo  $U_{ij}$ , para o nó final do elemento de contorno, é dada por:

$$AG_{ij} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)l} \left[ aK_3 - \frac{1}{4} K_4 \right] \quad (5.71)$$

Analogamente ao núcleo  $T_{ij}$ , têm-se os quatro coeficientes para o núcleo  $U_{ij}$ , para o nó inicial e final do elemento.

## 5.16 – Determinação das tensões no contorno para elementos lineares

A equação integral de tensões (5.42) é utilizada para o cálculo de tensões no domínio do problema, a partir de forças e deslocamentos conhecidos no contorno. Esta equação é escrita para o ponto de colocação dentro do domínio.

Para o cálculo de tensões no contorno, o ponto de colocação é levado ao contorno. Quando o ponto de carregamento tende ao contorno, tem-se:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} D_{kij}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} S_{kij}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (5.72)$$

A equação anterior é válida para contorno com tangente contínua e o ponto de carregamento em região onde existe continuidade da função derivada dos deslocamentos. Como os pontos de carregamento são internos ao elemento, existe a continuidade.

A integral com o núcleo  $D_{kij}$ , com a singularidade da ordem  $(1/r)$ , é definida como o valor principal de Cauchy. A integral com o núcleo  $S_{kij}$ , com singularidade da ordem de  $(1/r^2)$ , é definida como a parte finita da integral de Hadammard.

### 5.17 - Expressões analíticas para os núcleos $D_{kij}$ e $S_{kij}$ da equação integral de tensões

Quando o ponto de colocação está localizado no meio do elemento, a contribuição genérica do núcleo  $D_{kij}$ , para o nó inicial do elemento de contorno, é dada por:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)l} \left[ (l-a) \ln \frac{(l-a)}{a} - l \right] \left[ (1-2\nu)(\delta_{jkS_i} + \delta_{ikS_j} - \delta_{ijS_k}) + 2S_iS_jS_k \right] \quad (5.73)$$

A contribuição genérica do núcleo  $D_{kij}$ , para o nó final do elemento de contorno, é dada por:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)l} \left[ a \ln \frac{(l-a)}{a} + l \right] \left[ (1-2\nu)(\delta_{jkS_i} + \delta_{ikS_j} - \delta_{ijS_k}) + 2S_iS_jS_k \right] \quad (5.74)$$

A contribuição genérica do núcleo  $S_{kij}$ , para o nó inicial do elemento de contorno, é dada por:

$$S_{kij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left\{ n_i [2\nu S_j S_k + (1-2\nu)\delta_{jk}] + n_j [2\nu S_i S_k + (1-2\nu)\delta_{ik}] + \right. \\ \left. + n_k [2(1-2\nu)S_i S_j - (1-4\nu)\delta_{ij}] \right\} \times \frac{1}{l} \times \left[ \left( \frac{-1}{a} \right) (l-a) - 1 + \ln \frac{a}{(l-a)} \right] \quad (5.75)$$

A contribuição genérica do núcleo  $S_{kij}$ , para o nó final do elemento de contorno, é dada por:

$$S_{kij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left\{ n_i [2\nu S_j S_k + (1-2\nu)\delta_{jk}] + n_j [2\nu S_i S_k + (1-2\nu)\delta_{ik}] + \right. \\ \left. + n_k [2(1-2\nu)S_i S_j - (1-4\nu)\delta_{ij}] \right\} \times \frac{1}{l} \times \left[ \frac{-a}{(l-a)} - 1 + \ln \frac{(l-a)}{a} \right] \quad (5.76)$$

## **6 - ANÁLISE DE PROBLEMAS COM FRATURAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL (DBEM)**

### **6.1 - Introdução**

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é muito bem sucedido na análise de problemas de elastostática em regime elástico linear em problemas no qual o domínio não apresenta grande degeneração de geometria.

A fratura pode ser entendida como uma degeneração do domínio físico de um problema. A modelagem desta degeneração é definida como fratura matemática, onde as duas faces da fratura são coincidentes, portanto, a modelagem de apenas uma face é necessária para caracterizar esta degeneração. Os elementos de contorno nas duas faces da fratura apresentam as mesmas coordenadas geométricas. O Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) utiliza a equação integral de deslocamentos e a equação integral de forças de superfície. Numa face da fratura e no contorno físico aplica-se a equação integral de deslocamentos, e na outra face aplica-se a equação integral de força de superfície.

Esta estratégia de utilização de duas equações integrais ao longo da fratura permite que a solução geral para problemas com fraturas seja alcançada.

A base teórica do método das duas equações integrais de contorno foi apresentada pela primeira vez por Watson [3] e posteriormente por Hong e Chen [4], em uma formulação geral que incorporava as equações integrais de contorno para deslocamentos e equações integrais de contorno para forças de superfície.

Neste capítulo é apresentada a equação integral de forças de superfície utilizada na modelagem da fratura, o tratamento analítico das partes finitas das integrais e o cálculo dos fatores de intensidade de tensão.

## 6.2 - As duas equações integrais de contorno

A representação da equação integral de contorno para os componentes de deslocamento  $u_i$ , num ponto interno P, é dada por:

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (6.1)$$

Onde  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  representam as soluções fundamentais de deslocamento de força de superfície de Kelvin, respectivamente.

As soluções fundamentais são apresentadas a seguir.

$$U_{ij}(p, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[ \frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + r_i r_j \right\} \quad (6.2)$$

$$T_{ij}(p, Q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} (r_j n_i - r_i n_j) \quad (6.3)$$

Para o ponto de carregamento (ou de colocação) levado ao contorno, a equação de deslocamento é representada a seguir.

$$c_{ij}(P) u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (6.4)$$

O coeficiente  $c_{ij}(P)$  é dado por  $\delta_{ij}/2$  para um contorno suave no ponto de colocação P.

$\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

As tensões em um ponto do domínio são dadas pela seguinte equação:

$$\sigma_{ij}(P) + \int_{\Gamma} S_{kij}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} D_{kij}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (6.5)$$

Quando o raio  $r$  dos é diferente de zero, a equação integral é regular. Quando os pontos internos se aproximam do contorno, isto é,  $P \rightarrow Q$ , a distância  $r$  tende a zero e o núcleo  $S_{kij}$  exibe uma hipersingularidade de ordem  $1/r^2$  e o núcleo  $D_{kij}$  exibe uma singularidade  $1/r$ . Levando-se em conta a continuidade de deformações e de forças de superfície, os processos limites conduzem a integrais impróprias na primeira e segunda integral da equação anterior, quando o ponto de colocação é levado ao contorno.

A equação anterior passa a ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(p') + \int_{\Gamma} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = \int_{\Gamma} D_{kij}(p', p) t_k(p) d\Gamma(p) \quad (6.6)$$

A primeira integral da equação anterior é representada pela parte finita da integral de Hadamard, Portela et al [5]. Multiplicando-se a expressão anterior pelas componentes unitárias do vetor normal ao contorno  $n_i(p')$  e aplicando-se a relação entre tensão e força de superfície, a seguir, têm-se:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(p') n_i(p') + n_i(p') \int_{\Gamma} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = n_i(p') \int_{\Gamma} D_{kij}(p', p) t_k(p) d\Gamma(p) \quad (6.8)$$

Em um contorno suave, as componentes das forças de superfície  $t_j$  são dadas por:

$$\frac{1}{2} t_j(p') + n_i(p') \int_{\Gamma} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = n_i(p') \int_{\Gamma} D_{kij}(p', p) t_k(p) d\Gamma(p) \quad (6.9)$$



Onde  $n_i$  representa a componente normal unitária no contorno, em um ponto de colocação  $p'$ .

### **6.3 – Estratégia de modelagem da fratura**

A modelagem dos elementos na fratura foi realizada com elementos isoparamétricos lineares, assim como o contorno do problema.

Os limites da fratura são modelados com nós duplos, utilizando-se elementos mistos, para as fraturas de borda ou internas. Para a fratura inclinada central, o vértice também é tratado com nó duplo, permitindo-se a descontinuidade. Esta estratégia de nós duplos permite que seja utilizado o coeficiente  $c_{ij}(P)$ , dado por  $\delta_{ij}/2$ , para um contorno suave no ponto de colocação  $P$ . Os vértices do contorno do problema também são tratados com nós duplos. Os nós duplos permitem a descontinuidade de carregamento no contorno.

Foram analisados dois casos com o posicionamento estratégico dos pontos de colocação apenas nos elementos onde se aplica a equação integral de deslocamentos, conforme mostrados no capítulo anterior. O posicionamento do ponto de colocação foi sobre o nó inicial do elemento, a  $-2/3$  ou a  $+2/3$  do centro do elemento, na coordenada intrínseca.

### **6.4 – Tratamento das partes finitas das integrais**

As integrais impróprias são facilmente tratadas pelo clássico método da subtração da singularidade. A equação integral imprópria original é transformada em uma soma de uma integral regular e uma integral singular. A integral singular é tratada analiticamente e para a integral regular utiliza-se a quadratura de Gauss-Legendre para a integração numericamente, Portela et al [5].

A parte finita de integral de primeira ordem da equação (6.4) pode ser expressa como:

$$\int_{\Gamma_e} T_{ij}(p', p) u_j(p) d\Gamma(p) = u_j^n \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{f_{ij}^n(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi \quad (6.10)$$

A função em  $f_{ij}^n(\xi)$  é regular, dada pelo produto da solução fundamental, uma função de forma e o jacobiano de transformação de coordenadas, multiplicadas pelo termo  $(\xi - \xi')$ . Com a ajuda do primeiro termo da expansão de Taylor da função  $f_{ij}^n$ , no ponto de colocação, chega-se:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f_{ij}^n(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{f_{ij}^n(\xi) - f_{ij}^n(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi + f_{ij}^n(\xi') \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} \quad (6.11)$$

Com a subtração da singularidade resulta na soma de duas integrais na equação anterior, portanto a primeira integral é regular e a segunda pode ser obtida analiticamente, resultando em:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} = \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| \quad (6.12)$$

No caso de elementos lineares este desenvolvimento leva aos mesmos resultados obtidos com a integração mostrada no capítulo anterior.

A equação de segunda ordem que trata de integral de parte finita é dada por:

$$\int_{\Gamma_e} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = u_k^n \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{g_{kij}^n(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad (6.13)$$

Em que  $g_{kij}^n(\xi)$  é a função regular, é dado pelo produto da solução fundamental, com a função de forma e o jacobiano da transformação de coordenadas, multiplicadas pelo termo  $(\xi - \xi')^2$ . O termo a direita da equação anterior pode ser transformado com a ajuda do primeiro e do segundo termos da expansão de Taylor da função densidade  $g_{kij}^n$ , nas vizinhanças do ponto de carregamento [5]. Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \frac{g_{kij}^n(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= \int_{-1}^{+1} \frac{g_{kij}^n(\xi) - g_{kij}^n(\xi') - g_{kij}^{n(1)}(\xi')(\xi - \xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \\
&+ g_{kij}^n(\xi') \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} + g_{kij}^{n(1)}(\xi') \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Em que  $g_{kij}^{n(1)}$  é a derivada de primeira ordem de  $g_{kij}^n$ . Do lado direito da equação anterior tem-se três termos, sendo o primeiro termo a função regular e o terceiro termo é idêntico à equação (6.12).

O segundo termo pode ser integrado analiticamente, portanto:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} = -\frac{1}{1 + \xi'} - \frac{1}{1 - \xi'} \tag{6.15}$$

As equações (6.11) e (6.14) são, respectivamente, as equações de primeira e segunda ordem da parte finita da integral.

Levando-se em consideração um elemento linear, com os nós posicionados arbitrariamente nos pontos  $\xi = -1$  e  $\xi = +1$ . As funções de forma de um elemento linear são dadas por:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \\
\phi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

A parte finita das integrais de primeira ordem é integrada analiticamente a seguir:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_1}{\xi - \xi'} d\xi &= \ln \left| \frac{l - a}{a} \right| \cdot (l - a) \\
\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_2}{\xi - \xi'} d\xi &= \ln \left| \frac{l - a}{a} \right| \cdot a
\end{aligned} \tag{6.17}$$

A parte finita das integrais de segunda ordem é integrada analiticamente a seguir:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_1}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{a}{l-a} \right| - \frac{l-a}{a} - 1 \right)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_2}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{l-a}{a} \right| - \frac{a}{l-a} - 1 \right)$$
(6.18)

Onde ‘a’ e ‘l-a’ são as distâncias do ponto de carregamento e as extremidades do elemento, sendo que ‘a’ é a distância entre o nó da extremidade esquerda do elemento e o ponto de carregamento e ‘l’ é o comprimento do elemento linear. Portanto ‘l-a’ é a distância entre o nó da extremidade direita do elemento e o ponto de carregamento.

## 6.5 - Considerações de corpo rígido

Quando um ponto de colocação é posto no nó localizado em um elemento de fratura há dois elementos, em faces opostas, contendo o ponto de colocação, porque ambas as superfícies de fratura são discretizados. Em relação às coordenadas intrínsecas do elemento, ocorre uma inversão de sinal na coordenada do ponto de colocação quando a fratura é percorrida no sentido contrário. Isto significa que ao longo da fratura, as partes finitas das integrais nas equações (6.4) e (6.9) são requisitadas duas vezes: uma vez no elemento que contém o nó de colocação e, de novo, no elemento oposto que contém o nó que seja correspondente ao nó de colocação. Esta característica peculiar do DBEM (Dual Boundary Elements Method) põe restrição no uso da condição de corpo rígido e devem-se avaliar indiretamente os componentes de diagonal para nós de fratura [5].

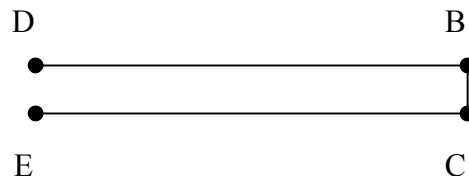
## 6.6 - Cálculo dos fatores de intensidade de tensão

Seja  $r$  e  $\theta$  um sistema de coordenadas polares, centrada na ponta da fratura, em que  $\theta = \pm\pi$  define a fratura. Considerando apenas o primeiro termo da expansão de Williams, analogamente ao discutido em Portela et al [5], o campo de deslocamentos na superfície de fratura pode ser escrito como:

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (6.19)$$

Onde  $\mu$  é o módulo de deformação transversal e  $\kappa = 3 - 4\nu$ ; para o estado plano de deformação  $\eta = \nu$  e para o estado plano de tensão  $\eta = \nu / (1 + \nu)$ , onde  $\nu$  é coeficiente de Poisson. Este processo de cálculo de fatores de intensidade de tensões tem o nome de extrapolação de deslocamentos próximo à fratura [20].

O fator  $K_I$  é o fator de intensidade de tensão para modo de fratura I. O fator de intensidade de tensão pode ser obtido quando os deslocamentos nas superfícies de fratura são conhecidos através de uma solução de elemento de contorno.



**Figura 6.1** – Elementos lineares DB e CE na ponta da fratura.

O fator de intensidade de tensão  $K_I$  para o elemento linear, em função dos deslocamentos nos nós D e E, é dado por:

$$K_I^{DE} = (u_2^D - u_2^E) \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (6.20)$$

Onde  $l$  é a extensão do elemento de contorno isoparamétrico linear próximo ao frente BC da fratura. A extensão  $l$  deve ser pequena para aproximação de resultados.

Para o cálculo do fator de intensidade de tensão no modo II têm-se as mesmas equações mencionadas acima, mas os deslocamentos nos pontos D e E estão relacionados com a direção 1.

## **7 - EXEMPLOS DE ANÁLISE BIDIMENSIONAL DE FRATURAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL (DBEM)**

### **7.1 - Introdução**

Neste capítulo serão apresentados exemplos de problemas bidimensionais com fraturas existentes analisados em regime elástico linear, utilizando-se a Mecânica da Fratura Elástica Linear. Os exemplos apresentados a seguir são placas em estado plano de tensão ou de deformação, fraturas de canto e internas. Os elementos utilizados na análise foram os elementos isoparamétricos lineares, utilizados na modelagem do contorno e da fratura matemática.

A estratégia de modelagem e de posicionamento dos pontos de colocação foi apresentada no capítulo 5. Para cada exemplo analisado, têm-se dois casos de posicionamento estratégico dos pontos de colocação.

Na primeira situação, os pontos de colocação foram os mesmos tanto para a equação integral para deslocamentos como para a de forças de superfície. O ponto de colocação para elementos contínuos foi posicionado a  $-2/3$  do centro do elemento. Para elementos mistos com nó duplo sobre o segundo nó, foram posicionados dois pontos de colocação, a  $-2/3$  e a  $+2/3$  do centro. Para elementos mistos com nó duplo sobre o primeiro nó, foi posicionado um ponto de colocação a  $-2/3$  do centro, analogamente ao elemento contínuo.

Na segunda situação, a equação integral para forças de superfície usou a estratégia de pontos de colocação da primeira situação e alterou-se a posição dos pontos de colocação da equação integral para deslocamentos do modo descrito a seguir. O ponto de colocação para elementos contínuos foi posicionado sobre o nó inicial do elemento. Para elementos mistos com nó duplo sobre o segundo nó, foram posicionados dois pontos de colocação, um sobre o nó inicial e outro a  $+2/3$  do centro. Para elementos mistos com nó duplo sobre o primeiro nó, o posicionamento manteve-se igual à primeira situação.

A situação 1 refere-se ao trabalho utilizado inicialmente em ALMEIDA [20].

Os resultados são apresentados a seguir.

## **7.2 - Exemplos de chapas solicitadas em regime elástico**

Neste item serão calculados os fatores de intensidade de tensão para chapas solicitadas em modos I e II de fratura. Três tipos de fraturas foram analisados: fraturas de canto, fraturas internas inclinadas e fraturas internas em forma de “v”. Para a obtenção dos resultados de cada exemplo, a fratura foi remodelada, mantendo-se a discretização do contorno, para que as relações  $a/w$  fossem alcançadas.

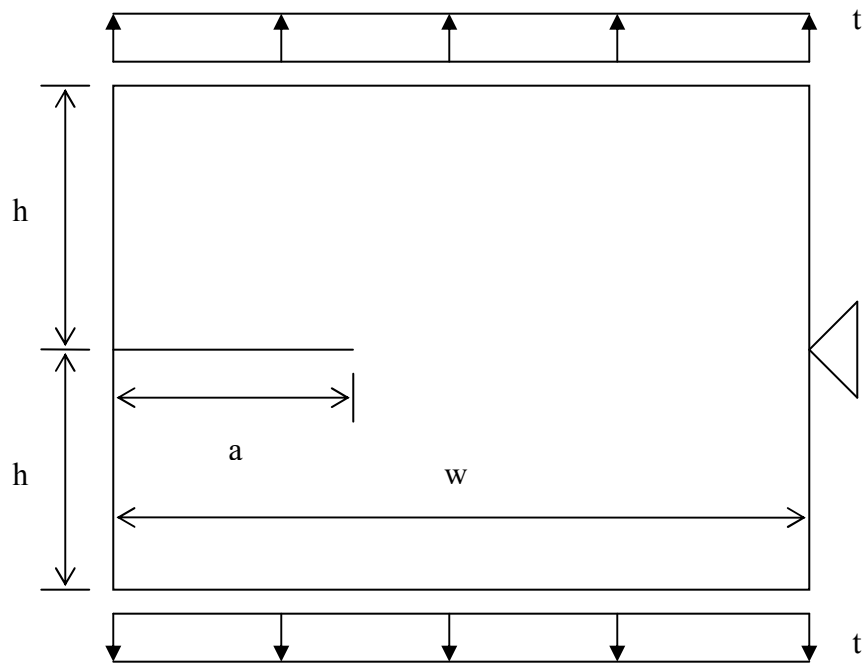
### **7.2.1 - Corpo com fratura de borda**

Nesta modelagem foram utilizados 48 elementos lineares para a caracterização do contorno. Na fratura foram utilizados 16 elementos, sendo 8 em cada superfície da fratura. A relação  $h/w$  foi 0,5, cinco relações  $a/w$  foram consideradas:  $a/w = 0,2$ ,  $a/w = 0,3$ ,  $a/w = 0,4$ ,  $a/w = 0,5$  e  $a/w = 0,6$ . O problema foi analisado em estado plano de deformação.

No contorno do problema foram utilizados elementos de mesmo comprimento para as faces paralelas. Com a estratégia de posicionamento dos pontos de colocação, os seguintes resultados foram obtidos para as situações 1 e 2.



Na fratura foram utilizados elementos de contorno de comprimento diferentes, seus comprimentos foram gradativamente diminuindo do início ao final da fratura, para uma melhor aproximação de resultados.



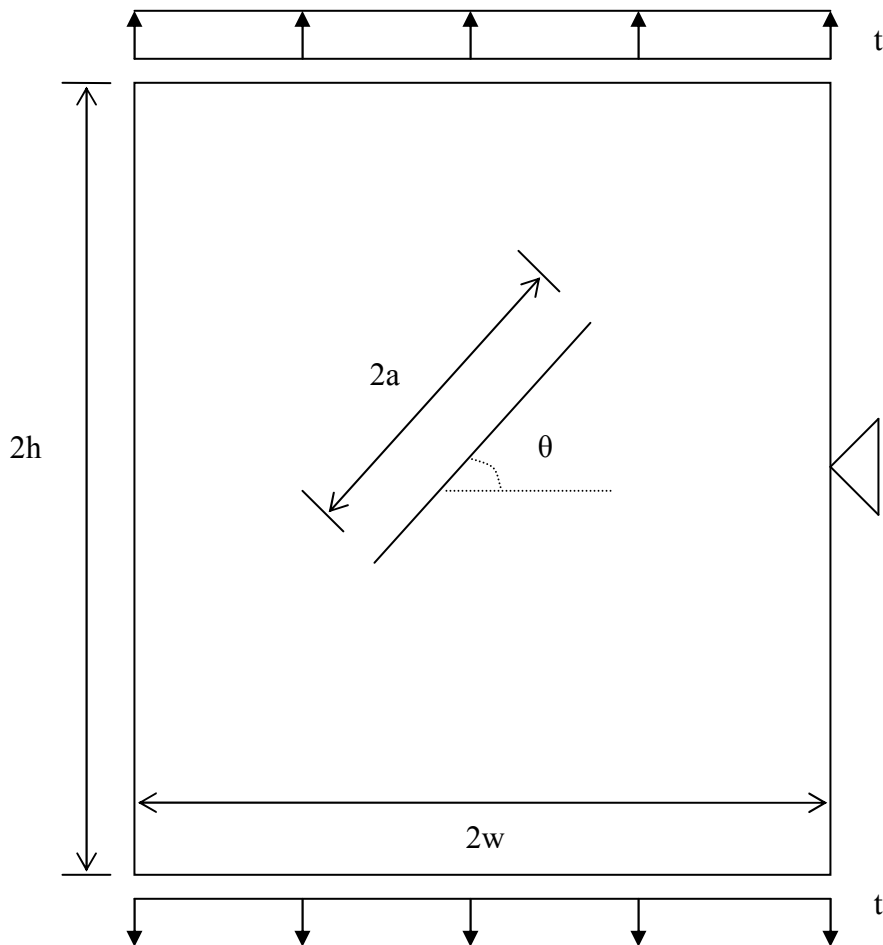
**Figura 7.1** – Modelo com fratura de borda.

**Tabela 7.1** – Fator de intensidade de tensão  $K_I$  para fratura de borda.

<b>Resultados de <math>K_I/t\sqrt{(\pi a)}</math> para elementos lineares</b>							
	Portela (1992)	Almeida (2003)			Civelek (1982)	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
a/w	numérico	Discr. 1	Discr. 2	Discr. 3	analítico	numérico	numérico
0,2	1,566	1,563	1,514	1,511	1,488	1,503	1,502
0,3	1,962	1,943	1,882	1,882	1,848	1,879	1,875
0,4	2,230	2,458	2,380	2,380	2,324	2,384	2,376
0,5	3,268	3,201	3,100	3,100	3,010	3,117	3,104
0,6	4,580	4,438	4,400	4,397	4,152	4,352	4,321

### 7.2.2 Corpo com fratura interna inclinada

Nesta modelagem foram utilizados 48 elementos lineares para a caracterização do contorno, sendo 16 em cada face vertical e 8 em cada face horizontal. Na fratura foram utilizados 24 elementos, sendo 12 em cada superfície da fratura. A relação  $h/w$  foi 2, cinco relações  $a/w$  foram consideradas:  $a/w = 0,2$ ,  $a/w = 0,3$ ,  $a/w = 0,4$ ,  $a/w = 0,5$  e  $a/w = 0,6$ . O problema foi analisado em estado plano de deformação.



**Figura 7.2** – Modelo com fratura inclinada.

Na fratura foram utilizados elementos de contorno de comprimento diferentes, seus comprimentos foram gradativamente diminuindo a partir do centro até as duas extremidades da fratura, para uma melhor aproximação de resultados. A fratura está inclinada 45° em relação ao eixo horizontal.

**Tabela 7.2** – Fator de intensidade de tensão  $K_I$  para fratura inclinada.

<b>Resultados de <math>K_I/t\sqrt{(\pi a)}</math> para elementos lineares</b>						
	Portela (1992)	Almeida (2003)		Murakami (1987)	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
a/w	numérico	Discr. 1	Discr. 2	analítico	numérico	numérico
0,2	0,531	0,530	0,513	0,518	0,513	0,513
0,3	0,554	0,553	0,535	0,541	0,572	0,572
0,4	0,588	0,586	0,567	0,572	0,567	0,566
0,5	0,632	0,628	0,608	0,612	0,608	0,607
0,6	0,686	0,682	0,660	0,661	0,660	0,659

Os resultados para  $K_{II}$  são apresentados a seguir.

**Tabela 7.3** – Fator de intensidade de tensão  $K_{II}$  para fratura inclinada.

<b>Resultados de <math>K_{II}/t\sqrt{(\pi a)}</math> para elementos lineares</b>						
	Portela (1992)	Almeida (2003)		Murakami (1987)	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
a/w	numérico	Discr. 1	Discr. 2	analítico	numérico	numérico
0,2	0,519	0,519	0,502	0,507	0,502	0,502
0,3	0,528	0,528	0,511	0,516	0,560	0,560
0,4	0,541	0,541	0,524	0,529	0,524	0,522
0,5	0,558	0,558	0,540	0,546	0,540	0,538
0,6	0,579	0,579	0,561	0,567	0,560	0,557

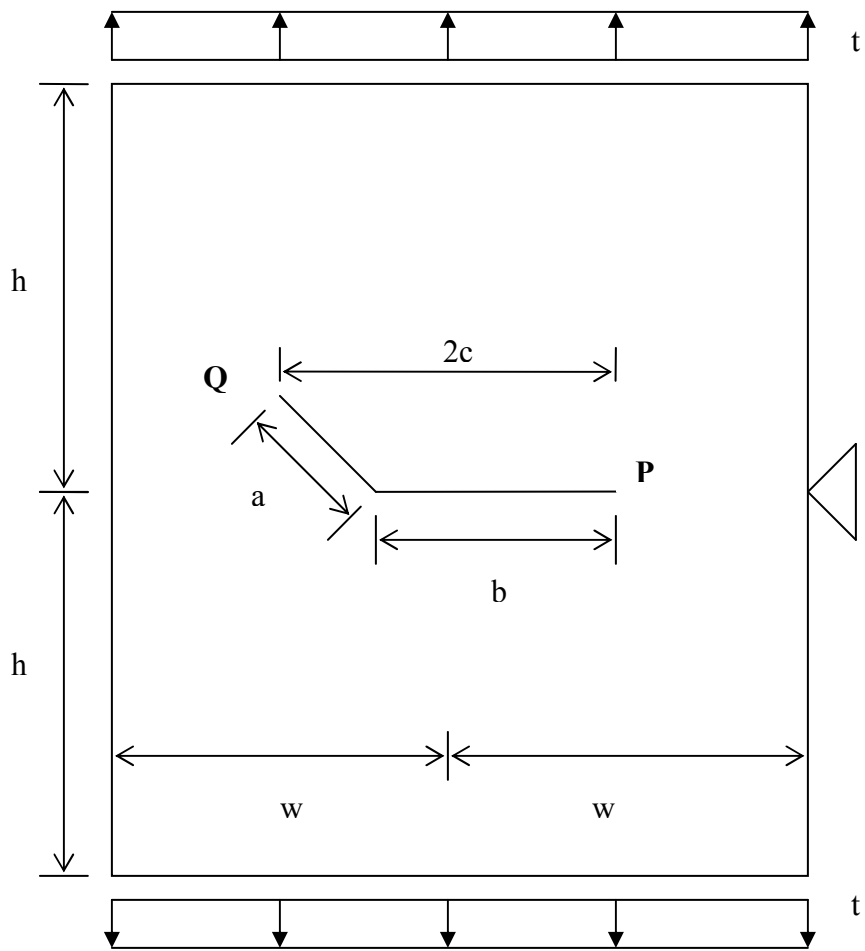
### 7.2.3 - Corpo com fratura interna em forma de “v”

Nesta modelagem foram utilizados 96 elementos lineares para a caracterização do contorno, sendo 16 em cada face horizontal e 32 em cada face vertical. Na fratura foram utilizados 36 elementos, sendo 18 em cada superfície da fratura. Para o segmento inclinado e horizontal da fratura, foram utilizados 8 elementos e 10 elementos, respectivamente, para cada face. O número total de elementos de contorno utilizados foi de 132, relativos à modelagem da fratura e ao contorno externo.

A relação  $h/w$  e  $b/w$  foi de 2 e 0,1, respectivamente. Três relações  $a/b$  foram consideradas:  $a/b = 0,2$ ,  $a/b = 0,4$  e  $a/b = 0,6$ . O problema foi analisado em estado plano de deformação. A projeção horizontal da fratura é dada pela seguinte expressão:

$$2c = b + a \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5.1)$$

Na fratura foram utilizados elementos de contorno de comprimento diferentes, seus comprimentos foram gradativamente diminuindo a partir do vértice central até as duas extremidades da fratura, para uma melhor aproximação de resultados. O trecho inclinado da fratura está a  $45^\circ$  em relação ao eixo horizontal. A projeção horizontal total da fratura é centralizada em relação ao contorno. Para as três taxas  $a/b$  consideradas, mantiveram-se o valor de  $b = 0,15$  e somente a fratura foram remodeladas.



**Figura 7.3** – Modelo com fratura em forma de “v”.

Os resultados do fator de intensidade de  $K_I$  e  $K_{II}$  foram obtidos para os pontos P e Q para as três taxas  $a/b$ :

**Tabela 7.4 – Fator de intensidade de tensão  $K_I$  em P.**

<b>Resultados de <math>K_I/t\sqrt{(\pi c)}</math> no ponto P para elementos lineares</b>						
a/b	Murakami (1987)	Portela et al (1992)	Almeida et al (2004)	TDO	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
0,2	0,995	1,021	0,988	0,988	0,988	0,988
0,4	0,990	1,018	0,985	0,985	0,984	0,984
0,6	0,986	1,017	0,983	0,983	0,982	0,982

**Tabela 7.5 – Fator de intensidade de tensão  $K_{II}$  em P.**

<b>Resultados de <math>K_{II}/t\sqrt{(\pi c)}</math> no ponto P para elementos lineares</b>						
a/b	Murakami (1987)	Portela et al (1992)	Almeida et al (2004)	TDO	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
0,2	0,028	0,030	0,029	0,029	0,028	0,028
0,4	0,033	0,036	0,035	0,035	0,035	0,035
0,6	0,030	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032

**Tabela 7.6 – Fator de intensidade de tensão  $K_I$  em Q.**

<b>Resultados de <math>K_I/t\sqrt{(\pi c)}</math> no ponto Q para elementos lineares</b>						
a/b	Murakami (1987)	Portela et al (1992)	Almeida at al (2004)	TDO	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
0,2	0,598	0,634	0,636	0,636	0,630	0,630
0,4	0,574	0,603	0,606	0,606	0,603	0,603
0,6	0,568	0,595	0,600	0,600	0,595	0,595

**Tabela 7.7** – Fator de intensidade de tensão  $K_{II}$  em Q.

<b>Resultados de <math>K_{II}/t\sqrt{(\pi c)}</math> no ponto Q para elementos lineares</b>						
a/b	Murakami (1987)	Portela et al (1992)	Almeida et al (2004)	TDO	Situação 1 [20]	Situação 2 [Figueiredo]
0,2	0,557	0,589	0,590	0,590	0,591	0,591
0,4	0,607	0,637	0,639	0,639	0,635	0,635
0,6	0,627	0,659	0,661	0,661	0,655	0,655

### 7.3 - Conclusões

Observa-se que para o corpo com fratura de borda, com a nova estratégia de posicionamento dos pontos de colocação, o valor da relação  $K_I/t\sqrt{(\pi a)}$  decresceu em relação aos dados existentes anteriormente (Situação 1), houve uma melhor aproximação de resultados numéricos comparando-se com os resultados analíticos CIVELEK [21], onde a menor diferença encontrada (0,93 %) foi para a relação a/w igual a 0,2. Os resultados numéricos existentes para a situação 1 estão mais próximos dos resultados numéricos de PORTELA [22], exceto para a relação a/w igual a 0,4. Os resultados de ALMEIDA [20], para a primeira discretização, estão próximos aos resultados de PORTELA [22]. Os resultados obtidos na discretização 3 ALMEIDA [20], são superiores aos resultados apresentados na situação 1, exceto para as relações a/w igual a 0,4 e a/w igual a 0,5. Com os resultados obtidos com a nova estratégia de posicionamento dos pontos de colocação (situação 2), os valores de  $K_I$  sofreram alterações na primeira, segunda e terceira casas decimais, em relação aos valores apresentados na situação 1, o que refletiu na diferença de resultados da relação  $K_I/t\sqrt{(\pi a)}$ , onde a maior diferença (0,712 %) foi para a relação a/w igual 0,6, e a menor diferença (0,067 %) foi para a relação a/w igual a 0,2 .

Para o corpo com fratura inclinada, o valor da relação  $K_I/t\sqrt{(\pi a)}$  decresceu em relação aos dados existentes anteriormente (situação 1) somente para as relações a/w = 0,4, a/w = 0,5 e

$a/w = 0,6$ , esse decréscimo foi verificado apenas a partir da terceira casa decimal. Os resultados obtidos, comparados com a situação 1, destoam dos valores analíticos fornecidos por MURAKAMI [23].

Para o valor da relação  $K_{II}/t\sqrt{(\pi a)}$ , verificou-se também que os valores decresceram a partir da terceira casa decimal para as relações  $a/w = 0,4$ ,  $a/w = 0,5$  e  $a/w = 0,6$ . Os resultados obtidos, para  $K_{II}/t\sqrt{(\pi a)}$ , comparados com a situação 1, também destoam dos valores analíticos fornecidos por MURAKAMI [23]. Com os resultados obtidos com a nova estratégia de posicionamento dos pontos de colocação (situação 2), os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  sofreram alterações na segunda, terceira e quarta casa decimal, em relação aos valores apresentados na situação 1, a menor diferença (0,15 %) foi para o resultado de  $K_I/t\sqrt{(\pi a)}$ , para a relação  $a/w$  igual a 0,6. A maior diferença (0,53 %) foi para o resultado de  $K_{II}/t\sqrt{(\pi a)}$ , para a relação  $a/w$  igual a 0,6.

Para a fratura interna em forma de “v”, verificou-se que tanto para o ponto **P** quanto para o ponto **Q**, não houve modificação para as relações  $K_I/t\sqrt{(\pi c)}$  e  $K_{II}/t\sqrt{(\pi c)}$  para três casas decimais de precisão, comparando-se os resultados fornecidos com os resultados obtidos. Os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  sofreram alterações a partir da quinta e sexta casa decimais, o que não gerou modificações nas relações com três casas de precisão.



## **8 - FRATURAMENTO COESIVO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL**

### **8.1 - Introdução**

Neste capítulo é apresentada a estratégia de análise bidimensional de fraturas com a utilização de um modelo coesivo de dois parâmetros, analogamente ao modelo utilizado em YANG et al [24].

Uma linha em formato de “mola” é utilizada para caracterizar a interação entre duas superfícies de fratura coesiva solicitada em modo I. O modelo pode ser aplicado para a maioria dos problemas de fratura com o efeito de “ponte”, polímeros, materiais reforçados com fibras ou compostos de partículas.

### **8.2 - Modelo de Zona Coesiva**

O modelo de fratura usando Zona de Processos Coesivos (ZPC) é motivado pelo fato de que em alguns materiais, como concreto, polímeros, compósitos reforçados com fibras, cerâmicas, alguns alumínio, as superfícies da fratura ficam não separadas completamente ao longo da região coesiva. Existe uma extensão relativamente longa da fratura, chamada “*bridging zone*”, “*wake zone*” ou zona coesiva, onde as forças de superfície podem ser transferidas ao longo da linha de fratura.

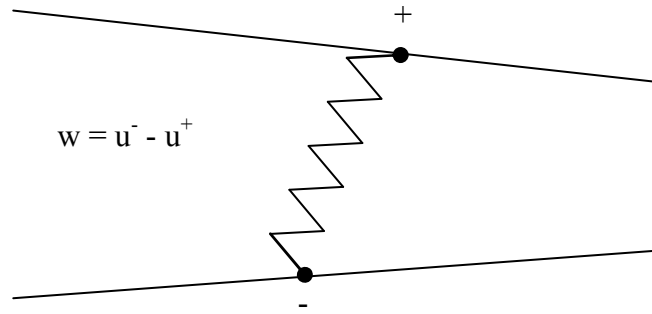
Os mecanismos responsáveis para o desenvolvimento desse tipo de zona de processos podem ser as séries sucessivas de moléculas em polímeros, o efeito de ponte de fibras em compósitos, o inter-travamento de partículas em alumínio e cerâmicas, dentre outros, onde o modelo coesivo é o mais apropriado. A hipótese chave neste modelo é que o amolecimento do material, além da máxima carga, está localizado em uma camada estreita atrás da extremidade fictícia da fratura, cujo volume é desprezível e cuja ação é substituível por forças coesivas.

Geralmente, dois tipos de leis constitutivas são usados na literatura para materiais coesivos, uma é caracterizada por uma relação deslocamento força de superfície e a outra por uma lei constitutiva do material definida em termos de tensões e deformações acompanhadas de uma lei para a camada coesiva. Entretanto, para carregamento quase-estático, o caso considerado predominantemente na literatura, uma lei descrevendo a relação deslocamento força de superfície é suficiente para a modelagem da zona coesiva.

Dois pontos,  $\mathbf{x}^+$  e  $\mathbf{x}^-$ , originalmente coincidentes sobre lados opostos de uma linha, separam-se em dois pontos distintos, conectados pela zona coesiva do material, as deformações continuadas aumentam a separação entre esses dois pontos e possivelmente conduz à fratura. A cinemática desse processo de separação é suposta ser descrita completamente pela separação de faces da fratura,  $\mathbf{w}$ . Introduzindo-se as direções locais na extremidade da zona coesiva, normal e tangencial,  $\mathbf{w}$  pode ser determinado para a distância de separação normal (ou deslocamento de abertura da zona coesiva) e pela distância de separação tangencial (ou deslocamento de escorregamento), como mostrado respectivamente nas equações a seguir:

$$w_n = u_n^- - u_n^+ \quad (8.1)$$

$$w_\tau = u_\tau^- - u_\tau^+ \quad (8.2)$$



**Figura 8.1** – Fratura coesiva representada por uma linha em formato de mola.

Na condição de impedir a inter-penetração da zona coesiva, tem-se  $w_n$  maior ou igual a zero. A igualdade mantém-se somente no caso em que haja contato entre as duas faces da zona coesiva, e neste caso, deve-se também estabelecer uma descrição da resistência friccional sobre a superfície.

Considerando-se o modo de abertura de fratura ou modo I, com  $w_n$  maior que zero, descreve-se a lei de separação de forças para a zona coesiva. O material coesivo pode ser modelado por uma simples linha em formato de mola que apresenta comportamento segundo a seguinte expressão:

$$p = k(w_d)w \quad (8.3)$$

Ou, em termos de componente normal e tangencial:

$$p_n = k(w_d)w_n \quad (8.4)$$

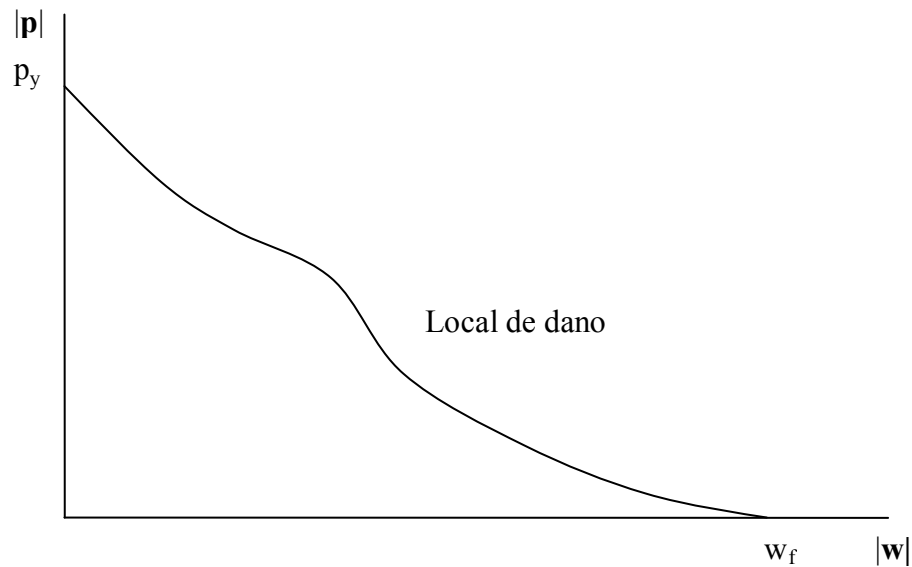
$$p_\tau = k(w_d)w_\tau \quad (8.5)$$

Onde  $\mathbf{p}$  é o vetor de força de superfície com componentes normal e tangencial,  $\mathbf{p}_n$  e  $\mathbf{p}_\tau$ , respectivamente,  $w_d$  é a distância máxima de separação entre dois pontos coincidentes na face da fratura, terminado todo o histórico de carregamento, e é utilizado como parâmetro de dano. A rigidez da zona do material coesivo é definida por  $k(w_d)$  e é suposta sua dependência do estado

corrente de dano. Observa-se que  $k(w_d)$  é uma função decrescente de  $w_d$ , indicando o comportamento de amolecimento do material, isto impõe uma irreversibilidade do processo de dano sob descarregamento. Correspondente a cada  $w_d$ , existe uma força de superfície,  $p_d$ , e um local de dano, obtido a partir da equação (8.3).

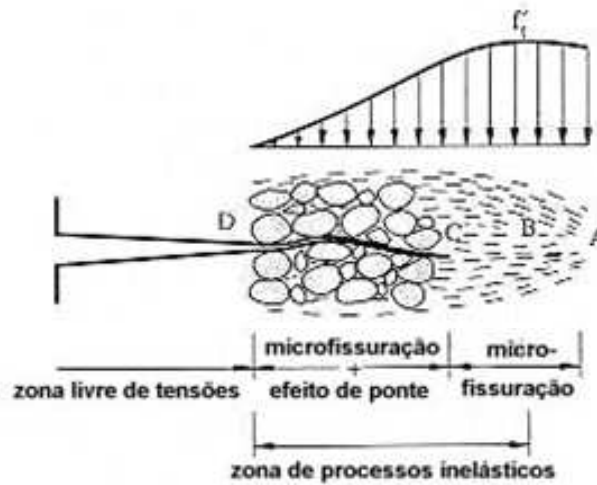
$$p_d = k(w_d)w_d \quad (8.6)$$

Uma lei constitutiva genérica pode ser representada como a figura a seguir:



**Figura 8.2** – Lei constitutiva da zona coesiva em termos de força de superfície e deslocamento - linha em formato de mola.

Há dois estágios críticos ao longo do local de dano. O primeiro estágio, onde  $w_d$  vale zero e  $p_d$  vale  $p_y$ , representa a força de superfície máxima que pode ser suportada pelo material antes que a zona coesiva comece a desenvolver-se. Para além desse valor crítico, o processo de separação inicia-se e o valor de  $w_d$  aumenta. O ponto sobre o espécime que está nesse estado é usualmente chamado de extremidade fictícia da fratura ou extremidade da zona coesiva, como mostrada na figura a seguir:



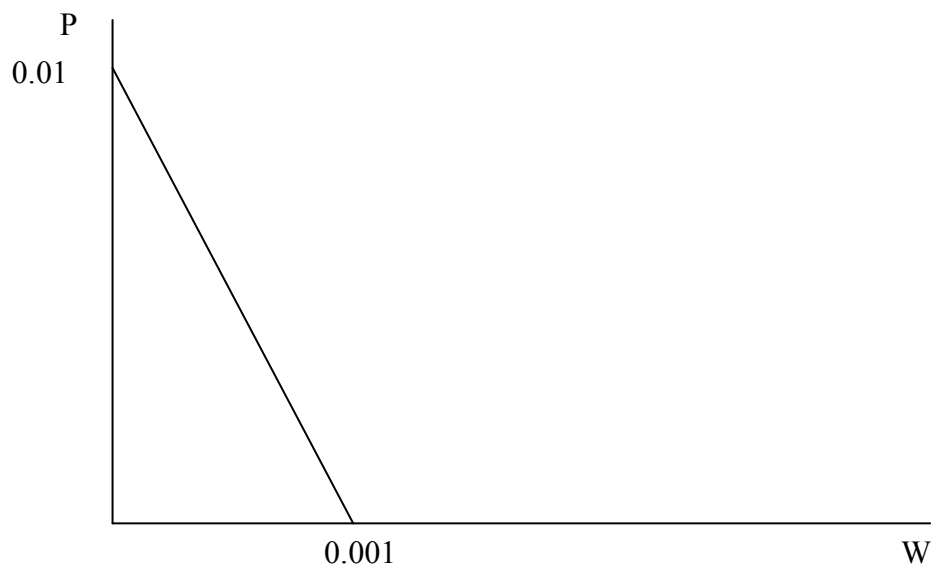
**Figura 8.3** – Modelo de fratura coesiva representando a extremidade da zona coesiva.

O segundo ponto crítico no local de dano,  $w_d$  vale  $w_f$  e  $p_d$  vale zero, representam o máximo “salto” de deslocamento através da zona coesiva que pode ser suportado antes do fraturamento, para valores além desse nível, a força de superfície torna-se zero e dois pontos inicialmente coincidentes são agora completamente separados. O ponto sobre o espécime que está nesse estado é usualmente chamado de extremidade física da fratura. Assim, as equações (8.4) e (8.5), juntas, definem o processo completo de separação de um ponto do material numa fratura, contanto que  $w_n$  seja maior que zero.

### 8.3 - Modelo coesivo de dois parâmetros

A lei constitutiva para fraturamento coesivo utilizada neste trabalho é representada por uma linha reta. Estes parâmetros são representados como a força de superfície máxima ( $p_y$  vale 0,01) e a máxima distância de separação normal ( $w_f$  vale 0,001), ambos tomados como valores fixos nas análises. O valor da força de superfície máxima é comparado com a tensão última de tração do material ( $\sigma_u$ ). Quando o valor da força de superfície iguala-se ao valor de  $p_y$ , tem-se a máxima distância de separação  $w_f$ , nesta condição a extremidade física da fratura desenvolve-se.

Outros modelos constitutivos de zona coesiva são apresentados em BUENO [25], WEELS et al [26] e PRADO [27].



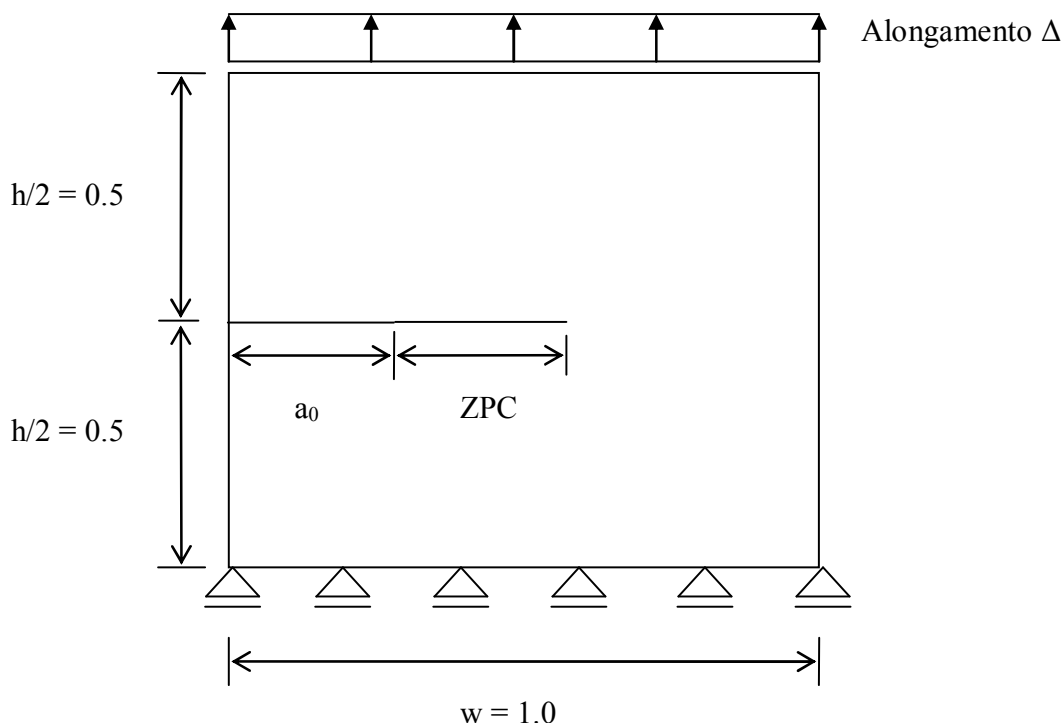
**Figura 8.4** – Modelo coesivo linear de dois parâmetros.

Este modelo coesivo com amolecimento linear obedece a seguinte equação:

$$P = -10W + 0,01 \quad (8.7)$$

#### **8.4 - Espécime com fratura de canto sob deslocamento controlado**

É apresentado a seguir um espécime com uma fratura inicial de canto sob controle de deslocamento. O modelo estrutural apresenta as seguintes características:



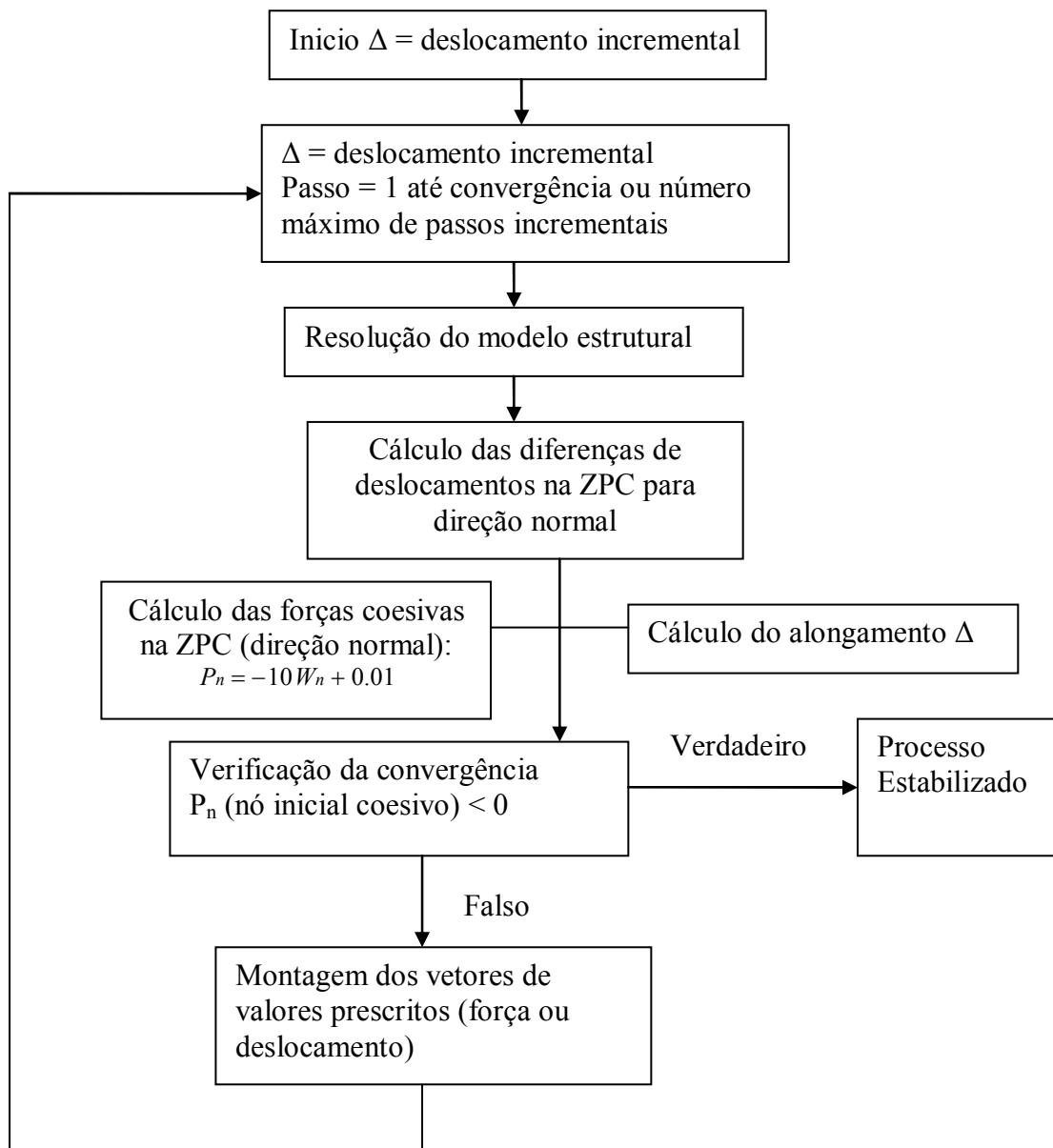
**Figura 8.5** – Modelo com fratura inicial  $a_0$ .

Na figura (8.5), ZPC é a medida de comprimento da zona de processos coesivos ou zona coesiva,  $a_0$  é comprimento da fratura inicial e  $\Delta$  é o alongamento total imposto.

Considerando-se as diferentes possibilidades de análise, apresentam-se, a seguir, três estratégias, onde é avaliado o efeito das forças coesivas num procedimento geral (incremental explícito) e iterativo (incremental iterativo não tangente). O efeito da ausência das forças coesivas é analisado numa terceira estratégia, que leva em conta o comportamento do modelo (elástico) sem a influência dessas forças. Essas análises são realizadas com deslocamento controlado.

### **8.5 - Primeira análise (incremental explícita): o modelo coesivo de dois parâmetros**

O comportamento de materiais de zona coesiva necessita que um procedimento de carregamento incremental seja utilizado para resolver problemas de valor de contorno [24].



**Figura 8.6** – Esquema geral de solução do modelo coesivo.

A zona de processos coesivos (ZPC) e a extensão inicial da fratura ( $a_0$ ) são modeladas analogamente no Método dos Elementos de Contorno Dual. No primeiro passo de resolução do modelo, não se consideram as forças coesivas, sendo o modelo analisado apenas sob controle de deslocamento inicial. As forças são calculadas com a abertura normal sob deslocamento



incremental inicial e levadas em conta a partir do segundo passo da resolução. No segundo passo, com o deslocamento incremental, calcula-se o novo alongamento  $e$ , com as forças calculadas no passo anterior, realiza-se nova análise. O procedimento é finalizado quando a zona de processos coesivos esteja completamente desenvolvida, ou seja, a distância de separação normal  $w_n$  supera o valor  $w_f$  e o primeiro nó da zona coesiva contribui para a extensão da fratura inicial, possibilitando a propagação da extremidade física (figura 8.6). Nesta condição de convergência, têm-se  $p_n$  menor que zero.

## **8.6 - Segunda análise (incremental iterativa não tangente): modelo coesivo com procedimento iterativo**

Na estratégia de análise apresentada anteriormente, quando se impõe inicialmente um deslocamento incremental no modelo, a lei constitutiva da zona coesiva ainda não é utilizada. Nesta condição, a análise é elástica linear. A diferença de deslocamentos para a direção normal da ZPC é utilizada para o cálculo das forças coesivas. Estas forças coesivas calculadas são aplicadas no passo incremental seguinte, juntamente com o novo alongamento ( $\Delta$ ).

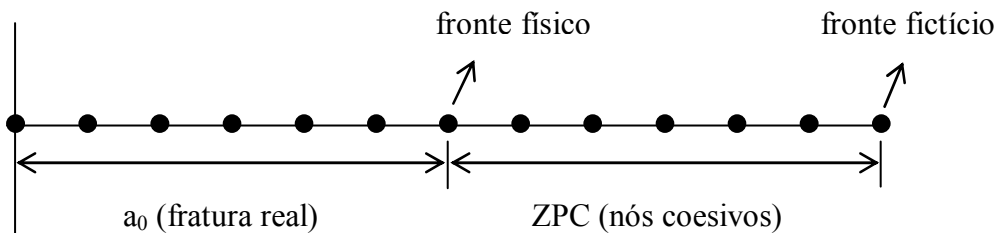
A análise do modelo estrutural com zona coesiva (ZPC) envolve a utilização de uma equação adicional, a lei constitutiva para a zona coesiva. O modelo completo envolve a utilização da formulação baseada na teoria da elasticidade linear e uma lei física distinta para a zona coesiva (fenômeno não linear).

Para um determinado alongamento imposto e um conjunto de forças coesivas na ZPC, torna-se necessário a implementação de um processo iterativo de correção de força e deslocamentos, que leva em conta o efeito do modelo coesivo no modelo elástico. Neste processo, a análise é repetida até que a diferença de abertura normal entre dois passos iterativos alcance um valor tolerado, dada por uma medida de controle de erro, num dado alongamento corrente. Nessa estratégia, o valor da abertura normal  $w_n$  aumenta e o valor da força coesiva  $p_n$  diminui a cada iteração para o alongamento corrente, fornecendo a resposta não linear. Neste trabalho, a cada novo alongamento, o efeito do modelo coesivo é corrigido, por meio da verificação de uma convergência de deslocamentos na zona coesiva, que pode ocorrer dentro de

passos iterativos sucessivos no alongamento corrente. Espera-se que a convergência do processo, analogamente à estratégia adotada na primeira análise, seja alcançada com a utilização de uma menor quantidade de passos incrementais de controle de deslocamento, uma vez que a cada iteração, no alongamento corrente, obtêm-se uma maior diferença de deslocamentos normais na fratura.

### 8.6.1 - Análise da convergência como medida de controle local

A figura a seguir representa a fratura inicial ( $a_0$ ) e a zona de processos coesivos (ZPC) para um modelo em análise.



**Figura 8.7** – Região com fratura inicial ( $a_0$ ) e ZPC.

A cada iteração no passo incremental corrente (alongamento imposto), é avaliado a diferença de deslocamento normal no fronte físico entre a iteração corrente e a iteração anterior. Um número limite de iterações para cada passo incremental de alongamento é estabelecido no programa. Essa diferença de deslocamentos normais entre duas iterações (passo incremental corrente de alongamento) é comparada com um valor de tolerância, configurado no programa. A convergência para o alongamento corrente é atingida quando este erro calculado seja menor ou igual ao valor de tolerância ( $E_r$ ). Obtida a convergência no passo incremental corrente de alongamento, calcula-se o novo alongamento com o valor do deslocamento incremental. Este procedimento é repetido para os alongamentos impostos posteriores. A convergência da análise

do modelo coesivo ocorre quando a força de coesiva no fronte físico for menor zero. Nesta condição, a diferença de deslocamento para a direção normal supera o valor  $w_f$  e o fronte físico entra efetivamente para a fratura física.

$$E_r \geq w_n^k - w_n^{k-1} \quad (8.8)$$

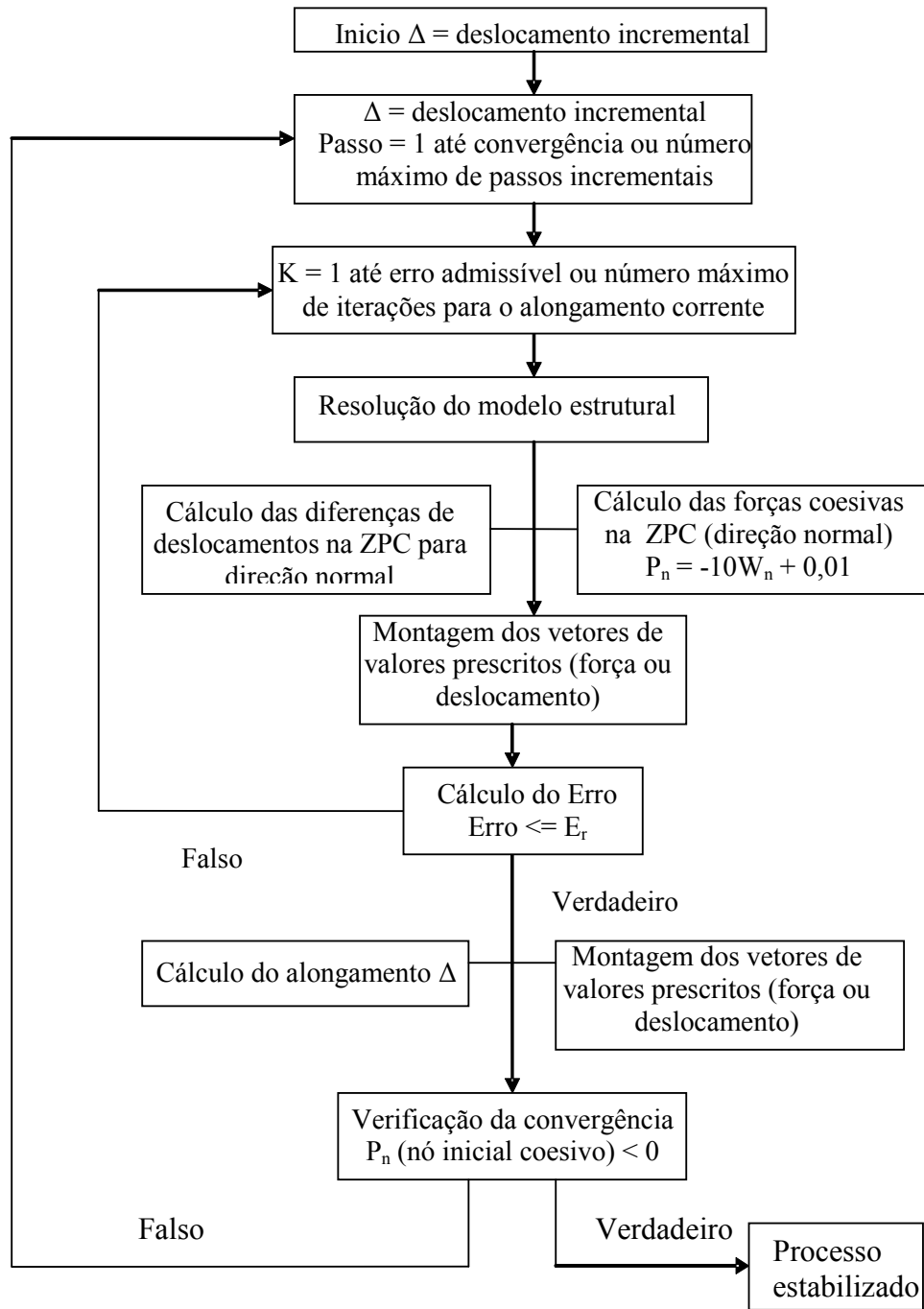
Onde:

$w_n^k$  e  $w_n^{k-1}$  são as diferenças de deslocamentos normais entre duas iterações, para um dado alongamento.

Apresenta-se, na figura a seguir, um esquema geral de solução do modelo coesivo com o procedimento iterativo descrito anteriormente.

## 8.7 - Terceira análise: modelo estrutural não coesivo

Uma análise comparativa entre um modelo estrutural não coesivo e as duas estratégias de análise com o modelo coesivo foi realizada. Análise consistiu na verificação do desenvolvimento da abertura da fratura sem qualquer força coesiva (modelo estrutural sem zona coesiva). A condição de convergência também foi a diferença de deslocamentos na direção normal para um determinado nó (parâmetro  $w_f$ , utilizado na análise coesiva e coesiva iterativa), porém sem o efeito das forças coesivas. Este nó, utilizado para análise da convergência nos três casos, foi o mesmo.



**Figura 8.8** – Esquema geral de solução do modelo coesivo iterativo.

## 8.8 - Exemplo 1: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,03$

Os exemplos apresentados, a seguir, foram analisados em estado plano de deformação (EPD) e com coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0,3, onde é avaliada a abertura de uma fratura existente de canto, sem levar em conta sua propagação. Os exemplos são similares aos analisados em Yang et al [24]. O exemplo apresentado, a seguir, refere-se a um espécime com fratura de canto sob deslocamento imposto (figura 8.5). Este modelo estrutural apresenta as seguintes características:

Altura ( $h$ ) = 1,0

Largura ( $w$ ) = 1,0

Fratura inicial ( $a_0$ ) = 0,03

Zona de processos coesivos (ZPC) = 0,02

Para o modelo coesivo iterativo:

Parâmetro  $p_y = 0,01$  (modelo linear de dois parâmetros)

Parâmetro  $w_f = 0,001$  (modelo linear de dois parâmetros)

Número de molas = 11

Alongamento inicial ( $\Delta$ ) = 0,00001

Deslocamento incremental = 0,00001

Número máximo de passos incrementais de alongamento = 2000

Número máximo de iterações para cada alongamento = 5

Erro admissível =  $1 \times 10^{-16}$

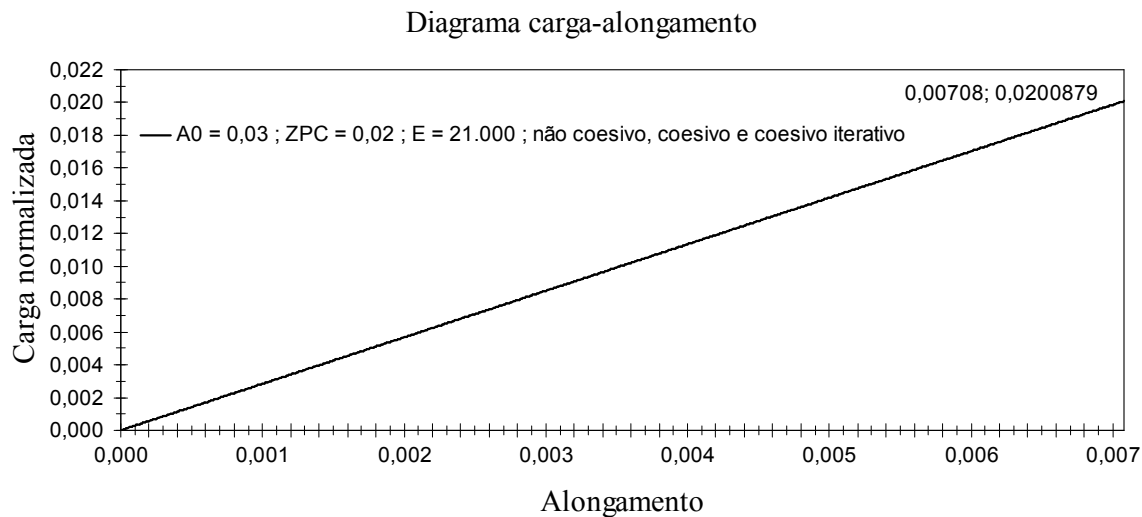
As análises foram realizadas até que o primeiro nó da zona coesiva (fronte físico) passe a pertencer à fratura real. Considerando-se a figura (8.7), ao término da análise, a extensão da fratura inicial  $a_0$  aumenta, ou seja, o fronte físico passa a ser considerado o nó da sequência.

A estrutura foi modelada com elementos isoparamétricos lineares com comprimento de 0,05. Na zona de processos coesivos foram utilizados 20 elementos de contorno com

comprimento 0,002 (10 elementos na ida e 10 na volta), totalizando 10 regiões com molas. A região da fratura inicial foi discretizada em 10 elementos com comprimento variável (5 na ida e 5 na volta), o espaçamento entre os nós foi sendo reduzido gradativamente até o nó inicial coesivo (fronte físico). Nós duplos foram utilizados nos cantos do modelo e na extremidade da zona coesiva (fronte fictício). A estratégia utilizada de posicionamento dos pontos de colocação foi apresentada no capítulo 5 (situação 1).

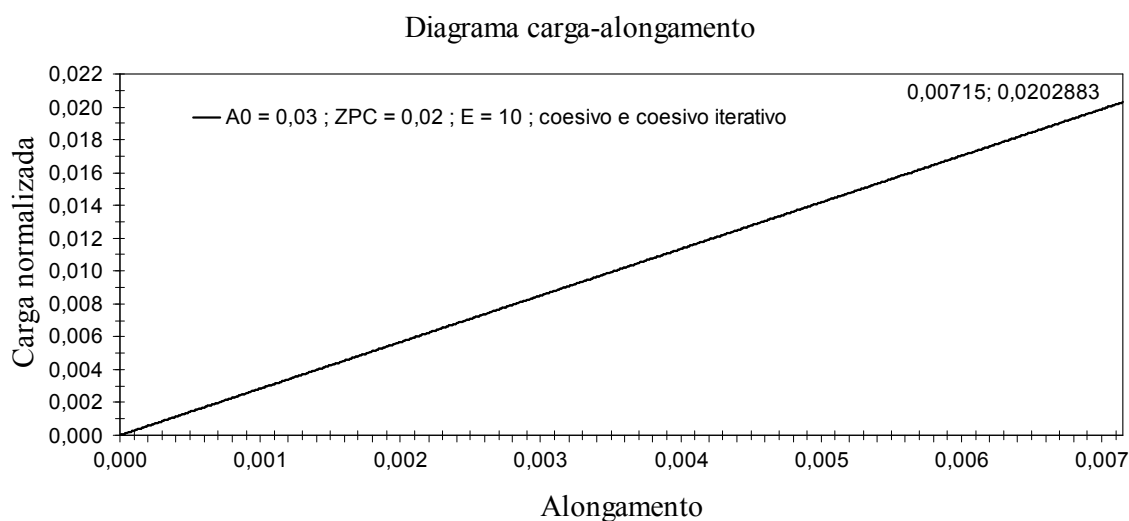
Apresenta-se, a seguir, resultados das três análises realizadas com os parâmetros descritos anteriormente, por meio de um diagrama “alongamento imposto x carga normalizada”. A carga normalizada é uma média, obtida pelo somatório das reações de apoio dividido pelo módulo de deformação transversal (G), a cada alongamento imposto.

Os resultados apresentados referem-se ao alongamento imposto imediatamente inferior ao desenvolvimento da zona coesiva.



**Figura 8.9** – Diagrama carga-alongamento. E = 21000.

As três análises realizadas forneceram o mesmo diagrama até o alongamento imposto imediatamente anterior ao desenvolvimento da zona coesiva (figura 8.9). Com 708 passos de deslocamento incremental, não se verificam diferenças com as três estratégias utilizadas, verificando-se um comportamento linear do diagrama com o módulo de elasticidade adotado.



**Figura 8.10** – Diagrama carga-alongamento.  $E = 10$ .

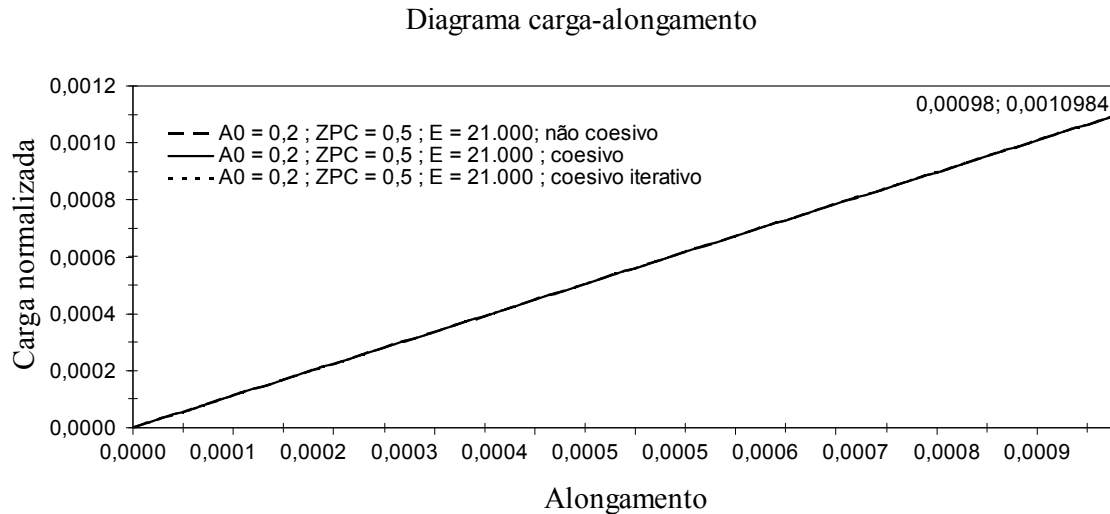
A mesma análise para o modelo foi realizada com um módulo de elasticidade inferior (figura 8.10). A estratégia com o modelo coesivo e coesivo iterativo utilizou 715 passos de deslocamento incremental, sendo necessária uma carga normalizada maior que a anterior (figura 8.9), o que evidenciou o efeito das forças coesivas ao longo da ZPC no processo de análise. Com o módulo de elasticidade igual a 10 e igual a 21000, a análise não coesiva forneceu o mesmo diagrama (figura 8.9), com 708 passos de deslocamento incremental.

## 8.9 - Exemplo 2: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,2$

Neste exemplo, é considerada uma fratura inicial com a extensão ( $a_0$ ) de 0,2 e uma zona de processos coesivos (ZPC) com uma extensão de 0,5. Ao contrário do exemplo anterior (exemplo 1), neste caso a fratura inicial corresponde a 20% da largura  $w$  do modelo, enquanto que a ZPC corresponde a 50% de  $w$  (figura 8.5).

A estratégia de modelagem foi a mesma utilizada no exemplo anterior, somente a região da fratura inicial e zona de processos coesivos foram redefinidas, com a utilização de 21 molas, essas molas correspondem a 20 regiões na ZPC associadas a 21 nós em cada face, onde seu efeito

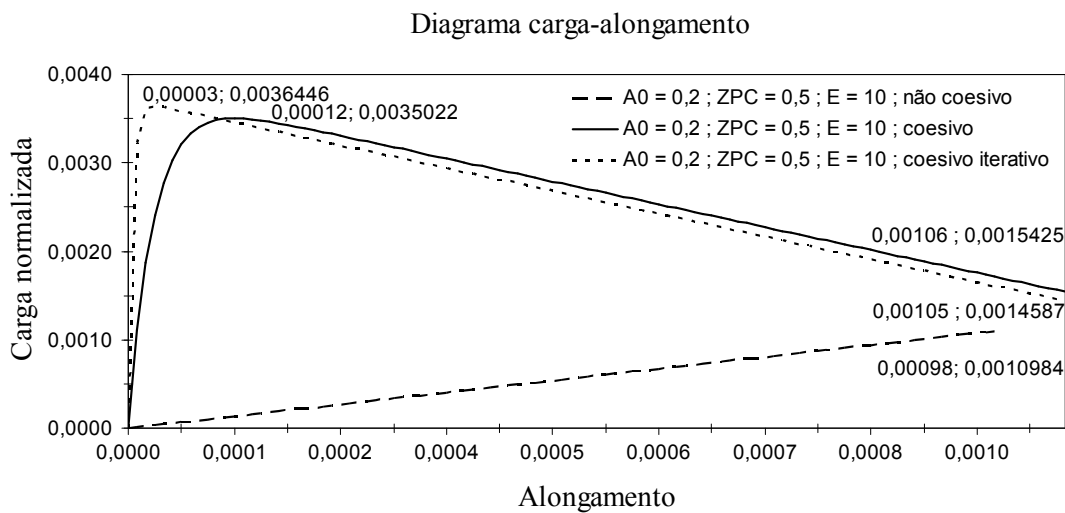
é distribuído ao longo de cada elemento. Na zona de processos coesivos foram utilizados 40 elementos de contorno com comprimento 0,025 (20 elementos na ida e 20 elementos na volta). A região da fratura inicial foi discretizada em 8 elementos com comprimento fixo de 0,05 (4 elementos na ida e 4 na volta).



**Figura 8.11** – Diagrama carga-alongamento.  $E = 21000$ .

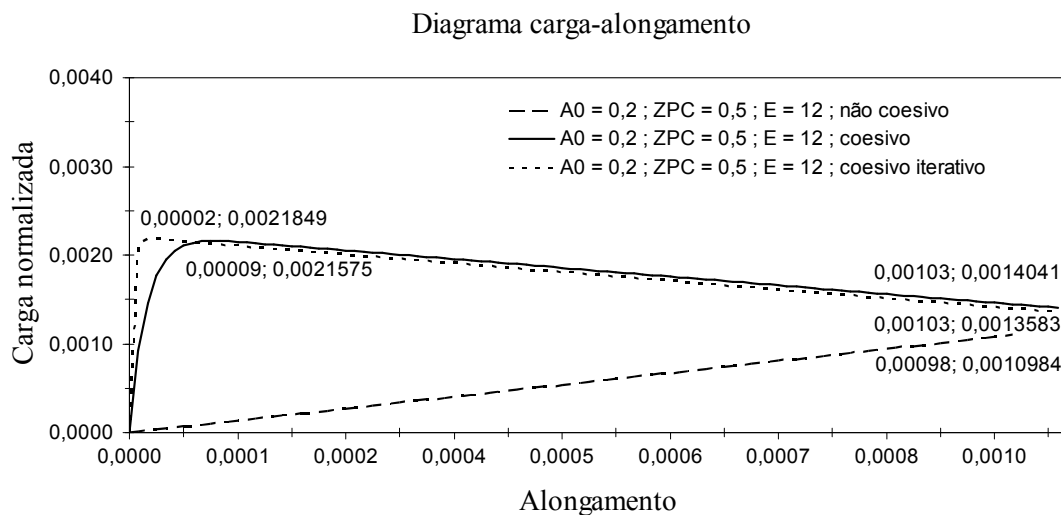
As três análises realizadas forneceram o mesmo diagrama até o alongamento imposto imediatamente anterior ao desenvolvimento da zona coesiva (figura 8.11). Com 98 passos de deslocamento incremental, não se verifica diferenças com as três estratégias utilizadas, verificando-se um comportamento linear do diagrama com o módulo de elasticidade adotado. Comparando-se com o exemplo 1, houve uma redução de passos incrementais e da carga normalizada até que a convergência fosse atingida, pois se utilizou um modelo estrutural com uma fratura de maior extensão.





**Figura 8.12** – Diagrama carga-alongamento.  $E = 10$ .

A mesma análise para o modelo foi realizada com um módulo de elasticidade igual a 10 (figura 8.12). A estratégia com o modelo coesivo e coesivo iterativo utilizou 106 e 105 passos de deslocamento incremental, respectivamente. Foi necessária uma carga normalizada maior que a anterior (figura 8.11), o que evidenciou o efeito das forças coesivas ao longo da ZPC no processo de análise. A convergência no processo coesivo iterativo ocorreu com um passo de alongamento inferior ao processo coesivo. Com o módulo de elasticidade igual a 10 e igual a 21000, a análise não coesiva (elástica) forneceu o mesmo diagrama (figura 8.11), com 98 passos de deslocamento incremental.

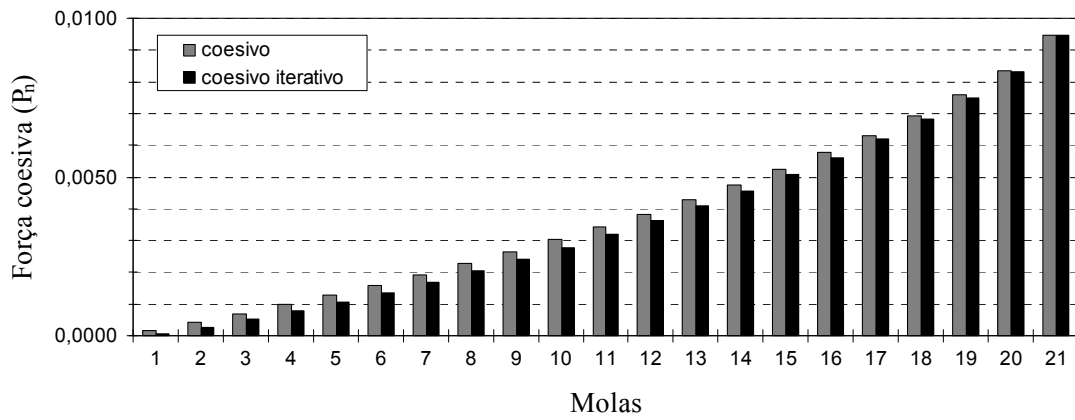


**Figura 8.13** – Diagrama carga-alongamento.  $E = 12$ .

A mesma análise para o modelo foi realizada com um módulo de elasticidade ligeiramente superior ao adotado no caso anterior, neste caso adotou-se  $E$  igual a 12 (figura 8.13). A estratégia com o modelo coesivo e coesivo iterativo utilizou 103 passos de deslocamento incremental. Foi necessária uma carga normalizada menor que a anterior (figura 8.12), o que evidenciou o efeito do módulo de elasticidade no processo de análise, quando se aplicam forças coesivas. Com o módulo de elasticidade  $E$  utilizado nos três casos (10, 12 e 21000), a análise não coesiva (elástica) forneceu o mesmo diagrama, com 98 passos de deslocamento incremental. Nestes exemplos apresentados, com a redução do módulo de elasticidade, houve um aumento do alongamento e da carga normalizada envolvida no processo de convergência, sob controle de deslocamento.

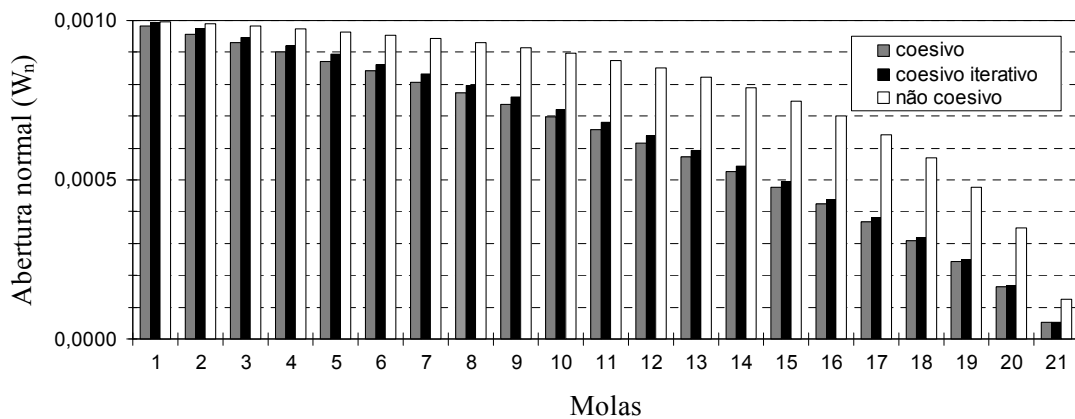
## 8.10 - Análise da distribuição de forças e deslocamentos normais na zona de processos coesivos

Apresentam-se, a seguir, diagramas comparativos com o valor da força coesiva normal e abertura normal correspondente a cada nó situado na zona coesiva. É avaliado o modelo com fratura inicial  $a_0$  igual a 0,2, ZPC com extensão de 0,5 e módulo de elasticidade  $E$  igual a 10.



**Figura 8.14** – Forças normais ao longo da ZPC.

Este diagrama representa a distribuição das forças normais ao longo da ZPC segundo o processo coesivo e coesivo iterativo, para um passo de deslocamento incremental imediatamente inferior ao desenvolvimento da ZPC. Para a análise não coesiva, não ocorre a influência de forças normais entre duas superfícies inicialmente coincidentes ao longo da região fraturada (figura 8.14).

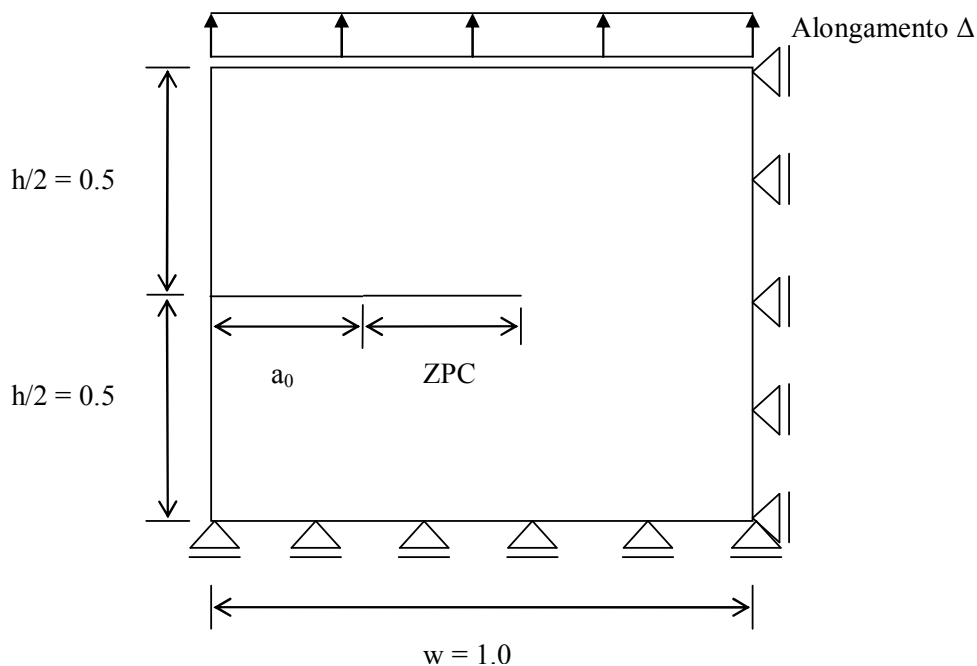


**Figura 8.15** – Abertura normal ao longo da ZPC. E = 10.

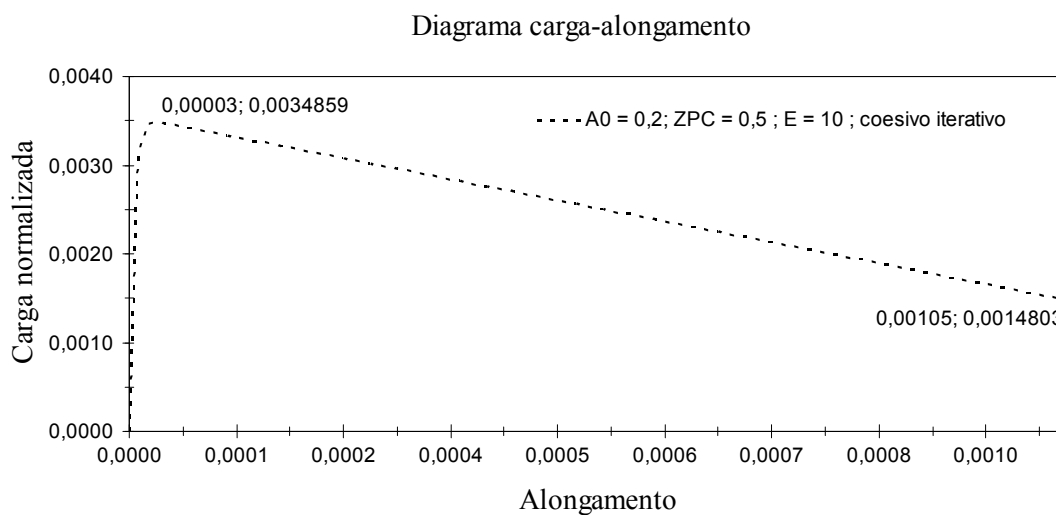
Para o diagrama de abertura normal ( $w_n$ ), foi acrescentada a terceira análise (sem modelo coesivo), onde se adota o mesmo critério de convergência descrito anteriormente (figura 8.15). A mola **1** é o nó coesivo inicial (fronte físico) e a mola **21** é o nó coesivo final (fronte fictício). Para o modelo não coesivo, verifica-se que a ocorrência de diferença de deslocamentos normais entre duas superfícies da fratura originalmente coincidentes ( $w_n$ ) é maior, quando comparada com a análise coesiva e coesiva iterativa, devido à ausência de forças de coesão ao longo da região fraturada. Este efeito não coesivo faz com que a convergência adotada, já descrita anteriormente, seja alcançada com um menor alongamento imposto.

É avaliado nos exemplos seguintes o modelo estrutural com as mesmas características das análises anteriores, onde se modificou apenas as condições de contorno do problema para dois casos distintos. É apresentado o diagrama carga-alongamento para o modelo coesivo com procedimento iterativo para esses casos.

### 8.11 - Exemplo 3: Espécime com fratura inicial $a_0 = 0,2$ com restrição adicional de deslocamento horizontal no eixo x (face vertical)



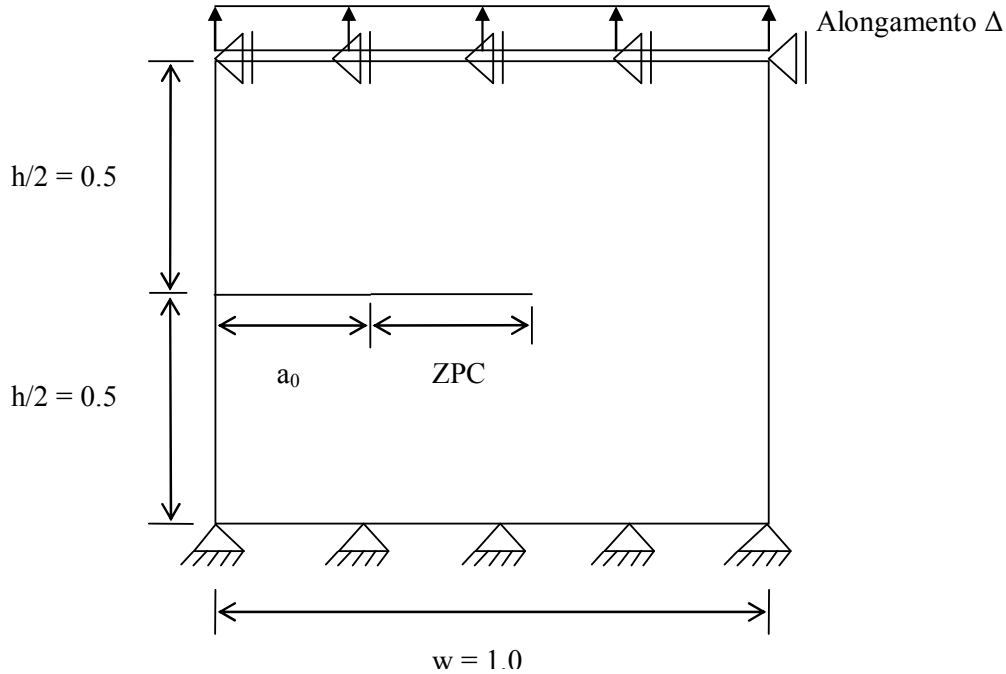
**Figura 8.16** – Modelo com restrição adicional na face vertical.



**Figura 8.17** – Diagrama carga-alongamento.  $E = 10$ . Restrição adicional de deslocamento na face vertical.

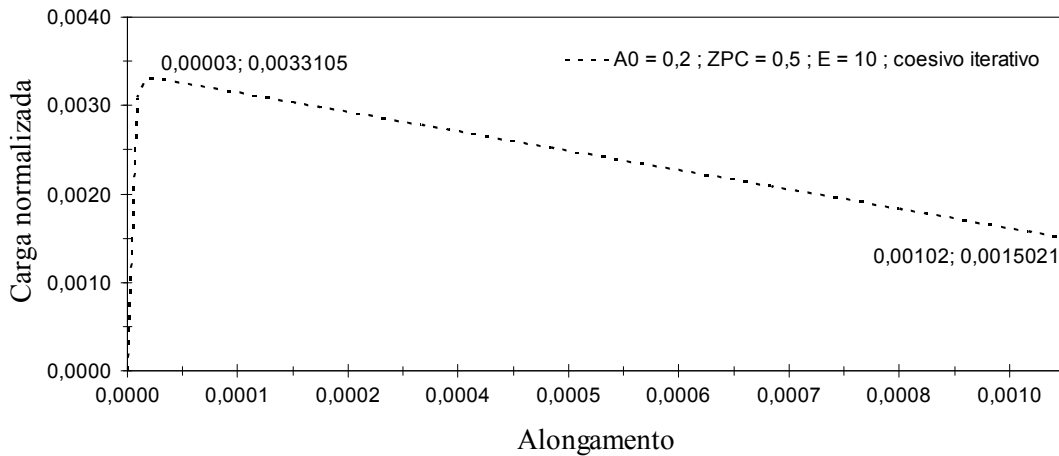
Com a restrição adicional de deslocamento horizontal na face vertical, a convergência no processo coesivo iterativo foi atingida com o mesmo alongamento imposto, comparado com o exemplo com restrição apenas na face inferior (exemplo 2) (figura 8.5). Com esta condição de contorno, verifica-se que a convergência foi obtida com uma carga normalizada mais alta, devido a uma redistribuição de esforços na face inferior, uma vez que a carga normalizada é avaliada apenas para a face horizontal.

**8.12 - Exemplo 4: Espécime com fratura inicial  $a_0 = 0,2$  com restrição adicional de deslocamento horizontal no eixo x (face horizontal)**



**Figura 8.18** – Modelo com restrição adicional na face horizontal (inferior e superior).

Diagrama carga-alongamento



**Figura 8.19** – Diagrama carga-alongamento.  $E = 10$ . Restrição adicional de deslocamento na face horizontal.

Com a restrição adicional de deslocamento horizontal na face horizontal (inferior e superior), a convergência no processo coesivo iterativo foi atingida com um passo de alongamento imposto inferior, comparado com os exemplos anteriores (figura 8.12 e 8.17). Com esta condição de contorno, verifica-se que a convergência foi obtida com uma carga normalizada mais alta do que os dois casos anteriores (exemplo 2 e exemplo 3), devido à redistribuição de esforços na face inferior, uma vez que ocorre restrição adicional de deslocamento para a direção horizontal na face inferior.

### **8.13 - Conclusão**

No primeiro exemplo foi realizada a análise de um espécime com uma fratura inicial ( $a_0$ ) de 0,03 e uma ZPC de 0,02, sob controle de deslocamento. Essa região da fratura apresenta 3% da extensão (largura  $w$ ) do modelo, enquanto que a ZPC apresenta 2% da largura do modelo. A análise com a utilização de um módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 21000 apresentou o mesmo diagrama carga-alongamento para as três análises realizadas (não coesiva, coesiva e coesiva iterativa), todos com 708 passos de deslocamento incremental. Para a análise com o módulo de elasticidade igual a 10, foram observados os mesmos diagramas carga-alongamento para o modelo coesivo e coesivo iterativo, estes com 715 passos, enquanto que para análise não coesiva a condição de convergência foi satisfeita com 708 passos. Para este primeiro exemplo, foi verificado que dois módulos de elasticidade distintos não provocaram diferenças na resposta carga-alongamento para a análise não coesiva, a abertura normal também foi a mesma para os módulos utilizados. A alteração do módulo de elasticidade para  $E$  igual a 10 permitiu que fosse verificada a influência das forças coesivas no digrama carga-alongamento, em relação à análise não coesiva, onde foram necessários 715 passos para a obtenção da convergência.

No segundo exemplo foi realizada a análise de um espécime com uma fratura inicial ( $a_0$ ) de 0,2 e uma ZPC de 0,5, sob controle de deslocamento. Essa região da fratura apresenta 20% da extensão (largura  $w$ ) do modelo, enquanto que a ZPC apresenta 50% da largura do modelo. A análise com a utilização de um módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 21000 apresentou o mesmo diagrama carga-alongamento para as três análises realizadas (não coesiva, coesiva e coesiva

iterativa), todos com 98 passos de deslocamento incremental. Para a análise com o módulo de elasticidade igual a 10, foram observados diagramas carga-alongamento diferentes para o modelo coesivo e coesivo iterativo, estes com 106 e 105 passos incrementais, respectivamente, enquanto que para análise não coesiva a condição de convergência foi satisfeita com 98 passos. Para este segundo exemplo, foi verificado que dois módulos de elasticidade distintos não provocaram diferenças na resposta carga-alongamento para a análise não coesiva, a abertura normal também foi a mesma para os módulos utilizados. A alteração do módulo de elasticidade para  $E$  igual a 10 permitiu que fosse verificada a influência das forças coesivas no digrama carga-alongamento, em relação à análise não coesiva, onde foram necessários 106 e 105 passos para a obtenção da convergência.

Comparando-se as duas análises apresentadas anteriormente, para os dois módulos de elasticidade diferentes utilizados (21000 e 10), a análise não coesiva apresentou uma resposta carga-alongamento linear. Conclui-se que diferentes módulos de elasticidade produzem a mesma resposta linear carga-alongamento, quando um determinado modelo com fratura inicial é analisado sob deslocamento imposto, sem a consideração de forças coesivas. Com o aumento da região fraturada, a influência do modelo coesivo foi analisada com uma menor quantidade de passos incrementais, evidenciando-se o efeito das forças de coesão sobre a resposta carga-alongamento. Para modelos mais rígidos, a mesma quantidade de passo incremental é necessária para convergência, seja com ou sem a influência de forças coesivas. O aumento da região fraturada e a utilização de um módulo de elasticidade inferior possibilitaram a visualização da resposta não linear do diagrama carga-alongamento nas análises coesivas.

Apresenta-se, a seguir, uma tabela comparativa com os resultados das três estratégias de análise para os dois modelos fraturados.



**Tabela 8.1** – Tabela comparativa das análises realizadas.

		$A_0 = 0.03$		$A_0 = 0.2$	
		E = 21000	E = 10	E = 21000	E = 10
Não coesivo	Passo	708	708	98	98
	Along.	0,00708	0,00708	0,00098	0,00098
Coesivo	Passo	708	715	98	106
	Along.	0,00708	0,00715	0,00098	0,00106
Coesivo iterativo	Passo	708	715	98	105
	Along.	0,00708	0,00715	0,00098	0,00105



## **9 - PROPAGAÇÃO DE FRATURAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL**

### **9.1 - Introdução**

Neste capítulo é apresentada a estratégia computacional de simulação de propagação de fraturas no meio bidimensional utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno Dual. Alguns critérios de propagação que podem ser utilizados para análises são:

- Critério da máxima tensão circunferencial [28,31].
- Critério da máxima taxa de liberação de energia [29].
- Critério da máxima densidade de energia de deformação [30].

Na simulação de propagação de fraturas neste trabalho foi utilizado critério da máxima tensão circunferencial [31], onde caminho da fratura é determinado pela teoria da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL).

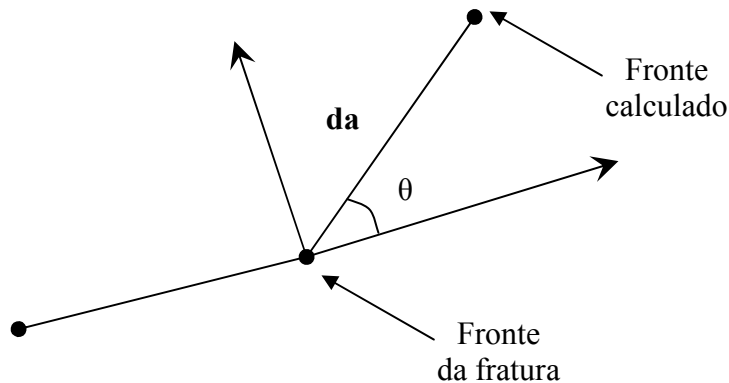
### **9.2 - Critério de propagação de fratura utilizado**

O critério da máxima tensão circunferencial [31] fornece a direção de propagação da fratura, conforme mostra a figura a seguir, pela seguinte expressão, escrita a partir do fator de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ :

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 \pm 8} \right) \quad (9.1)$$

Neste trabalho é implementada a seguinte expressão no programa [32]:

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-2 K_{II} / K_I}{1 + \sqrt{1 + 8 (K_{II} / K_I)^2}} \right) \quad (9.2)$$



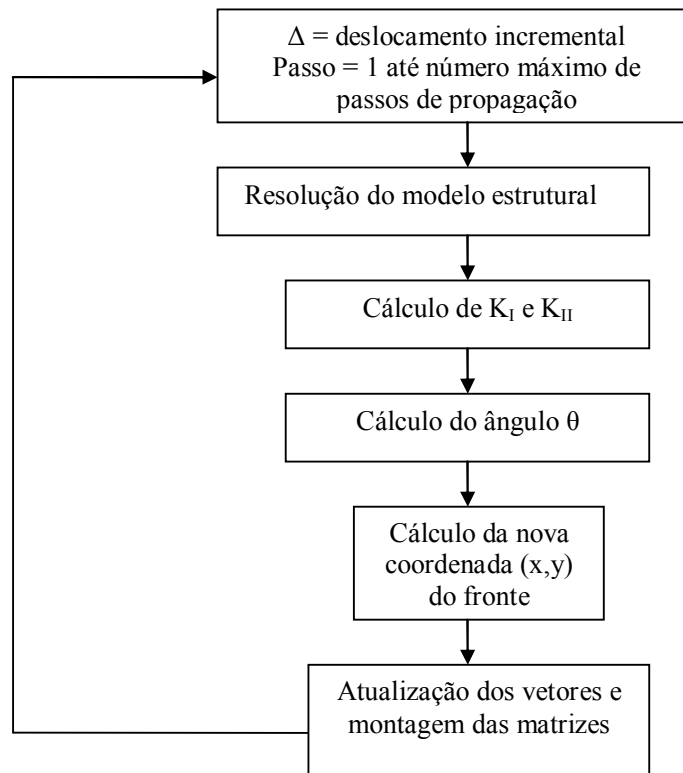
**Figura 9.1** – Ângulo de propagação para um incremento **da** de fratura.

### 9.3 - Estratégia de implementação

Os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  são calculados para cada análise realizada. A partir desses valores, determina-se o ângulo da direção de propagação  $\theta$  (9.2) para o cálculo da nova posição do frente. Dado um incremento **da** (configurado no programa), onde **da** é a extensão do elemento de contorno isoparamétrico linear, a nova posição do frente é calculada.

A estratégia de posicionamento dos pontos de colocação foi apresentada no capítulo 5, onde se adotou a situação 1, nós duplos foram utilizados para tratamento de canto e frente.

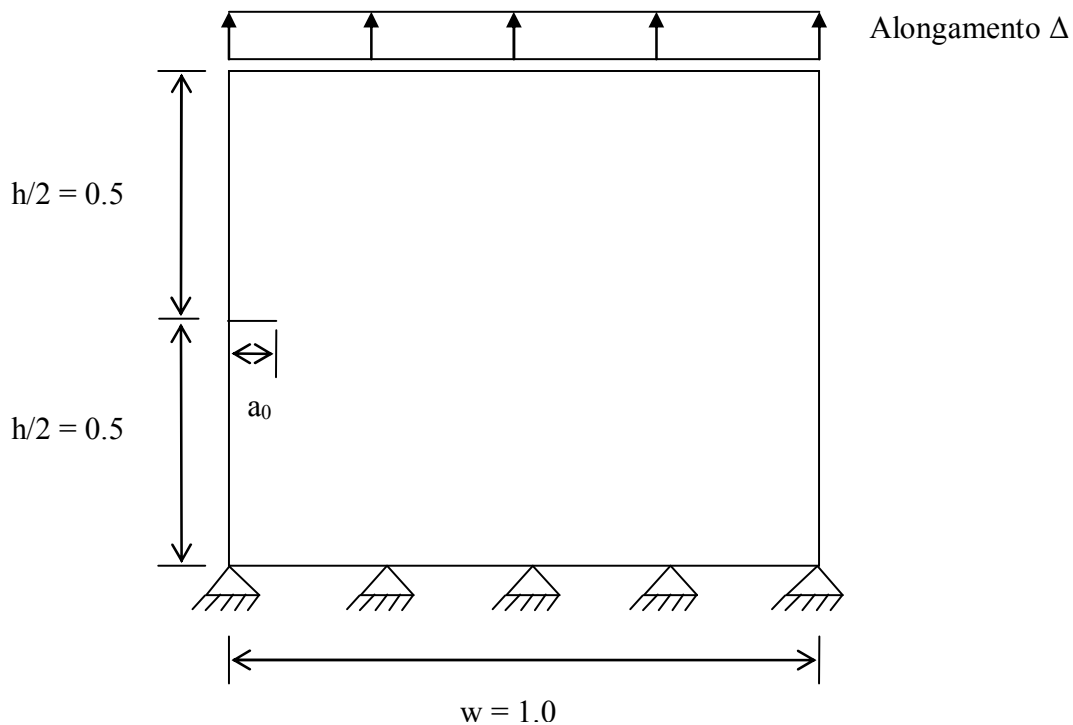
Os exemplos que são apresentados se referem a um modelo com fratura inicial sob deslocamento imposto. A análise consiste na simulação da trajetória de uma fratura inicial para um dado alongamento fixo. Apresenta-se, a seguir, um esquema geral da estratégia de propagação implementada no programa.



**Figura 9.2** – Esquema geral de simulação de propagação para um alongamento fixo.

#### **9.4 - Análise da sensibilidade da propagação para diferentes comprimentos de elementos de contorno de propagação**

Apresentam-se, a seguir, simulações de propagação para um modelo com uma fratura de canto sob um alongamento imposto fixo.



**Figura 9.3** – Modelo sob deslocamento controlado.

Este modelo estrutural apresenta as seguintes características:

Altura ( $h$ ) = 1,0

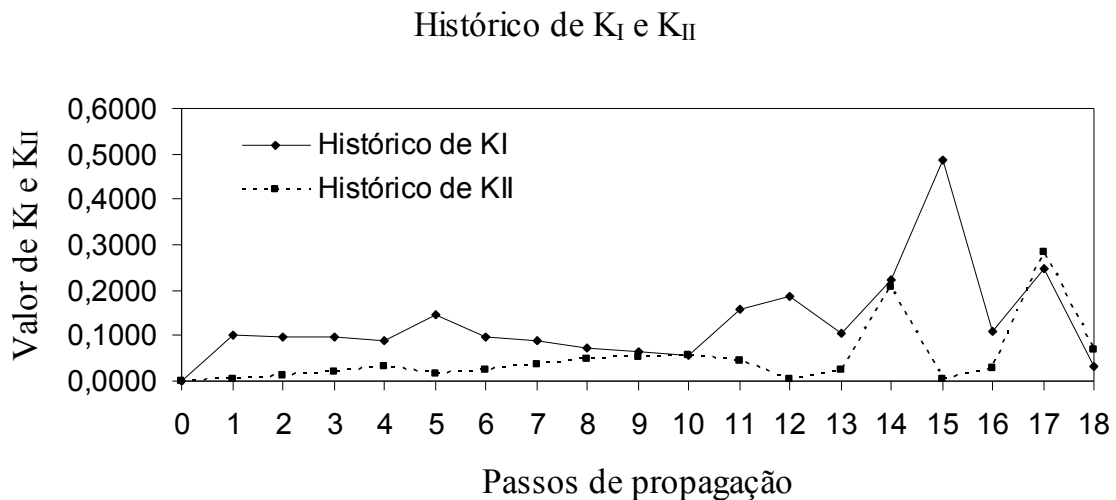
Largura ( $w$ ) = 1,0

Fratura inicial ( $a_0$ ) = 0,05

Todas as análises foram realizadas em estado plano de deformação, com a utilização de um módulo de deformação longitudinal ( $E$ ) igual a 21000 e um coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0,3, para um número máximo de passos de propagação igual a 18.

### 9.4.1 - Simulação de propagação para um deslocamento imposto igual a $1 \times 10^{-5}$

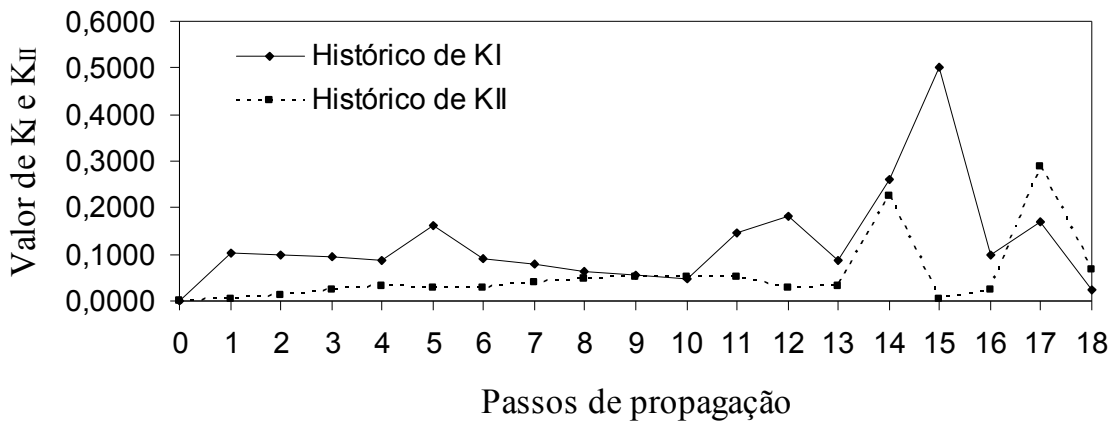
Apresentam-se, a seguir, os diagramas dos valores dos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  para um alongamento fixo de 0,00001, a cada passo de propagação. A estratégia de cálculo dos fatores de intensidade de tensão foi apresentada no capítulo 6. Para cada incremento de fratura (**da**) no modelo, são avaliados os fatores  $K_I$  e  $K_{II}$ .



**Figura 9.4** – Históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para elemento de propagação de comprimento  $l = 0,002$  (Alongamento  $1 \times 10^{-5}$ ).

A figura (9.4) representa a evolução de  $K_I$  e  $K_{II}$  para os 18 passos de propagação, sob deslocamento imposto ( $\Delta = 1 \times 10^{-5}$ ), onde foram adotados elementos de contorno isoparamétricos lineares com comprimento  $l$  igual a 0,002 para as novas extremidades de fratura calculadas.

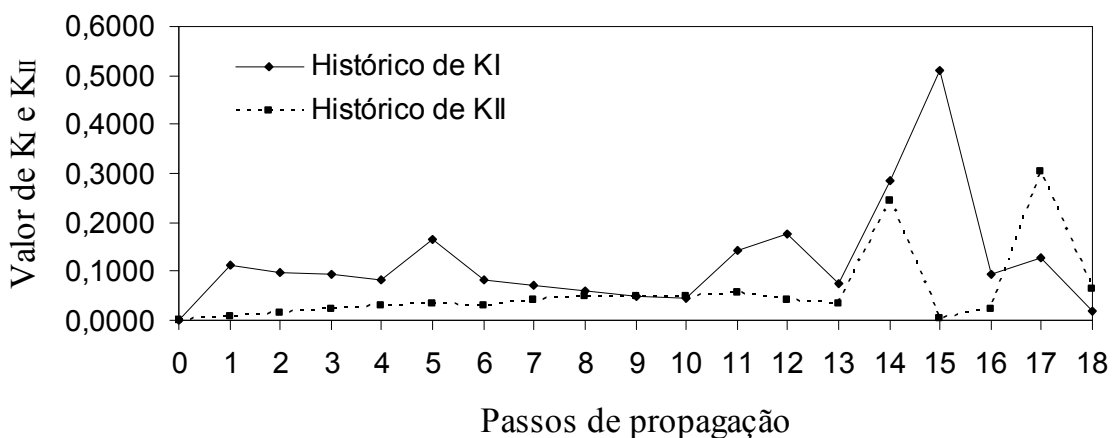
Histórico de  $K_I$  e  $K_{II}$



**Figura 9.5** – Históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para elemento de propagação de comprimento  $l = 0,001$  (Alongamento  $1 \times 10^{-5}$ ).

A figura (9.5) representa os históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para os 18 passos de propagação com a utilização de elementos de contorno com a extensão  $l$  igual a 0,001 para as novas extremidades de fratura calculadas, sob mesmo deslocamento imposto.

Histórico de  $K_I$  e  $K_{II}$

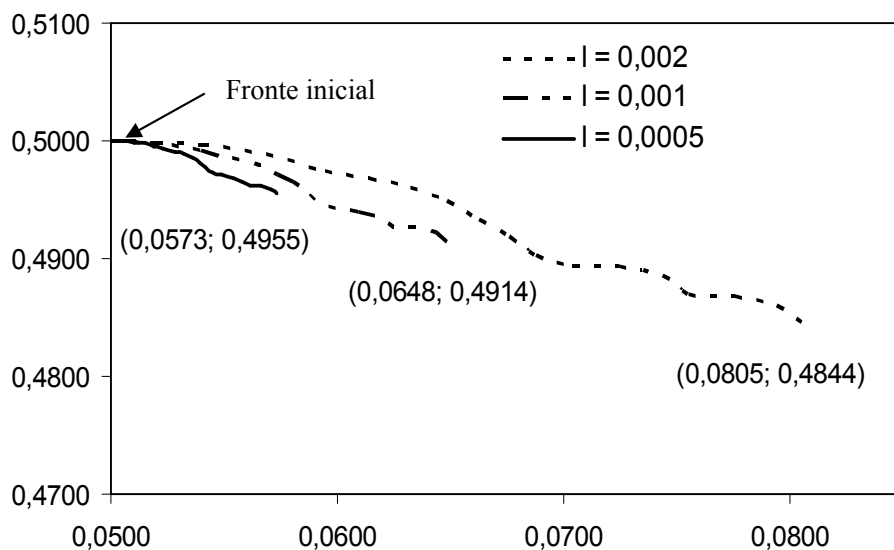


**Figura 9.6** – Históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para elemento de propagação de comprimento  $l = 0,0005$  (Alongamento  $1 \times 10^{-5}$ ).



A figura (9.6) representa os históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para os 18 passos de propagação com a utilização de elementos de contorno com a extensão  $l$  igual a 0,0005 para as novas extremidades de fratura calculadas, sob o mesmo deslocamento imposto. A simulação da propagação com a utilização de elementos de contorno de comprimentos diferentes gerou históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  similares.

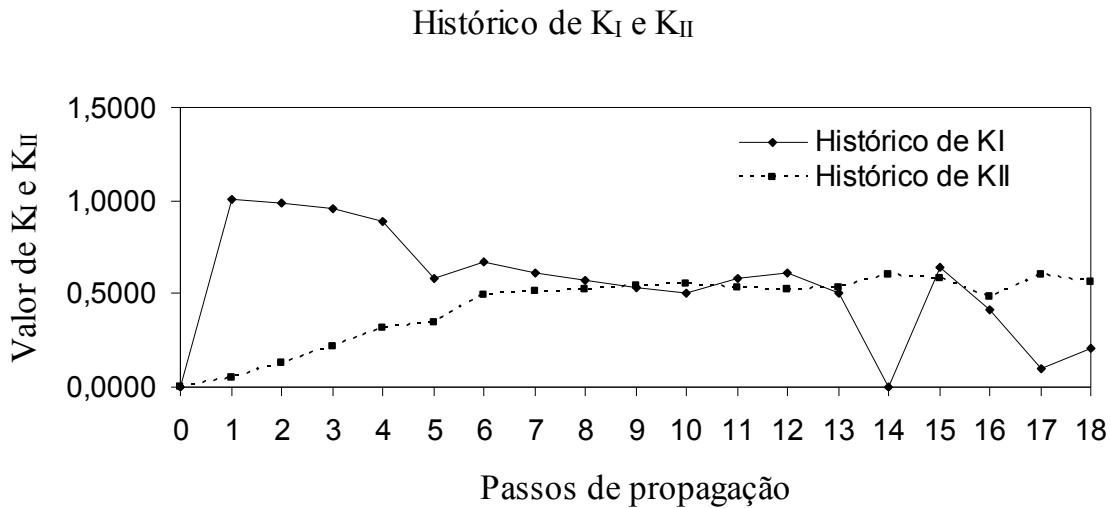
Apresenta-se, a seguir, um diagrama comparativo para elementos de contorno utilizados na propagação de diferentes comprimentos ( $l$ ), numa simulação de 18 passos, mantendo-se o alongamento imposto fixo igual a  $1 \times 10^{-5}$ .



**Figura 9.7** – Trajetória de propagação de fratura (Alongamento  $1 \times 10^{-5}$ ).

### 9.4.2 - Simulação de propagação para um deslocamento imposto igual a $1 \times 10^{-4}$

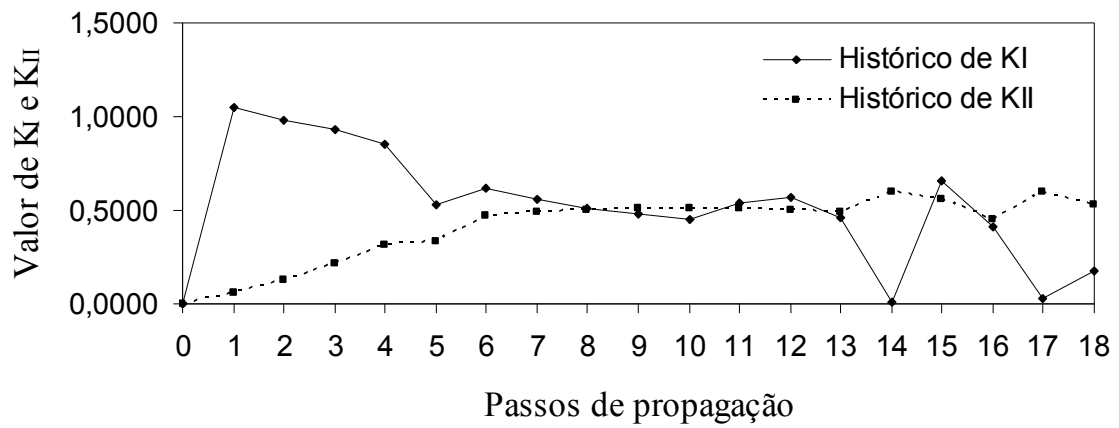
Apresentam-se, a seguir, os diagramas dos valores dos fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  para um alongamento fixo igual a 0,0001, a cada passo de propagação.



**Figura 9.8** – Históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para elemento de propagação de comprimento  $l = 0,002$  (Alongamento  $1 \times 10^{-4}$ ).

A figura (9.8) representa a evolução de  $K_I$  e  $K_{II}$  para os 18 passos de propagação, sob deslocamento imposto ( $\Delta = 1 \times 10^{-4}$ ), onde foram adotados elementos de contorno isoparamétricos lineares com comprimento  $l$  igual a 0,002 para as novas extremidades de fratura calculadas.

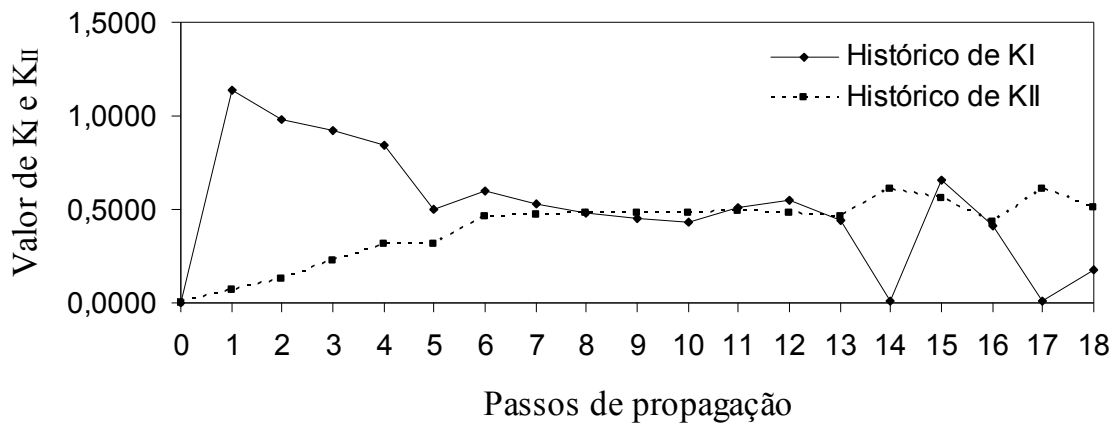
Histórico de  $K_I$  e  $K_{II}$



**Figura 9.9** – Históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para elemento de propagação de comprimento  $l = 0,001$  (Alongamento  $1 \times 10^{-4}$ ).

A figura (9.9) representa os históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para os 18 passos de propagação com a utilização de elementos de contorno com a extensão  $l$  igual a 0,001 para as novas extremidades de fratura calculadas, sob mesmo deslocamento imposto.

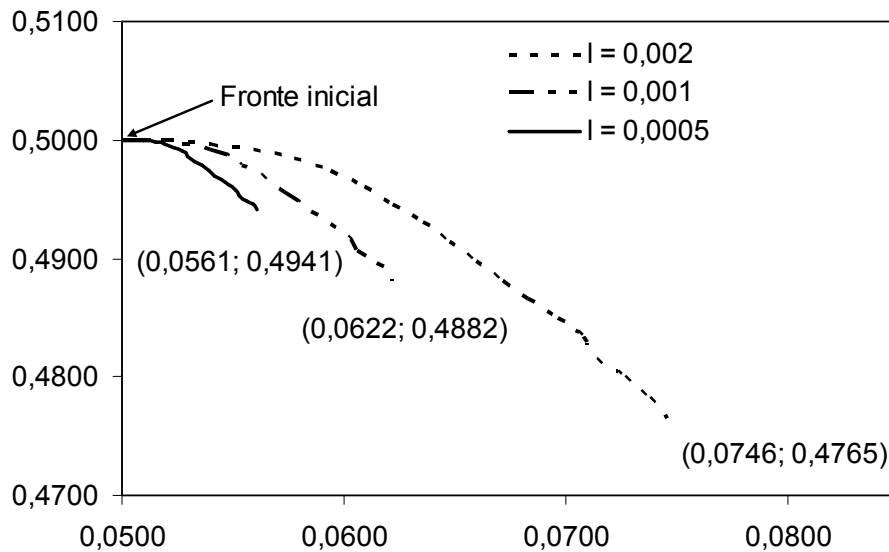
Histórico de  $K_I$  e  $K_{II}$



**Figura 9.10** – Históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para elemento de propagação de comprimento  $l = 0,0005$  (Alongamento  $1 \times 10^{-4}$ ).

A figura (9.10) representa os históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  para os 18 passos de propagação com a utilização de elementos de contorno com a extensão  $l$  igual a 0,0005 para as novas extremidades de fratura calculadas, sob o mesmo deslocamento imposto. A simulação da propagação com a utilização de elementos de contorno de comprimentos diferentes gerou históricos de  $K_I$  e  $K_{II}$  similares. Neste caso, sob deslocamento imposto igual  $1 \times 10^{-4}$ , observou-se uma maior tendência de acréscimo dos valores de  $K_{II}$  e decréscimo de  $K_I$ , ao longo do desenvolvimento da região fraturada.

Apresenta-se, a seguir, um diagrama comparativo para elementos de contorno utilizados na propagação de diferentes comprimentos ( $l$ ), numa simulação de 18 passos, mantendo-se o alongamento imposto fixo igual a  $1 \times 10^{-4}$ .



**Figura 9.11** – Trajetória de propagação de fratura (Alongamento  $1 \times 10^{-4}$ ).

## 9.5 - Conclusão

A análise das trajetórias de propagação foi similar para os três casos analisados com deslocamento imposto. A simulação, utilizando-se elementos de contorno de comprimentos diferentes ( $l = 0,002$ ,  $l = 0,001$ ,  $l = 0,0005$ ), gerou distribuições de resultados semelhantes na trajetória calculada ( $\Delta = 1 \times 10^{-5}$ ). Com o desenvolvimento da fratura, ocorreu uma redução do fator de intensidade de tensão  $K_I$  e um aumento do fator de intensidade de tensão  $K_{II}$  para os três casos, evidenciando-se o efeito da descontinuidade de deslocamentos tangenciais na fratura. A fratura, originalmente de canto e com o formato reto, a cada passo de propagação foi adquirindo um formato curvo com os novos valores de  $K_I$  e  $K_{II}$ , evidenciando-se o efeito do cisalhamento no modelo. Pela análise do critério de propagação adotado, observou-se que a ocorrência de valores de  $K_{II}$  diferentes de zero geraram ângulos de propagação diferentes de zero. A descontinuidade de deslocamentos tangenciais ao longo da fratura levou aos resultados de  $K_I$  e  $K_{II}$  que influenciaram a trajetória da propagação. A descontinuidade de deslocamentos normais e tangenciais ao longo

da fratura também é influenciada pela imposição de condições de contorno no modelo, o que influencia na trajetória de propagação.

Analogamente ao modelo avaliado com deslocamento imposto ( $\Delta = 1 \times 10^{-5}$ ), houve uma conformidade na distribuição de  $K_I$  e  $K_{II}$  para o alongamento maior ( $\Delta = 1 \times 10^{-4}$ ). A utilização de elementos de contorno de comprimentos diferentes ( $l = 0,002$ ,  $l = 0,001$ ,  $l = 0,0005$ ) gerou distribuições de resultados semelhantes na trajetória calculada. A simulação com a imposição de valores maiores de deslocamentos no contorno leva às maiores inclinações na análise geral da propagação, a projeção na direção do eixo  $x$  torna-se menor, enquanto ocorre uma maior projeção no eixo  $y$ , tornando-se a simulação menos sensível ao controle de deslocamento. Neste caso, é mais evidente a tendência de aumento do fator de intensidade de tensão  $K_{II}$  em relação a  $K_I$ . Sugere-se quando houver necessidade de uma análise mais precisa de propagação, sob deslocamento controlado, seja considerada a imposição de deslocamentos menores no modelo.

## 10 - BIBLIOGRAFIA

- [1] BECKER, A. A., The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course, McGraw-Hill. London, UK, 1992.
- [2] BREBBIA, C. A. and DOMINGUES, J., Boundary Elements: an Introductory Course, McGraw-Hill, 2a ed, New York, USA, 1992.
- [3] WATSON J. O., Singular boundary elements for the analysis of crack in plane strain, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 38, pp. 2389-2412, 1995.
- [4] HONG, H. & CHEN, J., 1988, Derivations of integral equations of elasticity, Journal Engineering Mechanics ASCE, 114, pp. 1028-1044.
- [5] PORTELA, A., ALIABADI, M. H. e ROOKE, D. P., 1992, The Dual Boundary Element Method: Effective implementation for crack problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp. 1269-1287.
- [6] DIETER, Mechanics Metallurgy SI Metric Edition, Mac Graw Hill 1988.
- [7] IRWIN, G. R., Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 79, pp. 361-364, 1957.
- [8] HERTZBERG, R.W. – Deformation of Fracture Mechanics of Engineering Materials, 4ª edição – John Wiley & Sons 1996.
- [9] BROEK, D. – Elementary Engineering Fracture Mechanics, Martinus Nighoff Publishers 1982.

- [10] McCLINTOCK F. A., IRWIN G. R., ASTM STP 381, pp.84, 1965.
- [11] Snyder, M.D. and Cruse, T.A. (1975). Boundary integral equations analysis of cracked anisotropic plates. *International Journal of Fracture* 11, 315-342
- [12] CROUCH, S.L. (1976). Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 10, 301-342.
- [13] WEN, P.H. (1996). *Dynamic fracture mechanics: Displacement discontinuity method*, Computational Mechanics Publications.
- [14] BLANDFORD, G.E., INGRAFFEA, A.R. AND LIGGETT, J.A. (1981). Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 17, 387-404.
- [15] HONG, H. AND CHEN, J. (1988). Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 114, 1028-1044.
- [16] CHEN, W.H. AND CHEN, T.C. (1995). An efficient dual boundary element technique for a two-dimensional fracture problem with multiple cracks. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 38, 1739-1756.
- [17] YOUNG, A. (1996). A single-domain boundary element method for 3-d elastostatic crack analysis using continuous elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 39, 1265-1293.
- [18] AMEEN, MOHAMMED AND RAGHUPRASAD, B.K. (1994). A hybrid technique of modeling of cracks using displacement discontinuity and direct boundary element method. *International Journal of Fracture* 67, 343-355.
- [19] YANG, B. AND RAVI-CHANDAR, K. (1996). On the role of the process zone in dynamic fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44, 1955-1976.



- [20] ALMEIDA, L.P.C.P., Avaliação de Tensões em Peças Pré-fissuradas usando o Método dos Elementos de Contorno, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil- UNICAMP, 2003, 108 pp. (Tese de Mestrado), (Orientador Leandro Palermo Junior).
- [21] CIVELEK, M. B. & ERDOGAN, F., 1982, Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip, *International Journal of Fracture*, vol.19, pp.139-159.
- [22] PORTELA, A., ALIABADI, M. H. e ROOKE, D. P., 1992, The Dual Boundary Element Method: Effective implementation for crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269-1287.
- [23] MURAKAMI, Y., 1987, *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford.
- [24] YANG, B. and RAVI-CHANDAR, K., 1998. A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastostatic cracks. *International Journal of Fracture* 93, 115-144.
- [25] BUENO, E.M.R., Simulação Bidimensional de Fraturamento Coesivo por meio do Método dos Elementos Finitos, São Paulo, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999, 136 p., (Tese de Mestrado), (Orientador Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt).
- [26] WELLS, G. N. AND SLUYS, L.J., 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 50, 2667-2682.
- [27] PRADO, E. P., A Influência da Estrutura Interna do Material na Simulação Computacional de Elementos Estruturais de Concreto, São Paulo, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2004, 253 p., (Tese de Doutorado), (Orientador Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt).
- [28] ERDOGAN, F., SIH, G.C., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 85, 519-527.
- [29] NUISMER, R., 1975. An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *International Journal of Fracture* 11, 245-250.

- [30] SIH, G.C., 1974. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture* 10, 305-321.
- [31] SUKUMAR, N. AND PRÉVOST, J.-H., 2003. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part I: computer implementation. *International Journal of Solids and Structures* 40, 7513-7537.
- [32] SUO, Z., 2002. Private communication.
- [33] BETTI E., Teoria dell'elasticità, *Il Nuovo Cimento*, pp.7-10, 1872.
- [34] FREDHOLM I., Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, v.27, pp.365-390, 1903.
- [35] KELLOG, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.
- [36] KUPRADZE, O. D., *Potential Methods in Methods in Theory of Elasticity*, Daniel Davy, New York, 1965.
- [37] JASON, M. A., *Integral Equation Methods in Potential Theory – I*, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. A275, pp.23-32, 1963.
- [38] SYMM, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory – I*, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. A275, pp.33-46, 1963.
- [39] RIZZO, F. J., *An Integral Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, *Quat. Appl. Math.*, vol.25, pp.83-92, 1967.
- [40] CRUSE, T. A., *Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatics*, *Int. J. Solids and Structures*, vol.5, pp. 1259-1274, 1969.
- [41] BREBBIA C. A., *The boundary element method for engineers*, London: Pentech Press, 1978.
- [42] INGLIS, C. E., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, *Trans. Inst. Naval Architects, London*, Vol. LV, pp. 219-230, 1913.

- [43] GRIFFITH, A. A., The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, Vol. 221, 163-198, 1921.
- [44] GRIFFITH, A. A., The Theory of Rupture, Proc. First Int. Cong. Applied Mech., DELFT, 1924.
- [45] DE AQUINO, C. T. E., FERREIRA I., LANDES J. D., Introdução à Mecânica da Fratura: Uma Abordagem Histórica, série: Pesquisas em Engenharia de Materiais, Departamento de Engenharia de Materiais, Faculdade de Engenharia Mecânica – Unicamp, Setembro de 1998, 15 pp.
- [46] IRWIN, G. R., Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 79, pp. 361-364, 1957.
- [47] WESTGAARD, H. M., Bearing Pressures and Cracks, Journal of Applied Mechanics, A, pp. 49-53, 1939.
- [48] ALIABADI, M. H., Boundary element formulations in fracture mechanics, Appl. Mech. Rev., no 2, February 1997, pp.83-96.
- [49] CRUSE T. A., Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method, Surface cracks: Physical problems and computational solutions, Swedlow JL (ed.), ASME, pp. 153-170, 1972.
- [50] CRUSE T. A., VAN BUREN W., Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, Int. J. Fracture Mech. 7, pp. 1-15, 1971.
- [51] SNYDER M. D., CRUSE T. A., Boundary-integral analysis of anisotropic cracked plates, Int. J. Fracture Mech. 11, pp.315-328, 1975.
- [52] BLANDFORD, G. E., INGRAFFEA, A. R., LIGGET J. A., Two-dimensional stress intensity factors computations using the boundary element method, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 17, pp. 387-404, 1981.

- [53] MI, Y., ALIABADI, M. H., Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Eng. Anal with Boundary Elements*, vol. 10, pp. 161-171, 1992.
- [54] GRAY L. J., MARTHA L. F., INGRAFFEA A. R., Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 29, pp.1135-1158, 1990.
- [55] GRAY L. J., GILES G. E., Application of thin cavity method to shield calculations in electroplating, *Boundary Element X*, Brebbia C. A. (ed.),vol. 2, *Comput. Mech. Publ.*, Southampton, pp.441-452, 1988.
- [56] LUTZ E. D., INGRAFFEA A. R., GRAY L. J., Use of simple solutions for boundary integral methods in elasticity and fracture analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 35, pp.1737-1751, 1992.
- [57] DUGDALE, D. S., Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids* vol. 8, pág. 100-104, 1960.
- [58] HILLERBORG, A., MODÉER, M., e PETERSSON, P. E. Analysis of a crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pág. 773-782, 1976.
- [59] SUKUMAR, N., PRÉVOST, J.-H., HUANG, R., 2003. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part II: Numerical applications. *International Journal of Solids and Structures* 40, 7539-7552.
- [60] MOËS, N., GRAVOUIL, A. AND BELYTSCHKO, T., 2002. Non-planar 3D crack growth by extended finite element and level sets – Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53, 2549-2568.
- [61] MOËS, N., GRAVOUIL, A. AND BELYTSCHKO, T., 2002. Non-planar 3D crack growth by extended finite element and level sets – Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53, 2569-2586.
- [62] MOËS, N. AND BELYTSCHKO, T., 2001. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics* 69, 813-833.

- [63] WELLS, G. N., SLUYS, L. J., 2001. A new method for modeling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50, 2667-2682.
- [64] BITTENCOURT, T. N., Discrete approaches to cohesive-crack modeling through the Finite Element Method.
- [65] BITTENCOURT, T. N., SOUSA, J. L. A. O. Cohesive-crack modeling for fiber-reinforced ceramic composites.
- [66] BITTENCOURT, T. N. Fraturamento do concreto estrutural: Aspectos teóricos, computacionais e experimentais, e suas aplicações. São Paulo, 1999. (Tese de livre docência).
- [67] PLANAS, J., ELICES, M., Conceptual and experimental in determination of the fracture energy of concrete, *Fracture Toughness and Fracture Energy: Test Methods for Concrete and Rock*, H. Mihashi, H. Takahashi and F. H. Wittmann, eds., Balkema, Rotterdam, pág. 165-181, 1989.
- [68] PLANAS, J., GUINEA, G. V., ELICES, M., Rupture modulus and fracture properties of concrete, *Fracture Mechanics of Structures*, Vol. 1, F. H., Wittman, eds., Aedificatio Publishers, Freiburg, Alemanha, pág. 95-110, 1995.
- [69] BARENBLATT, G. I., The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *J. appl. Math. Mech.* vol. 23, pág. 622-636, 1959.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)