

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Modelagem computacional de escoamento bifásico em
meios porosos heterogêneos com acoplamento
geomecânico**

Por

Marcos Alcoforado Mendes

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM
MEIOS POROSOS HETEROGÊNEOS COM ACOPLAMENTO
GEOMECÂNICO

Marcos Alcoforado Mendes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL DE
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Márcio Arab Murad, D.Sc (Presidente)

Prof. Luís Felipe Feres Pereira, Ph.D

Prof. Abimael Fernandes Dourado Loula, D.Sc.

Prof. Augusto Cesar Noronha Rodrigues Galeão, D.Sc.

Prof. Frédéric Gerard Christian Valentin, Ph.D

Prof. Eurípedes do Amaral Vargas Junior, Ph.D

Prof. Ézio da Rocha Araújo, D.Sc.

Prof. Leonardo José do Nascimento Guimarães, Ph.D

Prof. Régis Kruel Romeu, Ph.D

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
MARÇO DE 2008

Mendes, Marcos Alcoforado

M538m Modelagem computacional de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos com acoplamento geomecânico / Marcos Alcoforado Mendes. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

XVI, 142 p. : il.; 29 cm

Orientadore(s): Márcio Arab Murad e Luís Felipe Feres Pereira

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

1. Recuperação secundária do petróleo. 2. Poromecânica. 3. Hidrodinâmica. 4. Meios porosos heterogêneos. I. Murad, Márcio Arab. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 622.338 2

Dedicatória

Aos meus pais, amigos e orientadores.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais e amigos pelo apoio nos momentos difíceis e incertos, ao LNCC pelo privilégio de poder conviver com pessoas tão distintas e comprometidas com seus ideais, em especial agradeço aos meus amigos e orientadores Márcio Murad e Felipe Pereira pela confiança, paciência, dedicação e exemplo de profissionalismo e amor ao trabalho.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ESCOAMENTO BIFÁSICO
EM MEIOS POROSOS HETEROGÊNEOS COM ACOPLAMENTO
GEOMECÂNICO**

Marcos Alcoforado Mendes

Março , 2008

Orientador: Márcio Arab Murad, D.Sc (Presidente)

Co-orientador: Luís Felipe Feres Pereira, Ph.D

Neste trabalho desenvolvemos a modelagem computacional dos fenômenos inerentes ao acoplamento hidromecânico que governam o escoamento de dois fluidos imiscíveis em uma matriz porosa heterogênea e deformável. As equações do modelo na escala de Darcy são decompostas em dois subsistemas associados a poromecânica e ao transporte dos fluidos. Neste contexto novos métodos numéricos são propostos para a computação da velocidade de Darcy baseados em técnicas de pós-processamento de Petrov-Galerkin em conjunção com métodos localmente conservativos para a equação hiperbólica de transporte da saturação aliados à técnica de decomposição de operadores para a computação dos efeitos da evolução temporal da porosidade induzidos pela deformação da matriz porosa sobre o transporte.

As simulações numéricas do modelo resultante nos permite identificar diferentes regimes do acoplamento hidromecânico durante o processo de extração secundária de petróleo. Em particular analisamos a influência da razão de viscosidade entre os fluidos e da heterogeneidade da matriz porosa sobre os diferentes regimes de acoplamento. Dentre os vários fenômenos capturados no modelo damos particular ênfase ao surgimento de um processo de compactação retardada do

reservatório devido à inundação de água onde, em particular, ilustramos seu efeito sobre as curvas de produção de petróleo.

No contexto da modelagem estocástica analisamos também os efeitos das heterogeneidades e incertezas presentes nos coeficientes de permeabilidade e das constantes elásticas do meio poroso sobre os diferentes regimes do acoplamento geomecânico. A caracterização destes regimes governados pela razão de viscosidade e pelo coeficiente de variação das heterogeneidades é ilustrada por meio de simulações numéricas do processo de extração secundária de um reservatório sujeito ao peso das camadas superiores.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

**COMPUTATIONAL MODELLING OF THE BIPHASIC FLOW IN
HETEROGENEOUS POROUS MEDIA WITH GEOMECHANIC
COUPLING**

Marcos Alcoforado Mendes

March, 2008

Advisor: Márcio Arab Murad, D.Sc (Presidente)

Co-advisor: Luís Felipe Feres Pereira, Ph.D

In this work we develop the computational modeling of the hydromechanical couplings which govern two-phase flow in a heterogeneous poroelastic media. At the Darcy scale the governing equations are decomposed in two subsystems associated with the poromechanics and hydrodynamics. In this context new numerical methods are proposed for the computation of the Darcy velocity based on Petrov-Galerkin post processing techniques in conjunction with locally conservative methods for the hyperbolic transport equation and for water saturation together with an operator splitting technique for the computation of the transient porosity effect upon the transport equation.

Numerical simulations allow us to identify different regimes of hydromechanical coupling during the secondary process of petroleum withdrawal. In particular, we analyze the influence of the viscosity ratio and strength of heterogeneity upon the various coupling regimes. Among the many phenomena captured by the model we give particular emphasis on the delayed compaction of the reservoir due to the water flooding illustrating its effects upon the oil production curves.

Within the framework of the stochastic modeling, we analyze the effects of the heterogeneity and the uncertainty in permeability and elastic coefficients

upon the hydromechanical coupling regimes. The characterization of these regimes governed by the viscosity ratio and by the strength of heterogeneity is illustrated in numerical simulations of secondary oil withdrawal from a reservoir subject to the overburden due the weight of the overlaying formations.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Contexto científico	3
1.3	Proposta de tese	10
2	Modelagem na escala de Darcy	12
2.1	Conservação de massa	13
2.2	Lei de Darcy	15
2.3	Formulação para meio poroso rígido	20
2.4	Poromecânica	21
2.5	Formulação do problema de escoamento bifásico com acoplamento geomecânico	22
3	Discretização do modelo de acoplamento hidromecânico	24
3.1	Subproblema da poromecânica	24
3.2	Subproblema da porosidade	25
3.3	Subproblema do transporte	26
3.4	Algoritmos de acoplamento	27
3.5	Método numérico para a Poromecânica	29
3.6	Pós-processamento para a velocidade de Darcy	33
3.7	Resolução numérica do módulo da porosidade	37
3.8	Método numérico para o problema do transporte	37

3.8.1	Discretização do problema corretor	39
3.8.2	Discretização do problema preditor	39
3.8.3	Etapa de projeção	48
3.8.4	Equação de diferenças finitas resultante	48
3.8.5	Tratamento numérico das condições de fronteira	50
3.8.6	Resultados da análise numérica	51
3.9	Algoritmo de sincronismo entre os módulos	53
4	Simulações computacionais	56
4.1	Teste unidimensional da Poromecânica	56
4.2	Teste unidimensional do Transporte	58
4.3	Simulação numérica da equação de transporte com variação espacial da porosidade	61
4.4	Simulação da equação de transporte com porosidade transiente . . .	65
4.5	Simulações numéricas do acoplamento hidromecânico	69
4.6	Análise das curvas de produção de óleo	84
4.7	Meios poro-elásticos heterogêneos	89
4.8	Análise da acurácia dos métodos numéricos propostos	99
5	Modelagem Estocástica	106
5.1	Descrição estatística da permeabilidade	107
5.2	Método de Monte Carlo	109
5.3	Comportamento médio do modelo estocástico	110
5.4	Influência da variabilidade do módulo de Young	121
6	Conclusões	130
	Referências Bibliográficas	133

Lista de Siglas e Abreviaturas

S_w, S_o	saturação da água e do óleo.
ϕ	porosidade.
\mathbf{u}_s	deslocamento do sólido.
\mathbf{v}_s	velocidade do sólido $\mathbf{v}_s = \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}$.
$\mathbf{v}_w, \mathbf{v}_o$	velocidade das partículas das fases água e óleo.
p_w, p_o	pressão das fases água e óleo.
p	pressão do poro.
p_c	pressão capilar ($p_c = p_w - p_o$).
$\mathbf{V}_{Dw}, \mathbf{V}_{Do}$	velocidade de percolação da fases água e óleo.
\mathbf{V}_{Dt}	velocidade de percolação total ($\mathbf{V}_{Dt} = \mathbf{V}_{Do} + \mathbf{V}_{Dw}$).
K	coeficiente de permeabilidade intrínseca do meio poroso.
C_0, M_s	constantes experimentais da lei de Kozeny-Carman.
k_{rw}, k_{ro}	permeabilidades relativas da água e do óleo.
μ_w, μ_o	viscosidades dos fluidos água e óleo.
λ_t	mobilidade total.
λ_w, λ_o	mobilidade relativa das fases água e óleo.
K_h	coeficiente de permeabilidade hidráulica ($K_h = \lambda_t K$).
$\boldsymbol{\sigma}_t$	tensor das tensões totais aplicadas sobre a mistura.
$\boldsymbol{\sigma}_{ef}$	tensor de tensões efetivas.
λ, μ	constantes elásticas de Lamê.
Ey	módulo de Young.
μ	coeficiente de poisson.
Ω	domínio do problema.
Γ_N^p	subfronteira do domínio com condição de Neuman para a pressão do poro.
Γ_D^p	subfronteira do domínio com condição de Dirichlet para a pressão do poro.
Γ_N^u	subfronteira do domínio submetido ao carregamento.
Γ_D^u	subfronteira com condição de Dirichlet para o deslocamento do sólido.
$\Gamma_D^{S_w}$	subfronteira com condição de Dirichlet para a saturação.
$\bar{\mathbf{n}}$	vetor unitário perpendicular à fronteira do domínio.

$L^2(\Omega)$	espaço das funções de quadrado integrável e domínio Ω .
$H^1(\Omega)$	espaço das funções com gradiente quadrado integrável e domínio Ω .
$H(\text{div}(\Omega))$	espaço das funções com divergente quadrado integrável e domínio Ω .
M_h	triangulação do domínio do problema.
P_h^k	Espaço das funções contínuas polinômios por partes de grau k
U, V	espaços de aproximações para p e \mathbf{u}_s .
RT	espaços de aproximações de Raviart-Thomas.
\mathbf{u}_h^n	aproximação de \mathbf{u}_s para o instante t_n pelo método de Elementos Finitos.
p_h^n	aproximação de p para o instante t_n pelo método de Elementos Finitos.
\mathbf{v}_h^n	aproximada de \mathbf{V}_{Dt} obtida com o pós-processamento.
δ	parâmetro de estabilização do pós-processamento.
Δt_s	passo de tempo do módulo da poromecânica.
H	diâmetro característico dos elementos da malha computacional.
h_x, h_y	espessura e altura dos elementos da malha computacional.
ϕ_h^n	aproximação constante por partes para a porosidade no instante t_n .
S_w^*	valor do passo preditor da saturação (apenas efeitos convectivos).
Δt_t	passo de tempo do método NT.
\bar{s}_{ij}	valor médio de S_w para o elemento Ω_{ij} .
s_{ij}	valor da interpolação linear de S_w no elemento Ω_{ij} .
$A(\Omega_{ij})$	área da célula Ω_{ij} .
$TV(S)$	medida da variância total da função S .
s'_{ij}	aproximação da derivada de S_w no eixo X.
\hat{s}_{ij}	aproximação da derivada de S_w no eixo Y.
\mathbf{x}	vetor posição com coordenadas (x, y) .
$F_{n=\{1,2\}ij}$	n -ésima componente do fluxo avaliado no centro do elemento Ω_{ij} .
F'_{1n}	derivada da componente n do fluxo no eixo X.
F'_{2n}	derivada da componente n do fluxo no eixo Y.
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy constant for hyperbolic equations.
Γ_s, Γ_i	fronteiras superior e inferior do reservatório.
Γ_e, Γ_d	fronteiras laterais à esquerda e à direita do reservatório.
τ	variável de parametrização das solução analíticas da saturação S_w .
M	razão de viscosidade entre os fluídos.
Y	variável gaussiana.
μ_α	média da variável aleatória α .
$\langle Y \rangle$	média da variável aleatória α .
f_α	função de densidade de probabilidade da variável aleatória α .
σ_α	desvio padrão da variável aleatória α .

σ_α^2	variância da variável aleatória α .
$CV(\alpha)$	coeficiente de variação da variável aleatória α .
$C(\cdot, \cdot)$	função de covariância.
\hat{Y}	variação da variável aleatória Y em torno de sua média.
β	coeficiente de Hurst.
$\mu_\alpha(n)$	aproximação da média da variável α , com n realizações.
$\sigma_\alpha^2(n)$	aproximação da variância da variável α , com n realizações.
ϵ	tolerância.
K_{hom}	valor de permeabilidade adotado para o caso homogêneo.
Ey_{hom}	valor do módulo de Young adotado para o caso homogêneo.
K_{eff}	melhor aproximação constante da permeabilidade para o caso estocástico.
Ey_{eff}	melhor aproximação constante do módulo de Young para o caso estocástico.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Os modelos de acoplamento hidromecânico objetivam descrever a percolação de um ou mais fluidos em meios porosos deformáveis. O movimento dos fluidos induzido por um gradiente de pressão provoca variações de tensões na matriz porosa que por sua vez se deforma. Conseqüentemente propriedades da rocha tais como porosidade e permeabilidade são alteradas modificando o escoamento. Essa interação entre hidrodinâmica e análise de tensões e deformações na matriz porosa consiste no protótipo do acoplamento hidromecânico que necessita ser modelado com acurácia computacional a fim de obtermos respostas confiáveis das simulações numéricas.

Os modelos de acoplamento hidromecânico são fundamentais para o entendimento e previsão de diversos fenômenos relacionados com a mecânica de solos e rochas (Marsily, 1986; Fredlund e Rahardjo, 1993). Dentre eles, podemos salientar o problema da subsidência da superfície terrestre originado pela extração de fluidos confinados em um reservatório na subsuperfície (Marsily, 1986; Bell et al., 2005; Teatini et al., 2006). Inicialmente, o peso das formações geológicas acima do reservatório é suportado pela pressão do fluido intersticial e pelas tensões de contato no esqueleto poroso. À medida que o processo extrativo evolui, o peso vai gradualmente sendo transferido para a matriz porosa causando a compactação do reservatório e a subsequente acomodação das camadas geológicas superiores acom-

panhada pela subsidência da superfície terrestre. Apesar de não muito frequente, esse fenômeno pode acarretar grandes prejuízos financeiros e ambientais para a sociedade. Por exemplo, a extração de água do aquífero subsuperficial da cidade do México resultou em subsidência de até 9m danificando construções e causando alagamentos em algumas regiões durante épocas chuvosas (Guerrero et al., 1999). A subsidência também pode acarretar sérias instabilidades estruturais nas plataformas petrolíferas sobre o assoalho oceânico ou comprometer os poços de produção de petróleo. Em 1984 constatou-se que a extração de óleo e gás do reservatório Ekofisk situado no mar do Norte havia provocado uma subsidência de 3 metros ao longo de 13 anos de exploração o que fez baixar perigosamente o nível das plataformas petrolíferas em relação ao nível do mar forçando o fechamento de 6 instalações e fazendo com que as autoridades cobrassem por parte da operadora responsável um remanejamento do campo de produção. A necessidade de monitoramento constante do reservatório Ekofisk produziu uma enorme quantidade de dados experimentais amplamente utilizados e referenciados na literatura da engenharia de petróleo (Arnes et al., 1996; Abdulraheem et al., 1994; Sulak e Danielsen, 1989).

No processo de recuperação secundária de hidrocarbonetos, o efeito da capilaridade altera drasticamente a resistência de rochas gerando colapso dos poros e a consequente diminuição da permeabilidade e da produção de petróleo (Nouri et al., 2006). Uma outra consequência do acoplamento hidromecânico é a extração conjunta de areia, água, óleo e gás nos poços de produção o que causa prejuízo financeiro para a indústria devido ao custo adicional no processo de separação das fases (Wan et al., 2006). Por outro lado, o acoplamento hidromecânico pode ser benéfico para a produção de óleo como no caso do campo de Valhal no Mar do Norte onde a compactação da matriz porosa induzida pela diminuição da poro pressão durante o processo extrativo auxiliou consideravelmente a produção de petróleo (Cook et al., 2001). Na análise de estabilidade de poços, os modelos de acoplamento hidromecânico permitem a adoção de estratégias de exploração mais

conscientes com o intuito de prolongar a vida útil dos poços além de validar e justificar o uso de técnicas como a do fraturamento hidráulico induzido onde fraturas são geradas por alta pressão nas regiões em torno do poço de extração visando o surgimento de caminhos preferenciais para o escoamento dos hidrocarbonetos (Zubkov et al., 2007; Gidley, 1990).

Dado o vasto leque de aplicações do acoplamento hidromecânico, em particular na simulação de reservatórios, o desafio científico consiste no desenvolvimento de modelos computacionais capazes de reproduzir fielmente os fenômenos mencionados anteriormente.

1.2 Contexto científico

O primeiro modelo de acoplamento hidromecânico foi proposto por Terzaghi (1936) para problemas unidimensionais de adensamento de meios porosos elásticos saturados por um único fluido e microscopicamente incompressíveis. Conjecturando que a pressão hidrostática do fluido intersticial não produzia compactação da matriz porosa, Terzaghi estabeleceu o pilar central do acoplamento hidromecânico postulando a decomposição da tensão total aplicada sobre a mistura em duas componentes: uma dada pela pressão hidrostática do fluido, também chamada de pressão do poro, e outra parcela de natureza constitutiva governante da deformação da matriz porosa denominada de tensão efetiva. Subsequentemente Biot (1941) generalizou o modelo de Terzaghi para três dimensões incorporando à formulação os efeitos distorcionais induzidos pelas tensões de cisalhamento no esqueleto poroso. Além desta generalização, Biot incluiu no modelo geomecânico o efeito de compressibilidade da fase sólida na escala do poro dando origem ao coeficiente de Biot-Willis que surge na decomposição de Terzaghi multiplicando a pressão do poro (Biot e Willis, 1957).

Embora o princípio das tensões efetivas seja bem estabelecido para escoamento monofásico, suas extensões para escoamento multifásico não foram unificadas, seguindo diferentes caminhos que deram origem a diversas formulações e

interpretações, em particular para o caso bifásico água-ar. Nesse contexto Bishop (1959) generalizou a forma do princípio das tensões efetivas de Terzaghi postulando a dependência do coeficiente de Biot-Willis com a saturação. Modificações da teoria de Bishop foram sendo gradualmente propostas, destacando-se o trabalho de Fredlund e Morgenstern (1977) os quais consideram a dependência da deformação da matriz porosa em duas variáveis termodinamicamente independentes: a tensão líquida, definida pela diferença entre a tensão total e a pressão do ar, e a pressão capilar. A utilização destas duas variáveis para descrever o estado de tensões efetivas da matriz porosa representou avanço significativo no desenvolvimento de leis constitutivas entre tensão-deformação para meios porosos não saturados (Fredlund e Rahardjo, 1993).

Generalizações do modelo de Fredlund e Morgenstern para meios porosos elastoplásticos foram obtidos por Alonso et al. (1990) os quais propuseram um modelo constitutivo geral para meios não saturados incorporando a dependência da superfície de plastificação da matriz porosa com a pressão capilar. Posteriormente esse modelo foi denominado de Modelo Básico de Barcelona, sendo estendido e modificado em diversos trabalhos subsequentes que objetivavam atualizá-lo às novas observações experimentais e avanços da área (Sheng et al., 2004).

O princípio de Terzaghi estendido para escoamentos multifásicos conjuntamente com as leis de conservação de quantidade de movimento e de massa das fases envolvidas compõem o sistema de equações governantes do acoplamento geomecânico na escala de laboratório. O modelo é usualmente segmentado em dois subsistemas de naturezas bem diferentes. O subsistema da Poromecânica possui um caráter estritamente parabólico composto pelas equações de massa global, de equilíbrio de tensões e pelas leis constitutivas para a tensão efetiva e para a velocidade de percolação total da mistura fluida. Em contrapartida, o subsistema da Hidrodinâmica que rege o escoamento parcial dos fluidos é composto por equações de transporte predominantemente convectivas advindas do balanço de massa dos fluidos e da lei de Darcy. Para problemas onde o efeito difusivo da pressão ca-

pilar pode ser desprezado, o subsistema da Hidrodinâmica passa a ser regido por uma equação hiperbólica não linear com o campo de saturação exibindo ondas de choque (Chavent, 1986).

A decomposição do modelo em subsistemas é herdada naturalmente pelas técnicas de discretização das equações governantes. De fato, a necessidade de metodologias numéricas acuradas para os modelos de acoplamento Geomecânico constitui um desafio ao desenvolvimento de simulações computacionais mais realistas. Algoritmos de desacoplamento têm sido propostos com o intuito de reduzir o esforço computacional e aumentar a estabilidade numérica. Nesses casos, os subsistemas não lineares da Hidrodinâmica e da Poromecânica são iterados sequencialmente em cada passo de tempo e a comunicação entre eles é feita através da comutação entre as soluções numéricas. Dependendo do algoritmo de sequenciamento adotado, a solução parcialmente acoplada pode atingir níveis de acurácia semelhante à obtida por um esquema completamente acoplado onde as equações da Poromecânica e da Hidrodinâmica são resolvidas simultaneamente (Settari e Walters, 1999). As vantagens do desacoplamento são a flexibilidade de adotar métodos numéricos apropriados para cada subsistema que herdem naturalmente suas peculiaridades, além da comodidade de aproveitar simuladores robustos e eficientes já desenvolvidos para cada um dos subsistemas (Onaisi e Samier, 2002; David e Settari, 2002). Em contrapartida a abordagem totalmente acoplada constitui uma alternativa importante quando desejamos capturar numericamente a forte interação entre a Poromecânica e a Hidrodinâmica. No entanto, a necessidade do desenvolvimento de métodos numéricos robustos para o sistema acoplado aliado ao elevado custo computacional torna essa classe de algoritmos pouco competitiva para aplicações de grande porte que utilizam malhas muito refinadas. Como exemplos de implementações numéricas que utilizam essa abordagem citamos Charlier e Samier (2002); Schrefler e Zhan (1993); Oettl et al. (2004); Lewis et al. (1998); Olivella et al. (1996).

As implementações numéricas dos modelos de acoplamento geomecânico ge-

ralmente discretizam espacialmente o subsistema da Poromecânica nas variáveis de pressão e deslocamento via método de elementos finitos em conjunção com diferenças finitas implícitas na aproximação no tempo (Minkoff et al., 2003b; Yale, 2002; Merodo et al., 2004). Apesar dessa abordagem apresentar instabilidade numérica nos instantes iniciais para algumas combinações de espaços aproximantes devido à resposta incompressível do meio poroso (Murad e Loula, 1994), ela possui propriedades ótimas de convergência para os campos de pressão e deslocamento. Além desta aproximação dos campos potenciais, para satisfazer localmente a conservação de massa e a condição de equilíbrio do sistema, é mandatório que a discretização da Poromecânica seja capaz de fornecer campos de velocidade e de tensões efetivas conservativos. No entanto, tal propriedade não se verifica na formulação clássica do método de Galerkin quando calculamos os gradientes a partir dos campos potenciais (Mose et al., 1994). Esse problema tem sido contornado fazendo uso de métodos mistos e dos espaços discretos de Raviart-Thomas que já foram empregados com grande sucesso para problemas de escoamento em meios porosos rígidos heterogêneos (Douglas et al., 1983; Abreu, 2007). Porém, para problemas em meios deformáveis, essa abordagem resulta em soluções numéricas que violam a simetria do tensor de Cauchy (Arnold et al., 2007), além de apresentar maior custo computacional em relação ao método de Galerkin devido ao fato da formulação variacional resultante ser posta em quatro campos (tensões efetivas, deslocamento, pressão do poro e velocidade). O procedimento alternativo proposto neste trabalho consiste em utilizar uma técnica de pós-processamento inicialmente sugerida por Loula et al. (1995) para o problema de Poisson. Tal metodologia baseia-se em projetar os gradientes dos campos potenciais de pressão e deslocamento nos espaços de Raviart-Thomas através de uma formulação de Petrov-Galerkin a qual adicionamos os resíduos do balanço de massa global e do equilíbrio das tensões efetivas.

Ao contrário das equações de natureza estritamente parabólica da Poromecânica cujos efeitos difusivos são preponderantes, as equações de transporte que

governam o movimento das fases fluidas são predominantemente convectivas e caracterizadas por frentes de onda com surgimento de camadas limites difíceis de serem capturadas adequadamente pelos métodos numéricos clássicos (John e Knobloch, 2007). É bem sabido que para problemas predominantemente convectivos, o método de Galerkin apresenta oscilações espúrias com estabilidade condicionada à magnitude do número de Peclet, tornando necessário o uso de malhas excessivamente refinadas à medida que o caráter convectivo das equações de transporte aumenta (Johnson, 1990). Para superar estas dificuldades métodos estabilizados baseados em formulações variacionais de Petrov-Galerkin com termos de captura de choque têm sido propostos onde destacamos os métodos SUPG (Brooks e Hughes, 1982), CAU (Galeao e Do Carmo, 1988), GLS (Hughes et al., 1989), Unusual (Mizukami e Hughes, 1985; Franca e Valentin, 2000). O principal objetivo desses métodos é eliminar as oscilações espúrias adicionando difusão artificial de forma consistente à formulação variacional (John e Knobloch, 2007). Apesar de serem um grande avanço em relação ao método de Galerkin, tais técnicas ainda apresentam pequenas oscilações na resolução de problemas puramente hiperbólicos, em particular nas proximidades das regiões de choque onde as soluções apresentam descontinuidades. Uma alternativa consiste em aliar os esquemas de estabilização com o método de Galerkin Descontínuo (Calle et al., 2005). Nesta abordagem os espaços aproximantes são gerados por funções descontínuas nas fronteiras dos elementos de forma que o fluxo nas faces são aproximados por fluxos numéricos como os de Godunov, Lax-Friedrichs, Roe e Engquist-Osher dando origem a diversas formulações (Cockburn e Shu, 2001). Como aplicações do método de Galerkin Descontínuo para equações hiperbólicas escalares destacamos os trabalhos de Aizinger, Dawson, Cockburn, e Castillo (2000); Cockburn e Shu (1989); Calle, Devloo, e Gomes (2005); Baumann e Oden (1999).

Em particular, o método de Galerkin Descontínuo com funções testes constantes por partes reproduz os chamados métodos de volumes finitos (Cockburn e Shu, 2001) que foram originalmente desenvolvidos com o objetivo de satisfazer a

lei de conservação no nível de cada elemento. Tais métodos aproximam a forma integral da equação de transporte e exibem boas propriedades numéricas sendo entrópicos, explícitos no tempo e baratos computacionalmente. De forma análoga ao método de Galerkin Descontínuo, a determinação do fluxo numérico na fronteira dos elementos é crucial para a caracterização dos métodos de volumes finitos. Dentre as diversas aproximações ressaltamos (ver Leveque (2002)) Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, Upwind, KT (Ribeiro, 2007) e o método de Nessyahu e Tadmor (1990). Este último é uma evolução do método Lax-Friedrichs com convergência quadrática, onde as derivadas da solução da equação de Transporte são aproximadas por esquemas de diferenças finitas estabilizados por funções limitadoras *MinMod* (**slope limiters**) e a integração da lei de conservação é feita na malha deslocada, não sendo necessário a caracterização do fluxo numérico na fronteira dos elementos. Apesar dos métodos de volumes finitos serem projetados para a resolução de equações puramente hiperbólicas, eles podem ser estendidos para equações de transporte predominantemente convectivas através da técnica de decomposição de operadores (**Operator Splitting**) em que os termos difusivos, reativos e convectivos da equação são computados separadamente em cada passo de tempo (Leveque, 2002; Douglas et al., 1997).

Uma outra família de técnicas para equações hiperbólicas predominantemente convectivas teve origem no método modificado das características proposto por Douglas e Russel (1982) e baseia-se na idéia de evoluir a solução a partir da condição inicial seguindo as linhas características. No entanto, ao contrário das formulações de volumes finitos, tais técnicas não preservam as leis integrais de conservação de massa levando a resultados numéricos irrealistas. Tal dificuldade motivou o surgimento de uma nova linha de pesquisa conhecida como “Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method” ou ELLAM (Celia et al., 1990). Esta família de métodos conserva a massa localmente, porém possui maior custo computacional do que o método modificado das características (MMOC). Recentemente, Douglas et al. (2000) propuseram um método conservativo do tipo Euleriano-Lagrangiano

baseado na formulação integral da equação de transporte cuja eficiência computacional é equiparável ao método MMOC apresentando, inclusive, melhores taxas de convergência.

Além do desenvolvimento de metodologias numéricas capazes de capturar corretamente o acoplamento-geomecânico na escala de Darcy, daremos enfoque neste trabalho à modelagem de reservatórios de petróleo na escala de campo (ordem de quilômetros). Ao aumentarmos o domínio do problema, a incorporação das heterogeneidades presentes nas múltiplas escalas do meio poroso aliada às grandes dimensões do reservatório tornam inexequível o fornecimento de dados experimentais precisos para as propriedades geológicas fazendo com que a modelagem determinística dessa classe de problemas seja impraticável. A fim de superar essas dificuldades, diversos autores propuseram a modelagem estocástica como uma técnica alternativa de modelagem onde os coeficientes da matriz porosa passam a ser considerados campos aleatórios ou processos estocásticos (Dagan, 1989; Gelhar, 1993; Rubin, 2003).

A modelagem estocástica de meios porosos tem se revelado uma ferramenta promissora, uma vez que os resultados obtidos passam a incorporar incertezas o que possibilita tomadas de decisões mais conscientes e uma melhor percepção do quanto a variância nos dados experimentais afeta a solução do modelo. As soluções das equações estocásticas envolvem funções de probabilidade difíceis de serem obtidas e que contêm mais informação do que o necessário para as aplicações na engenharia de petróleo, onde geralmente há interesse apenas no cômputo dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem (média e variância). Para realizar esta tarefa, utiliza-se o algoritmo de Monte Carlo que consiste em aproximar numericamente os momentos estatísticos das soluções estocásticas a partir de resultados de simulações numéricas determinísticas feitos sobre várias realizações das variáveis aleatórias (Dagan, 1989).

1.3 Proposta de tese

Tendo em vista o estado da arte apresentado na seção anterior, propomos como tese analisar os mecanismos de interação entre os subsistemas poromecânico e hidrodinâmico focando principalmente na influência não linear da razão de viscosidade dos fluidos água e óleo sobre o acoplamento hidromecânico. Tal pesquisa é uma contribuição importante para o entendimento dos diversos mecanismos de acoplamento, pois, apesar de existirem diversos trabalhos mostrando a necessidade da contabilização dos efeitos da poromecânica para a correta caracterização do escoamento (Settari et al., 2001; David e Settari, 2002), são inexistentes estudos mais detalhados mostrando os mecanismos mútuos de interação entre os dois subsistemas, bem como os diferentes regimes resultantes do acoplamento hidromecânico. Tais estudos são conduzidos pela análise de resultados numéricos obtidos no contexto de um problema de extração secundária de petróleo utilizando um modelo segregado de acoplamento hidromecânico.

Além do estudo dos mecanismos não lineares de acoplamento advindos da razão de viscosidade entre os fluidos, adotamos a modelagem estocástica para analisar os efeitos das heterogeneidades e incertezas associadas aos coeficientes de permeabilidade e módulo de Young sobre os diferentes regimes do acoplamento geomecânico dando ênfase especial ao impacto das heterogeneidades sobre as curvas de produção de óleo. Estudos dessa natureza são inéditos no contexto de modelos de acoplamento hidromecânico para escoamento bifásicos tendo sido exaustivamente abordados em problemas envolvendo meios porosos rígidos (Furtado e Pereira, 1998; Douglas et al., 1997; Abreu et al., 2006) ou meios deformáveis com escoamento monofásico (Hong, 1992; Zeitoun e Baker, 1992; Frias et al., 2004).

Na discretização numérica do modelo propomos utilizar uma abordagem acoplada onde o sistema de equações é decomposto nos subsistemas da poromecânica e hidrodinâmica. Objetivando a conservação local da massa, propriedade essencial para a correta predição das curvas de produção de óleo, principalmente no caso de meios altamente heterogêneos, desenvolvemos métodos numéricos para a

computação da velocidade de Darcy baseados em técnicas de pós processamento de Petrov-Galerkin em conjunção com métodos localmente conservativos para a equação hiperbólica de transporte da saturação aliados a uma forma inovadora de computar os efeitos da evolução temporal da porosidade sobre o transporte baseada na técnica de decomposição de operadores.

Este trabalho é disposto da seguinte forma. No capítulo 2 formulamos o sistema de equações do modelo de acoplamento hidromecânico apresentando de forma sucinta a modelagem clássica do escoamento bifásico em meios porosos deformáveis na escala de laboratório. No capítulo 3 apresentamos os novos métodos numéricos empregados na discretização do modelo hidrogeomecânico. No capítulo 4 apresentamos simulações numéricas ilustrando a qualidade da implementação numérica proposta e estudamos o problema de extração secundária de petróleo através da análise quantitativa da interação entre a Poromecânica e Hidrodinâmica caracterizando os diversos regimes via resolução do modelo determinístico. Finalmente discutimos a modelagem estocástica no capítulo 5 onde estudamos a influência das heterogeneidades do meio poroso sobre os regimes do acoplamento hidrogeomecânico por meio de simulações de Monte Carlo. No capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelagem na escala de Darcy

Neste capítulo desenvolvemos as equações que regem a percolação de dois fluidos incompressíveis, imiscíveis em um meio poroso elástico linear e homogêneo na escala de laboratório. Posteriormente no capítulo 5 utilizaremos a modelagem estocástica a fim de estender o modelo para a escala de campo incorporando as múltiplas heterogeneidades do meio poroso. Como hipóteses simplificadoras supomos ausência de efeitos gravitacionais, validade da lei de Darcy para escoamentos multifásicos através da introdução do conceito de permeabilidade relativa, ausência de troca de massa entre as fases, incompressibilidade das fases fluidas e da fase sólida na escala do poro, matriz porosa elástica linear isotrópica, pressão capilar nula, convecção do campo de porosidade induzido pelo movimento do sólido e efeitos inerciais da conservação de momento do sistema desprezíveis.

Seja um domínio $\Omega \subset R^3$ com fronteira Γ ocupado por uma mistura homogênea constituída por uma fase sólida e duas fases fluidas as quais, sem perda de generalidade, denotamos como água (w) e óleo (o). A fração de volume da mistura ocupada pelos poros é dada pela porosidade ϕ , enquanto que a fração do volume de poros ocupada pela água e óleo são quantificadas respectivamente pelas saturações S_w e S_o . Como os poros estão totalmente preenchidos pelas duas fases fluidas, temos que

$$S_w + S_o = 1. \tag{2.1}$$

As velocidades das partículas das fases sólida, água e óleo são denotadas

respectivamente por \mathbf{v}_s , \mathbf{v}_w , \mathbf{v}_o . Para matrizes porosas rígidas ($\mathbf{v}_s = 0$), as velocidades de percolação dos fluidos \mathbf{V}_{Dw} , \mathbf{V}_{Do} são dadas a partir de \mathbf{v}_w e \mathbf{v}_o pelas expressões (Bear, 1979)

$$\mathbf{V}_{Dw} = \phi S_w \mathbf{v}_w$$

$$\mathbf{V}_{Do} = \phi S_o \mathbf{v}_o$$

No entanto, para meios porosos deformáveis, as tensões aplicadas à fase sólida provocam deformação da matriz porosa. Neste caso, para satisfazer o princípio de invariância relativa à mudança do observador, as velocidades de percolação dos fluidos são definidas relativamente à velocidade da fase sólida \mathbf{v}_s da forma (Schrefler e Pesavento, 2004).

$$\mathbf{V}_{Dw} = \phi S_w (\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V}_{Do} = \phi S_o (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_s). \quad (2.3)$$

Para descrever a evolução das deformações da fase sólida é usual formular o problema em termos do campo de deslocamento do sólido \mathbf{u}_s . Ao desprezarmos os efeitos de convecção induzidos pelo movimento do sólido temos a relação clássica entre \mathbf{v}_s e \mathbf{u}_s

$$\mathbf{v}_s = \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}.$$

2.1 Conservação de massa

Fazendo uso das hipóteses simplificadoras mencionadas anteriormente, as leis de conservação de massa para as três fases envolvidas são dadas por (Bear, 1979):

$$\frac{\partial(S_w\phi)}{\partial t} + \text{div}(S_w\phi\mathbf{v}_w) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(S_o\phi)}{\partial t} + \text{div}(S_o\phi\mathbf{v}_o) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \text{div}((1-\phi)\mathbf{v}_s) = 0. \quad (2.6)$$

Utilizando as equações (2.2) e (2.3), podemos rephrasing a conservação de massa das fases fluidas da forma

$$\frac{\partial(S_w\phi)}{\partial t} + \text{div}(S_w\phi\mathbf{v}_s) + \text{div}\mathbf{V}_{Dw} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial(S_o\phi)}{\partial t} + \text{div}(S_o\phi\mathbf{v}_s) + \text{div}\mathbf{V}_{Do} = 0. \quad (2.8)$$

Somando os balanços de massa para as três fases envolvidas obtemos a equação de conservação de massa total do sistema

$$\text{div}\mathbf{v}_s + \text{div}(\mathbf{V}_{Dw} + \mathbf{V}_{Do}) = 0. \quad (2.9)$$

Definindo a velocidade de percolação da mistura fluida como

$$\mathbf{V}_{Dt} = \mathbf{V}_{Dw} + \mathbf{V}_{Do}, \quad (2.10)$$

podemos reescrever a equação (2.9) da forma

$$\text{div}\mathbf{v}_s + \text{div}\mathbf{V}_{Dt} = 0. \quad (2.11)$$

A equação acima reproduz o balanço de massa proposto por Biot (1941), o que ilustra a potencialidade do modelo bifásico de reproduzir a teoria clássica de poroelasticidade de escoamentos monofásicos.

2.2 Lei de Darcy

O escoamento dos fluidos é regido por uma extensão da lei de Darcy a qual foi inicialmente proposta para escoamentos monofásicos em meios porosos rígidos. Essa representação da conservação de quantidade de movimento estabelece uma relação linear entre o gradiente de pressão no fluido e a velocidade de percolação:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{D}\alpha} = -\frac{K}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha \quad \alpha = o, w \quad (2.12)$$

onde p_α é a pressão do fluido α , μ_α é a viscosidade e K , um tensor de segunda ordem denominado coeficiente de permeabilidade intrínscica da matriz porosa. Este último parâmetro contém informações da estrutura interna do sólido relevante para o movimento do fluido e quantifica a facilidade com que este percola através da matriz porosa. Neste trabalho adotamos meios porosos com permeabilidade intrínscica isotrópica considerando K uma variável escalar.

Para escoamentos bifásicos, a lei de Darcy é generalizada da forma (Bear, 1979):

$$\mathbf{V}_{\mathbf{D}w} = -k_{rw}(S_w) \frac{K(\phi)}{\mu_w} \nabla p_w, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{D}o} = -k_{ro}(S_o) \frac{K(\phi)}{\mu_o} \nabla p_o \quad (2.14)$$

onde k_{rw} , k_{ro} são funções escalares da saturação denominadas de coeficientes de permeabilidade relativa da água e do óleo com $0 \leq k_{r\alpha} \leq 1$. Tais parâmetros quantificam a resistência adicional que um fluido exerce sobre o movimento do outro. A figura 2.1 ilustra um comportamento típico dos coeficientes de permeabilidade relativa em função da saturação S_w . À medida que a saturação de água aumenta, a resistência à percolação do óleo torna-se maior fazendo a permeabilidade relativa k_{ro} diminuir. Raciocínio análogo permite interpretar o comportamento decrescente

de k_{ro} com S_w . As constantes S_{wr} , S_{or} na figura 2.1 representam a saturação residual das fases fluidas e determinam a quantidade mínima de água e óleo presente no meio poroso limitando os valores de S_w ao intervalo $[S_{wr}, 1 - S_{or}]$. Por simplicidade adotamos neste trabalho $S_{wr} = S_{or} = 0$.

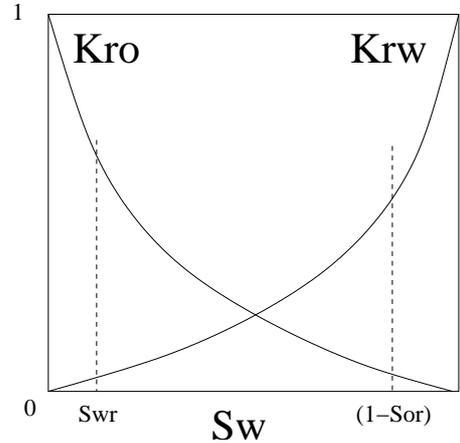


Figura 2.1: Gráfico ilustrando o comportamento dos coeficientes de permeabilidade relativa da água e do óleo em função da saturação S_w .

Dado que o campo escalar K depende da estrutura interna da matriz sólida, sua magnitude é governada pelo estado de deformação do meio poroso. Esta dependência é incorporada ao modelo de forma simplificada considerando K função da porosidade ϕ através da relação de Kozeny-Carman (Carman, 1937):

$$K = C_0 \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2 M_s^2} \quad (2.15)$$

onde C_0 e M_s são constantes obtidas experimentalmente. Tal relação foi deduzida teoricamente considerando meios granulares de formato esféricos separados por caminhos de percolação com seção transversal constante, sendo posteriormente verificada experimentalmente por diversos autores (Mavco e Nur, 1997).

Para completar o sistema de equações que governa a hidrodinâmica, as pressões da água e do óleo são relacionadas termodinamicamente através da equação de estado que introduz a pressão capilar p_c como função da saturação de água

(Chavent, 1986)

$$p_c(S_w) = p_o - p_w. \quad (2.16)$$

Neste trabalho desprezamos os efeitos de capilaridade, de forma que vale a igualdade

$$p_o = p_w = p, \quad (2.17)$$

É importante ressaltar que o efeito de capilaridade desempenha um papel crucial na plastificação e resistência de solos (Fredlund e Morgenstern, 1977). No entanto, na maioria dos casos envolvendo meios rochosos os efeitos da pressão capilar sobre a tensão efetiva, embora não desprezíveis, são de menor intensidade (Fredlund e Rahardjo, 1993). Por simplicidade consideramos no nosso modelo que a influência da pressão capilar sobre o regime elástico é fraca de forma que as tensões efetivas no meio poroso são governadas unicamente pelo estado de deformação da matriz porosa. No que tange à Hidrodinâmica, os efeitos da capilaridade são manifestados pelo surgimento de termos difusivos nas equações de transporte dos fluidos, produzindo uma suavização das frentes de onda da água e do óleo (Chavent, 1986). No entanto essa difusão é pequena quando comparada com os termos convectivos das equações de transporte e não provoca alterações significativas sobre os regimes de escoamento (Chavent, 1986). Além disto, para meios heterogêneos diversos autores têm verificado que os efeitos difusivos produzidos pelas flutuações do campo de velocidade são bem mais acentuados quando comparados com os advindos da pressão capilar (Furtado e Pereira, 1998; Glimm et al., 1993; Glimm e Sharp, 1991).

Adotando a hipótese (2.17), o movimento das fases água e óleo são governados por um único potencial de pressão de forma análoga ao escoamento monofásico. Para representar a lei de Darcy da mistura fluida em uma forma mais convencional, introduzimos as funções mobilidade total (λ_t), mobilidade relativa da água (λ_w) e a mobilidade relativa do óleo (λ_o) sugeridas por Chavent (1986) e definidas a partir

das permeabilidades relativas dos fluidos pelas expressões

$$\lambda_t(S_w) = \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(1 - S_w)}{\mu_o}, \quad (2.18)$$

$$\lambda_w(S_w) = \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w \lambda_t}, \quad (2.19)$$

$$\lambda_o(S_w) = \frac{k_{ro}(1 - S_w)}{\mu_o \lambda_t}, \quad (2.20)$$

$$\lambda_o + \lambda_w = 1. \quad (2.21)$$

A figura 2.2 ilustra dados experimentais típicos para as mobilidades relativas em função da saturação da água. Utilizando as funções de mobilidade acima e somando as leis de Darcy (2.13) e (2.14), obtemos a equação que rege o escoamento da mistura fluida

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}} = \mathbf{V}_{\mathbf{Dw}} + \mathbf{V}_{\mathbf{Do}} = -\lambda_t(S_w)K(\phi)\nabla p, \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}$ é a velocidade total da mistura fluida. A equação (2.22) é muito semelhante à lei de Darcy (2.12) exceto pela presença da função de mobilidade total $\lambda_t(S_w)$ a qual mede a facilidade com que a mistura fluida percola o meio poroso em função da quantidade de água que a constitui. A figura 2.3 mostra valores para $mlt(S_w)$ para diferentes razões viscosidade entre a água e o óleo.

As frações da velocidade de percolação total correspondentes às velocidades de percolação das fases água e óleo são determinadas pelas funções de mobilidades relativas comumente denominadas de funções fracionárias de fluxo (Chavent, 1986). De fato, utilizando as definições das mobilidades relativas (2.19), (2.20) e as leis de Darcy (2.13), (2.14), podemos escrever

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Dw}} = \lambda_w(S_w)\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Do}} = \lambda_o(S_w)\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}. \quad (2.24)$$

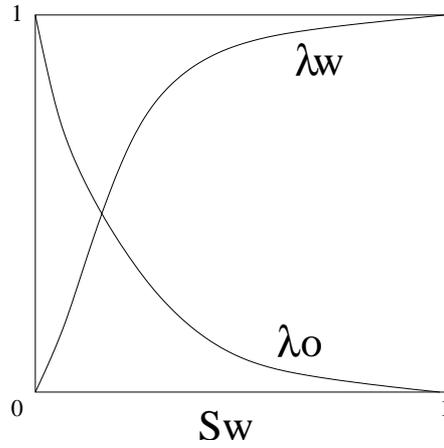


Figura 2.2: Gráfico ilustrando o comportamento das mobilidades relativas em função da saturação S_w assumindo $\mu_w/\mu_o = 20$, $S_{wr} = S_{or} = 0$.

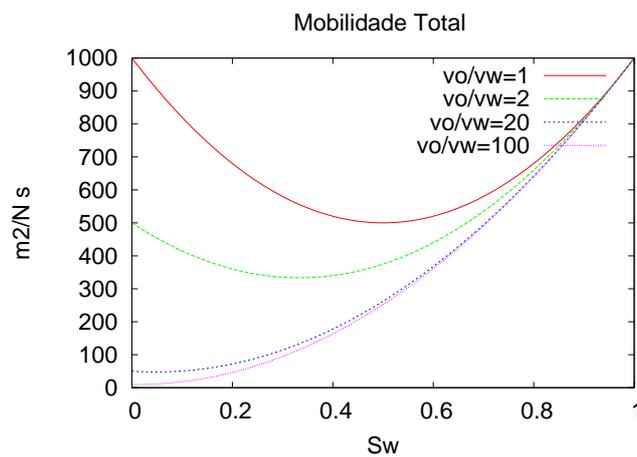


Figura 2.3: Gráficos da função de mobilidade total em função da saturação S_w considerando diferentes razões de viscosidade $\frac{\mu_o}{\mu_w}$ fixando $\mu_w = 10^{-3} N \cdot s/m^2$.

2.3 Formulação para meio poroso rígido

A maioria dos trabalhos sobre acoplamento hidromecânico formula o subsistema da Hidrodinâmica por meio das equações (2.7), (2.11) e (2.17). Em particular, para o caso de meio poroso rígido ($\mathbf{u}_s = 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$), as tensões induzidas pelo escoamento não provocam deformação da matriz porosa. Dessa forma, utilizando as equações (2.22), (2.11), (2.7), obtemos a seguinte formulação para a Hidrodinâmica:

formulação 2.1 (Meio Rígido) Conhecidos o campos de porosidade $\phi(\mathbf{x})$ e as funções de mobilidade $\lambda_t(S_w)$, $\lambda_w(S_w)$, achar os campos $p(\mathbf{x}, t)$, $S_w(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}(\mathbf{x}, t)$ com $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in [0, T]$ satisfazendo as equações

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}} = -\lambda_t(S_w)K\nabla p, \quad (2.25a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_{\mathbf{Dt}} = 0, \quad (2.25b)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} (\lambda_w(S_w)\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}) = 0, \quad (2.25c)$$

com condição inicial

$$S_w(\mathbf{x}, 0) = S_w^0(\mathbf{x}),$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ sobre } \Gamma_D^p, \\ -\lambda_t(S_w)K\nabla p \cdot \bar{\mathbf{n}} &= Q(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^p, \\ S_w(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_D^{S_w}, \end{aligned}$$

onde $\Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p = \Gamma$, $\Gamma_D^p \cap \Gamma_N^p = \emptyset$, $\bar{\mathbf{n}}$ a normal unitária orientada externamente à Ω , $Q(x)$ representa uma vazão prescrita e $\Gamma_D^{S_w} = \{\mathbf{x} \in \Gamma_N^p : Q(x) < 0\}$ é a fronteira de entrada de fluxo. Por simplicidade adotamos como condição de Dirichlet para a pressão o valor absoluto 0.

2.4 Poro-Mecânica

Quando o meio poroso microscopicamente incompressível está sujeito a um carregamento externo, as tensões totais $\boldsymbol{\sigma}_t$ aplicadas sobre a mistura sólido-fluido são decompostas em duas parcelas: uma responsável pela deformação da matriz porosa, constituída pelas tensões transmitidas na matriz porosa por contato direto entre as partículas da fase sólida, denominadas de tensões efetivas $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$, e outra parcela dada pela pressão do poro p_f que governa a pressão hidrostática do fluido. Fazendo uso deste princípio, Terzaghi (1936) propõe a decomposição

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma}_{ef} - p_f I, \quad (2.26)$$

onde I é o tensor identidade. Como estamos assumindo pressão capilar nula ($p_w = p_o = p$), a decomposição de Terzaghi também é válida para o caso bifásico, ou seja

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma}_{ef} - pI. \quad (2.27)$$

Supondo a matriz porosa elástica linear isotrópica, a tensão efetiva é dada em função da deformação do meio poroso da forma

$$\boldsymbol{\sigma}_{ef} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_s I + 2\mu \nabla^s \mathbf{u}_s, \quad (2.28)$$

onde λ, μ são as constantes de Lamê e $\nabla^s \mathbf{u}_s$ é a parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}_s$.

Desprezando efeitos gravitacionais e inerciais, a equação de equilíbrio para a mistura sólido-fluidos é dada por

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_t = 0, \quad (2.29)$$

a qual conjuntamente com a decomposição (2.27) e a lei constitutiva (2.28) pode

ser representada como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_t = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{ef} - \nabla p = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_s + \mu \Delta \mathbf{u}_s - \nabla p = 0. \quad (2.30)$$

2.5 Formulação do problema de escoamento bifásico com acoplamento geomecânico

Seja um domínio $\Omega \subset R^3$ com fronteira $\Gamma = \Gamma_N^u \cup \Gamma_D^u \cup \Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p$ ocupado por um reservatório homogêneo submetido a um carregamento $H(\mathbf{x})$ sobre Γ_N^u com deslocamento nulo sobre Γ_D^u . Considerando matriz porosa saturada por dois fluidos imiscíveis, vazão de fluido $Q(\mathbf{x})$ prescrita sobre Γ_N^p , saturação prescrita sobre a fronteira de injeção de fluido $\Gamma_D^{S_w} \subset \Gamma_N^p$ e pressão do poro nula sobre Γ_D^p , o problema de valor inicial e de contorno é dado por

formulação 2.2 Conhecidas as funções de mobilidade $\lambda_w(S_w), \lambda_o(S_w), \lambda_t(S_w)$, o coeficiente de permeabilidade $K(\phi)$ e as constantes elásticas λ, μ , achar as funções $p(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t), S_w(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{V}_{Dt}(\mathbf{x}, t)$ com $\mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T]$ satisfazendo

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_s + \mu \Delta \mathbf{u}_s - \nabla p = 0, \quad (2.31)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \mathbf{V}_{Dt} \right) = 0, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{V}_{Dt} = -\lambda_t(S_w) K(\phi) \nabla p, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \operatorname{div} \left((1 - \phi) \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right), \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial (S_w \phi)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(S_w \phi \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\lambda_w(S_w) \mathbf{V}_{Dt}) = 0, \quad (2.35)$$

com condições iniciais

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, 0) = 0,$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi^0(\mathbf{x}),$$

$$S_w(\mathbf{x}, 0) = S_w^0(\mathbf{x})$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ sobre } \Gamma_D^u, \\
\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \bar{\mathbf{n}} &= H(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^u, \\
p(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ sobre } \Gamma_D^p, \\
-\lambda_t(Sw)K\nabla p \cdot \bar{\mathbf{n}} &= Q(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^p, \\
S_w(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_D^{S_w}
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_D^u \cap \Gamma_N^u = \emptyset$, $\Gamma_D^u \cup \Gamma_N^u = \Gamma$, $\Gamma_D^p \cap \Gamma_N^p = \emptyset$, $\Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p = \Gamma$.

Na formulação acima, a equação (2.31) denota o equilíbrio de tensões das fases fluidas e sólida, a equação (2.32) corresponde à lei de conservação de massa total obtida a partir de (2.11), enquanto que (2.33) representa a lei de darcy para a mistura fluida e as equações (2.34) e (2.35) são as leis de conservação de massa da fase sólida e da água respectivamente. A fronteira onde prescrevemos a saturação coincide com região de entrada de fluxo podendo ser definida como $\Gamma_D^{S_w} = \{\mathbf{x} \in \Gamma : Q(\mathbf{x}) < 0\}$. Importante notarmos a ausência de condição inicial para a pressão do poro, já que a mesma é determinada pela condição inicial de incompressibilidade ($\text{div } \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, 0) = 0$) e pelas condições de fronteira para a pressão, deslocamento e tensão total. Também não prescrevemos condições de contorno para a porosidade, pois, conforme veremos na seção 3.7, iremos desprezar os efeitos convectivos da fase sólida sobre a equação (2.34).

Capítulo 3

Discretização do modelo de acoplamento hidromecânico

Neste capítulo apresentamos o esquema de resolução numérica em duas dimensões do modelo posto na escala de Darcy. Para este fim, particionamos o sistema de equações em subsistemas apresentados como problemas independentes entre si. Em seguida, apresentamos os métodos numéricos utilizados para resolver cada um dos subproblemas, dando ênfase aos seus aspectos inovadores, e explicamos o algoritmo de acoplamento entre eles objetivando a evolução das variáveis primárias do modelo de forma consistente no tempo.

3.1 Subproblema da poromecânica

O sistema de equações da Poromecânica possui caráter parabólico sendo composto pelas equações (2.31,2.32,2.33) do modelo original tendo como variáveis primárias a pressão total p e o deslocamento do sólido \mathbf{u}_s .

formulação 3.1 (Poromecânica) Seja $\Omega \subset R^3$ com fronteira Γ . Dadas as funções $S_w(\mathbf{x}, t)$, $\phi(\mathbf{x}, t)$, $\lambda_t(S_w)$ e $K(\mathbf{x}, \phi)$, achar os campos $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ com $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T]$ tais que

$$(\lambda + \mu)\nabla\text{div}\mathbf{u}_s + \mu\Delta\mathbf{u}_s - \nabla p = 0, \quad (3.1a)$$

$$\text{div}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_s}{\partial t} - \lambda_t(S_w)K\nabla p\right) = 0, \quad (3.1b)$$

com condição inicial

$$\text{div}\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (3.1c)$$

e condições de contorno

$$\mathbf{u}_s \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma_D^u,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \bar{\mathbf{n}} = H(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^u,$$

$$p = 0 \text{ sobre } \Gamma_D^p,$$

$$-\lambda_t(S_w)K\nabla p \cdot \bar{\mathbf{n}} = Q(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^p.$$

onde $\Gamma_D^u \cap \Gamma_N^u = \emptyset$, $\Gamma_D^u \cup \Gamma_N^u = \Gamma$, $\Gamma_D^p \cap \Gamma_N^p = \emptyset$, $\Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p = \Gamma$, $Q(\mathbf{x})$ é a vazão prescrita e $H(\mathbf{x})$ representa o vetor tração.

Podemos notar que o subsistema da poromecânica requer conhecimento dos campos ϕ e S_w em cada instante de tempo. No entanto, tais campos são incógnitas do modelo original e a evolução deles no tempo é regida pelos dois outros subsistemas apresentados a seguir.

3.2 Subproblema da porosidade

O subproblema que rege a evolução da porosidade consiste unicamente da equação de conservação de massa da fase sólida (2.34) supondo conhecido o campo de deslocamento $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$. Sua formulação é dada por:

formulação 3.2 (Pós-processamento da porosidade) Dado o campo $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ solução do subproblema da poromecânica 3.1, achar a função $\phi(\mathbf{x}, t)$ com $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in$

$(0, T]$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \cdot \nabla \phi = (1 - \phi) \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}, \quad (3.2a)$$

sujeito à condição inicial

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi^0(\mathbf{x}). \quad (3.2b)$$

Lembramos que não estamos considerando condição de contorno para o subproblema da porosidade, pois ao discretizá-lo iremos desprezar o termo convectivo da velocidade do sólido.

3.3 Subproblema do transporte

Considerando como incógnita a saturação da água S_w e utilizando a equação de transporte (2.35), obtemos a seguinte formulação

formulação 3.3 Seja Ω um domínio em R^3 com fronteira Γ . Dados os campos $\mathbf{v}_s = \partial \mathbf{u}_s / \partial t$, $\mathbf{V}_{Dt} = -\lambda_w(S_w)K\nabla p$ com o par $\{\mathbf{u}_s, p\}$ solução da formulação 3.1 e $\phi(\mathbf{x}, t)$ solução de 3.2, achar a função $S_w(\mathbf{x}, t)$ com $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T]$ tal que

$$\frac{\partial(S_w \phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(S_w \phi \mathbf{v}_s) + \operatorname{div}(\lambda_w(S_w) \mathbf{V}_{Dt}) = 0 \quad (3.3a)$$

com condição inicial

$$S_w(\mathbf{x}, 0) = S_w^0(\mathbf{x}), \quad (3.3b)$$

e condição de Dirichlet

$$S_w(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}), \quad \text{sobre } \Gamma_D^{S_w} \subset \Gamma. \quad (3.3c)$$

Podemos notar que a ausência de pressão capilar faz com que a equação de transporte (3.3a) seja de natureza hiperbólica. Além disso, a deformação da matriz porosa acrescenta um termo de fluxo devido à convecção da fase sólida e faz com que a porosidade varie com o tempo mantendo-a dentro da derivada parcial no tempo da equação (3.3a).

3.4 Algoritmos de acoplamento

Para cada um dos subsistemas apresentados necessitamos resolver um conjunto das incógnitas do problema original supondo conhecidas as demais. A figura 3.1 ilustra a transferência de informações entre os subsistemas.

Para evoluir no tempo as variáveis do modelo de forma consistente, necessitamos construir um algoritmo de sequenciamento ou “Staggered” entre os subsistemas discretizados a fim de que eles possam comutar suas soluções numéricas. Existem diversas opções para fazer este sequenciamento (Settari e Walters, 1999). Suponhamos, por exemplo, que os valores das variáveis $(\mathbf{V}_{D\mathbf{t}}, p, \mathbf{u}_s, \phi, S_w)$ sejam conhecidas no instante t_n . Poderíamos obter uma aproximação para a saturação no instante t_{n+1} resolvendo o módulo do transporte e considerando os campos $\mathbf{v}_s, \mathbf{V}_{D\mathbf{t}}$ e ϕ relevantes para o transporte ao longo deste intervalo de tempo fixos em t_n . Em seguida, mantendo o novo campo de saturação fixo em t_{n+1} e a porosidade fixa em t_n , poderíamos evoluir p e \mathbf{u}_s utilizando o módulo da Poromecânica e assim sucessivamente.

Diversos algoritmos de sincronismo para modelos de acoplamento hidromecânico têm sido propostos na literatura (Samier et al., 2003). Alguns deles são bem robustos e para um mesmo passo de tempo iteram os módulos diversas vezes mediante um critério de convergência a ser satisfeito. Dependendo do critério de convergência, o grau de precisão pode ser tão grande quanto o de uma formulação totalmente implícita onde todo o sistema é linearizado e iterado conjuntamente para cada passo de tempo. No entanto, é importante ressaltar que quanto maior a precisão numérica desejada, maior é o custo computacional. Geralmente algoritmos

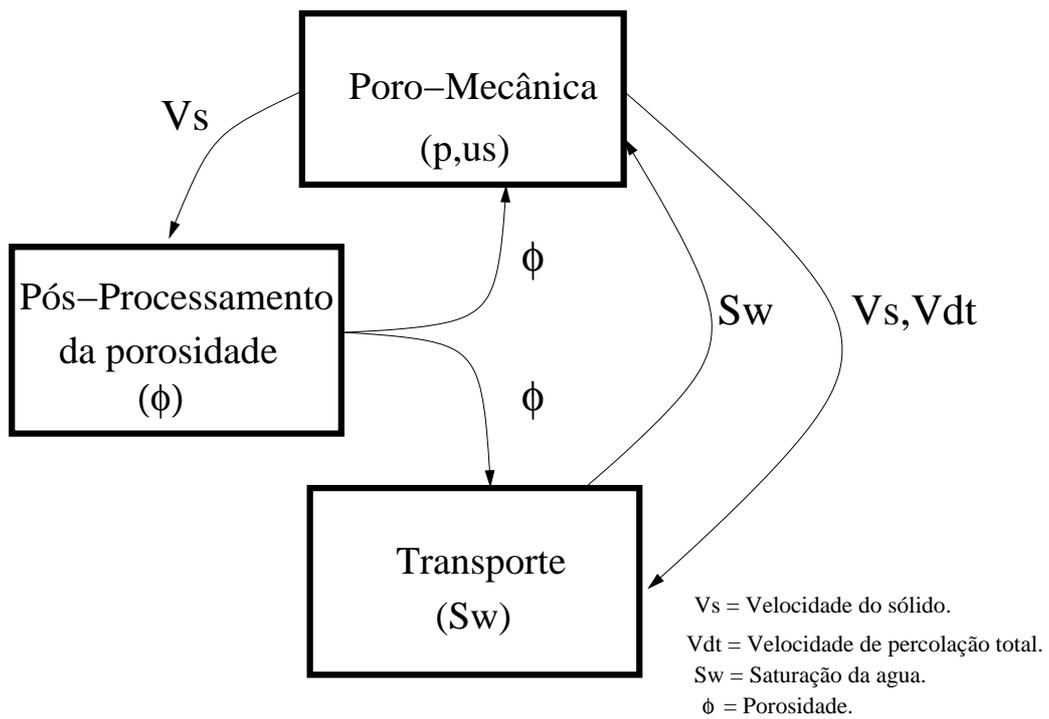


Figura 3.1: Fluxograma da interdependência de variáveis entre os módulos.

robustos e caros computacionalmente são utilizados quando o modelo de acoplamento é decomposto em subsistemas fortemente acoplados, ou seja, uma pequena variação na solução de um módulo acarreta perturbações significativas na solução do outro. Isso ocorre, por exemplo, em alguns modelos onde a pressão dos fluidos está desacoplada da equação de equilíbrio de tensões que rege o deslocamento da matriz porosa (Yale, 2002). Neste caso a Hidrodinâmica é formulada nas pressões parciais e saturações dos fluidos enquanto que o subsistema da Poromecânica se reduz à equação de equilíbrio acoplada às equações constitutivas de elastoplasticidade da matriz porosa. Este tipo de abordagem tem sido comumente empregado devido à comodidade de acoplar simuladores precisos e eficientes previamente desenvolvidos para modelos geomecânicos com simuladores de fluxo em reservatórios (Samier et al., 2003; David e Settari, 2002; Li et al., 2004; Minkoff et al., 2003a; Rahman e Lewis, 1999; Yale, 2002).

A vantagem da implementação do modelo acoplado está no fato da pressão do poro e o deslocamento do sólido serem resolvidos simultaneamente no módulo da Poromecânica. Como a escala de tempo da hidrodinâmica é muito mais rápida do que a da poromecânica, os dois subsistemas são fracamente acoplados podendo ser tratados por algoritmos de sequenciamento simples e eficientes sem o comprometimento da convergência numérica.

Nas seções seguintes apresentamos a discretização de cada um dos subsistemas sem focalizar por enquanto em como os módulos iteragem ao longo do tempo. Posteriormente iremos nos ater aos detalhes de sincronismo entre eles.

3.5 Método numérico para a Poromecânica

No caso particular onde o campo de permeabilidade K independe da porosidade e a função de mobilidade é constante (i.e $\lambda_t(S_w) = 1$), a formulação da Poromecânica 3.1 se reduz à do modelo poroelástico proposto por Biot (1941) para escoamento monofásico o qual já foi discretizado e analisado numericamente por Murad, Thomee, e Loula (1996) no contexto de análise numérica de equa-

ções parabólicas (Thomê, 1997). Seguindo o procedimento usual, discretizamos o subsistema da Poromecânica fazendo uso do método de Galerkin com funções interpolantes lineares na discretização espacial aliado ao esquema de diferenças finitas de Euler implícito no tempo dado pela aproximação

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t_s} (\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t_n)), \quad (3.4)$$

onde $\Delta t_s = t_{n+1} - t_n$ é o passo de tempo do módulo da Poromecânica.

Apresentamos agora a formulação variacional do problema da Poromecânica já discretizado no tempo pelo esquema de Euler regressivo (3.4). Para este fim, adotamos a notação usual dos espaços funcionais. Seja $L^2(\Omega)$ o espaço das funções escalares de quadrado integrável com produto interno e norma dados por

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, d\Omega, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad (3.5)$$

e seja $H^1(\Omega)$ o espaço das funções com derivadas parciais de quadrado integrável com produto interno e norma induzida dados por

$$(f, g)_1 = (f, g) + (\nabla f, \nabla g), \quad \|f\|_1 = \sqrt{(f, f)_1}. \quad (3.6)$$

Denotando por U e V os espaços contendo as funções soluções do problema variacional da poromecânica com

$$U = \{\mathbf{u}_s \in \{H^1(\Omega)\}^3, \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_D^u\},$$

$$V = \{p \in H^1(\Omega), p(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_D^p\},$$

a formulação variacional do problema da poromecânica é dada por

formulação 3.4 Conhecidos os campos $S_w(\mathbf{x}, t)$, $\phi(\mathbf{x}, t)$ e as funções $K(\phi)$, $\lambda_t(S_w)$, $\lambda_w(S_w)$, para cada $t_n = n\Delta t_s$, achar o par de funções $\{\mathbf{u}_s^{n+1}, p^{n+1}\} \in (U \times V)$, tal

que

$$\lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}_s^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{w}) + 2\mu (\nabla^s \mathbf{u}_s^{n+1}, \nabla^s \mathbf{w}) - (\operatorname{div} \mathbf{w}, p^{n+1}) = \int_{\Gamma_N^u} \mathbf{w} H(\mathbf{x}) \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in U, \quad (3.7)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_s^{n+1}, v) + \Delta t_s (\lambda_t(S_w)K(\phi)\nabla p^{n+1}, \nabla v) = (\operatorname{div} \mathbf{u}_s^n, v) - \Delta t_s \int_{\Gamma_N^p} v Q(\mathbf{x}) \, d\Gamma, \quad \forall v \in V, \quad (3.8)$$

com condição inicial

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_s^0, v) = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Observamos que na formulação acima não especificamos o instante de tempo onde os campos S_w , ϕ são avaliados em cada iteração. Tais questões serão posteriormente resolvidas quando introduzirmos o algoritmo de sequenciamento entre os módulos na seção 3.9. Existência e unicidade de solução das equações poroelásticas foram mostradas por Zenisek (1984).

Consideramos agora a aproximação do problema variacional nos subespaços de U e V de dimensão finita. Para este fim, seja M_h uma triangulação do domínio Ω com L elementos Ω_i de diâmetro característico H satisfazendo

$$\bigcup_{i=1}^L \Omega_i = \Omega, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in [1 \dots L], i \neq j$$

e seja $P_h^k(\Omega)$ o espaço das funções polinomiais contínuas por partes de grau k em cada elemento da malha,

$$P_h^k(\Omega) = \{v : v \in C^0(\Omega), v \text{ é um polinômio de grau } k \text{ em } \Omega_i, i = 1 \dots L\}.$$

A partir da família de espaços de funções P_h^k , definimos os subespaços de dimensão finita com funções interpolantes lineares $U_h = (P_h^1 \times P_h^1) \cap U$ e $V_h = P_h^1 \cap V$ obtendo a forma discreta da formulação variacional

formulação 3.5 Conhecidos os campos $S_{wh}(\mathbf{x}, t)$, $\phi_h(\mathbf{x}, t)$ constantes em cada elemento e as funções $K(\phi)$, $\lambda_t(S_w)$, $\lambda_w(S_w)$, para cada $t_n = n\Delta t_s$, achar o par de funções $\{\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\} \in (U_h \times V_h)$ tal que

$$\lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) + 2\mu (\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla^s \mathbf{w}_h) - (\operatorname{div} \mathbf{w}_h, p_h^{n+1}) = \int_{\Gamma_N^u} \mathbf{w}_h H(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w}_h \in U_h,$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}, v_h) + \Delta t_s (\lambda_t(S_{wh})K(\phi_h)\nabla p_h^{n+1}, \nabla v_h) = (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n, v_h) - \Delta t_s \int_{\Gamma_N^p} v_h Q(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \forall v_h \in V_h,$$

com condição inicial

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_h^0, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in P_h^1.$$

Devido à condição inicial de incompressibilidade do subsistema da poromecânica, próximo dos instantes iniciais não ocorre drenagem substancial do fluido intersticial fazendo a rocha apresentar resposta quase incompressível. Consequentemente próximo ao instante inicial o método de Galerkin apresenta oscilações numéricas para o campo de pressão nas primeiras iterações. De fato, no instante $t = 0$ a formulação 3.4 se reduz ao seguinte problema variacional com restrição interna

formulação 3.6 Achar funções $\mathbf{u}_s^0 \in U$, $p^0 \in L^2(\Omega)$ tais que

$$2\mu (\nabla^s \mathbf{u}_s^0, \nabla^s \mathbf{w}) - (\operatorname{div} \mathbf{w}, p^0) = \int_{\Gamma_N^u} \mathbf{w} H(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in U$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_s^0, v) = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

A formulação acima é idêntica à forma fraca do problema de Stokes cuja prova de existência e unicidade de solução requer que os espaços aproximantes satisfaçam as condições do teorema de Babuska-Brezzi (Brezzi, 1974), o que não ocorre para os espaços U^h e V^h utilizados neste trabalho contendo funções interpolantes com mesma ordem de aproximação. De fato, ao resolvermos a formulação 3.6 com tais espaços obtemos oscilações na aproximação do campo de pressão do poro. Tais problemas poderiam ser evitados se adotássemos para os instantes iniciais os elementos de Taylor-Hood (Taylor e Hood, 1973) que aproximam a pressão com uma ordem de convergência a menos em relação ao deslocamento do sólido, ou seja, $U_h = P_h^k \cap U$, $V_h = P_h^l \cap V$ com $k = l + 1$. Entretanto, a utilização dos elementos de Taylor-Hood mostra-se desnecessária, pois através da análise numérica de equações parabólicas Murad, Thomee, e Loula (1996) mostraram que o erro advindo da aproximação dos dados iniciais decai com uma lei de potência do tempo. Consequentemente ocorre um processo de regularização onde o problema de ponto de sela evolui rapidamente para um problema de mínimo fazendo com que a utilização dos espaços aproximantes de mesma ordem gere imprecisões apenas por um curto período de tempo as quais são rapidamente dissipadas sem deterioração da precisão da solução numérica nos instantes subsequentes.

3.6 Pós-processamento para a velocidade de Darcy

Após o cômputo dos campos $\{\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\}$ no instante t_{n+1} pelo método dos Elementos Finitos, podemos obter uma aproximação \mathbf{v}_h^{n+1} para a velocidade de percolação da mistura fluida por meio da expressão

$$\mathbf{v}_h^{n+1} \approx -\lambda_t(S_{wh})K(\phi_h)\nabla p_h^{n+1} \quad (3.11)$$

Como o campo \mathbf{v}_h^{n+1} é obtido a partir do gradiente de $p_h^{n+1} \in P_h^1(\Omega)$, ele é aproximado com menor precisão em relação ao potencial. De fato, a aplicação do método de Galerkin em conjunção com (3.11) para problemas com permeabilidade heterogênea gera campos de velocidades não conservativos (Mose et al., 1994) fazendo com que a lei de conservação de massa total (3.1b) não seja obedecida no nível de cada elemento. Isso nos motiva o desenvolvimento de métodos mais precisos para a computação da velocidade de Darcy.

Uma possível solução para este problema seria adotar uma formulação mista para o subsistema da Poromecânica onde os campos potenciais (\mathbf{u}_s, p) e os fluxos e tensões $(\mathbf{V}_{Dt}, \boldsymbol{\sigma}_{ef})$ são aproximados simultaneamente utilizando os espaços de Raviart-Thomas (RT). Tal técnica gera campos de velocidade conservativos com taxas ótimas de convergência e tem sido utilizada com sucesso em problemas de escoamento bifásico em meios porosos rígidos heterogêneos (Douglas et al., 1997). As aproximações de Raviart-Thomas para o campo de velocidade residem em $H(\text{div}(\Omega))$ que é definido como o espaço das funções vetoriais cujo divergente é de quadrado integrável

$$H(\text{div}(\Omega)) = \{\mathbf{v} \in \{L^2(\Omega)\}^3, \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}, \quad (3.12)$$

com produto interno dado por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div}(\Omega))} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v}). \quad (3.13)$$

Nos espaços RT as interpolações para os campos de velocidade são escolhidas de forma que os graus de liberdade representem o fluxo normal sobre cada uma das arestas dos elementos da malha. No caso de um elemento quadrangular com

lados unitários alinhados com os eixos X , Y , o elemento RT de mais baixa ordem RT^0 possui a seguinte interpolação para o campo de velocidade \mathbf{v}

$$\mathbf{v}(x, y) = \langle (a + b)x - b, (c + d)y - d \rangle, \quad (3.14)$$

onde os coeficientes a , b , c , d representam os fluxos de saída de massa nas arestas dos elementos conforme ilustrado na figura 3.2.

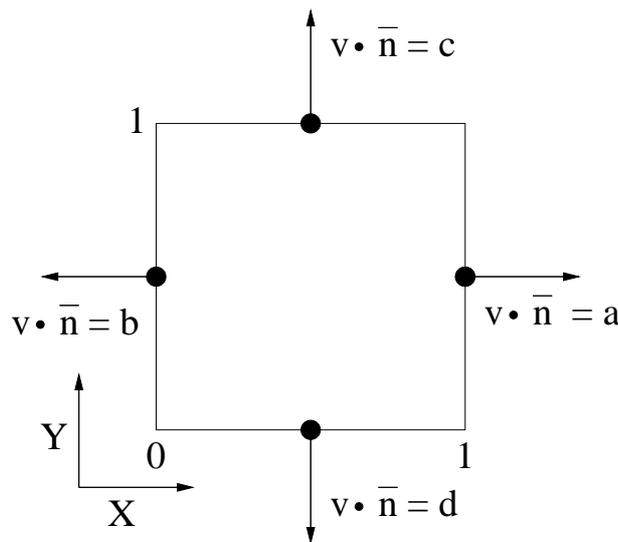


Figura 3.2: Interpolação dos fluxos para o elemento Raviart-Thomas de mais baixa ordem RT^0 .

Os elementos RT são adequados para aproximar campos de velocidade em meios heterogêneos, pois impõem apenas a continuidade da componente normal do campo de velocidades nas arestas dos elementos permitindo que a componente tangencial seja descontínua (Mose et al., 1994). No entanto, em meios deformáveis as interpolações dos espaços de Raviart-Thomas para os campos de tensão e deformação violam a simetria do tensor de tensões sendo necessário o enfraquecimento da imposição de simetria por meio da introdução de multiplicadores de Lagrange (Arnold et al., 2007). Tal fato aliado ao custo computacional envolvido em aproximar os quatro campos $(\mathbf{u}_s, p, \boldsymbol{\sigma}_{ef}, \mathbf{V}_{Dt})$ simultaneamente tornam essa abordagem pouco competitiva.

Neste trabalho, propomos utilizar a técnica de pós-processamento global su-

gerida por Loula et al. (1995), cuja idéia principal é projetar o campo de velocidade de percolação total obtido pela equação (3.11) no espaço das funções de Raviart-Thomas de mais baixa ordem (RT^0). Essa projeção é feita resolvendo o seguinte problema variacional de Petrov-Galerkin

formulação 3.7 Conhecidos os campos $S_{wh}(\mathbf{x}, t)$, $\phi_h(\mathbf{x}, t)$ constantes em nível de cada elemento, as funções reais $K(\phi)$, $\lambda_t(S_w)$, $\lambda_w(S_w)$, o parâmetro de estabilização $\delta > 0$ e o par $\{\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\} \in (U_h \times V_h)$ solução da formulação 3.5, achar $\mathbf{v}_h^{n+1} \in RT^0$ tal que

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_h^{n+1} + \lambda_t(S_{wh})K(\phi_h)\nabla p_h^{n+1}, \boldsymbol{\tau}_h) + \delta \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_h^{n+1} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_h^{n+1}}{\partial t}, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h \right) = 0 \\ \forall \boldsymbol{\tau}_h \in RT^0, \end{aligned} \quad (3.15a)$$

onde a derivada parcial no tempo é aproximada utilizando o esquema (3.4).

O primeiro termo da equação variacional (3.15) garante a igualdade $\mathbf{v}_h^{n+1} = -\lambda_t(S_w)K(\phi)\nabla p_h^{n+1}$ de forma fraca enquanto que o segundo termo impõe uma melhor aproximação para a equação de conservação de massa total (3.1b). O campo \mathbf{v}_h^{n+1} obtido ao resolvermos a formulação variacional (3.7) herda as boas propriedades dos espaços RT^0 com cada uma de suas componentes dadas por polinômios lineares e continuidade assegurada apenas na componente normal às arestas dos elementos. Tais propriedades são de extrema importância na transferência do campo de velocidade para o módulo de transporte a fim de preservar as propriedades de conservação local desejadas na aproximação da saturação. Observamos que o pós-processamento do campo de velocidade diminui consideravelmente o erro da conservação de massa local, porém não o elimina, já que utiliza em seus cálculos um potencial de pressão não conservativo advindo do método de Galerkin.

3.7 Resolução numérica do módulo da porosidade

Ao desprezarmos a convecção induzida pelo movimento da fase sólida, a equação de conservação de massa (3.2a) se reduz à expressão

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1 - \phi) \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \quad (3.16)$$

a qual pode ser integrada diretamente, obtendo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 1 - (1 - \phi^0(\mathbf{x})) \exp(-\operatorname{div} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)). \quad (3.17)$$

Discretizando a equação acima, podemos obter o valor numérico da porosidade a partir do campo de deslocamento do sólido fazendo

$$\phi_h^n = 1 - (1 - \phi_h^0) \exp(-\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n)). \quad (3.18)$$

É importante salientar que na implementação numérica o campo de porosidade é aproximado por funções constantes por partes avaliando a expressão (3.18) nos pontos centrais dos elementos.

3.8 Método numérico para o problema do transporte

Procedemos agora com a discretização da equação de transporte. Para este fim reescrevemos (3.3a) na forma

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(S_w \phi \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\lambda_w(S_w) \mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}) = -S_w \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Dados os campos \mathbf{u}_s , $\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}$, ϕ , temos uma equação hiperbólica não linear na variável S_w . Para tratarmos o termo do lado direito desta equação, propomos aplicar a técnica de decomposição de operadores baseado num esquema de predição

e correção a fim de contabilizarmos separadamente o transporte convectivo da saturação e o termo de reação provocado pelo efeito transiente da porosidade. Este procedimento é feito definindo a seguinte sequência de problemas para cada subintervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$:

formulação 3.8 Conhecidos a condição inicial $S_w^0(\mathbf{x})$ e os campos $\phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) = \partial \mathbf{u}_s / \partial t$, $\mathbf{V}_{Dt}(\mathbf{x}, t) \forall t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \Omega$, resolva para cada subintervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N - 1$ com $t_0 = 0, t_N = T$ os seguintes problemas:

- **Problema Preditor:** Achar $S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1})$, tal que

$$\phi \frac{\partial S_w^*}{\partial t} + \operatorname{div} \left(S_w^* \phi \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\lambda_w(S_w^*) \mathbf{V}_{Dt}) = 0, \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (3.20)$$

sujeito à condição inicial

$$S_w^*(\mathbf{x}, t_n) = S_w^n(\mathbf{x}),$$

e condição de contorno

$$S_w^*(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_D^{S_w}$$

- **Problema Corretor:** Achar $S_w(\mathbf{x}, t_{n+1})$ tal que

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -S_w \frac{\partial \phi}{\partial t}, \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (3.21)$$

sujeito à condição inicial

$$S_w(\mathbf{x}, t_n) = S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1});$$

Com a técnica de decomposição de operadores proposta temos que resolver dois problemas para cada intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$. Na resolução do primeiro problema (3.20) obtemos a predição $S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1})$ da saturação para o instante t_{n+1}

onde negligenciamos o termo de fonte reativo oriundo da variação temporal da porosidade. Em seguida, utilizamos a solução preditora como condição inicial para o problema corretor que evolui novamente a saturação ao longo do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ computando apenas o termo da variação da porosidade.

3.8.1 Discretização do problema corretor

O problema corretor pode ser resolvido analiticamente. Reescrevendo (3.21) da forma

$$\frac{\partial \ln(S_w)}{\partial t} = -\frac{\partial \ln(\phi)}{\partial t}, \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

e integrando no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, obtemos

$$S_w^{n+1} = \phi^n \frac{S_w^n}{\phi^{n+1}}. \quad (3.24)$$

É importante ressaltar que o passo de correção objetiva preservar a fração de volume de água $\theta = \phi S_w$ quando a porosidade varia temporalmente garantindo dessa forma a conservação de massa local.

3.8.2 Discretização do problema preditor

Para apresentar a teoria de aproximação do problema de predição, rephraseamos (3.20) da forma

formulação 3.9 Conhecidos os campos $\phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{u}_s / \partial t$, $\mathbf{V}_{Dt}(\mathbf{x})$ considerados estacionários ao longo do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, achar $S_w^*(\mathbf{x}, t)$ com $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que

$$\phi \frac{\partial S_w^*}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F}(S_w^*) = 0, \quad (3.25a)$$

com o termo de fluxo total dado por

$$\mathbf{F}(S_w^*) = S_w^* \phi \mathbf{v}_s + \lambda_w(S_w^*) \mathbf{V}_{Dt}, \quad (3.25b)$$

com condição inicial

$$S_w^*(\mathbf{x}, t_n) = S_w^n(\mathbf{x})$$

e de contorno

$$S_w^*(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}), \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^{S_w}$$

Na discretização de (3.25a) adotamos o método de volumes finitos de segunda ordem NT proposto por Nessyahu e Tadmor (1990). Para compactar a notação, consideramos que o passo de tempo do NT seja dado por $\Delta t_t = t_{n+1} - t_n$. No entanto, quando apresentarmos o algoritmo de sincronismo entre os módulos, observaremos que o método NT faz uso de passos de tempo bem menores que os do problema corretor devido ao fato da escala de tempo do escoamento ser bem menor que a da Poromecânica.

Seguindo o princípio básico do método de volumes finitos, dividimos o domínio Ω em sub-regiões disjuntas Ω_{ij} tal como ilustrado na figura 3.3 e integramos a equação (3.25a) no tempo e espaço resultando na seguinte lei de conservação em cada sub-região Ω_{ij} :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_{ij}} \phi \frac{\partial S_w^*}{\partial t} + \text{div } \mathbf{F}(S_w^*) \, d\Omega_{ij} \, dt = 0 \quad (3.26)$$

o que implica em

$$\int_{\Omega_{ij}} \phi(\mathbf{x}) S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\Omega_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} \phi(\mathbf{x}) S_w^*(\mathbf{x}, t_n) d\Omega_{ij} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\Omega_{ij}} \mathbf{F}(S_w^*) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma. \quad (3.27)$$

No contexto do esquema NT, as integrais da equação acima são aproximadas numericamente em cada elemento da malha. Denotando por $A(\Omega_{ij})$ a área dos subdomínios da malha, definimos a média $\bar{s}_{ij}(t_n)$ da solução sobre cada uma das células Ω_{ij} como

$$\bar{s}_{ij}(t_n) := \frac{1}{A(\Omega_{ij})} \int_{\Omega_{ij}} S_w^*(\mathbf{x}, t_n) d\Omega_{ij}, \quad (3.28)$$

Conhecidas as médias $\bar{s}_{ij}(t_n)$, o método NT procura evoluir a solução numérica no tempo computando as médias $\bar{s}_{ij}(t_{n+1})$ por meio da equação integral (3.27). Para a obtenção de convergência quadrática, torna-se necessário reconstruir $S_w^*(\mathbf{x}, t_n)$ a partir das médias $\bar{s}_{ij}(t_n)$ fazendo uso das interpolações lineares

$$s_{ij}(\mathbf{x}, t_n) = \bar{s}_{ij}(t_n) + (x - x_i) s'_{ij}(t_n) + (y - y_j) \hat{s}_{ij}(t_n), \quad (x, y) = \mathbf{x} \in \Omega_{ij},$$

onde o par (x_i, y_j) corresponde ao ponto central \mathbf{x}_{ij} da célula Ω_{ij} e os valores $s'_{ij}(t_n), \hat{s}_{ij}(t_n)$ são estimativas numéricas das derivadas de $S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_n)$ nas direções x e y respectivamente. No caso de uma malha retangular uniforme com células de dimensões $h_x \times h_y$ (ver figura 3.3), Nessyahu e Tadmor (1990) propõem as seguintes aproximações

$$s'_{ij}(t_n) = \text{MinMod} \left(\frac{\bar{s}_{i,j} - \bar{s}_{i-1,j}}{h_x}, \frac{\bar{s}_{i+1,j} - \bar{s}_{i,j}}{h_x} \right) \quad (3.29)$$

$$\hat{s}_{ij}(t_n) = \text{MinMod} \left(\frac{\bar{s}_{i,j} - \bar{s}_{i,j-1}}{h_y}, \frac{\bar{s}_{i,j+1} - \bar{s}_{i,j}}{h_y} \right) \quad (3.30)$$

com a função MinMod sendo definida como

$$\text{MinMod}(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \text{Min}(x_i), & \text{se } x_i > 0, \forall i. \\ \text{Max}(x_i), & \text{se } x_i < 0, \forall i. \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases} \quad (3.31)$$

Os esquemas de diferenças finitas com funções limitadoras de inclinação MinMod têm como principal finalidade evitar oscilações numéricas garantindo que o método NT tenha a propriedade de variação totalmente dominada (TVD) conforme provado por Nessyahu e Tadmor (1990). Um método possui variação totalmente dominada quando a variação total TV das sucessivas soluções numéricas $S(x, y, t_n)$ obtidas para cada instante de tempo t_n não cresce, ou seja

$$\text{TV}(S(\mathbf{x}, t_{n+1})) \leq \text{TV}(S(\mathbf{x}, t_n)) \quad (3.32)$$

onde o operador TV para funções em duas dimensões é definido como (Leveque, 2002)

$$\begin{aligned} \text{TV}(S) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} & \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(x + \epsilon, y) - S(x, y)| \, dx dy + \\ & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(x, y + \epsilon) - S(x, y)| \, dx dy \end{aligned} \quad (3.33)$$

A variação total fornece uma medida do quanto o valor da função varia ao longo do domínio. Observamos que quando um método apresenta oscilações, a variação da solução numérica ao longo do tempo aumenta violando a restrição (3.32).

Substituindo a solução S_w^* na equação (3.27) pelas suas interpolantes s_{ij} , temos

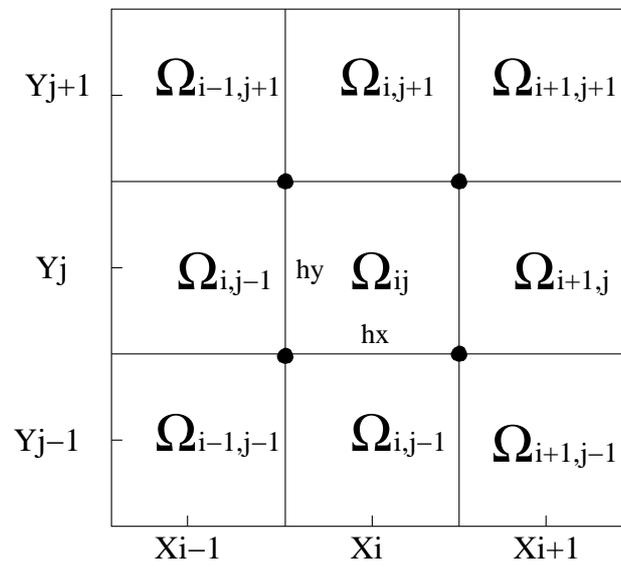


Figura 3.3: Malha Original.

$$\int_{\Omega_{ij}} \phi(\mathbf{x}) s_{ij}(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\Omega_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} \phi(\mathbf{x}) s_{ij}(\mathbf{x}, t_n) d\Omega_{ij} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\Omega_{ij}} \mathbf{F}(s_{ij}(\mathbf{x}, t)) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma dt. \quad (3.34)$$

O primeiro termo do lado direito é facilmente computável, já que temos as expressões analíticas das funções interpolantes $s_{ij}(\mathbf{x}, t_n)$. Por outro lado, o segundo termo envolvendo o fluxo nas fronteiras das células requer uma elaboração mais detalhada, uma vez que as interpolantes s_{ij} são descontínuas nas interfaces entre elementos conforme mostrado na figura 3.4.

Para resolver este problema, Nessyahu e Tadmor (1990) propõem integrar a lei de conservação na malha deslocada conforme ilustrado na figura (3.6). Dessa forma, as discontinuidades das funções interpolantes $s_{ij}(\mathbf{x}, t_n)$ passam a residir nos centros das células, longe dos vértices sobre os quais a função de fluxo é computada. As figuras (3.4), (3.5) ilustram as funções interpolantes na malha original e na malha deslocada para o caso 1D.

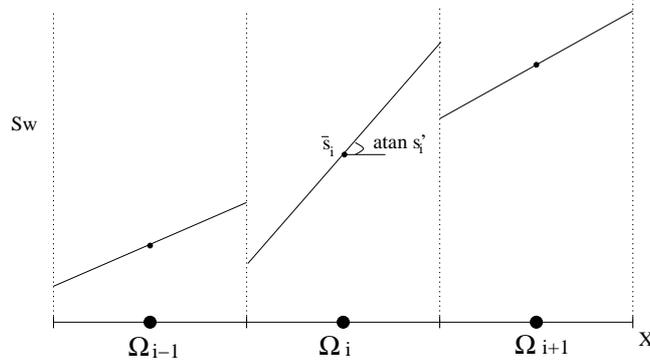


Figura 3.4: Funções interpolantes s_{ij} na malha original (Caso 1D).

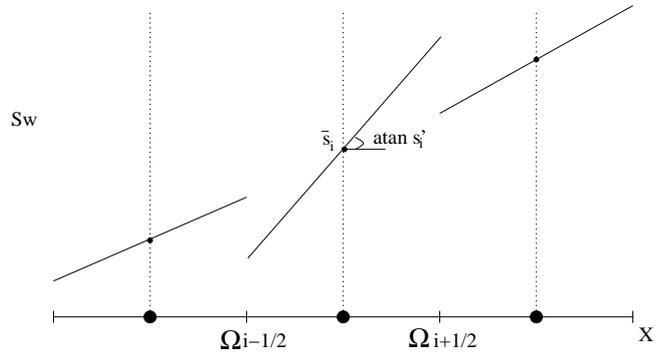


Figura 3.5: Funções interpolantes s_{ij} na malha deslocada (Caso 1D).

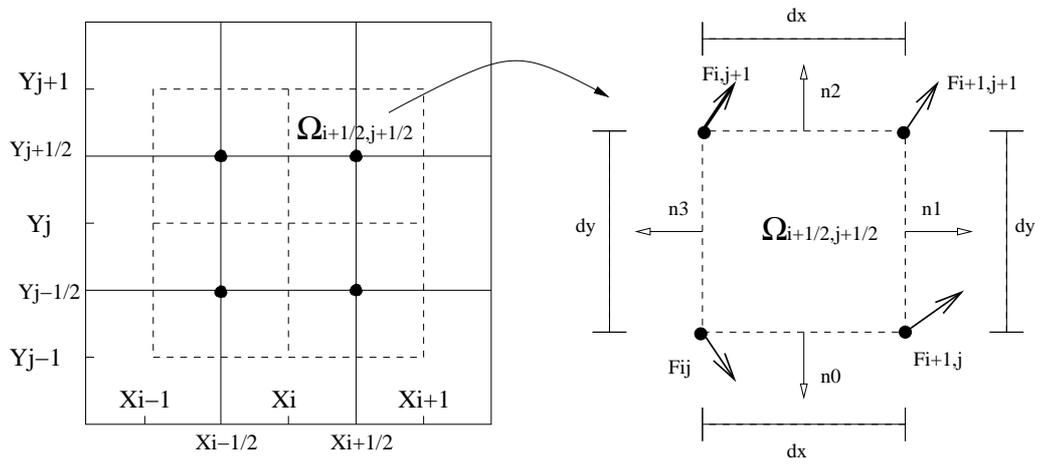


Figura 3.6: Malha original e malha deslocada em tracejado.

Considerando a porosidade constante por partes em cada célula Ω_{ij} e resolvendo as integrais da equação (3.34) para os elementos da malha deslocada, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(t_{n+1})\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{A(\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \cap \Omega_{ij}} \phi_{ij} s_{ij}(\mathbf{x}, t_n) d\Omega + \\
&\frac{1}{A(\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \cap \Omega_{i+1,j}} \phi_{i+1,j} s_{i+1,j}(\mathbf{x}, t_n) d\Omega + \\
&\frac{1}{A(\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \cap \Omega_{i+1,j+1}} \phi_{i+1,j+1} s_{i+1,j+1}(\mathbf{x}, t_n) d\Omega + \\
&\frac{1}{A(\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})} \int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \cap \Omega_{i,j+1}} \phi_{i,j+1} s_{i,j+1}(\mathbf{x}, t_n) d\Omega - \\
&\frac{1}{A(\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(S_w^*) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma dt \quad (3.35)
\end{aligned}$$

com

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{ij} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}}{4} \quad (3.36)$$

Para aproximarmos com ordem quadrática o último termo de (3.35), utilizamos a regra do ponto médio para a integral do tempo e interpolação linear do fluxo avaliado nos vértices para a integral de superfície. No caso da malha homogênea retangular da figura (3.6), chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(S_w^*(\mathbf{x}, t)) \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma \, dt \approx \\
& \Delta t_t \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F} \left(S_w^* \left(\mathbf{x}, t_{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma \approx \\
& \Delta t_t h_y \frac{1}{2} \left(F_1 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{i+1,j}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) + F_1 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{i+1,j+1}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) \right) \\
& - \Delta t_t h_y \frac{1}{2} \left(F_1 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) + F_1 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{i,j+1}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) \right) \\
& + \Delta t_t h_x \frac{1}{2} \left(F_2 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{i+1,j+1}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) + F_2 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{i,j+1}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) \right) \\
& - \Delta t_t h_x \frac{1}{2} \left(F_2 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) + F_2 \left(S_w^*(\mathbf{x}_{i+1,j}, t_{n+\frac{1}{2}}) \right) \right), \tag{3.37}
\end{aligned}$$

onde as funções F_1 e F_2 denotam as duas componentes do vetor de fluxo \mathbf{F} e $\Delta t_t = t_{n+1} - t_n$, o passo de tempo. Para conseguirmos estimar a função de fluxo no instante $t_{n+\frac{1}{2}}$, precisamos de uma aproximação para o valor da saturação $S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_{n+\frac{1}{2}})$ para cada ponto central \mathbf{x}_{ij} da malha original. Para isso, expandimos S_w^* em série de Taylor em torno do instante t_n obtendo

$$S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_n) + \frac{\Delta t_t}{2} \frac{\partial S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_n)}{\partial t}, \tag{3.38}$$

e utilizamos a equação (3.25a) para eliminar o último termo do lado direito resultando na expressão

$$S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_n) - \frac{\Delta t_t}{2\phi_{ij}} \operatorname{div} \mathbf{F}(S_w^*(\mathbf{x}_{ij}, t_n)). \tag{3.39}$$

Finalmente, substituindo S_w^* pelas funções interpolantes s_{ij} na equação (3.39) obtemos a predição

$$\bar{s}_{ij}(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \bar{s}_{ij}(t_n) - \frac{\Delta t_t}{2\phi_{ij}} (F_1'(\bar{s}_{ij}(t_n)) + F_2'(\bar{s}_{ij}(t_n))). \tag{3.40}$$

As derivadas F_1' , F_2' nas direções x e y respectivamente são avaliadas nos pontos centrais \mathbf{x}_{ij} da malha original utilizando o mesmo esquema MinMod descrito

pelas equações (3.29),(3.30). É importante notarmos que a expansão em série de Taylor necessita de regularidade da solução numérica nos vértices das células. Essa é a principal razão pela qual integramos a lei de conservação na malha deslocada.

3.8.3 Etapa de projeção

As equações (3.35),(3.37) e (3.40) nos permitem calcular a média da solução numérica $\bar{s}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(t_{n+1})$ nas células da malha deslocada. Para projetar estes valores para a malha original construímos as interpolantes $s_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(t_{n+1})$ utilizando as equações (3.8.2),(3.29)(3.30) e, em seguida, calculamos a média dessas funções sobre as células da malha original, isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{ij}} \phi_{ij} s_{ij}(x, y, t_{n+1}) d\Omega &= A(\Omega_{ij}) \phi_{ij} \bar{s}_{ij}(t_{n+1}) = & (3.41) \\ & \int_{\Omega_{ij} \cap \Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \phi_{ij} s_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\Omega + \\ & \int_{\Omega_{ij} \cap \Omega_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \phi_{ij} s_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\Omega + \\ & \int_{\Omega_{ij} \cap \Omega_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \phi_{ij} s_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\Omega + \\ & \int_{\Omega_{ij} \cap \Omega_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \phi_{ij} s_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\Omega. \end{aligned}$$

De posse das médias $\bar{s}_{ij}(t_{n+1})$, reconstruímos novamente as interpolantes $s_{ij}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ sobre a malha original e repetimos todo o processo descrito acima para os próximos passos de tempo.

3.8.4 Equação de diferenças finitas resultante

No caso de uma malha retangular uniforme alinhada com os eixos coordenados, o método NT resulta no seguinte esquema de predição e correção com as duas componentes do vetor de fluxo dadas por $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{ij}, t_n) := \langle F_{1ij}(t_n), F_{2ij}(t_n) \rangle$.

Predição:

$$\bar{s}_{ij} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \bar{s}_{ij}(t_n) - \frac{\Delta t_t}{2\phi_{ij}} (F'_{1ij}(t_n) + F\grave{2}_{ij}(t_n))$$

$$\mathbf{F}_{ij} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \bar{s}_{ij} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) \phi_{ij} \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_{ij}) + \lambda_w \left(\bar{s}_{ij} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}(\mathbf{x}_{ij}),$$

$$s'_{ij}(t_n) = \text{MinMod} \left(\frac{\bar{s}_{ij} - \bar{s}_{i-1,j}}{h_x}, \frac{\bar{s}_{i+1,j} - \bar{s}_{ij}}{h_x} \right),$$

$$\hat{s}_{ij}(t_n) = \text{MinMod} \left(\frac{\bar{s}_{ij} - \bar{s}_{i,j-1}}{h_y}, \frac{\bar{s}_{i,j+1} - \bar{s}_{ij}}{h_y} \right).$$

$$F'_{1ij}(t_n) = \text{MinMod} \left(\frac{\mathbf{F}_{1,ij}(t_n) - \mathbf{F}_{1,i-1,j}(t_n)}{h_x}, \frac{\mathbf{F}_{1,i+1,j}(t_n) - \mathbf{F}_{1,ij}(t_n)}{h_x} \right)$$

$$F\grave{2}_{ij}(t_n) = \text{MinMod} \left(\frac{\mathbf{F}_{2,ij}(t_n) - \mathbf{F}_{2,i,j-1}(t_n)}{h_y}, \frac{\mathbf{F}_{2,i,j+1}(t_n) - \mathbf{F}_{2,ij}(t_n)}{h_y} \right)$$

Correção:

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(t_{n+1})\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \phi_{ij} \left(\frac{\bar{s}_{ij}}{4} + \frac{s'_{ij}}{16}h_x + \frac{\dot{s}_{ij}}{16}h_y \right) + \\
&\phi_{i+1,j} \left(\frac{\bar{s}_{i+1,j}}{4} - \frac{s'_{i+1,j}}{16}h_x + \frac{\dot{s}_{i+1,j}}{16}h_y \right) + \\
&\phi_{i+1,j+1} \left(\frac{\bar{s}_{i+1,j+1}}{4} - \frac{s'_{i+1,j+1}}{16}h_x - \frac{\dot{s}_{i+1,j+1}}{16}h_y \right) + \\
&\phi_{i,j+1} \left(\frac{\bar{s}_{i,j+1}}{4} + \frac{s'_{i,j+1}}{16}h_x - \frac{\dot{s}_{i,j+1}}{16}h_y \right) - \\
&\frac{\Delta t}{2h_x} \left[\mathbf{F}_{1,i+1,j+1} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{F}_{1,i+1,j} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) - \right. \\
&\quad \left. \mathbf{F}_{1,i,j+1} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) - \mathbf{F}_{1,ij} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) \right] + \\
&\frac{\Delta t}{2h_y} \left[\mathbf{F}_{2,i+1,j+1} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{F}_{2,i,j+1} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) - \right. \\
&\quad \left. \mathbf{F}_{2,ij} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) - \mathbf{F}_{2,i+1,j} \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Projeção:

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{ij}(t_{n+1}) &= \left(\frac{\bar{s}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{s'_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{16}h_x + \frac{\dot{s}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{16}h_y \right) + \\
&\left(\frac{\bar{s}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{4} + \frac{s'_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{16}h_x - \frac{\dot{s}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{16}h_y \right) + \\
&\left(\frac{\bar{s}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{4} - \frac{s'_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{16}h_x + \frac{\dot{s}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{16}h_y \right) + \\
&\left(\frac{\bar{s}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{4} - \frac{s'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{16}h_x - \frac{\dot{s}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{16}h_y \right).
\end{aligned}$$

3.8.5 Tratamento numérico das condições de fronteira

As células na fronteira do domínio são tratadas utilizando casos especiais das equações descritas acima. A malha deslocada possui 8 tipos de célula de fronteira ilustrada na figura 3.7. Em linhas gerais, a conservação de massa é realizada da mesma forma que as demais células localizadas no interior do domínio. A única diferença é que as derivadas tanto para as interpolantes s_{ij} quanto para o fluxo

são calculadas utilizando somente valores no interior do domínio. Por exemplo, para a célula de tipo $T6$ de centro $(x_{i+\frac{5}{4}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ (ver figura 3.7), temos as seguintes aproximações na etapa de projeção

$$s'_{i+\frac{5}{4}, j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\bar{s}_{i+\frac{5}{4}, j+\frac{1}{2}} - \bar{s}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{3/4 h_x} \right),$$

$$\hat{s}_{i+\frac{5}{4}, j+\frac{1}{2}} = \text{MinMod} \left(\frac{\bar{s}_{i+\frac{5}{4}, j+\frac{5}{4}} - \bar{s}_{i+\frac{5}{4}, j+\frac{1}{2}}}{3/4 h_y}, \frac{\bar{s}_{i+\frac{5}{4}, j+\frac{1}{2}} - \bar{s}_{i+\frac{5}{4}, j-\frac{1}{2}}}{h_y}, \right)$$

A exceção ocorre nas células localizadas na fronteira de entrada de fluxo. Neste caso, as condições de contorno da saturação são utilizadas para o cálculo das derivadas s'_{ij} e \hat{s}_{ij} , lembrando que não há necessidade do cálculo do divergente do fluxo para estimar o valor $\bar{s}_{ij}(t_{n+\frac{1}{2}})$ nas bordas onde prescrevemos a saturação, pois esta é mantida constante no tempo. Para maiores explicações, recomendamos a tese de doutorado de Abreu (2007) a qual discute em detalhes o tratamento das células de fronteira bem como a adaptação do método para campos de porosidade variáveis espacialmente.

3.8.6 Resultados da análise numérica

Nessyahu e Tadmor (1990) provam que o método NT é consistente e estável com ordem de convergência quadrática desde que o adimensional CFL obedeça a restrição,

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t_t}{H} \text{Max} \left(\frac{\|\nabla \mathbf{F}_{ij}\|}{\phi_{ij}} \right) \leq 0.5 \quad \forall \Omega_{ij} \subset \Omega. \quad (3.42)$$

onde H é o diâmetro interno da célula Ω_{ij} .

A principal desvantagem do método NT é a sua excessiva difusão numérica proporcional à razão $\frac{H}{\Delta t_t}$. Por outro lado, é um método barato computacional-

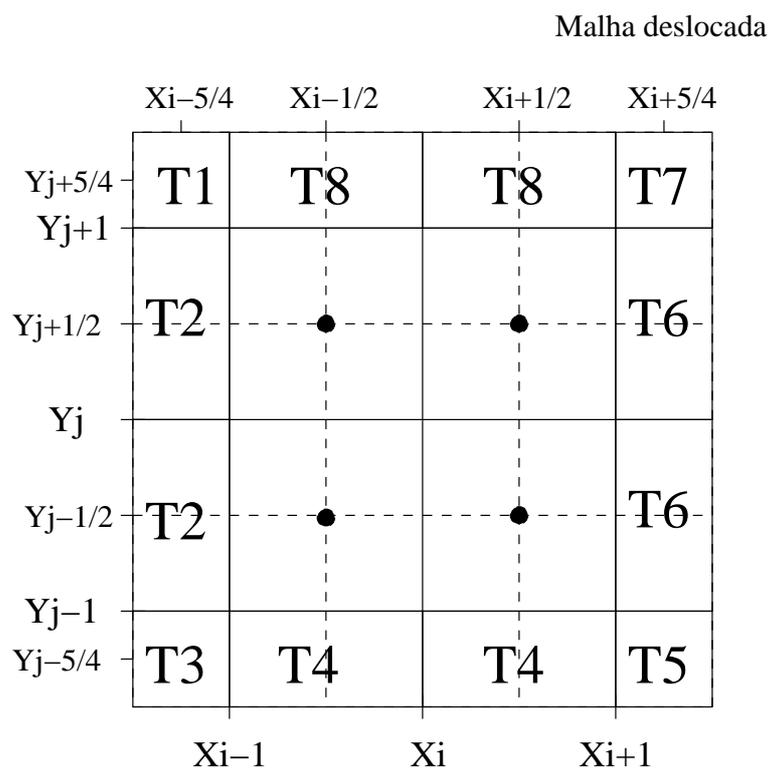


Figura 3.7: Células de fronteira na malha deslocada considerando uma malha original de 3×3 elementos.

mente e converge para a solução física do problema. Tal propriedade é de suma importância, pois as equações hiperbólicas podem apresentar mais de uma solução fraca fazendo com que métodos consistentes possam convergir para soluções variacionais que não descrevem a física correta do problema. A condição extra que restringe a solução do problema hiperbólico de forma a identificar a solução variacional correta é chamada de condição de entropia. Uma forma comumente utilizada para a verificação da condição de entropia é impor que a solução seja o limite do problema de convecção-difusão não linear

$$\lim_{D \rightarrow 0} \left(\phi \frac{\partial S_w^*}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{F}(S_w)) - D \operatorname{div} (\nabla S_w^*) = 0 \right). \quad (3.43)$$

As soluções aproximadas de métodos que apresentam difusão numérica tais como o método Lax-Friedrichs e a sua extensão de ordem mais alta, o NT, convergem para o limite da equação (3.43). Leveque (2002) mostra que a difusão artificial do método Lax-Friedrichs tende a zero à medida que a malha é refinada fazendo com que as soluções numéricas converjam para o limite em (3.43). Portanto, se por um lado a difusão artificial faz com que as soluções exibam excessiva difusão, por outro, ela garante a convergência do método para a solução entrópica. A prova da satisfação da condição de entropia (3.43) do método NT é discutida em Nessyahu e Tadmor (1990).

3.9 Algoritmo de sincronismo entre os módulos

Exceto para o primeiro passo de tempo, o sincronismo entre os módulos apresentados anteriormente é dado pelo seguinte algoritmo

algoritmo 3.1 :

(1) Para $n = 1 \dots N - 1$:

(a) Resolva o problema preditor do módulo de Transporte obtendo $S_w^*(x, t_{n+1})$

a partir de $S_w(x, t_n)$, $\phi(x, t_n)$, $\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}(x, t_n)$ e $\mathbf{v}_s(x, t_n)$.

- (b) Resolva o módulo da Poromecânica obtendo $\mathbf{u}_s(x, t_{n+1})$ e $p(x, t_{n+1})$ conhecidos $\mathbf{u}_s(x, t_n)$, $S_w^*(x, t_{n+1})$ e o valor da porosidade extrapolado para o tempo t_{n+1} definido como $\phi^E(x, t_{n+1}) \equiv 2\phi(x, t_n) - \phi(x, t_{n-1})$.
- (c) Resolva o módulo do Pós-Processamento para a velocidade de Darcy obtendo $\mathbf{V}_{\mathbf{Dt}}(x, t_{n+1})$ a partir de $\mathbf{u}_s(x, t_{n+1})$, $\mathbf{u}_s(x, t_n)$ e $p(x, t_{n+1})$.
- (d) Resolva o módulo de Porosidade obtendo $\phi(x, t_{n+1})$, conhecido $\text{div } \mathbf{u}_s(x, t_{n+1})$.
- (e) Resolva o problema corretor do módulo de Transporte obtendo $S_w(x, t_{n+1})$, conhecidos $S_w^*(x, t_{n+1})$ e $\phi(x, t_{n+1})$.

Podemos observar pelo algoritmo proposto acima que o módulo da saturação avança primeiramente no tempo. A razão para isso é meramente técnica e baseia-se no fato do método numérico para o transporte ser explícito enquanto que o da Poromecânica é implícito no tempo. Como a escala de tempo associada à deformação é consideravelmente maior quando comparada a do transporte, adotamos passos de tempo diferentes para os dois processos, isto é, $\Delta t_s > \Delta t_t$.

Uma peculiaridade não contemplada no algoritmo ocorre no primeiro passo de tempo onde não conhecemos os campos de velocidades necessários para o módulo do transporte já que a condição inicial da poromecânica é dada somente pela restrição de incompressibilidade $\text{div } \mathbf{u}_s(x, 0) = 0$. Por isso, apenas no instante inicial, evoluímos primeiro o módulo da Poromecânica.

É importante ressaltar que a não linearidade na lei de Kozeny-Karman é linearizada tomando o valor de ϕ extrapolado, não existindo no algoritmo de sequenciamento nenhum controle de convergência entre os subsistemas da poromecânica e da porosidade. Tal procedimento é econômico computacionalmente e justificado pelas pequenas variações da permeabilidade com a porosidade. O fraco acoplamento entre os dois subsistemas é constatado utilizando um esquema de sequenciamento mais robusto através da técnica de ponto fixo ou de Picard onde se verifica convergência logo nas primeiras iterações.

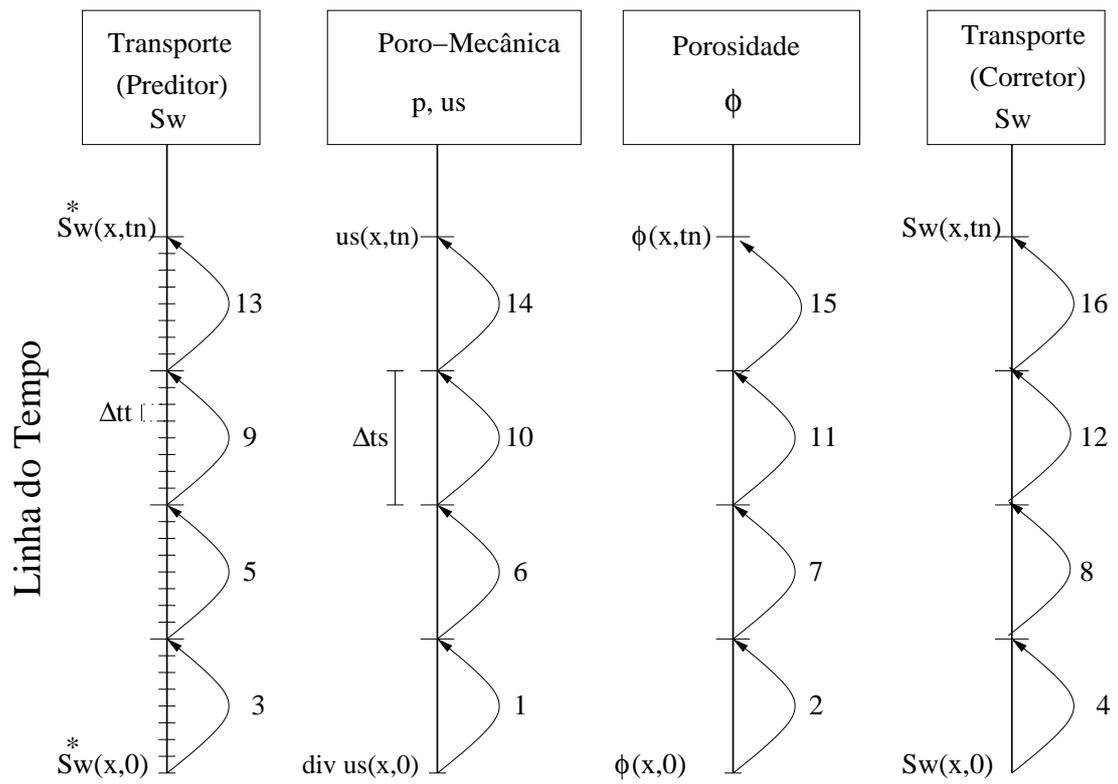


Figura 3.8: Sincronismo entre os módulos.

Capítulo 4

Simulações computacionais

Neste capítulo validamos e analisamos os resultados obtidos com a metodologia numérica proposta através de simulações computacionais de problemas de recuperação secundária de petróleo. Inicialmente analisamos a robustez e acurácia das discretizações independentes dos módulos da Poromecânica e do transporte comparando as soluções numéricas obtidas com soluções analíticas em problemas unidimensionais em geologias homogêneas. Em seguida procedemos à simulação computacional do modelo hidromecânico acoplado em meios homogêneos e heterogêneos focando principalmente o comportamento das curvas de produção de óleo. Finalmente apresentamos testes numéricos ilustrando a importância do pós-processamento dos campos de velocidade para a conservação de massa local.

4.1 Teste unidimensional da Poromecânica

Dando início a validação das implementações numéricas dos subsistemas desacoplados, resolvemos numericamente um problema clássico de adensamento unidimensional em um meio poro-elástico saturado ($S_w = 1$). Tal como ilustrado na figura 4.1, o problema consiste de um reservatório saturado por um único fluido com fronteiras Γ_d , Γ_i , Γ_s impermeáveis e rígidas. Na fronteira Γ_e , o reservatório é submetido a uma condição de carregamento de Neumann e a pressão do poro encontra-se conectada com a pressão atmosférica assumida zero por conveniência. A forma variacional do problema pode ser vista como um caso particular da

formulação 3.5 da Poromecânica considerando $\lambda_t(S_w)K(\phi) = K_0$ constante, com condições de contorno

$$\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \bar{\mathbf{n}} = -\bar{\mathbf{n}}, \quad p = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_e, \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{t12} = u_{s2} = 0, \quad -K_0 \nabla p \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_s, \Gamma_i, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}_s = 0, \quad -K_0 \nabla p \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_d, \quad (4.3)$$

onde u_{s2} denota a componente vertical do deslocamento, $\boldsymbol{\sigma}_{t12}$ é a tensão cizalhante e a condição inicial é dada por

$$\text{div } \mathbf{u}_s = 0. \quad (4.4)$$

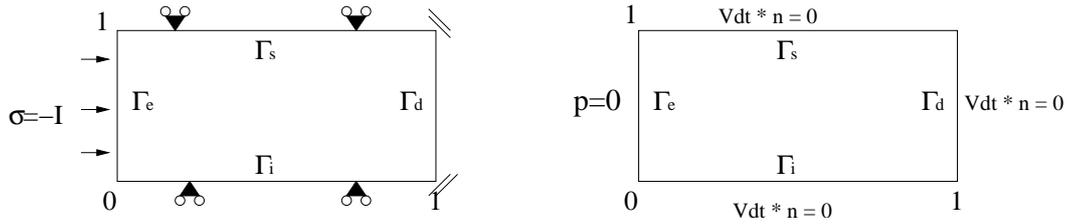


Figura 4.1: Condições de contorno para o problema de poroelasticidade linear monofásico.

Inicialmente o fluido encontra-se confinado com estado de tensões uniforme que equilibra o carregamento aplicado sobre a fronteira do reservatório. Como as fases sólida e fluida são microscopicamente incompressíveis e o problema é unidimensional com ausência de tensões de cisalhamento, inicialmente a deformação do meio é nula. No instante $t = 0$ é aberto um poço em Γ_e o qual é modelado prescrevendo pressão nula na borda Γ_e . A diferença de pressão entre o poço e o reservatório ocasiona a drenagem do fluido acompanhada pela dissipação da poro pressão e gradual compactação da matriz porosa.

Neste exemplo o problema de Biot se reduz ao clássico problema de Terzaghi onde a pressão do poro é governada pela equação de Poisson tendo como solução

adimensional a série (Murad e Loula, 1994)

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{L} \sin(L * x) e^{-L^2(\lambda+2\mu)Kt} \quad (4.5)$$

$$L = \pi(2n + 1)/2. \quad (4.6)$$

A figura 4.2 mostra os gráficos das soluções unidimensionais numérica e analítica para a poro pressão em alguns instantes de tempo, utilizando uma malha de 32×32 elementos bilineares com $\mu = 1$, $\lambda = 0$, $K_0 = 1$ ao longo do eixo $Y = 0.5$.

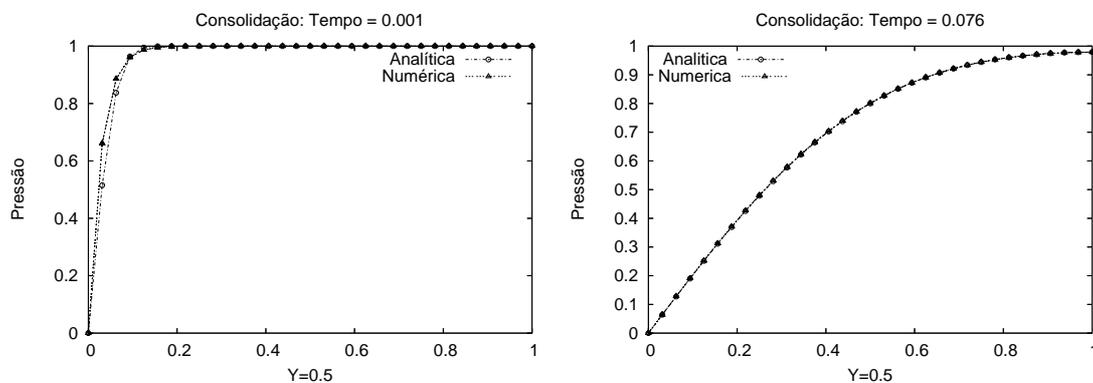


Figura 4.2: Teste unidimensional da Póro-Mecânica.

Podemos observar a presença de uma camada limite próxima ao poço a qual é dissipada gradualmente. Este processo de regularização evolutiva é típico de equações parabólicas.

4.2 Teste unidimensional do Transporte

Para ilustrar a performance do método NT consideramos o problema unidimensional de Buckley-Leverett que pode ser visto como um caso particular da equação de transporte (3.3a). O problema consiste na injeção de água na fronteira de um reservatório composto por uma matriz porosa rígida e inicialmente saturada por óleo em que a velocidade de percolação total é assumida unitária e orientada

dimensão do domínio:	$[0, 1] \times [0, 1]$
porosidade :	$\phi = 0.25$
saturação inicial:	$S_w(x, 0) = 0$
condição inicial:	$S_w(x, t) = 1$ sobre Γ_e .
velocidade do sólido:	$\mathbf{v}_s = 0$
velocidade de percolação:	$\mathbf{V}_{Dt} = \{1, 0\}$
mobibilidade da água:	$\lambda_w(S_w) = \frac{S_w^2}{(1-S_w)^2 + S_w^2}$

Tabela 4.1: Dados adimensionais do problema.

na direção do eixo X. A forma unidimensional da equação de transporte para meio poroso rígido é dada por

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \lambda'_w(S_w) \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0. \quad (4.7)$$

Os parâmetros de entrada do problema e as condições de contorno são apresentados na tabela 4.1 e na figura 4.3 respectivamente.

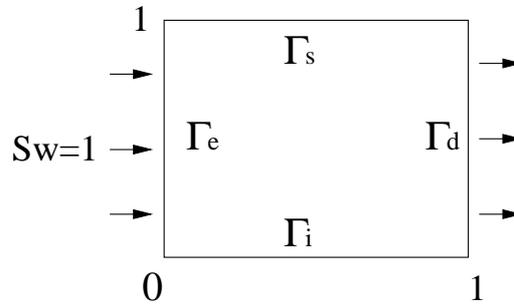


Figura 4.3: Condições de contorno para o problema de Buckley-Leverett.

A equação (4.7) conjuntamente com as condições inicial e de contorno definem um problema de Riemann não linear cuja solução $S_w(x, t)$ consiste de uma frente de choque seguida por uma onda de rarefação representada parametricamente em cada instante de tempo t da forma (Leveque, 2002):

$$r(\tau) = \langle x(\tau), S_w(\tau) \rangle, \tau \in [0, 1]$$

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda_t(\tau)}{\phi} t & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right] \\ x(\sqrt{2}/2) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$S_w(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A figura 4.4 ilustra a comparação entre as soluções analíticas e as obtidas com o método NT. Na simulação numérica utilizamos uma malha uniforme de 32×32 elementos e um passo de tempo satisfazendo a condição $CFL = 0.45$.

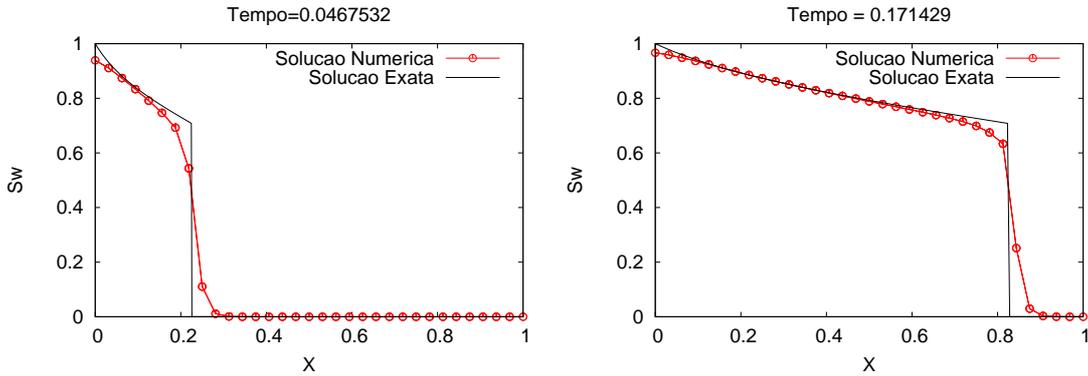


Figura 4.4: Teste unidimensional do transporte.

O método NT aproxima com ordem de convergência quadrática a onda de rarefação e captura corretamente a região de choque sem apresentar oscilações numéricas. Como o NT é um método conservativo, observamos que as áreas sobre o gráfico das soluções numérica e analítica são idênticas. Tais características aliadas ao baixo custo computacional tornam esse método uma opção bastante competitiva na discretização de equações hiperbólicas. No entanto, o método NT exhibe difusão artificial inversamente proporcional ao valor do CFL numérico definido pela equa-

ção (3.42). A figura 4.5 mostra um experimento numérico para o mesmo problema unidimensional numa malha de 32×32 elementos utilizando um passo de tempo mais refinado de forma que o valor CFL seja ≤ 0.1 .

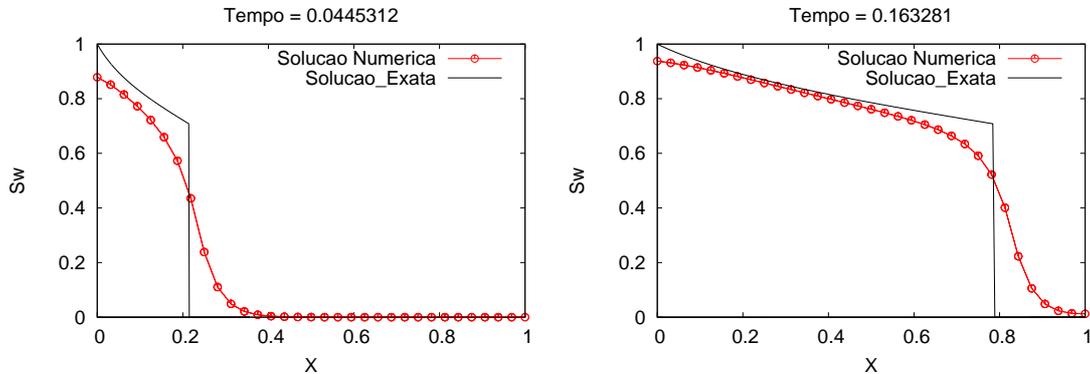


Figura 4.5: Sensibilidade da solução numérica com o refinamento do passo de tempo.

Podemos constatar uma excessiva suavização da solução numérica nas proximidades do choque decorrente do aumento da difusão artificial. Dessa forma, a acurácia do método NT é fortemente dependente do compromisso entre o grau de refinamento das discretizações espaciais e temporais que devem ser ajustados para que o valor do CFL seja ≤ 0.5 , a fim de garantir a estabilidade do método, porém suficientemente próximo deste limite de forma a não aumentar excessivamente a difusão numérica.

4.3 Simulação numérica da equação de transporte com variação espacial da porosidade

Ainda analisando a performance do método NT consideramos o mesmo problema anterior porém com distribuição de porosidade constante em subdomínios quadrangulares (figura 4.6). As curvas da saturação S_w obtida com o método NT para dois instantes de tempo distintos são apresentados na figura 4.7.

0	$\phi = 0.25$	$\phi = 0.5$	1
$\phi = 0.5$	$\phi = 0.25$	$\phi = 0.5$	1

Figura 4.6: Distribuição da porosidade no domínio.

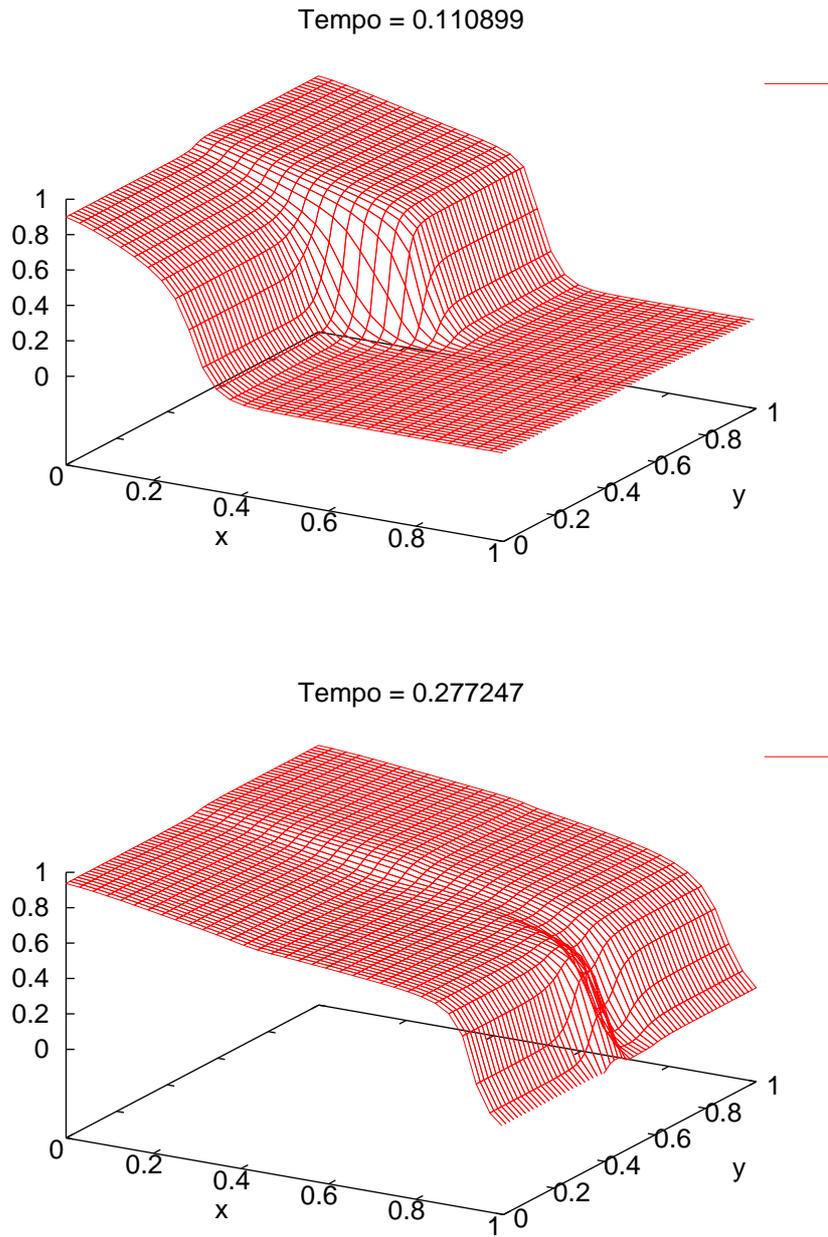


Figura 4.7: Solução numérica para o campo de saturação S_w para porosidade constante por partes em subdomínios quadrangulares.

As regiões de porosidade menor são aquelas onde o meio poroso exibe menor capacidade de retenção de fluido e, conseqüentemente, os efeitos convectivos são mais acentuados. Matematicamente o efeito da porosidade sobre a solução exata consiste em aumentar a velocidade de propagação do choque por um fator de $\frac{1}{\phi}$ sem modificar o tamanho do salto. De fato, pela solução numérica ilustrada na figura 4.7, constatamos que inicialmente a velocidade de choque na metade superior do reservatório ($y > 0.5$) é o dobro da velocidade ao longo da metade inferior ($y < 0.5$), porém quando as frentes de onda atravessam a metade do reservatório, os valores das velocidades de choque são trocados, fazendo com que ambas as frentes de onda cheguem juntas à borda direita do domínio (ver figura 4.7). É importante ressaltar que o problema de transporte não está acoplado com o subsistema Geomecânico de modo que a velocidade de percolação é considerada constante ($\mathbf{V}_{Dt} = \{1, 0\}$). Entretanto no caso de meios deformáveis, onde fazemos uso de relações de Kozeny-Carman, os efeitos da porosidade são contrabalanceados pelo decréscimo da velocidade de percolação resultante do fato das regiões com baixa porosidade estarem associadas a coeficientes de permeabilidade menores. Também na figura 4.7 podemos observar que, apesar da velocidade \mathbf{V}_{Dt} ser longitudinal, há um pequeno fluxo de água da metade superior do reservatório para a metade inferior devido à difusão artificial do método NT.

Para analisarmos a acurácia do método NT, as figuras 4.8 e 4.9 ilustram as soluções analíticas e numéricas ao longo das retas $Y = 0.75$ e $Y = 0.25$. As soluções analíticas são obtidas a partir da regra das áreas iguais (Leveque, 2002), sendo descritas parametricamente pelas equações

$$r^1(\tau) = \langle x(\tau), S_w(\tau) \rangle, \quad \tau \in [0, 1]$$

$$S_w(\tau) = \begin{cases} \tau, & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.25}t, & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.25}t < 0.5 \\ \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.5}t + 0.25, & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.25}t \geq 0.5 \\ x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$r^2(\tau) = \langle x(\tau), S_w(\tau) \rangle, \quad \tau \in [0, 1]$$

$$S_w(t) = \begin{cases} \tau, & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.5}t & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.5}t < 0.5 \\ \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.25}t - 0.5 & \text{para } \tau \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \frac{\lambda'_t(\tau)}{0.5}t \geq 0.5 \\ x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

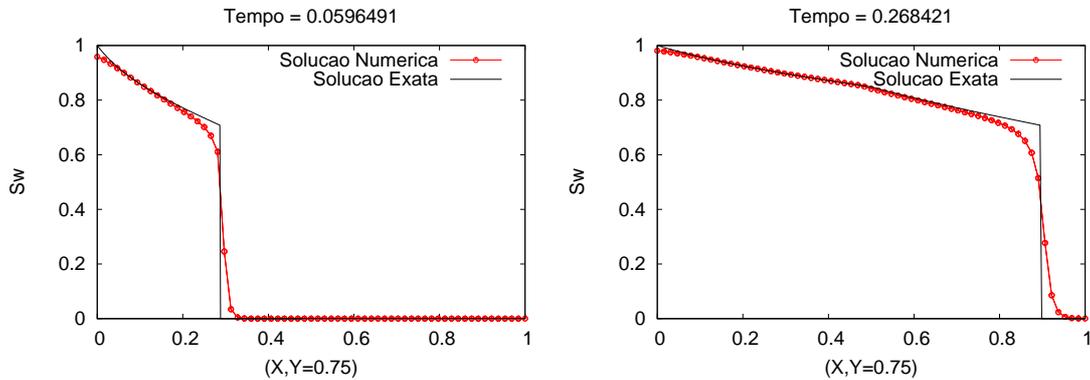


Figura 4.8: Soluções numéricas e analíticas ao longo dos eixos $Y=0.75$.

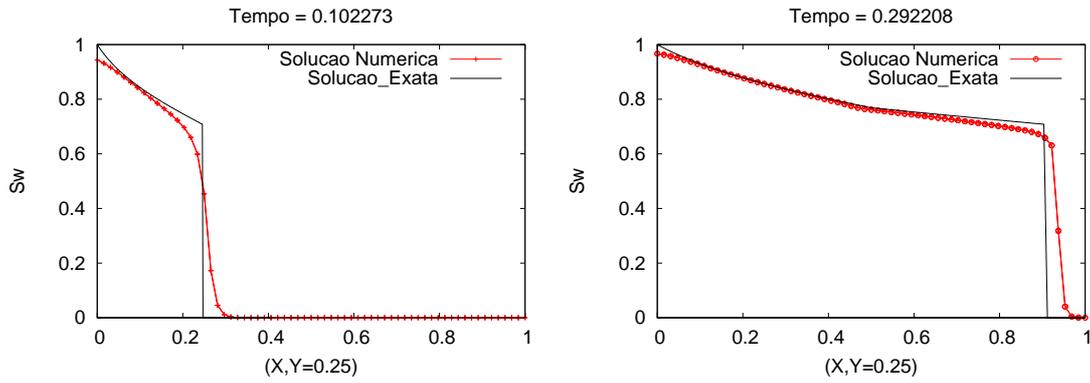


Figura 4.9: Soluções numéricas e analíticas ao longo do eixo $Y=0.25$.

Na simulação numérica, adotamos uma malha de 64×64 elementos e CFL máximo de 0.45. Para satisfazer a condição de estabilidade $CFL < 0.5$ em todo o domínio, escolhemos passos de discretização espacial e temporal de forma a considerar o menor valor de porosidade. Com esta escolha, nas regiões com maior porosidade o CFL é menor do que o esperado fazendo a solução numérica apresentar maior difusão artificial.

4.4 Simulação da equação de transporte com porosidade transiente

Com o objetivo de ilustrar a relevância da técnica de decomposição de operadores utilizada para computar o efeito transiente da porosidade sobre a equação de transporte, propomos testar a discretização apresentada na seção 3.8 resolvendo numericamente o seguinte problema hiperbólico não linear

formulação 4.1 Dado o campo de porosidade transiente $\phi(t) = 0.5t + 0.4$, achar função $S_w(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} \phi + S_w \frac{\partial S_w}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} S_w,$$

com condição inicial

$$S_w(x, 0) = 0,$$

e condição de contorno

$$S_w(x, t) = \frac{1}{\phi(t)} \text{ sobre } \Gamma_e.$$

A solução analítica para o problema acima é dada por

$$S_w(x, t) = \begin{cases} \frac{0.1}{0.4t + 0.1} & , x < \frac{1}{2} \frac{t}{0.4t + 0.1} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A figura 4.10 compara as soluções exatas e numéricas para uma malha de 64×64 elementos com CFL inicial igual a 0.5. À medida que a porosidade aumenta com o passar do tempo, a velocidade do choque e o CFL numérico diminuem o que torna a solução progressivamente difusiva. Salientamos que tal efeito poderia ser corrigido modificando o passo de tempo do método numérico no decorrer da simulação a fim de manter o CFL sempre próximo de 0.5. Neste teste os passos preditor e corretor do módulo do transporte são iterados sequencialmente para cada passo de tempo. No instante t_n resolvemos o problema preditor pelo método NT onde desconsideramos a variação temporal da porosidade obtendo a solução $S_w^*(x, t_{n+1})$. Em seguida, resolvemos o problema corretor fazendo

$$S_w(x, t_{n+1}) = S_w^*(x, t_{n+1}) \frac{\phi(t_n)}{\phi(t_{n+1})}$$

Um algoritmo alternativo para resolver o problema de Transporte seria utilizar apenas o passo preditor, atualizando o valor da porosidade em cada passo de tempo. A figura 4.11 apresenta a solução numérica e a solução analítica do problema de transporte utilizando esta abordagem.

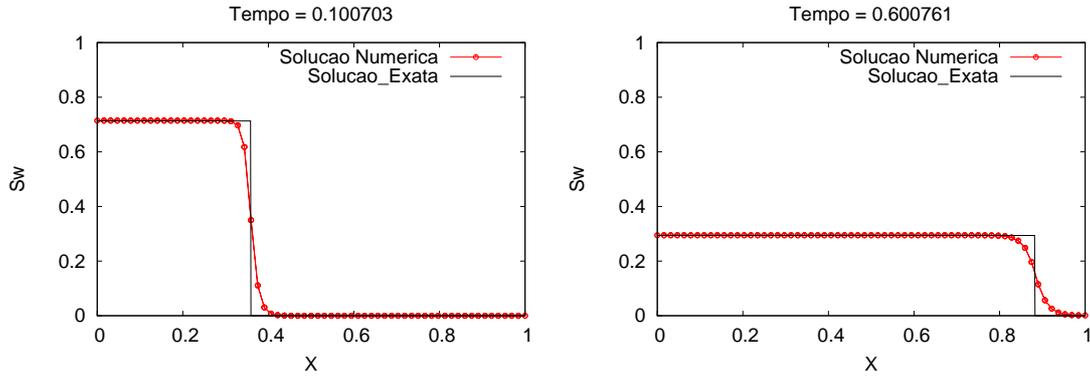


Figura 4.10: Simulação com porosidade transiente no tempo.

Verificamos que neste caso a solução numérica apresenta um perfil totalmente díspare da solução exata, o que evidencia a importância da técnica de decomposição de operadores para a correta descrição do problema de transporte. As mesmas considerações valem para o problema de Buckley-Leverett dado pela equação

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \lambda'_w(S_w) \frac{\partial S_w}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} S_w, \quad (4.8)$$

com condição de contorno

$$S_w(0, t) = 1 \quad (4.9)$$

e demais dados apresentados pela tabela 4.1. A figura 4.12 compara a evolução das soluções numéricas do problema de Buckley-Leverett obtidas com e sem passo corretor. Observamos que o tamanho do salto e a velocidade de propagação de choque são diferentes para os dois casos, indicando que o efeito transiente da porosidade afeta consideravelmente a equação de transporte não devendo o mesmo ser ignorado.

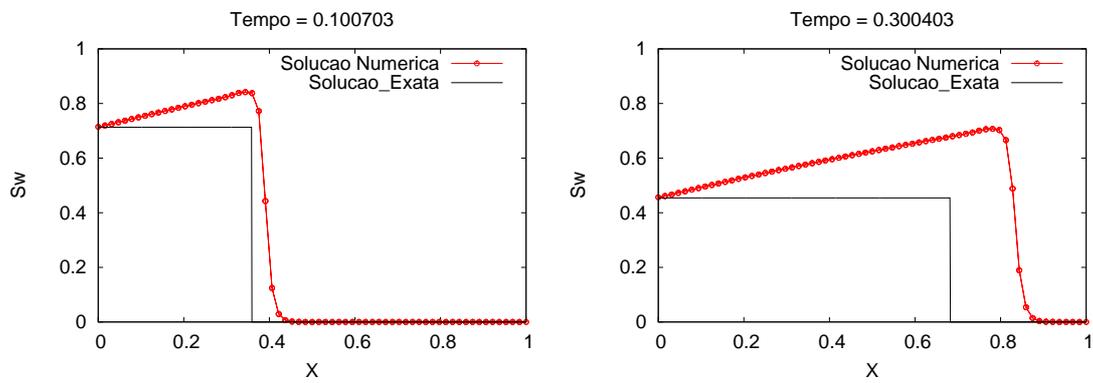


Figura 4.11: Comparação das soluções exata e numérica sem passo corretor.

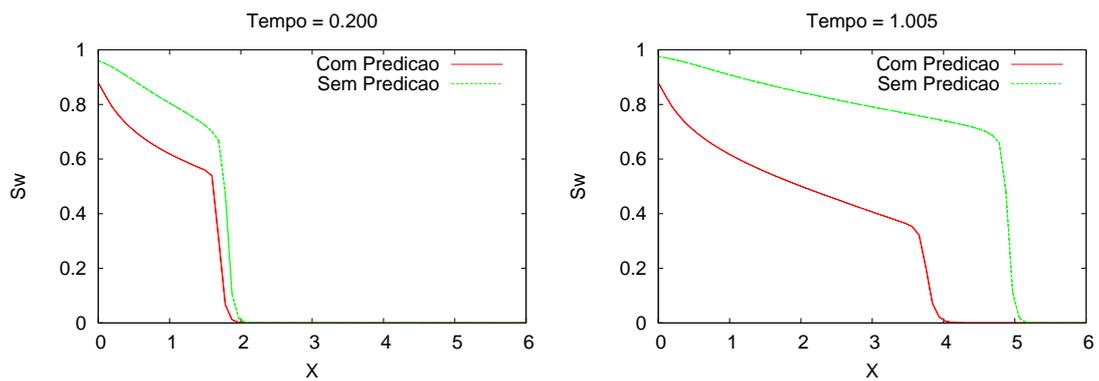


Figura 4.12: Comparação das soluções numéricas com passo corretor e sem passo corretor.

4.5 Simulações numéricas do acoplamento hidromecânico

Após analisarmos a performance dos métodos numéricos propostos para cada subsistema, separadamente, objetivamos agora ilustrar a acurácia da metodologia numérica proposta em um problema de acoplamento hidromecânico oriundo do processo de extração secundária de petróleo. Para este fim consideramos um reservatório homogêneo localizado abaixo da plataforma oceânica inicialmente saturado por óleo e circundado lateralmente por poços de injeção e produção (figura 4.13).

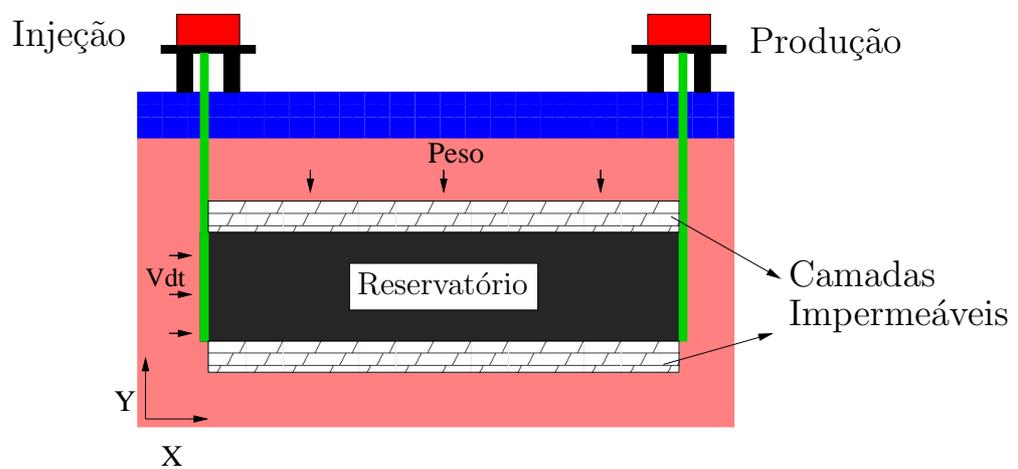


Figura 4.13: Geometria do problema de acoplamento hidromecânico advindo do processo de extração secundária de petróleo.

A tabela 4.2 mostra as propriedades do reservatório e as figuras 4.14, 4.15 ilustram as condições de contorno para a hidrodinâmica e geomecânica. Por simplicidade, consideramos o coeficiente de Poisson nulo reduzindo o problema a estados planos de tensão e deformação no esqueleto poroso. Também desprezamos os efeitos elásticos das camadas adjacentes ao reservatório considerando um carregamento constante sobre o mesmo e prescrevendo deslocamento horizontal nulo em suas bordas laterais (ver figura 4.15). Nas simulações a seguir utilizamos malhas de 256×128 elementos com passo de tempo de 3 dias e condição $CFL_{Max} = 0.5$ para o método NT.

dimensão do reservatório:	$600m \times 300m \times 1m$
porosidade inicial:	$\phi_0 = 0.25$
saturação inicial:	$S_{w0} = 0$
saturação residual:	$S_{wr} = 0, S_{or} = 0$
viscosidade da água:	$\mu_w = 10^{-3}Ns/m^2$
viscosidade do óleo:	$\mu_o = 20\mu_w$
módulo de Young:	$4 \times 10^9 N/m^2$
coeficiente de Poisson:	0
permeabilidade inicial:	$K_0 = 8 \times 10^{-14}m^2$
Mobilidade Relativa:	$\lambda_w(S_w) = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - S_w)^2}$
Mobilidade total:	$\lambda_t(S_w) = \frac{S_w^2}{\mu_w} + \frac{(1 - S_w)^2}{\mu_o}$
Injeção de água:	$30 m^3/dia$
Pressão no poço de produção:	$0 N/m^2$
Peso sobre o reservatório:	$580 \times 10^5 N/m^2$
Condições de Contorno	
$\mathbf{V}_{Dt}(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ m/dia sobre } \Gamma_i \cup \Gamma_s, \mathbf{u}_{s1}(x, t) = 0m \text{ sobre } x \in \Gamma_e \cup \Gamma_d,$ $\mathbf{V}_{Dt}(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0.1 \text{ m/dia sobre } \Gamma_e, \mathbf{u}_{s2}(x, t) = 0m \text{ sobre } x \in \Gamma_i,$ $p(x, t) = 0 N/m^2 \text{ sobre } \Gamma_d, \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = 580 \times 10^5 N/m^2 \text{ sobre } x \in \Gamma_s.$	

Tabela 4.2: Propriedades do reservatório e condições de contorno.

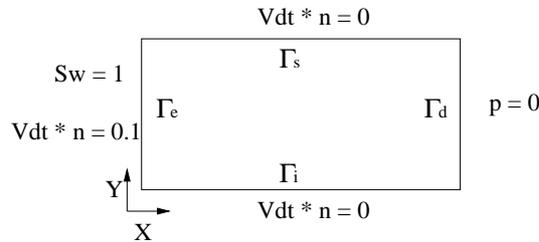


Figura 4.14: Condições de contorno para a hidrodinâmica.

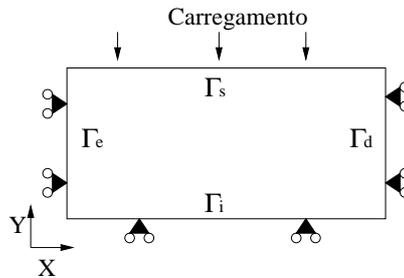
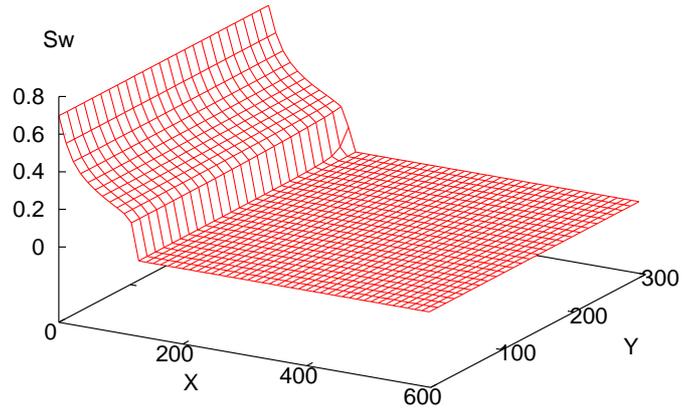


Figura 4.15: Condições de contorno para a geomecânica.

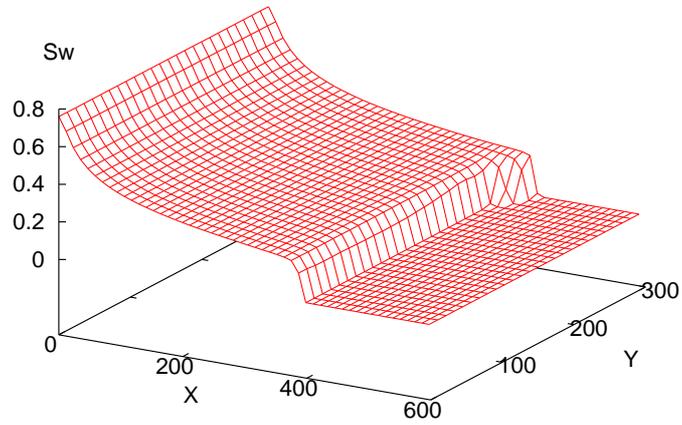
A evolução no tempo do campo bidimensional de saturação S_w é ilustrada na figura 4.16. O perfil da saturação é quase unidimensional exceto pela presença de um adiantamento da frente de mistura na região próxima à borda superior do domínio onde ocorrem maiores variações de porosidade responsáveis por alterar a permeabilidade do meio poroso via lei de Kozeny-Carman.

A figura 4.17 compara os perfis de saturação ao longo do eixo longitudinal $Y = 150m$ para os casos de meio rígido (ver formulação 2.1) e deformável, adotando como módulo de Young o valor $Ey = 4 \times 10^9 N/m^2$ próximo ao utilizado por Samier et al. (2003). No caso deformável notamos inicialmente um atraso da frente de mistura em relação à do caso rígido cuja velocidade de propagação é constante. À medida que o tempo avança, a velocidade da frente de mistura no caso deformável aumenta, chegando a ultrapassar à do caso rígido. A variação da velocidade de escoamento no caso deformável está fortemente relacionada com a dinâmica da fase sólida, a qual permite acúmulo dos fluidos nas regiões de expansão do meio poroso e expulsão nas regiões de compressão. De fato, tal como ilustraremos mais adiante, a injeção de água provoca inicialmente uma expansão volumétrica do reservatório nas proximidades do poço de injeção propiciando acúmulo de água e um consequente atraso da frente de mistura. No entanto, à medida que a saturação de água aumenta, a pressão do poro diminui consideravelmente ocasionando uma compressão gradual do reservatório que favorece a percolação dos fluidos em direção ao poço de produção.

Saturação: Tempo = 120 dias



Saturação: Tempo = 360 dias



Saturação: Tempo = 480 dias

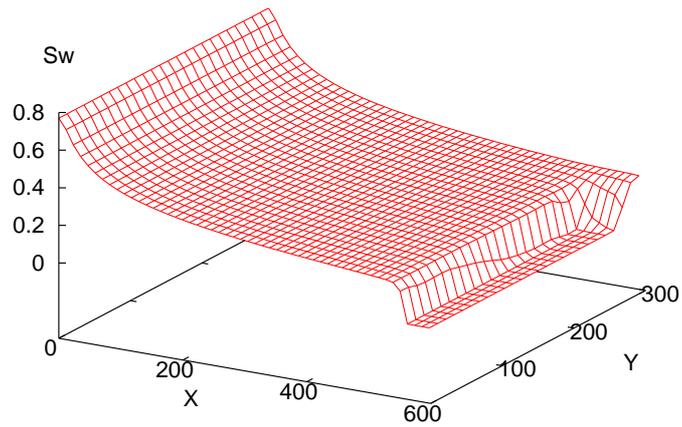


Figura 4.16: Evolução da superfície de saturação S_w para diferentes instantes de tempo.

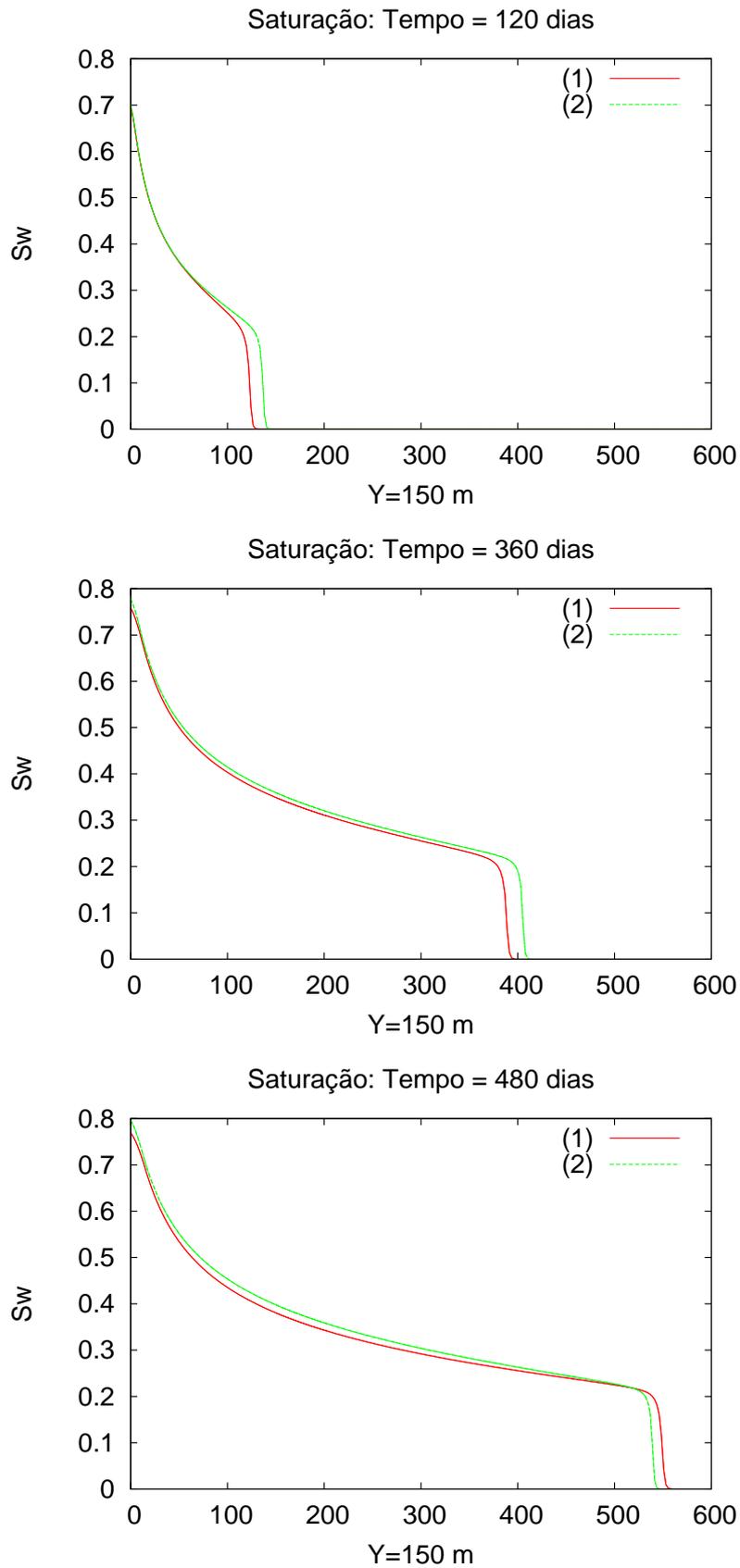


Figura 4.17: Curvas de saturação para meio poroso com diferentes graus de rigidez. (1) Meio deformável com $Ey = 4 \times 10^9 N/m^2$. (2) Caso rígido.

Nas simulações a seguir apresentamos a dinâmica da poromecânica analisando principalmente o efeito da razão de viscosidade dos fluidos $M = \mu_w/\mu_o$ sobre o acoplamento geomecânico. A razão de viscosidade origina um mecanismo não linear de interação que altera substancialmente a dinâmica do sistema e o crescimento da região de mistura dos fluidos (Furtado e Pereira, 1998). Visando ilustrar precisamente as perturbações induzidas pelo parâmetro M sobre o acoplamento geomecânico apresentamos a comparação dos resultados numéricos com os do problema do traçador passivo (Borges, 2006) onde injetamos, ao invés de água, um fluido com propriedades idênticas à do óleo. Este caso particular é reproduzido a partir do bifásico considerando razão de viscosidade unitária entre os fluidos ($M = 1$) e as permeabilidades relativas dadas como funções lineares da saturação

$$k_{rw}(S_w) = S_w, \quad (4.10)$$

$$k_{ro}(S_w) = 1 - S_w, \quad (4.11)$$

de tal forma que a mobilidade total torna-se constante $\lambda_t(S_w) = 1/\mu_o$. A independência da mobilidade total com a saturação suprime a influência do escoamento dos fluidos sobre a poromecânica cuja formulação passa a ser idêntica à do problema de poro-elasticidade monofásico de Biot. A seguir apresentamos as comparações entre os casos $M = 1$ e $M = 20$ ilustrando o efeito deste parâmetro sobre os campos de pressão, deslocamento vertical e velocidade de percolação total.

A figura 4.18 retrata a dependência longitudinal da poro-pressão para a altura $Y = 150m$. No caso do traçador passivo a injeção de fluido provoca um aumento gradativo da pressão do poro em torno do poço de injeção. No entanto, tal pressão tende à diminuir à medida que nos deslocamos em direção à extremidade oposta do reservatório devido à condição de Dirichlet imposta no poço de produção. Estas mesmas considerações também são válidas para o caso de escoamento bifásico. A principal característica que o diferencia do caso do traçador passivo é o aumento da permeabilidade hidráulica da mistura $\lambda_t(S_w)K$ com a saturação S_w . Dessa forma, à medida que injetamos água, a mistura tende a escoar com menor resistência do

meio poroso fazendo com que a pressão necessária para manter a vazão de $30m^3/dia$ prescrita no poço de injeção seja cada vez menor. De fato, o decaimento da pressão do poro no caso bifásico pode ser constatado pelos perfis de pressão apresentados na figura 4.18. Também observamos nestes perfis a presença de uma descontinuidade no gradiente de pressão em torno da região de mistura evidenciando a variação abrupta da condutividade hidráulica com a saturação.

Por outro lado, a forte dependência da poro-pressão com a saturação induz um fenômeno de adensamento retardado do reservatório à medida que este é inundado de água. A figura 4.19 mostra a evolução da superfície do campo do deslocamento vertical do sólido com o tempo para o caso bifásico. Inicialmente podemos verificar que o aumento da poro-pressão junto ao poço de injeção produz uma expansão vertical do reservatório gerando deformações de tração pronunciadas na vizinhança do poço. Ao nos distanciarmos do poço de injeção em direção à extremidade oposta do reservatório, notamos que o efeito de expansão diminui ocorrendo inversão para um efeito de compressão nas imediações do poço de produção onde a poro-pressão é nula. Com a evolução do tempo, o processo de compactação retardada devido à inundação de água induz um decréscimo da expansão do reservatório e aumento da compressão tal como podemos observar na figura 4.19c.

A figura 4.20 ilustra o efeito da razão de viscosidade sobre a compactação da matriz porosa comparando os perfis de deslocamento vertical para os casos de traçador passivo e bifásico. Devido à compactação retardada, o efeito transiente da deformação é bem mais pronunciado no caso bifásico. Por volta de 120 dias os dois perfis ainda encontram-se bastante próximos, porém nos instantes de tempo seguintes o perfil do deslocamento no caso do traçador já praticamente atingiu o regime estacionário, enquanto que no caso bifásico o deslocamento vertical diminui gradativamente indicando o regime de adensamento retardado do reservatório com efeitos transientes mais acentuados. Essa consolidação secundária é induzida pelo contínuo decréscimo da pressão do poro à medida que a permeabilidade hidráulica

aumenta com a injeção de água.

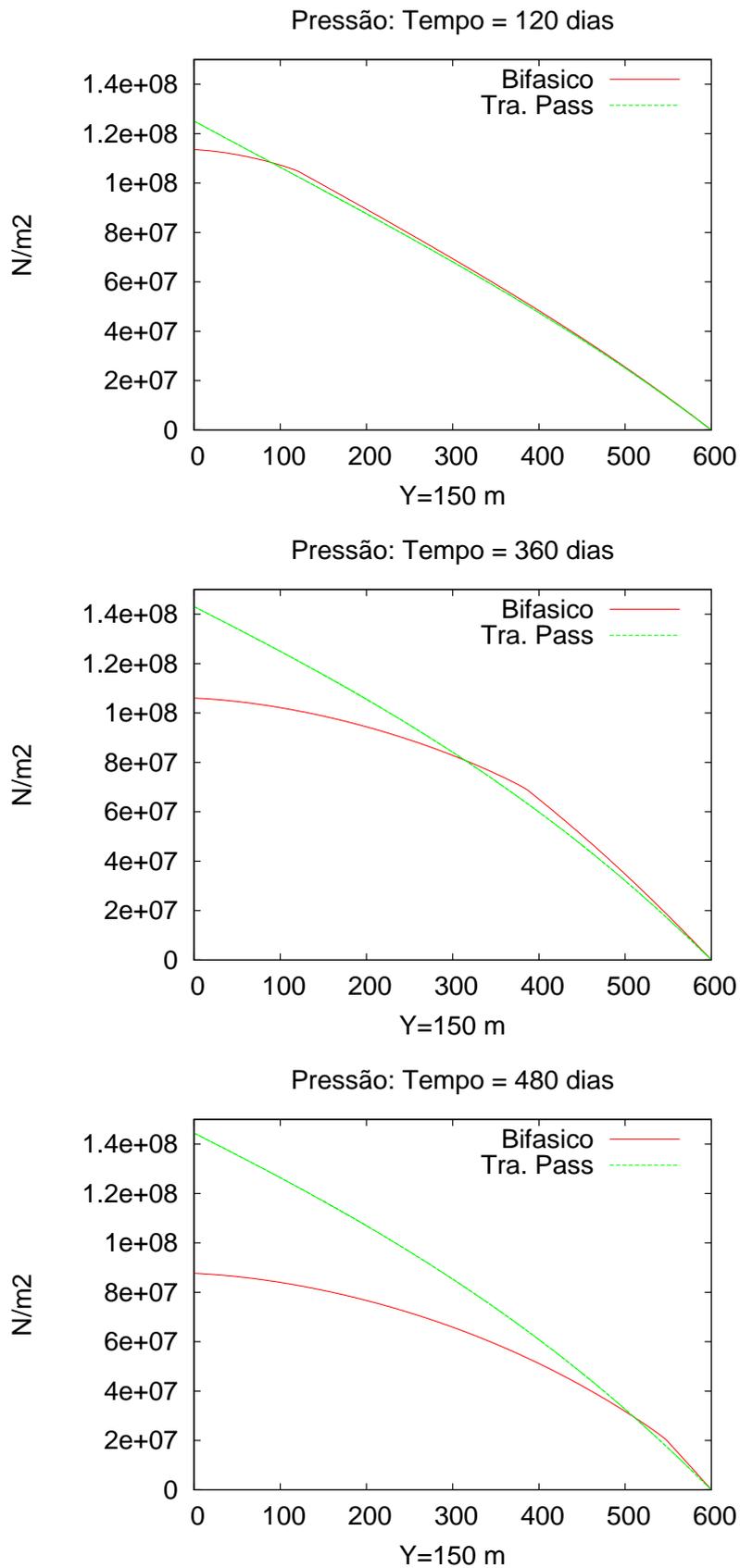
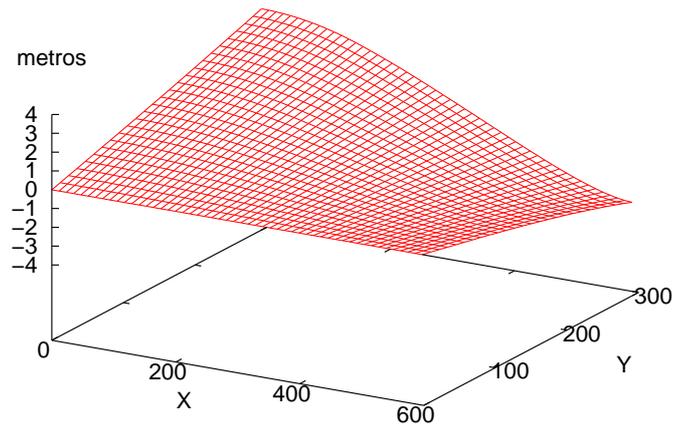
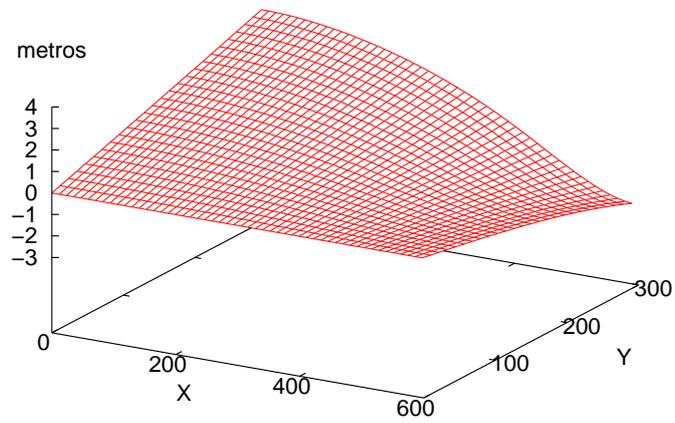


Figura 4.18: Comparação entre os perfis de pressão ao longo do eixo $Y = 150m$ para os casos de escoamento bifásico e de traçador passivo para meio deformável.

(a) Us Y: Tempo = 120 dias



(b) Us Y: Tempo = 360 dias



(c) Us Y: Tempo = 480 dias

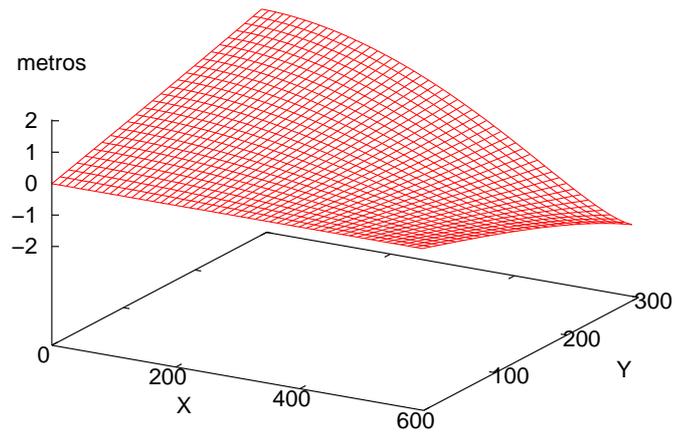


Figura 4.19: Evolução de superfície do deslocamento vertical do sólido para escoamento bifásico água-óleo.

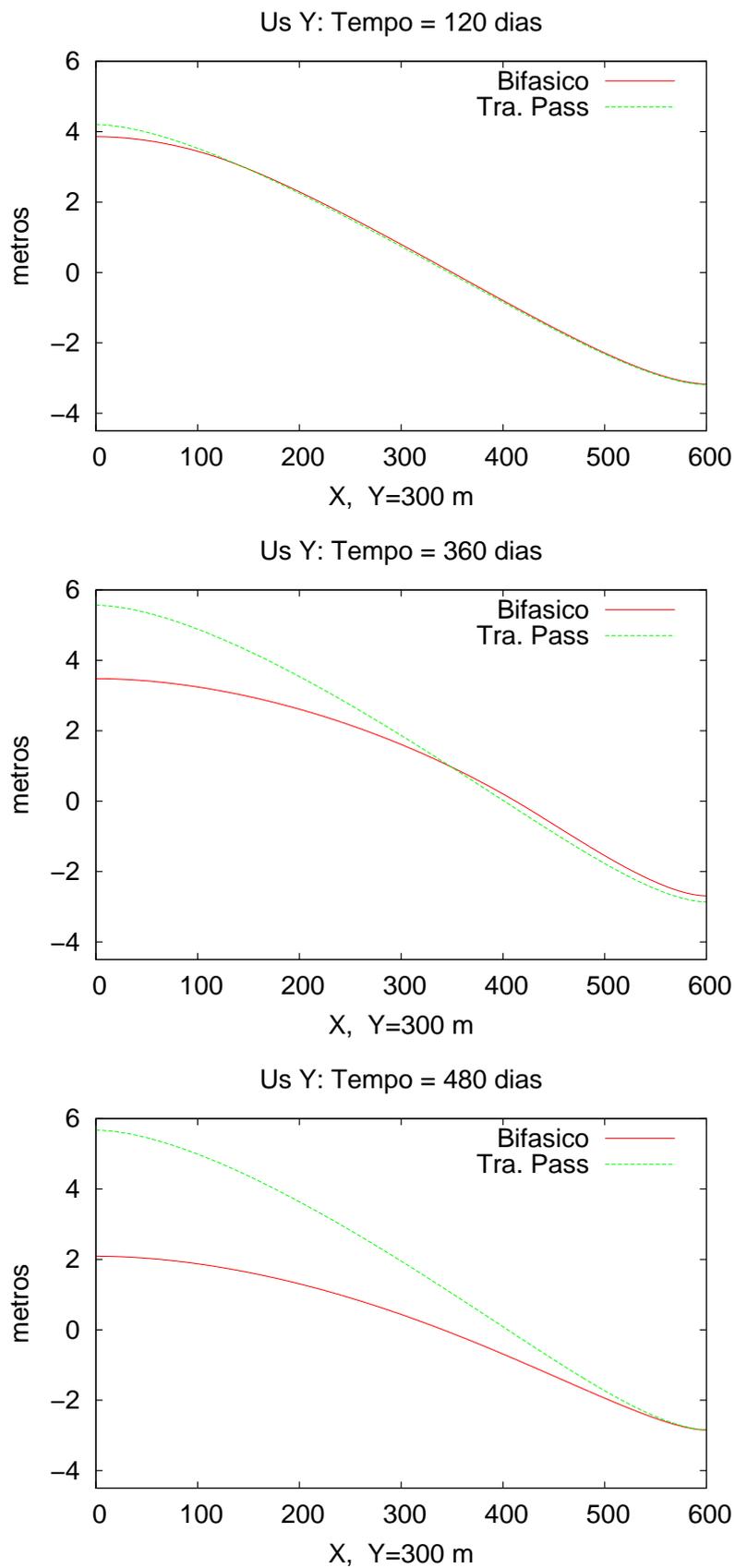


Figura 4.20: Curvas do deslocamento vertical do sólido ao longo do eixo $Y = 300$ para os casos traçador passivo e escoamento bifásico em meio deformável.

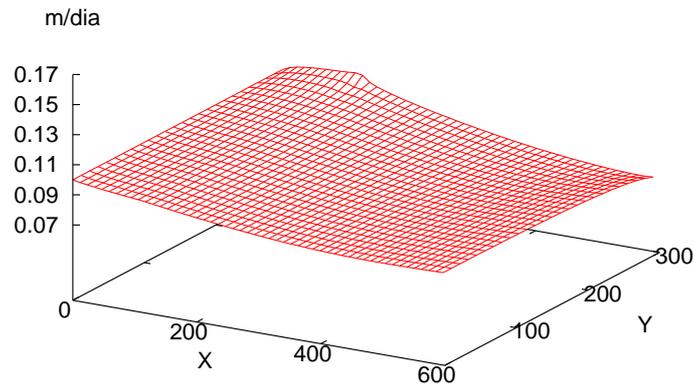
A figura 4.21 mostra a evolução da superfície da componente horizontal de \mathbf{V}_{D_t} com o tempo. Nas regiões próximas ao carregamento ($Y = 300m$), podemos observar um comportamento não linear acentuado deste campo ocasionado sobretudo pela variação da permeabilidade com a deformação do meio poroso modelada pela lei de Kozeny-Carman. A figura 4.22 ilustra o efeito da razão de viscosidade M sobre a velocidade de percolação comparando os resultados numéricos com os do traçador passivo. Como as fases sólida e fluidas são incompressíveis, deveríamos esperar o perfil de \mathbf{V}_{D_t} constante em todo o domínio com a velocidade prescrita no poço de injeção de $0.1m/dia$ igual à do poço de produção. Este é de fato o comportamento observado para meio poroso rígido. No entanto para meios deformáveis, o movimento da fase sólida interfere no balanço de massa dos fluidos fazendo com que o campo \mathbf{V}_{D_t} varie no espaço e tempo. Para o caso do traçador passivo em meio deformável, podemos observar pela figura 4.22 que em 120 dias o valor de \mathbf{V}_{D_t} no poço de produção é menor do que no poço de injeção. Tal fato é oriundo da expansão da matriz porosa devido à injeção de água permitindo acúmulo de massa dentro do reservatório. Nos instantes de tempo subsequentes, à medida que o processo de expansão volumétrica do reservatório tende a uma situação estacionária, verificamos que o perfil de \mathbf{V}_{D_t} se aproxima gradualmente do resultado obtido no caso rígido. O caso estacionário do traçador passivo difere um pouco do caso de meio poroso rígido por causa da dependência do coeficiente de permeabilidade com a deformação do meio poroso. No entanto salientamos que a influência da lei de Kozeny-Carman sobre o acoplamento geomecânico é muito menor do que a provocada pela razão de viscosidade.

No caso de escoamento bifásico, os efeitos transientes do campo \mathbf{V}_{D_t} são bem mais acentuados devido ao processo de compactação retardada. Na figura 4.22 notamos que em 120 dias o perfil de \mathbf{V}_{D_t} encontra-se próximo ao do caso do traçador passivo, havendo apenas uma pequena disparidade entre eles nas imediações do poço de produção onde a influência da condição de Neumann imposta na entrada tende a diminuir. Com a evolução do tempo, percebemos que o valor de

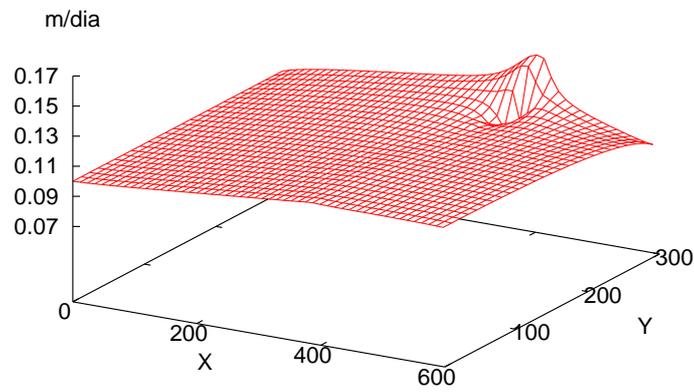
\mathbf{V}_{D_t} aumenta nas proximidades do poço de produção tornando-se inclusive maior que a velocidade prescrita no poço de injeção. Este acréscimo na magnitude de \mathbf{V}_{D_t} é atribuído ao contínuo movimento de compressão retardada do meio poroso que auxilia na percolação dos fluidos em direção ao poço de produção (figura 4.20).

O comportamento transiente de \mathbf{V}_{D_t} explica a variação da velocidade de propagação da frente de mistura observada na figura 4.17. Há portanto um mecanismo mútuo de interação entre a poromecânica e a hidrodinâmica. Este mecanismo ocorre principalmente devido à razão de viscosidade M que possibilita variações abruptas da permeabilidade hidráulica $\lambda_t(S_w)K$ com a saturação.

Vdt X: Tempo = 120 dias



Vdt X: Tempo = 360 dias



Vdt X: Tempo = 480 dias

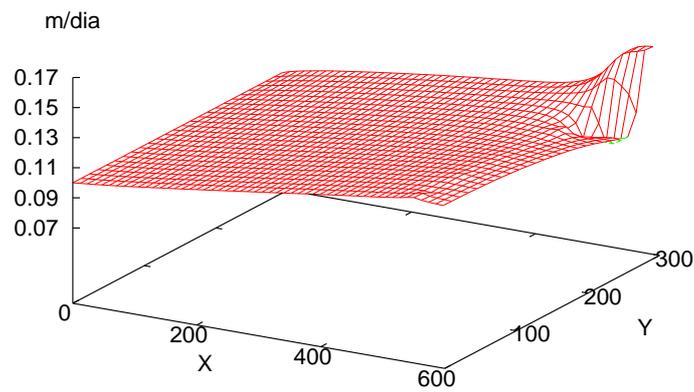


Figura 4.21: Perfis da componente horizontal da velocidade de percolação total para o caso bifásico água-óleo em meio deformável.

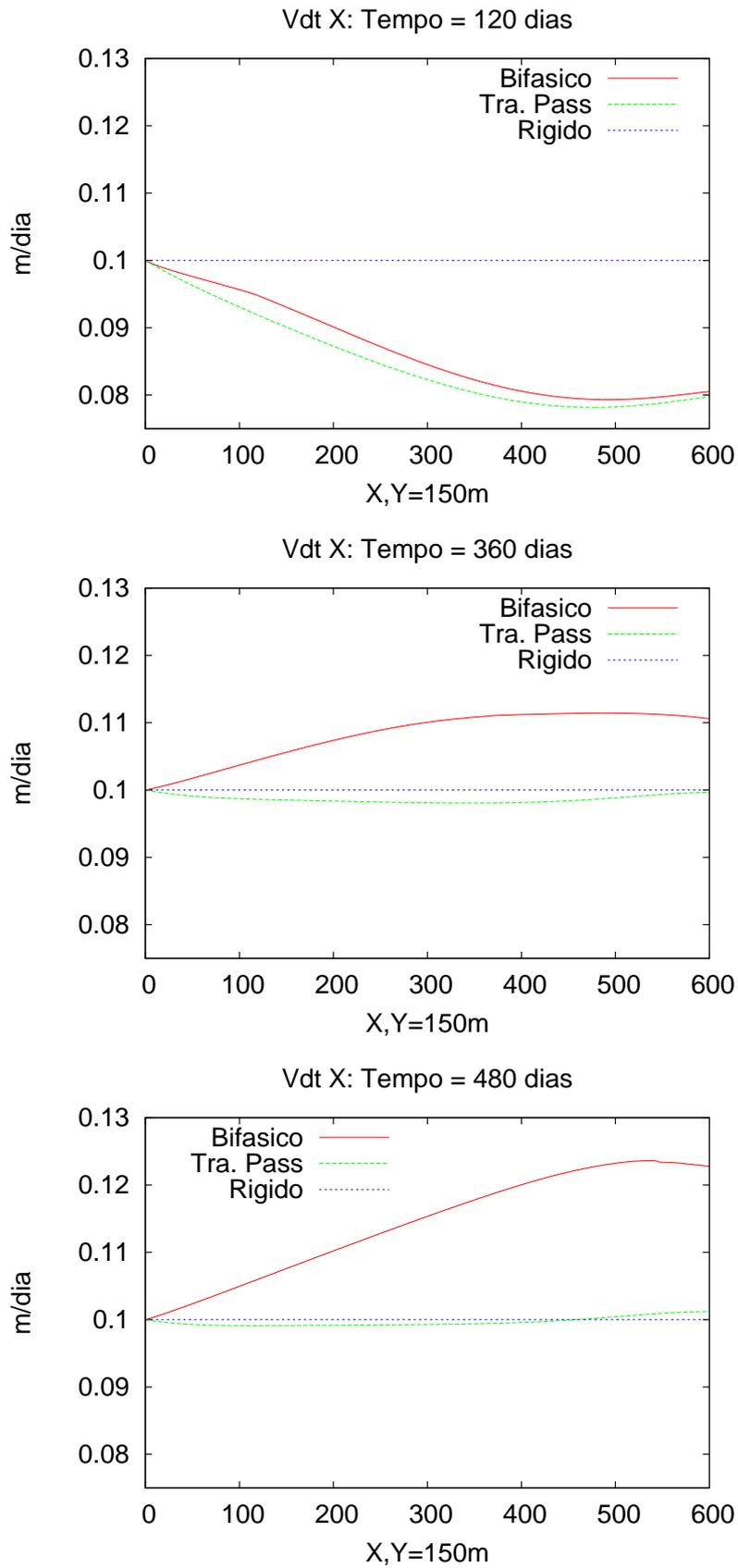


Figura 4.22: Curvas da componente horizontal da velocidade de percolação total V_{Dt} para $Y = 150m$ considerando os casos de traçador passivo e bifásico em meio deformável.

4.6 Análise das curvas de produção de óleo

Para completar as simulações computacionais para meio homogêneo, nesta seção analisamos o impacto do acoplamento geomecânico e da razão de viscosidade sobre a velocidade de percolação do óleo obtida a partir de \mathbf{V}_{Dt} pela expressão $\mathbf{V}_{Do} = \lambda_o(S_w)\mathbf{V}_{Dt}$. A figura 4.23 compara o perfil longitudinal da componente horizontal deste campo para os casos de escoamento bifásico em meio rígido e deformável.

Para meio rígido a velocidade de percolação do óleo varia apenas em função da saturação uma vez que \mathbf{V}_{Dt} é constante e igual à $0.1m/dia$. No entanto para meio deformável o campo \mathbf{V}_{Do} sofre influência da saturação e da dinâmica da fase sólida, tendo seu comportamento regido por diversos fatores que competem mutuamente ao longo da simulação. Nos primeiros dias o óleo inicialmente confinado no reservatório escoava em direção ao poço de produção recém aberto por diferença de pressão (figura 4.23a). Este fenômeno vem acompanhado por uma compressão do reservatório nas imediações do poço de produção e é típico do processo de extração primária de petróleo, possuindo um efeito local e de curta duração. Na mesma escala de tempo, na extremidade oposta do reservatório, a injeção de água acarreta um aumento progressivo da pressão do poro acompanhado por um soerguimento do reservatório. O movimento de expansão permite acúmulo de massa de fluidos e conseqüente diminuição da velocidade do óleo ao longo de todo o reservatório conforme mostrado na figura 4.23b. Nos dias seguintes ilustrados nas figura 4.23c e 4.23d observamos um aumento gradual da velocidade do óleo nas proximidades do poço de produção que perdura até à frente de mistura alcançar o poço (4.23e). Este aumento de \mathbf{V}_{Do} deve-se ao movimento de compressão retardada do meio poroso já explicado anteriormente e que é induzido pela variação da permeabilidade hidráulica da mistura com a saturação.

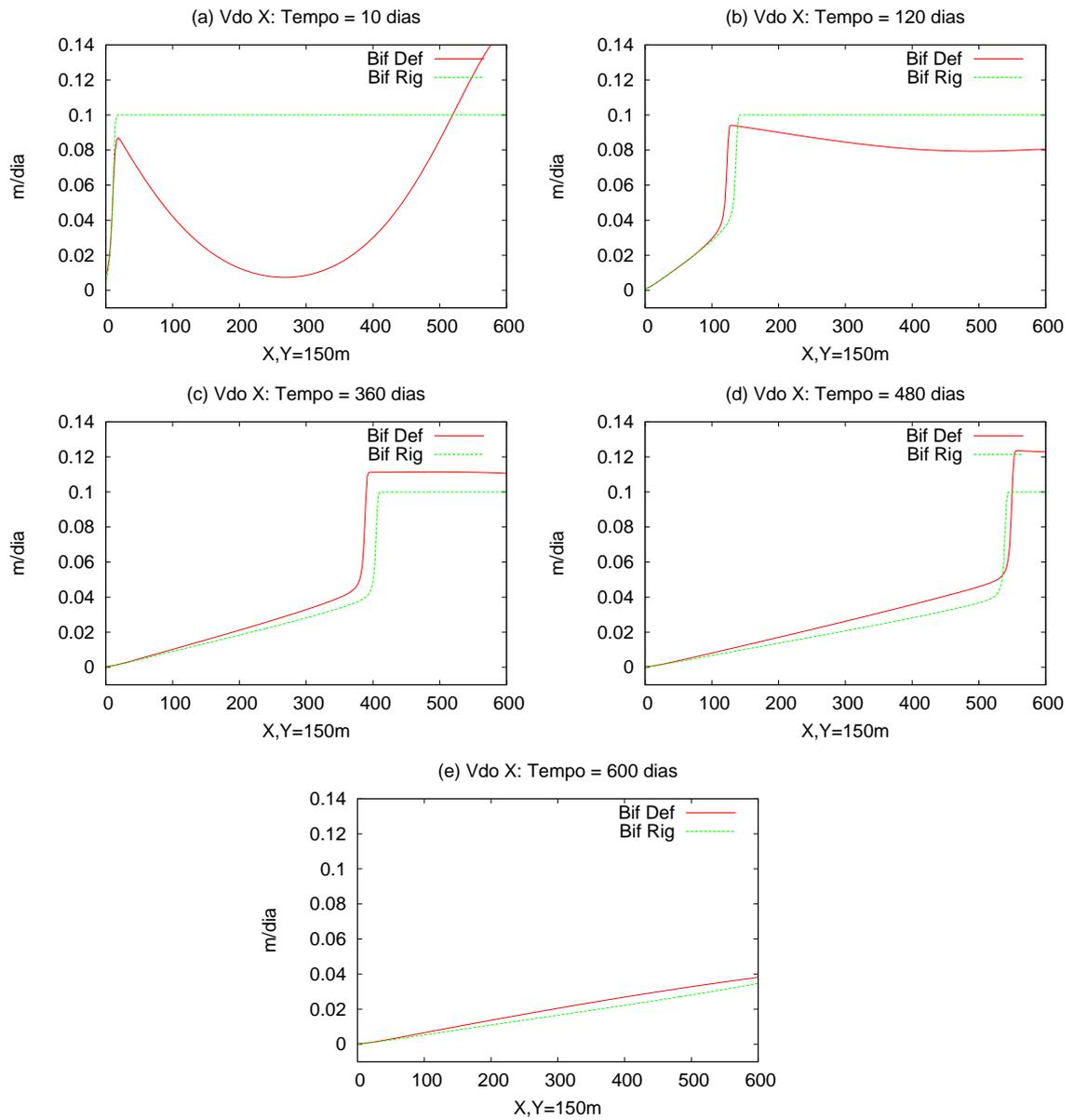


Figura 4.23: Curvas da velocidade de percolação do óleo $V_{Do} = \lambda_o(S_o)V_{Dt}$ ao longo de $Y = 150m$ para escoamento bifásico em meio rígido e deformável.

Em suma, o conjunto das simulações numéricas realizado neste trabalho sugere a caracterização de quatro regimes distintos governados pela evolução do campo V_{D_o} no tempo.

- Primeiro Regime: Caracteriza-se por camadas limites no perfil de V_{D_o} nas imediações dos poços (figura 4.23a) e ocorre nos instantes iniciais do processo extrativo quando o reservatório inicialmente confinado e submetido ao carregamento das camadas geológicas superiores é perturbado por ocasião da abertura dos poços de injeção e produção. Nesta primeira etapa, a produção de óleo deve-se exclusivamente à diferença de pressão entre o poço recém aberto e o fluido inicialmente confinado e submetido à alta pressão devido ao peso das camadas geológicas superiores. Este fenômeno é típico do processo de extração primária de petróleo e possui curta duração, já que a retirada de óleo do reservatório provoca um rápido decréscimo da pressão do poro acompanhada pela compactação da matriz porosa nas proximidades do poço de produção. Em contrapartida, a injeção de água provoca um processo de expansão da matriz porosa no lado oposto do reservatório ao mesmo tempo que induz o fluxo de óleo em direção ao poço de produção. No entanto, analisando o perfil de V_{D_o} na figura 4.23a, vemos que a influência da inundação sobre V_{D_o} é local, sendo praticamente nula para o óleo no centro do reservatório que se encontra praticamente estagnado. O perfil de V_{D_o} ilustra que as perturbações geradas pela abertura dos poços sobre o fluxo de óleo são locais, não havendo durante o primeiro regime nenhuma influência significativa da inundação de água sobre a produção de óleo.
- Segundo Regime: Neste estágio observamos os primeiros efeitos da inundação sobre a produção de óleo. Ele tem início quando o valor de V_{D_o} no poço de produção torna-se menor do que o valor prescrito no poço de injeção de 0.1m/dia (ver figura 4.23b). A diferença entre os volumes de fluido injetado e produzido deve-se ao contínuo processo de expansão da

matriz porosa nas proximidades do poço de injeção, permitindo o acúmulo de fluidos dentro do reservatório. O movimento de expansão é ocasionado pelo aumento da poro pressão devido à inundação de água e inicia-se ainda no primeiro estágio, perdurando ao longo de todo o segundo regime.

- Terceiro Regime: À medida que a quantidade de água da mistura fluida aumenta, a resistência do meio poroso ao escoamento diminui de forma que a pressão necessária para impor uma velocidade de percolação de $0.1m/dia$ torna-se cada vez menor. Com a diminuição da poro pressão, o processo de expansão da matriz porosa vigente no primeiro e segundo regime inverte-se para um movimento de compressão denominado neste trabalho de adensamento retardado. Tal movimento auxilia na produção de óleo e dá início ao terceiro regime que é caracterizado pelo fato do valor de V_{Do} no poço de produção ser maior do que a velocidade da água no poço de injeção (figuras 4.23c 4.23d).
- Quarto Regime: Inicia-se com a chegada da frente de mistura no poço de produção caracterizando o fenômeno denominado de depleção ou eclosão de água que é responsável por um decaimento abrupto do fluxo de óleo no poço de produção. O quarto regime perdura até o fim do processo extrativo e apresenta um perfil para o campo V_{Do} quase linear (figura 4.23e) e que tende à zero com o passar do tempo.

As transições entre os quatro regimes podem ser melhor identificadas através das curvas de produção de óleo obtidas integrando o campo V_{Do} ao longo do poço de produção. A figura 4.24 ilustra tais curvas considerando o meio poroso rígido e deformável.

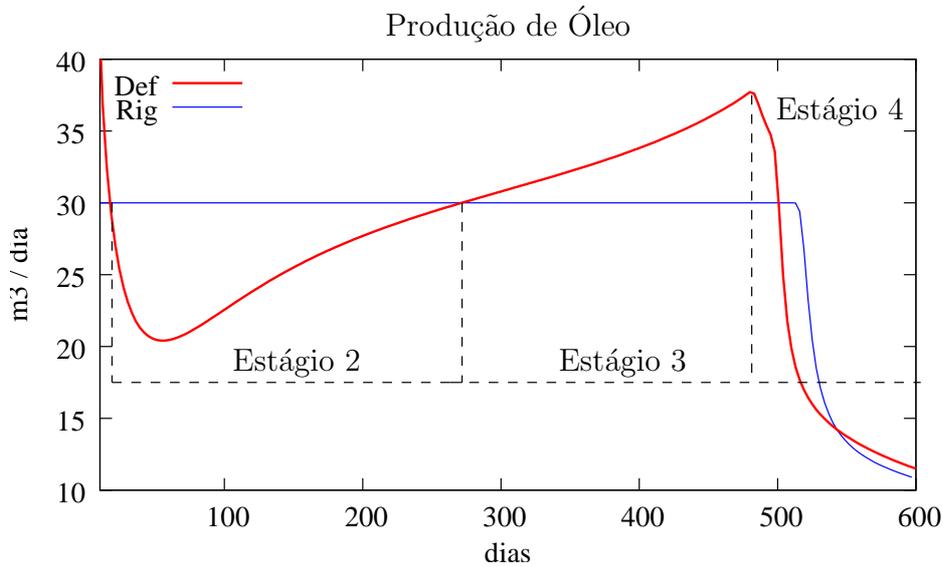


Figura 4.24: Gráficos do fluxo de óleo no poço de produção ao longo do tempo considerando escoamento bifásico em meio poroso rígido e deformável.

Para meio poroso rígido, o fluxo de $30m^3/dia$ de água no poço de injeção é inicialmente igual ao fluxo de óleo no poço de produção. Tal vazão se mantém constante até a ocorrência da eclosão de água no poço de produção a partir da qual ocorre uma drástica diminuição do fluxo de óleo que passa a ser extraído do poço misturado à água.

No caso de meios deformáveis, o movimento da fase sólida faz com que o volume de água injetado não corresponda ao volume de óleo produzido como podemos observar na figura 4.24. Inicialmente, ocorre um pico de produção que diminui rapidamente devido à curta escala de tempo associada ao processo de extração primária de petróleo. Nos instantes seguintes, identificamos o segundo regime onde os efeitos da expansão da matriz porosa são manifestados no poço de produção tornando a vazão de óleo menor do que a vazão de água injetada ($30m^3/dia$). Em 300 dias de simulação tem início o terceiro regime caracterizado pelo processo de adensamento que faz com que a taxa de produção de óleo seja maior do que a taxa de injeção de fluido. Este comportamento se estende até à ocorrência da chegada de água ao poço de produção, por volta de 500 dias, a partir do qual começa o quarto regime governado pelo decréscimo abrupto da produção de óleo.

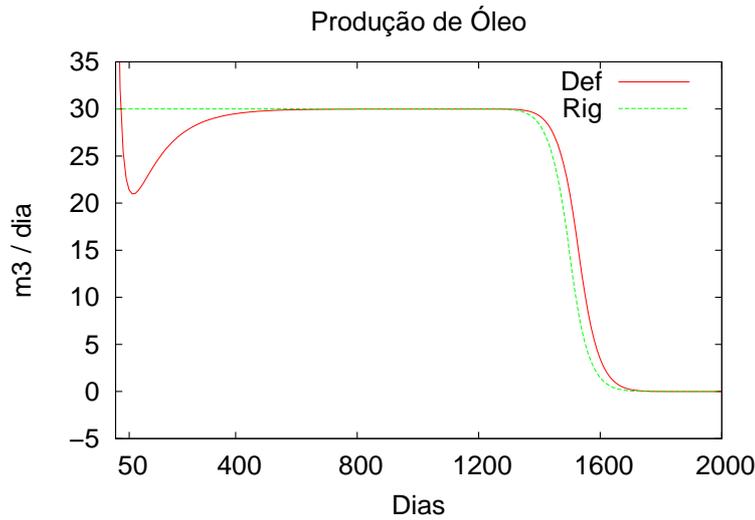


Figura 4.25: Gráficos do fluxo de óleo no poço de produção ao longo do tempo para o caso do traçador passivo em meio poroso deformável e rígido.

Finalmente para evidenciar a influência da razão de viscosidade sobre o processo de extração secundária de petróleo, a figura 4.25 ilustra as curvas de produção para o caso do traçador passivo considerando meio poroso rígido e deformável. Como não há mais variação da permeabilidade hidráulica com a saturação, a Poromecânica atinge a configuração estacionária em uma curta escala de tempo fazendo com que as curvas de produção para meio deformável e rígido sejam muito próximas. Notamos apenas um comportamento não linear nos instantes iniciais do caso deformável referente aos regimes primário e secundário já explicados anteriormente. A diferença crucial entre o caso do traçador passivo e o bifásico é a ausência do regime terciário, pois, devido à independência da permeabilidade hidráulica com a saturação, não ocorre a compressão retardada do meio poroso a qual é responsável pelo aumento contínuo de produção de óleo até a ocorrência do quarto estágio.

4.7 Meios poro-elásticos heterogêneos

Nesta seção analisamos a performance dos métodos numéricos propostos considerando meio poroso heterogêneo. Para este fim efetuamos simulações semelhantes às do caso homogêneo, porém introduzindo variabilidade espacial nos campos

de permeabilidade K e no módulo de Young E_y . Tais campos são mostrados nas figuras 4.26 e foram obtidos utilizando um gerador de campos fractais com distribuição log-normal e covariância dada por uma lei de potência (ver capítulo 5). A malha utilizada é de 512×256 blocos geológicos onde os coeficientes aleatórios são aproximados por funções constantes em cada elemento.

As figuras 4.27, 4.28 ilustram o efeito da variabilidade do coeficiente de Young sobre as superfícies de saturação, pressão e deslocamento assumindo K constante. As figuras 4.29, 4.30 retratam os mesmos campos, considerando aleatoriedade apenas no coeficiente de permeabilidade. Podemos notar que as componentes do campo de deslocamento apresentam maior sensibilidade com a variabilidade em E_y , enquanto que as variáveis da hidrodinâmica (saturação e pressão) apresentam dependência mais acentuada com a variabilidade de K . Finalmente as figuras 4.31 e 4.32 apresentam o caso geral com variabilidade nos dois coeficientes.

Tal como podemos observar nos gráficos da saturação mostrados na figura 4.33, a heterogeneidade do meio poroso dá origem a formação de caminhos preferenciais para o escoamento fazendo com que a frente de mistura apresente dedos ou “fingers” (Furtado e Pereira, 1998). A presença destes dedos de mistura têm grande influência nas taxas de produção de óleo, pois a presença deles acarreta a antecipação da chegada de água no poço de produção em relação ao caso homogêneo. A análise quantitativa da influência da heterogeneidade sobre o escoamento será discutida no capítulo seguinte no contexto da modelagem estocástica.

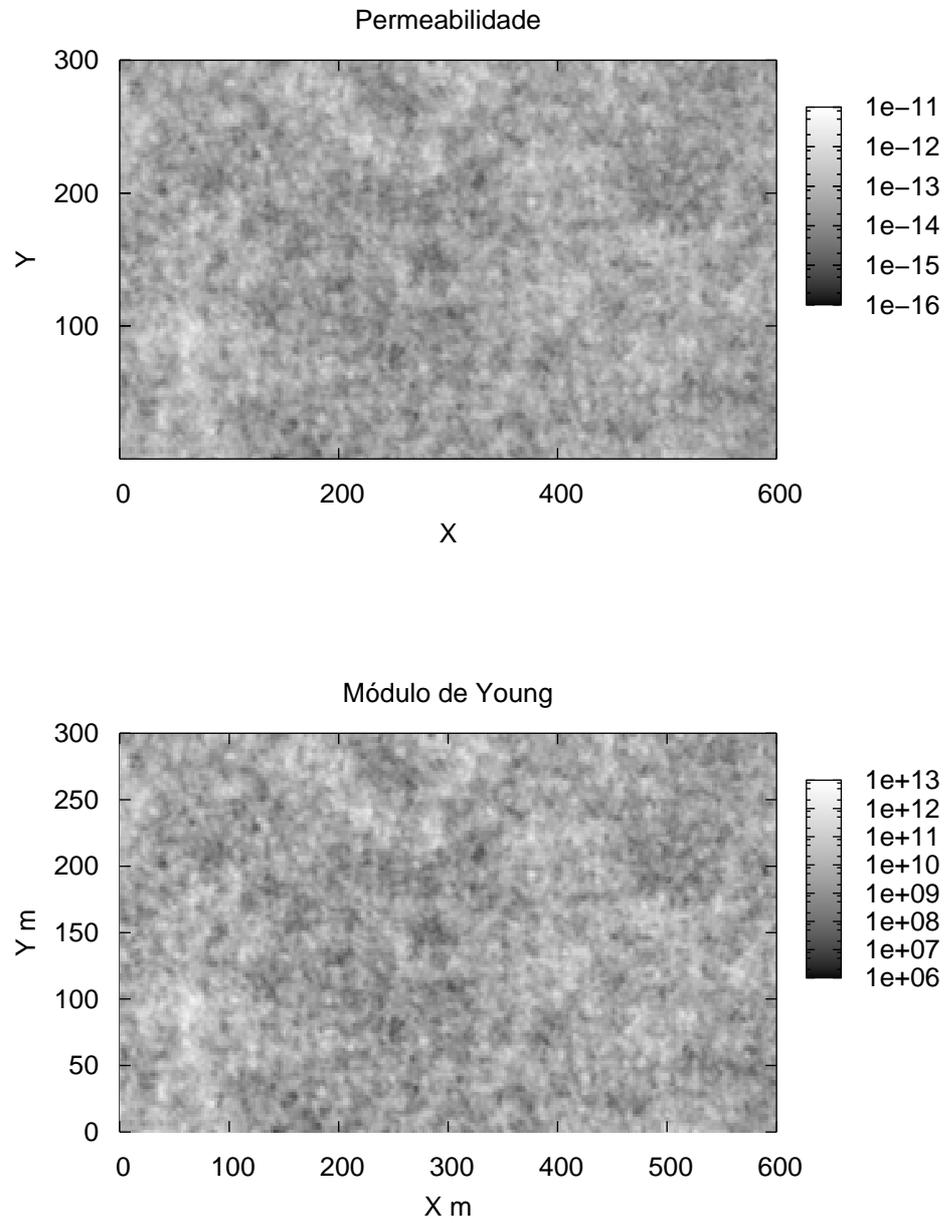
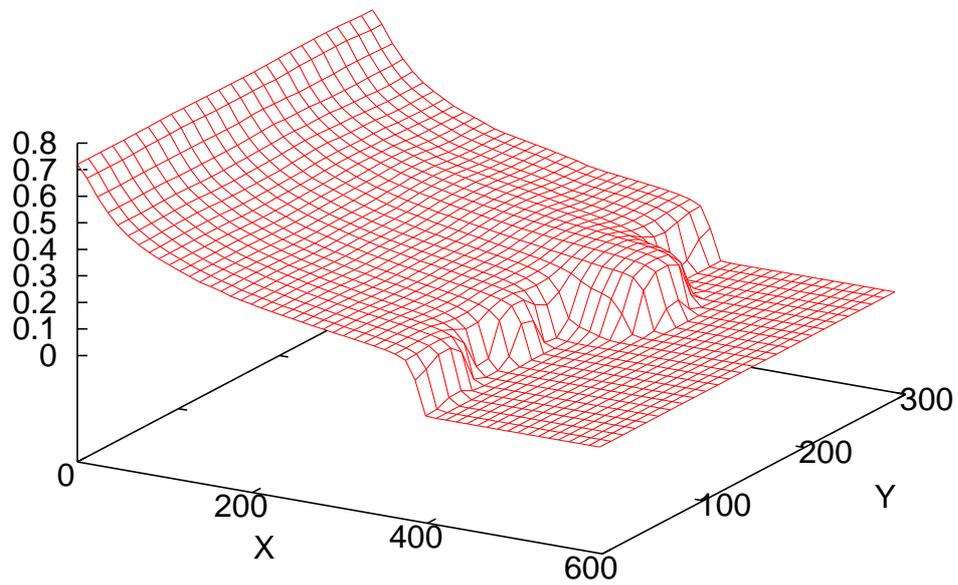


Figura 4.26: Campo heterogêneo para o coeficiente de permeabilidade com média $E[K] = 8 \times 10^{-14} m^2$ e para o módulo de Young com média $E[Ey] = 4 \times 10^9 N/m^2$.

Saturação: Tempo = 360 dias



Pressão: Tempo = 360 dias

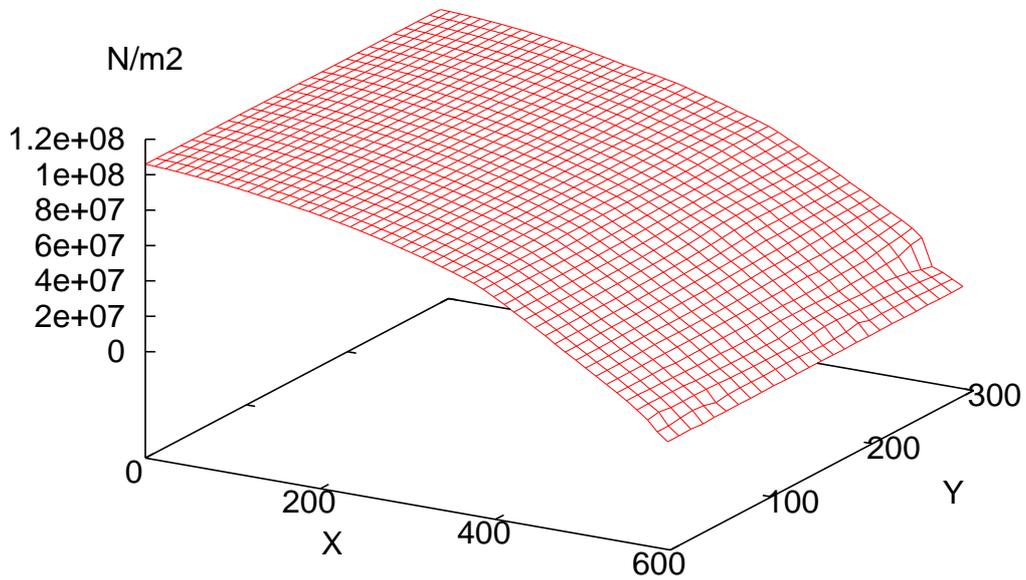
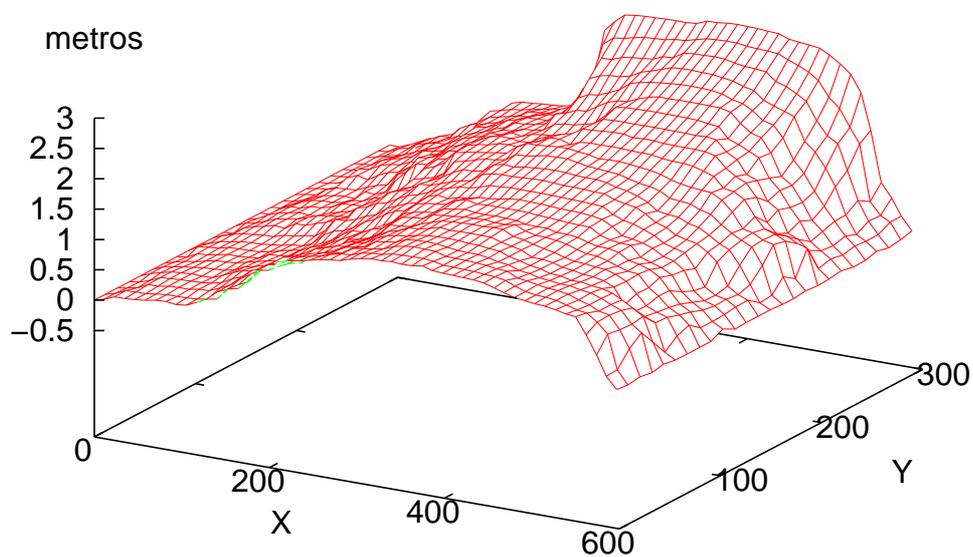


Figura 4.27: Comportamento dos campos S_w , p considerando coeficiente de Young heterogêneo e $K_0 = 8 \times 10^{-14} m^2$.

Deslocamento u_x : Tempo = 360 dias



Deslocamento u_y : Tempo = 360 dias

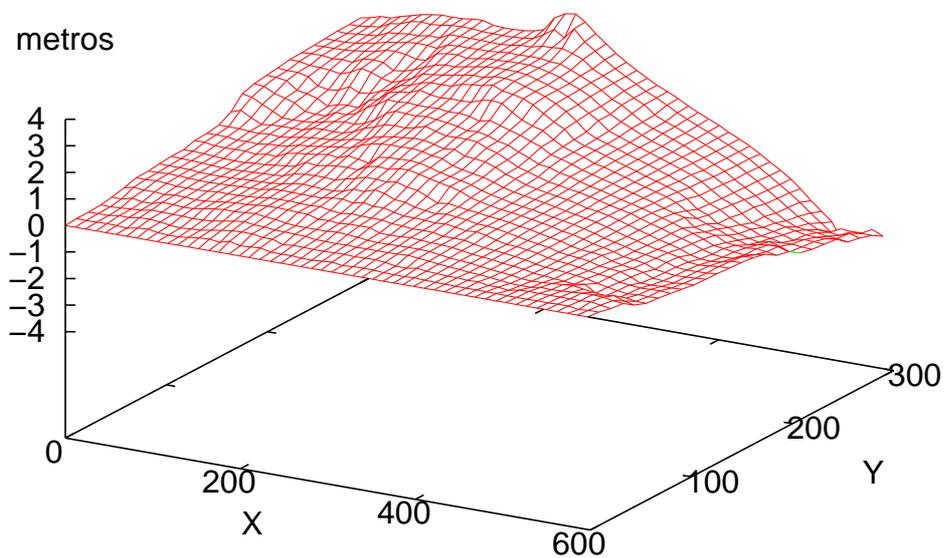
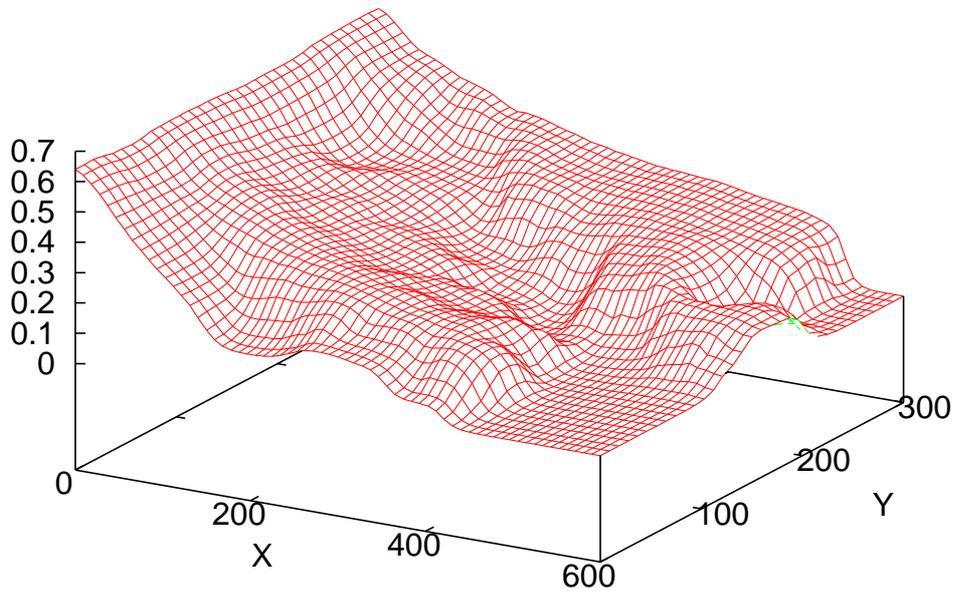


Figura 4.28: Comportamento das duas componentes do deslocamento \mathbf{u}_s considerando coeficiente de Young heterogêneo e $K_0 = 8 \times 10^{-14} m^2$.

Saturação: Tempo = 360 dias



Pressão: Tempo = 360 dias

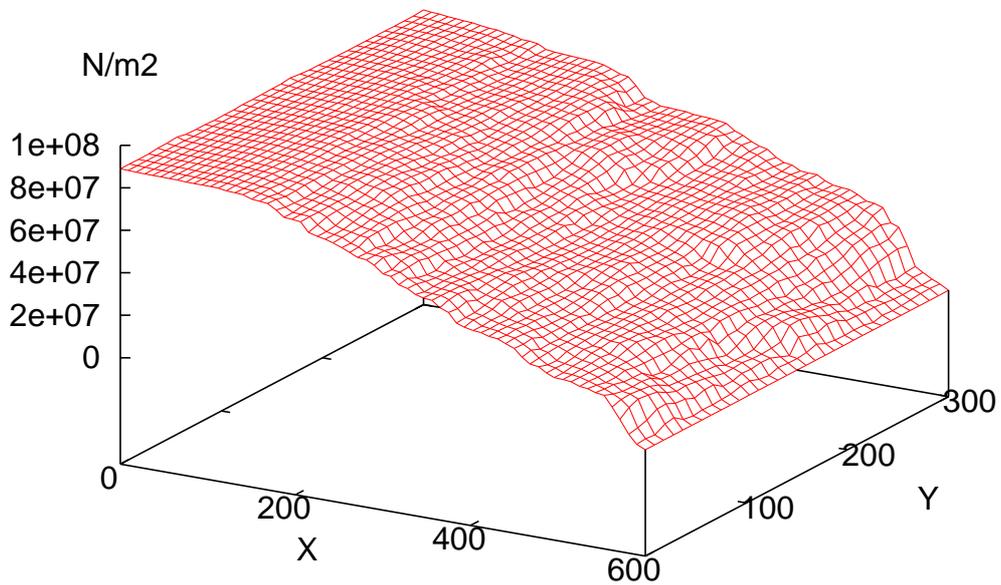
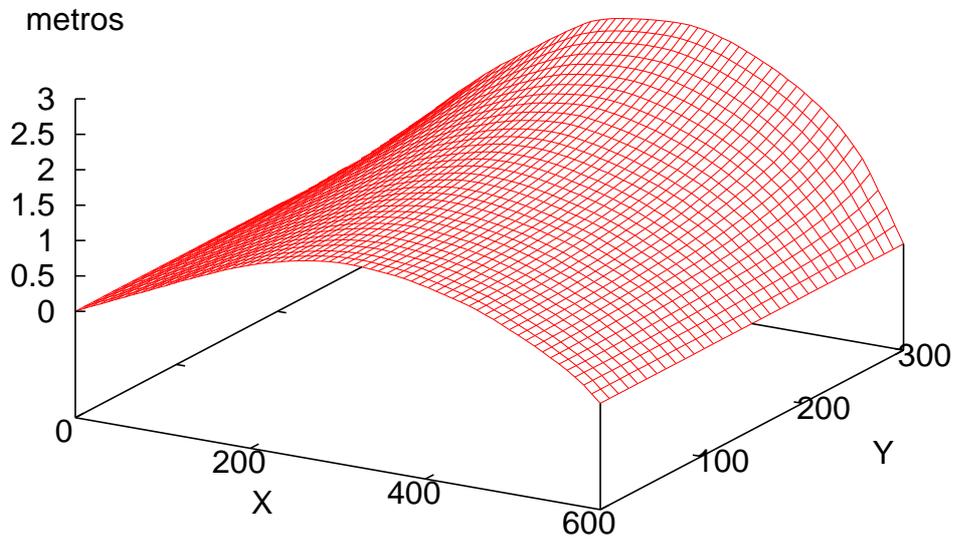


Figura 4.29: Comportamento dos campos S_w , p considerando coeficiente de Young homogêneo ($E_y = 4 \times 10^9$) e permeabilidade heterogênea.

Deslocamento Us X: Tempo = 360 dias



Deslocamento Us Y: Tempo = 360 dias

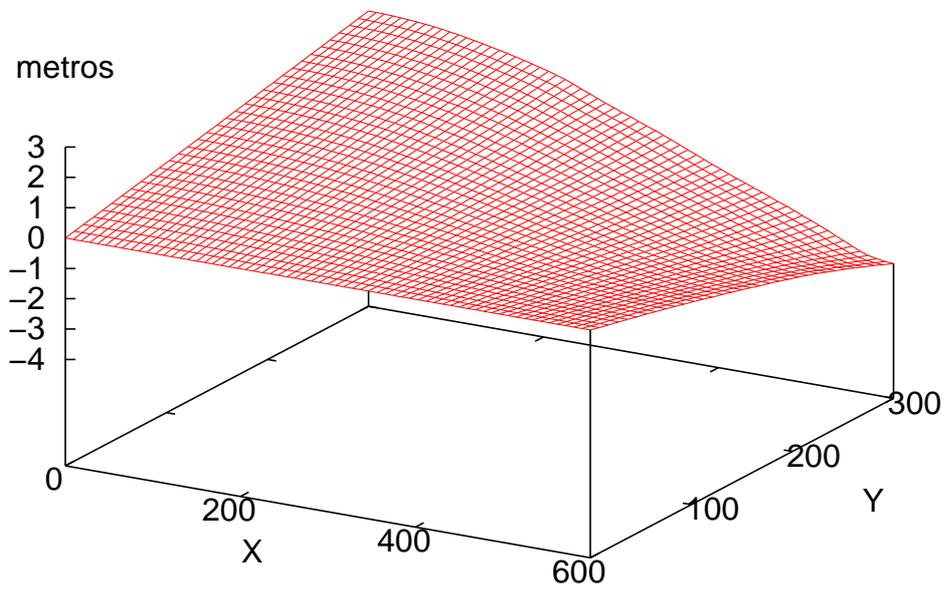
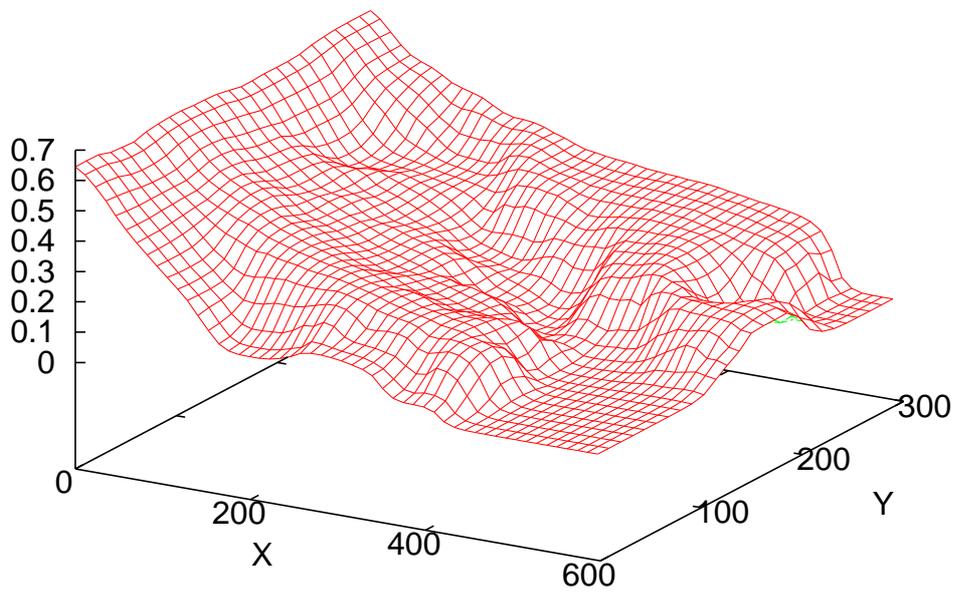


Figura 4.30: Comportamento das duas componentes do deslocamento do sólido considerando coeficiente de Young homogêneo ($E_y = 4 \times 10^9$) e permeabilidade heterogênea.

Saturação: Tempo = 360 dias



Pressão: Tempo = 360 dias

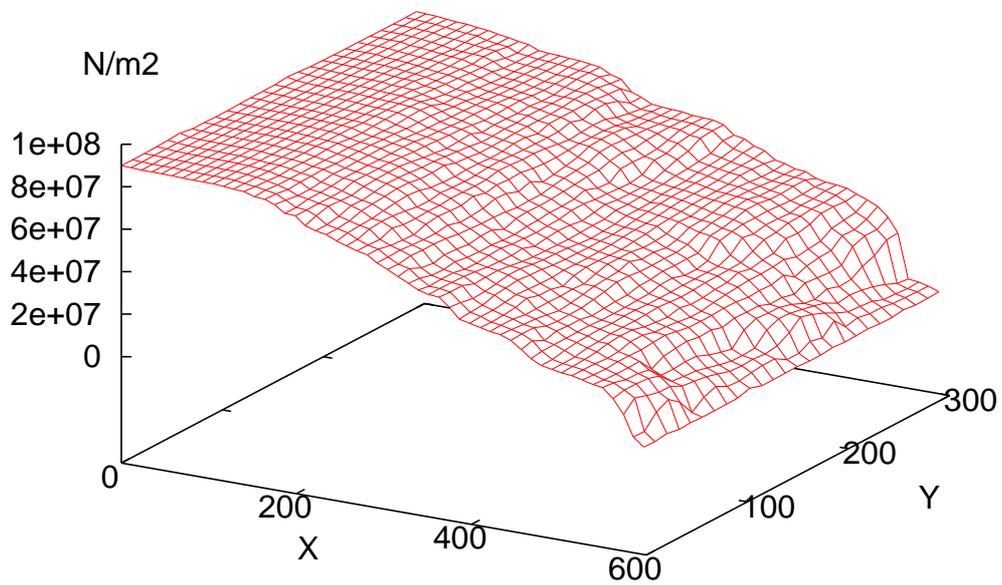
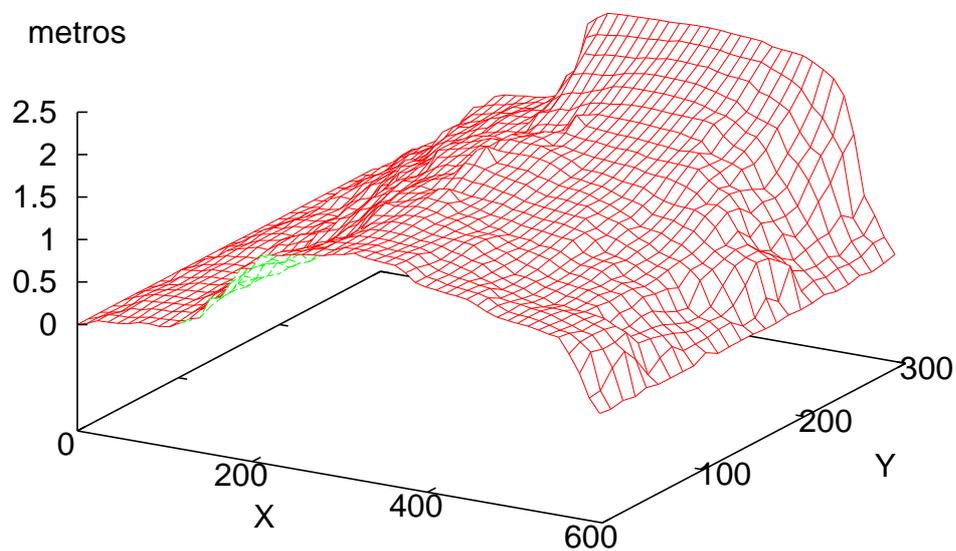


Figura 4.31: Comportamento dos campos S_w , p considerando coeficiente de Young e permeabilidade heterogêneos.

Deslocamento u_x : Tempo = 360 dias



Deslocamento u_y : Tempo = 360 dias

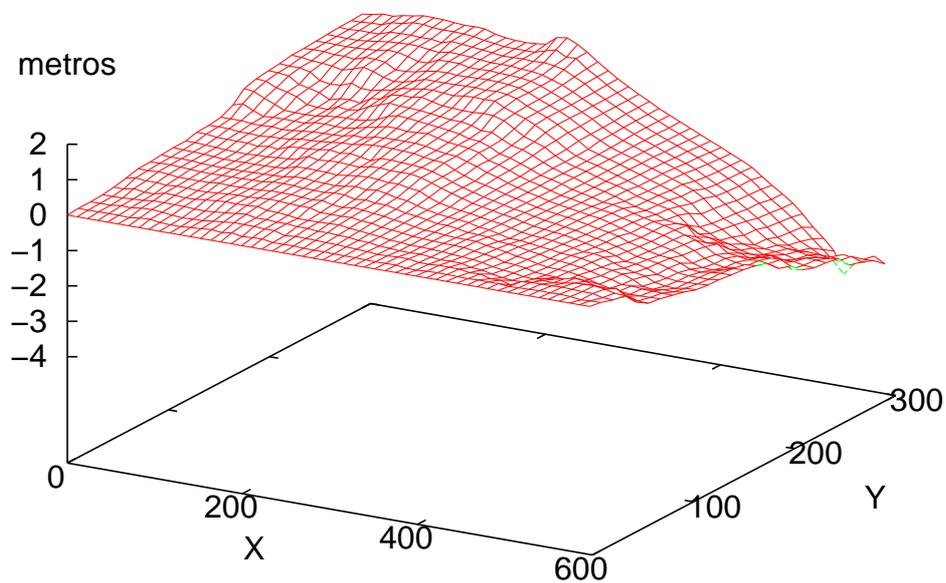
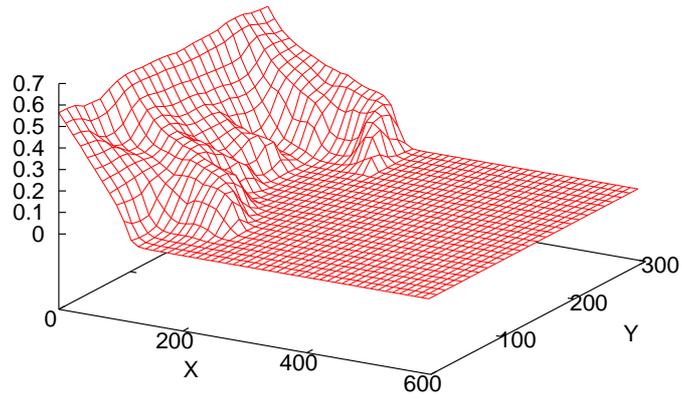
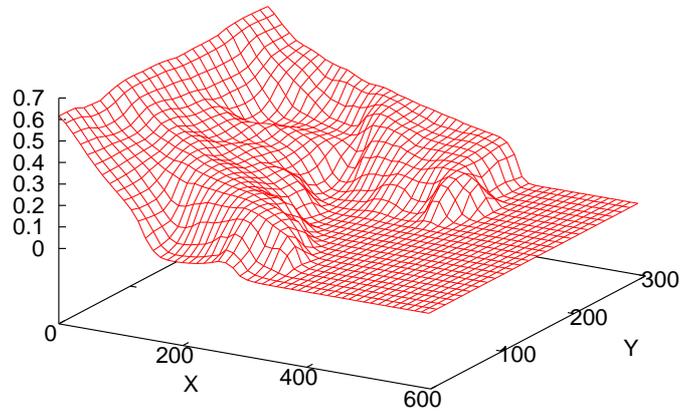


Figura 4.32: Comportamento das duas componentes do deslocamento \mathbf{u}_s considerando coeficiente de Young e permeabilidade heterogêneos.

Saturação: Tempo = 120 dias



Saturação: Tempo = 240 dias



Saturação: Tempo = 360 dias

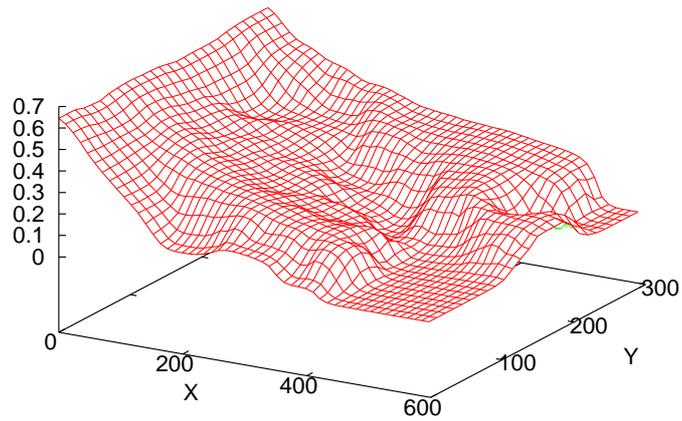


Figura 4.33: Comportamento da saturação S_w considerando heterogeneidade em E_y e K_0 .

4.8 Análise da acurácia dos métodos numéricos propostos

Para finalizar a análise do modelo determinístico de escoamento bifásico com acoplamento geomecânico apresentamos alguns resultados numéricos que ilustram a sensibilidade das curvas de produção de petróleo com o refinamento da malha e passo de tempo. Também ilustramos nesta seção a importância do pós-processamento de Petrov-Galerkin para a acurácia no cômputo da velocidade de Darcy \mathbf{V}_{Dt} .

A figura 4.34 mostra a sensibilidade das curvas de produção de óleo com o refinamento do passo de tempo para uma malha de 256×128 elementos, considerando os campos heterogêneos da figura 4.26 e os dados da tabela 4.2. Podemos observar variações insignificantes das curvas de produção com o passo de tempo, o que evidencia o fraco acoplamento entre os subsistemas da Poromecânica e da Hidrodinâmica viabilizando o algoritmo de sequenciamento proposto no capítulo anterior. A figura 4.35 mostra resultados de análise de sensibilidade com o refinamento de malha espacial, para passo de tempo da Poromecânica de 3 dias e meio homogêneo. Tal como no caso anterior podemos observar que as curvas de produção são muito semelhantes, diferenciando-se apenas nas imediações da chegada de água ao poço de produção onde o adiantamento da frente de mistura próximo à borda superior do reservatório provocado pela variação da permeabilidade com a deformação torna-se cada vez mais pronunciado, à medida que refinamos a malha.

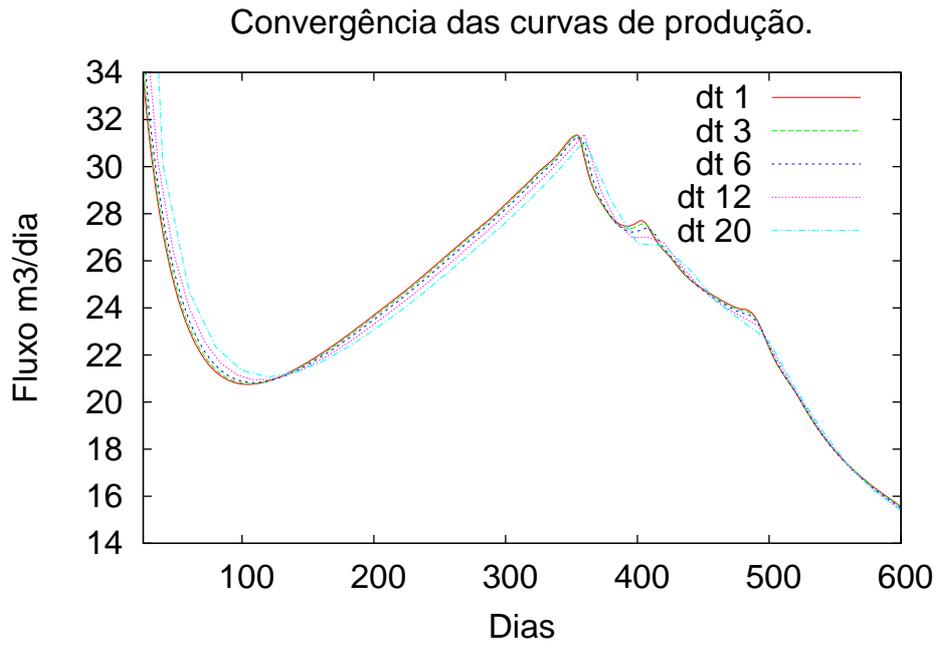


Figura 4.34: Sensibilidade das curvas de produção de óleo utilizando passos de tempo para a Poro-Mecânica de 1, 3, 6, 12, 20 dias e considerando K_0 e Ey heterogêneos.

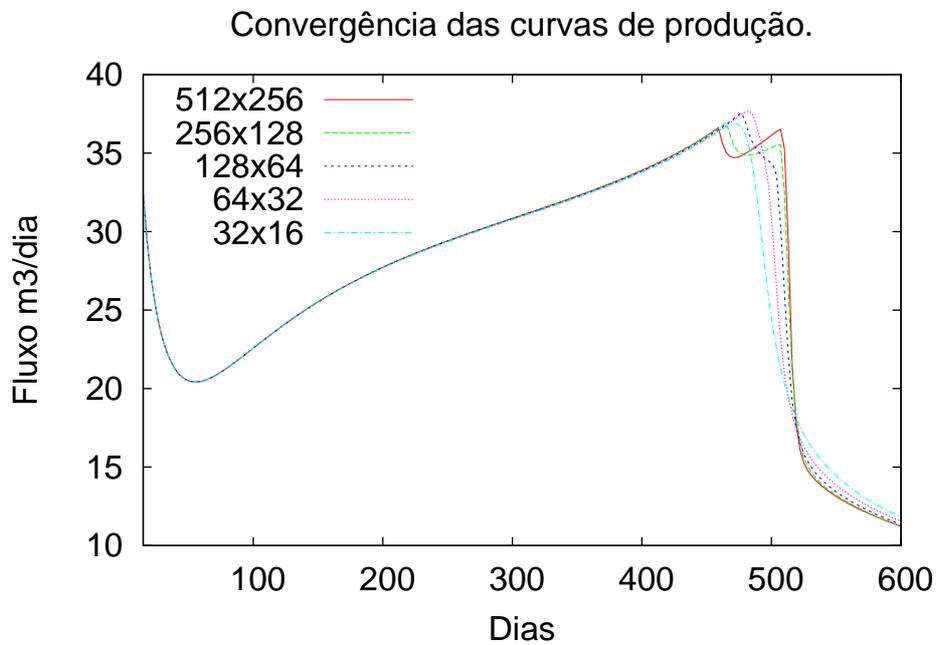


Figura 4.35: Sensibilidade das curvas de produção de óleo com o refinamento da malha para passos de tempo de 3 dias, considerando meio homogêneo.

Tal como mencionado anteriormente o cálculo da velocidade de Darcy via pós-processamento de Petrov-Galerkin adiciona à formulação variacional o resíduo do balanço de massa da lei de Darcy com o intuito de fortalecer a conservação de massa total do sistema (Loula, Rochinha, e Murad, 1995). De fato, sem o pós-processamento constatamos acúmulo de massa indevido nas simulações numéricas obtendo em alguns casos valores para o campo de saturação acima do limite teórico ($S_w > 1$). Com o objetivo de ilustrar a necessidade do pós-processamento, propomos como experimento numérico computar a média do divergente dos campos de velocidade \mathbf{v}_s e \mathbf{V}_{Dt} em cada célula Ω_e da malha deslocada por meio da expressão

$$\frac{1}{V_{\Omega_e}} \int_{\Omega_e} \text{div}(\mathbf{v}_s + \mathbf{V}_{Dt}) = \frac{1}{V_{\Omega_e}} \int_{\partial\Omega_e} (\mathbf{v}_s + \mathbf{V}_{Dt}) \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_e, \quad (4.12)$$

onde V_{Ω_e} é o volume da célula Ω_e e a integral de superfície da expressão acima é aproximada utilizando o esquema de interpolação do método NT.

A figura 4.36a mostra em cada elemento o acúmulo de massa computado sem o pós-processamento do campo de velocidades, enquanto que as figuras 4.36b, 4.36c exibem os mesmos gráficos utilizando campos de velocidade pós-processados adotando valores 1 e 100 para o parâmetro de estabilização de Petrov-Galerkin δ . Podemos constatar que o pós-processamento resulta num decréscimo significativo da geração de massa por um fator de dez vezes, sendo mais pronunciado à medida que aumentamos δ . Importante ressaltar que o pós-processamento para a computação da velocidade de Darcy se faz praticamente obrigatório no caso heterogêneo, pois o acúmulo indevido de massa acarreta predição errônea das curvas de produção de petróleo. A influência da geração de massa sobre a frente de mistura é ilustrada nas figuras 4.37 e 4.38 que apresentam a evolução do campo de saturação utilizando os campos de velocidades computados com e sem pós-processamento. Neste último caso podemos constatar acúmulo indevido de massa principalmente nas bordas do reservatório onde verificamos os maiores erros de aproximação da conservação de massa total. Nas simulações numéricas apresentadas empregamos malhas de 512×256 elementos, passo de tempo de 3 dias com campos K e Ey

heterogêneos dados pela figura 4.26.

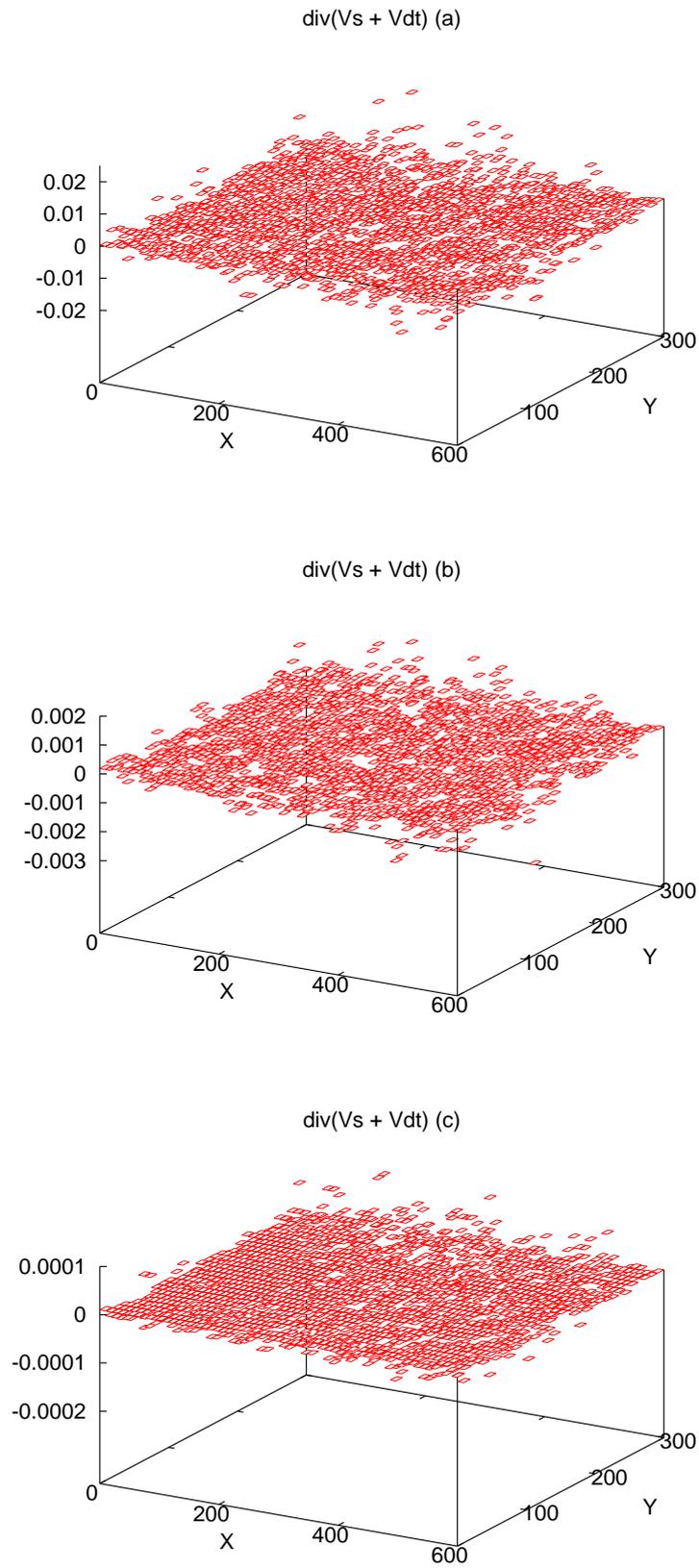
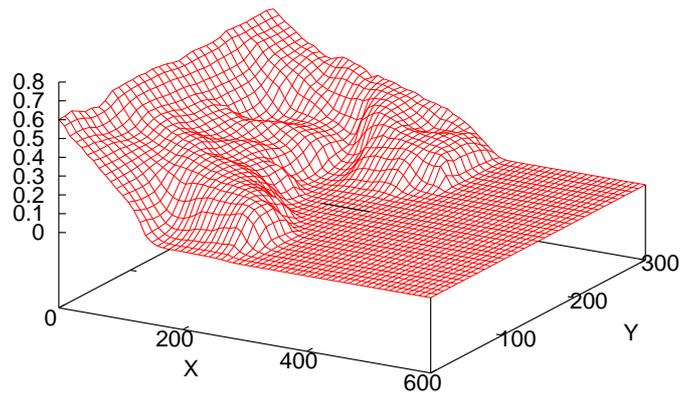
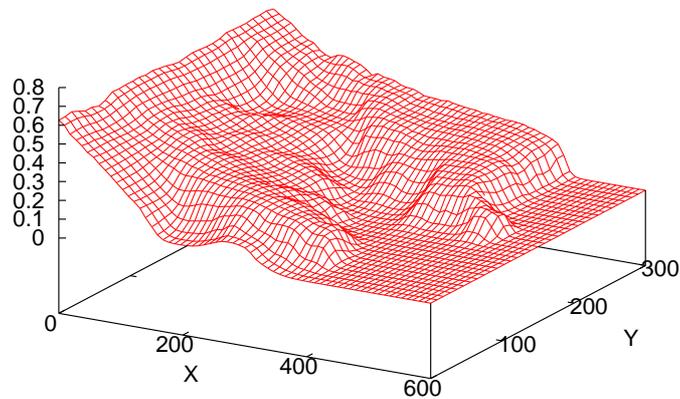


Figura 4.36: Gráficos dos valores de $\text{div}(\mathbf{v}_s + \mathbf{V}_{Dt})$ para três casos: (a) Sem pós-processamento. (b) Com pós-processamento, $\delta = 1$. (c) Com pós-processamento, $\delta = 100$.

Com Pós-Processamento: Tempo = 200 dias



Com Pós-Processamento: Tempo = 300 dias



Com Pós-Processamento: Tempo = 1000 dias

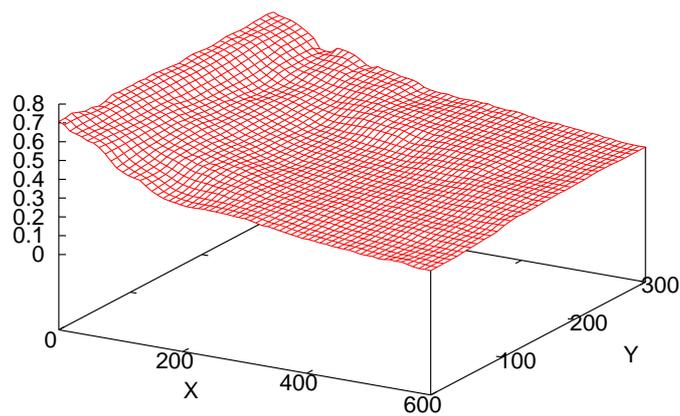
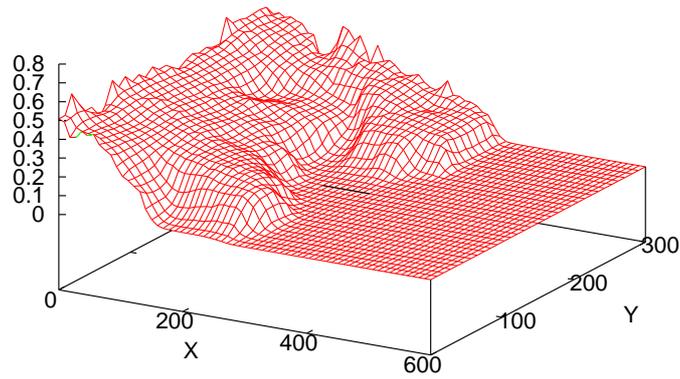
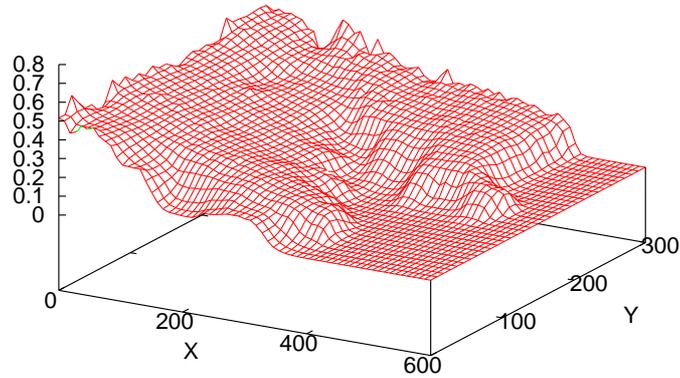


Figura 4.37: Gráficos da evolução do campo de saturação S_w com pós-processamento utilizando $\delta = 1$ e considerando heterogeneidade em E_y e K adotando malha de 512×256 elementos.

Sem Pós-Processamento: Tempo = 200 dias



Sem Pós-Processamento: Tempo = 300 dias



Sem Pós-Processamento: Tempo = 1000 dias

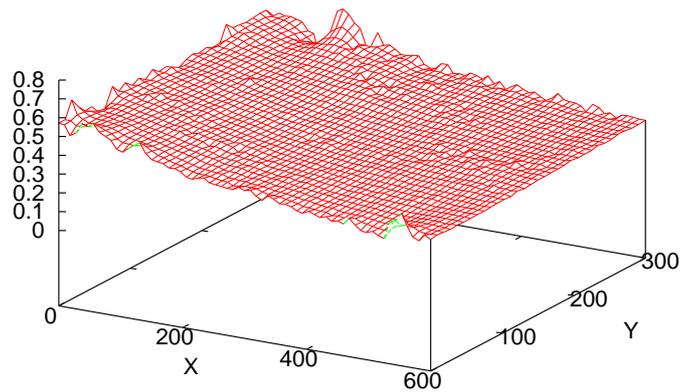


Figura 4.38: Gráficos da evolução do campo de saturação S_w obtido sem pós-processamento e considerando heterogeneidade em E_y e K_0 adotando malha de 512×256 elementos.

Capítulo 5

Modelagem Estocástica

O modelo computacional determinístico apresentado no capítulo anterior descreve o caso onde as propriedades do meio poroso são conhecidas pontualmente. Esse nível de detalhe ocorre na escala de laboratório onde são realizados os experimentos de medições das propriedades. No entanto, na escala de campo as propriedades geológicas do meio poroso tais como a permeabilidade K variam de forma irregular ao longo de distâncias maiores do que as da escala de laboratório, o que impossibilita a caracterização determinística das propriedades das formações geológicas. Para contornar esta dificuldade, a modelagem estocástica torna-se uma ferramenta alternativa poderosa, uma vez que a noção de incerteza é naturalmente incorporada ao modelo assumindo as propriedades do meio como campos aleatórios com estrutura estatística conhecida. O objetivo deste capítulo é utilizar esta ferramenta em conjunção com a metodologia apresentada no capítulo anterior para analisar o impacto das heterogeneidades e incertezas nas propriedades do meio poroso sobre as curvas de produção de petróleo.

Inicialmente apresentamos algumas noções da modelagem estocástica no contexto da descrição do coeficiente de permeabilidade do meio poroso. Em seguida introduzimos o método de Monte Carlo para computar numericamente os momentos estatísticos das variáveis do problema e, por fim, analisamos o comportamento da média das curvas de produção de óleo para diferentes graus de heterogeneidade do meio poroso considerando os logaritmos da permeabilidade e do módulo

de Young como variáveis aleatórias gaussianas. Para explicações mais detalhadas e abrangentes envolvendo os conceitos apresentados neste capítulo sugerimos os livros de Gelhar (1993), Dagan (1989), Zhang (2001), Rubin (2003).

5.1 Descrição estatística da permeabilidade

Observações de campo (Freeze, 1977; Sudicky, 1986; Gelhar, 1986) baseadas no histograma da permeabilidade sugerem que a estatística de um ponto de K é dada por uma distribuição de probabilidade Log-Normal de forma que

$$Y = \ln(K), \quad (5.1)$$

é uma variável aleatória Gaussiana ou Normal cuja função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right]. \quad (5.2)$$

A constante μ_Y na expressão acima é denominada esperança ou valor médio da variável gaussiana Y definida por

$$\mu_Y := \langle Y \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) dx. \quad (5.3)$$

As constantes σ_Y^2 , σ_Y em (5.2) representam a variância e o desvio padrão de Y dadas respectivamente por

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = \langle (Y - \mu_Y)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_Y)^2 f_Y(x) dx, \quad (5.4)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2}. \quad (5.5)$$

O grau de heterogeneidade da permeabilidade de meios porosos é medido por um número adimensional denominado de coeficiente de variação (CV) definido pela razão (Dagan, 1989)

$$CV(K) = \frac{\sigma_K}{\mu_K}, \quad (5.6)$$

onde μ_K e σ_K são a esperança e a variância do campo K . A magnitude de CV reflete a intensidade das flutuações em torno da média, ou seja, formações com alto grau de heterogeneidade são descritas por valores altos de CV.

Fazendo uso das equações (5.1), (5.2) relacionamos a média e a variância de K com os momentos estatísticos da variável gaussiana Y definida em (5.1) através das relações (Dagan, 1989)

$$\mu_K = \exp [\mu_Y + \sigma_Y^2/2], \quad (5.7)$$

$$\sigma_K^2 = \exp [2\mu_Y + \sigma_Y^2] (\exp \sigma_Y^2 - 1). \quad (5.8)$$

Usando (5.7), (5.8) em (5.6) podemos representar $CV(K)$ da forma

$$CV(K) = \sqrt{\exp \sigma_Y^2 - 1}. \quad (5.9)$$

Para completarmos a caracterização estatística do campo de permeabilidade necessitamos conhecer a interdependência estatística de dois pontos a qual é governada pela correlação da variável aleatória K . Uma metodologia simples para tal descrição baseia-se na função de covariância entre dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} definida como

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle \hat{Y}(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{y}) \rangle, \quad (5.10)$$

onde \hat{Y} denota a flutuação da variável gaussiana Y em torno de sua média

$$\hat{Y} := Y - \mu_Y. \quad (5.11)$$

Neste trabalho adotamos a hipótese de estacionaridade em que a média de K é constante e a covariância $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ depende apenas da distância $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ entre dois pontos. Uma situação particular da estacionariedade é chamada de isotropia estatística onde a variância depende somente da distância $|\mathbf{r}|$. Tal propriedade é incorporada ao modelo considerando geologia fractal dada pela lei de potência (Gelhar, 1993)

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c|\mathbf{r}|^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad (5.12)$$

O expoente β é denominado coeficiente de Hurst (Mandelbrot e Wallis, 1968). Seu valor mede o grau da heterogeneidade nas múltiplas escalas. Valores baixos de β (≤ 1) enfatizam correlações longas com decaimento lento, enquanto valores elevados $\beta > 1$ enfatizam correlações curtas. Salientamos que neste trabalho também consideramos o coeficiente de Young como uma variável aleatória Log-Normal com lei de covariância idêntica à da permeabilidade.

5.2 Método de Monte Carlo

Ao considerarmos K e E_y variáveis aleatórias, o sistema de EDP's governantes do acoplamento hidromecânico passa a ser composto por equações diferenciais estocásticas com as incógnitas S_w , p , \mathbf{u}_s descritas por funções de densidade de probabilidade. Apesar da resolução do sistema de equações estocásticas constituir um problema de extrema dificuldade, na prática o conhecimento dos dois primeiros momentos estatísticos já é suficiente para a maioria das aplicações em simulações de reservatórios (Gelhar, 1993). Tais momentos podem ser computados utilizando o algoritmo de Monte Carlo que consiste basicamente de três passos. Primeiramente

geramos realizações dos campos aleatórios K e Ey de acordo com suas estruturas estatísticas. Em seguida para cada realização i resolvemos numericamente o modelo determinístico do acoplamento geomecânico obtendo as soluções numéricas S_α^i referentes às incógnitas $\alpha = \{S_w, p, \mathbf{u}_s\}$. Finalmente, após obtermos esse conjunto de soluções aproximamos a esperança μ_α e a variância σ_α^2 das variáveis primárias do problema por meio dos somatórios

$$\mu_\alpha(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_\alpha^i, \quad (5.13)$$

$$\sigma_\alpha^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_\alpha^i - \mu_\alpha(n))^2, \quad (5.14)$$

onde n é o número de realizações. À medida que n aumenta, o par $\{\mu_\alpha(n), \sigma_\alpha^2(n)\}$ converge estatisticamente para $\{\mu_\alpha, \sigma_\alpha\}$ respectivamente. Na implementação numérica utilizamos um número finito de realizações adotando como critério de convergência estatística

$$|\mu_\alpha(n) - \mu_\alpha(n+1)| < \epsilon, \quad (5.15)$$

onde ϵ é um parâmetro de tolerância dado. As realizações fractais dos campos de condutividade e do módulo de Young empregadas neste trabalho foram construídas utilizando o algoritmo LABTRAN-GEO desenvolvido e implementado por Borges (2006).

5.3 Comportamento médio do modelo estocástico

Nesta seção estudamos os efeitos da heterogeneidade do meio poroso sobre o acoplamento geomecânico considerando apenas a permeabilidade como variável aleatória e mantendo o módulo de Young constante $Ey = 4 \times 10^9 N/m^2$. Nas simulações numéricas utilizamos uma malha contendo 512×256 blocos geológicos com um bloco por elemento, domínio retangular de 600×300 metros, passo de

tempo para a Poromecânica de 3 dias e supondo K constante em cada elemento com média $\mu_K = 8 \times 10^{-14} m^2$, coeficiente de variação $CV(K) = 0.7$ e lei de covariância dada pela equação (5.12) com $\beta = 0.5$. Os parâmetros de entrada do problema e as condições de contorno são especificados na tabela 5.1. Com o intuito de identificarmos a influência da aleatoriedade da permeabilidade sobre o acoplamento hidrogeomecânico comparamos os resultados obtidos com os do problema homogêneo determinístico. Nesse caso, consideramos o valor de permeabilidade igual à media do caso estocástico, isto é, $K_{\text{hom}} = \mu_K = 8 \times 10^{-14} m^2$. Exceto para o campo de deslocamento vertical, a média das soluções estocásticas possui um perfil unidimensional exibindo pequenas variações em Y . Para facilitar a apresentação, os perfis unidimensionais dos campos S_w , p , $\mathbf{V}_{\mathbf{D}\mathbf{o}}$ mostrados neste capítulo são obtidos tomando as médias transversais das soluções ao longo do eixo Y .

dimensão do reservatório:	$600m \times 300m \times 1m$
porosidade inicial:	$\phi_0 = 0.25$
saturação inicial:	$S_{w0} = 0$
saturação residual:	$S_{wr} = 0, S_{or} = 0$
viscosidade da água:	$\mu_w = 10^{-3} Ns/m^2$
viscosidade do óleo:	$\mu_o = 20\mu_w$
módulo de Poisson:	0
Mobilidade Relativa:	$\lambda_w(S_w) = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - S_w)^2}$
Mobilidade total:	$\lambda_t(S_w) = \frac{S_w^2}{\mu_w} + \frac{(1 - S_w)^2}{\mu_o}$
Injeção de água:	0.1 m/dia
Pressão no poço de produção:	0 N/m ²
Peso sobre o reservatório:	$580 \times 10^5 N/m^2$
Condições de Contorno	
$\mathbf{V}_{\mathbf{D}\mathbf{t}}(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0$ m/dia	sobre $\Gamma_i \cup \Gamma_u$, $\mathbf{u}_{\mathbf{s}1}(x, t) = 0m$ sobre $x \in \Gamma_e \cup \Gamma_d$,
$\mathbf{V}_{\mathbf{D}\mathbf{t}}(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0.1$ m/dia	sobre Γ_e , $\mathbf{u}_{\mathbf{s}2}(x, t) = 0m$ sobre $x \in \Gamma_i$,
$p(x, t) = 0$ N/m ²	sobre Γ_d , $\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = 580 \times 10^5$ N/m ² em $x \in \Gamma_s$.

Tabela 5.1: Propriedades do reservatório e condições de contorno.

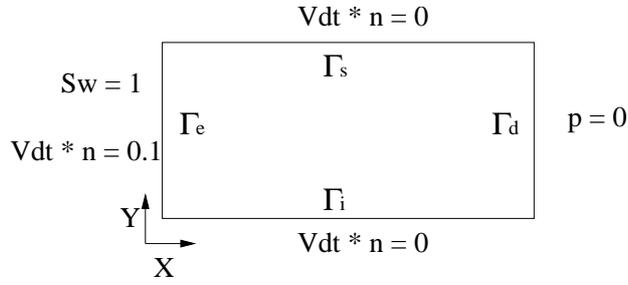


Figura 5.1: Condição de contorno para a pressão.

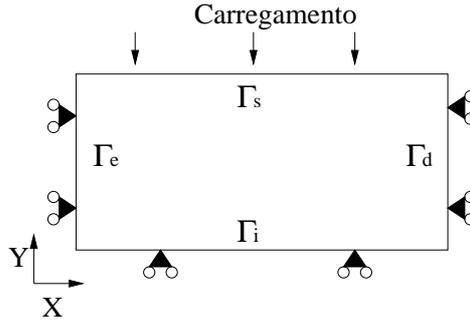


Figura 5.2: Condição de contorno para a deformação.

A figura 5.3 mostra a evolução dos perfis de saturação ao longo do eixo longitudinal comparando o caso determinístico com matriz porosa deformável homogênea (caso 1) e os casos estocásticos com matriz porosa elástica heterogênea (caso 2) e matriz porosa rígida heterogênea (caso 3). Nos casos com escoamento bifásicos adotamos $M = 20$. Tal como podemos observar, o principal efeito da aleatoriedade de K sobre o comportamento médio da saturação é um progressivo crescimento da região de mistura à medida que a água inunda o meio poroso que, por sua vez, provoca a suavização da solução em torno da região de choque. Tal fenômeno já foi validado e estudado em Furtado e Pereira (2003) no contexto de meio poroso rígido e deve-se ao fato da variabilidade espacial da permeabilidade propiciar a formação de dedos da mistura para cada uma das realizações do campo K ocasionando uma difusão do valor médio da saturação em torno da região de choque. Nossos experimentos numéricos mostram que as mesmas considerações são válidas para meios deformáveis. Detectamos apenas um pequeno atraso da frente de mistura em relação ao caso rígido atribuído ao fenômeno de expansão da matriz

porosa o qual é revertido posteriormente no processo de consolidação secundária.

Para estudar os efeitos da razão de viscosidade entre os fluidos e da aleatoriedade de K sobre o comportamento da poromecânica, consideramos os casos de meio poroso elástico homogêneo com escoamento bifásico (caso 1) e meio poroso elástico heterogêneo com escoamento bifásico (caso 2) e traçador passivo (caso 3). A figura 5.4 mostra a evolução do comportamento da média transversal da poropressão para estas três situações. Ao compararmos os dois últimos casos verificamos que os efeitos provocados pela razão de viscosidade dos fluidos reportados no caso determinístico da seção 4.5 ainda se fazem presentes no caso estocástico. Em particular, percebemos uma contínua diminuição da pressão do poro à medida que a permeabilidade hidráulica da mistura aumenta com a injeção de água. Já os efeitos da aleatoriedade da permeabilidade podem ser melhor observados comparando os problemas homogêneo e heterogêneo (casos 1 e 2). Notamos que o crescimento da frente de mistura induz uma suavização do perfil de pressão do caso (2) evidenciada pela ausência de singularidades no gradiente do perfil de pressão em relação ao caso determinístico (1). Observamos também que a magnitude de pressão no caso (2) é maior do que no caso (1). Tal discrepância ocorre porque o valor de permeabilidade no caso homogêneo K_{hom} não corresponde à melhor aproximação constante do campo de permeabilidade do caso heterogêneo (2). Este fato é bem conhecido na área de modelagem estocástica (Dagan, 1989), podendo-se provar que nos casos onde podemos definir um valor de permeabilidade efetivo K_{eff} , este é sempre menor do que a média do campo aleatório K , ou seja, $K_{\text{eff}} < \mu_K = K_{\text{hom}}$.

A figura 5.5 mostra as curvas médias do deslocamento vertical do sólido ao longo do eixo $Y = 300m$ para os três problemas apresentados no parágrafo anterior. A aleatoriedade de K não provoca mudanças significativas sobre a evolução do campo de deslocamento vertical. De fato, verificamos que o caso heterogêneo (2) apresenta os mesmos regimes de deformação do que o do caso determinístico (1), havendo inicialmente uma expansão do reservatório nas regiões próximas ao poço de injeção seguida posteriormente de um gradual processo de consolidação

secundária que se estende ao longo de todo o processo extrativo. A única diferença relevante é o fato da deformação vertical do caso (2) ser maior do que a do caso (1). Tal comportamento é consequência da desigualdade $K_{\text{eff}} < K_{\text{hom}}$ que possibilita a pressão do poro do problema homogêneo ser menor do que a do problema heterogêneo. Assim como no caso homogêneo, a consolidação secundária verificada no problema estocástico (2) deve-se à variação da permeabilidade hidráulica conforme podemos verificar na comparação com os perfis de deslocamento vertical do caso do traçador passivo (3).

A influência do crescimento da região de mistura sobre o escoamento do óleo é ilustrada pela figura 5.6 que mostra o perfil da velocidade do óleo para o problema homogêneo deformável (caso 1), o problema heterogêneo deformável (caso 2) e para o problema heterogêneo rígido (caso 3). O crescimento da região de mistura induz uma suavização do perfil médio da componente horizontal de \mathbf{V}_{Do} em relação ao caso determinístico e antecipa a chegada de água no poço de produção. É importante ressaltar que o caso heterogêneo (2) apresenta os mesmos 4 regimes identificados na seção 4.6 no contexto de simulações determinísticas. No entanto, o crescimento da região de mistura antecipa a chegada de água no poço de extração e modifica a escala de tempo desses regimes sobre as curvas de produção de óleo (ver casos (1) e (2) da figura 5.7).

O caso (2) da figura 5.7 mostra a curva da produção média de óleo do problema heterogêneo em meio deformável. De forma semelhante ao caso homogêneo (1), podemos identificar inicialmente um pico de produção correspondente ao processo de extração primária de petróleo seguido por um decaimento abrupto que passa a ser menor do que a quantidade de água injetada ($30\text{m}^3/\text{dia}$) devido ao processo de expansão volumétrica da matriz porosa nas regiões próximas ao poço de injeção. A partir do dia 50, há um contínuo aumento de produção auxiliado pelo processo de consolidação secundária do meio poroso que chega a fazer com que a produção de óleo se torne maior do que o fluxo de água injetado por volta do dia 300 caracterizando o terceiro regime. No momento onde o processo de consolidação

secundária começa a compensar a diminuição de produção provocada pela expansão inicial do meio poroso, ocorre a chegada de água no poço comprometendo o processo extrativo. A influência da variabilidade de K sobre as curvas de produção também pode ser percebida no contexto de meios porosos rígidos (casos 3 e 4 da figura 5.7), onde verificamos que a heterogeneidade do meio poroso antecipou a chegada de água no poço de produção em torno de 200 dias em relação ao caso determinístico. Também percebemos que no caso heterogêneo ocorre uma suavização do decaimento da produção após a ocorrência da eclosão de água devido à difusão do valor médio do campo de saturação em torno da região de choque.

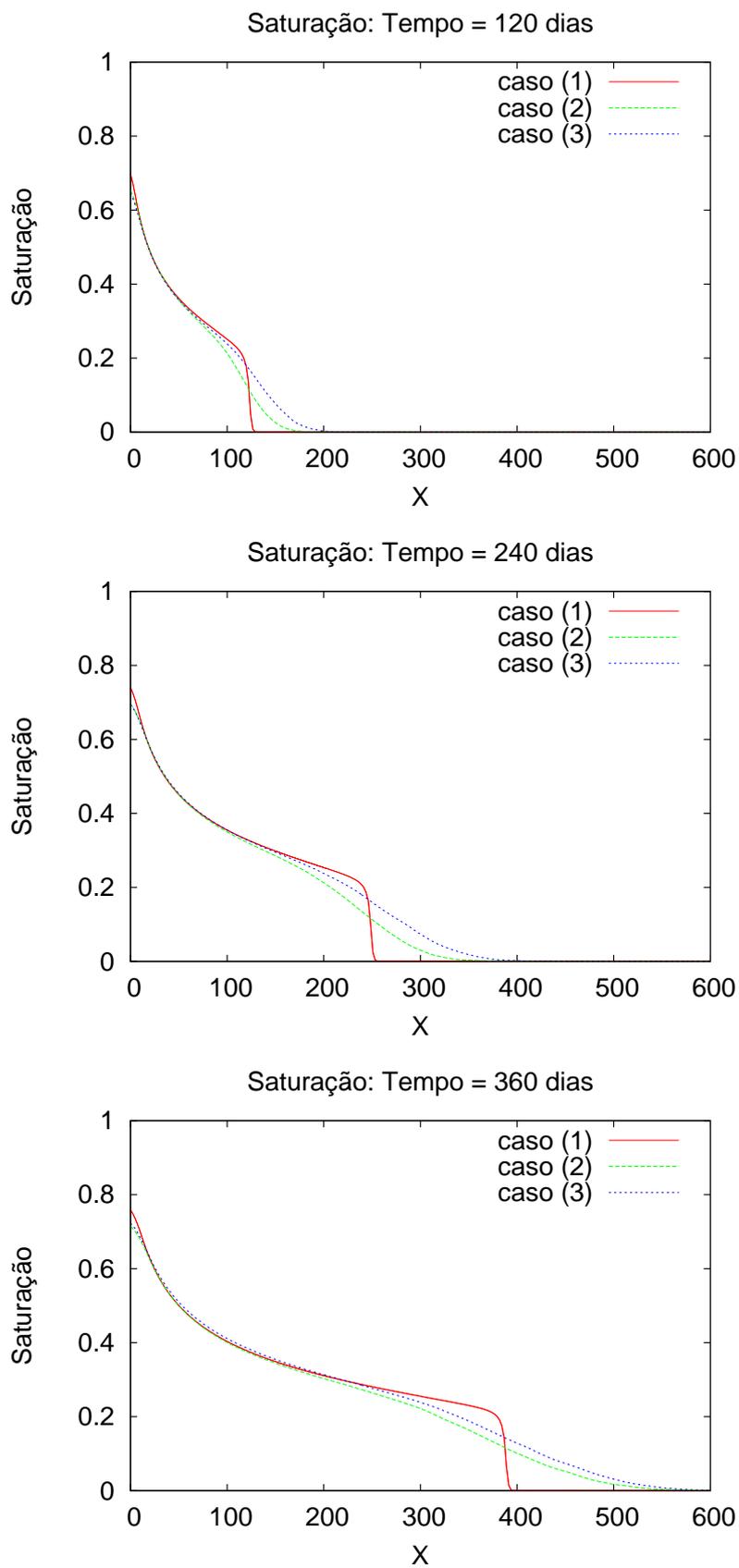


Figura 5.3: Médias dos campos de saturação: (1) Matriz porosa homogênea deformável; (2) Matriz porosa heterogênea deformável; (3) Matriz porosa heterogênea rígida.

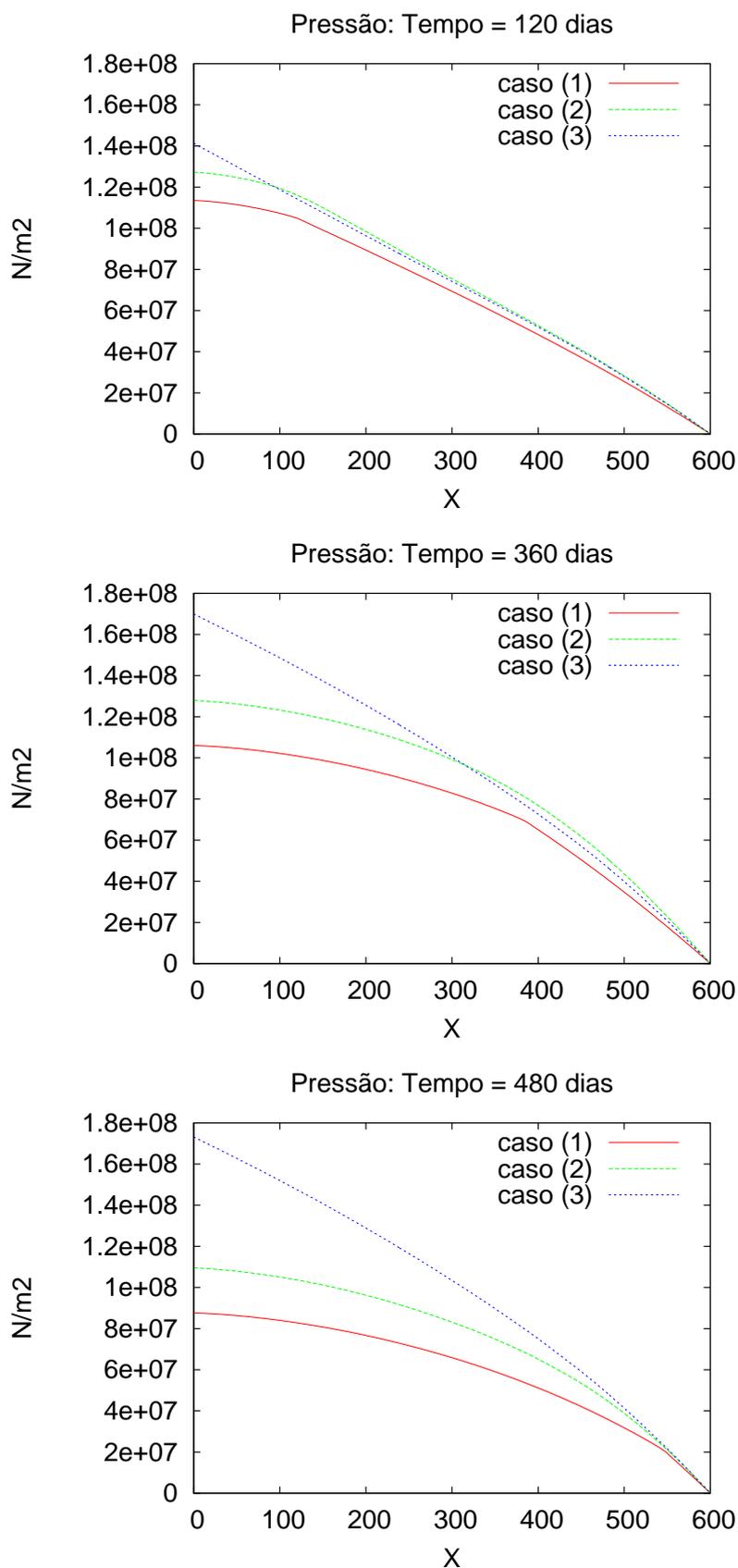


Figura 5.4: Comparação dos perfis médios de pressão: (1) Matriz porosa homogênea deformável e escoamento bifásico; (2) Matriz porosa heterogênea deformável e escoamento bifásico; (3) Matriz porosa heterogênea deformável e traçador passivo.

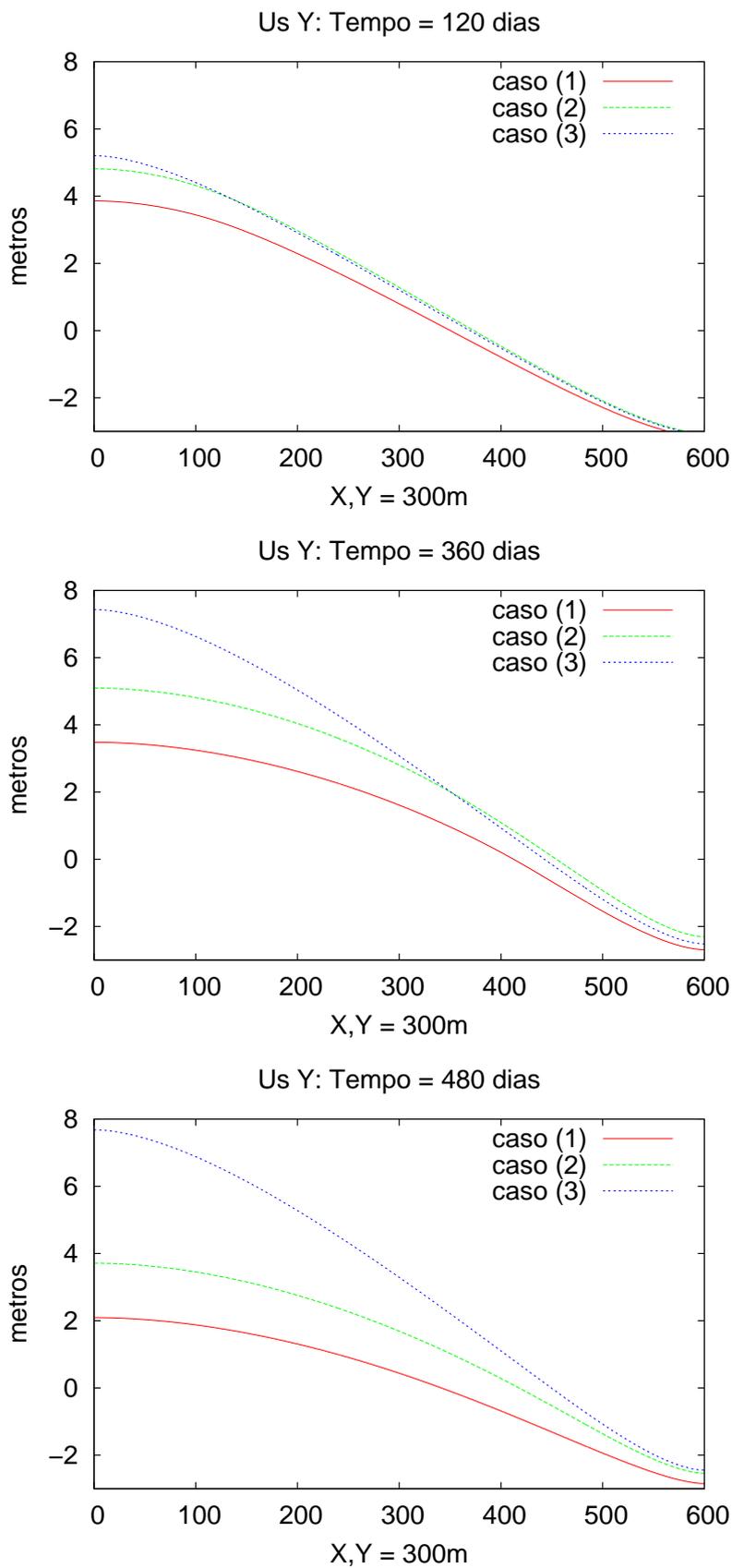


Figura 5.5: Comparação do deslocamento vertical do sólido ao longo do eixo $Y = 300m$: (1) Matriz porosa homogênea deformável e escoamento bifásico; (2) Matriz porosa heterogênea deformável e escoamento bifásico; (3) Matriz porosa heterogênea deformável e traçador passivo.

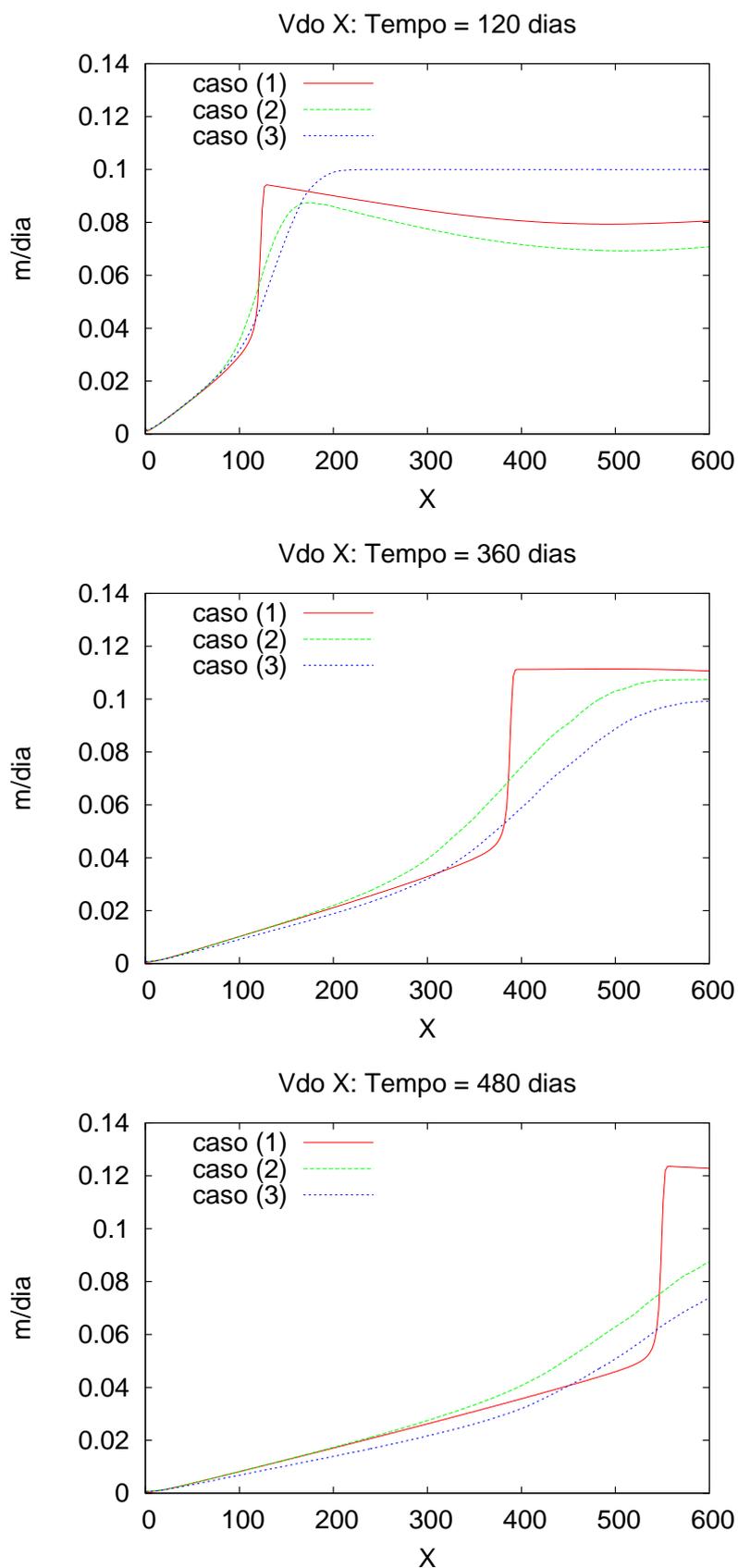


Figura 5.6: Comparação entre os perfis médios da componente horizontal de \mathbf{V}_{D_0} para escoamento bifásico: (1) Matriz porosa homogênea deformável; (2) Caso estocástico com matriz porosa deformável; (3) Caso estocástico com matriz porosa rígida.

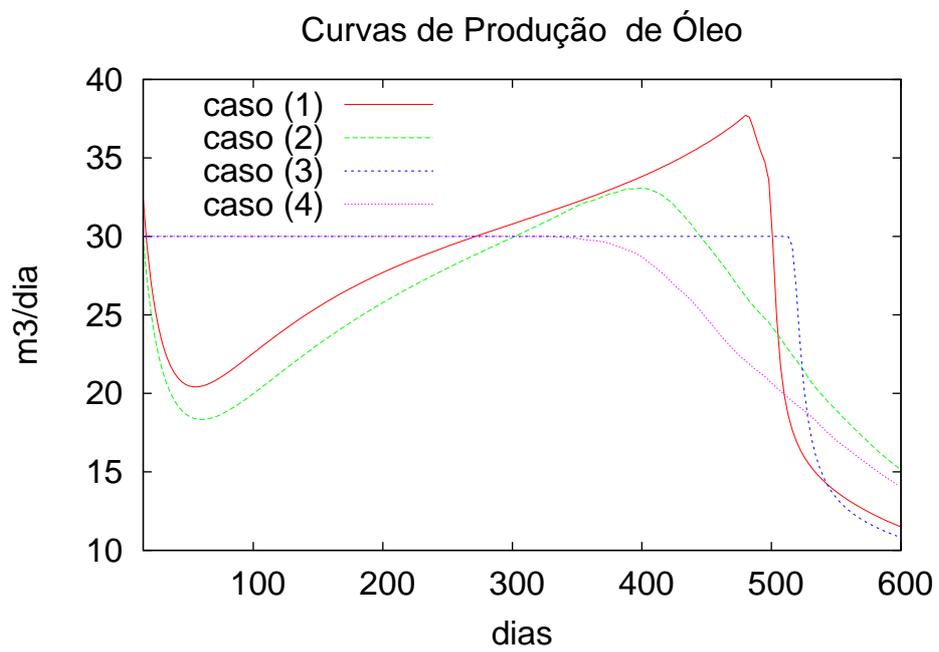


Figura 5.7: Comparação das curvas médias de produção de óleo para escoamento bifásico: (1) Meio deformável homogêneo; (2) Meio deformável heterogêneo ; (3) Meio poroso rígido homogêneo; (4) Meio poroso rígido heterogêneo.

5.4 Influência da variabilidade do módulo de Young

Com a finalidade de segregarmos os efeitos provocados pela aleatoriedade do módulo de Young, analisamos nesta seção a influência da heterogeneidade do meio poroso sobre o comportamento médio do acoplamento hidrogeomecânico considerando permeabilidade homogênea ($K_{\text{hom}} = 8 \times 10^{-14} m^2$) e módulo de Young descrito por uma variável aleatória Log-normal com média $\mu_{Ey} = 4 \times 10^9 N/m^2$ e $CV = 0.7$.

Em linhas gerais os efeitos da aleatoriedade do módulo de Young sobre o acoplamento hidrogeomecânico são semelhantes aos da permeabilidade, porém ocorrem em uma escala bem menor. A figura 5.8 mostra as curvas médias da saturação para os casos homogêneo e heterogêneo. Podemos notar que a aleatoriedade do módulo de Young induz o crescimento da região de mistura, porém com magnitude bem menor do que o crescimento propiciado pela aleatoriedade do coeficiente de permeabilidade.

A influência da aleatoriedade de Ey sobre a poromecânica é mais evidente para o campo de deslocamento não acarretando grandes mudanças na poro-pressão. Esse fato é ilustrado nas figuras 5.9, 5.10 que comparam os campos de pressão e deslocamento vertical do sólido para os casos homogêneo determinístico e heterogêneo estocástico. Na figura 5.10 podemos observar que a variação do deslocamento vertical obtida no caso homogêneo é menor do que a do caso estocástico. Atribuímos essa diferença ao fato do valor efetivo do módulo de Ey , que corresponde ao melhor valor a ser utilizado pelo caso homogêneo para aproximar o caso estocástico, ser sempre menor do que a média do campo aleatório do módulo de Young, isto é, $Ey_{\text{eff}} \leq \mu_{Ey} = Ey_{\text{hom}} = 4 \times 10^9 N/m^2$. Podemos também observar que o caso heterogêneo apresenta os mesmos regimes de deformação do que os do caso homogêneo.

A figura 5.11 mostra as curvas médias da velocidade de percolação do óleo para os casos homogêneo e heterogêneo estocástico. Neste último constatamos a influência do crescimento da região de mistura na suavização do campo \mathbf{V}_{Do} e

identificamos os mesmos quatro regimes de evolução do caso homogêneo. Importante salientar que o impacto da aleatoriedade do módulo de Young sobre as curvas de produção é bem menor do que o da permeabilidade. Os casos (1) e (2) da figura 5.12 comparam os gráficos das curvas de produção para o caso homogêneo determinístico e o caso estocástico com aleatoriedade apenas para $E\gamma$. Percebemos que as curvas são muito próximas, em oposição à situação em que considerarmos aleatoriedade apenas em K (caso (3) da figura 5.12) onde a diferença em relação à curva do caso homogêneo (1) é bem maior. Finalmente, o caso (4) da figura 5.12 apresenta a ação conjunta da aleatoriedade de K e $E\gamma$ onde, através da comparação com o caso (3), constatamos novamente a fraca influência do módulo de Young sobre as curvas de produção.

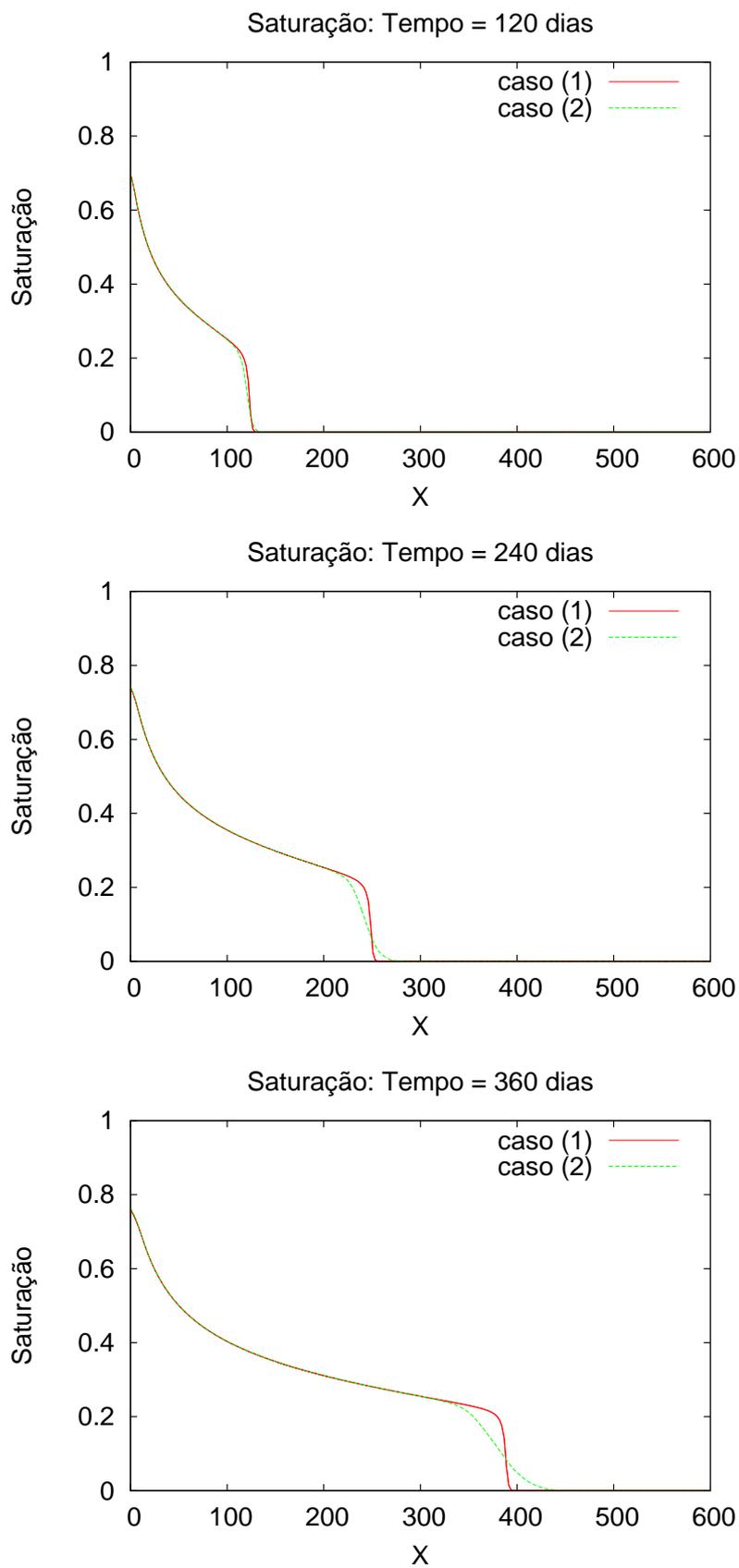


Figura 5.8: Médias dos campos de saturação: (1) Matriz porosa homogênea deformável; (2) Matriz porosa heterogênea deformável com aleatoriedade apenas em E_y .

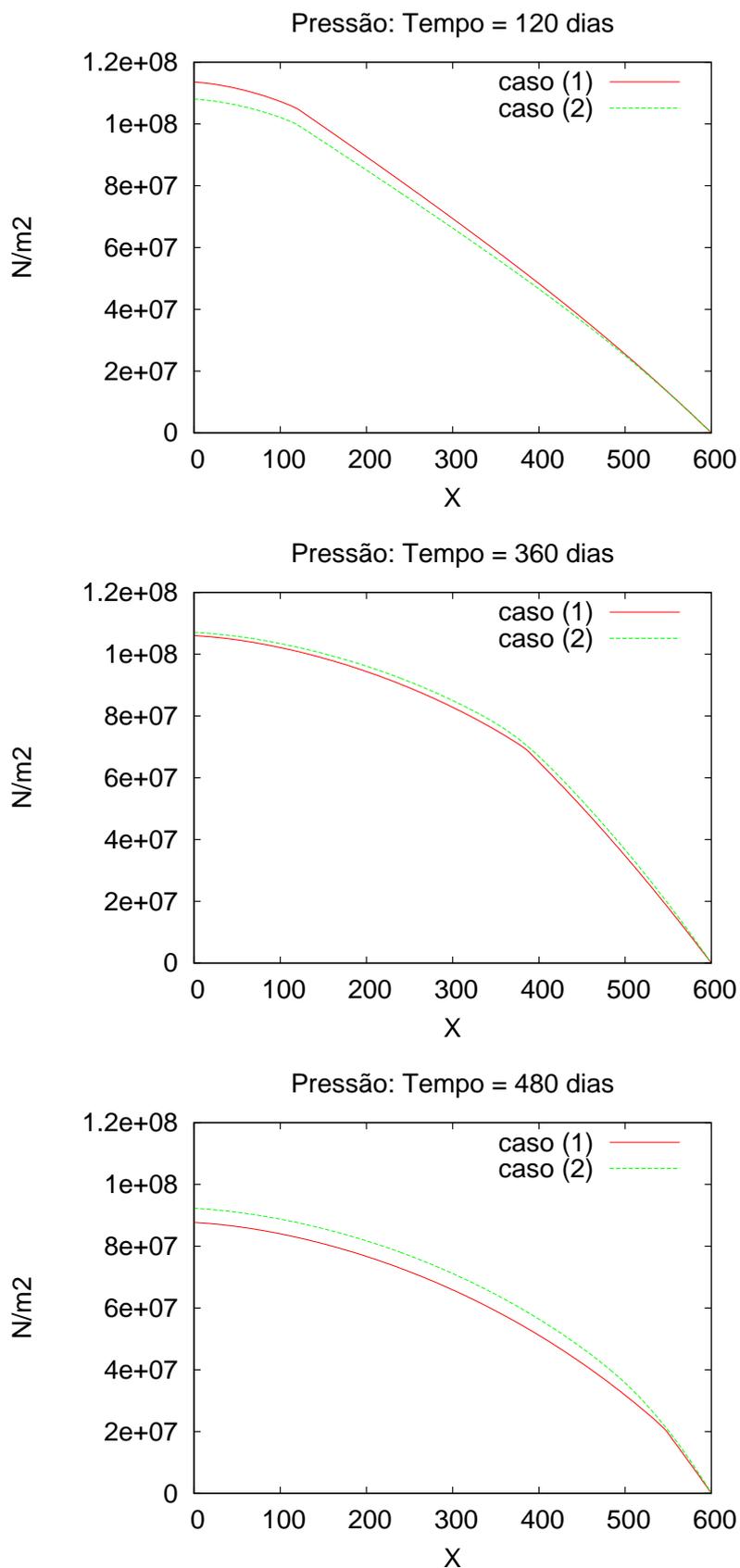


Figura 5.9: Comparação entre os perfis médios de pressão com escoamento bifásico: (1) Matriz porosa homogênea; (2) Matriz porosa heterogênea com aleatoriedade somente em E_y .

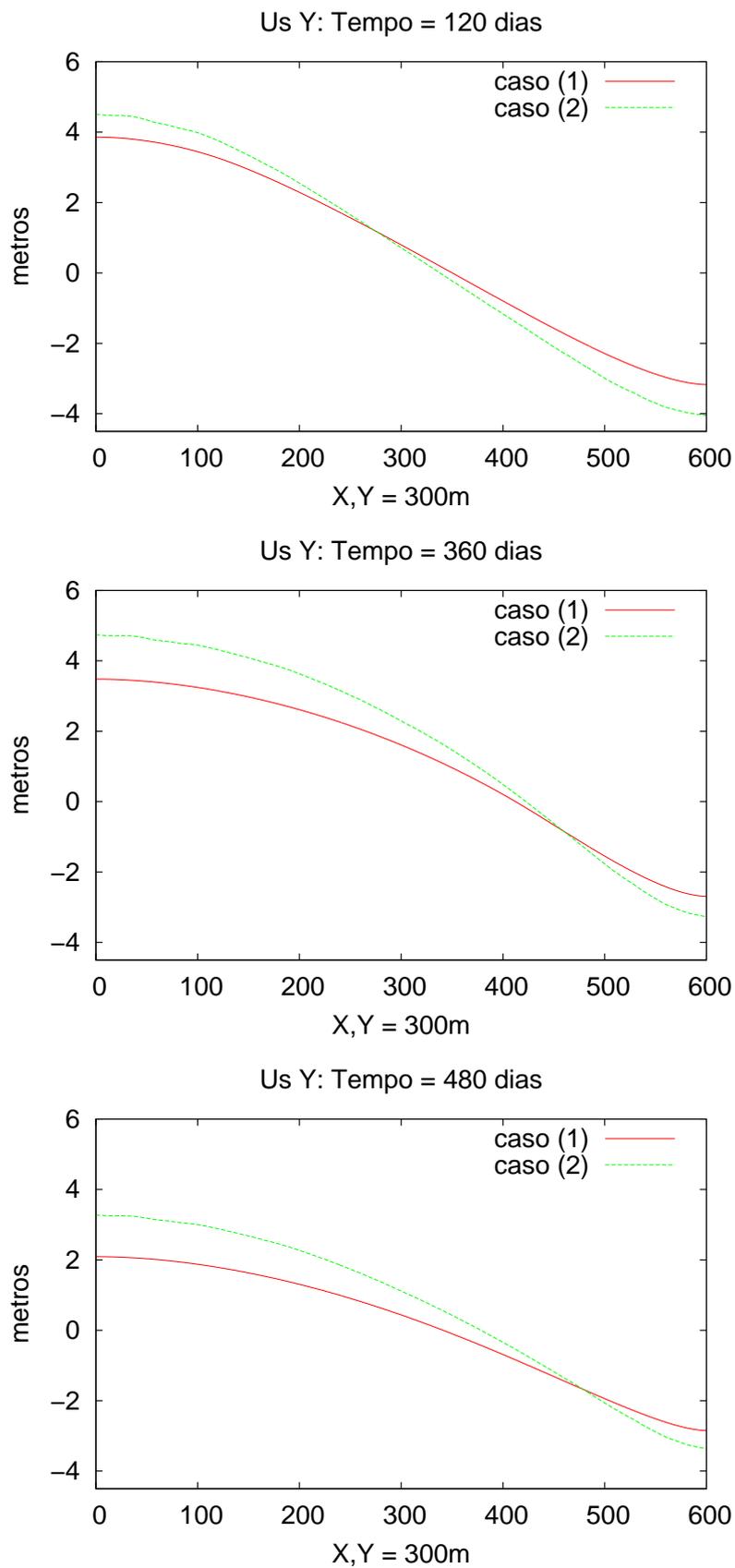


Figura 5.10: Comparação entre os perfis do deslocamento vertical do sólido ao longo do eixo $Y = 300m$ para escoamento bifásico: (1) Matriz porosa homogênea deformável (2) Matriz porosa heterogênea deformável.

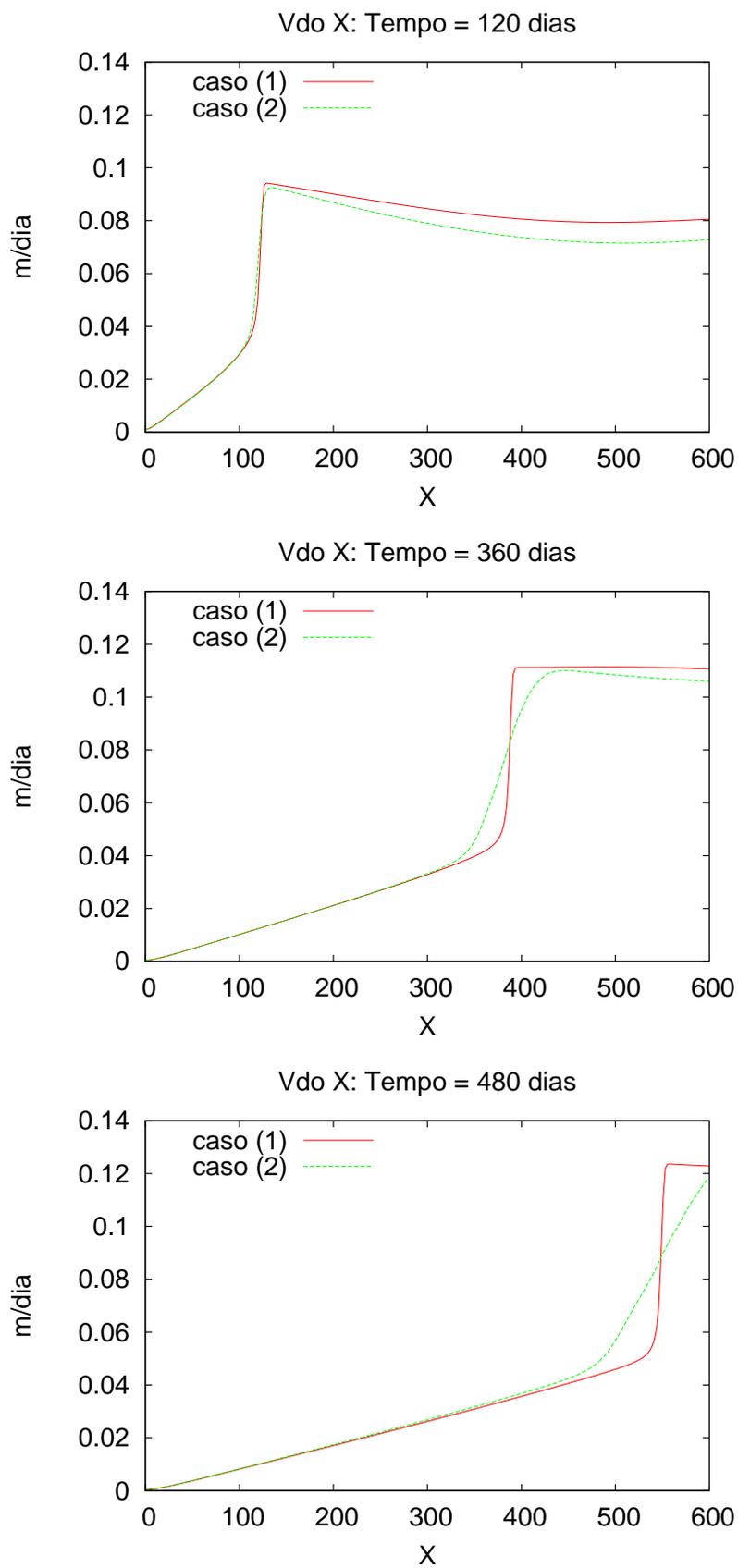


Figura 5.11: Comparação entre os perfis médios da componente horizontal de \mathbf{V}_{D0} para escoamento bifásico: (1) Matriz porosa homogênea deformável; (2) Matriz porosa heterogênea deformável com aleatoriedade só em Ey .

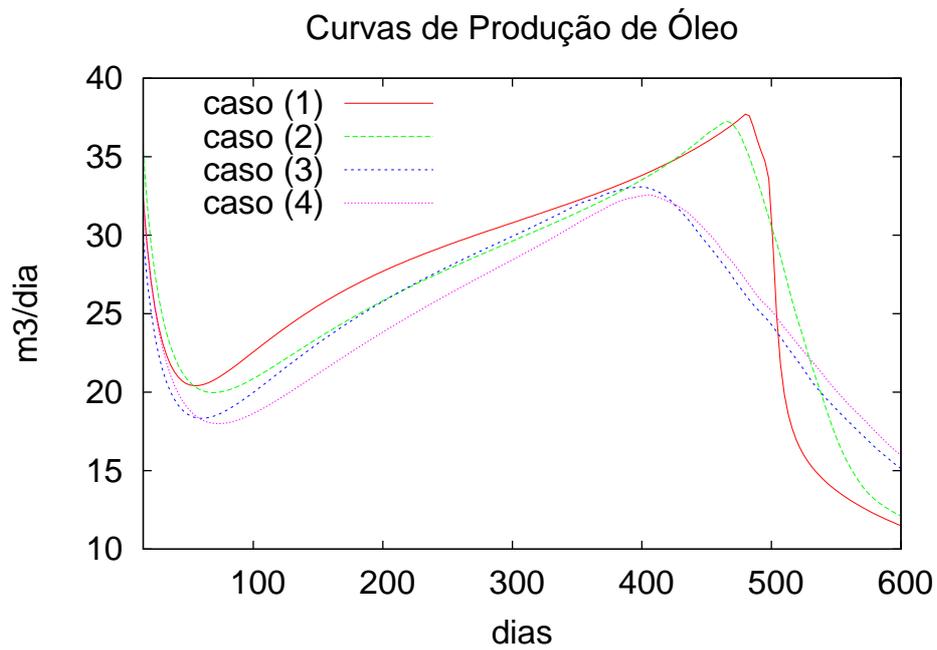


Figura 5.12: Comparação entre as curvas médias de produção de óleo para escoamento bifásico: (1) Meio deformável homogêneo; (2) Meio deformável heterogêneo com aleatoriedade só em Ey ; (3) Meio deformável heterogêneo com aleatoriedade só em K ; (4) Meio deformável heterogêneo com aleatoriedade em Ey e em K .

Em resumo, os experimentos mostram que o principal efeito da heterogeneidade sobre o comportamento médio do sistema é o crescimento da região de mistura, sendo todos os demais efeitos consequências diretas deste último. Tal fenômeno antecipa a chegada de água ao poço de extração modificando significativamente as curvas de produção de óleo e tem como causa preponderante a aleatoriedade do coeficiente de permeabilidade, havendo pouca influência da variabilidade do módulo de Young exceto para situações limites com alto grau de heterogeneidade conforme é indicado pela figura 5.13 que ilustra a sensibilidade das curvas de produção de óleo para diferentes valores do $CV(Ey)$. Importante salientar que para regimes de deformação elastoplásticos a variabilidade do módulo de Young é um fator decisivo para a definição das regiões sujeitas à plastificação ou colapso de poros podendo ter grande impacto sobre o escoamento e a produção de óleo. Tal estudo, no entanto, é ainda um tema em aberto que deverá ser abordado em trabalhos futuros.

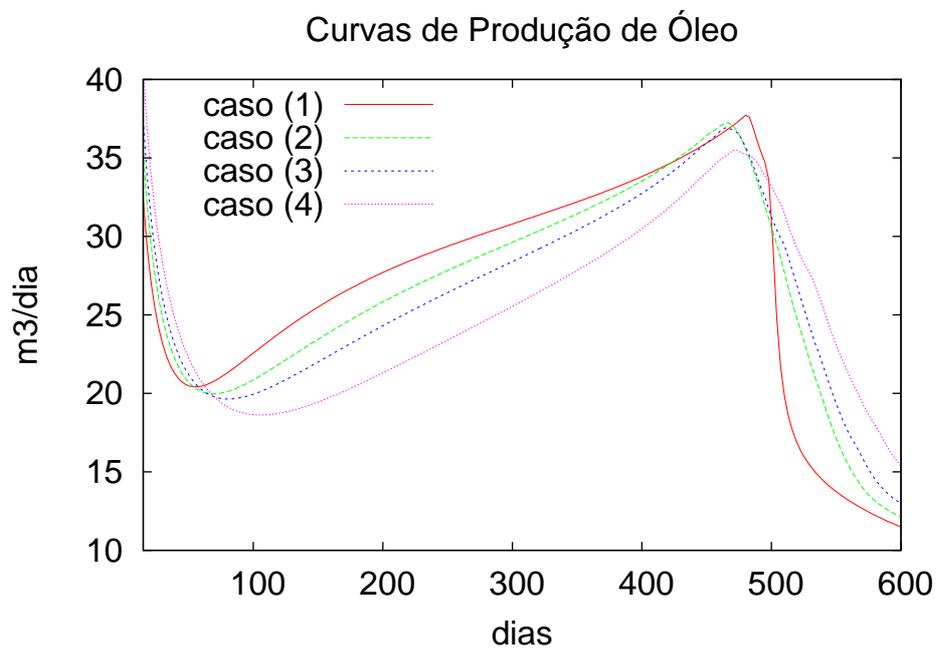


Figura 5.13: Comparação das curvas médias de produção de óleo para escoamento bifásico considerando aleatoriedade só em Ey : (1) Meio deformável homogêneo ($CV(Ey) = 0$); (2) $CV(Ey) = 0.7$; (3) $CV(Ey) = 1$; (4) $CV(Ey) = 1.5$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho identificamos novos fenômenos inerentes aos modelos de acoplamento geomecânico. A análise dos resultados numéricos para um problema de extração secundária de petróleo mostraram que a razão de viscosidade entre a água e o óleo desencadeia um mecanismo não linear de iteração entre o Transporte e a Poromecânica que prolonga o regime transiente da deformação do meio poroso causando modificações consideráveis sobre o escoamento e as curvas de produção de óleo. Tal mecanismo se dá principalmente pela dependência da condutividade hidráulica com a saturação que ocasiona diminuição da resistência do meio poroso ao escoamento da mistura água-óleo à medida que a frente de mistura avança em direção ao poço de produção. Em particular, ao considerarmos vazão de água constante no poço de injeção observamos uma gradual diminuição da pressão do poro seguida por um processo de adensamento retardado do meio poroso que perdura durante todo o processo extrativo até a chegada de água no poço de produção. Constatamos que esse movimento de compressão da matriz porosa altera de forma significativa as curvas de produção de óleo em relação ao caso rígido sendo responsável por um aumento súbito da produção de óleo nas imediações do Breakthrough.

Como segunda contribuição inovadora deste trabalho, analisamos o impacto da heterogeneidade do meio poroso sobre o comportamento médio do sistema Hidrogeomecânico fazendo uso da modelagem estocástica em conjunção com o método de Monte Carlo. A nosso juízo, tais estudos são inéditos no contexto de

escoamento bifásico em meios deformáveis. Resultados semelhantes foram encontrados para modelos de escoamento monofásico (Frias et al., 2004) ou que assumem matriz porosa rígida (ex. Furtado e Pereira (1998)).

Para a obtenção dos resultados numéricos foi desenvolvida uma nova metodologia de discretização do modelo de acoplamento geomecânico capaz de incorporar as heterogeneidades do meio poroso. Por questões de eficiência computacional e estabilidade numérica, optamos por dividir o sistema de equações em basicamente dois subsistemas: o subsistema parabólico da Poromecânica que rege o acoplamento entre a pressão e as tensões e deformações do meio poroso e o subsistema do Transporte formado pela equação de transporte da fase água. Ambos subsistemas são, a princípio, formulados e discretizados como problemas independentes entre si e, em seguida, acoplados por um eficiente algoritmo de sequenciamento apresentado no capítulo 3. A utilização deste algoritmo foi validada através de um estudo de convergência da solução numérica com o refinamento da malha e do passo de tempo que indicou que os dois subsistemas são de fato fracamente acoplados. Como inovação para os algoritmos de sequenciamento de modelos de acoplamento Hidrogeomecânico propusemos a computação do efeito transiente da porosidade sobre o escoamento através da técnica de decomposição de operadores. A computação deste efeito possibilita a conservação de massa dos fluidos durante a expansão e compressão da matriz porosa sendo de extrema importância para a correta caracterização do escoamento conforme foi verificado pelos testes numéricos apresentados no capítulo 4.

Na discretização do subsistema da Poromecânica utilizamos o método de Galerkin com interpolações Lagrangianas. Apesar dessa estratégia ser mais barata computacionalmente do que os métodos de elementos finitos mistos, ela não é capaz de gerar campos de velocidade conservativos quando consideramos meios porosos heterogêneos em que os coeficientes de permeabilidade e elasticidade variam espacialmente. Para contornar este problema empregamos uma técnica de pós-processamento dos campos de velocidade sugerida por (Loula et al., 1995) cuja

importância para a conservação de massa total foi verificada por experimentos numéricos no capítulo 4.

Para trabalhos futuros propomos a extensão da implementação numérica para três dimensões e a utilização de métodos numéricos para o transporte mais precisos como o método KT (Ribeiro, 2007) e a família dos métodos de Galerkin Descontínuo Aizinger et al. (2000) que apresentam menor difusão artificial e propriedades de estabilidade tão boas quanto às do método NT. Para a obtenção de dados mais realistas, também necessitamos da elaboração de modelos geomecânicos mais detalhados que contemplem os efeitos da pressão capilar, da gravidade e da plastificação da matriz porosa. Este último efeito é de grande importância para a identificação das regiões propensas à produção de areia ou sujeitas ao colapso dos poros. Ainda sobre a acurácia das formulações matemáticas dos modelos de acoplamento geomecânico salientamos que os fenômenos observados dependem das condições de contorno impostas na fronteira do reservatório. Dessa forma, torna-se imprescindível um melhor estudo da interação entre poço e reservatório com o intuito de obtermos condições de contorno mais realistas. Quanto à validação da discretização do modelo de acoplamento, apesar dos métodos de resolução empregados separadamente para os módulos da Poromecânica e do Transporte já terem sido estudados por Murad e Loula (1994) e Nesyahu e Tadmor (1990) respectivamente, nos falta ainda garantir a estabilidade do algoritmo de sequenciamento sugerido no capítulo 3, ou seja, provarmos matematicamente que os erros provocados por iterarmos cada um dos módulos separadamente sejam limitados ao longo do tempo. Não obstante, a discretização numérica e a análise dos resultados obtidos neste trabalho se revelam extremamente úteis como ponto de partida para a discretização de modelos geomecânicos mais elaborados e para a identificação de novos fenômenos pertinentes à interação entre a poromecânica e o escoamento.

Bibliografia

- A. Abdulraheem, M. Zaman, e J. C. Roegiers. A finite-element model for ekofisk field subsidence. **JOURNAL OF PETROLEUM SCIENCE AND ENGINEERING**, 10(4):299–310, April 1994.
- E. Abreu. **Modelagem e simulação computacional de escoamentos trifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos**. Tese de Doutorado, IPRJ-UERJ, 2007.
- E. Abreu, J. Douglas, F. Furtado, D. Marchesin, e F. Pereira. Three-phase immiscible displacement in heterogeneous petroleum reservoirs. **MATHEMATICS AND COMPUTERS IN SIMULATION**, 73(1-4):2–20, November 2006.
- V. Aizinger, C. Dawson, B. Cockburn, e P. Castillo. The local discontinuous galerkin method for contaminant transport. **ADVANCES IN WATER RESOURCES**, 24(1):73–87, October 2000.
- E. E. Alonso, A. Gens, e A. Josa. A constitutive model for partially saturated soils. **GEOTECHNIQUE**, 40(3):405–430, September 1990.
- F. C. Arnes, H. Lillejord, e A. Vieler. Simulation forecasts complex flow streams from ekofisk. **OIL & GAS JOURNAL**, 94(44):69–75, October 1996.
- D. N. Arnold, R. S. Falk, e R. Winther. Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry. **MATHEMATICS OF COMPUTATION**, 76(260):1699–1723, 2007.
- C. E. Baumann e J. T. Oden. A discontinuous hp finite element method for

- convection-diffusion problems. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 175(3-4):311–341, July 1999.
- J. Bear. **Hydraulics of groundwater**. MCGRAW-HILL, 1979.
- F. G. Bell, L. J. Donnelly, D. D. Genske, e J. Ojeda. Unusual cases of mining subsidence from great britain, germany and colombia. **ENVIRONMENTAL GEOLOGY**, 47(5):620–631, March 2005.
- M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. **APPLIED PHYSICS**, 12:155–164, 1941.
- M. A. Biot e D. G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation. **JOURNAL OF APPLIED MECHANICS**, 24:594–601, 1957.
- A. W. Bishop. The principle of effective stress. **TEKNISK UKEBLAD**, 106: 859–863, 1959.
- M. Borges. **Injeção de traçadores em reservatórios de petróleo: modelagem multi-escala e simulação numérica**. Tese de Doutorado, LABTRAN-UERJ, 2006.
- F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. **Math. Anal. Numér.**, 8:129–151, 1974.
- A. N. Brooks e T. J. R. Hughes. Streamline upwind petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 32(1-3):199–259, 1982.
- J. L. D. Calle, P. R. B. Devloo, e S. M. Gomes. Stabilized discontinuous galerkin method for hyperbolic equations. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 194(17):1861–1874, April 2005.

- P. C. Carman. Fluid flow through granular beds. **CHEMICAL ENGINEERING RESEARCH & DESIGN**, 15:150–156, December 1937.
- M. A. Celia, T. F. Russel, I. Herrera, e R. E. EWING. An eulerian-lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation. **ADVANCES IN WATER RESOURCES**, 13(4):187–206, December 1990.
- R. Charlier e P. Samier. Numerical simulation of the coupled behavior of faults during the depletion of a high-pressure/high-temperature reservoir. In **SPE/ISRM ROCK MECHANICS CONFERENCE**, 2002.
- G. Chavent. **Mathematical models and finite elements for reservoir simulation : single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media**. AMSTERDAM NORTH-HOLLAND, 1986.
- B. Cockburn e C. W. Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite-element method for conservation-laws .2. general framework. **MATHEMATICS OF COMPUTATION**, 52(186):411–435, April 1989.
- B. Cockburn e C. W. Shu. Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. **JOURNAL OF SCIENTIFIC COMPUTING**, 16:173–261, 2001.
- C. C. Cook, M. A. Andersen, G. Halle, E. Gislefoss, e G. R. Bowen. An approach to simulating the effects of water-induced compaction in a north sea reservoir. **SPE RESERVOIR EVALUATION & ENGINEERING**, 4(2):121–127, April 2001.
- G. Dagan. **Flow and transport in porous formations**. SPRINGER-VERLAG, 1989.
- T. David e A. Settari. New iterative coupling between a reservoir simulator and a geomechanics module. In **SPE/ISRM ROCK MECHANICS CONFERENCE**, 2002.

- J. Douglas, R. E. Ewing, e M. F. Wheeler. A time-discretization procedure for a mixed finite element approximation of miscible displacement in porous media. **NUMERIQUE-NUMERICAL ANALYSIS**, 17:249–265, 1983.
- J. Douglas, F. Furtado, e F. Pereira. On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs. **COMPUTATIONAL GEOSCIENCES**, 1:155–190, 1997.
- J. Douglas, F. Pereira, e L. M. Yeh. A locally conservative eulerian-lagrangian numerical method and its application to nonlinear transport in porous media. **COMPUTATIONAL GEOSCIENCES**, 4(1):1–40, 2000.
- J. Douglas e T. F. Russel. Numerical-methods for convection-dominated diffusion-problems based on combining the method of characteristics with finite-element or finite-difference procedures. **SIAM JOURNAL ON NUMERICAL ANALYSIS**, 19(5):871–885, 1982.
- L. P. Franca e F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 190:1785–1900, 2000.
- D. G. Fredlund e N. R. Morgenstern. Stress state variables for unsaturated soils. **ASCE GEOTHEC ENG.**, 103:447–446, 1977.
- D. G. Fredlund e H. Rahardjo. **Soil mechanics for unsaturated soils**. JOHN WILEY & SONS CANADA, LTD. (AUG 17 1993), 1993.
- R. A. Freeze. Stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous mediareply. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 13(2):480–480, 1977.
- D. G. Frias, M. A. Murad, e F. Pereira. Stochastic computational modelling of highly heterogeneous poroelastic media with long-range correlations. **INTER-**

**NATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL AND ANALYTICAL
METHODS IN GEOMECHANICS**, 28(1):1–32, January 2004.

- F. Furtado e F. Pereira. Scaling analysis for two-phase immiscible flow in heterogeneous porous media. **COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS**, 17(3):237–263, 1998.
- F. Furtado e F. Pereira. Crossover from nonlinearity controlled to heterogeneity controlled mixing in two-phase porous media flow. **COMPUTATIONAL GEOSCIENCES**, 7:115–135, 2003.
- A. C. Galeao e E. G. D. Do Carmo. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 68(1):83–95, May 1988.
- L. W. Gelhar. Stochastic subsurface hidrology from theory to applications. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 22(9):S135–S145, August 1986.
- L. W. Gelhar. **Sthochastic subsurface hydrology**. SPRINGER VERLARG, 1993.
- J. L. Gidley. **Recent Advances In Hydraulic Fracturing, Monograph Vol 12**. Society of Petroleum Engineers, 1990.
- J. Glimm, W. B. Lindquist, F. Pereira, e Q. Zhang. A theory of macrodispersion for the scale-up problem. **TRANSPORT IN POROUS MEDIA**, 13(1):97–122, October 1993.
- J. Glimm e D. H. Sharp. A random field model for anomalous diffusion in heterogeneous porous-media. **JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS**, 62(1-2):415–424, January 1991.
- A. O. Guerrero, D. L. Rudolph, e J. A. Cherry. Analysis of long-term land subsi-

- dence near mexico city: field investigations and predictive modeling. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 35(11):3327–3341, November 1999.
- H. P. Hong. One-dimensional consolidation with uncertain properties. **CANADIAN GEOTECHNICAL JOURNAL**, 29(1):161–165, February 1992.
- T. J. R. Hughes, L. P. Franca, e G. M. Hulbert. A new finite-element formulation for computational fluid-dynamics .8. the galerkin least-squares method for advective-diffusive equations. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 73(2):173–189, May 1989.
- V. John e P. Knobloch. On spurious oscillations at layers diminishing (sold) methods for convection-diffusion equations: Part ia review. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 196 (17-20):2197–2215, 2007.
- C. Johnson. **Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method**. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1990.
- R. J. Leveque. **Finite volume methods for hyperbolic problems**. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2002.
- R. W. Lewis, B. A. Schrefler, e N. A. Rahman. A finite element analysis of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems. **COMMUNICATIONS IN NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, 14(2):135–149, February 1998.
- C. Li, R. Borja, e R. Regueiro. Dynamics of porous media at finite strain. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 193:3837, 2004.
- A. F. D. Loula, F. A. Rochinha, e M. A. Murad. Higher-order gradiente post-processings for second-order elliptic problems. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 128:361–381, 1995.

- Mandelbrot e Wallis. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM Review**, 10:422–437, 1968.
- G. Marsily. **Quantitative hidrogeology**. ACADEMIC PRESS, 1986.
- G. Mavco e A. Nur. The effect of a percolation threshold in the kozeny-carman relation. **GEOPHYSICS**, 62:1480–1482, 1997.
- J. A. F. Merodo, M. Pastor, P. Mira, L. Tonni, M. I. Herreros, E. Gonzalez, e R. Tamagnini. Modelling of diffuse failure mechanisms of catastrophic landslides. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 193(27-29):2911–2939, 2004.
- S. Minkoff, M. Stone, S. Bryant, e M. Wheeler. Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. **PETROLEUM SCIENCE AND ENGINEERING**, 38:37–56, 2003a.
- S. E. Minkoff, C. M. Stone, S. Bryant, M. Peszynska, e M. F. Wheeler. Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. **JOURNAL OF PETROLEUM SCIENCE AND ENGINEERING**, 38(1-2):37–56, May 2003b.
- A. Mizukami e T. J. R. Hughes. A petrov-galerkin finite-element method for convection-dominated flows an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, 50(2):181–193, 1985.
- R. Mose, P. Siegel, P. Ackerer, e G. Chavent. Application of the mixed hybrid finite-element approximation in a groundwater-flow model. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 30(11):3001–3012, November 1994.
- M. A. Murad e A. F. D. Loula. On stability and convergence of finite-element approximations of biots consolidation problem. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, 37(4):645–667, February 1994.

- M. A. Murad, V. Thomee, e A. F. D. Loula. Asymptotic behavior of semidiscrete finite-element approximations of biot's consolidation problem. **SIAM JOURNAL ON NUMERICAL ANALYSIS**, 33(3):1065–1083, June 1996.
- H. Nessyahu e E. Tadmor. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. **JOURNAL OF COMPUTACIONAL PHYSICS**, pages 408–463, 1990.
- A. Nouri, H. Vaziri, H. Belhaj, e R. Islam. Sand-production prediction: a new set of criteria for modeling based on large-scale transient experiments and numerical investigation. **SPE JOURNAL**, 11(2):227–237, June 2006.
- G. Oettl, R. F. Stark, e G. Hofstetter. Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach. **COMPUTERS AND GEOTECHNICS**, 31(8):643–664, 2004.
- S. Olivella, A. Gens, J. Carrera, e E. E. Alonso. Numerical formulation for a simulator (code bright) for the coupled analysis of saline media. **ENGINEERING COMPUTATIONS**, 13(7):87–&, 1996.
- A. Onaisi e P. Samier. Management of stress sensitive reservoirs using two coupled stress-reservoir simulation tools : Ecl2vis and ath2vis. In **INTERNATIONAL PETROLEUM EXHIBITION AND CONFERENCE**, 2002.
- N. Rahman e R. W. Lewis. Finite element modelling of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems. **COMPUTERS AND GEOTECHNICS**, 24:41–63, 1999.
- S. S. Ribeiro. **Novos esquemas centrais de diferenças finitas para a simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo**. Tese de Doutorado, IPRJ-UERJ, 2007.
- Y. Rubin. **Applied stochastic hydrogeology**. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2003.

- P. Samier, A. Onaisi, e G. Fontaine. Coupled analysis of geomechanics and fluid flow in reservoir simulation. **SPE RESERVOIR SYMPOSIUM**, 2003.
- B. A. Schrefler e F. Pesavento. Multiphase flow in deforming porous material. **COMPUTERS AND GEOTECHNICS**, 31(3):237–250, 2004.
- B. A. Schrefler e X. Y. Zhan. A fully coupled model for water-flow and air-flow in deformable porous-media. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 29(1):155–167, January 1993.
- A. Settari e D. Walters. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. **SPE RESERVOIR SIMULATION SYMPOSIUM**, pages 14–17, 1999.
- A. Settari, D. A. Walters, e G. A. Behie. Use of coupled reservoir and geomechanical modelling for integrated reservoir analysis and management. **JOURNAL OF CANADIAN PETROLEUM TECHNOLOGY**, 40(12):55–61, December 2001.
- D. Sheng, S. W. Sloan, e A. Gens. A constitutive model for unsaturated soils: thermomechanical and computational aspects. **COMPUTATIONAL MECHANICS**, 33(6):453–465, May 2004.
- E. A. Sudicky. A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer-spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 22(13):2069–2082, December 1986.
- R. M. Sulak e J. Danielsen. Reservoir aspects of ekofisk subsidence. **JOURNAL OF PETROLEUM TECHNOLOGY**, 41(7):709–716, July 1989.
- C. Taylor e P. Hood. A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. **Comput. & Fluids**, 1:73–100, 1973.
- P. Teatini, M. Ferronato, G. Gambolati, e M. Gonella. Groundwater pumping and land subsidence in the emilia-romagna coastland, italy: Modeling the past

- occurrence and the future trend. **WATER RESOURCES RESEARCH**, 42(1):W01406, January 2006.
- K. Terzaghi. The shear resistance of saturated soils. In Cambridge, editor, **CONFERENCE OF SOIL MECHANICS FOUNDATION ENGINEERING**, volume 1, pages 54–56, 1936.
- V. Thomêe. **Galerkin finite element methods for parabolic problems**. Springer Verlag, 1997.
- R. G. Wan, Y. Liu, e J. Wang. Prediction of volumetric sand production using a coupled geomechanics-hydrodynamic erosion model. **JOURNAL OF CANADIAN PETROLEUM TECHNOLOGY**, 45(4):34–41, April 2006.
- D. P. Yale. Coupled geomechanics-fluid flow modeling: effects of plasticity and permeability alteration. In **SPE/ISRM ROCK MECHANICS CONFERENCE**, 2002.
- D. G. Zeitoun e R. Baker. A stochastic approach for settlement predictions of shallow foundations. **GEOTECHNIQUE**, 42(4):617–629, December 1992.
- A. Zenisek. The existence and uniqueness theorem in biot’s consolidation theory. **APLIK. MATEM.**, 29:194–210, 1984.
- D. Zhang. **Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties**. ACADEMIC PRESS, 2001.
- V. V. Zubkov, V. F. Koshelev, e A. M. Linkov. Numerical modeling of hydraulic fracture initiation and development. **JOURNAL OF MINING SCIENCE**, 43(1):40–56, January 2007.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)