

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Modelos mecânicos e numéricos para estruturas flexíveis  
unidimensionais**

Por

**Antônio José Boness dos Santos**

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**MODELOS MECÂNICOS E NUMÉRICOS PARA ESTRUTURAS  
FLEXÍVEIS UNIDIMENSIONAIS**

**Antônio José Boness dos Santos**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL  
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECES-  
SÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM  
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

---

Prof. João Nisan Correia Guerreiro, D.Sc.  
(Presidente)

---

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc

---

Prof. Elson Magalhães Toledo, D.Sc

---

Prof. Hélio José Corrêa Barbosa, D.Sc.

---

Prof. Adilson Carvalho Benjamin, D.Sc.

---

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

---

Prof. José Luis Drummond Alves, D.Sc

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL  
AGOSTO DE 2007

Santos, Antônio José Boness dos

S237m Modelos mecânicos e numéricos para estruturas flexíveis unidimensionais / Antônio José Boness dos Santos. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2007.

XXXIII, 222 p. : il.; 29 cm

Orientadore(s): João Nisan Correia Guerreiro e Abimael Fernando Dourado Loula

1. Teoria das estruturas. 2. Barras lineares e não lineares. 3. restrições de inextensibilidade e unilaterais. 4. formulação em Lagrangiano Aumentado. 5. elementos finitos mistos estabilizados. I. Guerreiro, João Nisan Correia . II. Loula, Abimael Fernando Dourado. III. LNCC/MCT. IV. Título.

CDD 624.17

**Podemos escolher o que semear, mas  
somos obrigados a colher aquilo que  
plantamos. Quem quer colher rosas  
deve suportar os espinhos.**

*(Fonte: Provérbio Chinês)*

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a minha amada família.

Meus pais Elza Boness e Antônio Santos

Meus irmãos Wellington, Hanneckeff e

Willia.

# Agradecimentos

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos aos meus professores e amigos Abimael F. D. Loula e João N. C. Guerreiro pela cuidadosa orientação, valiosas avaliações críticas, numerosas e construtivas discussões e grande entusiasmo por esta pesquisa.

Desejo também agradecer a todos os funcionários do LNCC que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial, ao grupo da biblioteca e da secretaria da pós-graduação, pela grande agilidade e presteza, e a coordenação de pós-graduação pelo constante apoio.

Gostaria de agradecer aos professores Elson M. Toledo, Hélio J. C. Barbosa, Adilson C. Benjamin, Eduardo G. D. do Carmo e José L. D. Alves pela avaliação do trabalho e participação como membro da banca examinadora, bem como a todos os professores da pós-graduação do LNCC que contribuíram na minha formação, em especial, aos professores Raúl Feijóo, Edgardo Taroco, Luiz Bevilacqua, Márcio Murad, Regina C. Almeida e Sandra Malta .

Gostaria de agradecer também a todos os meus amigos conquistados durante esta jornada no LNCC, cuja convivência me proporcionou um enriquecimento pessoal extremamente importante. Em especial, Rosa Luz, Leandro Gazoni, Gerusa Araújo, Marcio Bortoloti, Paula Couto, Loreci, André Novotny, Maicon Corrêa, Wanderson Bispo, Anderson, Patrícia Drach, Ana Rio Doce, Carlos, Cristiane Toniolo, Rubem, Gúzman, Jean Felix, Riedson, Edinelço, os quais compartilharam de forma mais próxima os momentos mais alegres ou difíceis deste período. Agradeço também aos amigos Josias, Antônio e Sônia pela grande generosidade e acolhida.

Quero expressar agradecimentos especiais aos professores José C. de Oliveira e Geraldo J. Belmonte, os quais contribuíram decisivamente na minha formação científica inicial e sobretudo, despertaram e motivaram a idealização e concretização deste projeto.

Agradecimentos especiais também à minha família. A meus pais Elza M. Boness e Antônio J. dos Santos pela minha educação, formação e sobretudo o amor dispensado durante todo o tempo da minha vida. A meus queridos irmãos Wellington, Hannocheff e Willia pelo amor, apoio, companherismo e me proporcionarem ser tio de Johann, Hannocheff Filho, Karen Alana, Iuri, Sarah e Vitor os quais me trouxeram alegrias e motivações adicionais para enfrentar a vida. A minhas cunhadas Gardênia e Sheila pelo apoio dispendido.

Finalmente, agradeço à minha querida Ana Wyse pelo constante incentivo, sua compreensão, carinho e sobretudo por fazer parte da minha vida.

Este trabalho foi financiado pela FAPERJ (Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) Processo E-26/150.649/2002 e pelo LNCC.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## MODELOS MECÂNICOS E NUMÉRICOS PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS UNIDIMENSIONAIS

Antônio José Boness dos Santos

Agosto , 2007

**Orientador:** João Nisan Correia Guerreiro, D.Sc.

**Co-orientador:** Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc

Apresentamos um modelo matemático geral, baseado na teoria de Cosserat para estruturas flexíveis unidimensionais, em regime de deslocamentos finitos e sujeitas a restrições unilaterais. Ao modelo geral agregamos a hipótese de inextensibilidade e, desprezando os efeitos do cisalhamento e das forças inerciais, formulamos o problema variacionalmente tanto na forma cinemática quanto em Lagrangiano Aumentado. Para esta última formulação, construímos aproximações por elementos finitos de Galerkin e utilizamos um algoritmo do tipo Uzawa para a solução do problema aproximado. Apresentamos estudos numéricos com o intuito de avaliar a formulação, validar o algoritmo de solução e exemplificar possíveis aplicações práticas do modelo.

Buscando viabilizar uma análise numérica, realizamos uma linearização consistente do modelo geral apresentado anteriormente, produzindo um modelo em regime de pequenos deslocamentos e deformações, descrito no espaço tridimensional. Para este problema, introduzimos uma aproximação por elementos finitos mistos estabilizados, adicionando à formulação de Galerkin formas residuais de mínimos quadrados provenientes das equações de equilíbrio. Provamos que esta formulação atende às condições suficientes para existência e unicidade de solução, independente da esbeltez da estrutura. Apresentamos estimativas de erro indicando taxas de convergência e resultados numéricos comprovando tais taxas.

Apresentamos algumas aplicações dos modelos ao estudo de estabilidade de dutos aquecidos e enterrados, na análise da estabilidade de armaduras de *risers* e umbilicais e, na área biológica, apontamos as possibilidades de suas utilizações na modelagem de moléculas de ADN.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

## MECANICAL AND NUMERICAL MODELS TO UNIDIMENSIONAL FLEXIBLE STRUCTURES

Antônio José Boness dos Santos

November, 2007

**Advisor:** João Nisan Correia Guerreiro, D.Sc.

**Co-advisor:** Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc

We present a general mathematical model, based on Cosserat's theory for unidimensional flexible structures under finite displacements and subjected to unilateral constraints. Assuming inextensibility and disregarding the shear strains and inertia forces we present kinematic and augmented lagrangian variational formulations. To the last one we construct a Galerkin finite element approximation and solve the discretized problem using an Uzawa's type algorithm. To validate the formulation and the solution algorithm, we perform numerical simulation illustrating possible applications.

The above nonlinear model is consistently linearized obtaining a small displacement model in the three-dimensional space. For this linear model, we introduce a stabilized mixed finite element formulation adding to the classical Galerkin method least squares residual forms derived from the equilibrium equations. Existence and uniqueness of solution are proved independently of the slenderness of the structure. Error estimates indicating rates of convergence are derived and numerical results in agreement with the estimated rates are presented.

We present some applications of the models to the study of the stability of buried heated pipeline, to the analysis of risers and umbilicals armours and, in biological branch, we indicate possibilities of its use in the DNA molecules modelling.

# Sumário

|          |  |    |
|----------|--|----|
| <b>1</b> | Introdução                                       | 1  |
| <b>2</b> | Modelo matemático geral de barras                | 11 |
| 2.1      | Configuração de referência                       | 12 |
| 2.2      | Descrição do movimento                           | 15 |
| 2.3      | Cálculo das derivadas das bases intrínsecas      | 17 |
| 2.4      | Equações do movimento                            | 20 |
| 2.4.1    | Balanço de momentum linear                       | 22 |
| 2.4.2    | Balanço de momentum angular                      | 23 |
| 2.5      | Caracterização das medidas de deformação         | 26 |
| 2.6      | Equações constitutivas                           | 28 |
| 2.7      | Restrições cinemáticas                           | 29 |
| 2.8      | Modelo matemático                                | 32 |
| 2.9      | Formulação variacional                           | 33 |
| <b>3</b> | Modelo inextensível e sem cisalhamento           | 37 |
| 3.1      | Modelo de flexo-torção                           | 37 |
| 3.2      | Formulações variacionais                         | 38 |
| 3.2.1    | Espaço das variações cinematicamente admissíveis | 39 |
| 3.2.2    | Formulação cinemática                            | 41 |
| 3.2.3    | Formulação em Lagrangiano Aumentado              | 45 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| <b>4</b> | Aproximações por elementos finitos  | 50  |
| 4.1      | O modelo discreto . . . . .   | 50  |
| 4.2      | Algoritmo de resolução . . . . .  | 52  |
| 4.3      | Critérios de inicialização do algoritmo e do parâmetro do Lagrangiano Aumentado . . . . . | 54  |
| 4.4      | Resolução do problema global . . . . .  | 57  |
| 4.5      | Método SOR com projeção . . . . .   | 60  |
| 4.6      | Resolução do problema local . . . . .   | 61  |
| 4.7      | Cálculo dos esforços . . . . .  | 66  |
| 4.8      | Experimentos numéricos . . . . .  | 67  |
| 4.8.1    | Experimento 1: um problema com solução analítica . . . . .                                | 67  |
| 4.8.2    | Experimento 2: um problema com multiplicidade de solução . . . . .                        | 74  |
| 4.8.3    | Experimento 3: um problema com torção . . . . .   | 79  |
| 4.8.4    | Experimento 4: um problema com restrição unilateral . . . . .                             | 85  |
| <b>5</b> | Modelos em pequenos deslocamentos   | 91  |
| 5.1      | Linearizações do modelo geral . . . . .   | 92  |
| 5.2      | As fórmulas de Serret-Frenet . . . . .  | 96  |
| 5.3      | O modelo linearizado . . . . .  | 97  |
| 5.4      | Formulações variacionais . . . . .  | 102 |
| 5.4.1    | Formulação cinemática . . . . .   | 107 |
| 5.4.2    | Formulação de Hellinger – Reissner . . . . .  | 112 |
| <b>6</b> | Métodos de elementos finitos estabilizados  | 121 |
| 6.1      | Método de Galerkin . . . . .  | 122 |
| 6.2      | Formulação de elementos finitos mistos estabilizados . . . . .                            | 126 |
| 6.3      | Estratégia de resolução . . . . .   | 135 |
| 6.4      | Experimentos numéricos . . . . .  | 137 |
| <b>7</b> | Exemplos de aplicações  | 155 |
| 7.1      | Um estudo de estabilidade de dutos aquecidos enterrados . . . . .                         | 155 |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.2      | Estudos do comportamento pós-crítico de dutos aquecidos enterrados              | 159        |
| 7.3      | Análise da estabilidade de armaduras de <i>risers</i> e umbilicais . . . . .    | 166        |
| 7.4      | Modelagem de moléculas de ADN . . . . .   | 176        |
| <b>8</b> | <b>Conclusões</b>   | <b>180</b> |
| 8.1      | Sobre os modelos não-lineares . . . . .   | 180        |
| 8.2      | Sobre os modelos linearizados . . . . .   | 182        |
| 8.3      | Possíveis extensões deste trabalho . . . . .                                    | 184        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>   | <b>185</b> |
|          | <b>Apêndice</b>   |            |
| <b>A</b> | <b>Alguns resultados clássicos de análise tensorial e desigualdades básicas</b> | <b>195</b> |
| A.1      | Produto escalar . . . . .   | 195        |
| A.2      | Produto vetorial . . . . .  | 196        |
| A.3      | Produto tensorial . . . . .   | 196        |
| A.4      | Gradiente, divergente e rotacional . . . . .                                    | 196        |
| A.5      | Desigualdades para números . . . . .  | 197        |
| A.6      | Desigualdades para funções . . . . .  | 197        |
| <b>B</b> | <b>Momentum linear, angular e potência realizada</b>                            | <b>198</b> |
| B.1      | Expressão para o momentum linear . . . . .                                      | 198        |
| B.2      | Expressão para o momentum angular . . . . .                                     | 200        |
| B.3      | Expressão para a potência realizada . . . . .                                   | 204        |
| <b>C</b> | <b>Algumas verificações importantes</b>   | <b>209</b> |
| C.1      | Cálculo da estimativa de $v_3(S)$ . . . . .                                     | 209        |
| C.2      | Antisimetria do operador $\Omega$ . . . . .                                     | 210        |
| C.3      | Teorema de Cauchy . . . . .   | 211        |
| C.4      | Especialização da relação $\mathbf{F}\mathbf{T}^T$ para o modelo . . . . .      | 212        |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| <b>D</b> | Algumas caracterizações importantes   | 214 |
| D.1      | Caracterização do tensor de inércia . . . . .   | 214 |
| D.2      | Caracterização de $\mathbf{\Lambda}(S)$ . . . . .   | 215 |
| D.3      | Caracterização da derivada da função $\exp(\mathbf{\Theta}(S))$ em relação ao comprimento de arco $S$ . . . . . | 219 |

# Lista de Figuras

## Figura

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Modelo esquemático da estrutura flexível. . . . .  | 13 |
| 2.2 | Modelo esquemático de equilíbrio da barra. . . . .   | 21 |
| 3.1 | Modelo esquemático do espaço tangente. . . . .   | 39 |
| 4.1 | Esquema da interpolação do elemento $e_i$ . . . . .  | 59 |
| 4.2 | Desenho esquemático de uma barra em balanço, sujeita a uma carga concentrada $P$ na sua extremidade livre. . . . .   | 68 |
| 4.3 | Configurações deformadas de uma barra em balanço, de comprimento $L = 10.0m$ , rigidez à flexão $EI = 100daN \cdot m^2$ e sujeita a uma carga concentrada $P$ na sua extremidade livre. . . . .  | 70 |
| 4.4 | Deslocamentos vertical e horizontal da extremidade livre da barra em balanço. Soluções analíticas não-lineares, analíticas lineares e numéricas não-lineares, para cargas concentradas de intensidade $P = 0.5daN, 1.0daN, 1.5daN, 2.0daN, 3.0daN, \dots, 10.0daN$ . . . . .   | 71 |
| 4.5 | Número de iterações em função da variação do parâmetros $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p$ do <b>Algoritmo 1</b> , considerando uma barra em balanço de comprimento $L = 10.0m$ , rigidez a flexão $EI = 100daN \cdot m^2$ e sujeita a uma carga concentrada na sua extremidade livre de intensidade $10daN$ . Para todos os casos utilizamos uma malha uniforme com 20 elementos . . . | 72 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.6  | Configurações deformadas de uma barra com $EI = 7000N \cdot m^2$ , $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento $L = 32.6m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5.0$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A configuração em forma de cogumelo foi obtida com a inicialização <b>Ini (1)</b> e a configuração em laço por <b>Ini (2)</b> . . . . .  | 75 |
| 4.7  | Configurações deformadas de uma barra com $EI = 7000N \cdot m^2$ , $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento $L = 32.6m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 3., 6., 9.$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por <b>Ini (1)</b> . . . . .  | 76 |
| 4.8  | Configurações deformadas de uma barra com $EI = 7000N \cdot m^2$ , $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento $L = 32.6m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 3., 6., 8., 10.$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por <b>Ini (2)</b> . . . . .   | 76 |
| 4.9  | Número de iterações em função da variação do parâmetros $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_p$ do <b>Algoritmo 1</b> , considerando uma barra com $EI = 7000N \cdot m^2$ , $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento $L = 32.6m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por <b>Ini (1)</b> e foi utilizada uma malha uniforme com 20 elementos. . . . .   | 78 |
| 4.10 | Número de iterações em função da variação do parâmetros $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_p$ do <b>Algoritmo 1</b> , considerando uma barra com $EI = 7000N \cdot m^2$ , $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento $L = 32.6m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5.0$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por <b>Ini (2)</b> e foi utilizada uma malha uniforme com 20 elementos. . . . . | 78 |
| 4.11 | Projeções XY da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. . . . .  | 80 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.12 | Projeções XZ da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. . . . .  | 81 |
| 4.13 | Projeções ZY da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. . . . .  | 81 |
| 4.14 | Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5.$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. . . . .   | 82 |
| 4.15 | Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. . . . .   | 83 |
| 4.16 | Número de iterações em função da variação do parâmetros $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_p$ do <b>Algoritmo 1</b> , considerando uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 10.0$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ . Neste experimento foi utilizada uma malha uniforme com 20 elementos. . . . . | 83 |
| 4.17 | Projeções ZY da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo $\mathbf{e}_3$ . . . . .                  | 86 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.18 | Projeções XY da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5daN/m$ e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo $\mathbf{e}_3$ . . . . .  | 87  |
| 4.19 | Projeções XZ da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo $\mathbf{e}_3$ . . . . .  | 87  |
| 4.20 | Visão 3D da configuração deformada de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo $\mathbf{e}_3$ . . . . .  | 88  |
| 4.21 | Número de iterações em função da variação dos parâmetros $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_p$ , considerando uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo $\mathbf{e}_3$ . Neste experimento foi utilizada uma malha uniforme com 40 elementos. . . . . | 90  |
| 6.1  | Desenho esquemático de uma hélice simplesmente engastada sujeita a uma carga concentrada, de valor unitário, aplicada na sua extremidade livre. . . . .  | 138 |

- 6.2 Componente  $u_{h1}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 139
- 6.3 Componente  $u_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 140
- 6.4 Componente  $u_{h3}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 140
- 6.5 Componente  $\theta_{h1}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 141
- 6.6 Componente  $\theta_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 141

- 6.7 Componente  $\theta_{h_3}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 142
- 6.8 Componente  $\sigma_{u_{h_1}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 142
- 6.9 Componente  $\sigma_{u_{h_2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 143
- 6.10 Componente  $\sigma_{u_{h_3}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 143
- 6.11 Componente  $\sigma_{\theta_{h_1}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 144

- 6.12 Componente  $\sigma_{\theta_{h_2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 144
- 6.13 Componente  $\sigma_{\theta_{h_3}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 145
- 6.14 Log do erro de  $u_{h_1}$  e  $\theta_{h_1}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ . . . . . 145
- 6.15 Log do erro de  $u_{h_2}$  e  $\theta_{h_2}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ . . . . . 146
- 6.16 Log do erro de  $u_{h_3}$  e  $\theta_{h_3}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ . . . . . 146

- 6.17 Log do erro de  $\sigma_{u_{h1}}$  e  $\sigma_{\theta_{h1}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ . . 147
- 6.18 Log do erro de  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ . . 147
- 6.19 Log do erro de  $\sigma_{u_{h3}}$  e  $\sigma_{\theta_{h3}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ . . 148
- 6.20 Log do erro de  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. . . . . 149
- 6.21 Log do erro de  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. . . . . 150

- 6.22 Componente  $u_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 151
- 6.23 Componente  $\theta_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 151
- 6.24 Componente  $\sigma_{u_{h2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 152
- 6.25 Componente  $\sigma_{\theta_{h2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados. . . . . 152
- 6.26 Log do erro de  $\sigma_{\theta_{h2}}$  e  $\sigma_{u_{h2}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. . . . . 153

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.27 | Log do erro de $\theta_{h2}$ e $u_{h2}$ versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $P = 1\mathbf{e}_3$ na sua extremidade livre, com parâmetro $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ e curvatura e torção $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. . . . .  | 154 |
| 7.1  | Relação entre o valor da carga crítica e o número do modo de flambagem para uma estrutura com módulo de Young $E = 206GPa$ , momento de inércia $I = 62.960cm^4$ , comprimentos $L = 50, 100, 200, 500$ metros e confinada em uma base elástica simulada por molas com módulo de rigidez $K_s = 800N/m$ . . . . .   | 157 |
| 7.2  | Configuração deformada de uma barra biapojada, com módulo de Young $E = 206GPa$ , coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1.17 \times 10^{-5}mm/mm/^\circ C$ , área da seção transversal $A = 100cm^2$ , momento de inércia $I = 62.960cm^4$ e comprimentos $L = 50, 100, 200$ e $500$ metros. A única ação externa é uma força axial proveniente dos efeitos térmicos . . . . .   | 158 |
| 7.3  | Configuração deformada de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1.17 \times 10^{-5}mm/mm/^\circ C$ , área da seção transversal $A = 100cm^2$ , momento de inércia $I = 62.960cm^4$ e comprimentos $L = 50, 100, 200$ e $500$ metros. Ela está biapojada e confinada sobre uma base elástica simulada por molas com módulo de rigidez $K_s = 800N/m$ . A única ação externa é uma força axial proveniente dos efeitos térmicos . . . . . | 159 |
| 7.4  | Projeção XY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez $K_{s2} = 800N/m$ e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição $X = 500m$ . . . . .  | 161 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 7.5  | Projeção XZ da configuração deformada de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez $K_{s2} = 800N/m$ e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição $X = 500m$ . . . . .  | 162 |
| 7.6  | Projeção ZY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez $K_{s2} = 800N/m$ e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição $X = 500m$ . . . . .  | 162 |
| 7.7  | Projeção XY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 503m$ , assentada em uma base elástica de rigidez $K_{s2} = 600N/m$ e sujeita a um deslocamento no seu extremo final para a posição $X = 500m$ . . . . .  | 164 |
| 7.8  | Projeção XY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 501m$ , assentada em uma base elástica com rigidez $K_{s2} = 800N/m$ na direção transversal e $K_{s1} = 400N/m$ na direção longitudinal, e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição $X = 500m$ . . . . . | 166 |
| 7.9  | Desenho esquemático de um duto flexível. . . . .  | 167 |
| 7.10 | Duto flexível apresentando falha por instabilidade das armaduras. . . . .   | 168 |

- 7.11 Projeções ZY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ . . . . . 169
- 7.12 Projeções XY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ . . . . . 170
- 7.13 Projeções XZ das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ . . . . . 170
- 7.14 Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ . . . . . 171
- 7.15 Projeções ZY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . 172

- 7.16 Projeções XY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . 172
- 7.17 Projeções XZ das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . 173
- 7.18 Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . 173
- 7.19 Projeções ZY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e passo  $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita é um deslocamento da sua extremidade final para as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . 174
- 7.20 Projeções XY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e passo  $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita é um deslocamento da sua extremidade final para as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . 175

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 7.21 | Projeções XZ das configurações deformadas de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20\pi$ e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio $R = 3m$ e passo $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita é um deslocamento da sua extremidade final para as posições $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . . | 175 |
| 7.22 | Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20\pi$ e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio $R = 3m$ e passo $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita é um deslocamento da sua extremidade final para as posições $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . . . . .     | 176 |
| 7.23 | Desenho esquemático de uma molécula de ADN . . . . .  | 177 |
| 7.24 | Desenho esquemático do superenovelamento de moléculas de ADN .  | 177 |
| 7.25 | Desenho esquemático de uma micromanipulação de uma molécula de ADN por um campo elétrico . . . . .  | 178 |
| D.1  | Esquema da translação de $P_1$ devido a uma rotação $\phi$ em torno do eixo $\mathbf{p}_0$ . . . . .  | 215 |
| D.2  | Desenho esquemático do vetor $\mathbf{p}_\Delta$ . . . . .  | 215 |

# Lista de Tabelas

## Tabela

- 4.1 Energias de deformações e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando uma barra em balanço, de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a uma carga concentrada  $P$  na sua extremidade livre. Para todos os casos utilizamos  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 1.0 \times 10^2$ . . . . . 71
- 4.2 Número de elementos da malha e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando uma barra em balanço de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a uma carga concentrada na sua extremidade livre de intensidade  $10.0daN$ . Para todos os casos utilizamos  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 1.0 \times 10^2$  e carga  $P = 10.0daN$ . . . . . 73
- 4.3 Momentos fletores de uma barra em balanço, de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a cargas concentradas de intensidade  $P = 1daN$  e  $10daN$  na sua extremidade livre. . . . . 74
- 4.4 Energia de deformação e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando a barra com rigidez a flexão  $EI = 7000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ , condições de contorno (4.39) e sujeita a uma carga distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . . . . . 77

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 4.5 | Número de iterações do <b>Algoritmo 1</b> em função do número de elementos e parâmetros $\mathfrak{p}_u$ e $\mathfrak{p}_p$ , considerando uma barra com $EI = 7000N \cdot m^2$ , $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento $L = 32.6m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 9$ e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por <b>Ini (1)</b> . A representação “-” caracteriza a não convergência do algoritmo . . . . . | 79  |
| 4.6 | Energia de deformação e número de iterações do <b>Algoritmo 1</b> , considerando uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , condições de contorno (4.40) e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ . . . . .  | 84  |
| 4.7 | Deformação $w_3$ , e momento torsor $\mathbf{m}_3$ de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimentos $L = 10., 15., 20.0m$ , condições de contorno (4.40) e sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ . . . . .  | 85  |
| 4.8 | Esforços resultantes de uma barra com $EI = 100daN \cdot m^2$ , $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento $L = 20.0m$ , $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ e uma torção de $2\pi$ na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo $\mathbf{e}_3$ . . . . .   | 89  |
| 7.1 | Momentos fletores de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo cisalhante $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez $K_{s2} = 800N/m$ e sujeita a um deslocamento no seu extremo final para a posição $X = 500m$ . . . .   | 163 |
| 7.2 | Momentos fletores de uma barra com módulo de Young $E = 206GPa$ , módulo cisalhante $G = 90GPa$ , diâmetro externo $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno $D_i = 48.3cm$ , comprimento $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez $K_{s2} = 800N/m$ e sujeita a um deslocamento no seu extremo final para a posição $X = 500m$ . . . .   | 165 |

# Lista de Siglas e Abreviaturas

Apresentamos abaixo a lista de símbolos e nomenclaturas mais importantes utilizadas no decorrer do texto. Todos os símbolos seguem a ordem alfabética crescente, sendo expresso primeiro o alfabeto Grego e subsequentemente o alfabeto Latim. Os símbolos que não constarem no alfabeto Grego ou Latim são expressos na ordem em que aparecem no texto.

|   |   |
|---|---|
| $(\cdot)'$                                | Derivada de $(\cdot)$ em relação ao comprimento de arco $S$ .   |
| $\dot{(\cdot)}$                           | Derivada de $(\cdot)$ em relação ao tempo $t$ .   |
| $\partial A$                              | Curva fechada que delimita a seção de área $A$ da barra.  |
| $\partial \Sigma$                         | Superfície fechada que delimita $\Sigma$ .  |
| $\text{div}(\cdot)$                       | Operador divergente.  |
| $\nabla_{\xi}(\cdot)$                     | Gradiente da função $(\cdot)$ em relação a $\xi$ .  |
| $\overset{\nabla}{(\cdot)}$               | Taxa medida por um observador localizado sobre a base intrínseca.   |
| $\Lambda, \Lambda_o$                      | Operadores de rotação.  |
| $\Lambda^e,$                              | Perturbação do tensor $\Lambda$ .   |
| $\mathfrak{S}$                            | Domínio de referência formado pelo conjunto de todas as coordenadas $(S, \xi_1, \xi_2)$ .   |
| $\overline{\Omega}, \Omega, \Omega_o$     | Tensores antisimétricos que relacionam a derivada da base intrínseca em relação ao comprimento de arco $S$ com a própria base intrínseca. |
| $\Omega^e,$                               | Perturbação do tensor $\Omega$ .  |
| $\Pi(\cdot, \cdot, \cdot)$                | Funcional densidade de energia de deformação.   |
| $\mathcal{L}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ | Funcional Lagrangiano aumentado.  |
| $\Sigma, \Sigma_t$                        | Região formada pelas coordenadas de todas as partículas que constituem a barra nas configurações de referência e atual, respectivamente.  |

|  |  |
|--|--|
| $\Theta$                                     | Tensor antisimétrico que executa rotações infinitesimais.  |
| $\chi(\cdot, \cdot)$                         | Mapeamento que descreve a trajetória de todas as partículas da barra.  |
| $\varepsilon$                                | Deformações cisalhantes e de extensão da barra.  |
| $\varepsilon^{lin}$                          | Forma linearizada de $\varepsilon$ .   |
| $\hat{\mathbf{t}}_i$                         | Vetores da base intrínseca na configuração indeformada independentes de $S$ , com $i = 1, 2, 3$ .                                      |
| $\kappa, \mu$                                | Funções geométricas curvatura e torção, respectivamente.   |
| $\lambda_i$                                  | Multiplicadores de Lagrange, com $i = 1, 2, 3$ .   |
| $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_o$ | Vetores axiais associados aos tensores $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}_o$ respectivamente.                                |
| $\boldsymbol{\omega}^{lin}$                  | Forma linearizada de $\boldsymbol{\omega}$ .   |
| $\omega_i, \omega_{oi}$                      | Componentes dos vetores axiais $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_o$ , respectivamente, com $i = 1, 2, 3$ .                     |
| $\rho_o$                                     | Massa específica na configuração de referência.  |
| $\rho_s$                                     | Massa específica por unidade de comprimento de arco $S$ .  |
| $\mathbf{n}$                                 | Campo vetorial normal à curva $\partial A$ .   |
| $\mathbf{n}_\alpha$                          | Componentes do campo vetorial $\boldsymbol{\nu}$ , com $\alpha = 1, 2$ .   |
| $\phi$                                       | Pseudovetor cujas componentes são os ângulos de rotação $\phi_i$ .   |
| $\nu_p$                                      | Parâmetro de penalização.  |
| $\nu_u$                                      | Parâmetro do algoritmo de Uzawa.   |
| $\boldsymbol{\sigma}_\theta$                 | Vetor dos esforços de flexão e torção.   |
| $\boldsymbol{\sigma}_u$                      | Vetor dos esforços cisalhantes e de extensão.  |
| $\boldsymbol{\theta}$                        | Vetor das rotações em relação aos eixos tangencial, normal e binormal.   |
| $\xi_\alpha$                                 | Coordenadas sobre a base intrínseca, com $\alpha = 1, 2$ .   |
| $A, A_t$                                     | Seção transversal da barra na configuração de referência e atual.  |
| $\mathcal{A}$                                | Conjunto que contém as seções transversais da barra.   |
| $\mathcal{C}$                                | Curva suficientemente regular coincidente com a linha que liga os centróides das seções transversais da barra: linha de centróides.    |
| $E$  | Módulo de Young.   |
| $\mathbf{E}_i$                               | Vetor da base intrínseca na configuração indeformada, com $i = 1, 2, 3$ .  |
| $\mathbf{F}$                                 | Gradiente de deformação.   |
| $G$  | Módulo cisalhante.   |
| $\mathbf{H}_t$                               | Momentum angular   |
| $\mathbf{I} = \mathbf{I}_\alpha$             | Momentos principais de inércia em relação ao eixo $\mathbf{d}_1(S, t)$ e $\mathbf{d}_2(S, t)$ , respectivamente, com $\alpha = 1, 2$ . |
| $\mathbf{J}$                                 | Momento polar de inércia.  |
| $J(\cdot, \cdot)$                            | Funcional de energia potencial.  |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $\mathbf{I}_\rho$         | Tensor de inércia associado à seção transversal da barra.   |
| $\mathcal{I}$             | Intervalo aberto $]0, L[$ .   |
| $\mathcal{I}_e$           | Domínio de cada elemento da partição de elementos finitos.  |
| $\mathcal{I}_f$           | Região do domínio onde estão aplicadas forças e momentos.   |
| $\mathcal{I}_c$           | Região do domínio onde estão aplicadas candidata a entrar em contato com uma barreira rígida                                |
| $\mathbf{I}_d$            | Tensor identidade.  |
| $\mathbf{L}_t$            | Momentum linear   |
| $L$                       | Comprimento da barra.   |
| $\mathcal{P}$             | Potência realizada  |
| $P_o$                     | Ponto que define a origem do vetor $\mathbf{r}$ .   |
| $\mathcal{R}^n$           | Espaço euclidiano de dimensão $n$ .   |
| $\mathbf{R}_o$            | Vetor posição de pontos sobre a linha de centróides na configuração indeformada.  |
| $S$                       | Comprimento de arco.  |
| $\mathcal{T}$             | Espaço equivalente a $\mathcal{R}^+$ .  |
| $\mathbf{T}$              | Tensor de Piola-Kirchhoff.  |
| $\mathbf{T}_\xi$          | Parcela do tensor de Piola-Kirchhoff dependente de $\xi_1$ e $\xi_2$ .  |
| $\mathcal{W}$             | Tensor antisimétrico que relacionam a derivada da base intrínseca, em relação ao tempo $t$ , com a própria base intrínseca. |
| $\mathbf{b}_o$            | Força de corpo por unidade de volume na configuração de referência.   |
| $\mathbf{d}_i$            | Vetor da base intrínseca na configuração atual, com $i = 1, 2, 3$ .   |
| $\mathbf{e}_i$            | Base ortonormal associada ao espaço euclidiano $\mathcal{R}^3$ , com $i = 1, 2, 3$ .  |
| $\mathbf{f}_c$            | Forças de reação na região do contato.  |
| $\mathbf{h}$              | Função que representa o afastamento entre a barra e um sólido rígido  |
| $h_s$                     | Dimensão máxima da seção transversal da barra.  |
| $\mathbf{m}$              | Função vetorial cujas componentes representam os esforços de flexão e torção da barra.                                      |
| $\overline{\mathbf{m}}$   | Momento por unidade de comprimento de arco.   |
| $\mathbf{n}$              | Função vetorial cujas componentes representam os esforços cisalhantes e axial.  |
| $\overline{\mathbf{n}}$   | Vetor de forças.  |
| $\overline{\mathbf{n}}_c$ | Vetor de forças de reação.  |
| $n_{el}$                  | Número de elementos da partição de elementos finitos.   |
| $\mathbf{r}$              | Vetor associado a uma partícula da barra na configuração de referência.   |

|                |  |
|----------------|--|
| $\mathbf{r}_o$ | Vetor posição de pontos sobre a linha de centróides na configuração deformada.                             |
| $\mathbf{r}_t$ | Vetor associado a uma partícula da barra na configuração atual   |
| $\mathbf{t}$   | Vetor de tensão obtido da aplicação do tensor de tensões em um ponto, à normal à superfície naquele ponto. |
| $t_j^i$        | Componente $j$ do vetor $\mathbf{t}_i$ , com $i, j = 1, 2, 3$ .  |
| $t$            | Variável tempo.  |
| $x$            | Coordenada de uma partícula na configuração de referência da barra.  |
| $x_t$          | Coordenada, no instante $t$ , de uma partícula que ocupava a posição $x$ na configuração de referência.    |
| $\mathbf{u}$   | Vetor dos deslocamentos tangencial, normal e binormal.   |
| $\mathbf{v}$   | Medidas das deformações cisalhantes e o alongamento ou encurtamento da barra                               |
| $w$            | Vetor axial associado ao tensor $\mathcal{W}$ .  |

# Capítulo 1

## Introdução

Arcos e vigas têm sido utilizados desde tempos remotos na construção de pontes, aquedutos e edifícios. Os arcos foram concebidos para suportar basicamente a esforços de compressão ao passo que as vigas devem suportar a esforços de flexão ou seja, a uma combinação de tração e compressão. Em geral, estas estruturas têm uma das dimensões, o comprimento, bem maior que as outras duas, as larguras e as alturas das seções transversais, e isto permite que a cinemática de todo o corpo sólido tridimensional seja descrita com bastante precisão pela cinemática de algum eixo representativo da forma como a estrutura se desenvolve, espacialmente, ao longo do seu comprimento. Neste trabalho abordamos alguns aspectos destes tipos de estruturas espaciais que classificamos como estruturas flexíveis unidimensionais.

Além das continuadas aplicações em construções civis, nos dias de hoje este tipo de estrutura tem papel importante em áreas das ciências tais como a mecânica e a biológica. Diversas estruturas encontradas na indústria moderna e na natureza apresentam comportamentos que podem ser descritos por modelos de estruturas unidimensionais flexíveis, daí o continuado interesse na compreensão e simulação desses comportamentos. Devido às suas características geométricas, estas estruturas podem ser descritas, por exemplo, através de teorias de barras lineares ou não-lineares. A opção entre estas teorias está intrinsecamente associada à cinemática, às relações constitutivas, aos carregamentos e às condições de contorno adotadas

para o modelo, de forma a representar adequadamente o problema em questão. A seguir enumeramos algumas aplicações de estruturas flexíveis unidimensionais.

Na engenharia do petróleo, além da aplicação no estudo do comportamento global de dutos em geral, os modelos mecânicos que descrevem as estruturas unidimensionais são empregados nos estudos de flexão de cabos oceânicos, COYNE [1990], RAMOS-JR [2001] e RAMOS-JR & PESCE [2003], do comportamento dos sistemas *pipe-in-pipe*, HARRISON & MCCARRON [2006] e MASSON *et al* [2006], das instabilidades das armaduras de dutos flexíveis, BRAGA [2003] e CUSTÓDIO [2005], da flambagem dos sistemas de perfuração (*drill-strings*) de plataformas de petróleo, TUCKER & WANG [1999] e TUCKER & WANG [2003].

Os dutos flexíveis, muito utilizados para extração e transporte de petróleo e seus derivados, são estruturas de geometria cilíndrica e geralmente compósitas, isto é, constituídas por várias camadas dispostas de forma concêntrica. Cada uma destas camadas desempenha funções específicas e fundamentais para o bom funcionamento de todo o sistema. Uma ou mais destas camadas, por exemplo, é formada por reforçadores helicoidais, os quais são responsáveis pela transmissão de esforços. Em operação, estes reforçadores estão sujeitos a diversos mecanismos de falhas que podem levar todo o sistema à ruína. Quando a estrutura é sujeita a esforços de compressão, por exemplo, um mecanismo de falha destas armaduras é o chamado *birdcaging* ou gaiola de passarinho. Neste caso, a armadura apresenta uma instabilidade local, deformando-se excessivamente na sua direção radial, STUMP & HEIDJEN [2001] e CUSTÓDIO [2005]. As operadoras de extração de petróleo têm demonstrado bastante interesse em modelos numéricos que tratem satisfatoriamente este tipo de comportamento. Estruturas flexíveis também têm sido utilizadas para modelar cabos umbilicais, utilizados em explorações marinhas em campos de águas profundas, e na indústria aeroespacial, RAMOS-JR [2001] e BUCKHAM *et al* [2004]. Do ponto de vista de sua concepção estrutural, os cabos umbilicais são dutos flexíveis que apresentam diversas camadas concêntricas de modo a formar uma estrutura com grande rigidez axial e torsional, porém baixa rigidez à flexão.

Estas estruturas são sistemas multifuncionais compostos por tubos e cabos no seu interior, com a finalidade de controle e comunicação entre equipamentos.

O sistema das plataformas de perfuração de poços de petróleo consiste essencialmente de uma série de dutos de aço cilíndricos conectados para formar uma longa coluna de perfuração (*drill-string*), a qual passa por dentro dos *risers* de perfuração (*drilling riser*), podendo apresentar comprimentos superiores a 5km e geometria curva. A este sistema, é anexado um pequeno segmento contendo um dispositivo cortante (a broca) na sua extremidade, *drill-bit*, que tem por objetivo perfurar um poço que conecte o leito marinho com o reservatório de óleo ou gás. Em operação, o equipamento de perfuração e o poço necessitam ter um certo espaço anular pela necessidade de condução de fluidos e cascalhos. Este tipo de sistema tem apresentado alguns problemas de instabilidade estrutural decorrentes das deformações, torques e flambagem ocasionadas pela presença de camadas de estratificações mais rígidas. Sua mudança de forma no momento destas instabilidades, como por exemplo de uma geometria sinuosa (curva) para outra helicoidal, tem sido observada e é foco de estudos, TUCKER & WANG [1999], TUCKER & WANG [2003], HEIJDEN & FRASER [2003], MEI-LAN & XIN-WEI [2005] e GULYAEV *et al* [2006].

A engenharia espacial também tem grande interesse nos modelos unidimensionais como, por exemplo, no estudo de *tethers* espaciais e umbilicais, BELETSKY & LEVIN [1993] e VALVERDE *et al* [2003]. Um *tether* espacial é um cabo longo usado para conectar uma nave espacial a outra ou a outros corpos em órbita, tais como estações espaciais, veículos de lançamento, satélites, etc, e que possibilita a transferência de energia e momentum, BELETSKY & LEVIN [1993]. Os *tethers* eletrodinâmicos têm sido propostos em várias formas e acredita-se que serão de grande valia em futuras missões espaciais. Uma finalidade destes *tethers* é trazer para a Terra os detritos do espaço (fragmentos de naves espaciais, satélites, etc, abandonados), que ameaçam os satélites e futuros vôos espaciais. Um exemplo é o chamado *Short Electrodynamic Tether (SET)* proposto pela *European Space*

*Agency*, VALVERDE *et al* [2003]. *Tethers* eletrodinâmicos interagem com os campos magnéticos da Terra para criar uma corrente elétrica ao longo dele. Isto é feito através de dispositivos elétricos fixados nas extremidades dos *tethers*, chamados de contadores, que capturam elétrons dos plasmas da ionosfera em uma de suas extremidades e os liberam através da outra, fechando com isto o circuito elétrico. Um plasma é tipicamente um gás ionizado e usualmente considerado como um estado distinto da matéria, em contraste com os outros gases, porque possui propriedades únicas. Como consequência desta corrente induzida, de acordo com as leis de Faraday, forças eletrodinâmicas são geradas e podem ser usadas para impelir ou parar o sistema sem a necessidade de combustíveis químicos. Ao contrário da maioria dos *tethers*, que podem ser tratados como cabos, o protótipo SET é projetado para suportar forças de torção e flexão, tais que ele possa ser girado de maneira que adquira uma orientação relativamente ideal para que o *tether* interaja eficientemente com o campo magnético da Terra, HEIJDEN & VALVERDE [2005].

Modelos de estruturas flexíveis unidimensionais têm se mostrado bastante atraentes para descrever comportamentos biológicos como, por exemplo, moléculas de ADN (ácido desoxirribonucléico) circular e de fita dupla, replicação de bacteriófagos e filamentos helicoidais das fitas do colesterol na formação do cálculo biliar. O mesmo modelo que descreve uma armadura helicoidal descreve o superenovelamento (*supercoiler*) de uma molécula de ADN. O problema deste entrelaçamento assemelha-se ao de uma barra flexível sujeita a torções e autocontatos. Em uma molécula de ADN, essas torções são provocadas pela ação de enzimas, presentes em processos de replicação e transcrição do material genético de uma célula biológica. Este superenovelamento pode se apresentar sobre diversas formas, e cada uma delas influencia de forma diferente a eficiência dos processos de transcrição, MENZEL & GELLERT [1994], replicação, WANG & LIU [1990], e recombinação das moléculas de ADN e KANAAR & COZZARELLI [1992].

Para compreender estas complexas geometrias, que são os superenovelamentos, existe um grande interesse em estudá-las através de modelos mecânicos de

estruturas flexíveis elásticas, SCHLICK [1995], uma vez que suas dimensões dificultam experimentos práticos e sua construção física, em forma de dupla hélice, faz com que a molécula de ADN seja uma estrutura flexível, que pode ser bem descrita por teorias de barras.

Modelos similares podem ser utilizados para estudar bacteriófagos. Um bacteriófago é um vírus que infecta bactérias e que possui uma estrutura que consiste simplesmente de uma cápsula com várias caudas. A cápsula funciona como uma vesícula que armazena seu material genético condensado. Uma vez que o vírus consegue ter o contato com a bactéria, ele interrompe o envoltório celular da bactéria, penetra no seu interior, compartilha seu material genético com o ADN da bactéria, se replica, destrói a célula hospedeira e infecta outra dando continuidade ao ciclo, JIANG *et al* [2006] e LANDER *et al* [2006]. Muitos esforços em pesquisa têm buscado obter um melhor entendimento do superrenovamento do ADN neste processo, KLUG & ORTIZ [2003] e PUROHIT *et al* [2005].

Ainda na área biológica, modelos de estruturas flexíveis unidimensionais têm sido utilizados para estudar os filamentos helicoidais presentes, por exemplo, na forma metaestável das fitas (ribbons) do colesterol no processo de formação do cálculo biliar no interior da vesícula biliar, CHAMPNEYS *et al* [1997], ZASTAVKER *et al* [1993]. O cálculo biliar é composto basicamente por corpos cristalinos formados no interior do corpo, devido à solidificação de substâncias constituintes da biliar.

O desenvolvimento dos modelos matemáticos de barras, que descrevem o comportamento das estruturas flexíveis unidimensionais, teve início com os trabalhos clássicos de Euler, St Venant, Binet e Kirchhoff, ver, por exemplo ANTMAN [1991]. LOVE [1927] teve um papel extremamente importante neste processo através do desenvolvimento matemático de teorias da elasticidade, tornando os trabalhos desenvolvidos até então muito mais compreensíveis. COSSERAT & COSSERAT [1907] e COSSERAT & COSSERAT [1908] foram os primeiros autores a tratar a torção e a flexão de barras separadamente. Entretanto, devido ao

uso de coordenadas cartesianas no seu desenvolvimento, seus trabalhos tornaram-se extremamente difíceis de serem seguidos. ERICKSEN & TRUESDELL [1959], apresentaram em seus trabalhos uma descrição geral de deformações e tensões em barras, as quais eram válidas tanto para pequenas quanto grandes rotações. Eles foram os principais responsáveis pelos fundamentos modernos das teorias de deformações de barras. ANTMAN [1974], SIMO [1985] e ANTMAN [1991] obtiveram formulações não-lineares para seis medidas de deformações: duas componentes de flexão, torção, duas componentes de cisalhamento e extensão. Suas formulações baseiam-se nas teorias de Cosserat, fazendo uso de coordenadas locais, e permitem uma representação geometricamente exata da estrutura. As não-linearidades contempladas podem ser tanto constitutivas quanto geométricas.

Neste trabalho, optamos por representar as estruturas flexíveis através do modelo geral de barras elásticas, descrito por SIMO [1985] e ANTMAN [1991]. A este modelo, agregamos a capacidade de caracterizar interações por contato, sem atrito e aderência, entre a barra e outros corpos sólidos rígidos. Para uma abordagem numérica deste problema não-linear, introduzimos algumas hipóteses adicionais no modelo considerando a estrutura constituída por um material hiperelástico, com não-linearidades apenas geométricas e desprezamos os efeitos de cisalhamento e extensão. Ainda assim o modelo resultante é bastante complexo, não apresentando, inclusive, unicidade de solução.

Na abordagem deste modelo, restringindo-se a problemas no plano, BOURGAT *et al* [1980] e FORTIN & GLOWINSKI [1983] propuseram uma formulação variacional em Lagrangiano Aumentado, construíram uma aproximação pelo método dos elementos finitos e introduziram um algoritmo de resolução baseado na técnica de relaxação por blocos e no algoritmo de Uzawa, FORTIN & GLOWINSKI [1983]. LE-TALLEC & MANI [1988] estenderam este algoritmo para tratar dos problemas em que a estrutura pode apresentar configurações fora do plano, incluindo torção. Motivado por estes dois trabalhos, introduzimos uma formulação variacional em Lagrangiano Aumentado que incorpora restrições de desigualdade

permitindo que sejam abordados problemas de contato da estrutura com outros sólidos rígidos, SANTOS *et al* [2004], SANTOS *et al* [2006a] e SANTOS *et al* [2007].

Com a formulação em Lagrangiano Aumentado, algumas dificuldades como, por exemplo, a da satisfação da condição de inextensibilidade e das restrições de desigualdade são minimizadas. Para esta formulação construímos aproximações por elementos finitos e uma generalização do algoritmo proposto por LE-TALLEC & MANI [1988], incorporando a este a capacidade de considerar restrições de contato com outros sólidos rígidos.

Uma análise global de aproximações por elementos finitos para o modelo descrito anteriormente é extremamente difícil ou até mesmo impossível de ser realizada. Buscando viabilizar tal análise, apresentamos uma linearização consistente dos campos de deformações do problema geral, derivando um modelo espacial em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, que também incorpora as deformações por cisalhamento. O método dos elementos finitos, baseado na formulação clássica de Galerkin, é uma técnica bastante utilizada na obtenção de soluções aproximadas para problemas desta natureza. Entretanto, é bem sabido que tais aproximações exigem certos cuidados nas escolhas das ordens de interpolações dos campos envolvidos para evitar que efeitos de trancamento por cortante (shear locking) produzam perdas de precisão e inutilizem as soluções aproximadas. Comportamento similar é observado nas aproximações de estruturas curvas e delgadas, nas quais ocorrem acoplamentos entre esforços de membrana e de flexão. Nestes casos, escolhas inadequadas das ordens de aproximação podem causar o efeito conhecido como *membrane locking*, que pode ocorrer independentemente do modelo considerar ou não deformação por cortante.

Algumas investigações no intuito de sanar tais problemas foram feitas, explorando o desenvolvimento de formulações de elementos finitos mistos aplicadas na análise de vigas e arcos planos. ARNOLD [1981], apresentou uma análise do problema da viga de Timoshenko no plano. Ele mostrou que a formulação cinemática dá origem a uma convergência não uniforme e que a formulação mista dá

origem a aproximações com taxas quase ótimas, independente do parâmetro de esbeltez. Ele mostrou também que o método de integração reduzida é equivalente a um método misto e portanto pode gerar bons resultados.

REDDY [1988] estendeu a análise para o caso do arco de baixa curvatura e REDDY & VOLPI [1992] analisaram o caso do arco circular. LOULA *et al* [1987b] também estudaram estes problemas e introduziram uma formulação mista de Petrov-Galerkin, ou Galerkin com mínimos quadrados (GLS), para a construção das aproximações por elementos finitos para o problema da viga de Timoshenko. LOULA *et al* [1987a] estenderam esta formulação para o estudo de arcos. A formulação variacional adotada por eles seguiu o princípio de Hellinger-Reissner, onde as variáveis independentes são os esforços generalizados (momentos, cortantes e esforços axiais) e os deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações)

Para tratar do problema linearizado descrito anteriormente, ARUNAKIRINATHAR & REDDY [1993] estenderam ao espaço tridimensional os estudos realizados por REDDY [1988] e REDDY & VOLPI [1992] para problemas de estruturas no plano. Estes autores apresentaram uma formulação mista em que os deslocamentos generalizados são as variáveis principais e apenas uma parcela dos esforços generalizados (cortantes e esforços axiais) são os multiplicadores. Este problema foi aproximado pelo método dos elementos finitos. Eles demonstraram a estabilidade e a convergência uniforme para o método, desde que a escolha das funções de interpolações do espaço dos deslocamentos generalizados fossem pelo menos uma ordem acima das do espaço dos cortantes e esforços axiais.

Neste trabalho, utilizamos o princípio dos trabalhos virtuais para formular variacionalmente, tanto na sua forma cinemática quanto na forma mista, o problema tridimensional linearizado e estabelecemos as condições para existência e unicidade de solução do problema contínuo. A abordagem tratada aqui difere daquela apresentada por ARUNAKIRINATHAR & REDDY [1993], pois consideramos a formulação mista construída segundo o princípio de Hellinger-Reissner. Esta formulação ajusta-se à classe de problemas estudados por Brezzi cujo teorema

garante a existência e unicidade da solução se as propriedades de continuidade das formas bilineares, a K-elipticidade e a condição de compatibilidade entre os espaços (LBB) forem satisfeitas.

Aproximações por elementos finitos são construídas para o problema descrito acima. Mostramos que o modelo cinemático é normalmente instável para uma aproximação conforme e apresentamos alternativas para a solução deste problema. Uma alternativa tratada foi a construção de aproximações por elementos finitos mistos utilizando o método de Galerkin. Com isto, a aproximação envolve dois espaços: os espaços dos deslocamentos e dos esforços generalizados. Através da análise mostramos que a garantia de satisfação dos critérios de convergência (LBB e K-elipticidade discreta) está restrita a poucas combinações de ordens de aproximações destes espaços. Para estender as possibilidades de escolha, propomos neste trabalho uma formulação de Galerkin com adição consistente de formas residuais de mínimos quadrados das equações de equilíbrio do modelo. Estabelecemos as condições de existência e unicidade de solução e demonstramos a estabilidade e a convergência uniforme do método. Tanto nos modelos contínuos quanto nos modelos discretos, as propriedades necessárias para as demonstrações de existência, unicidade e convergência têm sido, classicamente, demonstradas para grandezas escalares. Conseguimos estender essas demonstrações para o caso de grandezas vetoriais, SANTOS *et al* [2005] e SANTOS *et al* [2006b]. Através de experimentos numéricos, confirmamos as estimativas de erro e as taxas de convergência previstas pela análise. Descrevemos a seguir o escopo do nosso trabalho.

No segundo capítulo, apresentamos um modelo matemático contínuo para descrever estruturas flexíveis no espaço tridimensional, em regime de deslocamentos finitos e sujeitas a restrições unilaterais. Para tal, nos baseamos na teoria de Cosserat que, embora seja matematicamente unidimensional, permite uma interpretação tridimensional e geometricamente exata da configuração deformada.

No terceiro capítulo, introduzimos hipóteses simplificadoras na cinemática do modelo apresentado no capítulo anterior, tornando-o inextensível e sem os efei-

tos do cisalhamento. Ainda assim o modelo resultante é bastante complexo, não apresentando, inclusive, unicidade de solução. Introduzimos uma formulação variacional em Lagrangiano Aumentado que reduz algumas dificuldades como, por exemplo, a da satisfação a priori da condição de inextensibilidade e das restrições unilaterais, presentes na formulação cinemática.

No quarto capítulo, construímos a aproximação por elementos finitos de Galerkin para a formulação variacional em Lagrangiano Aumentado. Para sua resolução, apresentamos um algoritmo do tipo Uzawa com decomposição de coordenadas. Finalmente, apresentamos alguns estudos numéricos para o modelo com o intuito de validar o algoritmo, exemplificar a não unicidade de soluções do problema, avaliar a sensibilidade do algoritmo em relação aos seus parâmetros e o seu desempenho quando a estrutura está sujeita a flexo-torções e barreiras físicas que impedem o seu livre deslocamento (restrições unilaterais).

No quinto capítulo, apresentamos uma linearização consistente, dos campos de deformações do problema geral apresentado no segundo capítulo, derivando assim um modelo em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Para o problema resultante apresentamos formulações variacionais cinemática e mista, baseada no princípio de Hellinger-Reissner, e estabelecemos condições suficientes para existência e unicidade de soluções.

No sexto capítulo, construímos e analisamos aproximações por elementos finitos para as formulações apresentadas no quinto capítulo. Introduzimos uma nova aproximação de elementos finitos estabilizada para o problema, demonstramos as condições necessárias para existência e unicidade de soluções independentes dos parâmetros de esbeltez da estrutura e discutimos uma estratégia de resolução. Finalmente, apresentamos alguns experimentos numéricos com o intuito de estudar o comportamento da formulação apresentada, bem como comprovar os resultados da análise numérica desenvolvida.

No sétimo capítulo, apresentamos algumas aplicações de estruturas flexíveis. Finalmente, no último capítulo, resumimos as conclusões discutidas no final de cada

capítulo anterior e indicamos algumas possíveis direções para trabalhos futuros.

Evitando sobrecarregar o texto, incluímos em quatro apêndices relações e deduções clássicas que são freqüentemente utilizadas neste trabalho.

# Capítulo 2

## Modelo matemático geral de barras

Neste capítulo, apresentamos um modelo matemático geometricamente exato para barras no espaço tridimensional, fundamentado na teoria de Cosserat. Nas Seções 2.1 e 2.2, introduzimos os aspectos relevantes para a caracterização da geometria da barra nas suas configurações indeformada e deformada, respectivamente, e as hipóteses cinemáticas que estabelecem os tipos de movimentos permitidos para a estrutura. Na Seção 2.3, apresentamos os cálculos das derivadas espaciais e temporais das bases intrínsecas, as quais serão utilizadas subseqüentemente no desenvolvimento das leis de balanço. Na Seção 2.4 estabelecemos as equações de balanço de momentum linear e angular, especializadas para o modelo de barras. Na Seção 2.5, caracterizamos o conceito geométrico das taxas de deformação para a cinemática estabelecida, bem como estabelecemos suas justificativas matemáticas. Na Seção 2.6, introduzimos as relações constitutivas que caracterizam os materiais da barra. Na Seção 2.7, descrevemos as restrições cinemáticas de igualdade e desigualdade a que a estrutura está sujeita. Na Seção 2.8, evidenciamos de forma resumida todo o sistema de equações obtido nas seções anteriores. Este sistema representa o modelo matemático para barras no espaço tridimensional, regido pela teoria de Cosserat. Por fim, na Seção 2.9, desprezando as forças inerciais, apresentamos uma formulação variacional para o sistema de equações obtido. Demonstramos a equivalência entre a formulação forte e a formulação variacional.

## 2.1 Configuração de referência

Salvo quando explicitado, adotamos como convenção os índices com caracter em Latim variando de 1 a 3, enquanto os índices com caracter em Grego variam de 1 a 2.

Seja  $\mathcal{R}^3$  o espaço euclidiano tridimensional e  $\mathbf{e}_i$  a base ortonormal clássica associada. Essa base é considerada fixa e serve de referência tanto para a configuração indeformada quanto para a configuração deformada do corpo.

Consideramos a barra como sendo um corpo sólido tridimensional formado por infinitas partículas, ocupando uma região do  $\mathcal{R}^3$  e possuindo uma de suas dimensões muito maior quando comparada com as outras duas. Assumimos como configuração de referência seu estado indeformado, isto é, a situação em que o corpo encontra-se isento de esforços internos e forças externas aplicadas.

Seja  $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}^3$  uma curva suficientemente regular e que não apresenta auto-contatos. Denotemos por  $\mathbf{R}_o(S) : \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  o vetor posição que define a curva  $\mathcal{C}$  e possui origem fixa em algum ponto do  $\mathcal{R}^3$ , sendo  $\mathcal{I}$  o intervalo aberto  $]0, L[$ ,  $\bar{\mathcal{I}}$  seu fecho,  $L$  o comprimento da curva  $\mathcal{C}$  e  $S$  o comprimento de arco. Sejam  $\mathbf{E}_i(S) : \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  os vetores que definem, em cada posição  $S$  da curva  $\mathcal{C}$ , uma base local ou intrínseca para a barra na configuração de referência, tal que

$$\|\mathbf{E}_i(S)\|_e = 1, \quad \mathbf{E}_i(S) \cdot \mathbf{E}_j(S) = \delta_{ij}, \quad S \in \bar{\mathcal{I}}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}_3(S) = \mathbf{R}'_o(S), \quad \mathbf{E}_3(S) = \mathbf{E}_1(S) \wedge \mathbf{E}_2(S), \quad S \in \bar{\mathcal{I}}, \quad (2.2)$$

onde  $\|\cdot\|_e$  representa a norma euclidiana,  $(\cdot)'$  a derivada de  $(\cdot)$  em relação ao comprimento de arco  $S$  e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker. Ou seja, os vetores  $\mathbf{E}_i$  formam um triedro ortonormal orientado.

Denotamos por  $\bar{\mathcal{A}}(S) \subset \mathcal{R}^2$  o conjunto fechado e limitado que contém as seções transversais da barra em cada posição  $S$ . Definimos que, para cada  $S$  fixo, a seção transversal da barra  $A(S) \subset \bar{\mathcal{A}}(S)$  seja uma região simplesmente conexa,

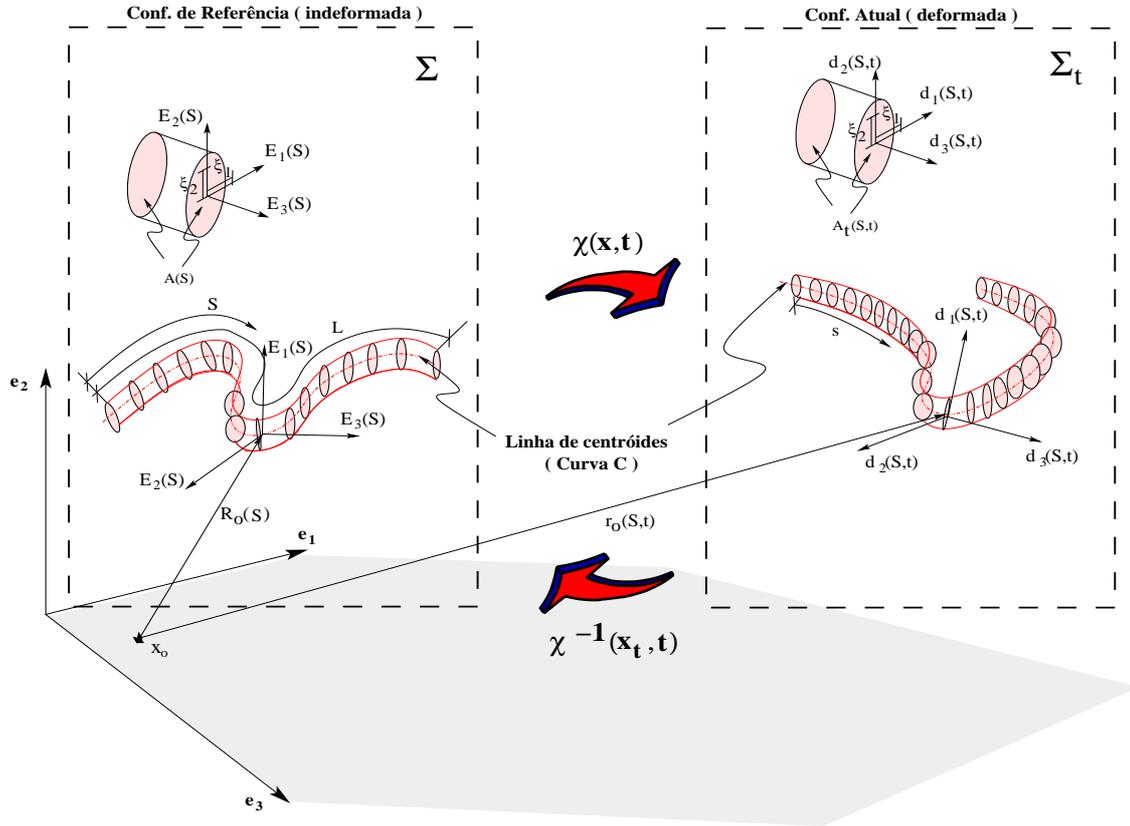


Figura 2.1: Modelo esquemático da estrutura flexível.

com o centróide contido no seu interior e pertencente à curva  $\mathcal{C}$ , contida no plano formado pelos vetores  $\mathbf{E}_1(S)$  e  $\mathbf{E}_2(S)$  e que estes vetores coincidam com os eixos principais de inércia da seção. Como o vetor  $\mathbf{E}_3(S)$  é normal à seção transversal e tangente à curva, nessa configuração a seção transversal é ortogonal à curva  $\mathcal{C}$ . Chamamos de  $h_s$  a dimensão máxima da seção transversal tal que  $|\xi_\alpha| \leq h_s$ , onde  $\xi_\alpha$  são as coordenadas sobre cada eixo  $\mathbf{E}_\alpha(S)$ . Na Figura (2.1) apresentamos um esquema da geometria da barra nas configurações de referência e atual.

Na configuração de referência, cada ponto do corpo é denominado de ponto material e possui suas coordenadas denotadas por  $x \in \mathcal{R}^3$ . Nessa configuração, estas coordenadas são associadas ao vetor posição

$$\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, S) : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3,$$

através da relação  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, S) + \mathbf{x}_o$ , onde  $\mathbf{x}_o \in \mathcal{R}^3$  é a origem do vetor  $\mathbf{r}(\cdot)$  e

$$\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, S) = \mathbf{R}_o(S) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \mathbf{E}_\alpha(S). \quad (2.3)$$

Na equação acima, o primeiro termo do lado direito caracteriza todos os pontos sobre a linha de centróides e o segundo termo caracteriza todos os pontos na seção transversal da estrutura. Com isso, o vetor  $\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, S)$  consegue representar toda a geometria da barra tridimensional. Como  $\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, S)$  é linear em relação a  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , todas as seções transversais são planas.

A união da posição de todos os pontos materiais caracteriza a geometria da barra na configuração de referência  $\Sigma \subset \mathcal{R}^3$ , definida por

$$\Sigma = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^3; (\xi_1, \xi_2, S) \in \mathfrak{S} / \mathbf{x} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, S) + \mathbf{x}_o \}, \quad (2.4)$$

onde o conjunto  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{R}^3$  é definido por

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{S \in \bar{\mathcal{I}}} \{ (\xi_1, \xi_2, S) \in \mathcal{R}^3 / (\xi_1, \xi_2) \in \bar{\mathcal{A}}, |\xi_\alpha| \leq h_s \}, \quad (2.5)$$

O caso mais simples da geometria da barra ocorre quando, na configuração indeformada, o seu eixo descreve uma linha reta e não possui torção. Nesse caso, os vetores  $\mathbf{E}_i(S)$  são constantes ao longo de todo o comprimento da estrutura. Caso o eixo da estrutura descreva uma curva arbitrária no espaço, sempre existirá uma transformação ortogonal  $\mathbf{\Lambda}_o(S) : \mathcal{R}^3 \mapsto \mathcal{R}^3$  pertencente ao grupo das rotações ( $SO_3$ ) que relaciona uma configuração inicialmente curva com uma inicialmente reta. Denotando por  $\hat{\boldsymbol{\nu}}_i$  os vetores, constantes ao longo de  $S$ , associados a uma configuração inicialmente reta, temos

$$\mathbf{E}_i(S) = \mathbf{\Lambda}_o(S) \hat{\boldsymbol{\nu}}_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}_i(S) = (\mathbf{\Lambda}_o)_{ji}(S) \mathbf{e}_j, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}_o(S) = (\mathbf{\Lambda}_o)_{ji}(S) \mathbf{e}_j \otimes \hat{\boldsymbol{\nu}}_i$  é um campo tensorial ortogonal de segunda ordem e os vetores  $\hat{\boldsymbol{\nu}}_i$  não coincidem necessariamente com  $\mathbf{e}_i$ . Denotamos como grupo

das rotações,  $SO_3$ , ao conjunto das transformações lineares, no espaço  $\mathcal{R}^3$ , que possuem as seguintes propriedades:

$$\det(\mathbf{\Lambda}_o(S)) = 1 \quad (\text{Preserva orientação}), \quad (2.7)$$

$$\|\mathbf{\Lambda}_o(S) \mathbf{a}\|_e = \|\mathbf{a}\|_e \quad (\text{Preserva comprimento}), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{\Lambda}_o(S) \mathbf{\Lambda}_o^T(S) = \mathbf{I}_d(S) \quad (\text{Ortogonalidade de } \mathbf{\Lambda}_o(S)), \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3$  e  $\mathbf{I}_d(S) : \bar{\mathcal{T}} \mapsto \mathcal{R}^3$  é o tensor identidade. Voltando às identidades (2.6), podemos perceber que de fato elas são equivalentes, pois substituindo a definição de  $\mathbf{\Lambda}_o(S)$  em (2.6a) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(S) &= \mathbf{\Lambda}(S) \hat{\boldsymbol{\nu}}_i \\ &= ((\Lambda_o)_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \hat{\boldsymbol{\nu}}_i) \hat{\boldsymbol{\nu}}_i \\ &= (\hat{\boldsymbol{\nu}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}}_i) (\Lambda_o)_{ji} \mathbf{e}_j \\ &= (\Lambda_o)_{ji} \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

que é exatamente (2.6b). Podemos concluir que não existem grandes diferenças em descrever a configuração inicial da estrutura por uma geometria reta ou curva. No entanto, para reduzir algumas demonstrações, aumentar a clareza e, conseqüentemente, o entendimento sobre o assunto, optamos por tratar da configuração inicial reta. Quando necessário, apresentamos a situação inicial curva e chamamos a atenção para isto.

## 2.2 Descrição do movimento

Quando a barra sofre algum tipo de solicitação ou perturbação, ela passa de sua configuração de referência para uma configuração deformada. Denotando por  $\Sigma_t \subset \mathcal{R}^3$  sua geometria no instante  $t \in \mathcal{T} \equiv \mathcal{R}_+$ , então existe um mapeamento suave e inversível (Figura (2.1))

$$\chi(\mathbf{x}, t) : \Sigma \times \mathcal{T} \mapsto \Sigma_t, \quad \chi^{-1}(\mathbf{x}_t, t) : \Sigma_t \times \mathcal{T} \mapsto \Sigma,$$

que descreve a trajetória de todas as partículas do corpo e relaciona as configurações inicial e atual, da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_t = \chi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \chi^{-1}(\mathbf{x}_t, t), \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{x}_t$  é a posição ocupada no instante  $t$  pela partícula que ocupava a posição  $\mathbf{x}$  na configuração de referência. No instante  $t = 0$ ,

$$\mathbf{x}_t \Big|_{t=0} = \chi(\mathbf{x}, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}. \quad (2.11)$$

Para caracterizar todas as possíveis posições  $\mathbf{x}_t$  que a barra pode assumir, precisamos introduzir hipóteses cinemáticas sobre seu movimento. Para isso, denotamos o vetor posição que define a linha de centróides da barra no instante  $t$  por

$$\mathbf{r}_o(S, t) : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{r}_o(S, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{R}_o(S)$ . Associemos a cada posição  $S \in \bar{\mathcal{I}}$  uma base intrínseca na configuração espacial dada pelo triedro

$$\mathbf{d}_i(S, t) : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3, \quad (2.13)$$

com as seguintes propriedades:

$$\|\mathbf{d}_i(S, t)\|_e = 1, \quad \mathbf{d}_i(S, t) \cdot \mathbf{d}_j(S, t) = \delta_{ij}, \quad S \in \bar{\mathcal{I}}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{d}_i(S, t) \Big|_{t=0} = \hat{\mathbf{t}}_i, \quad \mathbf{d}_3(S, t) = \mathbf{d}_1(S, t) \wedge \mathbf{d}_2(S, t), \quad S \in \bar{\mathcal{I}}, \quad (2.15)$$

onde os vetores  $\mathbf{d}_1(S, t)$  e  $\mathbf{d}_2(S, t)$  geram os planos que contêm as seções transversais  $A_t(S, t) \subset \bar{\mathcal{A}}(S)$  da estrutura nessa configuração e  $\mathbf{d}_3(S, t)$  é um vetor normal a esse plano. Como definido, o vetor  $\mathbf{d}_3(S, t)$  não é necessariamente coincidente com o vetor tangente à linha de centróides  $\mathbf{r}'_o(S, t)$ .

Uma vez definidas as propriedades e entidades relevantes à geometria da barra, admitimos como hipótese cinemática para o nosso modelo que, a cada instante  $t$ , o vetor posição de um ponto qualquer é dado por

$$\mathbf{r}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) : \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^3,$$

onde

$$\mathbf{r}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) = \mathbf{r}_o(S, t) + \xi_1 \mathbf{d}_1(S, t) + \xi_2 \mathbf{d}_2(S, t) \quad (2.16)$$

caracteriza os tipos de movimentos admissíveis (permitidos) para a estrutura, isto é, identifica, na configuração espacial, todas as posições  $\mathbf{x}_t \in \Sigma_t$  possíveis para uma partícula. Os termos  $\xi_1 \mathbf{d}_1(S, t)$  e  $\xi_2 \mathbf{d}_2(S, t)$  descrevem a posição de uma partícula da seção  $A_t(S, t)$ . Não há imposição de que  $\mathbf{d}_1(S, t)$  e  $\mathbf{d}_2(S, t)$  sejam ortogonais à linha de centróides da barra, e portanto as seções transversais, nessa configuração, também não o são. Como  $\mathbf{r}_t$  é linear em relação a  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , foi introduzida a hipótese de que todas as seções transversais à barra permaneçam planas na configuração deformada.

### 2.3 Cálculo das derivadas das bases intrínsecas

As derivadas espaciais e temporais dos vetores da base intrínseca,  $\mathbf{d}_i(S, t)$ , são ferramentas de crucial importância no desenvolvimento das leis de balanço apresentadas subsequenteemente. Como  $\mathbf{d}_i(S, t)$  é um triedro ortonormal para cada instante  $t$  e  $S \in \overline{\mathcal{I}}$ , existe uma transformação ortogonal  $\mathbf{\Lambda}(S, t) \in SO_3$  tal que

$$\mathbf{d}_i(S, t) = \mathbf{\Lambda}(S, t) \hat{\boldsymbol{\nu}}_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{d}_i(S, t) = \Lambda_{ji}(S, t) \mathbf{e}_j, \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}(S, t) = \Lambda_{ji}(S, t)\mathbf{e}_j \otimes \widehat{\boldsymbol{\iota}}_i$  é um campo tensorial ortogonal de segunda ordem.

Derivando (2.17a), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S}\mathbf{d}_i(S, t) &= \frac{\partial}{\partial S}(\mathbf{\Lambda}(S, t)\widehat{\boldsymbol{\iota}}_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial S}\mathbf{\Lambda}(S, t)\widehat{\boldsymbol{\iota}}_i + \mathbf{\Lambda}(S, t)\frac{\partial}{\partial S}\widehat{\boldsymbol{\iota}}_i.\end{aligned}$$

Pela identidade (2.17a) resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S}\mathbf{d}_i(S, t) &= \frac{\partial}{\partial S}\mathbf{\Lambda}(S, t)\mathbf{\Lambda}^\top(S, t)\mathbf{d}_i(S, t) \\ &= \mathbf{\Omega}(S, t)\mathbf{d}_i(S, t),\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{\Omega}(S, t) = \frac{\partial}{\partial S}\mathbf{\Lambda}(S, t)\mathbf{\Lambda}^\top(S, t) \quad (2.18)$$

é um tensor antisimétrico, isto é, satisfaz à relação do tipo  $\mathbf{\Omega}(S, t) + \mathbf{\Omega}^\top(S, t) = 0$ .

A verificação desta propriedade é apresentada no Apêndice (C.2). O tensor  $\mathbf{\Omega}(S, t)$  pode ser descrito na base  $\mathbf{d}_i(S, t)$  e, pela antisimetria, pode ser expresso em forma matricial como

$$\mathbf{\Omega}(S, t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(S, t) & \omega_2(S, t) \\ \omega_3(S, t) & 0 & -\omega_1(S, t) \\ -\omega_2(S, t) & \omega_1(S, t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, ele possui uma relação bijetiva com o vetor axial  $\boldsymbol{\omega}(S, t) \in \mathcal{R}^3$ , o qual é definido através da relação  $\mathbf{\Omega}(S, t)\boldsymbol{\omega}(S, t) = 0$ , e representado na base intrínseca por

$$\boldsymbol{\omega}(S, t) = \omega_1(S, t)\mathbf{d}_1(S, t) + \omega_2(S, t)\mathbf{d}_2(S, t) + \omega_3(S, t)\mathbf{d}_3(S, t). \quad (2.19)$$

Com isto, as derivadas da base intrínseca em relação ao comprimento de arco podem ser expressas como

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{d}_i(S, t) = \boldsymbol{\omega}(S, t) \wedge \mathbf{d}_i(S, t). \quad (2.20)$$

O vetor  $\boldsymbol{\omega}(S, t)$  possui um significado geométrico bastante importante, pois está associado à curvatura e à torção da barra. Os escalares  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são chamados de componentes da curvatura da barra e  $\omega_3$  componente da torção.

No caso em que a estrutura possui uma configuração inicial não reta, temos que a derivada em relação ao comprimento de arco é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{d}_i(S, t) &= \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \mathbf{E}_i(S) + \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \frac{\partial}{\partial S} (\boldsymbol{\Lambda}_o(S) \hat{\mathbf{l}}_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \mathbf{E}_i(S) + \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \left( \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}_o(S) \boldsymbol{\Lambda}_o^T(S) \right) \mathbf{E}_i(S) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) \mathbf{d}_i(S, t) + \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \left( \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}_o(S) \boldsymbol{\Lambda}_o^T(S) \right) \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) \mathbf{d}_i(S, t) \\ &= \bar{\boldsymbol{\Omega}}(S, t) \mathbf{d}_i(S, t), \end{aligned}$$

onde

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}(S, t) = \left( \boldsymbol{\Omega}(S, t) + \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \boldsymbol{\Omega}_o(S) \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) \right), \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(S, t) = \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t), \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_o(S) = \frac{\partial}{\partial S} \boldsymbol{\Lambda}_o(S) \boldsymbol{\Lambda}_o^T(S), \quad (2.23)$$

são tensores antisimétricos. O tensor  $\boldsymbol{\Omega}_o(S)$  está associado à curvatura e à torção iniciais da barra e possui representação em forma de vetor axial dada por

$$\boldsymbol{\omega}_o(S) = \omega_{o1}(S) \mathbf{E}_1(S) + \omega_{o2}(S) \mathbf{E}_2(S) + \omega_{o3}(S) \mathbf{E}_3(S),$$

sendo os escalares  $\omega_{o1}$  e  $\omega_{o2}$  as componentes das curvaturas inicial da barra e  $\omega_{o3}$  a componente da torção inicial. No caso em que a barra apresenta uma geometria inicial reta e sem torção, o vetor  $\boldsymbol{\omega}_o(S) = 0$  para todo  $S \in \bar{\mathcal{I}}$ .

Bastante útil também, é o cálculo da derivada temporal da base intrínseca, Eq. (2.17a). Utilizando a notação

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}_i(S, t) = \dot{\mathbf{d}}_i(S, t)$$

temos que

$$\dot{\mathbf{d}}_i(S, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{\Lambda}(S, t) \widehat{\mathbf{l}}_i(S)] \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Lambda}(S, t) \right] \mathbf{\Lambda}^T(S, t) \mathbf{d}_i(S, t) \\ &= [\dot{\mathbf{\Lambda}}(S, t) \mathbf{\Lambda}^T(S, t)] \mathbf{d}_i(S, t) \\ &= \mathcal{W}(S, t) \mathbf{d}_i(S, t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$\mathcal{W}(S, t) = \dot{\mathbf{\Lambda}}(S, t) \mathbf{\Lambda}^T(S, t)$$

é um tensor antisimétrico denominado de tensor de vorticidade e que descreve o movimento rígido local da base intrínseca em cada instante  $t$ . Seu vetor axial associado  $\boldsymbol{w}(S, t)$ , que satisfaz à relação  $\mathcal{W}(S, t) \boldsymbol{w}(S, t) = 0$ , descreve a vorticidade da base intrínseca. Em termos do vetor de vorticidade, a equação (2.25) pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{d}}_i(S, t) = \boldsymbol{w}(S, t) \wedge \mathbf{d}_i(S, t). \quad (2.26)$$

## 2.4 Equações do movimento

Uma vez estabelecida a cinemática da barra, apresentamos nesta seção as equações que regem seu movimento. No instante  $t$ , imaginemos a barra sendo seccionada e denotemos por  $A_t = A_t(S, t) \in \overline{\mathcal{A}}(S)$  a seção transversal neste corte, sendo  $\Sigma_I$  a porção da barra cuja normal em  $A_t$  coincide com a normal do plano seccionador e  $\Sigma_{II}$  a porção cuja normal possui sentido oposto, como mostra a Figura 2.2. Com isso, os esforços e momentos resultantes que surgem para equilibrar  $\Sigma_I$ , quando este é um corpo livre, são denotados por  $\mathbf{n}(S, t) : \overline{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$  e

$\mathbf{m}(S, t) : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$ , que representam, respectivamente, a força de contato resultante da interação com  $\Sigma_{II}$  na seção  $A_t$  e o momento resultante agindo sobre esta seção. Em teorias tridimensionais a forma diferencial da equação de balanço

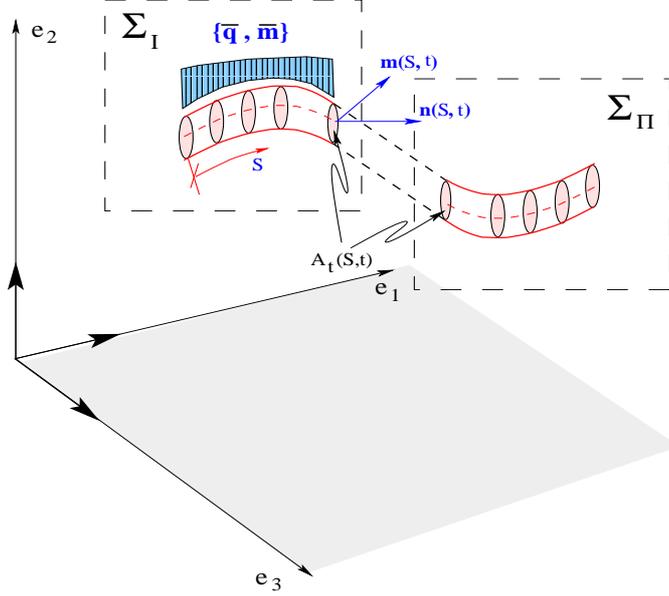


Figura 2.2: Modelo esquemático de equilíbrio da barra.

de momentum linear pode ser expressa por

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}(\xi_1, \xi_2, S)) + \mathbf{b}_o(\xi_1, \xi_2, S) = \rho_o(\xi_1, \xi_2, S)\ddot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t), \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{b}_o(\xi_1, \xi_2, S) : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  é a força de corpo por unidade de volume na configuração de referência,  $\rho_o(\xi_1, \xi_2, S) : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  é a massa específica na configuração de referência e  $\mathbf{T}(\xi_1, \xi_2, S) : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  o tensor de Piola-Kirchhoff, cuja representação na base intrínseca é dada através do seguinte produto tensorial

$$\mathbf{T}(\xi_1, \xi_2, S) = \mathbf{t}_1(\xi_1, \xi_2, S) \otimes \hat{\mathbf{l}}_1 + \mathbf{t}_2(\xi_1, \xi_2, S) \otimes \hat{\mathbf{l}}_2 + \mathbf{t}_3(\xi_1, \xi_2, S) \otimes \hat{\mathbf{l}}_3, \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{t}_i(\xi_1, \xi_2, S) : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  são os vetores das tensões por unidade de área de referência. O operador  $\mathbf{T}$  é um tensor de segunda ordem, não simétrico, possui o vetor  $\mathbf{t}_3$  agindo na seção deformada  $A_t$  da barra, os vetores  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  agindo nas superfícies com normais  $\hat{\mathbf{l}}_1$  e  $\hat{\mathbf{l}}_2$ , respectivamente, e divergente expresso através da

seguinte relação:

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial S}. \quad (2.29)$$

Assim, segue da equação (2.27) que a equação do balanço de momentum linear pode ser escrita como

$$\left( \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial S} \right) + \mathbf{b}_o = \rho_o \ddot{\mathbf{r}}_t. \quad (2.30)$$

De posse do resultado acima, apresentamos a seguir sua especialização para a cinemática da barra introduzida por (2.16) e subseqüentemente a especialização da equação do balanço de momentum angular.

#### 2.4.1 Balanço de momentum linear

Para descrever esse balanço, utilizamos a definição de que a força de contato resultante,  $\mathbf{n}(S, t)$ , atuando na seção transversal da barra na configuração deformada  $A_t$  é dada por

$$\mathbf{n}(S, t) = \int_A \mathbf{T}(\xi_1, \xi_2, S) \widehat{\mathbf{l}}_3 dA = \int_A \mathbf{t}_3(\xi_1, \xi_2, S) dA, \quad (2.31)$$

onde  $A = A_t \Big|_{t=0} \in \mathcal{A}(S)$  é a seção transversal da estrutura na configuração de referência. Note que embora a integral seja sobre a seção transversal da barra na configuração de referência, a força resultante é caracterizada, no instante  $t$ , na sua seção deformada. Derivando essa equação em relação ao comprimento de arco obtemos

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{n}(S, t) = \frac{\partial}{\partial S} \int_A \mathbf{t}_3 dA = \int_A \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{t}_3 dA. \quad (2.32)$$

Utilizando a relação (2.30) e o teorema da divergência para campos vetoriais no plano, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{n}(S, t) = - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial A} \mathbf{t}_\alpha \mathbf{n}_\alpha d(\partial A) - \int_A \mathbf{b}_o dA + \int_A \rho_o \ddot{\mathbf{r}}_t dA, \quad (2.33)$$

onde  $\partial A \in \mathcal{R}^3$  é a curva fechada que delimita  $A$  e  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \widehat{\boldsymbol{\iota}}_1 + \mathbf{n}_2 \widehat{\boldsymbol{\iota}}_2 \in \mathcal{R}^3$  é o campo vetorial normal a  $\partial A$ , sendo  $\mathbf{n}_\alpha$  suas componentes. Definindo por

$$\bar{\mathbf{n}}(S, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial A} (\mathbf{t}_\alpha \mathbf{n}_\alpha) d(\partial A) + \int_A \mathbf{b}_o dA,$$

o vetor de forças por unidade de comprimento de arco,  $S$ , onde o primeiro termo do lado direito representa as forças de superfície e o segundo as forças de corpo compatíveis com o modelo apresentado, temos que a equação de conservação do momentum linear é dada por

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{n}(S, t) + \bar{\mathbf{n}}(S, t) = \int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \ddot{\mathbf{r}}_t(S, t) \quad S \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}.$$

Utilizando as relações (B.2) e (B.3), podemos reescrever a equação acima por

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{n}(S, t) + \bar{\mathbf{n}}(S, t) = \dot{\mathbf{L}}_t = \rho_s(S) \ddot{\mathbf{r}}_o(S, t) \quad S \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad (2.34)$$

onde  $\rho_s(S) : \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  é a massa da barra por unidade de comprimento de arco e  $\dot{\mathbf{L}}_t$  é a derivada material do momentum linear.

#### 2.4.2 Balanço de momentum angular

O momento resultante,  $\mathbf{m}(S, t)$ , atuando na seção transversal  $A_t$  da barra na configuração atual é dado por

$$\mathbf{m}(S, t) = \int_A [\mathbf{r}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) - \mathbf{r}_o(\xi_1, \xi_2, S, t)] \wedge \mathbf{t}_3(\xi_1, \xi_2, S) dA,$$

onde vale a pena ressaltar que, também aqui, a integral é sobre a seção na configuração de referência da barra, embora o momento resultante, no instante  $t$ , aja na sua seção deformada. Fazendo a derivação em relação ao comprimento de arco temos

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, t) = \int_A \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} - \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right] \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA + \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial S} \right) dA.$$

Substituindo a relação (2.30) na equação acima obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, t) &= \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA - \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA \\
&+ \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \left[ - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} - \mathbf{b}_o + \rho_o \ddot{\mathbf{r}}_t \right] \right) dA \\
&= \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA - \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \wedge \mathbf{n} - \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \right) dA \\
&- \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge [\mathbf{b}_o - \rho_o \ddot{\mathbf{r}}_t] \right) dA. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Pela relação (C.3) temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 = - \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{t}_1 - \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_2} \wedge \mathbf{t}_2.$$

Fazendo o produto escalar por um vetor não nulo e constante  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3$  e utilizando a relação (A.11) temos que

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) \cdot \mathbf{a} &= -\mathbf{t}_1 \cdot \left( \mathbf{a} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_1} \right) - \mathbf{t}_2 \cdot \left( \mathbf{a} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_2} \right) \\
&= -\mathbf{t}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \right) - \mathbf{t}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \right).
\end{aligned}$$

Denotando por  $\mathbf{T}_\xi = \mathbf{t}_1 \otimes \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \hat{\mathbf{t}}_2$  a parcela do tensor de Piola-Kirchhoff, equação (2.28), e fazendo uso da relação

$$\nabla_\xi (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}_t) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \right) \otimes \hat{\mathbf{t}}_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \right) \otimes \hat{\mathbf{t}}_2,$$

resulta que

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{T}_\xi \cdot \nabla_\xi (\mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o]).$$

Multiplicando escalarmente por  $\mathbf{a}$ , substituindo a relação acima, e utilizando (2.29) no primeiro e terceiro termos do lado direito da equação (2.35), temos

$$\int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \right) dA \cdot \mathbf{a} - \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA \cdot \mathbf{a} = \int_A \left( \operatorname{div}(\mathbf{T}_\xi) \cdot (\mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o]) \right) dA + \int_A \mathbf{T}_\xi \cdot \nabla_\xi (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}_t) dA.$$

Aplicando a relação tensorial (A.21) obtemos

$$\int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \right) dA \cdot \mathbf{a} - \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA \cdot \mathbf{a} = \int_A \left( \operatorname{div}(\mathbf{T}_\xi^T (\mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o])) \right) dA.$$

Pelo teorema da divergência para campos vetoriais no plano, temos

$$\begin{aligned} \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \right) dA \cdot \mathbf{a} - \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA \cdot \mathbf{a} &= \int_{\partial A} \left( \mathbf{T}_\xi^T (\mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o]) \cdot \mathbf{n} \right) d(\partial A) \\ &= \int_{\partial A} \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \mathbf{T}_\xi \mathbf{n} \right) d(\partial A) \cdot \mathbf{a} \\ &= \int_{\partial A} \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{t}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) d(\partial A) \cdot \mathbf{a}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \right) dA - \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) dA = \int_{\partial A} \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{t}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) d(\partial A).$$

Substituindo a relação acima em (2.35) segue que

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, t) = -\frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \wedge \mathbf{n} - \int_{\partial A} \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{t}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) d(\partial A) - \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge [\mathbf{b}_o - \rho_o \ddot{\mathbf{r}}_t] \right) dA. \quad (2.36)$$

Definindo por

$$\bar{\mathbf{m}}(S, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial A} \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \mathbf{t}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) d(\partial A) + \int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \mathbf{b}_o \right) dA,$$

o momento aplicado por unidade de comprimento de arco,  $S$ , e fazendo uso da relação

$$\int_A \left( [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge \rho_o \ddot{\mathbf{r}}_t \right) dA = \mathbf{I}_\rho(S, t) \dot{w}(S, t) + w(S, t) \wedge \mathbf{H}_t(S, t)$$

obtida por (B.4) e (B.16), onde  $\mathbf{I}_\rho(S, t)$  é o tensor de inércia e  $\mathbf{H}_t(S, t)$  é o momento angular, temos

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, t) + \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \wedge \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}(S, t) = \mathbf{I}_\rho(S, t) \dot{w}(S, t) + w(S, t) \wedge \mathbf{H}_t(S, t). \quad (2.37)$$

As equações (2.34) e (2.37), respectivamente, representam a especialização das equações de balanço de momentum linear e momentum angular para o modelo de barras com a cinemática estabelecida pela relação (2.16).

## 2.5 Caracterização das medidas de deformação

Nesta seção, caracterizamos matematicamente as taxas de deformações para a cinemática definida em (2.16) e discutimos seus significados geométricos. Para isto, utilizaremos a expressão da potência realizada especializada para esta cinemática, conforme apresentada no Anexo (B.3) e denotada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{I}} \frac{A(S) \rho_o}{2} (\dot{\mathbf{r}}_o \cdot \dot{\mathbf{r}}_o) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_o}{2} \{ (w \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \cdot (w \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \} d\Sigma \\ &+ \int_{\mathcal{I}} \left\{ \mathbf{n} \cdot (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{m} \cdot (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\omega}}) \right\} dS, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}(S, t) : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$  é dado como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(S, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \mathbf{d}_3 \right), \quad (2.39)$$

e

$$(\overset{\nabla}{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) - w \wedge (\cdot) \quad (2.40)$$

é a taxa medida por um observador localizado sobre a base intrínseca. Pela dualidade com os esforços cisalhantes e de extensão  $\mathbf{n}(S, t)$  e flexão e torção  $\mathbf{m}(S, t)$ , podemos perceber que os termos  $(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}})$  e  $(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\omega}})$  descrevem a taxa de deformação  $\dot{\mathbf{F}}$  especializada para a cinemática da barra, e o vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}(S, t)$  caracteriza as deformações cisalhantes e de extensão da barra. Definindo o vetor  $\mathbf{v}(S, t) : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$  como

$$\mathbf{v}(S, t) = \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{r}_o(S, t), \quad (2.41)$$

cujas componentes são

$$v_i(S, t) = \mathbf{r}'_o(S, t) \cdot \mathbf{d}_i(S, t), \quad (2.42)$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} v_1(S, t) &= \boldsymbol{\varepsilon}(S, t) \cdot \mathbf{d}_1(S, t), \\ v_2(S, t) &= \boldsymbol{\varepsilon}(S, t) \cdot \mathbf{d}_2(S, t), \\ v_3(S, t) &= \boldsymbol{\varepsilon}(S, t) \cdot \mathbf{d}_3(S, t) + 1, \end{aligned}$$

observamos que as componentes  $v_1(S, t)$  e  $v_2(S, t)$  medem no instante  $t$  as deformações cisalhantes nas direções  $\mathbf{d}_1(S, t)$  e  $\mathbf{d}_2(S, t)$ , respectivamente, e a componente  $v_3(S, t)$  mede o alongamento ou encurtamento da barra. Esta componente deve satisfazer à relação

$$v_3(S, t) = \mathbf{r}'_o \cdot \mathbf{d}_3 > 0, \quad (2.43)$$

assegurando a condição básica de preservação da orientação que implica que uma seção  $A_t(S, t)$  não pode ser completamente deformada de tal forma que o plano definido pelos vetores  $\mathbf{d}_1(S, t)$  e  $\mathbf{d}_2(S, t)$  seja tangente à curva  $\mathbf{r}_o(\cdot, t)$  no ponto  $\mathbf{r}(S, t)$ .

Por outro lado, o vetor  $\boldsymbol{\omega}(S, t)$ , dual aos esforços de flexão e torção  $\mathbf{m}(S, t)$ , caracteriza as deformações por flexão e torção da barra. Cada uma de suas componentes, pode ser expressa diretamente em função da base intrínseca através da

relação

$$\omega_i(\mathbf{d}_i(S, t)) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathbf{d}'_j(S, t) \cdot \mathbf{d}_k(S, t), \quad (2.44)$$

que é de grande valia na formulação do modelo. Como discutido na Seção (2.3), estas componentes medem no instante  $t$ , as deformações de flexão em torno dos eixos  $[\mathbf{d}_1(S, t)$  e  $\mathbf{d}_2(S, t)]$ , respectivamente, e a deformação por torção da barra. ANTMAN [1991] prova que estas medidas de deformações são invariantes com movimentos de corpo rígido.

## 2.6 Equações constitutivas

Nesta seção introduzimos uma lei constitutiva elástica para o nosso modelo de barras de Cosserat. Dentro da teoria de Cosserat para barras um material elástico não-linear pressupõe a existência de funções constitutivas  $\hat{\mathbf{m}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  tais que

$$\mathbf{m}(S, t) = \hat{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{n}(S, t) = \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S). \quad (2.46)$$

Essas funções devem obedecer ao princípio da objetividade ANTMAN [1991] e GURTIN [1981], isto é, são invariantes a um movimento de corpo rígido, e representam as formas mais gerais de expressar um material com comportamento elástico. Um caso particular dessa lei é introduzido através do conceito de materiais hiperelásticos, os quais geram matrizes constitutivas não-lineares simétricas. Um material é referido como hiperelástico se e somente se, os esforços internos generalizados  $\mathbf{n}(S, t)$  e  $\mathbf{m}(S, t)$  forem definidos por

$$\mathbf{n}(S, t) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}}(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S) \quad (2.47)$$

$$\mathbf{m}(S, t) = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S), \quad (2.48)$$

onde  $\Pi(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S)$  é denominada função densidade de energia de deformação. Por hipótese, esta função é continuamente diferenciável, convexa e coerciva

MALVERN [1969].

No nosso modelo, consideramos a barra constituída por um material hipere-lástico, isotrópico e com seções geométricas circulares. Para isso, utilizamos uma forma quadrática da função densidade de energia de deformação:

$$\begin{aligned} \Pi\left(S, \boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t)\right) &= \frac{GA}{2}(S)\left(v_1^2(S, t) + v_2^2(S, t)\right) + \frac{EA}{2}(S)\left(v_3(S, t) - 1\right)^2 \\ &+ \frac{EI}{2}(S)\left(\omega_1^2(S, t) + \omega_2^2(S, t)\right) + GI(S)\omega_3^2(S, t), \quad (2.49) \end{aligned}$$

onde  $E > 0$  é o módulo de Young,  $G > 0$  o módulo de cisalhamento,  $I = I_1 = I_2 = \frac{J}{2}$  o momento de inércia, como definido em (B.11–B.12),  $J$  o momento polar de inércia, a soma  $(v_1^2 + v_2^2)$  está associada à energia de cisalhamento,  $(v_3 - 1)^2$  à energia de extensão,  $(\omega_1^2 + \omega_2^2)$  caracteriza a energia de flexão e  $\omega_3^2$  a energia de torção.

## 2.7 Restrições cinemáticas

Para fechar o sistema do modelo, falta apenas introduzir suas restrições cinemáticas. Nesse modelo consideramos as condições de contorno tanto com restrições bilaterais, de igualdade, quanto unilaterais, caracterizadas por um sistema de inequações que agrega ao modelo a capacidade de representar classes de problemas que envolvem interações por contato entre a barra e outros corpos sólidos. Essas classes de problemas são sem dúvida alguma bastante amplas, visto as diversas conjecturas que podem ser feitas a respeito da natureza dos contatos e dos corpos. Nesse modelo, consideramos a interação como sendo entre um corpo deformável e outro rígido e desprezamos tanto os efeitos do atrito quanto da aderência entre eles.

Para agregar ao modelo essas restrições, consideramos o intervalo  $\mathcal{I}$  subdividido em três partes  $\mathcal{I}_f$ ,  $\mathcal{I}_r$  e  $\mathcal{I}_c$  satisfazendo às seguintes condições:

$$\bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}_f \cup \bar{\mathcal{I}}_r \cup \bar{\mathcal{I}}_c, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{I}_f \cap \mathcal{I}_r = \mathcal{I}_f \cap \mathcal{I}_c = \mathcal{I}_r \cap \mathcal{I}_c = \emptyset, \quad (2.51)$$

onde  $\emptyset$  é o conjunto vazio,  $\mathcal{I}_f$  é o conjunto aberto formado pela região onde as forças e momentos são prescritos,  $\mathcal{I}_r$  a região do contorno (extremidades da barra) onde os deslocamentos são prescritos e  $\mathcal{I}_c$  o conjunto aberto formado pela região da barra candidata a entrar em contato com um sólido rígido (barreira). Dizemos que esta região é candidata porque na dinâmica de deformação da barra, ela pode entrar em contato com a barreira e manter-se unida, ou pode formar uma outra configuração em que não haja em instante algum esse contato, ou até mesmo que haja o contato, mas ela tome uma nova configuração em que a interação deixe de existir. O fato é que nem sempre podemos prever o comportamento que a estrutura assumirá após a aplicação das cargas, mas podemos garantir que o contato, se houver, ocorrerá na região  $\mathcal{I}_c$ .

Definindo  $\mathbf{h}(S, t) : \mathcal{I}_c \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^3$  a função vetorial cuja imagem é paralela ao vetor  $[\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)]$  e que representa o afastamento entre a barra e o corpo sólido rígido, ODEN & KIKUCHI [1988] e BARBOSA [1986], devemos satisfazer à condição de impenetrabilidade entre eles, dada por

$$\|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e - \|\mathbf{h}(S, t)\|_e \leq 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \forall t \in \mathcal{T}. \quad (2.52)$$

À medida que a estrutura deforma e em alguma região há o contato com o corpo sólido, ou seja,  $(\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)) = \mathbf{h}(S, t)$ , surgem nessas regiões forças de reação, as quais são definidas pela função  $\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) : \mathcal{I}_c \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^3$  e caracterizadas da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) = 0 \quad \text{se} \quad \|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e \leq \|\mathbf{h}(S, t)\|_e \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (2.53)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) \leq 0 \quad \text{se} \quad \|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e = \|\mathbf{h}(S, t)\|_e \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \forall t \in \mathcal{T}. \quad (2.54)$$

Com isso, podemos resumir as condições de contato (2.52), (2.53) e (2.54) através

do seguinte sistema:

$$\|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e - \|\mathbf{h}(S, t)\|_e \leq 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \forall t \in \mathcal{T}, (2.55)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) \leq 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \forall t \in \mathcal{T}, (2.56)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) [\|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e - \|\mathbf{h}(S, t)\|_e] = 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \forall t \in \mathcal{T}, (2.57)$$

onde a equação (2.57) é conhecida como relação de complementaridade entre  $\bar{\mathbf{n}}_c(S, t)$  e  $(\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)) - \mathbf{h}(S, t)$ .

Para descrever as condições de contorno com restrições bilaterais, em  $S \in \mathcal{I}_r$ , fixamos o extremo inicial da estrutura,  $S = 0$ , através da restrição

$$\mathbf{r}_o(0, t) = \mathbf{r}^0(t), (2.58)$$

onde  $\mathbf{r}^0(t) \in \mathcal{R}^3$  é uma função contínua dada e, para completar o conjunto de restrições necessárias para tornar o problema bem posto, devemos considerar uma ou mais das seguintes relações abaixo:

- Em  $S = 0$ , a barra permite uma rotação em torno do eixo  $\mathbf{d}_i^0(t)$  e em  $S = L$  possui deslocamento fixo e rotações livres,

$$\mathbf{r}_o(L, t) = \mathbf{r}^l(t), (2.59)$$

$$\mathbf{d}_i(0, t) = \mathbf{d}_i^0(t) \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\}, (2.60)$$

onde  $\mathbf{d}_i^0(t) \in \mathcal{R}^3$  é uma função contínua dada.

- Em  $S = 0$  a barra está engastada,

$$\mathbf{d}_i(0, t) = \mathbf{d}_i^0(t) \quad \text{para } \forall i \in \{1, 2, 3\}. (2.61)$$

- Em  $S = L$  barra permite uma rotação em torno do eixo  $\mathbf{d}_i^0(t)$ ,

$$\mathbf{d}_i(L, t) = \mathbf{d}_i^l(t) \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\}, (2.62)$$

onde  $\mathbf{d}_i^l(t) \in \mathcal{R}^3$  é uma função contínua dada.

- A barra está engastada em  $S = L$ ,

$$\mathbf{r}_o(L, t) = \mathbf{r}^l(t), \quad (2.63)$$

$$\mathbf{d}_i(L, t) = \mathbf{d}_i^l(t) \quad \text{para } \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.64)$$

onde  $\mathbf{r}^l(t) \in \mathcal{R}^3$  é uma função contínua dada.

## 2.8 Modelo matemático

Nesta seção, resumimos as equações e inequações desenvolvidas e descritas nas seções (2.3) a (2.7). O nosso problema consiste em:

**Problema M :** Dadas as funções  $(\bar{\mathbf{n}}(S, t), \bar{\mathbf{m}}(S, t), \mathbf{h}(S, t)) \in \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$ , encontrar  $(\mathbf{r}_o(S, t), \mathbf{d}_i(S, t)) \in \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$ , com  $S \in \mathcal{I}$  e  $t \in \mathcal{T}$ , satisfazendo

**Equações de equilíbrio**

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{n}(S, t) + \bar{\mathbf{n}}(S, t) + \bar{\mathbf{n}}_c(S, t) = \rho_s(S) \ddot{\mathbf{r}}_o(S, t), \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, t) + \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \wedge \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}(S, t) = \mathbf{I}_p(S, t) \dot{\boldsymbol{\omega}}(S, t) + \boldsymbol{\omega}(S, t) \wedge \mathbf{H}_t(S, t). \quad (2.66)$$

**Equações constitutivas**

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S) = \frac{\partial \Pi}{\partial v_i}(\omega_j(S, t), v_i(S, t), S) \mathbf{d}_i(S, t), \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}(S, t), \mathbf{v}(S, t), S) = \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_j}(\omega_j(S, t), v_i(S, t), S) \mathbf{d}_j(S, t), \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (2.68)$$

com

$$\Pi(S, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \frac{GA}{2} (v_1^2 + v_2^2) + \frac{EA}{2} (v_3 - 1)^2 + \frac{EI}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + GI(\omega_3^2). \quad (2.69)$$

## Condições iniciais

$$\mathbf{r}_o(S, 0) = \mathbf{p}_o^0(S), \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (2.70)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_o(S, 0) = \mathbf{p}_o^1(S), \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{d}_i(S, 0) = \mathbf{d}_i^t(S), \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (2.72)$$

## Restrições unilaterais

$$\|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e - \|\mathbf{h}(S, t)\|_e \leq 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \quad (2.73)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) \leq 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \quad (2.74)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_c(S, t) [\|\mathbf{r}_o(S, t) - \mathbf{R}_o(S, t)\|_e - \|\mathbf{h}(S, t)\|_e] = 0 \quad \forall S \in \mathcal{I}_c, \quad (2.75)$$

## Restrições bilaterais

$$\mathbf{r}_o(0, t) = \mathbf{r}^0(t), \quad (2.76)$$

e um ou mais dos conjuntos de condições definidas pelas equações (2.59) a (2.64).

O **Problema M** descreve a forma mais geral de expressar o modelo de barras de Cosserat com cinemática descrita por (2.16).

## 2.9 Formulação variacional

Desprezando as forças de inércia e as restrições unilaterais, apresentamos uma formulação variacional para o **Problema M**. Com este fim, denotamos por

$$L^2(\mathcal{I}) = \left\{ r : \mathcal{I} \mapsto \mathcal{R} / \int_{\mathcal{I}} r^2 dS < \infty \right\}, \quad (2.77)$$

o espaço das funções escalares quadrado integráveis no sentido de Lebesgue, com produto interno

$$(r, p) = \int_{\mathcal{I}} rp \, dS, \quad \forall r, p \in L^2(\mathcal{I}). \quad (2.78)$$

Representamos por

$$H^m(\mathcal{I}) = \left\{ r \in L^2(\mathcal{I}) / \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \frac{d^\alpha r}{dS^\alpha} \in L^2(\mathcal{I}) \right\}, \quad (2.79)$$

com  $m \geq 0$ , os espaços de Hilbert com produto interno e norma associados definidos, respectivamente, por

$$(r, p)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{I}} \frac{d^\alpha r}{dS^\alpha} \frac{d^\alpha p}{dS^\alpha} dS, \quad r, p \in L^2(\mathcal{I}), \quad (2.80)$$

e

$$\|r\|_m = (r, r)_m^{\frac{1}{2}}, \quad (2.81)$$

onde as derivadas são no sentido das distribuições.

Com essas definições, podemos expressar variacionalmente a forma estática do **Problema M** através do seguinte problema de minimização:

**Problema F :** Dados  $\{\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}_i\} \in \bar{\mathcal{U}}'$  (dual de  $\bar{\mathcal{U}}$ ), forças e binários por unidade de comprimento de arco, encontrar  $(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) \in \bar{\mathcal{U}}$  tais que

$$J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) \leq J(\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_i) \quad \forall (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_i) \in \bar{\mathcal{U}}, \quad (2.82)$$

onde  $\bar{\mathcal{U}} \subset [H^2(\mathcal{I})]^3 \times [H^1(\mathcal{I})]^6$  é o conjunto das configurações cinematicamente admissíveis que satisfazem as condições de contorno e são suficientemente regulares para que todas as operações façam sentido. O funcional  $J(\cdot) : \bar{\mathcal{U}} \mapsto \mathcal{R}$  é definido por

$$J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) = \int_{\mathcal{I}} \Pi(S, \omega_i(\mathbf{d}_i), v_i(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i)) dS - \int_{\mathcal{I}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_o + \bar{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{d}_i) dS \quad \forall (\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) \in \bar{\mathcal{U}}, \quad (2.83)$$

onde fizemos uso da relação

$$\bar{\mathbf{n}}_i(S, t) \wedge \mathbf{d}_i(S, t) = \bar{\mathbf{m}}(S, t).$$

Note que o subíndice  $i$  dos vetores de binários não indica componente em relação à base  $\mathbf{d}_i$ , e sim uma maneira de distinguir cada um deles.

Para mostrar a equivalência entre o **Problema F** e o **Problema M**, partimos da condição necessária para a existência de um mínimo local do **Problema F**, dada por

$$\mathcal{D}J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_i) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} J(\mathbf{r}_o + \varrho \mathbf{q}_o, \mathbf{d}_i + \varrho \mathbf{g}_i) = 0.$$

Desde que o funcional  $\mathbf{\Pi}(S, \cdot, \cdot)$  satisfaça às seguintes hipóteses de regularidade (LE-TALLEC & MANI [1988]):

$$(H_1) \quad \mathbf{\Pi}(S, \cdot, \cdot) \in C^1(\mathcal{I}) \text{ em quase todos os pontos de } \mathcal{I},$$

$$(H_2) \quad |\mathcal{D}\mathbf{\Pi}(S, \boldsymbol{\omega}, \cdot) \cdot \delta\boldsymbol{\omega} + \mathcal{D}\mathbf{\Pi}(S, \cdot, \mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v}| \leq \left[ c_0 + c_1(\omega_j\omega_j + v_kv_k)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ \delta\omega_j\delta\omega_j + \delta v_k\delta v_k \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$\delta\boldsymbol{\omega} = \mathcal{D}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}_j, \quad (2.84)$$

$$\delta\mathbf{v} = \mathcal{D}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_j), \quad (2.85)$$

$$c_0 = c_1 = \max\{EI, EA, GA, 2GI\}, \quad (2.86)$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_i) &= \int_{\mathcal{I}} (\mathcal{D}\mathbf{\Pi}(S, \boldsymbol{\omega}, \cdot) \cdot [\mathcal{D}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}_j] + \mathcal{D}\mathbf{\Pi}(S, \cdot, \mathbf{v}) \cdot [\mathcal{D}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_j)]) dS - \\ &- \int_{\mathcal{I}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_o + \bar{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{g}_i) dS. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Note que devido ao fato de  $\mathbf{\Pi}(S, \cdot, \cdot)$  ser um funcional dependente das funções  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{d}_i)$  e  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i)$ , no cálculo da sua derivada direcional é utilizada a regra da cadeia. Dessa maneira, a hipótese (H<sub>2</sub>) pode ser obtida calculando  $\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \omega_i}(S, \omega_i, \cdot)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial v_i}(S, \cdot, v_i)$  e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Admitindo que

$$\exists \phi \in [H^1(\mathcal{I})]^3 \text{ tal que } \mathbf{g}_i(S) = \phi(S) \wedge \mathbf{d}_i(S), \quad (2.88)$$

cuja demonstração e caracterização será integralmente apresentada na seção (3.2.1), e pelas identidades (2.42) e (2.44), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{g}_j &= \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}(\mathbf{g}'_k \cdot \mathbf{d}_l + \mathbf{d}'_k \cdot \mathbf{g}_l)\mathbf{d}_j, \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}((\boldsymbol{\phi}' \wedge \mathbf{d}_k) \cdot \mathbf{d}_l + (\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}'_k) \cdot \mathbf{d}_l + \mathbf{d}'_k \cdot (\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_l))\mathbf{d}_j, \\
&= \boldsymbol{\phi}' \cdot \left(\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\mathbf{d}_k \wedge \mathbf{d}_l\right)\mathbf{d}_j, \\
&= (\boldsymbol{\phi}' \cdot \mathbf{d}_j)\mathbf{d}_j, \tag{2.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_j) &= \mathbf{q}'_o \cdot \mathbf{d}_k + \mathbf{r}'_o \cdot \mathbf{g}_k, \\
&= \mathbf{q}'_o \cdot \mathbf{d}_k + \mathbf{r}'_o \cdot (\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_k), \\
&= \mathbf{q}'_o \cdot \mathbf{d}_k - (\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{r}'_o) \cdot \mathbf{d}_k. \tag{2.90}
\end{aligned}$$

De posse dessas relações, podemos reescrever o **Problema F** de forma equivalente através do seguinte problema:

**Problema  $\bar{\mathbf{F}}$**  : Encontrar  $(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) \in \bar{\mathcal{U}}$  tais que para todo  $(\mathbf{q}_o, \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_i) \in \bar{\mathcal{V}}$

$$\int_{\mathcal{I}} (\mathcal{D}\Pi(S, \boldsymbol{\omega}, \cdot) \cdot \boldsymbol{\phi} + \mathcal{D}\Pi(S, \cdot, \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{q}'_o - \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{r}'_o)) dS = \int_{\mathcal{I}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_o + \bar{\mathbf{n}}_i \cdot \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_i) dS.$$

Devemos verificar que esse problema é equivalente ao **Problema M**. Assim, introduzindo as identidades (2.67) e (2.68) na expressão acima, temos que para todo  $(\mathbf{q}_o, \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_i) \in \bar{\mathcal{V}}$

$$\int_{\mathcal{I}} (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}' + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}'_o - \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{r}'_o)) dS = \int_{\mathcal{I}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}_o + \bar{\mathbf{n}}_i \cdot \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_i) dS.$$

Fazendo as integrações por partes dos dois termos do lado esquerdo da equação acima, obtemos para todo  $(\mathbf{q}_o, \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_i) \in \bar{\mathcal{V}}$ ,

$$\int_{\mathcal{I}} ((-\mathbf{m}' - \mathbf{r}'_o \wedge \mathbf{n} - \mathbf{d}_i \wedge \bar{\mathbf{n}}_i) \cdot \boldsymbol{\phi} + (\mathbf{n}' + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{q}_o) dS = -(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\phi}) \Big|_0^L - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_o) \Big|_0^L.$$

Como esta equação é válida para qualquer  $\boldsymbol{\phi}$  e  $\mathbf{q}_o$ , obtemos daí as equações de equilíbrio do **Problema M**, quando as forças inerciais são desprezadas.

# Capítulo 3

## Modelo inextensível e sem cisalhamento

Neste capítulo derivamos um modelo de flexo-torção, inextensível e sem cisalhamento, para barras, obtido a partir de hipóteses adicionais sobre a cinemática do modelo geometricamente exato, mais geral, apresentado no capítulo anterior.

Para este modelo caracterizamos os espaços das configurações e das variações cinematicamente admissíveis e apresentamos as formulações cinemática e em Lagrangiano Aumentado.

### 3.1 Modelo de flexo-torção

No capítulo anterior, introduzimos alguns conceitos de geometria diferencial e descrevemos um modelo dinâmico geral para barras no espaço tridimensional baseado na teoria de Cosserat. Desprezando os efeitos das forças inerciais, apresentamos também uma formulação variacional equivalente. Visando aplicações em estruturas muito longas, delgadas e flexíveis, derivamos nessa seção um caso particular do modelo anterior, no qual introduzimos as hipóteses adicionais de inextensibilidade e desprezamos os efeitos cisalhantes.

Para desprezar os efeitos cisalhantes da barra, agregamos às hipóteses do modelo geral, equações (2.14) e (2.15), a relação

$$\mathbf{r}'_o(S) = v_3(S)\mathbf{d}_3(S), \quad (3.1)$$

onde  $v_3(S) > 0$  é uma função escalar associada ao alongamento ou encurtamento da

barra. Mecanicamente falando, a equação (3.1) implica em que toda fibra da seção transversal da barra que for tomada ortogonal à linha de centróides, na configuração de referência, permaneça ortogonal a esta linha na configuração deformada. Com isso, as funções  $v_1(S)$  e  $v_2(S)$  associadas com as deformações cisalhantes, definidas na Seção (2.5), tornam-se identicamente nulas. Esse efeito cisalhante pode, de fato, ser considerado desprezível se o comprimento da barra for muito maior que uma dimensão característica da seção transversal. Caso contrário, o efeito do cisalhamento influenciará significativamente no comportamento da barra e, desprezá-lo, acarretaria respostas pouco representativas ou inválidas do modelo. Para agregar a restrição de inextensibilidade, admitimos que a função que representa a extensão da barra,  $v_3(S)$ , tem valor unitário e, neste caso, a hipótese (3.1) é modificada para

$$\mathbf{r}'_o(S) = \mathbf{d}_3(S). \quad (3.2)$$

Por conta dessas novas hipóteses, a função de energia elástica  $\mathbf{\Pi}(S, \cdot, \cdot)$ , definida em (2.49), passa a ser dependente apenas dos termos de energia de flexão e torção e pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{\Pi}(S, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \frac{EI}{2}(S) \left( \omega_1^2(S) + \omega_2^2(S) \right) + GI(S) \omega_3^2(S). \quad (3.3)$$

### 3.2 Formulações variacionais

Pelas definições (2.77), (2.78), (2.79), (2.80) e (2.81), identificamos o conjunto das configurações cinematicamente admissíveis do modelo de flexo-torção como

$$\mathbb{U} = \left\{ (\mathbf{r}_o(S), \mathbf{d}_\alpha(S)) \in [H^2(\mathcal{I})]^3 \times [H^1(\mathcal{I})]^6 / \mathbf{r}_o(0) = \mathbf{r}^0, \mathbf{r}'_o(S) = \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2 \text{ e satisfaz a um dos conjuntos de condições de contorno (2.59) a (2.64)} \right\}. \quad (3.4)$$

Note que a não-linearidade geométrica do modelo está associada às funções  $\mathbf{d}_1(S)$  e  $\mathbf{d}_2(S)$ , as quais definem parte da geometria da barra em qualquer configuração. Isso pode ser observado através da própria definição de  $\mathbf{d}_\alpha(S)$ , equações (2.17a) e

(2.17b), onde observamos uma dependência intrínseca destas variáveis com o operador de rotação não-linear  $\mathbf{\Lambda}(S) \in SO_3$ . Note que embora a função vetorial  $\mathbf{r}_o(S)$  também seja um elemento integrante da caracterização geométrica da estrutura, ela é uma variedade linear.

Devido à não-linearidade geométrica do problema, a caracterização do espaço das variações cinematicamente admissíveis, conhecido nesse contexto como espaço tangente de  $\mathcal{U}$ , envolve certos cuidados como veremos a seguir.

### 3.2.1 Espaço das variações cinematicamente admissíveis

Segundo a hipótese cinemática (2.16), a configuração deformada da barra está bem caracterizada pelo conhecimento da curva descrita pela linha de centróides e dos vetores que, em cada posição  $S \in \mathcal{I}$ , formam a base intrínseca. Consideremos então a representação simplificada de uma configuração arbitrária como

$$\mathbf{r}_t(S) = (\mathbf{r}_o(S), \mathbf{d}_i(S)) = (\mathbf{r}_o(S), \mathbf{\Lambda}(S)\hat{\mathbf{t}}_i). \quad (3.5)$$

Como podemos observar no esquema apresentado na Figura (3.1), a toda con-

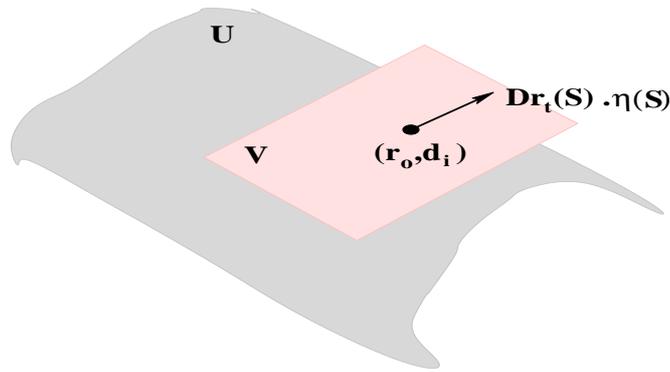


Figura 3.1: Modelo esquemático do espaço tangente.

figuração  $(\mathbf{r}_o(S), \mathbf{d}_i(S))$  da variedade  $\mathcal{U}$ , podemos associar um espaço tangente, e denota-lo por  $\mathcal{V}$ . Este espaço é considerado como um conjunto de vetores que passam através de  $(\mathbf{r}_o(S), \mathbf{d}_i(S))$  e caracterizam as direções admissíveis para a cinemática da barra. Cada um desses vetores é denominado por vetor tangente e

definido através da derivada direcional

$$\mathcal{D}\mathbf{r}_t(S) \cdot \boldsymbol{\eta}(S) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \mathbf{r}_t^\varrho(S), \quad (3.6)$$

onde  $\boldsymbol{\eta}(S)$  representa a direção e

$$\mathbf{r}_i^\varrho(S) = (\mathbf{r}_o^\varrho(S), \mathbf{d}_i^\varrho(S)) = (\mathbf{r}_o^\varrho(S), \boldsymbol{\Lambda}^\varrho(S) \widehat{\mathbf{l}}_i), \quad (3.7)$$

sendo

$$\mathbf{r}_o^\varrho(S) = \mathbf{r}_o(S) + \varrho \mathbf{q}_o(S), \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^\varrho(S) = \exp(\varrho \boldsymbol{\Theta}(S)) \boldsymbol{\Lambda}(S), \quad (3.9)$$

a configuração com uma pequena perturbação. Observe na equação (3.8) que a perturbação é introduzida na direção do vetor  $\mathbf{q}_o(S) : \mathcal{I} \mapsto \mathcal{R}^3$  o qual é interpretado, para  $\varrho > 0$ , como um deslocamento infinitesimal superposto à linha de centróides  $\mathbf{r}_o(S)$ . Entretanto, no caso da equação (3.9), a perturbação não se deu de uma forma tão direta. Levou-se em consideração na sua construção o fato de que perturbar a configuração dos vetores da base equivale a perturbar o próprio operador de rotação  $\boldsymbol{\Lambda}(S)$ . Sendo assim, temos que tomar certo cuidado em manter a rotação perturbada  $\boldsymbol{\Lambda}^\varrho(S)$  no grupo das rotações  $SO_3$  e com isso poderemos definir uma orientação possível para a base intrínseca. Caminhando nessa direção, utilizamos o desenvolvimento do Anexo D.2, onde construímos um operador de rotações finitas e o representamos, de forma equivalente, pela exponencial de um operador de rotações infinitesimais e introduzimos a perturbação  $\exp(\varrho \boldsymbol{\Theta}(S)) \in SO_3$ , onde o tensor antisimétrico  $\boldsymbol{\Theta}(S) : \mathcal{R}^3 \mapsto \mathcal{R}^3$ , com vetor axial  $\boldsymbol{\phi} : \mathcal{I} \mapsto \mathcal{R}^3$ , é interpretado, para  $\varrho > 0$ , como uma rotação infinitesimal superposta ao operador  $\boldsymbol{\Lambda}(S)$ . O vetor axial  $\boldsymbol{\phi}(S)$ , como caracterizado em (D.3), possui componentes  $\phi_i(S) \in \mathcal{R}$ , no sistema cartesiano, as quais representam os ângulos de rotações da base intrínseca em relação aos eixos fixos  $\mathbf{e}_i$ .

Com isso, a derivada direcional (3.6) pode ser calculada da seguinte forma

$$\mathcal{D}\mathbf{r}_o(S) \cdot \mathbf{q}_o = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \mathbf{r}_o^\varrho(S) = \mathbf{q}_o(S), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{D}\Lambda(S)\widehat{\boldsymbol{\ell}}_i \cdot \Theta = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} [\Lambda^\varrho(S)\widehat{\boldsymbol{\ell}}_i] = \Theta(S)\Lambda(S)\widehat{\boldsymbol{\ell}}_i. \quad (3.11)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i(S) &= \Theta(S)\Lambda(S)\widehat{\boldsymbol{\ell}}_i = \Theta(S)\mathbf{d}_i(S) \\ &= \boldsymbol{\phi}(S) \wedge \mathbf{d}_i(S), \end{aligned} \quad (3.12)$$

segue que a variação admissível da formulação é representada pelo par  $(\mathbf{q}_o(S), \mathbf{g}_i(S))$  e o espaço das variações cinematicamente admissíveis por

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{(\mathbf{q}_o(S), \mathbf{g}_\alpha(S)) \in [H^2(\mathcal{I})]^3 \times [H^1(\mathcal{I})]^6 / \mathbf{q}_o(0) = 0, \mathbf{q}'_o(S) = \mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2, \\ &\quad \exists \boldsymbol{\phi} \in [H^1(\mathcal{I})]^3 \text{ tal que } \mathbf{g}_i = \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{d}_i \text{ e } (\mathbf{q}_o(S), \mathbf{g}_\alpha(S)) \text{ e satisfaçam às con-} \\ &\quad \text{dições de contorno essenciais (Dirichlet) homogêneas}\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.2.2 Formulação cinemática

Uma vez introduzidas as definições e notações dos espaços, apresentamos nessa seção uma formulação variacional cinemática para o modelo de barras de Cosserat inextensível e sem cisalhamento. Aqui, apresentamos e discutimos a formulação de forma gradativa. Iniciando com sua forma contemplando apenas as restrições bilaterais e subsequenteiramente tratamos de sua forma completa, agregando restrições unilaterais.

Considerando a condição particular em que a barra está sujeita apenas às restrições bilaterais e procedendo a um desenvolvimento semelhante ao realizado na seção (2.9), temos que uma formulação variacional para esse modelo pode ser escrita através do seguinte problema de minimização:

**Problema J :** Dados  $\{G, E \text{ e } I\} \in \mathcal{R}$  e  $\bar{\mathbf{n}}(S) \in \mathcal{U}'$  (dual de  $\mathcal{U}$ ), encontrar  $(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha) \in \mathcal{U}$  tais que

$$J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha) \leq J(\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) \quad \forall (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) \in \mathcal{U}, \quad (3.14)$$

onde o funcional  $J(\cdot)$  é definido por

$$J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_i) = \int_{\mathcal{I}} \Pi(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{d}_i), \cdot, S) dS - \int_{\mathcal{I}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_o dS. \quad (3.15)$$

Fazendo uso das relações (2.20) e (A.12), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_i \cdot \mathbf{d}'_i &= (\omega_j \mathbf{d}_j \wedge \mathbf{d}_i) \cdot (\omega_j \mathbf{d}_j \wedge \mathbf{d}_i) \\ &= [(\omega_j \mathbf{d}_j \cdot \omega_j \mathbf{d}_j) \mathbf{d}_i - (\omega_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_i) \cdot \omega_j \mathbf{d}_j] \cdot \mathbf{d}_i \\ &= \omega_j^2 \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_i, \end{aligned}$$

obtendo assim

$$\|\mathbf{d}'_i(S)\|^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 \left[ \omega_j(\mathbf{d}_j(S)) \right]^2. \quad (3.16)$$

Pelas relação acima expressamos facilmente

$$\begin{aligned} \omega_1^2(\mathbf{d}_j) + \omega_2^2(\mathbf{d}_j) &= \|\mathbf{d}'_3\|^2, \\ \omega_3^2(\mathbf{d}_j) &= \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{d}'_1\|^2 + \|\mathbf{d}'_2\|^2 - \|\mathbf{d}'_3\|^2 \right). \end{aligned}$$

Aplicando essas relações na equação (3.3) e utilizando (3.2), podemos reescrever o funcional de energia potencial total (3.15) explicitamente em relação a  $\mathbf{r}_o$  e  $\mathbf{d}_\alpha$  como

$$J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha) = \int_{\mathcal{I}} \left( \frac{GI}{2} \left( \|\mathbf{d}'_1\|^2 + \|\mathbf{d}'_2\|^2 \right) + \frac{(E-G)I}{2} \|\mathbf{r}''_o\|^2 \right) dS - \int_{\mathcal{I}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_o dS. \quad (3.17)$$

Genericamente, podemos representar  $J(\cdot)$  da seguinte forma

$$J(\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) = \frac{1}{2}j(\{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}, \{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}) - f(\mathbf{q}_o) \quad \forall(\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) \in \mathbb{U}, \quad (3.18)$$

onde  $j(\cdot, \cdot) : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \mapsto \mathcal{R}$  é uma forma quadrática, contínua, simétrica e coerciva, e  $f(\cdot) : \mathbb{U} \mapsto \mathcal{R}$  um funcional linear e limitado, definidos, respectivamente, como

$$j(\{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}, \{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}) = ((E - G)I \mathbf{q}_o'', \mathbf{q}_o'') + (GI \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_1) + (GI \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_2), \quad (3.19)$$

$$f(\mathbf{q}_o) = (\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{q}_o). \quad (3.20)$$

Embora se apresente aparentemente simples, esse problema possui algumas peculiaridades que o tornam, do ponto de vista computacional, bastante difícil de ser resolvido. Tais dificuldades se devem basicamente a três fatores: o problema é não-linear, o conjunto onde a solução está sendo procurada é não convexo e incorpora a restrição de inextensibilidade da barra. Essa não-linearidade está diretamente atrelada à não-linearidade geométrica do modelo, como discutido anteriormente, fazendo com que a busca da solução do **Problema J** recaia em um processo de minimização não trivial. Por outro lado, a não convexidade desse conjunto está intimamente associada a restrição de inextensibilidade, a qual é embutida no conjunto  $\mathbb{U}$  através da relação

$$\mathbf{r}'_o(S) = \mathbf{d}_1(S) \wedge \mathbf{d}_2(S). \quad (3.21)$$

Embora a existência de solução desse problema seja garantida, a não convexidade de  $\mathbb{U}$  implica na não satisfação de uma das condições do teorema de Lions-Stampacchia (BAIOCCHI & CAPELO [1984]), o qual estabelece condições suficientes para garantia de existência e unicidade de solução de problemas dessa natureza. Com isso, a unicidade de solução do **Problema J** não é garantida. De fato, ele pode apresentar multiplicidade de soluções como veremos no capítulo seguinte. Por conta disto, a minimização do **Problema J** passa a ser entendida num

sentido local, já que suas soluções podem corresponder tanto a um mínimo local quanto a um mínimo global. Obviamente, as possíveis configurações de equilíbrio definirão a existência de mínimos locais ou global. Há diversas configurações particulares da estrutura em que a única solução possível é a de um mínimo global, e por isso a solução é única. Por exemplo no caso de uma viga em balanço com uma carga concentrada na sua extremidade, existem situações claras de unicidade de solução.

A restrição de inextensibilidade, presente na definição do conjunto  $\mathcal{U}$ , é a condição mais crítica a ser satisfeita. Muitos autores (ver por exemplo ANTMAN & ROSENFELD [1978], MAIER *et al* [1979], NEUKIRCH & HEIJDEN [2002], STUMP & HEIJDEN [2001]) fizeram uso da transformação

$$\mathbf{r}'_o(S) = \begin{cases} \cos(\theta_1(S)) \cos(\theta_2(S)) \\ \sin(\theta_1(S)) \cos(\theta_2(S)) \\ \sin(\theta_2(S)) \end{cases} ,$$

onde  $\theta_\alpha(S)$  são ângulos de Euler, e solucionam diretamente esse problema. Porém, esta estratégia tem como consequência uma estrutura não-linear muito mais complexa, envolvendo funções transcendentais, como senos e cossenos, que podem causar um grande custo computacional. Esta não foi a estratégia que usamos na solução do **Problema J**. Optamos por formulá-lo diretamente nos vetores da base intrínseca fazendo com que suas soluções representem diretamente a configuração deformada final da barra. Com isso, pagamos o preço de não satisfazermos à restrição de inextensibilidade a priori, mas evitamos as dificuldades de geração dessas integrais não-lineares, e criamos uma estrutura adequada para superarmos essa restrição através da formulação e do algoritmo descritos nas duas próximas seções.

Agregando ao **Problema J** as restrições unilaterais, descritas pelas desigualdades (2.73)–(2.75), obtemos o seguinte problema de minimização:

**Problema  $J_k$**  : Dados  $\{G, E \text{ e } I\} \in \mathcal{R}$  e  $\bar{\mathbf{n}}(S) \in \mathcal{U}'$ , encontrar  $(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha) \in \mathbb{K}$  tais que

$$J(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha) \leq J(\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) \quad \forall (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) \in \mathbb{K}, \quad (3.22)$$

onde  $\mathbb{K} \subset \mathcal{U}$  é um conjunto fechado e não convexo, definido por

$$\mathbb{K} = \{(\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha) \in \mathcal{U} / \|\mathbf{r}'_o(S) - R_o\|_e \leq \|\mathbf{h}(S)\|_e \quad \forall S \in \mathcal{I}_c\}. \quad (3.23)$$

Note que agora estamos agregando uma outra classe de problemas de minimização, onde exigimos que o mínimo de  $J(\cdot)$  seja obtido no subconjunto de  $\mathcal{U}$  que satisfaz à condição unilateral

$$\|\mathbf{r}_o(S) - R_o\|_e \leq \|\mathbf{h}(S)\|_e.$$

Com isso, obtemos uma formulação variacional capaz de contemplar interações sem atrito entre a barra flexível e superfícies sólidas indeformáveis. Os afastamentos entre essas superfícies são parametrizados em função do comprimento de arco  $S$  e caracterizados através da função  $\mathbf{h}(S)$ . Note que neste caso o conjunto das soluções candidatas é menor e o problema é consideravelmente mais difícil de se resolver que o anteriormente discutido.

Diante das dificuldades apontadas ao longo desta seção, podemos concluir que encontrar funções que aproximem a forma discreta do conjunto  $\mathbb{K}$  pode ser bastante complicado. Com o intuito de reduzir as dificuldades de resolução deste problema, optamos por reformular-lo através de uma formulação variacional equivalente de Lagrangiano Aumentado. Este assunto é a pauta das discussões da seção seguinte.

### 3.2.3 Formulação em Lagrangiano Aumentado

Formulações variacionais utilizando funcionais Lagrangiano Aumentado são relativamente antigas, datam de 1969, e foram introduzidas por HESTENES [1969] e POWELL [1969], para problemas com restrições de igualdade, e estendidas por ROCKAFELLAR [1976] para problemas com restrições de desigualdade, em conjuntos convexos. Historicamente, esta técnica foi concebida para conferir a proble-

mas de minimização de funcionais em conjuntos com restrições, uma alternativa de procurar seu minimizador em todo o conjunto sem restrições. Sua idéia consiste em incorporar as restrições aos próprios funcionais e surgiu pela fusão de dois outros métodos que gozam dessa mesma característica, o método dos Multiplicadores de Lagrange e o das Penalidades, onde o termo quadrático penalizado característico do método das Penalidades é adicionado ao funcional lagrangiano do método dos multiplicadores de Lagrange. Com isso, surgiu o método do Lagrangiano Aumentado, que incorpora as características positivas de ambos os métodos e contornam algumas das suas deficiências (ver BERTSEKAS [1982]).

Nesta seção, utilizamos o princípio da decomposição de coordenadas, apresentado em FORTIN & GLOWINSKI [1983] e GLOWINSKI & TALLEC [1989], e a técnica do Lagrangiano Aumentado para transformar a formulação correspondente ao **Problema  $J_k$**  em um problema de ponto de sela.

Podemos reformular o **Problema  $J_k$** , de forma equivalente, através do seguinte problema de ponto de sela:

**Problema  $\mathcal{L}$**  : Dados  $\{G, E \text{ e } I\} \in \mathcal{R}$ ,  $\bar{\mathbf{n}}(S) \in \mathbb{V}'$  e definindo  $\{\boldsymbol{\vartheta}_i(S) = \mathbf{d}_i(S)\}$ , encontrar  $(\{\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha\}, \boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \in \mathbb{L} \times \mathbb{M} \times \mathbb{N}$  tais que para todo  $(\{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}, \boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\mu}_i) \in \mathbb{L} \times \mathbb{M} \times \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha\}, \boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\mu}_i) \leq \mathcal{L}(\{\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha\}, \boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \leq \mathcal{L}(\{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}, \boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\lambda}_i),$$

onde o funcional Lagrangiano Aumentado  $\mathcal{L}(\cdot) : \mathbb{L} \times \mathbb{M} \times \mathbb{N} \mapsto \mathcal{R}$  é definido por

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha\}, \boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = J(\{\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha\}) + \sum_{i=1}^3 \left\{ (\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{d}_i - \boldsymbol{\vartheta}_i) + \frac{p}{2} \|\mathbf{d}_i - \boldsymbol{\vartheta}_i\|^2 \right\} \quad (3.24)$$

e

$$\mathbb{L} = \{ \{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}(S) \in \mathbb{U}; \|\mathbf{q}_o(S) - \mathbf{R}_o\|_e \leq \|\mathbf{h}(S)\|_e \},$$

$$\mathbb{M} = \{ \boldsymbol{\zeta}_i(S) \in [L^2(\mathcal{I})]^9; \|\boldsymbol{\zeta}_i\|_e = 1 \},$$

$$\mathbb{N} = \{ \boldsymbol{\mu}_i(S) \in [L^2(\mathcal{I})]^9 \},$$

sendo  $\lambda_i(S) : \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  o vetor dos multiplicadores de Lagrange,  $\vartheta_i(S) : \bar{\mathcal{I}} \mapsto \mathcal{R}^3$  o vetor de mudança de variável e  $\mathfrak{p}_p \in \mathcal{R}_+^*$  um parâmetro arbitrário. O primeiro termo dentro do somatório do funcional (3.24) refere-se à parcela do método dos multiplicadores de Lagrange e o segundo termo a forma quadrática penalizada do método das Penalidades, onde  $\mathfrak{p}_p$  representa o parâmetro de penalização.

Esta formulação visa basicamente fornecer uma possível estratégia para superar as dificuldades encontradas na satisfação das restrições de igualdade e desigualdade presentes no conjunto  $\mathbb{K}$ . Analisando um pouco melhor o problema, do ponto de vista da sua construção, podemos apontar algumas de suas particularidades que refletem influências positivas na satisfação de tais restrições. A principal delas é a mudança de variável

$$\vartheta_i(S) = \mathbf{d}_i(S) \tag{3.25}$$

para tratar da condição de inextensibilidade. Note que no **Problema  $\mathbf{J}_k$** , a restrição de inextensibilidade é expressa através da derivada da função primal  $\mathbf{r}_o$ , equações (3.21). Se analisarmos o problema do ponto de vista da sua forma contínua, o fato de estarmos considerando a restrição como uma função ou como uma derivada é absolutamente irrelevante, fazendo com que a relação (3.25) seja completamente desnecessária. Entretanto, se pensarmos que o problema não possui solução analítica e se precisamos introduzir algum tipo de aproximação numérica para resolvê-lo, o fato de estarmos considerando uma restrição envolvendo derivadas traz dificuldades adicionais para sua satisfação, implicando muitas vezes em processos difíceis e custosos. Com a introdução da relação (3.25) a derivada da função passa a ser representada por uma função vetorial com componentes pertencentes a  $L^2(\mathcal{I})$  e portanto exigindo menor regularidade que a restrição original. Com isso, evitamos a presença de derivadas de funções e satisfazemos a restrição de inextensibilidade automaticamente. Além do mais, essa função passa a integrar a formulação como uma nova variável, produzindo um controle muito mais efetivo sobre a qualidade de sua aproximação. Vale ressaltar que a técnica utilizada para

satisfazer à relação (3.25) é a do Lagrangiano Aumentado e, como justificamos mais adiante, também constitui um aspecto positivo da formulação.

Embora o método do Lagrangiano Aumentado não tenha sido utilizado da maneira clássica como surgiu, transferindo as restrições dos conjuntos para o funcional, a forma como esses conjuntos foram construídos caracteriza outro ponto interessante na presente formulação. Examinando-os com mais atenção, perceberemos que houve a dissociação das restrições, fazendo  $\mathbb{L}$  contemplar as restrições de desigualdade e  $\mathbb{M}$  as restrições de inextensibilidade. Ainda nessa linha, notamos que tanto o conjunto  $\mathbb{M}$  quanto  $\mathbb{N}$  são construídos por funções que exigem apenas regularidade  $L^2(\mathcal{I})$ , tendo como principal consequência uma maior flexibilidade na construção de suas formas discretas, pois podem ser interpoladas por funções descontínuas.

Quando comparado ao **Problema  $\mathbf{J}_k$** , a implementação do **Problema  $\mathcal{L}$**  torna-se muito mais sofisticada, pois temos agregado mais duas novas variáveis e dois novos conjuntos constituídos por funções diferentes. Além do mais, temos que estimar valores para o parâmetro  $\mathfrak{p}_p$ , o qual influencia decisivamente na velocidade de convergência do algoritmo de resolução empregado na forma discreta da formulação.

Alguns casos particulares dessa formulação podem ser observados e representam um bom auxílio para entender a opção pela formulação em Lagrangiano Aumentado. Se, por exemplo, assumirmos na equação (3.24) o multiplicador dado por

$$\lambda_i(S) = 0,$$

incidiremos diretamente no método das Penalidades, cuja condição de otimalidade corresponde a

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_o, \mathbf{d}_\alpha\}, \boldsymbol{\vartheta}_i, 0) = \inf_{(\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha) \in \mathbb{L}} \lim_{\mathfrak{p}_p \mapsto \infty} \mathcal{L}(\{\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_\alpha\}, \boldsymbol{\zeta}_i, 0). \quad (3.26)$$

Neste método, a condição do parâmetro de penalidade  $\mathfrak{p}_p \mapsto \infty$  deve ser atendida

no limite para que não haja violação das restrições. Entretanto, na sua forma discreta é muito claro que essa condição nunca pode ser satisfeita exatamente, pois não é possível gerar valores computacionais dessa natureza. O que em termos práticos procura ser feito é atribuir valores a  $\mathfrak{p}_p$  tão grandes quanto o possível. Por outro lado, quanto maior o valor de  $\mathfrak{p}_p$  adotado, mais mal condicionada torna-se a matriz do sistema de equações associada ao problema e conseqüentemente mais difícil é sua resolução. Os algoritmos empregados na resolução desse tipo de problema apresentam taxas de convergência muito baixas, o que acarreta, em muitas situações, em um esforço computacional bastante elevado.

Muitas das dificuldades citadas acima são suplantadas no **Problema  $\mathcal{L}$** , com a introdução do funcional Lagrangiano Aumentado (3.24). Note que com a adição do termo  $(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{d}_i - \boldsymbol{\vartheta}_i)$  no funcional (3.26), a solução exata do **Problema  $\mathbf{J}_k$**  passa a ser obtida sem que haja necessidade de incrementar  $\mathfrak{p}_p$  até o infinito para obter a convergência do método, evitando ou no mínimo moderando os prejuízos de um mal condicionamento das matrizes do sistema. Além do mais, a presença do termo quadrático  $\frac{\mathfrak{p}_p}{2} \|\mathbf{d}_i - \boldsymbol{\vartheta}_i\|^2$  provoca uma melhora na estabilidade e convergência do algoritmo de resolução que será observado na próxima seção.

# Capítulo 4

## Aproximações por elementos finitos

Nesta seção, discutimos aproximações por elementos finitos para o **Problema  $\mathcal{L}$** , utilizando o método de Galerkin e apresentamos um algoritmo do tipo Uzawa com decomposição de coordenadas para sua resolução. Detalhamos todas as etapas do procedimento tais como critérios de inicialização, resolução dos problemas locais e globais, e os algoritmos de resolução dos sistemas de equações e inequações associados. Por fim, descrevemos as equações do cálculo dos esforços resultantes e apresentamos estudos numéricos do modelo enfocando, principalmente, a validação do algoritmo, o estudo de sua sensibilidade em relação aos parâmetros de Uzawa e a constatação das multiplicidades de soluções admitidas pelo modelo.

### 4.1 O modelo discreto

Assumindo  $\mathcal{I}_e$  o domínio de cada elemento da partição de elementos finitos,  $n_{el}$  o número total de elementos e  $h = \max\{h_e\}$ ,  $1 \leq e \leq n_{el}$ , o parâmetro de malha, consideramos os seguintes espaços de dimensão finita:

$$\mathbb{B}_h = \{(r_{\alpha h})_1 \in C^0(\mathcal{I}) / (r_{\alpha h})_1(\mathcal{I}_e) \in P_2(\mathcal{I}_e)\} \subset H^1(\mathcal{I}), \quad (4.1)$$

o espaço de elementos finitos lagrangianos de grau 2 e de classe  $C^0(\mathcal{I})$  (conjunto das funções contínuas);

$$\mathbb{A}_h = \{x_h \in C^1(\mathcal{I}) / x_h(\mathcal{I}_e) \in P_3^h(\mathcal{I}_e)\} \subset H^2(\mathcal{I}), \quad (4.2)$$

o espaço de elementos finitos hermitianos de grau 3 e de classe  $C^1(\mathcal{I})$  (conjunto das funções contínuas com derivadas contínuas);

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_h &= \{(\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}) \in [\mathbb{A}_h]^3 \times [\mathbb{B}_h]^6 / \mathbf{r}_{oh}(0) = \mathbf{r}^0, \mathbf{r}'_{oh}(S) = \mathbf{d}_{1h}(S) \wedge \mathbf{d}_{2h}(S), \\ &\quad \mathbf{d}_{\alpha h}(S) \cdot \mathbf{d}_{\beta h}(S) = \delta_{\alpha\beta}, \{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}\} \text{ que satisfazem a um dos conjuntos} \\ &\quad \text{de condições de contorno (2.59) à (2.64)}\}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

a forma discreta do conjunto das configurações cinematicamente admissíveis;

$$\mathbb{L}_h = \{(\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}) \in \mathbb{U}_h / \|\mathbf{r}_{oh}(S_k) - R_o\|_e \leq \|\mathbf{h}(S_k)\|_e, k = 1, \dots, n_p\} \quad (4.4)$$

o conjunto das funções discretas  $(\mathbf{q}_{oh}, \mathbf{g}_{oh}) \in \mathbb{U}_h$  que satisfazem às restrições unilaterais em cada ponto nodal  $n_p$  da malha;

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_h^l &= \{\zeta_{ih}(S) \in [C^{-1}(\mathcal{I})]^9 / \|\zeta_{ih}(S_j)\|_e = 1, j = 1, \dots, n_{ip}, \\ &\quad \zeta_{ih}(S)|_{\mathcal{I}_e} \in [P_l(\mathcal{I}_e)]^9, l \leq 3\}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

o conjunto de elementos finitos lagrangianos de grau l e de classe  $C^{-1}(\mathcal{I})$  (conjunto das funções descontínuas) que satisfazem em cada ponto de integração à restrição de inextensibilidade  $\|\zeta_{ih}(S_j)\|_e = 1$ , onde  $n_{ip}$  é o número de pontos da quadratura de Gauss em cada elemento; e,

$$\mathbb{N}_h^l = \{\mu_{ih}(S) \in [C^{-1}(\mathcal{I})]^9, \mu_{ih}(S)|_{\mathcal{I}_e} \in [P_l(\mathcal{I}_e)]^9, l \leq 3\}, \quad (4.6)$$

é o espaço de elementos finitos lagrangianos de grau l e de classe  $C^{-1}(\mathcal{I})$ .

Feito isso, temos que a aproximação por elementos finitos do **Problema  $\mathcal{L}$**  é dada através do seguinte problema:

**Problema  $\mathcal{L}_h$ :** Encontrar  $(\{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}) \in \mathbb{L}_h \times \mathbb{M}_h^l \times \mathbb{N}_h^l$  tais que para todo  $(\{\mathbf{q}_{oh}, \mathbf{g}_{oh}\}, \boldsymbol{\zeta}_{ih}, \boldsymbol{\mu}_{ih}) \in \mathbb{L}_h \times \mathbb{M}_h^l \times \mathbb{N}_h^l$

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}, \boldsymbol{\mu}_{ih}) \leq \mathcal{L}(\{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}) \leq \mathcal{L}(\{\mathbf{q}_{oh}, \mathbf{g}_{oh}\}, \boldsymbol{\zeta}_{ih}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}),$$

onde

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{\alpha h}\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}) = J(\{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{\alpha h}\}) + \sum_{i=1}^3 \left\{ (\boldsymbol{\lambda}_{ih}, \mathbf{d}_{ih} - \boldsymbol{\vartheta}_{ih}) + \frac{p_p}{2} \|\mathbf{d}_{ih} - \boldsymbol{\vartheta}_{ih}\|^2 \right\}.$$

## 4.2 Algoritmo de resolução

Uma maneira de resolver o **Problema**  $\mathcal{L}_h$  é fazer uso do algoritmo clássico de Uzawa descrito, por exemplo, em FORTIN & GLOWINSKI [1983] e GLOWINSKI & TALLEC [1989]. Entretanto, devido à dificuldade numérica do problema, a estrutura desse algoritmo sempre acarreta um número excessivo de iterações. FORTIN & GLOWINSKI [1983] propuseram uma generalização desse algoritmo utilizando o método de relaxação por blocos para problemas no plano e LE-TALLEC & MANI [1988] estenderam esse algoritmo para problemas fora do plano com torção. Esse método consiste basicamente em resolver de forma separada os problemas globais e o problema local, tendo como incógnitas  $(\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{\alpha h})$  e  $(\boldsymbol{\vartheta}_{ih})$ , respectivamente. O problema é dito local por ser possível de ser resolvido a nível de elemento. Ao algoritmo de Bourgat, agregamos a possibilidade de considerar contato sem atrito e sem aderência com outro sólido rígido. Esse algoritmo consiste basicamente em cinco passos, os quais estão descritos pelo **Algoritmo 1** abaixo.

---

**Algoritmo 1** : Algoritmo de Uzawa com decomposição de coordenadas

---

**Passo 1:** Inicializar as variáveis  $\{\boldsymbol{\lambda}_{ih}^0, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{-1}\}$ .

**Passo 2:** Para  $n \geq 0$ , conhecidos  $\{\boldsymbol{\lambda}_{ih}^n, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{n-1}\}$ , calculamos  $\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}$  através do seguinte problema de minimização global:

**Problema G:** Encontrar  $(\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n) \in \mathbb{L}_h$  tais que para todo  $(\mathbf{q}_{oh}^n, \mathbf{g}_{\alpha h}^n) \in \mathbb{L}_h$

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}^n) \leq \mathcal{L}(\{\mathbf{q}_{oh}^n, \mathbf{g}_{\alpha h}^n\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}^n).$$

**Passo 3:** Para  $n \geq 0$ , conhecidos  $\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n, \boldsymbol{\lambda}_{ih}^n, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{n-1}\}$ , calculamos  $\{\boldsymbol{\vartheta}_{ih}^n\}$  através do seguinte problema de minimização local:

**Problema L:** Encontrar  $\boldsymbol{\vartheta}_{ih}^n \in \mathbb{M}_h^l$  tal que para todo  $\boldsymbol{\zeta}_{ih}^{n-1} \in \mathbb{M}_h^l$

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}, \boldsymbol{\vartheta}_{ih}^n, \boldsymbol{\lambda}_{ih}^n) \leq \mathcal{L}(\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}, \boldsymbol{\zeta}_{ih}^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}^n).$$

**Passo 4:** Atualizar os valores de  $\boldsymbol{\lambda}_{ih}^n$

$$\boldsymbol{\lambda}_{1h}^{n+1}(S_i) = \boldsymbol{\lambda}_{1h}^n(S_i) + \mathfrak{p}_u (\mathbf{d}_{1h}^n(S_i) - \boldsymbol{\vartheta}_{1h}^n(S_i)) \quad i = \{1, 2, \dots, n_{ip}\},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{2h}^{n+1}(S_i) = \boldsymbol{\lambda}_{2h}^n(S_i) + \mathfrak{p}_u (\mathbf{d}_{2h}^n(S_i) - \boldsymbol{\vartheta}_{2h}^n(S_i)) \quad i = \{1, 2, \dots, n_{ip}\},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{3h}^{n+1}(S_i) = \boldsymbol{\lambda}_{3h}^n(S_i) + \mathfrak{p}_u (\mathbf{r}_{oh}^n(S_i) - \boldsymbol{\vartheta}_{3h}^n(S_i)) \quad i = \{1, 2, \dots, n_{ip}\},$$

onde  $\mathfrak{p}_u > 0$  é um parâmetro arbitrário.

**Passo 5:** Verificar os critérios de convergência

*Teste 1:* Checar a convergência de  $\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}$

$$\frac{\left\{ \int_{\mathcal{I}} \left\{ |\mathbf{r}_{oh}^n - \mathbf{r}_{oh}^{n-1}|^2 + |\mathbf{r}_{oh}^n - \mathbf{r}_{oh}^{n-1}|^2 + |\mathbf{d}_{1h}^n - \mathbf{d}_{1h}^{n-1}|^2 + |\mathbf{d}_{2h}^n - \mathbf{d}_{2h}^{n-1}|^2 \right\} dS \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \int_{\mathcal{I}} \left\{ |\mathbf{r}_{oh}^n|^2 + |\mathbf{r}_{oh}^n|^2 + |\mathbf{d}_{1h}^n|^2 + |\mathbf{d}_{2h}^n|^2 \right\} dS \right\}^{\frac{1}{2}}} \leq \beta_1,$$

onde  $\beta_1$  é uma dada tolerância.

*Teste 2:* Checar se a restrição  $(\mathbf{d}_{ih} = \boldsymbol{\vartheta}_{ih})$  é satisfeita.

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \int_0^L \left\{ |\mathbf{r}_{oh}^n - \boldsymbol{\vartheta}_{3h}^n|^2 + |\mathbf{d}_{1h}^n - \boldsymbol{\vartheta}_{1h}^n|^2 + |\mathbf{d}_{2h}^n - \boldsymbol{\vartheta}_{2h}^n|^2 \right\} dS \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \beta_2, \quad (4.7)$$

onde  $\beta_2$  é uma dada tolerância.

Se todos os testes forem satisfeitos interrompemos o processo iterativo, caso contrário, voltamos ao passo 2 com o valor de  $n + 1$  e repetimos todo o processo.

---

Uma estimativa prática para o parâmetro de Uzawa  $\mu$  do algoritmo é tratada na próxima seção. Nos nossos testes, fixamos os valores das tolerâncias  $\beta_1 = 10^{-6}$  e  $\beta_2 = 10^{-3}$ . Observe que, para acelerar o processo, nos testes de parada as tolerâncias  $\beta_1$  e  $\beta_2$  podem assumir valores maiores em etapas intermediárias do algoritmo e à medida em que nos aproximamos da solução reduzimos gradativamente estes valores.

### 4.3 Critérios de inicialização do algoritmo e do parâmetro do Lagrangiano Aumentado

O primeiro passo do **Algoritmo 1** refere-se à inicialização dos multiplicadores de Lagrange e da configuração inicial da base intrínseca. Esta etapa, sem dúvida alguma, é extremamente importante pois influencia de forma determinante o processo de convergência do algoritmo. Por isso, apresentamos nesta seção alguns cuidados que devem ser observados e uma maneira prática de determiná-los.

Os vetores dos multiplicadores  $\lambda_i(S)$  não possuem nenhum condicionante que influencie decisivamente na convergência do algoritmo, e seus valores iniciais pouco interferirão na velocidade de convergência. Por conta disso, uma forma prática de inicializá-los é sempre assumir

$$\lambda_{ih}^0(S) = 0 \quad \forall S \in \bar{\mathcal{I}}. \quad (4.8)$$

Ao contrário da variável anterior, a inicialização das variáveis  $\vartheta_{ih}^{-1}$  desempenha um papel importante no processo iterativo. Note que, por estarmos tratando de um processo de minimização em um conjunto não convexo, dependendo das condições e solicitações impostas à estrutura, o problema pode apresentar mínimos locais e conseqüentemente multiplicidades de solução. Por conta disso, a forma

como os campos  $\mathfrak{d}_{ih}^{-1}$  são inicializados desempenha um papel crucial na convergência do algoritmo. Inicializações diferentes podem acarretar a convergência do algoritmo para pontos de mínimos locais diferentes. Obviamente, um desses pontos de mínimos é o próprio mínimo global do problema. Um outro aspecto para o qual devemos atentar no momento da inicialização desses campos refere-se à satisfação da condição de ortogonalidade existente entre eles. Essa característica é determinante para execução do algoritmo sobretudo no momento da resolução do problema local.

Uma maneira prática de inicializar os campos  $\mathfrak{d}_{ih}^{-1}$  de forma a garantir a ortogonalidade entre eles é representá-los em relação a base fixa  $\mathbf{e}_i$  fazendo uso dos ângulos de Euler  $\boldsymbol{\theta}(S)$ . Essas relações são clássicas e podem ser encontradas, por exemplo, em ANTMAN [1991], GOLDSTEIN *et al* [1922] ou ROSENBERG [1980]. Sendo assim, podemos obter as componentes  $\theta_1(0)$ ,  $\theta_1(L)$ ,  $\theta_2(0)$ ,  $\theta_2(L)$ ,  $\theta_3(0)$  e  $\theta_3(L)$  através das condições de contorno, resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1(0) \cdot \mathbf{e}_1 &= \cos \theta_1(0) \text{sen} \theta_2(0) + \text{sen} \theta_1(0) \cos \theta_2(0) \text{sen} \theta_3(0), \\ \mathbf{d}_1(0) \cdot \mathbf{e}_2 &= -\cos \theta_1(0) \cos \theta_2(0) + \text{sen} \theta_1(0) \text{sen} \theta_2(0) \text{sen} \theta_3(0), \\ \mathbf{d}_1(0) \cdot \mathbf{e}_3 &= -\text{sen} \theta_1(0) \cos \theta_3(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1(L) \cdot \mathbf{e}_1 &= \cos \theta_1(L) \text{sen} \theta_2(L) + \text{sen} \theta_1(L) \cos \theta_2(L) \text{sen} \theta_3(L), \\ \mathbf{d}_1(L) \cdot \mathbf{e}_2 &= -\cos \theta_1(L) \cos \theta_2(L) + \text{sen} \theta_1(L) \text{sen} \theta_2(L) \text{sen} \theta_3(L), \\ \mathbf{d}_1(L) \cdot \mathbf{e}_3 &= -\text{sen} \theta_1(L) \cos \theta_3(L),\end{aligned}$$

Uma vez obtidos os ângulos de Euler no contorno, estendemos sua inicialização a

cada posição  $S \in \mathcal{I}$  através da interpolação linear

$$\begin{aligned}\theta_1(S) &= \theta_1(0) + \frac{S}{L}(\theta_1(L) - \theta_1(0)), \\ \theta_2(S) &= \theta_2(0) + \frac{S}{L}(\theta_2(L) - \theta_2(0)), \\ \theta_3(S) &= \theta_3(0) + \frac{S}{L}(\theta_3(L) - \theta_3(0)),\end{aligned}$$

e finalmente calculamos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S) &= \begin{cases} \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_3), \\ -\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3), \\ -\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_3), \end{cases} \\ \boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S) &= \begin{cases} -\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_3), \\ \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3), \\ -\cos(\theta_1)\cos(\theta_3), \end{cases} \\ \boldsymbol{\vartheta}_{3h}^{-1}(S) &= \left\{ \boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S) \wedge \boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S) \right\}.\end{aligned}$$

Para considerar os experimentos em que a barra tem como configuração inicial uma hélice, empregamos uma outra estratégia para inicializar os campos  $\boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{-1}$  em relação à base fixa  $\mathbf{e}_i$ , de forma a também garantir ortogonalidade entre eles. Para isso, consideramos a equação da hélice descrita como

$$\mathbf{r}_o(S) = R \cos\left(\frac{S}{m}\right) \mathbf{e}_1 + R \text{sen}\left(\frac{S}{m}\right) \mathbf{e}_2 + C \frac{S}{m} \mathbf{e}_3, \quad (4.9)$$

onde  $R$  é o seu raio,  $C$  a sua altura do passo e  $m = \sqrt{R^2 + C^2}$ . Dessa forma as inicializações dos campos  $\boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{-1}$  podem ser realizadas através dos seguintes cálculos

$$\boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S_i) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{S_i}{m}\right), \\ -\text{sen}\left(\frac{S_i}{m}\right), \\ 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S_i) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{R^2 + C^2}} \text{sen}\left(\frac{S_i}{m}\right), \\ -\frac{C}{\sqrt{R^2 + C^2}} \cos\left(\frac{S_i}{m}\right), \\ \frac{R}{\sqrt{R^2 + C^2}}, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_{3h}^{-1}(S_i) = \begin{cases} -\frac{R}{\sqrt{R^2 + C^2}} \text{sen}\left(\frac{S_i}{m}\right), \\ \frac{R}{\sqrt{R^2 + C^2}} \cos\left(\frac{S_i}{m}\right), \\ \frac{C}{\sqrt{R^2 + C^2}}, \end{cases} \quad (4.12)$$

Uma outra variável que influencia decisivamente no processo de convergência do **Algoritmo 1** é o parâmetro de Uzawa. Segundo estudos de convergência deste tipo de algoritmo para problemas planos, FORTIN & GLOWINSKI [1983] e GLOWINSKI & TALLEC [1989], existe um valor ótimo para este parâmetro,  $\mathfrak{p}_u^{otm}$ , que é muito difícil de ser obtido exatamente. Quanto maior o valor de  $\mathfrak{p}_u$  mais mal condicionado torna-se o sistema e conseqüentemente mais lenta é a convergência do algoritmo. Para o caso mais geral, com torção e restrições unilaterais, não há estudos que estabeleçam condições deste valor  $\mathfrak{p}_u^{otm}$ . Em termos práticos, FORTIN & GLOWINSKI [1983] sugere que este parâmetro seja calculado da seguinte forma:

---

**Algoritmo 2** : Algoritmo de obtenção do parâmetro  $\mathfrak{p}_u$  de Uzawa

---

**Passo a:** Inicializar  $\mathfrak{p}_u^0$ , assumindo  $\mathfrak{p}_u^0 = |\bar{\mathbf{n}}| \frac{L}{10}$ ;

**Passo b:** Para  $m \geq 0$ , assumir  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_u^m$ , computar **Algoritmo 1** com  $n=30$

e calcular

$$\beta_{30} = \frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \int_0^L \left\{ |\mathbf{r}_{oh}^m - \boldsymbol{\vartheta}_{3h}^n|^2 + |\mathbf{d}_{1h}^n - \boldsymbol{\vartheta}_{1h}^n|^2 + |\mathbf{d}_{2h}^n - \boldsymbol{\vartheta}_{2h}^n|^2 \right\} dS \right\}^{\frac{1}{2}};$$

**Passo c:** (Critério de parada) Checar se  $\beta_{30} \leq 10^{-2}$ .

Se o critério de parada for satisfeito, aceitar o valor de  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_u^m$  e parar o processo iterativo. Caso contrário, incrementar  $\mathfrak{p}_u^{m+1} = \mathfrak{p}_u^m + |\bar{\mathbf{n}}| \frac{L}{10}$  e volta ao

**Passo b.**

---

#### 4.4 Resolução do problema global

O segundo passo do **Algoritmo 1** consiste em encontrar os campos  $(\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n)$  através do **Problema G**. Esse problema variacional pode ser representado através da seguinte forma equivalente:

**Problema  $\bar{\mathbf{G}}$ :** Encontrar  $(\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n) \in \mathbb{L}_h$  tais que para todo  $(\mathbf{q}_{oh}^n, \mathbf{g}_{\alpha h}^n) \in \mathbb{L}_h$

$$\begin{aligned} j(\{\mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}, \{\mathbf{q}_{oh}^n - \mathbf{r}_{oh}^n, \mathbf{g}_{\alpha h}^n - \mathbf{d}_{\alpha h}^n\}) + \mathfrak{p}_p(\mathbf{d}_{\alpha h}^m, \mathbf{g}_{\alpha h}^n - \mathbf{d}_{\alpha h}^n) \geq f(\mathbf{q}_{oh}^n - \mathbf{r}_{oh}^n) \\ + (\mathfrak{p}_p \boldsymbol{\vartheta}_{\alpha h}^{n-1} - \boldsymbol{\lambda}_{\alpha h}^n, \mathbf{g}_{\alpha h}^n - \mathbf{d}_{\alpha h}^n). \end{aligned}$$

Descrito desta maneira, este problema consiste em um sistema de nove inequações variacionais completamente desacopladas, sendo três referentes aos termos de flexão e outras seis aos termos de torção da barra. Entretanto, apenas os termos referentes à flexão, com incógnita  $\mathbf{r}_{oh}$ , precisam ser representados por um sistema de inequações variacionais. Isso deve-se ao fato dessas variáveis serem as únicas a estarem sujeitas a restrições de desigualdade e por isso, precisarem ter sua solução procurada no subconjunto convexo de  $\mathbb{U}$ . Deste modo, o **Problema  $\bar{\mathbf{G}}$**  pode ser fracionado em dois subproblemas, um relacionado apenas com os campos  $\mathbf{r}_{oh}^n$  e outro apenas com os campos  $\mathbf{d}_{\alpha h}^n$ . O primeiro problema consiste em:

**Problema  $\overline{G}_1$ :** Encontrar  $(\mathbf{r}_{oh}^n, \cdot) \in \mathbb{L}_h$  tal que para todo  $(\boldsymbol{\eta}_{oh}^n, \cdot) \in \mathbb{L}_h$

$$((E - G)I(S) \mathbf{r}_{oh}^{\prime\prime n}, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^{\prime\prime n}) + \mathfrak{p}_p(\mathbf{r}_{oh}^{\prime n}, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^{\prime n}) \geq (\mathfrak{p}_p \boldsymbol{\vartheta}_{3h}^{n-1} - \boldsymbol{\lambda}_{3h}^n, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^{\prime n}) + (\overline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^n), \quad (4.13)$$

onde  $\overline{\mathbf{q}}_{oh}^n = \boldsymbol{\eta}_{oh}^n - \mathbf{r}_{oh}^n$ .

Este problema resulta em um sistema de três inequações variacionais desacopladas, tendo como solução o campo  $\mathbf{r}_{oh}^n$ . Na sua aproximação pelo método dos elementos finitos utilizamos interpolação de Hermite de ordem três (funções polinomiais cúbicas). Com isso, cada elemento da discretização tem dois nós e quatro graus de liberdade, sendo dois para cada componente de  $\mathbf{r}_{oh}^n$  e outros dois para a sua derivada. Uma vez montado o sistema de equações, utilizamos para sua resolução o método *SOR* projetado descrito a seguir, na Seção 4.5, com o intuito de satisfazer às restrições do conjunto.

O segundo problema é expresso por:

**Problema  $\overline{G}_2$ :** Encontrar  $(\cdot, \mathbf{d}_{ah}^n) \in \mathbb{U}_h$  tal que para todo  $(\cdot, \mathbf{g}_{ah}^n) \in \mathbb{U}_h$

$$(GI(S) \mathbf{d}_{ah}^{\prime n}, \mathbf{g}_{ah}^{\prime n}) + \mathfrak{p}_p(\mathbf{d}_{ah}^n, \mathbf{g}_{ah}^n) = (\mathfrak{p}_p \boldsymbol{\vartheta}_{ah}^{n-1} - \boldsymbol{\lambda}_{ah}^n, \mathbf{g}_{ah}^n). \quad (4.14)$$

Este problema consiste em um sistema de seis equações variacionais desacopladas, tendo como soluções os campos  $\mathbf{d}_{ah}^n(S)$ . Na sua aproximação pelo método dos elementos finitos utilizamos interpolações Lagrangianas de ordem dois (funções polinomiais quadráticas). Com isso, cada equação da discretização tem três nós e três graus de liberdade. A malha gerada aqui pode ser compartilhada com a do **Problema  $\overline{G}_1$** , evitando uma não sobreposição dos nós por um particionamento diferente, e seus nós são utilizados pelas funções de interpolação de ambos os problemas de acordo com o esquema do *i*-ésimo elemento mostrado na Figura 4.1. Note neste problema que embora a regularidade da função de interpolação exija

apenas a continuidade, optamos em assumir uma função polinomial quadrática com o intuito de melhorar a precisão da solução  $\mathbf{d}_{\alpha h}^n$  e aproximar os campos  $\mathbf{r}_{oh}^n$  e  $\mathbf{d}_{\alpha h}^n$  nos mesmos espaços de elementos finitos, tornando mais fácil a satisfação da restrição  $\mathbf{r}_{oh}^n(S_i) = \mathbf{d}_{3h}^n(S_i)$ .

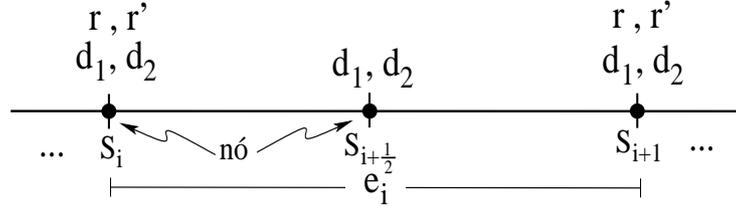


Figura 4.1: Esquema da interpolação do elemento  $e_i$ .

Analisando esses dois problemas dentro de uma perspectiva global do algoritmo, podemos observar que no decorrer de todo o processo iterativo tanto o lado esquerdo das equações quanto das inequações não precisam sofrer atualizações. Toda a intervenção incide apenas nos termos dos lados direitos dos sistemas de equações/inequações dos problemas. Com isso, as matrizes que precisam ser constantemente reconstruídas são substancialmente reduzidas e conseqüentemente a execução do processo torna-se efetivamente mais rápida.

Estando o **Problema  $\overline{\mathbf{G}}_2$**  montado, sua resolução pode ser realizada tanto por um método direto quanto por um método iterativo. Como o sistema matricial produzido por esse problema não é excessivamente grande e é positivo definido, exploramos essa característica e utilizamos o algoritmo de Cholesky para resolvê-lo (DEMME [1997]). Esse método gasta a metade do tempo e a metade do espaço utilizado pelo método da Eliminação de Gauss.

#### 4.5 Método SOR com projeção

Para resolver o **Problema  $\overline{\mathbf{G}}_1$** , utilizamos o algoritmo *SOR* projetado (Over-relaxation Successive method with projection), o qual é uma extrapolação do método de Gauss-Seidel e consiste em projetar no conjunto  $\mathbb{L}_h$  a solução  $\mathbf{r}_{oh}$  encontrada em cada passo do método *SOR*. Para cada componente do vetor de solução

a extrapolação toma a forma de um peso médio entre o valor obtido na iteração anterior e o valor calculado na iteração atual do método Gauss-Seidel.

Na ausência de restrições unilaterais, o **Problema  $\overline{\mathbf{G}}_1$**  muda para um problema em todo o espaço  $\mathcal{U}_h$ . Nesse caso, esse problema é equivalente a resolver um sistema linear de equações algébricas da forma

$$\mathbf{A}_s \mathbf{r}_{oh}(S) = f(S),$$

onde  $\mathbf{A}_s = a_{ij}$  é uma matriz  $2n_p \times 2n_p$ , simétrica e positiva definida, e  $f \in \mathcal{R}^{2n_p}$  o termo de força resultante da aproximação por elementos finitos das formas do lado esquerdo e direito da equação, respectivamente.

Aplicado ao sistema de equações (4.13) o *SOR* corresponde a encontrar

$$(\overline{\mathbf{r}}_o^n)_i = -\frac{1}{a_{ii}} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (\mathbf{r}_o^{n+1})_j + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} (\mathbf{r}_o^n)_j - f_i \right\}, \quad (4.15)$$

$$(\mathbf{r}_o^{n+1})_i = (1 - \nu)(\mathbf{r}_o^n)_i + \nu(\overline{\mathbf{r}}_o^n)_i, \quad (4.16)$$

onde  $\overline{\mathbf{r}}_o^n$  representa uma iteração do método de Gauss-Seidel e  $\nu \in ]0, 2[$  o fator de relaxação. Uma extensão deste algoritmo para o caso em que  $\mathbf{r}_o^n \in \mathbb{L}_h$  pode ser obtida projetando cada  $(\mathbf{r}_o)_i$  resultante da equação (4.16) no conjunto  $\mathbb{L}_h$ , isto é

$$(\mathbf{r}_o^{n+1})_i = \Pr_{\mathbb{L}_h} \{ (1 - \nu)(\mathbf{r}_o^n)_i + \nu(\overline{\mathbf{r}}_o^n)_i \},$$

onde  $\Pr_{\mathbb{L}_h}$  é o operador projeção definido por

$$\Pr_{\mathbb{L}_h}((\mathbf{r}_o)_i) = \begin{cases} (\mathbf{r}_o(S_j))_i & \text{se } \|(\mathbf{r}_o(S_j))_i - (R_o)_i\|_e \leq \|(\mathbf{h}(S_j))_i\|_e \\ (\mathbf{h}(S_j))_i & \text{se } \|(\mathbf{r}_o(S_j))_i - (R_o)_i\|_e > \|(\mathbf{h}(S_j))_i\|_e \end{cases}.$$

#### 4.6 Resolução do problema local

Nesta seção, discutimos em detalhes todo o desenvolvimento do terceiro passo do processo de resolução do **Algoritmo 1**, o qual consiste em encontrar a solução do **Problema L**. Note que esse problema consiste em minimizar o funcional  $\mathcal{L}(\cdot)$

no conjunto  $\mathbb{M}_h^l$  e sua solução é caracterizada igualando a zero o cálculo da derivada Gâteaux desse funcional na direção  $\zeta_{ih} = \phi \wedge \vartheta_{ih}$ . Matematicamente falando, isso quer dizer que

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d\mathcal{L}}{d\varrho}(\{\mathbf{r}_{oh}, \mathbf{d}_{oh}\}, \vartheta_{ih} + \varrho \zeta_{ih}, \boldsymbol{\lambda}_{ih}) = 0 \quad \forall \zeta_{ih} \in [L^2(\mathcal{I})]^9,$$

cujos desenvolvimentos resultam em

$$\int_{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^3 \left\{ \left( \mathfrak{p}_p \vartheta_{ih} - (\mathfrak{p}_p \mathbf{d}_{ih} + \boldsymbol{\lambda}_{ih}) \right) \phi \wedge \vartheta_{ih} \right\} dS = 0 \quad \forall \phi \in [L^2(\mathcal{I})]^9. \quad (4.17)$$

Como o campo  $\vartheta_{ih}^n$  é construído com funções de interpolações descontínuas, o cálculo da equação acima é feito localmente ao nível de cada elemento e por isso, sua solução pode ser expressa de forma explícita. Para explicitá-la, representamos (4.17) na base  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$  e denotamos por  $B \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ ,  $Q^\vartheta \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  e  $\Theta \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  as matrizes cujos coeficientes são dados, respectivamente, por

$$B_{ij} = (\mathfrak{p}_p \mathbf{d}_{ih}^n + \boldsymbol{\lambda}_{ih}^n) \cdot \mathbf{e}_j, \quad (4.18)$$

$$Q_{ij}^\vartheta = \vartheta_{ih}^n \cdot \mathbf{e}_j, \quad (4.19)$$

$$\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk} \phi \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.20)$$

Substituindo as identidades acima em (4.17) e fazendo uso da relação (A.4) obtemos

$$\int_{\mathcal{I}} \left\{ \left( \mathfrak{p}_p Q^\vartheta - B \right)_{\top} Q^\vartheta \Theta \cdot \mathbf{I}_d \right\} dS = \int_{\mathcal{I}} \text{tr} \left\{ \left( \mathfrak{p}_p Q^\vartheta - B \right)^\top Q^\vartheta \Theta \right\} dS = 0, \quad (4.21)$$

onde

$$\left( \mathfrak{p}_p (\vartheta_{ih} - \mathbf{d}_{ih}) - \boldsymbol{\lambda}_{ih} \right) \cdot \mathbf{e}_j = \left( \mathfrak{p}_p Q^\vartheta - B \right)_{ij}, \quad (4.22)$$

$$\left( \phi \wedge \vartheta_{ih} \right) \cdot \mathbf{e}_j = \left( Q^\vartheta \Theta \right)_{ij}. \quad (4.23)$$

Com isso, podemos reescrever o **Problema L** de maneira equivalente da seguinte forma:

**Problema  $\bar{\text{L}}$ :** Encontrar  $Q^\vartheta \in M_h^l$  tal que para todo campo  $\Theta$  de matrizes anti-simétricas

$$\int_{\mathcal{I}} \text{tr} \left\{ \left( \mathfrak{p}_p Q^\vartheta - B \right)^\top Q^\vartheta \Theta \right\} dS = 0. \quad (4.24)$$

A matriz real quadrada  $B$  pode ser representada da seguinte forma, (STRANG [1988]),

$$B = Q^g D Q^d,$$

onde  $Q^g \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  e  $Q^d \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  são matrizes ortogonais formadas pelos autovetores de  $BB^\top$  e  $B^\top B$ , respectivamente, e  $D \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  é a matriz diagonal formada pelos valores singulares da matriz  $B$  (são as raízes quadradas de ambos os autovalores de  $BB^\top$  e  $B^\top B$ ). Com isso, temos que esse problema admite como solução

$$Q^\vartheta = Q^g Q^d. \quad (4.25)$$

Para verificar se a relação (4.25) expressa de fato a solução do problema, fizemos sua substituição no integrando de (4.24) obtendo:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ \left( \mathfrak{p}_p Q^\vartheta - B \right)^\top Q^\vartheta \Theta \right\} &= \text{tr} \left\{ \left( \mathfrak{p}_p Q^g Q^d - Q^g D Q^d \right)^\top Q^g Q^d \Theta \right\}, \\ &= \text{tr} \left\{ [Q^d]^\top \left( \mathfrak{p}_p [Q^g]^\top - D [Q^g]^\top \right) Q^g Q^d \Theta \right\}, \\ &= \text{tr} \left\{ \mathfrak{p}_p \Theta - [Q^d]^\top D Q^d \Theta \right\}. \end{aligned}$$

Como  $\Theta$  é uma matriz antisimétrica,  $\text{tr}(\Theta) = 0$ , temos que

$$\text{tr} \left\{ \left( \mathfrak{p}_p Q^\vartheta - B \right)^\top Q^\vartheta \Theta \right\} = -\text{tr} \left\{ [Q^d]^\top D Q^d \Theta \right\}.$$

Usando novamente a antisimetria de  $\Theta$  e o fato de  $[Q^d]^\top D Q^d$  ser um operador

simétrico, isto é, satisfaz à relação  $[Q^d]^T D Q^d = \left([Q^d]^T D Q^d\right)^T$ , temos que

$$\text{tr}\left\{[Q^d]^T D Q^d \Theta\right\} = [Q^d]^T D Q^d \cdot \Theta = 0.$$

Podemos então concluir que

$$\text{tr}\left\{\left(\mathfrak{r}_p Q^g - B\right)^T Q^g \Theta\right\} = 0$$

e (4.25) é efetivamente a solução do problema (4.24).

Para resolver esse problema local nas diversas situações simuladas, fizemos uso do seguinte algoritmo:

---

**Algoritmo 3** : Algoritmo de resolução do problema local

---

**Passo a:** Calcular a matriz  $B$  por (4.18).

**Passo b:** Calcular  $BB^T = Q^g D^2 (Q^g)^T$ .

**Passo c:** Calcular os autovalores  $c_1 \geq c_2 \geq c_3$  de  $BB^T$ , utilizando o teorema de Cayley-Hamilton (GURTIN [1981]), e os autovetores  $\mathbf{g}_j$  associados a cada um deles, resolvendo

$$BB^T \mathbf{g}_j = c_j \mathbf{g}_j, \quad \|\mathbf{g}_j\|_e = 1.$$

Esses procedimentos são realizados pelo **Algoritmo 4**.

**Passo d:** Construir a matriz  $D$  fazendo  $D_{11} = \sqrt{c_1}$ ,  $D_{22} = \sqrt{c_2}$ ,  $D_{33} = \sqrt{c_3} \text{sgn}(\det(B))$ ;

**Passo e:** Calcular  $Q_{ij}^g = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{e}_i$ ;

**Passo f:** Calcular  $\mathbf{v}_{ih}^n = (Q^g D^{-1} (Q^g)^T B)_{ij} \mathbf{e}_j$ .

---

Note no algoritmo acima que o **Passo c** incide no problema do cálculo e ordenamento dos autovalores e autovetores da matriz  $BB^T \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ . Do ponto de vista computacional existem diversas técnicas e procedimentos iterativos consolidados para resolver esse tipo de problema (DEMMEEL [1997]), mas em geral são custosos. Entretanto, devido as características especiais da matriz  $BB^T$ , isto é, possuir dimensão 3 e ser positiva definida, os procedimentos de resolução desse passo puderam ser resolvidos analiticamente. Tais procedimentos foram baseados no algoritmo apresentado por FRANCA [1988], no qual os autovalores de  $BB^T$  são expressos em função dos seus invariantes. O algoritmo completo para o cálculo dos autovalores ordenados e autovetores é dado por:

---

**Algoritmo 4 :** Algoritmo de resolução dos autovalores e autovetores de  $BB^T$

---

Denotando a matriz  $BB^T$  como  $\overline{B} = BB^T$ , temos que

**Passo a:** Calcular os seguintes invariantes da matriz  $\overline{B}$ .

$$\begin{aligned} I_B &= \text{tr}(\overline{B}), \\ II_B &= \frac{1}{2} \left[ I_B^2 - \text{tr}(\overline{B}^2) \right], \\ III_B &= \det(\overline{B}). \end{aligned}$$

**Passo b:** Calcular de forma decrescente os autovalores de  $\overline{B}$  pelas relações

$$\begin{aligned}
l_A &= \left(\frac{I_B}{3}\right)^3 - \frac{III_B}{3}, \\
l_B &= \frac{I_B}{18}(6l_A - I_B) + \frac{III_B}{2}, \\
l_C &= \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{l_B}{(l_A)^{\frac{3}{2}}}\right), \\
c_1 &= \frac{I_B}{3} + 2\sqrt{l_A} \cos(l_C), \\
c_2 &= \frac{I_B}{3} - 2\sqrt{l_A} \cos\left(\frac{\pi}{3} + l_C\right), \\
c_3 &= \frac{I_B}{3} - 2\sqrt{l_A} \cos\left(\frac{\pi}{3} - l_C\right).
\end{aligned}$$

**Passo c:** Calcular os autovetores associado aos autovalores  $c_i$  através das relações

$$\begin{aligned}
a_j &= \overline{B}_{11} - c_j, & b_j &= \overline{B}_{22} - c_j, & c_j &= \overline{B}_{33} - c_j, \\
\overline{g}_{j1} &= (\overline{B}_{12}\overline{B}_{23} - b_j\overline{B}_{13})(\overline{B}_{13}\overline{B}_{23} - c_j\overline{B}_{12}), \\
\overline{g}_{j2} &= (\overline{B}_{13}\overline{B}_{23} - c_j\overline{B}_{12})(\overline{B}_{13}\overline{B}_{12} - a_j\overline{B}_{23}), \\
\overline{g}_{j3} &= (\overline{B}_{12}\overline{B}_{23} - b_j\overline{B}_{13})(\overline{B}_{13}\overline{B}_{12} - a_j\overline{B}_{23}), \\
\overline{\mathbf{g}}_j &= (\overline{g}_{j1}, \overline{g}_{j2}, \overline{g}_{j3}).
\end{aligned}$$

**Passo c:** Normalizar os autovetores.

$$\mathbf{g}_j = \frac{\overline{\mathbf{g}}_j}{|\overline{\mathbf{g}}_j|}.$$

## 4.7 Cálculo dos esforços

Uma vez verificados os testes de convergência do **Algoritmo 3**, obtemos os esforços internos do modelo através da equação constitutiva (2.68). Estes esforços

são dados por

$$\mathbf{m}_\alpha = EI \omega_\alpha, \quad (\text{Momentos fletores}) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{m}_3 = 2GI \omega_3. \quad (\text{Torção}) \quad (4.27)$$

Utilizando a relação (2.44) e uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{d}_i(S) \cdot \mathbf{d}_j(S) = -\mathbf{d}_i(S) \cdot \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{d}_j(S), \quad (4.28)$$

podemos reescrever (4.26) e (4.27) como

$$\mathbf{m}_1(S) = -EI(\mathbf{r}_o''(S) \cdot \mathbf{d}_2(S))\mathbf{d}_1(S), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{m}_2(S) = EI(\mathbf{r}_o''(S) \cdot \mathbf{d}_1(S))\mathbf{d}_2(S), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{m}_3(S) = 2GI(\mathbf{d}_1'(S) \cdot \mathbf{d}_2(S))\mathbf{r}_o'(S). \quad (4.31)$$

## 4.8 Experimentos numéricos

Nesta seção, apresentamos resultados de experimentos numéricos com o modelo de estruturas flexíveis não-lineares apresentado nas seções anteriores. Inicialmente, estamos interessados na validação do **Algoritmo 1**, no estudo de sua sensibilidade aos seus parâmetros e na exemplificação da não unicidade de solução do problema. Com o intuito de abordar esses assuntos, nos concentramos basicamente no estudo de quatro casos particulares: no primeiro (**Experimento 1**), tratamos de um problema que apresenta uma solução analítica conhecida, no segundo (**Experimento 2**) apresentamos uma situação em que o modelo admite múltiplas soluções, no terceiro (**Experimento 3**) tratamos de um problema com torção, onde as configurações deformadas finais da barra não estão mais contidas em um único plano, e no último caso (**Experimento 4**) consideramos um problema com restrição unilateral, em que a configuração deformada da estrutura está confinada em um cilindro.

### 4.8.1 Experimento 1: um problema com solução analítica

Este experimento possui dois objetivos principais. O primeiro deles consiste na validação do procedimento numérico, o qual deve ser capaz de representar bem situações particulares do modelo geral. Para isso, fizemos alguns experimentos confrontando os resultados obtidos com o **Algoritmo 1** com uma solução exata introduzida por BISSHOPP & DRUCKER [1945]. O outro objetivo é estudar a sensibilidade do algoritmo em relação aos parâmetros  $\nu_u$  e  $\nu_p$ , e ao número de elementos da discretização por elementos finitos.

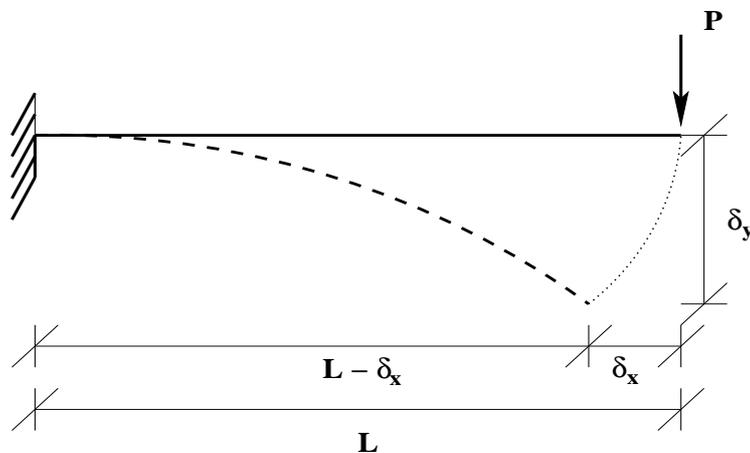


Figura 4.2: Desenho esquemático de uma barra em balanço, sujeita a uma carga concentrada  $P$  na sua extremidade livre.

A fim de obter uma solução exata para o modelo, consideramos uma estrutura em balanço, constituída por uma barra longa e delgada. A estrutura tem comprimento  $L$ , a sua seção transversal axissimétrica possui momento de inércia  $I$  em relação aos eixos principais, e o material que a constitui tem módulo de Young  $E$ . A única solicitação a que está sujeita é uma carga concentrada vertical  $P$  aplicada na sua extremidade livre, como esquematizada na Figura 4.2

#### 4.8.1.1 Desenvolvimento analítico

A solução analítica desse problema, apresentada por BISSHOPP & DRUCKER [1945], utiliza a expressão exata da curvatura da linha elástica no seu desenvolvimento (ver NUTBOURNE & MARTIN [1988]) em termos do comprimento

de arco e do ângulo formado entre a tangente da curva e o eixo  $\mathbf{e}_3$ . Com isso, esses autores conseguiram obter as expressões dos deslocamentos  $\delta_x$  e  $\delta_y$  em função de integrais elípticas do primeiro e segundo tipo, dadas por:

$$\frac{\delta_y}{L} = 1 - 2 \frac{\mathcal{E}(k, \pi/2) - \mathcal{E}(k, \theta_o)}{\mathcal{F}(k, \pi/2) - \mathcal{F}(k, \theta_o)}, \quad (4.32)$$

$$\frac{\delta_x}{L} = 1 - \frac{\sqrt{2 \operatorname{sen}(\phi_o)}}{\mathcal{F}(k, \pi/2) - \mathcal{F}(k, \theta_o)}, \quad (4.33)$$

onde

$$\mathcal{F}(k, \theta_o) = \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}}, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{E}(k, \theta_o) = \int_0^{\theta_o} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta, \quad (4.35)$$

representam as integrais elípticas de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e  $\theta_o$  um ângulo definido como

$$\theta_o = \operatorname{arcsen} \left( \frac{\sqrt{2}}{2k} \right). \quad (4.36)$$

O parâmetro  $\phi_o$  é o ângulo de inclinação no extremo final da barra, definido por

$$\operatorname{sen}(\phi_o) = 2k^2 - 1. \quad (4.37)$$

O parâmetro  $k \in [0, 1]$ , em teoria de integrais elípticas, é denominado de módulo. Para cada valor de  $k$ , as integrais (4.34) e (4.35) podem ser obtidas em tabelas de funções elípticas (ver BYRD & FRIEDMAN [1971] ou ABRAMOWITZ & STEGUN [1972]).

Uma vez conhecidos os valores de  $\delta_x$  e  $\delta_y$ , calculamos a posição da extremidade livre da estrutura, bem como a intensidade da força aplicada. Esta intensidade é estabelecida através da seguinte relação

$$P = \frac{EI}{L^2} \left( \mathcal{F}(k, \pi/2) - \mathcal{F}(k, \theta_o) \right)^2. \quad (4.38)$$

### 4.8.1.2 Resultados numéricos

Consideramos nesse estudo numérico a barra com as seguintes propriedades geométricas e constitutivas: rigidez à flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e comprimento  $L = 10.0m$ . As condições de contorno adotadas são  $\mathbf{r}_o(0) = \mathbf{r}'_o(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}_1(0) = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{d}_2(0) = \mathbf{e}_2$ . A força vertical concentrada na extremidade livre tem intensidades  $P = 0.5daN, 1.0daN, 1.5daN, 2.0daN, 3.0daN, \dots, 10.0daN$ . Salvo os casos que forem explicitamente especificados, a malha de elementos finitos adotada consiste de 20 elementos de igual comprimento. Para a inicialização do algoritmo consideramos  $\lambda_{ih}^0(S) = 0$ ,  $\vartheta_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$ ,  $\vartheta_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$  e os parâmetros do algoritmo  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 1.0 \times 10^2$ .

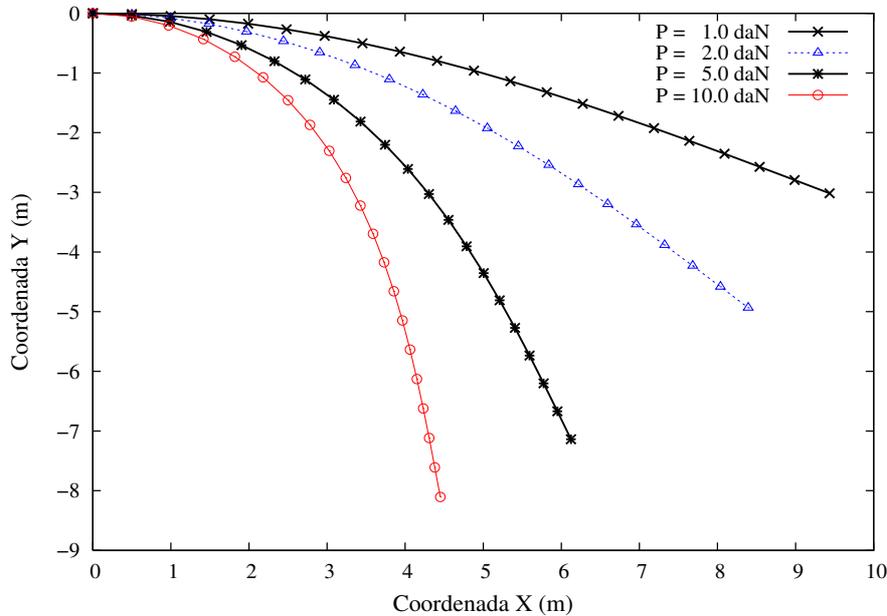


Figura 4.3: Configurações deformadas de uma barra em balanço, de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez à flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a uma carga concentrada  $P$  na sua extremidade livre.

A Figura 4.3 caracteriza as configurações deformadas da barra para diferentes intensidades de carga  $P$ . Estes exemplos são típicos de situações particulares em que as solicitações acarretam em soluções únicas para o **Problema J**. Na Tabela 4.1 apresentamos as energias de deformação do sistema para estas e outras configurações intermediárias, obtidas variando a intensidade da carga.

| Força<br>( $daN$ ) | Energia de deformação<br>( $daN \cdot m$ ) | Número de iterações |
|--------------------|--|---------------------|
| 1.0                | 1.43                                       | 992                 |
| 2.0                | 4.22                                       | 812                 |
| 3.0                | 6.92                                       | 663                 |
| 4.0                | 9.23                                       | 558                 |
| 5.0                | 11.18                                      | 482                 |
| 6.0                | 12.87                                      | 425                 |
| 7.0                | 14.35                                      | 380                 |
| 8.0                | 15.66                                      | 345                 |
| 9.0                | 16.86                                      | 315                 |
| 10.0               | 17.95                                      | 291                 |

Tabela 4.1: Energias de deformações e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando uma barra em balanço, de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a uma carga concentrada  $P$  na sua extremidade livre. Para todos os casos utilizamos  $p_u = p_p = 1.0 \times 10^2$ .

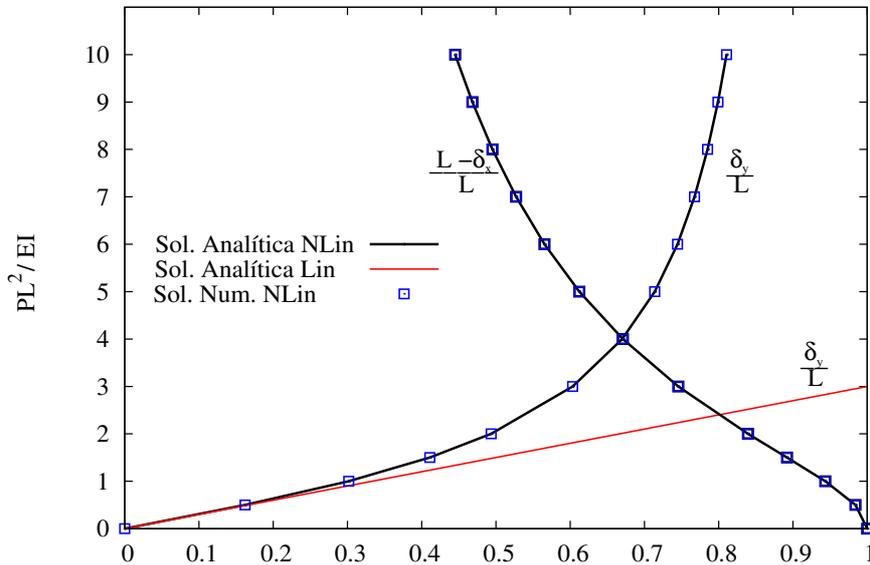


Figura 4.4: Deslocamentos vertical e horizontal da extremidade livre da barra em balanço. Soluções analíticas não-lineares, analíticas lineares e numéricas não-lineares, para cargas concentradas de intensidade  $P = 0.5daN, 1.0daN, 1.5daN, 2.0daN, 3.0daN, \dots, 10.0daN$ .

Na Figura 4.4 temos uma comparação entre as soluções analíticas não-lineares, lineares e numéricas não-lineares, obtidas pelo **Algoritmo 1**, para cada componente vertical e horizontal da extremidade livre da barra, sujeita a intensidades de cargas  $P$  variando de  $1.0daN$  a  $10.0daN$ . Note pelos resultados que as soluções numéricas obtidas praticamente coincidem com a solução analítica não-linear calculada anteriormente. Com isso, podemos constatar a boa precisão do algoritmo. Por outro lado, quando essa solução é comparada com a obtida pela teoria linear de barras, podemos verificar que seus valores diferem drasticamente quando a carga  $P$  atinge valores acima de  $0.5daN$ . Essa é uma situação em que podemos ilustrar o pequeno intervalo em que a teoria linear pode ser aplicada de forma válida.

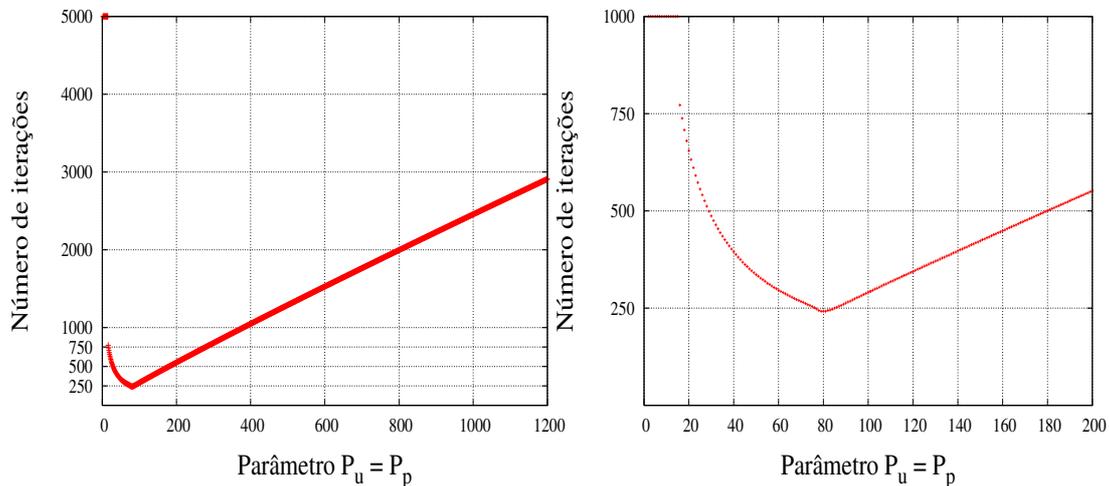


Figura 4.5: Número de iterações em função da variação do parâmetros  $p_u = p_p$  do **Algoritmo 1**, considerando uma barra em balanço de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a uma carga concentrada na sua extremidade livre de intensidade  $10daN$ . Para todos os casos utilizamos uma malha uniforme com 20 elementos

A Figura 4.5 mostra o número de iterações do algoritmo em função da variação dos parâmetros  $p_u = p_p$ . Observe que o início de sua convergência se dá apenas quando estes parâmetros assumem valores em torno de 15, isto é, existe uma cota inferior para os parâmetros (maior que zero) a partir do qual é assegurada a convergência do algoritmo. A partir daí, um incremento nos parâmetros acarreta uma diminuição no número de iterações do algoritmo, até atingir seu valor mínimo. Este ponto de número mínimo de iterações representa o valor ótimo dos

| Número de elementos | Número de iterações |
|---------------------|---------------------|
| 10                  | 290                 |
| 20                  | 291                 |
| 30                  | 294                 |
| 40                  | 363                 |
| 50                  | 422                 |
| 60                  | 473                 |
| 70                  | 513                 |
| 80                  | 542                 |
| 90                  | 561                 |
| 100                 | 573                 |

Tabela 4.2: Número de elementos da malha e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando uma barra em balanço de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a uma carga concentrada na sua extremidade livre de intensidade  $10.0daN$ . Para todos os casos utilizamos  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 1.0 \times 10^2$  e carga  $P = 10.0daN$

parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$  do algoritmo para este problema. Para valores maiores que o limite superior deste intervalo, o número de iterações cresce linearmente e o algoritmo perde desempenho. Na Tabela 4.2, comparamos o número de iterações do algoritmo em função da variação do número de elementos da malha. Observe que há um aumento do número de iterações à medida em que o número de elementos aumenta. Isso se deve ao aumento do número de restrições  $\mathbf{r}_{oh}^m(S_i) = \mathbf{d}_{3h}^n(S_i)$  que o algoritmo deve satisfazer.

Finalmente na Tabela 4.3 apresentamos os momentos fletores resultantes, obtidos em cada nó da malha para as intensidades de carga  $1.0daN$  e  $10.0daN$ .

Em todos os casos computados neste exemplo, os tempos de computação em um processador Core 2 de  $1.86GHz$  e 64bits foram desprezíveis.

| Nó | M. Fletor ( $m_{2z}$ )            |                                    | Nó | M. Fletor ( $m_{2z}$ )            |                                    |
|----|-----------------------------------|------------------------------------|----|-----------------------------------|------------------------------------|
|    | $P = 1.0daN$<br>( $daN \cdot m$ ) | $P = 10.0daN$<br>( $daN \cdot m$ ) |    | $P = 1.0daN$<br>( $daN \cdot m$ ) | $P = 10.0daN$<br>( $daN \cdot m$ ) |
| 1  | $-0.94372 \times 10^1$            | $-0.44649 \times 10^2$             | 11 | $-0.45548 \times 10^1$            | $-0.10212 \times 10^2$             |
| 2  | $-0.89370 \times 10^1$            | $-0.39624 \times 10^2$             | 12 | $-0.40867 \times 10^1$            | $-0.85930 \times 10^1$             |
| 3  | $-0.84379 \times 10^1$            | $-0.34817 \times 10^2$             | 13 | $-0.36224 \times 10^1$            | $-0.71789 \times 10^1$             |
| 4  | $-0.79408 \times 10^1$            | $-0.30356 \times 10^2$             | 14 | $-0.31615 \times 10^1$            | $-0.59383 \times 10^1$             |
| 5  | $-0.74462 \times 10^1$            | $-0.26303 \times 10^2$             | 15 | $-0.27037 \times 10^1$            | $-0.48425 \times 10^1$             |
| 6  | $-0.69547 \times 10^1$            | $-0.22680 \times 10^2$             | 16 | $-0.22487 \times 10^1$            | $-0.38655 \times 10^1$             |
| 7  | $-0.64668 \times 10^1$            | $-0.19476 \times 10^2$             | 17 | $-0.17960 \times 10^1$            | $-0.29836 \times 10^1$             |
| 8  | $-0.59828 \times 10^1$            | $-0.16665 \times 10^2$             | 18 | $-0.13453 \times 10^1$            | $-0.21755 \times 10^1$             |
| 9  | $-0.55028 \times 10^1$            | $-0.14210 \times 10^2$             | 19 | $-0.89603 \times 10^0$            | $-0.14211 \times 10^1$             |
| 10 | $-0.50268 \times 10^1$            | $-0.12072 \times 10^2$             | 20 | $-0.44778 \times 10^0$            | $-0.70122 \times 10^0$             |
| 11 | $-0.45548 \times 10^1$            | $-0.10212 \times 10^2$             | 21 | $0.10361 \times 10^{-4}$          | $0.36141 \times 10^{-3}$           |

Tabela 4.3: Momentos fletores de uma barra em balanço, de comprimento  $L = 10.0m$ , rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$  e sujeita a cargas concentradas de intensidade  $P = 1daN$  e  $10daN$  na sua extremidade livre.

#### 4.8.2 Experimento 2: um problema com multiplicidade de solução

O objetivo principal deste experimento é ilustrar a possibilidade de não unicidade de solução do problema e estudar a sensibilidade do algoritmo em relação aos parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$ . Para isso, consideramos neste estudo numérico uma barra, inicialmente reta, com as seguintes propriedades geométricas e constitutivas: rigidez à flexão  $EI = 7000N \cdot m^2$  e comprimento  $L = 32.6m$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(0) = 0. \\ \mathbf{r}_{o2}(0) = \mathbf{r}_{o3}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o1}(0) = \mathbf{r}'_{o2}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o3}(0) = 1. \\ \mathbf{d}_1(0) = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{d}_2(0) = -\mathbf{e}_1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 1., \dots, 10. \\ \mathbf{r}_{o2}(L) = \mathbf{r}_{o3}(L) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o1}(L) = \mathbf{r}'_{o2}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o3}(L) = 1. \\ \mathbf{d}_1(L) = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{d}_2(L) = -\mathbf{e}_1. \end{array} \right. \quad (4.39)$$

A estrutura está sujeita a uma força vertical distribuída ao longo de todo o seu comprimento com intensidade  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . Salvo os casos que forem explicitamente especificados, na aproximação por elementos finitos foi adotada uma malha

uniforme com 20 elementos. O algoritmo foi inicializado de duas formas distintas:

**Ini (1)** : Para  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 9., 10.$ , consideramos  $\boldsymbol{\lambda}_{ih}^0(S) = 0.$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$  e  $\boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$ . Para  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 1., \dots, 8.$ , consideramos  $\boldsymbol{\lambda}_{ih}^0(S) = 0$  e  $\boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S)$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S)$  dadas pela solução do problema com  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 9.0$ . Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 2.5 \times 10^3$ ;

**Ini (2)** : consideramos inicialização **Ini (1)**, acrescida de uma pequena torção dada pelo giro  $\theta_1(L) = 0.001^\circ$ . Note que o ângulo  $\theta_1(L)$  tem apenas o intuito de introduzir uma pequena perturbação na inicialização do algoritmo. Os parâmetros adotados foram  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 2.5 \times 10^3$ .

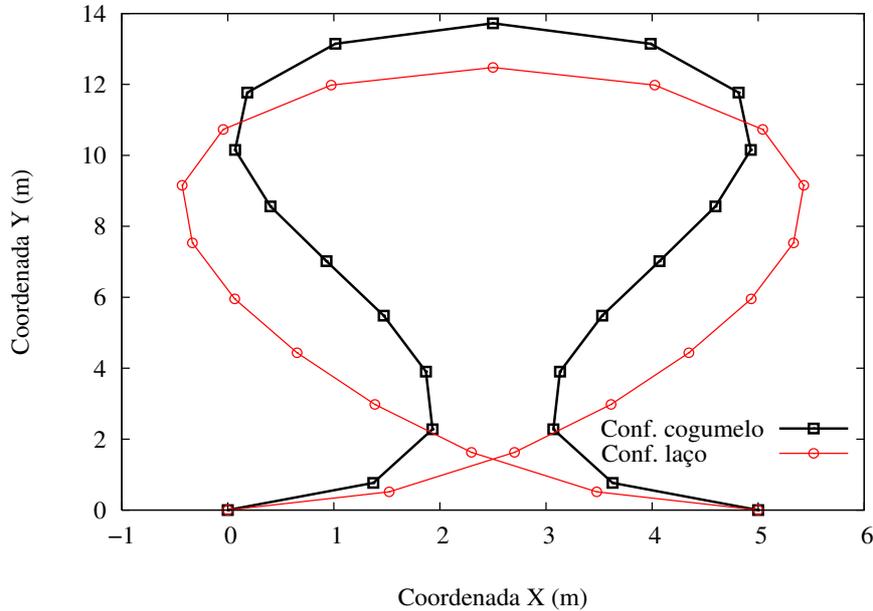


Figura 4.6: Configurações deformadas de uma barra com  $EI = 7000N \cdot m^2$ ,  $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5.0$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A configuração em forma de cogumelo foi obtida com a inicialização **Ini (1)** e a configuração em laço por **Ini (2)**

A Figura 4.6 caracteriza as configurações deformadas da barra para a condição de contorno  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5.0$ . A configuração em forma de cogumelo foi obtida fazendo a inicialização do algoritmo por **Ini (1)**, enquanto que a configuração em laço foi obtida com a inicialização **Ini (2)**. Estes experimentos caracterizam um exemplo em que o **Problema J** não apresenta unicidade de solução. A depender das condições de contorno, carregamentos e inicialização do algoritmo, podemos

obter diversas configurações que correspondem a múltiplas soluções para o problema. Embora a configuração em laço apresente um ponto de autocontato, nosso modelo não contempla seus efeitos devido à cinemática que adotamos.

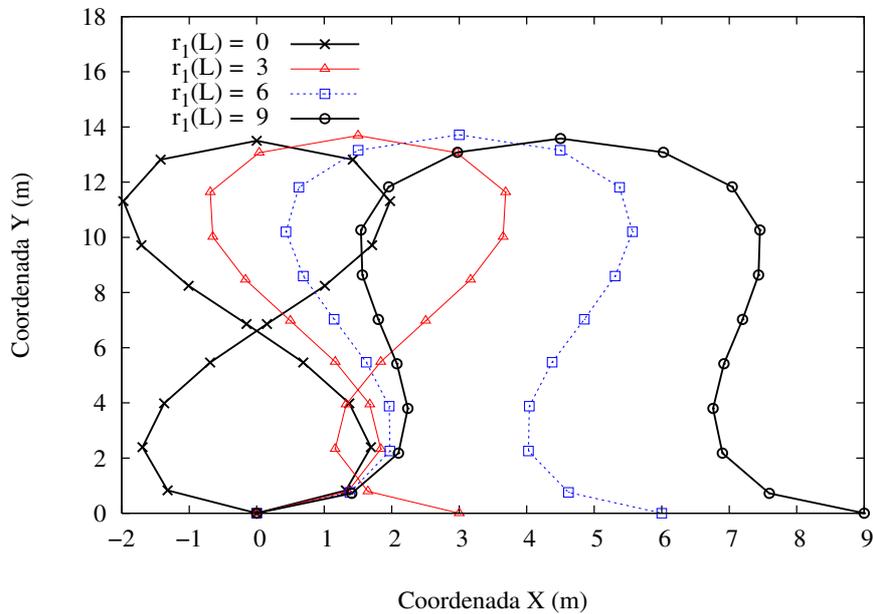


Figura 4.7: Configurações deformadas de uma barra com  $EI = 7000N \cdot m^2$ ,  $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 3., 6., 9.$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por **Ini (1)**.

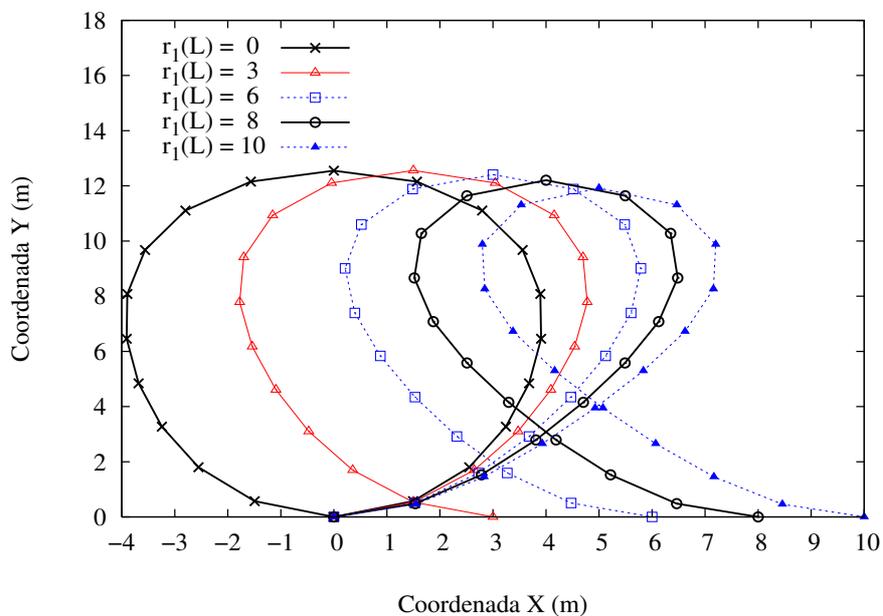


Figura 4.8: Configurações deformadas de uma barra com  $EI = 7000N \cdot m^2$ ,  $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 3., 6., 8., 10.$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por **Ini (2)**.

As Figuras 4.7 e 4.8 apresentam outras configurações deformadas da barra para as inicializações **Ini (1)** e **Ini (2)**, respectivamente, e a Tabela 4.4 suas energias de deformações. Note que a configuração em forma de cogumelo apresenta uma energia maior que a obtida pela configuração em laço, como era esperado. Como podemos observar pela inicialização **Ini (2)**, pequenas perturbações podem acarretar grandes variações nas configurações de equilíbrio.

| $r_{o1}$<br>( $m$ ) | Energia de deformação<br>( $N \cdot m$ ) |        | Número de iterações |      |
|---------------------|--|--------|---------------------|------|
|                     | Cogumelo                                 | Laço   | Cogumelo            | Laço |
| 0.0                 | 12495.0                                  | 5461.8 | 46                  | 93   |
| 1.0                 | 11936.0                                  | 5506.1 | 49                  | 737  |
| 2.0                 | 11397.0                                  | 5567.6 | 52                  | 743  |
| 3.0                 | 10879.0                                  | 5646.4 | 54                  | 1058 |
| 4.0                 | 10379.0                                  | 5742.9 | 56                  | 1021 |
| 5.0                 | 9896.7                                   | 5857.5 | 57                  | 1041 |
| 6.0                 | 9430.3                                   | 5990.6 | 58                  | 1031 |
| 7.0                 | 8979.0                                   | 6143.1 | 60                  | 1022 |
| 8.0                 | 8541.7                                   | 6315.9 | 61                  | 1014 |
| 9.0                 | 8117.8                                   | 6509.9 | 62                  | 1010 |
| 10.0                | 7706.0                                   | 6726.7 | 62                  | 1002 |

Tabela 4.4: Energia de deformação e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando a barra com rigidez a flexão  $EI = 7000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ , condições de contorno (4.39) e sujeita a uma carga distribuída  $\bar{w}_2 = 75.0N/m$ .

As Figuras 4.9 e 4.10 mostram o número de iterações do algoritmo em função da variação dos parâmetros  $p_u$  e  $p_p$ . Na Figura 4.9 a inicialização do algoritmo é dada por **Ini (1)**, enquanto que na Figura 4.10 ela é dada por **Ini (2)**. A Figura 4.9 apresenta o número mínimo de iterações para valores de  $p_u = p_p$  em torno de  $35.0 \times 10^2$  e comportamento semelhantes ao experimento da viga em balanço descrito anteriormente. A Figura 4.10 apresenta nitidamente um gráfico com dois comportamentos distintos. O primeiro, com valores de  $p_u = p_p$  que vão da origem até em torno de  $75.0 \times 10^2$ , apresentam uma configuração de equilíbrio em forma de laço, como na Figura 4.6. O segundo, com valores de  $p_u = p_p$  acima de  $75.0 \times 10^2$ , volta a apresentar a configuração de equilíbrio em forma de cogumelo, Figura 4.6.

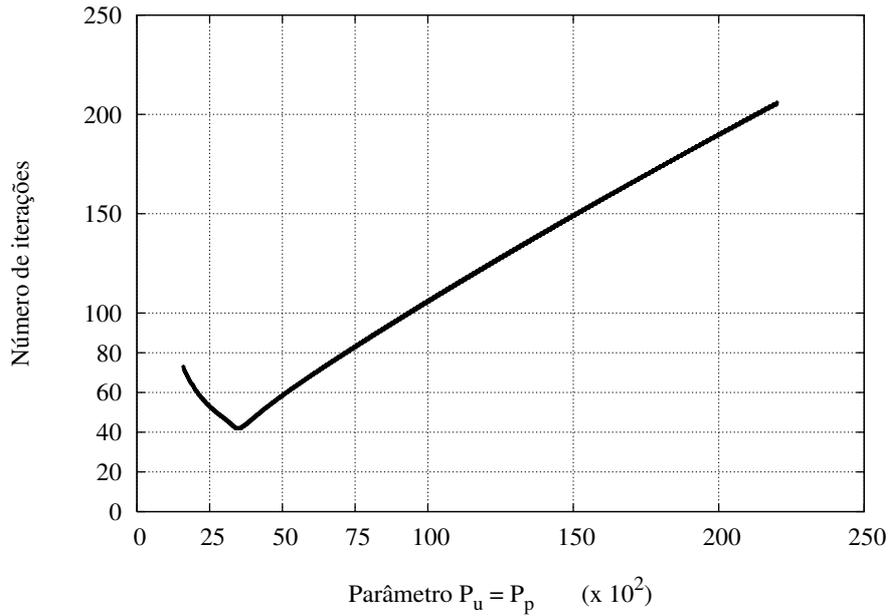


Figura 4.9: Número de iterações em função da variação do parâmetros  $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_p$  do **Algoritmo 1**, considerando uma barra com  $EI = 7000N \cdot m^2$ ,  $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por **Ini (1)** e foi utilizada uma malha uniforme com 20 elementos.

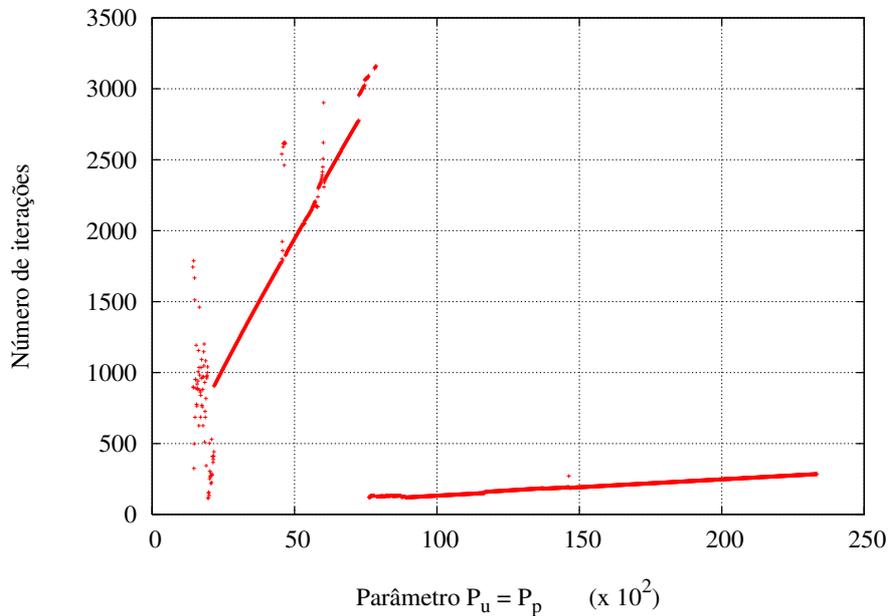


Figura 4.10: Número de iterações em função da variação do parâmetros  $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_p$  do **Algoritmo 1**, considerando uma barra com  $EI = 7000N \cdot m^2$ ,  $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5.0$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por **Ini (2)** e foi utilizada uma malha uniforme com 20 elementos.

| Número de elementos | Parâmetros $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p$ |                   |                   |                   |
|---------------------|--|-------------------|-------------------|-------------------|
|                     | $2.5 \times 10^3$                            | $4.0 \times 10^3$ | $6.7 \times 10^3$ | $8.9 \times 10^3$ |
| 10                  | 56   | 58                | 113               | 149               |
| 20                  | 140  | 62                | 82                | 90                |
| 30                  | —  | 84                | 95                | 119               |
| 40                  | —  | —                 | 90                | 120               |
| 50                  | —  | —                 | —                 | 115               |

Tabela 4.5: Número de iterações do **Algoritmo 1** em função do número de elementos e parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$ , considerando uma barra com  $EI = 7000N \cdot m^2$ ,  $GI = 3000N \cdot m^2$ , comprimento  $L = 32.6m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 9$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 75.0N/m$ . A inicialização do algoritmo foi dada por **Ini (1)**. A representação “—” caracteriza a não convergência do algoritmo

Na Tabela 4.5 apresentamos o número de iterações do algoritmo em função do número de elementos da malha e dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$ . Note que a convergência do algoritmo é totalmente influenciada pelo número de elementos da malha e pelo valor dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$ . Mais ainda, uma escolha ótima dos parâmetros do algoritmo para uma certa discretização da malha não quer dizer necessariamente que seja uma boa escolha para uma outra discretização. Como podemos observar na Tabela 4.5, o algoritmo pode convergir mais lentamente ou até mesmo não convergir, dependendo das escolhas realizadas.

### 4.8.3 Experimento 3: um problema com torção

O objetivo principal deste experimento é estudar o desempenho do modelo na presença de comportamento combinado de flexão e torção. Para isto, consideramos uma barra inicialmente reta, com as seguintes propriedades constitutivas e geométricas: rigidez à flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$ , rigidez à torção  $GI = 90daN \cdot m^2$  e

comprimento  $L = 20.0m$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(0) = 0. \\ \mathbf{r}_{o2}(0) = \mathbf{r}_{o3}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o1}(0) = \mathbf{r}'_{o2}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o3}(0) = 1. \\ \mathbf{d}_1(0) = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{d}_2(0) = -\mathbf{e}_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15. \\ \mathbf{r}_{o2}(L) = \mathbf{r}_{o3}(L) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o1}(L) = \mathbf{r}'_{o2}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o3}(L) = 1. \\ \mathbf{d}_1(L) = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{d}_2(L) = -\mathbf{e}_1. \end{array} \right\} \quad (4.40)$$

A estrutura está sujeita a uma força vertical distribuída ao longo de todo o seu comprimento com intensidade  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ . A malha de elementos finitos adotada consiste de 20 elementos uniformemente espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos para  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 15.0$  os valores  $\lambda_{ih}^0(S) = 0.$ ,  $\vartheta_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$ ,  $\vartheta_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$ ,  $\theta_1(L) = 2\pi$  e  $\theta_2(L) = \theta_3(L) = 0$ . Para  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 10., 5., 0.$ , consideramos  $\lambda_{ih}^0(S) = 0.$  e  $\vartheta_{1h}^{-1}(S)$ ,  $\vartheta_{2h}^{-1}(S)$  dadas pela solução do problema anterior. Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 4.0 \times 10^2$ .

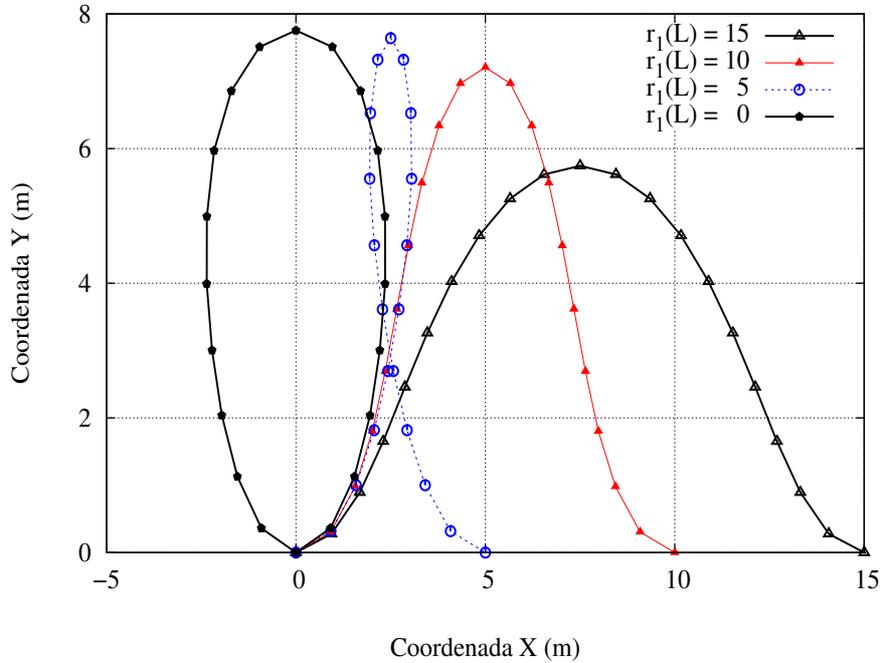


Figura 4.11: Projeções XY da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre.

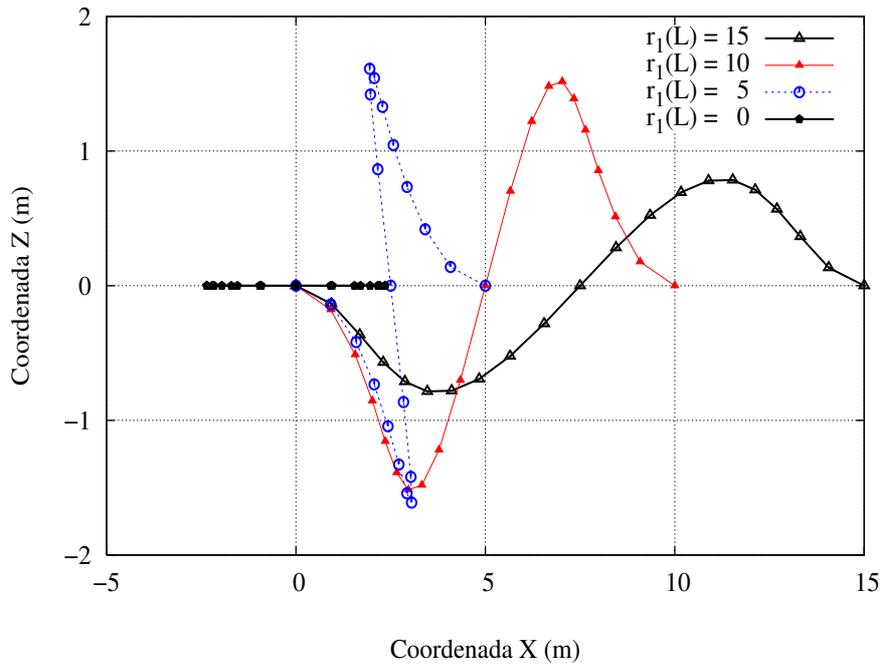


Figura 4.12: Projeções XZ da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $r_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre.

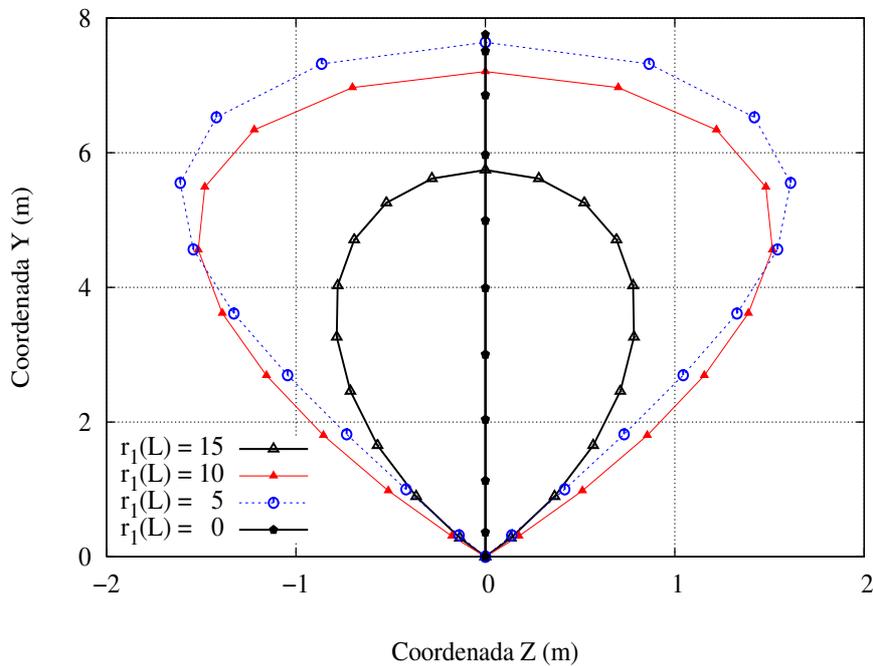


Figura 4.13: Projeções ZY da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $r_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre.

As Figuras (4.11–4.13) caracterizam as projeções nos planos  $[X,Y],[X,Z]$  e  $[Z,Y]$  das configurações deformadas da barra sujeita a um deslocamento na sua extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5., 10., 15.$ , uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre da barra. Note que a estrutura descreve uma configuração fora do plano para as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 5., 10., 15.$  e retorna a uma configuração no plano quando assume a posição  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0.0$ . Este comportamento é facilmente comprovado através de um simples experimento feito com um fio flexível. Se introduzirmos uma torção inicial nesse fio e aproximarmos suas extremidades gradativamente, podemos claramente constatar que as posições descritas por ele são aproximadamente as mesmas apresentadas nas Figuras (4.11–4.13). Para facilitar a visualização, apresentamos uma visão tridimensional desse experimento nas Figuras 4.14 e 4.15.

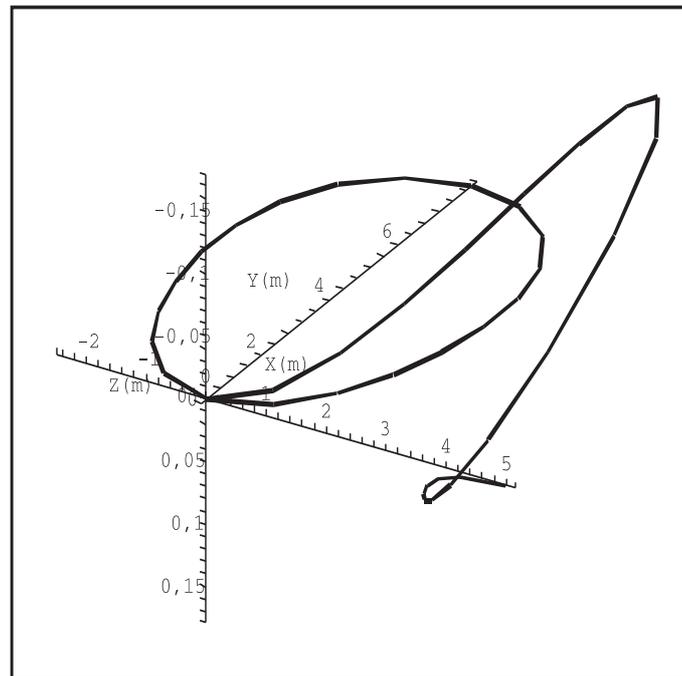


Figura 4.14: Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 0., 5.$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre.

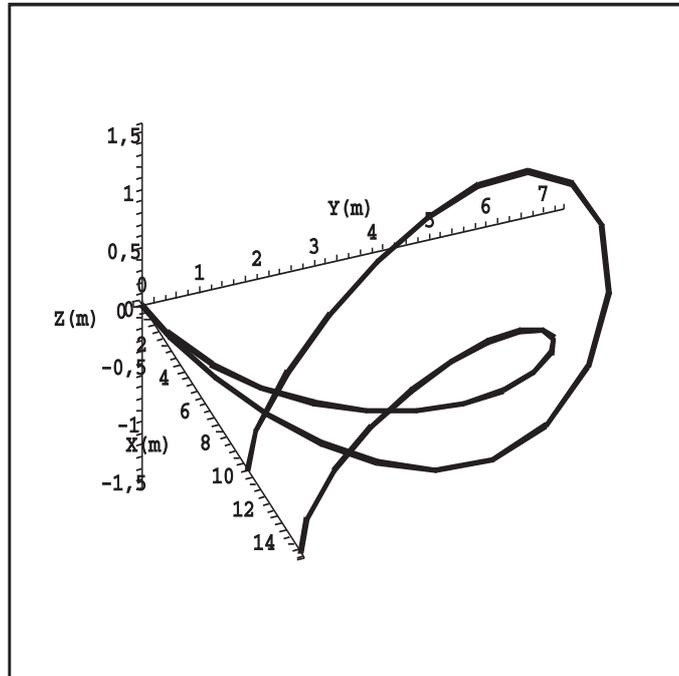


Figura 4.15: Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 10., 15.$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ , e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre.

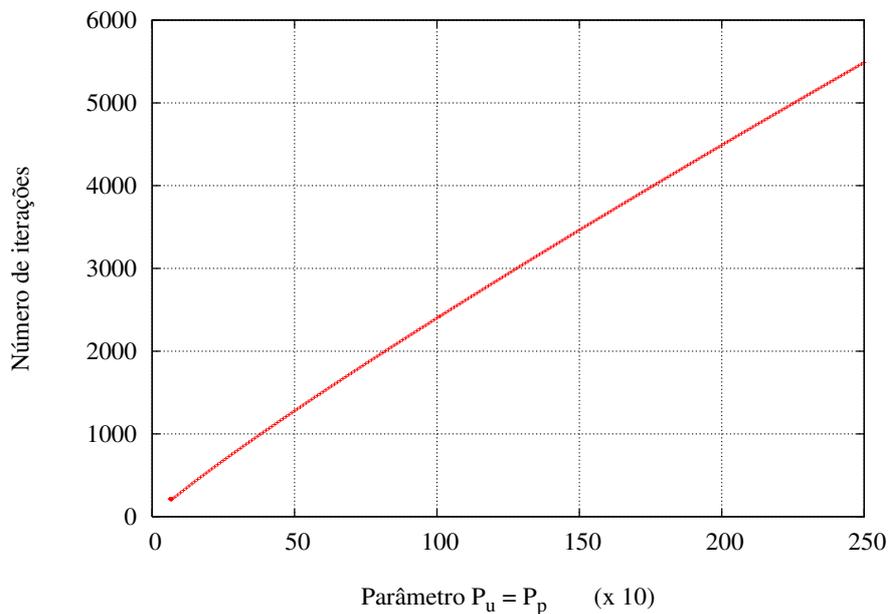


Figura 4.16: Número de iterações em função da variação do parâmetros  $p_u = p_p$  do **Algoritmo 1**, considerando uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 10.0$  e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ . Neste experimento foi utilizada uma malha uniforme com 20 elementos.

A Figura 4.16 representa o número de de iterações do algoritmo em função dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$ . Seu comportamento é semelhante ao apresentado no **caso (1)**, embora não apresente o intervalo em que o número de iterações decresce. O mais importante a se observar nesse gráfico é que apesar da estrutura ter seu comportamento descrito fora do plano as características de convergência a partir de um parâmetro específico e o comportamento linear entre os parâmetros e o número de iterações se conserva.

| $\mathbf{r}_{o1}$<br>( $m$ ) | Energia de deformação<br>( $daN \cdot m$ ) | Número de iterações |
|------------------------------|--|---------------------|
| 0                            | 130.2                                      | 182                 |
| 3                            | 139.5                                      | 950                 |
| 5                            | 151.5                                      | 3525                |
| 7                            | 183.2                                      | 2127                |
| 10                           | 202.0                                      | 1018                |
| 13                           | 207.5                                      | 670                 |
| 15                           | 207.0                                      | 546                 |
| 18                           | 198.1                                      | 424                 |
| 20                           | 178.0                                      | 13355               |

Tabela 4.6: Energia de deformação e número de iterações do **Algoritmo 1**, considerando uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ , condições de contorno (4.40) e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ .

Na Tabela 4.6 apresentamos a energia de deformação da barra e o número de iterações do algoritmo para cada uma das configurações obtidas. Na Tabela 4.7 apresentamos as componentes de torção e o módulo do momento torsor da barra nos nós da malha. Com exceção do caso correspondente a 13355 iterações, quando o tempo de processamento foi em torno de 4 segundos, em todos os experimentos o tempo de processamento em um Core 2 de  $1.86GHz$  e 64 bits foi em torno de um segundo.

|                   |  | Deformação $w_3 = \mathbf{d}'_1 \cdot \mathbf{d}_2$<br>(radianos/m) |         |         | Momento torsor $ \mathbf{m}_3 $<br>(daN · m) |        |        |
|-------------------|--|---|---------|---------|--|--------|--------|
| $\mathbf{r}_{o1}$ |  | 20m   | 15m     | 10m     | 20m  | 15m    | 10m    |
| Nó                |  |   |         |         |  |        |        |
| 1                 |  | 0.31272   | 0.26421 | 0.19358 | 56.290                                       | 47.557 | 34.844 |
| 3                 |  | 0.31286   | 0.27905 | 0.21203 | 56.314                                       | 50.228 | 38.166 |
| 5                 |  | 0.31286   | 0.27970 | 0.21334 | 56.314                                       | 50.345 | 38.401 |
| 7                 |  | 0.31286   | 0.27926 | 0.21264 | 56.314                                       | 50.266 | 38.276 |
| 9                 |  | 0.31286   | 0.27944 | 0.21207 | 56.315                                       | 50.299 | 38.172 |
| 11                |  | 0.31286   | 0.27964 | 0.21221 | 56.315                                       | 50.335 | 38.198 |
| 13                |  | 0.31286   | 0.27925 | 0.21221 | 56.314                                       | 50.265 | 38.197 |
| 15                |  | 0.31286   | 0.27946 | 0.21309 | 56.314                                       | 50.302 | 38.357 |
| 17                |  | 0.31286   | 0.27974 | 0.21319 | 56.314                                       | 50.354 | 38.373 |
| 19                |  | 0.31286   | 0.27573 | 0.20759 | 56.315                                       | 49.632 | 37.366 |
| 21                |  | 0.31272   | 0.26421 | 0.19358 | 56.290                                       | 47.558 | 34.844 |

Tabela 4.7: Deformação  $w_3$ , e momento torsor  $\mathbf{m}_3$  de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimentos  $L = 10., 15., 20.0m$ , condições de contorno (4.40) e sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$ .

#### 4.8.4 Experimento 4: um problema com restrição unilateral

O objetivo principal desse experimento é estudar o comportamento do algoritmo para a situação mais geral do modelo, isto é, quando a estrutura está sujeita simultaneamente a esforços combinados de flexão e torção, e a restrições unilaterais provenientes da presença de um obstáculo rígido. Para isso, consideramos uma barra inicialmente reta, com as seguintes propriedades constitutivas e geométricas: rigidez à flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$ , rigidez à torção  $GI = 90daN \cdot m^2$  e comprimento  $L = 20.0m$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(0) = 0. \\ \mathbf{r}_{o2}(0) = \mathbf{r}_{o3}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o1}(0) = \mathbf{r}'_{o2}(0) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o3}(0) = 1. \\ \mathbf{d}_1(0) = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{d}_2(0) = -\mathbf{e}_1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(L) = 18. \\ \mathbf{r}_{o2}(L) = \mathbf{r}_{o3}(L) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o1}(L) = \mathbf{r}'_{o2}(L) = 0. \\ \mathbf{r}'_{o3}(L) = 1. \\ \mathbf{d}_1(L) = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{d}_2(L) = -\mathbf{e}_1. \end{array} \right. \quad (4.41)$$

A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de  $50.0\text{cm}$  e eixo  $\mathbf{e}_3$ , e sujeita a uma força vertical distribuída ao longo de todo o seu comprimento com intensidade  $\bar{n}_2 = 5.0\text{daN}/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A malha de elementos finitos adotada consiste de 40 elementos uniformemente espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos para  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 20.0$  os valores  $\boldsymbol{\lambda}_{ih}^0(S) = 0.0$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$ ,  $\theta_1(L) = 2\pi$  e  $\theta_2(L) = \theta_3(L) = 0.0$ . Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 6.0 \times 10^3$ .

As Figuras (4.17–4.19) caracterizam as projeções nos planos  $[X,Y],[X,Z]$  e  $[Z,Y]$ , das configurações deformadas da barra. Observe que devido à torção inicial aplicada à barra, sua geometria tende a descrever a forma de um laço como no experimento anterior. Entretanto, devido a sua interação com o cilindro e conseqüentemente a influência das forças de reação que surgem, a estrutura tem sua configuração final modificada para uma geometria que muito se assemelha a dois passos de uma hélice. Uma representação tridimensional é apresentada pela Figura 4.20.

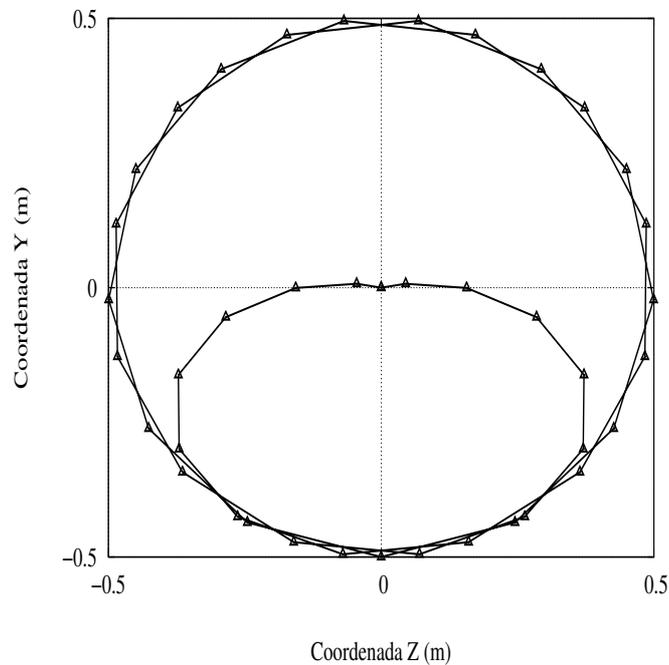


Figura 4.17: Projeções ZY da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100\text{daN} \cdot m^2$ ,  $GI = 90\text{daN} \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0\text{daN}/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de  $50\text{cm}$  e eixo  $\mathbf{e}_3$ .

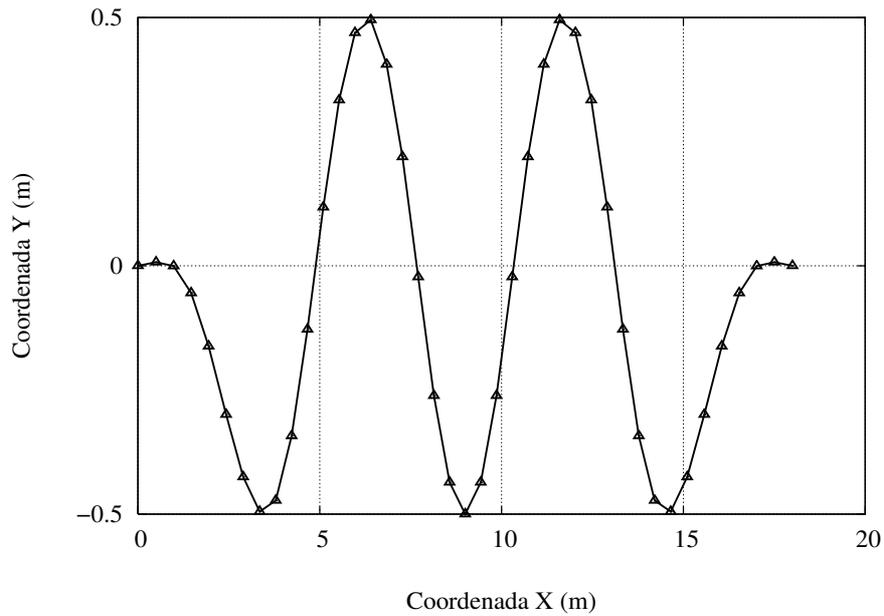


Figura 4.18: Projeções XY da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $r_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5daN/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo  $e_3$

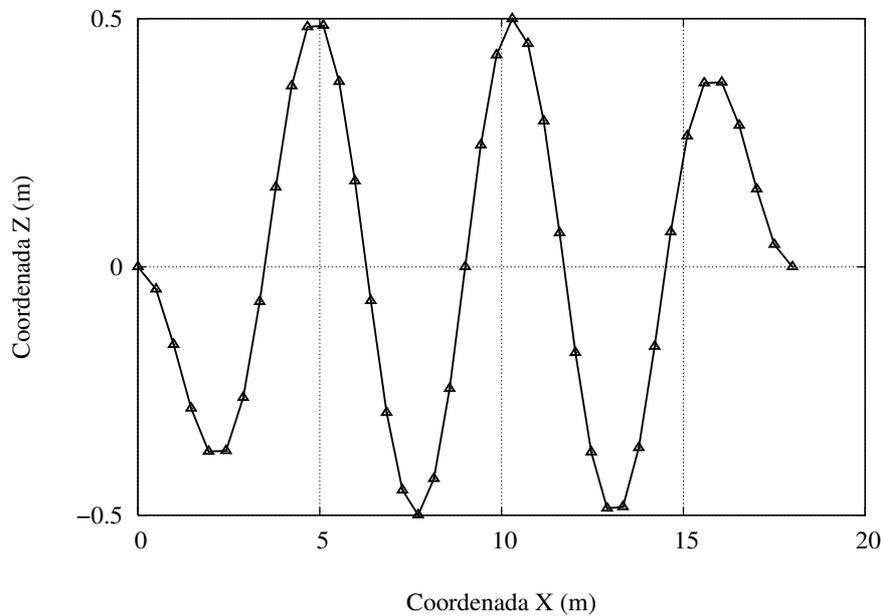


Figura 4.19: Projeções XZ da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $r_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo  $e_3$ .

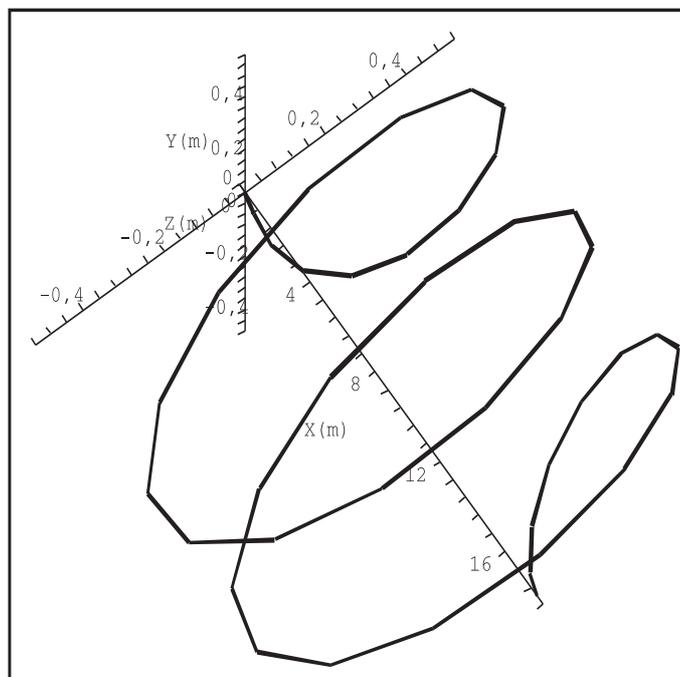


Figura 4.20: Visão 3D da configuração deformada de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo  $\mathbf{e}_3$ .

Para essa configuração, a energia de deformação obtida foi de  $282.7daN \cdot m$  e os esforços resultantes em alguns nós da malha são aqueles apresentados na Tabela 4.8. A Figura 4.21 representa o número de iterações do algoritmo em função da variação dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p$ . Note que a presença do obstáculo causou uma maior sensibilidade nas escolhas dos parâmetros do algoritmo. Entretanto, as características do seu comportamento ainda se assemelha bastante com os casos apresentados anteriormente. Para a realização deste experimento fez-se necessário 7067 iterações do algoritmo e um tempo de processamento aproximadamente igual a 2 minutos.

| Nó | Esforço $ m_1 $<br>( $daN \cdot m$ ) | Esforço $ m_2 $<br>( $daN \cdot m$ ) | Esforço $ m_3 $<br>( $daN \cdot m$ ) |
|----|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1  | $-0.33992 \times 10^2$               | $-0.45542 \times 10^1$               | $-0.39011 \times 10^2$               |
| 3  | $-0.14960 \times 10^1$               | $0.22340 \times 10^2$                | $-0.38453 \times 10^2$               |
| 5  | $0.32820 \times 10^2$                | $0.25509 \times 10^2$                | $-0.38601 \times 10^2$               |
| 7  | $0.40731 \times 10^2$                | $-0.40084 \times 10^1$               | $-0.39145 \times 10^2$               |
| 9  | $0.28138 \times 10^2$                | $-0.37942 \times 10^2$               | $-0.38660 \times 10^2$               |
| 11 | $-0.36524 \times 10^1$               | $-0.48371 \times 10^2$               | $-0.38219 \times 10^2$               |
| 13 | $-0.31013 \times 10^2$               | $-0.36072 \times 10^2$               | $-0.38621 \times 10^2$               |
| 15 | $-0.46269 \times 10^2$               | $-0.10506 \times 10^2$               | $-0.39030 \times 10^2$               |
| 17 | $-0.45530 \times 10^2$               | $0.18211 \times 10^2$                | $-0.39064 \times 10^2$               |
| 19 | $-0.25297 \times 10^2$               | $0.44729 \times 10^2$                | $-0.38454 \times 10^2$               |
| 21 | $0.91794 \times 10^1$                | $0.50954 \times 10^2$                | $-0.38194 \times 10^2$               |
| 23 | $0.37676 \times 10^2$                | $0.33423 \times 10^2$                | $-0.38779 \times 10^2$               |
| 25 | $0.48036 \times 10^2$                | $0.33710 \times 10^1$                | $-0.39005 \times 10^2$               |
| 27 | $0.40170 \times 10^2$                | $-0.24600 \times 10^2$               | $-0.38868 \times 10^2$               |
| 29 | $0.19290 \times 10^2$                | $-0.44049 \times 10^2$               | $-0.38408 \times 10^2$               |
| 31 | $-0.13506 \times 10^2$               | $-0.47224 \times 10^2$               | $-0.38280 \times 10^2$               |
| 33 | $-0.37117 \times 10^2$               | $-0.20220 \times 10^2$               | $-0.39109 \times 10^2$               |
| 35 | $-0.40243 \times 10^2$               | $0.15948 \times 10^2$                | $-0.38926 \times 10^2$               |
| 37 | $-0.17701 \times 10^2$               | $0.27783 \times 10^2$                | $-0.38374 \times 10^2$               |
| 39 | $0.20211 \times 10^2$                | $0.10620 \times 10^2$                | $-0.38758 \times 10^2$               |
| 41 | $0.33992 \times 10^2$                | $-0.45542 \times 10^1$               | $-0.39011 \times 10^2$               |

Tabela 4.8: Esforços resultantes de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo  $\mathbf{e}_3$ .

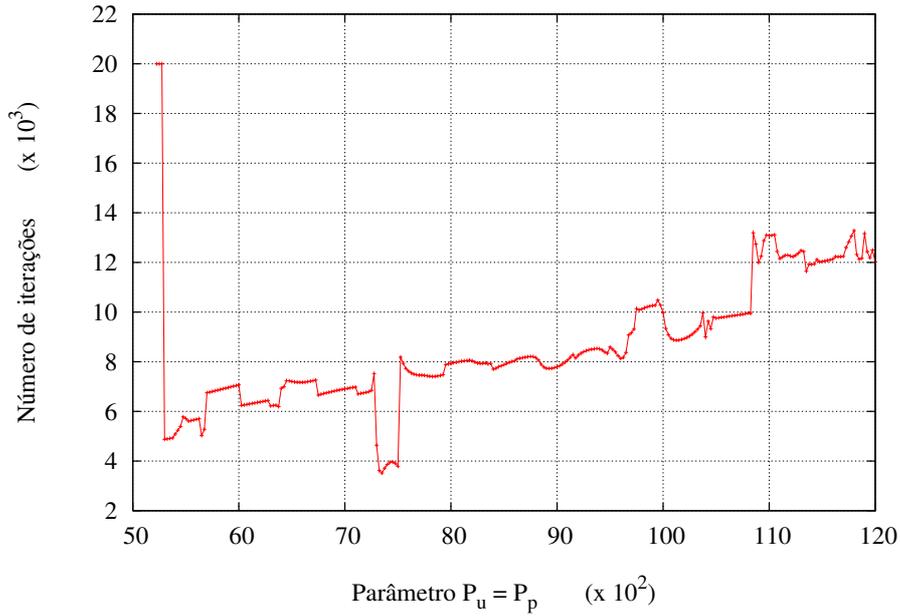


Figura 4.21: Número de iterações em função da variação dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p$ , considerando uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20.0m$ ,  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 18.0$ , sujeita a uma força vertical distribuída  $\bar{n}_2 = 5.0daN/m$  e uma torção de  $2\pi$  na extremidade livre. A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com raio de 50cm e eixo  $\mathbf{e}_3$ . Neste experimento foi utilizada uma malha uniforme com 40 elementos.

# Capítulo 5

## Modelos em pequenos deslocamentos

Nos capítulos anteriores apresentamos modelos fortemente não-lineares para estruturas unidimensionais no espaço tridimensional. Aqueles modelos são bastante complexos e podem apresentar, inclusive, não unicidade de solução. Naqueles casos a análise global tanto dos problemas contínuos associados quanto das suas aproximações por elementos finitos, tornam-se extremamente difíceis ou mesmo impossíveis de serem realizadas. Entenda por análise global aquela feita para contemplar todas as configurações possíveis do modelo.

Buscando viabilizar uma análise para esses tipos de modelos, introduzimos algumas hipóteses restritivas adicionais. Sendo assim, desprezamos as forças inerciais e realizamos uma linearização de forma consistente das deformações do modelo geral, em torno da sua configuração de referência, livre de esforços, produzindo um modelo descrito no espaço tridimensional em regime de pequenos deslocamentos e deformações. Para este modelo apresentamos uma formulação variacional cinemática, desenvolvida a partir do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) e uma formulação variacional mista, construída a partir do princípio de Hellinger-Reissner, onde as variáveis independentes são os esforços generalizados (momentos, cortantes e esforços axiais) e os deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações). Neste capítulo, estabelecemos condições suficientes para existência e unicidade de solução para os problemas resultantes.

## 5.1 Linearizações do modelo geral

Para obter as equações que regem o modelo em regime de pequenos deslocamentos e deformações, introduzimos nessa seção uma linearização de forma consistente das deformações do modelo descrito no Capítulo 2. Como foi discutido na seção (2.5), as deformações especializadas para o modelo de barra com a cinemática estabelecida por (2.16) são descritas pelos vetores

$$\boldsymbol{\varepsilon}(S) = \frac{d\mathbf{r}_o(S)}{dS} - \mathbf{d}_3(S) \quad (5.1)$$

e,  $\boldsymbol{\omega}(S)$ , vetor axial do operador antisimétrico

$$\boldsymbol{\Omega}(S) = \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S) \boldsymbol{\Lambda}^T(S). \quad (5.2)$$

Para fazer a caracterização da forma linearizada do campo de deformação  $\boldsymbol{\omega}(S)$ , inicialmente foi explorada sua representação dada por (5.2) e utilizado o processo de linearização apresentado em MARSDEN & HUGHES [1994] e BONET & WOOD [1997]. Subseqüentemente, o operador  $\boldsymbol{\omega}$  é estabelecido através da relação intrínseca que possui com  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Por esse processo de linearização temos que a forma linearizada do operador  $\boldsymbol{\Omega}(S)$  é expressa por

$$L(\boldsymbol{\Omega}(S), \boldsymbol{\Theta}) = \mathcal{D}\boldsymbol{\Omega}(S) \cdot \boldsymbol{\Theta},$$

onde

$$\mathcal{D}\boldsymbol{\Omega}(S) \cdot \boldsymbol{\Theta} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \boldsymbol{\Omega}^\varrho(S), \quad (5.3)$$

é a derivada direcional de  $\boldsymbol{\Omega}(S)$  na direção  $\boldsymbol{\Theta}(S)$ . O operador  $\boldsymbol{\Omega}^\varrho(S)$  descreve o campo  $\boldsymbol{\Omega}(S)$  sujeito a uma pequena perturbação, cuja representação é dada por

$$\boldsymbol{\Omega}^\varrho(S) = \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}^\varrho(S) [\boldsymbol{\Lambda}^\varrho]^T(S), \quad (5.4)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}^\varrho(S) = \exp(\varrho \mathbf{\Theta}(S))\mathbf{\Lambda}(S)$$

é o mesmo operador definido em (3.9). Observe que novamente é necessário cuidado em manter a rotação perturbada  $\mathbf{\Lambda}^\varrho$  no grupo das rotações  $SO_3$ . Lembrando que  $\mathbf{\Theta}(S)$  é antisimétrico e que  $\mathbf{\Lambda}^T(S) = \exp(-\mathbf{\Theta}(S))$ , podemos reescrever a relação (5.4) da seguinte forma

$$\mathbf{\Omega}^\varrho(S) = \frac{d}{dS}[\exp(\varrho \mathbf{\Theta})] \exp(-\varrho \mathbf{\Theta}) + \exp(\varrho \mathbf{\Theta})\mathbf{\Omega} \exp(-\varrho \mathbf{\Theta}). \quad (5.5)$$

Observe no primeiro termo do lado direito dessa relação que há a necessidade do cálculo da derivada da exponencial de  $\mathbf{\Theta}(S)$ . O desenvolvimento do cálculo dessa operação está apresentado no Anexo D.3 onde utilizamos a clássica relação conhecida por fórmula de Rodrigues e expressa como

$$\exp(\mathbf{\Theta}) = \left[ \mathbf{I} + \frac{2}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} (\overline{\boldsymbol{\Theta}} + \overline{\boldsymbol{\Theta}}^2) \right], \quad (5.6)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^3$  é o vetor axial de  $\overline{\boldsymbol{\Theta}} : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$ , obtido com a introdução da parametrização

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\text{tg}(\|\boldsymbol{\phi}\|/2)}{\|\boldsymbol{\phi}\|/2} \boldsymbol{\phi} \quad (5.7)$$

na caracterização do operador  $\mathbf{\Lambda}(S)$  descrito no Anexo D.2. Na relação acima,  $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{R}^3$  é um vetor com componentes  $\phi_i$ , representando pequenas rotações. Com essas definições, conseguimos a seguinte relação para o primeiro termo do lado direito de (5.5)

$$\left( \frac{d}{dS} \exp(\mathbf{\Theta}) \right) \exp(-\mathbf{\Theta}) = \frac{2}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} \left[ \overline{\boldsymbol{\Theta}'} + \overline{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}'} - \overline{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{\Theta}} \right]. \quad (5.8)$$

Substituindo  $\mathbf{\Theta}(S)$  por  $\varrho \mathbf{\Theta}(S)$  em (5.8),  $\boldsymbol{\phi}(S)$  por  $\varrho \boldsymbol{\phi}(S)$  em (5.7), calculando a

derivada em relação a  $\varrho$  e fazendo o limite quando  $\varrho \mapsto 0$ , temos que

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \left[ \left( \frac{d}{dS} \exp(\varrho \Theta) \right) \exp(-\varrho \Theta) \right] = \Theta'. \quad (5.9)$$

Realizando também o cálculo da derivada em relação a  $\varrho$  e aplicando o limite quando  $\varrho \mapsto 0$  na segunda parcela do lado direito da relação (5.5), temos que (5.3) pode ser expressa por

$$\mathcal{D}\Omega(S) \cdot \Theta = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \Omega^\varrho(S) = \Theta' + \Theta\Omega - \Omega\Theta. \quad (5.10)$$

Para representar o resultado acima em termo dos vetores axiais  $\omega$  e  $\phi$ , faremos uso da seguinte relação

$$[\mathcal{D}\Omega(S) \cdot \Theta] a = (\mathcal{D}\omega(S) \cdot \phi) \times a. \quad (5.11)$$

Como

$$[\Theta' + \Theta\Omega - \Omega\Theta] a = (\phi' + \phi \times \omega) \times a, \quad (5.12)$$

temos que a representação da derivada direcional em relação aos vetores axiais é identificada por

$$\mathcal{D}\omega(S) \cdot \phi = \phi'(S) + \phi(S) \times \omega(S). \quad (5.13)$$

Note que na relação acima ambos os termos do lado direito são lineares em relação a  $\phi(S)$ . Entretanto, como estamos interessados apenas em pequenas deformações, a segunda parcela é eliminada devido ao termo  $\omega(S)$ , obtendo assim

$$\mathcal{D}\omega(S) \cdot \phi = \phi'(S). \quad (5.14)$$

Resta agora determinar a forma linearizada do operador  $\varepsilon(S)$ . Para isso, seguimos as mesmas idéias apresentadas no cálculo anterior. A forma linearizada

de  $\boldsymbol{\varepsilon}(S)$  nas direções  $\mathbf{q}_o(S)$  e  $\mathbf{g}_3(S)$  é dada por

$$L\left(\boldsymbol{\varepsilon}(S), (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_3)\right) = \mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon}(S) \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_3),$$

onde

$$\mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon}(S) \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_3) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \boldsymbol{\varepsilon}^\varrho(S) \quad (5.15)$$

é a derivada direcional de  $\boldsymbol{\varepsilon}(S)$  nas direções  $\mathbf{q}_o(S)$  e  $\mathbf{g}_3(S)$ . Sua representação perturbada é definida por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\varrho(S) = \frac{d}{dS}(\mathbf{r}_o(S) + \varrho \mathbf{q}_o(S)) - (\mathbf{d}_3(S) + \varrho \mathbf{g}_3(S)).$$

Calculando a derivada em relação a  $\varrho$  e aplicando o limite quando  $\varrho \mapsto 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon}(S) \cdot (\mathbf{q}_o, \mathbf{g}_i) &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} \boldsymbol{\varepsilon}^\varrho(S) = \frac{d\mathbf{q}_o}{dS} - \mathbf{g}_3(S) = \frac{d\mathbf{q}_o}{dS} - \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{d}_3, \\ &= \frac{d\mathbf{q}_o}{dS} - \boldsymbol{\phi} \times \frac{d\mathbf{r}_o}{dS}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pelas relações (5.14) e (5.16) temos que as formas linearizadas dos campos não-lineares  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são dadas respectivamente por

$$\boldsymbol{\omega}^{lin}(S) = \boldsymbol{\phi}'(S), \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{lin}(S) = \mathbf{q}'_o(S) - \boldsymbol{\phi}(S) \times \mathbf{R}'_o(S). \quad (5.18)$$

A partir das equações acima e do princípio dos trabalhos virtuais, podemos construir todo o modelo que descreve o comportamento de uma barra no espaço tridimensional em regime de pequenos deslocamentos e deformações.

## 5.2 As fórmulas de Serret-Frenet

Na Seção 2.3, caracterizamos as derivadas espaciais da base intrínseca do modelo, obtendo a seguinte expressão

$$\frac{\partial}{\partial S}\mathbf{E}_i(S) = \boldsymbol{\omega}(S) \wedge \mathbf{E}_i(S), \quad (5.19)$$

onde o vetor axial  $\boldsymbol{\omega}(S)$  é dado por

$$\boldsymbol{\omega}(S) = \omega_1(S)\mathbf{E}_1(S) + \omega_2(S)\mathbf{E}_2(S) + \omega_3(S)\mathbf{E}_3(S). \quad (5.20)$$

Embora pudéssemos manter essa mesma relação, preferimos introduzir neste capítulo as funções de Serret-Frenet que relacionam as derivadas dos vetores da base intrínseca, com eles próprios, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1(S) &= -\mu(S)\mathbf{E}_2(S) + \kappa(S)\mathbf{E}_3(S), \\ \mathbf{E}'_2(S) &= \mu(S)\mathbf{E}_1(S), \\ \mathbf{E}'_3(S) &= -\kappa(S)\mathbf{E}_1(S). \end{aligned}$$

Esta modificação tem o intuito de fazer com que as notações adotadas possam coincidir diretamente com as notações adotadas em trabalhos clássicos da área, associados a estruturas planas, tornando com isso o entendimento mais claro. Nas expressões acima  $\kappa(S) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{R}$  é a função geométrica curvatura, que mede a taxa de variação do vetor tangente em  $S$  e  $\mu(S) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{R}$  a função geométrica torção, que mede a taxa de variação do plano osculante (plano formado pelos vetores  $\mathbf{E}_3$  e  $\mathbf{E}_1$ ) em  $S$ . Em função da torção e da curvatura, o vetor axial é escrito como

$$\boldsymbol{\omega}(S) = -\kappa(S)\mathbf{E}_2(S) - \mu(S)\mathbf{E}_3(S). \quad (5.21)$$

Uma vez introduzidas essas definições, apresentamos a seguir a notação utilizada para escrever a derivada de uma dada função em relação à base intrínseca.

Sendo  $\boldsymbol{\phi}(S)$  uma função vetorial com componentes na base intrínseca dadas por  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , temos que

$$\boldsymbol{\phi}(S) = \phi_1 \mathbf{E}_1 + \phi_2 \mathbf{E}_2 + \phi_3 \mathbf{E}_3 \quad (5.22)$$

e a sua derivada dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}'(s) &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\phi}}(S) + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\phi} \\ &= (\phi'_1 + \kappa \phi_3 - \mu \phi_2) \mathbf{E}_1 + (\phi'_2 + \mu \phi_1) \mathbf{E}_2 + (\phi'_3 - \kappa \phi_1) \mathbf{E}_3, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\phi}}(S) = \phi'_1 \mathbf{E}_1 + \phi'_2 \mathbf{E}_2 + \phi'_3 \mathbf{E}_3, \quad (5.24)$$

$\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3$  representam as derivadas das componentes do vetor  $\boldsymbol{\phi}$  em relação ao comprimento de arco  $S$  e

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu(S) & \kappa(S) \\ \mu(S) & 0 & 0 \\ -\kappa(S) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 5.3 O modelo linearizado

Uma vez introduzida a linearização das funções de deformações, temos que o modelo linearizado da estrutura flexível unidimensional no espaço tridimensional pode ser caracterizado matematicamente através do seguinte problema:

**Problema A:** Sendo  $S \in \mathcal{I}$ , dados  $\bar{\mathbf{n}}(S) = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$ ,  $\bar{\mathbf{m}}(S) = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ , encontrar  $\mathbf{q}_o = (q_{o1}, q_{o2}, q_{o3})$ ,  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  e  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , satisfazendo

### Equações de equilíbrio

$$-\mathbf{m}'(S) + \mathbf{n}(S) \wedge \mathbf{R}'_o(S) = \bar{\mathbf{m}}(S), \quad (5.25)$$

$$-\mathbf{n}'(S) = \bar{\mathbf{n}}(S). \quad (5.26)$$

### Equações cinemáticas

$$\boldsymbol{\omega}^{lin}(S) = \boldsymbol{\phi}'(S), \quad (5.27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{lin}(S) = \mathbf{q}'_o(S) - \boldsymbol{\phi}(S) \wedge \mathbf{R}'_o(S). \quad (5.28)$$

### Equações constitutivas

$$\mathbf{m}(S) = \bar{\mathbf{E}}_\theta \boldsymbol{\omega}^{lin}(S) \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{n}(S) = \bar{\mathbf{E}}_u \boldsymbol{\varepsilon}^{lin}(S) \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad (5.30)$$

onde

$$\bar{\mathbf{E}}_\theta = \text{diag}(EI_1, EI_2, GJ),$$

$$\bar{\mathbf{E}}_u = \text{diag}(Gk_1A, Gk_2A, EA),$$

são especializações do tensor de elasticidade para estruturas unidimensionais, e  $k_1$  e  $k_2$  os coeficientes de correção para reconhecer a distribuição não uniforme da tensão cisalhante em relação ao eixo  $\mathbf{E}_1(S)$  e  $\mathbf{E}_2(S)$ , respectivamente.

### Condições de contorno

$$\mathbf{q}_o(0) = \mathbf{q}_o^0, \quad \mathbf{q}_o(L) = \mathbf{q}_o^l, \quad (5.31)$$

$$\boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\phi}^0, \quad \boldsymbol{\phi}(L) = \boldsymbol{\phi}^l. \quad (5.32)$$

É importante frisar que as equações que descrevem o **Problema A** apresentam coeficientes com diferentes ordens de grandezas geométricas. Para melhor explicitar a relação entre esses coeficientes, introduzimos as seguintes adimensio-

nalizações das variáveis envolvidas:

$$u_1 = \frac{q_{o1}}{L}, \quad u_2 = \frac{q_{o2}}{L}, \quad u_3 = \frac{q_{o3}}{L}, \quad \theta_1 = \phi_1, \quad \theta_2 = \phi_2, \quad \theta_3 = \phi_3,$$

$$\sigma_{u1} = \frac{n_1 L^2}{EI_1}, \quad \sigma_{u2} = \frac{n_2 L^2}{EI_1}, \quad \sigma_{u3} = \frac{n_3 L^2}{EI_1}, \quad \sigma_{\theta1} = \frac{m_1 L}{EI_1}, \quad \sigma_{\theta2} = \frac{m_2 L}{EI_1}, \quad \sigma_{\theta3} = \frac{m_3 L}{EI_1}$$

$$f_{u1} = \frac{\bar{n}_1 L^3}{EI_1}, \quad f_{u2} = \frac{\bar{n}_2 L^3}{EI_1}, \quad f_{u3} = \frac{\bar{n}_3 L^3}{EI_1}, \quad f_{\theta1} = \frac{\bar{m}_1 L^2}{EI_1}, \quad f_{\theta2} = \frac{\bar{m}_2 L^2}{EI_1}, \quad f_{\theta3} = \frac{\bar{m}_3 L^2}{EI_1},$$

onde os parâmetros geométricos e constitutivos são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{I_1}{L^2 A}, \quad \chi_a^2 = \frac{E}{Gk_1}, \quad \chi_b^2 = \frac{E}{Gk_2}, \\ \chi_c^2 &= \frac{EI_1}{GJ}, \quad \chi_d^2 = \frac{I_1}{I_2}. \end{aligned}$$

Note que à medida que a estrutura torna-se mais esbelta (comprimento cada vez maior que uma medida característica da seção transversal), o parâmetro  $\varepsilon^2$  adquire valores cada vez menores ( $\varepsilon^2 \ll 1$ ) e os parâmetros  $\chi_a^2, \chi_b^2, \chi_c^2$  e  $\chi_d^2$  aproximam-se cada vez mais da unidade. Uma vez adimensionalizado com as definições anteriores, o **Problema A** passa a ser escrito como

**Problema B:** Sendo  $S \in [0, 1]$  e dados  $\mathbf{f}_u(S) = (f_{u1}, f_{u2}, f_{u3})$  e  $\mathbf{f}_\theta(S) = (f_{\theta1}, f_{\theta2}, f_{\theta3})$ ,

encontrar  $\mathbf{u}(S) = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\boldsymbol{\theta}(S) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_u(S) = (\sigma_{u1}, \sigma_{u2}, \sigma_{u3})$  e

$\boldsymbol{\sigma}_\theta(S) = (\sigma_{\theta1}, \sigma_{\theta2}, \sigma_{\theta3})$ , satisfazendo

**Equações de equilíbrio**

$$-\boldsymbol{\sigma}'_\theta(S) + \boldsymbol{\sigma}_u(S) \wedge \mathbf{E}_3(S) = \mathbf{f}_\theta(S), \quad (5.33)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}'_u(S) = \mathbf{f}_u(S). \quad (5.34)$$

## Equações constitutivas

$$\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\sigma}_\theta(S) = \boldsymbol{\theta}'(S), \quad (5.35)$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_u \boldsymbol{\sigma}_u(S) = \mathbf{u}'(S) - \boldsymbol{\theta}(S) \wedge \mathbf{E}_3(S). \quad (5.36)$$

## Condições de contorno

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}(L) = \mathbf{u}^l, \quad (5.37)$$

$$\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}^0, \quad \boldsymbol{\theta}(L) = \boldsymbol{\theta}^l, \quad (5.38)$$

onde

$$\mathbf{E}_\theta = \text{diag}(1, \chi_d^2, \chi_c^2), \quad (5.39)$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_u = \varepsilon^2 \mathbf{E}_u, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{E}_u = \text{diag}(\chi_a^2, \chi_b^2, 1). \quad (5.41)$$

Utilizando as equações constitutivas podemos escrever as equações de equilíbrio em termos apenas de deslocamentos generalizados. Neste caso o **Problema B** passa a ter a seguinte forma:

**Problema C:** Sendo  $S \in [0, 1]$  e dados  $\mathbf{f}_u(S)$  e  $\mathbf{f}_\theta(S)$ , encontrar  $\mathbf{u}(S)$  e  $\boldsymbol{\theta}(S)$ , satisfazendo

## Equações de equilíbrio

$$-(\mathbf{E}_\theta^{-1} \boldsymbol{\theta}'(S))' + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}_u^{-1} [\mathbf{u}'(S) - \boldsymbol{\theta}(S) \wedge \mathbf{E}_3(S)] \wedge \mathbf{E}_3(S) = \mathbf{f}_\theta(S) \quad (5.42)$$

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}_u^{-1} [\mathbf{u}'(S) - \boldsymbol{\theta}(S) \wedge \mathbf{E}_3(S)]\right)' = \mathbf{f}_u(S). \quad (5.43)$$

## Condições de contorno

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}(L) = \mathbf{u}^l, \quad (5.44)$$

$$\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}^0, \quad \boldsymbol{\theta}(L) = \boldsymbol{\theta}^l. \quad (5.45)$$

O **Problema B**, caracterizado pelo sistema de equações diferenciais adimensionalizadas (5.33 – 5.41), e o **Problema C**, pelo sistema de equações (5.42 – 5.45), descrevem o comportamento mais geral de uma estrutura flexível unidimensional no espaço tridimensional em regime de pequenos deslocamentos e deformações. Visando viabilizar a análise matemática e numérica do método de elementos finitos estabilizado introduzido nas seções subseqüentes, consideramos a estrutura engastada em uma de suas extremidades e livre na outra. Estas foram as mesmas condições adotadas por LOULA *et al* [1987a] para o problema do arco plano. Naquele trabalho, eles observavam, para o problema do arco plano, que embora a análise da formulação estivesse dependente destas condições de contorno, os experimentos numéricos mostravam que as situações mais gerais eram perfeitamente contempladas. Confirmamos este comportamento em experimentos numéricos para geometrias mais gerais.

Note que o **Problema B** é formulado em esforços e deslocamentos generalizados ao passo que o **Problema C** é formulado unicamente em deslocamentos generalizados. Ambos os problemas dependem do parâmetro geométrico  $\varepsilon^2$  (equações (5.40 e 5.43)), o qual expressa uma relação entre as dimensões da seção transversal e o comprimento da estrutura. No caso de uma seção transversal retangular, por exemplo, com espessura  $h_s$  e comprimento  $L$ , temos  $\varepsilon^2 = \frac{1}{12} \left( \frac{h_s}{L} \right)^2$  e à medida que a estrutura se torna mais esbelta ( $h_s \mapsto 0$ ), essa relação se torna cada vez menor. É bem sabido que aproximações por elementos finitos de Galerkin baseadas em formulações cinemáticas apresentam instabilidades quando  $\varepsilon^2 \ll 1$ .

Na seção seguinte, apresentamos a formulação variacional cinemática do modelo com o intuito de identificar e entender as conseqüências destas instabilidades. Para superar tais dificuldades, introduzimos uma formulação mista baseada no

princípio de Hellinger-Reissner onde as variáveis primais são os esforços generalizados e os multiplicadores de Lagrange são os deslocamentos generalizados.

#### 5.4 Formulações variacionais

Seja

$$\mathbb{Q} = L_2(0, 1) \quad (5.46)$$

o espaço de funções escalares de quadrado integrável no sentido de Lebesgue e

$$\mathbb{S} = \{v; v \in H^1(0, 1), v(0) = 0\} \quad (5.47)$$

o espaço de Hilbert, sendo  $H^1(0, 1)$  definido por (2.79) fazendo  $m = 1$ .

Com essas definições, identificamos os espaços produto  $\mathbb{Q}^3 = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$  e  $\mathbb{S}^3 = (\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S})$  com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_0^1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dS, \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{Q}^3, \quad (5.48)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_0^1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \, dS, \quad \|\mathbf{v}\|_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_1^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3. \quad (5.49)$$

No espaço  $\mathbb{S}^3$ , definimos ainda a seminorma

$$|\mathbf{v}|_1 = (\mathbf{v}', \mathbf{v}')^{\frac{1}{2}}, \quad (5.50)$$

cuja equivalência à norma  $\|\cdot\|_1$  é garantida através do seguinte resultado:

**Lema 1** No espaço vetorial  $\mathbb{S}^3$ , a seminorma  $|\cdot|_1$  e a norma  $\|\cdot\|_1$  são equivalentes.

**Prova.**

A norma  $\|\cdot\|_1$  e a seminorma  $|\cdot|_1$  no espaço vetorial  $\mathbb{S}^3$  são equivalentes se e somente se, existem constantes  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  tais que

$$c_1 \|\mathbf{v}\|_1 \leq |\mathbf{v}|_1 \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3. \quad (5.51)$$

A existência da constante  $c_1$ , que satisfaz à primeira desigualdade, é provada através do **Lema 2** e a existência da constante  $c_2$ , que satisfaz à segunda desigualdade, pelo **Lema 3** apresentados a seguir. ■

**Lema 2** Seja  $|\cdot|_1$  a seminorma (5.50) e  $\|\cdot\|_1$  a norma usual em  $\mathbb{S}^3$  (5.49). Existe uma constante  $c_1 > 0$  tal que

$$|\mathbf{v}|_1^2 \geq c_1 \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3. \quad (5.52)$$

**Prova.** Para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^3$  temos pelas equações (5.23) e (5.50) que

$$|\mathbf{v}|_1^2 = \|v'_1 + \kappa v_3 - \mu v_2\|^2 + \|v'_2 + \mu v_1\|^2 + \|v'_3 - \kappa v_1\|^2. \quad (5.53)$$

Fazendo as transformações

$$w_1 = v'_1 + \kappa v_3 - \mu v_2 \quad \forall w_1 \in \mathbb{Q}, \quad (5.54)$$

$$w_2 = v'_2 + \mu v_1 \quad \forall w_2 \in \mathbb{Q}, \quad (5.55)$$

$$w_3 = v'_3 - \kappa v_1 \quad \forall w_3 \in \mathbb{Q}, \quad (5.56)$$

e resolvendo esse sistema de equações diferenciais de primeira ordem não-homôgeneo nas variáveis  $v_1, v_2$  e  $v_3$  encontramos

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_0^S \left( \cos(\iota(S - \xi))w_1 - \frac{\mu \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_2 - \frac{\kappa \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_3 \right) d\xi, \\ v_2 &= \int_0^S \left( \frac{-\mu \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_1 - \frac{\kappa^2 + \mu^2 \cos(\iota(S - \xi))}{\iota^2} w_2 + \frac{\mu\kappa - \mu\kappa \cos(\iota(S - \xi))}{\iota^2} w_3 \right) d\xi, \\ v_3 &= \int_0^S \left( \frac{\kappa \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_1 - \frac{\mu\kappa - \mu\kappa \cos(\iota(S - \xi))}{\iota^2} w_2 + \frac{\mu^2 + \kappa^2 \cos(\iota(S - \xi))}{\iota^2} w_3 \right) d\xi, \\ v'_1 &= \int_0^S \left( -\iota \text{sen}(\iota(S - \xi))w_1 - \mu \cos(\iota(S - \xi))w_2 - \kappa \cos(\iota(S - \xi))w_3 \right) d\xi + w_1, \\ v'_2 &= \int_0^S \left( -\mu \cos(\iota(S - \xi))w_1 + \frac{\mu^2 \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_2 + \frac{\mu\kappa \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_3 \right) d\xi + w_2, \\ v'_3 &= \int_0^S \left( \kappa \cos(\iota(S - \xi))w_1 - \frac{\mu\kappa \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_2 + \frac{-\kappa^2 \text{sen}(\iota(S - \xi))}{\iota} w_3 \right) d\xi + w_3, \end{aligned}$$

onde  $\iota = \sqrt{\kappa^2 + \mu^2}$ .

Usando as equações acima e as identidades descritas no Anexo A, chegamos às seguintes estimativas (ver Anexo C.1):

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &\leq 2\|w_1\|^2 + \frac{2\mu^2}{\iota^2}\|w_2\|^2 + \frac{2\kappa^2}{\iota^2}\|w_3\|^2 \\ &\leq 2\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \|v_2\|^2 &\leq \frac{2\mu^2}{\iota^2}\|w_1\|^2 + 2\|w_2\|^2 + \frac{2\mu^2\kappa^2}{\iota^2}\|w_3\|^2 \\ &\leq 2\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \|v_3\|^2 &\leq \frac{2\kappa^2}{\iota^2}\|w_1\|^2 + \frac{2\mu^2\kappa^2}{\iota^4}\|w_2\|^2 + 2\|w_3\|^2 \\ &\leq 2\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \|v'_1\|^2 &\leq 2\iota^2\|w_1\|^2 + 2\mu^2\|w_2\|^2 + 2\kappa^2\|w_3\|^2 + 4\|w_1\|^2 \\ &\leq (2\iota^2 + 4)\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \|v'_2\|^2 &\leq 2\mu^2\|w_1\|^2 + \frac{2\mu^4}{\iota^2}\|w_2\|^2 + \frac{2\mu^2\kappa^2}{\iota^2}\|w_3\|^2 + 4\|w_2\|^2 \\ &\leq \left(4 + \frac{2\mu^4}{\iota^2}\right)\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\} \\ &\leq (2\iota^2 + 4)\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \|v'_3\|^2 &\leq 2\kappa^2\|w_1\|^2 + \frac{2\mu^2\kappa^2}{\iota^2}\|w_2\|^2 + \frac{2\kappa^4}{\iota^2}\|w_3\|^2 + 4\|w_3\|^2 \\ &\leq \left(\frac{2\kappa^4}{\iota^2} + 4\right)\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}, \\ &\leq (2\iota^2 + 4)\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Aplicando estas desigualdades na identidade

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_1^2 &= \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2 \\ &= 6 \left( \frac{1}{6} (\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2) \right), \end{aligned}$$

obtida pela substituição de (5.54 – 5.56) em (5.53), temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_1^2 &\geq \frac{1}{6} (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2) + \frac{1}{6(\iota^2 + 2)} (\|v'_1\|^2 + \|v'_2\|^2 + \|v'_3\|^2) \\ &\geq \frac{1}{6(\iota^2 + 2)} \|\mathbf{v}\|_1^2. \end{aligned}$$

Com isso, encontramos (5.52) com a constante  $c_1$  dada por

$$c_1 = \frac{1}{6(\iota^2 + 2)}, \quad (5.63)$$

demonstrando assim o **Lema 2** ■

**Lema 3** Seja  $\|\cdot\|_1$  a norma usual em  $\mathbb{S}^3$ , (5.49) e  $|\cdot|_1$  a seminorma (5.50). Existe uma constante  $c_2 > 0$  tal que

$$|\mathbf{v}|_1 \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3, \quad (5.64)$$

onde  $c_2 = \sqrt{1 + \kappa^2 + \mu^2}$ .

**Prova.** (ARUNAKIRINATHAR & REDDY [1993]) Para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^3$  temos pelas equações (5.23) e (5.50) que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' &= (v'_1 + \kappa v_3 - \mu v_2)^2 + (v'_2 + \mu v_1)^2 + (v'_3 - \kappa v_1)^2 \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

onde  $\mathbf{X}^T = \{v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3\}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{\Gamma}^T & \mathbf{I}_d \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{I}_d$  a matriz identidade.

A equação característica da matriz  $\mathbf{C}$  é dada por  $\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , cujos

autovalores  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) são, respectivamente,  $0, 0, 0, 1, 1 + \mu^2 + \kappa^2$  e  $1 + \mu^2 + \kappa^2$ . Como a matriz  $\mathbf{C}$  é simétrica, existe um operador ortogonal  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{B}$  é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de  $\mathbf{C}$ , isto é,

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6).$$

Denotando  $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{Y}$ , temos pela relação (5.65) que

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_1^2 &= \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{Y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2 + \lambda_5 y_5^2 + \lambda_6 y_6^2 \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq 6} (\lambda_i) (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2) \\ &\leq (1 + \mu^2 + \kappa^2) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Como  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ , obtemos

$$|\mathbf{v}|_1^2 \leq (1 + \mu^2 + \kappa^2) \|\mathbf{v}\|_1^2.$$

Provando (5.64) com  $c_2 = \sqrt{1 + \kappa^2 + \mu^2}$ . ■

Como a equivalência entre a norma  $\|\cdot\|_1$  e sua seminorma  $|\cdot|_1$  é assegurada pelo **Lema 1**, redefinimos o produto interno e a norma em  $\mathbb{S}^3$  por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_0^1 \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' dS, \quad |\mathbf{v}|_1 = (\mathbf{v}', \mathbf{v}')^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3 \quad (5.67)$$

e identificamos os espaços produto  $\mathbb{W} = \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3$  e  $\mathbb{Z} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ , com norma e produto interno dados, respectivamente, por

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = (\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\tau}_u) + (\boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta), \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}^2 = \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2, \quad (5.68)$$

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1 = (\mathbf{u}', \mathbf{v}') + (\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\psi}'), \quad \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}^2 = |\mathbf{v}'|_1^2 + |\boldsymbol{\psi}'|_1^2, \quad (5.69)$$

onde

$$\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{w} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}, \quad (5.70)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_\theta) \in \mathbb{W}, \quad \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\tau}_\theta) \in \mathbb{W}. \quad (5.71)$$

#### 5.4.1 Formulação cinemática

Uma vez apresentadas as definições dos espaços de funções, podemos expressar o **Problema C**, de forma equivalente, através de uma formulação variacional abstrata introduzida pelo seguinte problema:

**Problema P:** Dados  $(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_\theta) \in \mathbb{Z}'$ , encontrar  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$  tal que

$$c(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}) \Leftrightarrow J_c(\mathbf{z}) \leq J_c(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}, \quad (5.72)$$

onde

$$J_c(\mathbf{w}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - 2f(\mathbf{w})w, \quad (5.73)$$

$$c(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{E}_\theta^{-1}\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\psi}') + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{E}_u^{-1}[\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3], \mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3), \quad (5.74)$$

$$f(\mathbf{w}) = (\mathbf{f}_u, \mathbf{v}) + (\mathbf{f}_\theta, \boldsymbol{\psi}). \quad (5.75)$$

Este problema ajusta-se à classe de formulações abstratas tratadas pelo lema de Lax-Milgram. Com isso, existência e unicidade de solução do **Problema P** são garantidas através do seguinte resultado

**Lema 4** (*Lax-Milgram*) Se as seguintes propriedades se verificam

- i)* O funcional  $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{R}$  é contínuo, isto é, existe uma constante  $0 < \zeta < \infty$  tal que

$$|f(\mathbf{z})| \leq \zeta \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \quad (5.76)$$

- ii)* A forma bilinear  $c : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{R}$  é contínua, ou seja, existe uma constante

$0 < \alpha_1 < \infty$  tal que

$$|c(\mathbf{z}, \mathbf{w})| \leq \alpha_1 \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{Z}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}. \quad (5.77)$$

*iii)* A forma  $c(\cdot, \cdot)$  é  $\mathbb{Z}$ -Elíptica, isto é, existe uma constante  $\alpha_2 > 0$  tal que

$$|c(\mathbf{z}, \mathbf{z})| \geq \alpha_2 \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \quad (5.78)$$

Então o **Problema P** tem uma única solução  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ .

Note que estamos utilizando notações vetoriais para descrever todas as variáveis do problema. Por esta razão, antes de iniciarmos a verificação de cada uma das propriedades (*i - iii*), faremos uso do resultado estabelecidos em HLAVÁČEK & NEČAS [1970a] e HLAVÁČEK & NEČAS [1970b] e apresentamos o seguinte lema:

**Lema 5** (*Desigualdade de Poincaré*) Para todo  $\boldsymbol{\theta}(S) \in \mathbb{S}^3$  temos a desigualdade

$$\|\boldsymbol{\theta}(S)\|^2 \leq \frac{1}{2} |\boldsymbol{\theta}(S)|_1^2. \quad (5.79)$$

**Prova.** Para todo  $\boldsymbol{\theta}(S) \in \mathbb{S}^3$  temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(S) &= \int_0^S \boldsymbol{\theta}'(\xi) d\xi, \\ \|\boldsymbol{\theta}(S)\| &= \left\| \int_0^S \boldsymbol{\theta}'(\xi) d\xi \right\| \leq \int_0^S \|\boldsymbol{\theta}'(\xi)\| d\xi \\ &\leq \left\{ \int_0^S 1^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^S \|\boldsymbol{\theta}'(\xi)\|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} = S^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^S \|\boldsymbol{\theta}'(\xi)\|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \|\boldsymbol{\theta}(S)\|^2 &\leq S \int_0^S \|\boldsymbol{\theta}'(\xi)\|^2 d\xi \leq S \int_0^1 \|\boldsymbol{\theta}'(S)\|^2 dS, \\ \int_0^1 \|\boldsymbol{\theta}(S)\|^2 dS &\leq \int_0^1 S dS \int_0^1 \|\boldsymbol{\theta}'(S)\|^2 dS, \\ \|\boldsymbol{\theta}(S)\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}'(S)\|^2 = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\theta}(S)|_1^2. \end{aligned}$$

■

**Continuidade de  $f(\cdot)$ :** Pela equação (5.75) temos que

$$\begin{aligned}
|f(\mathbf{z})| &= (\mathbf{f}_u, \mathbf{u}) + (\mathbf{f}_\theta, \boldsymbol{\theta}) \\
&\leq \|\mathbf{f}_u\| \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{f}_\theta\| \|\boldsymbol{\theta}\| && \text{(desigualdade Schwartz)} \\
&\leq \max\{\|\mathbf{f}_u\|, \|\mathbf{f}_\theta\|\} \{\|\mathbf{u}\| + \|\boldsymbol{\theta}\|\} \\
&\leq \max\{\|\mathbf{f}_u\|, \|\mathbf{f}_\theta\|\} \sqrt{2} \{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\boldsymbol{\theta}\|^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \max\{\|\mathbf{f}_u\|, \|\mathbf{f}_\theta\|\} \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{Z}},
\end{aligned}$$

o que demonstra a continuidade (5.76) com

$$\zeta = \sqrt{2} \max\{\|\mathbf{f}_u\|, \|\mathbf{f}_\theta\|\}. \quad (5.80)$$

**Continuidade de  $c(\cdot, \cdot)$ :** Pela equação (5.74) temos que

$$\begin{aligned}
|c(\mathbf{z}, \mathbf{w})| &= (\mathbf{E}_\theta^{-1} \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\psi}') + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{E}_u^{-1} [\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3], \mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3) \\
&\leq \|\mathbf{E}_\theta^{-1}\| \|\boldsymbol{\theta}'\| \|\boldsymbol{\psi}'\| + \frac{\|\mathbf{E}_u^{-1}\|}{\varepsilon^2} \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| \|\mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\| \\
&\leq \|\mathbf{E}_\theta^{-1}\| \|\boldsymbol{\theta}'\| \|\boldsymbol{\psi}'\| + \frac{\|\mathbf{E}_u^{-1}\|}{\varepsilon^2} \{\|\mathbf{u}'\| + \|\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|\} \{\|\mathbf{v}'\| + \|\boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\|\}.
\end{aligned}$$

Como  $\|\boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\| = \|\boldsymbol{\psi}\| \|\mathbf{E}_3\| \sin(\iota) \leq \|\boldsymbol{\psi}\|$  ( $\forall \iota \in [0, 2\pi]$ ) e fazendo uso da desigualdade de Poincaré temos que

$$\begin{aligned}
|c(\mathbf{z}, \mathbf{w})| &\leq \|\mathbf{E}_\theta^{-1}\| \|\boldsymbol{\theta}'\| \|\boldsymbol{\psi}'\| + \frac{\|\mathbf{E}_u^{-1}\|}{\varepsilon^2} \{\|\mathbf{u}'\| + \|\boldsymbol{\theta}'\|\} \{\|\mathbf{v}'\| + \|\boldsymbol{\psi}'\|\} \\
&\leq \|\mathbf{E}_\theta^{-1}\| \left\{ \|\mathbf{u}'\|^2 + \|\boldsymbol{\theta}'\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{2\|\mathbf{E}_u^{-1}\|}{\varepsilon^2} \left\{ \|\mathbf{u}'\|^2 + \|\boldsymbol{\theta}'\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max \left\{ \|\mathbf{E}_\theta^{-1}\|, \frac{2\|\mathbf{E}_u^{-1}\|}{\varepsilon^2} \right\} \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{Z}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}. \quad (5.81)
\end{aligned}$$

Para valores de  $\varepsilon^2 \ll 1$ , demonstramos a continuidade (5.77) com

$$\alpha_1 = \frac{2\|\mathbf{E}_u^{-1}\|}{\varepsilon^2}, \quad (5.82)$$

onde  $\|\mathbf{E}_u^{-1}\| = \max_{\boldsymbol{\theta} \neq 0} \frac{\|\mathbf{E}_u^{-1}\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|} = \min\{\chi_a^2, \chi_b^2, 1\}$ .

**$\mathbb{Z}$ -elipticidade de  $c(\cdot, \cdot)$ :** Pela equação (5.74) temos que

$$\begin{aligned} |c(\mathbf{z}, \mathbf{z})| &= (\mathbf{E}_\theta^{-1}\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}') + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{E}_u^{-1}[\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3], \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3) \\ &\geq \mathcal{M}_{E_c} \|\boldsymbol{\theta}'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{M}_{D_c} \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 \\ &\geq \min\left\{\mathcal{M}_{E_c}, \frac{\mathcal{M}_{D_c}}{\varepsilon^2}\right\} \left\{\|\boldsymbol{\theta}'\|^2 + \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|^2\right\}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

onde  $\mathcal{M}_{E_c} = \min\{1, \chi_d^{-2}, \chi_c^{-2}\}$  e  $\mathcal{M}_{D_c} = \min\{\chi_a^{-2}, \chi_b^{-2}, 1\}$ . Entretanto, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\| &= \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3 + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| \\ &\leq \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| + \|\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| \\ &\leq \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| + \|\boldsymbol{\theta}\|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\| &\leq \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\theta}'\| \\ \|\mathbf{u}'\|^2 &\leq \left(\|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\theta}'\|\right)^2 \\ &\leq 2 \left(\|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}'\|^2\right) \\ &\leq 2 \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 + \|\boldsymbol{\theta}'\|^2 \\ \|\mathbf{u}'\|^2 + \|\boldsymbol{\theta}'\|^2 &\leq 2 \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 + 2 \|\boldsymbol{\theta}'\|^2. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Introduzindo essa desigualdade em (5.83) resulta

$$c(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \frac{1}{2} \min\left\{\mathcal{M}_{E_c}, \frac{\mathcal{M}_{D_c}}{\varepsilon^2}\right\} \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{Z}}^2. \quad (5.85)$$

Considerando valores de  $\varepsilon^2 \ll 1$ , demonstramos a elipticidade (5.78) com

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \min\{\mathcal{M}_{E_c}, \mathcal{M}_{D_c}\}. \quad (5.86)$$

O **Problema P** é sem dúvida alguma a forma mais simples e natural de tratar o modelo, visto que, na sua forma contínua, tem sua existência e unicidade de solução garantidas pelo lema de Lax-Milgram e é formulado em um único campo, o dos deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações). Do ponto de vista discreto, este problema pode ser aproximado pelo método dos elementos finitos utilizando funções polinomiais simples e, tem garantia de estimativas de erro ótimas na norma  $\mathbb{Z}$  e da melhor aproximação, na norma da energia. Entretanto, como podemos observar pelas equações (5.81) e (5.82), a propriedade de continuidade da formulação encontra-se inerentemente dependente da dimensão do parâmetro  $\varepsilon^2$  já na sua forma contínua. Essa dependência acarreta restrições à formulação pois no limite quando  $\varepsilon^2$  tende a zero a propriedade de continuidade é perdida e conseqüentemente a existência de solução não é mais garantida pelo lema de Lax-Milgram. O modelo discreto, utilizando aproximação conforme pelo método dos elementos finitos, herda essa dependência do parâmetro  $\varepsilon^2$  causando problemas de precisão e estabilidade quando este parâmetro tende a zero.

Para superar estas dificuldades, apresentamos na seção seguinte uma formulação mista baseada no princípio de Hellinger - Reissner. Como veremos, nesta nova formulação, existência e unicidade de solução são garantidas independentemente da dimensão do parâmetro  $\varepsilon^2$ .

**Observação:** Do ponto de vista mecânico, um modelo ainda mais simples do que aquele representado pelo **Problema P** pode ser obtido desconsiderando-se os efeitos do cisalhamento. Neste caso, temos o modelo clássico de Euler que consiste do seguinte problema:

**Problema E:** Dado  $\mathbf{f}_u \in \mathbb{S}_e^3$ , encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_e^3$  tal que

$$\left( \mathbf{E}_\theta^{-1} \mathbf{u}'' , \mathbf{v}'' \right) = (\mathbf{f}_u, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}_e^3, \quad (5.87)$$

onde

$$\mathbb{S}_e^3 = \mathbb{S}_e \times \mathbb{S}_e \times \mathbb{S}_e,$$

$$\mathbb{S}_e = \{v; v \in H^2(0, 1), v(0) = 0, v'(0) = 0, v(1) = 0, v'(1) = 0\}.$$

É importante notar que agora o espaço  $\mathbb{S}_e$  exige das funções candidatas e das funções peso uma regularidade maior que as exigidas pelas correspondentes funções do **Problema P**. Aqui não ocorre dependência de qualquer parâmetro pequeno e as provas de existência e unicidade se fazem pelo lema de Lax-Milgram, sem maiores dificuldades.

A construção de aproximações conformes por elementos finitos para o **Problema E** não apresenta dificuldade e tem sido feita utilizando os polinômios de Hermite. No Capítulo (7) apresentaremos uma aplicação deste modelo.

#### 5.4.2 Formulação de Hellinger – Reissner

A formulação variacional abstrata, equivalente ao **Problema B**, é dada através do seguinte problema:

**Problema H:** Dados  $(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_\theta) \in \mathbb{Z}'$ , encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{Z}$  tais que

$$\mathfrak{S}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}) \leq \mathfrak{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) \leq \mathfrak{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}, \quad (5.88)$$

onde

$$\mathfrak{S}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) - f(\mathbf{w}), \quad (5.89)$$

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = -(\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) - \varepsilon^2(\mathbf{E}_u \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\tau}_u) \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} &= -(\sigma_{\theta 1}, \tau_{\theta 1}) - \iota^2(\sigma_{\theta 2}, \tau_{\theta 2}) - \gamma^2(\sigma_{\theta 3}, \tau_{\theta 3}) - \varepsilon^2 \chi^2(\sigma_{u 1}, \tau_{u 1}) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \rho^2(\sigma_{u 2}, \tau_{u 2}) - \varepsilon^2(\sigma_{u 3}, \tau_{u 3}), \end{aligned}$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) = (\boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\psi}') + (\boldsymbol{\tau}_u, \mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3) \quad (5.91)$$

$$= (\tau_{\theta 3}, \psi'_3 - \kappa \psi_1) + (\tau_{\theta 1}, \psi'_1 + \kappa \psi_3 - \mu \psi_2) + (\tau_{\theta 2}, \psi'_2 + \mu \psi_1) +$$

$$(\tau_{u 3}, v'_3 - \kappa v_1) + (\tau_{u 1}, v'_1 + \kappa v_3 - \mu v_2 - \psi_2) + (\tau_{u 2}, u'_2 + \mu v_1 + \psi_1),$$

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{w}) &= (\mathbf{f}_u, \mathbf{v}) + (\mathbf{f}_\theta, \boldsymbol{\psi}) & (5.92) \\
&= (f_{u1}, v_1) + (f_{u2}, v_2) + (f_{u3}, v_3) + (f_{\theta1}, \psi_1) + (f_{\theta2}, \psi_2) + (f_{\theta3}, \psi_3).
\end{aligned}$$

Esta é uma formulação em dois campos, esforços e deslocamentos generalizados  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{z}$ , respectivamente, característica do princípio de Hellinger-Reissner. Este princípio consiste em encontrar as variáveis primais  $\boldsymbol{\sigma}$  e os multiplicadores de Lagrange  $\mathbf{z}$  que sejam ponto de sela do funcional de Hellinger-Reissner,  $\mathfrak{S}(\cdot, \cdot)$ .

A forma (5.88) é equivalente à seguinte formulação mista:

**Problema M:** Dados  $(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_\theta) \in \mathbb{Z}'$ , encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{Z}$  tais que

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}, \quad (5.93)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}, \quad (5.94)$$

onde  $\mathbb{Z}'$  é o espaço dual de  $\mathbb{Z}$ .

Note que a equação (5.93) advém da forma fraca da equação constitutiva do modelo, enquanto que a equação (5.94) advém da forma fraca da equação de equilíbrio de esforços generalizados.

Esse problema ajusta-se à classe de formulações mistas abstratas estudadas por Brezzi, Babuška e outros e tem existência e unicidade de solução, para qualquer valor de  $\varepsilon$ , inclusive zero, garantidas pelo seguinte resultado:

**Teorema 1** (*Brezzi*) Se as seguintes propriedades se verificam:

- i)* O funcional  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$  é contínuo, isto é, existe uma constante  $0 < \zeta < \infty$  tal que

$$|f(\mathbf{w})| \leq \zeta \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}. \quad (5.95)$$

- ii)* As formas bilineares  $a : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \mapsto \mathcal{R}$  e  $b : \mathbb{W} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{R}$  são contínuas, ou

seja, existem constantes  $0 < \alpha_3 < \infty$  e  $0 < \beta_1 < \infty$  tais que

$$|a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| \leq \alpha_3 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}} \quad \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}, \quad (5.96)$$

$$|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})| \leq \beta_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}} \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{Z}. \quad (5.97)$$

iii) A forma  $a(\cdot, \cdot)$  é  $K$ -elíptica, isto é, existe uma constante  $\alpha_4 > 0$  tal que

$$|a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})| \geq \alpha_4 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{K}, \quad (5.98)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W} / b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.99)$$

iv) A condição de Ladyenskaja – Babuška – Brezzi (LBB) é satisfeita, ou seja, existe uma constante  $\beta_2 > 0$  tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W} \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})|}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}} \geq \beta_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}. \quad (5.100)$$

Então o **Problema M** tem uma única solução  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{Z}$ .

Iniciaremos agora a verificação de cada uma das propriedades ( $i$  -  $iv$ ). A primeira delas, a continuidade da função  $f(\cdot)$ , é semelhante à demonstração da formulação cinemática dada pela relação (5.80). As continuidades das formas bilineares  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  são verificadas abaixo:

**Continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$ :** Pela equação (5.90) temos que

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| &= (\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) + \varepsilon^2 (\mathbf{E}_u \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\tau}_u) \\ &\leq (\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) + \varepsilon^2 (\mathbf{E}_u \boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\tau}_u) \\ &\leq \|\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\sigma}_\theta\| \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| + \varepsilon^2 \|\mathbf{E}_u \boldsymbol{\sigma}_u\| \|\boldsymbol{\tau}_u\| \\ &\leq \|\mathbf{E}_\theta\| \|\boldsymbol{\sigma}_\theta\| \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| + \varepsilon^2 \|\mathbf{E}_u\| \|\boldsymbol{\sigma}_u\| \|\boldsymbol{\tau}_u\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| &\leq \max\{\|\mathbf{E}_\theta\|, \varepsilon^2 \|\mathbf{E}_u\|\} \{\|\boldsymbol{\sigma}_\theta\| \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| + \|\boldsymbol{\sigma}_u\| \|\boldsymbol{\tau}_u\|\} \\
&\leq \max\{\|\mathbf{E}_\theta\|, \varepsilon^2 \|\mathbf{E}_u\|\} \{\|\boldsymbol{\sigma}_\theta\| + \|\boldsymbol{\sigma}_u\|\} \{\|\boldsymbol{\tau}_\theta\| + \|\boldsymbol{\tau}_u\|\} \\
&\leq \max\{\|\mathbf{E}_\theta\|, \varepsilon^2 \|\mathbf{E}_u\|\} \sqrt{2} \{\|\boldsymbol{\sigma}_\theta\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_u\|^2\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \{\|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \max\{\|\mathbf{E}_\theta\|, \varepsilon^2 \|\mathbf{E}_u\|\} \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\boldsymbol{\tau}\|. \tag{5.101}
\end{aligned}$$

Para valores de  $\varepsilon^2 \ll 1$ , a desigualdade acima demonstra a continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$  com

$$\alpha_3 = 2 \|\mathbf{E}_\theta\|. \tag{5.102}$$

**Continuidade de  $b(\cdot, \cdot)$ :** Pela equação (5.91) temos que

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z})| &= |(\boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\theta}') + (\boldsymbol{\sigma}_u, \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3)| \\
&\leq \|\boldsymbol{\sigma}_\theta\| \|\boldsymbol{\theta}'\| + \|\boldsymbol{\sigma}_u\| \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\| \\
&\leq \{\|\boldsymbol{\sigma}_\theta\| + \|\boldsymbol{\sigma}_u\|\} \{\|\boldsymbol{\theta}'\| + \|\mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|\} \\
&\leq \sqrt{2} \|\boldsymbol{\sigma}\| \{\|\boldsymbol{\theta}'\| + \|\mathbf{u}'\| + \|\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{E}_3\|\} \\
&\leq \sqrt{2} \|\boldsymbol{\sigma}\| \{\|\boldsymbol{\theta}'\| + \|\mathbf{u}'\| + \|\boldsymbol{\theta}\|\}
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z})| &\leq \sqrt{2} \|\boldsymbol{\sigma}\| \left\{ \|\boldsymbol{\theta}'\| + \|\mathbf{u}'\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\theta}'\| \right\} \\
&\leq \sqrt{2} \|\boldsymbol{\sigma}\| \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\boldsymbol{\theta}'\| + \|\mathbf{u}'\| \right\} \\
&\leq \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\boldsymbol{\sigma}\| \sqrt{2} \left\{ \|\boldsymbol{\theta}'\|^2 + \|\mathbf{u}'\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\mathbf{z}'\| \\
&\leq 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\boldsymbol{\sigma}\| |\mathbf{z}|_1
\end{aligned}$$

o que demonstra a continuidade de  $b(\cdot, \cdot)$  com

$$\beta_1 = 2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (5.103)$$

**$K$ -elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$ :** Pela hipótese do Teorema 1, precisamos demonstrar a elipticidade da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ , independente de  $\varepsilon^2 > 0$ , apenas no conjunto  $\mathbb{K}$ .

**Observação:** Embora não seja uma condição necessária para a existência e unicidade de solução, algumas vezes torna-se muito mais fácil e imediato demonstrar essa propriedade em todo o espaço  $\mathbb{W}$ , o que obviamente assegura a  $K$ -elipticidade uma vez que  $\mathbb{K} \subset \mathbb{W}$ . Procedendo com esse teste, isto é, considerando a forma  $a(\cdot, \cdot)$  como definida em (5.90), em todo o  $\mathbb{W}$ , temos que

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})| &= (\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) + \varepsilon^2 (\mathbf{E}_u \boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\tau}_u) \\ &\geq \mathcal{M}_E (\boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) + \varepsilon^2 \mathcal{M}_D (\boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\tau}_u) \\ &\geq \min \{ \mathcal{M}_E, \varepsilon^2 \mathcal{M}_D \} \{ \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 \} \\ &\geq \varepsilon^2 \mathcal{M}_D \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \end{aligned}$$

o que nos assegura a  $K$ -elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$  com

$$\alpha_4 = \varepsilon^2 \mathcal{M}_D, \quad (5.104)$$

sendo  $\mathcal{M}_E = \min\{1, \chi_a^2, \chi_c^2\}$  e  $\mathcal{M}_D = \min\{\chi_a^2, \chi_b^2, 1\}$ .

Note que, para  $\varepsilon^2 > 0$ , a constante (5.104) assegura a elipticidade da forma bilinear em todo o espaço  $\mathbb{W}$ , contudo paga o preço de ser dependente do parâmetro de esbeltez  $\varepsilon^2$ , conduzindo aos mesmos problemas de sensibilidade característicos da formulação cinemática. Além do mais, se fizermos esse parâmetro tender a zero a propriedade de continuidade é perdida e a existência e unicidade de solução não estariam provadas neste limite.

Vamos mostrar que o **Problema H** satisfaz à condição de elipticidade re-

querida pelo teorema de Brezzi. Para isso, continuamos o estudo da elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$ , não mais em todo o conjunto  $\mathbb{W}$ , e sim restrita apenas ao conjunto  $\mathbb{K}$ . Pela equação (5.90) temos que para todo  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})| &\geq (\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) \geq \mathcal{M}_E \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 \\ &\geq \frac{\mathcal{M}_E}{2} \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 + \frac{\mathcal{M}_E}{2} \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2. \end{aligned}$$

Supondo que existe um  $\bar{\alpha} \in (0, 1]$  tal que a desigualdade

$$\|\boldsymbol{\tau}_\theta\| \geq \bar{\alpha} \|\boldsymbol{\tau}_u\| \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{K} \quad (5.105)$$

seja válida, temos que

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})| &\geq \frac{\mathcal{M}_E}{2} \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 + \frac{\mathcal{M}_E}{2} \bar{\alpha}^2 \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 \\ &\geq \min \left\{ \frac{\mathcal{M}_E}{2}, \frac{\mathcal{M}_E}{2} \bar{\alpha}^2 \right\} \{ \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 \} \\ &\geq \frac{\mathcal{M}_E}{2} \bar{\alpha}^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_W^2 = \alpha_4 \|\boldsymbol{\tau}\|_W \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (5.106)$$

o que demonstra a  $K$ -elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$  com

$$\alpha_4 = \frac{\mathcal{M}_E}{2} \bar{\alpha}^2. \quad (5.107)$$

Para completar a prova basta agora demonstrar que a desigualdade (5.105) é de fato válida. Para isso, temos pela definição (5.99) que todo  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{K}$  satisfaz

$$(\boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\psi}') + (\boldsymbol{\tau}_u, \mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}.$$

Reorganizando os termos encontramos

$$(\boldsymbol{\tau}_u, \mathbf{v}') = (\boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3) - (\boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\psi}') \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando o módulo em ambos os lados temos que

$$\begin{aligned}
|(\boldsymbol{\tau}_u, \mathbf{v}')| &= |(\boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3) - (\boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\psi}')| \\
|(\boldsymbol{\tau}_u, \mathbf{v}')| &\leq |(\boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3)| + |(\boldsymbol{\tau}_\theta, \boldsymbol{\psi}')| \\
&\leq \|\boldsymbol{\tau}_u\| \|\boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\| + \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| \|\boldsymbol{\psi}'\| \\
&\leq \|\boldsymbol{\tau}_u\| \|\boldsymbol{\psi}\| + \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| \|\boldsymbol{\psi}'\|.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$|(\boldsymbol{\tau}_u, \mathbf{v}')| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_u\| \|\boldsymbol{\psi}'\| + \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| \|\boldsymbol{\psi}'\|. \quad (5.108)$$

Fazendo as escolhas

$$\boldsymbol{\psi}(S) = \mathbf{v}(S) = \int_0^S \boldsymbol{\tau}_u(\xi) d\xi \quad \forall \xi \in (0, 1) \quad (5.109)$$

para as funções vetoriais e substituindo-as na desigualdade (5.108) temos que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 &\leq \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| \|\boldsymbol{\tau}_u\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 \\
\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 &\leq \|\boldsymbol{\tau}_\theta\| \|\boldsymbol{\tau}_u\| \\
\|\boldsymbol{\tau}_\theta\| &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\boldsymbol{\tau}_u\|.
\end{aligned} \quad (5.110)$$

Essa desigualdade demonstra (5.105) com

$$\bar{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (5.111)$$

e completando a prova da  $K$ -elipticidade da  $a(\cdot, \cdot)$ .

**LBB:** Para podermos aplicar o Teorema 1 e garantirmos existência e unicidade de solução do **Problema M**, independente de  $\varepsilon$ , a última condição que precisamos assegurar é a condição de compatibilidade entre os espaços ou LBB. Note que para

todo  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{W}$  ( $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \neq 0$ ) temos satisfeita a seguinte desigualdade

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W} \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}} \geq \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{w})}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{W}}} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}. \quad (5.112)$$

Com isso, temos que a condição de Babůska - Brezzi (5.100) é verificada se existir um  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{W}$  tal que as seguintes proposições sejam satisfeitas:

$$P_1 : b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{w}) \geq \bar{\beta}_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}^2, \quad (5.113)$$

$$P_2 : \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{Z}} \leq \tilde{\beta}_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}, \quad (5.114)$$

com  $\bar{\beta}_2 > 0$  e  $0 < \tilde{\beta}_2 < \infty$  constantes reais e independentes de  $\varepsilon$ . Pela definição da forma  $b(\cdot, \cdot)$ , estabelecida em (5.91), temos que para todo  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{W}$

$$b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{w}) = (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\theta}, \boldsymbol{\psi}') + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_u, \mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}.$$

Escolhendo em particular

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\theta} &= \boldsymbol{\psi}', \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_u &= \mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3, \end{aligned}$$

obtemos

$$b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{w}) = \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\|^2.$$

Aplicando a desigualdade (5.84) nessa identidade obtemos

$$\begin{aligned} b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{w}) &\geq \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}^2, \end{aligned} \quad (5.115)$$

demonstrando ( $P_1$ ) com

$$\bar{\beta}_2 = \frac{1}{2}.$$

Para demonstrar a segunda proposição, temos que para todo  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{W}$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{W}}^2 &= \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\theta}\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_u\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}' - \boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\boldsymbol{\psi} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\boldsymbol{\psi}\|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré encontramos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{W}}^2 &\leq \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 \\
&\leq \frac{3}{2} \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 \\
&\leq \frac{3}{2} \left( \|\boldsymbol{\psi}'\|^2 + \|\mathbf{v}'\|^2 \right) = \frac{3}{2} \|\mathbf{w}'\|^2 \\
&\leq \frac{3}{2} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}^2,
\end{aligned} \tag{5.116}$$

demonstrando  $(P_2)$  com  $\tilde{\beta}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Aplicando as desigualdades (5.115) e (5.116) em (5.112) obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}} &\geq \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{w})}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{W}}} \geq \frac{\frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}^2}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbb{W}}} \geq \frac{\frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2}{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{w}\|} \geq \frac{\sqrt{2} \|\mathbf{w}\|}{2\sqrt{3}} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \\
\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}} &\geq \frac{\sqrt{6} \|\mathbf{w}\|}{6} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{5.117}$$

demonstrando (5.100) com  $\beta_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

As equações (5.80 – 5.103), (5.106) e (5.117) verificam todas as hipóteses do Teorema 1 garantindo assim existência e unicidade de solução do **Problema M**, independente de  $\varepsilon$ . Observe que, ao menos na sua forma contínua, esta formulação não apresenta nenhum tipo de dependência com a esbeltez da estrutura, contrastando com a formulação cinemática do modelo. Isso nos habilita a prosseguir com esta formulação e estudar suas aproximações numéricas. Na próxima seção, introduziremos aproximações por elementos finitos para esse problema, enfatizando a construção de métodos mistos estabilizados.

# Capítulo 6

## Métodos de elementos finitos estabilizados

No capítulo anterior, apresentamos uma linearização do modelo de estruturas unidimensionais introduzidos no Capítulo 2 e, para o problema contínuo linearizado, apresentamos formulações variacionais cinemática e mista. Demonstramos existência e unicidade de solução para estas formulações.

Neste capítulo, construímos e analisamos aproximações por elementos finitos para as formulações apresentadas no capítulo anterior. Mostramos que a estabilidade de aproximações, via elementos finitos mistos, utilizando a formulação de Galerkin, está condicionada a compromissos entre os espaços de aproximações escolhidos para as variáveis envolvidas. Introduzimos uma nova aproximação de elementos finitos mistos estabilizados, provamos que esta formulação atende às condições de compatibilidade entre os espaços, independente da esbeltez da estrutura e que, essas condições são muito menos restritivas que aquelas da formulação de Galerkin.

Seja  $\mathcal{I}_e$  o domínio de cada elemento de uma partição de elementos finitos,  $h_e$  o diâmetro do elemento  $e$ ,  $n_e$  o número total de elementos e  $h = \max\{h_e\}$ ,  $1 \leq e \leq n_e$  o parâmetro de malha. Definimos como

$$\mathbb{Q}_h^l = \{ \tau_h \in \mathbb{C}^{-1}(0, 1), \tau_h(\mathcal{I}_e) \in P_l(\mathcal{I}_e) \}$$

o espaço de elementos finitos lagrangianos de grau  $l$  e de classe  $C^{-1}(0, 1)$  e  $S_h^l = Q_h^l \cap S$  o espaço de elementos finitos lagrangianos de grau  $l$  e de classe  $C^0(0, 1)$ . Ou seja, estamos considerando polinômios de interpolações de mesmo grau para os espaço de aproximação dos deslocamentos generalizados ( $S_h^l$ ) e dos esforços generalizados ( $Q_h^l$ ), sendo interpolações contínuas para os deslocamentos e descontínuas para os esforços. Assim, denotamos por  $Z_h^l = (S_h^l)^3 \times (S_h^l)^3 \subset Z$  e  $W_h^l = (Q_h^l)^3 \times (Q_h^l)^3 \subset W$  os espaços de aproximação para  $Z$  e  $W$ , respectivamente.

## 6.1 Método de Galerkin

A aproximação conforme de Galerkin para o **Problema M** é dada por

**Problema M<sub>h</sub>:** Encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h) \in W_h^l \times Z_h^l$  tais que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{z}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in W_h^l, \quad (6.1)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) = f(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in Z_h^l, \quad (6.2)$$

onde

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = -(\mathbf{E}_\theta \boldsymbol{\sigma}_{\theta h}, \boldsymbol{\tau}_{\theta h}) - \varepsilon^2 (\mathbf{E}_u \boldsymbol{\sigma}_{uh}, \boldsymbol{\tau}_{uh}), \quad (6.3)$$

$$b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h) = (\boldsymbol{\tau}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}'_h) + (\boldsymbol{\tau}_{uh}, \mathbf{v}'_h - \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3), \quad (6.4)$$

$$f(\mathbf{w}_h) = (\mathbf{f}_{uh}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{f}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}_h). \quad (6.5)$$

A existência e unicidade de solução do **Problema M<sub>h</sub>** é garantida pela forma discreta do Teorema de Brezzi apresentado a seguir:

**Teorema 2 (Brezzi)** Se as seguintes propriedades se verificam:

- i)* O funcional  $f : Z_h^l \mapsto \mathcal{R}$  é contínuo. Existe uma constantes  $0 < \zeta < \infty$  tal que

$$|f(\mathbf{w}_h)| \leq \zeta \|\mathbf{w}_h\|_Z \quad \forall \mathbf{w}_h \in Z_h^l. \quad (6.6)$$

- ii)* As formas bilineares  $a : W_h^l \times W_h^l \mapsto \mathcal{R}$  e  $b : W_h^l \times Z_h^l \mapsto \mathcal{R}$  são contínuas.

Existem constantes  $0 < \alpha_3 < \infty$  e  $0 < \beta_1 < \infty$  tais que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \leq \alpha_3 \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} \quad \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l, \quad (6.7)$$

$$b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h) \leq \beta_1 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}} \quad \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l, \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l. \quad (6.8)$$

iii) A forma  $a_h(\cdot, \cdot)$  é  $K_h$ -elíptica. Existe uma constante  $\alpha_5 > 0$  tal que

$$a(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \geq \alpha_5 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{K}_h, \quad (6.9)$$

onde

$$\mathbb{K}_h = \{ \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l / b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l \}. \quad (6.10)$$

iv) A condição de Ladysenskaja – Babuška – Brezzi ou LBB. Existe uma constante  $\beta_3 > 0$  tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \beta_3 \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l. \quad (6.11)$$

Então o **Problema  $\mathbf{M}_h$**  tem uma única solução  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h) \in \mathbb{W}_h^l \times \mathbb{Z}_h^l$  e vale a seguinte estimativa

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbb{Z}} \leq c (\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} + \|\mathbf{z} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}}) \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l, \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l, \quad (6.12)$$

onde  $c$  é uma constante dependente de  $\alpha_3$ ,  $\alpha_5$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_3$ .

Em virtude da aproximação conforme do problema, isto é  $\mathbb{Z}_h^l \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{W}_h^l \subset \mathbb{W}$ , as propriedades de continuidade do funcional  $f(\cdot)$  e das formas  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  são herdadas da forma contínua. Entretanto, em geral  $\mathbb{K}_h \not\subset \mathbb{K}$  e com isso as outras condições,  $K$ -elipticidade e LBB, devem ser verificadas também para o **Problema  $\mathbf{M}_h$** . A propriedade de compatibilidade entre os espaços é verificada pelo seguinte lema:

**Lema 6** (A LBB discreta). Existe uma constante positiva  $\beta_3 \in \mathcal{R}$  independente de  $\varepsilon$  e de  $h$  tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \beta_3 \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l. \quad (6.13)$$

**Prova.** Como no caso contínuo, temos que para todo  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbb{W}_h^l$  ( $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \neq 0$ ), é satisfeita a desigualdade

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathbb{W}}} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l. \quad (6.14)$$

Pela definição da forma bilinear  $b(\cdot, \cdot)$  dada por (6.4), temos que para todo  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \mathbb{W}_h^l$

$$b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, \mathbf{w}_h) = (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}'_h) + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{uh}, \mathbf{v}'_h - \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l.$$

Pelas definições de  $\mathbb{W}_h^l$  e  $\mathbb{Z}_h^l$ , podemos fazer as escolhas

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\theta h} = \boldsymbol{\psi}'_h, \quad (6.15)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{uh} = \mathbf{v}'_h - \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3, \quad (6.16)$$

obtendo

$$b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, \mathbf{w}_h) \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}}^2. \quad (6.17)$$

Por outro lado, usando (6.15), (6.16) e a forma discreta da desigualdade de Poincaré (5.79) em (5.68), obtemos

$$\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathbb{W}}^2 \leq \frac{3}{2} \|\mathbf{w}_h\|^2. \quad (6.18)$$

Aplicando (6.17) e (6.18) em (6.14) encontramos finalmente

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \frac{b(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \frac{\sqrt{6} \|\mathbf{w}_h\|}{6} \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h^l,$$

provando (6.13) com a constante  $\beta_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ . ■

A verificação da condição de compatibilidade entre os espaços não trouxe dificuldades adicionais pois pudemos adotar as mesmas escolhas feitas na demonstração do caso contínuo. Entretanto, isso não se verifica para a propriedade de  $K$ -elipticidade. Para os espaços de aproximação adotados  $\mathbb{Z}_h^l$  e  $\mathbb{W}_h^l$ , não é possível fazer escolhas que demonstrem a  $K$ -elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$  independente de  $\varepsilon$ . Para explicar com maior clareza e simplicidade as conseqüências de uma dependência com este parâmetro, vamos usar o fato de que os esforços são interpolados de forma descontínua e elimina-los a nível de elemento. Com isso, obtemos uma formulação apenas em deslocamentos generalizados. Essa formulação em deslocamentos generalizados é exatamente a aproximação cinemática do **Problema P**, dada por:

**Problema P<sub>h</sub>:** Dados  $(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_\theta) \in \mathbb{Z}'_h$ , encontrar  $\mathbf{z}_h \in \mathbb{Z}_h$  tal que

$$c(\mathbf{z}_h, \mathbf{w}_h) = f(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h, \quad (6.19)$$

onde

$$c(\mathbf{z}_h, \mathbf{w}_h) = (\mathbf{E}_\theta^{-1} \boldsymbol{\theta}'_h, \boldsymbol{\psi}'_h) + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{E}_u^{-1} [\mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{E}_3], \mathbf{v}'_h - \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3), \quad (6.20)$$

$$f(\mathbf{w}_h) = (\mathbf{f}_u, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{f}_\theta, \boldsymbol{\psi}_h). \quad (6.21)$$

Este problema tem sua existência e unicidade de solução garantidas pela forma discreta do lema de Lax-Milgram e possui, na norma de  $\mathbb{Z}$ , a seguinte estimativa ótima de erro

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{c}{\varepsilon} \|\mathbf{z} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l, \quad (6.22)$$

onde  $c$  é uma constante independente de  $\varepsilon$ .

Esta estimativa explicita a dependência do erro da aproximação  $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbb{Z}}$ , com o parâmetro  $\varepsilon$ . Devemos esperar sérios problemas de precisão para valores

muito pequenos de  $\varepsilon$ . É bem sabido que, para polinômios de interpolação lineares ( $l = 1$ ), à medida em que  $\varepsilon \mapsto 0$  a norma da solução aproximada  $\|\mathbf{z}_h\|_{\mathbb{Z}}$  também tende a zero, caracterizando o chamado efeito de trancamento ou *locking* da solução. Este efeito de trancamento pode ser facilmente explicado pela equação (6.20). Podemos notar que  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  causa uma penalização no termo associado à energia de cisalhamento e extensão dessa equação, resultando na seguinte restrição

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{E}_3\| = 0. \quad (6.23)$$

Para polinômios lineares ( $l=1$ ) os únicos campos  $\mathbf{u}_h$  e  $\boldsymbol{\theta}_h$  que satisfazem a essa restrição são os identicamente nulos, isto é,  $\mathbf{u}_h = \boldsymbol{\theta}_h = 0$ , ARNOLD [1981], LOULA *et al* [1987a] e LOULA *et al* [1987b].

Uma forma de contornar este problema é aumentar a ordem dos polinômios de interpolação. Entretanto, isso acarreta taxas de convergências sub-ótimas, LOULA *et al* [1987b]. Outra forma, a qual seguiremos, é aproximar o **Problema M** utilizando uma formulação estabilizada.

## 6.2 Formulação de elementos finitos mistos estabilizados

Uma forma de estabilização para o **Problema M<sub>h</sub>** consiste em interpolar o campo dos esforços e momentos generalizados com uma ordem a menos que o campo dos deslocamentos generalizados. Isso possibilita provar a elipticidade do operador  $a(\cdot, \cdot)$  independente do parâmetro  $\varepsilon^2$ , garantindo a estabilidade da formulação de Galerkin. Entretanto, essa não foi a forma que seguimos. Estabilizamos o **Problema M<sub>h</sub>** fazendo uma adição consistente de formas residuais de mínimos quadrados provenientes das equações de equilíbrio do modelo. Assim, conseguimos garantir estabilidade da formulação inclusive para interpolações de mesma ordem entre os campos de esforços e deslocamentos generalizados.

A estabilização empregada consiste em introduzir na aproximação de Galerkin do problema de ponto de sela, **Problema M**, uma perturbação a nível de elemento da seguinte forma:

Para todo  $\boldsymbol{\tau}_h \in W_h^l$  e  $\mathbf{w}_h \in V_h^l$ , encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h) \in \mathbb{W}_h^l \times \mathbb{Z}_h^l$  tais que

$$\begin{aligned}
& \underbrace{a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) - f(\mathbf{w}_h)}_{\text{(Galerkin)}} - \\
& - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \delta_1 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e} - \boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3 + \mathbf{f}_{\theta}, \boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3)}_{\text{(Res. das eq. de equilíbrio dos momentos)}} - \\
& - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \delta_2 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{ue} + \mathbf{f}_u, \boldsymbol{\tau}'_{ue})}_{\text{(Res. das eq. de equilíbrio dos esforços)}} = 0, \tag{6.24}
\end{aligned}$$

onde  $\delta_1 \in \mathcal{R}_+$  e  $\delta_2 \in \mathcal{R}_+$  são parâmetros arbitrários e os termos que os multiplicam correspondem aos resíduos de mínimos quadrados das equações de equilíbrio de momentos e esforços (cisalhantes e normal) generalizados, respectivamente.

Observe que estes resíduos são considerados apenas no interior dos elementos, o que assegura a consistência da formulação. Esse tipo de estabilização foi introduzido inicialmente nos trabalhos de LOULA *et al* [1987a] e LOULA *et al* [1987b].

Reorganizando os termos de (6.24) podemos representar esta formulação através do seguinte problema:

**Problema ME<sub>n</sub>**: Encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h) \in \mathbb{W}_h^l \times \mathbb{Z}_h^l$  tais que

$$\begin{aligned}
a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\tau}_h) &= g_\delta(\boldsymbol{\tau}_h) & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l, \\
b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) &= f(\mathbf{w}_h) & \forall \mathbf{w}_h \in V_h^l,
\end{aligned}$$

onde

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h, \quad (6.25)$$

$$a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h = \sum_{e=1}^{n_{el}} a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e), \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e) &= -\delta_1 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e} - \boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3, \boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3) \\ &\quad - \delta_2 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue}), \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$g_\delta(\boldsymbol{\tau}_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} g_e(\boldsymbol{\tau}_e), \quad (6.28)$$

$$g_e(\boldsymbol{\tau}_e) = \delta_1 h_e^2 (\mathbf{f}_{\theta e}, \boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3) + \delta_2 h_e^2 (\mathbf{f}_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue}), \quad (6.29)$$

Observe que este problema preserva a estrutura matemática da formulação mista abstrata estudada por Brezzi, podendo assim ter sua existência e unicidade de solução garantida pelo Teorema 2.

Como podemos perceber pela equação (6.25), a forma  $a_h(\cdot, \cdot)$  possui além do termo de Galerkin  $a(\cdot, \cdot)$ , parcelas adicionais introduzidas a nível de elemento. Estes termos desempenham uma função de estabilização para a formulação e mantêm a consistência do método. Como dissemos, existência e unicidade de solução deste problema é garantida pela forma discreta do Teorema 2 (Teorema de Brezzi), independente de  $\varepsilon$ , se as propriedades de continuidade e  $K_h$ -elipticidade da forma  $a_h(\cdot, \cdot)$  forem verificadas, uma vez que as outras condições já foram verificadas na formulação de Galerkin ou herdados da forma contínua devido à aproximação conforme feita aqui.

Antes de seguirmos com a verificação da propriedade de continuidade da forma  $a_h(\cdot, \cdot)$ , introduzimos o seguinte resultado auxiliar

**Lema 7** (*Estimativa inversa*). Para todo  $\boldsymbol{\tau}_{\theta h} \in \mathbb{Q}_h^3$  existe uma constante positiva  $C_e \in \mathcal{R}$  independente de  $\varepsilon$  e  $h$  tal que

$$\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\|^2 \leq \frac{C_e}{h_e^2} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\|^2, \quad (6.30)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}_{\theta_e}$  é a restrição de  $\boldsymbol{\tau}_{\theta_h}$  ao domínio  $\mathcal{I}_e$ .

**Prova.**

Por definição temos a seguinte identidade

$$\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_e}\|^2 = \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{1e}}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{2e}}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{3e}}\|^2.$$

Utilizando a estimativa inversa

$$\|\zeta'_{ie}\|^2 \leq \frac{C_{ie}}{h_e^2} \|\zeta_{ie}\|^2 \quad i = 4, 5, 6,$$

descrita em CIARLET [1978], para as funções escalares  $\tau_{ie}$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_e}\|^2 &\leq \frac{C_{1e}}{h_e^2} \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{1e}}\|^2 + \frac{C_{2e}}{h_e^2} \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{2e}}\|^2 + \frac{C_{3e}}{h_e^2} \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{3e}}\|^2 \\ &\leq \frac{C_e}{h_e^2} \{\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{1e}}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{2e}}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta_{3e}}\|^2\} \\ &\leq \frac{C_e}{h_e^2} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta_e}\|^2, \end{aligned}$$

onde  $C_e = \max\{C_{1e}, C_{2e}, C_{3e}\}$ . ■

**Lema 8** (Continuidade de  $a_h(\cdot, \cdot)$ ). Existe uma constante positiva  $\alpha_5 \in \mathcal{R}$  independente de  $\varepsilon$  e  $h$  tal que

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \leq \alpha_5 \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \quad (6.31)$$

**Prova.** Pela definição da forma bilinear (6.25), temos que

$$\begin{aligned} |a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| &= |a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h| \\ &\leq |a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| + \left| \sum_{e=1}^{n_{el}} a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e) \right| \\ &\leq |a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| + \sum_{e=1}^{n_{el}} |a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e)|. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Analisando separadamente os dois termos do lado direito, podemos observar que o

primeiro tem sua continuidade garantida diretamente pela forma contínua (5.102), isto é, para valores de  $\varepsilon \ll 1$

$$|a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \leq 2 \|\mathbf{E}_\theta\| \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \subset \mathbb{W}. \quad (6.33)$$

Para o segundo termo temos, pela identidade (6.27) que

$$\begin{aligned} |a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e)| &= |\delta_1 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e} - \boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3, \boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3) + \delta_2 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue})| \\ &\leq \delta_1 h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e} - \boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3\| \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3\| + \delta_2 h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\| \\ &\leq \delta_1 h_e^2 (\|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3\|) (\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3\|) + \delta_2 h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\| \\ &\leq \delta_1 h_e^2 (\|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\|) (\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\|) + \delta_2 h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\| \\ &\leq \max\{\delta_1, \delta_2\} h_e^2 (\|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \\ &\quad + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|) \\ &\leq c_3 h_e^2 (\|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\|) (\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + \\ &\quad + \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|) \\ &\leq c_3 h_e^2 (2 \|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + 2 \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\|) (2 \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + 2 \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|) \\ &\leq 4c_3 h_e^2 (\|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\|) (\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|) \\ \\ |a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e)| &\leq 4c_3 (h_e \|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| + h_e \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\|) (h_e \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + h_e \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + h_e \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|) \\ &\leq 4c_3 (C_e \|\boldsymbol{\sigma}_{\theta e}\| + h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\| + C_e \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\|) (C_e \|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\| + h_e \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\| + C_e \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\|) \\ &\leq 4c_3 (C_e \|\boldsymbol{\sigma}_{\theta e}\| + (h_e + C_e) \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\|) (C_e \|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\| + (h_e + C_e) \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\|) \\ &\leq 4c_3 (h_e + C_e)^2 (\|\boldsymbol{\sigma}_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\|) (\|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\|) \\ &\leq 4c_3 (h_e + C_e)^2 \sqrt{2} (\|\boldsymbol{\sigma}_{\theta e}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\|^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} (\|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 8c_3 (h_e + C_e)^2 (\|\boldsymbol{\sigma}_{\theta e}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue}\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{ue}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 8c_3 (h_e + C_e)^2 \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}_e\|_{\mathbb{W}}, \end{aligned}$$

onde  $c_3 = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ . Com isso temos que

$$|a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \leq \max_{1 \leq e \leq n_{el}} \{8c_3 (h_e + C_e)^2\} \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l.$$

Aplicando (6.33) e a desigualdade acima em (6.32) temos que para todo  $\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l$

$$\begin{aligned} |a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| &\leq 2 \|\mathbf{E}_\theta\| \|\boldsymbol{\sigma}_h\| \|\boldsymbol{\tau}_h\| + 8c_3 (h_e + C_e)^2 \|\boldsymbol{\sigma}_h\| \|\boldsymbol{\tau}_h\| \\ &\leq \max \{2 \|\mathbf{E}_\theta\|, 8c_3 (h_e + C_e)^2\} \|\boldsymbol{\sigma}_h\| \|\boldsymbol{\tau}_h\|, \end{aligned}$$

o que demonstra a continuidade de  $a_h(\cdot, \cdot)$  com

$$\alpha_3 = \max \{2 \|\mathbf{E}_\theta\|, 8c_3 (h_e + C_e)^2\}. \quad (6.34)$$

■

**Lema 9** Denotando  $\boldsymbol{\tau}_{uh} \in \mathbb{Q}_h^3$  por

$$\boldsymbol{\tau}_{uh} = \boldsymbol{\tau}_{uh}^* + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}, \quad (6.35)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}$  são funções constantes por parte e  $\boldsymbol{\tau}_{uh}^*$  funções de média nula. Definindo a restrição de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}$  a  $\mathcal{I}_e$  como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{ue} = \frac{1}{h_e} \int_0^{h_e} \boldsymbol{\tau}_{ue}(S) dS,$$

temos que  $\boldsymbol{\tau}_{ue}^*$ , a restrição de  $\boldsymbol{\tau}_{uh}^*$  a  $\mathcal{I}_e$ , satisfaz

$$\int_0^{h_e} \boldsymbol{\tau}_{ue}^*(S) dS = 0 \quad e = 1, \dots, n_{el}.$$

Então, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$c_p h^2 \sum_{e=1}^{n_{el}} (\boldsymbol{\tau}'_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue}) \geq \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2, \quad (6.36)$$

onde  $c_p > 0$  é uma constante associada a desigualdade de Poincaré.

**Prova.** Aplicando a desigualdade de Poincaré na função de média nula  $\boldsymbol{\tau}_{uh}^*$  temos que

$$\|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 \leq c_p h^2 \sum_{e=1}^{n_{el}} |\boldsymbol{\tau}'_{ue}|^2. \quad (6.37)$$

Derivando (6.35) em relação a  $S$  e aplicando o módulo a ambos os lados obtemos

$$|\boldsymbol{\tau}'_{uh}| = |\boldsymbol{\tau}_{uh}^*|.$$

Substituindo essa identidade em (6.37) encontramos

$$c_p h^2 \sum_{e=1}^{n_{el}} (\boldsymbol{\tau}'_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue}) \geq \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2. \quad (6.38)$$

■

**Lema 10** (*Coercividade da forma  $a_h(\cdot, \cdot)$* ). Existe uma constante positiva  $\alpha_6 \in \mathcal{R}$  independente de  $\varepsilon$  e  $h$  tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{K}_h \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq 0}} \frac{a_h(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \alpha_6 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}} \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{K}_h, \quad (6.39)$$

onde

$$\mathbb{K}_h = \{ \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l; b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l \}. \quad (6.40)$$

**Prova.** Pela definição da forma bilinear (6.25) e (6.26) temos que

$$|a_h(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \geq \mathcal{M}_E \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \varepsilon^2 \mathcal{M}_D \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\|^2 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left( \delta_1 h_e^2 \|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{E}_3\|^2 + \delta_2 h_e^2 \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|^2 \right).$$

Desconsiderando o termo dependente do parâmetro  $\varepsilon$  e o termo positivo associado ao resíduo da equação de equilíbrio dos momentos, temos

$$|a_h(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \geq \mathcal{M}_E \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left( \delta_2 h_e^2 \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\|^2 \right).$$

Aplicando (6.36) obtemos

$$|a_h(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \geq \mathcal{M}_E \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \frac{\delta_2}{c_p} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 \quad (6.41)$$

Supondo válida a desigualdade

$$\frac{1}{2} \|\overline{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 \quad (6.42)$$

e aplicando-a em (6.41) temos

$$\begin{aligned} |a_h(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| &\geq \mathcal{M}_E \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \frac{\delta_2}{c_p} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 \\ &\geq \min \left\{ \mathcal{M}_E, \frac{\delta_2}{c_p} \right\} \{ \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 \} \\ &\geq \frac{1}{2} \min \left\{ \mathcal{M}_E, \frac{\delta_2}{c_p} \right\} \{ \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 \} + \\ &\quad \frac{1}{2} \min \left\{ \mathcal{M}_E, \frac{\delta_2}{c_p} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \|\overline{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 \right\} \\ &\geq \frac{1}{4} \min \left\{ \mathcal{M}_E, \frac{\delta_2}{c_p} \right\} \{ \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 + \|\overline{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 \} \\ &\geq \frac{1}{4} \min \left\{ \mathcal{M}_E, \frac{\delta_2}{c_p} \right\} \{ \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\|^2 \} \\ &\geq \frac{1}{4} \min \left\{ \mathcal{M}_E, \frac{\delta_2}{c_p} \right\} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}^2, \end{aligned}$$

o que prova a  $K_h$ -elipticidade da  $a_h(\cdot, \cdot)$  com

$$\alpha_4 = \min \left\{ \frac{\mathcal{M}_E}{4}, \frac{\delta_2}{4c_p} \right\} \quad (6.43)$$

independente de  $\varepsilon$ .

Para completar a prova resta provar a relação (6.42). Pela definição (6.40) temos que todo  $\boldsymbol{\tau}_h \in K_h$  satisfaz a

$$(\boldsymbol{\tau}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}'_h) + (\boldsymbol{\tau}_{uh}, \mathbf{v}'_h - \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathbb{Z}_h^l,$$

ou, equivalentemente

$$(\boldsymbol{\tau}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}'_h) + (\boldsymbol{\tau}_{uh}, \mathbf{v}'_h) - (\boldsymbol{\tau}_{uh}, \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathbb{Z}_h^l.$$

Aplicando o módulo em ambos os lados da equação temos

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{\tau}_{uh}, \mathbf{v}'_h)| &= |(\boldsymbol{\tau}_{uh}, \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3) - (\boldsymbol{\tau}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}'_h)| \\ &\leq |(\boldsymbol{\tau}_{uh}, \boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3)| + |(\boldsymbol{\tau}_{\theta h}, \boldsymbol{\psi}'_h)| \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| \|\boldsymbol{\psi}_h \wedge \mathbf{E}_3\| + \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \|\boldsymbol{\psi}'_h\| \\ &\leq \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| \|\boldsymbol{\psi}_h\| + \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \|\boldsymbol{\psi}'_h\| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| \|\boldsymbol{\psi}'_h\| + \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \|\boldsymbol{\psi}'_h\|. \quad (\text{Poincaré}) \end{aligned}$$

Como cada componente de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}$  é constante por partes e cada componente de  $\mathbf{v}_h$  ou  $\boldsymbol{\psi}_h$  é no mínimo linear, podemos escolher

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(S) &= \int_0^S \bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}(\xi) d\xi \\ \boldsymbol{\psi}_h(S) &= \int_0^S \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

obtendo

$$|(\boldsymbol{\tau}_{uh}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh})| \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|.$$

Introduzindo a decomposição (6.35) resulta

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{\tau}_{uh}^*, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}) + (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}, \bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh})| &\leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\| \\ \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\| \\ \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\| &\leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\| \\ \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 \\ \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 &\leq \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2. \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\frac{1}{2} \|\overline{\boldsymbol{\tau}}_{uh}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2 \leq \|\boldsymbol{\tau}_{\theta h}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{uh}^*\|^2,$$

completando assim a prova da desigualdade (6.42) e conseqüentemente da  $K_h$ -elipticidade de  $a_h(\cdot, \cdot)$ . ■

Uma vez comprovadas as hipóteses da versão discreta do teorema de Brezzi, temos assegurada existência e unicidade de solução para o **Problema ME<sub>h</sub>**, independentemente de  $\varepsilon$ . Com isso demonstramos o seguinte resultado

**Teorema 3** Para  $\delta_2 > 0$ , o **Problema ME** tem solução única  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{W}_h^l \times \mathbb{Z}_h^l$  e vale a seguinte estimativa

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbb{Z}} \leq c(\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}} + \|\mathbf{z} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}}) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l, \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l, \quad (6.44)$$

onde a constante  $c$  é independente de  $\varepsilon$  e  $h$ . Para  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  solução do **Problema M**, suficientemente regular resulta

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbb{W}} + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbb{Z}} \leq ch^{l+1} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{l+1} + ch^l \|\mathbf{z}\|_{l+1}. \quad (6.45)$$

A prova é conseqüência direta da continuidade de  $a_h$  (Lema 1), da LBB discreta (Lema 3), da coercividade de  $a_h$  (Lema 5), do teorema de Brezzi, BREZZI [1974], e de resultados de teorias de interpolações de elementos finitos, CIARLET [1978]. A equação (6.45) mostra que os deslocamentos e as tensões generalizadas convergem, respectivamente, com taxas ótimas e quase ótimas.

### 6.3 Estratégia de resolução

Nessa seção, apresentaremos a estratégia utilizada na implementação do **Problema ME** (6.25)-(6.25). Para isso, consideremos sua estrutura matricial escrita

da seguinte maneira

$$-\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{G}, \quad (6.46)$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}, \quad (6.47)$$

onde  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^n$  e  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  denotam os valores nodais dos vetores de esforços e deslocamentos generalizados,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  representam as matrizes associadas às formas bilineares  $a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$  e  $b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h)$ , e  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{F}$  os vetores de força associados aos funcionais lineares  $g_\delta(\boldsymbol{\tau}_h)$  e  $f(\mathbf{w}_h)$ .

Dadas as escolhas de nossos espaços de aproximações, percebemos que o campo  $\boldsymbol{\sigma}_h$  é interpolado descontinuamente. Com isso, podemos sempre eliminar a nível de elemento, o campo  $\boldsymbol{\eta}$  obtendo uma formulação equivalente apenas em deslocamentos,

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (6.48)$$

onde

$$\mathbf{D} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{D}_e, \quad \mathbf{D}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e^T, \quad (6.49)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \bar{\mathbf{F}}_e, \quad \bar{\mathbf{F}}_e = \mathbf{F}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{G}_e, \quad (6.50)$$

sendo  $\mathbf{A}_e$  e  $\mathbf{B}_e$  as representações das matrizes elementares associadas às formas bilineares  $a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$  e  $b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h)$  restritas ao elemento  $e$  e  $\mathbf{G}_e$  e  $\mathbf{F}_e$  as representações dos vetores de cargas  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{F}$  restritos ao elemento  $e$ . As equações (6.48)-(6.50) representam o clássico procedimento de condensação estática com  $\mathbf{D}$  denotando a matriz de rigidez. Observemos que o problema algébrico dado pela equação (6.48), está matematicamente bem posto, pois a coercividade da forma  $a_h(\cdot, \cdot)$  garante que sua representação matricial  $\mathbf{D}$  seja positiva definida e conseqüentemente inversível. Assim, desacoplamos o campo dos esforços e dos deslocamentos obtendo uma equação unicamente em  $\mathbf{x}$ . Assim, construímos um modelo cinemático uniformemente

estável no sentido de Lax-Milgam, isto é,

$$\mathbf{D}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq \alpha_4 \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,$$

com  $\alpha_4$  independente de  $\varepsilon^2$ , diferentemente do **Problema  $\mathbf{P}_h$** , equação (6.19), cuja constante de elipticidade depende de  $\varepsilon^2$ . Para obter os esforços  $\boldsymbol{\eta}$ , substituímos a solução do campo de deslocamentos  $\mathbf{x}$  em (6.48) e resolvemos a equação para o campo  $\boldsymbol{\sigma}$ .

#### 6.4 Experimentos numéricos

Nesta seção, apresentamos alguns experimentos numéricos para ilustrar o comportamento das formulações apresentadas neste capítulo, bem como comprovar os resultados da análise numérica desenvolvida.

**Experimento 6.4.1 :** Este experimento tem dois objetivos principais. O primeiro é mostrar que as aproximações de Galerkin utilizando polinômios de interpolação, lineares e quadráticos, de mesma ordem para os campos dos esforços e deslocamentos generalizados, são instáveis quando o parâmetro geométrico  $\varepsilon$  assume valores pequenos. O objetivo seguinte é comprovar a estabilidade e taxas de convergências da formulação mista estabilizada (**Problema  $\mathbf{ME}_h$** ) demonstradas pela análise numérica desenvolvida na seção anterior, independente do parâmetro geométrico  $\varepsilon$ , para as mesmas interpolações que tornam a formulação de Galerkin instável.

Para isso, consideramos em nossas simulações a estrutura com sua linha de centróides descrevendo uma curva no espaço, dada pela equação da hélice (4.9), de comprimento  $L = 1$ , engastada na extremidade inicial e livre na extremidade final. A única ação a que está sujeita é uma carga concentrada  $P$ , de valor unitário e direção  $\mathbf{e}_3$ , aplicada na sua extremidade livre. Suas propriedades geométricas e constitutivas são introduzidas através dos seguintes parâmetros:  $\chi_a^2 = \chi_b^2 = \chi_c^2 = \chi_d^2 = 1$ ,  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ , curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente, os quais

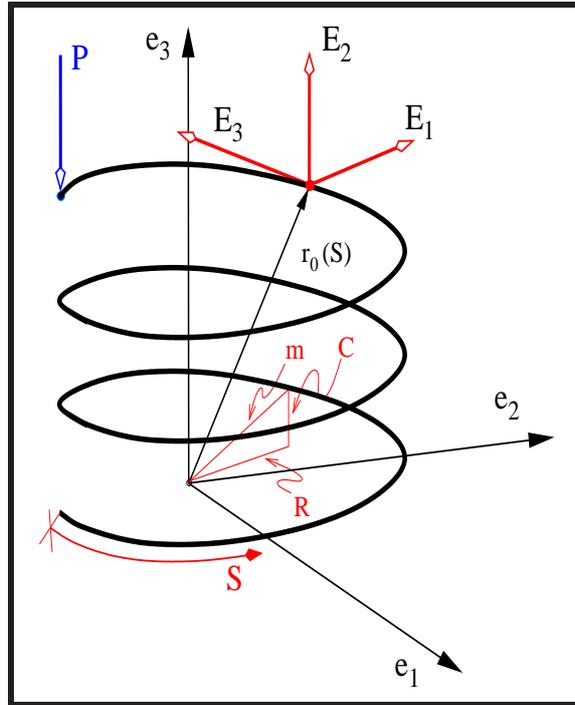


Figura 6.1: Desenho esquemático de uma hélice simplesmente engastada sujeita a uma carga concentrada, de valor unitário, aplicada na sua extremidade livre.

correspondem a uma hélice com um passo e  $C = R = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$  (ver equação (4.9)).

Para caracterizar nossos objetivos, dividimos este experimento em dois casos:

**Caso 1:** Corresponde às escolhas dos parâmetros  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$ , fazendo o **Problema  $ME_h$**  recair na formulação clássica de Galerkin.

**Caso 2:** Fixamos os parâmetros  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ , cumprindo, de acordo com a análise, as condições para a estabilidade da formulação de mínimos quadrados.

As Figuras 6.2–6.13 apresentam uma comparação entre as soluções exata e aproximadas (utilizando os casos 1 e 2) das componentes dos deslocamentos e esforços generalizados do problema. As Figuras 6.14–6.19 mostram uma comparação entre as taxas de convergências dos casos 1 e 2 para cada uma destas componentes. A malha de elementos finitos adotada para a comparação entre as soluções consiste de 6 elementos iguais e para o estudo de convergência utilizamos malhas com 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos.

Para o **Caso 1**, podemos observar pelas Figuras 6.2– 6.7, que a formulação apresenta um trancamento ou *locking* da solução do campo de deslocamento ge-

neralizado. Isto ilustra a incapacidade da formulação de Galerkin representar a solução do problema, quando os esforços e os deslocamentos são interpolados por polinômios de mesma ordem, lineares ou quadráticos, e o parâmetro geométrico  $\varepsilon$  assume valores pequenos. Como consequência desse trancamento, as soluções obtidas para os esforços generalizados são completamente deterioradas. Essas dificuldades numéricas também podem ser observadas através das taxas de convergência das variáveis do problema apresentadas nas Figuras 6.14–6.19. Note que nenhuma das componentes dos campos apresenta convergência, sendo que esforços  $\sigma_{u_{h1}}$ ,  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{u_{h3}}$  apresentam, inclusive, divergência Figuras 6.17–6.19.

Já no **Caso 2**, podemos observar pelas mesmas Figuras 6.2–6.7, que esta formulação não manifesta mais as dificuldades numéricas apresentadas na aproximação de Galerkin, isto é, ela não exibe mais o trancamento da solução que impossibilitava completamente a aproximação da solução do problema. Esse comportamento é traduzido pelas recuperações das taxas de convergência apresentadas nas Figuras 6.14–6.19. Para interpolações lineares e quadráticas dos campos dos deslocamentos generalizados, obtemos, respectivamente, taxas lineares e quadráticas na norma  $H^1$  do erro. Para interpolações lineares e quadráticas dos campos dos esforços generalizados, obtemos taxas lineares e quadráticas na norma  $L_2$  do erro. Note que todas as componentes das variáveis do problema apresentam taxas de convergência de acordo com a estimativa obtida pela análise numérica, taxas ótimas para os deslocamentos generalizados e sub-ótimas, com uma ordem a menos, para os esforços generalizados.

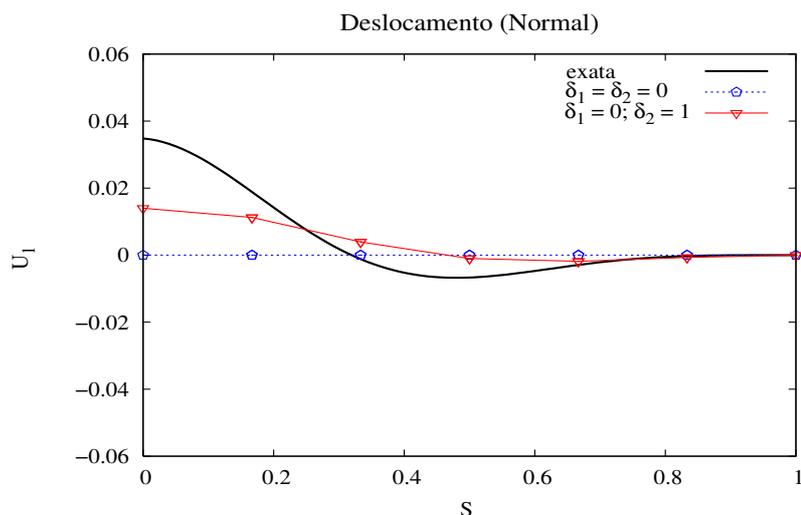


Figura 6.2: Componente  $u_{h1}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

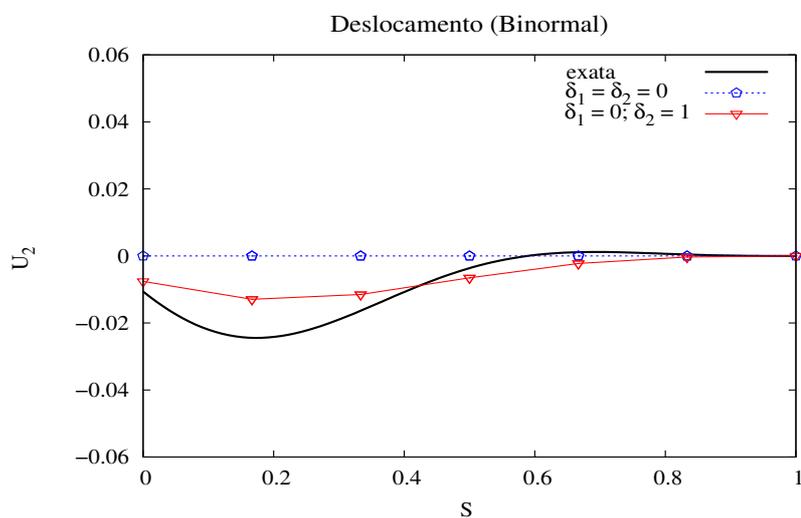


Figura 6.3: Componente  $u_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

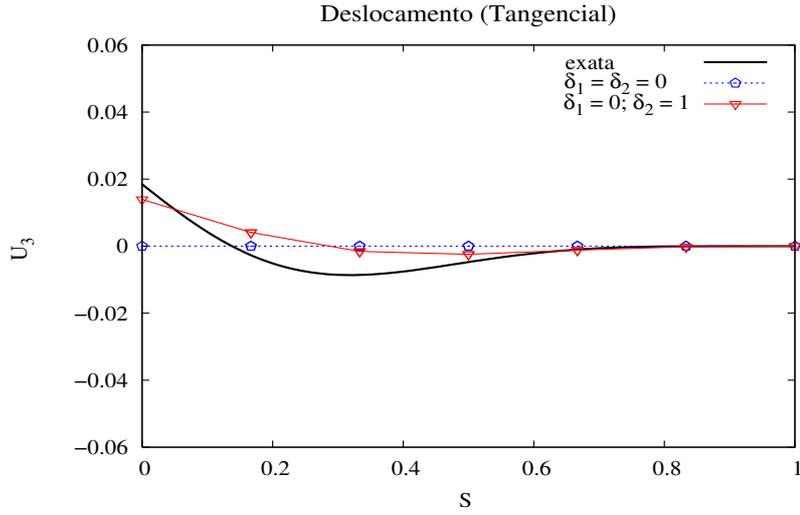


Figura 6.4: Componente  $u_{h3}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

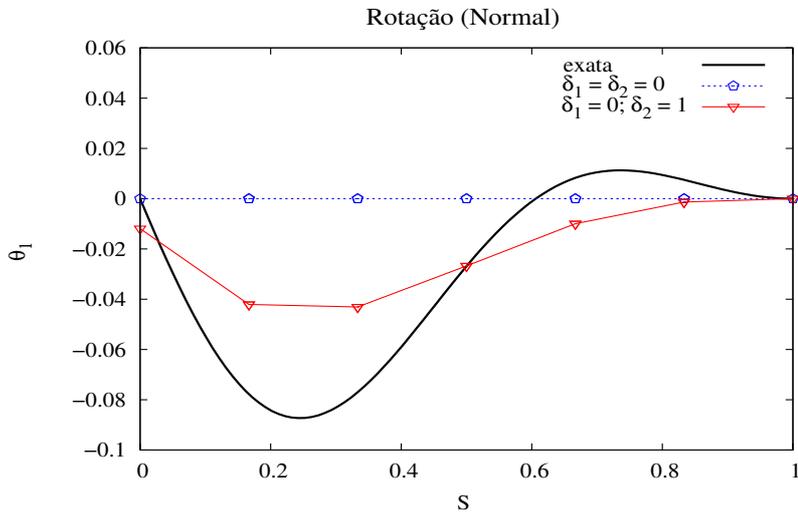


Figura 6.5: Componente  $\theta_{h1}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

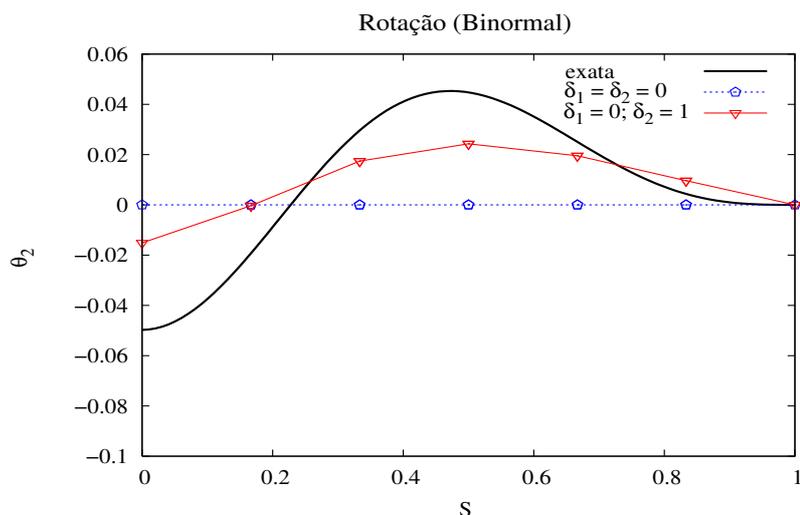


Figura 6.6: Componente  $\theta_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

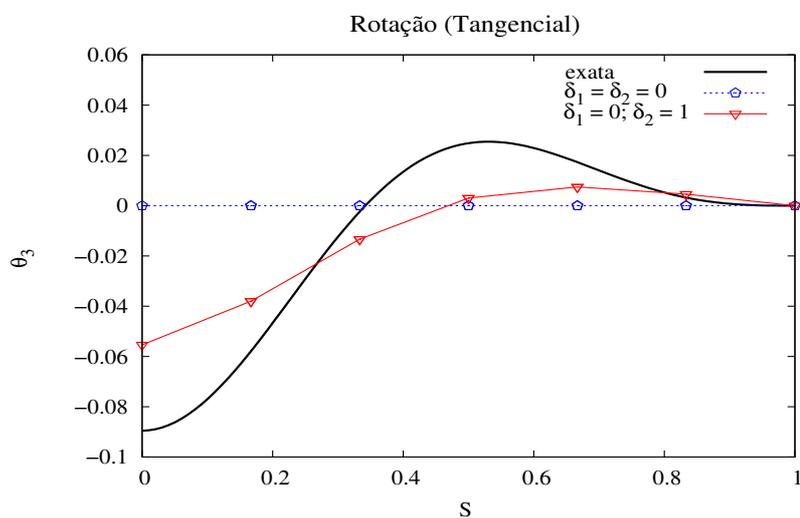


Figura 6.7: Componente  $\theta_{h3}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

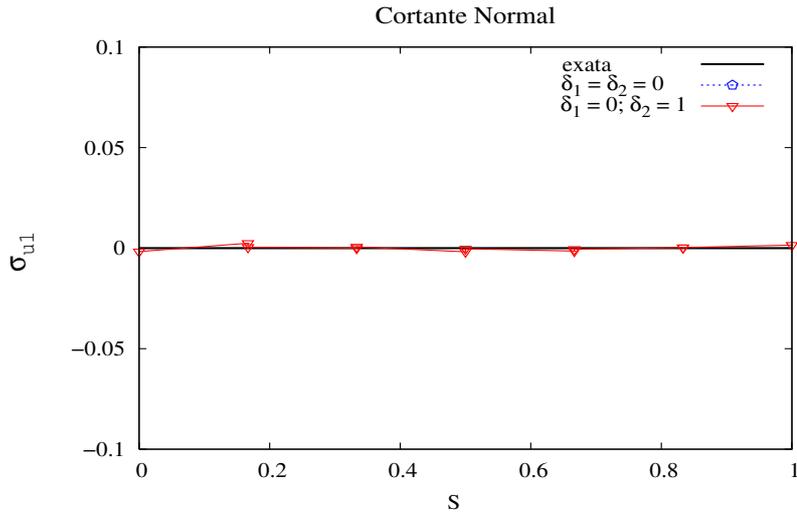


Figura 6.8: Componente  $\sigma_{u_{h_1}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

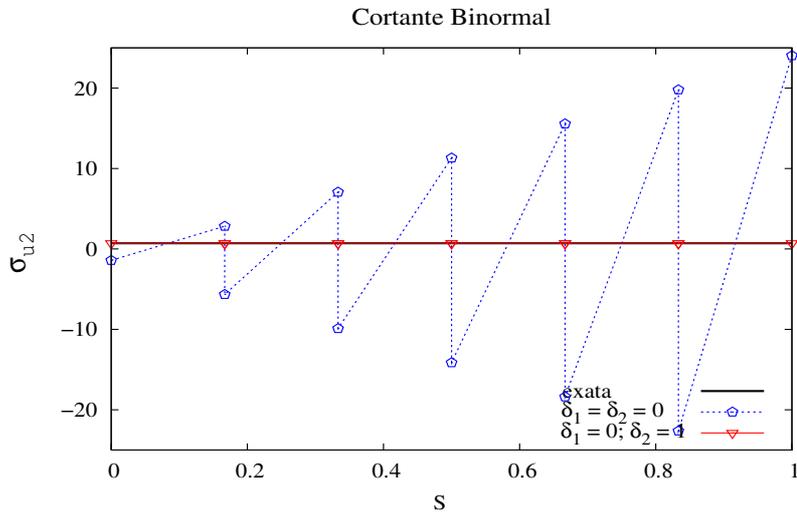


Figura 6.9: Componente  $\sigma_{u_{h_2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

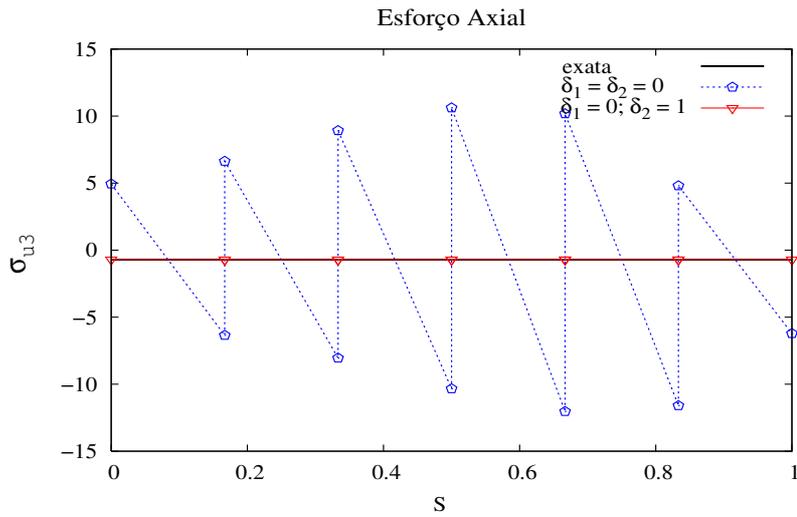


Figura 6.10: Componente  $\sigma_{u_{h_3}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

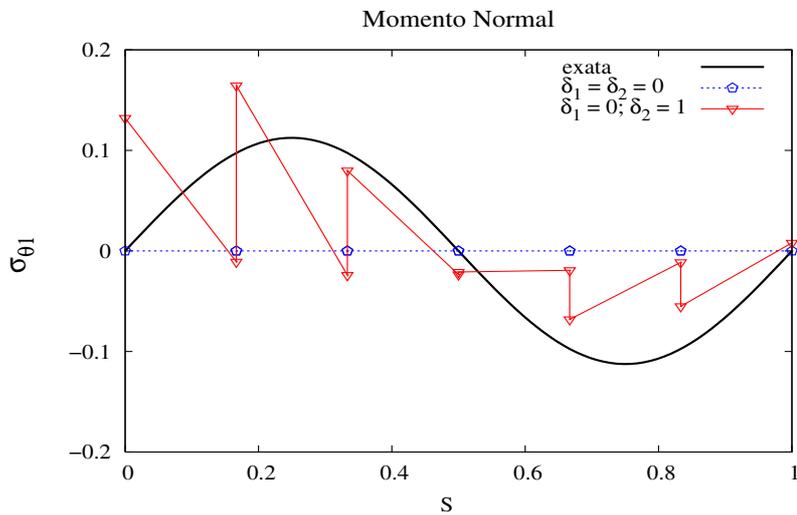


Figura 6.11: Componente  $\sigma_{\theta_{h_1}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

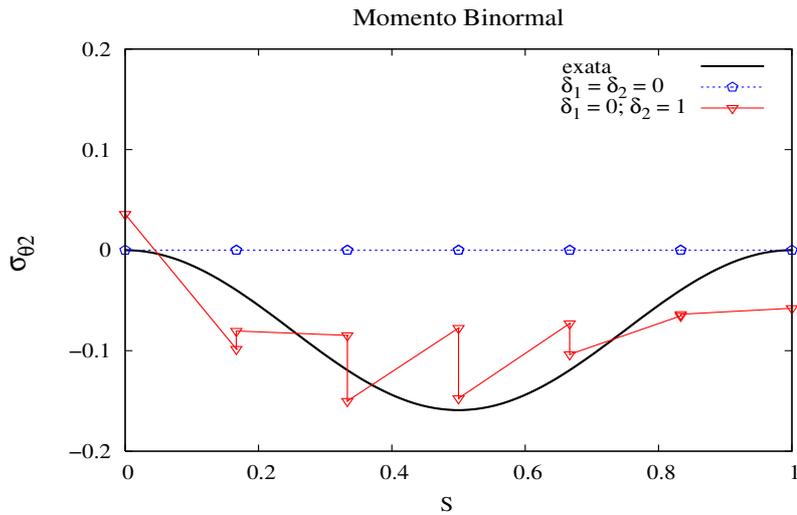


Figura 6.12: Componente  $\sigma_{\theta_{h_2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

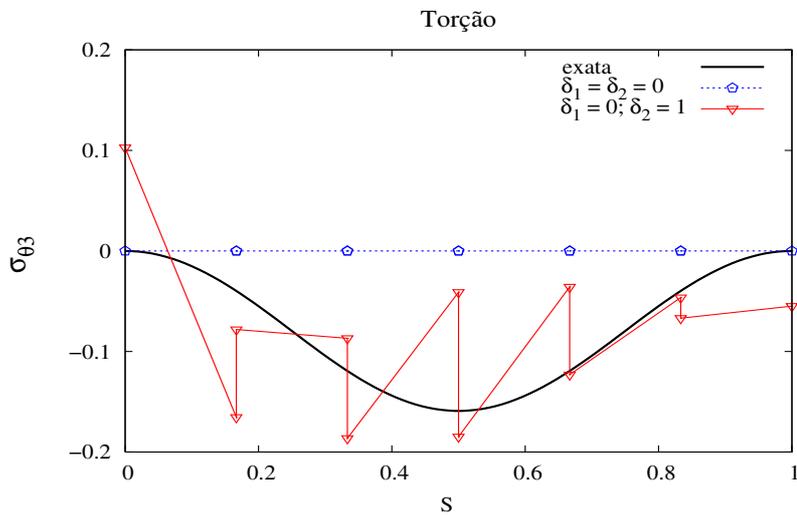


Figura 6.13: Componente  $\sigma_{\theta_{h_3}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

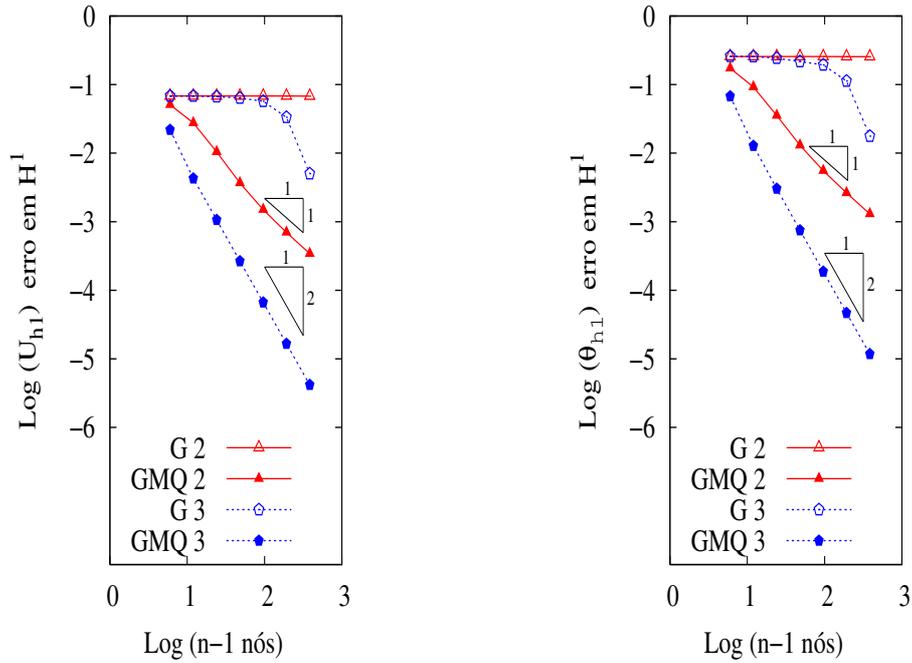


Figura 6.14: Log do erro de  $u_{h1}$  e  $\theta_{h1}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ .

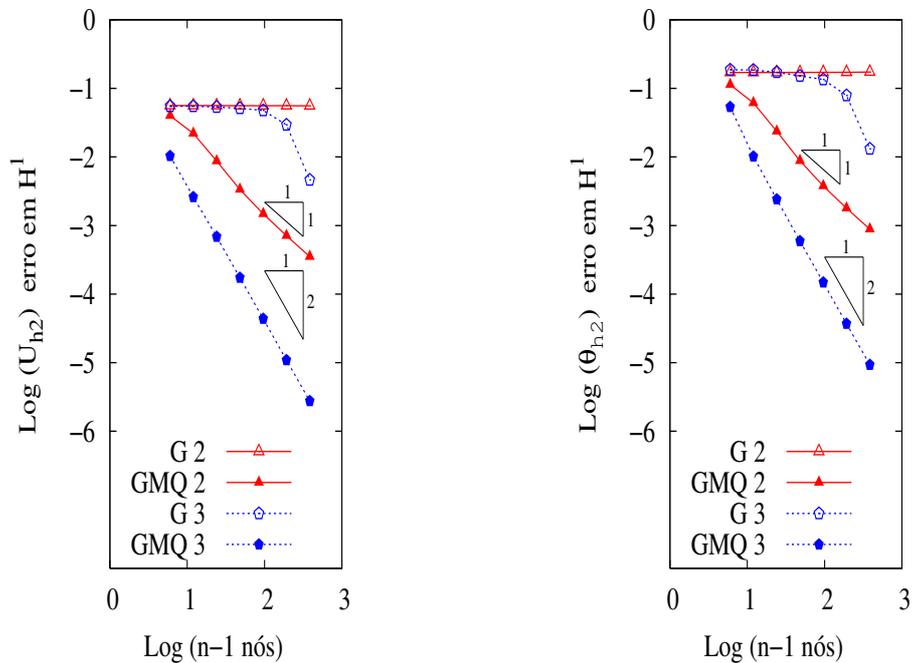


Figura 6.15: Log do erro de  $u_{h2}$  e  $\theta_{h2}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ .

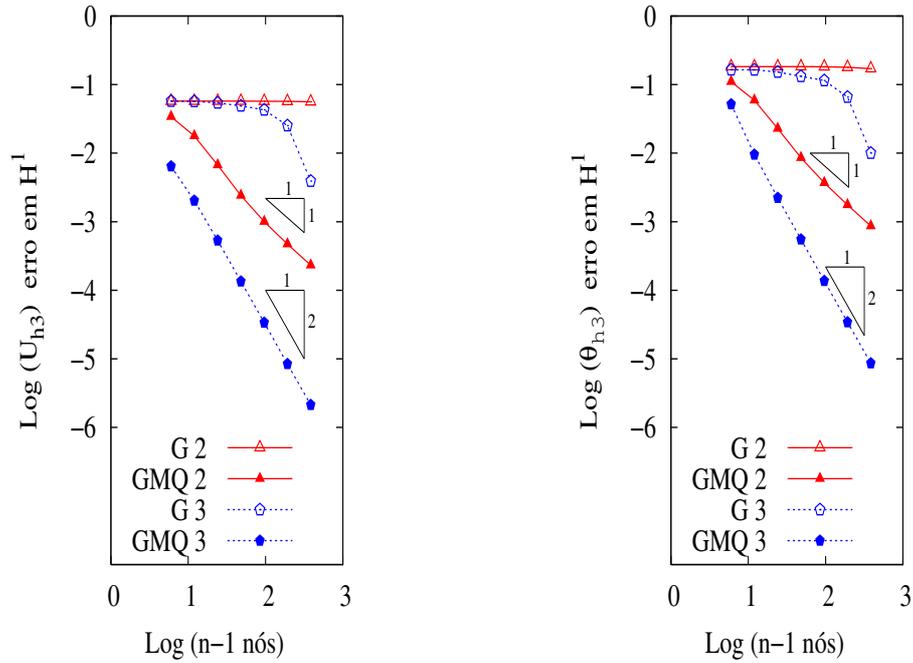


Figura 6.16: Log do erro de  $u_{h3}$  e  $\theta_{h3}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ .

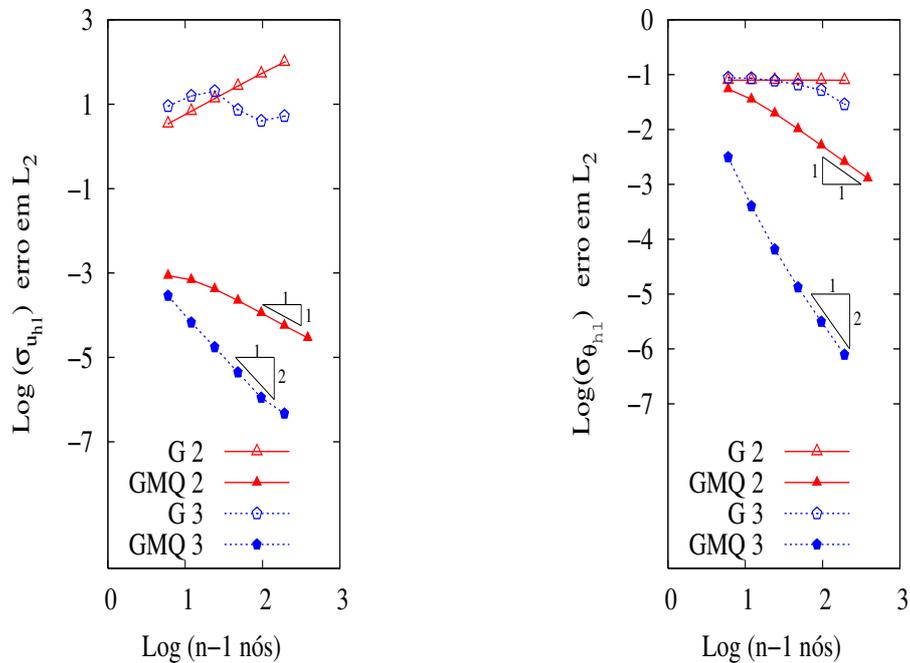


Figura 6.17: Log do erro de  $\sigma_{u_{h1}}$  e  $\sigma_{\theta_{h1}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ .

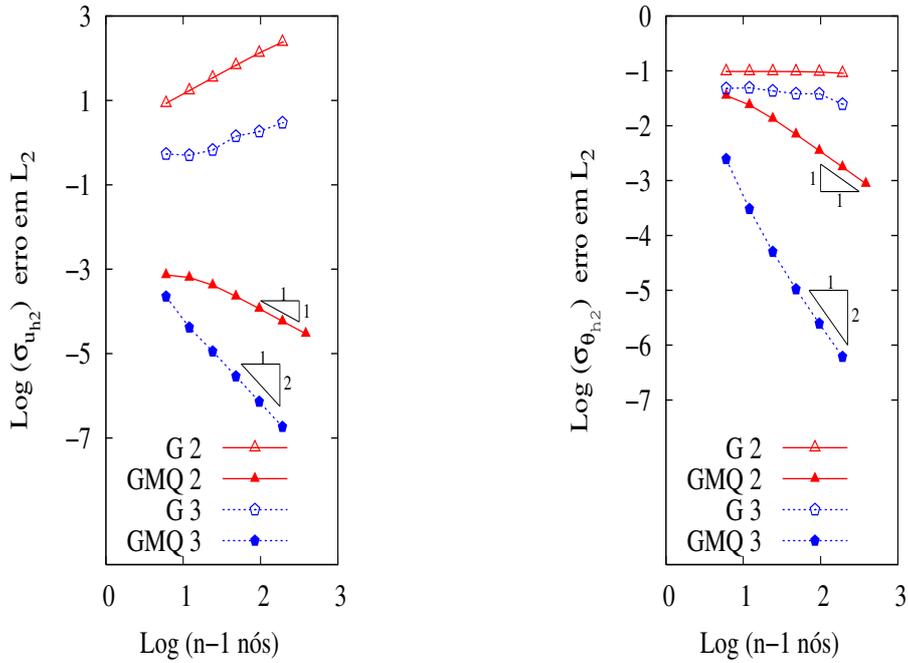


Figura 6.18: Log do erro de  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ .

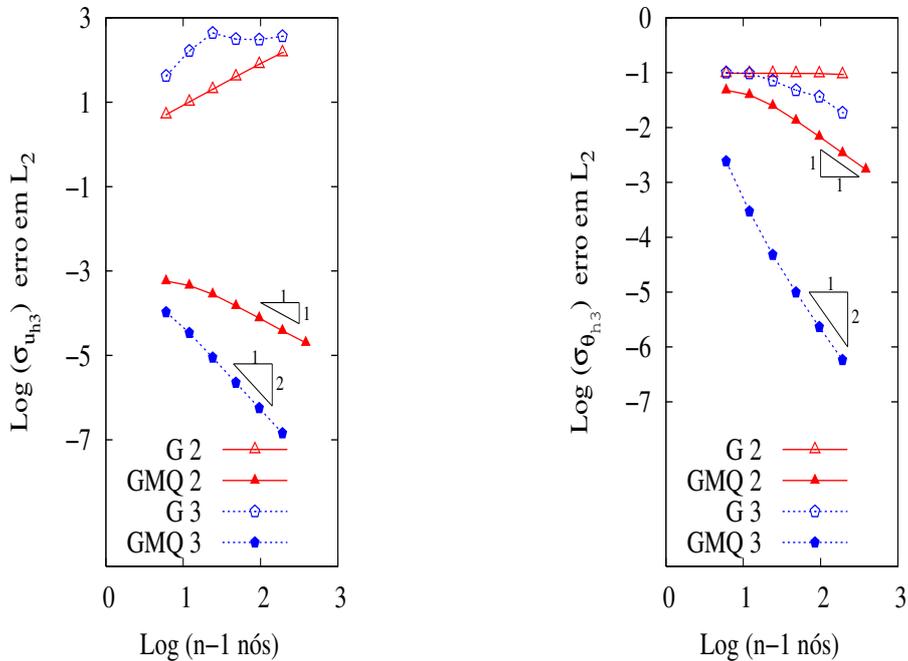


Figura 6.19: Log do erro de  $\sigma_{u_{h3}}$  e  $\sigma_{\theta_{h3}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados. Para a formulação de Galerkin (G) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$  e para a mista (GMQ) utilizamos  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 1$ .

**Experimento 6.4.2 :** Este experimento numérico visa estudar a influência dos parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$  na precisão da solução da formulação de mínimos quadrados (**Problema ME<sub>h</sub>**), utilizando polinômios lineares de mesma ordem para os campos dos esforços e deslocamentos generalizados, e parâmetro geométrico  $\varepsilon$  pequeno. Para isso, consideramos a estrutura com a mesma geometria e carregamento do **Experimento 6.4.1**, e os parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$  caracterizados pelos seguintes casos:

**Caso 1:** Fixamos o parâmetro  $\delta_2 = 1$  e variamos o parâmetro  $\delta_1$ , fazendo este assumir os valores  $10^{-3}, 1$  e  $10^3$ .

**Caso 2:** Consideramos fixo o parâmetro  $\delta_1 = 0$  e tomamos o parâmetro  $\delta_2 = 10^{-3}, 1, 10^3$ . Em todos os casos assumimos o parâmetro geométrico  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e apresentamos resultados relativos a apenas uma componente de cada campo,  $\sigma_u$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\theta}$ , para ilustrar o comportamento de todos os campos, que apresentam comportamentos semelhantes.

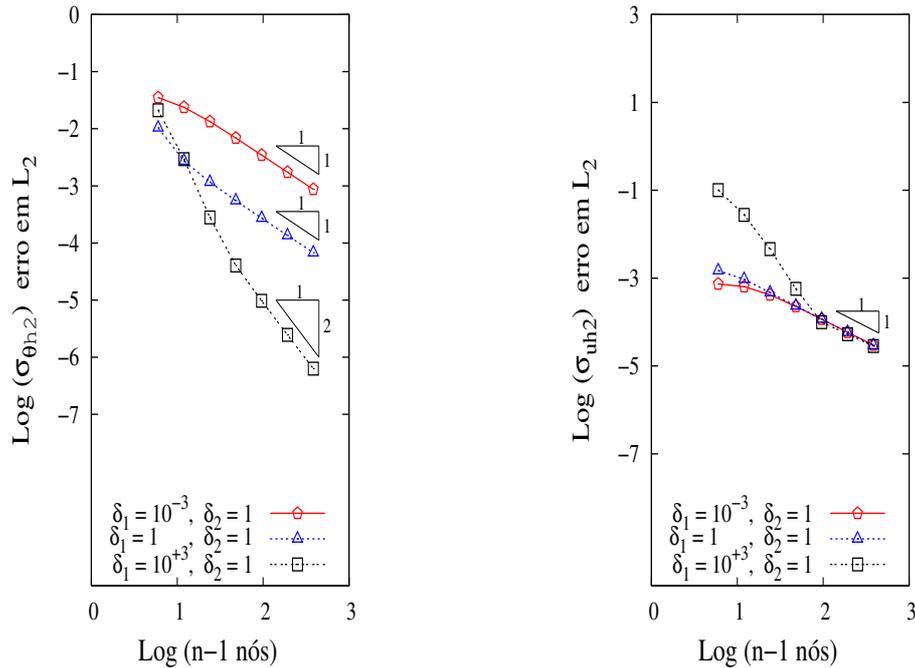


Figura 6.20: Log do erro de  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados.

As Figuras 6.20 e 6.21 apresentam as taxas de convergência dos esforços generalizados  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$ , e dos deslocamentos generalizados  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$ , obtidos com as

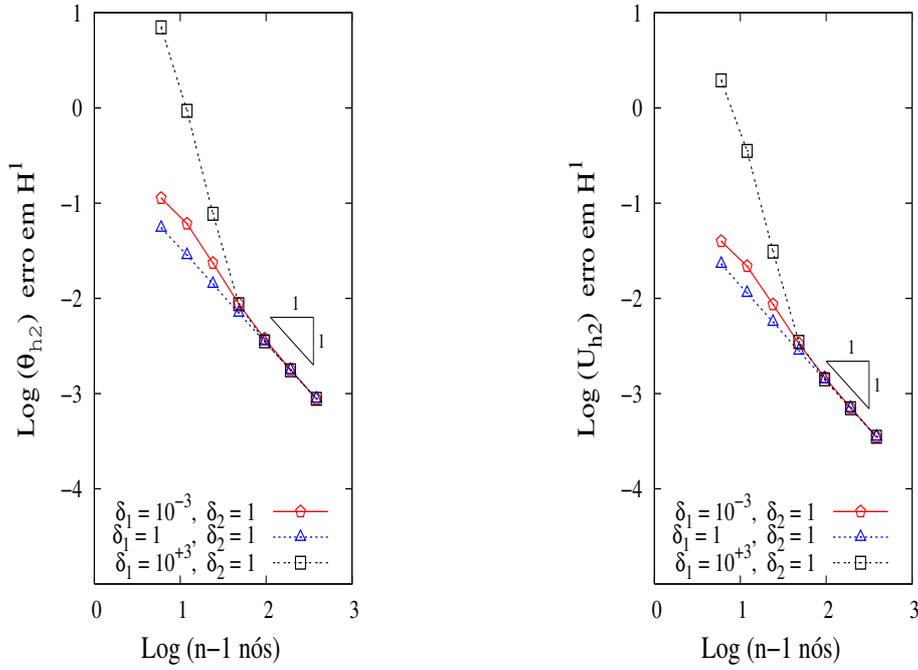


Figura 6.21: Log do erro de  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, com uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre e parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ ,  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ . A malha consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados.

escolhas dos parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dados pelo **Caso 1**. Observe que em todos os casos, tanto os esforços quanto os deslocamentos generalizados são estáveis e apresentam as taxas de convergências previstas pela análise numérica, independentes dos valores de  $\delta_1$ . Entretanto, a ordem de grandeza desse parâmetro exerce influência na precisão de todos os campos da formulação. Para valores de  $\delta_1$  pertencente ao intervalo  $(0,1]$ , todos os campos da formulação apresentam ganhos na sua precisão. O erro destes campos decrescem na medida em que  $\delta_1$  torna-se mais próximo da unidade. Esse ganho na aproximação pode ser melhor observado nas Figuras 6.22 a 6.25, as quais apresentam as soluções dos campos  $u_{h2}$ ,  $\theta_{h2}$ ,  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$  fazendo  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ . Pela Figura 6.20, podemos constatar também que à medida em que o valor do parâmetro  $\delta_1$  aumenta e afasta-se da unidade, o valor do erro do esforço  $\sigma_{\theta_{h2}}$  (momento fletor) sofre uma sensível redução. Por outro lado, valores elevados desse parâmetro causam uma deterioração das soluções dos campos  $\sigma_{u_{h2}}$ ,  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$ , tornando a aproximação dependente do grau de refinamento da malha.

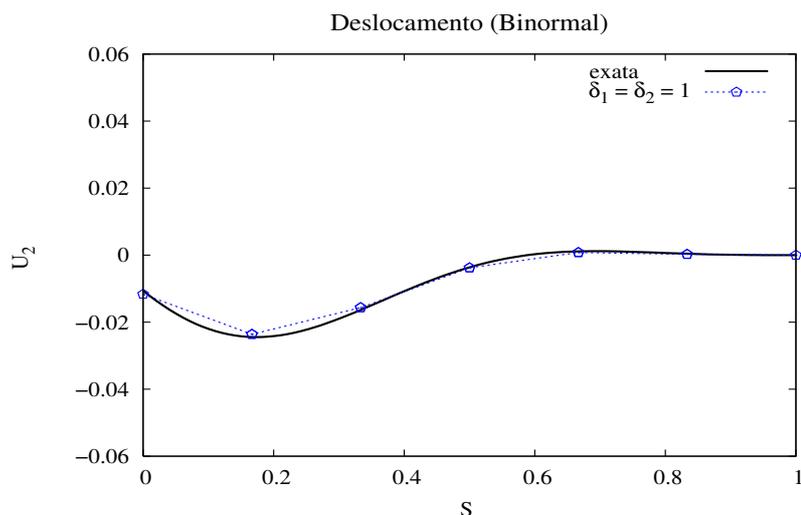


Figura 6.22: Componente  $u_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

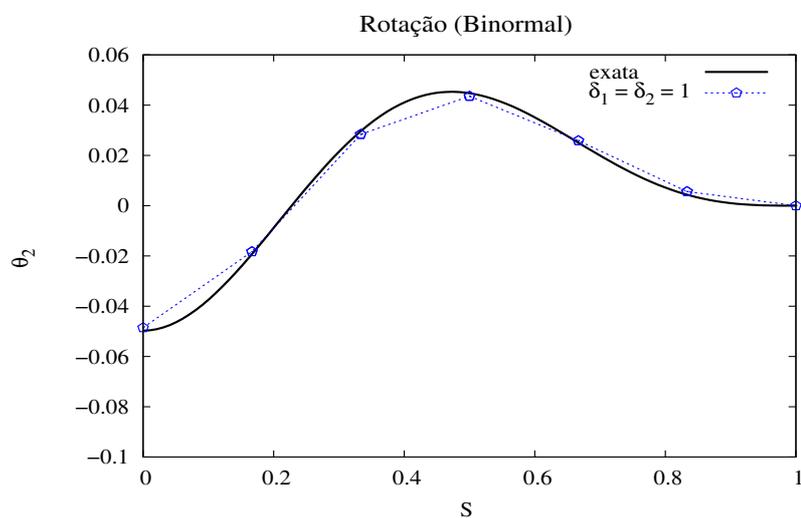


Figura 6.23: Componente  $\theta_{h2}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

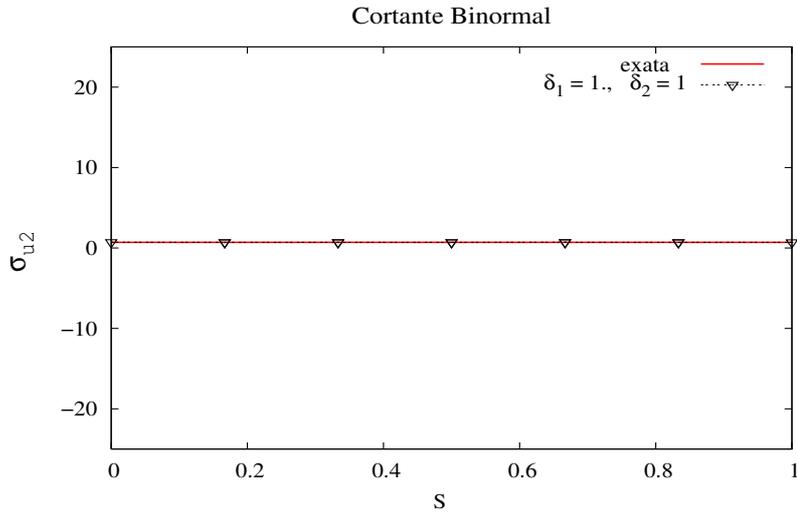


Figura 6.24: Componente  $\sigma_{u_{h2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

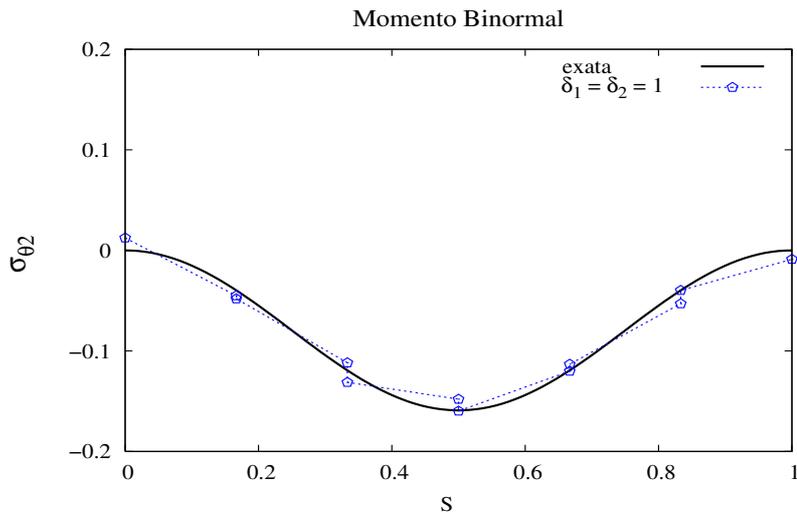


Figura 6.25: Componente  $\sigma_{\theta_{h2}}$  da configuração deformada de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  aplicada na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6 elementos uniformemente espaçados.

As Figuras 6.26 e 6.27 apresentam as taxas de convergência dos esforços generalizados  $\sigma_{u_{h2}}$  e  $\sigma_{\theta_{h2}}$ , e dos deslocamentos generalizados  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$ , obtidos com as escolhas dos parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dados pelo **Caso 2**. Note que em todos os casos, tanto os esforços quanto os deslocamentos generalizados iniciam uma perda

de convergência quando o parâmetro  $\delta_2$  assume o valor de  $10^{-3}$ . Para valores menores que esse a convergência piora, tornando a formulação instável. Entretanto, para valores de  $\delta_2 \geq 1$ , tanto os valores dos erros quanto das taxas de convergências dos campos  $\sigma_{u_{h2}}$ ,  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$  não sofrem nenhuma variação, isto é, a solução do problema apresenta comportamento robusto em relação a estes parâmetro, e apresenta sempre as mesmas taxas de convergência previstas pela análise. Por outro lado, o campo  $\sigma_{u_{h2}}$  tem suas taxas de convergências mantidas, mas o valor do seu erro diminui drasticamente com o incremento do parâmetro  $\delta_2$ . Isto significa que o aumento deste parâmetro traz apenas ganhos de precisão, mas não afeta a estabilidade.

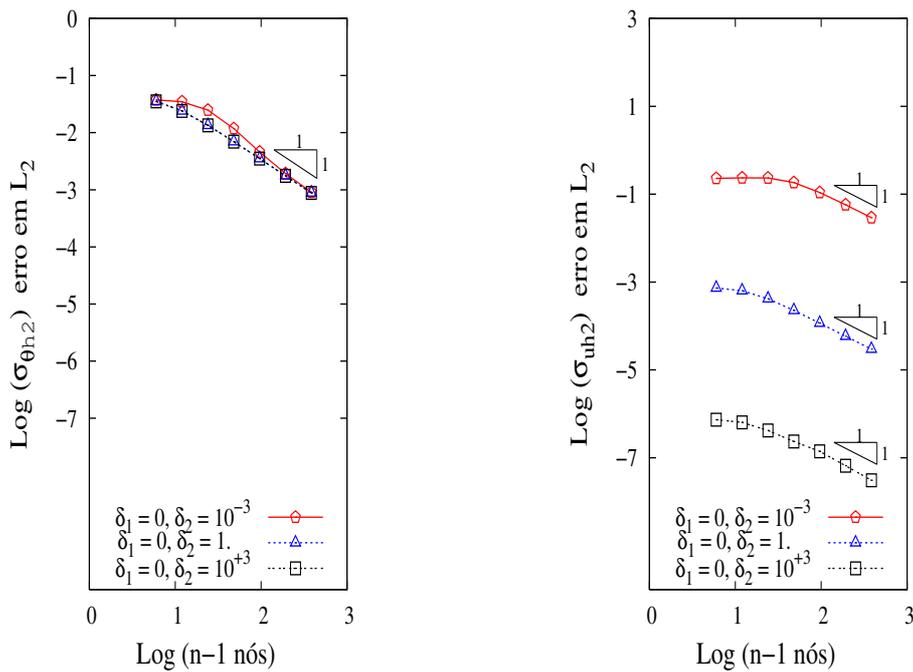


Figura 6.26: Log do erro de  $\sigma_{\theta_{h2}}$  e  $\sigma_{u_{h2}}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados.

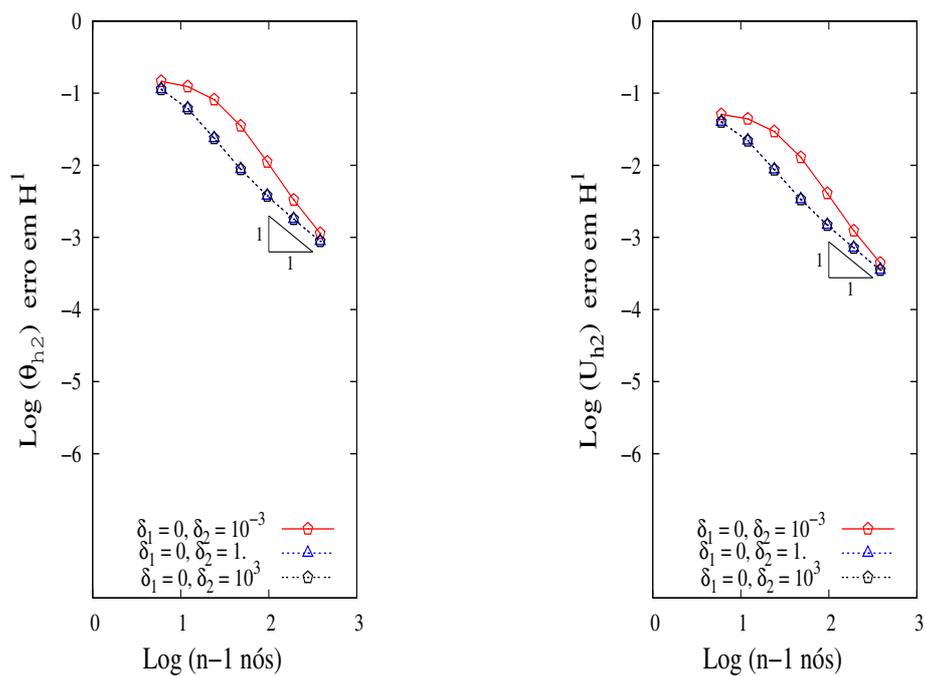


Figura 6.27: Log do erro de  $\theta_{h2}$  e  $u_{h2}$  versus o número de elementos de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $P = 1\mathbf{e}_3$  na sua extremidade livre, com parâmetro  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$  e curvatura e torção  $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$ , respectivamente. A malha de elementos finitos adotada consiste de 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384 elementos uniformemente espaçados.

# Capítulo 7

## Exemplos de aplicações

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações dos modelos analisados anteriormente. Iniciamos com uma aplicação do modelo mais básico, correspondente ao **Problema E**, introduzido na Seção (5.4.1). Em seguida fazemos algumas aplicações do modelo não-linear.

### 7.1 Um estudo de estabilidade de dutos aquecidos enterrados

Uma configuração típica de estruturas com movimentos contidos é aquela correspondente a dutos enterrados. Quando estes dutos são projetados para transportar algum fluido aquecido, por exemplo, as restrições induzidas pelo solo ao movimento de expansão do duto, podem gerar forças de compressão instabilizadoras e o duto pode flambar tanto no plano horizontal quanto no plano vertical HOBBS [1981], HOBBS [1984], KERR [1978]. Neste tipo de problema ocorre uma competição entre a força instabilizadora e as forças de contenção também provenientes da ação do solo sobre o duto. As forças de contenção podem ser simuladas, por exemplo, como fundações elásticas.

Supondo que um duto de comprimento  $L$  e rigidez à flexão  $EI$ , está sujeito a uma carga transversal de perturbação  $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho \sin\left(\frac{n\pi}{L}S\right)$ , distribuída ao longo do seu comprimento e com amplitude  $0 < \varrho \ll 1$ , que o solo pode ser representado por molas elásticas com rigidez por unidade de comprimento de arco,  $K_s \geq 0$ , e que a força instabilizadora, devido a uma variação térmica, aplicada nos extremos

do duto, seja  $P \geq 0$ , temos o seguinte problema correspondente a uma extensão do **Problema E** apresentado na Seção (5.4.1):

**Problema  $\bar{E}$** : Encontrar  $u \in \mathbb{S}_e^*$  tal que

$$(EIu'', v'') - P(u', v') + K_s(u, v) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \varrho \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}S\right), v \right) \quad \forall v \in \mathbb{S}_e^*, \quad (7.1)$$

sendo

$$\mathbb{S}_e^* = \{v; v \in H^2(\mathcal{I}), v(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

A equação de Euler Lagrange para este problema é dada por

$$EI \frac{d^4 u}{dS^4} + P \frac{d^2 u}{dS^2} + K_s u = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}S\right) \quad \forall S \in \mathcal{I} \quad (7.2)$$

cuja solução é expressa por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u)_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}S\right) \quad \forall S \in \mathcal{I}, \quad n \in \mathcal{N}, \quad (7.3)$$

onde  $\mathcal{N}$  é o conjunto dos números naturais e

$$(u)_n = \frac{\varrho}{EI \frac{n^4 \pi^4}{L^4} - P \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + K_s}. \quad (7.4)$$

A instabilidade da estrutura ou perda de sua rigidez é caracterizada quando o deslocamento na direção transversal ( $u$ ) tende ao infinito ou seja, quando o denominador da equação (7.4) tende a zero. Para isto, basta encontrarmos um valor de carga crítica  $P$  que torna o denominador da relação (7.4) identicamente nulo. Quando a base elástica inexistente ( $K_s \approx 0$ ), temos que esse valor crítico pode ser calculado diretamente pela relação

$$P_{cr} = EI \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad n \in \mathcal{N}. \quad (7.5)$$

Por outro lado, se a base elástica encontra-se presente ( $K_s \gg 0$ ), o valor da carga crítica é calculada através da relação

$$P_{crk} = EI \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{K_s L^2}{n^2 \pi^2} \quad n \in \mathcal{N}. \quad (7.6)$$

Como podemos observar pela equação (7.5), a ausência de base elástica faz com que o menor valor da carga crítica ocorra logo no primeiro modo de flambagem ( $n = 1$ ). Maiores valores de  $n$  acarretam intensidades de  $P_{cr}$  que podem não ser alcançados na prática.

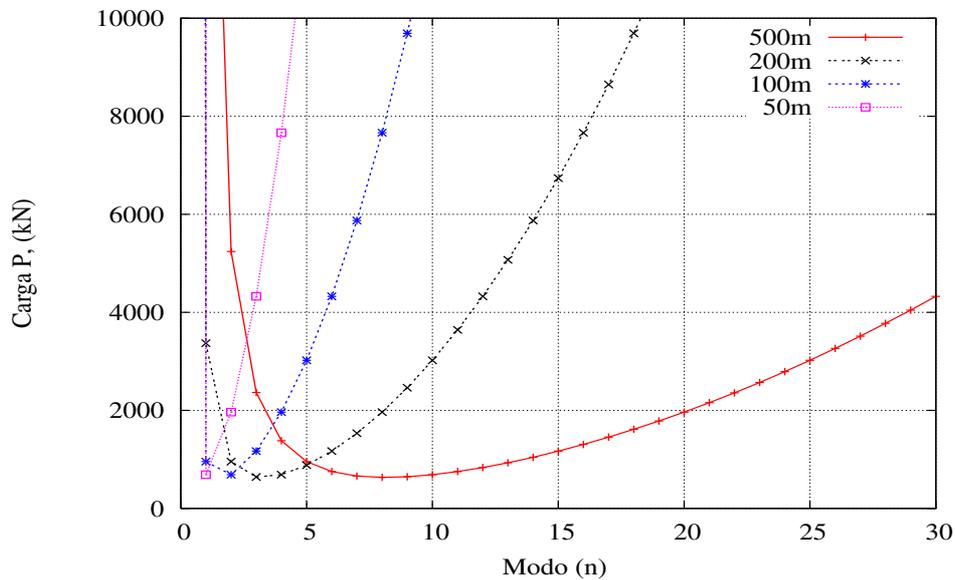


Figura 7.1: Relação entre o valor da carga crítica e o número do modo de flambagem para uma estrutura com módulo de Young  $E = 206GPa$ , momento de inércia  $I = 62.960cm^4$ , comprimentos  $L = 50, 100, 200, 500$  metros e confinada em uma base elástica simulada por molas com módulo de rigidez  $K_s = 800N/m$ .

Com a presença de apoios elásticos, a menor carga crítica da estrutura sempre alcança ordem de grandeza superior àquela obtida sem apoios elásticos. Além disso, sua instabilidade não ocorre necessariamente no primeiro modo de flambagem ( $n = 1$ ). Isso pode ser observado através da Figura 7.1, a qual mostra o gráfico dos valores das cargas críticas  $P_{crk}$  em função do modo de flambagem ( $n$ ) de estruturas com módulo de Young  $E = 206GPa$ , momento de inércia da seção transversal  $I = 62.960cm^4$  e comprimentos  $L = 50, 100, 200$  e  $500$  metros. Elas encontram-se

biapoiadas e confinadas em uma base elástica simulada por molas com módulo de rigidez  $K_s = 800N/m$ . Podemos constatar claramente pelas curvas que os modos que apresentam menor carga crítica para os comprimentos 50, 100, 200 e 500 metros são  $n = 1, 2, 3$  e  $8$ , respectivamente. Mais ainda, o menor valor da  $P_{crk}$  (com base elástica) é sempre estritamente maior que o valor  $P_{cr}$  (sem base elástica).

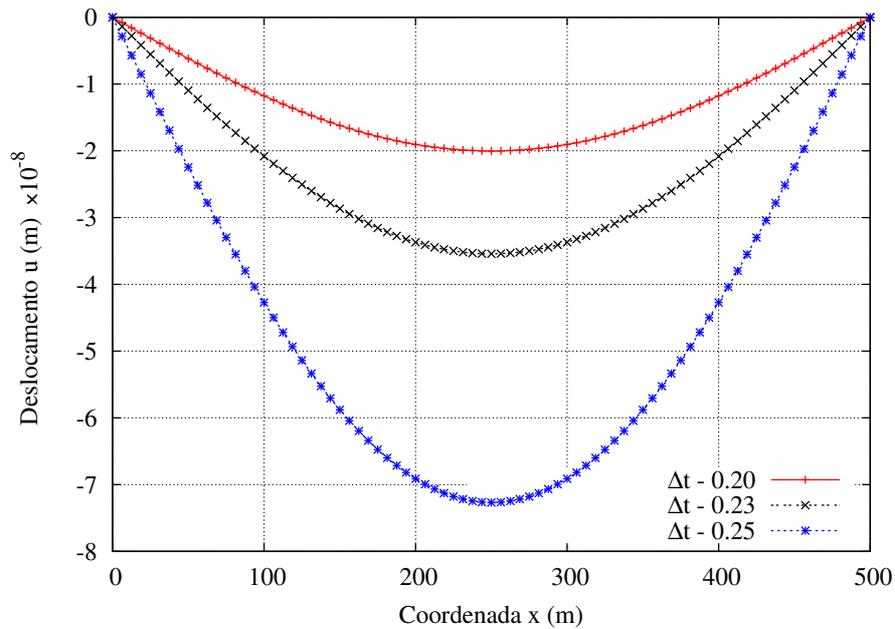


Figura 7.2: Configuração deformada de uma barra biapoiada, com módulo de Young  $E = 206GPa$ , coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 1.17 \times 10^{-5}mm/mm/^{\circ}C$ , área da seção transversal  $A = 100cm^2$ , momento de inércia  $I = 62.960cm^4$  e comprimentos  $L = 50, 100, 200$  e  $500$  metros. A única ação externa é uma força axial proveniente dos efeitos térmicos

Para ilustrar as configurações deformadas que a estrutura assume devido à variação térmica, utilizamos as equações (7.3) e (7.4) para simular duas situações de um duto biengastado, de configuração inicial reta e comprimento  $500m$ . Em uma situação, ele encontra-se confinado entre bases elásticas, enquanto que na outra situação esse confinamento inexistente. Em ambos os casos consideramos a estrutura sujeita a uma carga axial  $P = EAL\alpha\Delta t$ , onde  $\alpha$  é coeficiente de dilatação térmica do material do duto, que simula o efeito da reação que surge devido ao impedimento da deformação gerada pela variação da temperatura. As propriedades dos materiais são iguais às do experimento anterior e caracterizam, aproximadamente,

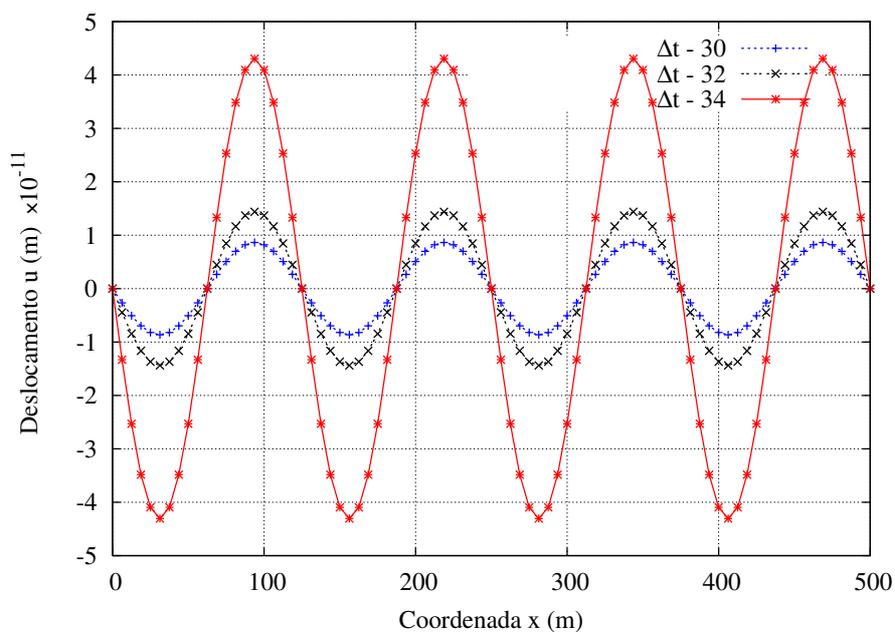


Figura 7.3: Configuração deformada de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 1.17 \times 10^{-5}mm/mm/^{\circ}C$ , área da seção transversal  $A = 100cm^2$ , momento de inércia  $I = 62.960cm^4$  e comprimentos  $L = 50, 100, 200$  e  $500$  metros. Ela está biapoiada e confinada sobre uma base elástica simulada por molas com módulo de rigidez  $K_s = 800N/m$ . A única ação externa é uma força axial proveniente dos efeitos térmicos

uma situação real.

Como podemos observar na Figura 7.2, a situação em que o duto não está sujeito aos efeitos do apoio elástico tem deformações ocorrendo predominantemente no primeiro modo, fazendo com que seu comprimento de flambagem seja caracterizado como todo o comprimento da estrutura. Em contrapartida, no duto confinado, Figura (7.3), a estrutura apresentou a mínima carga crítica de flambagem apenas no oitavo modo.

## 7.2 Estudos do comportamento pós-crítico de dutos aquecidos enterrados

O modelo analisado acima, embora simples, é bastante interessante para o entendimento do comportamento pré-crítico de linhas flexíveis confinadas em uma base elástica. Entretanto, suas hipóteses cinemáticas não permitem que ele seja aplicado a casos mais gerais que envolvam comportamentos pós-críticos. Para pro-

ceder com estudos que contemplem comportamentos desta natureza, utilizamos o modelo não-linear, descrito na Seção 3.2 e agregamos a ele um termo que caracteriza uma fundação elástica semelhante ao descrito acima, que baseia-se nas hipóteses de Winkler (VOLTERRA & GAINES [1971]). Com esse termo adicional, o **Problema  $\overline{\mathbf{G}}_1$**  passa a ser apresentado da seguinte forma:

**Problema  $\overline{\mathbf{G}}_1$ :** Encontrar  $(\mathbf{r}_{oh}^n, \cdot) \in \mathbb{L}_h$  tal que para todo  $(\boldsymbol{\eta}_{oh}^n, \cdot) \in \mathbb{L}_h$

$$\begin{aligned} \left( (E - G)I(S) \mathbf{r}_{oh}^{\prime\prime n}, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^{\prime\prime n} \right) + K_{si} \left( \mathbf{r}_{ohi}^{\prime n}, \overline{\mathbf{q}}_{ohi}^{\prime n} \right) + \mathfrak{p}_p \left( \mathbf{r}_{oh}^{\prime n}, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^{\prime n} \right) \geq (\overline{\mathbf{n}}, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^n) + \\ + \left( \mathfrak{p}_p \boldsymbol{\vartheta}_{3h}^{n-1} - \boldsymbol{\lambda}_{3h}^n, \overline{\mathbf{q}}_{oh}^{\prime n} \right), \end{aligned}$$

onde  $\overline{\mathbf{q}}_{oh}^n = \boldsymbol{\eta}_{oh}^n - \mathbf{r}_{oh}^n$  e  $K_s \geq 0$  é o coeficiente de rigidez das molas.

A seguir, apresentamos alguns experimentos numéricos que objetivam demonstrar a potencialidade do modelo e do algoritmo no estudo do comportamento de dutos confinados sujeitos a carregamentos originados, por exemplo, de um gradiente de temperatura ou de pressões internas.

**Experimento 7.2.1 :** Neste primeiro experimento, consideramos um duto com as seguintes propriedades geométricas e constitutivas: módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo da seção transversal  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$  e comprimento  $L = 501m$ . A estrutura encontra-se inicialmente reta e assentada sobre uma base elástica com rigidez  $K_{s2} = 800N/m$ . A única ação externa a que a estrutura está submetida é um deslocamento na sua extremidade final até a posição  $r_o(L) = (500, 0, 0)$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(0) = 0, \\ \mathbf{r}_{o2}(0) = \mathbf{r}_{o3}(0) = 0, \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(L) = 500, \\ \mathbf{r}_{o2}(L) = \mathbf{r}_{o3}(L) = 0, \end{array} \right. \quad (7.7)$$

A malha de elementos finitos adotada consiste de 200 elementos uniformemente

espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos  $\lambda_{ih}^0(S) = 0$ ,  $\vartheta_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$ ,  $\vartheta_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$ . Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 7.3 \times 10^5$ .

As Figuras 7.4, 7.5 e 7.6 caracterizam as projeções nos planos  $[XY]$ ,  $[XZ]$  e  $[ZY]$ , respectivamente, da configuração deformada da estrutura. Note que esse modelo consegue descrever com eficiência o comportamento pós-crítico de dutos longos e flexíveis. Mais ainda, consegue caracterizar os efeitos favoráveis e estabilizantes de uma base elástica quando o duto está sujeito a esforços de compressão. Esta configuração deformada apresenta uma energia de deformação de  $3.0328 \times 10^5 N \cdot m$ . Na Tabela 7.1 apresentamos os momentos fletores resultantes, obtidos em alguns nós da malha. Para realizar esse experimento, o algoritmo executou 3965 iterações e gastou aproximadamente 10 segundos. Para processarmos este exemplo e os subsequentes, utilizamos um microcomputador com processador Core 2 de  $1.86GHz$  e 64bits.

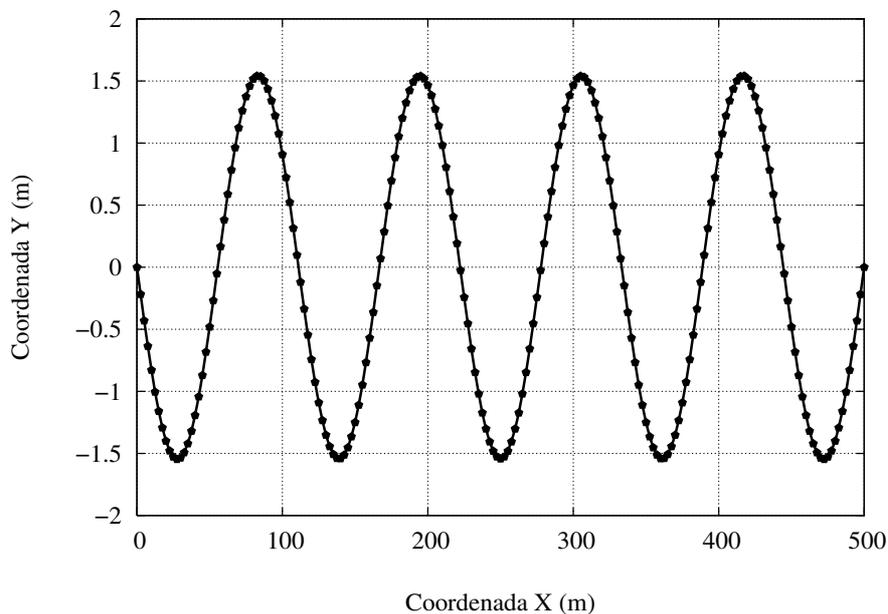


Figura 7.4: Projeção XY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição  $X = 500m$ .

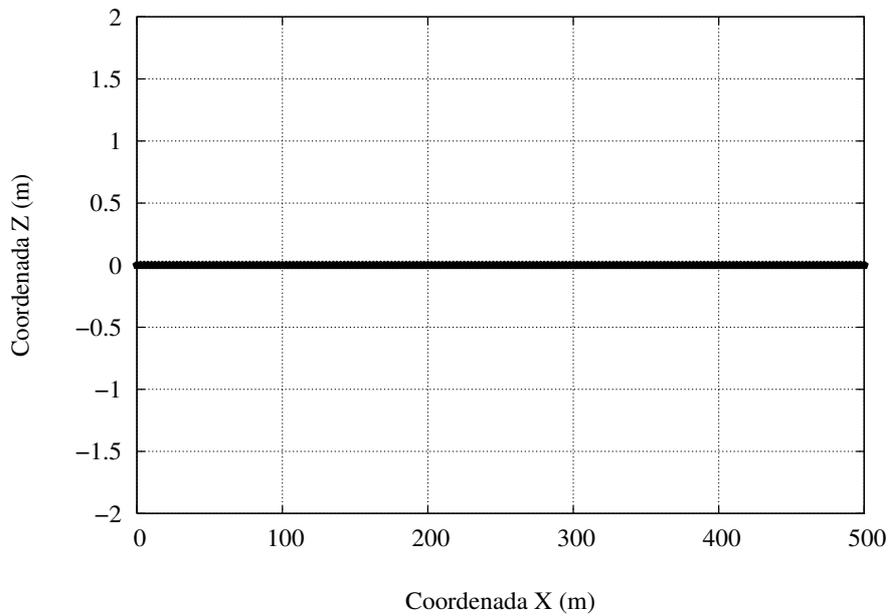


Figura 7.5: Projecção XZ da configuração deformada de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição  $X = 500m$ .

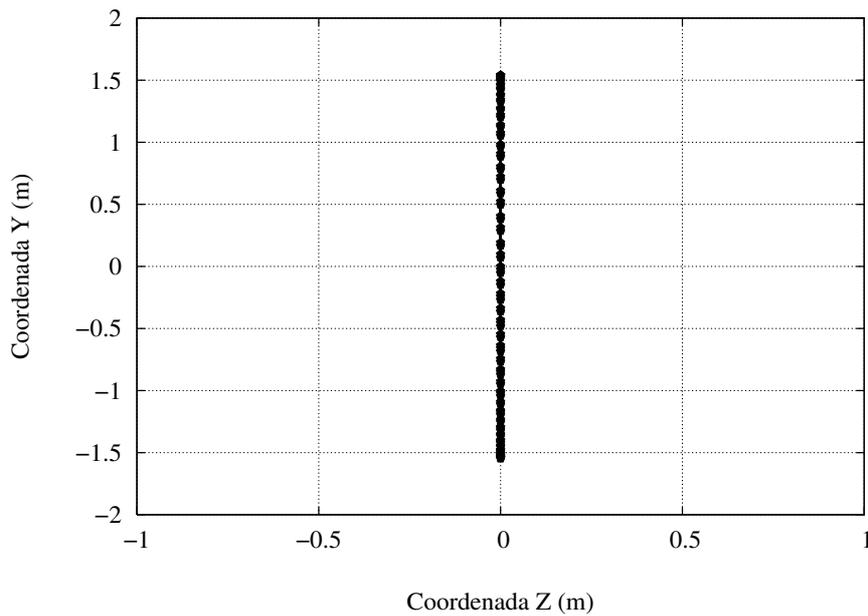


Figura 7.6: Projecção ZY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição  $X = 500m$ .

| Nó | M. Fletor ( $m_{2z}$ )<br>( $daN \cdot m$ ) | Nó  | M. Fletor ( $m_{2z}$ )<br>( $daN \cdot m$ ) |
|----|---|-----|---|
| 1  | $-0.34793 \times 10^5$                      | 55  | $-0.48594 \times 10^6$                      |
| 5  | $-0.29261 \times 10^6$                      | 60  | $-0.41712 \times 10^6$                      |
| 10 | $-0.47963 \times 10^6$                      | 65  | $-0.14845 \times 10^6$                      |
| 15 | $-0.43694 \times 10^6$                      | 70  | $0.19139 \times 10^6$                       |
| 20 | $-0.18502 \times 10^6$                      | 75  | $0.43933 \times 10^6$                       |
| 25 | $0.15551 \times 10^6$                       | 80  | $0.47671 \times 10^6$                       |
| 30 | $0.42132 \times 10^6$                       | 85  | $0.28571 \times 10^6$                       |
| 35 | $0.48519 \times 10^6$                       | 90  | $-0.42299 \times 10^5$                      |
| 40 | $0.31670 \times 10^6$                       | 95  | $-0.34999 \times 10^6$                      |
| 45 | $-0.35410 \times 10^4$                      | 100 | $-0.48984 \times 10^6$                      |
| 50 | $-0.32197 \times 10^6$                      | 101 | $-0.48984 \times 10^6$                      |

Tabela 7.1: Momentos fletores de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo cisalhante  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  e sujeita a um deslocamento no seu extremo final para a posição  $X = 500m$ .

**Experimento 7.2.2 :** Neste caso, consideramos um duto com as seguintes propriedades geométricas e constitutivas: módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo da seção transversal  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$  e comprimento  $L = 503m$ . O duto, inicialmente reto, encontra-se assentado sobre uma base elástica com rigidez  $K_{s2} = 600N/m$ . A única ação externa a que a estrutura está sujeita é um deslocamento na sua extremidade final até a posição  $r_o(L) = (500, 0, 0)$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(0) = 0, \\ \mathbf{r}_{o2}(0) = \mathbf{r}_{o3}(0) = 0, \\ \mathbf{d}_1(0) = -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{d}_2(0) = -\mathbf{e}_1, \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(L) = 500, \\ \mathbf{r}_{o2}(L) = \mathbf{r}_{o3}(L) = 0, \\ \mathbf{d}_1(L) = -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{d}_2(L) = -\mathbf{e}_1. \end{array} \right. \quad (7.8)$$

A malha de elementos finitos adotada consiste de 200 elementos uniformemente espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos  $\boldsymbol{\lambda}_{ih}^0(S) = 0$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$ . Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 8.4 \times 10^5$ .

A Figura 7.7 representa a projeção [XY] da configuração deformada da estrutura. Como esse problema é plano, as projeções nos planos [XZ] e [ZY] são semelhantes às do experimento anterior. A energia de deformação obtida para essa configuração foi de  $75.944 \times 10^4$ . Na Tabela 7.2 apresentamos os momentos fletores resultantes, obtidos em alguns nós da malha. Para realizar esse experimento, o algoritmo executou 2531 iterações e gastou aproximadamente 7 segundos.

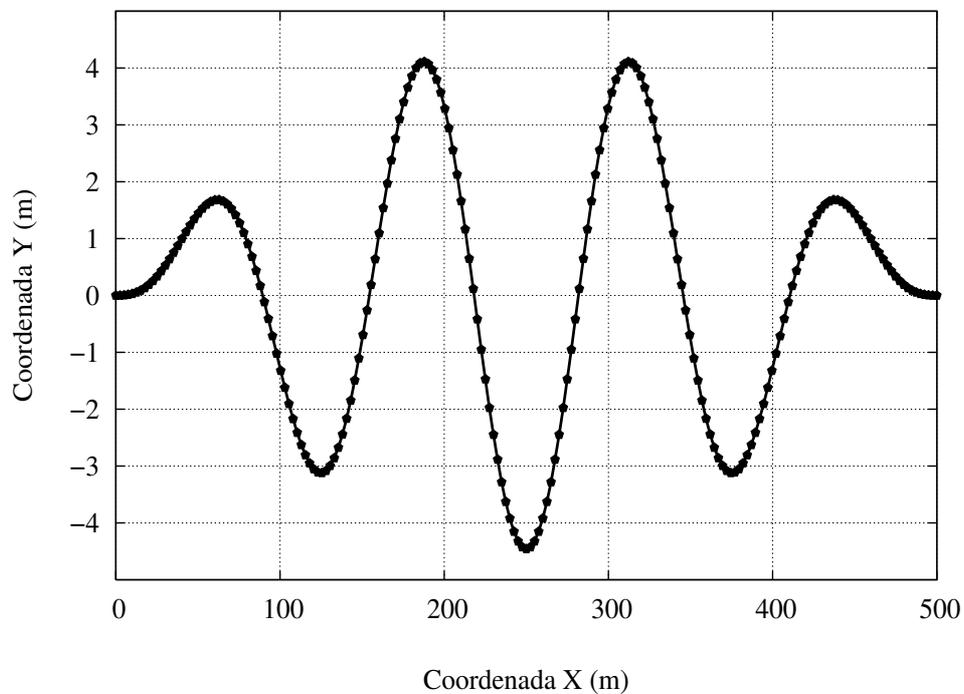


Figura 7.7: Projeção XY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 503m$ , assentada em uma base elástica de rigidez  $K_{s2} = 600N/m$  e sujeita a um deslocamento no seu extremo final para a posição  $X = 500m$ .

| Nó | M. Fletor ( $m_{2z}$ )<br>( $daN \cdot m$ ) | Nó  | M. Fletor ( $m_{2z}$ )<br>( $daN \cdot m$ ) |
|----|---|-----|---|
| 1  | $-0.27579 \times 10^5$                      | 55  | $-0.73429 \times 10^6$                      |
| 5  | $-0.14224 \times 10^6$                      | 60  | $-0.38554 \times 10^6$                      |
| 10 | $-0.17946 \times 10^6$                      | 65  | $0.17254 \times 10^6$                       |
| 15 | $-0.55730 \times 10^5$                      | 70  | $0.71257 \times 10^6$                       |
| 20 | $0.18054 \times 10^6$                       | 75  | $0.99960 \times 10^6$                       |
| 25 | $0.40243 \times 10^6$                       | 80  | $0.89452 \times 10^6$                       |
| 30 | $0.46864 \times 10^6$                       | 85  | $0.41657 \times 10^6$                       |
| 35 | $0.30061 \times 10^6$                       | 90  | $-0.25134 \times 10^6$                      |
| 40 | $-0.65284 \times 10^5$                      | 95  | $-0.83420 \times 10^6$                      |
| 45 | $-0.48207 \times 10^6$                      | 100 | $-0.10909 \times 10^7$                      |
| 50 | $-0.75562 \times 10^6$                      | 101 | $-0.10909 \times 10^7$                      |

Tabela 7.2: Momentos fletores de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo cisalhante  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 501m$ , assentada em uma base elástica de rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  e sujeita a um deslocamento no seu extremo final para a posição  $X = 500m$ .

**Experimento 7.2.3 :** Neste experimento, consideramos um duto com as seguintes propriedades geométricas e constitutivas: módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo da seção transversal  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$  e comprimento  $L = 501m$ . O duto, inicialmente reto, encontra-se assentado sobre uma base elástica com rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  na direção transversal e  $K_{s1} = 400N/m$  na direção longitudinal. A única ação externa a que a estrutura está sujeita é um deslocamento na sua extremidade final até a posição  $r_o(L) = (500, 0, 0)$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(0) = 0, \\ \mathbf{r}_{o2}(0) = \mathbf{r}_{o3}(0) = 0, \\ \mathbf{d}_1(0) = -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{d}_2(0) = -\mathbf{e}_1, \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{r}_{o1}(L) = 500, \\ \mathbf{r}_{o2}(L) = \mathbf{r}_{o3}(L) = 0, \\ \mathbf{d}_1(L) = -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{d}_2(L) = -\mathbf{e}_1. \end{array} \right. \quad (7.9)$$

A malha de elementos finitos adotada consiste de 200 elementos uniformemente espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos  $\lambda_{ih}^0(S) = 0$ ,  $\vartheta_{1h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_2$ ,  $\vartheta_{2h}^{-1}(S) = -\mathbf{e}_1$ . Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 2.3 \times 10^7$ .

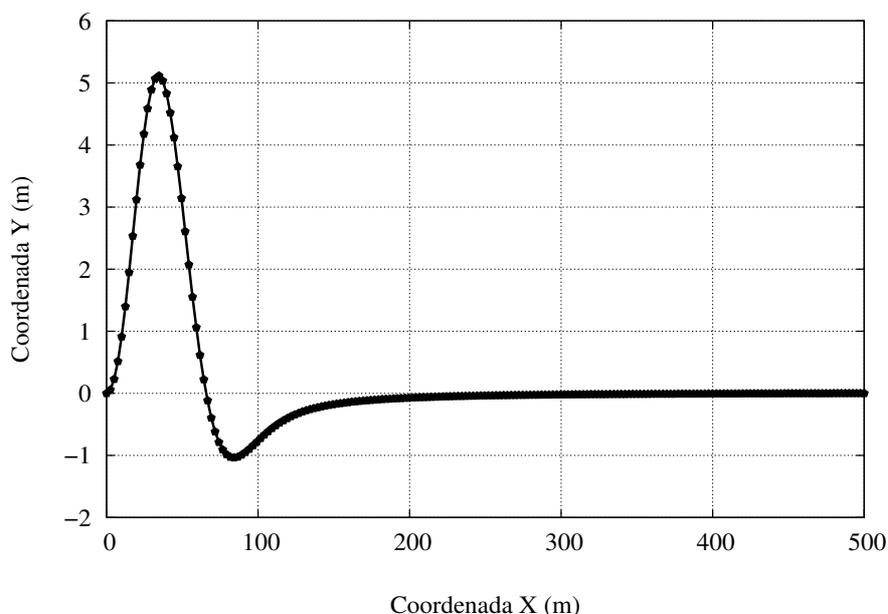


Figura 7.8: Projeção XY da configuração deformada de uma barra com módulo de Young  $E = 206GPa$ , módulo de cisalhamento  $G = 90GPa$ , diâmetro externo  $D_e = 50.8cm$ , diâmetro interno  $D_i = 48.3cm$ , comprimento  $L = 501m$ , assentada em uma base elástica com rigidez  $K_{s2} = 800N/m$  na direção transversal e  $K_{s1} = 400N/m$  na direção longitudinal, e sujeita a um deslocamento na sua extremidade final para a posição  $X = 500m$ .

A Figura 7.8 representa a projeção [XY] da configuração deformada da estrutura. Sua energia de deformação para essa configuração é de  $75.944 \times 10^4$ . Para realizar esse experimento, o algoritmo executou 3611 iterações e gastou aproximadamente 9 segundos.

### 7.3 Análise da estabilidade de armaduras de *risers* e umbilicais

Estruturas flexíveis utilizadas na extração e transporte de petróleo e seus derivados, tais como *risers* e umbilicais são geralmente formadas por várias camadas concêntricas. Cada uma dessas camadas, tais como a capa externa, a bandagem, as armaduras, camada de resistência à pressão, etc., é projetada para desempenhar atividades específicas e fundamentais ao bom funcionamento de todo o conjunto. A Figura 7.9 mostra um desenho esquemático que ilustra as disposições em camadas de um *riser*.

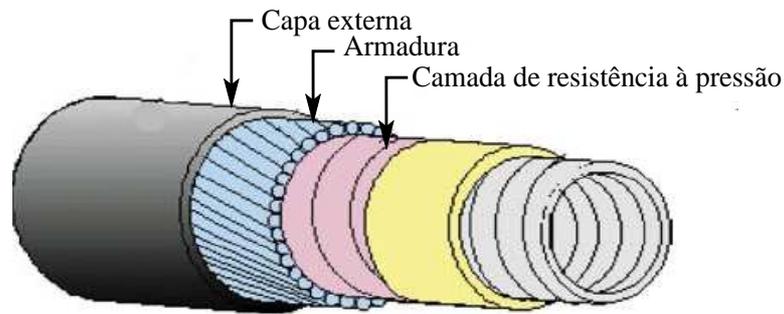


Figura 7.9: Desenho esquemático de um duto flexível.

As armaduras deste riser, por exemplo, são estruturas esbeltas e de geometria helicoidal, que ficam assentadas sobre uma camada cilíndrica interna. Esses reforçadores são responsáveis pela transmissão de esforços da estrutura. Quando a estrutura sofre uma solicitação externa de tração, a geometria dos reforçadores faz com que as forças sejam decompostas em apenas duas componentes: uma na direção longitudinal e a outra na direção radial. A parcela das forças radiais provoca esforços de compressão (esmagamento) nas camadas mais internas da estrutura, as quais devem ser capazes de sustenta-las. Por outro lado, se ao invés de uma solicitação externa de tração ocorrer na estrutura uma compressão, os reforçadores também decompõem essas forças nas duas componentes, porém em sentidos contrários. Desta forma, os reforçadores transmitem radialmente os esforços para as camadas externas da estrutura.

Um mecanismo de falha que normalmente ocorre devido a esses esforços de compressão é conhecido como *birdcaging* ou gaiola de passarinho, Figura 7.10. Esse processo ocorre quando as paredes externas não possuem resistência suficiente para sustentar os esforços gerados pelo contato com os reforçadores helicoidais, durante suas deformações. Por conta disso, os reforçadores têm grandes deslocamentos radiais, fazendo com que o diâmetro dos helicoides aumentem drasticamente, trazendo, como principal consequência, uma redução na capacidade da estrutura suportar carregamentos adicionais.



Figura 7.10: Duto flexível apresentando falha por instabilidade das armaduras.

A seguir, apresentamos alguns experimentos que apontam um modelo mecânico e numérico, viável, no tratamento de problemas que envolvem falhas locais, provocadas por instabilidades das armaduras.

**Experimento 7.3.1 :** Consideramos neste experimento a barra com sua configuração inicial descrevendo uma hélice no espaço, equação (4.9), com as seguintes propriedades constitutivas e geométricas : rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$ , rigidez a torção  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$ , raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . As condições de contorno adotadas foram:

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{r}_{o1}(0) = 0.0, \\
 \mathbf{r}_{o2}(0) = 0.0, \\
 \mathbf{r}_{o3}(0) = 3.0, \\
 \mathbf{r}'_{o1}(0) = 0.8, \\
 \mathbf{r}'_{o2}(0) = 0.6, \\
 \mathbf{r}'_{o3}(0) = 0.0, \\
 \mathbf{d}_1(0) = -\mathbf{e}_3, \\
 d_{21}(0) = -0.6, \\
 d_{22}(0) = 0.8, \\
 d_{23}(0) = 0.0,
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \mathbf{r}_{o1}(L) = 24., 23., 22., \\
 \mathbf{r}_{o2}(L) = 0.0, \\
 \mathbf{r}_{o3}(L) = 3.0, \\
 \mathbf{r}'_{o1}(L) = 0.8, \\
 \mathbf{r}'_{o2}(L) = 0.6, \\
 \mathbf{r}'_{o3}(L) = 1.0, \\
 \mathbf{d}_1(L) = -\mathbf{e}_3, \\
 d_{21}(L) = -0.6, \\
 d_{22}(L) = 0.8, \\
 d_{23}(L) = 0.0,
 \end{array} \quad (7.10)$$

A única ação a que a estrutura está sujeita é um deslocamento na sua ex-

tremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 24; 23; 22$ . A malha de elementos finitos adotada consiste de 40 elementos uniformemente espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos  $\lambda_{ih}^0(S) = 0$  e  $\vartheta_{ih}^{-1}(S)$  descrita segundo as equações (4.10–4.12). Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 1.0 \times 10^3$ .

As Figuras (7.11–7.13) caracterizam as configurações deformadas da estrutura.

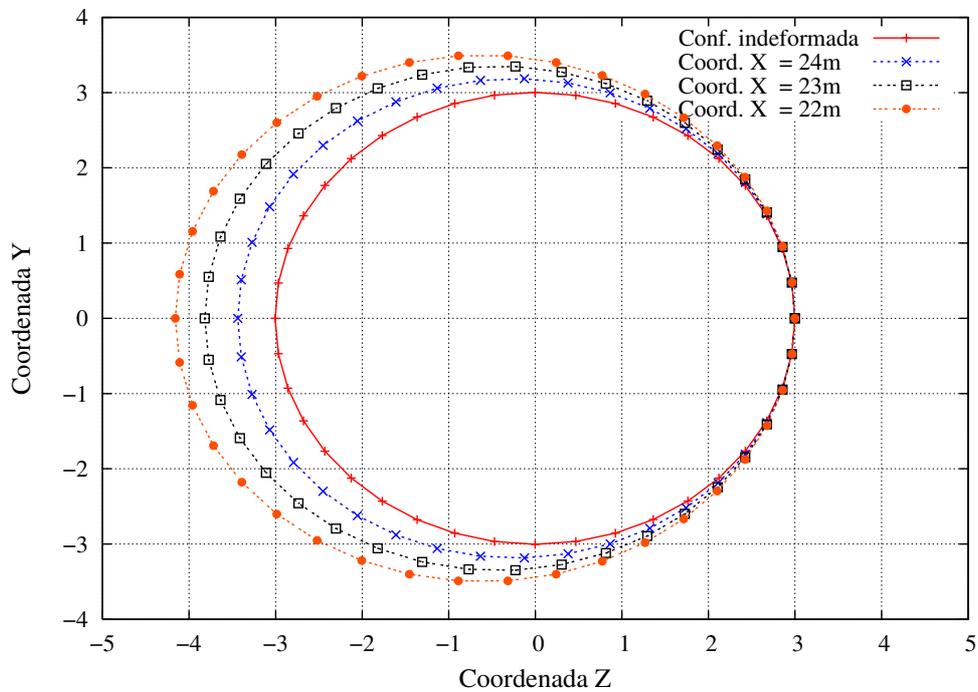


Figura 7.11: Projeções ZY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ .

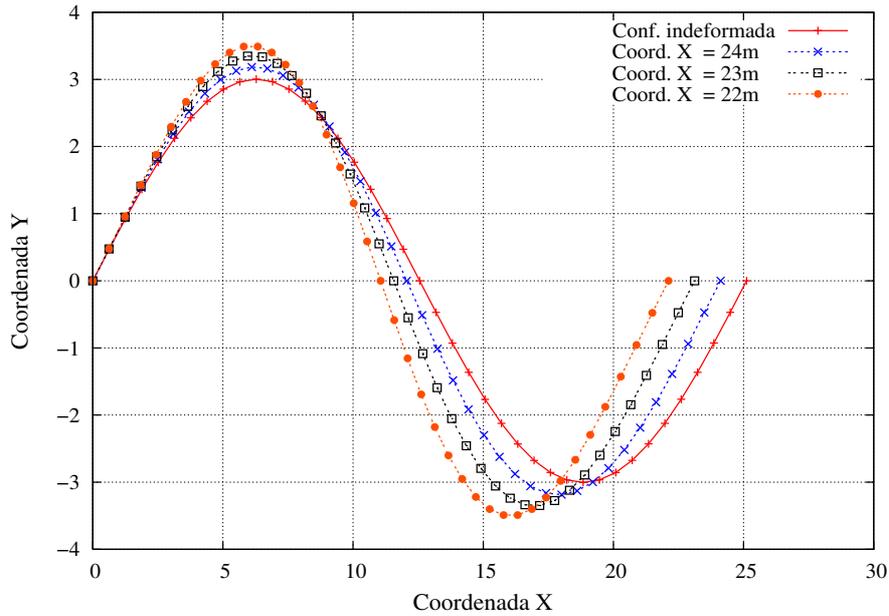


Figura 7.12: Projeções XY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ .

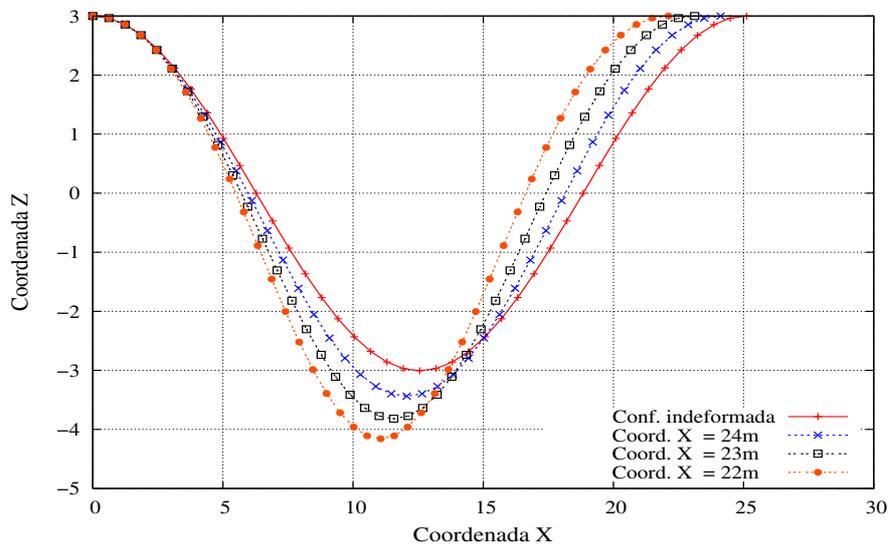


Figura 7.13: Projeções XZ das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ .

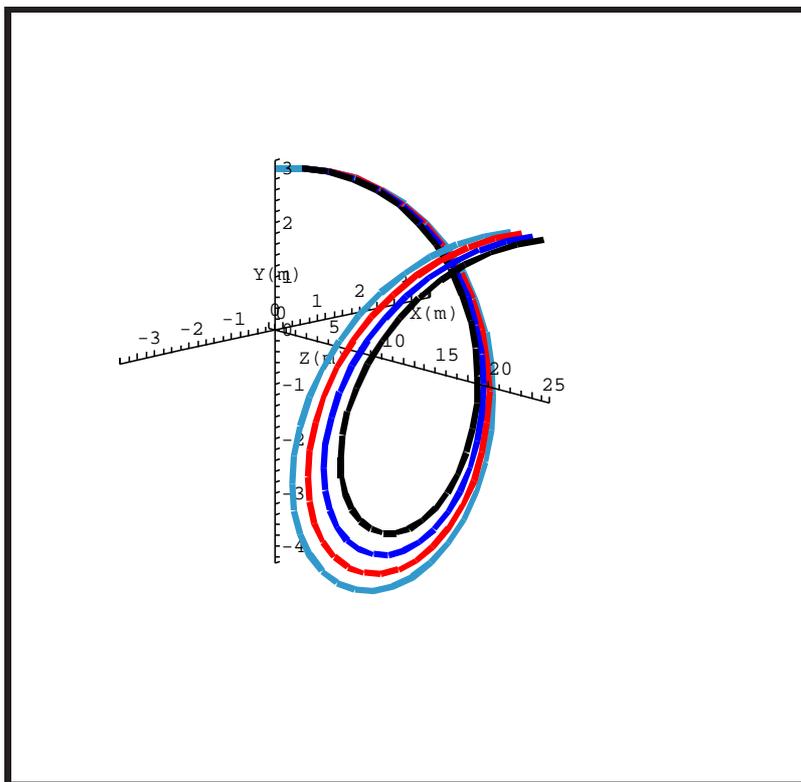


Figura 7.14: Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 10\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 24; 23; 22$ .

**Experimento 7.3.2 :** Consideramos neste experimento a barra com sua configuração inicial descrevendo uma hélice no espaço, equação (4.9), com as seguintes propriedades constitutivas e geométricas : rigidez a flexão  $EI = 100daN \cdot m^2$ , rigidez a torção  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$ , raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . As condições de contorno adotadas são semelhantes a (7.10), exceto que  $\mathbf{r}_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . A única ação a que a estrutura está sujeita é um deslocamento na sua extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ . A malha de elementos finitos adotada consiste de 40 elementos uniformemente espaçados. Para inicialização do algoritmo consideramos  $\boldsymbol{\lambda}_{ih}^0(S) = 0$  e  $\boldsymbol{\vartheta}_{ih}^{-1}(S)$  descrita segundo as equações (4.10–4.12). Em todos os casos consideramos os parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p = 4.0 \times 10^3$ .

As Figuras (7.15–7.17) caracterizam as configurações deformadas da estrutura.

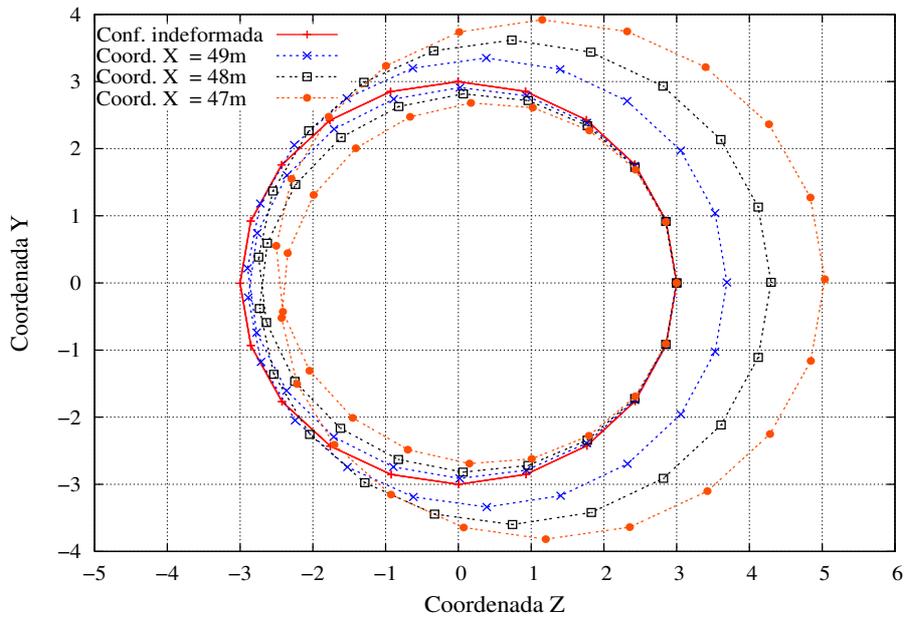


Figura 7.15: Projeções ZY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

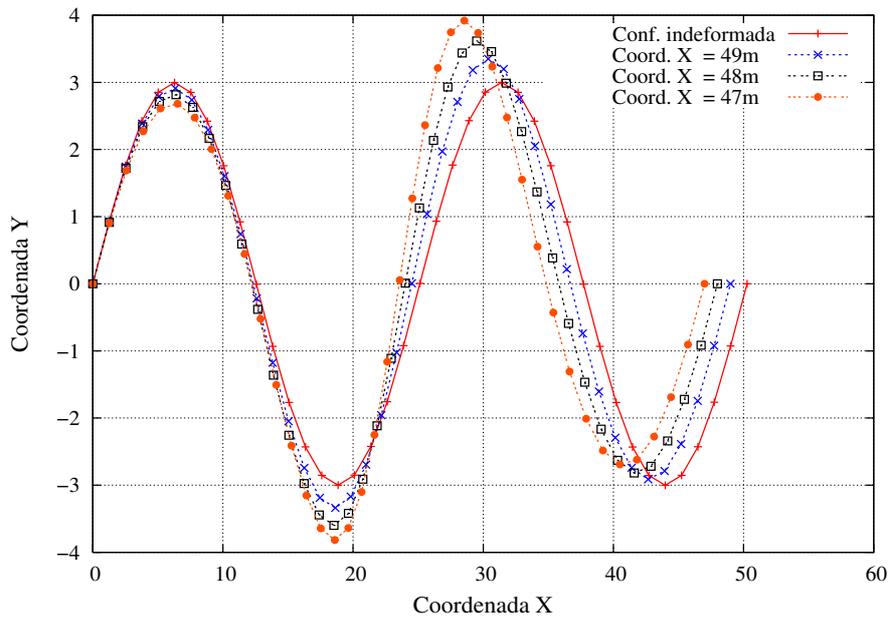


Figura 7.16: Projeções XY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

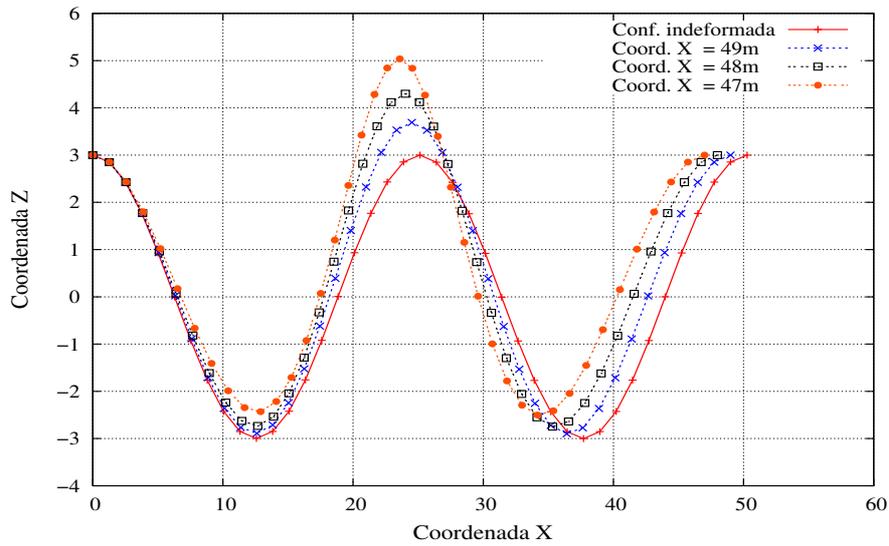


Figura 7.17: Projeções XZ das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

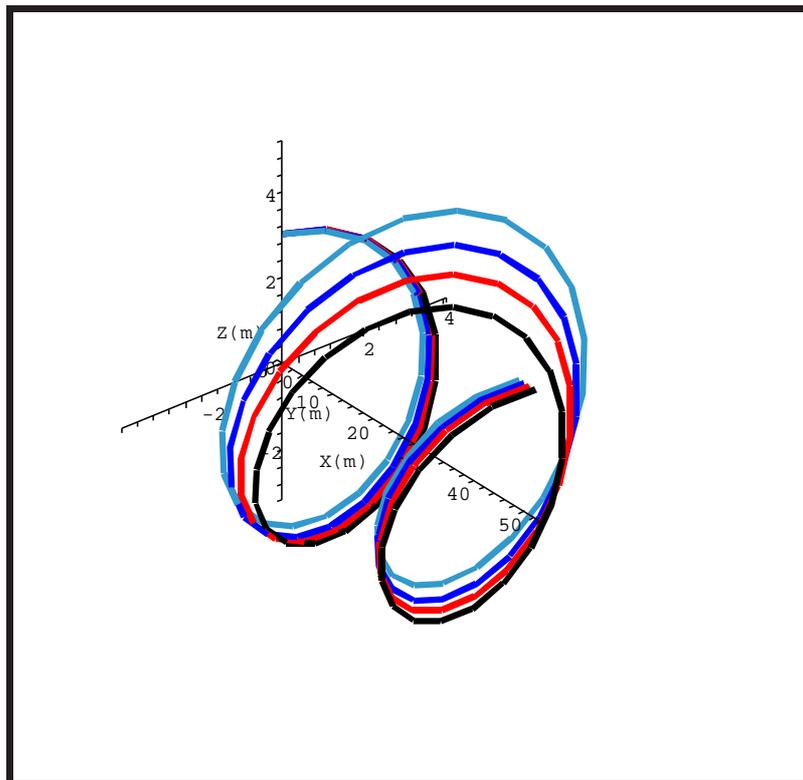


Figura 7.18: Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e altura do passo  $C = 4m$ . A única ação a que está sujeita é um deslocamento da extremidade final até as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

**Experimento 7.3.3 :** Este experimento consiste basicamente na introdução de uma barreira rígida no problema anterior. Essa barreira tem a geometria de um cilindro com  $3.1m$  de raio e eixo  $\mathbf{e}_3$ , e possui a função de impedir o deslocamento na direção radial da hélice. Em todos os casos consideramos os parâmetros  $p_u = p_p = 4.0 \times 10^3$ .

As Figuras (7.19–7.21) caracterizam as configurações deformadas da estrutura.

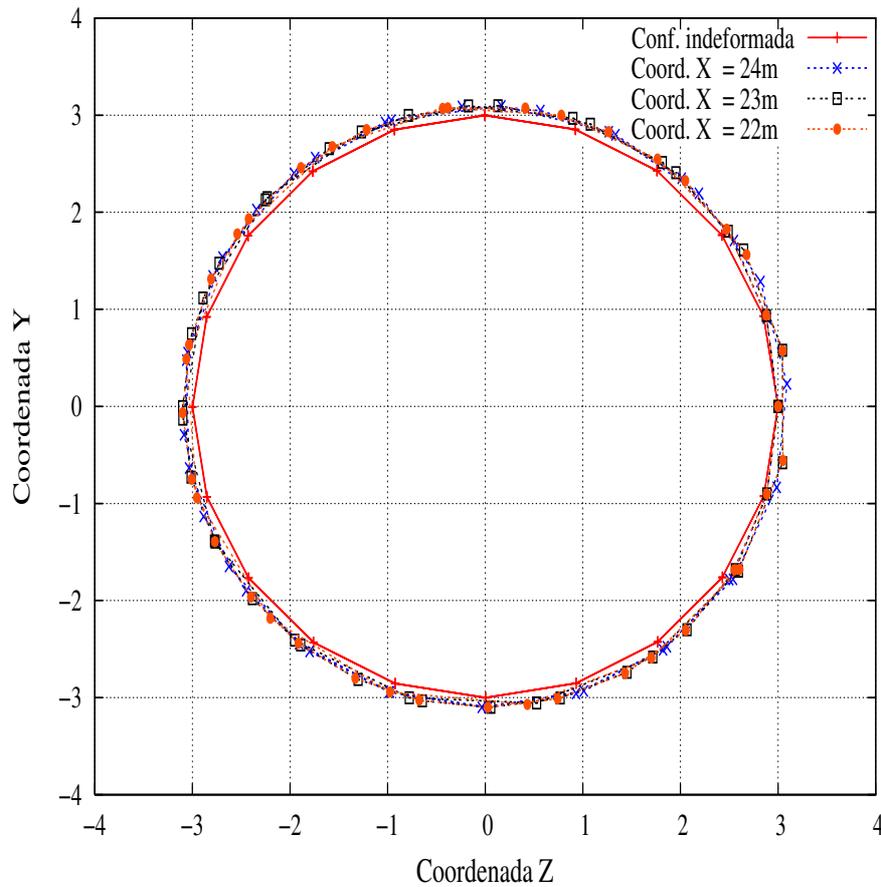


Figura 7.19: Projeções ZY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e passo  $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com  $50cm$  de raio está sujeita a um deslocamento da sua extremidade final para as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

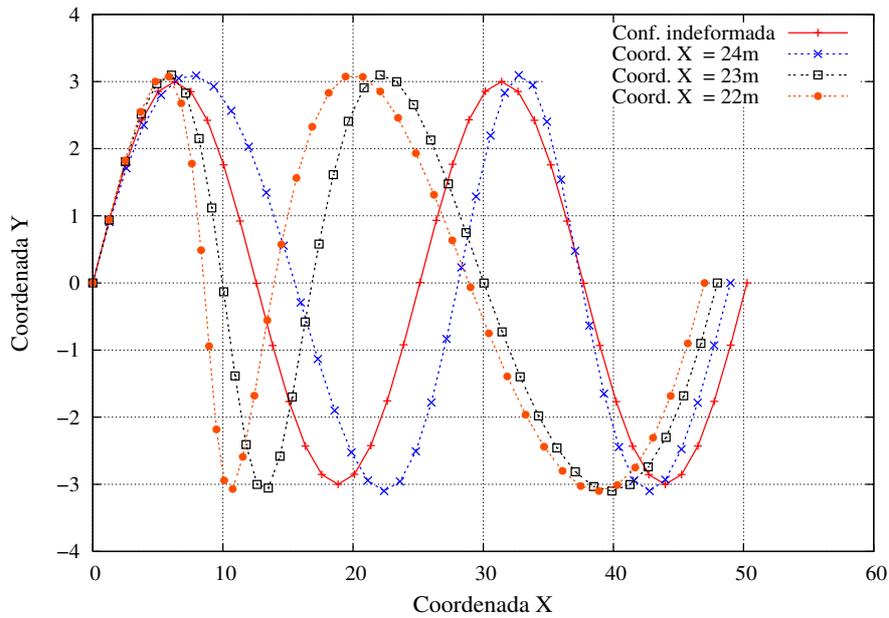


Figura 7.20: Projeções XY das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e passo  $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita a um deslocamento da sua extremidade final para as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

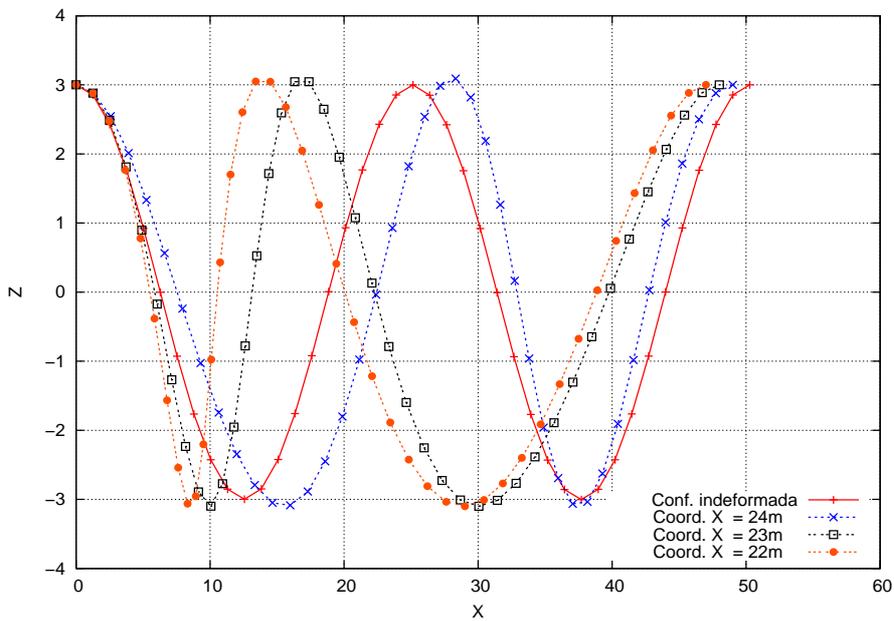


Figura 7.21: Projeções XZ das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e passo  $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita a um deslocamento da sua extremidade final para as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

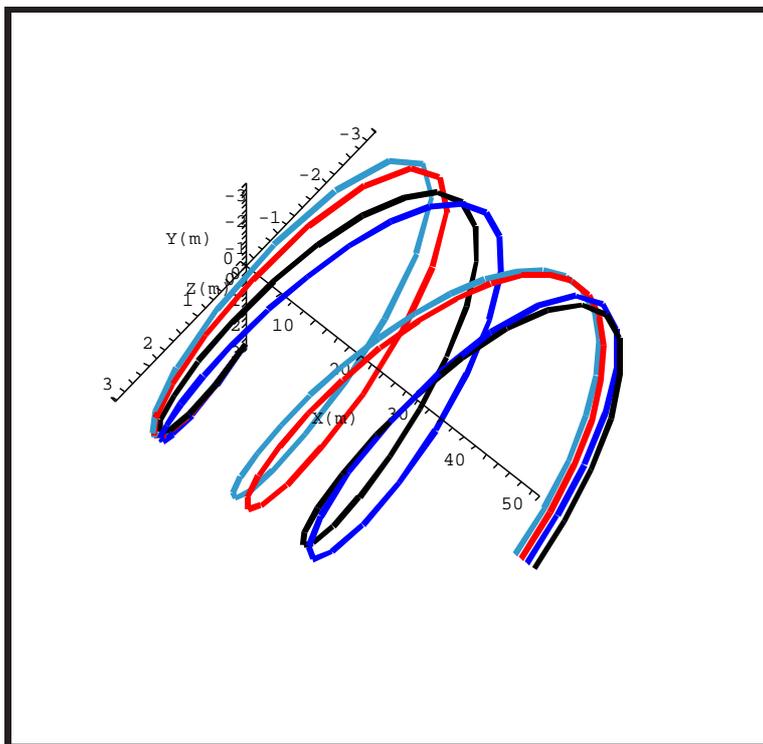


Figura 7.22: Visão 3D das configurações deformadas de uma barra com  $EI = 100daN \cdot m^2$ ,  $GI = 90daN \cdot m^2$ , comprimento  $L = 20\pi$  e com geometria inicial descrevendo uma hélice com raio  $R = 3m$  e passo  $C = 4m$ . A estrutura encontra-se confinada em um cilindro com 50cm de raio está sujeita a um deslocamento da sua extremidade final para as posições  $r_{o1}(L) = 49; 48; 47$ .

#### 7.4 Modelagem de moléculas de ADN

Um ADN (ácido desoxirribonucléico), material genético primário da maioria dos organismos, é usualmente visualizado como uma dupla hélice na qual duas cadeias base de nucleotídeos complementares (subunidades cujas seqüências constituem a mensagem genética) se enrolam em torno de um eixo comum Figura 7.23. Essa dupla hélice pode enovelar-se consigo mesma e formar uma nova hélice de ordem superior denominada de superenovelamento (*supercoiler*). A Figura 7.24 ilustra esse comportamento, na qual a dupla hélice é representada por um filamento. A grande maioria dos ADNs conhecidos na natureza exibem alguma forma de superenovelamento em no mínimo um estágio de seu ciclo de vida. Alguns autores como BAUER *et al* [1980], CALLADINE & DREW [1992] e WANG [1982], apresentam algumas descrições básicas (para não especialistas) deste processo. A existência desse comportamento foi inicialmente apresentada para explicar uma

surpreendente descoberta sobre o ADN do *polyoma vírus*. Este vírus é responsável pela formação de tumores em ratos. Foi observado que quando moléculas de ADNs são suspensas em solventes e centrifugadas, elas se decompõem em três componentes distinguíveis pela velocidade em que elas se movem através do solvente BAUER *et al* [1980]. Investigações revelaram que estas três componentes, classificadas por ordem de velocidade de sedimentação, não diferiam pelo peso molecular, e sim pela variação entre suas compacidades moleculares em cada estágio de velocidade. Em outras palavras, as moléculas possuíam diferentes formas geométricas.

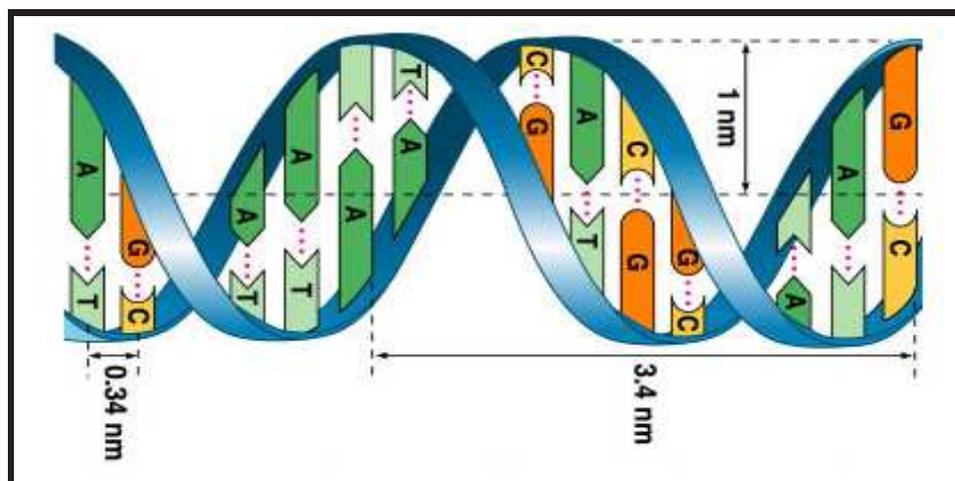


Figura 7.23: Desenho esquemático de uma molécula de ADN

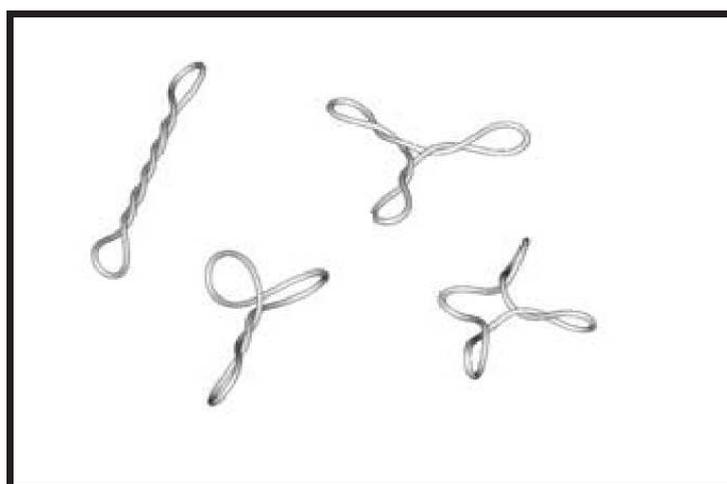


Figura 7.24: Desenho esquemático do superenovelamento de moléculas de ADN

Atualmente sabe-se que esse superenovelamento tem conseqüências críticas para as propriedades químicas, físicas e as funções biológicas dos ADNs. Isso por-

que as diversas formas assumidas pela molécula de ADN interferem decisivamente na eficiência do processos de transcrição MENZEL & GELLERT [1994], de replicação WANG & LIU [1990] e recombinação do sistema KANAAR & COZZARELLI [1992] e STARK & BOOCOOCK [1995], além do comportamento hidrodinâmico e energético. Entretanto, o entendimento deste mecanismo de superenovelamento e as conseqüências de suas características estruturais para o ADN apresentam desafios de considerável complexidade física e matemática.

Não é fácil o estudo experimental das propriedades e formas das moléculas de ADN superenoveladas. Entretanto, com o avanço das técnicas químicas, as extremidades de uma única molécula de ADN puderam ser fixadas a diversos objetos, fazendo com que fosse possível manipulações individuais destas estruturas a ponto de se poder caracterizar alguns superenovelamentos, STRICK *et al* [1996] e NEUKIRCH [2004]. Basicamente, estes experimentos são realizados fixando uma das extremidades da molécula do ADN no substrato, através de uma ligação química, e a outra extremidade a uma esferas provida de um campo magnético, como podemos observar no esquema da Figura 7.25. Utilizando um campo elétrico, a

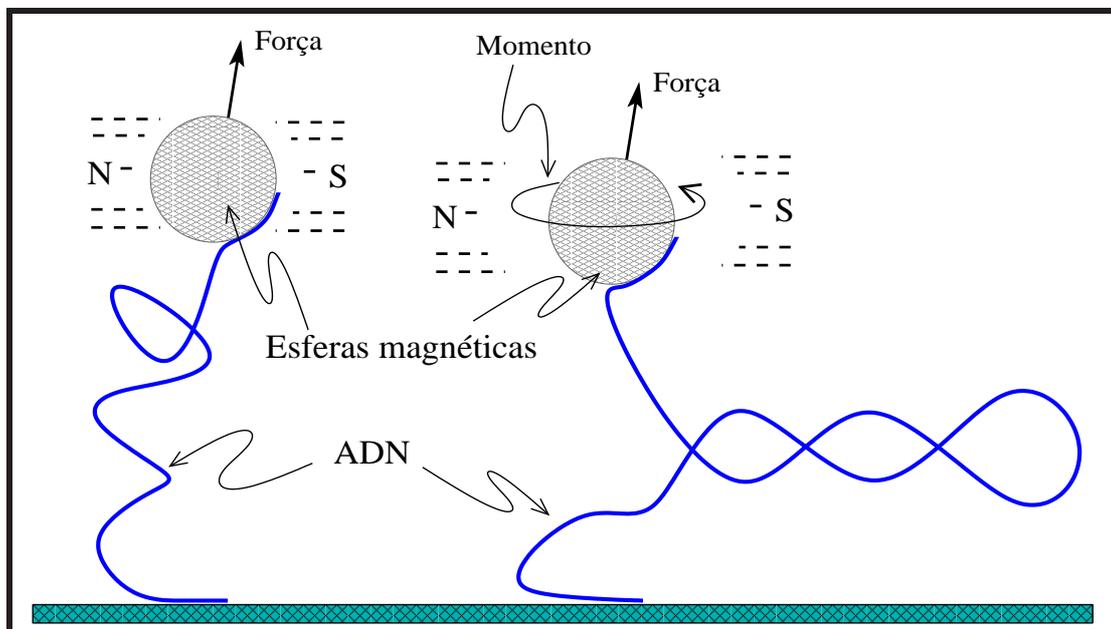


Figura 7.25: Desenho esquemático de uma micromanipulação de uma molécula de ADN por um campo elétrico

esfera pode ser manipulada fazendo com que forças de tração e momentos contro-

lados pudessem ser transmitidos para a molécula, NEUKIRCH [2004]. Utilizando aparatos óticos, os movimentos das moléculas podem ser monitorados, medidos e com isso, diversas propriedades podem ser inferidas. SMITH *et al* [1992], por exemplo, mostrou em seu experimento o comportamento elástico da molécula de ADN, CLUZEL *et al* [1996] sua superextensão e ALLEMAND [1997] e LÉGER *et al* [1999] mediram os efeitos do enovelamento. Esse último comportamento é sem dúvida o mais complexo de ser caracterizado, e tem sido foco de diversas investigações.

Devido as limitações dos estudos experimentais a nível atômico das diversas formas possíveis de superenovelamento dos ADNs, simulações numéricas têm sido uma alternativa bastante útil para esse desenvolvimento. Para isso, diversos trabalhos têm apresentado modelos matemáticos em que as moléculas de ADN são consideradas como barras elásticas delgadas e bastante flexíveis, transversalmente isotrópicas, de seção transversal circular e inextensíveis, como podemos observar em STUMP *et al* [1998], COLEMAN *et al* [2003], CHITANVISA & WELCH [2005], CHOE & SUN [2005] e MAZUR [2006].

Os modelos estudados neste trabalho podem ser adaptados ao estudo desses fenômenos biológicos.

# Capítulo 8

## Conclusões

### 8.1 Sobre os modelos não-lineares

Apresentamos neste trabalho um modelo geral para estruturas flexíveis unidimensionais, baseado na teoria de barras de Cosserat. A este modelo agregamos a possibilidade de contemplar interações de contato, sem atrito e sem aderência, com outros sólidos indeformáveis. Através de algumas hipóteses adicionais na cinemática deste modelo geral, obtivemos um modelo de flexo-torção de barras inextensíveis e sem os efeitos do cisalhamento.

Através da técnica do Lagrangiano Aumentado e da decomposição de coordenadas, foi construída uma formulação variacional para o modelo de flexo-torção. Entre outras características positivas, esta formulação permite que a restrição de inextensibilidade, originariamente sobre a derivada de uma função, possa ser transferida para uma função associada a multiplicadores de Lagrange.

Para a aproximação numérica do modelo acima, utilizamos a forma de Galerkin e o método dos elementos finitos. Para sua resolução foi utilizado um algoritmo de Uzawa com decomposição de coordenadas. A seguir resumimos algumas características do algoritmo implementado.

Na sua inicialização pudemos constatar que:

- uma variação na inicialização pode acarretar convergência do algoritmo para mínimos locais distintos, caracterizando com isto multiplicidade de soluções;

- a satisfação da condição de ortogonalidade entre os vetores da inicialização é extremamente importante para a convergência do algoritmo.

Na resolução do problema de minimização global observamos as seguintes características:

- os sistemas gerados para o cálculo das incógnitas  $\mathbf{r}_{oh}^n$  e  $\mathbf{d}_{\alpha h}^n$  são inteiramente desacoplados. Esta é uma característica a ser explorada do ponto de vista de uma implementação em paralelo;
- os lados esquerdos dos sistemas de equações e inequações necessitam ser montados uma única vez durante todo o processo iterativo. A atualização é feita apenas nos lados direitos dos sistemas, aumentando com isto a velocidade de resolução.

Na resolução do problema de minimização local, observamos que:

- o problema é resolvido individualmente para cada elemento. Com isso, a sua solução é expressa de forma explícita e seu custo computacional é bastante reduzido;
- embora o processo de resolução deste problema incida em um problema de cálculo de autovalores e autovetores, a matriz associada é positiva definida e de ordem  $3 \times 3$ , possibilitando uma solução analítica. Desta forma, o processo é reduzido ao cálculo de poucas operações algébricas de baixo custo computacional.

Dentre os diversos experimentos numéricos estudados durante o curso deste trabalho, escolhemos quatro deles para representar as características que achamos mais relevantes. Podemos destacar que:

- o confronto entre as soluções exatas e analíticas comprovam a precisão da formulação;
- o aumento no grau de refinamento da malha não acarreta um incremento excessivo no número de iterações do algoritmo;

- na ausência de restrições unilaterais, o número de iterações do algoritmo varia linearmente com a variação dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u$  e  $\mathfrak{p}_p$  e possui um valor ótimo bem definido;
- a inicialização do algoritmo se mostrou decisiva no processo de convergência para os mínimos locais do problema;
- a escolha dos parâmetros  $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_p$  pode levar a diferentes configurações de mínimos locais, como ficou comprovado em um dos casos estudados.

## 8.2 Sobre os modelos linearizados

Buscando viabilizar uma análise numérica das aproximações de elementos finitos, construímos um modelo linearizado, obtido a partir do modelo geral, desprezando as forças inerciais e efetuando uma linearização consistente. Com isso produzimos um modelo em regime de pequenos deslocamentos e deformações. Na construção deste modelo utilizamos uma representação vetorial, tornando o problema associado mais compacto e compreensível.

Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, formulamos o problema variacionalmente nas formas cinemática e mista. Para a formulação cinemática do problema contínuo mostramos que a propriedade de continuidade, requerida pelo lema de Lax-Milgram, apresenta sua constante dependente de um parâmetro de esbeltez. Demonstramos também que a formulação mista, baseada no princípio de Hellinger-Reissner, satisfaz às propriedades do teorema de Brezzi, com as constantes independentes deste parâmetro de esbeltez.

As aproximações de elementos finitos para este problema foram feitas utilizando a forma de Galerkin. Para a formulação cinemática mostramos que ela apresenta as seguintes características:

- estimativas ótimas de erro na norma do espaço de aproximação;
- a melhor estimativa de erros na norma da energia;
- trancamentos numéricos (*shear locking* e *membrane locking*).

Na formulação mista utilizamos interpolações de mesma ordem para os campos dos esforços e dos deslocamentos generalizados. Observamos que suas principais características são:

- não é possível demonstrar a  $K$ -elipticidade da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  independente do parâmetro de esbeltez;
- apresenta trancamentos numéricos semelhantes aos da formulação cinemática;
- as estimativas de erro possuem constantes dependentes do parâmetro de esbeltez.

Para superar estas dificuldades propuzemos uma nova formulação de elementos finitos mistos estabilizados para o problema. Com esta formulação, e utilizando variáveis vetoriais, conseguimos os seguintes resultados:

- demonstrar todas as propriedades da forma discreta do teorema de Brezzi, com constantes independentes do parâmetro de esbeltez;
- recuperar a estabilidade e a convergência uniforme da formulação de Galerkin. Com isto, obtivemos taxas ótimas para as ordens de convergência das aproximações dos deslocamentos generalizados e sub-ótimas para os esforços generalizados;
- demonstrar que apenas o resíduo das equações de equilíbrio dos esforços generalizados é necessário para garantir a estabilidade e convergência da formulação.

Pelos experimentos numéricos realizados podemos constatar que:

- os resíduos das equações de equilíbrio dos momentos generalizados atuam favoravelmente para a precisão da solução;
- o aumento do parâmetro  $\delta_1$ , que multiplica os resíduos das equações de equilíbrio de momentos generalizados, provoca um aumento na precisão

deste campo mas traz uma deterioração na precisão do cálculo dos campos dos deslocamentos generalizados e dos esforços cisalhantes e normais;

- para valores muito pequenos ( $\ll 10^{-3}$ ) do parâmetro  $\delta_2$ , que multiplica os resíduos das equações de equilíbrio de forças generalizados, o algoritmo apresenta perda de estabilidade e convergência;
- o aumento dos valores do parâmetro  $\delta_2$  não altera a estabilidade de nenhum dos campos, nem a precisão da solução dos campos dos deslocamentos generalizados, dos momentos e torção, mas melhora sensivelmente a precisão da solução dos campos dos esforços cisalhantes e normais.

### 8.3 Possíveis extensões deste trabalho

Como mostramos na introdução e procuramos ilustrar com alguns exemplos, modelos de estruturas flexíveis têm sido explorados no estudo de problemas em áreas tais como, engenharia mecânica, engenharia do petróleo, engenharia aeroespacial, ciências biológicas, etc. Para tratar algumas aplicações nestas áreas faz-se necessário agregar outras características aos modelos descritos anteriormente neste trabalho. Uma extensão bastante natural é a introdução das forças inerciais para estudar, por exemplo, o comportamento de *risers* sujeitos aos efeitos das correntes marinhas, ou o comportamento dos *tethers*, utilizados na indústria aeroespacial. Outra extensão bastante interessante é a contemplação de autocontatos, por parte do modelo mecânico, para o estudo do comportamento do superrenovamento de uma molécula de ADN, ou ainda das fitas (*ribbons*) do colesterol no processo de formação do cálculo biliar. A possibilidade de descrever o contato entre a estrutura flexível e outros sólidos deformáveis também é uma extensão natural do modelo e habilita tratar das interações entre si dos reforçadores helicoidais que formam a armadura dos *risers*.

## Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I., 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York.

ALLEMAND, J., 1997. *Micro-Manipulations de Molécules d’DNA Isolées*. Thèse, École Normale supérieure, France.

ANTMAN, S., 1991. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Vol. 107 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.

ANTMAN, S. S., 1974. Kirchoff’s Problem for Nonlinearly Elastic Rods. *Quart. Appl. Math.* 32, 221–240.

ANTMAN, S. S., ROSENFELD, G., 1978. Global Behavior of Buckled States of Nonlinearly Elastic Rods. *SIAM* 20, 513–566.

ARNOLD, D., 1981. Discretization by Finite Elements of a Model Parameter Dependent Problem. *Numer. Math.* 16, 405–421.

ARUNAKIRINATHAR, K., REDDY, B., 1993. Mixed Finite Element Method for Elastic Rods of Arbitrary Geometry. *Numer. Math.* 16, 13–43.

BAIOCCHI, C., CAPELO, A., 1984. *Variational and Quasivariational Inequalities*. Wiley-Interscience.

BARBOSA, H. J. C., Dez 1986. *Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade*. Tese de doutorado, Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

- BAUER, W., CRICK, F., WHITE, J., 1980. Supercoiled DNA. *Sci. Am* 243, 100–113.
- BELETSKY, V., LEVIN, E., 1993. Dynamics of Space Tether Systems, Advances in the Astronautical Sciences. *American Astronautical Society* 83 (4), 619–625.
- BERTSEKAS, D. P., 1982. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, 1st Edição. Computer science and applied mathematics. Academic press, inc.
- BISSHOPP, K. E., DRUCKER, D. C., 1945. Large Deflection of Cantilever Beams. *Quart. Appl. Math* 3, 272–275.
- BONET, J., WOOD, R. D., 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, 1st Edição. Cambridge University press.
- BOURGAT, J. F., DUMAY, J. M., GLOWINSKI, R., 1980. Large Displacement Calculation of Flexible Pipelines by Finite Element and Nonlinear Programming Methods. *SIAM - J. Sci. Stat. Comput* 1 (1), 34–81.
- BRAGA, M., 2003. *Instabilidade de Armaduras de Tração de Linhas Flexíveis*. Tese de doutorado, Engenharia Oceânica, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- BREZZI, F., 1974. On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems Arising from Lagrange Multipliers. *RAIRO Ser. Rouge Anal. Numér.* 8, 129–151.
- BUCKHAM, B., DRISCOLL, F., NAHON, M., 2004. Development of a Finite Element Cable Model for Use in Low-Tension Dynamics Simulation. *Journal of Applied Mechanics* 71 (4), 476–485.
- BYRD, P. F., FRIEDMAN, M. D., 1971. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd Edição. Springer-Verlag, Berlin.
- CALLADINE, C., DREW, H., 1992. Understanding DNA, the Molecule and How it Works. *Ch* 6, 114–137.

- CHAMPNEYS, A., HEIJDEN, G. V. D., THOMPSON, J., 1997. Spatially Complex Localization After One-Twist-Per-Wave Equilibria in Twisted Circular Rods with Initial Curvature. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 355, 2151–2174.
- CHITANVISA, S., WELCH, P., 2005. Influence of supercoiling on the Disruption of dsDNA. *Journal of Chemical Physics* 123, 124901(1)–124901(4).
- CHOE, S., SUN, S., 2005. The Elasticity of  $\alpha$ -Helices. *Journal of Chemical Physics* 123, 124901(1)–124901(4).
- CIARLET, P., 1978. *The Finite Elements of Elliptic Problem*. North-Holland, Amsterdam.
- CLUZEL, P., LEBRUN, A., HELLER, C., VIOVY, J., CHATENARY, D., CARON, F., 1996. DNA: an Extensible Molecule. *Science* 271, 792–794.
- COLEMAN, B., OLSON, W., SWIGON, D., 2003. Theory of Sequence-Dependent DNA Elasticity. *Journal of Chemical Physics* 118 (15), 7127–7140.
- COSSERAT, E., COSSERAT, F., 1907. Sur la Mécanique Générale. *C.R. Acad. Sci. Paris* 145, 1139–1142.
- COSSERAT, E., COSSERAT, F., 1908. Sur la Théorie des Corps Minces. *C.R. Acad. Sci. Paris* 146, 169–172.
- COYNE, J., 1990. Analysis of the Formation and Elimination of Loops in Twisted Cable. *IEEE J. Ocean. Eng.* 15, 72–83.
- CUSTÓDIO, A. B., Out 2005. *Modelo Analítico para Avaliação de Instabilidade nas Armaduras de Dutos Flexíveis*. Tese de doutorado, Engenharia Oceânica, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- DEMMELE, J. W., 1997. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia.
- ERICKSEN, J. L., TRUESDELL, C., 1959. Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1, 295–323.

- FORTIN, M., GLOWINSKI, R., 1983. *Augmented Lagrangian Methods: Application to the Numerical Solution of Boudary- Value Problems*. Vol. 15 of *Studies in mathematics and its applications*. Elsevier Science Publisher B.V., New York.
- FRANCA, L. P., 1988. An algorithm to Compute the Square Root of a 3 X 3 Positive Definite Matrix. *Computers Math. Applic* 5, 459–466.
- GLOWINSKI, R., TALLEC, P. L., 1989. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- GOLDSTEIN, H., POOLE, C., SAFKO, J., 1922. *Classical Mechanics*, 3rd Edição. Springer-Verlag, New York.
- GULYAEV, V., GAIDAICHUK, V., SOLOV'EV, I., GORBUNOVICH, I., 2006. Quasistatic Critical States of Strings for Deep Drilling. *Strength of Materials* 38 (5), 527–534.
- GURTIN, M. E., 1981. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Vol. 158 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York.
- HARRISON, G., MCCARRON, B., 2006. Potential Failure Scenario for High-Temperature, Deepwater Pipe-in-Pipe. In: *2006 Offshore Technology Conference*. CD-ROM, Houston, Texas.
- HEIJDEN, G. V. D., FRASER, W., 2003. Helical Collapse of a Whirling Elastic Rod Forced to Lie on a Cylinder. *Journal of Applied Mechanics* 70 (5), 771–774.
- HEIJDEN, G. V. D., VALVERDE, J., 2005. Instability of a Whirling Conducting Rod in the Presence of a Magnetic Field. In: *Proc. of the 5th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC)*. ISBN 90-386-2667-3 CD-ROM, Eindhoven, The Netherlands.
- HESTENES, M. R., 1969. Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications* 4 (5), 303–320.

- HLAVÁČEK, I., NEČAS, J., 1970a. On Inequalities of Korn's Type: I. Boundary-Value Problems for Elliptic Systems of Partial Differential Equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 36, 305–311.
- HLAVÁČEK, I., NEČAS, J., 1970b. On Inequalities of Korn's Type: II. Applications to Linear Elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 36, 312–334.
- HOBBS, R. E., 1981. Pipeline Buckling Caused by Axial Loads. *Journal of Constructional Steel Research* 1, 2–10.
- HOBBS, R. E., 1984. In-service buckling of heated pipelines. *Journal of Transportation Engineering* 110 (2), 175–189.
- JIANG, W., CHANG, J., JAKANA, J., WEIGELE, P., KING, J., CHIU, W., 2006. Structure of Epsilon15 Bacteriophage Reveals Genome Organization and DNA Packaging/Injection Apparatus. *Nature* 439, 612–616.
- KANAAR, R., COZZARELLI, N., 1992. Roles of supercoiled DNA structure in DNA transactions. *Curr. Opin. Struct. Biol.* 2, 369–379.
- KERR, A. D., 1978. Analysis of Thermal Track Buckling in the Lateral Plane. *Acta Mechanica* 30, 17–50.
- KLUG, W., ORTIZ, M., 2003. A Director-Field Model of DNA Packaging in Viral Capsids. *J. Mech. Phys. Solids* 51, 1815–1847.
- LANDER, G., TANG, L., CASJENS, S., GILCREASE, E., PREVELIGE, P., POLIAKOV, A., POTTER, C., CARRAGHER, B., JOHNSON, J., 2006. The Structure of an Infectious P22 Virion Shows the Signal for Headful DNA Packaging. *Nature* 312, 1791–1795.
- LE-TALLEC, P., MANI, S., 1988. Modélisation et Calcul des Grands Déplacements de Tuyaux Élastiques en Flexion-torsion. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 7, 379–408.

- LOULA, A., FRANCA, L., HUGHES, J., MIRANDA, I., 1987a. Stability, Convergence and Accuracy of a New Finite Element Method for the Circular Arch Problem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 63, 281–303.
- LOULA, A., HUGHES, J., FRANCA, L., MIRANDA, I., 1987b. Mixed Petrov-Galerkin Methods for Timoshenko Beam Problem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 63, 133–154.
- LOVE, A. E. H., 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Edição. Dover publications.
- LÉGER, J., ROMANO, G., SARKAR, A., ROBERT, J., BOURDIEU, L., CHATENAY, D., J.F., 1999. Structural Transitions of a Twisted and Stretched DNA Molecule. *Phys. Rev. Lett.* 83, 1066–1069.
- MAIER, G., ANDREUZZI, F., GIANNESSI, F., JURINA, L., TADDEI, F., 1979. Unilateral Contact, Elastoplasticity and Complementarity with Reference to Offshore Pipeline Design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 17/18, 469–495.
- MALVERN, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, 1st Edição. Prentice-Hall.
- MARSDEN, J. E., HUGHES, T. J., 1994. *Mathematical Foundations of Elasticity*, 1st Edição. Dover.
- MASSON, C., FANG, J., JORDAN, D., 2006. Dynamic Analysis of Pipe-in-Pipe Steel Catenary Risers with Direct Modeling of Structure Interaction. In: *2006 Offshore Technology Conference*. CD-ROM, Houston, Texas.
- MAZUR, A., 2006. Evaluation of Elastic Properties of Atomistic DNA Models. *Biophysical Journal* 91, 4507–4518.
- MEI-LAN, T., XIN-WEI, W., 2005. New Method For Geometric Nonlinear Analy-

- sis of Large Displacement Drill Strings. *Applied Mathematics and Mechanics* 26 (7), 921–928.
- MENZEL, R., GELLERT, M., 1994. The Biochemistry and Biology of DNA Gyrase. *Adv. Pharmacol.* 29, 39–69.
- NEUKIRCH, S., 2004. Extracting DNA Twist Rigidity from Experimental Supercoiling Data. *Physical Review Letters* 93 (19), 198107(1)–198107(4).
- NEUKIRCH, S., HEIJDEN, G. V. D., 2002. Geometry and Mechanics of Uniform n-Plies: from Engineering Ropes to Biological Filaments. *Journal of Elasticity* 69, 41–72.
- NUTBOURNE, A. W., MARTIN, R. R., 1988. *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design*. Vol. 1. Foundations. Halsted Press, NYC, USA.
- ODEN, J., KIKUCHI, N., 1988. *Contact Problems in Elasticity: a Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- POWELL, M. J. D., 1969. *A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems*. In “*Optimization*”, R. Fletcher (Ed.). Academic Press, Ney York.
- PUROHIT, P., INAMDAR, M., GRAYSON, P., SQUIRES, T., KONDEV, J., PHILLIPS, R., 2005. Forces During Bacteriophage DNA Packaging and Ejection. *Biophys. J.* 88, 851–866.
- RAMOS-JR, R., 2001. *Modelos Analíticos no Estudo do Comportamento Estrutural de Tubos Flexíveis e Cabos Umbilicais*. Tese, Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, Brasil.
- RAMOS-JR, R., PESCE, C., 2003. A Stability Analysis of Risers Subjected to Dynamic Compression Coupled With Twisting. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* 125 (3), 183–189.

- REDDY, B., VOLPI, M., 1992. Mixed Finite Element Method for the Arch Problem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 97, 125–145.
- REDDY, B. D., 1988. Convergence of Mixed Finite Element Method Approximation for the Shallow Arch Problem. *Numer. Math.* 53, 687–699.
- ROCKAFELLAR, R. T., 1976. Augmented Lagrangian and Applications of the Proximal Point Algorithms in Convex Programming. *Math. Oper. Res.* 1, 97–116.
- ROSENBERG, R. M., 1980. *Analytical Dynamics of Discrete Systems.*, 2nd Edição. Mathematical concepts and methods in science and engineering, New york.
- SANTOS, A. J. B., GUERREIRO, J. N. C., LOULA, A. F. D., 2004. Study of Pipeline Subjected to Unilateral Constraints. In: *Proceedings of the of 25nd Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering.* CD-ROM, Recife, Pernambuco.
- SANTOS, A. J. B., GUERREIRO, J. N. C., LOULA, A. F. D., 2006a. Um Modelo para Estruturas Flexíveis Sujeitas a Grandes Deslocamentos e Restrições Unilaterais. In: *Proceedings of the of 27nd Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering.* CD-ROM, Belém, Pará.
- SANTOS, A. J. B., GUERREIRO, J. N. C., LOULA, A. F. D., 2007. Finite Element Model for Flexible Unidimensional Structures with Unilateral Constraints. *Commun. Numer. Meth. Engng.* On line, v. 101002, p. 1002.
- SANTOS, A. J. B., LOULA, A., GUERREIRO, J., 2005. Formulação de Elementos Finitos Estabilizados para Estruturas Flexíveis no espaço 3D. In: *Anais do 28º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.* CD-ROM, São Paulo, SP.
- SANTOS, A. J. B., LOULA, A. F. D., GUERREIRO, J. N. C., 2006b. Formulação de Elementos Finitos Estabilizados para Estruturas Flexíveis no Espaço 3D. *Tema 7 (2)*, 347–359.

- SCHLICK, T., 1995. Modeling Superhelical DNA: Recent Analytical and Dynamic Approaches. *Current Opinion in Structural Biology* 5, 245–262.
- SIMO, J. C., 1985. A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I. *Computer Meths. Appl. Mech. Eng.* 49, 55–70.
- SMITH, S., FINZI, L., BUSTAMANTE, C., 1992. Direct Mechanical Measurements of the Elasticity of Single DNA Molecules by Using Magnetic Beads. *Science* 285, 1122–1126.
- STARK, W., BOOCOCK, M., 1995. Design of Submarine Pipelines Against Upheaval Buckling. In: *Topological selectivity in sitespecific recombination*. Oxford University Press, Oxford.
- STRANG, G., 1988. *Linear Algebra and its Applications.*, 3rd Edição. Harcourt Brace Jovanovich College, New York.
- STRICK, T., J.F. ALLEMAND, D. Bensimon, A. B., Croquette, V., 1996. The Elasticity of a Single Supercoiled DNA Molecule. *Science* 271, 1835–1837.
- STUMP, D. M., FRASER, W. B., GATES, K. E., 1998. The Writhing of Circular Cross-Section Rod: Undersea Cables to DNA Supercoils. *The Royal Society* 454, 2123–2156.
- STUMP, D. M., HEIDJEN, G. V. D., 2001. Birdcaging and the Collapse of Rods and Cables in Fixed-Grip Compression. *International Journal of Solids and Structures* 38, 4265–4278.
- TUCKER, R., WANG, C., 1999. An Integrated Model for Drill-String Dynamics. *Journal of Sound and Vibration* 224 (1), 123–165.
- TUCKER, R., WANG, C., 2003. Torsional Vibration Control and Cosserat Dynamics of a Drill-Rig Assembly. *Meccanica* 38, 143–159.

- VALVERDE, J., ESCALONA, J., MAYO, J., DOMÍNGUEZ, J., 2003. Finite Dynamic Analysis of a Light Structure in Outer Space: Short Electrodynamic Tether. *Multibody System Dynamics* 10, 125–146.
- VOLTERRA, E., GAINES, J. H., 1971. *Advanced Strength of Materials.*, 1st Edição. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- WANG, J., 1982. Topoisomerases. *Sci. Am.* 247, 94–109.
- WANG, J., LIU, L., 1990. DNA Replication: Topological Aspects and the Roles of DNA Topoisomerases. In: *DNA Topology and Its Biological Effects.* N.R. Cozzarelli and J.C. Wang. Cold Spring Harbor Laboratory, pp. 321–340.
- ZASTAVKER, Y., ASHERIE, N., LOMAKIN, A., PANDE, J., DONOVAN, J., SCHNUR, J., BENEDEK, G., 1993. Self-Assembly of Helical Ribbons. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 96, 7883–7887,.

# Apêndice A

## Alguns resultados clássicos de análise tensorial e desigualdades básicas

Sejam  $\phi$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{I}_d$  campos suaves, onde  $\phi$  é um campo escalar,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  campos vetoriais, e  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{I}_d$  campos tensoriais, sendo  $\mathbf{I}_d$  o operador identidade. Então temos as seguintes propriedades:

### A.1 Produto escalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{I}_d \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{T}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \quad (\text{A.6})$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \otimes \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Produto vetorial

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \quad (\text{A.12})$$

## A.3 Produto tensorial

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad (\text{A.13})$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^t = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2)\mathbf{u} + (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2)\mathbf{u} \quad (\text{A.16})$$

## A.4 Gradiente, divergente e rotacional

$$\nabla(\phi\mathbf{v}) = \phi\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla\phi, \quad (\text{A.17})$$

$$\text{div}(\phi\mathbf{v}) = \phi\text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi, \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla\mathbf{w})^T\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{w}, \quad (\text{A.19})$$

$$\text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{v}\text{div}(\mathbf{w}) + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div}(\mathbf{T}), \quad (\text{A.21})$$

$$\text{div}(\phi\mathbf{T}) = \phi\text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{T}\nabla\phi \quad (\text{A.22})$$

## A.5 Desigualdades para números

$$|a + b| \leq (|a| + |b|) \quad (\text{A.23})$$

$$|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2) \quad (\text{A.24})$$

$$|a - b|^2 \geq \frac{1}{2} |a|^2 - |b|^2 \quad (\text{A.25})$$

$$|a||b| + |c||d| \leq (|a| + |c|)(|b| + |d|) \quad (\text{A.26})$$

## A.6 Desigualdades para funções

Para  $f, g \in V$  e  $\varepsilon \in \mathcal{R}$  temos as seguintes desigualdades

$$(f, g) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\|f\|_V^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \|g\|_V^2 \right), \quad (\text{A.27})$$

$$\int_{\Omega} |f(x) \cdot g(x)| d\Omega \leq \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega} |g(x)|^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.28})$$

onde esta última é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwartz.

# Apêndice B

## Momentum linear, angular e potência realizada

Apresentamos neste apêndice as expressões do momentum linear, do momentum angular e da potência realizada da barra, particularizadas para a cinemática proposta em (2.16).

### B.1 Expressão para o momentum linear

Consideramos a barra, no instante  $t$  e posição  $S \in \mathcal{I}$  sendo seccionada, e denotamos por  $A_t = A_t(S, t)$  sua seção transversal nesse ponto. Definimos o momentum linear por unidade de comprimento de arco associado ao movimento (2.16) por

$$\mathbf{L}_t = \int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) dA = \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) d\xi_1 d\xi_2, \quad (\text{B.1})$$

onde  $A = A_t \Big|_{t=0} \in \mathcal{A}(S)$  é a seção transversal da estrutura na configuração de referência,  $\rho_o(\xi_1, \xi_2, S)$  é a massa específica na configuração de referência e  $\{\xi_\alpha^a, \xi_\alpha^b\} \in \mathcal{R}$ , com  $\xi_\alpha^a \leq \xi_\alpha \leq \xi_\alpha^b$  e  $\|\xi_\alpha^a\| \leq \|\xi_\alpha^b\| \leq \|h\|$ , representam as coordenadas em relação à base intrínseca do vetor  $\mathbf{r}_t$  na seção transversal. Derivando em

relação ao tempo a equação (2.16) obtemos

$$\dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) = \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \dot{\mathbf{d}}_\alpha(S, t),$$

e aplicando em (B.1) temos que

$$\mathbf{L}_t = \underbrace{\int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) d\xi_1 d\xi_2}_{\mathbf{L}_t^a} + \underbrace{\int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \dot{\mathbf{d}}_\alpha(S, t) d\xi_1 d\xi_2}_{\mathbf{L}_t^b}.$$

Analisando o termo  $\mathbf{L}_t^a$ , podemos reescreve-lo da seguinte forma

$$\mathbf{L}_t^a = \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) d\xi_2 d\xi_1 \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) = \rho_s(S) \dot{\mathbf{r}}_o(S, t),$$

onde

$$\rho_s(S) = \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) d\xi_2 d\xi_1$$

é a massa específica por unidade de comprimento de arco  $S$ .

Examinando o termo  $\mathbf{L}_t^b$  temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^b &= \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \xi_1 \dot{\mathbf{d}}_1(S, t) d\xi_2 d\xi_1 + \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \xi_2 \dot{\mathbf{d}}_2(S, t) d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \bar{\rho}_o(\xi_1, S) \xi_1 \dot{\mathbf{d}}_1(S, t) d\xi_1 + \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \bar{\bar{\rho}}_o(\xi_2, S) \xi_2 \dot{\mathbf{d}}_2(S, t) d\xi_2, \end{aligned}$$

onde  $\bar{\rho}_o$  e  $\bar{\bar{\rho}}_o$  são as grandezas resultantes da integração da massa específica em relação a  $\xi_2$  e  $\xi_1$ , respectivamente. Continuando o processo de integração, segue

que

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_t^b &= \rho_s(S)\xi_1 \dot{\mathbf{d}}_1(S, t) \Big|_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} - \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \rho_s(S) \dot{\mathbf{d}}_1(S, t) d\xi_1 \\
&+ \rho_s(S)\xi_2 \dot{\mathbf{d}}_2(S, t) \Big|_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} - \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_s(S) \dot{\mathbf{d}}_2(S, t) d\xi_2 \\
&= \rho_s(S)(\xi_1^b - \xi_1^a) \dot{\mathbf{d}}_1(S, t) - \rho_s(S) \dot{\mathbf{d}}_1(S, t) \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} d\xi_1 \\
&+ \rho_s(S)(\xi_2^b - \xi_2^a) \dot{\mathbf{d}}_2(S, t) - \rho_s(S) \dot{\mathbf{d}}_2(S, t) \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} d\xi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Como esse termo não influencia na caracterização do momentum linear, podemos reescreve-lo da seguinte forma

$$\mathbf{L}_t = \int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) dA = \rho_s(S) \dot{\mathbf{r}}_o(S, t). \quad (\text{B.2})$$

Pelo cálculo da sua derivada material, obtemos imediatamente

$$\dot{\mathbf{L}}_t = \int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \ddot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) dA = \rho_s(S) \ddot{\mathbf{r}}_o(S, t). \quad (\text{B.3})$$

## B.2 Expressão para o momentum angular

De maneira semelhante àquela apresentada para o momentum linear, temos que o momentum angular por unidade de comprimento de arco de referência  $S$  em relação ao ponto  $\mathbf{r}_o(S, t)$  e associado à cinemática (2.16) é dado por

$$\mathbf{H}_t = \int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) [\mathbf{r}_o(\xi_1, \xi_2, S, t) - \mathbf{r}_o(S, t)] \wedge \dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) dA. \quad (\text{B.4})$$

Para descrever a expressão acima em relação aos campos ( $w_\alpha$ ), faremos uso de (2.16) e (2.26), obtendo a seguinte relação auxiliar

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) - \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) &= \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \dot{\mathbf{d}}_\alpha(S, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha [w(S, t) \wedge \mathbf{d}_\alpha(S, t)] \\
&= w(S, t) \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \mathbf{d}_\alpha(S, t) \\
&= w(S, t) \wedge [\mathbf{r}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) - \mathbf{r}_o(S, t)]. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Substituindo (B.5) em (B.4) temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t &= \int_A \left\{ \rho_o(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge [\dot{\mathbf{r}}_o + w \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] \right\} dA \\
&= \underbrace{\int_A \left\{ \rho_o(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \dot{\mathbf{r}}_o \right\} dA}_{\mathbf{H}^a} + \int_A \left\{ \rho_o(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge [w \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] \right\} dA. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Analisando o termo  $\mathbf{H}^a$  da equação acima, temos pela relação (2.16), que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^a &= \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \left\{ \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \mathbf{d}_\alpha(S) \right] \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) \right\} d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \left\{ \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \xi_1 \mathbf{d}_1(S, t) \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) \right\} d\xi_2 d\xi_1 \\
&\quad + \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \xi_2 \mathbf{d}_2(S, t) \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) d\xi_2 d\xi_1.
\end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo em relação a  $\xi_2$  e o segundo em relação a  $\xi_1$  obtemos

$$\mathbf{H}^a = \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \bar{\rho}_o(\xi_1, S) \xi_1 \mathbf{d}_1(S, t) d\xi_1 \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) + \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \bar{\bar{\rho}}_o(\xi_2, S) \xi_2 \mathbf{d}_2(S, t) d\xi_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t),$$

onde  $\bar{\rho}_o$  e  $\bar{\bar{\rho}}_o$  seguem as mesmas definições descritas para o momentum linear.

Prosseguindo com a outra integração encontramos

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^a &= \left[ \rho_s(S) \xi_1 \mathbf{d}_1(S, t) \Big|_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} - \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \rho_s(S) \mathbf{d}_1(S, t) d\xi_1 \right] \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) \\
&+ \left[ \rho_s(S) \xi_2 \mathbf{d}_2(S, t) \Big|_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} - \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \rho_s(S) \mathbf{d}_2(S, t) d\xi_2 \right] \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) \\
&= \left[ \rho_s(S) (\xi_1^b - \xi_1^a) \mathbf{d}_1(S, t) - \rho_s(S) \mathbf{d}_1(S, t) \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} d\xi_1 \right] \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) \\
&+ \left[ \rho_s(S) (\xi_2^b - \xi_2^a) \mathbf{d}_2(S, t) - \rho_s(S) \mathbf{d}_2(S, t) \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} d\xi_2 \right] \wedge \dot{\mathbf{r}}_o(S, t) = 0.
\end{aligned}$$

Como o termo  $\mathbf{H}^a$  é identicamente nulo, a equação para  $\mathbf{H}_t$  é reduzida a

$$\mathbf{H}_t = \int_A \left\{ \rho_o [\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o] \wedge [\boldsymbol{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] \right\} dA. \quad (\text{B.7})$$

Aplicando a propriedade (A.12) nessa equação, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t &= \int_A \left\{ \rho_o [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \cdot (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] \boldsymbol{w} \right\} d\xi - \int_A \left\{ \rho_o [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \cdot \boldsymbol{w}] (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right\} d\xi \\
&= \int_A \rho_o \|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o\|^2 \boldsymbol{w}(S, t) d\xi - \int_A \left\{ \rho_o [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \otimes (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] \boldsymbol{w}(S, t) \right\} d\xi \\
&= \left[ \int_A \rho_o [\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o\|^2 \mathbf{I}_d - (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \otimes (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] d\xi \right] \boldsymbol{w}(S, t) \\
&= \mathbf{I}_\rho(\xi_1, \xi_2, S, t) \boldsymbol{w}(S, t), \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{I}_\rho(\xi_1, \xi_2, S, t) = \int_A \rho_o [\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o\|^2 \mathbf{I}_d - (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \otimes (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)] dA$$

é o tensor de inércia. Para expressar esse tensor em relação à base intrínseca  $\mathbf{d}_i(S, t)$ , substituímos (2.16) na equação (B.8) encontrando

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t &= \int_A \rho_o \left\{ \left\| \sum_{\varrho=1}^2 \xi_\varrho \mathbf{d}_\varrho(S, t) \right\|^2 \mathbf{I}_d - \left( \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \mathbf{d}_\alpha(S, t) \right) \otimes \left( \sum_{\beta=1}^2 \xi_\beta \mathbf{d}_\beta(S, t) \right) \right\} dA \boldsymbol{w}(S, t) \\
&= \int_A \rho_o \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 [\xi_\alpha \xi_\beta (\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\beta) \mathbf{I}_d - \xi_\alpha \xi_\beta (\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta)] dA \boldsymbol{w}(S, t) \\
&= \mathbf{I}_\rho(\xi_1, \xi_2, S, t) \boldsymbol{w}(S, t), \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

onde

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

e

$$\mathbf{I}_\rho(\xi_1, \xi_2, S, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [\delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}_d - (\mathbf{d}_\alpha(S, t) \otimes \mathbf{d}_\beta(S, t))]. \quad (\text{B.10})$$

Fazendo uso da definição de que a base intrínseca  $\mathbf{d}_i(S, t)$  está na direção dos eixos principais de inércia da seção transversal e denotando

$$\mathbf{I}_1(S) = \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \xi_2^2 \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{I}_2(S) = \int_{\xi_1^a}^{\xi_1^b} \int_{\xi_2^a}^{\xi_2^b} \xi_1^2 \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{J}(S) = \mathbf{I}_1(S) + \mathbf{I}_2(S), \quad (\text{B.13})$$

temos pela Proposição (D.1) que o tensor de inércia (B.10) associado à seção transversal da barra é dado por

$$\mathbf{I}_\rho = \mathbf{I}_1(S) \mathbf{d}_1(S, t) \otimes \mathbf{d}_1(S, t) + \mathbf{I}_2(S) \mathbf{d}_2(S, t) \otimes \mathbf{d}_2(S, t) + \mathbf{J}(S) \mathbf{d}_3(S, t) \otimes \mathbf{d}_3(S, t).$$

Fazendo a derivada material de (B.9) temos que

$$\dot{\mathbf{H}}_t = \underbrace{\dot{\mathbf{I}}_\rho(S, t) w(S, t)}_{\mathbf{H}^b} + \mathbf{I}_\rho(S, t) \dot{w}(S, t). \quad (\text{B.14})$$

Expandindo o termo  $\mathbf{H}^b$  obtemos

$$\dot{\mathbf{I}}_\rho w = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [ -(\dot{\mathbf{d}}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) - (\mathbf{d}_\alpha \otimes \dot{\mathbf{d}}_\beta) ] w(S, t).$$

Aplicando a relação (2.26) temos que

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{I}}_\rho w &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [ - (w \wedge \mathbf{d}_\alpha) \otimes \mathbf{d}_\beta - \mathbf{d}_\alpha \otimes (w \wedge \mathbf{d}_\beta) ] w(S, t) \\
&= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [ - (\mathbf{d}_\beta \cdot w) [w \wedge \mathbf{d}_\alpha] - [(w \wedge \mathbf{d}_\beta) \cdot w] \mathbf{d}_\alpha ] \\
&= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [ - w \wedge (\mathbf{d}_\beta \cdot w) \mathbf{d}_\alpha ] \\
&= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [ - w \wedge (\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) w ]. \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Aplicando a relação

$$(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2) w = w - (\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2) w,$$

obtida pela relação tensorial (A.15), temos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{I}}_\rho w &= w \wedge \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta d\xi_1 d\xi_2 \right] (w - (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}_d - \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) w) \\
&= w \wedge \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA \right] (\delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}_d - \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) w \\
&= w(S, t) \wedge \mathbf{I}_\rho(S, t) w(S, t)
\end{aligned}$$

Substituindo essa identidade em (B.14) obtemos finalmente

$$\dot{\mathbf{H}}_t(S, t) = \mathbf{I}_\rho(S, t) \dot{w}(S, t) + w(S, t) \wedge \mathbf{H}_t(S, t) \tag{B.16}$$

### B.3 Expressão para a potência realizada

Nesta seção descrevemos a equação da potência realizada pelo sistema especializada para o modelo de barras com cineática descrita pela equação (2.16). Obtemos com isto, a equação final em termos dos esforços generalizados  $\mathbf{n}(S, t)$  e  $\mathbf{m}(S, t)$ .

Considerando a barra sujeita a forças de corpo e superfície, temos que a taxa

do trabalho que essas forças produzem instantaneamente é a potência realizada

$$\mathcal{P} = \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{t}(\xi_1, \xi_2, S) \cdot \dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t)) d(\partial\Sigma) + \int_{\Sigma} (\mathbf{b}_o(\xi_1, \xi_2, S) \cdot \dot{\mathbf{r}}_t(\xi_1, \xi_2, S, t)) d\Sigma.$$

onde  $\partial\Sigma$  é a superfície do contorno de  $\Sigma$  e  $\mathbf{t}(\xi_1, \xi_2, S)$  representa o tensor de Piola-Kirchhoff aplicado ao vetor unitário normal a essa superfície.

Aplicando o teorema da divergência, podemos transformar o termo com integral de superfície em uma integral de volume, obtendo

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} \text{div}(\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{r}}_t) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{b}_o \cdot \dot{\mathbf{r}}_t) d\Sigma.$$

Utilizando a relação (A.21), a equação de conservação do momentum linear (2.27) e o gradiente de deformação  $\mathbf{F}(\cdot, \cdot) = \nabla_{\mathbf{r}_t}(\cdot, \cdot) : S \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$ , temos que

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} \{(\text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{b}_o) \cdot \dot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{T} \cdot \nabla \dot{\mathbf{r}}_t\} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\rho_o \dot{\mathbf{r}}_t \cdot \dot{\mathbf{r}}_t) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}}) d\Sigma, \quad (\text{B.17})$$

onde o primeiro termo do lado direito representa a taxa da energia cinética macroscópica total do corpo e o segundo a potência interna do sistema. Essa potência interna é uma grandeza condicionada a natureza constitutiva de cada material.

Analisando um pouco melhor o primeiro termo de (B.17) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\rho_o \dot{\mathbf{r}}_t \cdot \dot{\mathbf{r}}_t) d\Sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\rho_o}{2} (\dot{\mathbf{r}}_o + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_o + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \right\} d\Sigma \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_o}{2} (\dot{\mathbf{r}}_o \cdot \dot{\mathbf{r}}_o) d\Sigma + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \rho_o (\dot{\mathbf{r}}_o \cdot [\mathbf{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]) d\Sigma \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_o}{2} \{ (\mathbf{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \cdot (\mathbf{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \} d\Sigma. \end{aligned}$$

Pela relação  $\mathbf{H}^a$  da equação (B.6) temos que

$$\int_A \rho_o [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \dot{\mathbf{r}}_o] dA = 0.$$

Com isso, a expressão reduzida para a taxa de energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\rho_o \dot{\mathbf{r}}_t \cdot \dot{\mathbf{r}}_t) d\Sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_o}{2} (\dot{\mathbf{r}}_o \cdot \dot{\mathbf{r}}_o) d\Sigma \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_o}{2} \{ (\boldsymbol{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \cdot (\boldsymbol{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \} d\Sigma. \end{aligned}$$

Vamos agora analisar o segundo termo de (B.17) e encontrar uma expressão simplificada em termos dos esforços  $\mathbf{n}(S, t)$  e  $\mathbf{m}(S, t)$ . Para isso, temos pela equação (2.16) que o gradiente de deformação  $\mathbf{F}(S, t)$  é dado por

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{d}_{\alpha} \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_{\alpha} + \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right] \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_3. \quad (\text{B.18})$$

Calculando a derivada material e usando (2.26) e (B.5) temos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \sum_{\alpha=1}^2 \dot{\mathbf{d}}_{\alpha} \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_{\alpha} + \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right] \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_3 + [\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{\mathbf{r}}_t - \dot{\mathbf{r}}_o)] \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_3 \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{d}_{\alpha}) \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_{\alpha} + \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right] \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_3 + [\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]] \otimes \hat{\boldsymbol{\iota}}_3 \end{aligned}$$

Utilizando a definição tensorial de  $\mathbf{T}$ , equação(2.28), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{t}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{d}_1) + \mathbf{t}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{d}_2) + \mathbf{t}_3 \cdot \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right] \\ &+ \mathbf{t}_3 \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]] \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{d}_{\alpha} \wedge \mathbf{t}_{\alpha}) + \mathbf{t}_3 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_3] \\ &+ \mathbf{t}_3 \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{w} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Analisando apenas o primeiro termo dessa equação, e fazendo uso da relação

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{d}_{\alpha},$$

podemos reescreve-lo da seguinte forma

$$\sum_{\alpha=1}^2 \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{d}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_\alpha \right) \right] = \sum_{\alpha=1}^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_\alpha} \wedge \mathbf{d}_\alpha \right).$$

Aplicando a identidade

$$\frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_\alpha} \wedge \mathbf{t}_\alpha,$$

demonstrada em (C.4), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{d}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\alpha) &= -\boldsymbol{\omega} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) = -\mathbf{t}_3 \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \right) \\ &= -\mathbf{t}_3 \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right) + \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \frac{\partial \mathbf{d}_\alpha}{\partial S} \\ &= -\mathbf{t}_3 \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]. \end{aligned}$$

Substituindo esta relação em (B.19) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{t}_3 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_3] - \mathbf{t}_3 \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right) \\ &\quad - \mathbf{t}_3 \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]] + \mathbf{t}_3 \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]]. \end{aligned}$$

Aplicando a relação

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]] - [\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]] = \\ &= (\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o))\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) - (\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o))\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \\ &= [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)]\boldsymbol{\omega} \\ &= [(\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega})](\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{t}_3 \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_3] - \mathbf{t}_3 \cdot (w \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S}) \\ &\quad - \mathbf{t}_3 \cdot [(w \otimes \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \otimes w)](\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o).\end{aligned}$$

Pelas relações (A.13) e (A.12) temos

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{t}_3 \cdot \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_o}{\partial S} - (w \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S}) \right] + \dot{\boldsymbol{\omega}} [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_3] - \mathbf{t}_3 \cdot [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge (w \wedge \boldsymbol{\omega})] \\ &= \mathbf{t}_3 \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right) - (w \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S}) \right] + [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_3] \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} - w \wedge \boldsymbol{\omega}].\end{aligned}$$

Aplicando a relação

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right) - w \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} \right) - w \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \left[ \frac{\partial \mathbf{d}_3}{\partial t} - w \wedge \mathbf{d}_3 \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \mathbf{d}_3 \right) - \left( w \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \mathbf{d}_3 \right) \right),\end{aligned}$$

obtida pela a partir de (2.26), temos que

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{t}_3 \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \mathbf{d}_3 \right) - w \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \mathbf{d}_3 \right) \right] + [(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_3] \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} - w \wedge \boldsymbol{\omega}].$$

Com isso, a expressão reduzida para a potência realizada é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{I}} \frac{A(S)\rho_o}{2} (\dot{\mathbf{r}}_o \cdot \dot{\mathbf{r}}_o) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_o}{2} \{ (w \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \cdot (w \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o)) \} d\Sigma \\ &\quad + \int_{\mathcal{I}} \{ \mathbf{n} \cdot (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{m} \cdot (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\omega}}) \} dS,\end{aligned}\tag{B.20}$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}(S, t) : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$  é dado como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(S, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} - \mathbf{d}_3 \right),\tag{B.21}$$

e

$$\overset{\nabla}{(\cdot)} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) - w \wedge (\cdot)\tag{B.22}$$

é a taxa medida por um observador localizado sobre a base intrínseca.

# Apêndice C

## Algumas verificações importantes

### C.1 Cálculo da estimativa de $v_3(S)$

Nesta seção apontamos o caminho utilizado na obtenção das estimativas apresentadas em (5.57 - 5.62). Pela equação (5.57) temos que

$$v_3(S) = \frac{\kappa}{\omega} \int_0^S \text{sen}(\omega(S - \xi)) w_1 d\xi - \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \int_0^S w_2 d\xi - \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \int_0^S \cos(\omega(S - \xi)) w_2 d\xi + \frac{\mu^2}{\omega^2} \int_0^S w_3 d\xi + \frac{\kappa^2}{\omega^2} \int_0^S \cos(\omega(S - \xi)) w_3 d\xi$$

Tomando o módulo em ambos os lados temos

$$v_3(S) = \left| \frac{\kappa}{\omega} \int_0^S \text{sen}(\omega(S - \xi)) w_1 d\xi - \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \int_0^S w_2 d\xi - \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \int_0^S \cos(\omega(S - \xi)) w_2 d\xi + \frac{\mu^2}{\omega^2} \int_0^S w_3 d\xi + \frac{\kappa^2}{\omega^2} \int_0^S \cos(\omega(S - \xi)) w_3 d\xi \right|$$
$$v_3(S) \leq \frac{\kappa}{\omega} \int_0^S |\text{sen}(\omega(S - \xi)) w_1| d\xi - \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \int_0^S |w_2| d\xi - \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \int_0^S |\cos(\omega(S - \xi)) w_2| d\xi + \frac{\mu^2}{\omega^2} \int_0^S |w_3| d\xi + \frac{\kappa^2}{\omega^2} \int_0^S |\cos(\omega(S - \xi)) w_3| d\xi.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
|v_3(S)| &\leq \frac{\kappa}{\omega} \left[ \int_0^S |\text{sen}(\omega(S - \xi))|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_1|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \left[ \int_0^S |1|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_2|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{\mu\kappa}{\omega^2} \left[ \int_0^S |\cos(\omega(S - \xi))|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_2|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu^2}{\omega^2} \left[ \int_0^S |1|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_3|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{\kappa^2}{\omega^2} \left[ \int_0^S |\cos(\omega(S - \xi))|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_3|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como  $|\cos(\xi)| \leq 1$ ,  $\forall \xi \in [0, 2\pi]$ , temos

$$\begin{aligned}
|v_3(S)| &\leq \frac{\kappa}{\omega} S^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_1|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2\mu\kappa}{\omega^2} S^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_2|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} + S^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^S |w_3|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}, \\
|v_3(S)|^2 &\leq \frac{4\kappa^2}{\omega^2} S \int_0^1 |w_1|^2 d\xi + \frac{4\mu^2\kappa^2}{\omega^4} S \int_0^1 |w_2|^2 d\xi + 4S \int_0^1 |w_3|^2 d\xi, \\
\int_0^1 |v_3(S)|^2 dS &\leq \frac{2\kappa^2}{\omega^2} \|w_1\|^2 + \frac{2\mu^2\kappa^2}{\omega^4} \|w_2\|^2 + 2 \|w_3\|^2, \\
\|v_3(S)\|^2 &\leq \max \left\{ 2, \frac{2\kappa^2}{\omega^2}, \frac{2\mu^2\kappa^2}{\omega^4} \right\} \{ \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2 \}, \\
\|v_3(S)\|^2 &\leq 2 \{ \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_3\|^2 \}.
\end{aligned}$$

Processos semelhantes foram utilizados para obter as outras estimativas (5.58 - 5.62).

## C.2 Antisimetria do operador $\Omega$

O campo tensorial  $\Omega : \bar{\mathcal{I}} \times \mathcal{T} \mapsto \mathcal{R}^3$  definido por

$$\Omega(S, t) = \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{\Lambda}(S, t) \mathbf{\Lambda}^T(S, t),$$

com  $\mathbf{\Lambda}(S, t) \in SO_3$ , é antisimétrico.

**Prova.** Um tensor é antisimétrico se satisfizer a relação  $\Omega(S, t) + \Omega^T(S, t) = 0$ .

Com isso temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}(S, t) + \boldsymbol{\Omega}^T(S, t) &= \left[ \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \right] \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) + \left( \left[ \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \right] \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) \right)^T \\
&= \left[ \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \right] \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) + \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \left[ \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \right]^T \\
&= \left[ \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \right] \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) + \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \left[ \frac{d}{dS} \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) \right] \\
&= \frac{d}{dS} \left[ \boldsymbol{\Lambda}(S, t) \boldsymbol{\Lambda}^T(S, t) \right] \\
&= \frac{d}{dS} \mathbf{I}_d(S, t) = 0.
\end{aligned}$$

Com isso provamos a antisimetria de  $\boldsymbol{\Omega}(S, t)$ . ■

### C.3 Teorema de Cauchy

**Teorema 4** Seja o par  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  um sistema de forças atuando em  $\Sigma_t$  durante o movimento. Então, uma condição necessária e suficiente para que as leis de balanço de momento seja satisfeita é que exista um campo tensorial espacial  $\mathbf{T}_c$ , chamado de tensor de Cauchy, tal que

a) para cada vetor unitário e normal à superfície do corpo  $\mathbf{n}$ ,

$$s(\mathbf{n}) = \mathbf{T}_c \mathbf{n}, \quad (\text{C.1})$$

b)  $\mathbf{T}_c$  é simétrico;

c)  $\mathbf{T}_c$  satisfaz à equação do movimento

$$\text{div}(\mathbf{T}_c) + \mathbf{b} = \rho \overset{\circ}{\mathbf{v}},$$

onde  $\rho \in \mathcal{R}$  é a massa específica e  $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^3$  é o vetor velocidade.

A prova deste teorema é apresentada em GURTIN [1981].

#### C.4 Especialização da relação $\mathbf{F}\mathbf{T}^T$ para o modelo

Seja  $\mathbf{T}$  o tensor de Piola-Kirchhoff e  $\mathbf{F}$  o tensor de deformação definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{t}_1(\xi_1, \xi_2, S) \otimes \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{t}_2(\xi_1, \xi_2, S) \otimes \hat{\mathbf{t}}_2 + \mathbf{t}_3(\xi_1, \xi_2, S) \otimes \hat{\mathbf{t}}_3, \\ \mathbf{F} &= \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{d}_\alpha(S, t) \otimes \hat{\mathbf{t}}_\alpha + \left[ \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{r}_o(S, t) + \boldsymbol{\omega}(S, t) \wedge \left( \mathbf{r}_t(\xi_1, \xi_2, S, t) - \mathbf{r}_o(S, t) \right) \right] \otimes \hat{\mathbf{t}}_3.\end{aligned}$$

Com isso, temos pelo Teorema de Cauchy (4) que

$$\mathbf{F}\mathbf{T}^T = \mathbf{T}\mathbf{F}^T \quad (\text{C.2})$$

e conseqüentemente

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_\alpha} \wedge \mathbf{t}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 = 0. \quad (\text{C.3})$$

**Prova.**

Sejam  $\Sigma_t$  e  $\Sigma$ , respectivamente, o domínio da barra no instante  $t$  e o domínio de referência. Então, pela relação C.1 do Teorema de Cauchy, podemos escrever a força total atuando sobre a superfície de  $\Sigma_t$  como uma integral sobre a superfície de  $\Sigma$  da seguinte forma

$$\int_{\partial \Sigma_t} \mathbf{T}_c \mathbf{m} d(\partial \Sigma_t) = \int_{\partial \Sigma} (\det \mathbf{F}) [\mathbf{T}_c]_m \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n} d(\partial \Sigma)$$

onde os vetores  $\mathbf{m} \in \mathcal{R}^3$  e  $\mathbf{n} \in \mathcal{R}^3$  são campos vetoriais unitários normais as superfícies  $\partial \Sigma_t$  e  $\partial \Sigma$ , respectivamente, e  $[\mathbf{T}_c]_m$  é a descrição material do tensor de Cauchy  $\mathbf{T}_c$ . Com isso, temos a representação do tensor de Piola-Kirchhoff em função do tensor de Cauchy dada por

$$\mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) [\mathbf{T}_c]_m \mathbf{F}^{-T}.$$

Reescrevendo a equação acima em relação ao tensor de Cauchy

$$[\mathbf{T}_c]_m = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^T,$$

e utilizando sua propriedade de simetria, Teorema (4)<sub>b</sub>, temos que

$$\mathbf{F} \mathbf{T}^T - \mathbf{T} \mathbf{F}^T = 0. \quad (\text{C.4})$$

Calculando separadamente cada termo dessa relação

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{T}^T &= \left( \mathbf{d}_1 \otimes \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \hat{\mathbf{t}}_2 + \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right] \otimes \hat{\mathbf{t}}_3 \right) \left( \hat{\mathbf{t}}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \hat{\mathbf{t}}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + \hat{\mathbf{t}}_3 \otimes \mathbf{t}_3 \right) \\ &= \left( \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \otimes \mathbf{t}_3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \mathbf{F}^T &= \left( \mathbf{t}_1 \otimes \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \hat{\mathbf{t}}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \hat{\mathbf{t}}_3 \right) \left( \hat{\mathbf{t}}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \hat{\mathbf{t}}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \hat{\mathbf{t}}_3 \otimes \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial S} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_o) \right] \right) \\ &= \left( \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \right) \end{aligned}$$

e substituindo em (C.4) temos que

$$\left( \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \otimes \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{d}_1 - \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{d}_2 - \mathbf{t}_3 \otimes \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \right) = 0.$$

Considerando  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3$  um vetor constante e não nulo, então

$$\begin{aligned} &\left( \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \otimes \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{d}_1 - \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{d}_2 - \mathbf{t}_3 \otimes \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \right) \mathbf{a} = 0 \\ &\left( (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{a}) \mathbf{d}_1 - (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{a}) \mathbf{t}_1 \right) + \left( (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{a}) \mathbf{d}_2 - (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{a}) \mathbf{t}_2 \right) + \left( (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} - \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \cdot \mathbf{a} \right) \mathbf{t}_3 \right) = 0 \\ &\mathbf{a} \wedge (\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{t}_1) + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{d}_2 \wedge \mathbf{t}_2) + \mathbf{a} \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) = 0 \\ &\mathbf{a} \wedge \left( \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{t}_1 \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_2} \wedge \mathbf{t}_2 \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 \right) \right) = 0 \\ &\frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{t}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial \xi_2} \wedge \mathbf{t}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial S} \wedge \mathbf{t}_3 = 0. \end{aligned}$$

■

# Apêndice D

## Algumas caracterizações importantes

### D.1 Caracterização do tensor de inércia

Seja  $\mathbf{I}_\rho$  o tensor de inércia associado à seção transversal da barra descrito em relação a base intrínseca  $\mathbf{d}_i(S, t)$ , definido por

$$\mathbf{I}_\rho(\xi_1, \xi_2, S, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_A \rho_o \xi_\alpha \xi_\beta dA [\delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}_d - (\mathbf{d}_\alpha(S, t) \otimes \mathbf{d}_\beta(S, t))]. \quad (\text{D.1})$$

Denotando

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(S) &= \int_A \xi_2^2 \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) dA, \\ \mathbf{I}_2(S) &= \int_A \xi_1^2 \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) dA, \\ \mathbf{J}(S) &= \mathbf{I}_1(S) + \mathbf{I}_2(S), \end{aligned}$$

então  $\mathbf{I}_\rho$  pode ser escrito como

$$\mathbf{I}_\rho = \mathbf{I}_1(S) \mathbf{d}_1(S, t) \otimes \mathbf{d}_1(S, t) + \mathbf{I}_2(S) \mathbf{d}_2(S, t) \otimes \mathbf{d}_2(S, t) + \mathbf{J}(S) \mathbf{d}_3(S, t) \otimes \mathbf{d}_3(S, t).$$

**Prova.** Pela definição (D.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\rho(S) &= \left[ \int_A \rho_o \xi_1 \xi_1 dA \right] (\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) + \left[ \int_A \rho_o \xi_1 \xi_2 dA \right] (-\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2) \\ &+ \left[ \int_A \rho_o \xi_2 \xi_2 dA \right] (\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + \left[ \int_A \rho_o \xi_2 \xi_1 dA \right] (-\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_1). \end{aligned}$$

Como  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$  coincidem com os eixos principais de inércia,

$$\int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \xi_1 \xi_2 dA = \int_A \rho_o(\xi_1, \xi_2, S) \xi_2 \xi_1 dA = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\rho(S) &= \left[ \int_A \rho_o \xi_1 \xi_1 dA \right] (\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) + \left[ \int_A \rho_o \xi_2 \xi_2 dA \right] (\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) \\ &= \mathbf{I}_2(\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) + \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_d - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) \\ &= -\mathbf{I}_2(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) - \mathbf{I}_1(\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{I}_d \\ &= -\mathbf{I}_2(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) - \mathbf{I}_1(\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) \\ &= (-\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) + (-\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)(\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)(\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) \\ &= \mathbf{I}_1(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) + \mathbf{I}_2(\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)(\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3). \end{aligned}$$

■

## D.2 Caracterização de $\Lambda(S)$

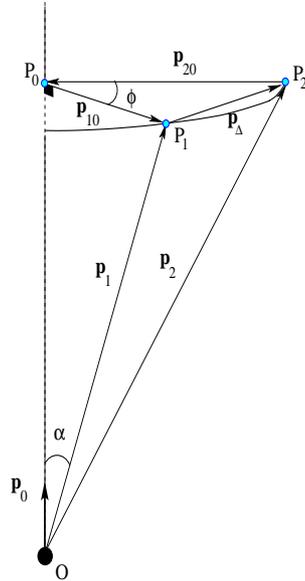


Figura D.1: Esquema da translação de  $P_1$  devido a uma rotação  $\phi$  em torno do eixo  $\mathbf{p}_0$ .

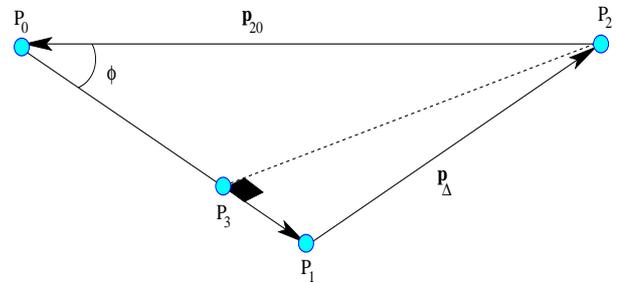


Figura D.2: Desenho esquemático do vetor  $\mathbf{p}_\Delta$ .

Como definido pelas relações (2.6) e (2.17),  $\Lambda \in SO_3$  é um campo tensorial

ortogonal de segunda ordem que descreve a rotação da barra em cada posição  $S \in \bar{\mathcal{I}}$ . Para caracteriza-lo, aplicamos uma rotação na barra em torno de um eixo com origem  $O$ , localizado sobre a linha de centróides, e direção definida pelo vetor unitário  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{R}^3$ , como podemos observar no esquema da Figura (D.1). Antes da rotação, consideramos um ponto  $P_1$  da barra com vetor posição  $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{R}^3$ , dada em relação a origem  $O$ , fazendo um ângulo  $\alpha$  em relação a  $\mathbf{p}_0$ . Aplicando uma rotação  $\phi$ , o ponto  $P_1$  é transladado para a posição  $P_2$ , com vetor posição representado por  $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{R}^3$ , e relacionados através do vetor  $\mathbf{p}_\Delta \in \mathcal{R}^3$ . Denotamos por  $\mathbf{p}_{10}$  a componente do vetor  $\mathbf{p}_1$  normal a  $\mathbf{p}_0$  com dimensão  $a$  e por  $\mathbf{p}_{20}$  a componente do vetor  $\mathbf{p}_2$  normal a  $\mathbf{p}_0$  cuja dimensão também é  $a$ . Como podemos observar pela Figura (D.2), decompos o vetor  $\mathbf{p}_\Delta$  em uma componente ao longo de  $\overline{P_0P_1}$  e outra normal a esta. A componente normal a  $\overline{P_0P_1}$  também é normal ao plano  $P_0OP_1$ , definido pelos vetores  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_1$ , possuindo assim direção  $\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1$  e módulo dado pela relação

$$\|\overline{P_3P_2}\| = \|\mathbf{p}_{20}\| \text{sen}(\phi) = a \text{sen}(\phi).$$

Como

$$\|\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}_1\| \text{sen}(\alpha) = \|\mathbf{p}_1\| \frac{a}{\|\mathbf{p}_1\|} = a,$$

temos que

$$\begin{aligned} \overline{P_3P_2} &= (\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1) \text{sen}(\phi) \\ &= \frac{\text{sen}(\phi)}{\phi} (\phi \wedge \mathbf{p}_1), \end{aligned} \tag{D.2}$$

onde

$$\phi = \phi \mathbf{p}_0, \tag{D.3}$$

$$\phi = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}, \tag{D.4}$$

e  $\phi_i$  as componentes de  $\phi$ . Devemos observar que pelo fato de estarmos considerando rotações finitas,  $\phi$  não é um vetor. Para  $\phi$  ser considerado um vetor, é

necessário que as seguintes propriedades sejam satisfeitas: ter magnitude, direção e poder ser adicionado a outro vetor pela lei do paralelogramo. Como ele não satisfaz a última característica, ele é denominado pseudo-vetor ROSENBERG [1980]. Entretanto, quando  $\phi$  descreve rotações infinitesimais todas as propriedades descritas anteriormente são verificadas e nesse caso  $\phi$  é um vetor. A outra componente de  $\mathbf{p}_\Delta$  é ortogonal aos vetores  $\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_0$ , possuindo por conseqüência sua direção definida por  $\mathbf{p}_0 \wedge (\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1)$  e magnitude dada pela relação

$$\|\overline{P_3P_1}\| = \|\mathbf{p}_{10}\| - \|\mathbf{p}_{20} \cos(\phi)\| = a(1 - \cos(\phi)). \quad (\text{D.5})$$

Como

$$\|\mathbf{p}_0 \wedge (\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1)\| = \|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1\| \sin(90) = \|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}_1\| \sin(\alpha) = a,$$

temos que

$$\begin{aligned} \overline{P_3P_1} &= \mathbf{p}_0 \wedge (\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1)(1 - \cos(\phi)) = 2[\mathbf{p}_0 \wedge (\mathbf{p}_0 \wedge \mathbf{p}_1)] \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ &= \frac{2\sin^2(\phi/2)}{\phi^2} [\phi \wedge (\phi \wedge \mathbf{p}_1)]. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Pelas relações (D.2) e (D.6) temos que

$$\mathbf{p}_\Delta = \frac{\sin(\phi)}{\phi} (\phi \wedge \mathbf{p}_1) + \frac{2\sin^2(\phi/2)}{\phi^2} [\phi \wedge (\phi \wedge \mathbf{p}_1)]$$

e conseqüentemente

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{\sin(\phi)}{\phi} (\phi \wedge \mathbf{p}_1) + \frac{2\sin^2(\phi/2)}{\phi^2} [\phi \wedge (\phi \wedge \mathbf{p}_1)]. \quad (\text{D.7})$$

Deste momento em diante, nos preocuparemos em apresentar uma expressão explícita do operador  $\mathbf{\Lambda}$ . Iniciaremos apresentando a forma matricial da equação acima e posteriormente faremos uso de algumas relações para expressá-lo em termos de uma função exponencial. Para expressar (D.7) matricialmente, consideramos  $\phi$

um pseudo-vetor axial, cuja matriz associada é dada por  $\Theta$  e escrita da seguinte forma:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Com isso, (D.7) torna-se

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{I}\mathbf{p}_1 + \frac{\text{sen}(\phi)}{\phi}\Theta\mathbf{p}_1 + \frac{2\text{sen}^2(\phi/2)}{\phi^2}\Theta^2\mathbf{p}_1 = \Lambda\mathbf{p}_1, \quad (\text{D.9})$$

onde

$$\Lambda = \left[ \mathbf{I} + \frac{\text{sen}(\phi)}{\phi}\Theta + \frac{2\text{sen}^2(\phi/2)}{\phi^2}\Theta^2 \right] \quad (\text{D.10})$$

é dependente de  $\phi_i$ . Esse operador é ortogonal, preserva orientação e aplicado a um vetor  $\mathbf{p}_1$  preserva comprimento, as quais são as características estabelecidas para pertencer ao grupo  $SO_3$ . Expandindo as funções trigonométricas de  $\Lambda$  em séries de Taylor temos que

$$\begin{aligned} \Lambda = \mathbf{I} &+ \left( 1 - \frac{\phi^2}{3!} + \frac{\phi^4}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{\phi^{2n}}{(2n+1)!} \pm \dots \right) \Theta \\ &+ \left( \frac{1}{2!} - \frac{\phi^2}{4!} + \frac{\phi^4}{6!} - \dots + (-1)^n \frac{\phi^{2n}}{(2n+2)!} \pm \dots \right) \Theta^2. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Fazendo algumas operações simples de multiplicação de matriz com (D.8) obtemos algumas relações do tipo

$$\begin{aligned} \Theta^3 &= -\phi^2\Theta, & \Theta^4 &= -\phi^2\Theta^2, \\ \Theta^5 &= +\phi^4\Theta, & \Theta^6 &= +\phi^4\Theta^2. \end{aligned}$$

Continuando com as operações, percebemos o surgimento de um padrão bem defi-

nido que pode ser expresso através das seguintes seqüências

$$\Theta^{2n-1} = (-1)^{n-1} \phi^{2(n-1)} \Theta, \quad \Theta^{2n} = (-1)^{n-1} \phi^{2(n-1)} \Theta^2. \quad (\text{D.12})$$

Aplicando (D.12a) e (D.12b) em (D.11), obtemos uma expansão em série para  $\Lambda$  em função de  $\Theta$  escrita por

$$\Lambda = \mathbf{I} + \Theta + \frac{1}{2!} \Theta^2 + \frac{1}{3!} \Theta^3 + \dots + \frac{1}{n!} \Theta^n + \dots \quad (\text{D.13})$$

Essa é a bem conhecida expansão em séries de Taylor da função exponencial  $\Theta$  em torno do ponto 0. Sendo assim,  $\Lambda$  pode ser reescrito na forma

$$\Lambda = \exp(\Theta). \quad (\text{D.14})$$

### D.3 Caracterização da derivada da função $\exp(\Theta(S))$ em relação ao comprimento de arco $S$

Para obter a expressão da derivada da função  $\exp(\Theta)$ , introduzimos uma representação equivalente para a relação (D.9), a qual facilitará enormemente as operações. Na literatura especializada, essa expressão é conhecida como fórmula de Rodrigues. Para obtê-la, parametrizamos a equação (D.7) com a introdução do parâmetro

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{e} = \text{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{e} = \text{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{\boldsymbol{\phi}}{\phi}, \quad (\text{D.15})$$

sendo

$$\lambda = \text{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \quad (\text{D.16})$$

e obtemos como consequência

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_o + 2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) (\boldsymbol{\lambda} \wedge \mathbf{p}_o) + 2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) [\boldsymbol{\lambda} \wedge (\boldsymbol{\lambda} \wedge \mathbf{p}_o)].$$

Aplicando a relação trigonométrica

$$\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})}, \quad (\text{D.17})$$

temos que

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_o + \frac{2}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} [(\boldsymbol{\lambda} \wedge \mathbf{p}_o) + \boldsymbol{\lambda} \wedge (\boldsymbol{\lambda} \wedge \mathbf{p}_o)]. \quad (\text{D.18})$$

Pelos mesmos motivos discutidos na seção (D.2),  $\boldsymbol{\lambda}$  é considerado um pseudo-vetor axial, cuja sua matriz associada é denotada por  $\overline{\boldsymbol{\Theta}}$  e escrita como

$$\overline{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}(\phi/2)}{\phi/2} \boldsymbol{\Theta}. \quad (\text{D.19})$$

Com isso, a relação (D.18) torna-se

$$\mathbf{p} = \left[ \mathbf{I} + \frac{2}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} (\overline{\boldsymbol{\Theta}} + \overline{\boldsymbol{\Theta}^2}) \right] \mathbf{p}_o = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{p}_o, \quad (\text{D.20})$$

onde  $\boldsymbol{\Lambda} \in SO_3$  é representado em função de  $\lambda_i$  por

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3) & 1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1) & 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Pelas relações (D.14) e (D.20), temos que

$$\boldsymbol{\Lambda} = \exp(\boldsymbol{\Theta}) = \left[ \mathbf{I} + \frac{2}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} (\overline{\boldsymbol{\Theta}} + \overline{\boldsymbol{\Theta}^2}) \right] \quad (\text{D.21})$$

a qual é denominada de Fórmula de Rodrigues. Derivando em relação ao comprimento de arco  $S$  temos que

$$\frac{d}{dS} \exp(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{2}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} \left[ \overline{\boldsymbol{\Theta}'} + \overline{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}'} + \overline{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{\Theta}} - \frac{2\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}'}{1 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})} (\overline{\boldsymbol{\Theta}} + \overline{\boldsymbol{\Theta}^2}) \right]. \quad (\text{D.22})$$

Um outro resultado importante é a relação

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dS} \exp(\Theta)\right) \exp(-\Theta) &= \frac{2}{1 + (\lambda \cdot \lambda)} \left[ \overline{\Theta}' + \overline{\Theta\Theta}' - \overline{\Theta}'\overline{\Theta} \right] \\ &+ \frac{2}{1 + (\lambda \cdot \lambda)} \left[ -\lambda \cdot \lambda' (\overline{\Theta} - \overline{\Theta}^2) - \overline{\Theta\Theta}'\overline{\Theta} + \overline{\Theta\Theta}'\overline{\Theta}^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

a qual é derivada a partir das expressões (D.22) e (D.21) e das relações

$$\overline{\Theta}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \lambda^{2(n-1)} \overline{\Theta}, \quad \overline{\Theta}^{2n} = (-1)^{n-1} \lambda^{2(n-1)} \overline{\Theta}^2. \quad (\text{D.24})$$

Utilizando a relação (A.12) é fácil ver que

$$\begin{aligned} \overline{\Theta\Theta}'\overline{\Theta} &= -(\lambda \cdot \lambda') \overline{\Theta} \\ \overline{\Theta\Theta}'\overline{\Theta}^2 &= -(\lambda \cdot \lambda') \overline{\Theta}^2. \end{aligned}$$

Aplicando as relações acima em (D.23) obtemos finalmente

$$\left(\frac{d}{dS} \exp(\Theta)\right) \exp(-\Theta) = \frac{2}{1 + (\lambda \cdot \lambda)} \left[ \overline{\Theta}' + \overline{\Theta\Theta}' - \overline{\Theta}'\overline{\Theta} \right]. \quad (\text{D.25})$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)