

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Análise de Sensibilidade Topológica de Segunda Ordem

Jairo Rocha de Faria

Petrópolis, outubro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA DE
SEGUNDA ORDEM

Jairo Rocha de Faria

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECES-
SÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL

Aprovada por :

Prof. Antonio André Novotny, D.Sc.
Presidente

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc.

Prof. Gustavo Perla Menzala, Ph.D.

Prof. Jaime Edilberto Muñoz Rivera, D.Sc.

Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.

Prof. Rodolfo Rodriguez, Ph.D.

Prof. Walcy Santos, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
Outubro de 2007.

ROCHA DE FARIA, JAIRO

F224a Análise de Sensibilidade Topológica de Segunda Ordem / Jairo Rocha de Faria. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2007.
XII, 102 p. : il.; 29 cm

Orientadore(s): A.A. Novotny, R.A. Feijóo, E. Taroco e C. Padra

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2007.

1. Análise de Sensibilidade Topológica, 2. Derivada Topológica (de Primeira Ordem), 3. Derivada Topológica de Segunda Ordem, 4. Análise Assintótica. I. Antonio André Novotny, II. LNCC/MCT, III. Título (série).

CDD 515.353

Aos meus filhos Danilo, Gabriel e Pedro,
“com todo o amor que houver nesta vida” (Cazuza).

Agradecimentos

Tarefa extremamente difícil e ao mesmo tempo muito prazerosa é escrever estes singelos agradecimentos na tentativa de traduzir o que de antemão já se sabe não se ter palavras para fazê-lo. Por mais de quatro anos, foram várias as demonstrações de amizade, apoio, preocupação, cuidado, ajuda e carinho dadas por várias pessoas pelas quais deixo consignada minha profunda gratidão e agradeço a Deus por tê-las colocado em meu caminho.

Com enorme alegria e sincera emoção, agradeço aos meus filhos Danilo, Gabriel e Pedro aos quais dedico com muito amor todo o esforço despendido nesse trabalho e peço desculpas e compreensão pelos momentos de ausência. Pudera eu cantar o canto que lhes quero cantar, meus filhos: “da mesma forma que eu, muitas noites, me debrucei sobre teus berços e verti sobre teus pequeninos corpos adormecidos as minhas mais indefesas lágrimas de amor, e pedi a todas as divindades que cravassem na minha carne as farpas feitas para as tuas. E porque vivemos tanto tempo juntos e tanto tempo separados, e o que o convívio criou nunca a ausência pôde destruir” (Vinícius de Moraes).

À minha companheira de sonhos, Marcela Zamboni, que deu sentido a todas as mudanças em minha vida e tornou meu coração “um lago mais tranqüilo, onde a dor não tem razão” (Paulinho da Viola), agradeço pelo apoio, carinho, compreensão, cumplicidade e amor com que tem me ensinado a “não andar com os pés no chão” (Chico Buarque) e que me deram a paz necessária para a conclusão do trabalho.

Meu agradecimento especial a meus pais José Fernando e Nely Izabel, pelo apoio incondicional, incentivo indispensável e, sobretudo, pelo exemplo de luta e perseverança aos quais pude recorrer nos momentos mais difíceis.

Quero destacar também de forma muito especial os agradecimentos aos meus orientadores que me deram a honra de aceitar como orientando, pela paciência, dedicação e esmero com que conduziram o trabalho, pela confiança depositada ao propor tema tão desafiador, pelo ambiente científico de amizade e respeito que propiciaram um convívio muito agradável durante esses anos, pelas lições de vida e demonstrações de honestidade, verdade, justiça, ética e disciplina.

Em particular, agradeço ao professor André Novotny pelos valiosos ensinamentos e pela generosidade que sempre pautaram sua orientação que transcenderam os limites para uma relação de sincera amizade; fico extremamente feliz de ser o primeiro orientando de doutorado de sua (já não mais apenas) promissora carreira, a qual (felizmente) ele não pôde escolher: nasceu para ser pesquisador.

Ao professor Raúl Feijóo pelo seu contagiante exemplo de vida, de postura e de dedicação ao trabalho e à ciência, que remetem à Máxima: “As palavras convencem e os exemplos arrastam” (Santo Agostinho). Agradeço pelas observações sempre relevantes com a capacidade de tornar as “nebulosas explicadas em estrelas” (Henri Poincaré) e pela disponibilidade de sua experiência que foram indispensáveis ao êxito deste trabalho.

Ao professor Edgardo Taroco, “tranquilo e infalível” (Caetano Veloso), pela maestria com que nos brinda com seus profundos ensinamentos sempre com destacada elegância e percepção da beleza da vida através da ciência e vice-versa. Agradeço pelas contribuições relevantes para o trabalho, para minha formação profissional e pessoal.

Finalmente, agradeço ao Professor Claudio Padra pelos prestimosos e fundamentais conhecimentos transmitidos ainda que de sua bela e distante Bariloche.

Agradeço imensamente aos professores Fernando Duda (UFRJ), Eduardo Fancello (UFSC), Marcelo Fragoso (LNCC), Ana Friedlander (UNICAMP), José Herskovits (UFRJ), Ivo Lopes (UFRJ), Abimael Loula (LNCC), Gustavo Perla (LNCC), Jaime Rivera (LNCC), Rodolfo Rodriguez (Universidade de Concepcion – Chile) e Walcy Santos (UFRJ) que me deram a honra de aceitar participar das bancas dos seminários de avaliação e da defesa de tese, pela leitura atenciosa e valiosas sugestões.

Agradeço ao professor Gustavo Perla que acompanhou o trabalho desde o seminário de qualificação e para o qual sempre gentilmente contribuiu e enriqueceu com seus substanciais comentários.

Ao professor Abimael Loula agradeço pelos ensinamentos, motivação e disponibilidade que sempre nortearam suas ações como professor e como coordenador da pós-graduação. Aqui deixo externado o reconhecimento pelo seu apoio extremamente importante e a ad-

miração pela sua visão humanista de mundo e de ciência.

À Karen Aune, pela amizade de décadas “nunca perdida, sempre reencontrada” (Vinícius de Moraes), que temos sabido reinventar e que tem sobrevivido a nós mesmos. Agradeço pelo ombro onde me apoiei nos momentos de tristeza e pelas alegrias que compartilhamos pela vida.

Agradeço a todos os amigos com quem pude contar durante o doutorado e que fizeram mais agradável ainda a jornada: Amanda, Boness, Cristiane, Daniel, Demerson, Emerson, Flávio, Honório, Jean Félix, Leandro, Loreci, Maicon, Marcelo Barros, Marcos Alcoforado, Patrícia Drach e Sidarta. Em especial agradeço a “*los hermanos*” Nacho, Pablo e Sebastian pela cooperação no tema, pelas valiosas discussões, pelo espírito de grupo e pela inestimável companhia nos momentos de confraternização. Sobretudo, destaco a disponibilidade e incomensurável ajuda do Sebastian no *LATEX*.

Agradeço sinceramente aos sempre prestimosos funcionários do LNCC, de todos os setores: limpeza, segurança, biblioteca, suporte e administrativo pela competência e dedicação ao trabalho. Em particular, agradeço à Ana Nery pela eficiência e bom humor de sempre.

Finalmente, agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA DE SEGUNDA ORDEM

Jairo Rocha de Faria

Outubro/2007

Orientadores: Antonio André Novotny
Raúl Antonino Feijóo
Edgardo Omar Taroco
Claudio Padra

Modelagem Computacional

A derivada topológica fornece a sensibilidade de uma dada função custo quando uma perturbação não suave e infinitesimal (furo ou inclusão, por exemplo) é introduzida. Classicamente, esta derivada vem do segundo termo da expansão assintótica topológica considerando-se apenas perturbações infinitesimais. No entanto, em aplicações práticas, é necessário considerar perturbação de tamanho finito. Motivado por este fato, o presente trabalho tem como objetivo fundamental introduzir o conceito de derivadas topológicas de ordens superiores, o que permite considerar mais termos na expansão assintótica topológica. Em particular, observa-se que o *topological-shape sensitivity method* pode ser naturalmente estendido para o cálculo destes novos termos, resultando em uma metodologia sistemática de análise de sensibilidade topológica de ordem superior. Para se apresentar essas idéias, inicialmente essa técnica é verificada através de alguns problemas que admitem solução exata, onde se calcula explicitamente a expansão assintótica topológica até terceira ordem. Posteriormente, considera-se a equação de Laplace bidimensional, cujo domínio é topologicamente perturbado pela introdução de um furo com condição de contorno de Neumann ou de Dirichlet homogêneas, ou ainda de uma inclusão com propriedade física distinta do meio. Nesse caso, são calculadas explicitamente as derivadas topológicas de primeira e segunda

ordem. Com os resultados obtidos em todos os casos, estuda-se a influência dos termos de ordens superiores na expansão assintótica topológica, através de experimentos numéricos. Em particular, observa-se que esses novos termos, além de permitir considerar perturbações de tamanho finito, desempenham ainda um importante papel tanto como fator de correção da expansão assintótica topológica, quanto como direção de descida em processos de otimização. Finalmente, cabe mencionar que a metodologia desenvolvida neste trabalho apresenta um grande potencial para aplicação na otimização topológica e em algoritmos de reconstrução.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctoral of Science (D.Sc.)

SECOND ORDER TOPOLOGICAL SENSITIVITY ANALYSIS

Jairo Rocha de Faria

October/2007

Advisors: Antonio André Novotny

Raúl Antonino Feijóo

Edgardo Omar Taroco

Claudio Padra

Computational Modelling

The topological derivative provides the sensitivity of a given shape functional with respect to an infinitesimal non-smooth domain perturbation (insertion of hole or inclusion, for instance). Classically, this derivative comes from the second term of the topological asymptotic expansion, dealing only with infinitesimal perturbations. However, for practical applications, we need to insert perturbations of finite sizes. Therefore, we consider other terms in the expansion, leading to the concept of higher-order topological derivatives. In particular, we observe that the topological-shape sensitivity method can be naturally extended to calculate these new terms, resulting in a systematic methodology to obtain higher-order topological derivatives. In order to present these ideas, initially we apply this technique in some problems with exact solution, where the topological asymptotic expansion is obtained until third order. Later, we calculate first as well as second order topological derivative for the total potential energy associated to the Laplace equation in two-dimensional domain perturbed with the insertion of a hole, considering homogeneous Neumann or Dirichlet boundary conditions, or an inclusion with thermal conductivity coefficient value different from the bulk material. With these results, we present some numerical experiments showing the influence of the second order topological derivative in the topological asymptotic expansion, which

has two main features: it allows us to deal with perturbations of finite sizes and provides a better descent direction in optimization process. Finally, we observe that these features are very important in the development of topology optimization and reconstruction algorithms.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Análise de sensibilidade topológica	2
1.2	Objetivos	13
1.3	Apresentação	14
2	Análise de sensibilidade topológica de ordem superior	15
2.1	<i>Topological-shape sensitivity method</i>	17
2.2	Exemplos com solução exata	22
2.2.1	Primeiro exemplo: um problema de reação-difusão unidimensional	22
2.2.2	Segundo exemplo: problema de uma membrana bidimensional	27
2.3	Comentários adicionais	32
3	Aplicação no problema de Laplace	34
3.1	Formulação do problema	35
3.1.1	Domínio original	35
3.1.2	Domínio perturbado	39
3.1.3	Existência e unicidade das soluções	41
3.2	Cálculo da derivada topológica	43
3.2.1	Perturbação com furo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$	46
3.2.2	Perturbação com inclusão $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}) \cup \overline{\mathcal{I}_\varepsilon}$	52
3.3	Resumo dos resultados	55
3.4	Experimentos Numéricos	56

3.4.1	Exemplo 1	59
3.4.2	Exemplo 2	71
3.5	Comentários adicionais	74
4	Conclusões	81
4.1	Contribuições deste trabalho	81
4.2	Problemas em aberto	83
A	Cálculo da Divergência do Tensor de Eshelby	85
B	Análise Assintótica	88
B.1	Condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo	89
B.2	Condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira do furo	91
B.3	Condição de salto da derivada normal na fronteira da inclusão	93
	Referências Bibliográficas	96

Capítulo 1

Introdução

Domínios topologicamente perturbados surgem naturalmente na modelagem de fenômenos dissipativos como dano, nucleação e propagação de trincas, bem como em problemas na modelagem computacional, otimização topológica e em problemas inversos. Estes exemplos, devido ao grande número de aplicações em diversas áreas com grande impacto tanto do ponto de vista social quanto do econômico, demonstram a grande importância da análise da influência na perturbação na topologia do domínio e, conseqüentemente, têm sido objetos de intensa investigação científica nas últimas décadas.

Uma maneira de abordar os problemas supracitados consiste em inferir o quanto a solução de uma equação de estado associada ao problema é sensível à uma perturbação na topologia do domínio. Essa análise pode ser realizada observando-se a influência da criação de um pequeno furo no domínio, através de uma expansão assintótica da solução da equação de estado no domínio perturbado [1, 35].

Outra alternativa, bastante geral e que apresenta várias possibilidades de aplicações, é a de se obter esta sensibilidade considerando não apenas a equação de estado, mas uma função custo que representa uma medida de desempenho do problema em estudo. Este é o foco da análise de sensibilidade topológica [15, 16, 48, 58], que apresentou um grande desenvolvimento na última década, principalmente motivado por aplicações à problemas de otimização topológica (uma revisão bastante detalhada pode ser vista no trabalho de Eschenauer & Olhoff 2001 [17], que apresenta uma vasta bibliografia sobre o tema).

Assim, a análise de sensibilidade topológica fornece um desenvolvimento assintótico para uma função custo adotada, cujo termo principal é um campo escalar, denominado derivada topológica, que mede a sensibilidade da função custo quando um furo infinitesimal é criado em um ponto arbitrário do domínio.

A característica principal deste desenvolvimento assintótico, designado de expansão assintótica topológica, é que a derivada topológica depende apenas das soluções de problemas definidos no domínio não perturbado. Assim, a sensibilidade à mudança da topologia, associada à criação de um furo em qualquer ponto do domínio, pode ser obtida através de funções calculadas sobre o domínio original. Este fato corrobora com o apresentado por Lomov 1992 [40], que define expansão assintótica como a aproximação de um objeto desconhecido (a função custo calculada em um ponto arbitrário do domínio perturbado) por objetos conhecidos (a função custo definida no domínio original e a derivada topológica).

No entanto, tendo em vista as aplicações práticas, será mostrado que é importante considerar furos de tamanho finito. Como, em geral, a derivada topológica fornece uma boa estimativa apenas para furos infinitesimais, necessita-se considerar termos de ordens superiores na expansão assintótica topológica para levar em conta furos finitos. Adicionalmente, esses termos podem ainda ser utilizados para obter estimativas mais precisas do tamanho das perturbações em projetos de engenharia, melhores condições de otimalidade no contexto de otimização topológica e de problemas inversos, entre outros.

Esta questão permanece em aberto até o presente trabalho.

1.1 Análise de sensibilidade topológica

A análise de sensibilidade topológica estendeu os conceitos desenvolvidos nos anos 70 para a análise de sensibilidade à mudança de forma, na qual o objetivo é se determinar a sensibilidade de um problema quando o domínio sofre perturbações suaves em sua fronteira, sem que sejam permitidas mudanças em sua topologia [60]. Esta extensão foi motivada principalmente por problemas de otimização, onde a definição prévia da topologia do domínio torna-se uma hipótese bastante restritiva.

Nos anos 80 houve um grande desenvolvimento da otimização topológica que tem a particularidade de não requerer informações *a priori* sobre a topologia do domínio e que, portanto, fornece melhores resultados do que os obtidos pelos demais processos de otimização (por exemplo, otimização de forma e otimização dimensional [15]). Originalmente, a metodologia empregada para se obter tanto a forma quanto a topologia ótima fazia uso de materiais fictícios e aplicava técnicas de homogeneização e penalização [9, 10].

Já na década seguinte, vários trabalhos como, por exemplo, Eschenauer et al. 1994 [16], Schumacher 1996 [56], Sokolowski & Zochowski 1999 [58], Céia et al. 2000 [15] e Novotny et al. 2003 [48], apresentaram uma maneira possível de se obter tanto a forma quanto a topologia ótima através do conceito de derivada topológica.

Observação 1.1 *Cumprer ressaltar que no livro de Kozlov et al. 1999 [35] apresenta-se, ainda que de forma independente e com outra nomenclatura, o cálculo da derivada topológica da função custo energia associada ao problema de Laplace em um domínio bidimensional, onde é criado um furo circular com condição de Neumann homogênea em sua fronteira.*

No entanto, embora a análise de sensibilidade topológica tenha surgido pela necessidade de se estender a análise de sensibilidade à mudança de forma para problemas que admitem variações na topologia, a impossibilidade de se estabelecer um homeomorfismo entre os domínios original e topologicamente modificado representou uma dificuldade para a aplicação direta dos resultados desta última área de pesquisa no cálculo da derivada topológica. Nesse sentido, no trabalho de Novotny et al. 2003 [48] foi introduzida uma definição alternativa de derivada topológica que, embora equivalente à original dada por Sokolowski & Zochowski 1999 [58] e generalizada por Céia et al. 2000 [15], conduziu a uma nova metodologia para o seu cálculo, denominada *topological-shape sensitivity method*. Além do mais, através dessa nova abordagem foi possível estabelecer a relação entre as duas áreas de pesquisa, o que permitiu a utilização de técnicas clássicas, já bem postas na literatura desde o trabalho de Murat & Simon 1976 [43], para o cálculo da derivada topológica.

Observação 1.2 *No sentido estrito da palavra, análise de sensibilidade topológica se aplica a problemas que são perturbados com a criação de furos no interior do domínio, modificando*

assim sua topologia inicial. Para a inclusão de outro material no domínio, foi introduzido no trabalho de Novotny 2003 [47] o termo análise de sensibilidade configuracional. No entanto, como formalmente esses conceitos coincidem, não se fará distinção entre eles nesse trabalho, ficando clara em cada contexto. Doravante, será utilizada a expressão análise de sensibilidade topológica, já amplamente difundida na literatura, tanto para furos quanto para inclusões, ou ainda para qualquer tipo de perturbação não suave.

A análise de sensibilidade topológica é, portanto, entendida neste trabalho como a análise de sensibilidade com respeito a criação de uma pequena perturbação não suave no problema em estudo. Esta sensibilidade resulta em uma função escalar denominada derivada topológica, que tem sido usada como direção de descida na resolução de diversas classes de problemas. De fato, consoante previamente mencionado, a otimização topológica motivou o desenvolvimento da análise de sensibilidade topológica, a qual demonstrou-se com grande potencial em muitas outras aplicações. No que segue, apresentam-se em ordem cronológica alguns dos principais trabalhos publicados na área, destacando-se as respectivas aplicações da derivada topológica.

- Sokolowski & Zochowski 1999 [58]. O conceito de derivada topológica é formalmente definido pela primeira vez. Em particular, no referido trabalho a derivada topológica é calculada para funcionais arbitrários e apresentam-se exemplos para equações elípticas em calor e elasticidade plana, considerando-se em cada caso a condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo. Neste trabalho se conclui que a derivada topológica é uma ferramenta que pode ser aplicada em problemas de otimização de estruturas mecânicas.
- Sokolowski & Zochowski 1999 [59]. A derivada topológica é calculada para uma função custo associada a um problema de Laplace tridimensional. Observou-se a potencialidade da aplicação dos resultados obtidos na otimização em problemas difusivos ou de transferência de calor, bem como para soluções numéricas de problemas inversos de identificação de inclusões.

- Céa et al. 2000 [15]. O conceito de derivada topológica foi generalizado para domínios perturbados por furos com condição de contorno de Dirichlet prescrita em sua fronteira. Observa-se que a derivada topológica fornece uma justificativa matemática para um algoritmo de otimização que fora introduzido por Jan Céa, já em 1973, e são obtidas algumas condições de otimalidade usando-se simultaneamente os gradientes clássico e topológico. Finalmente, apresentam-se alguns exemplos de aplicações em Mecânica e Eletromagnetismo.
- Garreau et al. 2001 [24]. Propõe uma técnica para o cálculo da derivada topológica, denominada *domain truncation method*, a qual é aplicada ao problema de elasticidade, com funcionais gerais e furos de forma arbitrária onde são impostas condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet homogêneas em sua fronteira.
- Guillaume & Sid Idris 2002 [29]. Fornece uma extensão do *domain truncation method* para furos de forma arbitrária, considerando-se diversas funções custo associadas ao problema de Poisson com condições de Neumann e Dirichlet homogêneas na fronteira do furo. Entretanto, a metodologia supracitada tem como principal inconveniente a introdução de um parâmetro artificial R , que permanece na expressão geral de sensibilidade topológica (vide, por exemplo, Amstutz 2003 [2]).
- Novotny et al. 2003 [48]. Neste trabalho, é proposta uma definição alternativa para a derivada topológica que permite o estabelecimento da relação entre os conceitos de análise de sensibilidade topológica e análise de sensibilidade à mudança de forma. Este resultado tem como consequência direta o desenvolvimento de uma nova metodologia, denominada *topological-shape sensitivity method*, para o cálculo da derivada topológica através dos métodos clássicos da análise de sensibilidade à mudança de forma. Os resultados obtidos são utilizados na otimização de diversos componentes mecânicos.
- Feijóo et al. 2003 [22]. Fornece uma análise comparativa entre o *topological-shape sensitivity method* e o *domain truncation method*, mostrando que, embora ambas metodologias sejam equivalentes, a primeira resulta mais simples e, até então, mais geral.

- Lewinski & Sokolowski 2003 [39]. Apresenta uma visão geral do problema de variação da energia elástica devido ao surgimento de pequenas cavidades nos sólidos elásticos, obtendo com a derivada topológica os mesmos resultados fornecidos por Mazja et al. 1991 [41] e por Nemat-Nasser & Hori 1993 [46], para furo elíptico no \mathbb{R}^2 e cavidade esférica do \mathbb{R}^3 .
- Samet et al. 2003 [55]. Considera a equação de Helmholtz com condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira do furo.
- Sokolowski 2003 [57]. Apresenta novas condições de otimalidade para uma classe de problemas em otimização de forma.
- Novotny 2003 [47]. É a primeira tese de doutorado defendida na área. Desenvolve o *topological-shape sensitivity method* e realiza a sensibilidade topológica em diversos problemas de engenharia: condução estacionária de calor em sólidos rígidos considerando condições de contorno de Neumann, Robin e Dirichlet na fronteira do furo; elasticidade linear em estado plano de tensões e deformações; flexão elástica linear de placas de Kirchhoff; torção de barras sujeitas à fluência estacionária (problema p -Poisson) e, finalmente, no problema de Poisson em um domínio perturbado por uma inclusão com propriedades distintas do meio.
- Amstutz 2003 [2]. Nesta tese de doutorado são fornecidas fórmulas de desenvolvimento assintótico topológico para vários problemas de interesse. Em particular, aplica-se os resultados obtidos na localização de trincas considerando o problema de Laplace 2D; no problema de Helmholtz 2D com condição de Dirichlet em um furo circular, condição de Neumann em um furo de forma arbitrária ou uma trinca e inserção de inclusões; estuda a sensibilidade para problemas não-lineares com condição de Dirichlet e furo de forma arbitrária. Finalmente considera a análise de sensibilidade topológica para o problema de Navier-Stokes.
- Nazarov & Sokolowski 2003 [44]. Utilizam os métodos *mached* e *compound* na construção das expansões assintóticas de funcionais de volume e superfície.

- Nazarov & Sokolowski 2004 [45]. Calcula a expansão assintótica da solução e do funcional energia correspondente ao problema de Poisson para uma perturbação associada a formação de um ligamento.
- Feijóo 2004 [20]. A derivada topológica foi calculada para o problema de Helmholtz em um meio infinito, sendo o resultado empregado na resolução do problema inverso do espalhamento.
- Feijóo et al. 2004 [21]. Calcula a derivada topológica da energia potencial total no problema de elasticidade 2D através da aplicação do *topological-shape sensitivity method*.
- Guillaume & Sid Idris 2004 [30]. Aplica a análise de sensibilidade para a equação de Stokes considerando funcionais custos gerais e furos de forma arbitrária. Também ilustram o uso da derivada topológica em problemas de otimização.
- Burger et al. 2004 [13]. Utiliza a informação dada pela derivada topológica para se obter um parâmetro de determinação das curvas iniciais para a técnica de *level-sets*. Observa-se mediante a análise de alguns testes numéricos que a aplicação da derivada topológica permite a solução de problemas mais gerais do que os tratados pela técnica de *level-set* padrão.
- Labanowski 2004 [36]. Nessa dissertação de Mestrado é realizada uma análise comparativa entre os métodos de otimização topológica SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*), ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e TSA (*Topological Sensitivity Analysis*).
- Amstutz 2005 [5]. É o primeiro resultado em análise de sensibilidade topológica para um caso não-linear, onde se calcula a derivada topológica para equações de Navier-Stokes no caso estacionário e fluido incompressível e uma condição de não deslizamento no contorno de um obstáculo de forma arbitrária.
- Amstutz et al. 2005 [3]. As técnicas de gradiente topológico são aplicadas para a identificação de trincas em um domínio bidimensional, considerando a equação de estado

de Laplace e o critério de Khon-Vogelius como função custo (Khon & Vogelius 1987 [34]).

- Sokolowski & Zochowski 2005 [61]. Aplica a análise de sensibilidade topológica em problemas de contato.
- Sokolowski & Zochowski 2005 [62]. Calcula a derivada topológica para uma classe de funcionais de forma para problemas de obstáculo.
- Novotny et al. 2005 [49]. O *topological-shape sensitivity method* é aplicado para o cálculo da derivada topológica no problema flexão de placas elásticas utilizando o modelo cinemático de Kirchhoff.
- Masmoudi et al. 2005 [42]. Estuda a sensibilidade topológica para a equação de Maxwell tridimensional quando o domínio é perturbado com a introdução de um pequeno objeto dielétrico ou metálico e aplicam os resultados obtidos no problema inverso de identificação de propriedades eletromagnéticas.
- Guinzani 2006 [28]. Nessa dissertação de Mestrado, o problema inverso da condutividade é tratado sob a ótica da análise de sensibilidade topológica e desenvolve-se um método iterativo de reconstrução.
- Guzina & Bonnet 2006 [26] e Bonnet 2006 [11] a derivada topológica foi calculada no problema de acústica respectivamente no domínio da frequência e do tempo, permitindo sua aplicação no problema inverso do espalhamento.
- Amstutz & Andrä 2006 [4]. A questão da aplicação da derivada topológica no método de level-set é retomada neste trabalho. É desenvolvido um novo algoritmo onde se propõe uma generalização do conceito da derivada topológica e uma nova equação de evolução que evita o uso de parâmetros arbitrários para se construir as correções nas iterações sucessivas.
- Amstutz 2006 [6]. Fornece o cálculo da derivada topológica para uma classe de problemas não-lineares. Em particular, trata da equação de Navier-Stokes e da versão

não-linear da equação de Helmholtz.

- Auroux et al. 2006 [7]. Calcula a expansão assintótica topológica para um problema associado à restauração e classificação de imagens.
- Larrabide 2007 [38]. Nesta tese de doutorado estuda-se a restauração e segmentação de imagens médicas e sua aplicação na modelagem do sistema cardiovascular humano, utilizando a derivada topológica para este fim. Em particular, define-se uma versão discreta da derivada topológica que possibilita um menor custo computacional que os algoritmos baseados na definição clássica.
- Belaid et al. 2007 [8]. Aplica o gradiente topológico para os problemas de restauração de imagens e de detecção de borda.
- Giusti et al. 2007 [25]. Propõem um método de otimização topológica associada a criação de uma inclusão no problema de elasticidade linear bidimensional em que se destaca a possibilidade de se pôr e retirar material simultaneamente em cada passo do algoritmo.
- Guzina & Chikichev 2007 [27]. Fornece uma extensão do conceito de derivada topológica e indica possibilidades de aplicações em diagnósticos médicos, sobretudo na identificação de câncer de mama.
- Novotny et al. 2007 [50]. Apresenta o cálculo da derivada topológica no problema de elasticidade linear tridimensional, que possibilita a otimização topológica de estruturas tridimensionais.
- Rocha de Faria et al. 2007 [52]. Resultados preliminares do presente trabalho são publicados.

Cabe mencionar ainda que o *topological-shape sensitivity method*, em particular, não apresenta qualquer limitação quanto à função custo e restrições, condição de contorno nos furos ou mesmo ao fenômeno em estudo, o que permitiu aplicar a derivada topológica em diversos problemas, dentre os quais destacam-se:

- **Processamento de Imagens.** No trabalho de Larrabide 2007 [38] foram propostos novos métodos de Restauração e Segmentação de Imagens utilizando derivada topológica. Durante o processo de aquisição da imagem, a qualidade pode ser afetada por diferentes fatores, tais como, lentes fora de foco, movimento do paciente, falta de sensibilidade dos dispositivos, limitações nos tempos de exposição dos pacientes, o próprio processo pelo qual a imagem é formada. Neste caso, o objetivo é melhorar a qualidade da imagem removendo o ruído introduzido por uma ou mais das degradações ora mencionadas. Na fig. 1.1 é mostrado um exemplo de aplicação da derivada topológica no contexto de Restauração de Imagens.



(a) imagem com ruído



(b) imagem pós-processada

Figura 1.1: restauração de imagens.

No caso de Segmentação de Imagens, objetiva-se dividir uma imagem nos objetos que a compõem. Em particular, na segmentação de imagens médicas, necessita-se identificar as diferentes estruturas anatômicas internas do corpo humano. Na fig. 1.2 é mostrado um exemplo de aplicação da derivada topológica no contexto de segmentação de imagens médicas.



Figura 1.2: segmentação de imagens.

- **Otimização topológica.** No trabalho de Novotny et al. 2007 [50] foi apresentado o cálculo da derivada topológica no problema de elasticidade linear tridimensional. Com esse resultado, foi possível realizar a otimização topológica de estruturas tridimensionais. Na fig. 1.3 é mostrado um exemplo de aplicação do método desenvolvido.

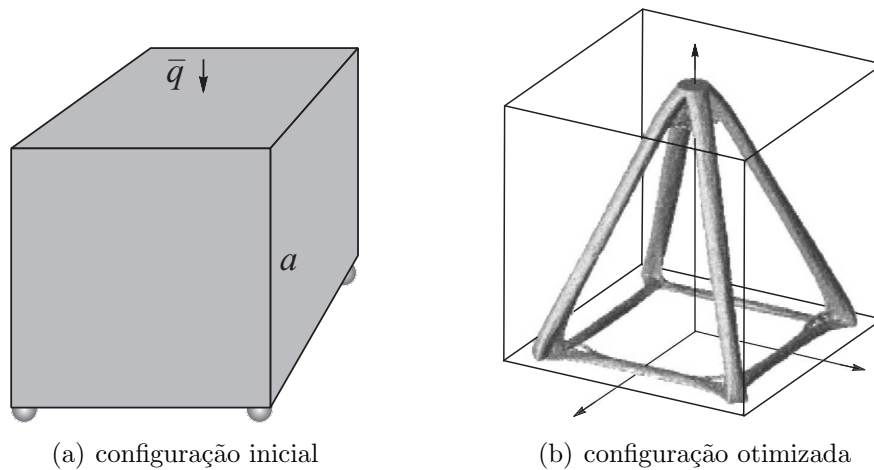


Figura 1.3: otimização topológica de uma estrutura tridimensional.

Além do mais, utilizando a derivada topológica associada a criação de inclusões em um problema de elasticidade linear bidimensional, foi proposto um algoritmo de otimização topológica capaz de por e retirar material simultaneamente. Essa característica permite obter vários mínimos locais e, em alguns casos particulares, o mínimo global. Na fig.

1.4 é mostrado um exemplo de aplicação do método desenvolvido no trabalho de Giusti et al. 2007 [25].

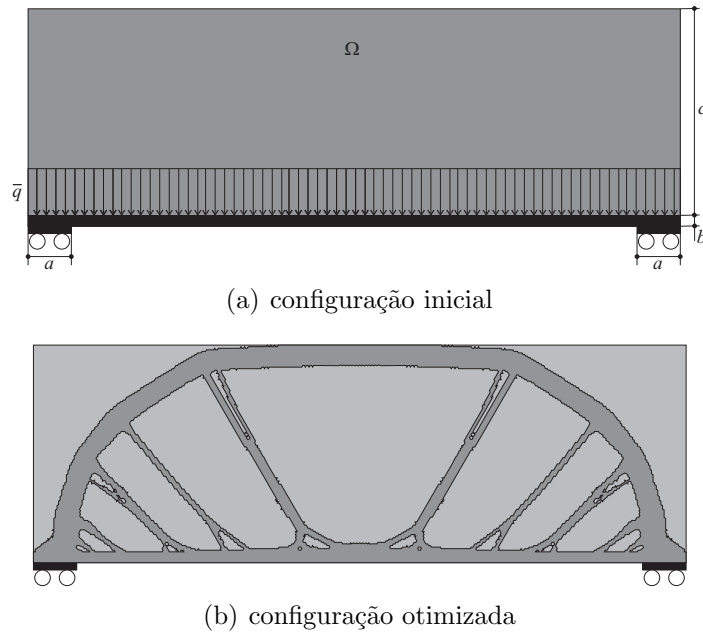


Figura 1.4: otimização topológica de uma estrutura bidimensional.

- **Problema inverso.** Baseado na sensibilidade topológica associada ao critério de Khon & Vogelius 1987 [34], no trabalho de Guinzani 2006 [28] foi proposto um algoritmo iterativo capaz de identificar tanto a forma quanto a topologia de um conjunto de inclusões a partir de medidas de temperatura obtidas na fronteira do corpo em estudo. Na fig. 1.5 é mostrado um exemplo de aplicação do método desenvolvido.

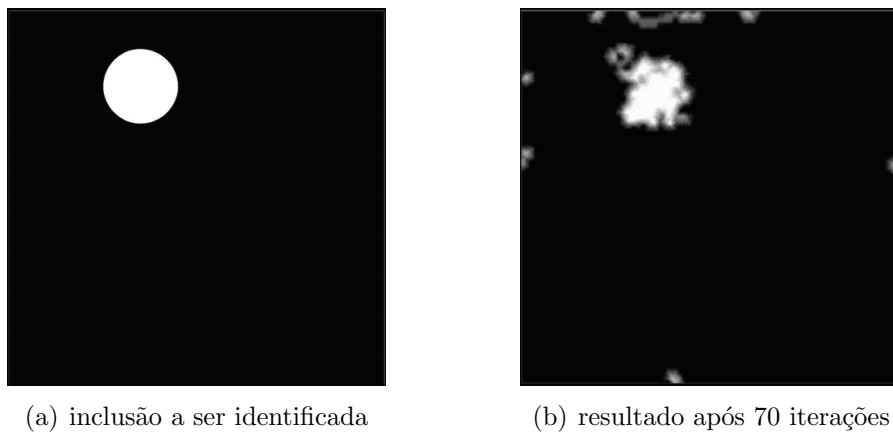


Figura 1.5: problema inverso da condutividade.

No entanto, em todos os exemplos de aplicações do *topological-shape sensitivity method* ora apresentados, a sensibilidade topológica, associada a perturbações infinitesimais, foi utilizada para guiar algoritmos de descida onde são efetivamente introduzidas perturbações de tamanho finito ao longo do processo iterativo. Com efeito, em situações práticas geralmente necessita-se considerar a sensibilidade topológica associada a perturbações de tamanho finito. Assim sendo, como mencionado anteriormente, uma maneira de levar em conta perturbações de tamanho finito é considerar termos de ordens superiores na expansão assintótica topológica, que é o principal objeto de estudo do presente trabalho.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, portanto, são considerados termos de ordens superiores na expansão assintótica topológica. Em particular, o próximo termo é definido como a derivada topológica de segunda ordem e evidencia-se, através de alguns exemplos, a influência deste termo para perturbações de tamanho finito.

Nesse sentido, além das possibilidades de aplicações, um fato notável acerca do *topological-shape sensitivity method* é o de permitir sua generalização, de forma bastante natural, para o cálculo de derivadas topológicas de ordem superiores, bastando para isso realizar uma análise assintótica das soluções das equações de estado e adjunta na vizinhança da perturbação. Assim sendo, este trabalho tem como objetivos principais:

- Apresentar as definições de derivadas topológicas de ordens superiores, sobretudo da derivada topológica de segunda ordem, e estudar a influência destes termos na análise de sensibilidade topológica para perturbações de tamanho finito;
- Estender a metodologia desenvolvida no *topological-shape sensitivity method* para o cálculo de derivadas de ordens superiores.

1.3 Apresentação

Este trabalho está organizado da maneira que se segue:

O capítulo 1 trata da presente introdução.

No capítulo 2 define-se formalmente o conceito de derivada topológica de ordem superior e demonstra-se que o *topological-shape sensitivity method* é uma metodologia bastante geral e que pode ser aplicada naturalmente para o cálculo destas derivadas. Em seguida, calculam-se as derivadas topológicas de primeira, segunda e terceira ordem em alguns problemas que apresentam solução exata e observa-se a influência destes termos na análise.

O capítulo 3 trata das análises de sensibilidades topológicas de primeira e segunda ordens para a energia potencial total associada ao problema de Laplace bidimensional, considerando-se três tipos de perturbações circulares: furo com condição de contorno Neumann homogênea, furo com condição de contorno Dirichlet homogênea e inclusão de coeficiente de condutividade térmica distinta do meio. Demonstra-se, através de experimentos numéricos, que a derivada de segunda ordem constitui um importante fator na análise, tanto do ponto de vista qualitativo, quanto do ponto de vista quantitativo.

Finalmente, o capítulo 4 é destinado às conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Análise de sensibilidade topológica de ordem superior

Para apresentar a idéia básica da análise de sensibilidade topológica, considera-se um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$ com fronteira suave $\partial\Omega$ e um funcional custo $\psi(\Omega) = J_\Omega(u)$, onde u denota a solução de uma equação de estado definida em Ω . Seja, ainda, $\mathcal{H}_\varepsilon = \hat{\mathbf{x}} + \varepsilon\mathcal{H}$ um furo com *centro* em um ponto arbitrário $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$ e *tamanho* $\varepsilon = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_\varepsilon} \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$, onde o conjunto \mathcal{H} (com $\mathbf{0} \in \mathcal{H}$) descreve a forma do furo. Então, para $n = 2, 3$ o domínio topologicamente perturbado é dado por $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$. Para o caso da perturbação dada por uma inclusão \mathcal{I}_ε , com uma propriedade material distinta do meio, considera-se \mathcal{H}_ε com mesma geometria (forma, tamanho, posição e orientação) de \mathcal{I}_ε e a nova configuração perturbada dada por $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \mathcal{H}_\varepsilon) \cup \mathcal{I}_\varepsilon$. Cabe mencionar que este último caso permite a extensão para problemas unidimensionais. Nos dois casos acima, a fronteira do domínio perturbado Ω_ε é dada por $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial\mathcal{H}_\varepsilon$, como apresentado esquematicamente na fig. 2.1. Com esses elementos, tem-se que a expansão assintótica topológica de uma dada função custo $\psi(\Omega)$ é escrita como

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T^1\psi + f_2(\varepsilon)D_T^2\psi + \dots + f_n(\varepsilon)D_T^n\psi + \mathcal{R}(f_n(\varepsilon)) \\ &= \psi(\Omega) + \sum_{i=1}^n f_i(\varepsilon)D_T^i\psi + \mathcal{R}(f_n(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $f_i(\varepsilon)$ são funções monótonas positivas, tais que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_i(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_j(\varepsilon)}{f_l(\varepsilon)} = 0, \quad \forall i, j, l \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{com } j > l, \quad (2.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}(f_n(\varepsilon))}{f_n(\varepsilon)} = 0, \quad (2.3)$$

e, ainda,

$$\|D_T^i \psi\|_{L^2(\Omega)} \neq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.4)$$

Definição 2.1 *Neste trabalho, a expressão*

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) + \sum_{i=1}^n f_i(\varepsilon) D_T^i \psi, \quad (2.5)$$

será denominada aproximação assintótica topológica de ordem n .

Se a eq. 2.1 é dividida por $f_j(\varepsilon)$ e considera-se o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se

Definição 2.2 *A derivada topológica de j – ésima ordem de ψ é dada por*

$$D_T^j \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_j(\varepsilon)} \left(\psi(\Omega_\varepsilon) - \psi(\Omega) - \sum_{i=1}^{j-1} f_i(\varepsilon) D_T^i \psi \right). \quad (2.6)$$

Em particular, para $j = 1$, obtém-se

Definição 2.3 *A derivada topológica de ψ é dada por*

$$D_T \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon) - \psi(\Omega)}{f_1(\varepsilon)}, \quad (2.7)$$

que é a definição clássica dada no trabalho de Garreau et al. 2001 [24].

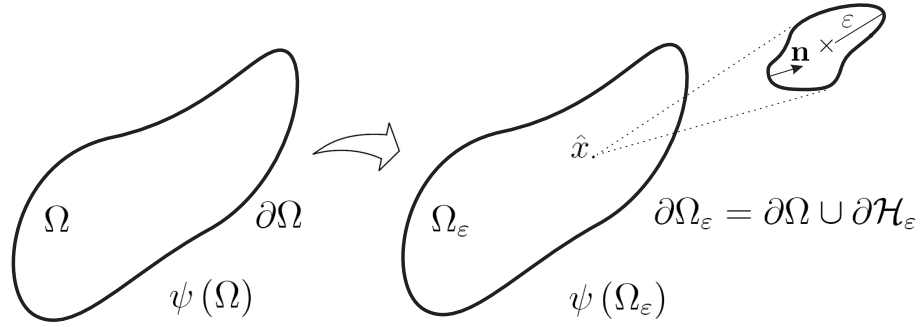


Figura 2.1: conceito de Derivada Topológica em sua versão original.

Assim, com o objetivo de se obter estimativas mais precisas e melhores condições de otimalidade do que as fornecidas apenas pela derivada topológica de primeira ordem, definem-se as derivadas topológicas de ordens superiores que, em contrapartida, exigem uma maior regularidade da solução do problema em estudo.

2.1 *Topological-shape sensitivity method*

Como ora apresentado, as definições das derivadas topológicas de primeira e demais ordens podem ser sumarizadas por expressões simples. Não obstante, deve-se notar das definições 2.6 e 2.7 que a função custo é calculada em domínios que não possuem a mesma topologia e, portanto, não é possível construir um homeomorfismo entre os domínios original Ω e modificado Ω_ε .

Este fato representa uma dificuldade técnica para a utilização das ferramentas clássicas da mecânica do contínuo na obtenção da derivada topológica, que em geral necessitam da existência de um difeomorfismo entre as configurações material e espacial.

No entanto, no trabalho de Novotny 2003 [47], foi estabelecida a relação entre a análise de sensibilidade à mudança de forma e a análise de sensibilidade topológica, que resultou num novo método para o cálculo da derivada topológica, denominado *topological-shape sensitivity method*.

Nesta seção, será mostrado que esta metodologia pode ser naturalmente estendida para o cálculo de derivadas de ordens superiores. De fato, será dada uma definição alternativa

a qual demonstrar-se-á equivalente à definição original 2.6, mas que irá permitir aplicar o *topological-shape sensitivity method* para o seu cálculo.

A idéia central do *topological-shape sensitivity method* é superar o problema da falta de homeomorfismo entre os domínios Ω e Ω_ε , partindo-se inicialmente de um domínio com um pequeno furo de tamanho ε e estudar a sensibilidade à mudança de forma ao se realizar uma expansão uniforme no furo, i.e., perturbar o furo de tamanho ε para um furo de tamanho $\varepsilon + \delta$ obtendo-se os domínios Ω_ε e $\Omega_{\varepsilon + \delta}$ com mesma topologia, e então tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, como esquematicamente mostrado na fig. 2.2. Esta idéia baseia-se na intuição de que expandir um furo de tamanho ε , quando $\varepsilon \rightarrow 0$, nada mais é do que criá-lo. Analogamente, a mesma análise pode ser realizada para inclusões ou outros tipos de perturbações não-suaves.

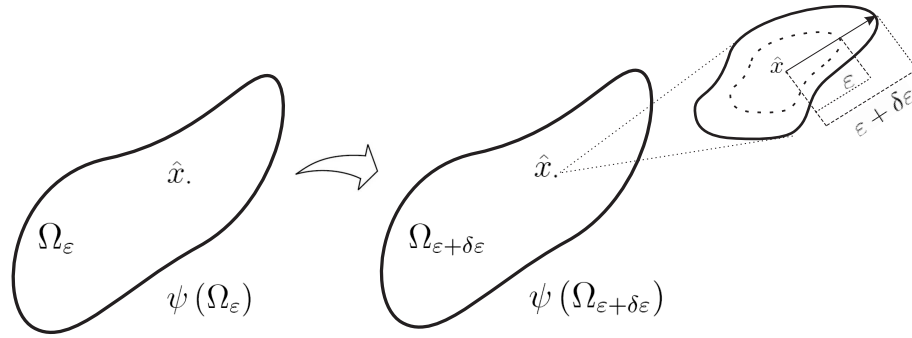


Figura 2.2: conceito de Derivada Topológica em sua versão modificada.

Deste modo, obtém-se a seguinte definição para a derivada topológica

Definição 2.4 *A derivada topológica é definida por*

$$D_T^* \psi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon + \delta}) - \psi(\Omega_\varepsilon)}{f_1(\varepsilon + \delta) - f_1(\varepsilon)} \right\}, \quad (2.8)$$

se o limite duplo acima existir.

Como previamente mencionado, a definição acima possibilita aplicação das técnicas e resultados desenvolvidos para análise de sensibilidade a mudança de forma. O principal resultado obtido no referido trabalho de Novotny 2003 [47] é o estabelecimento da equivalência entre as duas definições 2.8 e 2.7, dada através do seguinte teorema:

Teorema 2.5 *Seja $f_1(\varepsilon)$ uma função regularizadora escolhida de modo que o limite (2.8) exista. Então, as definições dadas pelas equações 2.7 e 2.8 são equivalentes, podendo ainda serem escritas como*

$$D_T\psi = D_T^*\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_1'(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon), \quad (2.9)$$

onde a derivada da função custo com respeito ao parâmetro ε pode ser vista como a análise de sensibilidade à mudança de forma clássica.

Prova. Novotny 2003 [47]. ■

Seguindo-se a mesma idéia apresentada no teorema 2.5, observa-se que o *topological-shape sensitivity method* pode ser naturalmente estendido para o cálculo de derivadas topológicas de ordens superiores. De fato, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.6 *Seja $f_j(\varepsilon)$ uma função escolhida de modo que o limite (2.6) exista, então a derivada topológica de ordem j é dada por*

$$D_T^j\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_j'(\varepsilon)} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{j-1} f_i'(\varepsilon) D_T^i\psi \right). \quad (2.10)$$

Prova. Derivando-se ambos os lados da expansão assintótica dada pela eq. 2.1, em relação ao parâmetro ε , obtém-se

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n f_i'(\varepsilon) D_T^i\psi + \mathcal{R}'(f_n(\varepsilon)) f_n'(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Então, reagrupando-se os termos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D_T^j\psi &= \frac{1}{f_j'(\varepsilon)} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{j-1} f_i'(\varepsilon) D_T^i\psi \right) \\ &\quad - \sum_{i=j+1}^n \frac{f_i'(\varepsilon)}{f_j'(\varepsilon)} D_T^i\psi - \frac{f_n'(\varepsilon)}{f_j'(\varepsilon)} \mathcal{R}'(f_n(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

e tomando-se o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se resultado desejado. ■

Em geral, a função custo $\psi(\Omega) := \mathcal{J}_\Omega(u)$ pode depender explícita e/ou implicitamente do domínio Ω . Esta última dependência vem da solução de um problema variacional associado

a Ω : encontre $u \in \mathcal{U}(\Omega)$, tal que

$$a(u, \eta) = l(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (2.13)$$

onde $\mathcal{U}(\Omega)$ e $\mathcal{V}(\Omega)$ são, respectivamente, o conjunto de funções admissíveis e o espaço de variações admissíveis definidos em Ω , $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear e $l(\cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, que são definidos de acordo com o problema em análise.

Do mesmo modo, a equação do estado escrita na configuração original Ω deve também ser satisfeita na configuração perturbada Ω_ε . Conseqüentemente, tem-se o seguinte problema variacional associado ao domínio Ω_ε : encontre $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, tal que

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta) = l_\varepsilon(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon), \quad (2.14)$$

onde $a_\varepsilon(\cdot, \cdot) : \mathcal{U}_\varepsilon \times \mathcal{V}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, $l_\varepsilon(\cdot) : \mathcal{V}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, sendo, respectivamente, $\mathcal{U}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ e $\mathcal{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ o conjunto de funções e variações admissíveis definidos em Ω_ε , que também serão definidos de acordo com o problema em análise, a condição de contorno na perturbação e a ordem da expansão assintótica topológica a ser considerada.

A derivada à mudança de forma da função custo $\psi(\Omega_\varepsilon) := \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ em relação ao parâmetro ε é dada pelo seguinte problema com restrição

$$\begin{cases} \text{Calcular :} & \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) \\ \text{Sujeito a :} & a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta) = l_\varepsilon(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \end{cases}, \quad (2.15)$$

que neste trabalho será abordado através do método direto.

Em geral, esta derivada pode ser escrita como uma integral definida sobre a fronteira do domínio,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (2.16)$$

onde \mathbf{n} é o campo de vetores normais, exteriores à fronteira, e o tensor Σ_ε é uma função da solução da equação de estado e, de maneira mais geral, da equação adjunta [19, 33].

Em particular, no caso em que a função custo $\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}$ é o potencial da equação de estado, o tensor Σ_ε coincide com o tensor momento-energia de Eshelby [18]. Como consequência, o tensor Σ_ε desempenha um papel central no *topological-shape sensitivity method*, devendo, portanto, ser claramente identificado de acordo com cada problema considerado.

Observação 2.7 *É importante destacar que o resultado acima, dado pela eq. 2.16 e que fornece a sensibilidade à mudança de forma através de uma integral na fronteira, é, de fato, bastante geral (Taroco et al. 2006 [54]). Assim sendo, este resultado constitui mais uma vantagem do topological-shape sensitivity method, que resulta numa expressão local para o cálculo da derivada topológica e que permite seu cálculo numérico, sobretudo em problemas mais complexos.*

Como neste trabalho serão considerados apenas perturbações unidimensionais ou bidimensionais na forma de disco (ou parte de um disco), a velocidade à mudança de forma \mathbf{v} (vide Zolézio 1981 [63]), para uma expansão uniforme da perturbação, é dada sobre a fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ como,

$$\begin{cases} \mathbf{v} = -\mathbf{n} & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} . \quad (2.17)$$

Assim, apenas a parte da fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ associada à $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$ é submetida a uma mudança de forma e a derivada da função custo, dada pela eq. 2.16, resulta em uma integral definida sobre a fronteira da perturbação $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$. Portanto, considerando o teorema 2.5, a derivada topológica de primeira ordem pode ser escrita como

$$D_T\psi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'_1(\varepsilon)} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS . \quad (2.18)$$

Analogamente, do teorema 2.6, a derivada topológica de ordem j resulta em

$$D_T^j\psi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'_j(\varepsilon)} \left(\int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS + \sum_{i=1}^{j-1} f'_i(\varepsilon) D_T^i\psi \right) . \quad (2.19)$$

Portanto, para calcular o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, se faz necessária uma análise assintótica do comportamento da solução das equações de estado e adjunta, em uma vizinhança da perturbação.

Observação 2.8 *As eq. 2.1 e 2.16 fornecem uma metodologia alternativa para o cálculo das derivadas topológicas. De fato, considerando-se a análise de sensibilidade à mudança de forma do funcional $\mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ sobre a eq. 2.1 e levando-se em conta a eq. 2.16, resulta*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= - \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_{i=1}^n f'_i(\varepsilon) D_T^i \psi + \mathcal{R}'(f_n(\varepsilon)) f'_n(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Este resultado permite inferir que a análise de sensibilidade à mudança de forma fornece a sensibilidade (de todas as ordens) à mudança de topologia, fato já evidenciado pelo topological-shape sensitivity method para a análise de primeira ordem.

2.2 Exemplos com solução exata

Nesta seção são considerados dois exemplos que apresentam solução exata. O primeiro, apresentado no trabalho de Hassine et al. 2004 [32], trata de uma equação de reação-difusão unidimensional onde o domínio é perturbado com uma inclusão de coeficiente de reação distinto do meio. O segundo exemplo considera o problema de uma membrana bidimensional onde a mudança de forma provoca singularidades na fronteira. Nos dois casos o *topological-shape sensitivity method* é empregado para o cálculo das derivadas topológicas de primeira, segunda e terceira ordens. Finalmente realiza-se uma análise da influência destes termos na expansão assintótica topológica.

2.2.1 Primeiro exemplo: um problema de reação-difusão unidimensional

Seja o problema de reação-difusão modelado pelo seguinte problema variacional: encontre $u \in \mathcal{U}(\Omega)$, $\Omega = (0, 1)$, tal que

$$\int_0^1 (u'(x) v'(x) + c(x) u(x) v(x)) dx = v(1), \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (2.21)$$

onde $\mathcal{U}(\Omega) = \mathcal{V}(\Omega) = \{\eta \in H^1(\Omega), \eta(0) = 0\}$, $u(x)$ pode ser interpretada como a temperatura em cada ponto de Ω e $c(x)$ como o coeficiente de reação do meio. É imediato observar que se $c(x) \equiv 0$, a única solução do problema acima é dada pela restrição da identidade em $(0, 1)$.

Considere-se o domínio $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \mathcal{H}_\varepsilon) \cup \mathcal{I}_\varepsilon$, onde $\mathcal{H}_\varepsilon = (\hat{x}, \hat{x} + \varepsilon)$ e \mathcal{I}_ε é uma inclusão que apresenta a mesma geometria (posição e tamanho) do intervalo \mathcal{H}_ε e pode ser observada como uma mudança na propriedade do material, de tal modo que o coeficiente de reação $c_\varepsilon(x)$ no domínio perturbado, seja dado por

$$c_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathcal{I}_\varepsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (2.22)$$

Tem-se, portanto, que o problema 2.21 redefinido na configuração perturbada Ω_ε é dado por: encontre $u_\varepsilon \in \mathcal{U}(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$\int_0^1 (u'_\varepsilon(x) v'(x) + c_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) v(x)) dx = v(1), \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega_\varepsilon) . \quad (2.23)$$

Verifica-se que o problema acima tem a seguinte solução exata,

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x}{\hat{x} \sinh \varepsilon + \cosh \varepsilon}, & \text{se } x \in (0, \hat{x}] \\ \frac{\hat{x} \cosh(\hat{x}-x) - \sinh(\hat{x}-x)}{\hat{x} \sinh \varepsilon + \cosh \varepsilon}, & \text{se } x \in (\hat{x}, \hat{x} + \varepsilon) \\ x - (\hat{x} + \varepsilon) + \frac{\hat{x} \cosh \varepsilon + \sinh \varepsilon}{\hat{x} \sinh \varepsilon + \cosh \varepsilon}, & \text{se } x \in [\hat{x} + \varepsilon, 1) \end{cases} . \quad (2.24)$$

Neste exemplo, deseja-se obter a sensibilidade da temperatura na extremidade $x = 1$, quando o domínio é perturbado com a inclusão \mathcal{I}_ε . Portanto, a função custo adotada é dada por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = u_\varepsilon(1) . \quad (2.25)$$

Uma vez definido o problema, pode-se calcular as derivadas topológicas, bem como obter a expansão assintótica topológica. De fato,

- **Derivada topológica de primeira ordem.** Adotando-se $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$ e aplicando-se o teorema 2.5, obtém-se

$$D_T\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \left[1 - (\hat{x} + \varepsilon) + \frac{\hat{x} \cosh \varepsilon + \sinh \varepsilon}{\hat{x} \sinh \varepsilon + \cosh \varepsilon} \right] \right\} = -\hat{x}^2, \quad (2.26)$$

que corrobora com o resultado encontrado no trabalho de Hassine et al. 2004 [32].

- **Derivada topológica de segunda ordem.** Aplicando a versão do *topological-shape sensitivity method* para a derivada topológica de segunda ordem, ou seja, fazendo $j = 2$ na eq. 2.10, e escolhendo $f_2(\varepsilon) = \varepsilon^2$, tem-se

$$D_T^2\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \left[1 - (\hat{x} + \varepsilon) + \frac{\hat{x} \cosh \varepsilon + \sinh \varepsilon}{\hat{x} \sinh \varepsilon + \cosh \varepsilon} \right] + \hat{x}^2 \right\} = \hat{x}^3 - \hat{x}. \quad (2.27)$$

- **Derivada topológica de terceira ordem.** Analogamente ao caso anterior, considerando-se $j = 3$ e $f_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3}$, observa-se que

$$\begin{aligned} D_T^3\psi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \left[1 - (\hat{x} + \varepsilon) + \frac{\hat{x} \cosh \varepsilon + \sinh \varepsilon}{\hat{x} \sinh \varepsilon + \cosh \varepsilon} \right] + \hat{x}^2 - 2\varepsilon (\hat{x}^3 - \hat{x}) \right\} \\ &= -\hat{x}^4 + 4\hat{x}^2 - 1, \end{aligned} \quad (2.28)$$

- **Expansão assintótica topológica.** Com os resultados obtidos, tem-se a seguinte expansão assintótica topológica

$$u_\varepsilon(1) = u(1) - \varepsilon \hat{x}^2 + \varepsilon^2 (\hat{x}^3 - \hat{x}) - \frac{\varepsilon^3}{3} (\hat{x}^4 - 4\hat{x}^2 + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad \forall \hat{x} \in (0, 1) \text{ e } \varepsilon < 1 - \hat{x}. \quad (2.29)$$

Observação 2.9 *Em particular, como se conhece a solução exata para a função custo no domínio perturbado e esta é dada por uma função suave, pode-se realizar uma expansão em série de potências de ε , ou seja*

$$u_\varepsilon(1) = u(1) - \varepsilon \hat{x}^2 + \varepsilon^2 (\hat{x}^3 - \hat{x}) - \frac{\varepsilon^3}{3} (\hat{x}^4 - 4\hat{x}^2 + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad \forall \hat{x} \in (0, 1), \quad (2.30)$$

o que permite a verificação dos cálculos anteriores.

Com o objetivo de se estudar a influência das derivadas topológicas de segunda e terceira ordem na expansão assintótica topológica, serão considerados duas análises distintas associadas a esse exemplo.

- **Primeira análise.** Inicialmente, fixa-se $\hat{x} = 0.5$ e calcula-se a função custo para $\varepsilon \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.4\}$, em seguida, confronta-se os resultados obtidos considerando-se apenas a aproximação assintótica topológica de primeira ordem

$$u_\varepsilon(1) \approx u(1) - \varepsilon \hat{x}^2, \quad (2.31)$$

e a aproximação assintótica topológica de segunda ordem

$$u_\varepsilon(1) \approx u(1) - \varepsilon \hat{x}^2 + \varepsilon^2 (\hat{x}^3 - \hat{x}) . \quad (2.32)$$

O gráfico apresentado na fig. 2.3 demonstra que o termo associado a derivada topológica de segunda ordem desempenha um importante papel na estimativa da função custo quando se considera inclusões de tamanho finito e, neste caso, é suficiente para a análise quantitativa.

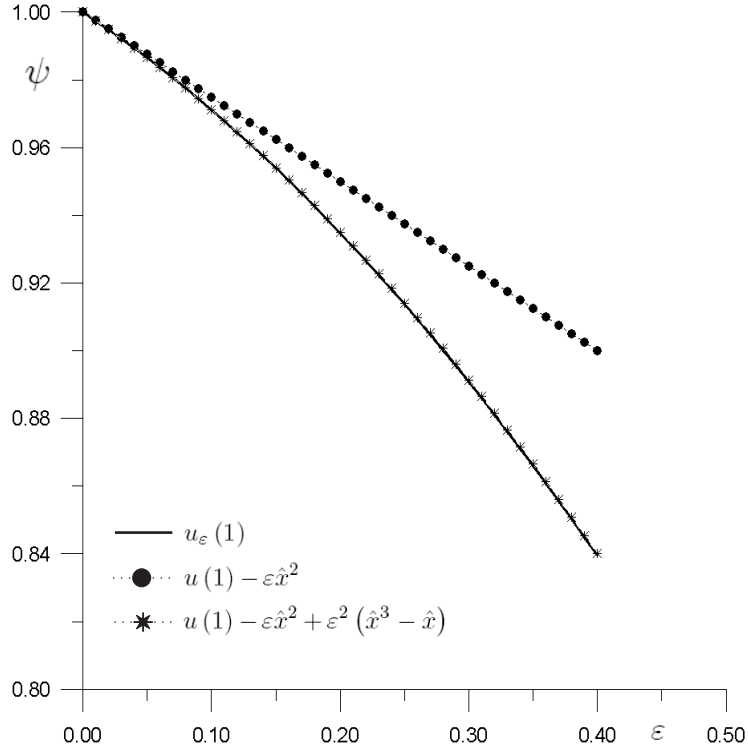


Figura 2.3: estimativa de $\psi(\Omega_\varepsilon)$ considerando os termos de primeira e segunda ordem na expansão assintótica topológica.

- **Segunda análise.** Neste caso, considera-se fixo o tamanho da inclusão e analisa-se qual deve ser a localização do ponto \hat{x} para se obter o mínimo da função custo. Considerando-se apenas a aproximação assintótica topológica de primeira ordem (eq. 2.31) é imediato observar que quanto mais próximo \hat{x} estiver de 1, menor será o valor da função custo. De fato, a eq. 2.31, atinge seu mínimo quando

$$\hat{x} = 1 - \varepsilon . \quad (2.33)$$

Analisando-se o sinal da derivada da aproximação assintótica topológica de segunda ordem (eq. 2.32), em relação ao parâmetro \hat{x} , tem-se que

$$\frac{du_\varepsilon(1)}{d\hat{x}} < 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall \hat{x} \in \left(1 - \sqrt{3\varepsilon^2 + 1}, 1 + \sqrt{3\varepsilon^2 + 1}\right) . \quad (2.34)$$

Em particular, para $\varepsilon < 1$ a função custo é decrescente no intervalo $(0, 1)$ e portanto

obtém-se o mesmo resultado qualitativo dado pela aproximação de primeira ordem. Finalmente, considerando-se a aproximação assintótica topológica de terceira ordem, dada por

$$u_\varepsilon(1) \approx u(1) - \varepsilon \hat{x}^2 + \varepsilon^2 (\hat{x}^3 - \hat{x}) - \frac{\varepsilon^3}{3} (\hat{x}^4 - 4\hat{x}^2 + 1) , \quad (2.35)$$

observa-se que a função auxiliar,

$$f(\hat{x}, \varepsilon) = \begin{cases} 3\varepsilon^2 \hat{x}^2 - 2\varepsilon \hat{x} - \varepsilon^2 - 4\hat{x} \frac{\varepsilon^3}{3} (\hat{x}^2 - 2) \approx \frac{du_\varepsilon(1)}{d\hat{x}}, & \text{se } 0 < \varepsilon + \hat{x} < 1 \\ -1, & \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

é negativa para quaisquer valores tais que $\hat{x} + \varepsilon \in (0, 1)$, isto é, para todos os valores compatíveis com o problema em estudo. Assim sendo, $u_\varepsilon(1)$ é decrescente e a análise qualitativa concide com a proposta através da aproximação de primeira ordem.

Neste exemplo, em particular, observa-se que a derivada topológica de segunda ordem é um importante fator de correção na análise quando se considera perturbações de tamanho finito e que as condições de otimalidade dadas pela derivada de primeira ordem são suficientes.

2.2.2 Segundo exemplo: problema de uma membrana bidimensional

Neste exemplo será considerada uma membrana circular bidimensional, presa numa moldura rígida no plano xy , submetida a um carregamento uniformemente distribuído b e cuja fronteira $\partial\Omega$ é perturbada com um rasgo semi-circular, como mostrado na fig. 2.4.

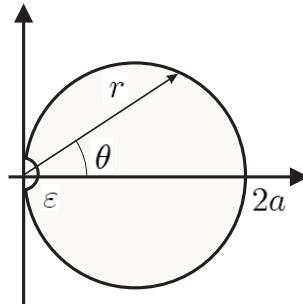


Figura 2.4: membrana perturbada.

Observação 2.10 *Prandtl 1903 [51], propôs uma analogia entre este problema e o da torção de uma barra regular prismática. De fato, as equações associadas às deformações da membrana são as mesmas para as tensões de cisalhamento de uma barra sujeita a momentos torsores.*

Seja u a deformação da membrana na direção do eixo z . A equação de Euler-Lagrange do problema não perturbado é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = b & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.36)$$

a qual apresenta como solução exata

$$u(r, \theta) = -\frac{br^2}{4} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right). \quad (2.37)$$

Por outro lado, a equação associada ao problema perturbado é dada por:

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = b & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}, \quad (2.38)$$

cuja solução exata é

$$u_\varepsilon(r, \theta) = -\frac{b}{4} (r^2 - \varepsilon^2) \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right). \quad (2.39)$$

Neste exemplo, será adotada como função custo a energia potencial total, que é dada no domínio original por

$$\psi(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 dV - \int_{\Omega} budV, \quad (2.40)$$

e no domínio perturbado Ω_{ε} por

$$\psi(\Omega_{\varepsilon}) = \int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{1}{2} \|\nabla u_{\varepsilon}\|^2 dV - \int_{\Omega_{\varepsilon}} bu_{\varepsilon} dV. \quad (2.41)$$

Neste caso particular, pode-se calcular o valor da função custo diretamente da definição dadas pelas eq. 2.40 e 2.41, através da utilização das respectivas soluções exatas eq. 2.37, 2.39, obtendo-se

$$\psi(\Omega) = -\frac{\pi}{16} a^4 b^2, \quad (2.42)$$

para a configuração original Ω e

$$\psi(\Omega_{\varepsilon}) = -\frac{b^2}{64} \left(a\varepsilon (2a^2 + 7\varepsilon^2) \sqrt{4 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} + 4(2a^4 - 4a^2\varepsilon^2 - \varepsilon^4) \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right) \right), \quad (2.43)$$

para a configuração perturbada Ω_{ε} .

A sensibilidade à mudança de forma da função energia é dada, portanto, por uma simples derivada ordinária em relação ao parâmetro ε , ou seja:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_{\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon b^2}{8} \left(3a\varepsilon \sqrt{4 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} - 2(2a^2 + \varepsilon^2) \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right) \right). \quad (2.44)$$

- **Derivada topológica de primeira ordem.** Adotando-se $f_1(\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon^2}{2}$ na eq. 2.9, o *topological-shape sensitivity method* fornece o seguinte resultado para a derivada topológica de primeira ordem

$$\begin{aligned} D_T \psi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \left[-\frac{\varepsilon b^2}{8} \left(3a\varepsilon \sqrt{4 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} - 2(2a^2 + \varepsilon^2) \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right) \right) \right] \\ &= \frac{a^2 b^2}{4}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

- **Derivada topológica de segunda ordem.** Considerando-se $j = 2$, $f_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3}$ e eq. 2.44, na eq. 2.10, obtém-se

$$\begin{aligned} D_T^2 \psi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[-\frac{\varepsilon b^2}{8} \left(3a\varepsilon \sqrt{4 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} - 2(2a^2 + \varepsilon^2) \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right) \right) - \pi\varepsilon \frac{a^2 b^2}{4} \right] \\ &= -ab^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

- **Derivada topológica de terceira ordem.** Considerando-se $j = 3$, $f_3(\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon^4}{4}$ e eq. 2.44, na eq. 2.10, obtém-se

$$\begin{aligned} D_T^3 \psi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^3} \left[-\frac{\varepsilon b^2}{8} \left(3a\varepsilon \sqrt{4 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} - 2(2a^2 + \varepsilon^2) \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right) \right) - \pi\varepsilon \frac{a^2 b^2}{4} + \varepsilon^2 ab^2 \right] \\ &= \frac{b^2}{8}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

- **Expansão assintótica topológica.** Dos resultados acima, a expansão assintótica topológica é dada pela seguinte expressão

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = -\frac{\pi a^4 b^2}{16} + \frac{\pi \varepsilon^2 a^2 b^2}{2 \cdot 4} - \frac{\varepsilon^3 ab^2}{3} + \frac{\pi \varepsilon^4 b^2}{4 \cdot 8} + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \quad (2.48)$$

Observação 2.11 *Convém ressaltar que o problema acima apresenta derivada topológica ainda que a perturbação mantenha sua topologia inicial. Assim, este exemplo mostra que a análise da sensibilidade topológica pode ser aplicada em certos problemas cuja mudança de forma provoca singularidades na fronteira. Outrossim, em conformidade com o anterior, neste exemplo com solução exata os cálculos obtidos podem ser verificados através de um simples desenvolvimento em potências de ε do valor da função custo $\psi(\Omega_\varepsilon)$.*

Neste caso, devido à simetria do problema, realiza-se apenas a análise quantitativa da influência das derivadas topológicas de ordens superiores (segunda e terceira) na expansão assintótica topológica. Fixando-se, por exemplo, $a = 1$ e $b = 1$, considera-se

- **Aproximação assintótica topológica de primeira e de segunda ordem.** Inicial-

mente, comparam-se os resultados obtidos adotando-se as aproximações de primeira

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi\varepsilon^2}{8}, \quad (2.49)$$

e de segunda ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{3}, \quad (2.50)$$

para $\varepsilon \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.4\}$. Do gráfico apresentado na fig. 2.5, observa-se que a derivada topológica de primeira ordem é, de fato, uma boa aproximação para pequenas perturbações e à medida que o tamanho da perturbação aumenta, a derivada topológica de segunda ordem torna-se um importante fator de correção na estimativa da energia dissipada.

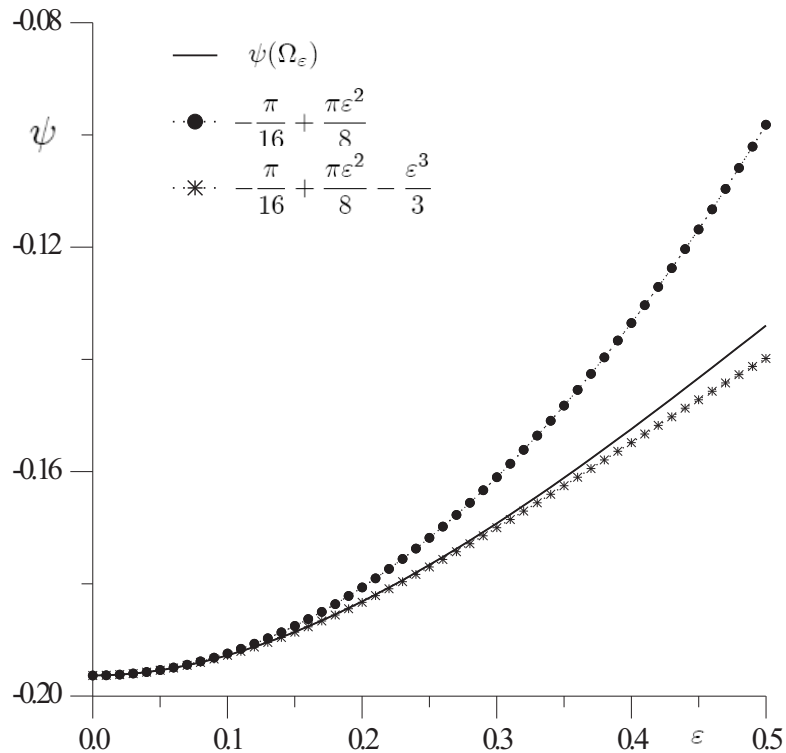


Figura 2.5: aproximações assintóticas topológicas de até segunda ordem.

- **Aproximação assintótica topológica de terceira ordem.** Para se obter uma estimativa mais precisa da função custo, para maiores valores de ε , deve-se levar em

conta mais um termo na expansão. Assim, considere-se

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\pi\varepsilon^4}{32}. \quad (2.51)$$

Observa-se do gráfico apresentado na fig. 2.6 que a estimativa torna-se bastante precisa, mesmo para valores muito grandes do tamanho da perturbação.

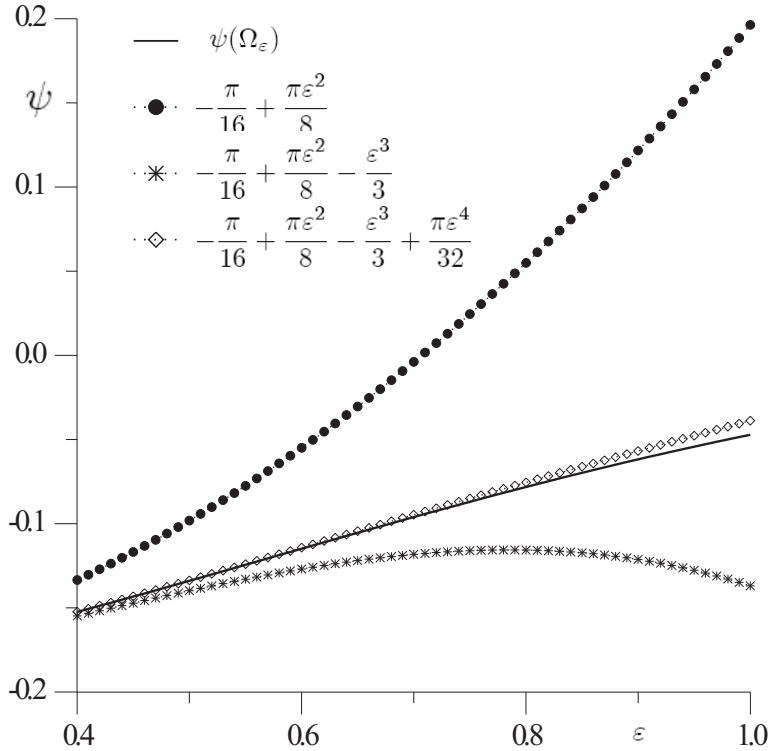


Figura 2.6: aproximações assintóticas topológicas de até terceira ordem.

2.3 Comentários adicionais

Neste capítulo, foi apresentada a extensão do *topological-shape sensitivity method* para o cálculo de termos de ordens mais elevadas na expansão assintótica topológica. Em particular, o j -ésimo termo foi denominado derivada topológica de ordem j , a menos do produto por uma função $f_j(\varepsilon)$ que satisfaz as condições dadas pela equação 2.2. O resultado do teorema 2.6 fornece de modo bastante natural a extensão supracitada, o que é uma característica essencial do método, permitindo o cálculo sistemático de derivadas topológicas de ordens

superiores. Para ilustrar essa característica, os resultados obtidos foram aplicados em dois exemplos com solução exata.

Inicialmente, considerou-se um problema de reação-difusão unidimensional e uma perturbação dada por uma inclusão que provocou uma condição de salto no coeficiente de reação do meio. Neste exemplo a derivada topológica de segunda ordem foi suficiente para corrigir a discrepância entre o valor calculado e o valor aproximado pela expansão assintótica quando se tomou valores do tamanho da inclusão consideravelmente grandes. A informação qualitativa dada pela derivada topológica de primeira ordem foi suficiente e os termos de ordens superiores não agregaram informações neste sentido.

No segundo exemplo foi estudada uma membrana bidimensional, uniformemente carregada, cuja perturbação considerada foi uma mudança de forma que causou singularidades na sua fronteira. Neste caso, se o erro aceitável for de até 5%, por exemplo, a derivada topológica de primeira ordem é suficiente para $\varepsilon < 0.30$, a derivada topológica de segunda ordem permite trabalhar com projetos onde $\varepsilon < 0.51$, e finalmente, a derivada topológica de terceira ordem pode ser aplicada para perturbações com $\varepsilon < 0.84$.

Capítulo 3

Aplicação no problema de Laplace

No presente capítulo o *topological-shape sensitivity method* é aplicado sistematicamente no cálculo das derivadas topológicas de primeira e segunda ordem para a energia potencial total associada ao problema de Laplace. Considera-se o domínio topologicamente perturbado por furos circulares com condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet homogêneas ou ainda por inclusões circulares de um material com coeficiente de condutividade térmica distinta do meio. A partir dos resultados obtidos para cada tipo de perturbação, estuda-se a influência da derivada topológica de segunda ordem na expansão assintótica topológica através de experimentos numéricos. Dois fatos principais são evidenciados nas análises: a derivada topológica de segunda ordem permite uma melhor aproximação da função custo para perturbações de tamanho finito e uma melhor direção de descida em processos de otimização. Estes resultados são essenciais no contexto da otimização topológica e de problemas inversos, por exemplo. Cabe ressaltar que o presente capítulo é uma versão estendida de dois trabalhos, quais sejam:

- *Second Order Topological Sensitivity Analysis*, publicado no *International Journal of Solids and Structures* (Rocha de Faria et al. 2007 [52]). Neste trabalho foi estudada a sensibilidade topológica de primeira e segunda ordem para perturbações dadas por furo com condição de contorno de Neumann ou de Dirichlet homogêneas.
- *First and Second Order Topological Derivative for Inclusions* (Rocha de Faria et al.

2007 [53]), aceito para publicar na *Inverse Problems in Science and Engineering*. Neste caso, foi analisada a sensibilidade de um problema perturbado por uma inclusão que provocou uma descontinuidade no coeficiente de condutividade térmica do meio.

3.1 Formulação do problema

Inicialmente, é apresentada a formulação do problema através do uso de métodos e princípios variacionais. A escolha da formulação variacional deve-se ao fato de que este procedimento é a maneira mais natural e rigorosa de se obter as leis que governam o comportamento dos meios contínuos, além de induzir diretamente o método de solução aproximada e de permitir representar em uma única expressão integral todos os elementos de interesse ao problema em estudo tais como as equações de equilíbrio, as relações constitutivas, as condições de contorno, as condições iniciais e de descontinuidade, entre outros. Finalmente, observa-se que as formas locais, geralmente expressas como equações diferenciais parciais, podem ser obtidas diretamente a partir da formulação variacional [37].

3.1.1 Domínio original

Seja o corpo ocupando uma região limitada e regular Ω do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , $n < 3$ de fronteira $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, onde Γ_D e Γ_N são fronteiras de Dirichlet e Neumann e que têm prescritos os dados φ e \bar{q} , respectivamente.

A variável primal para o problema considerado é a temperatura, representada por $u \in \mathcal{U}$, onde \mathcal{U} é o conjunto de todos os campos escalares suficientemente regulares¹ de temperaturas possíveis que podem ser definidas sobre Ω .

O conjunto de todos os campos de temperatura admissíveis, $Kin_u \subset \mathcal{U}$, é caracterizado por

$$Kin_u = \{u \in \mathcal{U}; u|_{\Gamma_D} = \varphi\} , \quad (3.1)$$

¹A regularidade será definida *a posteriori*, conforme o problema em análise.

consequentemente, tem-se o seguinte espaço das variações admissíveis de temperatura

$$Var_u = \{ \eta \in \mathcal{U}; \eta|_{\Gamma_D} = 0 \} . \quad (3.2)$$

O conjunto de todos os gradientes térmicos (suficientemente regulares) será denotado por \mathcal{W} . Em particular, define-se o operador $G \equiv \nabla(\cdot) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ que a cada u faz corresponder o gradiente térmico $\mathbf{g} = Gu \in \mathcal{W}$.

O espaço nulo do operador G , denotado por $\mathcal{N}(G)$ e formado por todas as ações térmicas rígidas, é dado por

$$\mathcal{N}(G) = \{ u \in \mathcal{U}; Gu = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \Omega \} . \quad (3.3)$$

Admite-se que as ações térmicas externas que atuam sobre o corpo denotado por Ω possam ser representadas por funcionais lineares e contínuos $t : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, por elementos do espaço dual de \mathcal{U} , representado por \mathcal{U}' . Fazem-se necessárias as seguintes definições:

Definição 3.1 *A potência térmica externa (PTE) é dada pelo valor do funcional t em \mathbb{R} , tal que*

$$t(u) = \langle t, u \rangle = PTE . \quad (3.4)$$

Definição 3.2 *As ações térmicas internas são os funcionais lineares e contínuos definidos sobre o conjunto de temperaturas \mathcal{U} e de gradientes térmicos \mathcal{W} . O valor que este funcional toma em $(u, \mathbf{g}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}$, é definido como a potência térmica interna (PTI).*

Para se obter uma representação para potência térmica interna, admitem-se verdadeiras as hipóteses:

1. A PTI admite a seguinte representação integral

$$PTI = - \int_{\Omega} (pu + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}) dV ; \quad (3.5)$$

2. A PTI é nula para qualquer ação térmica rígida. Em particular,

$$PTI = - \int_{\Omega} (pu + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}) dV = 0, \quad \forall u \in \mathcal{N}(G) , \quad (3.6)$$

donde

$$PTI = - \int_{\Omega} p u dV = 0, \quad \forall u \in \mathcal{N}(G) \Leftrightarrow p \equiv 0. \quad (3.7)$$

Tem-se que

$$PTI = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} dV. \quad (3.8)$$

Assim, as ações térmicas internas são elementos do espaço dual de \mathcal{W} , denotado por \mathcal{W}' . Como consequência do teorema de representação de Riez, estes funcionais podem ser colocados em correspondência com o campo vetorial \mathbf{q} , sendo o valor deste funcional em $\mathbf{g} = Gu$ dado por

$$PTI = - (\mathbf{q}, \mathbf{g}) = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} dV, \quad (3.9)$$

onde (\cdot, \cdot) é a forma bilinear tal que $(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}' \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}$. Finalmente, tem-se a seguinte definição

Definição 3.3 *O operador de equilíbrio térmico $G^* : \mathcal{W}' \mapsto \mathcal{U}'$ é definido por*

$$(\mathbf{q}, Gu) = \langle G^* \mathbf{q}, u \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (3.10)$$

Com estes elementos, enuncia-se o seguinte teorema:

Teorema 3.4 *Princípio da potência térmica virtual (PPTV): Um corpo Ω sob uma ação térmica externa t encontra-se em equilíbrio se*

$$PTE = \langle t, \eta \rangle = 0, \quad \forall \eta \in Var_u \cap \mathcal{N}(G), \quad (3.11)$$

e

$$PTI + PTE = - (\mathbf{q}, \mathbf{g}(\eta)) + \langle t, \eta \rangle = 0 \quad \forall \eta \in Var_u. \quad (3.12)$$

Assim, segue-se do PPTV que

$$\langle t, \eta \rangle = (\mathbf{q}, G\eta) = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \eta dV, \quad \forall \eta \in Var_u. \quad (3.13)$$

Se \mathbf{q} e η são campos suficientemente regulares, observa-se que a identidade vetorial (ver, por exemplo, Gurtin 1981 [31])

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}\eta) = \operatorname{div}(\mathbf{q})\eta + \mathbf{q} \cdot \nabla\eta , \quad (3.14)$$

aplicada na eq. 3.13, fornece

$$\langle t, \eta \rangle = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\eta) dV + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q})\eta dV . \quad (3.15)$$

A aplicação do teorema da divergência à primeira integral, observando-se que $\eta|_{\Gamma_D} = 0$, resulta

$$\langle t, \eta \rangle = - \int_{\Gamma_N} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\eta dS + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q})\eta dV , \quad (3.16)$$

que é um resultado fundamental, pois permite caracterizar os tipos de carregamentos térmicos compatíveis com o modelo, que são dados por densidades de energias caloríficas por unidade de superfície, denotada por \bar{q} , e por unidade de volume, denotada por b , donde

$$\langle t, \eta \rangle = - \int_{\Gamma_N} \bar{q}\eta dS + \int_{\Omega} b\eta dV . \quad (3.17)$$

Neste trabalho será considerado o problema sem fonte de calor; assim $b \equiv 0$. Observa-se que o modelo formulado é totalmente geral e independente da equação constitutiva que relaciona \mathbf{q} e u . Em particular, para o caso de um sólido termicamente isotrópico segue-se, da termodinâmica do contínuo, a equação constitutiva dada pela lei de Fourier

$$\mathbf{q} = -k\nabla u . \quad (3.18)$$

Assim, considerando esse caso particular no PPTV (eq. 3.13 e 3.17) segue-se que a formulação variacional do problema associado ao domínio original Ω é dada por: encontre $u \in Kin_u$, tal que

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla\eta dV = - \int_{\Gamma_N} \bar{q}\eta dS, \quad \forall \eta \in Var_u . \quad (3.19)$$

A função custo adotada é a energia potencial total associada ao problema considerado, que é dada por

$$\psi(\Omega) = \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega k \|\nabla u\|^2 dV + \int_{\Gamma_N} \bar{q} u dS. \quad (3.20)$$

3.1.2 Domínio perturbado

O domínio perturbado será identificado com a região $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, de fronteira $\partial\Omega_\varepsilon = \overline{\Gamma_{D_\varepsilon} \cup \Gamma_{N_\varepsilon}}$, $\Gamma_{D_\varepsilon} \cap \Gamma_{N_\varepsilon} = \emptyset$, onde Γ_{D_ε} e Γ_{N_ε} são fronteiras de Dirichlet e Neumann que têm prescritos os dados φ^ε e \bar{q}^ε , respectivamente. Para cada tipo de perturbação analisada neste trabalho, pode-se sistematizar a notação como se segue:

No caso da perturbação ser dada por um furo $\mathcal{H}_\varepsilon = \hat{\mathbf{x}} + \varepsilon\mathcal{H}$, tem-se que $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$ e conseqüentemente $\partial\Omega_\varepsilon = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \partial\mathcal{H}_\varepsilon}$. Em particular, para as condições de contorno consideradas na fronteira do furo, tem-se

- **Condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo:**

$$\begin{cases} \Gamma_{N_\varepsilon} = \Gamma_N \cup \partial\mathcal{H}_\varepsilon \\ \Gamma_{D_\varepsilon} = \Gamma_D \end{cases}, \quad (3.21)$$

assim,

$$\varphi^\varepsilon \equiv \varphi, \quad (3.22)$$

e neste caso, o fluxo de calor prescrito é dado por

$$\bar{q}^\varepsilon = \begin{cases} \bar{q}, \text{ sobre } \Gamma_N \\ 0, \text{ sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \end{cases}. \quad (3.23)$$

- **Condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira do furo:**

$$\begin{cases} \Gamma_{D_\varepsilon} = \Gamma_D \cup \partial\mathcal{H}_\varepsilon \\ \Gamma_{N_\varepsilon} = \Gamma_N \end{cases}, \quad (3.24)$$

donde

$$\bar{q}^\varepsilon \equiv \bar{q}, \quad (3.25)$$

e a temperatura prescrita é dada por,

$$\varphi^\varepsilon = \begin{cases} \varphi, & \text{sobre } \Gamma_D \\ 0, & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \end{cases}. \quad (3.26)$$

Para o caso de uma inclusão \mathcal{I}_ε com coeficiente de condutividade térmica distinta do meio, admite-se também o caso unidimensional $n \in \{1, 2\}$, $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}) \cup \overline{\mathcal{I}_\varepsilon}$ e tem-se

- **Condição de salto da derivada normal na fronteira da inclusão:**

$$\Gamma_{D_\varepsilon} = \Gamma_D, \quad \Gamma_{N_\varepsilon} = \Gamma_N, \quad (3.27)$$

e, portanto,

$$\varphi^\varepsilon \equiv \varphi, \quad \bar{q}^\varepsilon \equiv \bar{q}. \quad (3.28)$$

A condição de salto associada à derivada normal da temperatura, neste último caso, pode ser obtida diretamente de sua formulação variacional e é consequência da descontinuidade do coeficiente de condutividade térmica $k_\delta(\mathbf{x})$, definida através da equação a seguir. De fato, neste trabalho, k_δ será considerado constante para o caso de furo e constante por partes para o caso de inclusão, o que também é sistematizado para $\delta \in \mathbb{R}^+$, por

$$k_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} k, & \text{em } \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon} \\ \delta k, & \text{em } \mathcal{I}_\varepsilon \end{cases}. \quad (3.29)$$

Assim, de modo totalmente análogo à seção anterior, o princípio das potências térmicas virtuais implica que a formulação variacional do problema associado ao domínio perturbado Ω_ε é dada por: encontre $u_\varepsilon \in \text{Kin}_{u_\varepsilon}$, tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon dV = - \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \bar{q}^\varepsilon \eta_\varepsilon dS, \quad \forall \eta_\varepsilon \in \text{Var}_{u_\varepsilon}, \quad (3.30)$$

onde, denotando-se por \mathcal{U}_ε o conjunto de todos os campos escalares suficientemente regulares de temperaturas possíveis que podem ser definidas sobre Ω_ε , o conjunto de todos os campos de temperatura admissíveis é definido por

$$Kin_{u_\varepsilon} = \left\{ u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon; u|_{\Gamma_{D_\varepsilon}} = \varphi^\varepsilon \right\}, \quad (3.31)$$

e o espaço das variações admissíveis é, então,

$$Var_{u_\varepsilon} = \left\{ \eta_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon; \eta_\varepsilon|_{\Gamma_{D_\varepsilon}} = 0 \right\}. \quad (3.32)$$

A função custo na configuração perturbada é dada por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta \|\nabla u_\varepsilon\|^2 dV + \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \bar{q}^\varepsilon u_\varepsilon dS. \quad (3.33)$$

3.1.3 Existência e unicidade das soluções

Nesta seção serão demonstradas a existência e unicidade da solução fraca do problema 3.30, quando os dados iniciais φ^ε e \bar{q}^ε são regulares. O mesmo resultado pode ser obtido, por simples analogia, para o problema 3.19.

Considere

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon dV, \quad (3.34)$$

e

$$l_\varepsilon(\eta_\varepsilon) = - \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \bar{q}^\varepsilon \eta_\varepsilon dS. \quad (3.35)$$

Assim, a formulação fraca (eq. 3.30) pode ser reescrita como: encontre $u_\varepsilon \in Kin_{u_\varepsilon}$, tal que

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = l_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \quad \forall \eta_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon}. \quad (3.36)$$

Fazendo-se $u_\varepsilon = \varphi^\varepsilon + \xi_\varepsilon$, com $\xi_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon}$, tem-se

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\varphi^\varepsilon + \xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon) &= l_\varepsilon(\eta_\varepsilon) \\ a_\varepsilon(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon) &= l_\varepsilon(\eta_\varepsilon) - a_\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \eta_\varepsilon), \quad \forall \eta_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

o que resulta em um novo problema variacional, equivalente ao dado pela eq. 3.36 e escrito como: encontre $\xi_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon}$, tal que

$$a_\varepsilon(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = \hat{l}_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \quad \forall \eta_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon}, \quad (3.38)$$

onde $\hat{l}_\varepsilon(\eta_\varepsilon) = l_\varepsilon(\eta_\varepsilon) - a_\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \eta_\varepsilon)$.

Considere-se a semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla \cdot\|^2 dV$, a qual demonstra-se equivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2$. Observa-se que a forma bilinear $a_\varepsilon(\cdot, \cdot) : Var_{u_\varepsilon} \times Var_{u_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Lax-Milgran (Brézis 1983 [12]), isto é,

i) $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ é contínua, pois

$$|a_\varepsilon(u_\varepsilon, \eta_\varepsilon)| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon dV \right| \leq C |u_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} |\eta_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad (3.39)$$

onde aplicou-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz e $C = \max_{\Omega_\varepsilon} k_\delta$,

ii) $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ é coerciva, desde que

$$a_\varepsilon(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta \nabla \eta_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon dV \geq c |\eta_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2, \quad (3.40)$$

e onde $c = \min_{\Omega_\varepsilon} k_\delta$.

Observa-se ainda, que a aplicação linear

$$\eta_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon} \longmapsto \hat{l}_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \quad (3.41)$$

é contínua. De fato, segue-se que

$$\begin{aligned}
\left| \hat{l}_\varepsilon(\eta_\varepsilon) \right| &\leq \left| \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \bar{q}^\varepsilon \eta_\varepsilon \right| + C |\varphi^\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} |\eta_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \left(\|k \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{N_\varepsilon})} + \|\operatorname{div}(k \nabla u_\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_{N_\varepsilon})} + \tilde{C} |\varphi^\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \|\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \left(\|k \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{N_\varepsilon})} + \tilde{C} |\varphi^\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \leq \mathcal{C} \|\eta_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} .
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Assim, do teorema de Lax-Milgran, segue-se que existe uma única solução $\xi_\varepsilon \in Var_{u_\varepsilon}$ do problema 3.38 e conseqüentemente, demonstra-se a existência e unicidade para o problema 3.36.

3.2 Cálculo da derivada topológica

Para o cálculo das derivadas topológicas de primeira e segunda ordem, será aplicado o *topological-shape sensitivity method* apresentado no capítulo 2. Nesta metodologia, exige-se que o problema variacional definido na configuração de referência Ω_ε e dado pela eq. 3.30 seja também satisfeito para toda configuração perturbada Ω_τ , definida por

$$\Omega_\tau := \{ \mathbf{x}_\tau \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x}, \tau) \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \text{ e } \tau \in \mathbb{R}^+ \} , \tag{3.43}$$

de tal forma que $\mathbf{x}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{x}$ e $\Omega_\tau|_{\tau=0} = \Omega_\varepsilon$ e sendo $\chi(\mathbf{x}, \tau)$ um difeomorfismo, dado por

$$\begin{aligned}
\chi : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \Omega_\tau \\
\mathbf{x}_\tau &\mapsto \mathbf{x} + \tau \mathbf{v}(\mathbf{x}) ,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é um campo de velocidades suficientemente regular em Ω_ε que representa a *ação de mudança de forma*, o qual, levando-se em conta o *topological-shape sensitivity method*, está associado a uma expansão uniforme da perturbação. Além do mais, como neste trabalho considera-se furo circular ou inclusão em forma de disco, tem-se que $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ assume os seguintes

valores sobre $\partial\Omega_\varepsilon$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\mathbf{n} & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} . \quad (3.45)$$

O problema variacional na configuração Ω_τ é dado de forma abstrata por: encontrar $u_\tau \in Kin_{u_\tau}$, tal que

$$a_\tau(u_\tau, \eta_\tau) = l_\tau(\eta_\tau) \quad \forall \eta_\tau \in Var_{u_\tau} , \quad (3.46)$$

onde

$$a_\tau(u_\tau, \eta_\tau) = \int_{\Omega_\tau} k_\delta \nabla u_\tau \cdot \nabla \eta_\tau dV , \quad (3.47)$$

$$l_\tau(\eta_\tau) = - \int_{\Gamma_{N_\tau}} \bar{q}^\varepsilon \eta_\tau dS , \quad (3.48)$$

e a função custo é expressa por

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\tau) = \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} k_\delta \|\nabla u_\tau\|^2 dV + \int_{\Gamma_N} \bar{q} u_\tau dS \\ &= \frac{1}{2} a_\tau(u_\tau, u_\tau) - l_\tau(u_\tau) . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Cabe mencionar que, para o campo de velocidade definido pela eq. 3.45 em particular, tem-se

$$\left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) \right|_{\tau=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) \quad (3.50)$$

A derivada de $\mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau)$ em relação ao parâmetro τ é dada pelo seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calcular } \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) \\ \text{sujeito à } a_\tau(u_\tau, \eta_\tau) = l_\tau(\eta_\tau) \quad \forall \eta_\tau \in Var_{u_\tau} \text{ e } \tau \geq 0 \end{array} \right. , \quad (3.51)$$

que neste trabalho será calculada aplicando-se o método direto, isto é; através do cálculo direto das derivadas da função custo, restrições e equação de estado em relação ao parâmetro

τ . Assim, tem-se que

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) + \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau), \dot{u}_\tau \right\rangle, \text{ onde } \dot{u}_\tau = \frac{d}{d\tau} u_\tau. \quad (3.52)$$

No entanto, observa-se que $\dot{u}_\tau \in Var_{u_\tau}$. Logo, a derivada da função custo $\mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau)$, dada pela eq. 3.49, em relação a u_τ na direção \dot{u}_τ , resulta em

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau), \dot{u}_\tau \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\tau} \left(\frac{1}{2} a_\tau(u_\tau, u_\tau) - l_\tau(u_\tau) \right), \dot{u}_\tau \right\rangle \\ &= a_\tau(u_\tau, \dot{u}_\tau) - l_\tau(\dot{u}_\tau) = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde usou-se o fato de que u_τ é solução do problema variacional 3.46. Assim,

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau(u_\tau, u_\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau(u_\tau), \quad (3.54)$$

e como consequência deste caso particular, ocorre que a sensibilidade da função custo é obtida calculando-se apenas a derivada parcial (para u_τ fixo) de $a_\tau(u_\tau, u_\tau)$ e de $l_\tau(u_\tau)$ em relação ao parâmetro τ .

Para o cálculo da derivada da forma bilinear $a_\tau(u_\tau, u_\tau)$, em $\tau = 0$, considere-se o teorema do transporte de Reynolds [31] aplicado à equação eq. 3.47,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau(u_\tau, u_\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[k_\delta \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla u_\tau \cdot \nabla u_\tau) \Big|_{\tau=0} + k_\delta \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\Omega_\varepsilon. \quad (3.55)$$

Observando-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla u_\tau \cdot \nabla u_\tau) \Big|_{\tau=0} &= -2 (\nabla \mathbf{v})^T \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \\ &= -2 \nabla \mathbf{v} \cdot (\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.56)$$

obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau(u_\tau, u_\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta [(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) \mathbf{I} - 2 (\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon)] \cdot \nabla \mathbf{v} dV. \quad (3.57)$$

Analogamente, pode-se calcular a derivada do funcional linear $l_\tau(u_\tau)$, em $\tau = 0$, da seguinte maneira

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau(u_\tau) \right|_{\tau=0} = - \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \bar{q}^\varepsilon u_\varepsilon \operatorname{div}_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathbf{v} dS, \quad (3.58)$$

onde $\operatorname{div}_{\partial\Omega_\varepsilon} \mathbf{v}$ é o divergente superficial do campo de velocidade.

Assim, se $\Gamma_{N_\varepsilon} = \Gamma_N$, o que ocorre quando a perturbação é uma inclusão (eq. 3.27) ou um furo com condição de contorno de Dirichlet (eq. 3.24), a derivada do funcional linear, dado pela eq. 3.58, é nula devido ao campo de velocidade adotado. Caso contrário, quando $\partial\mathcal{H}_\varepsilon \cap \Gamma_{N_\varepsilon} = \partial\mathcal{H}_\varepsilon$, o que se verifica apenas no caso da perturbação dada por um furo com condição de contorno Neumann homogêna (eq. 3.21), a derivada do funcional linear se anula como consequência do fluxo de calor prescrito sobre $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$ (eq. 3.23). Logo, para cada tipo de perturbação considerada neste trabalho, tem-se que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau(u_\tau) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (3.59)$$

Portanto, substituindo as eq. 3.57 e 3.59 na eq. 3.54, obtém-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}_{\Omega_\tau}(u_\tau) \right|_{\tau=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} k_\delta [(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) \mathbf{I} - 2(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon)] \cdot \nabla \mathbf{v} dV \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v} dV, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde Σ_ε é o tensor momento energia de Eshelby, que será evidenciado para cada tipo de perturbação em análise.

3.2.1 Perturbação com furo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$

Neste caso, tem-se que a sensibilidade à mudança de forma é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}} k [(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) \mathbf{I} - 2(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon)] \cdot \nabla \mathbf{v} dV \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v} dV, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde Σ_ε é dado por

$$\Sigma_\varepsilon = \frac{1}{2}k \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{I} - k (\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) . \quad (3.62)$$

Da proposição A.1 (vide apêndice A), o tensor de Eshelby dado pela eq. 3.62 tem divergência nula. Sejam \mathbf{T} um tensor de segunda ordem e \mathbf{w} um vetor. Então, considerando-se a identidade tensorial (vide, por exemplo, Gurtin 1981 [31])

$$\operatorname{div} (\mathbf{T}^T \mathbf{w}) = \operatorname{div} (\mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{w} , \quad (3.63)$$

o resultado da proposição A.1 e ainda levando-se em conta que Σ_ε é simétrico, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v} dV \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} (\Sigma_\varepsilon \mathbf{v}) dV . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Aplicando-se o teorema da divergência e considerando-se o campo de velocidades definido pela eq. 3.45 e que \mathbf{n} é o campo de vetores normais exteriores, a equação 3.64 resulta em uma integral de linha na fronteira do furo $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$, ou seja,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) = - \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS . \quad (3.65)$$

O gradiente de u_ε (∇u_ε) definido sobre a fronteira $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$ pode ser decomposto em suas componentes normal e tangencial, isto é

$$\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \quad \text{e} \quad \nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} , \quad (3.66)$$

onde \mathbf{t} representa o campo de vetores unitários tangentes à fronteira $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$. Assim, considerando a eq. 3.62 na eq. 3.65, observa-se que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\Omega_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} k \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 \right] dS . \quad (3.67)$$

Além disso, substituindo a eq. 3.67 nas eq. 2.18 e eq. 2.19, com $j = 2$; obtém-se, respectivamente, os seguintes resultados

$$D_T\psi = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_1'(\varepsilon)} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} k \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 \right] dS, \quad (3.68)$$

e

$$D_T^2\psi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_2'(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} k \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 \right] dS + f_1'(\varepsilon) D_T\psi \right\}. \quad (3.69)$$

Finalmente, para se calcular as expressões finais para $D_T\psi$ e $D_T^2\psi$, é necessário conhecer o comportamento da solução u_ε na vizinhança do furo. Portanto, de uma análise assintótica da solução u_ε , cuja justificativa é dada através do apêndice B, pode-se identificar as funções $f_1(\varepsilon)$ e $f_2(\varepsilon)$ dependendo de cada tipo de condição de contorno sobre $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$, e finalmente calcular o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nas eq. 3.68 e 3.69. De fato:

- **Condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo.** Neste caso, é válida a seguinte expansão assintótica para u_ε (vide apêndice B)

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) + \frac{\varepsilon^4}{2\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^4} \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) \\ &+ \varepsilon^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^4}{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla \tilde{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) + v_\varepsilon(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde $u(\mathbf{x})$ é solução do problema associado ao domínio original (não perturbado) Ω , $v_\varepsilon(\mathbf{x})$ é tal que $|v_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^3$, com C independente de ε . Além do mais, a função $\tilde{u}(\mathbf{x})$ é solução do seguinte problema variacional: encontre $\tilde{u} \in \mathcal{V}$, tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \eta + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial g}{\partial n} \eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{W}, \quad (3.71)$$

onde o conjunto das funções admissíveis \mathcal{V} e o espaço das variações admissíveis \mathcal{W} são definidos, respectivamente, como

$$\mathcal{V} = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega) : \tilde{u}|_{\Gamma_D} = -g\} \quad \text{e} \quad \mathcal{W} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta|_{\Gamma_D} = 0\} \quad (3.72)$$

e a função $g(\mathbf{x})$ é dada por

$$g(\mathbf{x}) = \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \frac{\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2}. \quad (3.73)$$

Outrossim, da eq. 3.68, tem-se

$$D_T\psi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_1'(\varepsilon)} \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 dS. \quad (3.74)$$

Logo, considerando-se a eq. 3.70 na eq. 3.74 pode-se observar que $f_1(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ satisfaz as condições exigidas pelo teorema 2.5. Tomando-se o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se a derivada topológica de primeira ordem, dada por

$$D_T\psi = -k \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \text{com} \quad f_1(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2. \quad (3.75)$$

Observação 3.5 *Demonstra-se (vide o trabalho de Novotny 2003 [47]) que o resultado dado pela eq. 3.75 pode ser continuamente estendido até a fronteira com condição de Neumann homogênea. Assim, tem-se que*

$$D_T\psi = -k \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega, \quad \text{com} \quad f_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\pi\varepsilon^2. \quad (3.76)$$

De modo inteiramente análogo, a eq. 3.69 é dada, neste caso, por

$$D_T^2\psi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_2'(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 dS + f_1'(\varepsilon) D_T\psi \right\}. \quad (3.77)$$

Então, levando-se em conta as equações 3.70 e 3.75 na equação anterior e identificando-se $f_2(\varepsilon) = \pi\varepsilon^4$ de modo a satisfazer as hipóteses do teorema 2.6, o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ fornece a seguinte expressão para a derivada topológica de segunda ordem

$$\begin{aligned} D_T^2\psi &= -\frac{1}{4}k \left(\|\nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 - \frac{1}{2}tr^2 \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \right) - k \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla(\widehat{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{1}{2}k \det \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) - k \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \text{com} \quad f_2(\varepsilon) = \pi\varepsilon^4, \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde a última igualdade é consequência de que $u(\mathbf{x})$ é harmônica em Ω .

Observação 3.6 *Em domínios suficientemente grandes, a influência do termo $\tilde{u}(\mathbf{x})$ pode ser desprezada como consequência do decaimento a zero no infinito das condições de contorno prescritas sobre $\partial\Omega$. De fato, tais condições de contorno estão associadas à restrição de g ou de $\frac{\partial g}{\partial n}$ sobre a fronteira exterior.*

- **Condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira do furo.** Neste caso, a expansão assintótica para u_ε , restrita a uma bola B_R , $R \gg \varepsilon$, com $\mathcal{H}_\varepsilon \subset B_R \subset \Omega$, é dada por (vide apêndice B).

$$u_\varepsilon(\mathbf{x})|_{B_R} = u(\mathbf{x}) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}/\varepsilon) + \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) , \quad (3.79)$$

sendo $v_\varepsilon(\mathbf{x})$, dada pela seguinte função

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\hat{\mathbf{x}}) \left[1 - \frac{\log(\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|/\varepsilon)}{\log(R/\varepsilon)} \right] , & \forall \mathbf{x} \in B_R \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon} \\ 0 , & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{B_R} \end{cases} , \quad (3.80)$$

$w(\mathbf{x}/\varepsilon)$ dada por

$$w(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}) , \quad (3.81)$$

e ainda, $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ satisfazendo a estimativa

$$|\tilde{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2 , \quad (3.82)$$

onde C é uma constante independente de ε . De acordo com a eq. 3.68, tem-se que

$$D_T\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_1'(\varepsilon)} \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 dS . \quad (3.83)$$

Considerando-se a expansão dada pela eq. 3.79, juntamente com a eq. 3.81, na eq. 3.83, pode-se identificar $f_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{\log(R/\varepsilon)}$ de modo a satisfazer as condições do teorema

2.5 e, então, passar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ que fornece o seguinte resultado para a derivada topológica de primeira ordem

$$D_T \psi = k u^2(\widehat{\mathbf{x}}) \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \text{com} \quad f_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{\log(R/\varepsilon)}. \quad (3.84)$$

Considerando-se a eq. 3.69, tem-se que

$$D_T^2 \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_2'(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 dS - f_1'(\varepsilon) D_T \psi \right\}. \quad (3.85)$$

Assim, levando-se em conta as eq. 3.79 e 3.84 na eq. 3.85 e identificando-se $f_2(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$ como previsto no teorema 2.6, o cálculo do limite $\varepsilon \rightarrow 0$ implica na seguinte expressão para a derivada topológica de segunda ordem

$$D_T^2 \psi = k \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \text{com} \quad f_2(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2. \quad (3.86)$$

De modo análogo ao caso anterior, observa-se que a estimativa dada pela eq. 3.82, implica que

$$\int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial n} \right) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} dS = o(\varepsilon^2), \quad (3.87)$$

e

$$\int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 dS = o(\varepsilon^4); \quad (3.88)$$

além disso, por ortogonalidade

$$\int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} k \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial n} \right) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} dS = 0, \quad (3.89)$$

e, portanto, estes três últimos termos não contribuem para a derivada topológica de segunda ordem.

Observação 3.7 *O resultado dado pela eq. 3.84 não pode ser continuamente estendido para a fronteira. De fato, no trabalho de Novotny 2003 [47] foi demonstrado que*

a derivada topológica de primeira ordem calculada na fronteira para a condição de Dirichlet homogênea é dada por

$$D_T\psi = k \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \partial\Omega, \quad \text{com} \quad f_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\pi\varepsilon^2. \quad (3.90)$$

Observa-se ainda que, embora a derivada topológica de segunda ordem seja dada explicitamente como função de u , o parâmetro R , introduzido na derivada topológica de primeira ordem, depende de cada ponto $\widehat{\mathbf{x}}$ considerado. Observa-se da literatura que este problema é, em geral, contornado tomando-se a aproximação $1/\log(R/\varepsilon) \approx -1/\log\varepsilon$ (Guillaume et al. 2002 [29]), o que pode tornar imprecisa a expansão assintótica topológica. Esta questão será abordada novamente face aos resultados dos experimentos numéricos.

3.2.2 Perturbação com inclusão $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}) \cup \overline{\mathcal{I}_\varepsilon}$

Para o caso de uma inclusão, observando-se as eq. 3.29 e 3.60, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\psi(\Omega_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \mathcal{H}_\varepsilon} k [(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) \mathbf{I} - 2(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon)] \cdot \nabla \mathbf{v} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}_\varepsilon} \delta k [(\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) \mathbf{I} - 2(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon)] \cdot \nabla \mathbf{v} dV \\ &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{H}_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon^e \cdot \nabla \mathbf{v} dV + \int_{\mathcal{I}_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon^i \cdot \nabla \mathbf{v} dV, \end{aligned} \quad (3.91)$$

e o tensor momento energia de Eshelby Σ_ε é dado, neste caso, por

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{cases} \Sigma_\varepsilon^e = \frac{k}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{I} - k(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) & \text{em } \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon} \\ \Sigma_\varepsilon^i = \frac{\delta k}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{I} - \delta k(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) & \text{em } \mathcal{I}_\varepsilon \end{cases}. \quad (3.92)$$

Em particular, da proposição A.2 (ver o apêndice A), o tensor de Eshelby dado por eq. 3.92 tem divergência nula sobre a matriz $\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$ e sobre a inclusão \mathcal{I}_ε . Procedendo de modo

inteiramente análogo às seções anteriores, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\psi(\Omega_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v} dV \\ &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{H}_\varepsilon} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^e \mathbf{v}) dV + \int_{\mathcal{I}_\varepsilon} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^i \mathbf{v}) dV, \end{aligned} \quad (3.93)$$

donde, como consequência do teorema da divergência, segue-se que

$$\frac{d}{d\varepsilon}\psi(\Omega_\varepsilon) = - \int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} (\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^e - \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.94)$$

Considerando-se o sistema ortonormal (\mathbf{t}, \mathbf{n}) sobre $\partial \mathcal{H}_\varepsilon$ e a condição de continuidade da solução u_ε sobre a fronteira da inclusão, tem-se

$$\frac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial t} = \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial n} = \delta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial n}, \quad (3.95)$$

onde $u_\varepsilon^e = u_\varepsilon|_{\Omega \setminus \mathcal{H}_\varepsilon}$ e $u_\varepsilon^i = u_\varepsilon|_{\mathcal{I}_\varepsilon}$. Substituindo as condições acima na eq. 3.94, e levando-se em conta a eq. 2.18, segue-se que

$$D_T \psi = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_1'(\varepsilon)} \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} k(1 - \delta) \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial n} \right)^2 \right] dS, \quad (3.96)$$

e para $j = 2$ a eq. 2.19 fornece

$$D_T^2 \psi = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f_2'(\varepsilon)} \frac{1}{2} \left\{ \int_{\partial \mathcal{H}_\varepsilon} k(1 - \delta) \left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial n} \right)^2 \right] dS + f_1'(\varepsilon) D_T \psi \right\}. \quad (3.97)$$

Novamente, faz-se necessário uma análise assintótica da solução u_ε para, *a posteriori*, se identificar as funções $f_1(\varepsilon)$ e $f_2(\varepsilon)$ e finalmente calcular o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nas eq. 3.96 e 3.97, obtendo-se as expressões para as derivadas topológicas de primeira e segunda ordem. No

presente caso, vale a seguinte expansão assintótica (vide apêndice B)

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^e(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2} \frac{1-\delta}{1+\delta} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) + \frac{\varepsilon^4}{2\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^4} \frac{1-\delta}{1+\delta} \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) \\
&+ \varepsilon^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^4}{\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2} \frac{1-\delta}{1+\delta} \nabla \tilde{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) ,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

onde $u(\mathbf{x})$ é solução do problema associado ao domínio original Ω , $v_\varepsilon(\mathbf{x})$ é tal que $|v_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^3$, com C independente de ε . Da mesma maneira, a função $\tilde{u}(\mathbf{x})$ é solução do seguinte problema variacional: encontre $\tilde{u} \in \mathcal{V}$, tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \eta + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial g}{\partial n} \eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{W} , \tag{3.99}$$

onde o conjunto \mathcal{V} e o espaço \mathcal{W} são definidos, respectivamente, como

$$\mathcal{V} = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega) : \tilde{u}|_{\Gamma_D} = -g\} \quad \text{e} \quad \mathcal{W} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta|_{\Gamma_D} = 0\} \tag{3.100}$$

e a função $g(\mathbf{x})$ é dada por

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1-\delta}{1+\delta} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \frac{\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2} . \tag{3.101}$$

Assim, levando-se em conta a expansão dada pela eq. 3.98 na eq. 3.96 e, ainda, observando-se as hipóteses do teorema 2.5, pode-se reconhecer $f_1(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ e obter a seguinte expressão para a derivada topológica de primeira ordem

$$D_T \psi = -k \frac{1-\delta}{1+\delta} \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 \quad \forall \widehat{\mathbf{x}} \in \Omega , \quad \text{com} \quad f_1(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2 . \tag{3.102}$$

Analogamente, considerando-se a eq. 3.97 e o teorema 2.6, indentifica-se $f_2(\varepsilon) = \pi\varepsilon^4$. O limite $\varepsilon \rightarrow 0$ fornece, então, a seguinte expressão para a derivada topológica de segunda

ordem

$$D_T^2\psi = k \frac{1-\delta}{1+\delta} \left(\frac{1}{2} \det \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) - \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \text{com } f_2(\varepsilon) = \pi\varepsilon^4, \quad (3.103)$$

onde a função auxiliar $\tilde{u}(\mathbf{x})$, a exemplo do problema com condição de contorno de Neumann homogênea no furo, depende tanto explícita quanto implicitamente do ponto $\hat{\mathbf{x}}$ e da fronteira exterior $\partial\Omega$. De fato, $\tilde{u}(\mathbf{x})$ é solução do problema variacional 3.99.

Observação 3.8 *No caso limite em que o coeficiente de condutividade térmica tende a zero, obtém-se o resultado para perturbação dada por furo com condição de Neumann homogênea. De fato, calculando-se o limite $\delta \rightarrow 0$ nas eq. 3.102 e 3.103, tem-se*

$$D_T\psi = -k \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\|^2, \quad (3.104)$$

$$D_T^2\psi = \frac{1}{2}k \det \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) - k \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.105)$$

que coincidem com os resultados dados pelas eq. 3.75 e 3.78.

3.3 Resumo dos resultados

Nesta seção é apresentado um resumo dos resultados obtidos. Em particular tem-se as expressões das derivadas topológicas de primeira e segunda ordem para a energia potencial total associada a um problema de Laplace bidimensional, considerando o domínio perturbado por furos com condições de contorno de Neumann ou Dirichlet homogêneas ou por inclusões. Estes resultados são dados respectivamente, por:

- **Condição de contorno de Neumann na fronteira do furo**

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 k \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\|^2 \\ &+ \pi\varepsilon^4 k \left(\frac{1}{2} \det \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) - \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) \right) + o(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (3.106)$$

- **Condição de contorno de Dirichlet na fronteira do furo**

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \psi(\Omega) + \frac{\pi}{\log(R/\varepsilon)} k u^2(\widehat{\mathbf{x}}) + \pi \varepsilon^2 k \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 + o(\varepsilon^3) . \quad (3.107)$$

- **Condição de salto da derivada normal na fronteira da inclusão**

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &= \psi(\Omega) - \pi \varepsilon^2 k \frac{1-\delta}{1+\delta} \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 \\ &+ \pi \varepsilon^4 k \frac{1-\delta}{1+\delta} \left(\frac{1}{2} \det \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) - \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \right) + o(\varepsilon^4) . \end{aligned} \quad (3.108)$$

Cabe esclarecer que a derivada topológica de segunda ordem, para os casos de condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo e de salto da derivada normal na fronteira da inclusão, é composta de uma parcela que depende explicitamente do ponto $\widehat{\mathbf{x}}$, correspondente ao gradiente de segunda ordem da solução $u(\widehat{\mathbf{x}})$, e de outra (de mesma ordem de ε) que depende tanto explícita quanto implicitamente do ponto $\widehat{\mathbf{x}}$ e ainda da influência da fronteira exterior $\partial\Omega$. Essas últimas dependências vêm das condições de contorno do problema para o termo remanescente $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, como pode ser observado no apêndice B.

3.4 Experimentos Numéricos

O principal objetivo dos experimentos numéricos apresentados nesta seção é estudar a influência da derivada topológica de segunda ordem na análise, tanto do ponto de vista qualitativo quanto de ponto de vista quantitativo.

Levando-se em consideração que nos casos de furo com condição de contorno de Neumann homogênea (eq. 3.106) e inclusão (eq. 3.108) o cálculo da função $\tilde{u}(\mathbf{x})$ torna-se proibitivo, já que se faz necessário resolver um problema variacional associado a cada ponto $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$, este termo será desprezado na análise de cada um desses casos, o que permite estudar apenas a influência do termo associado a $\det \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}})$. De modo análogo, no caso da perturbação dada por um furo com condição de Dirichlet homogênea (eq. 3.107), a influência do parâmetro R , que depende de cada ponto $\widehat{\mathbf{x}}$, será desconsiderada levando-se em conta a aproximação

$1/\log(R/\varepsilon) \approx -1/\log \varepsilon$. As consequências destas aproximações serão discutidas na seção 3.5.

Análise qualitativa: do ponto de vista qualitativo (e observando-se que o caso de furo com condição de contorno de Neumann homogênea encerra o caso de inclusão como caso limite) consideram-se as aproximações de primeira e segunda ordem para perturbações dadas por furos, obtendo-se:

Condição de contorno de Neumann homogênea

- aproximação assintótica topológica de primeira ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 k \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\| . \quad (3.109)$$

- aproximação assintótica topológica de segunda ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 k \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\|^2 + \frac{1}{2}\pi\varepsilon^4 k \det \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) . \quad (3.110)$$

Condição de contorno de Dirichlet homogênea

- aproximação assintótica topológica de primeira ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) - \frac{\pi}{\log \varepsilon} k u^2(\hat{\mathbf{x}}) . \quad (3.111)$$

- aproximação assintótica topológica de segunda ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) - \frac{\pi}{\log \varepsilon} k u^2(\hat{\mathbf{x}}) + \pi\varepsilon^2 k \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\|^2 . \quad (3.112)$$

Assim, para cada caso em análise, as aproximações de primeira e segunda ordem serão confrontadas para vários valores de ε considerando-se, inicialmente um domínio Ω e posteriormente (de modo análogo à segunda iteração em um algoritmo de passo fixo), um domínio Ω_ε a ser perturbado novamente com um furo de raio ε . A comparação dos resultados dar-se-á

plotando-se o lado direito das equações acima (a menos do fator constante $\psi(\Omega)$), que são explícitos, desde que foram desconsiderados os termos implícitos nesta análise.

Análise quantitativa: para a análise quantitativa, fixa-se um ponto \mathbf{x}^* do domínio Ω onde, para cada perturbação considerada, computam-se os termos das aproximações assintóticas topológicas de primeira e segunda ordem para diferentes valores de ε . Então, criam-se efetivamente as perturbações com centro no ponto \mathbf{x}^* e computam-se os valores da função custo $\psi(\Omega_\varepsilon)$ para cada ε considerado. Finalmente, comparam-se os resultados numéricos obtidos entre o valor da função custo computado no domínio Ω_ε , ora considerando a aproximação assintótica topológica de primeira ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T\psi , \quad (3.113)$$

ora considerando a aproximação assintótica topológica de segunda ordem

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T\psi + f_2(\varepsilon)D_T^2\psi , \quad (3.114)$$

e com este procedimento, analisa-se a influência da derivada topológica de segunda ordem na estimativa da função custo associada ao domínio com uma perturbação de tamanho finito. Observa-se que, ainda que nesse exemplo particular bastaria calcular $\tilde{u}(\mathbf{x}^*)$ para a obtenção da derivada topológica de segunda ordem nos casos de condição de contorno de Neumann homogênea e inclusão, o mesmo não foi efetuado para não comprometer a comparação entre as análises qualitativa e quantitativa.

Finalmente, para cada uma destas análises as soluções u e u_ε , respectivamente associadas aos domínios Ω e Ω_ε , são aproximadas utilizando-se o elemento finito padrão triangular de três nós. Em particular, para todos os casos as malhas foram construídas mantendo-se o mesmo número dos elementos $ne = 120$ ao longo da fronteira do furo para qualquer valor de seu raio ε . Como foi utilizado um gerador automático de malhas, foi adotado o seguinte

tamanho para os elementos em todas as malhas

$$h^e \approx \frac{2\pi}{ne} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|. \quad (3.115)$$

3.4.1 Exemplo 1

Considera-se o domínio original $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e o domínio perturbado $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$, onde a bola \mathcal{H}_ε tem centro em $\mathbf{x}^* = (0.5, 0.5)$ e raio ε , tal que $\varepsilon \in \{0.01, 0.02, 0.04, 0.08\}$. Neste exemplo, considera-se o corpo submetido à uma temperatura $u = 0$ sobre Γ_{D_1} e Γ_{D_2} e à um fluxo de calor $q_1 = 1$ sobre Γ_{N_1} e $q_2 = 2$ sobre Γ_{N_2} , onde $a = 0.2$ (ver fig. 3.1). Além disso, as demais partes da fronteira dadas por $\partial\Omega \setminus \overline{(\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \cup \Gamma_{N_1} \cup \Gamma_{N_2})}$ permanecem perfeitamente isoladas.

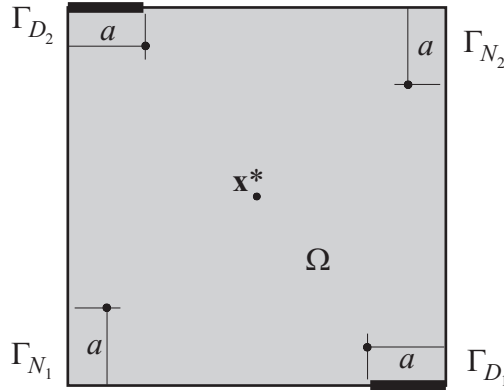


Figura 3.1: exemplo 1.

Condição de contorno de Neumann na fronteira do furo

Análise qualitativa: considerando-se a condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo, as aproximações assintóticas topológicas de primeira e de segunda ordem, dadas respectivamente pelas expressões (eq. 3.109 e eq.3.110), obtidas para o domínio original Ω e para o domínio perturbado Ω_ε são mostradas nas fig. 3.2 e 3.3, respectivamente e para cada valor de $\varepsilon \in \{0.01, 0.02, 0.04, 0.08\}$. Observa-se que o termo de correção de segunda ordem não produz mudanças significativas nos resultados, ao menos do ponto de vista qualitativo.

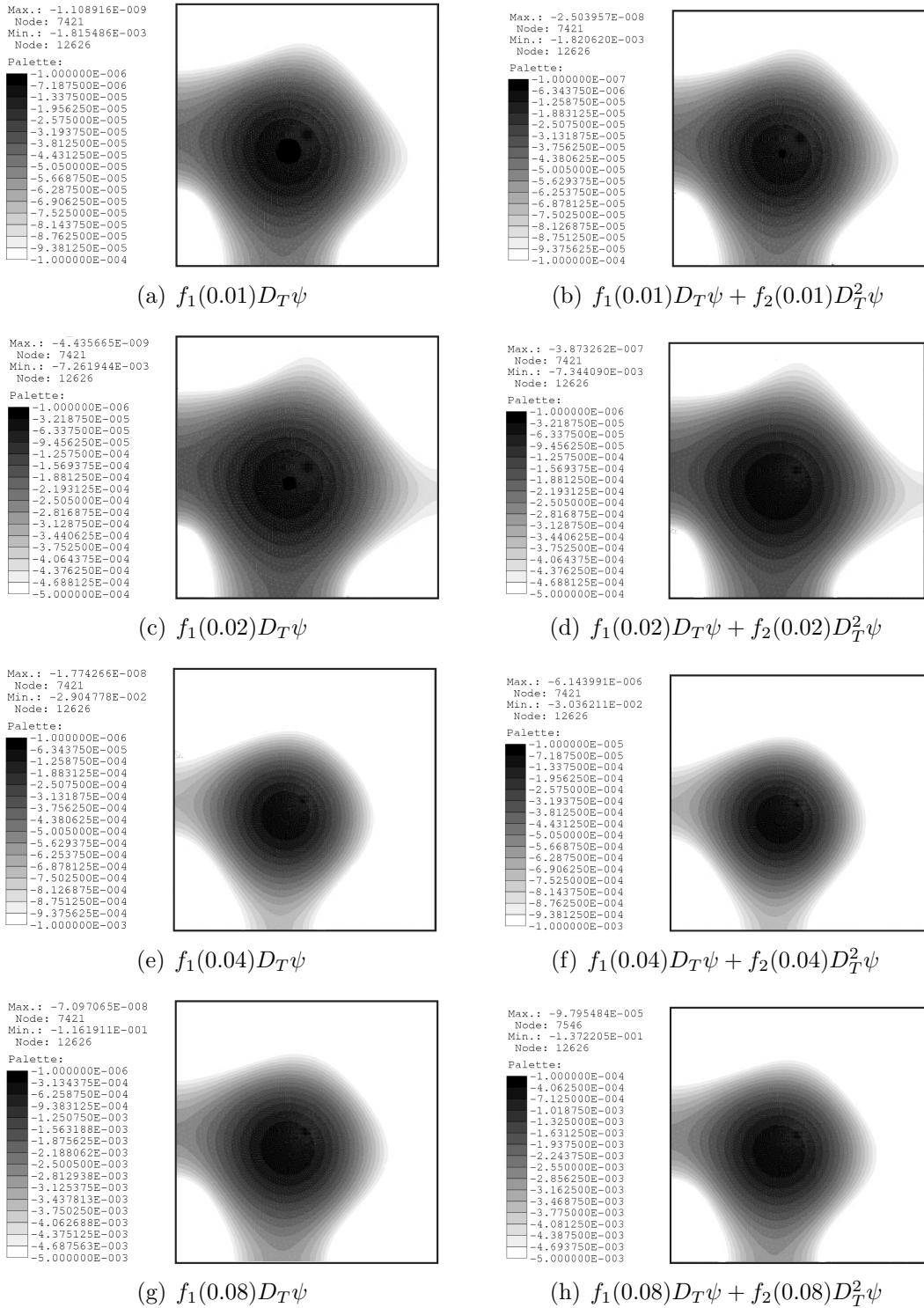


Figura 3.2: expansão assintótica topológica no domínio original Ω .

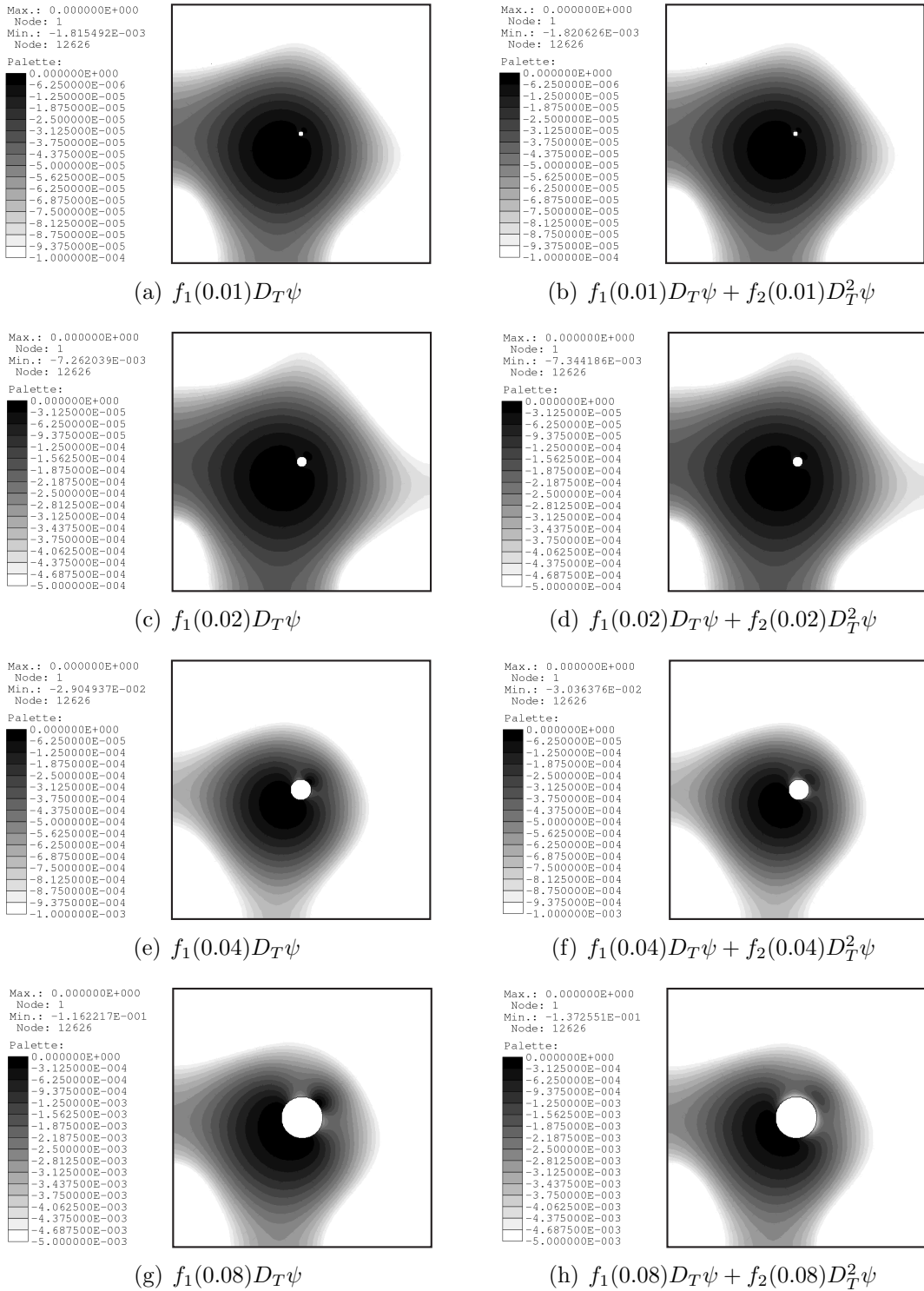


Figura 3.3: expansão assintótica topológica no domínio perturbado Ω_ϵ .

Análise quantitativa: da análise da fig. 3.4, que apresenta o comportamento da expansão assintótica topológica como uma função de ϵ , para a criação do furo com centro no ponto \mathbf{x}^* , infere-se que o termo de correção de segunda ordem fornece um importante fator de correção

para a expansão. De fato, quando os furos finitos são introduzidos, o que é uma exigência importante em aplicações, pode-se usar esta informação para se estimar, por exemplo:

- o tamanho dos furos, de acordo com a energia a ser dissipada;
- a energia, quando se cria furos de tamanho finito.

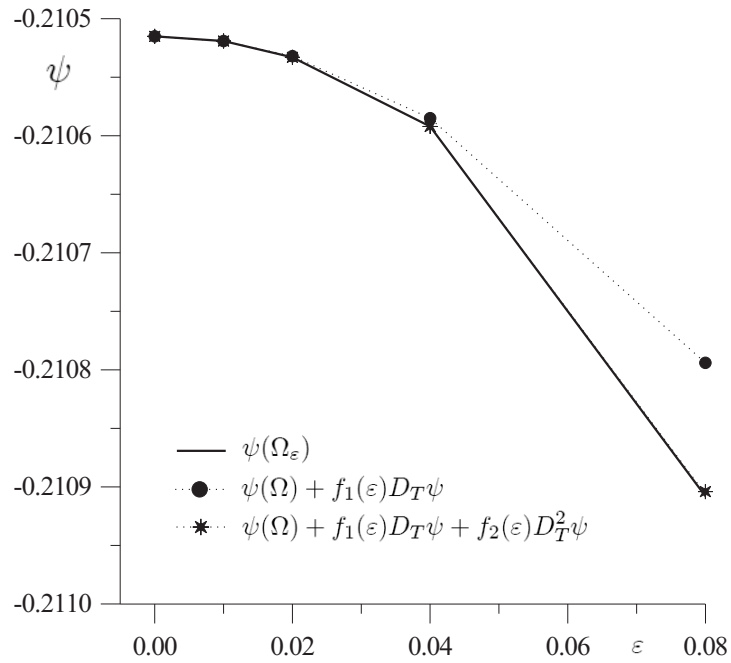


Figura 3.4: estimativa de $\psi(\Omega_\varepsilon)$ considerando-se os termos de correção de primeira e segunda ordem da expansão assintótica topológica.

Observação 3.9 *Considerando-se uma variação maior de $\varepsilon \in \{0.08, 0.16, 0.24, 0.32\}$ observa-se da fig. 3.5 que a estimativa torna-se ruim apenas para furos muito grandes, mesmo desprezando-se os termos não explícitos.*

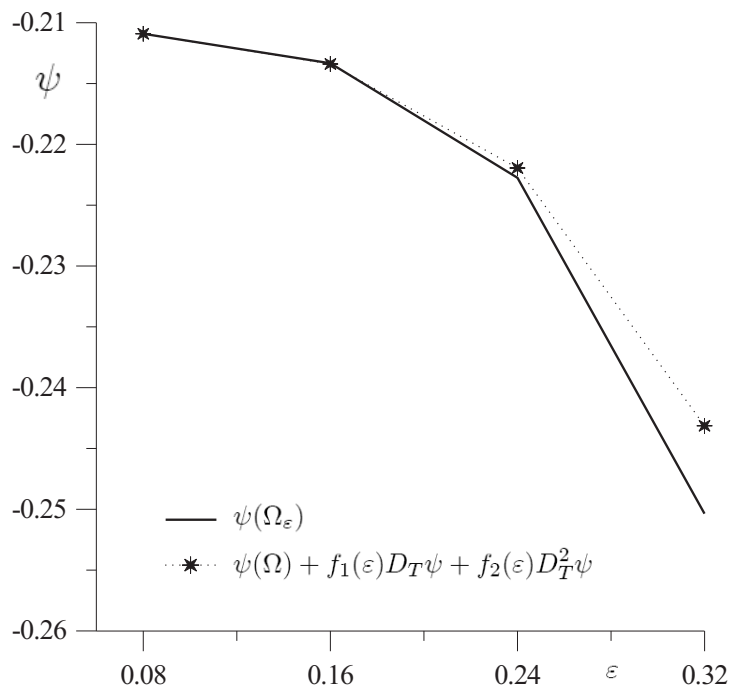


Figura 3.5: estimativa de $\psi(\Omega_\varepsilon)$ considerando a aproximação assintótica topológica de segunda ordem para $\varepsilon \in \{0.08, 0.16, 0.24, 0.32\}$.

Condição de contorno de Dirichlet na fronteira do furo

Análise qualitativa: o comportamento qualitativo das aproximações assintóticas topológicas de primeira (eq. 3.111) e segunda ordem (eq. 3.112), são apresentadas nas fig. 3.6 e 3.7 para os domínios original Ω e perturbado Ω_ε , respectivamente e para cada valor de $\varepsilon \in \{0.01, 0.02, 0.04, 0.08\}$.

Da análise destas figuras, observa-se que o termo de correção de segunda ordem, neste caso, produz mudanças significativas nos resultados, principalmente após se ter efetivamente criado furos (esta análise será novamente realizada no próximo exemplo).

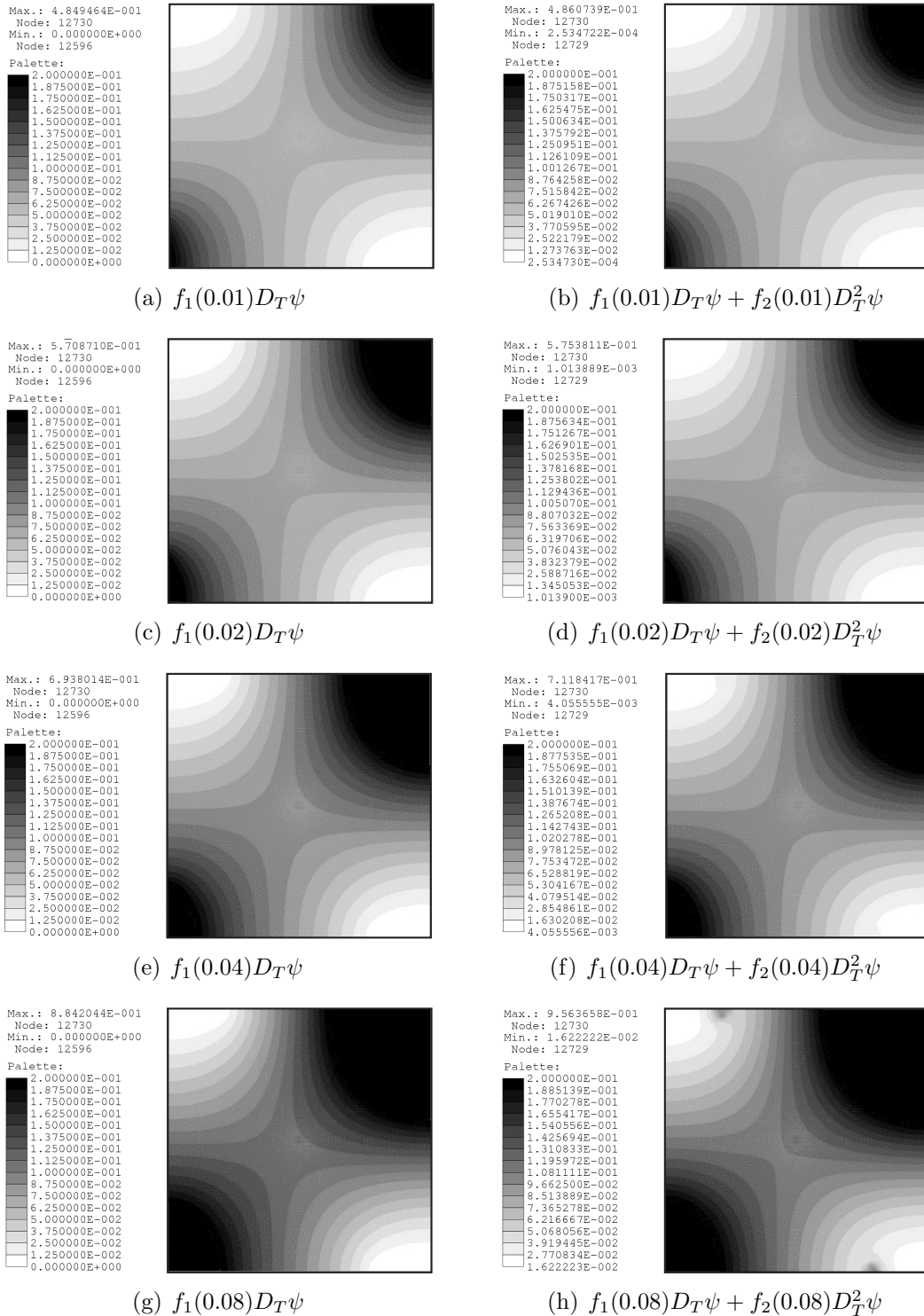


Figura 3.6: expansão assintótica topológica no domínio original Ω .

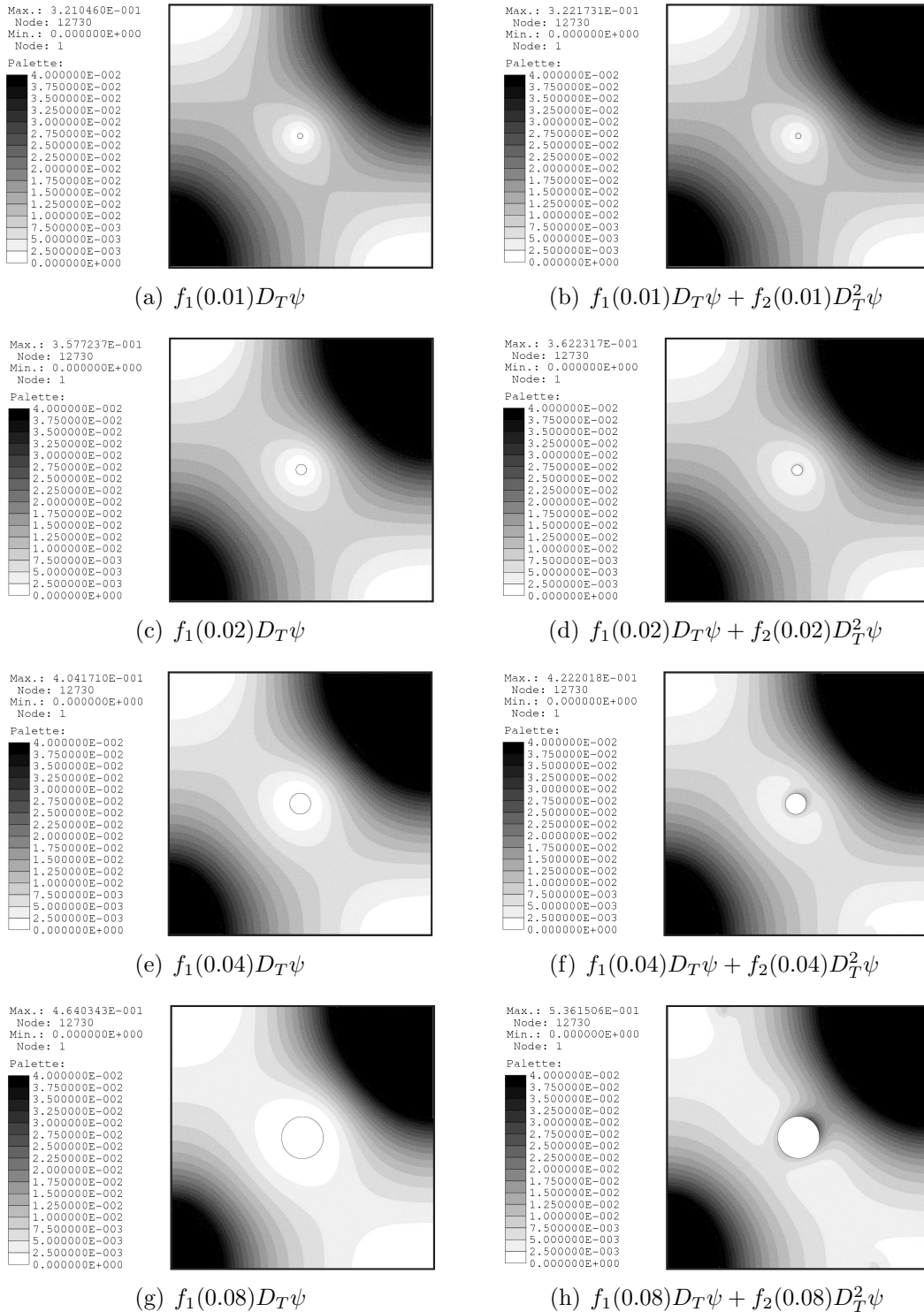


Figura 3.7: expansão assintótica topológica no domínio perturbado Ω_ϵ .

Análise quantitativa: o gráfico apresentado na fig. 3.8, que foi obtido computando-se a função custo e as aproximações assintóticas topológicas de primeira e segunda ordem em \mathbf{x}^* , mostra uma discrepância entre os valores obtidos para cada ϵ . De fato, esta discrepância está

associada à inclusão de um problema de escala dada pela aproximação adotada $1/\log(R/\varepsilon) \approx -1/\log \varepsilon$. Entretanto, o gráfico sugere que a estimativa, ainda que imprecisa, fornece uma boa direção de descida, o que pode vir a ser aplicada em problemas de otimização.

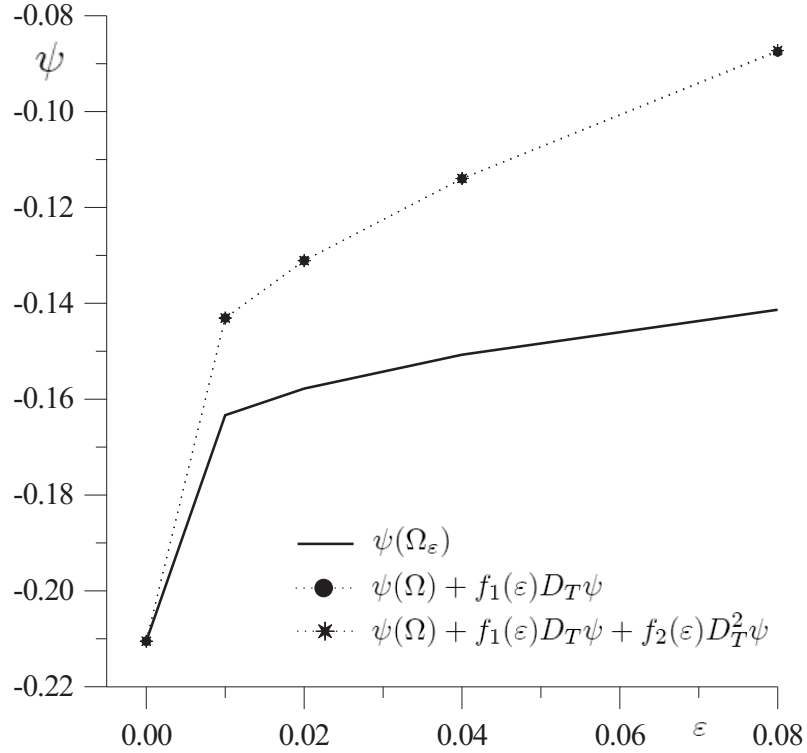


Figura 3.8: estimativa de $\psi(\Omega_\varepsilon)$ considerando-se os termos de primeira e segunda ordem na expansão assintótica topológica.

Da comparação entre as fig. 3.4 e 3.8 observa-se que o estimativa no exemplo da condição de contorno de Neumann é melhor do que a estimativa para a condição de contorno de Dirichlet. De fato, uma perturbação no domínio dada pela criação de um furo com condição de contorno de Dirichlet em sua fronteira é bastante severa como pode ser visto na fig. 3.9.

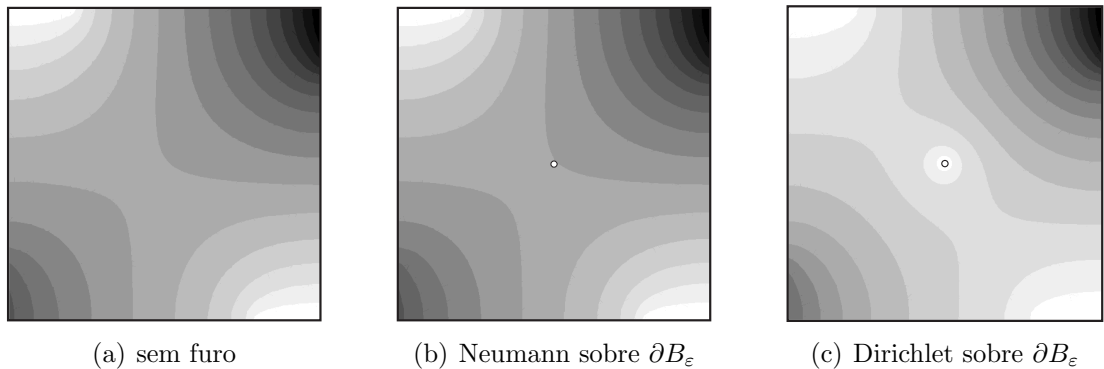


Figura 3.9: soluções u e u_ε para $\varepsilon = 0.01$.

Observação 3.10 *Intuitivamente, observando-se que o modelo estudado, neste exemplo, pode ser também aplicado para se descrever o deslocamento de uma membrana submetida a um carregamento uniforme (vide capítulo 2), a perturbação dada pela criação de um furo com condição de contorno de Dirichlet homogênea é então vista como um deslocamento da região perturbada até o plano da membrana (sem carregamento), o que pode provocar gradientes muito altos na vizinhança da perturbação.*

Condição de salto na derivada normal ao furo (inclusão)

Neste caso, o corpo de coeficiente de condutividade térmica constante k e representado por Ω é perturbado com a introdução de uma inclusão \mathcal{I}_ε , com centro em $\mathbf{x}^* = (0.5, 0.5)$, coeficiente de condutividade térmica δk e raio ε ; originando o domínio perturbado $\Omega_\varepsilon = (\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}) \cup \overline{\mathcal{I}_\varepsilon}$. Em particular, são adotados $k = 1$, $\delta \in \{1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 2, 4, 8, 16\}$ e $\varepsilon \in \{0.01, 0.02, 0.04, 0.08, 0.16\}$.

Análise quantitativa: para cada valor de δ calcula-se a expansão assintótica topológica associada ao domínio Ω em \mathbf{x}^* , considerando-se todos os valores de ε . Então, para se calcular o valor da função custo $\psi(\Omega_\varepsilon)$, insere-se efetivamente a inclusão. Finalmente, comparam-se as aproximações assintóticas topológicas de primeira e segunda ordem dadas, respectivamente, por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 k \frac{1-\delta}{1+\delta} \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2, \quad (3.116)$$

e

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 k \frac{1-\delta}{1+\delta} \|\nabla u(\widehat{\mathbf{x}})\|^2 + \frac{1}{2}\pi\varepsilon^4 k \frac{1-\delta}{1+\delta} \det \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}), \quad (3.117)$$

através das fig. 3.10-3.13 para diferentes valores de δ , onde a legenda usada para identificar as curvas é sumarizada na fig. 3.14.

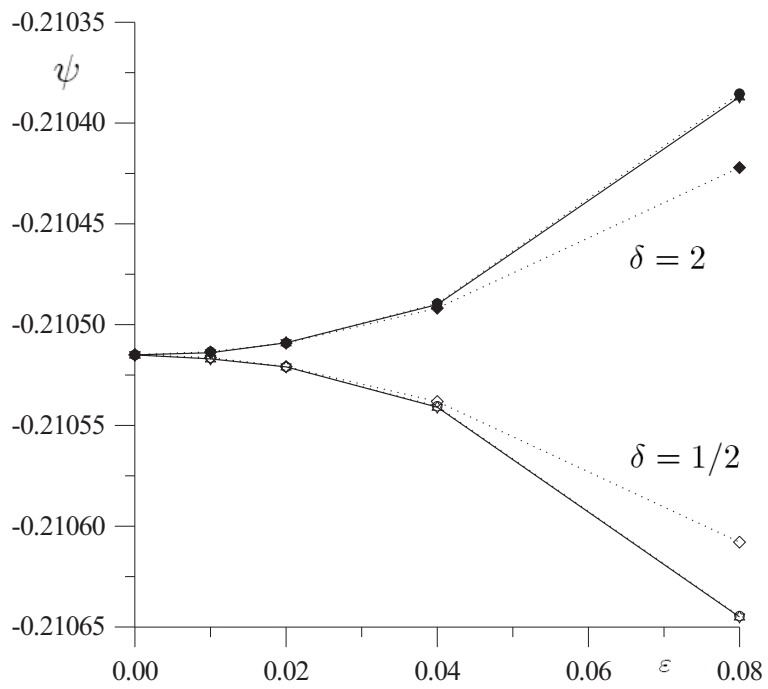


Figura 3.10: estimativa de $\psi(\Omega_\varepsilon)$ para $\delta = 1/2$ e $\delta = 2$.

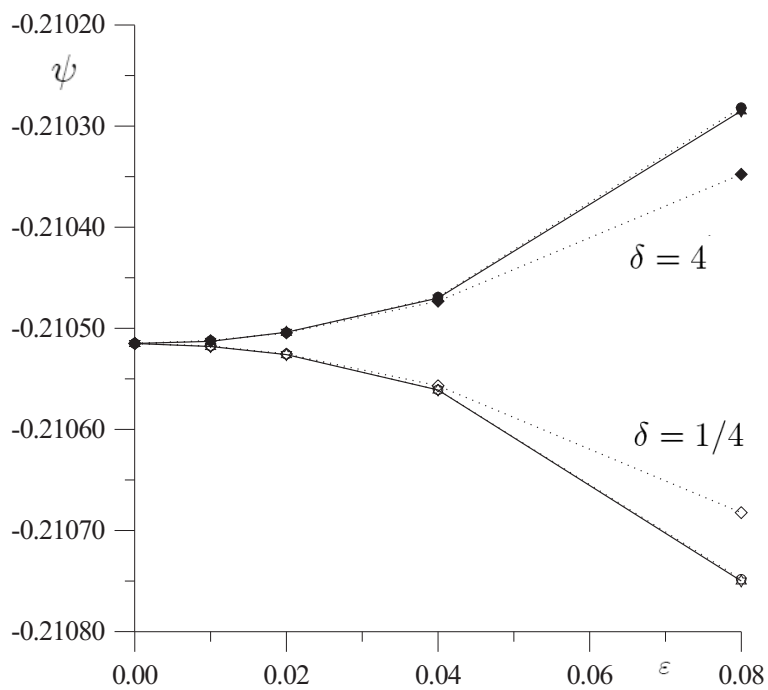


Figura 3.11: estimativa de $\psi(\Omega_\varepsilon)$ para $\delta = 1/4$ e $\delta = 4$.

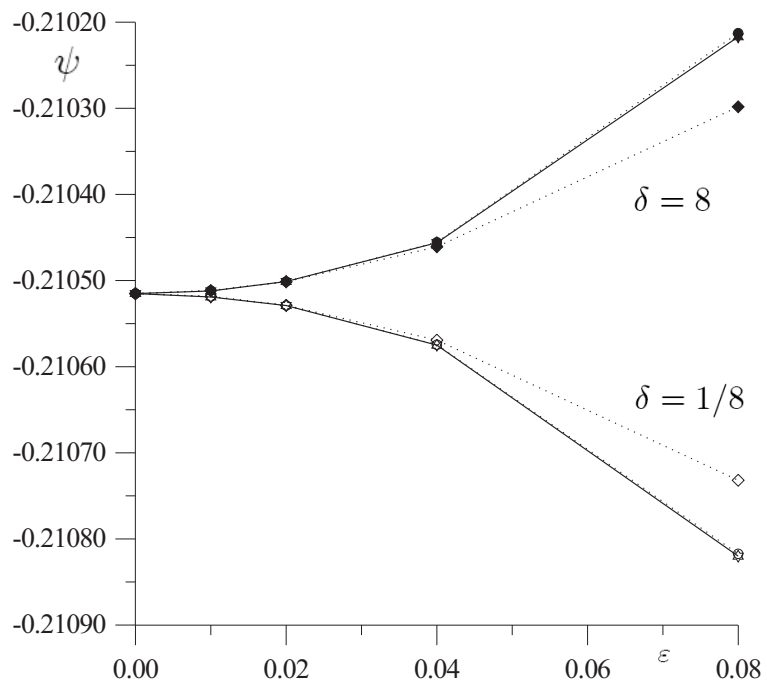


Figura 3.12: estimativa de $\psi(\Omega_\epsilon)$ para $\delta = 1/8$ e $\delta = 8$.

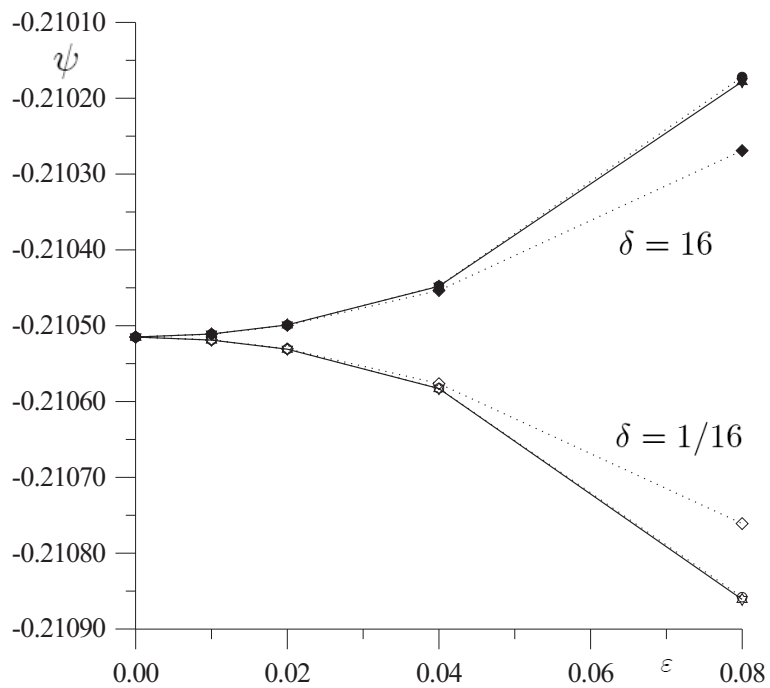


Figura 3.13: estimativa de $\psi(\Omega_\epsilon)$ para $\delta = 1/16$ e $\delta = 16$.

$\delta > 1$	$\delta < 1$
—★— $\psi(\Omega_\varepsilon)$	—☆— $\psi(\Omega_\varepsilon)$
.....◆..... $\psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T\psi$◇..... $\psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T\psi$
.....●..... $\psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T\psi + f_2(\varepsilon)D_T^2\psi$○..... $\psi(\Omega) + f_1(\varepsilon)D_T\psi + f_2(\varepsilon)D_T^2\psi$

Figura 3.14: legenda dos gráficos das fig. 3.10-3.13

De acordo com a observação 3.8, o caso limite $\delta \rightarrow 0$ fornece a expansão assintótica topológica para condição de contorno de Neumann homogênea na perturbação, o que é corroborado pela fig. 3.15 que compara o comportamento da aproximação assintótica topológica de segunda ordem quando δ decresce para zero. Como consequência, a análise qualitativa torna-se irrelevante neste caso.

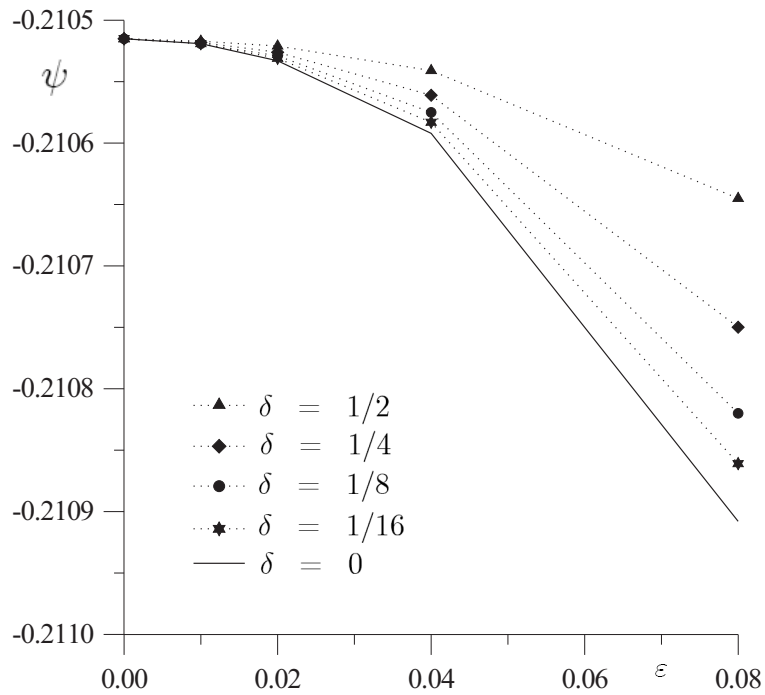


Figura 3.15: comportamento da expansão assintótica topológica de segunda ordem quando δ decresce para zero.

Dos resultados apresentados, observa-se que a estimativa obtida considerando-se a derivada topológica de segunda ordem permanece precisa para valores grandes do tamanho da inclusão, permitindo-se trabalhar com perturbações de tamanho finito. Este fato é muito importante para otimização topológica e para o desenvolvimento de algoritmos de reconstrução; onde, em geral, necessita-se estimar o tamanho da perturbação.

3.4.2 Exemplo 2

O objetivo deste exemplo é analisar as mudanças no comportamento qualitativo introduzidas pelo termo de correção de segunda ordem quando o domínio é perturbado com a criação de um furo com condição de contorno de Dirichlet homogênea, principalmente após efetivamente se ter criado furos.

O problema considerado pode ser observado na fig. 3.16, onde se tem um corpo submetido a uma temperatura $u = 0$ em Γ_D e à um fluxo de calor dado por uma função linear por partes em Γ_N com $q_1 = 1$ e $q_2 = 2$. Será considerada a condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira dos furos e devido à simetria periódica do problema, somente uma parte, denotada por Ω , é considerada.

Neste caso, os furos podem ser interpretados como canais de resfriamento em um trocador de calor. Então, é estimada a variação da energia quando os canais de resfriamento (furos de raio ε) são centradas no ponto \mathbf{x}^* e na próxima etapa, em qualquer ponto sobre a linha horizontal definida por $a = 0.5$, o que pode ser visto como uma restrição do problema.

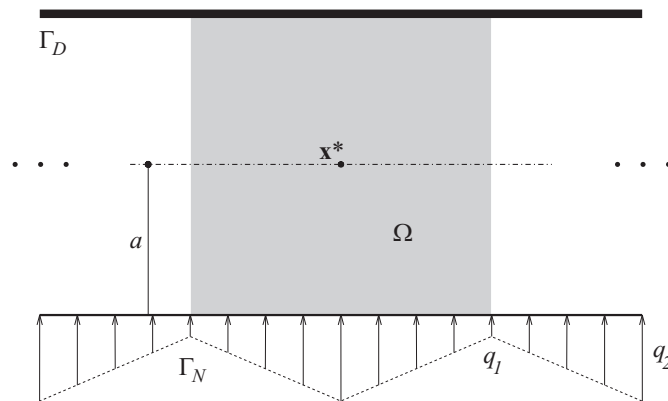


Figura 3.16: exemplo 2.

Os efeitos dos termos de primeira e segunda ordem nas aproximações assintóticas topológicas são respectivamente apresentados nas fig. 3.17 e 3.18 para os domínios original e perturbado, considerando $\varepsilon \in \{0.01, 0.02, 0.04, 0.08\}$. Dessas figuras, observa-se que o termo de correção de segunda ordem desempenha um papel importante na análise. De fato, para $\varepsilon = 0.04$ e $\varepsilon = 0.08$, enquanto o termo de correção de primeira ordem ($f_1(\varepsilon)D_T\psi$) sugere a criação de um novo furo, este juntamente com termo de correção de segunda ordem ($f_1(\varepsilon)D_T\psi + f_2(\varepsilon)D_T^2\psi$)

sugere a expansão do canal de resfriamento.

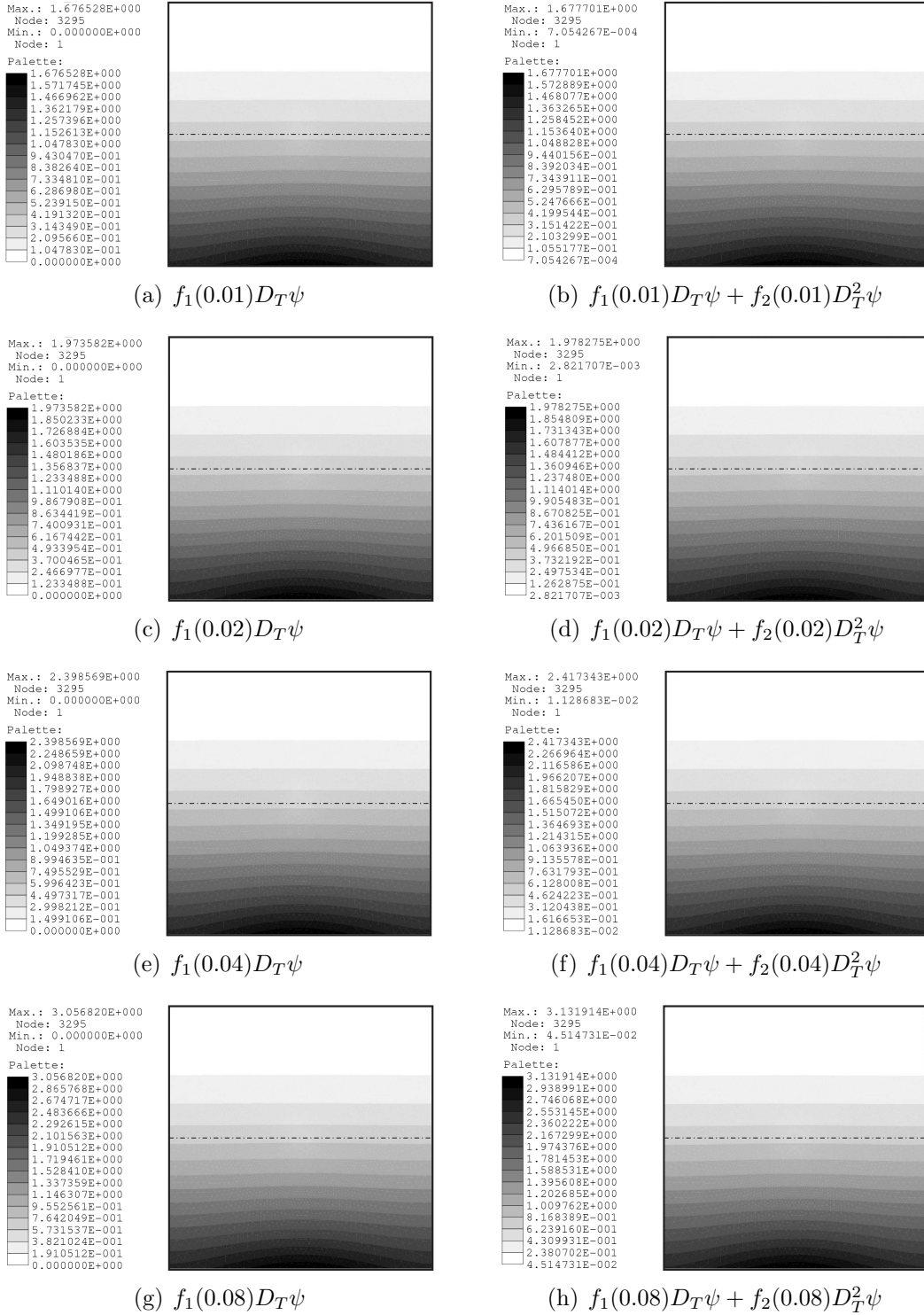


Figura 3.17: expansão assintótica topológica no domínio original Ω .

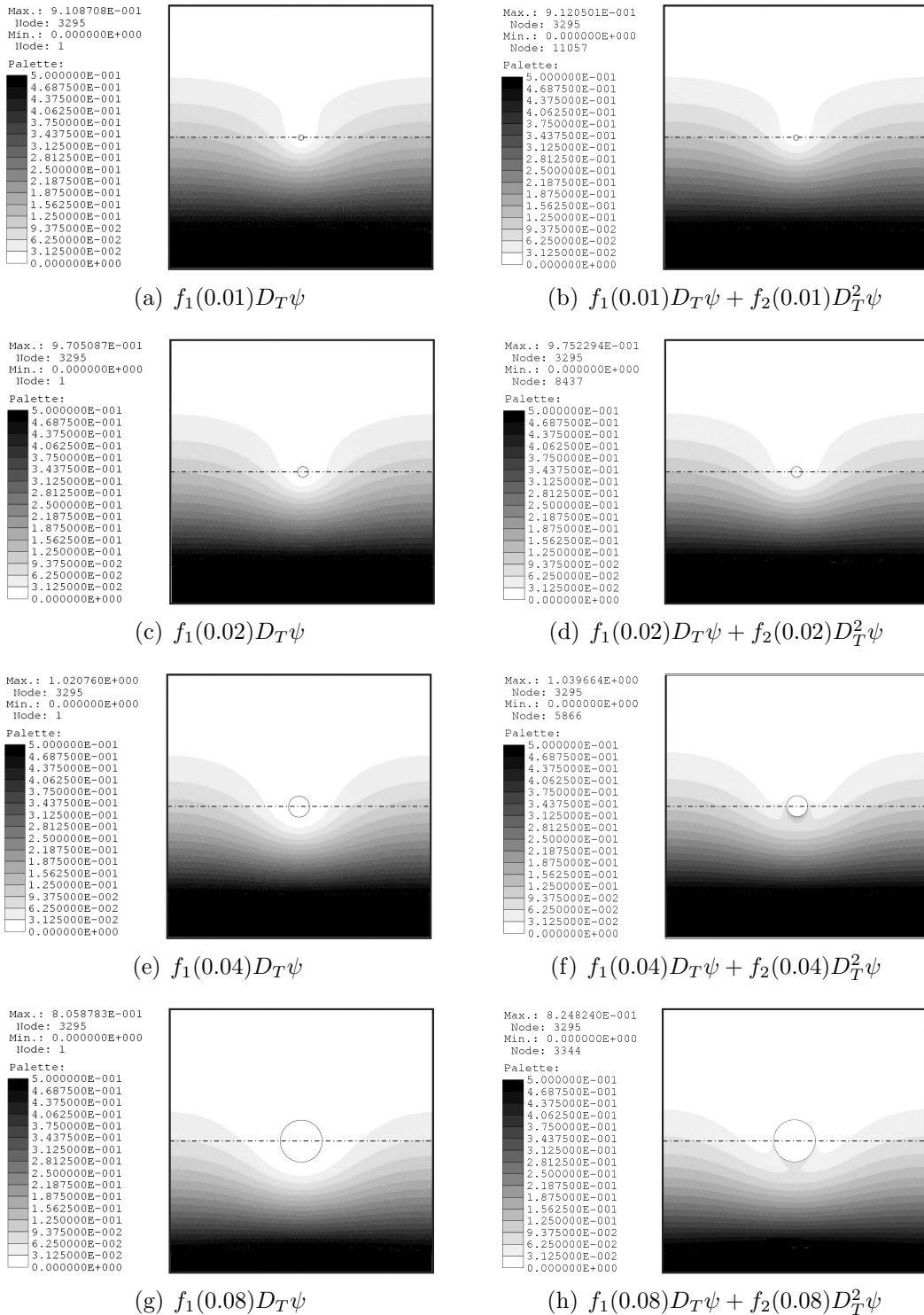


Figura 3.18: expansão assintótica topológica no domínio perturbado Ω_ϵ .

Finalmente, é importante mencionar que, formalmente, as derivadas topológicas calculadas neste trabalho são válidas somente para pontos interiores do domínio. Assim, de acordo com a observação 3.7, foi calculada a derivada topológica da primeira ordem definida para

pontos interiores ($\sqrt{\hat{\mathbf{x}}} \in \Omega$) e pontos da fronteira ($\sqrt{\hat{\mathbf{x}}} \in \partial\mathcal{H}_\varepsilon$) para $\varepsilon = 0.08$. A superposição dos termos associados a correção de primeira ordem é apresentada na fig. 3.19, cujo resultado está de acordo com o precedente, sugerindo que os canais de resfriamento devem ser expandidos (vide em detalhe para $\varepsilon = 0.04$ na fig. 3.20).

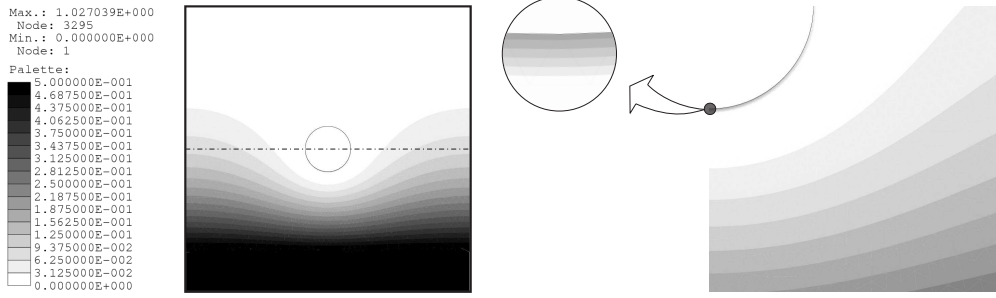


Figura 3.19: superposição dos termos $f_1(0.08)D_T\psi$ para $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$ e $\hat{\mathbf{x}} \in \partial B_\varepsilon$.

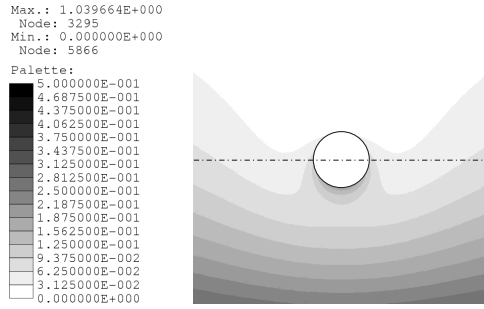


Figura 3.20: detalhe do termo $f_1(0.04)D_T\psi + f_2(0.04)D_T^2\psi$ na aproximação assintótica topológica no domínio perturbado Ω_ε .

3.5 Comentários adicionais

Neste trabalho, foi aplicado o *topological-shape sensitivity method* para o cálculo das derivadas topológicas de primeira e segunda ordem. Em particular, considerou-se a equação de Laplace associada a um domínio bidimensional e a energia potencial total como função custo, analisando-se as condições de contorno homogêneas de Neumann ou de Dirichlet na fronteira do furo ou ainda a condição de salto da derivada normal na fronteira da inclusão. Finalmente, foram apresentadas algumas experiências numéricas que evidenciaram a influência da derivada topológica da segunda ordem na expansão assintótica topológica. Destes resultados, observou-se que o termo de correção de segunda ordem desempenha um papel importante na análise,

permitindo uma melhor estimativa para o tamanho dos furos e também uma melhor direção de descida, do que a fornecida apenas pelo termo de correção dado pela derivada topológica de primeira ordem. Convém ressaltar a importância dos resultados obtidos, não obstante as aproximações adotadas.

As consequências das aproximações supracitadas podem ser evidenciadas através dos seguintes problemas de Laplace definidos sobre o domínio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$, bidimensional, onde $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < a, a \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{H}_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ com $\varepsilon < a$ e $k = 1$. De modo análogo aos exemplos apresentados na seção 3.4, a função custo adotada é a energia potencial total.

Exemplo 3.11 *Considere-se o domínio Ω submetido a um fluxo de calor $\bar{q} = -(\cos \theta + \cos 2\theta)$. A formulação do problema original é dada pela seguinte equação de Euler-Lagrange:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \cos \theta + \cos 2\theta & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.118)$$

e a função custo é dada por

$$\psi(\Omega) = \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dV + \int_{\partial\Omega} \bar{q} u dS. \quad (3.119)$$

O problema dado pela eq. 3.118, apresenta solução exata que, em coordenadas polares e a menos de uma constante aditiva arbitrária, é dada pela seguinte função:

$$u(r, \theta) = r \cos \theta + \frac{r^2}{2a} \cos 2\theta, \quad (3.120)$$

a qual aplicada na eq. 3.119, fornece

$$\psi(\Omega) = -\frac{3}{4} \pi a^2. \quad (3.121)$$

O problema no domínio perturbado $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$, onde é prescrita a condição de contorno de

Neumann homogênea sobre a fronteira do furo $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$, tem a seguinte formulação:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \cos\theta + \cos 2\theta & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.122)$$

e, neste caso, a função custo é dada por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 dV + \int_{\partial\Omega} \bar{q} u_\varepsilon dS. \quad (3.123)$$

De modo análogo ao problema definido sobre o domínio original, na configuração perturbada (eq. 3.122) também se tem a solução exata, a menos de uma constante aditiva arbitrária, dada pela função

$$u_\varepsilon(r, \theta) = \frac{a^2}{r} \left(\frac{r^2 + \varepsilon^2}{a^2 - \varepsilon^2} \right) \cos\theta + \frac{a^3}{2r^2} \left(\frac{r^4 + \varepsilon^4}{a^4 - \varepsilon^4} \right) \cos 2\theta, \quad (3.124)$$

que considerada na eq. 3.123, apresenta como resultado

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = -\pi \frac{a^2}{2} \left(\frac{a^2 + \varepsilon^2}{a^2 - \varepsilon^2} + \frac{1}{2} \frac{a^4 + \varepsilon^4}{a^4 - \varepsilon^4} \right). \quad (3.125)$$

Expandindo-se a eq.3.125 em potências de ε , obtém-se

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = -\frac{3}{4}\pi a^2 - \pi\varepsilon^2 - \pi\varepsilon^4 \frac{3}{2a^2} + o(\varepsilon^4). \quad (3.126)$$

Levando-se em conta a influência do termo associado a $\tilde{u}(\mathbf{x})$ na expansão assintótica topológica, tem-se

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &\approx \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\|^2 + \pi\varepsilon^4 \left(\frac{1}{2} \det \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) - \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &= -\frac{3}{4}\pi a^2 - \pi\varepsilon^2 - \pi\varepsilon^4 \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (3.127)$$

que corrobora com a expansão em potências de ε da função custo, onde $\tilde{u}(\mathbf{x})$ é a solução da

eq. 3.71, que neste caso particular é dada por

$$\tilde{u}(r, \theta) = -\frac{1}{a^2} r \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{a^2}. \quad (3.128)$$

Por outro lado, desconsiderando-se a influência do termo associado a $\tilde{u}(\mathbf{x})$, obtém-se

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_\varepsilon) &\approx \psi(\Omega) - \pi\varepsilon^2 \|\nabla u(\hat{\mathbf{x}})\|^2 + \frac{1}{2}\pi\varepsilon^4 \det \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= -\frac{3}{4}\pi a^2 - \pi\varepsilon^2 - \frac{1}{2a^2}\pi\varepsilon^4. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Em particular, para $a = 1$, tem-se que a aproximação topológica de primeira ordem é dada por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx -\frac{3}{4}\pi - \pi\varepsilon^2, \quad (3.130)$$

a de segunda ordem, desprezando-se o termo associado a $\tilde{u}(\mathbf{x})$, por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx -\frac{3}{4}\pi - \pi\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\pi\varepsilon^4, \quad (3.131)$$

e, finalmente, considerando-se o termo associado a $\tilde{u}(\mathbf{x})$, obtém-se

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx -\frac{3}{4}\pi - \pi\varepsilon^2 - \frac{3}{2}\pi\varepsilon^4. \quad (3.132)$$

Estes resultados são confrontados no gráfico da fig. 3.21, de onde se observa que a aproximação associada apenas aos gradientes de mais altas ordens de u (eq. 3.131) fornece uma estimativa melhor para a função custo do que a aproximação assintótica topológica de primeira ordem (eq. 3.130), quando se considera furos de tamanho finito, resultado que corrobora com os obtidos pelos experimentos numéricos (vide seção 3.4). Observa-se ainda, que a aproximação levando-se em conta o termo associado a \tilde{u} (eq.3.132), embora com um custo computacional que torna proibitivo sua obtenção em casos mais gerais ($\forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega$), desempenha um importante papel como fator de correção à medida que se considera maiores valores de ε . Assim sendo, é natural utilizar a derivada topológica de primeira ordem na escolha dos

pontos do domínio onde deve-se introduzir as perturbações ε , em seguida, efetuar o cálculo da derivada topológica de segunda ordem apenas para esses pontos em particular.

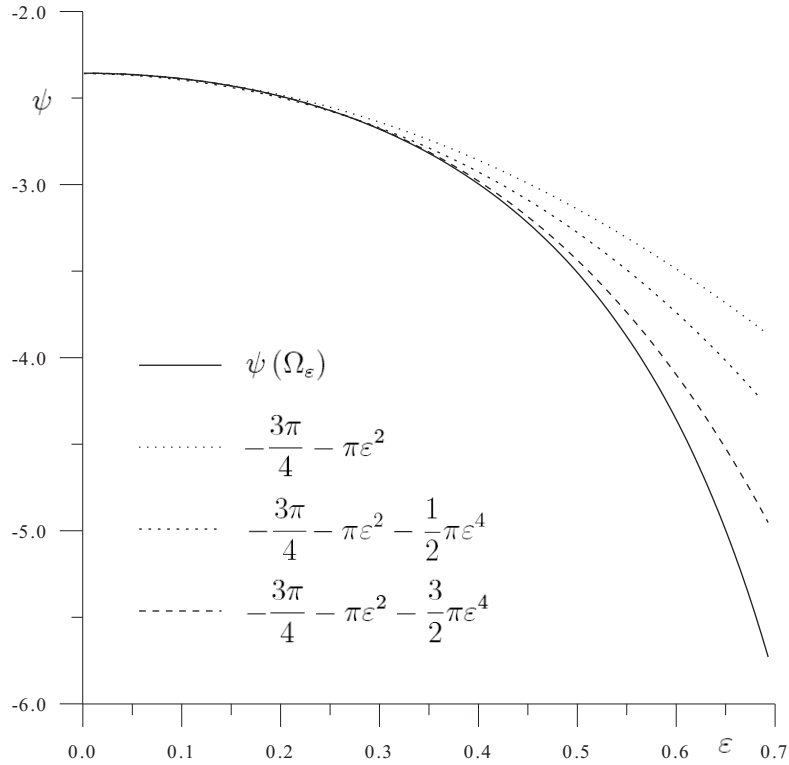


Figura 3.21: aproximações assintóticas topológicas no domínio perturbado Ω_ε .

Exemplo 3.12 Neste caso, seja o domínio Ω submetido à uma temperatura prescrita $u = A + \cos \theta$ sobre sua fronteira $\partial\Omega$. A formulação do problema original é dada em sua forma forte pelo seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = A + \cos \theta & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.133)$$

que apresenta solução exata em coordenadas polares, dada por

$$u(r, \theta) = A + \frac{r}{a} \cos \theta. \quad (3.134)$$

A função custo, neste caso, é definida

$$\psi(\Omega) = \mathcal{J}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dV, \quad (3.135)$$

e pode ser diretamente calculada através da eq. 3.134, o que resulta

$$\psi(\Omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.136)$$

A formulação no domínio perturbado $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$, onde é prescrita a condição de contorno de Dirichlet homogênea sobre a fronteira do furo $\partial\mathcal{H}_\varepsilon$, é dada pelo problema

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = A + \cos \theta & \text{sobre } \partial\Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \end{cases}, \quad (3.137)$$

que apresenta a seguinte solução exata

$$u_\varepsilon(r, \theta) = A \frac{\log(r/\varepsilon)}{\log(a/\varepsilon)} + \frac{a r^2 - \varepsilon^2}{r a^2 - \varepsilon^2} \cos \theta. \quad (3.138)$$

A função custo, na configuração perturbada, é dada por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 dV, \quad (3.139)$$

que considerada juntamente com a eq. 3.138, fornece o seguinte resultado:

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \frac{\pi}{\log(a/\varepsilon)} A^2 + \frac{\pi a^2 + \varepsilon^2}{2 a^2 - \varepsilon^2}, \quad (3.140)$$

donde, segue-se que

$$D_T \psi = A^2, \quad \text{com } f_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{\log(a/\varepsilon)}, \quad (3.141)$$

$$D_T^2 \psi = \frac{1}{a^2}, \quad \text{com } f_2(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2. \quad (3.142)$$

Fazendo-se $a = 1$ e $A = 1$, obtém-se as aproximações assintóticas topológicas de primeira e

de segunda ordem, dadas respectivamente pelas seguintes equações:

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\log \varepsilon}, \quad (3.143)$$

$$\psi(\Omega_\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\log \varepsilon} + \pi\varepsilon^2. \quad (3.144)$$

Finalmente, os resultados são apresentados no gráfico da fig. 3.22. Neste caso particular, onde foi adotado $a = 1$, a derivada topológica de segunda ordem constituiu um fator importante de correção. No entanto, em casos mais gerais, pode ser observado que a escolha de um valor arbitrário para R (eq. 3.84) pode influenciar no peso da derivada topológica de primeira ordem na expansão assintótica topológica, sugerindo que este parâmetro deva ser ajustado a posteriori e para cada ponto do domínio.

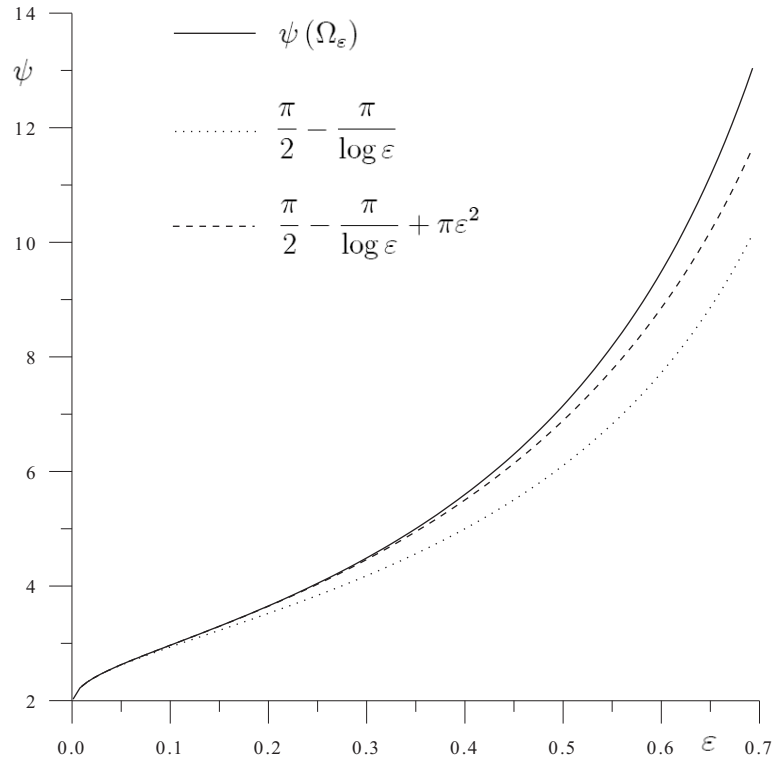


Figura 3.22: aproximações assintóticas topológicas no domínio perturbado Ω_ε .

Capítulo 4

Conclusões

O presente estudo teve como objetivos principais a introdução do conceito de derivadas topológicas de ordens superiores e o desenvolvimento de uma metodologia sistemática para o seu cálculo baseada no *topological-shape sensitivity method*. A motivação deu-se, principalmente, pela necessidade da aplicação correta dos conceitos da análise de sensibilidade topológica em domínios com perturbações não suaves de tamanho finito; que é uma questão fundamental em aplicações práticas, cuja diversidade e importância têm sido evidenciadas nas diversas publicações apresentadas nesta área de pesquisa. Apresentam-se, neste capítulo, as contribuições do presente trabalho para a modelagem computacional e apontam-se alguns possíveis desenvolvimentos futuros.

4.1 Contribuições deste trabalho

Neste trabalho foi definido o conceito de derivada topológica de ordem superior e apresentada uma metodologia para o seu cálculo, através de uma extensão natural do *topological-shape sensitivity method* [47]. Assim sendo, foi demonstrado o teorema 2.6 que possibilitou a aplicação das técnicas clássicas da análise de sensibilidade à mudança de forma na obtenção de derivadas topológicas de ordens superiores. Obteve-se, ainda, o correspondente de um dos principais resultados da metodologia mencionada: a análise de sensibilidade topológica de ordem superior resulta em uma integral definida sobre a fronteira da perturbação, o que além

de possibilitar o cálculo numérico das derivadas topológicas em problemas mais complexos, permite também o cálculo de termos com influências não locais na expansão.

No capítulo 2 a metodologia proposta foi verificada no cálculo das derivadas topológicas de primeira, segunda e terceira ordem em alguns problemas com solução exata. Inicialmente, estudou-se a sensibilidade de um problema de reação-difusão em um domínio unidimensional perturbado por uma inclusão que provocara um salto no coeficiente de reação. Posteriormente, a análise foi feita para o problema de uma membrana bidimensional perturbada com uma mudança de forma que causara singularidades na fronteira. Os resultados obtidos demonstraram que, de fato, as derivadas topológicas de ordens superiores desempenham um papel que ganha cada vez mais importância na análise, à medida que se considera maiores tamanhos para a perturbação.

No capítulo 3 considerou-se a equação do Laplace associada a um domínio bidimensional e a energia potencial total como função custo. Em seguida, estudou-se as sensibilidades topológicas de primeira e segunda ordem considerando o domínio perturbado por um furo circular com condições de contorno homogêneas de Neumann ou de Dirichlet, ou, ainda, por uma inclusão circular de outro material com propriedades físicas distintas do meio, de onde se obtém, como condição natural, o salto da derivada normal sobre a fronteira da perturbação. Como foi observado, o problema de furo com condição de Neumann homogênea é o caso limite em que o coeficiente de condutividade térmica da inclusão tende a zero. Além do mais, nestes dois últimos casos a derivada topológica de segunda ordem é dada por dois termos: um deles dependente apenas do gradiente de segunda ordem da solução da equação de estado associada ao domínio não perturbado e que, a exemplo da derivada topológica de primeira ordem, pode ser determinado *a priori* para quaisquer pontos do domínio; o outro, dependente implicitamente do ponto onde a perturbação é criada e da influência da fronteira do domínio, o que torna proibitivo seu cálculo para todos os pontos do domínio, devido ao alto custo computacional, mas que pode ser computado *a posteriori* em determinado ponto (indicado pela análise de sensibilidade de primeira ordem, por exemplo), através da solução de um simples problema auxiliar. Para a perturbação dada por furo com

condição de Dirichlet homogênea, perturbação muito mais severa do que as consideradas anteriormente, a derivada topológica de primeira ordem já é dependente de um parâmetro R que varia de acordo com o ponto onde a perturbação é introduzida que, na literatura, tem sido contornado considerando-se $1/\log(R/\varepsilon) \approx -1/\log \varepsilon$; no entanto, esta aproximação introduz uma desproporcionalidade entre os termos da expansão assintótica topológica. Finalmente, foram apresentadas algumas experiências numéricas que evidenciaram a influência (do termo explícito, nos casos de Neuman e inclusão) da derivada topológica da segunda ordem na expansão assintótica topológica. Convém ressaltar a importância dos resultados obtidos, não obstante as aproximações adotadas. De fato, verifica-se que o termo de correção de segunda ordem desempenha um papel importante na análise, permitindo uma melhor estimativa para o tamanho dos furos e também uma melhor direção de descida, do que as fornecidas apenas pelo termo de correção dado pela derivada topológica de primeira ordem.

4.2 Problemas em aberto

Visando-se, sobretudo, explorar em aplicações práticas as informações associadas aos termos de ordens superiores da expansão assintótica topológica conjuntamente com o de primeira ordem. Em particular, elencam-se como alguns possíveis novos desenvolvimentos:

- obter a análise topológica de segunda ordem nos problemas abordados para perturbações de forma arbitrária e em dimensões superiores;
- comparar as condições de otimalidade dadas apenas pela derivada topológica de primeira ordem com as obtidas pelas derivadas topológicas de ordens superiores;
- calcular a expansão assintótica topológica de segunda ordem para problemas parabólicos e hiperbólicos e em problemas mais complexos considerando funções custo e restrições mais gerais;
- aplicar a metodologia em tela para problemas inversos de identificação através de medidas obtidas na fronteira, observando-se que a derivada topológica de segunda ordem é mais sensível e este tipo de informação;

- Estudar a influência do termo de segunda ordem em problemas de elasticidade linear em estado plano de tensões e deformações, elasticidade linear de placas de Kirchhoff e ao problema p -Poisson, onde devido à aplicação do *topological-shape sensitivity method* já se tem determinado o tensor de Eshelby generalizado;
- analisar a influência dos termos de mais alta ordem da expansão assintótica topológica nos parâmetros de determinação das curvas iniciais para a técnica de *level sets*, com a finalidade de se obter algoritmos mais eficientes do que os apresentados no trabalho de Amstutz & Andrä 2006 [4], por exemplo;
- observar a sensibilidade topológica de ordem superior no contexto de restauração e segmentação de imagens.

Apêndice A

Cálculo da Divergência do Tensor de Eshelby

As presentes demonstrações podem ser obtidas diretamente através do cálculo de $div \Sigma_\varepsilon$, desde que se tenha a suficiente regularidade de u_ε . Assim sendo, com a finalidade de relaxar estas exigências de regularidade, neste apêndice a demonstração será dada variacionalmente através da aplicação das duas formas do teorema do transporte de Reynolds e utilizando-se a relação entre as derivadas material e espacial,

$$u'_\varepsilon = \dot{u}_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{v} , \quad (\text{A.1})$$

que podem ser encontrados em Gurtin 1981 [31], por exemplo.

Proposição A.1 *O tensor de Eshelby dado pela eq. 3.62 tem divergência nula.*

Prova. Aplicando-se a primeira forma do teorema do transporte de Reynolds, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \operatorname{div} \mathbf{v} dV_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{v}^T \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dV_\varepsilon \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{I} \cdot \nabla \mathbf{v} dV_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla \mathbf{v} dV_\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{I} - (\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) \right) \cdot \nabla \mathbf{v} dV_\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{v} dV_\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} (\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^T \mathbf{v}) dV_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \cdot \mathbf{v} dV_\varepsilon ,
\end{aligned}$$

o teorema da divergência implica em

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \cdot \mathbf{v} dV_\varepsilon \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \cdot \mathbf{v} dV_\varepsilon .
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Pela segunda forma do teorema do transporte de Reynolds:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u'_\varepsilon dV_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_\varepsilon + \int_{\Gamma_N} q \dot{u}_\varepsilon dS_\varepsilon .$$

Utilizando (A.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon dV_\varepsilon + \int_{\Gamma_N} q \dot{u}_\varepsilon dS_\varepsilon \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{v}) dV_\varepsilon .
\end{aligned}$$

Segue-se de (3.30) que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \dot{u}_\varepsilon dV_\varepsilon + \int_{\Gamma_N} q \dot{u}_\varepsilon dS_\varepsilon = 0 ,$$

assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{v}) dV_\varepsilon \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} ((\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) \mathbf{v}) dV_\varepsilon \\
&\quad + \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \cdot \mathbf{v}) \Delta u_\varepsilon dV_\varepsilon,
\end{aligned}$$

como $\Delta u_\varepsilon = 0$, aplicando-se o teorema da divergência

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS_\varepsilon - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} ((\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dV_\varepsilon \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 \mathbf{I} - (\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon) \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dV_\varepsilon \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Sigma_\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

De (A.2) e (A.3), segue-se imediatamente que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \Sigma_\varepsilon \cdot \mathbf{v} dV_\varepsilon = 0 \quad \forall \mathbf{v}, \tag{A.4}$$

assim, tem-se que $\operatorname{div} \Sigma_\varepsilon = 0$. ■

Proposição A.2 *O tensor de Eshelby dado por eq. 3.92 tem divergência nula sobre a matriz $\Omega \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$ e sobre a inclusão \mathcal{I}_ε .*

Prova. Segue-se como corolário da proposição acima. ■

Apêndice B

Análise Assintótica

No presente apêndice são apresentados os desenvolvimentos assintóticos das soluções u_ε dos problemas associados aos domínios topologicamente perturbados, considerando-se cada tipo de perturbação estudada neste capítulo: furos ou inclusões, ambos em forma de disco e onde adota-se $k = 1$. Convém lembrar que uma das mais importantes consequências do *topological shape-sensitivity method* é que para o cálculo das derivadas topológicas basta obter a estimativa da solução u_ε na fronteira da perturbação. Neste capítulo, este fato fica evidenciado pelas expressões dadas pelas eq. 3.68, 3.69, 3.96 e 3.97. As análises são consideradas observando-se as formas fortes dos problemas em cada configuração. Em particular, o problema associado ao domínio original Ω (eq. 3.19) tem a seguinte formulação: encontre u , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = \varphi \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \\ -\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \end{array} \right. \quad . \quad (\text{B.1})$$

B.1 Condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo

Neste caso, a equação de Euler-Lagrange associada ao problema 3.30 é dada por: encontre u_ε , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = \varphi \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \\ -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\mathcal{H}_\varepsilon \end{array} \right. , \quad (\text{B.2})$$

e a diferença entre $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ e $u(\mathbf{x})$ pode ser aproximada pela soma entre a solução de um problema exterior, cuja solução apresenta decaimento a zero no infinito e pela solução de um problema remanescente que corrige as discrepâncias introduzidas. Propõe-se, portanto, a seguinte expansão assintótica:

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}/\varepsilon) + \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) . \quad (\text{B.3})$$

Expandindo $u(\mathbf{x})$ em série de Taylor em torno do ponto $\hat{\mathbf{x}}$ tem-se

$$u(\mathbf{x}) = u(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + D^3 u(\xi) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^3 ,$$

onde $\xi \in [\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}]$ é um ponto intermediário entre \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$. Assim, fazendo uma mudança de variável $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ e lembrando que $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon \mathbf{n}$, a função $w(\mathbf{y})$ é solução do problema exterior dado por: encontre w , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{H}_1} \\ w \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty , \\ \frac{\partial w}{\partial n} = -\varepsilon \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} + \varepsilon^2 \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre} \quad \partial\mathcal{H}_1 \end{array} \right. , \quad (\text{B.4})$$

que pode ser calculada explicitamente utilizando o método da separação de variáveis, o que resulta em:

$$w(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) + \frac{\varepsilon^4}{2\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^4} \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) . \quad (\text{B.5})$$

Além do mais, o termo remanescente $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ é utilizado para corrigir a discrepância introduzida pelo problema exterior $w(\mathbf{x}/\varepsilon)$ e pelo termo de terceira ordem da expansão em série de Taylor da solução $u(\mathbf{x})$. Sendo assim $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ é solução do seguinte problema: encontre \tilde{u}_ε , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon^3 D^3 u(\xi)(\mathbf{n})^3 & \text{sobre } \partial \mathcal{H}_\varepsilon \end{array} \right. . \quad (\text{B.6})$$

Utilizando o mesmo procedimento, pode-se então propor a seguinte expansão assintótica

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) , \quad (\text{B.7})$$

onde $\tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ é solução de um novo problema exterior, ou seja: encontre \tilde{w} , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{w} = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{H}_1} \\ \tilde{w} \rightarrow 0 & \text{quando } \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty , \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} = -\varepsilon^3 \nabla \tilde{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \partial \mathcal{H}_1 \end{array} \right. , \quad (\text{B.8})$$

que também tem solução explícita, ou seja

$$\tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{\varepsilon^4}{\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla \tilde{u}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) . \quad (\text{B.9})$$

Introduzindo a notação,

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) \quad \text{e} \quad h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^4} \nabla \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}) , \quad (\text{B.10})$$

então

$$w(\mathbf{x}/\varepsilon) = \varepsilon^2 g(\mathbf{x}) + \varepsilon^4 h(\mathbf{x}) . \quad (\text{B.11})$$

Assim, a função $\tilde{u}(\mathbf{x})$ satisfaz o seguinte problema de valor no contorno: encontre \tilde{u} , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \tilde{u} = -g & \text{sobre } \Gamma_D \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

e o termo remanescente $v_\varepsilon(\mathbf{x})$ satisfaz: encontre v_ε , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ v_\varepsilon = -\tilde{w} - \varepsilon^4 h & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} - \varepsilon^4 \frac{\partial h}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon^3 (D^3 u(\xi)(\mathbf{n})^3 - D^2 \tilde{u}(\zeta)(\mathbf{n})^2) & \text{sobre } \partial \mathcal{H}_\varepsilon \end{array} \right. , \quad (\text{B.13})$$

onde $\zeta \in [\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{x}}]$ é um ponto intermediário entre \mathbf{x} e $\widehat{\mathbf{x}}$. Admitindo que $u(\mathbf{x})$ é suficientemente regular e levando em conta a linearidade do operador Laplaceano, obtém-se (Kozlov et al. 1999 [35])

$$|v_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^3 , \quad (\text{B.14})$$

com C independente de ε . Finalmente, tem-se a seguinte expansão assintótica

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) . \quad (\text{B.15})$$

B.2 Condição de contorno de Dirichlet homogênea na fronteira do furo

A técnica adotada na seção anterior não pode ser aplicada neste caso, pois a solução do problema exterior com condição de contorno de Dirichlet não satisfaz, necessariamente, a condição de decaimento a zero no infinito. Para contornar essa dificuldade, a equação de

Euler-Lagrange associada ao problema na configuração perturbada, neste caso, é dada por:

encontre u_ε , tal que

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = \varphi & \text{sobre } \Gamma_D \\ -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \bar{q} & \text{sobre } \Gamma_N \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_\varepsilon \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

que terá sua solução restringida à uma bola B_R de raio $R \gg \varepsilon$ tal que $\mathcal{H}_\varepsilon \subset B_R \subset \Omega$.

Propõe-se, assim, a seguinte expansão sobre o domínio $B_R \setminus \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$:

$$u_\varepsilon(\mathbf{x})|_{B_R} = u(\mathbf{x}) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}/\varepsilon) + \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (\text{B.17})$$

onde $v_\varepsilon(\mathbf{x})$ é dada pela função

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\widehat{\mathbf{x}}) \left[1 - \frac{\log(\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|/\varepsilon)}{\log(R/\varepsilon)} \right], \quad (\text{B.18})$$

cuja extensão sobre $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{B_R}$, satisfazendo condição de contorno de Dirichlet homogênea sobre $\partial\Omega$, é nula como consequência do princípio do máximo. A função $w(\mathbf{x}/\varepsilon)$ é solução do problema exterior que corrige a aproximação de segunda ordem da condição de contorno sobre a fronteira do furo, dada por uma condição de Neumann e apresentando, portanto, decaimento a zero no infinito. Assim, de modo inteiramente análogo à seção anterior, pode-se enunciar o seguinte problema exterior: encontre w , tal que

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{H}_1} \\ w \rightarrow 0 & \text{quando } \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial w}{\partial n} = -\varepsilon \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \partial\mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (\text{B.19})$$

e conseqüentemente,

$$w(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}). \quad (\text{B.20})$$

Portanto, pode-se escrever

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u(\widehat{\mathbf{x}}) \left[\frac{\log(\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|/\varepsilon)}{\log(R/\varepsilon)} - 1 \right] + \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}) + \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) . \quad (\text{B.21})$$

Para que a função $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ corrija a discrepância provocada pelos termos prévios da expansão tem-se: encontre \tilde{u}_ε , tal que

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \\ \tilde{u}_\varepsilon = -\varepsilon^2 D^2 u(\xi)(\mathbf{n})^2 & \text{sobre } \partial \mathcal{H}_\varepsilon \end{cases} . \quad (\text{B.22})$$

Além do mais, admitindo que $u(\mathbf{x})$ é suficiente regular e levando em conta a linearidade do operador Laplaceano, obtém-se (Kozlov et al. 1999 [35])

$$|\tilde{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2 , \quad (\text{B.23})$$

com C independente de ε .

B.3 Condição de salto da derivada normal na fronteira da inclusão

Para o caso de uma perturbação dada por uma inclusão que causa uma descontinuidade no coeficiente de condutividade térmica (eq. 3.29), a formulação variacional fornece como condição natural um salto da derivada normal na fronteira da inclusão, como se observa na

formulação forte para a solução do problema perturbado, ou seja: encontre u_ε , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = \varphi \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \\ -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \\ \frac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial n} - \delta \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial \mathcal{I}_\varepsilon \end{array} \right. , \quad (\text{B.24})$$

onde $u_\varepsilon^e(\mathbf{x})$ e $u_\varepsilon^i(\mathbf{x})$ são, respectivamente, as restrições da solução na matriz e na inclusão. Levando-se em conta este resultado e que de modo análogo ao caso estudado na seção B.1, a solução $w(\mathbf{x}/\varepsilon)$ do problema exterior associado a $u_\varepsilon^e(\mathbf{x})$ apresenta decaimento a zero no infinito, propõe-se a seguinte expansão assintótica

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}/\varepsilon) + \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) , \quad (\text{B.25})$$

onde $w(\mathbf{y})$, com $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, é solução do problema dado por: encontre w , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w^e = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{I}_1} \\ \Delta w^i = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{I}_1 \\ w \quad \text{contínua} \quad \text{sobre} \quad \partial \mathcal{I}_1 \\ w \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial w^e}{\partial n} - \delta \frac{\partial w^i}{\partial n} = (\delta - 1) (\varepsilon \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} + \varepsilon^2 \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{sobre} \quad \partial \mathcal{I}_1 \end{array} \right. , \quad (\text{B.26})$$

que, de fato, tem sua existência e unicidade demonstrada em Folland 1976 [23]. Em particular, obtém-se:

$$w^e(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \left(\frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \frac{\varepsilon^4}{2 \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^4} \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right) , \quad (\text{B.27})$$

$$w^i(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \left(\nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right) . \quad (\text{B.28})$$

Finalmente, o termo remanescente $\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ deve ser solução do seguinte problema: encontre \tilde{u}_ε , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \tilde{u}_\varepsilon = -w & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} - \delta \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon^i}{\partial n} = \varepsilon^3(\delta - 1)D^3u(\xi)(\mathbf{n})^3 & \text{sobre } \partial\mathcal{I}_\varepsilon \end{array} \right. , \quad (\text{B.29})$$

onde ζ é um ponto intermediário entre \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$. Utilizando o mesmo procedimento, pode-se então propor a seguinte expansão assintótica

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) , \quad (\text{B.30})$$

onde $\tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ é solução do seguinte problema exterior: encontre \tilde{w} , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{w}^e = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{I}_1} \\ \Delta \tilde{w}^i = 0 & \text{em } \mathcal{I}_1 \\ \tilde{w} \text{ contínua} & \text{sobre } \partial\mathcal{I}_1 \\ \tilde{w} \rightarrow 0 & \text{quando } \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \tilde{w}^e}{\partial n} - \delta \frac{\partial \tilde{w}^i}{\partial n} = \varepsilon^3(\delta - 1)\nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \partial\mathcal{I}_1 \end{array} \right. , \quad (\text{B.31})$$

que também tem solução explícita, ou seja

$$\tilde{w}^e(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \frac{\varepsilon^4}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) , \quad (\text{B.32})$$

$$\tilde{w}^i(\mathbf{x}/\varepsilon) = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \nabla \tilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) . \quad (\text{B.33})$$

Introduzindo a notação,

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2} \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \text{ e } h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) \frac{1}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^4} \nabla \nabla u(\hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) , \quad (\text{B.34})$$

então

$$w^e(\mathbf{x}/\varepsilon) = \varepsilon^2 g(\mathbf{x}) + \varepsilon^4 h(\mathbf{x}) . \quad (\text{B.35})$$

Assim, a função $\tilde{u}(\mathbf{x})$ satisfaz o seguinte problema de valor no contorno: encontre \tilde{u} , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \tilde{u} = -g & \text{sobre } \Gamma_D \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (\text{B.36})$$

e o termo remanescente $v_\varepsilon(\mathbf{x})$ satisfaz: encontre v_ε , tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v_\varepsilon = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ v_\varepsilon = -\tilde{w} - \varepsilon^4 h & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} - \varepsilon^4 \frac{\partial h}{\partial n} & \text{sobre } \Gamma_N \\ \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon^e}{\partial n} - \delta \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon^i}{\partial n} = \varepsilon^3 (\delta - 1) (D^3 u(\xi)(\mathbf{n})^3 - D^2 \tilde{u}(\zeta)(\mathbf{n})^2) & \text{sobre } \partial \mathcal{I}_\varepsilon \end{array} \right. , \quad (\text{B.37})$$

onde $\zeta \in [\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}]$ é um ponto intermediário entre \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$. Procedendo de modo inteiramente análogo às seções anteriores, observa-se que (Kozlov et al. 1999 [35])

$$|v_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^3 , \quad (\text{B.38})$$

com C independente de ε . Finalmente, tem-se a seguinte expansão assintótica

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + \tilde{w}(\mathbf{x}/\varepsilon) + v_\varepsilon(\mathbf{x}) . \quad (\text{B.39})$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Ammari & H. Kang, *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*. Lectures Notes in Mathematics 1846, Springer 2000.
- [2] S. Amstutz. *Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 2003.
- [3] S. Amstutz, I. Horchani & M. Masmoudi. Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, 34(1):81-101, 2005.
- [4] S. Amstutz & H. Andrä. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*. 216(2):573–588, 2006.
- [5] S. Amstutz. The topological asymptotic for the Navier-Stokes equations. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 11(3):401–425, 2005.
- [6] S. Amstutz. Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE systems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 85(4):540–557, 2006.
- [7] D. Auroux, M. Masmoudi & L. Belaid. Image restoration and classification by topological asymptotic expansion. *Variational Formulations in Mechanics: Theory and Applications* - CIMNE, Barcelona, Spain 2006.
- [8] L.J. Belaid, M. Jaoua, M. Masmoudi & L. Siala. Application of the topological gradient to image restoration and edge detection. A ser publicado no *Engineering Analysis with Boundary Element Journal*, 2007.

- [9] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structure Optimization*. 1:193–202, 1989.
- [10] M. P. Bendsøe & N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using an homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 71:197–224, 1988.
- [11] M. Bonnet. Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* 195:5239–5254, 2006.
- [12] Brézis, H. *Analyse Fonctionnelle*, Masson Paris, 1983.
- [13] M. Burger, B. Hackl & W. Ring. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, 1(194):344–362, 2004.
- [14] D.J. Cedio-Fengya, S. Moskow & M.S. Vogelius. Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction. *Inverse Problems* 14:553-595, 1998.
- [15] J. Céa, S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi, The shape and Topological Optimizations Connection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4):713–726, 2000.
- [16] H.A. Eschenauer, V.V. Koblelev & A. Schumacher. Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structures, *Structural Optimization*, 8:42-51, 1994.
- [17] H.A. Eschenauer & N. Olhoff. Topology Optimization of Continuum Structures: A Review, *Applied Mechanics Reviews*. 54:331-390, 2001.
- [18] J.D. Eshelby. The Elastic Energy-Momentum Tensor. *Journal of Elasticity*, 5:321-335, 1975.
- [19] E.A. Fancello. *Análise de Sensibilidade, Geração Adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura*, Tese de doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1993.

- [20] G.R. Feijóo. A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems*, 20(6):1819-1840, 2004.
- [21] R.A. Feijóo, A.A. Novotny, E. Taroco & C. Padra. The Topological-Shape Sensitivity Method and its Application in 2D Elasticity. *Journal of Computational Methods in Science And Engineering*, 2005.
- [22] R.A. Feijóo, A.A. Novotny, E. Taroco & C. Padra. The topological derivative for the Poisson's problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13-12:1-20, 2003.
- [23] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1976.
- [24] S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi. The Topological Asymptotic for PDE Systems: The Elasticity Case, *SIAM Journal on Control and Optimization*. 39:1756-1778, 2001.
- [25] S.M. Giusti, A.A. Novotny, R.A. Feijóo, E. Taroco & C. Padra. Configurational Sensitivity Analysis for Two-dimensional Linear Elasticity Problem. A ser publicado no *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007.
- [26] B.B. Guzina & M. Bonnet. Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics. *Inverse Problems*. 22:1761-1785, 2006.
- [27] B.B. Guzina & I. Chikichev. From imaging to material characterization: a generalized concept of topological sensitivity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55:245-279 2007.
- [28] T.F. Guinzani. *Análise de Sensibilidade Topológica Aplicada em Problema Inverso de Condutividade*. Dissertação de Mestrado, EMC/UFSC, Florianópolis - SC, 2006.
- [29] P. Guillaume & K. Sid Idris. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*., 41(4):1042-1072, 2002.

- [30] P. Guillaume & K. Sid Idris. *Topological sensitivity and shape optimization for the stokes equations*. SIAM J. Control Optim., 43(1):1–31, 2004.
- [31] M.E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Mathematics in Science and Engineering vol. 158. Academic Press, 1981.
- [32] M. Hassine, S. Jan, & M. Masmoudi. From Differential Calculus to 0-1 Optimization. *ECCOMAS*, 2004.
- [33] E.J. Haug, K.K. Choi & V.Komkov. *Desing Sensitivity Analysis of Structural Systems*. *Academic. Press*, 1986.
- [34] R. Kohn & M. Vogelius. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Comm. Pure Appl. Math.* 40(6):745–777, 1987.
- [35] V.A. Kozlov, V.G. Maz’ya & A.B. Movchan. *Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures*. Clarendon Press. Oxford. 1999.
- [36] A. Labanowski. *Análise Comparativa de Métodos de Otimização Topológica em Elasticidade 2D e 3D*. Dissertação de Mestrado, EMC/UFSC, Florianópolis - SC, 2004.
- [37] C. Lanczos, *Variational Principles of Mechanics*, Univ. of Toronto, 1949.
- [38] I. Larrabide. *Processamento de imagens via derivada topológica e suas aplicações na modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano*. Tese de Doutorado, LNCC–MCT, Petrópolis, Brasil, 2007.
- [39] T. Lewinski & J. Sokolowski. Energy change due to the appearance of cavities in elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*. 40:1765–1803, 2003.
- [40] S.A. Lomov. *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations*. *American Mathematical Society*. 1992.
- [41] W.G. Mazja, S.A. Nasarow & B.A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten I: Störungen isolierter Randsingularitäten*. Akademie-Verlag, Berlin 1991. (English translation, Kluwer, 2000).

- [42] M. Masmoudi, J. Pommier & B. Samet, The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications. *Inverse Problems*. 21:547-564, 2005.
- [43] F. Murat & J. Simon. *Sur le Contrôle par un Domaine Géométrique*. Thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 1976.
- [44] S. A. Nazarov & J. Sokolowski. Asymptotic analysis of shape functionals. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 82 (2):125-196, 2003.
- [45] S.A. Nazarov & J. Sokolowski. The topological derivative of the dirichlet integral due to formation of a thin ligament. *Siberian Math. J.*, 45(2):341–355, 2004.
- [46] S. Nemat-Nasser & M. Hori. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, Amsterdam. 1993.
- [47] A.A. Novotny. *Análise de Sensibilidade Topológica*. Tese de Doutorado, LNCC–MCT, Petrópolis, Brasil, 2003.
- [48] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco. Topological Sensitivity Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:803-829, 2003
- [49] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra, & E. Taroco. Topological sensitivity analysis applied to topology design of Kirchhoff’s plate bending problem. *Control and Cybernetics*, 34(1):339–361, 2005
- [50] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, E. Taroco & C. Padra. Topological Sensitivity Analysis for Three-dimensional Linear Elasticity Problem. Aceito para publicação no periódico *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007.
- [51] L. Prandtl, Zur Torsion von Prismatischen Stäben. *Zeitschrift für Physik* 4, 758–770, 1903.
- [52] J. Rocha de Faria, R.A. Feijóo, A.A. Novotny, E. Taroco & C. Padra. Second Order Topological Sensitivity Analysis. *International Journal of Solids and Structures* 44(14-15):4958-4977, 2007.

- [53] J. Rocha de Faria, R.A. Feijóo, A.A. Novotny, E. Taroco & C. Padra. First and Second Order Topological Sensitivity Analysis for Inclusions. Aceito para publicar na *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2007.
- [54] E. Taroco & R.A. Feijóo. Shape Sensitivity Analysis and the energy momentum tensor for the kinematic and static models of torsion *International Journal Of Solids and Structures*. 43:1908–1927, 2006.
- [55] B. Samet, S. Amstutz & M. Masmoudi. The topological asymptotic for the Helmholtz equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(5):1523–1544, 2003.
- [56] A. Schumacher. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien*. Tese de Doutorado, FOMMAS-Report Nr T09-01.96. Universität der Siegen, Siegen, Alemanha, 1996.
- [57] J. Sokolowski. Optimality conditions for simultaneous topology and shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 42(4):1198–1221, 2003.
- [58] J. Sokolowski & A. Zochowski. On the Topological Derivatives in Shape Optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 37(4):1251-1272, 1999.
- [59] J. Sokolowski & A. Zochowski, Topological Derivatives for Elliptic Problems, *Inverse Problems*, 15:123-134, 1999.
- [60] J. Sokolowski & J.P. Zolésio. *Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag, 1992
- [61] J. Sokolowski & A. Zochowski. Modelling of topological derivatives for contact problems. *Numerische Mathematik*, 102:14–179, 2005.
- [62] J. Sokolowski & A. Zochowski. Topological derivatives for obstacle problems. In *IFIP Proceedings*, 2005.
- [63] J.P. Zolésio, The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization. In *Optimization of Distributed Parameters Structures*. Iowa, 1981.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)