

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

## Formulações Convexas para Problemas de Controle

$H_2$ -Robusto Relativo a Perturbações

Não-Paramétricas

Emerson Souza Freire

Orientador: Gilberto Oliveira Correa

Dezembro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FORMULAÇÕES CONVEXAS PARA PROBLEMAS DE CONTROLE  
 $H_2$  – ROBUSTO RELATIVO A PERTURBAÇÕES  
NÃO-PARAMÉTRICAS

Emerson Souza Freire

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS DO LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MODELAGEM COMPUTACIONAL.

Aprovada por:

---

Prof. Gilberto Oliveira Correa, Ph. D.

---

Prof. Carlos Emanuel de Souza, D. Ing.

---

Prof. Paulo Cesar Vieira, D. Sc

---

Prof. Eugenius Kaskurewicz, D. Sc.

---

Prof. Amit Bhaya, Ph. D.

PETRÓPOLIS, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2006

FREIRE, EMERSON SOUZA

Formulações Convexas para Problemas de Controle  
 $H_2$  –Robusto Relativo a Perturbações Não-  
Paramétricas [RJ] 2006

XIII, 330 p.29,7 cm (MCT/LNCC, D.Sc.,  
Modelagem Computacional, 2006)

Tese – Laboratório Nacional de Computação  
Científica, LNCC

1. Controle Robusto
2. Perturbações Não-paramétricas
3. Formulações convexas
4. Otimização

I. MCT/LNCC II. Título (série)

À Milena, com amor.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Gilberto Oliveira Correa, não só pela orientação, como pela paciência e confiança que depositou em mim.

Ao Professor Paulo César Vieira pela ajuda e sugestões.

À minha amada esposa Alessandra, pelo companheirismo e dedicação.

Aos meus pais José Ubyracy e Maria Elizabeth pela constante presença em todas as batalhas de minha vida.

À minha irmã Érica, avó Neusa, tias Maria e Helena, pelo apoio e torcida.

À minha sogra Maria Madalena, por cuidar de minha filha nas minhas ausências.

À amiga Patrícia Drach por inúmeros conselhos na vida e no trabalho.

Às amigas Eliane Coutinho, Simone Delphin e Patrícia Sanz pela solidariedade e força.

Aos amigos que me acompanharam em diferentes momentos de dificuldade Jairo, Leandro, Marcelo, Telles, Áureo, Fabíola, Camila, Gustavo, Ruben.

Ao meu bom amigo Guzman, pelos anos de convivência.

Às secretárias e amigas Ana Neri, Ana Paula, Angela e Maria do Carmo pelo auxílio nas mais diversas questões burocráticas.

À FAPERJ pelo apoio financeiro.

Agradeço a DEUS pela vida e saúde dos meus.

Resumo da Tese apresentada ao MCT/LNCC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciência (D. Sc.)

FORMULAÇÕES CONVEXAS PARA PROBLEMAS DE CONTROLE  
 $H_2$  – ROBUSTO RELATIVO A PERTURBAÇÕES NÃO-PARAMÉTRICAS

Emerson Souza Freire

Dezembro / 2006

Orientador: Gilberto Oliveira Correa

Modelagem Computacional

Neste trabalho são estudados problemas de controle correspondentes à análise de desempenho e síntese de controladores para bom desempenho no sentido da norma  $H_2$  de sistemas sujeitos a perturbações não-paramétricas e limitadas na norma  $H_\infty$ . Inicialmente é considerado o problema de análise de desempenho de um dado controlador que assegure a estabilidade de um sistema sujeito a estas perturbações. O índice de desempenho utilizado é o chamado “pior-caso”  $H_2$ . Dada a dificuldade de resolução do correspondente problema não-convexo  $H_2/H_\infty$ , são formulados problemas de otimização convexa em espaços de funções cujas soluções são limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$ . A seguir, mostra-se que quando as variáveis de decisão são confinadas a subespaços de dimensão finita, estes problemas podem ser formulados em termos de problemas de otimização linear em espaços euclidianos com restrições definidas por desigualdades matriciais lineares (LMI's). Com base nos

limitantes obtidos, podem ser formulados procedimentos de síntese de controladores, que consistem essencialmente em procedimentos do tipo “D-K iteration” para problemas de minimização com respeito a multiplicadores e controladores robustamente estabilizantes. Utilizando a parametrização de Youla destes controladores, mostra-se que, para um dado conjunto de multiplicadores, quando o parâmetro de Youla é confinado a um subespaço de dimensão finita, as formulações para síntese também são equivalentes a problemas de otimização linear em espaços euclidianos, com restrições definidas por LMI’s. Em ambos os casos (análise e síntese) são sugeridos heurísticas para a modificação iterativa dos subespaços aos quais as variáveis de decisão serão confinadas. A mesma metodologia utilizada para os problemas de controle robusto aqui considerados, pode ser aplicada a problemas de filtragem robusta. Neste caso, devido ao fato de se tratar de sistemas em malha aberta, não há necessidade de procedimentos do tipo “D-K iteration”.

Abstract of the Thesis presented to MCT/LNCC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor os Science (D. Sc.)

CONVEX FORMULARIZATIONS FOR ROBUST  $H_2$  CONTROL PROBLEMS  
RELATIVE TO NON-PARAMETRIC PERTURBATIONS

Emerson Souza Freire

Dezembro / 2006

Adivisor : Gilberto Oliveira Correa

Computational Modeling

In this work, performance analysis and control synthesis for good  $H_2$  – performance are studied for systems subject to non-parametric perturbations which satisfy a prescribed  $H_\infty$  – norm bound. First, the performance analysis problem is considered for a given controller that ensures robust stability in presence of such perturbations.. The performance index used is the so-called “worst-case  $H_2$ ” index. Due to the the character of the correspondent non-convex  $H_2/H_\infty$  problem, convex optimization problems in function spaces are formulated whose solutions are upper bounds on the worst-case  $H_2$  index. Next, it is shown that when the decision variables are confined to finite dimensional subspaces, these problems can be formulated in terms of linear optimization problems in euclidean spaces with constraints defined by linear matrix inequalities (LMI’s). On the basis of the upper bounds obtained, procedures for controller synthesis can be formulated, which consist of a D-K iteration procedure for

minimization problems with respect to multipliers and robust stabilizing controllers. Using the Youla parametrization of these controllers, for a given set of multipliers it is shown that when the Youla parameter is confined to finite dimensional subspace, the synthesis formulations are equivalent to linear optimization problems in euclidean spaces with constraints defined by LMIs. In both the cases (analysis and synthesis) heuristics to iterative modify the confining subspaces are suggested. An approach analogous to the one robust problems was applied to robust filtering problems leading to similar results. It is worth noting that in this case, due to the fact that only open-loop systems are involved, the correspondent synthesis procedures do not require D-K iteration..

# Conteúdo

<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Análise de desempenho <math>H_2</math> - robusto</b>	<b>16</b>
2.1 Introdução .....	16
2.2 Modelagem de incertezas .....	18
2.3 Estabilidade robusta e índice de desempenho de sistemas perturbados.....	25
2.4 Limitante superior baseado em relaxação lagrangeana.....	34
2.5 Limitante superior baseado em “S-Procedure” .....	41
2.6 Limitante superior baseado em resultado de L.F.T.....	49
2.7 Obtenção de limitantes superiores por meio de sinais de perturbação.....	54
2.8 Conclusões .....	62
<b>3 Parametrizações lineares</b>	<b>63</b>
3.1 Introdução .....	63
3.2 Funcional dual e L.M.I.....	65
3.3 Classes lineares para multiplicadores.....	71
3.4 Direções descendentes para o funcional dual.....	80
3.5 Classes lineares para determinação de $J_k$ .....	91

3.6 Limitante superior baseado em resultado de L.F.T.....	97
3.7 Construção iterativa de classes lineares para o cálculo de $J_k$ .....	104
3.8 Parametrização linear para o limitante obtido por meio de L.F.T.....	110
3.9 Conclusões.....	116
3.A Demonstrações da seção 3.2.....	117
3.B Demonstrações da seção 3.3 .....	131
3.C Demonstrações da seção 3.4.....	141
3.D Demonstrações da seção 3.5 .....	145
3.E Direções descendentes para limitante baseado em “S-Procedure”.....	150
3.F Demonstrações da seção 3.8.....	156
<b>4 Síntese de controladores</b>	<b>162</b>
4.1 Introdução.....	162
4.2 Síntese baseada no limitante dado por relaxação lagrangeana:caso particular	164
4.3 Direções descendentes para o funcional dual relativas ao problema de síntese de controlador.....	181
4.4 Síntese baseada no limitante dado por relaxação lagrangeana:caso geral.....	186
4.5 Síntese baseada no limitante dado por “S-Procedure”.....	197
4.6 Conclusões.....	205
4.A Demonstração da Proposição 4.2.1.....	206
4.B Parametrização de Youla para controladores estabilizantes.....	212
4.C Demonstrações da seção 3.4.....	215
4.D Demonstração do Lema 4.5.1.....	226
<b>5 Filtragem robusta</b>	<b>230</b>
5.1 Introdução.....	230

5.2	Formulação do problema.....	232
5.3	Incertezas definidas por “bolas $H_2$ ponderadas”.....	234
5.4	Incertezas definidas por “bolas $H_\infty$ ponderadas”.....	250
5.5	Conclusões.....	265
<b>6</b>	<b>Experimentos numéricos</b>	<b>267</b>
6.1	Introdução.....	267
6.2	Comparação de limitantes para o modelo “benchmark” com diferentes classes dinâmicas de multiplicadores.....	270
6.3	Avaliação de diferentes controladores para o modelo “benckmark”.....	293
6.4	Comparação entre o 1º e 3º índice.....	296
6.5	Desempenho de controladores em presença de perturbações aditivas estáveis.....	303
6.6	Conclusões.....	305
6.A	Realizações de fatores coprimos normalizados.....	307
6.B	Realização de um sistema em malha fechada.....	310
6.C	Escolha de dinâmicas para os experimentos relativos ao limitante obtido por “S-Procedure”.....	311
6.D	Controladores correspondentes a combinação linear convexa de parâmetro de Youla.....	313
6.E	Uma classe de controladores estabilizantes obtida por meio de “parametrização $Q$ ”.....	320
	<b>Considerações finais</b> .....	<b>323</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>327</b>

# Lista de Figuras

2.1 – Perturbação aditiva.....	19
2.2 – Perturbação multiplicativa.....	20
2.3 – Perturbação nos fatores coprimos.....	20
2.4 – Perturbação em realimentação.....	21
2.5 – Sistemas perturbados em série.....	23
2.6 – Controle de sistemas perturbados.....	25
2.7 – Estabilidade externa nominal.....	26
2.8 – Estabilidade externa de sistema perturbado.....	27
2.9 – Análise de desempenho para controlador estabilizante.....	31
4.1 – Configuração de estabilidade nominal.....	213
5.1 – Modelo para problema de estimação.....	232
6.1 – Sistemas perturbados com controlador estabilizante.....	270
6.2 – Perturbação em realimentação.....	271
6.3 – Diagrama do sistema massa-mola.....	271
6.4 – Sistema em malha fechada.....	273
6.5 – Sistema perturbado estável.....	273
6.6 – Sistema em malha fechada com ruído de medida.....	291

# NOTAÇÃO

$R_p = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é real-racional e própria}\}.$

$RH_2 = \left\{ f \in R_p : f \text{ é analítica e limitada em } \operatorname{Re}(s) > 0 \text{ e } (2p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^2 d\omega < \infty \right\}.$

$RH_\infty = \{f \in R_p : f \text{ é analítica e limitada em } \operatorname{Re}(s) > 0\}.$

$RL_\infty = \{f \in R_p : f \text{ é limitada em } j\mathbb{R}\}.$

$RL_2 = \left\{ f \in R_p : f \text{ é limitada em } j\mathbb{R} \text{ e } (2p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^2 d\omega < \infty \right\}.$

$M(S)$  denota o conjunto de matrizes com elementos em  $S$ .

$\operatorname{Tr}A$  e  $\|A\|_F$  denotam respectivamente o traço e a norma de Frobenius de  $A \in \mathbb{C}^{m \times p}$ .

$\bar{\mathbf{I}}(M)$  e  $\underline{\mathbf{I}}(M)$  denotam respectivamente o máximo e mínimo autovalores de uma matriz hermitiana.

$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_n)$  denota uma matriz em bloco diagonal onde  $A_i$  é o  $i$ -ésimo bloco diagonal.

$\|G\|_\infty$  denota a norma  $L_\infty$  de  $G \in M(RL_\infty)$ .

$\|G\|_2^2 = (2p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr}\{G^*(j\omega)G(j\omega)\} d\omega$  onde  $G \in M(RL_2)$ .

$F^\sim(s) = F^T(-s)$  onde  $F \in M(RL_\infty)$ .

$\langle F, G \rangle = (2p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr}\{F^*(j\omega)G(j\omega)\} d\omega$ , onde  $F \in RL_2^{m \times p}$ ,  $G \in RL_2^{m \times p}$ .

$\{\cdot\}_+$  denota a projeção ortogonal de  $L_2(j\mathbb{R})$  sobre  $H_2$ .

$A \otimes B$  denota o produto de Kronecker de  $A$  e  $B$ .

# Capítulo 1

## Introdução

Os sistemas de controle por realimentação têm por motivação principal assegurar padrões satisfatórios de funcionamento face a várias circunstâncias adversas, referidas genericamente como “incertezas”, tais como a ação de sinais externos de distúrbio sobre o sistema em questão e a variação das características dinâmicas do mesmo. Ademais, embora o projeto de tais sistemas de controle faça uso de modelos matemáticos dos sistemas a serem controlados, estes modelos são sempre descrições imprecisas do sistema em questão.

Assim sendo, uma ampla gama de conceitos, formulações e técnicas relevantes para o projeto de sistemas de controle por realimentação tem sido desenvolvidas sob a denominação genérica de controle robusto ( Doyle et al, 1992; Zhou et al, 1996; Dullerud, 2000).

Um dos elementos fundamentais desta teoria é o tratamento dos possíveis efeitos das imprecisões nos modelos utilizados. Uma forma de representação destes erros de modelagem (no contexto de sistemas de controle por realimentação) que passou a ser amplamente utilizada a partir da década de 80 (Doyle,1982) é a chamada perturbação em realimentação (“feedback perturbation”) sobre um modelo nominal. As vantagens de tal forma de representação vem do fato de que a perturbação em realimentação pode ser vista como uma generalização de outras formas de perturbação (como perturbação aditiva, perturbação multiplicativa e perturbação em fatores coprimos de funções de transferência), e também permitir lidar com sistemas sujeitos a distintas (e simultâneas) formas de perturbação (Zhou et al, 1996).

Em uma outra vertente, centrada em modelos paramétricos, os erros de modelagem têm sido caracterizados por meio de regiões de incerteza associadas aos parâmetros em questão.( ver por exemplo, Feron et al 1996; Gahinet et al 1996 e suas referências).

Por outro lado, em várias situações, o desempenho relativo à atenuação de sinais de perturbação de um sistema em malha fechada é o principal aspecto a ser considerado no projeto de um sistema de controle. Frequentemente, no âmbito de sistemas lineares invariantes no tempo (sistemas LTI), este aspecto pode ser adequadamente quantificado por meio da norma  $H_2$  ponderada de uma função de transferência(de modo que melhor desempenho corresponda a menores normas), dando origem a problemas de controle ótimo quadrático como os tratados por Youla & Bongiorno (1985) e Doyle et al (1989) (ver também Dullerud & Paganini, 2000; Saberi et al 1995 e suas referências).

Devido aos possíveis erros de modelagem, é natural adicionar ao objetivo de atenuar sinais de distúrbio o de assegurar a estabilidade do sistema de controle em malha fechada face a perturbações na função de transferência nominal (estabilidade

robusta). Os problemas de estabilidade robusta deram origem a uma ampla literatura sobre os problemas de controle  $H_\infty$  ( ver Francis ,1987; Zhou & Khargonekar, 1987; Doyle et al,1989 e suas referências).

A necessidade de determinar controladores que assegurem boas performance  $H_2$  de um sistema em malha fechada, ao mesmo tempo em que se tenha um pré-especificado nível de robustez da estabilidade, motiva o estudo dos (assim chamados) problemas de controle misto  $H_2/H_\infty$ . Esse tipo de problema foi primeiramente estudado por Bernstein & Haddad (1989), onde foi considerado o caso em que o sinal de entrada correspondente a performance  $H_2$  é o mesmo correspondente a restrição  $H_\infty$ , e o custo  $H_2$  é substituído por um limitante superior definido a partir de restrição  $H_\infty$ . A solução para este tipo particular de problema é conhecida e pode ser caracterizada por condições de otimalidade na forma de equações de Riccati acopladas (Bernstein & Haddad,1989; Doyle et al, 1989; Nikoukhah & Delebecque, 1992; Zhou et al, 1994). Este problema também pode ser formulado como um problema de otimização convexa conforme demonstrado por Khargonekar & Rotea (1991).

Um passo adicional, no sentido de assegurar bom desempenho  $H_2$  em presença de perturbações, é o de considerar como índice de desempenho de sistemas sujeitos a perturbações o chamado “pior-caso” (isto é, maior) das normas  $H_2$  ponderadas das funções de transferências correspondentes a um conjunto de perturbações. Quando as perturbações em questão são caracterizadas por funções de transferência com limitação na norma  $H_\infty$ , determinar o “pior-caso”  $H_2$  de sistemas sujeitos a perturbações com um dado controlador estabilizante envolve solucionar um problema de otimização não-convexo  $H_2/H_\infty$ . Como tais problemas são de difícil resolução, surge a motivação para

se formular problemas de resolução mais simples, cujas soluções sejam limitantes superiores do “pior-caso”  $H_2$  .

De fato, a substituição do critério de desempenho “pior-caso”  $H_2$  por limitantes superiores de obtenção mais simples é uma característica comum aos trabalhos de Stoorvogel (1993), Toivonen & Pensar (1995), Feron (1997), Paganini (1999), Paganini & Feron (2000), nos quais são também consideradas perturbações em realimentação.

Stoorvogel (1993) e Paganini & Feron (2000) consideram perturbações em realimentação (não-estruturadas na primeira e estruturadas na segunda referência) que consistem de operadores limitados (no sentido da norma induzida  $L_2$ ) cujas normas não excedem um valor máximo. Note-se que os operadores de perturbação podem ser não – lineares e / ou variantes no tempo. Limitantes superiores do “pior-caso”  $H_2$  são então obtidos através de dois passos conceituais: i) primeiramente troca-se o operador de perturbação por sinais de perturbação, sobre os quais se impõem restrições que são conseqüências lógicas das limitações em norma impostas originalmente aos operadores de perturbação; ii) em seguida, uma técnica de relaxação lagrangeana é aplicada, de maneira que a maximização do índice de performance sobre o novo conjunto de variáveis é trocado pela minimização (com respeito aos multiplicadores) do funcional dual lagrangeano, obtendo-se dessa forma um problema convexo.

Toivonen & Pensar (1995) consideram perturbações em realimentação, não-estruturadas, caracterizadas por funções de transferência limitadas na norma  $H_\infty$  e Feron (1997) considera perturbações lineares invariantes no tempo e passivas (ao invés de limitados em norma). Em ambas as referências, limitantes superiores do “pior-caso”  $H_2$  são obtidos através de dois passos muito similares aos encontrados em Stoorvogel (1993) e Paganini & Feron (2000).

Como alternativa à relaxação lagrangeana citada acima, Paganini (1999) considera perturbações estruturadas caracterizadas por funções de transferência limitadas na norma  $H_\infty$ , e utilizando técnicas correspondentes à chamada “S-Procedure”, é obtido um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  que consiste na minimização de um funcional linear sujeito à uma família infinita de restrições definidas por desigualdades matriciais lineares (LMI), uma para cada frequência.

Cabe também observar que problemas relativos a performance  $H_2$  face a incerteza paramétrica têm recebido ampla atenção na literatura especializada ( ver Fan et al, 1991; Young, 1993; How, 1993; Banjerdpongchai & How, 1998; e suas referências).

Neste trabalho, considera-se o modelo de perturbações em realimentação, com as perturbações (estruturadas) caracterizadas por funções de transferência estáveis, cujas normas  $H_\infty$  não ultrapassem um valor pré-especificado, e são consideradas três diferentes formulações de problemas convexos cujos valores ótimos definem limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$ : a primeira baseada nos dois passos encontrados em Stoorvogel (1993), Paganini & Feron (2000), Toivonen & Pensar (1995) e Feron (1997), a segunda baseada em “S-Procedure” e a terceira baseada em operações elementares de transformações lineares fracionárias (LFT). Essas formulações são descritas em linhas gerais a seguir:

- (I) Inicialmente, faz-se uma mudança de variável para eliminar a não-linearidade das funções de transferência do sistema em malha fechada com relação à variável de perturbação. Em seguida, o conjunto factível do problema original é trocado por um outro que o contém (como subconjunto) e que corresponde a uma restrição mais tratável.

Finalmente, uma técnica de relaxação lagrangeana é aplicada, no sentido de trocar a maximização da norma ponderada  $H_2$  pela minimização (com respeito aos multiplicadores) do funcional dual lagrangeano correspondente.

- (II) Após a linearização e mudança de conjunto factível descritos em (I), como alternativa à relaxação lagrangeana para obtenção de limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador estabilizante, é usada a técnica chamada “S- Procedure” (Boyd et al 1994).
  
- (III) A terceira formulação (aplicável somente à perturbações não-estruturadas) consiste em usar uma transformação linear fracionária para definir uma mudança de variável linearizante que já resulte em uma restrição afim na nova variável de perturbação (o que não ocorre na mudança de variável feita em (I)).

A maneira como a formulação (I) é apresentada nesta tese está diretamente relacionada com a dedução feita em Correa & Sales (2005) para perturbações não-estruturadas nos fatores coprimos normalizados e Toivonen & Pensar (1995) para perturbações não-estruturadas em realimentação. Neste trabalho, a formulação (I) é feita para perturbações estruturadas no contexto de perturbações em realimentação. O resultado obtido é equivalente ao obtido por Paganini & Feron (2000) no contexto de sinais de perturbação.

A formulação (II) utiliza a “S-Procedure” para perturbações caracterizadas por funções de transferências o que leva a um limitante superior análogo ao obtido por Paganini (1999) e Paganini & Feron (2000).

Na formulação (III), a não-linearidade do problema de avaliação de desempenho é eliminada com base em uma outra mudança de variável e um resultado sobre LFT's que dão origem a um limitante potencialmente menos conservador.

Uma característica comum aos limitantes gerados pelas formulações (I), (II) e (III) é que a determinação desses limitantes envolve otimização em espaços de funções. A dificuldade de se lidar com tais espaços em toda a sua generalidade tem gerado na literatura diferentes versões do problema de otimização nos quais os multiplicadores são confinados a subespaços de dimensão finita pré-especificados.

Com relação à formulação (I), em que a otimização consiste na minimização do funcional dual com relação aos multiplicadores de Lagrange, Feron (1997) (para perturbações passivas) e Correa & Sales (2005) (para perturbações em fatores coprimos normalizados) consideram classes de multiplicadores linearmente parametrizados, cuja grande motivação vem do fato de que minimizar o funcional dual com relação a tais multiplicadores é equivalente a encontrar o valor ótimo de um problema de otimização no espaço euclidiano com restrição LMI. Stoorvogel (1993) considera o caso mais simples, chamado de “multiplicadores constantes”, que consiste em tomar o ínfimo do funcional dual sobre o conjunto de números reais positivos. Tal abordagem permite um procedimento mais simples para o correspondente problema de síntese de controlador. Em uma vertente distinta, considerando, em espaços de dimensão finita, subconjuntos de multiplicadores que não são subespaços, Toivonen & Pensar (1995) consideram classes de multiplicadores definidos por equações de estado de uma dada ordem e

sugerem que o funcional dual deve ser minimizado com respeito aos parâmetros das realizações correspondentes (o que envolve problemas não-convexos).

Neste trabalho, mostra-se que a equivalência entre a minimização do funcional dual lagrangeano sobre uma classe de multiplicadores lineares e um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI, se estende naturalmente para o caso de perturbações estruturadas e limitadas na norma  $H_\infty$ .

Surge, então, a questão relacionada à escolha do subespaço de dimensão finita pré-especificada, ou equivalentemente a escolha da “dinâmica fixa” que determina a classe linear de multiplicadores a ser considerada.

Em Correa & Sales (2005) (onde são consideradas perturbações não-estruturadas) busca-se explorar a classe de multiplicadores racionais em sua generalidade através de métodos iterativos, operando em espaços de funções. Para este fim, é apresentada uma caracterização de direções descendentes factíveis (com respeito ao funcional dual lagrangeano) no espaço de funções reais racionais e não negativas, a partir de um dado multiplicador (não-ótimo). Dessa forma, multiplicadores dinâmicos são iterativamente gerados, de maneira a se obter uma seqüência decrescente de limitantes superiores para “pior-caso”  $H_2$ , que consiste na aplicação do funcional dual em cada um dos multiplicadores assim gerados. Em cada passo desse processo, a dinâmica corrente pode então ser usada para determinar uma classe linear de multiplicadores sobre a qual pode se minimizar globalmente o funcional dual.

Quando perturbações estruturadas são consideradas, a caracterização de direções descendentes para o funcional dual pode ser feita de forma análoga ao caso não-estruturado. As questões relativas à caracterização de direções factíveis são, contudo, mais intrincadas. Assim sendo, uma heurística para escolha iterativa de classes lineares (apresentada na seção 3.4 do capítulo 3) baseada em direções descendentes

aproximadamente alinhadas com o “gradiente” do funcional dual, tomadas a partir de pontos interiores do conjunto factível, surge como alternativa à escolha arbitrária das classes lineares.

Com relação à formulação (II), Paganini (1999) e Paganini & Feron (2000) discutem os aspectos computacionais para se lidar com as infinitas restrições LMI's e sugere duas versões para o problema, de resolução mais simples, quais sejam:

- (a) Usar uma grade de frequências;
  
- (b) Restringir as variáveis de decisão a subespaços de dimensão finita pré-especificados.

Como observado em Paganini (1999) e em Paganini & Feron (2000) os problemas de otimização correspondentes a (a) e (b) podem ser resolvidos por eficientes métodos de LMI descritos em Boyd et al (1994). Em particular, o procedimento descrito em (b) reduz a restrição do problema equivalente a uma única LMI. Isso é mostrado com detalhes neste trabalho.

Com relação ao funcional dual da relaxação lagrangeana da formulação (III), também são consideradas classes lineares de multiplicadores, com a diferença de que os multiplicadores desta formulação são funções matriciais.

Dadas as dificuldades existentes na avaliação do “pior-caso”  $H_2$ , a síntese de controladores com vistas ao bom desempenho  $H_2$ -robusto deve ser feita com base em limitantes superiores para aquele índice de desempenho, de modo que, a cada limitante corresponde, de fato, um procedimento de síntese.

Essa idéia está presente nos trabalhos de Storvogel (1993) (utilizando o primeiro limitante com multiplicadores constantes) e Yang et al (2000) (utilizando multiplicadores de Popov), onde procedimentos de síntese são propostos com base nos limitantes superiores do “pior-caso”  $H_2$  para sistemas sujeitos a perturbações não-paramétricas. Neste trabalho, de maneira semelhante a estas referências, a cada limitante do índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$  deduzido com base em problemas de otimização convexa corresponde um procedimento de síntese.

Considerando inicialmente, o limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  dado pela formulação (I), isto é, por meio da minimização do funcional dual, note-se que a síntese de controladores neste caso, baseia-se na minimização conjunta do funcional dual sobre os controladores e os multiplicadores considerados.

Ainda que se faça uso da parametrização de Youla para controladores estabilizantes (Nett, 1986) a fim de tornar as funções de transferência do sistema em malha fechada afins na variável de decisão (parâmetro de Youla), o funcional dual lagrangeano contém produtos de termos afins no parâmetro de Youla e no multiplicador, o que torna muito difícil a minimização conjunta em questão. Entretanto, o funcional dual é convexo em cada uma destas “variáveis de decisão” quando a outra é mantida constante, o que sugere a utilização de procedimentos do tipo “D-K iteration” nos quais em cada passo tenta-se, alternadamente, minimizar o funcional dual em relação a uma das variáveis de decisão enquanto a outra é mantida inalterada.

Analogamente ao caso dos multiplicadores, será mostrado que quando o parâmetro de Youla é confinado a um espaço de dimensão finita pré-especificado, a minimização do funcional dual sobre o mesmo para um dado multiplicador é equivalente a um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI.

Observações similares aplicam-se à síntese de controladores com base no limitante obtido por meio da formulação (II).

No caso da formulação (III) a melhoria potencial na qualidade dos limitantes correspondentes é obtida à custa de uma dependência mais intrincada entre o funcional lagrangeano e o parâmetro de Youla que tornam as observações acima referentes à síntese inaplicáveis a este caso.

Questões de robustez também são relevantes em problemas de filtragem pelo mesmo motivo expostos para Controle Robusto, qual seja, a existência de incertezas na formulação de modelos matemáticos para descrição de um sistema físico.

Com relação a erros de modelagem caracterizados por incertezas paramétricas, existe uma ampla literatura dedica ao estudo do assim chamado problema de filtragem  $H_2$  – robusto. Aproximações por equações diferenciais de Riccati foram propostas para sistemas lineares sujeitos a erros limitados em norma nos parâmetros das equações de estado em Peterson & McFarlane (1991), Peterson & McFarlane (1994), Bolzern et al(1994) e Shaked & Souza (1995), enquanto incertezas politópicas foram tratadas recentemente em Souza & Trofino (2000) e Geromel (1999) com metodologias baseadas em LMI. Um método baseado em funções de Lyapunov é apresentado em Karina et al (2005) para parâmetros pertencentes um pré-especificado domínio poliedral convexo limitado.

No domínio da frequência, uma forma natural de levar em conta os erros de modelagem é considerar incertezas nas densidades espectrais do sinal e do ruído, as quais podem ser quaisquer elementos pertencentes a uma classe pré-especificada.

Para problemas de estimação escalar, encontram-se definidas em Kassam & Poor (1985) uma variedade de classes convexas de densidades espectrais para as quais o problema de filtragem robusta é resolvido através da maximização de um funcional

côncavo definido sobre essas classes, e da determinação do filtro de Wiener correspondente ao par (sinal e ruído) de espectros maximizantes (mais detalhes também podem ser encontrados em Poor, 1984).

Para problemas de estimação de sinais vetoriais, Chen & Kassam (1983) e Darragh & Looze (1984) consideram classes especiais de densidades espectrais de modo a tornar possível estabelecer uma equivalência entre o caso vetorial e o escalar.

Finalmente, uma descrição estocástica de incertezas é considerada em Ohm et al (1995), onde os erros de modelagem são parametrizados por polinômios, cujos coeficientes são variáveis aleatórias com covariâncias conhecidas.

Neste trabalho, será examinado o caso em que a caracterização de incertezas (não-paramétricas) no sinal e ruído de um sistema é feita considerando-se conjuntos de fatores espectrais para as densidades espectrais envolvidas. Usando-se relaxação lagrangeana, é possível chegar a formulações para o problema de análise de desempenho robusto de um dado filtro e síntese de filtro para bom desempenho análogas às formulações apresentadas nesta tese para Controle Robusto.

Serão apresentados a seguir, de maneira informal, os temas específicos analisados nos próximos capítulos, destacando-se nas correspondentes seções, as proposições e resultados (identificados individualmente) que constituem as contribuições da Tese.

No capítulo 2 é introduzido o modelo de perturbações em realimentação. São definidas as classes de perturbações a serem consideradas, isto é, perturbações estruturadas em realimentação caracterizadas por funções de transferências limitadas na norma  $H_\infty$ , e é feita a caracterização formal do “pior-caso”  $H_2$  de um dado sistema sujeito a tais perturbações com um dado controlador estabilizante. A seguir, são deduzidos limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$  a partir das formulações (I), (II)

e (III) descritas nesta introdução, as quais são tratadas respectivamente nas seções (2.4), (2.5) e (2.6) do capítulo 2. Como foi mencionado anteriormente, o limitante obtido com a formulação (I) é equivalente ao obtido por Paganini & Feron (2000) no contexto de sinais de perturbação. Esse fato também é mostrado no capítulo 2, seção 2.7. Destaca-se **na seção 2.6 a apresentação de um novo limitante** para “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador, cuja dedução baseia-se em operações elementares de LFT ainda não exploradas para fins de análise de performance robusta.

No capítulo 3, com relação à formulação (I) mostra-se a equivalência entre a minimização do funcional dual lagrangeano com relação a multiplicadores pertencentes a classes lineares e um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI para o caso de perturbações estruturadas (**seção 3.3, Proposição 3.3.2**). A caracterização de direções descendentes baseada para o funcional dual é apresentada como base para a escolha heurística de tais classes lineares (**seção 3.4**). Com relação à formulação (II), mostra-se como a família de restrições LMI's obtida pode ser reduzida a uma única LMI a partir do confinamento das variáveis de decisão em subespaços de dimensão finita. (**seção 3.5, Proposição 3.5.3**). Por outro lado, a caracterização de direções descendentes baseada unicamente no “gradiente” do funcional de custo correspondente mostra-se insuficiente para a escolha desses subespaços, de modo que direções descendentes e factíveis serão caracterizadas com base em heurísticas obtidas ao se substituir (localmente) as condições LMI por condições quadráticas suficientes associadas com o (assim chamado) Elipsóide de Dynkin (Nemirovski & Gahinet, 1997). Esse desenvolvimento encontra-se na **seção 3.7**. A estratégia de usar classes lineares de multiplicadores também é adotada para os multiplicadores matriciais, correspondentes ao problema de otimização dado pela formulação (III), e o procedimento para resolver o correspondente problema truncado torna-se formalmente análogo ao procedimento para

resolver o problema truncado da formulação (I), no que diz respeito a mostrar a equivalência com um problema de otimização no espaço euclidiano sujeito a uma restrição LMI e utilização de heurísticas para a escolha dessas com base em direções descendentes para o funcional de custo, caracterizadas pelo “gradiente” do mesmo.

No capítulo 4, o problema de síntese de controlador para minimizar o “pior caso”  $H_2$  é considerado. O primeiro procedimento de síntese proposto é baseado no primeiro limitante deduzido no capítulo 2 por meio de relaxação lagrangeana. Para facilitar o entendimento das principais idéias envolvidas no correspondente problema de síntese, considera-se inicialmente o caso de perturbações não-estruturadas e entrada escalar. Demonstra-se então, que quando o parâmetro de Youla dos controladores robustamente estabilizantes é confinado a um subespaço de dimensão finita pré-especificado, a minimização do funcional dual sobre o mesmo (para um dado multiplicador) é equivalente a um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI (**seção 4.2, Proposição 4.2.4**). A questão de como determinar o subespaço ao qual será confinado o parâmetro de Youla dos controladores robustamente estabilizantes é analisada (**seção 4.3, Proposição 4.3.1 e Corolário 4.3.2**). Em seguida, o procedimento de síntese baseado no limitante deduzido por meio de relaxação lagrangeana é generalizado para o caso de perturbações estruturadas e entrada multivariável (**desenvolvimento da seção 4.4**). Também é proposto um procedimento de síntese baseado no limitante obtido por meio da “S-Procedure” (para um dado multiplicador) e também mostra-se a equivalência entre o problema truncado (variáveis de decisão confinadas a subespaços de dimensão finita) e um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI (**seção 4.5, Proposição 4.5.2**). No capítulo 5 são considerados problemas de filtragem robusta em que as classes de incertezas são caracterizadas por conjuntos de fatores espectrais das densidades

espectrais de potência do sinal e do ruído. Os conjuntos considerados são “bolas”  $H_2$  –ponderadas e “bolas”  $H_\infty$  – ponderadas. Mostra-se então, que é possível chegar a formulações análogas às obtidas para controle robusto, sem a necessidade de se utilizar procedimentos do tipo “D-K iteration” na resolução dos problemas de síntese de filtros robustos (**seção 5.3, Proposição 5.3.3 e seção 5.4, Proposição 5.4.3**).

No capítulo 6 são apresentados alguns exemplos numéricos, utilizando as rotinas de Matlab para resolução de problemas de otimização com restrições definidas por LMI (Gahinet et al, 1995) que ilustram os procedimentos descritos neste trabalho para obtenção de limitantes superiores para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$  .

Finalmente são apresentadas considerações finais nas quais, da mesma forma que nesta introdução, são destacados (em negrito) os principais resultados obtidos neste trabalho.

Para facilitar a leitura, cada capítulo possui uma introdução e conclusão nas quais são destacadas algumas referências da literatura e como a pesquisa desenvolvida se insere no contexto das mesmas.

Por fim, em alguns capítulos encontra-se um apêndice próprio contendo demonstrações e deduções deslocadas do corpo central do capítulo para facilitar a leitura.

# Capítulo 2

## Análise de desempenho $H_2$ -robusto

### 2.1-Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de análise de desempenho de um dado controlador que assegure a estabilidade de um sistema sujeito a perturbações lineares invariantes no tempo (“perturbações LTI” para simplificar).

Os objetivos de performance são expressos na norma  $H_2$  de uma função de transferência em malha fechada. Para ser mais específico, é considerado o seguinte problema: para uma classe de sistemas de controle estáveis  $(P(\Delta), C)$ , onde  $P(\Delta)$  é o sistema perturbado, qual é o “pior-caso” (isto é, maior) das normas  $H_2$  das funções de transferências em malha fechada de um sinal de entrada para um sinal de saída?

Com algumas variações este é essencialmente o problema estudado por Stoorvogel (1993), Toivonen & Pensar (1995), Feron (1997) e Paganini & Feron (2000).

Devido a dificuldades de se determinar precisamente o “pior-caso”  $H_2$ , os autores acima citados derivaram limitantes superiores com base em problemas de otimização convexa em espaços de funções.

Neste capítulo são formulados 3 problemas de otimização convexa em espaços de funções cujas soluções são limitantes superiores do índice de desempenho para o “pior-caso”  $H_2$ . Os dois primeiros são fortemente relacionados com as derivações feitas em Toivonen & Pensar (1995), Paganini & Feron (2000), e Correa & Sales (2005). O terceiro é baseado em um resultado relativo a LFT's, ainda não explorado para fins de análise de performance de sistemas perturbados.

O capítulo 2 está organizado da seguinte forma :

Na seção 2.2 é caracterizada a classe de perturbações consideradas.

Na seção 2.3 são apresentadas condições suficientes para se assegurar a estabilidade de um sistema de controle na presença de tais perturbações.

Na seção 2.4 formula-se o primeiro problema de otimização convexa cuja solução é um limitante superior para o “pior-caso”  $H_2$  através de um procedimento que consiste em 3 passos básicos: mudança da variável de perturbação, aumento da classe de perturbações consideradas e relaxação lagrangeana.

Na seção 2.5, como alternativa à relaxação lagrangeana usada na seção 2.4, usa-se um procedimento baseado na técnica “S-procedure” para formular o segundo problema de otimização convexa cuja solução é limitante superior do índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$ .

Na seção 2.6 faz-se uso de um resultado sobre LFT's para definir uma mudança de variável linearizante que já resulte em uma restrição afim na nova variável de perturbação.

Na seção 2.7 é apresentada a dedução baseada em uma abordagem de “sinais de perturbação”, do limitante obtido por Paganini &Feron (2000). Esta abordagem consiste, basicamente, em substituir a variável de perturbação por classes de sinais com restrições correspondentes às características da variável de perturbação original.

Conclusões do capítulo são apresentadas na seção 2.8.

## **2.2-Modelagem de incertezas**

Nesta seção serão apresentadas algumas formas de representar incertezas relativas à modelagem de um sistema a ser controlado. Basicamente, quando se pretende considerar erros de modelagem, define-se um conjunto de modelos, ao invés de um único, para representar um mesmo sistema físico.

Nesse sentido, como é usual em análises no domínio da frequência, considera-se uma função de transferência fixa, chamada planta nominal ou modelo nominal, e o erro (ou perturbação) é considerado também como uma função de transferência, tomada de um conjunto de funções, o qual é conhecido como conjunto de perturbações admissíveis. Também é natural considerar que os erros de modelagem têm magnitudes cujas limitações superiores são conhecidas (ou estimadas).

Denotando por  $P$  a função de transferência da planta nominal, e  $D = \{\Delta \in M(RH_\infty) : \|\Delta\|_\infty \leq g\}$  o conjunto das perturbações admissíveis, um modelo perturbado  $P(\Delta)$  será uma combinação da planta nominal  $P$  com uma perturbação  $\Delta \in D$ . Possíveis formas de combinação são destacadas em (i)-(iii). Tal abordagem é utilizada, por exemplo, em McFarlane & Glover (1991) e Zhou et al (1996).

(i) **Perturbação Aditiva:**  $P(\Delta) = P + \Delta$  ,  $\Delta \in D$ .

(ii) **Perturbação Multiplicativa :**  $P(\Delta) = (I + \Delta)P$  ,  $\Delta \in D$

(iii) **Perturbação nos Fatores Coprimos :**

$$P(\Delta) = (N + \Delta N)(D + \Delta D)^{-1} , \quad \Delta \in D, \Delta = [\Delta N, \Delta D],$$

e  $(N, D)$  denota uma fatoração coprima normalizada a direita da planta nominal  $P$  (Vidyasagar (1985), McFarlane & Glover (1991)). As funções de transferências perturbadas correspondentes a cada um dos tipos de perturbação (i)-(iii) podem ser representados pelos diagramas de blocos das figuras (2.1)-(2.3)

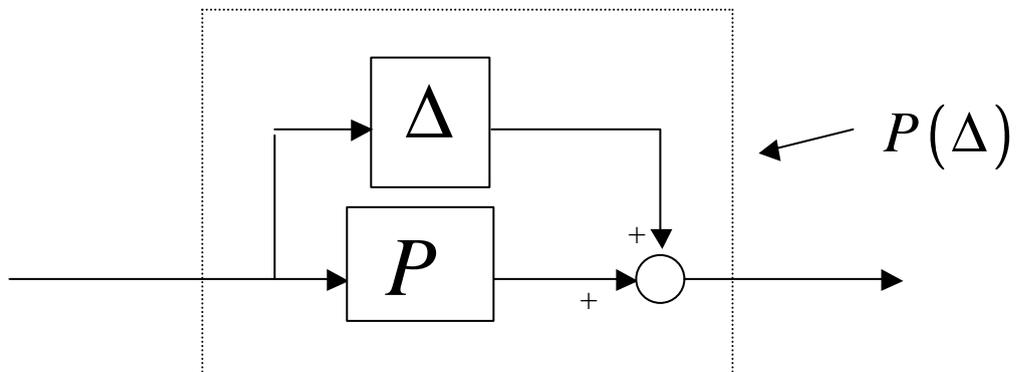


Figura 2.1- Perturbação Aditiva

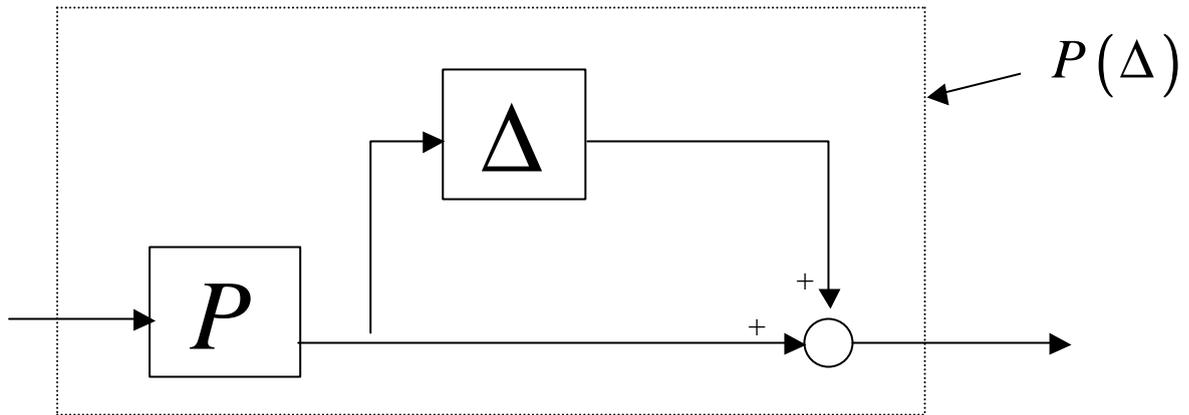


Figura 2.2- Perturbação Multiplicativa

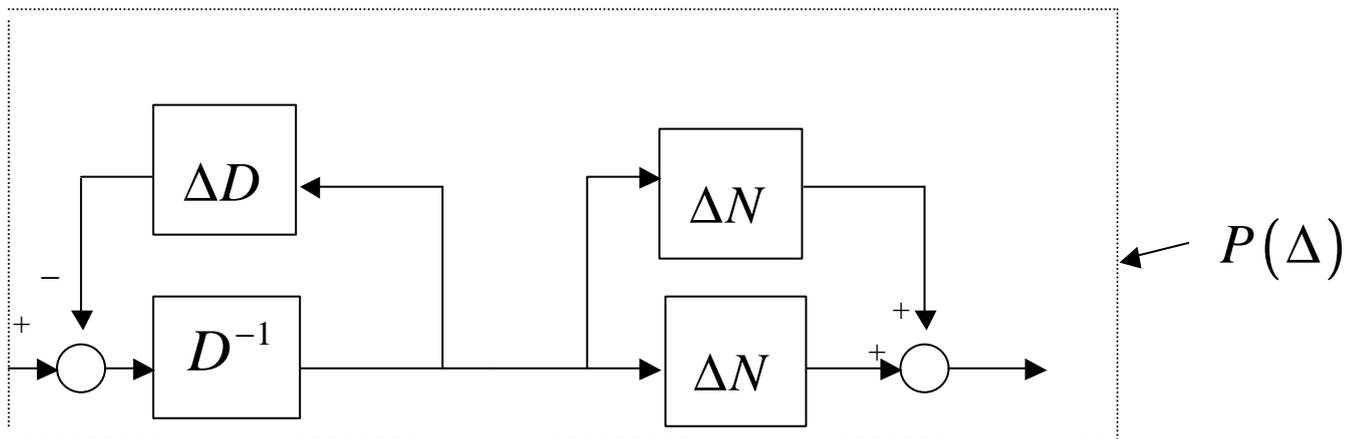


Figura 2.3- Perturbação nos Fatores Coprimos

É importante observar que esses três tipos de perturbações podem ser vistos como casos particulares de uma representação mais geral (McFarlane & Glover(1990), Zhou et al (1996)), qual seja a de perturbação em realimentação (“feedback perturbation”).

De fato, considerando o sistema descrito pela figura 2.4:

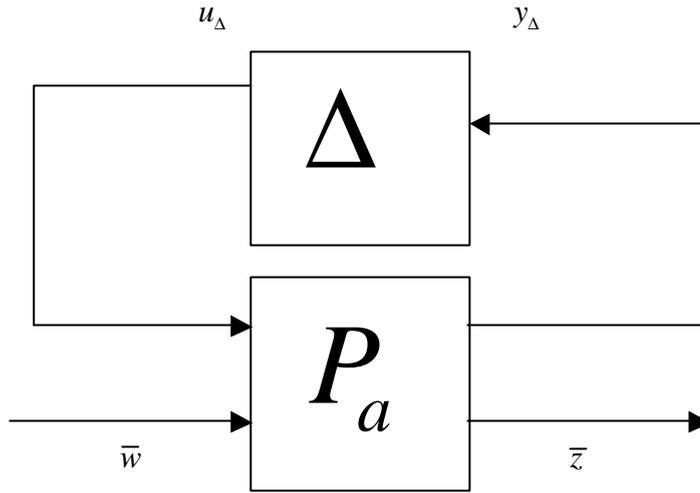


Figura 2.4-Perturbação em Realimentação.

com  $P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ , que é denominada **planta generalizada**, a função de transferência

de  $\bar{w}$  a  $\bar{z}$  é dada pela transformação linear fracionária superior (ver Doyle et al (1991)):

$$(2.2.1) \quad F_U(P_a, \Delta) \triangleq P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}, \quad \Delta \in D.$$

e portanto, com escolhas adequadas das partições de  $P_a$  (que incluem a planta nominal  $P$ ) é possível representar um modelo perturbado  $P(\Delta)$ , obtido com qualquer uma das três formas de perturbação apresentadas anteriormente.

As plantas generalizadas associadas com esses três tipos de perturbação são dadas por:

- $P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & P \end{bmatrix}$ , para perturbação aditiva.

- $P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & P \\ \hline I & P \end{array} \right]$ , para perturbação multiplicativa.

- $P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -D^{-1} & D^{-1} \\ \hline I & -P & P \end{array} \right]$ , para perturbação nos fatores coprimos.

Usando o caso de perturbação multiplicativa como um exemplo, verifica-se facilmente que  $P(\Delta) = F_U(P_a, \Delta)$ . De fato, usando a planta generalizada associada a esta perturbação, tem-se que:

$$F_U(P_a, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} = P + I\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P = P + \Delta P = P(\Delta).$$

Note-se que para cada representação de incerteza,  $F_U(P_a, 0) = P$ .

Assim, dada a possibilidade de capturar através da configuração apresentada na figura 2.4 vários tipos de perturbações, o modelo de perturbação em realimentação tem sido amplamente adotado por autores como Doyle (1982), Stoorvogel (1993), Feron (1997) e Paganini (1999), entre outros, e também será adotado no decorrer deste trabalho.

Convém notar também que até agora, nenhuma restrição além da limitação na norma foi imposta sobre as perturbações admissíveis  $\Delta$ , que nesse caso chamadas de **Perturbações não-estruturadas**.

Entretanto, existem razões importantes para impor uma estrutura adicional ao conjunto das perturbações admissíveis  $D$ , quando se tem então, as chamadas **Perturbações estruturadas**. Uma destas razões é ilustrada no seguinte exemplo:

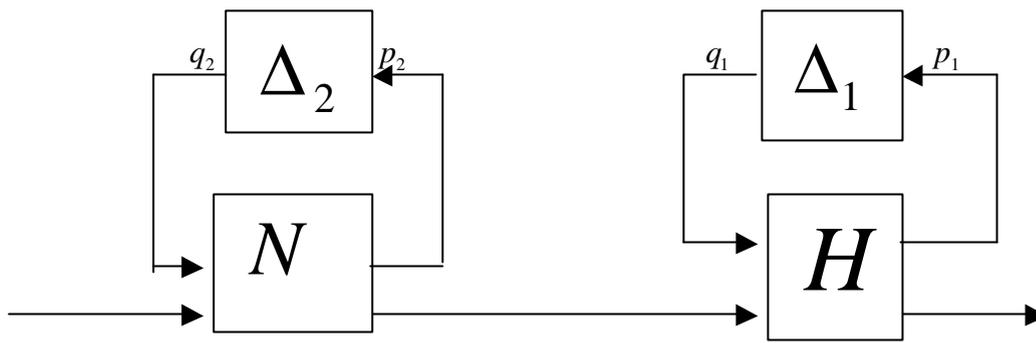


Figura 2.5. Sistemas Perturbados em Série.

A figura 2.5 mostra a composição em série de dois sistemas sujeitos a perturbações em realimentação. Nesse caso, é fácil verificar que a conexão entre os dois sistemas é equivalente a um sistema da forma da figura 2.4, para uma apropriada escolha de  $P$  (em função de  $N$  e  $H$ ) e

$$u_{\Delta} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; y_{\Delta} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}; \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix},$$

e portanto, pode-se concluir que o conjunto de perturbações  $D$ , para composição em série de sistemas sujeitos a perturbações em realimentação terá por construção uma estrutura de blocos em diagonal.

Para determinar tal  $P$ , particione  $N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$  e  $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ , de modo que

$$P = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12}N_{21} & H_{12}N_{22} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ H_{21} & H_{22}N_{21} & H_{22}N_{22} \end{bmatrix}$$

Outra motivação para se considerar perturbações estruturadas é a possibilidade de representar incertezas paramétricas, isto é, incertezas nas equações de estado, via perturbação em realimentação com perturbações estruturadas (Doyle et al (1991)).

Assim, devido aos exemplos acima, será definida a seguir uma classe geral de perturbações estruturadas a ser considerada. Esta definição pode ser encontrada em Zhou et al (1996).

$$S_{\Delta} = \left\{ \Delta = \text{diag} \left[ \mathbf{d}_1 I_{r_1}, \dots, \mathbf{d}_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F \right] : \mathbf{d}_i(s) \in RH_{\infty}, \Delta_j \in M(RH_{\infty}) \right\}$$

com  $\|\mathbf{d}_i\|_{\infty} \leq \mathbf{g}, \|\Delta_j\|_{\infty} \leq \mathbf{g}$ .

Note-se na definição acima, que os blocos  $\Delta_j$  não são necessariamente quadrados. Porém, tal hipótese é usualmente considerado para efeitos de simplificação (veja por exemplo Doyle,1982, e Zhou et al,1996, pg 278) , de modo que neste trabalho, os blocos  $\Delta_j$  da definição de  $S_{\Delta}$  serão considerados quadrados. Esta sub-classe de  $S_{\Delta}$  será definida explicitamente na próxima seção.

## 2.3-Estabilidade robusta e índice de desempenho de sistemas perturbados.

Nesta seção é discutida a estabilização robusta de um sistema sujeito à perturbações em realimentação. Neste sentido considere o sistema da figura 2.4 com um controlador  $C$  em realimentação, o qual é descrito em diagrama de bloco na figura 2.6

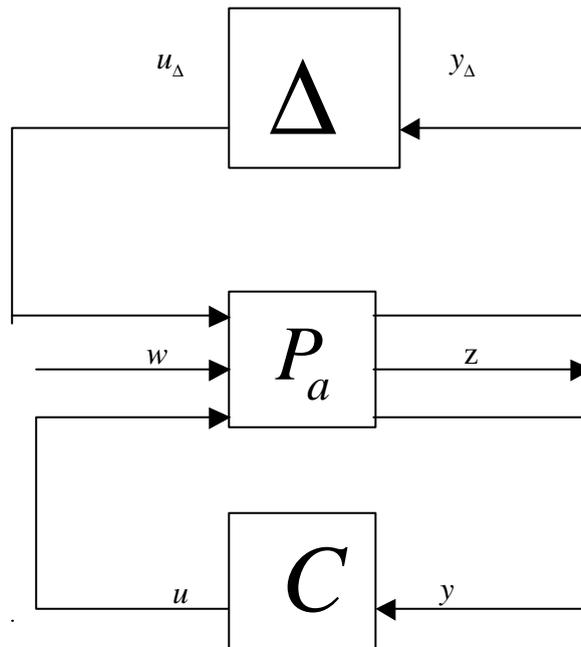


Figura 2.6-Controle de Sistema Perturbado.

Em correspondência com a figura 2.4,  $\bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$  e  $\bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$ , e as partições podem

ser escritas da seguinte forma

$$P_a = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta} & P_{\Delta w} & P_{\Delta u} \\ P_{z\Delta} & P_{zw} & P_{zu} \\ P_{y\Delta} & P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}, \text{ onde } P_{11} = P_{\Delta\Delta}, P_{12} = [P_{\Delta w} \quad P_{\Delta u}], P_{21} = \begin{bmatrix} P_{z\Delta} \\ P_{y\Delta} \end{bmatrix} \text{ e } P_{22} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}$$

e o sistema da figura 2.6 é formalmente descrito pelas equações:

$$(2.3.1) \quad \begin{bmatrix} y_\Delta \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta} & P_{\Delta w} & P_{\Delta u} \\ P_{z\Delta} & P_{zw} & P_{zu} \\ P_{y\Delta} & P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad u_\Delta = \Delta y_\Delta, \quad u = Cy.$$

**Definição 2.3.1:** Um controlador  $C$  estabiliza robustamente o sistema da figura 2.6 se :

- (i) O sistema  $(P_a, C)$  é externamente estável (estabilidade nominal).
- (ii) O sistema  $(P_a, \Delta, C)$  é externamente estável para toda perturbação admissível  $\Delta \in S_\Delta$ .

O conceito de estabilidade externa de um sistema de controle dos itens (i) e (ii) será explicitado a seguir. Para isso, considere os diagramas de estabilidade externa de  $(P_a, C)$  e  $(P_a, \Delta, C)$  respectivamente:

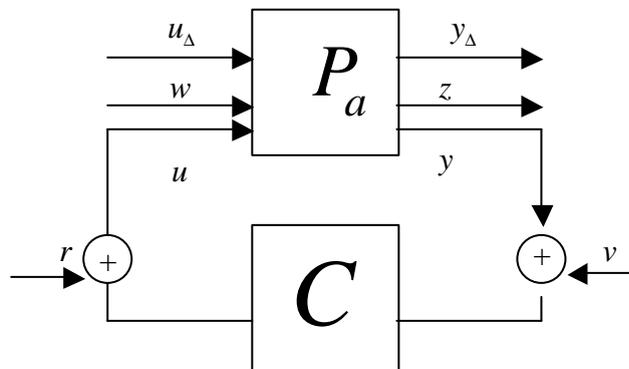


Figura 2.7-Estabilidade externa nominal

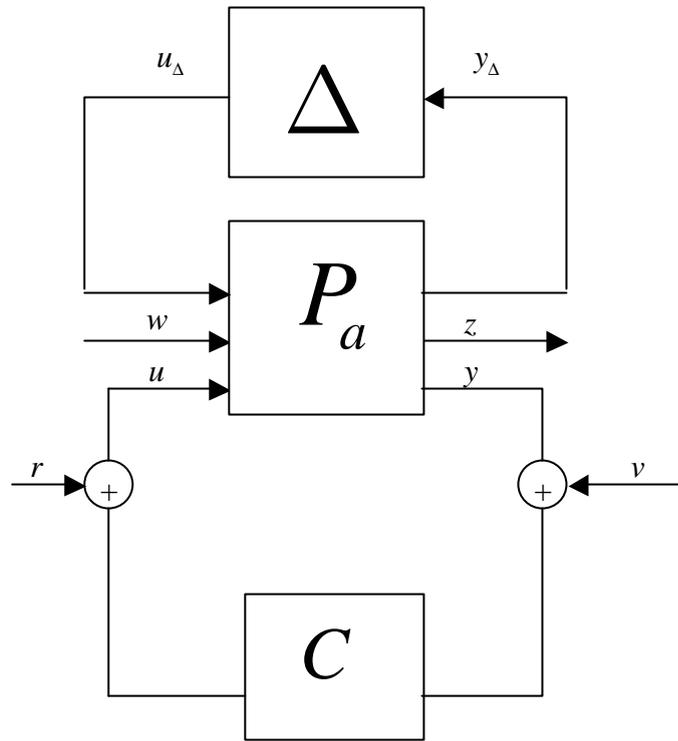


Figura 2.8-Estabilidade externa de sistema perturbado

Denotando-se por  $F(P_a, C)$  a matriz de transferência do sistema de controle da figura 2.7, que determina os valores das variáveis dependentes  $y_\Delta$ ,  $z$ ,  $y$  e  $u$  a partir das variáveis exógenas  $u_\Delta$ ,  $w$ ,  $r$  e  $v$ , isto é

$$\begin{bmatrix} y_\Delta & z & y & u \end{bmatrix}^T = F(P_a, C) \begin{bmatrix} u_\Delta & w & v & r \end{bmatrix}^T$$

o sistema  $(P_a, C)$  é dito externamente estável quando a qualquer quádrupla de funções  $(u_\Delta(\cdot), w(\cdot), v(\cdot), r(\cdot))$  limitadas em  $[0, \infty)$ , correspondam  $(y_\Delta(\cdot), z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$  também limitadas em  $[0, \infty)$ .

**Observação:** Note-se que por um abuso de linguagem, está sendo usada a mesma notação para sinais no domínio do tempo e para suas respectivas transformadas de Laplace no domínio da frequência.

Neste contexto, tem-se que uma condição necessária e suficiente para que se tenha estabilidade externa do sistema de controle  $(P_a, C)$ , é que  $F(P_a, C) \in M(RH_\infty)$  (Vidyasagar, 1985).

Analogamente, para um dado  $\Delta \in S_\Delta$ , denotando-se por  $F(P_a, \Delta, C)$  a matriz de transferência do sistema  $(P_a, \Delta, C)$ , isto é:

$$\begin{bmatrix} z & y & u \end{bmatrix}^T = F(P_a, \Delta, C) \begin{bmatrix} w & v & r \end{bmatrix}^T$$

então  $(P_a, \Delta, C)$  é externamente estável se e somente se  $F(P_a, \Delta, C) \in M(RH_\infty)$ .

Note-se agora que,  $F(P_a, C) \in M(RH_\infty)$  se e somente se todos os seus elementos também pertencem a  $M(RH_\infty)$ . Observe que a expressão de  $F(P_a, C)$  é dada por

$$(2.3.2) \quad F(P_a, C) = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta w} & M_{\Delta v} & M_{\Delta r} \\ M_{z\Delta} & M_{zw} & M_{zv} & M_{zr} \\ M_{y\Delta} & M_{yw} & M_{yv} & M_{yr} \\ M_{u\Delta} & M_{uw} & M_{uv} & M_{ur} \end{bmatrix}$$

onde

$$(2.3.3) \quad \begin{bmatrix} M_{\Delta v} & M_{\Delta r} \\ M_{zv} & M_{zr} \\ M_{yv} & M_{yr} \\ M_{uv} & M_{ur} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\Delta u} \\ P_{zu} \\ P_{yu} \\ I \end{bmatrix} (I - CP_{yu})^{-1} [C \quad I]$$

e

$$(2.3.4) \quad \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta w} \\ M_{z\Delta} & M_{zw} \\ M_{y\Delta} & M_{yw} \\ M_{u\Delta} & M_{uw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta} & P_{\Delta w} \\ P_{z\Delta} & P_{zw} \\ P_{y\Delta} & P_{yw} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{\Delta u} \\ P_{zu} \\ P_{yu} \\ I \end{bmatrix} (I - CP_{yu})^{-1} C [P_{y\Delta} \quad P_{yw}]$$

Tendo em vista a expressão de  $F(P_a, C)$  em função de  $P_a$  e  $C$ , uma condição suficiente para a estabilidade robusta de um sistema no sentido da definição 2.3.1 é dada a seguir

**Proposição 2.3.2:** Um Controlador  $C$  estabiliza robustamente o sistema da figura 2.6

sobre a classe  $S_\Delta = \{\Delta = \text{diag}[d_1 I_{r_1}, \dots, d_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : d_i(s) \in RH_\infty, \Delta_j \in M(RH_\infty)\}$ ,

com  $\|d_i\|_\infty \leq \mathbf{g}, \|\Delta_j\|_\infty \leq \mathbf{g}$ , se  $(P_a, C)$  é estável ( $F(P_a, C) \in M(RH_\infty)$ ), e  $\|M_{\Delta\Delta}\|_\infty < \frac{1}{\mathbf{g}} \quad \forall$

**Demonstração:** Inicialmente, escreve-se o seguinte sistema de equações referentes ao diagrama da figura 2.8, para um dado  $\Delta \in S_\Delta$ :

$$(2.3.5) \quad \begin{cases} y_{\Delta} = P_{\Delta\Delta} u_{\Delta} + P_{\Delta w} w + P_{\Delta u} u, & u_{\Delta} = \Delta y_{\Delta} \\ z = P_{z\Delta} u_{\Delta} + P_{zw} w + P_{zu} u \\ y = P_{y\Delta} u_{\Delta} + P_{yw} w + P_{yu} u, & u = r + C(y + v) \end{cases}$$

A partir das equações do sistema (2.3.5) é possível escrever :

$$(2.3.6) \quad z = \left\{ M_{zw} + M_{z\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta w} \right\} w + \left\{ M_{zv} + M_{z\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta v} \right\} v \\ + \left\{ M_{zr} + M_{z\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta r} \right\} r$$

$$(2.3.7) \quad y = \left\{ M_{yw} + M_{y\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta w} \right\} w + \left\{ M_{yv} + M_{y\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta v} \right\} v \\ + \left\{ M_{yr} + M_{y\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta r} \right\} r$$

$$(2.3.8) \quad u = \left\{ M_{uw} + M_{u\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta w} \right\} w + \left\{ M_{uv} + M_{u\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta v} \right\} v \\ + \left\{ M_{ur} + M_{u\Delta} (I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta M_{\Delta r} \right\} r$$

Segue-se então, que os elementos da matriz  $F(P_a, \Delta, C)$  do sistema da figura 2.8 são as funções de transferência contidas na equações (2.3.6), (2.3.7) e (2.3.8). Assim,  $F(P_a, \Delta, C)$  é escrito em função dos termos de  $F(P_a, C)$  de acordo com essas equações. A hipótese de que  $F(P_a, C) \in M(RH_{\infty})$  garante que todos os elementos de  $F(P_a, \Delta, C)$ , com exceção do termo  $(I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1}$ , são elementos de  $M(RH_{\infty})$ . Por outro lado, a condição  $\|M_{\Delta\Delta}\|_{\infty} < \frac{1}{g}$  implica que  $(I - \Delta M_{\Delta\Delta})^{-1}$  é elemento de  $M(RH_{\infty})$

para todo  $\Delta \in M(RH_\infty)$  tal que  $\|\Delta\|_\infty \leq g$ , (Teorema do Pequeno Ganho, Zhou et al, 1996, pg 218), em particular para  $\Delta \in S_\Delta$ .

Portanto  $F(P_a, \Delta, C) \in M(RH_\infty)$  o que implica que o sistema  $(P_a, \Delta, C)$  é estável para todo  $\Delta \in S_\Delta$  □

**Observação:** No decorrer deste trabalho, sempre que se mencionar um sistema perturbado com controlador estabilizante, será admitido que as condições da Proposição 2.3.2 são satisfeitas.

Assim, para a finalidade de análise de desempenho de um sistema perturbado com controlador estabilizante, referente a aplicação  $w \mapsto z$ , considera-se a seguinte configuração abaixo

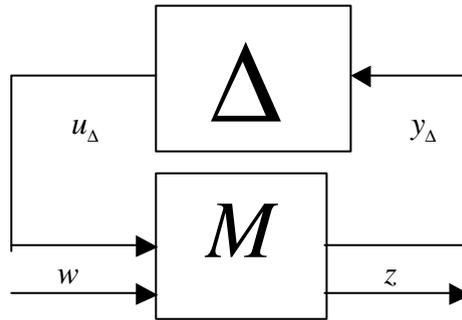


Figura 2.9- Análise de desempenho para controlador estabilizante

onde

$$(2.3.9) \quad M = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta w} \\ M_{z\Delta} & M_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta} + P_{\Delta u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\Delta} & P_{\Delta w} + P_{\Delta u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{yw} \\ P_{z\Delta} + P_{zu} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\Delta} & P_{zw} + P_{zu} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{yw} \end{bmatrix}$$

Para ser mais concreto, sejam  $w \in RH_2^{n_w}$  e  $z \in RH_2^{n_z}$ . A aplicação  $w \mapsto z$  é dada por:

$$(2.3.10) \quad z = F_{zw}(\Delta) w = \left[ M_{zw} + M_{z\Delta} \Delta (I - M_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} M_{\Delta w} \right] w.$$

Note-se pela demonstração da Proposição 2.3.2 que  $F_{zw}(\Delta) \in RH_{\infty}^{n_z \times n_w}$  para todo  $\Delta \in S_{\Delta}$ . Isso permitirá definir o seguinte critério de desempenho  $H_2$ , cuja motivação será discutida a seguir

$$(2.3.11) \quad J(\Delta) = \left\| F_{zw}(\Delta) \mathbf{f}_w \right\|_2^2$$

onde  $\mathbf{f}_w \in RH_2^{n_w \times n_w}$  é fator espectral da densidade espectral  $\Gamma_w = \mathbf{f}_w \mathbf{f}_w^*$  do sinal de entrada  $w$ .

A motivação para o uso do critério  $H_2$  definido acima baseia-se em alguns conceitos elementares da Teoria de Processos Estocásticos os quais são brevemente apresentados de maneira geral. Mais detalhes podem ser encontrados por exemplo em Brown & Hwank (1997).

Admita que o sinal de entrada  $w(t)$  do sistema da figura 2.9 seja um processo estocástico estacionário, de densidade espectral conhecida  $\Gamma_w$ . Sabe-se que o valor esperado da energia deste sinal (isto é,  $E\{\|w(t)\|_2^2\}$ ) é dada por :

$$E\{\|w(t)\|_2^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \Gamma_w(j\omega) d\omega,$$

e como  $z = F_{zw}(\Delta) w$ , tem-se que a densidade espectral do sinal  $z$  é dada por :

$$\Gamma_z(j\mathbf{w}) = \{F_{zw}(\Delta)\}(j\mathbf{w})\Gamma_w(j\mathbf{w})\{F_{zw}(\Delta)\}(j\mathbf{w})^* \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R},$$

e portanto:

$$E\left\{\|z(t)\|_2^2\right\} = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}\Gamma_z(j\mathbf{w}) d\mathbf{w} = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}\{F_{zw}(\Delta)\}(j\mathbf{w})\Gamma_w(j\mathbf{w})\{F_{zw}(\Delta)\}(j\mathbf{w})^* d\mathbf{w}.$$

Tomando-se uma fatoração espectral de  $\Gamma_w$ , isto é,  $\Gamma_w(j\mathbf{w}) = \mathbf{f}_w(j\mathbf{w})^* \mathbf{f}_w(j\mathbf{w})$  (Francis,(1987)) a última expressão da igualdade acima é exatamente igual a  $\|F_{zw}(\Delta)\mathbf{f}_w\|_2^2$ . Portanto, o critério definido em (2.3.11) é a energia esperada da resposta do sistema (perturbado) estabilizado quando o sinal de entrada é um processo estocástico estacionário de densidade espectral conhecida.

Assim sendo, tomando  $w$  como um sinal estocástico de perturbação, a próxima definição é basicamente a formulação do problema de análise de desempenho  $H_2$ -Robusto.

**Definição 2.3.3:** O “pior-caso” de desempenho  $H_2$  de um sistema perturbado, com controlador estabilizante  $C$ , denotado por  $\mathbf{h}$ , é o valor ótimo do problema

$$\sup\{J(\Delta) : \Delta \in S_\Delta\}$$

onde  $J(\Delta)$  é o funcional definido em (2.3.11) e  $S_\Delta$  é a classe de perturbações considerada.

Dada a dificuldade do problema de maximização não-linear  $H_2/H_\infty$  correspondente ao problema de análise de desempenho  $H_2$ -Robusto, vários autores têm recorrido a limitantes superiores para a medida de desempenho dada pela definição 2.3.3 (ver Stoorvogel, 1993, Toivonen & Pensar, 1995, Feron, 1997, e Paganini, 1999, por exemplo). Seguindo a linha de Toivonen & Pensar (1995), o primeiro passo para obtenção de tais limitantes é mudar a variável de perturbação  $\Delta$  através de uma transformação linear fracionária sobre ela. Isto será visto com detalhes na próxima seção.

## 2.4-Limitante superior baseado em relaxação lagrangeana.

Nesta seção é deduzido um limitante superior para o “pior-caso”  $H_2$  através de um procedimento que consiste em 3 passos básicos: mudança de variável, aumento da classe de perturbações consideradas e relaxação lagrangeana. Para efeito de simplificação, será considerada uma sub-classe específica da classe de perturbações estruturadas  $S_\Delta$  definida na seção 2.2. Define-se então

$$\bar{S}_\Delta \triangleq \left\{ \Delta \in RH_\infty^{p \times p} : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_l), \Delta_i \in RH_\infty^{r_i \times r_i} \text{ e } \|\Delta_i\|_\infty \leq \mathbf{g} \quad \forall i = 1, \dots, l \right\}.$$

Inicialmente, define-se uma nova variável de perturbação, através de uma mudança de variável, de modo a tornar a função  $F_{z_w}$  (definida em (2.3.10)) linear com relação a esta nova variável, isto é, considera-se a mudança de variável dada pela seguinte transformação linear fracionária:

$$(2.4.1) \quad \bar{T} = \Delta(I - M_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w ; \Delta \in \bar{S}_\Delta,$$

e reescreve-se o funcional custo  $H_2$ , definido em (2.2.11), associado ao sistema perturbado com controlador estabilizante como

$$(2.4.2) \quad J(\bar{T}) = \|\bar{A}_F[\bar{T}]\|_2^2, \quad \bar{A}_F[\bar{T}] = M_{z\Delta}\bar{T} + M_{zw}\mathbf{f}_w, \quad \bar{T} \in RH_\infty^{p \times n_w}$$

Note-se que a despeito da linearização no custo, o conjunto factível da nova variável de perturbação é definido por uma relação complexa (expressão (2.4.1)). Assim, uma nova simplificação é obtida trocando o conjunto de valores  $\bar{T}$  correspondentes a  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$  por um conjunto que o contenha (como subconjunto) e que corresponda a uma restrição mais tratável. Neste sentido, levando em conta a estrutura de blocos de  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$ , escreve-se a relação  $\bar{T} = \Delta(I - M_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w$ , ou equivalentemente,  $\bar{T} = \Delta(M_{\Delta w} \mathbf{f}_w + M_{\Delta\Delta} \bar{T})$ , da seguinte forma :

$$(2.4.3) \quad \bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \vdots \\ \bar{T}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_l \end{bmatrix} (M_{\Delta w} \mathbf{f}_w + M_{\Delta \Delta} \bar{T}),$$

e portanto:

$$(2.4.4) \quad \bar{T}_i = \Delta_i \{R_i (M_{\Delta w} \mathbf{f}_w + M_{\Delta \Delta} \bar{T})\}, \text{ para } i=1,2,\dots,l,$$

onde  $R_i = [0 \cdots I_i \cdots 0]$  é uma matriz seletora de linhas com a identidade no  $i$ -ésimo

bloco correspondente. Note-se também que  $\bar{T}_i = R_i \bar{T}$  para  $i = 1, \dots, l$ .

A partir de (2.4.4) pode-se escrever para  $\mathbf{f}_w \in RH_2^{n_w \times n_w}$ ,  $\mathbf{f}_w = [\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_{n_w}]$ , as seguintes desigualdades válidas para todo  $\bar{T}$  correspondente a  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$ , como conseqüência de das relações entre as normas  $\|\cdot\|_F$  e  $\|\cdot\|_\infty$ :

$$(2.4.5) \quad \|\{R_i \bar{T} e_k\}(j\mathbf{w})\|_F^2 \leq \mathbf{g}^2 \|R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + R_i M_{\Delta \Delta}(j\mathbf{w})(\bar{T}(j\mathbf{w})) e_k\|_F^2,$$

$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, l$ ;  $k = 1, \dots, n_w$ ; onde  $e_k$  é o  $k$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^{n_w}$ , e

$$\mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \triangleq \mathbf{f}_w(j\mathbf{w}) e_k.$$

E agora, definindo para  $T \in RH_2^p$  os funcionais :

$$c_{0i}^k [T](j\mathbf{w}) = \|\{R_i T\}(j\mathbf{w})\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + R_i M_{\Delta \Delta}(j\mathbf{w}) T(j\mathbf{w})\|_F^2,$$

$i = 1, \dots, l ; k = 1, \dots, n_w$ ,

obtém-se um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$ , denotado por  $\bar{\mathbf{h}}$ , que é o valor ótimo do problema

$$\max_{\bar{T} \in RH_2^p \times n_w} \left\| \bar{A}_F [\bar{T}] \right\|_2^2 \text{ sujeito a } c_{0i}^k [\bar{T}e_k](j\omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l ; k = 1, \dots, n_w.$$

$k$  é o índice das colunas de  $\mathbf{f}_w = [\mathbf{f}_1 : \dots : \mathbf{f}_{n_w}]$ ,  $i$  é o índice dos blocos de perturbação.

Como

$$\left\| \bar{A}_F [\bar{T}] \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n_w} \left\| \bar{A}_{Fk} [\bar{T}e_k] \right\|_2^2$$

onde, para  $T \in RH_2^p$ ,  $\bar{A}_{Fk} [T] \triangleq M_{z\Delta} T + M_{zw} \mathbf{f}_k$ , tem-se que  $\bar{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^{n_w} \mathbf{h}_k$ , onde  $\mathbf{h}_k$  é o valor

ótimo do seguinte problema de otimização

$$\max_{T \in RH_2^p} \left\| \bar{A}_{Fk} [T] \right\|_2^2 \text{ sujeito a } c_{0i}^k [T](j\omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l, k = 1, \dots, n_w.$$

Em outras palavras, um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$   $\mathbf{h}$ , é dado pela soma dos  $n_w$  valores ótimos de problemas de otimização do seguinte tipo

$$\mathbf{Problema a:} \max_{T \in RH_2^p} \left\| A_F [T] \right\|_2^2, \text{ sujeito a } c_{0i} [T](j\omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l,$$

onde

$$\|A_F [T]\|_2^2 = M_{z\Delta} T + M_{zw} \mathbf{f}_k,$$

$$c_{0i} [T](j\mathbf{w}) = \|R_i T(j\mathbf{w})\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|R_i M_{\Delta w}(j\mathbf{w}) \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + R_i M_{\Delta\Delta}(j\mathbf{w}) T(j\mathbf{w})\|_F^2, \quad i=1, \dots, l,$$

A despeito da linearização do critério de otimização e da simplificação obtida por trocar o conjunto dos valores  $\bar{T}$  correspondentes a  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$  pelo conjunto factível do **Problema a**, este ainda é de difícil solução por tratar-se de um problema de maximização de função convexa envolvendo infinitas restrições. Devido a esta dificuldade, irá se recorrer a limitantes superiores de  $\mathbf{h}_a$  (valor ótimo do **Problema a**), obtidos por relaxação lagrangeana do **Problema a**.

O “pior-caso”  $\mathbf{h}$  será então limitado pela soma de valores ótimos de problemas de otimização convexa correspondentes a relaxação lagrangeana aplicada a problemas da forma do Problema a.

Para aplicar relaxação lagrangeana ao **Problema a**, considere o seguinte conjunto de multiplicadores de Lagrange:

$$(2.4.6) \quad S_h = \left\{ h = (h_1, \dots, h_l) : h_i \in RL_\infty; \tilde{h}_i = h_i; h_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l \right\}.$$

O Funcional Lagrangeano relativo ao **Problema a**, é definido por:

$$L_a(T, h) = \|A_F [T]\|_2^2 - \left\{ \sum_{i=1}^l c_i(T, h_i) \right\}, \quad \text{onde } c_i(T, h_i) \triangleq (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(j\mathbf{w}) c_{0i}[T](j\mathbf{w}) d\mathbf{w}.$$

Para todo  $h \in S_h$ , se  $T$  pertence ao conjunto factível do Problema a, então

$$L_a(T, h) \geq \|A_F [T]\|_2^2$$

o que implica em

$$L_*(h) \triangleq \sup \{ L_a(T, h) : T \in RH_2^p \} \geq \sup \{ \|A_F [T]\|_2^2 : c_{0i}[T](j\omega) \leq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l \}$$

ou seja,  $L_*(h) \geq \mathbf{h}_a$ , onde  $L_*(h)$  é o funcional dual lagrangeano referente ao **Problema**

a. Como a desigualdade acima vale para todo  $h \in S_h$ , um limitante superior de  $\mathbf{h}_a$  é então dado pelo valor ótimo  $\bar{\mathbf{h}}_h$  do seguinte problema:

**Problema L1:** 
$$\inf \{ L_*(h) : h \in S_h \}$$

A dificuldade de se lidar com a classe  $S_h$  em toda a sua generalidade, como definida em (2.4.6) tem gerado na literatura diferentes abordagens para determinar uma conveniente subclasse, entre as quais destacam-se as seguintes, as duas primeiras para o caso de perturbações não-estruturadas, a terceira para o caso de perturbações estruturadas:

- (i) Stoorvogel (1993): Com o objetivo de facilitar o correspondente problema de síntese, considerou o caso mais simples, chamado de “multiplicadores constantes”, que consiste em tomar o ínfimo sobre o conjunto dos números reais positivos:  $\bar{\mathbf{h}}_s \triangleq \inf \{ L_*(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+ \}$ .

- (ii) Toivonen & Penser (1995): Consideram classes de multiplicadores definidos por equações de estado de uma dada ordem prescrita, e sugerem que  $L_*(h)$  deve ser minimizado com respeito aos parâmetros correspondentes.
- (iii) Feron (1997): Classe de multiplicadores linearmente parametrizados com estrutura bloco-diagonal, para perturbações passivas (ao invés de limitações na norma).
- (iv) Classes mais gerais de multiplicadores linearmente parametrizados, quais sejam

$$S_h \triangleq \left\{ h = g + \tilde{g} : g \in RH_\infty, g(s) = C(sI - A_G)^{-1} B_G + D, \text{ para } C \in \mathbb{R}^n, D \in \mathbb{R} : \forall \omega \in \mathbb{R}, g(j\omega) + \tilde{g}(j\omega) \geq 0 \right\}, A_G \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_G \in \mathbb{R}^n \text{ fixos,}$$

são considerados em Correa & Sales (2005) ( para perturbações não-estruturadas e limitadas em norma onde são também propostos métodos de busca iterativa para a classe  $S_h$  .

Uma motivação para considerar classes lineares, é que obter o valor ótimo correspondente do Problema L1 é equivalente a encontrar o valor ótimo de um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI. Isso foi mostrado para o caso de perturbações não-estruturadas em Correa & Sales (2005). As mesmas técnicas serão usadas no capítulo 3 para se obter um resultado semelhante para o caso de perturbações estruturadas. A motivação deste trabalho é o fato de que os limitantes obtidos sem levar em conta a estrutura em blocos diagonal das perturbações estruturadas podem ser por demais conservadores para estes.

Na próxima seção, como alternativa à relaxação lagrangeana, será usado um procedimento baseado na técnica chamada “S-Procedure” (Boyd et al ,1994, pg 25) em conjunto com **Problema a** para deduzir um outro limitante superior para o “pior-caso”  $H_2$  de desempenho de um dado controlador, de forma análoga àquela utilizada por Paganini & Feron (2000) no contexto de sinais de perturbação (ao invés de funções de transferência de perturbação como no caso da derivação aqui apresentada).

## 2.5-Limitante superior baseado em “S-Procedure”.

Nesta seção é deduzido um limitante superior para o “pior-caso”  $H_2$  através de um procedimento baseado na técnica “S-procedure”.

Recorde-se que na seção anterior foi mostrado que a soma dos  $n_w$  valores ótimos de problemas de maximização sujeitos a infinitas restrições quadráticas é um limitante superior para o “pior-caso”.

Tais problemas de maximização são da forma do Problema a que é dado por

**Problema a:**  $\max_{T \in RH_2^p} \|A_F [T]\|_2^2$ , sujeito a  $c_{0i} [T](j\omega) \leq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l$ ,

onde

$$\|A_F [T]\|_2^2 = M_{z\Delta} T + M_{zw} \mathbf{f}_k, \quad M_{z\Delta} \in RH_\infty^{n_z \times n_p}, \quad M_{zw} \in RH_\infty^{n_z \times n_w}, \quad \mathbf{f}_k \in RH_2^{n_w},$$

$$c_{0i} [T](j\omega) = \|R_i T(j\omega)\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|R_i M_{\Delta w}(j\omega) \mathbf{f}_k(j\omega) + R_i M_{\Delta \Delta}(j\omega) T(j\omega)\|_F^2, \quad i=1, \dots, l,$$

$R_i = [0 \cdots I_{f_i} \cdots 0]$  é uma matriz seletora de linhas.

Neste ponto a formulação desta seção se diferencia da seção anterior. Como alternativa à relaxação lagrangeana aplicada ao **Problema a** na seção 2.4, analisa-se sob que condições existe  $Y \in RL_{\infty}^{n_w \times n_w}$ ,  $Y^{\sim} = Y$  tal que,  $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$  tem-se

$$(2.5.1) \quad \|M_{z\mathbf{w}}(j\mathbf{w})\mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + M_{z\Delta}(j\mathbf{w})T(j\mathbf{w})\|_F^2 \leq \langle \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}), Y(j\mathbf{w})\mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \rangle_F$$

para todo  $T \in RH_2^p$  tal que  $c_{0i}[T](j\mathbf{w}) \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . (Isto é, para todo elemento pertencente ao conjunto factível do **Problema a**).

Para tal  $Y$ , integrando em ambos os lados de (2.5.1) tem-se que

$$(2.5.2) \quad \|M_{z\mathbf{w}}\mathbf{f}_k + M_{z\Delta}T\|_2^2 \leq \langle \mathbf{f}_k, Y\mathbf{f}_k \rangle$$

para todo  $T \in RH_2^p$  tal que  $c_{0i}[T](j\mathbf{w}) \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, l$

o que implica diretamente em

$$(2.5.3) \quad \mathbf{h}_a \leq \langle \mathbf{f}_k, Y\mathbf{f}_k \rangle$$

onde  $\mathbf{h}_u$  é o valor ótimo do Problema a. Como o lado direito de (2.5.3) vale para qualquer  $Y$  com as características mencionadas acima, um limitante superior mais preciso é dado pelo valor ótimo do seguinte problema :

**Problema k:** 
$$\inf_{Y \in S_Y} \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle,$$

onde  $S_Y$  denota o conjunto das matrizes de funções  $Y$  com as características desejadas. Assim, para tais  $Y$  satisfazendo (2.5.1), conclui-se que o valor ótimo do **Problema a** limitado superiormente pelo valor ótimo do **Problema k**. Consequentemente, o índice “pior-caso”  $H_2$  será limitado pela soma de  $n_w$  valores ótimos de problemas como o

**Problema k.**

Para deduzir sob que condições (2.5.1) é satisfeita, consideram-se as seguintes

formas quadráticas definidas sobre  $\begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$  :

$$(2.5.4) \quad \left\langle \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}, P(j\mathbf{w}) \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix} \right\rangle_F \triangleq \left\| M_{z\mathbf{w}}(j\mathbf{w}) \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + M_{z\Delta}(j\mathbf{w}) T(j\mathbf{w}) \right\|_F^2$$

$$(2.5.5) \quad \left\langle \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}, Q_i(j\mathbf{w}) \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix} \right\rangle_F \triangleq c_{0i}[T](j\mathbf{w}), \quad i=1, \dots, l.$$

Note-se agora que o lado direito de (2.5.4) pode ser escrito como

$$\left\langle \left[ M_{z\Delta}(j\omega) \quad M_{zw}(j\omega) \right] \begin{bmatrix} T(j\omega) \\ \mathbf{f}_k(j\omega) \end{bmatrix}, \left[ M_{z\Delta}(j\omega) \quad M_{zw}(j\omega) \right] \begin{bmatrix} T(j\omega) \\ \mathbf{f}_k(j\omega) \end{bmatrix} \right\rangle_F,$$

de maneira que

$$(2.5.6) \quad P(j\omega) = \begin{bmatrix} M_{z\Delta}^{\sim}(j\omega) \\ M_{zw}^{\sim}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{z\Delta}(j\omega) & M_{zw}(j\omega) \end{bmatrix}$$

Note-se também que cada  $c_{0i}[T](j\omega)$ ,  $i=1, \dots, l$ , pode ser escrito como:

$$\langle R_i T(j\omega), R_i T(j\omega) \rangle_F - \mathbf{g}^2 \left\langle R_i \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(j\omega) & M_{\Delta w}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(j\omega) \\ \mathbf{f}_k(j\omega) \end{bmatrix}, R_i \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(j\omega) & M_{\Delta w}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(j\omega) \\ \mathbf{f}_k(j\omega) \end{bmatrix} \right\rangle_F$$

Portanto:

$$(2.5.7) \quad Q_i(j\omega) = \begin{bmatrix} R_i^T R_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{g}^2 \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}^{\sim}(j\omega) \\ M_{\Delta w}^{\sim}(j\omega) \end{bmatrix} R_i^T R_i \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(j\omega) & M_{\Delta w}(j\omega) \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, l.$$

Note-se que em cada frequência as matrizes  $P(j\omega)$  e  $Q(j\omega)$  são matrizes hermitianas.

Considere então o seguinte lema (“S-Procedure”):

**Lema 2.5.1:** Sejam  $T_0, \dots, T_{n_w} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  matrizes hermitianas. Se existem  $\mathbf{t}_i \in \mathbb{R}, \mathbf{t}_i \geq 0$  para

$i=1, \dots, l$ , tal que  $T_0 - \sum_{i=1}^l \mathbf{t}_i T_i \leq 0$ , então

$$\mathbf{V}^T T_0 \mathbf{V} \leq 0 \text{ para todo } \mathbf{V} \in \mathbb{C}^m \text{ tal que } \mathbf{V}^T T_i \mathbf{V} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, l,$$

onde  $\mathbf{V}$  é o conjugado de  $\mathbf{V}$ .

∇

Obs: Se  $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$  é uma matriz hermitiana, então  $\mathbf{V}^T P \mathbf{V} \in \mathbb{R}$  para todo  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^m$ .

**Demonstração:** Sejam  $T_0, \dots, T_l \in \mathbb{C}^{m \times m}$  e  $t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0, i = 1, \dots, l$ , como definidos no

enunciado Lema 2.5.1. Multiplicando  $T_0 - \sum_{i=1}^l t_i T_i$  a esquerda e a direita respectivamente

por  $\mathbf{V}^T$  e  $\mathbf{V}$ , onde  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^m$ , tem-se que

$$\mathbf{V}^T T_0 \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \left( \sum_{i=1}^l t_i T_i \right) \mathbf{V} \leq 0$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{V}^T T_0 \mathbf{V} \leq \left( \sum_{i=1}^l t_i \mathbf{V}^T T_i \mathbf{V} \right)$$

Se  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^m$  é tal que  $\mathbf{V}^T T_i \mathbf{V} \leq 0$  para  $i = 1, \dots, l$ , segue do fato de que  $t_1 \geq 0, \dots, t_l \geq 0$

que

$$\left( \sum_{i=1}^l t_i \mathbf{V}^T T_i \mathbf{V} \right) \leq 0$$

e portanto  $\mathbf{V}^T T_0 \mathbf{V} \leq 0$ .

□

Invocando então o Lema 2.5.1, tem-se que uma condição suficiente para se ter para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$

$$\|M_{z\omega}(j\mathbf{w})\mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + M_{z\Delta}(j\mathbf{w})T(j\mathbf{w})\|_F^2 \leq \langle \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}), Y(j\mathbf{w})\mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \rangle_F$$

para todo  $\begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}$  tal que  $\left\langle \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}, Q_i(j\mathbf{w}) \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix} \right\rangle_F \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, l,$

ou equivalentemente, definindo  $Y_a(j\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y(j\mathbf{w}) \end{bmatrix},$

$$\left\langle \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}, (P(j\mathbf{w}) - Y_a(j\mathbf{w})) \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix} \right\rangle_F \leq 0$$

para todo  $\begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}$  tal que  $\left\langle \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}, Q_i(j\mathbf{w}) \begin{bmatrix} T(j\mathbf{w}) \\ \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \end{bmatrix} \right\rangle_F \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, l,$

é que, para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$  existam  $I_i(j\mathbf{w}) \in \mathbb{R}, I_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \forall i = 1, \dots, l,$  tal que

$$(2.5.8) \quad P(j\mathbf{w}) - Y_a(j\mathbf{w}) \leq \sum_{i=1}^l I_i(j\mathbf{w}) Q_i(j\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}.$$

Note que :

$$P(j\omega) - Y_a(j\omega) - \sum_{i=1}^l \mathbf{I}_i(j\omega) \mathcal{Q}_i(j\omega) = M^\sim(j\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^l \mathbf{I}_i(j\omega) R_i^T R_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M(j\omega) - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l \mathbf{I}_i(j\omega) R_i^T R_i & 0 \\ 0 & Y(j\omega) \end{bmatrix},$$

onde  $M = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta\omega} \\ M_{z\Delta} & M_{z\omega} \end{bmatrix}$ .

Assim, definindo  $\Lambda(j\omega) = \sum_{i=1}^l \mathbf{I}_i(j\omega) R_i^T R_i = \text{diag}\{\mathbf{I}_1(j\omega) I_{r_1}, \dots, \mathbf{I}_l(j\omega) I_{r_l}\}$ , tem-se que

(2.5.8) é equivalente a existir  $\mathbf{I}_i(j\omega) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{I}_i(j\omega) \geq 0$   $i = 1, \dots, l$ , tal que

$$(2.5.9) \quad M^\sim(j\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda(j\omega) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M(j\omega) - \begin{bmatrix} \Lambda(j\omega) & 0 \\ 0 & Y(j\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Mostrou-se então, que o **Problema k** (cuja solução é um limitante superior do valor ótimo do **Problema a**) é um problema de otimização convexa sujeito a uma famílias infinita de restrições LMI, uma para cada frequência. Segue-se que o índice “pior-caso”  $H_2$  é limitado pela soma de valores ótimos de problemas deste tipo. Esse é o conteúdo da Proposição a seguir, cuja demonstração foi feita durante o desenvolvimento desta seção.

**Proposição 2.5.2:** Para um sistema robustamente estabilizado sobre a classe de perturbações  $\bar{S}_\Delta$ , tem-se que

$$\mathbf{h} \leq \sum_{k=1}^{n_w} J_k$$

onde para  $k = 1, \dots, n_w$ ,  $J_k$  é o valor ótimo do seguinte problema

$$\min_{Y \in S_Y, \Lambda \in S_\Lambda} \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle$$

sujeito a

$$M^{\sim}(j\mathbf{w}) \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda(j\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M(j\mathbf{w}) - \begin{bmatrix} \Lambda(j\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & Y(j\mathbf{w}) \end{bmatrix} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$$

onde

$$S_\Lambda = \left\{ \Lambda = \text{diag} \{ \mathbf{I}_1 I_{r_1}, \dots, \mathbf{I}_l I_{r_l} \} : \forall i = 1, \dots, l, \mathbf{I}_i \in RL_\infty, \mathbf{I}_i^{\sim} = \mathbf{I}_i, \mathbf{I}_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_Y = \left\{ Y \in RL_\infty^{n_w \times n_w} : Y^{\sim} = Y \right\}, \mathbf{f}_k \in RH_2^{n_w}. \quad \nabla$$

No capítulo 3 será mostrado que o confinamento das variáveis de decisão  $\Lambda$  e  $Y$  em subespaços de dimensão finita (pré-especificada) de  $M(RL_\infty)$  converte o problema de achar cada  $J_k$  dado pela Proposição 2.5.2, em um problema de otimização sujeito a uma restrição LMI (e não mais a uma família de LMIs parametrizada pela frequência).

## 2.6-Limitante superior baseado em resultado de LFT

Esta seção tem por objetivo mostrar que, quando perturbações não-estruturadas são consideradas, é possível obter uma mudança de variável linearizante para o índice de desempenho que, diferentemente da que foi feita na seção 2.4, resulte diretamente em uma restrição afim na nova variável de perturbação, o que leva a um limitante potencialmente menos conservador.

Recorde-se então que o “pior-caso”  $H_2$  de um sistema robustamente estável sobre uma classe de perturbações não-estruturadas é definido como o valor ótimo do problema

$$\sup \left\{ \left\| M_{zw} \mathbf{f}_w + M_{z\Delta} \Delta (I - M_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w \right\|_{\infty} : \Delta \in D \right\}$$

onde  $D = \{ \Delta \in M(RH_{\infty}) : \|\Delta\|_{\infty} \leq \mathbf{g} \}$ .

Por simplificação, as perturbações serão consideradas quadradas de dimensão igual a  $p$ . O resultado que será enunciado a seguir permitirá escrever uma restrição afim na variável  $\bar{T} = \Delta (I - M_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1}$ , o que eliminará a não-linearidade do problema de

avaliação de desempenho sem a necessidade de ampliar a classe de perturbações considerada, como foi feito na seção 2.4 .

**Teorema 2.6.1**(Green & Limebeer (1995), pg 153): Sejam  $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in M(RL_\infty)$

e  $K \in M(RL_\infty)$  tais que  $\text{Det}(I - P_{22}(\infty)K(\infty)) \neq 0$ ,  $P_{21}(j\omega)$  tem posto coluna cheio para todo  $\omega \in \mathbb{R}$  . Considere a L.F.T definida por

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

Se  $P^{-1}P = \frac{1}{\mathbf{g}^2}I$  , então:

$$\|K\|_\infty \leq \mathbf{g} \text{ se e somente se } \|F_l(P, K)\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{g}}. \quad \nabla$$

Assim, achando  $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & M_{\Delta\Delta} \end{bmatrix}$  nas condições do Teorema 2.6.1 e escrevendo

$$F_l(P, \Delta) = P_{11} + P_{12}\hat{T}P_{21}, \text{ onde } \bar{T} = \Delta(I - M_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}, \text{ tem-se que}$$

$$\|\Delta\|_\infty \leq \mathbf{g} \text{ se e somente se } \|P_{11} + P_{12}\bar{T}P_{21}\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{g}}, \text{ e o problema de determinar o “pior-}$$

caso”  $H_2$  é equivalente ao seguinte problema:

**Problema b:**  $\max_{\bar{T} \in RH_\infty^{p \times p}} \left\| \bar{A}_F[\bar{T}] \right\|_2^2$  sujeito a  $\left\| \bar{A}_b(\bar{T}) \right\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{g}}$

onde

$$\bar{A}_F[\bar{T}] = M_{zw} \mathbf{f}_w + M_{z\Delta} \bar{T} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w; \quad \bar{A}_b(\bar{T}) = P_{11} + P_{12} \bar{T} P_{21}.$$

Para determinar  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  e  $P_{21}$  satisfazendo as condições do Teorema 2.6.1, usam-se as

seguintes equações, obtidas a partir da igualdade  $P \tilde{P} = \frac{1}{\mathbf{g}^2} I$ :

$$(2.6.1) \quad \begin{cases} P_{11} \tilde{P}_{11} + P_{21} \tilde{P}_{21} = \frac{1}{\mathbf{g}^2} I \\ P_{11} \tilde{P}_{12} + P_{21} \tilde{M}_{\Delta\Delta} = 0 \\ P_{12} \tilde{P}_{11} + M_{\Delta\Delta} \tilde{P}_{21} = 0 \\ P_{12} \tilde{P}_{12} + M_{\Delta\Delta} \tilde{M}_{\Delta\Delta} = \frac{1}{\mathbf{g}^2} I \end{cases}$$

Usa-se também, o fato de que a condição  $\|M_{\Delta\Delta}\|_\infty < \mathbf{g}^{-1}$ , é equivalente a

$(I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta} \tilde{M}_{\Delta\Delta})(j\omega) > 0$  para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ .  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  e  $P_{21}$  são então definidos por:

$$P_{12} \tilde{P}_{12} \triangleq \frac{1}{\mathbf{g}^2} \Phi \tilde{\Phi}, \text{ onde } \Phi \in RH_\infty^{p \times p} \text{ é tal que } \Phi \tilde{\Phi} = I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta} \tilde{M}_{\Delta\Delta};$$

$$P_{11} \triangleq -(P_{12}^{\sim})^{-1} M_{\Delta\Delta}^{\sim} P_{21};$$

$$P_{21} \triangleq \Psi^{-1}, \text{ onde } \Psi \in RH_{\infty}^{p \times p} \text{ é tal que } \Psi^{\sim} \Psi = \mathbf{g}^2 \left\{ I + M_{\Delta\Delta} (P_{12}^{-1}) (P_{12}^{-1})^{\sim} M_{\Delta\Delta}^{\sim} \right\}.$$

Note-se que os termos  $P_{12}$  e  $P_{21}$  são fatores espectrais de funções bipróprias, e portanto inversíveis em  $M(RH_{\infty})$ , o que permite a mudança de variável  $T = P_{12} \bar{T} P_{21}$ , feita em um dos termos da restrição do **Problema b** para efeito de simplificação. Segue-se que **Problema b** é equivalente ao seguinte problema

$$\textbf{Problema c: } \max_{T \in RH_{\infty}^{p \times p}} \left\| \Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F \right\|_2^2, \text{ sujeito a } \left\| \Xi_c + T \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\mathbf{g}}$$

onde

$$\Theta_F^a = M_{z\Delta} P_{12}^{-1}; \quad \Theta_F^b = P_{21}^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w; \quad \Xi_F = M_{zw} \mathbf{f}_w; \quad \Xi_c = P_{11}.$$

O terceiro problema de otimização convexa (cuja solução é um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$ ) é então formulado a partir de relaxação lagrangeana aplicada ao **Problema c** Para isto, será a usada a seguinte relação de normas (Zhou et al,1996)) :

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{W \in B_1[M(RH_2)]} \|WG\|_2, \text{ para todo } G \in M(RL_{\infty}),$$

$$\text{onde } B_1[M(RH_2)] = \left\{ W \in M(RH_2) : \|W\|_2^2 = 1 \right\}.$$

Assim, para todo  $W \in B_1[RH_2^{p \times p}]$ , se  $T$  pertence ao conjunto factível do

Problema c, tem-se que

$$\|W(\Xi_c + T)\|_2^2 \leq \frac{1}{\mathbf{g}^2} \text{ para todo } W \in B_1[RH_2^{p \times p}]$$

ou equivalentemente,  $\|W(\Xi_c + T)\|_2^2 \leq \frac{1}{\mathbf{g}^2} \|W\|_2^2$  para todo  $W \in RH_2^{p \times p}$ .

A seguir, considerando um  $W \in RH_2^{p \times p}$  fixo (mas arbitrário) esta última desigualdade pode ser escrita como :

$$\langle W(\Xi_c + T), W(\Xi_c + T) \rangle - \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle W, W \rangle \leq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle g_0 g_0^{-1} W(\Xi_c + T), g_0 g_0^{-1} W(\Xi_c + T) \rangle - \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 g_0^{-1} W, g_0 g_0^{-1} W \rangle \leq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle g_0 \mathbf{q}, g_0 c_c(T) \rangle \leq 0$$

onde  $\mathbf{q} = g_0^{-1} (g_0^{-1})^\sim W^\sim W$ ,  $c_c(T) \triangleq (\Xi_c + T)(\Xi_c + T)^\sim - \frac{1}{\mathbf{g}^2} I$  e  $g_0 = (s+1)^{-1}$ .

O Lagrangeano referente ao **Problema c** é então definido por:

$$L_c(T, \mathbf{q}) = \|\Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F\|_2^2 - \langle g_0 c_c(T), g_0 \mathbf{q} \rangle$$

onde  $\mathbf{q}$  denota um elemento de  $RL_{\infty}^{p \times p}$ , positivo semidefinido no eixo-  $j\omega$ . Segue-se que um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  é então obtido através da minimização, com respeito aos multiplicadores  $\mathbf{q}$ , do funcional dual Lagrangeano (quando este for finito), isto é:

$$\inf \{L_*(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in S_{\mathbf{q}}\},$$

onde

$$L_*(\mathbf{q}) = \sup \{L_c(T, \mathbf{q}) : T \in RH_{\infty}^{p \times p}\}; S_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q} \in RL_{\infty}^{p \times p} : \mathbf{q}(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}; \mathbf{q} = \mathbf{q}^{\sim}\}.$$

Aspectos referentes ao confinamento destes multiplicadores matriciais a subespaços de dimensão finita serão discutidos no capítulo 3.

## 2.7 – Obtenção de limitantes superiores por meio de sinais de perturbação

A título de completeza, nesta seção será mostrado a obtenção de limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$  através de “sinais de perturbação” como feito em Paganini & Feron (2000). A idéia básica consiste em caracterizar uma classe de sinais

por meio de restrições que são conseqüências lógicas das limitações em norma impostas originalmente às perturbações caracterizadas por funções de transferências.

Será demonstrado que o limitante assim obtido coincide com aquele deduzido na seção 2.4, dado pela soma de  $n_w$  problemas do tipo do **Problema a**.

Considere inicialmente um sistema robustamente estabilizado sobre a classe  $\bar{S}_\Delta$ , que foi definida anteriormente como

$$\bar{S}_\Delta \triangleq \left\{ \Delta \in RH_\infty^{p \times p} : \Delta = \text{diag} (\Delta_1, \dots, \Delta_l), \Delta_i \in RH_\infty^{r_i \times r_i} \text{ e } \|\Delta_i\|_\infty \leq \mathbf{g} \quad \forall i=1, \dots, l \right\}$$

e o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$ , que foi definido por

$$\mathbf{h} = \sup \left\{ \|F_{zw}(\Delta) \mathbf{f}_w\|_2^2 : \Delta \in \bar{S}_\Delta \right\}$$

onde  $F_{zw}(\Delta) = M_{zw} + M_{z\Delta} \Delta (I - M_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} M_{\Delta w}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}_w \tilde{\mathbf{f}}_w = \Gamma_w$  é a densidade espectral de

$w \in RH_2^{n_w}$ . Escrevendo  $\mathbf{f}_w = [\mathbf{f}_1 : \dots : \mathbf{f}_{n_w}]$ , tem-se que  $\|F_{zw}(\Delta) \mathbf{f}_w\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n_w} \|F_{zw}(\Delta) \mathbf{f}_k\|_2^2$ .

Note-se agora que

$$(2.7.1) \quad F_{zw}(\Delta) \mathbf{f}_k = M_{zw} \mathbf{f}_k + M_{z\Delta} u_\Delta^k$$

para  $u_\Delta^k$  tal que  $u_\Delta^k = \Delta (I - M_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \Leftrightarrow u_\Delta^k = \Delta (M_{\Delta\Delta} u_\Delta^k + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)$ , com  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$ , ( $k$  é o índice das colunas  $\mathbf{f}_w$ ).

Assim, definindo  $\mathfrak{S}_k(u) \triangleq \|M_{z^w} \mathbf{f}_k + M_{z^\Delta} u\|_2^2$ , segue de (2.7.1) que o “pior-caso”  $\mathbf{h}$  pode ser escrito como :

$$\mathbf{h} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n_w} \mathfrak{S}_k(u_\Delta^k) : (u_\Delta^1, \dots, u_\Delta^{n_w}) \in \bar{S}_\Delta^u \right\}$$

onde

$$\bar{S}_\Delta^u \triangleq \left\{ (u_\Delta^1, \dots, u_\Delta^{n_w}) \in RH_2^{p \times n_w} : \exists \Delta \in \bar{S}_\Delta \text{ tal que } \forall k=1, \dots, n_w : u_\Delta^k = \Delta (M_{\Delta\Delta} u_\Delta^k + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k) \right\}$$

Neste ponto, inicia-se a utilização do princípio básico mencionado no início desta seção, que consiste em caracterizar a classe dos  $u_\Delta^k$  que correspondem a  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$ , ou pelo menos, uma classe maior que a contenha. Para isto, note que na definição de  $\bar{S}_\Delta^u$  as igualdades  $u_\Delta^k = \Delta (M_{\Delta\Delta} u_\Delta^k + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)$ ,  $k=1, \dots, n_w$ , são satisfeitas pelo mesmo  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$ . Tal condição será enfraquecida . Neste sentido, considere as classes para  $k=1, \dots, n_w$  :

$$(2.7.2) \quad S_k^u \triangleq \left\{ u \in RH_2^p : \text{existe } \Delta \in \bar{S}_\Delta \text{ tal que } u = \Delta (M_{\Delta\Delta} u + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k) \right\}.$$

Note-se que a definição das classes acima permite um  $\Delta$  para cada  $k \in \{1, \dots, n_w\}$ , de modo que  $\bar{S}_\Delta^u \subset S_1^u \times S_2^u \dots \times S_{n_w}^u$ , e portanto

$$\mathbf{h} \leq \sum_{k=1}^{n_w} \left( \sup \{ \mathfrak{S}_k(u_k) : u_k \in S_k^u \} \right).$$

Por outro lado, segue de (2.7.2) que para todo  $u \in S_k^u$ , tem-se

$$R_i u = \Delta_i R_i (M_{\Delta\Delta} u + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k), \quad i = 1, \dots, l,$$

onde  $R_i$  é a matriz seletora de linha, de modo que para todo  $u \in S_k^u$ ,  $i = 1, \dots, l$ , tem-se

que

$$(2.7.3) \quad \left\| R_i u(j\mathbf{w}) \right\|_F^2 \leq \mathbf{g}^2 \left\| R_i \{ M_{\Delta\Delta}(j\mathbf{w}) u(j\mathbf{w}) + M_{\Delta w}(j\mathbf{w}) \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \} \right\|_F^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}.$$

De (2.7.3), segue-se que se  $u \in S_k^u$ , então  $u \in \tilde{S}_k^u$  onde :

$$\tilde{S}_k^u \triangleq \left\{ u \in RH_2^p : \forall i = 1, \dots, l, \quad c_{0i}^{(k)}[u](j\mathbf{w}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$c_{0i}^{(k)}[u](j\mathbf{w}) \triangleq \left\| R_i u(j\mathbf{w}) \right\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \left\| R_i \{ M_{\Delta\Delta}(j\mathbf{w}) u(j\mathbf{w}) + M_{\Delta w}(j\mathbf{w}) \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \} \right\|_F^2.$$

Ou seja,  $S_k^u \subset \tilde{S}_k^u$ , o que implica

$$(2.7.4) \quad \mathbf{h} \leq \sum_{k=1}^{n_w} \left\{ \sup \mathfrak{S}_k(\tilde{u}_k) : \tilde{u}_k \in \tilde{S}_k^u \right\}$$

e o limitante à direita da desigualdade (2.7.4) é o mesmo limitante  $\bar{\mathbf{h}}$  obtido na seção 2.4 que consiste na resolução de  $n_w$  problemas do tipo do **Problema a**.

Esta abordagem por meio de sinais permite considerar classes mais gerais de perturbação. Seguindo a abordagem de Paganini (1999) e Paganini & Feron (2000) por exemplo, pode-se considerar que os blocos  $\Delta_i$  que aparecem na definição da classe  $\bar{S}_\Delta$  são operadores limitados na norma induzida de  $L_2$  (ao invés de funções de transferências), podendo ser não-lineares e/ou variantes no tempo.

Nesse caso, o operador  $F_{zw}(\Delta) = M_{zw} + M_{z\Delta}\Delta(I - M_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}M_{\Delta w}$  não é linear invariante no tempo (LTI para simplificar) e surge a necessidade de se definir um conveniente critério de performance que coincida com o critério  $H_2$  para o caso LTI definido anteriormente na seção 2.4. Extensões desse tipo podem ser encontradas em Paganini (1999) e Paganini & Feron (2000).

Considere-se então a seguinte classe de perturbações:

$$\bar{S}_\Delta^o \triangleq \left\{ \Delta \in B_c(L_2^p) : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_l) \text{ e } \|\Delta_i\| \leq \mathbf{g} \quad \forall i = 1, \dots, l \right\}$$

onde  $B_c(L_2^p)$  denota os operadores definidos em  $L_2^p$  (possivelmente não-lineares) limitados na norma induzida

Uma extensão do critério  $H_2$  de performance para o caso LTI pode ser dada por:

$$J(\Delta) = \sum_{k=1}^{n_w} \|F_{zw}(\Delta) \mathbf{f}_k\|_2^2$$

onde  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_w}\}$  é uma base de um subespaço de dimensão finita de  $RH_2^p$ . Definindo-se então as classes

$$S_k^{u^{(o)}} \triangleq \{u \in RH_2^p : \text{existe } \Delta \in \bar{S}_\Delta^o \text{ tal que } u = \Delta(M_{\Delta\Delta} u + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)\}$$

e denotando por  $\mathbf{h}_o$  o “pior-caso” de desempenho  $H_2$  para um sistema sujeito a perturbações da classe  $\bar{S}_\Delta^o$ , prova-se de maneira análoga à feita nessa seção para perturbações LTI que

$$\mathbf{h}_o \leq \sum_{k=1}^{n_w} \sup \left\{ \|M_{zw} \mathbf{f}_k + M_{z\Delta} u_k\|_2^2 : u_k \in S_k^{u^{(o)}} \right\}$$

Também para todo  $u_k \in S_k^{u^{(o)}}$ , tem-se que

$$R_i u = \Delta_i R_i (M_{\Delta\Delta} u + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k) \quad \forall i = 1, \dots, l$$

porém, diferentemente do que ocorre no caso de perturbações definidas por funções de transferência, a igualdade acima não ocorre em toda frequência  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , e segue-se que

$$(2.7.5) \quad \|R_i u\|_2^2 \leq \mathbf{g}^2 \|R_i \{M_{\Delta\Delta} u + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k\}\|_2^2 \quad \forall i = 1, \dots, l.$$

Nesse caso, definem-se os seguintes funcionais para  $u \in RH_2^p$ :

$$n_{0i}^{(k)}[u] \triangleq \|R_i u\|_2^2 - \mathbf{g}^2 \|R_i \{M_{\Delta\Delta} u + M_{\Delta w} \mathbf{f}_k\}\|_2^2$$

e segue-se que

$$\mathbf{h}_O \leq \sum_{k=1}^{n_w} \left( \sup \left\{ \|M_{zw} \mathbf{f}_k + M_{z\Delta} \tilde{u}_k\|_2^2 : \tilde{u}_k \in \tilde{S}_k^{u(O)} \right\} \right)$$

onde, para  $k = 1, \dots, n_w$ :

$$\tilde{S}_k^{u(O)} \triangleq \left\{ u \in RH_2^p : n_{0i}^{(k)}[u] \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, l \right\}.$$

Pode-se então aplicar o método de relaxação lagrangeana em cada  $k$  problema:

$$\sup \left\{ \|M_{zw} \mathbf{f}_k + M_{z\Delta} u\|_2^2 : u \in \tilde{S}_k^{u(O)} \right\}$$

Nesse caso, consideram-se os chamados “multiplicadores constantes”, isto é, números reais positivos, ao invés de funções.

Convém observar que a definição da classe  $\overline{S}_\Delta^o$  não menciona a causalidade dos operadores de perturbação. Se a hipótese de causalidade é considerada, pode-se escrever para todo  $T \in [0, \infty)$ :

$$(2.7.6) \quad (R_i u)_T = (\Delta_i R_i \mathbf{x}(u, \mathbf{f}_k))_T$$

onde, para qualquer função  $f(t)$  definida em  $[0, \infty)$ ,  $f_T$  denota a função

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), \forall t \in [0, T] \\ 0, \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

e  $\mathbf{x}(u, \mathbf{f}_k)(t)$  é a inversa da transformada de Laplace aplicada em  $\{M_{\Delta\Delta}u + M_{\Delta w}\mathbf{f}_k\}(s)$ .

De (2.7.6) segue-se que as restrições que definem as classes de sinais de perturbação a serem consideradas podem ser dadas por

$$\int_0^T \|R_i u(t)\|_E^2 dt \leq \mathbf{g}^2 \int_0^T \|R_i \mathbf{x}(u, \mathbf{f}_k)(t)\|_E^2 dt, \quad T \in [0, \infty).$$

onde  $\|\cdot\|_E$  denota a norma euclidiana, e por um abuso de linguagem usam-se as mesmas notações para sinais no domínio da frequência e domínio do tempo.

## 2.8 – Conclusões

Neste capítulo foi discutido a avaliação do desempenho “pior-caso”  $H_2$  para um controlador que assegure a estabilidade de sistemas sujeitos a perturbações em realimentação.

Dadas as dificuldades de se computar este índice, foram apresentados 3 problemas de otimização convexa em espaços de funções, cujas soluções são limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$ .

A formulação do 1º limitante feita na seção 2.4 segue passos idênticos à dedução feita em Correa & Sales (2005) para perturbações não-estruturadas nos fatores coprimos do modelo nominal. Aqui, esse procedimento é estendido para perturbações estruturadas em realimentação, e conforme discutido na seção 2.7, é análogo ao limitante deduzido em Paganini & Feron (2000) por meio de sinais de perturbação.

Com relação à formulação da seção 2.5, embora o limitante resultante (que envolve a minimização de funcional convexo sujeito a infinitas restrições LM.I's) tenha sido deduzido primeiramente em Paganini & Feron (2000), a dedução apresentada nesta seção é ligeiramente diferente da apresentada na referência acima. De fato, aqui “separa-se” o problema original em tantos quantos forem os canais de entrada do sinal de perturbação considerado. Isto não é feito em Paganini & Feron (2000), o que leva a conjectura de que o limitante dado pela Proposição 2.5.2 seja potencialmente menos conservador.

Finalmente, foi apresentado na seção 2.6, um limitante para o “pior-caso”  $H_2$ , cuja dedução baseia-se em operações elementares de LFT, ainda não exploradas para fins de análise de performance robusta. A grande motivação deste procedimento é definir uma mudança de variável que já resulte em uma restrição afim na nova variável de perturbação.

# Capítulo 3

## Parametrizações lineares

### 3.1-Introdução

Os limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$  deduzidos no capítulo 2 são definidos com base em problemas de otimização sobre espaços de funções. Neste capítulo, mostra-se que quando as variáveis de decisão são confinadas a subespaços de dimensão finita (pré-especificados), obtém-se problemas para os quais existem eficientes métodos numéricos de resolução, embora, ao confinamento das variáveis de decisão a subespaços corresponda limitantes mais conservadores para o “pior-caso”  $H_2$ . Em particular, no caso do limitante definido por meio de relaxação lagrangeana na seção 2.4, no qual o problema de otimização em questão se trata da minimização de um funcional dual com relação aos multiplicadores de Lagrange, elementos desta abordagem estão presentes nos trabalhos de Stoorvogel (1993) e Feron (1997).

Stoorvogel (1993) considerou o caso mais simples em que os multiplicadores são confinados ao conjunto dos números reais. Feron (1997), considerando perturbações passivas ao invés de limitadas em norma, se restringe ao caso de multiplicadores caracterizados por funções de transferências com polos em  $-1$ . Aqui, por outro lado serão considerados, para o caso de perturbações estruturadas limitadas em norma, multiplicadores dinâmicos (não-constante) com funções de transferência com qualquer conjunto de pólos em  $\mathbb{C}_+$ .

O capítulo 3 está organizado da seguinte forma :

Na seção 3.2 caracteriza-se o funcional dual (definido na seção 2.4) para multiplicadores fixos por meio de um problema de otimização linear com restrição LMI.

Na seção 3.3 define-se uma classe de multiplicadores linearmente parametrizados e utilizando a caracterização da seção 3.2, mostra-se que o problema de otimização do funcional dual sobre esta classe é equivalente a um problema de otimização linear com restrições dadas por LMIs (o resultado principal é expresso pela **Proposição 3.3.2**).

Uma forma heurística para a escolha das classes lineares é examinada na seção 3.4, com base em uma caracterização de direções descendentes para o funcional dual a partir de multiplicadores dados.

Na seção 3.5, um procedimento análogo de definição de classes lineares e de otimização de funcional custo sobre estas classes é aplicado ao problema formulado na seção 2.5 por meio de “S-procedure” e cujo valor ótimo define um limitante superior para o “pior-caso”  $H_2$  (Proposição 2.5.2). Segue-se aqui também (e de forma mais simples que o caso anterior) que o problema truncado correspondente é equivalente a um problema de otimização linear sujeito a uma restrição LMI. Na seção 3.6, é mostrado que as classes lineares definidas na seção 3.5 de fato possuem elementos que

satisfazem as restrições do problema original. Na seção 3.7 é examinada a questão da escolha de modificar iterativamente as classes lineares definidas na seção 3.5.

Na seção 3.8 considera-se a estratégia de confinar variáveis de decisão a subespaços de dimensão finita pré-especificados para o problema de otimização convexa formulado na seção 2.6, e verifica-se que a versão deste limitante para as classes lineares de multiplicadores (no caso, multiplicadores matriciais) é formalmente análoga ao do primeiro limitante dado pela seção 2.4 (ver **Proposição 3.8.1** e comentários correspondentes).

Conclusões do capítulo são apresentadas na seção 3.9.

## 3.2-Funcional dual e LMI

Nesta seção é dada uma caracterização do funcional dual (quando este é finito) para multiplicadores fixos, como um valor ótimo de um problema de otimização com custo linear e restrição LMI.

Inicialmente, no sentido de simplificar a exposição que se segue, será considerado o caso de perturbações estruturadas com dois blocos, ou seja, considera-se a seguinte classe

$$\bar{S}_{\Delta_2} \triangleq \left\{ \Delta \in RH_{\infty}^{p \times p} : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in RH_{\infty}^{r_i \times r_i}, \|\Delta_i\|_{\infty} \leq \mathbf{g} \quad \forall i = 1, 2 \right\}$$

e conseqüentemente, a seguinte classe de multiplicadores:

$$S_h = S_{h_1 h_2} = \left\{ h = (h_1, h_2) : h_i \in RL_\infty, h_i^\sim = h_i, h_i(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}, i=1,2 \right\}$$

Recorde-se agora, que o funcional lagrangeano associado ao **Problema a** da seção 2.4 (para o caso de perturbações com dois blocos) é escrito explicitamente como

$$L_a(T, h_1, h_2) = \|M_{z\Delta}T + M_{zw}\mathbf{f}_k\|_2^2 - \left\{ \sum_{i=1}^2 (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(j\omega) \left[ \|R_i T(j\omega)\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|(R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k - R_i M_{\Delta\Delta} T)(j\omega)\|_F^2 \right] d\omega \right\}$$

Por outro lado, uma simples manipulação permite mostrar que o funcional lagrangeano pode ser escrito como:

$$(3.2.1) \quad L_a(T, h_1, h_2) = -\left\{ \langle \Gamma_{h_1 h_2} T, T \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, T \rangle \right\} + \|M_{zw}\mathbf{f}_k\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

onde  $\Gamma_{h_1 h_2} \in RL_\infty^{p \times p}$  e  $\Xi_{h_1 h_2} \in RL_2^p$  são definidos por

$$\Gamma_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 h_i \Gamma_{\mathbf{g}}^{(i)} - M_{z\Delta}^\sim M_{z\Delta}, \quad \Gamma_{\mathbf{g}}^{(i)} = R_i^T R_i - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^\sim R_i^T R_i M_{\Delta\Delta},$$

$$\Xi_{h_1 h_2} = -\sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 h_i M_{\Delta\Delta}^\sim R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k - M_{z\Delta}^\sim M_{zw} \mathbf{f}_k,$$

O funcional Lagrangeano é então, relacionado com o funcional custo de um problema de horizonte infinito LQR, através da seguinte proposição:

**Proposição 3.2.1:** Sejam  $E_{h_1 h_2} \in RH_\infty^{p \times p}$  tal que  $\Gamma_{h_1 h_2} = E_{h_1 h_2} + E_{h_1 h_2}^\sim$ ,  $(A_g, B_g, C_g, D_g)$  e  $(A_x, B_x, C_x)$  realizações de  $E_{h_1 h_2}$  e  $(\Xi_{h_1 h_2})_+$  respectivamente, com  $(A_g, B_g)$  e  $(A_x, B_x)$  controláveis,  $A_g$  e  $A_x$  Hurwitz. Defina

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_g & 0 \\ 0 & A_x \end{bmatrix}, \hat{B} \triangleq \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_x \end{bmatrix}, \hat{S} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & S_{xu} \\ S_{xu}^T & S_{uu} \end{bmatrix}, S_{uu} \triangleq D_g + D_g^T, S_{xu}^T \triangleq [C_g \quad C_x],$$

Então, para todo  $y \in RH_2^p$  e  $u \in (L_2[0, \infty))^p$  tal que  $y$  é a transformada de Laplace de  $u$ , tem-se que:

$$\langle \Gamma_{h_1 h_2} y, y \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, y \rangle = \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \right\} dt,$$

onde  $x(\cdot)$  satisfaz  $x(0) = \hat{X}_0$ ,  $\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t)$ ,

∇

**Demonstração:** (Apêndice 3-A)

Segue-se da Proposição 3.2.1 e da expressão do funcional Lagrangeano em (3.2.1) que o funcional dual pode ser escrito como

$$(3.2.2) \quad L_*(h_1, h_2) = -\inf \left\{ \langle \Gamma_{h_1 h_2} T, T \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, T \rangle : T \in RH_2^p \right\} + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2 \\ + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

$$= -\inf \left\{ J(u) : u \in (L_2[0, \infty))^p \right\} + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

onde  $J(u) = \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \right\} dt$  é o funcional custo L.Q.R definido na

Proposição 3.2.1.

Assim, mostrou-se que determinar o funcional dual para multiplicadores fixos envolve resolver um problema de horizonte infinito LQR. A equivalência da solução deste problema com a solução de um problema de otimização linear com restrição LMI. é determinada pelo Lema 3.2.2 que será enunciado a seguir, e que é análogo a um conhecido resultado da literatura devido a Willens (1971) (veja também Boyd et al, 1994, pg 151).

**Lema 3.2.2:** Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xu} \\ S_{ux} & S_{uu} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  tais que

$A$  é Hurwitz,  $S = S^T$ , e  $S_{uu} > 0$ . Para  $u \in (L_2[0, \infty))^m$  defina

$$J(u) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\rangle = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt,$$

onde  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x(0) = x_0$ .

Seja  $Q(P) = A_z^T P + PA_z + PR_z P + Q_z$ , onde

$$A_z = A - BS_{uu}^{-1}S_{ux}, \quad R_z = -BS_{uu}^{-1}B^T, \quad Q_z = S_{xx} - S_{xu}S_{uu}^{-1}S_{xu}^T.$$

Se  $J_* \triangleq \inf \left\{ J(u) : u \in (L_2[0, \infty))^m \right\} > -\infty$ ,  $(A_z, R_z)$  é estabilizável e  $H_z = \begin{bmatrix} A_z & R_z \\ -Q_z & -A_z^T \end{bmatrix}$

não tem autovalores no eixo imaginário, então

$$J_* \triangleq \max \{ x_0^T P x_0 : P = P^T, Q(P) \geq 0 \}$$

ou equivalentemente,  $J_*$  é o valor ótimo do problema

$$\max_{P=P^T} (x_0^T P x_0) \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} A^T P + PA + S_{xx} & PB + S_{xu} \\ B^T P + S_{xu}^T & S_{uu} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \nabla$$

**Demonstração:**(Apêndice 3-A)

Uma condição suficiente para que  $L_*(h_1, h_2)$  seja finito para um par  $(h_1, h_2)$  é que  $\Gamma_{h_1 h_2}(j\omega) \geq \mathbf{e}I \forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{e} > 0$  (Correa & Sales 2005). Se esta condição for imposta ao par  $(h_1, h_2)$ , segue-se que  $J_* < -\infty$ . Ademais, as matrizes  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{S}$  definidos na Proposição 3.2.1 satisfazem as condições do Lema 3.2.2 (uma demonstração desse fato encontra-se no Apêndice 3-A). Assim, aplicando o Lema 3.2.2 na expressão (3.2.2), segue-se que para um par  $(h_1, h_2)$  tal que  $\exists \mathbf{e} > 0$  para o qual  $\Gamma_{h_1 h_2}(j\omega) \geq \mathbf{e}I \forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $L_*(h_1, h_2)$  é escrito como

$$(3.2.3) \quad L_*(h_1, h_2) = -\mathbf{m}_{h_1 h_2} + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

onde  $\mathbf{m}_{h_1 h_2}$  é o valor ótimo do problema

$$(3.2.4) \quad \max_{P=P^T} \left( \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 \right) \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} + S_{xu} \\ \hat{B}^T P + S_{xu}^T & S_{uu} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $S_{xu}$ ,  $S_{uu}$ , e  $\hat{X}_0$ , como definidos na Proposição 3.2.1.

Convém observar que  $-\mathbf{m}_{h_1 h_2}$  é o valor ótimo do problema

$$\min_{P=P^T} \left( \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 \right) \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} + S_{xu} \\ \hat{B}^T P + S_{xu}^T & D_g + D_g^T \end{bmatrix} \geq 0$$

ou equivalentemente (trocando  $-P$  por  $P$ ),  $-\mathbf{m}_{h_1 h_2}$  é o valor ótimo do problema

$$\min_{P=P^T} \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} - S_{xu} \\ \hat{B}^T P - S_{xu}^T & -[D_g + D_g^T] \end{bmatrix} \leq 0$$

Na próxima seção será definida uma classe de multiplicadores sobre a qual será feita a minimização de  $L_*(h_1, h_2)$  com base na caracterização dada acima.

### 3.3-Classes lineares de multiplicadores.

Inicialmente, uma classe linear de multiplicadores é definida por

$$(3.3.1) \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{h_1 h_2} = \bar{S}_{h_1} \times \bar{S}_{h_2}; \\ \bar{S}_{h_i} \triangleq \{h_i = g_i + g_i^{\sim} : g_i \in RH_{\infty}, g_i(s) = c_g^T (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i + d_{g_i}, c_{g_i} \in \mathbb{R}^{n_i}, d_{g_i} \in \mathbb{R}; \\ \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} : g_i(j\mathbf{w}) + g_i^{\sim}(j\mathbf{w}) \geq 0\}, \bar{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \bar{B}_i \in \mathbb{R}^{n_i} \text{ são fixos;} \\ (\bar{A}_i, \bar{B}_i) \text{ controláveis e } \bar{A}_i \text{ Hurwitz.} \end{array} \right.$$

Por outro lado, conforme mencionado na seção anterior, uma condição suficiente para que  $L_*(h_1, h_2)$  seja finito é que exista  $\mathbf{e} > 0$  tal que  $\Gamma(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I$  para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$ .

Portanto, para um dado  $\mathbf{e} > 0$ , definindo-se a seguinte sub-classe de  $\bar{S}_{h_1 h_2}$

$$\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e}) \triangleq \bar{S}_{h_1 h_2} \cap \{(h_1, h_2) : \Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}\}$$

tem-se que  $L_*(h_1, h_2)$  é finito para todo par  $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  e a minimização do funcional dual é feita sobre esta classe, isto é, será determinado

$$\mathbf{h}_{h_1 h_2}^*(\mathbf{e}) \triangleq \inf \{L_*(h_1, h_2) : (h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})\}$$

Aqui surge a questão de saber se  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e}) \neq \emptyset$ . De fato, note primeiramente que

os multiplicadores constantes pertencem a  $\bar{S}_{h_1 h_2}$  (basta tomar  $c_{g_1} = c_{g_2} = 0$ ,  $d_{g_1} = d_{g_2}$

$= h_0/2, h_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ). Portanto,  $(h_0, h_0) \in \bar{S}_{h_1 h_2}$ . Nesse caso, tem-se que

$$\Gamma_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 h_0 (R_i^T R_i - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta\Delta}) - M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta} = h_0 (I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta}) - M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta}$$

Da condição de estabilidade robusta  $\|M_{\Delta\Delta}\|_{\infty} < \mathbf{g}^{-1}$  segue-se que

$$(I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta})(j\mathbf{w}) > 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R},$$

e portanto, dado  $\mathbf{e} > 0$  é fácil impor uma condição sobre  $h_0$  para que  $\Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I$ .

Essa condição é dada por  $h_0 \geq \bar{I}_{\infty} \left[ (\mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim})^{-1} [\mathbf{e}I + M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta}] \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim} \right]$ , onde  $\mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim} \mathbf{f}_{\Delta\Delta}$  é fatoração espectral de  $I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta}$ . Para tal  $h_0$ ,  $(h_0, h_0) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , e assim conclue-se que para qualquer  $\mathbf{e} > 0$ ,  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e}) \neq \emptyset$ .

A utilização da classe  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  tem uma grande motivação computacional. Mais especificamente, será mostrado que determinar  $\mathbf{h}_{h_1 h_2}^*(\mathbf{e})$  envolve essencialmente resolver um problema de otimização linear com restrição LMI. Para demonstrar tal fato a idéia central é usar a caracterização de  $L_*(h_1, h_2)$  como valor ótimo de um problema de otimização linear com restrição LMI vista na seção anterior, e escrever o funcional custo e a restrição LMI em função dos parâmetros “livres” de  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , quais sejam,  $(c_{g_1}, d_{g_1})$  e  $(c_{g_2}, d_{g_2})$ .

Neste sentido, a Proposição 3.3.1 que será enunciada a seguir apresenta realizações  $(A_g, B_g, C_g, D_g)$  e  $(A_x, B_x, C_x)$  de  $E_{h_1 h_2}$  e  $\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+$  respectivamente, nas quais os parâmetros “livres”  $(c_{g_1}, d_{g_1})$  e  $(c_{g_2}, d_{g_2})$  de  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  aparecem de forma afim apenas em  $C_g, D_g,$  e  $C_x$ . Convém recordar que estas são, respectivamente, realizações da parte estável de  $\Gamma_{h_1 h_2}$  e da projeção estável de  $\Xi_{h_1 h_2}$ , onde

$$\Gamma_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 h_i \Gamma_g^{(i)} - M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta}, \quad \Gamma_g^{(i)} = R_i^T R_i - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta\Delta},$$

$$\Xi_{h_1 h_2} = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 h_i M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k - M_{z\Delta}^{\sim} M_{zw} \mathbf{f}_k.$$

A demonstração completa da Proposição 3.3.1 encontra-se no apêndice 3-B, e a idéia central da demonstração é usar a parametrização linear dada pela expressão (3.3.1) para escrever  $E_{h_1 h_2} \in M(RH_\infty)$  tal que  $\Gamma_{h_1 h_2} = E_{h_1 h_2} + E_{h_1 h_2}^{\sim}$  e  $\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+$  como

$$E_{h_1 h_2} = L_{\Gamma_1}(c_{g_1}, c_{g_2}, d_{g_1}, d_{g_2}) Y_E + L_{\Gamma_2}(d_{g_1}, d_{g_2}) - E_F,$$

$$\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+ = L_{\Xi}(c_{g_1}, c_{g_2}, d_{g_1}, d_{g_2}) Y_x - \{M_{z\Delta}^{\sim} M_{zw} \mathbf{f}_k\}_+,$$

onde  $L_{\Gamma_1}(\cdot)$ ,  $L_{\Gamma_2}(\cdot)$  e  $L_{\Xi}(\cdot)$  são funções lineares de  $(c_{g_1}, c_{g_2}, d_{g_1}, d_{g_2})$ , e as matrizes de funções  $Y_E$ ,  $Y_x$  e  $E_F$  não dependem destes parâmetros livres, e são dadas por

$$Y_E = \begin{bmatrix} Y_{g_1} E_g^{(1)} + \left\{ Y_{g_1} \left[ E_g^{(1)} \right]^\sim \right\}_+ + \left\{ \bar{Y}_{g_1} E_g^{(1)} \right\}_+ \\ Y_{g_2} E_g^{(2)} + \left\{ Y_{g_2} \left[ E_g^{(2)} \right]^\sim \right\}_+ + \left\{ \bar{Y}_{g_2} E_g^{(2)} \right\}_+ \\ \hat{E}_g^{(1)} \\ \hat{E}_g^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$Y_x = \begin{bmatrix} \left\{ Y_{g_1} M_{\Delta\Delta} R_1^T R_1 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ + \left\{ \bar{Y}_{g_1} M_{\Delta\Delta} R_1^T R_1 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \\ \left\{ Y_{g_2} M_{\Delta\Delta} R_2^T R_2 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ + \left\{ \bar{Y}_{g_2} M_{\Delta\Delta} R_2^T R_2 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \\ \left\{ M_{\Delta\Delta} R_1^T R_1 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \\ \left\{ M_{\Delta\Delta} R_2^T R_2 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \end{bmatrix},$$

$E_F \in RH_\infty^{p \times p}$  é tal que  $M_{z\Delta}^\sim M_{z\Delta} = E_F + E_F^\sim$ ,

Para  $i=1,2$ :

$Y_{g_i}(s)$  e  $\bar{Y}_{g_i}^\sim(s)$ , são definidas por

$$Y_{g_i}(s) = \left[ sI - (I_p \otimes \bar{A}_i) \right]^{-1} (I_p \otimes \bar{B}_i),$$

$$\bar{Y}_{g_i}^\sim(s) = - \left[ sI + (I_p \otimes \bar{A}_i) \right]^{-1} (I_p \otimes \bar{B}_i),$$

$\hat{E}_g^{(i)} \in RH_2^{p \times p}$  é tal que

$$R_i^T R_i - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^\sim R_i^T R_i M_{\Delta\Delta} = \left( \hat{E}_g^{(i)} + D_{Eg}^{(i)} \right) + \left( \hat{E}_g^{(i)} + D_{Eg}^{(i)} \right)^\sim,$$

com  $D_{Eg}^{(i)} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $E_g^{(i)} = \hat{E}_g^{(i)} + D_{Eg}^{(i)}$ .

Com a notação acima, enuncia-se a Proposição 3.3.1:

**Proposição 3.3.1:** Sejam  $(A_{YE}, B_{YE}, C_{YE})$ ,  $(A_{EF}, B_{EF}, C_{EF}, D_{EF})$ ,  $(A_{Yx}, B_{Yx}, C_{Yx})$  e

$(A_{zx}, B_{zx}, C_{zx})$  as realizações mínimas de  $Y_E$ ,  $E_F$ ,  $Y_x$  e  $\{M_{z\Delta} \tilde{M}_{zw} \mathbf{f}_k\}_+$  respectivamente.

Então, realizações  $(A_g, B_g, C_g, D_g)$  e  $(A_x, B_x, C_x)$  de  $E_{h_1 h_2}$  e  $\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+$ , com  $A_g$  e  $A_x$

Hurwitz são dadas por

$$A_g = \begin{bmatrix} A_{YE} & 0 \\ 0 & A_{EF} \end{bmatrix}, B_g = \begin{bmatrix} B_{YE} \\ -B_{EF} \end{bmatrix},$$

$$C_g = \left[ (I_p \otimes c_{g_1}^T) : (I_p \otimes c_{g_2}^T) : 2d_{g_1} I_p : 2d_{g_2} I_p : C_{EF} \right] \begin{bmatrix} C_{YE} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$D_g = \sum_{i=1}^2 d_{g_j} D_{Eg}^{(i)} - D_{EF},$$

$$A_x \triangleq \begin{bmatrix} A_{Yx} & 0 \\ 0 & A_{zx} \end{bmatrix}, B_x \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^2 B_{Yx} \\ -B_{zx} \end{bmatrix},$$

$$C_x = \left[ (I_p \otimes c_{g_1}^T) : (I_p \otimes c_{g_2}^T) : 2d_{g_1} I_p : 2d_{g_2} I_p : C_{zx} \right] \begin{bmatrix} C_{Yx} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad \nabla$$

**Demonstração:** (Apêndice 3-B)

**Comentário:** Note que os parâmetros livres  $(c_{g_i}, d_{g_i})$  da classe linear considerada não só aparecem de forma afim nas realizações de  $E_{h_1 h_2}$  e  $\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+$ , mas encontram-se alocados exclusivamente nos termos  $C_g, D_g, C_x$ . Dessa forma, ao se minimizar  $L_*(h_1, h_2)$ , sobre a classe  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  (ou seja, minimizar o funcional dual com relação aos parâmetros  $(c_{g_i}, d_{g_i})$ ) usando a caracterização dada pelas expressões (3.2.3) e (3.2.4) da seção anterior, tanto o funcional custo e a desigualdade matricial de (3.2.4) serão afins em todas as variáveis de decisão.

A seguir, é apresentada a Proposição que estabelece a equivalência entre determinar  $\mathbf{h}_{h_1 h_2}^*(\mathbf{e})$  (o valor ótimo da minimização do funcional dual sobre  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ ) e um problema de otimização linear com restrição LMI. Antes, para simplificar a notação, denote por  $\mathfrak{S}$  a coleção de parâmetros livres de  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , isto é,  $\mathfrak{S} = (c_{g_1}, c_{g_2}, d_{g_1}, d_{g_2})$ . Pode-se então, apresentar a seguinte proposição

**Proposição 3.3.2:** Considere  $(A_g, B_g, C_g, D_g)$  e  $(A_x, B_x, C_x)$  como definidos na Proposição 3.3.1 e defina

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_g & 0 \\ 0 & A_x \end{bmatrix}, \hat{B} \triangleq \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_x \end{bmatrix}, S_{xu}^T = [C_g \quad C_x]$$

Se  $(A_g, B_g)$  e  $(A_x, B_x)$  são controláveis, então para um dado  $\mathbf{e} > 0$  tem-se que

$\mathbf{h}_{h_1 h_2}^*(\mathbf{e}) = \inf \{ \Psi(P, \mathfrak{S}) : \mathfrak{S} = (c_{g_1}, c_{g_2}, d_{g_1}, d_{g_2}), P = P^T, \tilde{P} = \tilde{P}^T, P_1 = P_1^T, P_2 = P_2^T \}$  são tais

que  $\tilde{P} > 0, P_1 > 0, P_2 > 0, Q(P, \mathfrak{S}) \leq 0, Q_e(\tilde{P}, \mathfrak{S}) \leq 0, Q_1(P_1, c_{g_1}, d_{g_1}) \leq 0, e$

$$Q_2(P_2, c_{g_2}, d_{g_2}) \leq 0 \}$$

onde

$$\Psi(P, \mathfrak{S}) = \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 + 2\mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^2 d_{g_i} \|R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k\|_2^2 + 2\mathbf{g}^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 \text{tr} \left\{ (I_{n_p} \otimes c_{g_i}^T) M_{g_i} C_{\Phi}^T \right\} \right\} + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2$$

$$Q(P, \mathfrak{S}) = \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} - S_{xu}(\mathfrak{S}) \\ \hat{B}^T P - S_{xu}^T(\mathfrak{S}) & -[D_g(d_{g_1}, d_{g_2}) + D_g^T(d_{g_1}, d_{g_2})] \end{bmatrix}$$

$$Q_e(\tilde{P}, \mathfrak{S}) = \begin{bmatrix} A_g^T \tilde{P} + \tilde{P} A_g & \tilde{P} B_g - C_g^T(\mathfrak{S}) \\ B_g^T \tilde{P} - C_g(\mathfrak{S}) & -[D_g^T(d_{g_1}, d_{g_2}) + D_g(d_{g_1}, d_{g_2})] + \mathbf{e}I \end{bmatrix}$$

$$Q_1(P_1, c_{g_1}, d_{g_1}) = \begin{bmatrix} \bar{A}_1^T P_1 + P_1 \bar{A}_1 & P_1 \bar{B}_1 - c_{g_1} \\ \bar{B}_1^T P_1 - c_{g_1}^T & -2d_{g_1} \end{bmatrix}$$

$$Q_2(P_2, c_{g_2}, d_{g_2}) = \begin{bmatrix} \bar{A}_2^T P_2 + P_2 \bar{A}_2 & P_2 \bar{B}_2 - c_{g_2} \\ \bar{B}_2^T P_2 - c_{g_2}^T & -2d_{g_2} \end{bmatrix}$$

Para  $i = 1, 2; M_{g_i}$  é dado por

$$(I_p \otimes \bar{A}_i) M_{g_i} + M_{g_i} A_{\Phi i}^T = -[(I_p \otimes \bar{B}_i)] B_{\Phi i}^T$$

onde  $(A_{\Phi_i}, B_{\Phi_i}, C_{\Phi_i})$  é uma realização de  $\left\{ (M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+$ , e  $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$  são os termos fixos da parametrização linear definida em (3.3.1).  $\nabla$

**Demonstração:** (Apêndice 3-B)

**Comentário:** Como mencionado anteriormente, note que o funcional custo e todas as desigualdades matriciais da Proposição 3.3.2 são afins em todas as variáveis de decisão.

O funcional custo  $\Psi(P, \mathfrak{S})$  e a LMI  $Q(P, \mathfrak{S}) \leq 0$  são deduzidos a partir da caracterização de  $L_*(h_1, h_2)$  dada no final da seção 3.2. Por outro lado, a LMI

$Q_e(\bar{P}, \mathfrak{S}) \leq 0$  é equivalente a condição  $\Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , e as LMIs

$Q_i(P_i, c_{g_i}, d_{g_i}) \leq 0, i=1,2$ , são equivalentes à condição  $g_i(j\mathbf{w}) + \tilde{g}_i(j\mathbf{w}) \geq 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ .

Essa três últimas desigualdades são deduzidas usando o Lema Positivo Real (Boyd et al (1994), pg 35), a partir das hipóteses de que  $(A_g, B_g)$  e  $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$  são controláveis e  $A_g$  e  $\bar{A}_i$  são Hurwitz, onde para  $i=1,2$ :  $g_i = c_{g_i}^T (sI - \bar{A}_i) \bar{B}_i + d_{g_i}$ .

Finalmente, se  $A_g$  e  $B_g$  definidos na Proposição 3.3.1 são tais que  $(A_g, B_g)$  não é controlável, então é possível obter uma outra realização de  $E_{h_1 h_2}$  que seja controlável e na qual os parâmetros livres da classe  $\bar{\mathcal{S}}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  aparecem de forma afim e exclusivamente nos termos “C e D” destas realizações. De fato, se  $(A_g, B_g)$  não é controlável, então existe  $T_0$  para o qual para o qual se pode tomar uma transformação de similaridade dada por

$$\bar{A}_g = T_0 A_g T_0^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^g & \bar{A}_{12}^g \\ 0 & \bar{A}_{22}^g \end{bmatrix}, \bar{B}_g = T_0 B_g = \begin{bmatrix} \bar{B}_1^g \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_g(\mathfrak{S}) = C_g(\mathfrak{S}) T_0^{-1},$$

tal que  $(\bar{A}_{11}^g, \bar{B}_1^g)$  é controlável de modo que

$$E_{h_1 h_2} = C_g(\mathfrak{S}) T_0^{-1} (sI - \bar{A}_g)^{-1} \bar{B}_g + D_g(\mathfrak{S}) = \hat{C}_g(\mathfrak{S}) (sI - \bar{A}_{11}^g)^{-1} \bar{B}_1^g + D_g(\mathfrak{S})$$

onde  $\hat{C}_g(\mathfrak{S})$  é a versão truncada de  $\bar{C}_g(\mathfrak{S}) = C_g(\mathfrak{S}) T_0^{-1}$  correspondente ao par

$(\bar{A}_{11}^g, \bar{B}_1^g)$ , isto é  $\hat{C}_g(\mathfrak{S}) = C_g(\mathfrak{S}) T_0^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ , onde  $m$  é a dimensão de  $\bar{A}_{11}^g$ . Uma

observação idêntica pode ser feita com relação  $A_x$  e  $B_x$  como definidos na Proposição

3.3.1.

**Comentário:** A proposição 3.3.2 é análoga ao principal resultado em Feron (1997), em que o índice de performance “pior-caso”  $H_2$  é considerado com relação a perturbações caracterizadas por funções de transferências passivas, ao invés de limitadas em normas. Em ambos os casos, o limitante superior correspondente a um dado multiplicador é obtido como o valor máximo com respeito a uma variável de perturbação de um funcional quadrático nessa variável, e linear com relação ao multiplicador. A dedução apresentada em Feron (1997) baseia-se em trocar o operador de perturbação inicialmente considerado por sinais de perturbação sobre os quais se impõem restrições que são consequência lógicas das características do operador de perturbação. Aqui, mantém-se a variável de perturbação caracterizada como função de transferência, na dedução do limitante. Em termos de classes lineares de multiplicadores, o principal

resultado em Feron (1997) é deduzido apenas para multiplicadores cujas partes estáveis tem todos os pólos em  $-1$ , ao passo que o resultado acima se aplica a qualquer função em  $RH_\infty$ .

Para encerrar esta seção, convém observar que ao se considerar a utilização da Proposição 3.3.2 para se obter limitantes superiores do “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador, surge naturalmente, a questão da escolha dos termos  $\bar{A}_i, \bar{B}_i$  que definem a classe linear de multiplicadores a ser utilizada. Assim sendo, no sentido de buscar maneiras heurísticas de se fazer essas escolhas, como alternativa à escolha arbitrária de tal classe, serão examinadas na próxima seção direções descendentes para o funcional dual, no espaço de multiplicadores.

### 3.4 – Direções descendentes para o funcional dual

Nesta seção são caracterizadas as direções descendentes para  $L_*(h_1, h_2)$  a partir de um par (não-ótimo)  $(h_1, h_2)$ , dentro do espaço de todas as funções reais racionais positivas no eixo-  $j\omega$ . As realizações do novo par de multiplicadores obtidos ao se andar ao longo de direções aproximadamente alinhadas com o “gradiente” do funcional dual constituem uma escolha natural para a determinação da classe linear  $\bar{S}_{h_1, h_2}(\mathbf{e})$  definida na seção anterior, no sentido de que a dinâmica fixa da classe estaria relacionada com o problema original de minimização do funcional dual sobre o conjunto dos multiplicadores.

A caracterização de direções descendentes para  $L_*(h_1, h_2)$  é feita a partir de  $T_*(h_1, h_2) \in RH_2^p$  tal que  $L_*(h_1, h_2) = L_a(T_*(h_1, h_2), h_1, h_2)$ , isto é

$$T_*(h_1, h_2) = \arg \max_{T \in RH_2^p} L_a(T, h_1, h_2)$$

Convém recordar a definição do Lagrangeano dado na seção 2.4 por

$$L_a(T, h_1, h_2) = \|M_{z\Delta}T + M_{zw}f_k\|_2^2 - \sum_{i=1}^2 c_i(T, h_i)$$

onde

$$c_i(T, h_i) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(j\mathbf{w}) c_{0i}[T](j\mathbf{w}) d\mathbf{w},$$

$$c_{0i}[T](j\mathbf{w}) = \|R_i T(j\mathbf{w})\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|R_i M_{\Delta w}(j\mathbf{w}) f_k(j\mathbf{w}) + R_i M_{\Delta\Delta}(j\mathbf{w}) T(j\mathbf{w})\|_F^2.$$

Será provado então, que uma direção descendente para  $L_*(h_1, h_2)$  a partir de  $(h_1, h_2)$  é dada por  $(\Delta h_1, \Delta h_2)$  tal que  $\sum_{i=1}^2 c_i(T, h_i) > 0$ , de modo que uma direção descendente pode ser dada por

$$\Delta \hat{h}_i(j\mathbf{w}) \triangleq g_0^{-1} (g_0^{-1})^\sim c_{0i}[T_*(h_1, h_2)](j\mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$$

Para obter  $T_*(h_1, h_2)$  tal que  $L_*(h_1, h_2) = L_a(T_*(h_1, h_2), h_1, h_2)$ , será usada a expressão do funcional Lagrangeano dada na seção anterior por

$$L_a(T, h_1, h_2) = -\left\{ \langle \Gamma_{h_1 h_2} T, T \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, T \rangle \right\} + L_a(0, h_1, h_2)$$

$\Gamma_{h_1 h_2} \in RL_\infty^{p \times p}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{h_1 h_2} = \Gamma_{h_1 h_2}$ ,  $\Xi_{h_1 h_2} \in RL_2^p$ , de modo que uma condição necessária e suficiente para que  $L_*(h_1, h_2)$  seja finito é que  $\underline{I}_\infty(\Gamma_{h_1 h_2})(j\mathbf{w}) > 0$ , onde  $\underline{I}_\infty(\Gamma_{h_1 h_2})(j\mathbf{w}) \triangleq \inf \left\{ \underline{I}[\Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w})] : \mathbf{w} \in \mathbb{R} \right\}$ . Tendo em vista esse fato, define-se o seguinte conjunto

$$S_\Gamma \triangleq \left\{ (h_1, h_2) \in S_P \times S_P : \underline{I}_\infty(\Gamma_{h_1 h_2})(j\mathbf{w}) > 0 \right\}$$

onde

$$S_P = \left\{ h \in RL_\infty : h^\sim = h, \text{ e } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, h(j\mathbf{w}) \geq 0 \right\}.$$

Note-se que se  $(h_1, h_2) \in S_\Gamma$ , então  $\exists \mathbf{e} > 0$  para o qual  $\Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ . A proposição a seguir apresenta uma expressão para  $T_*(h_1, h_2)$  e  $L_*(h_1, h_2)$

**Proposição 3.4.1:** Se  $(h_1, h_2) \in S_\Gamma$ , então

$$L_*(h_1, h_2) = L_a(T_*(h_1, h_2), h_1, h_2) = \left\| \left\{ (\mathbf{f}_{h_1 h_2}^\sim)^{-1} \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ \right\|_2^2 + L_a(0, h_1, h_2),$$

onde  $T_*(h_1, h_2) = \arg \max_{T \in RH_2^p} L_a(T, h_1, h_2)$  é dado por

$$T_*(h_1, h_2) = -\mathbf{f}_{h_1 h_2}^{-1} \left\{ \left( \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \right)^{-1} \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+, \quad \mathbf{f}_{h_1 h_2} \text{ é um fator espectral de } \Gamma_{h_1 h_2} = \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \mathbf{f}_{h_1 h_2} \quad \nabla$$

**Demonstração :** Considere-se inicialmente a expressão do funcional dual dada por

$$L_*(h_1, h_2) = L_a(0, h_1, h_2) - \inf \left\{ \langle \Gamma_{h_1 h_2} T, T \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, T \rangle : T \in RH_2^p \right\}$$

e para resolver  $\inf_{T \in RH_2^p} \left\{ \langle \Gamma_{h_1 h_2} T, T \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, T \rangle \right\}$ , considera-se a condição de otimalidade:

$$\forall \Delta T \in RH_2^p, \quad \langle \Gamma_{h_1 h_2} T_* + \Xi_{h_1 h_2}, \Delta T \rangle = 0$$

ou equivalentemente

$$(3.4.1) \quad \left\{ \Gamma_{h_1 h_2} T_* + \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ = 0$$

Uma vez que  $(h_1, h_2) \in S_\Gamma$ , tem-se que  $\Gamma_{h_1 h_2}(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Logo é possível tomar uma fatoração espectral de  $\Gamma_{h_1 h_2}$ , isto é,  $\Gamma_{h_1 h_2} = \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \mathbf{f}_{h_1 h_2}$ , e a expressão (3.4.1) é equivalente a

$$\left\{ \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \mathbf{f}_{h_1 h_2} T_* + \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ = 0 \Leftrightarrow \left\{ \mathbf{f}_{h_1 h_2} T_* + \left( \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \right)^{-1} \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}_{h_1 h_2} T_* + \left\{ \left( \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \right)^{-1} \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ = 0$$

$$\Leftrightarrow T_* = -\mathbf{f}_{h_1 h_2}^{-1} \left\{ \left( \tilde{\mathbf{f}}_{h_1 h_2} \right)^{-1} \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+.$$

Por outro lado, escrevendo  $L_*(h_1, h_2) = L_a(T_*(h_1, h_2), h_1, h_2)$ , tem-se que

$$(3.4.2) \quad L_*(h_1, h_2) = L_a(0, h_1, h_2) - \left\langle \left\{ \Gamma_{h_1 h_2} T_*(h_1, h_2) + \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+, T_*(h_1, h_2) \right\rangle - \left\langle \Xi_{h_1 h_2}, T_*(h_1, h_2) \right\rangle.$$

Usando a condição de otimalidade  $T_*$  em (3.4.2), e o fato de que  $\Gamma_{h_1 h_2} = \mathbf{f}_{h_1 h_2}^* \mathbf{f}_{h_1 h_2}$ , tem-se que

$$L_*(h_1, h_2) = L_a(0, h_1, h_2) + \left\| \left\{ \left( \mathbf{f}_{h_1 h_2}^* \right)^{-1} \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ \right\|_2^2 \quad \square$$

Para  $(h_1, h_2) \in S_\Gamma$ , a próxima proposição examina o comportamento de  $L_*(h_1, h_2)$  ao se mover ao longo de direções  $\{(h_1 + \mathbf{a}\Delta h_1, h_2 + \mathbf{a}\Delta h_2); \mathbf{a} \geq 0\}$ . Uma consequência desta proposição será a caracterização de direções descendentes já mencionadas anteriormente nesta seção.

**Proposição 3.4.2:** Sejam  $(h_1, h_2) \in S_\Gamma$ ,  $\Delta h_1 \in RL_\infty$  e  $\Delta h_2 \in RL_\infty$  tais que  $\Delta h_1^* = \Delta h_1$  e

$$\Delta h_2^* = \Delta h_2, \quad \Gamma_e \triangleq \Gamma_{h_1 h_2} - \frac{\mathbf{e}}{2} \quad \text{onde } \mathbf{e} > 0 \text{ é tal que } \Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, \text{ e } \mathbf{a}_e > 0 \text{ tal que}$$

$$\mathbf{a}_e \left| \bar{\Gamma}_\infty \left( \Delta h_1 \Gamma_g^{(1)} + \Delta h_2 \Gamma_g^{(2)} \right) \right| \leq \frac{\mathbf{e}}{2}. \quad \text{Então, } \forall \mathbf{a} \in [0, \mathbf{a}_e], \text{ tem-se que}$$

$$\mathbf{a} \left\{ \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) \right\} \geq L_*(h_1, h_2) - L_*(h_1 + \mathbf{a}\Delta h_1, h_2 + \mathbf{a}\Delta h_2) \geq f(\mathbf{a}, \Delta h_1, \Delta h_2)$$

onde

$$f(\mathbf{a}, \Delta h_1, \Delta h_2) \triangleq \mathbf{a} \left\{ \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) \right\} - \mathbf{a}^2 \left\| \left\{ (\mathbf{f}_e^{-1})^\sim (\Delta h_1 \Xi_{\Delta_1} + \Delta h_2 \Xi_{\Delta_2}) \right\}_+ \right\|_2^2,$$

$$\Xi_{\Delta_i} = \Gamma_g^{(i)} T_*(h_1, h_2) + \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^\sim M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, \quad \mathbf{f}_e \text{ é fator espectral de } \Gamma_e = \mathbf{f}_e^\sim \mathbf{f}_e. \quad \nabla$$

**Demonstração:** (Apêndice 3-C)

Uma consequência imediata da Proposição 3.4.2 é uma condição de otimalidade de  $L_*(\cdot, \cdot)$  em  $S_\Gamma$ .

**Corolário 3.4.3:** Se  $c_{01}[T_*(h_1, h_2)]$  e  $c_{02}[T_*(h_1, h_2)]$  são identicamente nulos, então

$$L_*(h_1, h_2) = \left\{ \inf L_*(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) : (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in S_\Gamma \right\}.$$

**Demonstração:** Se  $c_{01}[T_*(h_1, h_2)] \equiv 0$  e  $c_{02}[T_*(h_1, h_2)] \equiv 0$  então

$$\sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) = 0 \text{ para quaisquer } \Delta h_1 \in RL_\infty \text{ e } \Delta h_2 \in RL_\infty$$

Logo, para todo  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in S_\Gamma$  tem-se que

$$0 = \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \tilde{h}_i - h_i) \geq L_*(h_1, h_2) - L_*(h_1 + (\tilde{h}_1 - h_1), h_2 + (\tilde{h}_2 - h_2)), \text{ ou seja}$$

$$L_*(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \geq L_*(h_1, h_2) \text{ para todo } (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in S_\Gamma$$

$$\Rightarrow L_*(h_1, h_2) = \left\{ \inf L_*(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) : (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in S_\Gamma \right\} \quad \square$$

Também segue diretamente da Proposição 3.4.2 que quaisquer  $\Delta h_1, \Delta h_2$  tais que

$$\sum_{i=1}^2 c_i (T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) > 0, \text{ determinam uma direção de descida para } L_*(\cdot, \cdot) (h_1, h_2), \text{ ou}$$

equivalentemente, para  $\Delta h_i = (\Delta \hat{g}_i + \Delta d_{g_i})^\sim + (\Delta \hat{g}_i + \Delta d_{g_i})$ , tem-se que  $(\Delta d_{g_i}, \Delta \hat{g}_i)$ ,

$i = 1, 2$ , determinam uma direção descendente  $(\Delta h_1, \Delta h_2)$  se e somente se

$$\sum_{i=1}^2 c_i (T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) = 2 \sum_{i=1}^2 \Delta d_{g_i} \bar{c}_{0i} + 2 \sum_{i=1}^2 \left\langle \{c_{oi} [T_*(h_1, h_2)]\}_+, \Delta \hat{g}_i \right\rangle > 0$$

onde  $\bar{c}_{0i} = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} c_{0i} [T_*(h_1, h_2)](j\mathbf{w}) d\mathbf{w}$ .

As direções descendentes caracterizadas acima sugerem uma maneira heurística de escolher iterativamente classes lineares de multiplicadores sobre as quais se pode computar de maneira eficiente os limitantes para o “pior-caso”  $H_2$ .

Neste sentido, note que, independentemente do tamanho do passo tomado ao longo da direção  $(\Delta d_{g_i}, \Delta \hat{g}_i)$  acima, “a parte dinâmica estável”  $(\hat{g}_i + \Delta \hat{g}_i)$  do novo multiplicador  $(h_i + \mathbf{a}_* \Delta \hat{h}_i)$  assim obtido, terá uma realização  $(\bar{A}_{g_i}, \bar{b}_{g_i}, \bar{c}_{g_i}^T, \bar{d}_{g_i})$  em função das realizações  $(A_{g_i}, b_{g_i}, c_{g_i}^T, d_{g_i})$  e  $(A_{\Delta g_i}, b_{\Delta g_i}, c_{\Delta g_i}^T, d_{\Delta g_i})$  das partes dinâmica estáveis de  $\hat{g}_i$  e  $\Delta \hat{g}_i$ , isto é:

$$\bar{A}_{g_i} = \begin{bmatrix} A_{g_i} & 0 \\ 0 & A_{\Delta g_i} \end{bmatrix}, \bar{b}_{g_i} = \begin{bmatrix} b_{g_i} \\ b_{\Delta g_i} \end{bmatrix},$$

Assim sendo, uma nova classe linear de multiplicadores pode ser obtido a partir de um dado par  $(h_1, h_2)$  e da direção descendente  $(\Delta h_1, \Delta h_2)$  da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{h_1 h_2} = \bar{S}_{h_1} \times \bar{S}_{h_2} : \forall i = 1, 2, \\ \bar{S}_{h_i} \triangleq \left\{ \bar{g}_i + \bar{g}_i^\sim : \bar{g}_i \in RH_\infty, \bar{g}_i(s) = c_i^T (sI - \bar{A}_{g_i})^{-1} \bar{b}_{g_i} + d_i, c_i \in \mathbb{R}^{n_i}, d_i \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} : \bar{g}_i(j\mathbf{w}) + \bar{g}_i^\sim(j\mathbf{w}) \geq 0 \right\} \end{array} \right.$$

$\bar{A}_{g_i}, \bar{b}_{g_i}$  como definidos acima.

Desta forma, pode-se conceber um procedimento iterativo no qual em um passo resolve-se o problema LMI para uma dada classe utilizando um algoritmo de pontos interiores, e a partir do resultado, usa-se a heurística acima para gerar uma nova classe linear de multiplicadores.

Alternativamente, no sentido de limitar, em cada passo, o crescimento da ordem dos multiplicadores, a fim de evitar um aumento no custo computacional da resolução do problema LMI dado pela Proposição 3.3.2, pode-se buscar em uma classe de multiplicadores de ordem pré-especificada e pequena (por exemplo, de ordem 2) a direção “mais alinhada” com o gradiente do funcional custo e utiliza-la para gerar uma nova classe, no lugar de  $(\Delta h_1, \Delta h_2)$  definidos anteriormente.

Neste sentido, escrevendo novamente  $\Delta h_i = (\Delta \hat{g}_i + \Delta d_{g_i})^\sim + (\Delta \hat{g}_i + \Delta d_{g_i})$ , onde  $\Delta \hat{g}_i \in RH_2$ , tem-se que

$$c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) = 2 \left\langle \left\{ c_{0i} [T_*(h_1, h_2)] \right\}_+, \Delta \hat{g}_i \right\rangle + 2 \Delta d_{g_i} \bar{c}_{0i}$$

de modo que a parte “dinâmica”  $\Delta\hat{g}_i$  de uma direção  $\Delta h_i$  com as características mencionadas anteriormente pode ser obtida por meio de problemas de otimização auxiliares do tipo

**Problema A1:**  $\max_{\Delta\hat{g} \in RH_2, \Delta\hat{g} \in M_c(2)} \langle f, \Delta\hat{g} \rangle$  sujeito a  $\|\Delta\hat{g}\|_2 \leq 1$ .

nos quais  $f$  é dada por  $f = \{c_{0i} [T_*(h_1, h_2)]\}_+$ . Escrevendo-se

$$f(s) = c_f^T (sI - A_f)^{-1} b_f \in RH_2, \Delta\hat{g}(s) = c_{\Delta g}^T (sI - A_{\Delta g})^{-1} b_{\Delta g} \in RH_2$$

tem-se que

$\langle f, \Delta\hat{g} \rangle = c_{\Delta g}^T M_0 c_{\Delta g}$ , onde  $M_0$  é solução da equação

$$A_{\Delta g} M_0 + M_0 A_f^T = -b_{\Delta g} b_f^T,$$

$\|\Delta\hat{g}\|_2^2 = \langle \Delta\hat{g}, \Delta\hat{g} \rangle = c_{\Delta g}^T M_g c_{\Delta g}$ , onde  $M_g$  é solução da equação

$$A_{\Delta g} M_g + M_g A_{\Delta g}^T = -b_{\Delta g} b_{\Delta g}^T,$$

$A_{\Delta g} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $M_g \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ ,  $n_f \geq 2$ .

O Problema A1 pode então ser reescrito como

$$\max_{A_{\Delta_g}, b_{\Delta_g}, c_{\Delta_g}} c_{\Delta_g}^T M_0 c_{\Delta_g} \text{ sujeito a } c_{\Delta_g}^T M_g c_{\Delta_g} \leq 1 \text{ e } A_g \text{ é Hurwitz}$$

onde

$$(C.1) \quad A_{\Delta_g} M_0 + M_0 A_f^T = -b_{\Delta_g} b_f^T$$

$$(C.2) \quad A_{\Delta_g} M_g + M_g A_{\Delta_g}^T = -b_{\Delta_g} b_{\Delta_g}^T$$

Adicionando a condição de  $(A_{\Delta_g}, b_{\Delta_g})$  ser controlável, tem-se que  $M_g$  é não-singular, e escrevendo  $M_g = M_g^{1/2} M_g^{1/2}$ , tem-se que  $c_{\Delta_g}^T M_g c_{\Delta_g} = c_{\Delta_g}^T M_g^{1/2} M_g^{1/2} c_{\Delta_g} = \bar{c}_{\Delta_g}^T \bar{c}_{\Delta_g}$ , onde  $\bar{c}_{\Delta_g} = M_g^{-1/2} c_{\Delta_g}$  (isto é,  $c_{\Delta_g} = M_g^{-1/2} \bar{c}_{\Delta_g}$ ). Desta forma, o Problema A1 pode ser escrito como

$$\max_{A_{\Delta_g}, b_{\Delta_g}, \bar{c}_{\Delta_g}} \bar{c}_{\Delta_g}^T M_{\Delta_g}^{-1/2} M_0 c_f$$

sujeito a  $\|\bar{c}_{\Delta_g}\|_2^2 \leq 1$ , (C.1), (C.2),  $A_{\Delta_g}$  é Hurwitz e  $(A_{\Delta_g}, b_{\Delta_g})$  é controlável.

Como resultado, pode ser visto que para um dado par  $(A_{\Delta_g}, b_{\Delta_g})$ , o valor ótimo  $\bar{c}_{\Delta_g}$  é dado por

$$\bar{c}_{\Delta_g^*} = M_g^{-1/2} M_0 c_f \left\{ \frac{1}{\|M_g^{-1/2} M_0 c_f\|_2} \right\}$$

e neste caso, o valor ótimo do custo funcional é dado por  $\|M_g^{-1/2} M_0 c_f\|_2$ .

Assim, o problema acima pode escrito como

$$\max_{(A_{\Delta g}, b_{\Delta g})} \bar{c}_{\Delta g}^T M_0^T M_g^{-1} c_f \text{ sujeito a (C.1), (C.2), } A_{\Delta g} \text{ é Hurwitz e } (A_{\Delta g}, b_{\Delta g}) \text{ e controlável.}$$

Finalmente, utilizando-se a forma canônica controlável, isto é, escrevendo

$$A_{\Delta g} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_2 \\ 1 & -\mathbf{a}_1 \end{bmatrix}, \quad b_{\Delta g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 > 0, \mathbf{a}_2 > 0,$$

pode-se escrever o problema em função da forma quadrática

$$\mathfrak{J}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \triangleq c_f^T M_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^T M_g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^{-1} M_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2).$$

Como alternativa para a resolução do problema escrito em função dos parâmetros  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , qual seja,

**Problema A2:** 
$$\max_{\mathbf{a}_1 > 0, \mathbf{a}_2 > 0} \mathfrak{J}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

pode-se utilizar um procedimento rudimentar de avaliar  $\mathfrak{J}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  em uma grade para uma dada região do espaço  $\mathbb{R}^2$ , e escolher o par  $(\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*})$  que maximiza  $\mathfrak{J}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ,

para então, a partir da dinâmica  $A_{\Delta g} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_{2*} \\ 1 & -\mathbf{a}_{1*} \end{bmatrix}$ ,  $b_{\Delta g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , para gerar uma nova

classe de multiplicadores linearmente parametrizados.

### 3.5 – Classes lineares para determinação de $J_k$

Esta seção está diretamente relacionada com a seção 2.5 e tem por objetivo mostrar que o confinamento das variáveis de decisão do problema correspondente ao limitante dado pela seção 2.5, que consiste em um problema de otimização linear restrito a uma família de LMI's, a um subespaço de dimensão finita torna o problema truncado sujeito a uma única restrição LMI (ao invés de uma família parametrizada pela frequência).

Na seção 2.5, utilizou-se um argumento baseado em “S-Procedure” para mostrar que um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador pode ser obtido a partir da soma dos  $n_w$  valores ótimos (denotados por  $J_k$ ,  $k = 1, \dots, n_w$ ) de problemas do seguinte tipo:

$$\min_{Y \in S_Y, \Lambda \in S_\Lambda} (2p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{f}_k(j\omega), Y(j\omega) \mathbf{f}_k(j\omega) \rangle_F d\omega$$

sujeito a

$$(3.5.1) \quad M^*(j\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda(j\omega) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M(j\omega) - \begin{bmatrix} \Lambda(j\omega) & 0 \\ 0 & Y(j\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

onde

$$S_\Lambda \triangleq \left\{ \Lambda = \text{diag} \{ \mathbf{I}_1 I_{r_1}, \dots, \mathbf{I}_l I_{r_l} \} : \forall i=1, \dots, l, \mathbf{I}_i \in RL_\infty, \mathbf{I}_i^\sim = \mathbf{I}_i, \mathbf{I}_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} \right\},$$

$$S_Y \triangleq \left\{ Y \in RL_\infty^{n_w \times n_w} : Y^\sim = Y \right\},$$

$$\mathbf{f}_k \in RH_2^{n_w}.$$

Novamente, em conformidade com as seções anteriores deste capítulo, será considerada a classe de perturbações estruturadas com dois blocos para efeitos de simplificação, ou seja, considera-se a classe

$$\bar{S}_{\Delta 2} = \left\{ \Delta \in RH_\infty^{p \times p} : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in RH_\infty^{r_i \times r_i}, \|\Delta_i\|_\infty \leq \mathbf{g} \forall i=1, 2 \right\},$$

e a correspondente classe de multiplicadores é dada por

$$S_\Lambda = \left\{ \Lambda = \text{diag} \{ \mathbf{I}_1 I_{r_1}, \mathbf{I}_2 I_{r_2} \} : \forall i=1, 2, \mathbf{I}_i \in RL_\infty, \mathbf{I}_i^\sim = \mathbf{I}_i, \mathbf{I}_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} \right\}$$

A seguir, denote por “ $F[Y, \Lambda](j\mathbf{w}) \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ ”, a família de LMI's em (3.5.1), e considere os seguintes subespaços de  $S_Y$  e  $S_\Lambda$ :

$$\bar{S}_Y = \left\{ Y \in S_Y : Y = X_Y + X_Y^\sim, X_Y(s) = C_Y (sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D_Y, C_Y \in \mathbb{R}^{n_w \times n_Y}, D_Y \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w} \right\}$$

com  $\bar{A}_Y \in \mathbb{R}^{n_Y \times n_Y}$ ,  $\bar{B}_Y \in \mathbb{R}^{n_Y \times n_w}$  fixos,  $(\bar{A}_Y, \bar{B}_Y)$  controlável e  $\bar{A}_Y$  Hurwitz;

$$\bar{S}_\Lambda = \left\{ \Lambda \in S_\Lambda : \mathbf{I}_i = x_{I_i} + x_{I_i}^\sim, x_{I_i}(s) = c_{I_i}^T (sI - \bar{A}_{I_i})^{-1} \bar{b}_{I_i} + d_{I_i}, c_{I_i} \in \mathbb{R}^{n_i}, d_{I_i} \in \mathbb{R}, i=1, 2 \right\}$$

com  $\bar{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\bar{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  fixos,  $(\bar{A}_i, \bar{b}_i)$  controlável e  $\bar{A}_i$  Hurwitz,  $i=1,2$ .

E o problema de otimização correspondente a esses subespaços é dado por determinar  $\bar{J}_k$ , o valor ótimo do problema

$$\inf_{Y \in \bar{S}_Y} \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle \text{ sujeito a } \Lambda \in \bar{S}_\Lambda \text{ e } F[Y, \Lambda](j\omega) \leq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Para mostrar então, que o problema de determinar  $\bar{J}_k$  é um problema de otimização no espaço euclidiano, sujeito a uma restrição LMI, são necessários os Lemas 3.5.1 e 3.5.2 apresentados a seguir

**Lema 3.5.1:** Para todo  $Y \in \bar{S}_Y$ , tem-se que  $\langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle$  é uma função linear de  $(C_Y, D_Y)$ , os parâmetros livres da classe  $Y \in \bar{S}_Y$  ∇

**Demonstração:** Inicialmente, note que para todo  $Y \in \bar{S}_Y$ , tem-se que

$$\langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle = \langle \mathbf{f}_k, (X_Y + \tilde{X}_Y) \mathbf{f}_k \rangle = 2 \langle \mathbf{f}_k, X_Y \mathbf{f}_k \rangle$$

Essa última igualdade pode ser escrita como

$$\langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle = 2 \langle g_0 P_k, g_0 X_Y \rangle$$

onde  $P_k \triangleq (g_0^{-1} \mathbf{f}_k) \sim (g_0^{-1} \mathbf{f}_k)$ . A seguir, escrevendo  $X_Y(s) = C_Y (sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D_Y$ , tem-se que

$$\langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle = 2R_k^C(C_Y) + 2R_k^D(D_Y) \quad \forall Y \in \bar{S}_Y$$

onde

$$R_k^C(C_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Tr \left\{ P_k(j\omega)^* [g_0(j\omega)]^2 C_Y (j\omega - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y \right\} d\omega;$$

$$R_k^D(D_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Tr \left\{ [g_0(j\omega)]^2 P_k(j\omega)^* D_Y \right\} d\omega$$

e portanto  $\langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle$  é função linear de  $(C_Y, D_Y)$ . □

**Lema 3.5.2:** Sejam  $Y \in \bar{S}_Y$ ,  $\Lambda \in \bar{S}_\Lambda$  e  $H[Y, \Lambda](s) \in M(RH_\infty)$  tal que

$$F[Y, \Lambda] = H[Y, \Lambda] + H^\sim[Y, \Lambda].$$

Então uma realização  $(A_H, B_H, C_H, D_H)$  de  $H[Y, \Lambda]$  pode ser obtida de maneira que  $C_H$

e  $D_H$  são funções afins de  $(C_Y, D_Y)$  e  $(c_{I_i}, d_{I_i})$ ,  $(A_H, B_H)$  controlável,  $A_H$  Hurwitz e

$(A_H, B_H)$  não dependem dos parâmetros livres das classes  $\bar{S}_Y, \bar{S}_\Lambda$  ▽

**Demonstração:** (Apêndice 3-D)

Denotando por  $\mathfrak{S} = (C_Y, D_Y, g_1, g_2, d_{I_1}, d_{I_2})$ , a coleção de parâmetros livres das classes  $\bar{\mathfrak{S}}_Y$  e  $\bar{\mathfrak{S}}_\Lambda$ , segue-se do Lema 3.3.2 e do Lema Positivo Real (Boyd et al (1994), pg 35) que

$$F[Y, \Lambda](j\mathbf{w}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, Y \in \bar{\mathfrak{S}}_Y, \Lambda \in \bar{\mathfrak{S}}_\Lambda,$$

$\Leftrightarrow$

$$(3.5.2) \quad \exists P = P^T, P > 0 \text{ tal que } \begin{bmatrix} A_H^T P + P A_H & P B_H + C_H^T(\mathfrak{S}) \\ B_H^T P + C_H(\mathfrak{S}) & D_H(\mathfrak{S}) + D_H^T(\mathfrak{S}) \end{bmatrix} \leq 0$$

Finalmente, tem-se que a positividade dos multiplicadores pertencentes a classe  $\bar{\mathfrak{S}}_\Lambda$  é também escrita como condições LMI, novamente através do Lema Positivo Real. Segue-se que determinar  $\bar{J}_k$  é equivalente a resolver um problema de otimização no espaço euclidiano, com função custo linear nos parâmetros livres da classe  $\bar{\mathfrak{S}}_Y$ , sujeito a finitas restrições LMI's envolvendo os parâmetros livres de  $\bar{\mathfrak{S}}_Y$  e  $\bar{\mathfrak{S}}_\Lambda$ , isto é,  $\mathfrak{S} = (C_Y, D_Y, g_1, g_2, d_{I_1}, d_{I_2})$ . Mais explicitamente, tem-se a seguinte proposição, demonstrada no desenvolvimento desta seção

**Proposição 3.5.3** :Seja  $\bar{J}_k$ , o valor ótimo do problema

$$\min_{Y \in \bar{\mathfrak{S}}_Y} \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle \text{ sujeito a } \Lambda \in \bar{\mathfrak{S}}_\Lambda \text{ e } F[Y, \Lambda](j\mathbf{w}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{onde } F[Y, \Lambda](j\mathbf{w}) = M^-(j\mathbf{w}) \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda(j\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M(j\mathbf{w}) - \begin{bmatrix} \Lambda(j\mathbf{w}) & 0 \\ 0 & Y(j\mathbf{w}) \end{bmatrix}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$$

$$\bar{S}_Y = \left\{ Y \in S_Y : Y = X_Y + X_Y^{\sim}, X_Y(s) = C_Y (sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D_Y, C_Y \in \mathbb{R}^{n_w \times n_Y}, D_Y \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w} \right\}$$

com  $\bar{A}_Y \in \mathbb{R}^{n_Y \times n_Y}, \bar{B}_Y \in \mathbb{R}^{n_Y \times n_w}$  fixos,  $(\bar{A}_Y, \bar{B}_Y)$  controlável e  $\bar{A}_Y$  Hurwitz;

$$\bar{S}_\Lambda = \left\{ \Lambda \in S_\Lambda : \mathbf{I}_i = x_{I_i} + x_{I_i}^{\sim}, x_{I_i}(s) = c_{I_i}^T (sI - \bar{A}_{I_i})^{-1} \bar{b}_{I_i} + d_{I_i}, c_{I_i} \in \mathbb{R}^{n_i}, d_{I_i} \in \mathbb{R}, i=1,2 \right\}$$

com  $\bar{A}_{I_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \bar{b}_{I_i} \in \mathbb{R}^{n_i}$  fixos,  $(\bar{A}_{I_i}, \bar{b}_{I_i})$  controlável e  $\bar{A}_{I_i}$  Hurwitz,  $i=1,2$ ,  $S_Y$  e  $S_\Lambda$

como definidos na seção 2.5. Então  $\bar{J}_k$  é valor ótimo do problema

$$\min_{P, \mathfrak{S}} 2R_k^C(C_Y) + 2R_k^D(D_Y)$$

sujeito a

$$P^T = P > 0 \text{ e } \begin{bmatrix} A_H^T P + P A_H & P B_H + C_H^T(\mathfrak{S}) \\ B_H^T P + C_H(\mathfrak{S}) & D_H(\mathfrak{S}) + D_H^T(\mathfrak{S}) \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$R_i^T = R_i > 0 \text{ e } \begin{bmatrix} \bar{A}_{I_i}^T R_i + R_i \bar{A}_{I_i} & R_i \bar{b}_{I_i} - c_{I_i} \\ \bar{b}_{I_i}^T R_i - c_{I_i}^T & -2d_{I_i} \end{bmatrix} \leq 0, \forall i=1,2.$$

onde

$$R_k^C(C_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Tr \left\{ P_k(j\mathbf{w})^* [g_0(j\mathbf{w})]^2 C_Y (j\mathbf{w} - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y \right\} d\mathbf{w};$$

$$R_k^D(D_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Tr \left\{ [g_0(j\mathbf{w})]^2 P_k(j\mathbf{w})^* D_Y \right\} d\mathbf{w},$$

$$P_k \triangleq (g_0^{-1} \mathbf{f}_k)^{\sim} (g_0^{-1} \mathbf{f}_k)$$

▽

Nesse ponto, convém examinar se o conjunto factível do problema original, (determinar  $J_k$ ) é não-vazio quando as variáveis de decisão são confinadas às classes lineares definidas anteriormente. Esse é o assunto da próxima seção.

### 3.6-Existência de soluções factíveis na classes

#### $\bar{S}_Y$ e $\bar{S}_\Lambda$ para o cálculo de $J_k$

Inicialmente será considerada a versão matricial do problema, ao invés de se considerar funções matriciais. Sejam então

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{\Delta\Delta} & \hat{M}_{\Delta w} \\ \hat{M}_{z\Delta} & \hat{M}_{zw} \end{bmatrix}, \quad \hat{M}_{\Delta\Delta} \in \mathbb{C}^{p \times p}, \quad \hat{M}_{zw} \in \mathbb{C}^{n_z \times n_w}, \quad \text{e para } \hat{\Lambda} \in \mathbb{C}^{p \times p}, \quad \hat{Y} \in \mathbb{C}^{n_w \times n_w}, \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^*,$$

$\hat{Y} = \hat{Y}^*$ , e defina

$$\hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} & 0 \\ 0 & \hat{Y} \end{bmatrix} - \hat{M}^* \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \hat{\Lambda} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \hat{M}, \quad I \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}.$$

A versão matricial do conjunto factível do problema correspondente a determinar  $J_k$  (**Problema k** conforme definido na seção 2.5) é  $\{(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) : A(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) \geq 0\}$ . A proposição a seguir mostra que esse conjunto é não vazio.

**Proposição 3.6.1:** Suponha que  $\|\mathbf{g}\hat{M}_{\Delta\Delta}\| < 1$ , e sejam  $I - \mathbf{g}^2\hat{M}_{\Delta\Delta}^*\hat{M}_{\Delta\Delta} = \hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}^*\hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}$  onde  $\hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}$  é não-singular,  $\hat{M}_a(\hat{\Lambda}) = \hat{M}_{\Delta\Delta}^*\mathbf{g}^2\hat{\Lambda}\hat{M}_{\Delta w} + \hat{M}_{z\Delta}^*\hat{M}_{\Delta w}$ ,  $\hat{M}_b(\hat{\Lambda}) = \hat{M}_{\Delta w}^*\mathbf{g}^2\hat{\Lambda}\hat{M}_{\Delta w} + \hat{M}_{zw}^*\hat{M}_{zw}$ , e  $\mathbf{s} > \mathbf{I}_{\max} \left[ \left( \hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}^* \right)^{-1} \hat{M}_{z\Delta}^* \hat{M}_{z\Delta} \hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}^{-1} \right]$ . Então,  $\forall \mathbf{a} > 0$  tal que

$$\mathbf{a}^2 > \left\{ \left\| \left( \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}^* \right)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\|^2 + \mathbf{I}_{\max} \left[ \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \right] \right\}$$

onde

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}^* \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \left( I - \mathbf{g}^2 \hat{M}_{\Delta\Delta}^* \hat{M}_{\Delta\Delta} \right) - \hat{M}_{z\Delta}^* \hat{M}_{z\Delta},$$

$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}$  não-singular, tem-se que  $\hat{A}(\mathbf{a}^2 I, \mathbf{s}I) \geq 0$ . ∇

**Demonstração:** Primeiramente, note que  $\hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) \geq 0$  pode ser escrito como

$$\hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\Lambda} - \mathbf{g}^2 \hat{M}_{\Delta\Delta}^* \hat{\Lambda} \hat{M}_{\Delta\Delta} & 0 \\ \hline 0 & \hat{Y} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c|c} \hat{M}_{z\Delta}^* \hat{M}_{z\Delta} & \hat{M}_a(\hat{\Lambda}) \\ \hline \hat{M}_a(\hat{\Lambda})^* & \hat{M}_b(\hat{\Lambda}) \end{array} \right]$$

$\hat{M}_a(\hat{\Lambda})$  e  $\hat{M}_b(\hat{\Lambda})$  como definidos no enunciado, de modo que, para  $\hat{Y} = \mathbf{a}^2 I$  e  $\hat{\Lambda} = \mathbf{s}I$ , tem-se que

$$\hat{A}(\mathbf{a}^2 I, \mathbf{s}I) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{s} \left( I - \mathbf{g}^2 \hat{M}_{\Delta\Delta}^* \hat{M}_{\Delta\Delta} \right) - \hat{M}_{z\Delta}^* \hat{M}_{z\Delta} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{a}^2 I \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \\ \hline \hat{M}_a(\mathbf{s}I)^* & \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \end{array} \right]$$

Da condição  $\|\mathbf{g}\hat{M}_{\Delta\Delta}\| < 1$ , segue que  $I - \mathbf{g}^2\hat{M}_{\Delta\Delta}^*\hat{M}_{\Delta\Delta} > 0$ .

Assim, para  $\mathbf{s} > I_{\max}\left[\left(\hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}^*\right)^{-1}\hat{M}_{z\Delta}^*\hat{M}_{z\Delta}\hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}^{-1}\right]$ , onde  $I - \mathbf{g}^2\hat{M}_{\Delta\Delta}^*\hat{M}_{\Delta\Delta} = \hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}^*\hat{\mathbf{f}}_{\Delta\Delta}$ , tem-se que

$$\mathbf{s}\left(I - \mathbf{g}^2\hat{M}_{\Delta\Delta}^*\hat{M}_{\Delta\Delta}\right) - \hat{M}_{z\Delta}^*\hat{M}_{z\Delta} > 0,$$

de modo que, escrevendo

$$\mathbf{s}\left(I - \mathbf{g}^2\hat{M}_{\Delta\Delta}^*\hat{M}_{\Delta\Delta}\right) - \hat{M}_{z\Delta}^*\hat{M}_{z\Delta} = \hat{\mathbf{f}}_s^*\hat{\mathbf{f}}_s$$

tem-se que  $\hat{A}(\mathbf{a}^2I, \mathbf{s}I)$  é escrito como

$$\hat{A}(\mathbf{a}^2I, \mathbf{s}I) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_s^* & 0 \\ 0 & \mathbf{a}I \end{bmatrix} \left\{ I - \begin{bmatrix} \left(\hat{\mathbf{f}}_s^*\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \\ \hat{M}_a(\mathbf{s}I)^* & \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_s^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^{-1}I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{a}I \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que se  $\mathbf{f}$  é não-singular, então  $M \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}^*M\mathbf{f} \geq 0$ , segue dessa última expressão que

$$\hat{A}(\mathbf{a}^2I, \mathbf{s}I) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ I - \begin{bmatrix} \left(\hat{\mathbf{f}}_s^*\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \\ \hat{M}_a(\mathbf{s}I)^* & \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_s^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^{-1}I \end{bmatrix} \right\} \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ I - \begin{bmatrix} 0 & \left(\hat{\mathbf{f}}_s^*\right)^{-1}\hat{M}_a(\mathbf{s}I)\mathbf{a}^{-1} \\ \mathbf{a}^{-1}\hat{M}_a(\mathbf{s}I)^*\hat{\mathbf{f}}_s^{-1} & \mathbf{a}^{-2}\hat{M}_b(\mathbf{s}I) \end{bmatrix} \right\} \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$\forall v_1 \in \mathbb{C}^{m_1}, \forall v_2 \in \mathbb{C}^{m_2} :$

$$\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2 - \left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & (\hat{\mathbf{f}}_s^*)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \mathbf{a}^{-1} \\ \mathbf{a}^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I)^* \hat{\mathbf{f}}_s^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle - \langle v_2, \mathbf{a}^{-2} \hat{M}_b(\mathbf{s}I) v_2 \rangle \geq 0.$$

Portanto, demonstrou-se que

$$\hat{A}(\mathbf{a}^2 I, \mathbf{s}I) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$\forall v_1 \in \mathbb{C}^{m_1}, \forall v_2 \in \mathbb{C}^{m_2} :$

$$\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2 - \left\{ 2 \operatorname{Re} \langle v_1, \mathbf{a}^{-1} (\hat{\mathbf{f}}_s^*)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) v_2 \rangle + \langle v_2, \mathbf{a}^{-2} \hat{M}_b(\mathbf{s}I) v_2 \rangle \right\} \geq 0$$

Tendo em vista que  $|\operatorname{Re} \langle u, v \rangle| \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_F \|v\|_F$ , que  $\|Mv\|_2 \leq \|M\| \|v\|_2$ , e que como

$\hat{M}_b(\mathbf{s}I) = \hat{M}_b(\mathbf{s}I)^* \geq 0$  tem-se que  $\mathbf{I}_{\max} [\hat{M}_b(\mathbf{s}I)] = \|\hat{M}_b(\mathbf{s}I)\|$ , segue-se que uma

condição suficiente para esta última desigualdade é dada por

$$\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2 - \left\{ 2 \|v_1\|_2 \|v_2\|_2 \left\| \mathbf{a}^{-1} (\hat{\mathbf{f}}_s^*)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\| + \|v_2\|_2^2 \mathbf{a}^{-2} \mathbf{I}_{\max} [\hat{M}_b(\mathbf{s}I)] \right\} \geq 0$$

ou equivalentemente (fazendo o completamento de quadrados):

$$\|v_2\|_2 + \left\{ \|v_1\|_2 - \|v_2\|_2 \left\| \mathbf{a}^{-1}(\hat{\mathbf{f}}_s)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\| \right\}^2 - \|v_2\|_2^2 \left\| \mathbf{a}^{-1}(\hat{\mathbf{f}}_s)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\|^2$$

$$+ \|v_2\|_2^2 \mathbf{a}^{-2} \mathbf{I}_{\max} \left[ \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \right] \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(3.6.1) \left\{ \|v_1\|_2 - \|v_2\|_2 \left\| \mathbf{a}^{-1}(\hat{\mathbf{f}}_s)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\| \right\}^2 + \|v_2\|_2^2 \{1 - \mathbf{a}^{-2} \left\| (\hat{\mathbf{f}}_s)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\|^2$$

$$- \mathbf{a}^{-2} \mathbf{I}_{\max} \left[ \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \right] \geq 0.$$

Assim, se  $\mathbf{a}^2 > \left\{ \left\| (\hat{\mathbf{f}}_s)^{-1} \hat{M}_a(\mathbf{s}I) \right\|^2 + \mathbf{I}_{\max} \left[ \hat{M}_b(\mathbf{s}I) \right] \right\}$ , tem-se que (3.6.1) de fato ocorre

o que implica em  $\hat{A}(\mathbf{a}^2 I, I) \geq 0$  □

Retornado ao conjunto factível do **Problema k**, isto é

$$\{(Y, \Lambda) \in S_Y \times S_\Lambda : A(Y, \Lambda)(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}\}$$

onde  $A(Y, \Lambda) = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} - M \tilde{\begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} M,$

$$M = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta w} \\ M_{z\Delta} & M_{zw} \end{bmatrix}, M_{\Delta\Delta} \in RH_\infty^{p \times p}, M_{zw} \in RH_\infty^{n_z \times n_w},$$

a Proposição 3.6.1 é facilmente estendida para o caso dependente da frequência,

observando-se que para um dado controlador estabilizante, tem-se que  $\|\mathbf{g} M_{\Delta\Delta}\|_\infty < 1$ , o

que implica que

$$I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta} \tilde{\phantom{M}}(j\omega) M_{\Delta\Delta}(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R},$$

e portanto, é possível tomar uma fatoração espectral

$$I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta} = \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim} \mathbf{f}_{\Delta\Delta}$$

com  $\mathbf{f}_{\Delta\Delta} \in RH_{\infty}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{-1} \in RH_{\infty}^{p \times p}$ . Segue-se que por um argumento análogo ao feito para caso matricial que se

$$\mathbf{a}^2 > \left\{ \left\| \left( \mathbf{f}_s^{\sim} \right)^{-1} M_a(\mathbf{s}I) \right\|_{\infty}^2 + \bar{I}_{\infty} [M_b(\mathbf{s}I)] \right\},$$

onde  $\mathbf{s} > \bar{I}_{\infty} \left[ \left( \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim} \right)^{-1} M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta} \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{-1} \right]$ , e  $\mathbf{f}_s^{\sim} \mathbf{f}_s = \mathbf{s} \left( I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta} \right) - M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta}$ , tem-se que

$A(\mathbf{a}^2 I, I)(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ , onde  $M_a(\mathbf{s}I)$  e  $M_b(\mathbf{s}I)$  são as funções matriciais correspondentes a  $\hat{M}_a(\mathbf{s}I)$ ,  $\hat{M}_b(\mathbf{s}I)$ , isto é,  $M_a(\mathbf{s}I) = \mathbf{s} M_{\Delta\Delta}^{\sim} \mathbf{g}^2 M_{\Delta w} + M_{z\Delta}^{\sim} M_{\Delta w}$  e  $M_b(\mathbf{s}I) = \mathbf{s} M_{\Delta w}^{\sim} \mathbf{g}^2 M_{\Delta w} + M_{z w}^{\sim} M_{z w}$ .

Finalmente, pode-se concluir que para quaisquer classes lineares  $\bar{S}_Y$  e  $\bar{S}_{\Lambda}$ , o conjunto factível correspondente do **Problema k** é não-vazio. Isto se segue do fato de que todas as classes tem um “termo livre constante” e portanto  $\mathbf{a}^2 I \in \bar{S}_Y$  e  $I \in \bar{S}_{\Lambda}$ . Essas idéias estão sumarizadas na seguinte Proposição (cuja demonstração é análoga à anterior) e Corolário apresentados a seguir :

**Proposição 3.6.2:** Sejam  $M = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta w} \\ M_{z\Delta} & M_{zw} \end{bmatrix}$ ;  $M_{\Delta\Delta} \in RH_{\infty}^{p \times p}$ ,  $M_{zw} \in RH_{\infty}^{n_z \times n_w}$ , e para

$\Lambda \in RL_{\infty}^{p \times p}$ ,  $Y \in RL_{\infty}^{n_w \times n_w}$ ,  $\Lambda = \Lambda^{\sim}$ ,  $Y = Y^{\sim}$ , defina

$$A(Y, \Lambda) = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} - M^{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M.$$

Suponha que  $\|\mathbf{g}M_{\Delta\Delta}\|_{\infty} < 1$  e sejam

$$I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta} = \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim} \mathbf{f}_{\Delta\Delta} \text{ com } \mathbf{f}_{\Delta\Delta} \in RH_{\infty}^{p \times p}, \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{-1} \in RH_{\infty}^{p \times p},$$

$$M_a(\Lambda) = M_{\Delta\Delta}^{\sim} \mathbf{g}^2 \Lambda M_{\Delta w} + M_{z\Delta}^{\sim} M_{\Delta w},$$

$$M_b(\Lambda) = M_{\Delta w}^{\sim} \mathbf{g}^2 \Lambda M_{\Delta w} + M_{zw}^{\sim} M_{zw},$$

e

$$\mathbf{s} > \bar{I}_{\infty} \left[ (\mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{\sim})^{-1} M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta} \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{-1} \right].$$

Então,  $\forall \mathbf{a} > 0$  tal que

$$\mathbf{a}^2 > \left\{ \left\| (\mathbf{f}_{\mathbf{s}}^{\sim})^{-1} M_a(\mathbf{s}I) \right\|^2 + \bar{I}_{\infty} [M_b(\mathbf{s}I)] \right\}$$

onde  $\mathbf{f}_{\mathbf{s}}^{\sim} \mathbf{f}_{\mathbf{s}} = \mathbf{s} (I - \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}^{\sim} M_{\Delta\Delta}) - M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta}$ , tem-se que  $A(\mathbf{a}^2 I, \mathbf{s}I) \geq 0$ .  $\nabla$

**Corolário 3.6.3:** Para quaisquer classes lineares  $\bar{S}_Y$  e  $\bar{S}_{\Lambda}$  definidas na seção 3.3, existe

uma solução factível do **Problema k**.  $\nabla$

Na próxima seção será examinada a questão da determinação das classes lineares.

### 3.7-Construção iterativa de classes lineares para o cálculo de $J_k$

Analogamente ao que foi feito na seção 3.4, apresenta-se nesta seção uma maneira heurística de modificar iterativamente as classes lineares sobre as quais serão calculados limitantes do “pior-caso”  $H_2$ . De fato, para um dado ponto interior  $(Y, \Lambda)$  do **Problema k**, procura-se um direção factível e descendente  $(\Delta Y, \Delta \Lambda)$  para o funcional de custo do **Problema k** ( $F_k$  para simplificar). Desse modo, a “parte dinâmica estável” do novo par  $(Y + \Delta Y, \Lambda + \Delta \Lambda)$  é obtida a partir das realizações das “partes dinâmicas estáveis” de  $Y$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Lambda$  e  $\Delta \Lambda$ . Assim, escrevendo

$$Y = X_{\tilde{Y}} + X_Y, \quad X_Y = C_Y (s - A_Y)^{-1} B_Y + D_Y,$$

$$\Delta Y = \Delta X_{\tilde{Y}} + \Delta X_Y, \quad \Delta X_Y = C_{\Delta Y} (s - A_{\Delta Y})^{-1} B_{\Delta Y} + D_{\Delta Y}$$

uma nova classe linear  $\bar{S}_Y$  pode ser obtida a partir de  $Y$  e  $\Delta Y$  da seguinte forma:

$$\bar{S}_Y = \left\{ \bar{Y} \in S_Y : \bar{Y} = \bar{X}_Y + \bar{X}_{\tilde{Y}}, X_Y(s) = C(sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D, C \in \mathbb{R}^{n_w \times n_Y}, D \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w} \right\}$$

onde  $\bar{A}_Y = \begin{bmatrix} A_Y & 0 \\ 0 & A_{\Delta Y} \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B}_Y = \begin{bmatrix} B_Y \\ B_{\Delta Y} \end{bmatrix}$ .

O procedimento é o mesmo para  $\Lambda$  e  $\Delta\Lambda$ .

Tendo em vista a heurística acima, será estudado a seguir, uma maneira de determinar uma direção factível e descendente  $(\Delta Y, \Delta\Lambda)$ . Assim como na seção 3.4, a idéia é utilizar direções descendentes aproximadamente alinhadas com o “gradiente” do funcional de custo para gerar a “dinâmica” que define as classes lineares. De fato, tendo em vista que

$$F_k(Y, \Lambda) \triangleq \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle = \left\langle g_0 \left[ g_0^{-1} (g_0^{-1})^\sim \tilde{\mathbf{f}}_k \tilde{\mathbf{f}}_k \right], g_0 Y \right\rangle$$

uma direção descendente para  $F_k$  é dada por qualquer par  $(\Delta Y, \Delta\Lambda)$  tal que

$$\Delta Y \triangleq g_0^{-1} (g_0^{-1})^\sim \tilde{\mathbf{f}}_k \tilde{\mathbf{f}}_k.$$

Entretanto, observe que  $F_k$  não depende de  $\Lambda$ , de maneira que buscar tais direções para o funcional de custo do **Problema k** baseado unicamente no “gradiente” não fornece qualquer sugestão sobre como as “dinâmicas” de  $\Lambda$  podem ser modificadas.

Assim, direções descendentes e factíveis, aproximadamente alinhadas com o gradiente serão caracterizadas substituindo-se (localmente) as condições LMI por condições quadráticas suficientes associadas com o (assim chamado) Elipsóide de Dynkin (Nemirovski & Gahinet, 1997).

Da mesma forma que na seção anterior será inicialmente considerado o caso matricial, isto é, será considerado o problema

$$\min \langle \hat{\mathbf{f}}, \hat{Y} \hat{\mathbf{f}} \rangle_F \text{ sujeito } \hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) \geq 0$$

onde  $\hat{Y} = \hat{Y}^*$ ,  $\hat{\Lambda} = \text{diag}\{\hat{\mathbf{I}}_1 I_{r_1}, \hat{\mathbf{I}}_2 I_{r_2}\}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Inicialmente, será apresentada uma proposição que fornece condições quadráticas suficientes para que se tenha perturbações factíveis em um ponto interior do conjunto factível do **Problema k**, ou equivalentemente, caracteriza um conjunto de direções factíveis originando-se em um ponto interior do conjunto factível.

**Proposição 3.7.1** Sejam  $\hat{\Lambda} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ ,  $\hat{Y} \in \mathbb{C}^{n_w \times n_w}$ ,  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^*$ ,  $\hat{Y} = \hat{Y}^*$ , tais que  $A(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) > 0$ ,

$\hat{\Lambda} > 0$ , e tome as fatorações  $\hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) = \hat{\mathbf{f}}_a^* \hat{\mathbf{f}}_a$ ,  $\hat{\Lambda} = \hat{\mathbf{f}}_\Lambda^* \hat{\mathbf{f}}_\Lambda$ , com  $\hat{\mathbf{f}}_a$  não-singular e  $\hat{\mathbf{f}}_\Lambda$  não-

singular. Para  $\hat{E} = (\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$ ,  $\hat{E}_Y = \hat{E}_Y^*$ ,  $\hat{E}_\Lambda = \text{diag}\{\hat{e}_{I_1} I_{r_1}, \hat{e}_{I_2} I_{r_2}\}$  defina

$$\Delta\hat{A}(\hat{E}) = \hat{A}(\hat{Y} + \hat{E}_Y, \hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda) - \hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda})$$

e

$$C_D(\hat{E}) \triangleq \left\| \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{\mathbf{f}}_\Lambda^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}(\hat{E}) & 0 \\ 0 & \hat{E}_\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{f}}_\Lambda^{-1} \end{bmatrix} \right\|_F^2.$$

Se  $\hat{E} = (\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$  é tal que  $C_D(\hat{E}) \leq \mathbf{d}_D$ , onde  $\mathbf{d}_D \in (0, 1)$ , então

$$A(\hat{Y} + \hat{E}_Y, \hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda) > 0 \text{ e } \hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda > 0 \quad \nabla$$

**Demonstração:** Inicialmente, note que  $C_D(\hat{E})$  pode ser escrito como

$$C_D(\hat{E}) = \left\| (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\|_F^2 + \left\| (\hat{\mathbf{f}}_\Lambda^*)^{-1} \hat{E}_\Lambda \hat{\mathbf{f}}_\Lambda^{-1} \right\|_F^2.$$

Portanto se  $\hat{E} = (\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$  é tal que  $C_D(\hat{E}) \leq \mathbf{d}_D$ , então

$$\left\| (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\|_F^2 \leq \mathbf{d}_D$$

e segue que

$$\left| \mathbf{l}_{\min} \left[ (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right] \right| \leq \left\| (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\|_F \leq \mathbf{d}_D^{1/2} < 1$$

o que implica que  $\left[ I + (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right] > 0$ . Assim sendo

$$0 < \hat{\mathbf{f}}_a^* \left[ I + (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right] \hat{\mathbf{f}}_a = \hat{A}(\hat{Y}, \hat{\Lambda}) + \Delta \hat{A}(\hat{E}) = \hat{A}(\hat{Y} + \hat{E}_Y, \hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda)$$

Note agora que “ $C_D(\hat{E}) \leq \mathbf{d}_D$ ” implica que

$$\left\| (\hat{\mathbf{f}}_\Lambda^*)^{-1} \hat{E}_\Lambda \hat{\mathbf{f}}_\Lambda^{-1} \right\|_F^2 \leq \mathbf{d}_D$$

e por um argumento análogo ao anterior mostra-se que  $\hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda > 0$  □

Com base na Proposição 3.7.1, poder-se-ia tentar obter direções descendentes e factíveis resolvendo o problema

$$\min \langle \hat{\mathbf{f}}, \hat{E}_Y \hat{\mathbf{f}} \rangle \text{ sujeito } C_D(\hat{E}) \leq \mathbf{d}_D$$

Contudo, uma simplificação adicional é possível, explorando-se o fato do custo acima depender apenas de  $\hat{E}_Y$ . A proposição a seguir caracteriza um subconjunto de direções factíveis daquele apresentado na Proposição 3.7.1 que permitirá determinar separadamente  $\hat{E}_Y$  e  $\hat{E}_\Lambda$ . A proposição baseia-se no fato de que para  $\hat{E} = (\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$  o funcional  $C_D(\hat{E})$  definido na Proposição 3.7.1, pode ser escrito como

$$C_D(\hat{E}) = C_{DY}(\hat{E}_Y) + C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$$

onde  $C_{DY}(\hat{E}_Y)$  e  $C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$  são explicitados no Apêndice 3-E. Da expressão acima segue-se a seguinte proposição:

**Proposição 3.7.2:** Para cada  $\hat{E}_Y$  seja  $\hat{E}_\Lambda^0$  tal que  $C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda^0) < 0$ . Se  $\hat{E}_Y$  é tal que

$C_{DY}(\hat{E}_Y) \leq \mathbf{d}_D$ , então  $C_D(\hat{E}) \leq C_{DY}(\hat{E}_Y) \leq \mathbf{d}_D$ , e segue que

$$\hat{A}(\hat{Y} + \hat{E}_Y, \hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda^0) > 0 \text{ e } (\hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda^0) > 0 \quad \nabla$$

Com base na Proposição 3.7.2 pode-se obter uma direção factível e descendente

$\hat{E}_* = (\hat{E}_{Y_*}, \hat{E}_{\Lambda_*})$  da seguinte forma:

Primeiramente, ache

$$\hat{E}_{Y_*} = \arg \min \langle \hat{\mathbf{f}}, \hat{E}_Y \hat{\mathbf{f}} \rangle \text{ sujeito a } C_{DY}(\hat{E}_Y) \leq \mathbf{d}_D$$

A seguir, defina  $\hat{E}_{\Lambda_*}$  tal que  $C_{D\Lambda}(\hat{E}_{Y_*}, \hat{E}_{\Lambda_*}) < 0$ .

De fato, é possível caracterizar explicitamente  $\hat{E}_{Y_*}$  e  $\hat{E}_{\Lambda_*}$  desejados (para mais detalhes veja Apêndice 3-E)

A extensão para o caso dependente da frequência é obtido essencialmente, pelo resultado acima obtido em cada frequência. Assim, recordando o problema original:

$$\min \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle \text{ sujeito a } A(Y, \Lambda)(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

onde  $Y \sim = Y$ ,  $\Lambda = \{I_1 I_{r_1}, I_2 I_{r_2}\}$ ,  $\forall i = 1, 2: I_i(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $I_i \sim = I_i$ ,

tem-se que para um dado ponto interior  $(Y, \Lambda)$ , isto é  $A(Y, \Lambda)(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$  e

$(\Lambda)(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ , obtém-se uma direção factível e descendente (com relação ao funcional custo), da seguinte forma:

Primeiramente, defina  $E_{Y_*}(j\omega)$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ , por

$$E_{Y^*}(j\omega) = \arg \min \langle \mathbf{f}_k(j\omega), E_Y(j\omega) \mathbf{f}_k(j\omega) \rangle \text{ sujeito a } C_{DY}(E_Y(j\omega)) \leq \mathbf{d}_D \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

A seguir, defina  $E_{\Lambda^*}$  tal que  $C_{D\Lambda}(E_{Y^*}, E_{\Lambda^*})(j\omega) < 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

Da mesma forma que no caso matricial,  $E_{Y^*}(j\omega)$  e  $E_{\Lambda^*}(j\omega)$  são explicitados no Apêndice 3-E.

## 3.8-Parametrização linear para o limitante obtido por meio de LFT

Nesta seção será usado o procedimento de confinar variáveis de decisão a subespaços de dimensão finita para o problema de otimização correspondente ao limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  obtido na seção 2.6. Recorde que esse limitante é o valor ótimo do problema

$$\min_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}_q} L_*(\mathbf{q})$$

onde

$$S_q = \{ \mathbf{q} \in RL_\infty^{p \times p} : \mathbf{q}(j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}, \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \};$$

$$L_*(\mathbf{q}) = \sup \{ L_c(T, \mathbf{q}) : T \in RH_\infty^{p \times p} \};$$

$$L_c(T, \mathbf{q}) = \left\| \Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F \right\|_2^2 - \langle g_0 c_c(T), g_0 \mathbf{q} \rangle;$$

$$c_c(T) \triangleq (\Xi_c + T)(\Xi_c + T)^\sim - \frac{1}{\mathbf{g}^2} I, \quad g_0 = (s+1)^{-1};$$

$\Theta_F^a \in RH_\infty^{p \times p}$ ,  $\Theta_F^b \in RH_2^{p \times p}$ ,  $\Xi_F \in RH_2^{p \times p}$ ,  $\Xi_c \in RH_\infty^{p \times p}$  são definidos por

$$\Theta_F^a = M_{z\Delta} P_{12}^{-1}; \quad \Theta_F^b = P_{21}^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w; \quad \Xi_F = M_{zw} \mathbf{f}_w; \quad \Xi_c = P_{11},$$

$P_{11}$ ,  $P_{12}$  e  $P_{21}$  definidos de forma a satisfazer as condições do Teorema 2.6.1 enunciado na seção 2.6.

Resultados análogos aos da seção 3.2 e seção 3.3 são obtidos, no sentido de caracterizar o funcional  $L_*(\mathbf{q})$ , para um multiplicador fixo, como valor ótimo de um problema de otimização linear com restrição LMI, e em seguida, usar essa caracterização para mostrar que a minimização de  $L_*(\mathbf{q})$  sobre uma classe parametrizada de multiplicadores é equivalente a um problema de otimização com funcional custo afim nos parâmetros livres da classe, e restrição definida por LMI envolvendo esses parâmetros livres.

Para caracterizar  $L_*(\mathbf{q})$  como descrito acima, será mostrado que o funcional lagrangeano pode ser relacionado com o funcional de custo de um problema de

horizonte infinito LQR. Para isto, assim como na seção 3.2, o funcional lagrangeano é escrito na forma

$$L_c(T, \mathbf{q}) = -\{\langle \Gamma T, T \rangle + 2\langle \Xi, T \rangle\} + L_c(0, \mathbf{q})$$

com  $\Gamma = \Gamma^*$ ,  $\Xi \in M(RH_2)$ .

Neste sentido note que  $\langle g_0 c_c(T), g_0 \mathbf{q} \rangle$  pode ser escrito como

$$(3.8.1) \langle g_0 c_c(T), g_0 \mathbf{q} \rangle = \langle g_0 \mathbf{q} T, g_0 T \rangle + 2\langle g_0 \mathbf{q} \Xi_c, g_0 T \rangle + \langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle - \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle.$$

A seguir, utiliza-se o produto de Kronecker no termo  $\|\Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F\|_2^2$ , de modo que

$$\|\Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F\|_2^2 = \|\Theta_F^a \otimes (\Theta_F^b)^T T + \Xi_F\|_2^2$$

onde para

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ & \vdots & \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & \vdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix},$$

$$\underline{A} = [a_1 \cdots a_q \cdots a_n \cdots a_{iq}]^T \text{ e } A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} B & \cdots & a_{1q} B \\ & \vdots & \\ a_{q1} B & \cdots & a_{qq} B \end{bmatrix}$$

Denotando  $A_\Theta = \Theta_F^a \otimes (\Theta_F^b)^T \in RH_\infty^{p^2 \times p^2}$ ,  $B_\Theta = \Xi_F \in RH_2^{p^2}$ , escreve-se

$$\|\Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F\|_2^2 = \|A_\Theta \underline{T} + B_\Theta\|_2^2$$

ou mais explicitamente

$$(3.8.2) \quad \|\Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F\|_2^2 = \left\langle (g_0^{-1})^\sim g_0^{-1} A_\Theta \tilde{A}_\Theta g_0 \underline{T}, g_0 \underline{T} \right\rangle + 2 \left\langle (g_0^{-1})^\sim A_\Theta B_\Theta, g_0 \underline{T} \right\rangle + \|B_\Theta\|_2^2.$$

Substituindo (3.8.1) e (3.8.2) na expressão de  $L_c(T, \mathbf{q})$ , tem-se que

$$(3.8.3) \quad L_c(T, \mathbf{q}) = -\left\langle \Gamma_q(g_0 \underline{T}), (g_0 \underline{T}) \right\rangle + 2 \left\langle \Xi_q, (g_0 \underline{T}) \right\rangle + \|B_\Theta\|_2^2 + \frac{1}{\mathbf{g}^2} \left\langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \right\rangle \\ - \left\langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \right\rangle$$

onde

$$\Gamma_q = (\mathbf{q} \otimes I_p) - (g_0^{-1})^\sim g_0^{-1} A_\Theta \tilde{A}_\Theta, \quad \Xi_q = -g_0 \mathbf{q} \Xi_c - (g_0^{-1})^\sim A_\Theta \tilde{B}_\Theta.$$

Denotando  $T = g_0 \underline{T} \in RH_2^{p^2}$ , pode-se escrever

$$L_*(\mathbf{q}) = \sup \left\{ L_c(T, \mathbf{q}) : T \in RH_2^{p^2} \right\}$$

A seguir, será enunciada uma proposição que caracteriza  $L_*(\mathbf{q})$  como valor ótimo de um problema de otimização linear sujeito a uma restrição LMI. A

demonstração é omitida, uma vez que é formalmente análoga ao desenvolvimento da seção 3.2

**Proposição 3.8.1:** Seja  $\mathbf{q} \in S_q$  tal que existe  $\mathbf{e} > 0$  para o qual  $\Gamma_q(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ .

Então

$$L_*(\mathbf{q}) = -\mathbf{m}_q + \|B_\Theta\|_2^2 + \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle - \langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle$$

onde  $\mathbf{m}_q$  é o valor ótimo do problema

$$\max_{P=P^T} \bar{X}_0^T P \bar{X}_0 \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \bar{B} + \bar{S}_{xu} \\ \bar{B}^T P + \bar{S}_{xu}^T & \bar{S}_{uu} \end{bmatrix} \geq 0$$

onde

e  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{E}, \bar{S}_{xu}, \bar{S}_{uu}$  e  $\bar{X}_0$  só dependem de  $\mathbf{q}$  e são dadas por

$$\bar{A} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{A}_g & 0 \\ 0 & \bar{A}_x \end{bmatrix}, \hat{B} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{B}_g \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{X}_0 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_x \end{bmatrix}, \bar{S}_{uu} \triangleq \bar{D}_g + \bar{D}_g^T, \bar{S}_{xu}^T \triangleq [\bar{C}_g \quad \bar{C}_x],$$

$(\bar{A}_g, \bar{B}_g, \bar{C}_g, \bar{D}_g)$  é uma realização da parte estável de  $\Gamma_q = (\mathbf{q} \otimes I_p) - (g_0^{-1})^\sim g_0^{-1} A_\Theta \tilde{A}_\Theta$ ,

$(\bar{A}_x, \bar{B}_x, \bar{C}_x)$  é uma realização de  $\{\Xi_q\}_+ = \left\{ -g_0 (\mathbf{q} \Xi_c) - (g_0^{-1})^\sim A_\Theta B_\Theta \right\}_+$ , com  $(\bar{A}_g, \bar{B}_g)$  e

$(\bar{A}_x, \bar{B}_x)$  controláveis,  $\bar{A}_g$  e  $\bar{A}_x$  Hurwitz

∇

**Comentário:** Os termos  $\Gamma_q$ ,  $\Xi_q$  e  $\left\{ \|B_\Theta\|_2^2 + \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle - \langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle \right\}$

encontrados na Proposição 3.8.1 correspondem respectivamente aos termos  $\Gamma_{h_1 h_2}$ ,  $\Xi_{h_1 h_2}$

e  $\left\{ \|M_{z_w} \mathbf{f}_k\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta_w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta_w} \mathbf{f}_k \rangle \right\}$  definidos na seção 3.2

A seguir, define-se a classe linearmente parametrizada de multiplicadores matriciais sobre o qual é feita a minimização de  $L_*(\mathbf{q})$ . Considere inicialmente

$$\bar{S}_q \triangleq \left\{ \mathbf{q} \in S_q : \mathbf{q} = G_q + G_q^-, G_q \in RH_\infty^{p \times p} : G_q(s) = C_q (sI - \bar{A}_q)^{-1} \bar{B}_q + D_q : C_q \in \mathbb{R}^{p \times n_q}, \right. \\ \left. D_q \in \mathbb{R}^{p \times p} \right\}, (\bar{A}_q, \bar{B}_q) \text{ controlável, } \bar{A}_q \text{ Hurwitz, } \bar{B}_q \text{ com posto máximo.}$$

Para um dado  $\mathbf{e} > 0$ , define-se

$$\bar{S}_q(\mathbf{e}) \triangleq \bar{S}_q \cap \{ \mathbf{q} : \Gamma_q(j\omega) - \mathbf{e}I \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R} \}$$

Segue que para todo  $\mathbf{q} \in \bar{S}_q(\mathbf{e})$ ,  $L_*(\mathbf{q})$  tem a caracterização dada pela Proposição 3.8.1.

Note que até agora, o desenvolvimento da seção 3.8 tem sido formalmente análogo ao da seção 3.2 e seção 3.3. A questão que surge naturalmente neste ponto, é se os parâmetros livres da classe  $\mathbf{q} \in \bar{S}_q(\mathbf{e})$  aparecem exclusivamente e de forma afim nos termos  $\bar{C}_g$ ,  $\bar{D}_g$  e  $\bar{C}_x$  das realizações definidas na Proposição 3.8.1 e nos termos de  $L_c(0, \mathbf{q})$ . A resposta é afirmativa (Veja Apêndice 3-F), de modo que, de maneira similar ao desenvolvimento da seção 3.3, mostra-se que a minimização de  $L_*(\mathbf{q})$  sobre  $\bar{S}_q(\mathbf{e})$

consiste em um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI. Além disso, as heurísticas usadas na seção 3.4 para escolha dos termos que definem a classe linear a ser considerada também podem ser usadas neste contexto. Mais explicitamente, pode-se mostrar que  $\Delta \mathbf{q}$  é uma direção descendente para  $L_*(\cdot)$  em um dado  $\mathbf{q}$  se e somente se  $\langle g_0 c_c(T_*(\mathbf{q})), g_0 \Delta \mathbf{q} \rangle > 0$ , onde  $T_* = \operatorname{argmax} L_c(T, \mathbf{q})$ , e usar a caracterização de direções descendentes, aproximadamente alinhadas com o “gradiente” do funcional dual para sugerir dinâmicas para a classe  $\overline{S}_q$ . De fato, escrevendo  $\Delta \mathbf{q} = (\Delta \hat{G}_q + \Delta D_q)^\sim + (\Delta \hat{G}_q + \Delta D_q)$  tem-se que  $(\Delta D_q, \Delta \hat{G}_q)$  definem uma direção descendente  $\Delta \mathbf{q}$  se e somente se

$$2 \left\langle \left\{ g_0 c_c(T_*(\mathbf{q})) \right\}_+, g_0 \Delta \hat{G}_q \right\rangle + \mathbf{p}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} \left\{ \Delta D_q g_0^2 c_c(T_*(\mathbf{q})) \right\} (j\omega) d\omega > 0$$

### 3.9-Conclusões

Neste capítulo, as variáveis de decisão dos problemas de otimização em espaços de funções (correspondentes a obtenção de limitantes superiores para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$ ) formulados no capítulo 2 foram confinados a subespaços de dimensão finita pré-especificados e foi mostrada a equivalência entre os problemas truncados correspondentes e problemas de otimização linear em espaços euclidiano com restrições definidas por LMI’s, para os quais existem eficientes métodos de resolução numérica.

Em adição aos problemas originais formulados nas seções 2.4 e 2.5, são apresentadas heurísticas para escolha dos subespaços, baseado em análise no domínio da frequência e caracterização de direções factíveis e descendentes, aproximadamente alinhadas com o gradiente do funcional de custo destes problemas (seção 3.4 e seção 3.7).

Finalmente, embora o procedimento da seção 3.8 seja formalmente análogo ao desenvolvimento contido nas seções 3.2, 3.3 e 3.4 no que diz respeito a caracterização de um funcional dual como problema de otimização linear com restrição LMI, confinamento dos multiplicadores a subespaços de dimensão finita e utilização de heurísticas semelhantes para escolha dos subespaços, convém recordar que o problema original formulado na seção 2.6 foi obtido a partir de resultados gerais de LFT, ainda não usados para o propósito de análise de desempenho de sistemas perturbados.

## Apêndice 3-A: Demonstrações da seção 3.2

**Demonstração da Proposição 3.2.1:** Note inicialmente que

$$\begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xu}u \\ S_{xu}^T x + S_{uu}u \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = x^T S_{xu} u + u^T S_{xu}^T x + u^T S_{uu} u = 2x^T S_{xu} u + u^T S_{uu} u$$

Como resultado:

$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} (t) dt = 2 \langle S_{xu}^T z, y \rangle + \langle S_{uu} y, y \rangle$$

onde  $z$  é a transformada de Laplace de  $x(\cdot)$  que é dada por  $z = H_{\hat{A}} \hat{X}_0 + H_{\hat{A}} \hat{B} y$ , onde

$$H_{\hat{A}}(s) = (sI - \hat{A})^{-1} \text{ ou equivalentemente}$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} (t) dt = 2 \langle S_{xu}^T H_{\hat{A}} \hat{X}_0, y \rangle + 2 \langle (S_{xu}^T H_{\hat{A}} \hat{B} + D_g) y, y \rangle$$

Note agora que

$$S_{xu}^T H_{\hat{A}}(s) \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} C_g & C_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (sI - A_x)^{-1} B_x \end{bmatrix} = C_x (sI - A_x)^{-1} B_x$$

e

$$S_{xu}^T H_{\hat{A}}(s) \hat{B} = \begin{bmatrix} C_g & C_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_g)^{-1} B_g \\ 0 \end{bmatrix} = C_g (sI - A_g)^{-1} B_g$$

de modo que  $S_{xu}^T H_{\hat{A}}(s) \hat{X}_0 = \{ \Xi_{h_1 h_2} \}_+$  e  $S_{xu}^T H_{\hat{A}} \hat{B} + D_g = E_{h_1 h_2}$ , e portanto

$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} (t) dt = 2 \langle E_{h_1 h_2} y, y \rangle + 2 \langle \{ \Xi_{h_1 h_2} \}_+, y \rangle$$

Note-se agora que

$$2 \langle E_{h_1 h_2} y, y \rangle = \langle E_{h_1 h_2} y, y \rangle + \langle y, E_{h_1 h_2} y \rangle = \langle (E_{h_1 h_2} + E_{h_1 h_2}^T) y, y \rangle = \langle \Gamma_{h_1 h_2} y, y \rangle, \text{ e}$$

$$\langle \{ \Xi_{h_1 h_2} \}_+, y \rangle = \langle \Xi_{h_1 h_2}, y \rangle \forall y \in RH_2^p, \text{ e portanto}$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \hat{S} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\} (t) dt = \langle \Gamma_{h_1 h_2} y, y \rangle + 2 \langle \Xi_{h_1 h_2}, y \rangle.$$

**Demonstração do Lema 3.2.2:** A demonstração do Lema do 3.2.2 envolve as seguintes proposições intermediárias :

**Proposição I.1:** Se  $(A_z, R_z)$  é estabilizável e  $H_z$  não tem autovalores no eixo imaginário então existe  $P = P^T$  tal que  $Q(P) > 0$  ∇

**Demonstração:** Sob as hipóteses acima segue-se do Corolário 7.2.1, pg 92 (Francis, 1987) que existe  $P_0 = P_0^T$  tal que  $Q(P_0) = 0$  e  $(A_z + R_z P_0)$  é Hurwitz. Para  $P = P_0 + \Delta P$ , com  $\Delta P = \Delta P^T$ , tem-se que

$$Q(P) = A_z^T P_0 + A_z^T \Delta P + P_0 A_z + \Delta P A_z + P_0 R_z P_0 + \Delta P R_z P_0 + P_0 R_z \Delta P + \Delta P R_z \Delta P + Q_z$$

$\Leftrightarrow$

$$Q(P) = Q(P_0) + (A_z^T + P_0 R_z) \Delta P + \Delta P (A_z + R_z P_0) + \Delta P R_z \Delta P$$

Como  $Q(P_0) = 0$ , segue que

$$Q(P) = (A_z^T + P_0 R_z) \Delta P + \Delta P (A_z + R_z P_0) + \Delta P R_z \Delta P$$

Como  $(A_z + R_z P_0)$  é Hurwitz, existe  $\bar{\Delta}P = (\bar{\Delta}P)^T > 0$  tal que

$$(A_z + R_z P_0)^T \bar{\Delta}P + \bar{\Delta}P (A_z + R_z P_0) < 0$$

e portanto

$$\check{Q} = (A_z + R_z P_0)^T (-\bar{\Delta}P) + (-\bar{\Delta}P) (A_z + R_z P_0) > 0$$

Seja  $\check{\Delta}P(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\bar{\Delta}P$  e observe que

$$Q(P_0 + \check{\Delta}P(\mathbf{a})) = \mathbf{a}\check{Q} + \mathbf{a}^2 \bar{\Delta}P R_z \bar{\Delta}P = \mathbf{a}(\check{Q} + \mathbf{a}\bar{\Delta}P R_z \bar{\Delta}P)$$

Assim sendo, para  $\mathbf{a} > 0$  tal que  $\mathbf{a} \left| \mathbf{I}_{\max} \left[ \check{Q}^{-1/2} \bar{\Delta}P R_z \bar{\Delta}P \check{Q}^{-1/2} \right] \right| < 1$ , ou  $\mathbf{I}_{\min}(\check{Q}) \geq$

$\mathbf{a} \left| \mathbf{I}_{\max}(\bar{\Delta}P R_z \bar{\Delta}P) \right|$ , tem-se que  $Q(P_0 + \check{\Delta}P(\mathbf{a})) > 0$  □

**Proposição I.2:** Se  $(A_z, R_z)$  e  $H_z$  satisfazem as hipóteses da Proposição I.1, então existe  $P_* = P_*^T$  tal que  $Q(P_*) = 0$ ,  $(A_z + R_z P_*)$  é Hurwitz e  $\forall P (= P^T)$  tal que  $Q(P) \geq 0$ , tem-se que  $P_* \geq P$ . ∇

**Demonstração:** Segue diretamente da Proposição I.1 e do Teorema 13.11, (i),(iv), pg. 343 (Zhou et al (1996)) □

**Proposição I.3:** Se existe  $P_* = P_*^T$  tal que  $Q(P_*) = 0$  e  $(A_z + R_z P_*)$  é Hurwitz então

(i) “Se  $J_*$  é finito”,  $J_* = J(u_*)$ ,

onde  $u_*(t) = F_* x_*(t)$ ,  $x_*(t)$  satisfaz  $\dot{x}_*(t) = (A + BF_*)x_*(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $x_*(0) = x_0$  e

$$F_* = -S_{uu}^{-1} (S_{ux} + B^T P_*).$$

(ii)  $J_* = x_0^T P_* x_0$  ∇

A demonstração do Lema 3.2.2 é concluída da seguinte forma:

Segue-se da Proposição I.2 que  $\forall P$  tal que  $Q(P) \geq 0$ ,  $x_0^T P_* x_0 \geq x_0^T P x_0$ , e portanto,

como  $P_* = P_*^T$  e  $Q(P_*) = 0$ , segue-se da Proposição I.3 que

$$(1) \quad J_* = x_0^T P_* x_0 = \max \{ x_0^T P x_0 : P = P^T, Q(P) \geq 0 \}$$

Finalmente, como

$$Q(P) = A^T P - (BS_{uu}^{-1}S_{ux})^T P + PA - P(BS_{uu}^{-1}S_{ux}) - PBS_{uu}^{-1}B^T P + S_{xx} - S_{xu}S_{uu}^{-1}S_{xu}^T, \text{ isto é}$$

$Q(P) = A^T P + PA + S_{xx} - (S_{xu} + PB)S_{uu}^{-1}(S_{xu}^T + B^T P)$ , e  $S_{uu} > 0$ , segue fórmula do complemento de Schur que

$$Q(P) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_{xx} + A^T P + PA & PB + S_{xu} \\ B^T P + S_{xu}^T & S_{uu} \end{bmatrix} \geq 0$$

e portanto, segue-se de (1) que  $J_*$  é o valor ótimo do Problema

$$\max x_0^T P_* x_0 \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} S_{xx} + A^T P + PA & PB + S_{xu} \\ B^T P + S_{xu}^T & S_{uu} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \square$$

**Demonstração da Proposição I.3:** (i): Seja  $u = u_* + v$  e note que  $x(t) = x_*(t) + x_v(t)$ ,

onde

$$\dot{x}_v(t) = Ax_v(t) + Bv(t), \quad x_v(0) = 0. \text{ Assim sendo,}$$

$$J(u) = \left\langle \begin{bmatrix} x_* \\ u_* \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x_* \\ u_* \end{bmatrix} \right\rangle + 2 \left\langle \begin{bmatrix} x_* \\ u_* \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$J(u) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_* \right\rangle + 2 \left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle$$

Note que se  $J_*$  é finito então  $\forall v \in L_2[0, \infty)$ , tem-se que  $\left\langle \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0$ . Portanto,

como  $\begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix}$  é linear em  $v$ ,  $J(u_*) = J_*$  se e somente se

$$(2) \quad \forall v \in L_2[0, \infty), \left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Será demonstrado a seguir que (2) é de fato satisfeita. Neste sentido note que (pelo Teorema de Parseval):

$$\left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} G_* x_0, S \begin{bmatrix} G_A B \\ I \end{bmatrix} \hat{v} \right\rangle$$

onde  $G_*(s) = [sI - (A + BF_*)]^{-1}$ ,  $G_A(s) = (sI - A)^{-1}$  e  $\hat{v}$  denota a transformada de

Fourier de  $\hat{v}$ , e portanto,

$$\left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} B^T G_A^* & I \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} G_* x_0, \hat{v} \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle (B^T \tilde{G}_A (S_{xx} + S_{xu} F_*) + M(F_*)) G_* x_0, \hat{v} \right\rangle, \text{ onde } M(F_*) \triangleq S_{ux} + S_{uu} F_*$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \left\{ (B^T \tilde{G}_A (S_{xx} + S_{xu} F_*) + M(F_*)) G_* x_0 \right\}_+, \hat{v} \right\rangle$$

pois  $H_2$  e  $H_{2-}$  são ortogonais (Francis (1987)). Por outro lado, como

$$\left\{ (B^T \tilde{G}_A (S_{xx} + S_{xu} F_*) + M(F_*)) G_* x_0 \right\}_+ = \left\{ B^T \tilde{G}_A (S_{xx} + S_{xu} F_*) G_* x_0 \right\}_+ + M(F_*) G_* x_0$$

e pelo Lema 1, Correa & Sales (1997):

$$\left\{ B^T \tilde{G}_A (S_{xx} + S_{xu} F_*) G_* x_0 \right\}_+ = B^T M_a G_* (s) x_0,$$

onde  $M_a$  é a única solução da equação  $M_a (A + B F_*) + A^T M_a = -(S_{xx} + S_{xu} F_*)$ , segue-

se que

$$\left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle B^T M_a + M(F_*) G_* x_0, \hat{v} \right\rangle.$$

Assim sendo, como  $M(F_*) = S_{ux} + S_{uu} F_* = S_{ux} + S_{uu} \{-S_{uu}^{-1} S_{ux} - S_{uu}^{-1} B^T P_*\}$ , isto é,

$M(F_*) = -B^T P_*$ , segue-se que

$$\left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} x_v \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \langle B^T (M_a - P_*) G_* x_0, \hat{v} \rangle.$$

A demonstração de (2) é concluída verificando-se que  $M_a = P_*$ . De fato,  $M_a$  é a única solução de

$$M_a A + A^T M_a + M_a B F_* = -(S_{xx} + S_{xu} F_*)$$

$\Leftrightarrow$

$$M_a A + A^T M_a + M_a (-BS_{uu}^{-1} S_{ux}) + M_a (-BS_{uu}^{-1} B^T P_*) = -S_{xx} + S_{xu} S_{uu}^{-1} S_{ux} + S_{xu} S_{uu}^{-1} B^T P_*$$

$\Leftrightarrow$

$$M_a A_z + A_z^T M_a + (BS_{uu}^{-1} S_{ux})^T M_a - M_a BS_{uu}^{-1} B^T P_* = S_{xu} S_{uu}^{-1} B^T P_* - Q_z$$

$\Leftrightarrow$

$$M_a A_z + A_z^T M_a + S_{xu} S_{uu}^{-1} B^T (M_a - P_*) - M_a BS_{uu}^{-1} B^T P_* + Q_z = 0$$

e esta última equação é satisfeita para  $M_a = P_*$

(ii) Segue-se de (2) que

$$J(u_*) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_*, S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} x_* \right\rangle, \text{ ou equivalentemente}$$

$$J(u_*) = \int_0^\infty x_0^T \exp[(A + BF_*)^T t] \begin{bmatrix} I & F_*^T \\ & F_* \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} \exp[(A + BF_*)t] x_0 dt,$$

e portanto,  $J(u_*) = x_0^T G_x x_0$ , onde  $G_x$  é a única solução da equação

$$(3) \quad (A + BF_*)^T G_x + G_x (A + BF_*) = - \begin{bmatrix} I & F_*^T \\ & F_* \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix}$$

A demonstração é concluída verificando que  $G_x = P_*$ . De fato note que

$$\begin{bmatrix} I & F_*^T \\ & F_* \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F_*^T \\ & F_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} + S_{xu} F_*^T \\ S_{ux} + S_{uu} F_*^T \end{bmatrix} = S_{xx} + S_{xu} F_*^T + F_*^T S_{ux} + F_*^T S_{uu} F_*^T$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & F_*^T \\ & F_* \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} &= S_{xx} - S_{xu} S_{uu}^{-1} S_{ux} - S_{xu} S_{uu}^{-1} B^T P_* - S_{ux}^T S_{uu}^{-1} S_{ux} - P_* B S_{uu}^{-1} S_{ux} \\ &+ S_{ux}^T S_{uu}^{-1} S_{uu} S_{uu}^{-1} S_{ux} + S_{ux}^T S_{uu}^{-1} S_{uu} S_{uu}^{-1} B^T P_* + P_* B S_{uu}^{-1} S_{uu} S_{uu}^{-1} S_{ux} + P_* B S_{uu}^{-1} S_{uu} S_{uu}^{-1} B^T P_*, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} I & F_*^T \\ & F_* \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I \\ F_* \end{bmatrix} = S_{xx} - S_{xu} S_{uu}^{-1} S_{ux} + P_* B S_{uu}^{-1} B^T P_* = Q_z - P_* R_z P_*$$

e como

$$A + BF_* = A - BS_{uu}^{-1}S_{xu} - BS_{uu}^{-1}B^T P_*$$

segue-se que (3) pode ser reescrita como

$$A_z^T G_x - P_* B S_{uu}^{-1} B^T G_x + G_x A_z - G_x B S_{uu}^{-1} B^T P_* = -Q_z + P_* R_z P_*$$

ou equivalentemente

$$A_z^T G_x + G_x A_z + P_* R_z (G_x - P_*) + G_x R_z P_* + Q_z = 0$$

a qual é satisfeita para  $G_x = P_*$

□

### Comentário do Lema 3.2.2:

Será mostrado que  $(A_z, R_z)$  é estabilizável e  $H_z$  não tem autovalores no eixo imaginário, onde

$$A_z = \hat{A} - \hat{B} S_{uu}^{-1} S_{ux}, \quad R_z = -\hat{B} S_{uu}^{-1} \hat{B}^T, \quad Q_z = S_{xx} - S_{xu} S_{uu}^{-1} S_{xu}^T, \quad \text{e } H_z = \begin{bmatrix} A_z & R_z \\ -Q_z & -A_z^T \end{bmatrix};$$

$\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xu} \\ S_{ux} & S_{uu} \end{bmatrix}$  como definidos na Proposição 3.2.1, isto é

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_g & 0 \\ 0 & A_x \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} 0 & S_{xu} \\ S_{xu}^T & S_{uu} \end{bmatrix}, \quad S_{uu} = D_g + D_g^T, \quad S_{xu}^T = \begin{bmatrix} C_g & C_x \end{bmatrix}$$

Considere inicialmente

$$A_z = \hat{A} - \hat{B}S_{uu}^{-1}S_{ux} = \begin{bmatrix} A_g & 0 \\ 0 & A_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} S_{uu}^{-1} S_{ux}$$

de modo que

$$A_z = \begin{bmatrix} A_g - B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^g & -B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^x \\ 0 & A_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z^g & -B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^x \\ 0 & A_x \end{bmatrix}$$

onde  $A_z^g = A_g - B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^g$ ,  $S_{ux} = \begin{bmatrix} S_{ux}^g \\ S_{ux}^x \end{bmatrix}$ , e

$$R_z = -\hat{B}S_{uu}^{-1}\hat{B}^T = -\begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} S_{uu}^{-1} \begin{bmatrix} B_g^T & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que  $R_z = \begin{bmatrix} -B_g S_{uu}^{-1} B_g^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z^g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Por definição,  $(A_z, R_z)$  é estabilizável se e somente se existe  $X$  tal que  $(A_z + R_z X)$  é

Hurwitz, e note que

$$(A_z + R_z X) \text{ é Hurwitz} \Leftrightarrow A_z + \begin{bmatrix} R_z^g X_{11} & R_z^g X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é Hurwitz.}$$

Como  $A_x$  é Hurwitz e  $A_z = \begin{bmatrix} A_z^g & -B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^x \\ 0 & A_x \end{bmatrix}$ , segue que

$(A_z + R_z X)$  é Hurwitz se e somente se  $(A_z^g + R_z^g X_{11})$  é Hurwitz

Portanto,  $(A_z, R_z)$  é estabilizável se e somente se  $(A_z^g, R_z^g)$  é estabilizável, ou seja se e somente se  $(A_g - B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^g, B_g S_{uu}^{-1} B_g^T)$  é estabilizável, o que de fato ocorre pois  $(A_g - B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^g, B_g S_{uu}^{-1} B_g^T)$  é controlável uma vez que  $(A_g, B_g)$  é controlável  $S_{uu}$  é positiva definida.

Considere agora o hamiltoniano  $H_z$  e note que

$$H_z = \begin{bmatrix} A_z^g & -B_g S_{uu}^{-1} S_{ux}^x & R_z^g & 0 \\ 0 & A_x & 0 & 0 \\ -Q_{z11} & -Q_{z12} & (-A_z^g)^T & 0 \\ -Q_{z21} & -Q_{z22} & (S_{ux}^x)^T S_{uu}^{-1} B_g^T & -A_x^T \end{bmatrix}$$

e portanto, permutando o 1º e 2º bloco de linhas e colunas, isto é, definindo

$$\hat{H}_z = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & \\ 0 & & I \end{bmatrix} H_z \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & \\ 0 & & I \end{bmatrix}$$

segue-se que

$$\hat{H}_z = \begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 & 0 \\ -B_g S_{uu}^{-1} S_{ux} & A_z^g & R_z^g & 0 \\ -Q_{z_{12}} & -Q_{z_{11}} & (-A_z^g)^T & 0 \\ -Q_{z_{22}} & -Q_{z_{21}} & (S_{ux}^x)^T S_{uu}^{-1} B_g^T & -A_x^T \end{bmatrix}$$

e portanto,  $H_z$  tem autovalores no eixo imaginário se e somente se  $\hat{H}_z$  tem autovalores

no eixo imaginário o que por sua vez ocorre, se e somente se  $H_z^g = \begin{bmatrix} A_z^g & R_z^g \\ -Q_{z_{11}} & (-A_z^g)^T \end{bmatrix}$

tem autovalores no eixo imaginário. Como  $Q_{z_{11}} = -C_g (D_g^T + D_g)^{-1} C_g^T$ ,

$A_z^g = A_g - B_g (D_g^T + D_g)^{-1} C_g$  e  $R_z^g = -B_g (D_g^T + D_g)^{-1} B_g^T$ , segue-se que  $H_z^g$  é o

hamiltoniano que define uma fatoração espectral de  $\Gamma_{h_1 h_2}$  (Francis (1987), pg 93) e

portanto, como “ $\Gamma_{h_1 h_2}(j\omega) \geq \epsilon I \forall \omega \in \mathbb{R}$ ” e  $(A_g, B_g)$  é controlável,  $H_z^g$  não tem

autovalores no eixo imaginário (Francis,(1987),pg 95). □

## Apêndice 3-B: Demonstrações da seção 3.3

### Demonstração da Proposição 3.3.1:

Seja

$$\Gamma_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 \left\{ h_i \left( R_i^T R_i - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta\Delta} \right) \right\} - M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta} = E_{h_1 h_2} + E_{h_1 h_2}^{\sim},$$

se  $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , então para  $i=1,2$ , tem-se que

$$h_i = g_i + g_i^{\sim} : g_i = c_{g_i}^T (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i + d_{g_i}.$$

Tomando-se então  $E_F \in RH_{\infty}^{p \times p}$  tal que  $M_{z\Delta}^{\sim} M_{z\Delta} = E_F + E_F^{\sim}$  e  $E_g^{(i)} \in RH_{\infty}^{p \times p}$  tal que

$$R_i^T R_i - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta\Delta} = E_g^{(i)} + \left[ E_g^{(i)} \right]^{\sim}, \quad i=1,2, ,$$

pode-se escrever

$$\Gamma_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 (g_i + g_i^{\sim}) \left( E_g^{(i)} + \left[ E_g^{(i)} \right]^{\sim} \right) - E_F - E_F^{\sim}$$

ou equivalentemente

$$(4) \quad \Gamma_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 \left\{ g_i E_g^{(i)} + g_i \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim + g_i^\sim E_g^{(i)} + \left( g_i \left[ E_g^{(i)} \right] \right)^\sim \right\} - E_F - E_F^\sim.$$

Como  $g_i = \hat{g}_i + d_{g_i}$  onde  $\hat{g}_i = c_{g_i}^T (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i$ , tem-se que

$$(5) \quad g_i \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim = (\hat{g}_i + d_{g_i}) \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim = \left\{ \hat{g}_i \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim \right\}_+ + \left\{ \hat{g}_i \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim \right\}_- + d_{g_i} \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim$$

E segue de (1) e (2) que  $E_{h_1 h_2}$  é escrito como

$$(6) \quad E_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 \left\{ g_i E_g^{(i)} + \left\{ \hat{g}_i \left[ E_g^{(i)} \right]^\sim \right\}_+ + \left\{ \hat{g}_i^\sim E_g^{(i)} \right\}_+ + d_{g_i} E_g^{(i)} \right\} - E_F.$$

Agora, observando-se que para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{p \times q}$  tem-se

$$(x^T A y) Q = (I_p \otimes x^T) (I_p \otimes A) (I_p \otimes y) Q$$

pode-se escrever

$$(7) \quad \hat{g}_i(s) I_p = \left[ I_p \otimes c_{g_i}^T \right] Y_{g_i}(s) \text{ onde } Y_{g_i}(s) = \left[ sI - (I_p \otimes \bar{A}_i) \right]^{-1} (I_p \otimes \bar{B}_i),$$

e

$$(8) \quad \hat{g}_i^{\sim}(s) = [I_p \otimes c_{g_i}^T] \hat{Y}_{g_i}^{\sim}(s) \text{ onde } \hat{Y}_{g_i}^{\sim}(s) = -[sI + (I_p \otimes \bar{A}_i)]^{-1} (I_p \otimes \bar{B}_i).$$

Substituindo (7) e (8) em (6), tem-se que

$$E_{h_1 h_2} = \sum_{i=1}^2 2d_{g_i} E_g^{(i)} - E_F + \sum_{i=1}^2 (I_p \otimes c_{g_i}^T) \left\{ Y_{g_i} E_g^{(i)} + \left\{ Y_{g_i} [E_g^{(i)}]^{\sim} \right\}_+ + \left\{ \hat{Y}_{g_i}^{\sim} E_g^{(i)} \right\}_+ \right\}$$

ou equivalentemente (escrevendo  $E_g^{(i)} = \hat{E}_g^{(i)} + D_{Eg}^{(i)}$ )

$$(9) \quad E_{h_1 h_2} = \left[ (I_p \otimes c_{g_1}^T) : (I_p \otimes c_{g_2}^T) : 2d_{g_1} I_p : 2d_{g_2} I_p \right] Y_E + \sum_{i=1}^2 2d_{g_i} D_{Eg}^{(i)} - E_F$$

$$\text{onde } Y_E \triangleq \begin{bmatrix} Y_{g_1} E_g^{(1)} + \left\{ Y_{g_1} [E_g^{(1)}]^{\sim} \right\}_+ + \left\{ \hat{Y}_{g_1}^{\sim} E_g^{(1)} \right\}_+ \\ Y_{g_2} E_g^{(2)} + \left\{ Y_{g_2} [E_g^{(2)}]^{\sim} \right\}_+ + \left\{ \hat{Y}_{g_2}^{\sim} E_g^{(2)} \right\}_+ \\ \hat{E}_g^{(1)} \\ \hat{E}_g^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Assim, a partir da expressão (9), uma realização  $(A_g, B_g, C_g, D_g)$  de  $E_{h_1 h_2}$ , pode ser obtida das realizações  $(A_{Y_E}, B_{Y_E}, C_{Y_E})$  de  $Y_E$  e  $(A_{E_F}, B_{E_F}, C_{E_F}, D_{E_F})$  de  $E_F$  da seguinte forma:

$$(10) \begin{cases} A_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} A_{YE} & 0 \\ 0 & A_{EF} \end{bmatrix}, \quad B_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} B_{YE} \\ -B_{EF} \end{bmatrix}, \quad D_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^2 d_{g_i} D_{Eg}^{(i)} - D_{EF} \\ C_{\mathbf{g}} = \left[ (I_p \otimes c_{g_1}^T) : (I_p \otimes c_{g_2}^T) : 2d_{g_1} I_p : 2d_{g_2} I_p : C_{EF} \right] \begin{bmatrix} C_{YE} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{cases}$$

Com relação a  $\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+$ , note que para  $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , tem-se que

$$\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+ = - \left\{ \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 h_i M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ - \{M_{z\Delta}^{\sim} M_{zw} \mathbf{f}_k\}_+$$

$\Leftrightarrow$

$$\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+ = - \left\{ \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 (g_i + g_i^{\sim}) M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ - \{M_{z\Delta}^{\sim} M_{zw} \mathbf{f}_k\}_+$$

$\Leftrightarrow$

$$\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+ = - \left\{ \sum_{i=1}^2 2\mathbf{g}^2 d_{g_i} M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ - \left\{ \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \hat{g}_i M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ - \left\{ \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \hat{g}_i^{\sim} M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+$$

$$- \{M_{z\Delta}^{\sim} M_{zw} \mathbf{f}_k\}_+$$

$\Leftrightarrow$

$$\{\Xi_{h_1 h_2}\}_+ = - \left\{ \sum_{i=1}^2 2\mathbf{g}^2 d_{g_i} M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ - \mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^2 (I_p \otimes c_{g_i}^T) \left\{ \{Y_{g_i} M_{\Delta\Delta}^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k\}_+ \right\}$$

$$-\mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^2 (I_p \otimes c_{g_i}^T) \left\{ \hat{Y}_{g_i} \tilde{M}_{\Delta\Delta} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ - \left\{ M_{z\Delta} \tilde{M}_{zw} \mathbf{f}_k \right\}_+$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+ = -\mathbf{g}^2 \left[ (I_p \otimes c_{g_1}^T) : (I_p \otimes c_{g_2}^T) : 2d_{g_1} I_p : 2d_{g_2} I_p \right] Y_{\mathbf{x}} - \left\{ M_{z\Delta} \tilde{M}_{zw} \mathbf{f}_k \right\}_+$$

onde:

$$Y_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \left\{ Y_{g_1} \tilde{M}_{\Delta\Delta} R_1^T R_1 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ + \left\{ \hat{Y}_{g_1} \tilde{M}_{\Delta\Delta} R_1^T R_1 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \\ \left\{ Y_{g_2} \tilde{M}_{\Delta\Delta} R_2^T R_2 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ + \left\{ \hat{Y}_{g_2} \tilde{M}_{\Delta\Delta} R_2^T R_2 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \\ \left\{ M_{\Delta\Delta} \tilde{R}_1^T R_1 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \\ \left\{ M_{\Delta\Delta} \tilde{R}_2^T R_2 M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \end{bmatrix}$$

De modo que uma realização  $(A_{\mathbf{x}}, B_{\mathbf{x}}, C_{\mathbf{x}})$  de  $\left\{ \Xi_{h_1 h_2} \right\}_+$  pode ser obtida das realizações

$(A_{Y_{\mathbf{x}}}, B_{Y_{\mathbf{x}}}, C_{Y_{\mathbf{x}}})$  de  $Y_{\mathbf{x}}$  e  $(A_{Z_{\mathbf{x}}}, B_{Z_{\mathbf{x}}}, C_{Z_{\mathbf{x}}})$  de  $\left\{ M_{z\Delta} \tilde{M}_{zw} \mathbf{f}_k \right\}_+$ , da seguinte forma:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} A_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_{Y_{\mathbf{x}}} & 0 \\ 0 & A_{Z_{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}, B_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^2 B_{Y_{\mathbf{x}}} \\ -B_{Z_{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} \\ C_{\mathbf{x}} = \left[ (I_p \otimes c_{g_1}^T) : (I_p \otimes c_{g_2}^T) : 2d_{g_1} I_p : 2d_{g_2} I_p : C_{Z_{\mathbf{x}}} \right] \begin{bmatrix} C_{Y_{\mathbf{x}}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

As realizações (10) e (11) são as realizações descritas no enunciado da Proposição 3.3.1. Para completar a demonstração, observe que como foram tomadas realizações mínimas de funções de transferências estáveis,  $A_g$  será Hurwitz por construção  $\square$

### Demonstração da Proposição 3.3.2:

Seja  $(h_1, h_2) \in \bar{\mathcal{S}}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  e portanto,  $L_*(h_1, h_2)$  é finito. Se  $(A_g, B_g)$  e  $(A_x, B_x)$  são controláveis, como  $A_g$  e  $A_x$  são Hurwitz e  $B_g$  tem posto máximo, segue da Proposição 3.1.2 que

$$L_*(h_1, h_2) = -\mathbf{m}_{h_1 h_2} + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

onde  $\mathbf{m}_{h_1 h_2}$  é o valor ótimo do problema

$$\max_{P=P^T} \left( \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 \right) \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} + S_{xu} \\ \hat{B}^T P + S_{xu}^T & D_g + D_g^T \end{bmatrix} \geq 0.$$

Note então, que  $-\mathbf{m}_{h_1 h_2}$  é o valor ótimo do problema

$$\min_{P=P^T} \left( \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 \right) \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} + S_{xu} \\ \hat{B}^T P + S_{xu}^T & D_g + D_g^T \end{bmatrix} \geq 0$$

ou equivalentemente (trocando  $-P$  por  $P$ ),  $-\mathbf{m}_{h_1 h_2}$  é o valor ótimo do problema

$$(12) \quad \min_{P=P^T} \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} - S_{xu} \\ \hat{B}^T P - S_{xu}^T & -[D_g + D_g^T] \end{bmatrix} \leq 0$$

E pela Proposição 3.3.1, os parâmetros livres  $(c_{g_1}, d_{g_1})$  e  $(c_{g_2}, d_{g_2})$  de  $\bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$  aparecem linearmente e exclusivamente nos termos  $C_g$ ,  $D_g$  e  $C_x$ , e conseqüentemente em  $S_{xu}^T = [C_g \quad C_x]$ . Portanto, a restrição em (12) é de fato uma LMI, e provou-se que para  $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , tem-se que

$$(13) \quad L_*(h_1, h_2) = \min \left\{ \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2 : P = P^T, Q(P, \mathfrak{S}) \leq 0 \right\}$$

onde  $Q(P, \mathfrak{S})$  é a matriz definida em (12), e conforme observado,  $S_{xu}(\cdot)$  e  $D_g(\cdot)$  são funções lineares de  $\mathfrak{S} = (c_{g_1}, c_{g_2}, d_{g_1}, d_{g_2})$  e  $(d_{g_1}, d_{g_2})$  respectivamente.

Segue-se de (13) que

$$(14) \quad \mathbf{h}_{h_1 h_2}^*(\mathbf{e}) = \inf \left\{ \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle + \|M_{zw} \mathbf{f}_k\|_2^2 : P = P^T, Q(P, \mathfrak{S}) \leq 0; \right. \\ \left. (h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e}) \right\}$$

A seguir, é mostrado que a condição “ $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ ” é equivalente a restrições definidas por L.M. $\Gamma$ s. Para isto, recorde que se  $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ , então

$$(15) \quad \exists \mathbf{e} > 0 \text{ para o qual } \Gamma_{h_1 h_2}(j\mathbf{w}) - \mathbf{e}I \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R},$$

e

$$(16) \quad \text{para } i = 1, 2, \text{ tem-se que } h_i(j\mathbf{w}) = g_i(j\mathbf{w}) + \tilde{g}_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}.$$

Como  $g_i = c_{g_i}(sI - \bar{A}_i)\bar{B}_i + d_{g_i}$ , com  $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$  controlável e  $\bar{A}_i$  Hurwitz, e recorde que por hipótese,  $(A_g, B_g)$  é controlável e  $A_g$  é Hurwitz, segue diretamente do Lema Positivo Real (Boyd et al (1994)) que (15) e (16) são equivalentes a

$$(17) \quad \exists \tilde{P} = \tilde{P}^T, P > 0: \begin{bmatrix} A_g^T \tilde{P} + \tilde{P} A_g & \tilde{P} B_g - C_g^T(\mathfrak{S}) \\ \tilde{B}^T \tilde{P} - C_g(\mathfrak{S}) & -[D_g(d_{g_1}, d_{g_2}) + D_g^T(d_{g_1}, d_{g_2})] + \mathbf{e}I \end{bmatrix} \leq 0$$

e

$$(18) \quad \exists P_i = P_i^T, P_i > 0: \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i & P_i \bar{B}_i - c_{g_i}^T \\ \bar{B}_i^T P_i - c_{g_i} & -2d_{g_i} \end{bmatrix} \leq 0; i = 1, 2.$$

Ou seja, a condição “ $(h_1, h_2) \in \bar{S}_{h_1 h_2}(\mathbf{e})$ ” é equivalente a (17) e (18). Substituindo em (14), tem-se que

$$(19) \mathbf{h}_{h_1 h_2}^*(\mathbf{e}) = \inf \left\{ \hat{X}_0^T P \hat{X}_0 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle + \|M_{\Delta w} \mathbf{f}_k\|_2^2 : P = P^T, \tilde{P} = \tilde{P}^T, P_i = P_i^T \right.$$

são tais que  $P > 0, \tilde{P} > 0, P_i > 0; Q(P, \mathfrak{S}) \leq 0, Q_e(\tilde{P}, \mathfrak{S}) \leq 0, Q_i(P_i, c_{g_i}, d_{g_i}) \leq 0; i=1,2\}$

onde  $Q_e(\tilde{P}, \mathfrak{S})$  e  $Q_i(P_i, c_{g_i}, d_{g_i})$  são as matrizes definidas em (14) e (15).

Para completar a demonstração, resta escrever os termos  $\mathbf{g}^2 \langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$  da

função custo, em função de  $(c_{g_i}, d_{g_i})$ . Para isto, note que

$$\langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle = \langle (g_i + \tilde{g}_i) R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle = \langle g_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle + \langle \tilde{g}_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle = \langle g_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle + \langle M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, g_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle = 2 \langle g_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle h_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle = 2d_{g_i} \langle R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle + 2 \langle \hat{g}_i R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$(20) \quad \mathbf{g}^2 \left\langle h_i R_i^T R M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\rangle = \mathbf{g}^2 d_{g_i} \|R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k\|_2^2 + \mathbf{g}^2 \left\langle \hat{g}_i I_p, \left\{ (M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \right\rangle$$

Agora, introduzindo uma realização  $(A_{\Phi_i}, B_{\Phi_i}, C_{\Phi_i})$  de  $\left\{ (M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+$ , e

observando que  $\hat{g}_i I_p$  tem uma realização dada por  $\left( [I_p \otimes \bar{A}_i], [I_p \otimes \bar{B}_i], [I_p \otimes c_{g_i}^T] \right)$ , é

bem conhecido que

$$(21) \quad \left\langle \hat{g}_i I_p, \left\{ (M_{\Delta w} \mathbf{f}_k)^{\sim} R_i^T R_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \right\}_+ \right\rangle = \text{tr} \left\{ (I_p \otimes c_{g_i}^T) M_{g_i} C_{\Phi_i}^T \right\}$$

onde, para  $i=1,2$ ;  $M_{g_i}$  é dado por

$$(I_p \otimes \bar{A}_i) M_{g_i} + M_{g_i} A_{\Phi_i}^T = - \left[ (I_p \otimes \bar{B}_i) \right] B_{\Phi_i}^T.$$

A demonstração é concluída substituindo-se (20) e (21) em (19)

□

## Apêndice 3-C: Demonstrações da seção 3.4

### Demonstração da Proposição 3.4.2

Para  $(h_1, h_2) \in S_\Gamma$ ,  $\Delta h_1 \in RL_\infty$  e  $\Delta h_2 \in RL_\infty$  tais que  $\Delta \tilde{h}_1 = \Delta h_1$  e  $\Delta \tilde{h}_2 = \Delta h_2$

,  $\mathbf{a} \in [0, \mathbf{a}_e]$ , defina  $\bar{h}_1(\mathbf{a}) \triangleq h_1 + \mathbf{a}\Delta h_1$  e  $\bar{h}_2(\mathbf{a}) = h_2 + \mathbf{a}\Delta h_2$ . Note-se então que

$$(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) \in S_\Gamma$$

De fato,  $\Gamma_{\bar{h}_1(\mathbf{a})\bar{h}_2(\mathbf{a})} = \Gamma_{h_1 h_2} + \mathbf{a} \left( \Delta h_1 \Gamma_g^{(1)} + \Delta h_2 \Gamma_g^{(2)} \right)$ , e segue-se que

$$\underline{I}_\infty \left( \Gamma_{\bar{h}_1(\mathbf{a})\bar{h}_2(\mathbf{a})} \right) (j\omega) \geq \underline{I}_\infty \left( \Gamma_{h_1 h_2} \right) (j\omega) - \frac{\mathbf{e}}{2} I > 0.$$

Note-se agora que

$$(22) \quad L_a \left( T, \bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a}) \right) = L_a \left( T, h_1, h_2 \right) - \mathbf{a} \left\{ \sum_{i=1}^2 c_i \left( T_* \left( h_1, h_2 \right), \Delta h_i \right) \right\}.$$

Por outro lado, escrevendo  $T = T_* \left( h_1, h_2 \right) + \Delta T$ , tem-se que

$$(23) \quad L_a(T, h_1, h_2) = L_a(T_*(h_1, h_2), h_1, h_2) - \langle \Gamma_{h_1 h_2} \Delta T, \Delta T \rangle.$$

Substituindo (23) em (22) obtém-se que

$$L_a(T, \bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) = L_a(T_*(h_1, h_2), h_1, h_2) - \left\{ \langle \Gamma_{h_1 h_2} \Delta T, \Delta T \rangle + \mathbf{a} \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) \right\}$$

Da expressão acima, tem-se que

$$(24) \quad L_*(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) = L_*(h_1, h_2) - \inf \{ J_{\Delta T}(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \}$$

onde

$$J_{\Delta T}(\Delta T) \triangleq \langle \Gamma_{h_1 h_2} \Delta T, \Delta T \rangle + \mathbf{a} \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i).$$

Note-se agora que

$$c_i(T, \Delta h_i) = \langle \Delta h_i \Gamma_g^{(i)} T, T \rangle + 2\mathbf{g}^2 \langle \Delta h_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta \Delta} T \rangle - \mathbf{g}^2 \langle \Delta h_i M_{\Delta w} \mathbf{f}_k, M_{\Delta w} \mathbf{f}_k \rangle$$

e portanto

$$c_i(T_*(h_1, h_2) + \Delta T, \Delta h_i) = c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) + \langle \Delta h_i \Gamma_g^{(i)} \Delta T, \Delta T \rangle$$

$$+2 \left\langle \Delta h_i \Gamma_g^{(i)} T_*(h_1, h_2) + \Delta h_i \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta} \tilde{M}_{\Delta w} \mathbf{f}_k, \Delta T \right\rangle.$$

Usando essa expressão em  $J_{\Delta T}(\Delta T)$ , pode-se escrever

$$\inf \{ J_{\Delta T}(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \} = \mathbf{a} \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) + \inf \{ \tilde{J}_{\Delta}(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \}$$

onde

$$\tilde{J}_{\Delta}(\Delta T) \triangleq \left\langle \left[ \Gamma_{h_1 h_2} + \mathbf{a} \left( \Delta h_1 \Gamma_g^{(1)} + \Delta h_2 \Gamma_g^{(2)} \right) \right] \Delta T, \Delta T \right\rangle + 2\mathbf{a} \left\langle \Delta h_1 \Xi_{\Delta_1} + \Delta h_2 \Xi_{\Delta_2}, \Delta T \right\rangle.$$

$$\text{com } \Xi_{\Delta_i} = \Gamma_g^{(i)} T_*(h_1, h_2) + \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta} \tilde{M}_{\Delta w} \mathbf{f}_k.$$

Portanto, de (24), tem-se que

$$L_*(h_1, h_2) - L_*(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) = \mathbf{a} \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) + \inf \{ \tilde{J}_{\Delta}(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \}$$

Usando a igualdade acima e o fato de que  $\inf \{ \tilde{J}_{\Delta}(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \} \leq 0$ , tem-se que

$$L_*(h_1, h_2) - L_*(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) \leq \mathbf{a} \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i).$$

Para obter o limite inferior de  $L_*(h_1, h_2) - L_*(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a}))$ , observe que  $\forall \mathbf{a} \in [0, \mathbf{a}_e]$ , tem-se a seguinte desigualdade:

$$\left\langle \left( \Gamma_{h_1 h_2} + \mathbf{a} \Delta h_1 \Gamma_g^{(1)} + \mathbf{a} \Delta h_2 \Gamma_g^{(2)} \right) Y, Y \right\rangle \geq \left\langle \left( \Gamma_{h_1 h_2} - \frac{\bar{\mathbf{e}}}{2} I \right) Y, Y \right\rangle, \quad \forall Y \in RH_2^p$$

de modo que

$$\inf \left\{ \tilde{J}_\Delta(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \right\} \geq \inf \left\{ \left\langle \left( \Gamma_{h_1 h_2} - (\bar{\mathbf{e}}/2) I \right) \Delta T, \Delta T \right\rangle + 2\mathbf{a} \left\langle \Delta h_1 \Xi_{\Delta_1} + \Delta h_2 \Xi_{\Delta_2}, \Delta T \right\rangle : \Delta T \in RH_2^p \right\}$$

E o ínfimo do lado direito da expressão acima é dado por

$$-\mathbf{a}^2 \left\| \left\{ \left[ \mathbf{f}_e^{-1} \right]^\sim (\Delta h_1 \Xi_{\Delta_1} + \Delta h_2 \Xi_{\Delta_2}) \right\}_+ \right\|_2^2.$$

Substituindo em

$$L_*(h_1, h_2) - L_*(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) = \mathbf{a} \sum_{i=1}^2 c_i(T_*(h_1, h_2), \Delta h_i) + \inf \left\{ \tilde{J}_\Delta(\Delta T) : \Delta T \in RH_2^p \right\}$$

obtém-se

$$L_*(h_1, h_2) - L_*(\bar{h}_1(\mathbf{a}), \bar{h}_2(\mathbf{a})) \geq f(\mathbf{a}, \Delta h_1, \Delta h_2) \quad \square$$

## Apêndice 3-D: Demonstrações da seção 3.5

### Demonstração do Lema 3.5.2:

Para obter uma realização de  $H[Y, \Lambda]$ ,  $Y \in \bar{S}_Y$ ,  $\Lambda \in \bar{S}_\Lambda$ , escreve-se

$$F[Y, \Lambda] = M \sim \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i R_i^T R_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M - \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i R_i^T R_i & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

ou equivalentemente

$$F[Y, \Lambda] = \mathbf{I}_1 M \sim \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M + \mathbf{I}_2 M \sim \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathbf{g}^2 I_{r_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} M + M \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M$$

$$- \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathbf{I}_2 I_{r_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & Y \end{bmatrix}$$

Segue-se que a parte estável de  $F[Y, \Lambda]$ , isto é  $H[Y, \Lambda]$ , é a soma das partes estáveis

de

$$F_1 = \mathbf{I}_1 M \sim M_1, \text{ onde } M_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}(I_{r_1})^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M,$$

$$F_2 = \mathbf{I}_2 M_2^{\sim} M_2, \text{ onde } M_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathbf{g}(I_{r_2})^{1/2} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} M,$$

$$F_3 = M_3^{\sim} M_3, \text{ onde } M_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathbf{I}^{1/2} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} M, \text{ e}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & -\mathbf{I}_2 I_{r_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & -Y \end{bmatrix}.$$

Denotando por  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  e  $H_4$  as respectivas partes estáveis de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_4$ ,

segue-se que

$$H_4 = \begin{bmatrix} -x_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & -x_1 I_{r_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & -X_Y \end{bmatrix}$$

e uma realização  $(A_{H_4}, B_{H_4}, C_{H_4}, D_{H_4})$  de  $H_4$  é dada por

$$(25) \begin{cases} A_{H_4} = \text{diag} \{ \bar{A}_{I_1}, \dots, \bar{A}_{I_1}, \bar{A}_{I_2}, \dots, \bar{A}_{I_2}, \bar{A}_Y \}, \\ B_{H_4} = \text{diag} \{ \bar{b}_{I_1}, \dots, \bar{b}_{I_1}, \bar{b}_{I_2}, \dots, \bar{b}_{I_2}, \bar{B}_Y \}, \\ C_{H_4}(\mathfrak{S}) = -\text{diag} \{ c_{I_1}, \dots, c_{I_1}, c_{I_2}, \dots, c_{I_2}, C_Y \}, \\ D_{H_4}(\mathfrak{S}) = -\text{diag} \{ d_{I_1}, \dots, d_{I_1}, d_{I_2}, \dots, d_{I_2}, D_Y \}. \end{cases}$$

Por construção,  $(A_{H_4}, B_{H_4})$  é controlável e  $A_{H_4}$  é Hurwitz.

Com relação a  $F_1, F_2, F_3$ , tome  $G_1 \in M(RH_\infty)$ ,  $G_2 \in M(RH_\infty)$  e  $G_3 \in M(RH_\infty)$  tais que  $M_1^{\sim} M_1 = G_1 + G_1^{\sim}$ ,  $M_2^{\sim} M_2 = G_2 + G_2^{\sim}$  e  $M_3^{\sim} M_3 = G_3 + G_3^{\sim}$  (lembre-se que para um dado controlador,  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são conhecidos). Assim,  $F_1, F_2, F_3$  podem ser escritos como

$$F_1 = (x_{I_1} + x_{I_1}^{\sim})(G_1 + G_1^{\sim}), F_2 = (x_{I_2} + x_{I_2}^{\sim})(G_2 + G_2^{\sim}) \text{ e } F_3 = G_3 + G_3^{\sim}$$

Como se pode observar,  $F_3$  não possui termos envolvendo os parâmetros livres das classes de lineares, de modo que uma realização  $(A_{H_3}, B_{H_3}, C_{H_3}, D_{H_3})$  de  $H_3$  é a realização de  $G_3$ , e tal realização pode ser tomada como sendo uma realização mínima.

Com relação a  $F_1$ , escrevendo  $x_{I_1} = \hat{x}_{I_1} + d_{I_1}$ ,  $\hat{x}_{I_1} = c_{I_1}^T (sI - \bar{A}_{I_1})^{-1} \bar{b}_{I_1}$ , tem-se que

$H_1$  (a parte estável de  $F_1$ ) é escrito como

$$H_1 = \hat{x}_{I_1} G_1 + \left\{ \hat{x}_{I_1} G_1^{\sim} \right\}_+ + \left\{ \hat{x}_{I_1}^{\sim} G_1 \right\}_+ + 2d_{I_1} G_1.$$

Analogamente, escreve-se  $H_2$  (a parte estável de  $F_2$ ) como

$$H_2 = \hat{x}_{I_2} G_2 + \left\{ \hat{x}_{I_2} G_2^{\sim} \right\}_+ + \left\{ \hat{x}_{I_2}^{\sim} G_2 \right\}_+ + 2d_{I_2} G_2$$

Por outro lado, se  $n_G$  é a dimensão de  $G_1$  e  $G_2$ , tem-se para  $i = 1, 2$ , que

$$\hat{x}_{I_i}(s)I_{n_G} = [I_{n_G} \otimes c_{I_i}^T] Y_{I_i}(s), \text{ onde } Y_{I_i}(s) \triangleq [I_{n_G} \otimes (sI - \bar{A}_{I_i})^{-1}] (I_{n_G} \otimes \bar{b}_{I_i})$$

e

$$\hat{x}_{\tilde{I}_i}(s)I_{n_G} = [I_{n_G} \otimes c_{I_i}^T] Y_{\tilde{I}_i}(s), \text{ onde } Y_{\tilde{I}_i}(s) \triangleq -[I_{n_G} \otimes (sI + \bar{A}_{I_i})^{-1}] (I_{n_G} \otimes \bar{b}_{I_i}),$$

de modo que

$$H_i = 2d_{1_i}G_i + [I_{n_G} \otimes c_{I_i}^T] \{Y_{I_i}G_i + \{Y_{I_i}G_i\}_+ + \{Y_{\tilde{I}_i}G_i\}_+\}, i=1,2,$$

ou equivalentemente, escrevendo  $G_i = \hat{G}_i + D_{G_i}$

$$H_i = [I_{n_G} \otimes c_{I_i}^T : 2d_{1_i}I_{n_G}] Y_{G_i} + 2d_{1_i}D_{G_i}$$

onde

$$Y_{G_i} = \begin{bmatrix} Y_{I_i}G_i + \{Y_{I_i}G_i\}_+ + \{Y_{\tilde{I}_i}G_i\}_+ \\ \hat{G}_i \end{bmatrix}$$

Assim, tomado  $(A_{Y_{G_i}}, B_{Y_{G_i}}, C_{Y_{G_i}})$  realizações mínimas de  $Y_{G_i}$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se que as

realizações  $(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}(c_{1_1}, d_{1_1}), D_{H_1}(d_{1_1}))$  e  $(A_{H_2}, B_{H_2}, C_{H_2}(c_{1_2}, d_{1_2}), D_{H_2}(d_{1_2}))$

de  $H_1$  e  $H_2$  são dadas por

$$(26) \begin{cases} A_{H_1} = A_{Y_{G_1}}, B_{H_1} = B_{Y_{G_1}}, C_{H_1}(c_{I_1}, d_{I_1}) = [I_{n_G} \otimes c_{I_1}^T : 2d_{I_1} I_{n_G}] C_{Y_{G_1}}, \\ D_{H_1}(d_{I_1}) = 2d_{I_1} D_{G_1} \end{cases},$$

$$(27) \begin{cases} A_{H_2} = A_{Y_{G_2}}, B_{H_2} = B_{Y_{G_2}}, C_{H_2}(c_{I_2}, d_{I_2}) = [I_{n_G} \otimes c_{I_2}^T : 2d_{I_2} I_{n_G}] C_{Y_{G_2}}, \\ D_{H_2}(d_{I_2}) = 2d_{I_2} D_G \end{cases}$$

Finalmente, uma realização  $(A_H, B_H, C_H, D_H)$  de  $H[Y, \Lambda] \in M(RH_\infty)$  tal que

$H[Y, \Lambda] + H[Y, \Lambda]^\sim = F[Y, \Lambda]$  é obtida a partir das realizações de  $H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$

da seguinte forma:

$$A_H = \text{diag}\{A_{H_1}, A_{H_2}, A_{H_3}, A_{H_4}\}, B_H = \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ B_{H_2} \\ B_{H_3} \\ B_{H_4} \end{bmatrix},$$

$$C_H(\mathfrak{S}) = [C_{H_1}(c_{I_1}, d_{I_1}) : C_{H_2}(c_{I_2}, d_{I_2}) : C_{H_3} : C_{H_4}(\mathfrak{S})]$$

$$D_H(\mathfrak{S}) = D_{H_1}(d_{I_1}) + D_{H_2}(d_{I_2}) + D_{H_3} + D_{H_4}(\mathfrak{S})$$

Para encerrar a demonstração do Lema 3.5.2, note que  $A_H$  é Hurwitz e  $C_H(\mathfrak{S})$  e

$D_H(\mathfrak{S})$  são funções afins de  $\mathfrak{S} = (c_{I_1}, c_{I_2}, d_{I_1}, d_{I_2}, C_Y, D_Y)$ , e sem perda de generalidade,

pode-se supor  $(A_H, B_H)$  controlável □

## Apêndice 3-E: Direções descendentes para o limitante baseado em “S-Procedure”

Note inicialmente que  $\Delta\hat{A}(\hat{E}) = A(\hat{Y} + \hat{E}_Y, \hat{\Lambda} + \hat{E}_\Lambda) - A(\hat{Y}, \hat{\Lambda})$  pode ser escrito como

$$\Delta\hat{A}(\hat{E}) = \begin{bmatrix} \hat{E}_\Lambda & 0 \\ 0 & \hat{E}_Y \end{bmatrix} - \hat{M}^* \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \hat{E}_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{M} = T_a(\hat{E}_\Lambda) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{E}_Y \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

onde

$$T_a(\hat{E}_\Lambda) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{E}_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \hat{M}^* \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \hat{E}_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{M} = \sum_{i=1}^2 \hat{e}_{1_i} \hat{T}_{a_i}^* \hat{T}_{a_i},$$

$$\hat{T}_{a_i}^* \hat{T}_{a_i} = \begin{bmatrix} R_i^T R_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \hat{M}^* \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 R_i^T R_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{M}$$

Observa-se então, que  $C_D(\hat{E})$  definido por

$$C_D(\hat{E}) \triangleq \left\| \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{\mathbf{f}}_\Lambda^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}(\hat{E}) & 0 \\ 0 & \hat{E}_\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{f}}_\Lambda^{-1} \end{bmatrix} \right\|_F^2$$

ou equivalentemente

$$C_D(\hat{E}) = \left\| (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \Delta \hat{A}(\hat{E}) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\|_F^2 + \left\| (\hat{\mathbf{f}}_\Lambda^*)^{-1} \hat{E}_\Lambda \hat{\mathbf{f}}_\Lambda^{-1} \right\|_F^2$$

pode ser escrito como

$$C_D(\hat{E}) = \left\| \hat{T}_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y \right\|_F^2 + 2 \left\langle \hat{T}_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y, (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} T_a(\hat{E}_\Lambda) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\rangle_F + \left\| (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} T_a(\hat{E}_\Lambda) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\|_F^2 + \left\| \hat{\Lambda}^{-1} \hat{E}_\Lambda \right\|_F^2,$$

onde  $\hat{T}_Y = [0 \quad I] \hat{\mathbf{f}}_a^{-1}$ .

De modo que definindo  $C_{DY}(\hat{E}_Y)$  por

$$C_{DY}(\hat{E}_Y) \triangleq \left\| \hat{T}_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y \right\|_F^2$$

e  $C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$  por

$$C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda) \triangleq 2 \left\langle T_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y, (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} T_a(\hat{E}_\Lambda) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\rangle_F + \left\| (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} T_a(\hat{E}_\Lambda) \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \right\|_F^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i^{-2} \hat{e}_{1_i}^2 r_i,$$

ou equivalentemente

$$C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda) = 2 \sum_{i=1}^2 \hat{e}_{1_i} \mathbf{c}_i(\hat{E}_Y) + \left\| \sum_{i=1}^2 \hat{e}_{1_i} \hat{T}_{f_i}^* \hat{T}_{f_i} \right\|_F^2 + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i^{-2} \hat{e}_{1_i}^2 r_i$$

onde  $\mathbf{c}_i(\hat{E}_Y) \triangleq \text{tr} \left\{ \hat{T}_{a_i} \hat{\mathbf{f}}_a^{-1} \hat{T}_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y (\hat{\mathbf{f}}_a^*)^{-1} \hat{T}_{a_i}^* \right\}$  e  $\hat{T}_{f_i} \triangleq \hat{T}_{a_i} \hat{\mathbf{f}}_a^{-1}$ ,

tem-se que  $C_D(\hat{E}) = C_{DY}(\hat{E}_Y) + C_{D\Lambda}(\hat{E}_Y, \hat{E}_\Lambda)$ .

Para achar  $\hat{E}_{Y^*} = \arg \min \langle \hat{\mathbf{f}}, E_Y \hat{\mathbf{f}} \rangle$  sujeito a  $\|\hat{T}_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y\|_F^2 \leq \mathbf{d}_D$ , define-se o funcional lagrangeano por

$$L(\hat{E}_Y, \mathbf{s}) = \langle \hat{\mathbf{f}}, \hat{E}_Y \hat{\mathbf{f}} \rangle + \mathbf{s} \left\{ \|\hat{T}_Y^* \hat{E}_Y \hat{T}_Y\|_F^2 - \mathbf{d}_D \right\}$$

Se  $\hat{E}_Y$  ponto de mínimo de  $L(\hat{E}_Y, \mathbf{s})$ , da condição de otimalidade, tem-se que

$$\langle \hat{\mathbf{f}}, \Delta \hat{E}_Y \hat{\mathbf{f}} \rangle + 2\mathbf{s} \langle \hat{\Gamma}_{TY} \hat{E}_Y \hat{\Gamma}_{TY}, \Delta \hat{E}_Y \rangle = 0 \quad \forall \Delta \hat{E}_Y = \Delta \hat{E}_Y^*$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{f}}^*, \Delta \hat{E}_Y \rangle + 2\mathbf{s} \langle \hat{\Gamma}_{TY} \hat{E}_Y \hat{\Gamma}_{TY}, \Delta \hat{E}_Y \rangle = 0 \quad \forall \Delta \hat{E}_Y = \Delta \hat{E}_Y^*$$

$\Leftrightarrow$

$$\hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{f}}^* + 2\mathbf{s} \hat{\Gamma}_{TY} \hat{E}_Y \hat{\Gamma}_{TY} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\hat{E}_Y(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2\mathbf{s}} \hat{\Gamma}_{TY}^{-1} \hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{f}}^* \hat{\Gamma}_{TY}^{-1}$$

A seguir, voltando ao problema restrito, tem-se que

$$\|\hat{T}_Y^* \hat{E}_Y(\mathbf{s}) \hat{T}_Y\|_F^2 = \mathbf{d}_D$$

⇔

$$\langle \hat{\Gamma}_{TY} \hat{E}_Y(\mathbf{s}) \hat{\Gamma}_{TY}, \hat{E}_Y(\mathbf{s}) \rangle = \mathbf{d}_D$$

⇔

$$\left( \frac{1}{2\mathbf{s}} \right)^2 \langle \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{f}}^*, \Gamma_{TY}^{-1} \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{f}}^* \Gamma_{TY}^{-1} \rangle = \mathbf{d}_D$$

⇔

$$\mathbf{s} = \frac{\left\| \hat{\Gamma}_{TY}^{-1} \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{f}}^* \right\|_F}{2\sqrt{\mathbf{d}_D}}.$$

Ou seja, mostrou-se que

$$\hat{E}_{Y^*} = -\frac{1}{2\mathbf{s}} \hat{\Gamma}_{TY}^{-1} \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{f}}^* \hat{\Gamma}_{TY}^{-1},$$

onde  $\hat{\Gamma}_{TY} = \hat{T}_Y \hat{T}_Y^*$ , e  $\mathbf{s} = \frac{\left\| \hat{\Gamma}_{TY}^{-1} \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{f}}^* \right\|_F}{2\sqrt{\mathbf{d}_D}}$ .

Para definir  $\hat{E}_{\Lambda^*}$  tal que  $C_{D\Lambda}(\hat{E}_{Y^*}, \hat{E}_{\Lambda^*}) < 0$ , escreve-se  $\hat{E}_{\Lambda^*} = \text{diag}\{\hat{e}_{I_1}^0 I_{r_1}, \hat{e}_{I_2}^0 I_{r_2}\}$ , com

$\hat{e}_{I_i}^0 = -\mathbf{a}_0 \mathbf{c}_i(\hat{E}_{Y^*})$ , onde

$$\mathbf{a}_0 \leq \frac{2 \sum_{i=1}^2 \mathbf{c}_i(\hat{E}_{Y^*})^2}{\left\| \sum_{i=1}^2 \mathbf{c}_i(\hat{E}_{Y^*}) \hat{T}_{f_i}^* \hat{T}_{f_i} \right\|_F^2 + \sum_{i=1}^2 I_i^{-2} \mathbf{c}_i(\hat{E}_{Y^*})^2 r_i}.$$

No caso dependente da frequência, não se pode usar a função definida por

$$\mathbf{s}(j\omega) = \frac{\left\| \left[ \Gamma_{TY}(j\omega) \right]^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \right\|_F}{2\sqrt{d_D}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

pois nesse caso

$$\hat{E}_Y(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2\mathbf{s}} \Gamma_{TY}^{-1} \mathbf{f} \mathbf{f} \Gamma_{TY}^{-1} \text{ não pertence a } M(RL_\infty), \text{ já que } \mathbf{s} \text{ não é racional.}$$

Entretanto, note que  $\forall \omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left\| \left[ \Gamma_{TY}(j\omega) \right]^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \right\|_F &= \left\| \left[ T_Y(j\omega) \right]^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \left[ T_Y^{\sim}(j\omega) \right]^{-1} \right\|_F \\ &\leq \left\| \left[ T_Y(j\omega) \right]^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \right\|_F \left\| \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \left[ T_Y^{\sim}(j\omega) \right]^{-1} \right\|_F = \left\| \left[ T_Y(j\omega) \right]^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \right\|_F^2 \\ &= \text{Tr} \left\{ \left[ T_Y(j\omega) \right]^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \left[ T_Y^{\sim}(j\omega) \right]^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

de modo que, definindo a seguinte função:

$$\mathbf{s}_s(j\omega) = \frac{\text{Tr} \left\{ \left( T_Y(j\omega) \right)^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \left( T_Y^{\sim}(j\omega) \right)^{-1} \right\}}{2\sqrt{d_D}} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

tem-se que  $\|T_Y^{\sim}(j\omega)E_Y(\mathbf{s}_s(j\omega))T_Y(j\omega)\|_F^2 \leq \mathbf{d}_D \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Assim é possível definir uma direção descendente e factível para  $Y$  por

$$E_{Y^*}(j\omega) = -\frac{1}{2\mathbf{s}_s(j\omega)} \Gamma_{TY}^{-1}(j\omega) \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \Gamma_{TY}^{-1}(j\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

onde  $\Gamma_{TY} = T_Y T_Y^{\sim}$ , e  $\mathbf{s}_s$  é tal que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \mathbf{s}_s(j\omega) = \frac{\text{Tr}\left\{\left(T_Y(j\omega)\right)^{-1} \mathbf{f}_k(j\omega) \mathbf{f}_k^{\sim}(j\omega) \left(T_Y(j\omega)\right)^{-1}\right\}}{2\sqrt{\mathbf{d}_D}}.$$

Conseqüentemente, a direção descendente e factível em  $\Lambda$  é definida por

$$E_{\Lambda^*}(j\omega) = \text{diag}\left\{e_{I_1}^0(j\omega)I_{r_1}, e_{I_2}^0(j\omega)I_{r_2}\right\}, \quad \text{com} \quad e_{I_i}^0(j\omega) = -\mathbf{a}_0 \mathbf{c}_i(E_{Y^*}(j\omega)), \quad \text{onde}$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{a}_0 \leq \frac{2 \sum_{i=1}^2 [\mathbf{c}_i(E_{Y^*}(j\omega))]^2}{\left\| \sum_{i=1}^2 \mathbf{c}_i(E_{Y^*}(j\omega)) T_{f_i}^{\sim}(j\omega) T_{f_i}(j\omega) \right\|_F^2 + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I}_i(j\omega))^2 [\mathbf{c}_i(E_{Y^*}(j\omega))]^2 r_i}$$

## Apêndice 3-F: Demonstrações da seção 3.8

Será mostrado que os parâmetros livres da classe  $\bar{S}_q(\mathbf{e})$  definida na seção 3.8 aparecem exclusivamente e de forma afim no termos  $\bar{C}_g$ ,  $\bar{D}_g$  e  $\bar{C}_x$  da Proposição 3.8.1

Assim, seja  $E_q \in RH_\infty^{p^2 \times p^2}$  tal que  $\Gamma_q = E_q + E_q^-$ . Segue-se que uma realização de  $E_q$  será dada em função das realizações das partes estáveis de  $\mathbf{q} \otimes I_p$  e  $-(g_0^{-1}A_\Theta)^- g_0^{-1}A_\Theta$ . Uma vez que  $A_\Theta$  não depende de  $\mathbf{q} \in \bar{S}_q(\mathbf{e})$  mas apenas de dados conhecidos do problema, tome  $(A_{\Theta E}, B_{\Theta E}, C_{\Theta E}, D_{\Theta E})$  uma realização mínima da parte estável de  $(g_0^{-1}A_\Theta)^- g_0^{-1}A_\Theta$  com  $B_{\Theta E}$  de posto máximo. Por outro lado, se  $\mathbf{q} \in \bar{S}_q(\mathbf{e})$ , tem-se que a parte estável de  $\mathbf{q} \otimes I_p$  é  $G_q \otimes I_p$ , onde  $G_q(s) = C_q(sI - \bar{A}_q)^{-1} \bar{B}_q + D_q$ , de modo que uma realização  $(\bar{A}_g, \bar{B}_g, \bar{C}_g, \bar{D}_g)$  de  $E_q$  é dada por

$$(28) \begin{cases} \bar{A}_g = \begin{bmatrix} \bar{A}_q \otimes I_p & 0 \\ 0 & A_{\Theta E} \end{bmatrix}, \bar{B}_g = \begin{bmatrix} \bar{B}_q \otimes I_p \\ -B_{\Theta E} \end{bmatrix}, \bar{C}_g(C_q) = [C_q \otimes I_p : C_{\Theta E}], \\ \bar{D}_g(D_q) = (D_q \otimes I_p) - D_{\Theta E} \end{cases}$$

Segue de (28) que os parâmetros livres da classe  $\bar{S}_q(\mathbf{e})$  aparecem exclusivamente e de forma afim nos termos  $\bar{C}_g$  e  $\bar{D}_g$ , e por construção  $\bar{A}_g$  é Hurwitz. Finalmente, se  $\bar{A}_g$  e  $\bar{B}_g$  definidos em (28) são tais que  $(\bar{A}_g, \bar{B}_g)$  não é controlável, é sempre possível, através

de uma transformação de similaridade, encontrar uma realização controlável de  $E_q$ , de maneira que  $C_q$  e  $D_q$  apareçam linearmente nessa nova realização.

Com relação a

$$\{\Xi_q\}_+ = - \left[ \left\{ g_0(\mathbf{q}\Xi_c) \right\}_+ + \left\{ (g_0^{-1})^\sim A_\Theta^\sim B_\Theta \right\}_+ \right],$$

tem-se que  $(g_0^{-1})^\sim A_\Theta^\sim B_\Theta$  não depende  $\mathbf{q} \in \bar{S}_q(\mathbf{e})$ , mas apenas dos dados originais do problema. Assim sendo, denote por  $(A_{\Theta_x}, B_{\Theta_x}, C_{\Theta_x})$  uma realização mínima de  $\left\{ (g_0^{-1})^\sim A_\Theta^\sim B_\Theta \right\}_+$ , e note que

$$\left\{ g_0(\mathbf{q}\Xi_c) \right\}_+ = \left\{ g_0(\mathbf{q}\Xi_c) \right\}_+ = \left\{ \mathbf{q}\hat{\Xi}_c \right\}_+ = \left[ \left\{ \hat{G}_q \hat{\Xi}_c \right\}_+ + \left\{ D_q \hat{\Xi}_c \right\}_+ + \left\{ G_q^\sim \hat{\Xi}_c \right\}_+ \right]$$

onde  $\hat{\Xi}_c = g_0 \Xi_c$

Como  $\left\{ \hat{G}_q \hat{\Xi}_c \right\}_+ = \hat{G}_q \hat{\Xi}_c$ , tomando  $(A_{\hat{\Xi}_c}, B_{\hat{\Xi}_c}, C_{\hat{\Xi}_c})$  uma realização mínima de  $\hat{\Xi}_c$ , tem-se

que uma realização de  $\left\{ \hat{G}_q \hat{\Xi}_c \right\}_+$  é dada por  $\left( \left[ \begin{array}{cc} \bar{A}_q & \bar{B}_q C_{\hat{\Xi}_c} \\ 0 & A_{\hat{\Xi}_c} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0 \\ B_{\hat{\Xi}_c} \end{array} \right], [C_q : 0] \right)$ , e

$(A_{\hat{\Xi}_c}, B_{\hat{\Xi}_c}, D_q C_{\hat{\Xi}_c})$  é uma realização de  $\left\{ D_q \hat{\Xi}_c \right\}_+ = D_q \hat{\Xi}_c$ .

Para achar uma realização de  $\left\{ G_q^\sim \hat{\Xi}_c \right\}_+$ , será usado o seguinte Lema:

**Lema** (Correa & Sales 1998) Seja  $G = G_3^- G_2 G_1^-$ , onde  $G_1 \in M(RH_\infty)$ ,  $G_2 \in M(RH_2)$ ,

$$G_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} + D_i, \quad D_2 = 0, \quad A_i \text{ estável.}$$

Então

$$(G)_+(s) = (D_3^T C_2 + B_3^T M_3^2)(sI - A_2)^{-1} (M_1^1 C_1^T + B_2 D_1^T)$$

onde

$$M_1^1 A_1^T + A_2 M_1^1 = -B_2 B_1^T, \quad M_3^2 A_2 + A_3^T M_3^2 = -C_3^T C_2 \quad \nabla$$

Aplicando o Lema a  $G_q^- \hat{\Xi}_c$ , em que  $G_q = G_3$ ,  $\hat{\Xi}_c = G_2$  e  $I = G_1$ , tem-se que uma realização de  $\{G_q^- \hat{\Xi}_c\}_+$  é dada por  $(A_{\hat{\Xi}_c}, B_{\hat{\Xi}_c}, D_q C_{\hat{\Xi}_c} + \bar{B}_q M_s)$ , onde  $M_s$  é dada pela equação de Silvestre  $M_s A_{\hat{\Xi}_c} + \bar{A}_q^T M_s = -C_q^T C_{\hat{\Xi}_c}$ . Note que a obtenção de uma realização de  $\{G_q^- \hat{\Xi}_c\}_+$  implicou no aparecimento de uma nova variável  $M_s$ , que é função linear do parâmetro  $C_q$ . Assim, uma realização  $(A_{c_x}, B_{c_x}, C_{c_x} (C_q, D_q))$  de

$$\{g_0(\mathbf{q}\Xi_c)\}_+ = \{\hat{G}_q \hat{\Xi}_c\}_+ + \{D_q \hat{\Xi}_c\}_+ + \{G_q^- \hat{\Xi}_c\}_+$$

é dada por

$$A_{cx} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_q & \bar{B}_q C_{\hat{z}_c} \\ 0 & A_{\hat{z}_c} \end{bmatrix}, A_{\hat{z}_c}, A_{\hat{z}_c} \right\}, B_{cx} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\hat{z}_c} \\ B_{\hat{z}_c} \\ B_{\hat{z}_c} \end{bmatrix},$$

$$C_{cx}(C_q, D_q, M_S(C_q)) = [C_q \ : 0 \ : D_q C_{\hat{z}_c} \ : D_q C_{\hat{z}_c} + \bar{B}_q M_S(C_q)],$$

e uma realização  $(\bar{A}_x, \bar{B}_x, \bar{C}_x(C_q, D_q, M_S(C_q)))$  de

$$\{\Xi_q\}_+ = -\{g_0(\mathbf{q}\Xi_c)\}_+ - \left\{ (g_0^{-1})^\sim A_{\Theta}^\sim B_{\Theta} \right\}_+$$

é dada por

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_x = \begin{bmatrix} A_{cx} \otimes I_p & 0 \\ 0 & A_{\Theta x} \end{bmatrix}, \bar{B}_x = \begin{bmatrix} B_{cx} \\ B_{\Theta x} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_x(C_q, D_q, M_S(C_q)) = -[C_{cx}(C_q, D_q, M_S(C_q)) \otimes I_p \ : C_{\Theta x}] \end{array} \right.$$

Pelo desenvolvimento anterior, os parâmetros livres da classe  $\bar{S}_q(\mathbf{e})$  de fato aparecem de linearmente em  $\bar{C}_x$ , por construção  $\bar{A}_x$  é Hurwitz, e a mesma observação feita para  $(\bar{A}_g, \bar{B}_g)$  é válida para  $(\bar{A}_x, \bar{B}_x)$  se  $\bar{A}_x$  e  $\bar{B}_x$  definidos em (29) são tais que  $(\bar{A}_x, \bar{B}_x)$  não é controlável.

Finalmente, será verificado que  $C_q$  e  $D_q$  aparecem de forma afim em

$$L_c(0, \mathbf{q}) = \|B_\Theta\|_2^2 + \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle - \langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle$$

Primeiramente, lembre que  $B_\Theta$  não depende  $\mathbf{q} \in \bar{S}_q(\mathbf{e})$ . Com relação a

$\frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle$ , note que

$$\langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle = \langle g_0 I_p, g_0 G_q + g_0 \tilde{G}_q \rangle = 2 \langle g_0 I_p, g_0 G_q \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle = 2D_q \langle g_0 I_p, g_0 I_p \rangle + 2 \langle g_0 \tilde{g}_0 I_p, \hat{G}_q \rangle, \quad \text{onde} \quad \hat{G}(s) = C_q (sI - \bar{A}_q)^{-1} \bar{B}_q, \quad \text{de}$$

modo que

$$(30) \quad \frac{1}{\mathbf{g}^2} \langle g_0 I_p, g_0 \mathbf{q} \rangle = \frac{2p}{\mathbf{g}^2} \|g_0\|_2^2 D_q + 2tr(C_0 M_0 C_q)$$

onde  $M_0$  é a solução de  $A_0 M_0 + M_0 \bar{A}_q^T = -B_0 \bar{B}_q^T$ ,  $(A_0, B_0, C_0)$  é uma realização de

$$\{g_0 \tilde{g}_0 I_p\}_+$$

Com relação a  $\langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle$ , note que

$$\langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle = \langle g_0 \tilde{\Xi}_c \tilde{\Xi}_c, g_0 (G_q + \tilde{G}_q) \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle = 2 \langle g_0 \tilde{g}_0 \tilde{\Xi}_c \tilde{\Xi}_c, \hat{G}_q \rangle + 2 \|g_0 \Xi_c\|_2^2 D_q$$

De modo que

$$(31) \quad \langle g_0 \Xi_c, g_0 \mathbf{q} \Xi_c \rangle = 2 \|g_0 \Xi_c\|_2^2 D_{\mathbf{q}} + 2 \text{tr}(C_1^T M_1 C_{\mathbf{q}})$$

onde  $M_1$  é a solução de  $A_1 M_1 + M_1 \bar{A}_1^T = -B_1 \bar{B}_1^T$ ,  $(A_1, B_1, C_1)$  é uma realização de

$\{g_0 \tilde{g}_0 \Xi_c \tilde{\Xi}_c\}_+$ . A demonstração é concluída substituindo (30) e (31) em  $L_c(0, \mathbf{q})$   $\square$

# Capítulo 4

## Síntese de controladores

### 4.1-Introdução

Neste capítulo, será examinado o problema de síntese de controladores para bom desempenho  $H_2$ -robusto.

Em Stoorvogel (1993) e Yang et al (2000), procedimentos de síntese são propostos com base nos limitantes superiores do “pior-caso”  $H_2$  para um dado controlador estabilizante. Em Stoorvogel (1993) são consideradas perturbações não-estruturadas caracterizadas por funções de transferências limitadas em norma, e um limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  para um dado controlador estabilizante é obtido através de relaxação lagrangeana, em que a minimização do funcional dual é feita com relação a multiplicadores confinados ao conjunto dos números reais positivos. Nesse

caso, para cada multiplicador constante, Stoorvogel consegue reduzir o correspondente problema subótimo de síntese, a um problema convexo de dimensão finita.

Em Yang et al (2000), são consideradas perturbações estruturadas caracterizadas por funções de transferências passivas ao invés de limitadas em norma. O limitante superior para o “pior-caso” é obtido de forma análoga à relaxação lagrangeana. Nesse caso, a minimização do funcional dual é feita com relação aos (assim chamados) multiplicadores de Popov. É então proposto um procedimento do tipo “D-K iteration” no qual em um passo minimiza-se o funcional de custo com relação aos multiplicadores de Popov para um dado controlador estabilizante, e em outro passo minimiza-se o funcional de custo sobre um conjunto de controladores estabilizantes de ordem fixa, para multiplicadores de Popov fixos.

Neste trabalho, de maneira semelhante às referências citadas acima, a cada limitante do índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$  deduzido anteriormente com base em problemas de otimização convexa, corresponde um procedimento de síntese, a exceção do limitante deduzido na seção 2.6. Nesse caso, a melhoria potencial da qualidade do limitante é obtida à custa de uma dependência mais intrincada entre o funcional custo do problema e o controlador, o que torna o problema de síntese para este índice mais difícil.

O capítulo 4 está organizado da seguinte forma:

Na seção 4.2 considera-se o problema de síntese de controladores com base no limitante definido na seção 2.4 por meio de relaxação lagrangeana. Para facilitar o entendimento das principais idéias envolvidas no correspondente problema de síntese, considera-se inicialmente o caso de perturbações não-estruturadas e entrada escalar. Analogamente ao que foi feito no capítulo 3, mostra-se que quando o parâmetro de Youla dos controladores robustamente estabilizantes é confinado a um subespaço de

dimensão finita pré-especificado, a minimização do funcional dual sobre o mesmo (para um dado multiplicador) é equivalente a um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI (O principal resultado é expresso pela **Proposição 4.2.4**).

Na seção 4.3 são caracterizadas direções descendentes para o funcional dual a partir de um dado  $K \in M(RH_\infty)$ , com o objetivo de sugerir uma heurística para modificação iterativa do subespaço ao qual é confinado o parâmetro de Youla dos controladores robustamente estabilizantes.

Na seção 4.4 generaliza-se o procedimento da seção 4.2 para o caso de perturbações estruturadas e entrada multivariável (**Proposição 4.4.1**). Ao final, é esboçado um esquema para um procedimento do tipo “D-K iteration” baseado no limitante do índice “pior-caso” deduzido na seção 2.4.

Na seção 4.5 considera-se o problema de síntese de controladores com base no limitante definido na seção 2.5 por meio de “S-Procedure”.

Conclusões do capítulo são apresentadas na seção 4.6.

## **4.2-Síntese baseada no limitante dado por relaxação lagrangeana: caso particular**

Nesta seção considera-se o problema de síntese de controladores com base no limitante definido na seção 2.4 por meio de relaxação lagrangeana, qual seja, minimizar este limitante sobre o conjunto dos controladores robustamente estabilizantes para um

sistema perturbado. O objetivo principal desta seção é análise do problema de minimizar o funcional dual, para um multiplicador fixo, em relação ao parâmetro de Youla, quando o mesmo é confinado a subespaço de dimensão finita. Este problema, em conjunto com os resultados da seção 3.2 e 3.3, leva a um problema de otimização linear em espaços euclidiano, com restrições definidas por LMI's.

Como mencionado anteriormente, no sentido de facilitar o entendimento das principais idéias envolvidas, será considerado inicialmente o caso de perturbações não-estruturadas e entrada escalar. Assim, considere a configuração da figura 2.6, com a classe de perturbações dada por  $D = \{\Delta \in RH_{\infty}^{p \times m} : \|\Delta\|_{\infty} \leq \mathbf{g}\}$  e o sinal de entrada  $w$  é caracterizado pela densidade espectral de potência.

Assim como na seção 3.2, o funcional dual será caracterizado por meio do valor ótimo de um problema de LQR de horizonte infinito. Antes, para facilitar a leitura, serão recordados de maneira sucinta os principais pontos do desenvolvimento da seção 2.4, em que se deduziu um limitante superior para o índice “pior-caso”  $H_2$  por meio de relaxação lagrangena..

Inicialmente, recorde-se que se as condições de estabilidade robusta são satisfeitas, isto é,  $(P_a, C)$  estável e  $\|M_{\Delta\Delta}(C)\|_{\infty} < 1/\mathbf{g}$ , onde

$$M_{\Delta\Delta}(C) = P_{\Delta\Delta} + P_{\Delta u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\Delta},$$

$C$  é o controlador, segue-se, conforme o desenvolvimento da seção 2.4, que um limitante para o “pior-caso”  $H_2$  é dado pelo valor ótimo do problema

$$\max_{T \in RH_2^p} \|M_{zw}(C)\mathbf{f}_w + M_{z\Delta}(C)T\|_2^2$$

sujeito a

$$\|T(j\omega)\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|M_{\Delta w}(C)(j\omega)\mathbf{f}_w(j\omega) + M_{\Delta\Delta}(C)(j\omega)T(j\omega)\|_F^2 \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

onde  $\mathbf{f}_w \in RH_2$  é o fator espectral da densidade de potência do sinal  $w$ , e  $M_{z\Delta}(C)$ ,

$M_{zw}(C)$  e  $M_{\Delta w}(C)$  também são funções do controlador dadas por

$$M_{z\Delta}(C) = P_{z\Delta} + P_{zu} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\Delta};$$

$$M_{zw}(C) = P_{zw} + P_{zu} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{yw};$$

$$M_{\Delta w}(C) = P_{\Delta w} + P_{\Delta u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{yw}.$$

O correspondente funcional lagrangeano é então definido por

$$L_a(T, h, C) = \|M_{zw}(C)\mathbf{f}_w + M_{z\Delta}(C)T\|_2^2 - (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(j\omega) c_0[T, C](j\omega) d\omega$$

onde

$$c_0[T, C](j\omega) = \|T(j\omega)\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \|M_{\Delta w}(C)(j\omega)\mathbf{f}_w(j\omega) + M_{\Delta\Delta}(C)(j\omega)T(j\omega)\|_F^2;$$

$$h \in RL_\infty: \tilde{h} = h, h(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Note-se que a dependência do funcional lagrangeano com relação ao controlador  $C$  não foi explicitada anteriormente. Isso se deve ao fato de que os capítulos anteriores tratavam de análise de desempenho para um controlador fixo.

Seguindo o procedimento de relaxação lagrangeana, tal qual foi feito na seção 2.4, obtém-se que o “pior-caso”  $H_2$  é limitado superiormente da seguinte forma

$$\mathbf{h} \leq L_*(h, C)$$

onde  $L_*(h, C) = \sup\{L_a(T, h, C) : T \in RH_2^p\}$  é o funcional dual.

Neste contexto, um procedimento para a síntese de controladores seria considerar a minimização conjunta do funcional dual sobre os controladores e multiplicadores considerados. Neste sentido é conveniente fazer uso da parametrização de Youla para controladores estabilizantes (Nett (1986)) a fim de tornar as funções de transferência do sistema em malha fechada afins no parâmetro de Youla (que será denotado por  $K$ ). De fato, assim procedendo, observa-se que para um dado par  $(h, T)$  o funcional lagrangeano  $L_a(T, h, K)$  é convexo em  $K$ , já que  $M_{\Delta\Delta}(K)$ ,  $M_{z\Delta}(K)$ ,  $M_{zw}(K)$  e  $M_{\Delta w}(K)$  são funções afins de  $K$  e  $L_a(T, h, K)$  é dado pela soma de funcionais quadráticos positivos em  $K$  e um termo constante. Como consequência, para um multiplicador fixo, o funcional dual também é convexo em  $K$ . Analogamente, para um dado  $K$ , o funcional dual é convexo em  $h$ . Entretanto, o funcional dual não é convexo com relação a  $(h, K)$ , pois contém produtos de termos afins no parâmetro de Youla e no multiplicador.

Esta situação motiva à utilização de procedimentos do tipo “ $D-K$  iteration” nos quais em cada passo tenta-se, alternadamente, minimizar o funcional dual em relação a uma das variáveis de decisão enquanto que a outra é mantida inalterada.

Como no capítulo 3 foi feita a minimização do funcional dual com respeito aos multiplicadores para um dado controlador, será examinada aqui a minimização de  $L_*(h_a, K)$  com relação ao parâmetro de Youla para  $h_a \in RL_\infty$  **fixo** tal que  $h_a = h_a^\sim$  e  $\inf \{h_a(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\} \geq \epsilon_{h_a} > 0$ . Mais especificamente, será examinado o caso em que o parâmetro de Youla é confinado a um subespaço de dimensão finita pré-especificado.

Antes disso, como mencionado anteriormente, o funcional dual será caracterizado por meio do valor ótimo de um problema LQR de horizonte infinito. Porém, para simplificar a derivação em questão (isto é, para evitar o aparecimento de equações de Silvester com alguns termos quadráticos envolvendo  $K$ , devido a presença de projeções) este passo será feito de maneira diferente da que foi feita na seção 3.2.

Neste sentido, escreve-se  $L_a(T, h_a, K)$  como

$$(4.2.1) \quad L_a(T, h_a, K) = \|M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_w\|_2^2 - \|\mathbf{f}_{h_a}T\|_2^2 + \mathbf{g}^2 \|\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w + \mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta\Delta}(K)T\|_2^2$$

onde  $\mathbf{f}_{h_a}^\sim \mathbf{f}_{h_a} = h_a$  é uma fatoração espectral de  $h_a$ . Segue-se que

$$-L_a(T, h_a, K) = \|\mathbf{f}_{h_a}T\|_2^2 - \mathbf{g}^2 \|\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w + \mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta\Delta}(K)T\|_2^2 - \|M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_w\|_2^2$$

$\Leftrightarrow$

$$-L_a(T, h_a, K) = \langle (\Theta_1(K)T + \Theta_0(K)), J(\Theta_1(K)T + \Theta_0(K)) \rangle$$

onde

$$\Theta_1(K) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{h_a} I \\ -\mathbf{g} \mathbf{f}_{h_a} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \end{bmatrix}, \quad \Theta_0(K) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g} \mathbf{f}_{h_a} M_{\Delta w}(K) \mathbf{f}_w \\ M_{zw}(K) \mathbf{f}_w \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

De modo que  $L_*(h_a, K) = -\inf \{-L_a(T, h_a, K) : T \in RH_2^p\}$  pode ser escrito como:

$$L_*(h_a, K) = -\inf \left\{ \left\langle \left( \Theta_1(K)T + \Theta_0(K) \right), J \left( \Theta_1(K)T + \Theta_0(K) \right) \right\rangle : T \in RH_2^p \right\}$$

ou equivalentemente (denotando  $\tilde{T} = \mathbf{f}_{h_a} T$ ):

$$(4.2.2) \quad L_*(h_a, K) = -\inf \left\{ \left\langle \left( \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T} + \Theta_0(K) \right), J \left( \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T} + \Theta_0(K) \right) \right\rangle : \tilde{T} \in RH_2^p \right\}$$

onde

$$\bar{\Theta}_1(K) = \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ H_1(K) \end{bmatrix}, \quad \Theta_0(K) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ H_0(K) \end{bmatrix}, \quad H_1(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$H_0(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \mathbf{f}_{h_a} M_{\Delta w}(K) \mathbf{f}_w \\ M_{zw}(K) \mathbf{f}_w \end{bmatrix}.$$

Segue-se que  $L_*(h_a, K)$  é finito se e somente se

$\inf \left\{ \left\langle \left( \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T} + \Theta_0(K) \right), J \left( \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T} + \Theta_0(K) \right) \right\rangle : \tilde{T} \in RH_2^p \right\}$  é finito.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T} + \Theta_0(K) \right), J \left( \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T} + \Theta_0(K) \right) \right\rangle &= \left\langle \bar{\Theta}_1^{\sim}(K) J \bar{\Theta}_1(K) \tilde{T}, \tilde{T} \right\rangle + 2 \left\langle \bar{\Theta}_1^{\sim}(K) J \Theta_0(K), \tilde{T} \right\rangle \\ &+ \left\langle \Theta_0(K), J \Theta_0(K) \right\rangle, \end{aligned}$$

de modo que  $L_s(h_a, K)$  é finito se  $\left\{ \bar{\Theta}_1^{\sim}(K) J \bar{\Theta}_1(K) \right\} (j\mathbf{w}) > \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , para algum

$\mathbf{e} > 0$ , e uma condição suficiente para isto é que  $\|H_1(K)\|_{\infty} < 1$ , ou seja,

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1.$$

**Observação:** Note-se que  $\bar{\Theta}_1^{\sim}(K) J \bar{\Theta}_1(K)$  corresponde (a menos de  $h_a^{-1}$ ) à matriz  $\Gamma_{h_1 h_2}$

definida na seção 3.2, para o caso de perturbações não-estruturadas pois

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_1^{\sim}(K) J \bar{\Theta}_1(K) &= \begin{bmatrix} I : \mathbf{g} M_{\Delta\Delta}^{\sim}(K) : -M_{z\Delta}^{\sim}(K) (\mathbf{f}_{h_a}^{-1})^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= (I - \mathbf{g}^2 M_{\Delta\Delta}^{\sim}(K) M_{\Delta\Delta}(K)) - h_a^{-1} M_{z\Delta}^{\sim}(K) M_{z\Delta}(K) = h_a^{-1} \Gamma_{h_a} \end{aligned}$$

Note também que  $h_a^{-1} \Gamma_{h_a}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} \Rightarrow \Gamma_{h_a}(j\mathbf{w}) \geq (\mathbf{e} h_a) I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ .

Será apresentada a seguir, a Proposição 4.2.1 que relaciona a forma quadrática

$\langle (\bar{\Theta}_1(K)\bar{T} + \Theta_0(K)), J(\bar{\Theta}_1(K)\bar{T} + \Theta_0(K)) \rangle$  com o funcional custo de um problema

de horizonte finito LQR, cuja demonstração se encontra no Apêndice 4-A

**Proposição 4.2.1:** Considere o funcional quadrático definido em  $RH_2^p$  por

$$\mathbf{j}(Y) = \langle (\bar{\Theta}_1 Y + \bar{\Theta}_0), J(\bar{\Theta}_1 Y + \bar{\Theta}_0) \rangle$$

onde

$$\bar{\Theta}_1 = \begin{bmatrix} I \\ \dots \\ H_1 \end{bmatrix}, \bar{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ H_0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

$H_1 \in M(RH_\infty)$  é tal que  $\|H_1\|_\infty < 1$  e  $H_0 \in M(RH_2)$ . Sejam  $(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}, D_{H_1})$  e

$(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0})$  realizações de  $H_1$  e  $H_0$  respectivamente, com  $(A_{H_1}, B_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0})$

controláveis,  $A_{H_1}$  e  $A_{H_0}$  Hurwitz. Defina

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{H_1} & 0 \\ 0 & A_{H_0} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{H_0} \end{bmatrix}; \hat{C} = [C_{H_1} : C_{H_0}], S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xu} \\ S_{ux} & S_{uu} \end{bmatrix}, \text{ com}$$

$$S_{xx} = -\hat{C}^T \hat{C}, S_{xu} = -\hat{C}^T D_{H_1}, S_{ux} = -D_{H_1}^T \hat{C}, S_{uu} = I - D_{H_1}^T D_{H_1}.$$

Então,  $\forall u \in (L_2[0, \infty))^p$  tal que  $Y(s)$  é a transformada de Laplace de  $u(t)$ , tem-se que

$$\mathbf{j}(Y) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

onde  $x(\cdot)$  satisfaz  $\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x(0) = \hat{x}_0$ ,  $\hat{A}$  é Hurwitz,  $S = S^T$ ,

$S_{uu} > 0$ ,  $(A_z, R_z)$  é estabilizável e  $H_z = \begin{bmatrix} A_z & R_z \\ -Q_z & -A_z^T \end{bmatrix}$  não tem autovalores no eixo

imaginário, onde  $A_z = \hat{A} - \hat{B}S_{uu}^{-1}S_{ux}$ ,  $R_z = -\hat{B}S_{uu}^{-1}\hat{B}^T$ ,  $Q_z = S_{xx} - S_{xu}S_{uu}^{-1}S_{ux}$ .  $\nabla$

Assim, considerando a expressão de  $L_*(h_a, K)$  dada pela expressão (4.2.1), a proposição apresentada a seguir, que é a caracterização do funcional dual por meio do valor ótimo de um problema LQR de horizonte infinito, de uma maneira diferente da seção 3.2 (isto é, sem utilizar projeções), é uma consequência imediata da Proposição 4.2.1 e do Lema 3.2.2 do capítulo 3.

**Proposição 4.2.2:** Se  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$ , então  $L_*(h_a, K)$  é o valor ótimo do

problema

$$-\max_{P=P^T} \hat{x}_0^T P \hat{x}_0 \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P\hat{A} - \hat{C}^T \hat{C} & P\hat{B} - \hat{C}^T D_{H_1} \\ \hat{B}^T P - D_{H_1}^T \hat{C} & I - D_{H_1}^T D_{H_1} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\text{onde } \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{H_1} & 0 \\ 0 & A_{H_0} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{H_0} \end{bmatrix}; \hat{C} = [C_{H_1} \ ; \ C_{H_0}],$$

$(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}, D_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0})$  são realizações de

$$H_1(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \text{ e } H_0(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w \\ M_{zw}(K)\mathbf{f}_w \end{bmatrix} \text{ respectivamente,}$$

com  $(A_{H_1}, B_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0})$  controláveis,  $A_{H_1}$  e  $A_{H_0}$  Hurwitz.  $\nabla$

Observe que  $L_*(h_a, K)$  pode ser escrito como valor ótimo do problema

$$\min_{P=P^T} -\hat{x}_0^T P \hat{x}_0 \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P\hat{A} - \hat{C}^T \hat{C} & P\hat{B} - \hat{C}^T D_{H_1} \\ \hat{B}^T P - D_{H_1}^T \hat{C} & I - D_{H_1}^T D_{H_1} \end{bmatrix} \geq 0$$

ou equivalentemente (denotando  $P = -P$ ):

$$L_*(h_a, K) = \min \{ \hat{x}_0^T P \hat{x}_0 : P = P^T, Q(P, K) \leq 0 \},$$

$$\text{onde } Q(P, K) = \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P\hat{A} + \hat{C}^T \hat{C} & P\hat{B} + \hat{C}^T D_{H_1} \\ \hat{B}^T P + D_{H_1}^T \hat{C} & -(I - D_{H_1}^T D_{H_1}) \end{bmatrix}.$$

Note que  $Q(P, K)$  possui termos quadráticos no parâmetro de Youla, quais sejam,  $\hat{C}^T \hat{C}$ ,  $\hat{C}^T D_{H_1}$ ,  $D_{H_1}^T \hat{C}$  e  $D_{H_1}^T D_{H_1}$ . Entretanto, utilizando a fórmula do Complemento de Schur, é possível escrever  $Q(P, K) \leq 0$  em uma forma equivalente sem termos quadráticos no parâmetro de Youla. Neste sentido, escreve-se  $Q(P)$  como

$$Q(P, K) = Q_0(P) + \begin{bmatrix} \hat{C}^T \\ D_{H_1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & D_{H_1} \end{bmatrix},$$

onde  $Q_0(P) = \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} \\ \hat{B}^T P & -I \end{bmatrix}$ , e segue do Complemento de Schur que

$$Q(P, K) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q_0(P) & \begin{bmatrix} \hat{C}^T \\ D_{H_1}^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{C} & D_{H_1} \end{bmatrix} & -I \end{bmatrix} \leq 0.$$

Assim, para um dado multiplicador e um fixo parâmetro de Youla, obtém-se uma caracterização do funcional dual como valor ótimo de um problema de otimização com restrição LMI, sem termos quadráticos no parâmetro de Youla. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

**Proposição 4.2.3:** Considere a configuração da figura 2.6 com a classe de sistemas perturbados dada por  $P(\Delta) = F_U(P_a, \Delta)$ ,  $\Delta \in D = \{\Delta \in RH_\infty^{p \times m} : \|\Delta\|_\infty \leq \mathbf{g}\}$  e  $w \in RH_2$ .

Suponha que  $(P_a, C)$  estável e  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_\infty < 1/\mathbf{g}$ , onde  $K$  é o parâmetro de Youla de um controlador tal que o sistema  $(P_a, C)$  seja estável. Seja  $h_a \in RL_\infty$  **fixo** tal que

$h_a = h_a^\sim$  e  $\inf\{h_a(j\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbb{R}\} \geq \mathbf{e}_{h_a} > 0$ . Se  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$  então

$$L_*(h_a, K) = \min\{\hat{x}_0^T P \hat{x}_0 : P = P^T, Q_a(P) \leq 0\}$$

$$\text{onde } Q_a(P, K) = \left[ \begin{array}{c|c} Q_0(P) & \begin{bmatrix} \hat{C}^T \\ D_{H_1}^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \hat{C} & D_{H_1} \end{bmatrix} & -I \end{array} \right], \quad Q_0(P) = \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} \\ \hat{B}^T P & -I \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{H_1} & 0 \\ 0 & A_{H_0} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{H_0} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C_{H_1} : C_{H_0}],$$

$(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}, D_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0})$  são realizações de

$$H_1(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_0(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \mathbf{f}_{h_a} M_{\Delta w}(K) \mathbf{f}_w \\ M_{zw}(K) \mathbf{f}_w \end{bmatrix} \quad \text{respectivamente com}$$

$(A_{H_1}, B_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0})$  controláveis,  $A_{H_1}$  e  $A_{H_0}$  Hurwitz ∇

A partir deste ponto será considerado o problema de síntese para um multiplicador fixo, isto é

$$\min_{K \in S_K} L_*(h_a, K)$$

onde  $S_K$  denota o conjunto dos parâmetros de Youla  $K$ , correspondente a estabilização do sistema  $(P_a, C)$  com as restrições adicionais de  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_\infty < 1/\mathbf{g}$  (condição de

estabilidade robusta) e  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{hR}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$  (condição para que o funcional dual seja

finito).

As expressões de  $M_{\Delta\Delta}(K)$ ,  $M_{\Delta w}(K)$ ,  $M_{z\Delta}(K)$  e  $M_{zw}(K)$  em função do parâmetro  $K$  são então dadas por

$$(4.2.3) \quad \begin{cases} M_{\Delta\Delta}(K) = T_{\Delta\Delta}^0 + T_{\Delta\Delta}^1 K T_{\Delta\Delta}^2, M_{\Delta w}(K) = T_{\Delta w}^0 + T_{\Delta w}^1 K T_{\Delta w}^2 \\ M_{z\Delta}(K) = T_{z\Delta}^0 + T_{z\Delta}^1 K T_{z\Delta}^2, M_{zw}(K) = T_{zw}^0 + T_{zw}^1 K T_{zw}^2 \end{cases}$$

onde  $T_{ab}^j, j=0,1,2; \mathbf{a} \in \{\Delta, z\}$  e  $\mathbf{b} \in \{\Delta, w\}$  pertencem a  $M(RH_\infty)$  e dependem somente dos termos de  $P_a$ . A derivação das fórmulas acima se encontra no apêndice

4-B.

Como mencionado anteriormente, o parâmetro de Youla será confinado a um subespaço de dimensão pré-especificado. Assim, introduzindo uma coleção finita  $\{K_j : j=1, \dots, n\}$  de funções  $K_j \in RH_\infty^{n_u \times n_y}$  linearmente independentes, define-se o seguinte subespaço de  $RH_\infty^{n_u \times n_y}$

$$\bar{S}_K = \left\{ K_a = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j K_j : \mathbf{a}_j \in \mathbb{R} \text{ para } j=1, \dots, n \right\}$$

Analogamente ao que foi feito no capítulo 3 para o caso de multiplicadores confinados a subespaços de dimensão finita, será mostrado que o problema truncado  $\min_{K \in \bar{S}_K} L_*(h_a, K)$  é equivalente a um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI.

Tendo em vista a Proposição 4.2.3, é suficiente mostrar que é possível tomar realizações  $(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}, D_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0})$  de  $H_1(K)$  e  $H_0(K)$  tais que  $A_{H_1}$ ,

$B_{H_1}$ ,  $A_{H_0}$  e  $B_{H_0}$ , não dependem dos “coeficientes livres” de  $\bar{S}_K$ ,  $C_{H_1}$ ,  $D_{H_1}$  e  $C_{H_0}$  são funções afins desses coeficientes, e ainda, as restrições  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_\infty < 1/g$  e

$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$  são escritas como LMI's. De fato, note que para  $K \in \bar{S}_K$

$$H_1(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^0 \\ T_{z\Delta}^0\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j \begin{bmatrix} -\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1 \bar{K}_j T_{\Delta\Delta}^2 \\ T_{z\Delta}^1 \bar{K}_j T_{z\Delta}^2 \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} = H_1^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i H_1^i,$$

de modo que  $H_1(K)$  tem uma realização  $(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}(\mathbf{a}), D_{H_1}(\mathbf{a}))$ ,  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]^T$

dada por

$$(4.2.4) \left\{ \begin{array}{l} A_{H_1} = \text{diag}\{A_{H_1}^0, A_{H_1}^1, \dots, A_{H_1}^n\}, B_{H_1} = \begin{bmatrix} B_{H_1}^0 \\ B_{H_1}^1 \\ \vdots \\ B_{H_1}^n \end{bmatrix}, C_{H_1}(\mathbf{a}) = [C_{H_1}^0 \quad \mathbf{a}_1 C_{H_1}^1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n C_{H_1}^n] \\ D_{H_1}(\mathbf{a}) = D_{H_1}^0 + \mathbf{a}_1 D_{H_1}^1 + \dots + \mathbf{a}_n D_{H_1}^n \end{array} \right.$$

onde  $(A_{H_1}^0, B_{H_1}^0, C_{H_1}^0, D_{H_1}^0)$  é uma realização de  $H_1^0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^0 \\ T_{z\Delta}^0\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix}$ , com  $(A_{H_1}^0, B_{H_1}^0)$

controlável e  $A_{H_1}^0$  Hurwitz, e para  $j=1, \dots, n$ ,  $(A_{H_1}^j, B_{H_1}^j, C_{H_1}^j, D_{H_1}^j)$  é uma realização de

$H_1^j = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1 \bar{K}_j T_{\Delta\Delta}^2 \\ T_{z\Delta}^1 \bar{K}_j T_{z\Delta}^2 \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix}$ , com  $(A_{H_1}^j, B_{H_1}^j)$  controlável e  $A_{H_1}^j$  Hurwitz. Analogamente, para

$K \in \bar{S}_K$  tem-se que

$$H_0(K) = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a} M_{\Delta w}(K) \mathbf{f}_w \\ M_{zw}(K) \mathbf{f}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a} T_{\Delta w}^0 \mathbf{f}_w \\ T_{zw}^0 \mathbf{f}_w \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j \begin{bmatrix} -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a} T_{\Delta w}^1 \bar{K}_j T_{\Delta w}^2 \mathbf{f}_w \\ T_{zw}^1 \bar{K}_j T_{zw}^2 \mathbf{f}_w \end{bmatrix} = H_0^0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j H_0^j,$$

de modo que  $H_0(K)$  tem uma realização  $(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0}(\mathbf{a}))$  dada por

$$(4.2.5) \left\{ A_{H_0} = \text{diag}\{A_{H_0}^0, A_{H_0}^1, \dots, A_{H_0}^n\}, B_{H_0} = \begin{bmatrix} B_{H_0}^0 \\ B_{H_0}^1 \\ \vdots \\ B_{H_0}^n \end{bmatrix}, C_{H_0}(\mathbf{a}) = [C_{H_0}^0 \quad \mathbf{a}_1 C_{H_0}^1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n C_{H_0}^n] \right\}$$

com  $(A_{H_0}^0, B_{H_0}^0)$  controlável e  $A_{H_0}^0$  Hurwitz, e para cada  $j=1, \dots, n$ ,  $(A_{H_0}^j, B_{H_0}^j, C_{H_0}^j)$  é

uma realização de  $H_0^j = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a} T_{\Delta w}^1 \bar{K}_j T_{\Delta w}^2 \mathbf{f}_w \\ T_{zw}^1 \bar{K}_j T_{zw}^2 \mathbf{f}_w \end{bmatrix}$  com  $(A_{H_0}^j, B_{H_0}^j)$  controlável e  $A_{H_0}^j$  Hurwitz.

Portanto, mostrou-se que  $H_1(K)$  e  $H_0(K)$  definidos na Proposição 4.2.3 possuem realizações  $(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}(\mathbf{a}), D_{H_1}(\mathbf{a}))$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0}(\mathbf{a}))$  nas quais  $C_{H_1}(\mathbf{a})$ ,  $D_{H_1}(\mathbf{a})$  e  $C_{H_0}(\mathbf{a})$  são funções afins de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]^T$ ,  $A_{H_1}$ ,  $B_{H_1}$ ,  $A_{H_0}$  e  $B_{H_0}$  não dependem de  $\mathbf{a}$ , e  $A_{H_1}$  e  $A_{H_0}$  são Hurwitz.

Assuma que as realizações definidas em (4.2.4) e (4.2.5) para  $K_a \in \bar{S}_K$  são tais que  $(A_{H_1}, B_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0})$  são controláveis. Então vale a proposição 4.2.3, e segue-se

do chamado “bounded-real lemma” (Boyd et al. 1994, pg 34) que  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$

(ou equivalente  $\|H_1(K)\|_\infty < 1$ ) se e somente se existe  $Q = Q^T$ , tal que  $Q > 0$  e

$R_a(Q, \mathbf{a}) < 0$  onde

$$R_a(Q, \mathbf{a}) \triangleq \begin{bmatrix} A_{H_1}^T Q + Q A_{H_1} & Q B_{H_1} & \vdots & C_{H_1}(\mathbf{a})^T \\ B_{H_1}^T Q & -I & \vdots & D_{H_1}(\mathbf{a})^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{H_1}(\mathbf{a}) & D_{H_1}(\mathbf{a}) & \vdots & -I \end{bmatrix}$$

e note que  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$  implica em  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_\infty < 1/\mathbf{g}$ . Pode-se então enunciar

a Proposição que mostra que o problema de síntese truncado, qual seja,  $\inf_{K \in \bar{S}_K} L_*(h_a, K)$ , é equivalente a um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI, cuja demonstração decorre do desenvolvimento anterior.

**Proposição 4.2.4:** Se as realizações  $(A_{H_1}, B_{H_1}, C_{H_1}(\mathbf{a}), D_{H_1}(\mathbf{a}))$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0}, C_{H_0}(\mathbf{a}))$  são tais que  $(A_{H_1}, B_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0})$  são controláveis, então  $\inf \{L_*(h_a, K) : K \in \bar{S}_K\}$  é o valor ótimo do Problema

$$\min_{P=P^T, Q=Q^T, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n} \hat{x}_0^T P \hat{x}_0 \text{ sujeito a } Q_a(P, \mathbf{a}) \leq 0, Q > 0 \text{ e } R_a(Q, \mathbf{a}) < 0$$

onde

$$Q_a(P, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \hat{B} & \vdots & \hat{C}(\mathbf{a})^T \\ \hat{B}^T P & -I & \vdots & D_{H_1}(\mathbf{a})^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{C}(\mathbf{a}) & D_{H_1}(\mathbf{a}) & \vdots & -I \end{bmatrix}$$

$$R_a(Q, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} A_{H_1}^T Q + Q A_{H_1} & Q B_{H_1} & \vdots & C_{H_1}(\mathbf{a})^T \\ B_{H_1}^T Q & -I & \vdots & D_{H_1}(\mathbf{a})^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{H_1}(\mathbf{a}) & D_{H_1}(\mathbf{a}) & \vdots & -I \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{H_1} & 0 \\ 0 & A_{H_0} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{H_0} \end{bmatrix}; \hat{C}(\mathbf{a}) = [C_{H_1}(\mathbf{a}) \vdots C_{H_0}(\mathbf{a})]$$

$C_{H_1}(\mathbf{a})$ ,  $D_{H_1}(\mathbf{a})$  e  $C_{H_0}(\mathbf{a})$  são funções afins de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]^T$ ,  $A_{H_1}$ ,  $B_{H_1}$ ,  $A_{H_0}$  e  $B_{H_0}$  não dependem de  $\mathbf{a}$ , e  $A_{H_1}$  e  $A_{H_0}$  são Hurwitz.  $\nabla$

**Comentário:** Se as realizações dadas por (4.2.5) e (4.2.6) são tais que  $(A_{H_1}, B_{H_1})$  e  $(A_{H_0}, B_{H_0})$  não são controláveis, é sempre possível através de uma transformação de similaridade seguida de um truncamento, obter realizações controláveis de  $H_1$  e de  $H_0$  de maneira que os “termos  $C$  e  $D$ ” destas realizações sejam afins nos “parâmetros livres” da classe  $\bar{S}_K$ , conforme observado no capítulo 3, seção 3.3.

Na próxima seção, com o objetivo de buscar maneiras heurísticas de modificar iterativamente o subespaço de dimensão finita ao qual será confinado o parâmetro de

Youla, será examinado o problema de caracterizar direções descendentes para o funcional dual, para multiplicadores fixos, no espaço das matrizes de funções em  $RH_\infty$ .

### **4.3-Direções descendentes para o funcional dual relativas ao problema de síntese de controlador**

Nesta seção, serão caracterizadas as direções descendentes para o funcional a partir de um parâmetro de Youla  $K$  fixo dual  $L_*(K)$ , escrito na seção anterior para o caso de sistemas com sinal de entrada escalar e sujeito a perturbações não-estruturadas. Note que a dependência do funcional dual com relação ao multiplicador não foi explicitada pois, em conformidade com seção anterior, está sendo considerado o problema de síntese de controlador para multiplicador fixo.

A idéia é a mesma utilizada no capítulo 3, seção 3.4, ou seja, uma direção descendente para  $L_*(K)$  a partir de um ponto interior  $K$ , aproximadamente alinhada com o “gradiente” do funcional dual, é uma escolha natural para ser acrescentada a base do subespaço  $\bar{S}_K$  definido na seção anterior. Assim procedendo, o refinamento da base do subespaço ao qual será confinado o parâmetro de Youla estará relacionado com o problema original de minimização do funcional dual sobre o conjunto dos parâmetros de Youla correspondentes à estabilização do sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 2.6.

Considere a expressão do funcional dual dada em (4.2.2) da seção anterior por

$$L_*(K) = -\inf \{ Q_\Theta(T; K) : T \in RH_2^p \}$$

onde

$$Q_\Theta(T; K) = \langle (\bar{\Theta}_1(K)T + \Theta_0(K)), J(\bar{\Theta}_1(K)T + \Theta_0(K)) \rangle$$

$J$  é uma matriz simétrica e  $\bar{\Theta}_1(K)$  e  $\Theta_0(K)$  são funções afins do parâmetro de Youla

$K$ ,  $\bar{\Theta}_1(K) \in M(RH_\infty)$  e  $\Theta_0(K) \in M(RH_2)$  como definidos na seção anterior.

Uma função  $\Delta K \in M(RH_\infty)$  será uma direção descendente para o funcional dual  $L_*(K)$  se e somente se existe  $\mathbf{a}_0 > 0$  tal que

$$L_*(K + \mathbf{a}\Delta K) - L_*(K) < 0 \text{ para todo } \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

O ponto de partida para caracterizar tais direções é obter fórmulas de perturbações em  $K$ , para  $Q_\Theta(T; K)$ . Neste sentido, é conveniente escrever  $\bar{\Theta}_1(K)$  e  $\Theta_0(K)$  como  $\bar{\Theta}_1(K) = L_{\Theta_1}(K) + C_{\Theta_1}$  e  $\Theta_0(K) = L_{\Theta_0}(K) + C_{\Theta_0}$ , onde  $L_{\Theta_1}(K)$  e  $L_{\Theta_0}(K)$  são lineares em  $K$ , e  $C_{\Theta_1}$  e  $C_{\Theta_0}$  são constantes. Com esta notação, tem-se que

$$\bar{\Theta}_1(K + \Delta K) = \bar{\Theta}_1(K) + L_{\Theta_1}(\Delta K),$$

$$\Theta_0(K + \Delta K) = \Theta_0(K) + L_{\Theta_0}(\Delta K),$$

de modo que  $Q_\Theta(T; K + \Delta K)$  pode ser escrito como

$$(4.3.1) \quad Q_{\Theta}(T; K + \Delta K) = Q_{\Theta}(T, K) + 2\langle \mathfrak{S}_1(T; K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle \\ + \langle \mathfrak{S}_2(T; \Delta K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle$$

onde

$$(4.3.2) \quad \mathfrak{S}_1(T; K) = \bar{\Theta}_1(K)T + \Theta_0(K) \text{ e } \mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \triangleq L_{\Theta_1}(\Delta K)T + L_{\Theta_0}(\Delta K).$$

Agora, se  $K$  é tal  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$  (o que implica  $\exists \mathbf{e} > 0$  tal que

$\{\bar{\Theta}_1^{\sim}(K)J\bar{\Theta}_1(K)\}(j\mathbf{w}) \geq \mathbf{e}I \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$  e conseqüentemente  $L_*(K)$  é finito) pode-se

escrever  $T \in RH_2^p$  como

$$T = T_*(K) + \Delta T,$$

onde  $\Delta T \in RH_2^p$  e  $T_*(K) = \text{argmin} Q_{\Theta}(T; K)$ . Utilizando este fato e as expressões

(4.3.1) e (4.3.2), uma fórmula de perturbação em  $K$  para  $Q_{\Theta}(T; K)$  pode então ser

escrita em função de  $T_*(K)$  e  $\Delta T$  da seguinte forma (ver Apêndice 4-C):

$$(4.3.3) \quad Q_{\Theta}(T; K + \Delta K) = Q_{\Theta}(T_*(K); K) + Q_0(\Delta T) + L_a(\Delta K) + L_1(\Delta T; \Delta K) + \\ L_2(\Delta T; \Delta K) + Q_1(\Delta T; \Delta K) + Q_a(\Delta K) + LQ(\Delta T; \Delta K) + Q_2(\Delta T; \Delta K)$$

onde

$Q_0(\Delta T)$  é quadrático em  $\Delta T$  ;

$L_a(\Delta K)$  é linear em  $\Delta K$  ;

$L_1(\Delta T; \Delta K)$  e  $L_2(\Delta T; \Delta K)$  são lineares em ambos os argumentos;

$Q_1(\Delta T; \Delta K)$  e  $Q_2(\Delta T; \Delta K)$  são quadráticos em ambos os argumentos;

$Q_a(\Delta K)$  é quadrático em  $\Delta K$  ;

$LQ(\Delta T; \Delta K)$  é linear em  $\Delta T$  e quadrático em  $\Delta K$  .

Os termos da expressão (4.3.3) são explicitados a seguir:

$$(4.3.4) \left\{ \begin{array}{l} Q_0(\Delta T) = \langle \bar{\Theta}_1(K) \Delta T, J \bar{\Theta}_1(K) \Delta T \rangle \\ L_a(\Delta K) = 2 \langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), J \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle \\ L_1(\Delta T; \Delta K) = 2 \langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), JL_{\Theta_1}(\Delta K) \Delta T \rangle \\ L_2(\Delta T; \Delta K) = 2 \langle \bar{\Theta}_1(K) \Delta T, J \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle \\ Q_1(\Delta T; \Delta K) = 2 \langle \bar{\Theta}_1(K) \Delta T, JL_{\Theta_1}(\Delta K) \Delta T \rangle \\ Q_2(\Delta T; \Delta K) = \langle L_{\Theta_1}(\Delta K) \Delta T, JL_{\Theta_1}(\Delta K) \Delta T \rangle \\ Q_a(\Delta K) = \langle \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K), J \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle \\ LQ(\Delta T; \Delta K) = 2 \langle \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K), JL_{\Theta_1}(\Delta K) \Delta T \rangle \end{array} \right.$$

A derivação da formula de perturbação dada por (4.3.3), e os correspondentes termos explicitados em (4.3.4), envolve unicamente a substituição de  $T$  por  $T_*(K) + \Delta T$  na expressão (4.3.1) e utilização das propriedades do produto interno em  $M(RH_2)$  (Ver Apêndice 4-C)

A partir da fórmula de perturbação dada pela expressão (4.3.3), será demonstrada a seguinte proposição, da qual se deriva uma condição suficiente para que se tenha uma direção descendente para  $L_*(K)$

**Proposição 4.3.1:** Seja  $\Delta K \in M(RH_\infty)$  e  $a > 0$  Então

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{L_*(K + a\Delta K) - L_*(K)}{a} = -L_a(\Delta K) \quad \nabla$$

**Demonstração:** (Apêndice 4-C) □

E segue diretamente da Proposição 4.3.1 o seguinte Corolário:

**Corolário 4.3.2:** Se  $\Delta K \in M(RH_\infty)$  é tal que  $L_a(\Delta K) > 0$ , então  $\Delta K$  é direção descendente par  $L_*(K)$  ▽

Assim, para apresentar uma direção descendente para  $L_*(K)$ , aproximadamente alinhada com o gradiente do funcional dual, deve-se obter  $\Delta K \in M(RH_\infty)$  tal que

$$L_a(\Delta K) = 2 \langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle > 0$$

⇔

$$\langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle > 0$$

⇔

$$\left\langle g_0 \Delta K, \left\{ g_0 X(T_*(K), K) \right\}_+ \right\rangle > 0,$$

onde  $\left\{ g_0 X(T_*(K), K) \right\}$  é explicitado no Apêndice 4-C.

Assim, para modificar o subespaço

$$\bar{S}_K = \left\{ K_a = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j K_j : \mathbf{a}_j \in \mathbb{R} \text{ para } j=1, \dots, n \right\}$$

ao qual será confinado o parâmetro de Youla, basta acrescentar  $\Delta K$  obtido à família  $\{K_j : j=1, \dots, n\}$  de funções  $K_j \in M(RH_\infty)$  linearmente independentes.

Na próxima seção, será examinado o problema de síntese com base no limitante deduzido por relaxação lagrangeana, para o caso de perturbações estruturadas e entrada multivariável.

## 4.4-Síntese baseado no limitante dado por relaxação lagrangeana: caso geral

Nesta seção, o procedimento da seção 4.2 é generalizado para o caso perturbações estruturadas e entrada multivariável. Em linhas gerais, esse procedimento é descrito da seguinte forma: para um fixo multiplicado e fixo parâmetro de Youla, o funcional dual, é caracterizado por meio de valores ótimos de problemas LQR de horizonte infinito, que por sua vez são soluções de problemas de otimização linear com

restrições definidas por LMI's . Confinando-se o parâmetro de Youla a um subespaço de dimensão finita de  $M(RH_\infty)$ , e utilizando a caracterização do funcional dual descrita acima, mostra-se que a minimização do funcional dual sobre esse subespaço é equivalente a resolução de problemas de otimização em espaços euclidianos com restrições definidas por LMI's.

Antes porém, assim como foi feito na seção 4.2, serão revistos rapidamente os principais pontos da dedução do limitante superior do índice “pior-caso”  $H_2$  por meio de relaxação lagrangena.

Assim, considere a configuração da figura 2.6, com a classe de perturbações dada por

$$\bar{S}_\Delta = \left\{ \Delta \in RH_\infty^{p \times p} : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_l), \Delta_i \in RH_\infty^{r_i \times r_i} \text{ e } \|\Delta_i\|_\infty \leq \mathbf{g} \quad \forall i = 1, \dots, l \right\}$$

e  $w \in RH_2^{n_w}$ . Conforme foi visto na seção 2.4, um limitante superior para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$  é dado pela soma dos  $n_w$  valores ótimos de problemas do tipo

**Problema a:** 
$$\max_{T \in RH_2^p} \left\| M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_k \right\|_2^2,$$

sujeito a 
$$c_{0i}^k [T, K](j\mathbf{w}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, l,$$

onde

$$c_{0i}^k [T, K](j\mathbf{w}) = \left\| R_i T(j\mathbf{w}) \right\|_F^2 - \mathbf{g}^2 \left\| R_i M_{\Delta w}(K)(j\mathbf{w})\mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) + R_i M_{\Delta\Delta}(K)(j\mathbf{w})T(j\mathbf{w}) \right\|_F^2$$

$k$  é o índice das colunas de  $\mathbf{f}_w = [\mathbf{f}_1 : \dots : \mathbf{f}_{n_w}]$ ,  $\mathbf{f}_w \in RH_2^{n_w \times n_w}$  é o fator espectral da densidade de potência espectral do sinal de perturbação  $w$ ;

$i$  é o índice dos blocos de perturbação;

$\mathbf{f}_k$  é a  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{f}_w$ ;

$R_i = [0 \dots I_{r_i} \dots 0]$  é uma matriz seletora de linhas;

$K$  é o parâmetro de Youla dos controladores estabilizantes do sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 2.6.

O funcional lagrangeano  $L_{ak}(T, h_k, K)$ ,  $h_k = (h_{1k}, \dots, h_{lk})$  correspondente a cada  $k$  problema do tipo Problema a é então definido por

$$L_{ak}(T, h, K) = \|M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_k\|_2^2 - \left\{ \sum_{i=1}^l c_i^k(T, h_{ik}, K) \right\}$$

$$\text{onde } c_i^k(T, h_{ik}, K) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(j\mathbf{w}) c_{0i}^k[T, K](j\mathbf{w}) d\mathbf{w};$$

para  $i=1, \dots, l$ , os multiplicadores (uma para cada bloco de perturbação) são tais que

$$h_i \in RL_{\infty}, h_i = h_i^{\sim} \text{ e } h_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}.$$

O índice “pior-caso”  $H_2$  é então limitado superiormente por

$$\sum_{k=1}^{n_w} L_{*k}(h, K)$$

$$\text{onde } L_{*k}(h_k, K) = \sup \{ L_{ak}(T, h_k, K) : T \in RH_2^p \}, \quad k = 1, \dots, n_w; h_k = (h_{1k}, \dots, h_{lk}).$$

Um procedimento de síntese baseado no limitante acima, para multiplicador fixo, é então dado por

$$(4.4.1) \quad \min_{K \in S_K} \sum_{k=1}^{n_w} L_{*k}(h_{ak}, K)$$

onde  $S_K$  denota o conjunto dos parâmetros de Youla  $K$ , correspondente a estabilização do sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 2.6 com a condição de que  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_{\infty} < 1/\mathbf{g}$  (estabilidade robusta), e  $h_{ak} = (h_{a1k}, \dots, h_{alk})$  fixo tal que  $\forall i = 1, \dots, l: h_{aik}^{\sim} = h_{aik}$ , e  $\inf \{h_{aik}(j\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbb{R}\} \geq \mathbf{e}_{nik} > 0$ .

Seguindo o procedimento feito na seção 4.2, para examinar o problema de síntese dado pela expressão (4.4.1), cada  $k$  funcional dual é caracterizado por meio do valor ótimo de um problema de horizonte infinito LQR., de uma maneira distinta da seção 3.2, isto é, sem a utilização de projeções. Para este fim, escreve-se cada  $L_{ak}(T, h_{ak}, K)$  como

$$\begin{aligned} L_{ak}(T, h_{ak}, K) = & \|M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_k\|_2^2 - \sum_{i=1}^l \langle \mathbf{f}_{ik}^a R_i T, \mathbf{f}_{ik}^a R_i T \rangle \\ & + \mathbf{g}^2 \sum_{i=1}^l \langle \mathbf{f}_{ik}^a R_i (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T), \mathbf{f}_{ik}^a R_i (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T) \rangle \end{aligned}$$

onde para  $i=1, \dots, l$ ,  $\mathbf{f}_{ik}^a$  é fator espectral de  $h_{aik} = (\mathbf{f}_{ik}^a)^{\sim} \mathbf{f}_{ik}^a$ . Segue-se que

$$L_{ak}(T, h_{ak}, K) = \left\| M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_k \right\|_2^2 - \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1k}^a R_{l_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{lk}^a R_{l_l} \end{bmatrix} T, \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1k}^a R_{l_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{lk}^a R_{l_l} \end{bmatrix} T \right\rangle$$

$$+ \mathbf{g}^2 \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1k}^a R_{l_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{lk}^a R_{l_l} \end{bmatrix} (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T), \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1k}^a R_{l_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{lk}^a R_{l_l} \end{bmatrix} (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T) \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$L_{ak}(T, h_{ak}, K) = \left\| M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_k \right\|_2^2 - \langle \Gamma_{Rk} T, T \rangle$$

$$+ \mathbf{g}^2 \langle \Gamma_{Rk} (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T), (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T) \rangle$$

onde  $\Gamma_{Rk} = \sum_{i=1}^l (\mathbf{f}_i^a)^{\sim} R_i^T R_i \mathbf{f}_i^a$ . Assim, tomando-se uma fatoração espectral  $\Gamma_{Rk} = \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} \tilde{\mathbf{f}}_{Rk}$ ,

pode-se escrever

$$-L_{ak}(T, h, K) = \left\| \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} T \right\|_2^2 - \mathbf{g}^2 \left\| \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} (M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k + M_{\Delta\Delta}(K)T) \right\|_2^2 - \left\| M_{z\Delta}(K)T + M_{zw}(K)\mathbf{f}_k \right\|_2^2$$

$\Leftrightarrow$

$$-L_{ak}(T, h_a, K) = \langle (\Theta_{Rk} T + \Theta_{0k}), J(\Theta_{Rk} T + \Theta_{0k}) \rangle,$$

onde

$$\Theta_{Rk} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} I \\ -\mathbf{g} \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K) \end{bmatrix}, \quad \Theta_{0k} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g} \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_k \\ M_{zw}(K)\mathbf{f}_k \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Denotando  $\tilde{T} = \tilde{\mathbf{f}}_{Rk} T$ , tem-se que

$$L_{*k}(h_a, K) = -\inf \left\{ \left\langle \left( \bar{\Theta}_{Rk} \tilde{T} + \Theta_{0k} \right), J \left( \bar{\Theta}_{Rk} \tilde{T} + \Theta_{0k} \right) \right\rangle : \tilde{T} \in RH_2^p \right\}$$

onde

$$\bar{\Theta}_{Rk} = \begin{bmatrix} I \\ \dots \\ H_{Rk} \end{bmatrix}, \Theta_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ H_{0k} \end{bmatrix}, H_{Rk} \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \mathbf{f}_{Rk} M_{\Delta\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \end{bmatrix}, H_{0k} \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \mathbf{f}_{Rk} M_{\Delta w}(K) \mathbf{f}_k \\ M_{zw}(K) \mathbf{f}_k \end{bmatrix}.$$

A proposição a seguir, é essencialmente a Proposição 4.2.3 aplicada a cada  $L_{*k}(h_{ak}, K)$ ,  $k=1, \dots, n_w$ , para o caso de perturbações estruturadas.

**Proposição 4.4.1:** Considere a configuração da figura 2.6 com a classe de sistemas perturbados dada por  $P(\Delta) = F_U(P_a, \Delta)$ ,  $\Delta \in \bar{S}_\Delta$  onde

$$\bar{S}_\Delta \triangleq \left\{ \Delta \in RH_\infty^{p \times p} : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_l), \Delta_i \in RH_\infty^{r_i \times r_i} \text{ e } \|\Delta_i\|_\infty \leq \mathbf{g} \ \forall i = 1, \dots, l \right\},$$

e  $w \in RH_2^{n_w}$ . Suponha que  $(P_a, C)$  é estável e  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_\infty < 1/\mathbf{g}$ , onde  $K$  é o parâmetro

de Youla de um controlador tal que  $(P_a, C)$  é estável. Se  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} \mathbf{f}_{Rk} M_{\Delta\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$

então, para todo  $k = 1, \dots, n_w$ , tem-se que

$$L_{*k}(h_{ak}, K) = \min \left\{ \hat{\mathbf{x}}_k^T P_k \hat{\mathbf{x}}_k : P_k = P_k^T, Q_k(P_k, K) \leq 0 \right\}$$

onde

$$Q_k(P_k) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{Rk}^T P_k + P_k \hat{A}_{Rk} & P_k \hat{B}_{Rk} & \vdots & \hat{C}_{Rk}^T \\ \hat{B}_{Rk}^T P_k & -I & \vdots & D_{H_R}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{C}_{Rk} & D_{H_R} & \vdots & -I \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{Rk} = \begin{bmatrix} A_{H_{Rk}} & 0 \\ 0 & A_{H_{0k}} \end{bmatrix}, \hat{B}_{Rk} = \begin{bmatrix} B_{H_{Rk}} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{H_{0k}} \end{bmatrix}; \hat{C}_{Rk} = [C_{H_{Rk}} \vdots C_{H_{0k}}],$$

$(A_{H_{Rk}}, B_{H_{Rk}}, C_{H_{Rk}}, D_{H_{Rk}})$  e  $(A_{H_{0k}}, B_{H_{0k}}, C_{H_{0k}})$  são realizações de

$$H_{Rk} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_{Rk}^T M_{\Delta\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$H_{0k} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_{Rk}^T M_{\Delta w}(K) \mathbf{f}_k \\ M_{zw}(K) \mathbf{f}_k \end{bmatrix}, \text{ com } (A_{H_{Rk}}, B_{H_{Rk}}) \text{ e } (A_{H_{0k}}, B_{H_{0k}}) \text{ controláveis, } A_{H_{Rk}} \text{ e } A_{H_{0k}}$$

Hurwitz. ∇

Agora, retornando ao problema  $\min_{K \in S_K} \sum_{k=1}^{n_w} L_{*k}(h_{ak}, K)$ ,  $h_{ak} = (h_{a1k}, \dots, h_{alk})$  fixo,

será mostrado que quando o parâmetro de Youla é confinado a um subespaço de dimensão finita, a solução do correspondente problema truncado é dada por meio de valores ótimos de problemas de otimização em espaços euclidianos com restrições definidas por meio de LMI's. Assim, considera-se novamente a coleção finita  $\{K_j : j=1, \dots, n\}$  de funções  $K_j \in RH_{\infty}^{n_u \times n_y}$  linearmente independentes, e o seguinte

subespaço de  $RH_{\infty}^{n_u \times n_y}$  dado por

$$\bar{S}_K = \left\{ K_{\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j K_j : \mathbf{a}_j \in \mathbb{R} \text{ para } j=1, \dots, n \right\}$$

De maneira similar ao que foi feito na seção 4.2, para todo  $K \in \bar{S}_K$  é possível obter uma realização  $(A_{H_{Rk}}, B_{H_{Rk}}, C_{H_{Rk}}(\mathbf{a}), D_{H_{Rk}}(\mathbf{a}))$  de  $H_{Rk}(K)$  tal que  $C_{H_{Rk}}(\mathbf{a})$  e  $D_{H_{Rk}}(\mathbf{a})$  são funções afins de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]^T$ ,  $(A_{H_{Rk}}, B_{H_{Rk}})$  é controlável e não depende de  $\mathbf{a}$ , e  $A_{H_{Rk}}$  é Hurwitz. Da mesma forma, para cada  $k=1, \dots, n_w$ , é possível obter uma realização  $(A_{H_{0k}}, B_{H_{0k}}, C_{H_{0k}}(\mathbf{a}))$  de  $H_{0k}(K)$  tal que  $C_{H_{0k}}(\mathbf{a})$  e  $D_{H_{0k}}(\mathbf{a})$  são funções afins de  $\mathbf{a}$ ,  $(A_{H_{0k}}, B_{H_{0k}})$  é controlável e não depende  $\mathbf{a}$ , e  $A_{H_{0k}}$  é Hurwitz.

Assim, a condição  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} \mathbf{f}_{Rk} M_{\Delta\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$ , (ou equivalente  $\|H_{Rk}(K)\|_{\infty} < 1$ )

que é a condição de cada  $L_{*k}(h_{ak}, K)$  ser finito é escrita como uma LMI., devido ao

“Bounded-real lemma”, de modo que  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{g} \mathbf{f}_{Rk} M_{\Delta\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \\ M_{z\Delta}(K) \mathbf{f}_{Rk}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$  se e somente se existe

$Q_k = Q_k^T$ , tal que  $Q_k > 0$  e  $R_k(Q_k, \mathbf{a}) < 0$  onde

$$R_k(Q_k, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} A_{H_{Rk}}^T Q_k + Q_k A_{H_{Rk}} & Q_k B_{H_{Rk}} & \vdots & C_{H_{Rk}}(\mathbf{a})^T \\ B_{H_{Rk}}^T Q_k & -I & \vdots & D_{H_{Rk}}(\mathbf{a})^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{H_{Rk}}(\mathbf{a}) & D_{H_{Rk}}(\mathbf{a}) & \vdots & -I \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, para todo  $K \in \bar{S}_K$  a condição de estabilidade robusta que é dada

$\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_{\infty} < 1/\mathbf{g}$  é equivalente a existir  $S = S^T$ , tal que  $S > 0$  e  $R_{\Delta\Delta}(S, \mathbf{a}) < 0$  onde

$$R_{\Delta\Delta}(S, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} A_{\Delta\Delta}^T S + SA_{\Delta\Delta} & SB_{\Delta\Delta} & \vdots & C_{\Delta\Delta}(\mathbf{a})^T \\ B_{\Delta\Delta}^T S & -\mathbf{g}^{-2}I & \vdots & D_{\Delta\Delta}(\mathbf{a})^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{\Delta\Delta}(\mathbf{a}) & D_{\Delta\Delta}(\mathbf{a}) & \vdots & -I \end{bmatrix}$$

$(A_{\Delta\Delta}, B_{\Delta\Delta}, C_{\Delta\Delta}(\mathbf{a}), D_{\Delta\Delta}(\mathbf{a}))$  é uma realização de  $M_{\Delta\Delta}(K)$  tal que  $C_{\Delta\Delta}(\mathbf{a})$  e  $D_{\Delta\Delta}(\mathbf{a})$  são funções afins de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]^T$ ,  $(A_{\Delta\Delta}, B_{\Delta\Delta})$  é controlável e não depende de  $\mathbf{a}$ , e  $A_{\Delta\Delta}$  é Hurwitz.

**Comentário:** Note que na seção 4.2, para o caso mais simples de perturbação não-estruturada, a condição do funcional ser finito implica diretamente na condição de estabilidade robusta.

Finalmente desde que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_w} L_{*k}(h_{ak}, K) &= \sum_{k=1}^{n_w} \left( \min \{ \hat{x}_k^T P_k \hat{x}_k : P_k = P_k^T, Q_k(P_k, K) \leq 0 \} \right) \\ &= \min \left\{ \sum_{k=1}^{n_w} \hat{x}_k^T P_k \hat{x}_k : P_k = P_k^T, Q_k(P_k, K) \leq 0, k = 1, \dots, n_w \right\} \end{aligned}$$

tem-se que, quando o parâmetro de Youla é confinado ao subespaço  $\bar{S}_K$ , o problema de síntese de controlador baseado no limitante dado pela seção 2.4, para o caso de perturbações estruturadas e entrada multivariável, é reformulado como

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, P_k = P_k^T, k=1, \dots, n_w, Q_k = Q_k^T, S = S^T} \sum_{k=1}^{n_w} \hat{\mathbf{x}}_k^T P_k \hat{\mathbf{x}}_k$$

sujeito a  $Q_k(P_k, \mathbf{a}) \leq 0$  para  $k = 1, \dots, n_w$ ,  $Q_k > 0$ ,  $S > 0$ ,  $R_k(Q_k, \mathbf{a}) < 0$ ,  $R_{\Delta\Delta}(S, \mathbf{a}) < 0$ .

**Observação :** Um método similar ao feito na seção 4.3 pode ser aplicado para caracterizar direções descendentes para  $\sum_{k=1}^{n_w} L_{*k}(h_{ak}, K)$ , com objetivo de sugerir heurísticas para alterar a base do subespaço ao qual será confinado o parâmetro de Youla.

A seguir, será apresentado o esboço de um esquema para um procedimento do tipo “D-K iteration” baseado no limitante superior do “pior-caso”  $H_2$  deduzido na seção 2.4 por meio de relaxação lagrangeana, levando em conta os resultados referentes ao confinamento de multiplicador e parâmetro de Youla a subespaços de dimensão finita deduzidos nas seções 3.3 e 4.4 (ou 4.2) respectivamente.

**Esquema para procedimento “D-K iteration” :**

- Determinada uma classe linear inicial de multiplicadores  $S_h^0$  definida conforme a expressão (3.3.1) da seção 3.3, e um subespaço inicial  $\bar{S}_K^0$  conforme definido

na seção 4.2, minimizar alternadamente o funcional dual lagrangeano sobre  $S_h^0$  e  $\bar{S}_K^0$  utilizando os resultados das seções 3.3 e 4.2 (ou 4.4) respectivamente.

- Quando o decréscimo do funcional dual torna-se menor que uma tolerância pré-especificada, alterar as classes ou parar.
- Para alterar a classe  $S_h^0$ , utilizar o último par  $(h, K)$  obtido nas iterações anteriores e proceder conforme sugerido na seção 3.4.
- Para alterar o subespaço  $\bar{S}_K^0$ , utilizar o último par  $(h, K)$  multiplicador obtido nas iterações anteriores e proceder conforme sugerido na seção 4.3.

### Inicialização:

- Para escolher um subespaço inicial  $\bar{S}_K^0$  pode-se tomar o subespaço  $\{K_{ms}, K_{qn}\}$ , onde  $K_{ms}$  é o parâmetro de Youla do controlador que maximiza a margem de estabilidade do sistema da figura 2.6 e  $K_{qn}$  minimiza o custo quadrático nominal, isto é,  $K_{ms}$  minimiza  $\|M_{\Delta\Delta}(K)\|_\infty$  e  $K_{qn}$  minimiza  $\|M_{zw}(K)\mathbf{f}_w\|_2^2$ .
- Para escolher um subespaço inicial  $S_h^0$  pode-se tomar  $K = K_{ms}$ , começar com multiplicadores constantes e seguir ampliando a classe conforme sugerido na

seção 3.4, até que o decréscimo do valor do funcional com respeito aos multiplicadores se torne “muito pequeno” ou quando a ordem da dinâmica dos multiplicadores atingir um limite pré-especificado.

## 4.5-Síntese baseada no limitante dado por “S-Procedure”

Nesta seção considera-se o problema de síntese de controlador para bom desempenho  $H_2$  –robusto com base no limitante para o índice “pior-caso”  $H_2$  deduzido na seção 2.5 por meio da “S-Procedure”.

Considere então, a configuração da figura 2.6 com a classe de perturbações dada por  $\bar{S}_\Delta = \{ \Delta \in RH_\infty^{p \times p} : \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_l), \Delta_i \in RH_\infty^{r_i \times r_i} \text{ e } \|\Delta_i\|_\infty \leq \mathbf{g} \ \forall i = 1, \dots, l \}$  e entrada multivariável, isto é,  $w \in RH_2^{n_w}$ . Mostrou-se na seção 2.5 que um limitante superior para o “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador estabilizante é dado por pela soma dos  $n_w$  valores ótimos (denotados por  $J_k$ ,  $k = 1, \dots, n_w$ ) de problemas do seguinte tipo

$$\min_{Y \in S_Y, \Lambda \in S_\Lambda} \langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle \text{ sujeito a } A(Y, \Lambda)(j\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

onde

$$\langle \mathbf{f}_k, Y \mathbf{f}_k \rangle = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}), Y(j\mathbf{w}) \mathbf{f}_k(j\mathbf{w}) \rangle_F d\mathbf{w},$$

$$A(Y, \Lambda, K)(j\mathbf{w}) = \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} - M(K) \tilde{\phantom{K}} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^2 \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} M(K) \right\} (j\mathbf{w}),$$

$$M(K) = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(K) & M_{\Delta w}(K) \\ M_{z\Delta}(K) & M_{zw}(K) \end{bmatrix},$$

$$S_\Lambda = \left\{ \Lambda = \text{diag} \{ \mathbf{I}_1 I_{r_1}, \dots, \mathbf{I}_l I_{r_l} \} : \forall i = 1, \dots, l, \mathbf{I}_i \in RL_\infty, \mathbf{I}_i \tilde{\phantom{I}} = \mathbf{I}_i, \mathbf{I}_i(j\mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} \right\},$$

$$S_Y = \left\{ Y \in RL_\infty^{n_w \times n_w} : Y \tilde{\phantom{Y}} = Y \right\},$$

$\mathbf{f}_k$  é  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{f}_w = [\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_{n_w}]$ ,  $\mathbf{f}_w \in RH_2^{n_w \times n_w}$  é o fator espectral da densidade de potência espectral do sinal de perturbação  $w$ , e  $K$  é o parâmetro de Youla dos controladores que estabilizam o sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 2.6 com a restrição adicional de estabilidade robusta.

Note-se então que

$$\sum_{k=1}^{n_w} J_k = \min \left\{ \sum_{k=1}^{n_w} \langle \mathbf{f}_k, Y_k \mathbf{f}_k \rangle : Y_k \in S_Y, \Lambda_k \in S_\Lambda \text{ e } A[Y_k, \Lambda_k, K](j\mathbf{w}) \geq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n_w \right\}$$

de modo que um procedimento de síntese de controlador para bom desempenho  $H_2$  –robusto baseado no limitante do “pior-caso”  $H_2$  definido na seção 2.5 é dado por

$$(4.5.1) \quad \begin{cases} \inf_{K \in S_K, Y_k \in S_Y, \Lambda_k \in S_\Lambda, k=1, \dots, n_w} \sum_{k=1}^{n_w} \langle \mathbf{f}_k, Y_k \mathbf{f}_k \rangle \\ \text{sujeito a } A[Y_k, \Lambda_k, K](j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, k=1, \dots, n_w \end{cases}$$

Como no caso do limitante do “pior-caso”  $H_2$  deduzido por meio de relaxação lagrangeana, propõe-se um procedimento do tipo “D-K iteration” para a síntese. Como no capítulo 3, seção 3.5, foi examinado a resolução de cada **Problema k** com relação as variáveis ‘ $Y$  e  $\Lambda$ ’ para um dado controlador estabilizante, será examinada nesta seção o problema definido por (4.5.1) com relação ao parâmetro de Youla  $K$  e as variáveis  $Y_1, \dots, Y_{n_w}$ , para  $\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_{n_w}$  elementos fixos de  $S_\Lambda$  tais que para  $k=1, \dots, n_w$ :

$$\inf \left\{ \underline{L}_\infty [\bar{\Lambda}_k(j\omega)]: \omega \in \mathbb{R} \right\} \geq \mathbf{e}_k I.$$

Nesse contexto, de maneira similar a seção 3.5, será mostrado que quando as variáveis de decisão são confinadas a subespaços de dimensão finita pré-especificados, o correspondente problema truncado é equivalente a um problema de otimização linear sujeito a um número finito de restrições LMI, ao invés de uma família parametrizada pela frequência.

Tendo em vista esse objetivo, note-se primeiramente que para cada  $k=1, \dots, n_w$ , tem-se pela fórmula de complemento de Schur que

$$A[Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A_a[Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

onde

$$A_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_k & 0 & [M_{\Delta\Delta}(K)]^\sim & [M_{z\Delta}(K)]^\sim \\ 0 & Y_k & [M_{\Delta w}(K)]^\sim & [M_{zw}(K)]^\sim \\ \hline M_{\Delta\Delta}(K) & M_{\Delta w}(K) & \mathbf{g}^{-2}\bar{\Lambda}_k^{-1} & 0 \\ M_{z\Delta}(K) & M_{zw}(K) & 0 & I \end{bmatrix} (j\omega)$$

Considera-se agora, a coleção finita  $\{\bar{K}_j : j=1, \dots, n\}$  de funções  $\bar{K}_j \in RH_\infty^{n_u \times n_y}$

linearmente independentes, e o seguinte subespaço de  $RH_\infty^{n_u \times n_y}$  dado por

$$\bar{S}_K = \left\{ K_a = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j K_j : \mathbf{a}_j \in \mathbb{R} \text{ para } j=1, \dots, n \right\}$$

e o seguinte subespaço de  $S_Y$  (como na seção 3.5) dado por

$$\bar{S}_Y = \left\{ Y \in S_Y : Y = X_Y + X_Y^\sim, X_Y(s) = C_Y (sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D_Y, C_Y \in \mathbb{R}^{n_w \times n_y}, D_Y \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w} \right\}$$

com  $\bar{A}_Y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $\bar{B}_Y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$  fixos,  $(\bar{A}_Y, \bar{B}_Y)$  controlável e  $\bar{A}_Y$  Hurwitz.

Tem-se então, para todo  $K \in \bar{S}_K$  e  $Y_1, \dots, Y_{n_w}$  elementos de  $\bar{S}_Y$ , que cada

$A_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega)$ ,  $k=1, \dots, n_w$ , pode ser escrito como

$$A_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) = \left[ \begin{array}{cc|cc} \bar{\Lambda}_k & 0 & & \\ 0 & X_{Y_k} + X_{Y_k}^{\sim} & \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j [M_1(\bar{K}_j)]^{\sim} + M_0^{\sim} & \\ \hline \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j M_1(\bar{K}_j) + M_0 & & \mathbf{g}^{-2} \Lambda_k^{-1} & 0 \\ & & 0 & I \end{array} \right] (j\omega)$$

$$\text{onde } M_1(\bar{K}_j) = \begin{bmatrix} T_{\Delta\Delta}^1 \bar{K}_j T_{\Delta\Delta}^2 & T_{\Delta w}^1 \bar{K}_j T_{\Delta w}^2 \\ T_{z\Delta}^1 \bar{K}_j T_{z\Delta}^2 & T_{zw}^1 \bar{K}_j T_{zw}^2 \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} T_{\Delta\Delta}^0 & T_{\Delta w}^0 \\ T_{z\Delta}^0 & T_{zw}^0 \end{bmatrix}.$$

A seguir, para  $k = 1, \dots, n_w$ , denote por  $E_{\Lambda_k}$  a parte estável de  $\bar{\Lambda}_k$ ,  $E_{\Lambda_k}^{-1}$  a parte estável de  $\bar{\Lambda}_k^{-1}$ . Para  $Y_k \in \bar{S}_y$ , seja  $E_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K] \in M(RH_\infty)$  tal que

$$A_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) = E_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) + E_a^{\sim} [\bar{Y}_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega)$$

onde

$$E_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) = \left[ \begin{array}{cc|cc} E_{\Lambda_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{Y_k} & 0 & 0 \\ \hline \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j M_1(\bar{K}_j) + M_0 & & \mathbf{g}^{-2} E_{\Lambda_k}^{-1} & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{2} I \end{array} \right] (j\omega)$$

Com a notação acima, tem-se o seguinte lema

**Lema 4.5.1:** Para todo  $K \in \bar{S}_K$  e  $Y_k \in \bar{S}_Y$  é possível obter uma realização

$(A_{Ek}, B_{Ek}, C_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}), D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}))$  de  $E_a[Y_k, \bar{\Lambda}_k, K]$  tal que  $\forall k = 1, \dots, n_w$ ,

$C_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk})$  e  $D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk})$  são funções afins de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]^T$  e de  $(C_{Yk}, D_{Yk})$ ,

os parâmetros livres da classe  $\bar{S}_Y$ ,  $(A_{Ek}, B_{Ek})$  é controlável e não depende de  $\mathbf{a}$  e

$(C_{Yk}, D_{Yk})$ , e  $A_{Ek}$  é Hurwitz. ∇

**Demonstração:**(Apêndice 4-D).

Segue-se do Lema 4.5.1 e do Lema Positivo Real (Boyd et al,1994, pg 35) que

$\forall k = 1, \dots, n_w$ :

$$A_a[Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, K \in \bar{S}_K, Y_k \in \bar{S}_Y$$

⇔

$$\exists P_k = P_k^T \text{ tal que } \begin{bmatrix} A_{Ek}^T P_k + P_k A_{Ek} & P_k B_{Ek} - C_{Ek}^T(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) \\ B_{Ek}^T P_k - C_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) & -D_{Ek}^T(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) - D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) \end{bmatrix} \leq 0$$

onde a desigualdade matricial acima é afim nas variáveis  $P_k$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}_k$ .

Finalmente, note que se  $Y_k \in \bar{S}_Y$ , tem-se  $\forall k = 1, \dots, n_w$  que

$$\langle \mathbf{f}_k, Y_k \mathbf{f}_k \rangle = \langle \mathbf{f}_k, (X_{Yk} + \tilde{X}_{Yk}) \mathbf{f}_k \rangle = 2 \langle \mathbf{f}_k, X_{Yk} \mathbf{f}_k \rangle = 2 \langle g_0 P_k, g_0 X_{Yk} \rangle$$

onde  $P_k \triangleq (g_0^{-1} \mathbf{f}_k) \tilde{\phantom{f}} (g_0^{-1} \mathbf{f}_k)$ . A seguir, escrevendo  $X_{Yk}(s) = C_{Yk}(sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D_{Yk}$ ,

tem-se para todo  $Y_k \in \bar{S}_Y$  que

$$\langle \mathbf{f}_k, Y_k \mathbf{f}_k \rangle = 2R_k^C(C_Y) + 2R_k^D(D_Y)$$

onde

$$R_k^C(C_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left\{ P_k(j\omega)^* [g_0(j\omega)]^2 C_Y (j\omega - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y \right\} d\omega;$$

$$R_k^D(D_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left\{ [g_0(j\omega)]^2 P_k(j\omega)^* D_Y \right\} d\omega.$$

Será apresentada a seguir a proposição que mostra a equivalência do problema de síntese (truncado) definido nesta seção e um problema de otimização linear sujeito a um número finito de restrições LMI cuja demonstração decorre do desenvolvimento anterior.

**Proposição 4.5.2:** Sejam  $\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_{n_w}$  elementos fixos de  $S_\Lambda$  tais que para  $k = 1, \dots, n_w$ :

$\inf \left\{ \underline{\mathbf{I}} \left[ \bar{\Lambda}_k(j\omega) \right] : \omega \in \mathbb{R} \right\} \geq \mathbf{e}_k \mathbf{I}$ . Então

$$\min_{K \in \bar{S}_K, Y_k \in \bar{S}_Y, k=1, \dots, n_w} \sum_{k=1}^{n_w} \langle \mathbf{f}_k, Y_k \mathbf{f}_k \rangle \text{ sujeito a } A[Y_k, \bar{\Lambda}_k, K](j\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n_w$$

é equivalente a

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, C_Y \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_Y}, D_Y \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_w}, P_k = P_k^T, k=1, \dots, n_w} \sum_{k=1}^{n_w} 2R_k^C(C_Y) + 2R_k^D(D_Y)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_{Ek}^T P_k + P_k A_{Ek} & P_k B_{Ek} - C_{Ek}^T(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) \\ B_{Ek}^T P_k - C_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) & -D_{Ek}^T(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) - D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) \end{bmatrix} \leq 0, \forall k = 1, \dots, n_w$$

onde  $\forall k = 1, \dots, n_w$ ,  $\forall k = 1, \dots, n_w$ ,  $C_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk})$  e  $D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk})$  são funções afins

de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]^T$  e de  $(C_{Yk}, D_{Yk})$ , os parâmetros livres da classe  $\bar{S}_Y$ ,  $(A_{Ek}, B_{Ek})$  é

controlável e não depende de  $\mathbf{a}$  e  $(C_{Yk}, D_{Yk})$ , e  $A_{Ek}$  é Hurwitz e

$$R_k^C(C_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Tr \left\{ P_k(j\mathbf{w})^* [g_0(j\mathbf{w})]^2 C_Y(j\mathbf{w} - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y \right\} d\mathbf{w};$$

$$R_k^D(D_Y) = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Tr \left\{ [g_0(j\mathbf{w})]^2 P_k(j\mathbf{w})^* D_Y \right\} d\mathbf{w}, P_k \triangleq (g_0^{-1} \mathbf{f}_k)^{\sim} (g_0^{-1} \mathbf{f}_k). \quad \nabla$$

Convém observar, que para cada  $\langle \mathbf{f}_k, Y_k \mathbf{f}_k \rangle$ , é possível obter uma caracterização de direções descendentes e factíveis, a partir de um ponto interior  $(Y_k, K)$ , aproximadamente alinhadas com o “gradiente”, utilizando a mesma metodologia usada na seção 3.7, baseada em Elipsóide de Dynkin (Nemirovski & Gahinet, 1997). Dessa forma, pode-se usar a mesma heurística sugerida nesta seção para mudança iterativa dos subespaços aos quais serão confinadas as variáveis de decisão.

Um esquema para um procedimento “D-K iteration” similar ao descrito na seção anterior pode ser feito levando em conta os resultados desta seção, e das seções 3.4 e 3.6. Nesse caso, em um passo resolve-se o problema truncado definido na seção 3.5 com relação as variáveis  $(Y_k, \Lambda_k)$  para um parâmetro de Youla fixo, e em outro passo

resolve-se o correspondente problema truncado definido por (4.5.1) com relação às variáveis  $(Y_k, K)$  para  $\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_k$  fixos.

## 4.6-Conclusões

Nesta capítulo, foram propostos procedimentos de síntese de controladores para bom desempenho  $H_2$ -robusto de sistemas perturbados com base nos limitantes superiores do índice “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador deduzidos nas seções 2.5 e 2.6, utilizando a parametrização de Youla dos controladores que estabilizam o sistema nominal.

No caso do limitante deduzido na seção 2.4 por meio de relaxação lagrangeana, o funcional dual é convexo no parâmetro de Youla para fixos multiplicadores. No caso do limitante deduzido na seção 2.5 por meio da “S-Procedure”, que consiste no valor ótimo de um problema de minimização de um funcional linear (que não depende do controlador) sujeito a uma família de restrições LMI’s parametrizada pela frequência, as desigualdades matriciais tornam-se afins no parâmetro de Youla.

Em ambos os casos, mostra-se que quando o parâmetro de Youla é confinado a um subespaço de dimensão finita pré-especificado, os correspondentes problemas truncados são equivalentes a problemas de otimização linear no espaço euclidiano com restrições (finitas) definidas por LMI’s.

Em particular, com relação a síntese baseada no limitante do “pior-caso” dado por relaxação lagrangeana, foi apresentado um procedimento para escolher elementos da base do subespaço ao qual será confinado o parâmetro de Youla.

Finalmente, é apresentado o esboço de um procedimento “D-K iteration” baseado no limitante do “pior-caso”  $H_2$  deduzido por meio de relaxação lagrangeana, que pode ser aplicado também ao limitante deduzido por meio da “S-Procedure”.

## Apêndice 4-A: Demonstração da Proposição 4.2.1

1ª Parte: Inicialmente note que

$$J(u) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, S \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\rangle$$

pode ser escrito como

$$J(u) = \left\langle \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}, \bar{S} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} \right\rangle, \text{ onde } \bar{S} = \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix}, \text{ e segue pelo Teorema de Parseval que}$$

$$J(u) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix}, \bar{S} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

onde  $Y(s)$  denota a transformada de Laplace de  $u(t) \in (L_2[0, \infty))^p$ , e

$H_{\hat{A}}(s) = (sI - \hat{A})^{-1}$ . Logo, escrevendo

$$\mathfrak{S}(Y) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix}, \bar{S} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

será mostrado que  $\mathfrak{S}(Y) = \mathbf{j}(Y) \forall Y \in RH_2^p$ . Neste sentido, escreva

$$\mathbf{j}(Y) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ H_1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

ou equivalentemente

$$(1) \quad \mathbf{j}(Y) = \|Y\|_2^2 - \|H_1 Y\|_2^2 - 2 \langle H_1 Y, H_0 \rangle - \|H_0\|_2^2$$

Por outro lado,

$$\mathfrak{S}(Y) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathfrak{S}(Y) = \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y \right\rangle + 2 \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$+ \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Da parte quadrática de  $\mathfrak{S}(Y)$  tem-se que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y \right\rangle &= \langle Y, (S_{uu} + S_{ux} H_{\hat{A}} \hat{B}) Y \rangle + \langle H_{\hat{A}} \hat{B} Y, (S_{xu} + S_{xx} H_{\hat{A}} \hat{B}) Y \rangle \\ &= \langle Y, S_{uu} Y \rangle + 2 \langle H_{\hat{A}} \hat{B} Y, S_{xu} Y \rangle + \langle H_{\hat{A}} \hat{B} Y, S_{xx} H_{\hat{A}} \hat{B} Y \rangle \quad (\text{já que } S_{ux}^T = S_{xu}). \end{aligned}$$

Recorde-se agora, as definições dos termos que aparecem nos produtos internos acima, isto é,

$$\begin{aligned} S_{xx} &= -\hat{C}^T \hat{C}, \quad S_{xu} = -\hat{C}^T D_{H_1}, \quad S_{ux} = -D_{H_1}^T \hat{C}, \quad S_{uu} = I - D_{H_1}^T D_{H_1}, \\ H_{\hat{A}} &= \begin{bmatrix} (sI - A_{H_1})^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_{H_0})^{-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{H_0} \end{bmatrix}; \quad \hat{C} = [C_{H_1} \ ; \ C_{H_0}], \end{aligned}$$

$$\hat{C} H_{\hat{A}} \hat{B} = C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1}, \quad \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{x}_0 = C_{H_0} (sI - A_{H_0})^{-1} B_{H_0} = H_0, \quad \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{B} + D_{H_1} = H_1.$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y \right\rangle &= \|Y\|_2^2 - \langle D_{H_1} Y, D_{H_1} Y \rangle - 2 \langle H_{\hat{A}} \hat{B} Y, \hat{C}^T D_{H_1} Y \rangle \\ &\quad - \langle H_{\hat{A}} \hat{B} Y, \hat{C}^T \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{B} Y \rangle \end{aligned}$$

⇔

$$\begin{aligned}
& \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y \right\rangle = \|Y\|_2^2 - \langle D_{H_1} Y, D_{H_1} Y \rangle - 2 \langle C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1} Y, D_{H_1} Y \rangle \\
& - \langle C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1} Y, C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1} Y \rangle \\
& = \|Y\|_2^2 - \left\langle \begin{bmatrix} C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1} + D_{H_1} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1} + D_{H_1} \end{bmatrix} Y \right\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja

$$(2) \quad \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y \right\rangle = \|Y\|_2^2 - \|H_1 Y\|_2^2.$$

Com relação a parte linear de de  $\mathfrak{S}(Y)$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
& 2 \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \left\{ \langle Y, D_{H_1}^T \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \rangle + \langle H_{\hat{A}} \hat{B} Y, \hat{C}^T \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \rangle \right\} \\
& = -2 \left\{ \langle D_{H_1} Y, H_0 \rangle + \langle C_{H_1} (sI - A_{H_1})^{-1} B_{H_1} Y, H_0 \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

De modo que

$$(3) \quad 2 \left\langle \begin{bmatrix} I \\ H_{\hat{A}} \hat{B} \end{bmatrix} Y, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \langle H_1 Y, H_0 \rangle.$$

Finalmente, com relação a parte constante de  $\mathfrak{S}(Y)$ , note que

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle H_{\hat{A}} \hat{x}_0, S_{xx} H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \rangle = -\langle \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{x}_0, \hat{C} H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \rangle,$$

portanto

$$(4) \quad \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{ux} \\ S_{xu} & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_{\hat{A}} \hat{x}_0 \end{bmatrix} \right\rangle = -\|H_0\|_2^2.$$

Substituindo (2),(3) e (4) em  $\mathfrak{S}(Y)$ , e comparando com (1), tem-se que

$$\mathfrak{S}(Y) = \|Y\|_2^2 - \|H_1 Y\|_2^2 - 2\langle H_1 Y, H_0 \rangle - \|H_0\|_2^2 = \mathbf{j}(Y).$$

2ª Parte: Para completar a demonstração da Proposição 4.2.1, deve-se mostrar que

$(A_z, R_z)$  é estabilizável e  $H_z$  não tem autovalores no eixo imaginário. Do Apêndice 3.A (comentário do Lema 3.2.2) tem-se que  $(A_z, R_z)$  é estabilizável se e somente se

$(A_z^1, R_z^1)$  é estabilizável, onde

$$A_z^1 = A_{H_1} + B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1} \text{ e } R_z^1 = -B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} B_{H_1}^T$$

ou seja, se e somente se

$\left( A_{H_1} + B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1}, B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} B_{H_1}^T \right)$  é estabilizável, o que de fato

se verifica pois  $\left( A_{H_1} + B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1}, B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} B_{H_1}^T \right)$  é controlável

uma vez que  $(A_{H_1}, B_{H_1})$  é controlável e  $(I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1}$  é positiva definida.

Para demonstrar que  $H_z$  não tem autovalores no eixo imaginário, novamente do

Apêndice 3.A, mostra-se que isto é equivalente a  $H_z^1 = \begin{bmatrix} A_z^1 & R_z^1 \\ -Q_{z_{11}} & -(A_z^1)^T \end{bmatrix}$  não ter

autovalores no eixo imaginário, onde

$$-Q_{z_{11}} = C_{H_1}^T C_{H_1} + C_{H_1}^T D_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1}.$$

Note agora que

$$H_z^1 = \begin{bmatrix} A_{H_1} + B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1} & -B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} B_{H_1}^T \\ C_{H_1}^T C_{H_1} + C_{H_1}^T D_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1} & -(A_{H_1} + B_{H_1} (I - D_{H_1}^T D_{H_1})^{-1} D_{H_1}^T C_{H_1})^T \end{bmatrix}$$

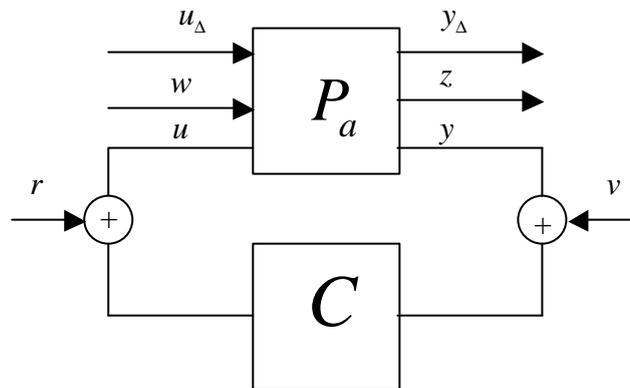
é o Hamiltoniano de uma realização de  $I - H_1 \tilde{H}_1$ , e segue da hipótese de que  $\|H_1\|_\infty < 1$

que  $(I - H_1 \tilde{H}_1)(j\mathbf{w}) > 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , e portanto  $H_z^1$  não tem autovalores no eixo

imaginário (Francis, (1987) pg 95).

## Apêndice 4-B: Parametrização de Youla para controladores estabilizantes.

Para deduzir as expressões de  $M_{\Delta\Delta}(K)$ ,  $M_{\Delta w}(K)$ ,  $M_{z\Delta}(K)$  e  $M_{zw}(K)$  em função do parâmetro de Youla  $K$  correspondente à estabilização do sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 2.6, considere a configuração de estabilidade nominal dada por



ou equivalentemente, denotando

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \end{bmatrix}, \bar{z} = \begin{bmatrix} y_\Delta \\ z \end{bmatrix}, \text{ e } P_a = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta} & P_{\Delta w} & P_{\Delta u} \\ P_{z\Delta} & P_{zw} & P_{zu} \\ P_{y\Delta} & P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\bar{z}\bar{d}} & P_{\bar{z}u} \\ P_{y\bar{d}} & P_{yu} \end{bmatrix}, \text{ tem-se o seguinte diagrama}$$

da figura 4.1:

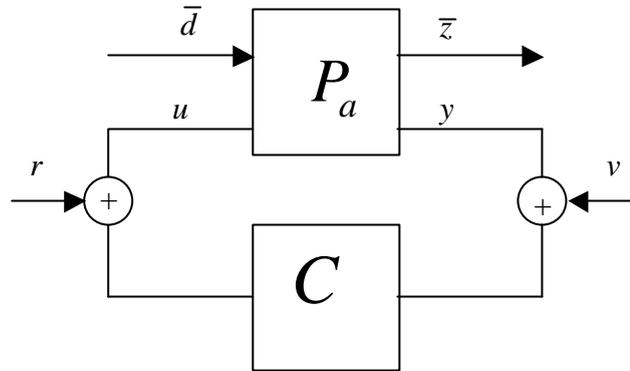


Figura 4.1-Configuração de estabilidade nominal.

A partir deste último diagrama, tem-se que

$$\bar{z} = \left\{ P_{\bar{z}\bar{d}} + P_{\bar{z}u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\bar{d}} \right\} \bar{d} = F_{\bar{z}\bar{d}} \bar{d} .$$

Por outro lado, comparando a expressão acima com a definição de

$$M = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta w} \\ M_{z\Delta} & M_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta} + P_{\Delta u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\Delta} & P_{\Delta w} + P_{\Delta u} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{yw} \\ P_{z\Delta} + P_{zu} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{y\Delta} & P_{zw} + P_{zu} (I - CP_{yu})^{-1} CP_{yw} \end{bmatrix}$$

conclue-se que  $F_{\bar{z}\bar{d}} = M$  .

Sejam então  $(N'_{ab}, D'_{ab}) \in M(RH_{\infty}) \times M(RH_{\infty})$  e  $(N^l_{ab}, D^l_{ab}) \in M(RH_{\infty}) \times M(RH_{\infty})$ ,

$\mathbf{a} \in \{\bar{z}, y\}$ ,  $\mathbf{b} \in \{\bar{d}, u\}$ , as fatorações coprimas a direita e a esquerda respectivamente

dos blocos de  $P = \begin{bmatrix} P_{\bar{z}\bar{d}} & P_{\bar{z}u} \\ P_{y\bar{d}} & P_{yu} \end{bmatrix}$ , isto é  $P_{ab} = (N_{ab}^r)(D_{ab}^r)^{-1} = (D_{ab}^l)^{-1}(N_{ab}^l)$ . Utilizando-

se a parametrização de Youla para todos os controladores estabilizantes de  $P_a$  (Correa, 1992), tem-se que o conjunto de funções de transferências de  $\bar{d}$  para  $\bar{z}$ ,  $F_{\bar{z}\bar{d}}$ , é parametrizado por  $K \in M(RH_\infty)$  da seguinte forma

$$(5) \quad F_{\bar{z}\bar{d}} = \bar{H} + N_u K N_y$$

onde

$$(6) \quad \bar{H} = P_{\bar{z}\bar{d}} - P_{\bar{z}u} D_{yu}^r X_0 P_{y\bar{d}},$$

$(X_0, Y_0)$  é uma solução particular de  $X N_{yu}^r + Y D_{yu}^r = I$ ;

$$(7) \quad N_u = N_{\bar{z}u}^r M_u \text{ e } N_y = M_y D_{y\bar{d}}^l$$

onde  $M_u \in M(RH_\infty)$  e  $M_y \in M(RH_\infty)$  são dados pelas condições necessárias de estabilizabilidade de  $P$ , quais sejam

$$(8) \quad D_{yu}^r = D_{\bar{z}u}^r M_u \text{ e } D_{yu}^l = M_y D_{y\bar{d}}^l.$$

Finalmente,  $K \in M(RH_\infty)$  é tal que  $[K N_{yu}^r + Y_0](\infty)$  é não-singular.

Para fazer a exata correspondência entre os termos de  $M$  e  $F_{\bar{z}\bar{d}}$ , particiona-se

$F_{\bar{z}\bar{d}}$  em quatro blocos da seguinte forma:

$$F_{\bar{z}\bar{d}} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{u1} \\ N_{u2} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} N_{y1} & N_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} + N_{u1}KN_{y1} & \bar{H}_{12} + N_{u1}KN_{y2} \\ \bar{H}_{21} + N_{u2}KNN_{y1} & \bar{H}_{22} + N_{u2}KN_{y2} \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(K) & M_{\Delta w}(K) \\ M_{z\Delta}(K) & M_{zw}(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} + N_{u1}KN_{y1} & \bar{H}_{12} + N_{u1}KN_{y2} \\ \bar{H}_{21} + N_{u2}KNN_{y1} & \bar{H}_{22} + N_{u2}KN_{y2} \end{bmatrix}$$

e assim, comparando esta última igualdade com as fórmulas da expressão (4.2.3) da seção 4.2, conclue-se que

$$T_{\Delta\Delta}^0 = \bar{H}_{11}; T_{\Delta w}^0 = \bar{H}_{12}; T_{z\Delta}^0 = \bar{H}_{21}; T_{zw}^0 = \bar{H}_{22}; T_{\Delta\Delta}^1 = T_{\Delta w}^1 = N_{u1}; T_{\Delta\Delta}^2 = T_{z\Delta}^2 = N_{y1};$$

$$T_{z\Delta}^1 = T_{zw}^1 = N_{u2}; T_{\Delta w}^2 = T_{zw}^2 = N_{y2}.$$

## Apêndice 4-C: Demonstrações da seção 4.3

**1º Parte: Dedução de fórmula de perturbação em  $K$  para  $Q_{\bar{E}}(T, K)$ :**

Recorde-se da seção 4.2 e 4.3 que

$Q_\Theta(T; K) = \langle (\bar{\Theta}_1(K)T + \Theta_0(K)), J(\bar{\Theta}_1(K)T + \Theta_0(K)) \rangle$ , onde

$$\bar{\Theta}_1(K) = \begin{bmatrix} I \\ -\mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K) \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^0 - \mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1KT_{\Delta\Delta}^2 \\ T_{z\Delta}^0\mathbf{f}_{h_a}^{-1} + T_{z\Delta}^1KT_{z\Delta}^2\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_0(K) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w \\ M_{zw}(K)\mathbf{f}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^0 - \mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^1KT_{\Delta w}^2\mathbf{f}_w \\ T_{zw}^0\mathbf{f}_w + T_{zw}^1KT_{z\Delta}^2\mathbf{f}_w \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

Assim, escrevendo  $\bar{\Theta}_1(K) = L_{\Theta_1}(K) + C_{\Theta_1}$  e  $\Theta_0(K) = L_{\Theta_0}(K) + C_{\Theta_0}$ , onde  $L_{\Theta_1}(K)$  e

$L_{\Theta_0}(K)$  são lineares em  $K$ , e  $C_{\Theta_1}$  e  $C_{\Theta_0}$  são constantes, tem-se que

$$\bar{\Theta}_1(K + \Delta K) = \bar{\Theta}_1(K) + L_{\Theta_1}(\Delta K),$$

$$\Theta_0(K + \Delta K) = \Theta_0(K) + L_{\Theta_0}(\Delta K)$$

de modo que  $Q_\Theta(T; K + \Delta K)$  pode ser escrito como

$$(9) \quad Q_\Theta(T; K + \Delta K) = Q_\Theta(T; K) + 2\langle \mathfrak{S}_1(T; K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle \\ + \langle \mathfrak{S}_2(T; \Delta K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle$$

onde

$$\mathfrak{S}_1(T;K) = \bar{\Theta}_1(K)T + \Theta_0(K) \text{ e } \mathfrak{S}_2(T;\Delta K) = L_{\Theta_1}(\Delta K)T + L_{\Theta_0}(K)$$

Por outro lado, escrevendo para  $T \in RH_2^p$ ,  $T = T_*(K) + \Delta T$ , com  $\Delta T \in RH_2^p$  e  $T_*(K) = \operatorname{argmin} Q_{\Theta}(T;K)$ , os três termos do lado direito de (9) serão escritos em função de  $T_*(K)$  e  $\Delta T$

Com relação ao primeiro termo do lado direito de (9), note que

$$Q_{\Theta}(T;K) = Q_{\Theta}(T_*(K) + \Delta T;K) = Q_{\Theta}(T_*(K);K) + 2\langle \bar{\Theta}_1(K)T_*(K) + \Theta_0(K), J\bar{\Theta}_1(K)\Delta T \rangle + \langle \bar{\Theta}_1(K)\Delta T, J\bar{\Theta}_1(K)\Delta T \rangle;$$

Da condição de otimalidade, segue-se que

$$2\langle \bar{\Theta}_1(K)T_*(K) + \Theta_0(K), J\bar{\Theta}_1(K)\Delta T \rangle = 0$$

de modo que

$$(10) \quad Q_{\Theta}(T;K) = Q_{\Theta}(T_*(K);K) + Q_0(\Delta T)$$

onde

$$Q_0(\Delta T) \triangleq \langle \bar{\Theta}_1(K)\Delta T, J\bar{\Theta}_1(K)\Delta T \rangle$$

Com relação ao segundo termo do lado direito de (9), tem-se que

$$2\langle \mathfrak{S}_1(T; K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle = 2\langle \mathfrak{S}_1(T_*(K) + \Delta T; K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K) + \Delta T; \Delta K) \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$(11) \quad 2\langle \mathfrak{S}_1(T; K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle = L_a(\Delta K) + L_1(\Delta T; \Delta K) + L_2(\Delta T; \Delta K) + Q_1(\Delta T; \Delta K)$$

onde

$$\begin{cases} L_a(\Delta K) = 2\langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle \\ L_1(\Delta T; \Delta K) = 2\langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), JL_{\Theta_1}(\Delta K)\Delta T \rangle \\ L_2(\Delta T; \Delta K) = 2\langle \bar{\Theta}_1(K)\Delta T, J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle \\ Q_1(\Delta T; \Delta K) = 2\langle \bar{\Theta}_1(K)\Delta T, JL_{\Theta_1}(\Delta K)\Delta T \rangle \end{cases}$$

Finalmente, com relação ao último termo do lado direito de (9), tem-se que

$$\langle \mathfrak{S}_2(T; \Delta K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle = \langle \mathfrak{S}_2(T_*(K) + \Delta T; \Delta K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K) + \Delta T; \Delta K) \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$(12) \quad \langle \mathfrak{S}_2(T; \Delta K), J\mathfrak{S}_2(T; \Delta K) \rangle = Q_a(\Delta K) + LQ(\Delta T; \Delta K) + Q_a(\Delta T; \Delta K)$$

onde

$$\begin{cases} Q_a(\Delta K) = \langle \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle \\ LQ(\Delta T; \Delta K) = 2\langle \mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K), JL_{\Theta_1}(\Delta K)\Delta T \rangle \\ Q_2(\Delta T; \Delta K) = \langle L_{\Theta_1}(\Delta K)\Delta T, JL_{\Theta_1}(\Delta K)\Delta T \rangle \end{cases}$$

Substituindo (10), (11) e (12) em (9), tem-se que

$$Q_{\Theta}(T; K + \Delta K) = Q_{\Theta}(T_*(K); K) + Q_0(\Delta T) + L_a(\Delta K) + L_1(\Delta T; \Delta K) + \\ L_2(\Delta T; \Delta K) + Q_1(\Delta T; \Delta K) + Q_a(\Delta K) + LQ(\Delta T; \Delta K) + Q_2(\Delta T; \Delta K)$$

Conforme apresentado na seção 4.3.

## 2ª Parte: Demonstração da Proposição 4.3.1

Inicialmente, recorde-se que

$$L_*(K) = -\inf \{ Q_{\Theta}(T; K) : T \in RH_2^p \}$$

Assim, tomando  $\mathbf{a} > 0$ , tem-se que

$$L_*(K + \mathbf{a}\Delta K) - L_*(K) = -\inf \{ Q_{\Theta}(T; K + \mathbf{a}\Delta K) : T \in RH_2^p \} + \inf \{ Q_{\Theta}(T; K) : T \in RH_2^p \}$$

Escrevendo  $T = T_*(K) + \Delta T$ , tem-se que

$$(13) L_*(K + \mathbf{a}\Delta K) - L_*(K) = -\inf \{ \Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) : \Delta T \in RH_2^p \} - Q_a(\mathbf{a}\Delta K) - L_a(\mathbf{a}\Delta K)$$

onde

$$\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) = Q_0(\Delta T) + Q_1(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + Q_2(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + L_1(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + L_2(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) \\ + L_3(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + LQ(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K),$$

Agora, note-se que a parte quadrática de  $\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K)$  em  $\Delta T$  pode ser escrita como

$$Q_0(\Delta T) + Q_1(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + Q_2(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) = \langle M_0(K)\Delta T, M_0(K)\Delta T \rangle \\ + \langle M_1(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T, M_2(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T \rangle$$

onde  $M_0(K) \in M(RH_\infty)$  é fator espectral de  $\bar{\Theta}_1(K)J\bar{\Theta}_1(K) = M_0(K)M_0(K)$ , e  $M_1(\mathbf{a}\Delta K)$  e  $M_2(\mathbf{a}\Delta K)$  são dadas por

$$M_1(\mathbf{a}\Delta K) = \begin{bmatrix} 2\bar{\Theta}_1(K) \\ L_{\Theta_1}(\mathbf{a}\Delta K) \end{bmatrix}, M_2(\mathbf{a}\Delta K) = \begin{bmatrix} JL_{\Theta_1}(\mathbf{a}\Delta K) \\ JL_{\Theta_1}(\mathbf{a}\Delta K) \end{bmatrix}.$$

Analogamente, tem-se que a parte linear de  $\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K)$  em  $\Delta T$  pode ser escrita como

$$L_1(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + L_2(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) + LQ(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) = 2\langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle,$$

onde  $\Xi(\mathbf{a}\Delta K) \in M(RL_2)$  é dado por

$$\Xi(\mathbf{a}\Delta K) = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{\Theta_1}(\mathbf{a}\Delta K)J\mathfrak{S}_1(T_*(K); K) \\ \bar{\Theta}_1(K)J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \mathbf{a}\Delta K) \\ \tilde{L}_{\Theta_1}(\mathbf{a}\Delta K)J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \mathbf{a}\Delta K) \end{bmatrix}$$

Desse modo, escreve-se  $\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K)$  como

$$\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) = \langle M_0(K)\Delta T, M_0(K)\Delta T \rangle + \langle M_1(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T, M_2(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T \rangle + 2\langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle$$

Segue-se então que

$$\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) \geq \langle M_0(K)\Delta T, M_0(K)\Delta T \rangle - \|M_1(\mathbf{a}\Delta K)\|_\infty \|M_2(\mathbf{a}\Delta K)\|_\infty \|\Delta T\|_2^2 + 2\langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle.$$

A seguir, tome  $\mathbf{a}_0 > 0$  tal que  $\forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$  tenha-se

$$\|M_1(\mathbf{a}\Delta K)\|_\infty \|M_2(\mathbf{a}\Delta K)\|_\infty \leq \left( \frac{\mathbf{l}_\infty(M_0^\sim(K)M_0(K))}{2} \right)$$

segue-se  $\forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$  que

$$\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) \geq \langle (M_0^\sim(K)M_0(K))\Delta T, \Delta T \rangle - \left\langle \left( \frac{\mathbf{l}_\infty(M_0^\sim(K)M_0(K))}{2} \right) \Delta T, \Delta T \right\rangle + 2\langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle.$$

Como

$$M_0^\sim(K)M_0(K) - \left( \frac{\mathbf{l}_\infty(M_0^\sim(K)M_0(K))}{2} \right) I \geq \frac{1}{2}M_0^\sim(K)M_0(K),$$

segue-se  $\forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$  que

$$\inf \{ \Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) : \Delta T \in RH_2^p \} \geq \inf \left\{ \left\langle \left( \frac{M_0^{\sim}(K)M_0(K)}{2} \right) \Delta T, \Delta T \right\rangle + 2 \langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle : \Delta T \in RH_2^p \right\}$$

e o valor ótimo do lado direito desta última desigualdade é dado por

$$-\left\| \left\{ (\mathbf{f}_{M_0}^{-1})^{\sim} \Xi(\mathbf{a}\Delta K) \right\}_+ \right\|_2^2, \text{ onde } \mathbf{f}_{M_0}^{-1} \text{ é fator espectral de}$$

$$\left( \frac{M_0^{\sim}(K)M_0(K)}{2} \right)^{-1} = (\mathbf{f}_{M_0}^{-1})^{\sim} \mathbf{f}_{M_0}^{-1}.$$

ou seja, mostrou-se que para  $\mathbf{a}_0 > 0$  apropriado, tem-se que

$$\inf \{ \Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) : \Delta T \in RH_2^p \} \geq -\left\| \left\{ (\mathbf{f}_{M_0}^{-1})^{\sim} \Xi(\mathbf{a}\Delta K) \right\}_+ \right\|_2^2$$

$\forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$ , e portanto

$$-\inf \{ \Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) : \Delta T \in RH_2^p \} - Q_a(\mathbf{a}\Delta K) - L_a(\mathbf{a}\Delta K) \leq \left\| \left\{ (\mathbf{f}_{M_0}^{-1})^{\sim} \Xi(\mathbf{a}\Delta K) \right\}_+ \right\|_2^2$$

$$-Q_a(\mathbf{a}\Delta K) - L_a(\mathbf{a}\Delta K) \quad \forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

Usando esta última desigualdade em (13), tem-se que

$$(14) \quad L_*(K + \mathbf{a}\Delta K) - L_*(K) \leq \left\| \left\{ (\mathbf{f}_{M_0}^{-1})^{\sim} \Xi(\mathbf{a}\Delta K) \right\}_+ \right\|_2^2 - Q_a(\mathbf{a}\Delta K) - L_a(\mathbf{a}\Delta K) \quad \forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

ou equivalentemente

$$(15) \quad \frac{L_*(K + \mathbf{a}\Delta K) - L_*(K)}{\mathbf{a}} \leq \mathbf{a} \left\| \left\{ (\mathbf{f}_{M_0}^{-1})^\sim \Xi(\Delta K) \right\} \right\|_2^2 - \mathbf{a} Q_a(\Delta K) - L_a(\Delta K) \quad \forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

(pois  $L_a(\cdot)$  é linear e  $Q_a(\cdot)$  é quadrático)

Por outro lado, considerando novamente a expressão

$$\Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) = \langle M_0(K)\Delta T, M_0(K)\Delta T \rangle + \langle M_1(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T, M_2(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T \rangle + 2\langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle$$

tem-se que

$$\langle M_1(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T, M_2(\mathbf{a}\Delta K)\Delta T \rangle \leq \langle \bar{I}_a \Delta T, \Delta T \rangle$$

onde

$$\bar{I}_a \triangleq \sup \left\{ \bar{I}_\infty \left[ M_2^\sim(\mathbf{a}\Delta K) M_1(\Delta K) \right] : \mathbf{a} \in [0, \mathbf{a}_0] \right\}$$

de modo que

$$(16) \quad \Psi(\Delta T; \mathbf{a}\Delta K) \leq \langle M_0(K)\Delta T, M_0(K)\Delta T \rangle + \langle \bar{I}_a \Delta T, \Delta T \rangle + 2\langle \Xi(\mathbf{a}\Delta K), \Delta T \rangle$$

$$\forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

De (15) e (13) obtém-se que

$$(17) \quad L_*(K + \mathbf{a}\Delta K) - L_*(K) \geq -Q_a(\mathbf{a}\Delta K) - L_a(\mathbf{a}\Delta K) - \langle M_0(K)\Delta T, M_0(K)\Delta T \rangle$$

$$-\langle \bar{I}_a \Delta T, \Delta T \rangle - 2 \langle \Xi(\mathbf{a} \Delta K), \Delta T \rangle \quad \forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

ou equivalentemente

$$(18) \quad \frac{L_*(K + \mathbf{a} \Delta K) - L_*(K)}{\mathbf{a}} \geq -\mathbf{a} Q_a(\Delta K) - L_a(\Delta K) - 2\mathbf{a} \langle \Xi(\Delta K), \Delta T \rangle$$

$$\forall \mathbf{a} \in (0, \mathbf{a}_0]$$

Das desigualdades (18) e (15) tem-se que

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0^+} \frac{L_*(K + \mathbf{a} \Delta K) - L_*(K)}{\mathbf{a}} = -L_a(\Delta K) \quad \square$$

### 3ª Parte : Apresentação das direções descendentes

Foi visto na seção 4.3, que para apresentar uma direção descendente para  $L_*(K)$ , deve-se obter  $\Delta K \in M(RH_\infty)$  tal que

$$L_a(\Delta K) = 2 \langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \mathfrak{S}_1(T_*(K); K), J\mathfrak{S}_2(T_*(K); \Delta K) \rangle > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \bar{\Theta}_1(K) T_*(K) + \Theta_0(K), JL_{\Theta_1}(\Delta K) T_*(K) + JL_{\Theta_0}(\Delta K) \rangle > 0$$

onde  $L_{\Theta_1}(\cdot)$  e  $L_{\Theta_0}(\cdot)$  são as partes lineares de  $\bar{\Theta}_1(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  definidos na seção 4.2.

Como

$$\bar{\Theta}_1(\Delta K) = \begin{bmatrix} I \\ -\mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(\Delta K) \\ M_{z\Delta}(\Delta K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^0 - \mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1\Delta KT_{\Delta\Delta}^2 \\ T_{z\Delta}^0\mathbf{f}_{h_a}^{-1} + T_{z\Delta}^1\Delta KT_{z\Delta}^2\mathbf{f}_{h_a}^{-1} \end{bmatrix}, \text{ e}$$

$$\Theta_0(\Delta K) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(\Delta K)\mathbf{f}_w \\ M_{zw}(\Delta K)\mathbf{f}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^0 - \mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^1\Delta KT_{\Delta w}^2\mathbf{f}_w \\ T_{zw}^0\mathbf{f}_w + T_{zw}^1\Delta KT_{z\Delta}^2\mathbf{f}_w \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$L_{\Theta_1}(\Delta K) = \begin{bmatrix} 0 \\ [-\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1]\Delta K[T_{\Delta\Delta}^2] \\ [T_{z\Delta}^1]\Delta K[T_{z\Delta}^2\mathbf{f}_{h_a}^{-1}] \end{bmatrix} \text{ e } L_{\Theta_0}(\Delta K) = \begin{bmatrix} 0 \\ [-\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^1]\Delta K[T_{\Delta w}^2\mathbf{f}_w] \\ [T_{zw}^1]\Delta K[T_{z\Delta}^2\mathbf{f}_w] \end{bmatrix}$$

$$\text{e como } J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \text{ tem-se que}$$

$$\langle \bar{\Theta}_1(K)T_*(K) + \Theta_0(K), JL_{\Theta_1}(\Delta K)T_*(K) + JL_{\Theta_0}(\Delta K) \rangle =$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} T_*(K) \\ -\mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K)T_*(K) - \mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w \\ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K) + M_{zw}(K)\mathbf{f}_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1]\Delta K[T_{\Delta\Delta}^2T_*(K)] + [\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^1]\Delta K[T_{\Delta w}^2\mathbf{f}_w] \\ -([\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{z\Delta}^1]\Delta K[T_{z\Delta}^2\mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K)] + [T_{zw}^1]\Delta K[T_{z\Delta}^2\mathbf{f}_w]) \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
& -\left\langle \left\{ \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K)T_*(K) + \mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w \right\}, \left\{ [\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1]\Delta K [T_{\Delta\Delta}^2 T_*(K)] + [\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^1]\Delta K [T_{\Delta w}^2 \mathbf{f}_w] \right\} \right\rangle \\
& -\left\langle \left\{ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K) + M_{zw}(K)\mathbf{f}_w \right\}, \left\{ [T_{z\Delta}^1]\Delta K [T_{z\Delta}^2 \mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K)] + [T_{zw}^1]\Delta K [T_{zw}^2 \mathbf{f}_w] \right\} \right\rangle = \\
& = -\left\langle g_0 X(T_*(K), K), g_0 \Delta K \right\rangle, \text{ onde}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(T_*(K), K) &= g_0^{-1} (g_0^{-1})^{-1} \left[ [\mathbf{g}T_{\Delta\Delta}^1]^{-1} \left\{ \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K)T_*(K) + \mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w \right\} [T_{\Delta\Delta}^2 T_*(K)]^{-1} \right. \\
& \quad + [\mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}T_{\Delta w}^1]^{-1} \left\{ \mathbf{g}M_{\Delta\Delta}(K)T_*(K) + \mathbf{g}\mathbf{f}_{h_a}M_{\Delta w}(K)\mathbf{f}_w \right\} [T_{\Delta w}^2 \mathbf{f}_w]^{-1} \\
& \quad + [T_{z\Delta}^1]^{-1} \left\{ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K) + M_{zw}(K)\mathbf{f}_w \right\} [T_{z\Delta}^2 \mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K)]^{-1} \\
& \quad \left. + [T_{zw}^1]^{-1} \left\{ M_{z\Delta}(K)\mathbf{f}_{h_a}^{-1}T_*(K) + M_{zw}(K)\mathbf{f}_w \right\} [T_{zw}^2 \mathbf{f}_w]^{-1} \right]
\end{aligned}$$

Assim,  $\Delta K$  é direção descendente para  $L_*(K)$  se e somente se

$$-\left\langle \left\{ g_0 X(T_*(K), K) \right\}_+, g_0 \Delta K \right\rangle > 0 \text{ e para isto, basta tomar } \Delta K = -g_0 X(T_*(K), K).$$

## Apêndice 4-D: Demonstração do Lema 4.5.1.

Inicialmente escreva  $E_a [Y_k, \bar{\Lambda}_k, K] = E_1 + E_2 + E_3$ , onde

$$E_1 = \begin{bmatrix} E_{\Lambda k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}^{-2} E_{\Lambda k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} I \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Yk} (sI - \bar{A}_Y)^{-1} \bar{B}_Y + D_{Yk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j M_1(\bar{K}_j) + M_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que  $E_1$  não depende de  $\mathbf{a}$  e  $(C_{Yk}, D_{Yk})$ . Assim, denote por  $(A_{E_1}, B_{E_1}, C_{E_1}, D_{E_1})$  uma realização mínima de  $E_1$ .

A seguir, note que uma realização  $(A_{E_2}, B_{E_2}, C_{E_2}(C_{Yk}), D_{E_2}(D_{Yk}))$ , de  $E_2$  é dada por

$$A_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B}_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{E_2}(C_{Yk}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{Yk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{E_2}(D_{Yk}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{Yk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, com relação a  $E_3$ , tem-se que uma realização  $(A_M, B_M, C_M(\mathbf{a}), D_M(\mathbf{a}))$  de

$\sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j M_1(\bar{K}_j) + M_0$  é dada por

$$A_M = \text{diag}\{A_{M_1}(\bar{K}_1), \dots, A_{M_1}(\bar{K}_n)\}, \quad B_M = \begin{bmatrix} B_{M_1}(\bar{K}_1) \\ \vdots \\ B_{M_1}(\bar{K}_n) \\ B_{M_0} \end{bmatrix},$$

$$C_M(\mathbf{a}) = [\mathbf{a}_1 C_{M_1}(\bar{K}_1) : \dots : \mathbf{a}_n C_{M_1}(\bar{K}_n) : C_{M_0}],$$

$$D_M(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_1 D_{M_1}(\bar{K}_1) + \dots + \mathbf{a}_n D_{M_1}(\bar{K}_n) + D_{M_0}.$$

onde, para  $j = 1, \dots, n$ ,  $(A_{M_1}(\bar{K}_j), B_{M_1}(\bar{K}_j), C_{M_1}(\bar{K}_j), D_{M_1}(\bar{K}_j))$  denota uma realização

mínima de  $M_1(\bar{K}_j)$  e  $(A_{M_0}, B_{M_0}, C_{M_0}, D_{M_0})$  denota uma realização mínima de  $M_0$ . Note

que  $C_M(\mathbf{a})$  e  $D_M(\mathbf{a})$  são da fato funções afins de  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]^T$ .

Assim, uma realização  $(A_{E_3}, B_{E_3}, C_{E_3}(\mathbf{a}), D_{E_3}(\mathbf{a}))$  de  $E_3$  é dada por

$$A_{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_M & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{E_3} = \begin{bmatrix} B_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_M(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \text{ e } D_{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_M(\mathbf{a}) & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que uma realização  $(A_{E_k}, B_{E_k}, C_{E_k}(\mathbf{a}, C_{Y_k}, D_{Y_k}), D_{E_k}(\mathbf{a}, C_{Y_k}, D_{Y_k}))$  de

$E_a(Y_k, \bar{\Lambda}_k, K)$  com  $A_{E_k}$  Hurwitz e  $C_{E_k}(\mathbf{a}, C_{Y_k}, D_{Y_k})$  e  $D_{E_k}(\mathbf{a}, C_{Y_k}, D_{Y_k})$  são funções

afins de  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  e  $(C_{Y_k}, D_{Y_k})$  é dada por

$$A_{Ek} = \text{diag}\{A_{E_1}, A_{E_2}, A_{E_3}\}, B_{Ek} = \begin{bmatrix} B_{E_1} \\ B_{E_2} \\ B_{E_3} \end{bmatrix}, C_{Ek} = [C_{E_1} : C_{E_2}(C_{Yk}) : C_{E_3}(\mathbf{a})]$$

$$D_{Ek}(\mathbf{a}, \mathbf{b}_k) = D_{E_1} + D_{E_2}(D_{Yk}) + D_{E_3}(\mathbf{a}).$$

A demonstração se encerra observando-se que se  $A_{Ek}$  e  $B_{Ek}$  definidos acima são tais que  $(A_{Ek}, B_{Ek})$  não é controlável, é sempre possível através de uma transformação de similaridade seguido de truncamento, obter

$$(\bar{A}_{Ek}, \bar{B}_{Ek}, \bar{C}_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}), D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}))$$

com

$$\bar{A}_{Ek} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{B}_{Ek} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) = C_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk})T_0^{-1},$$

tal que

$(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$  é controlável e

$$E_a(Y_k, \bar{A}_k, K)(s) = \bar{C}_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk})(sI - \bar{A}_{11})^{-1} \bar{B}_1 + D_{Ek}(\mathbf{a}, C_{Yk}, D_{Yk}) \quad \square$$

# CAPÍTULO 5

## Filtragem robusta

### 5.1-Introdução

Neste capítulo, é examinado o problema de análise de desempenho robusto e síntese em sistemas em malha aberta, referentes a problemas de estimação de sinais. O objetivo principal é considerar incertezas não-paramétricas nas densidades espectrais do sinal e do ruído e mostrar que as mesmas técnicas utilizadas neste trabalho para Controle Robusto se aplicam aos problemas de análise de desempenho robusto de um dado filtro e de síntese de filtro para bom desempenho.

Para problemas de estimação escalar (isto é, quando o sinal e ruído assumem valores reais) encontram-se definidas em Kassam & Poor (1985) algumas classes convexas de densidades espectrais para as quais o problema de filtragem robusta é resolvido através da maximização de um funcional côncavo definido sobre essas

classes, e da determinação do filtro de Wiener correspondente ao par de espectros maximizantes (mais detalhes também podem ser encontrados em Poor, 1984).

Para problemas de estimação de sinais vetoriais, Chen & Kassam (1984) e Darragh & Looze (1984) consideram classes específicas de modo a tornar possível estabelecer uma equivalência entre o caso vetorial e o escalar.

Em uma outra vertente, uma descrição estocástica de incertezas é considerada em Sternad et al (1995), onde os erros de modelagem são parametrizados por polinômios cujos coeficientes são variáveis aleatórias com média nula e covariâncias conhecidas.

Neste trabalho, será considerado o problema de filtragem robusta quadrática robusta para incertezas caracterizadas por conjuntos de fatores espectrais das densidades espectrais de potência do sinal e do ruído de medida.

O capítulo 5 está organizado da seguinte forma:

Na seção 5.2 apresenta-se uma formulação para o problema de filtragem robusta. Na seção 5.3, consideram-se classes de incertezas para os fatores espectrais das densidades espectrais de potência do sinal e do ruído caracterizadas por “bolas”  $H_2$  – ponderadas, e é estudado o problema de análise de desempenho robusto de um dado filtro e síntese de filtro para bom desempenho com relação as classes de incertezas consideradas (o principal resultado é expresso pela **Proposição 5.3.3**).

Na seção 5.4, consideram-se classes de incertezas para os fatores espectrais das densidades espectrais de potência do sinal e do ruído caracterizadas por “bolas”  $H_\infty$  – ponderadas, e, novamente, são estudados os problemas correspondentes de análise de desempenho e síntese de filtros robustos (o principal resultado é expresso pela **Proposição 5.4.3**).

Conclusões do capítulo são apresentadas na seção 5.5.

## 5.2-Formulação do problema

Considere o sistema da figura 5.1 no  $s(t)$  é o sinal ( $m$ -dimensional) original,  $n(t)$  e  $d(t)$  é uma versão linearmente filtrada de  $s(t)$ . O problema de filtragem aqui estudado corresponde ao objetivo de obter uma estimativa  $\hat{d}(t)$  de  $d(t)$  por meio de um  $H$  linear, invariante no tempo e estável.

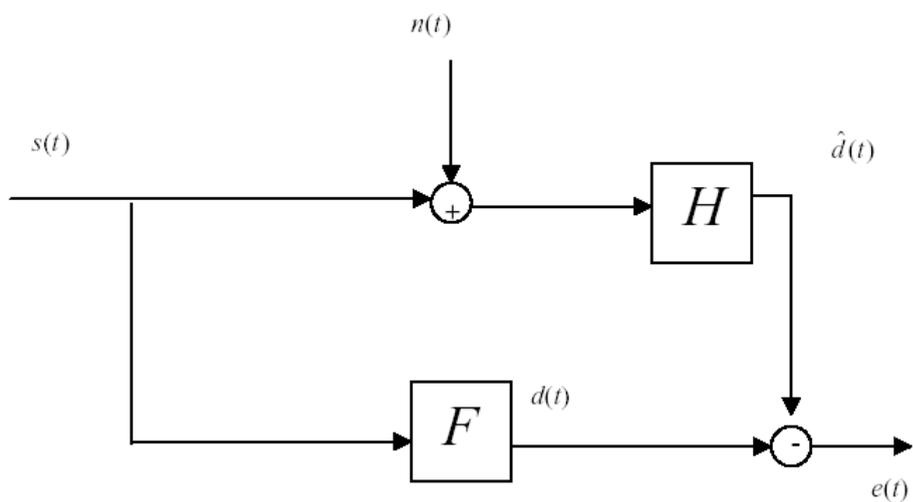


Figura 5.1-Modelo para problema de estimação

No que se segue, será assumido que  $s(t)$  e  $n(t)$  são processos  $m$ -dimensionais estocásticos não-correlacionados, de média zero e estacionários em sentido amplo, e o sistema  $F$  é linear, estável e invariante no tempo.

Por um leve abuso de linguagem, serão denotados por  $F$  e  $H$  tanto os sistemas como as correspondentes funções de transferência desses sistemas,  $F \in RH_{\infty}^{m \times m}$  e  $H \in RH_{\infty}^{m \times m}$ .

Nessas condições, denotando por  $e(t) = d(t) - \hat{d}(t)$  o erro da estimativa, o critério de performance do filtro  $H$  para um dado par de densidades espectrais  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_n$  será dado por

$$(5.2.1) \quad E\{e(t)^T e(t)\} = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}\{(F-H)(j\mathbf{w})\Gamma_s(j\mathbf{w})(F-H)(j\mathbf{w})^*\} d\mathbf{w} \\ + (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}\{H(j\mathbf{w})\Gamma_n(j\mathbf{w})H(j\mathbf{w})^*\} d\mathbf{w}$$

onde  $E\{\cdot\}$  é a esperança matemática,  $F(j\mathbf{w})$  e  $H(j\mathbf{w})$  denotam os valores em cada frequência das respectivas funções de transferência dos sistemas envolvidos no modelo da figura 5.1, e  $\Gamma_s(j\mathbf{w})$  e  $\Gamma_n(j\mathbf{w})$  são respectivamente as densidades espectrais do sinal e do ruído. Note que,  $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}: \Gamma_s(j\mathbf{w})^* = \Gamma_s(j\mathbf{w}) > 0$  e  $\Gamma_n(j\mathbf{w})^* = \Gamma_n(j\mathbf{w}) > 0$ , e

$$\text{que } E\{s(t)^T s(t)\} = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}\Gamma_s(j\mathbf{w}) d\mathbf{w} \text{ e } E\{n(t)^T n(t)\} = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}\Gamma_n(j\mathbf{w}) d\mathbf{w}.$$

No que se segue, será assumida a hipótese de que  $\Gamma_s \in RL_2^{m \times m}$  e  $\Gamma_n \in RL_2^{m \times m}$ .

O critério de performance dado pela expressão (5.2.1) é conhecido como média quadrática do erro, e será denotado aqui por  $\mathbf{h}(H, \Gamma_s, \Gamma_n) = E\{e(t)^T e(t)\}$ . Quando se assume que  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_n$  são elementos de classes de incertezas  $S_{\Gamma}$  e  $N_{\Gamma}$  dadas e que  $H$

deverá ser buscado em uma dada classe  $S_H \in RH_\infty^{m \times m}$ , os problemas de análise de desempenho robusto e síntese para desempenho robusto são respectivamente formulados por

$$(5.2.2) \text{ calcular } \mathbf{h}_{wc}(H) = \sup\{\mathbf{h}(H, \Gamma_s, \Gamma_n) : \Gamma_s \in S_\Gamma, \Gamma_n \in N_\Gamma\};$$

e

$$(5.2.3) \quad \min_{H \in S_H} \mathbf{h}_{wc}(H)$$

Na próxima seção, será feita a caracterização de incertezas por “bolas”  $H_2$ -ponderadas definidas para os fatores espectrais das densidades de potência espectral do sinal  $s(t)$  e do ruído  $n(t)$ .

## **5.3-Incertezas definidas por “bolas” $H_2$ -ponderadas**

Como foi mencionado anteriormente, o objetivo principal deste capítulo é aplicar ao problema de filtragem robusta as técnicas e resultados utilizados para os correspondentes problemas de análise de desempenho de controlador e síntese de controlador para bom desempenho.

Neste sentido, para se obter um limitante superior para o “pior-caso” de desempenho  $H_2$ -robusto de um dado filtro  $H$ , isto é  $\mathbf{h}_{wc}(H)$ , faz-se relaxação lagrangeana (assim como na seção 2.4) obtendo-se assim, um limitante superior com base em um problema de otimização convexa, qual seja, a minimização do funcional dual com relação aos multiplicadores. No caso de incertezas definidas por “bolas”  $H_2$ -ponderadas, os multiplicadores em questão são caracterizados por números reais positivos (multiplicadores constantes), de modo que a minimização do funcional dual sobre o conjunto de multiplicadores considerados já consiste em um problema de otimização em espaços de dimensão finita.

Sendo assim, ao se caracterizar o funcional dual por meio do valor ótimo de um problema LQR, e conseqüentemente (satisfeitas as devidas condições) como o valor ótimo de um problema de otimização linear com restrição LMI, a minimização do funcional dual sobre o conjunto de multiplicadores considerados recai diretamente em um problema de otimização em espaço euclidiano com restrição LMI.

Diferentemente do que ocorre na relaxação lagrangeana aplicada à problemas de controle robusto, aqui o funcional dual é convexo com relação aos multiplicadores e filtro simultaneamente, de modo que o procedimento de síntese de filtro para bom desempenho  $H_2$ -robusto em presença de incertezas caracterizadas por “bolas”  $H_2$ -ponderadas pode ser resolvido por meio de um problema de um problema de otimização de um funcional linear com restrição LMI correspondente a minimização do funcional dual sobre o conjunto dos multiplicadores e sobre o conjunto dos filtros considerados simultaneamente.

Antes de definir explicitamente as classes de incertezas sobre os fatores espectrais das densidades espectrais de potências, note-se que, escrevendo  $\Gamma_s = \mathbf{f}_s \mathbf{f}_s^T$  e  $\Gamma_n = \mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T$ , o critério definido em (5.2.1) pode ser escrito em função de  $\mathbf{f}_s$  e  $\mathbf{f}_n$  como:

$$(5.3.1) \quad \mathbf{h}(H, \mathbf{f}_s, \mathbf{f}_n) = \langle (F - H)\mathbf{f}_s, (F - H)\mathbf{f}_s \rangle + \langle H\mathbf{f}_n, H\mathbf{f}_n \rangle$$

A seguir, são definidas as classes de incertezas espectrais através de “bolas”

$H_2$  – ponderadas da seguinte forma:

$$S_{\mathbf{f}_s}^2 = \left\{ \mathbf{f}_s \in RH_2^{m \times m} : \mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s ; \left\| W_s \Delta \mathbf{f}_s \right\|_2^2 \leq \mathbf{d}_s^2 \right\}$$

e

$$S_{\mathbf{f}_n}^2 = \left\{ \mathbf{f}_n \in RH_2^{m \times m} : \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n ; \left\| W_n \Delta \mathbf{f}_n \right\|_2^2 \leq \mathbf{d}_n^2 \right\},$$

onde  $\mathbf{f}_{s_0}$  e  $\mathbf{f}_{n_0}$  são fixos (modelos nominais) e  $W_s \in RH_\infty^{m \times m}$  e  $W_n \in RH_\infty^{m \times m}$  tais que

$W_s^{-1} \in RH_\infty^{m \times m}$  e  $W_n^{-1} \in RH_\infty^{m \times m}$  são os fatores de ponderação.

Considerando-se então  $\mathbf{f}_s$  e  $\mathbf{f}_n$  elementos de  $S_{\mathbf{f}_s}^2$  e  $S_{\mathbf{f}_n}^2$ , a expressão (5.3.1) pode então ser escrita como

$$\mathbf{h}(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n) = \langle (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s), (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s) \rangle + \langle H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n), H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n) \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{h}(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n) = \langle (F - H)\Delta \mathbf{f}_s, (F - H)\Delta \mathbf{f}_s \rangle + 2\langle (F - H)\mathbf{f}_{s_0}, (F - H)\Delta \mathbf{f}_s \rangle +$$

$$\langle H\Delta \mathbf{f}_n, H\Delta \mathbf{f}_n \rangle + 2\langle H\mathbf{f}_{n_0}, H\Delta \mathbf{f}_n \rangle + \left\| H\mathbf{f}_{n_0} \right\|_2^2 + \left\| (F - H)\mathbf{f}_{s_0} \right\|_2^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{h}(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n) = \langle (F - H)^\sim (F - H)\Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_s \rangle + \langle H^\sim H\Delta \mathbf{f}_n, \Delta \mathbf{f}_n \rangle +$$

$$2\left\{ \langle (F - H)^\sim (F - H)\mathbf{f}_{s_0}, \Delta \mathbf{f}_s \rangle + \langle H^\sim H\mathbf{f}_{n_0}, \Delta \mathbf{f}_n \rangle \right\} + \left\| (F - H)\mathbf{f}_{s_0} \right\|_2^2 + \left\| H\mathbf{f}_{n_0} \right\|_2^2,$$

onde, por um ligeiro abuso de notação continua-se a usar o símbolo  $\mathbf{h}$  para expressar a média do erro quadrático em função de  $(\Delta\mathbf{f}_s, \Delta\mathbf{f}_n)$ .

A seguir, denote as classes de perturbações consideradas por

$$S_{\Delta\mathbf{f}_s}^2 = \left\{ \Delta\mathbf{f}_s \in RH_2^{m \times m} : \|W_s \Delta\mathbf{f}_s\|_2^2 \leq \mathbf{d}_s^2 \right\} \text{ e}$$

$$S_{\Delta\mathbf{f}_n}^2 = \left\{ \Delta\mathbf{f}_n \in RH_2^{m \times m} : \|W_n \Delta\mathbf{f}_n\|_2^2 \leq \mathbf{d}_n^2 \right\}$$

Segue-se que o índice “pior-caso” de desempenho  $H_2$  – robusto para um dado filtro  $H$ , com relação as classes  $S_{\Delta\mathbf{f}}$  e  $N_{\Delta\mathbf{f}}$  é dado por

$$\mathbf{h}_{wc}(H) = \sup \left\{ \mathbf{h}(H, \Delta\mathbf{f}_s, \Delta\mathbf{f}_n) : \Delta\mathbf{f}_s \in S_{\Delta\mathbf{f}_s}^2, \Delta\mathbf{f}_n \in S_{\Delta\mathbf{f}_n}^2 \right\}.$$

A partir desse ponto, será usado um procedimento baseado em relaxação lagrangeana, similar ao usado na seção 2.4 para deduzir um limitante superior para o índice “pior-caso”  $H_2$  de um dado controlador estabilizante. Neste sentido, note-se que para todo  $\Delta\mathbf{f}_s \in S_{\Delta\mathbf{f}_s}^2$  e  $\Delta\mathbf{f}_n \in S_{\Delta\mathbf{f}_n}^2$ , tem-se as seguintes desigualdades :

$$\begin{aligned} \langle W_s \Delta\mathbf{f}_s, W_s \Delta\mathbf{f}_s \rangle &\leq \mathbf{d}_s^2 \Leftrightarrow \langle W_s \Delta\mathbf{f}_s, W_s \Delta\mathbf{f}_s \rangle - \mathbf{d}_s^2 \leq 0, \\ \langle W_n \Delta\mathbf{f}_n, W_n \Delta\mathbf{f}_n \rangle &\leq \mathbf{d}_n^2 \Leftrightarrow \langle W_n \Delta\mathbf{f}_n, W_n \Delta\mathbf{f}_n \rangle - \mathbf{d}_n^2 \leq 0, \end{aligned}$$

e o funcional Lagrangeano é definido por

$$L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) = \left\langle (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s), (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n), H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n) \right\rangle - \mathbf{I}_s \langle W_s \Delta \mathbf{f}_s, W_s \Delta \mathbf{f}_s \rangle - \mathbf{I}_n \langle W_n \Delta \mathbf{f}_n, W_n \Delta \mathbf{f}_n \rangle + \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 + \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2$$

$\Leftrightarrow$

$$-L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) = \left\{ \left\| \sqrt{\mathbf{I}_s} W_s \Delta \mathbf{f}_s \right\|_2^2 - \left\| (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s) \right\|_2^2 \right\}$$

$$+ \left\{ \left\| \sqrt{\mathbf{I}_n} W_n \Delta \mathbf{f}_n \right\|_2^2 - \left\| H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n) \right\|_2^2 \right\} - \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 - \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2$$

$\Leftrightarrow$

$$-L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) = \left\{ \left\langle \Theta_s^1 \Delta \mathbf{f}_s + \Theta_s^0, J(\Theta_s^1 \Delta \mathbf{f}_s + \Theta_s^0) \right\rangle \right\} + \left\{ \left\langle \Theta_n^1 \Delta \mathbf{f}_n + \Theta_n^0, J(\Theta_n^1 \Delta \mathbf{f}_n + \Theta_n^0) \right\rangle \right\}$$

$$- \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 - \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2,$$

onde

$$\Theta_s^1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{I}_s} W_s I \\ (F - H) \end{bmatrix}; \Theta_s^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ (F - H) \mathbf{f}_{s_0} \end{bmatrix}; \Theta_n^1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{I}_n} W_n I \\ H \end{bmatrix}; \Theta_n^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ H \mathbf{f}_{n_0} \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente (definindo  $\bar{T}_s = W_s \Delta \mathbf{f}_s \in RH_2^{m \times m}$ ,  $\bar{T}_n = W_n \Delta \mathbf{f}_n \in RH_2^{m \times m}$ ):

$$(5.3.2) \quad -L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) = \left\langle \bar{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0, J(\bar{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0) \right\rangle$$

$$+ \left\langle \bar{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0, J(\bar{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0) \right\rangle - \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 - \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2$$

onde

$$\bar{\Theta}_s^1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{I}_s} I \\ (F - H) W_s^{-1} \end{bmatrix}, \Theta_s^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ (F - H) \mathbf{f}_{s_0} \end{bmatrix}, \bar{\Theta}_n^1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{I}_n} I \\ H W_n^{-1} \end{bmatrix}, \Theta_n^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ H \mathbf{f}_{n_0} \end{bmatrix},$$

Note agora, que  $\bar{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0$  e  $\bar{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0$  da expressão (5.3.2) podem ser escritos como

$$\bar{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0 = \begin{bmatrix} \sqrt{I_s} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} (\check{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0) \text{ e } \bar{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0 = \begin{bmatrix} \sqrt{I_n} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} (\check{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0),$$

onde

$$\check{\Theta}_s^1 = \begin{bmatrix} I \\ (F - H)W_s^{-1} \end{bmatrix}; \check{\Theta}_n^1 = \begin{bmatrix} I \\ HW_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Assim, a expressão (5.3.2) pode ser escrita como

$$(5.3.3) \quad -L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, \mathbf{l}_s, \mathbf{l}_n) = \left\langle \check{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0, \check{J}_s (\check{\Theta}_s^1 \bar{T}_s + \Theta_s^0) \right\rangle \\ + \left\langle \check{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0, \check{J}_n (\check{\Theta}_n^1 \bar{T}_n + \Theta_n^0) \right\rangle - \mathbf{l}_s \mathbf{d}_s^2 - \mathbf{l}_n \mathbf{d}_n^2,$$

onde

$$\check{J}_s = \begin{bmatrix} I_s I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}; \check{J}_n = \begin{bmatrix} I_n I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Como as variáveis  $\bar{T}_s$  e  $\bar{T}_n$  são matrizes de funções, para utilizar os resultados da seção 4.2 que relacionam um funcional lagrangeano com um funcional de custo de um

problema LQR, a expressão (5.3.3) dever ser “separada” em tantos quanto forem as colunas de  $\bar{T}_s$  e  $\bar{T}_n$ , de modo que se tenha a seguinte expressão:

$$(5.3.4) \quad -L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) = \sum_{i=1}^m \left\langle \check{\Theta}_s^1 \bar{T}_s e_i + \Theta_s^0 e_i, \check{J}_s (\check{\Theta}_s^1 \bar{T}_s e_i + \Theta_s^0 e_i) \right\rangle \\ + \sum_{i=1}^m \left\langle \check{\Theta}_n^1 \bar{T}_n e_i + \Theta_n^0 e_i, \check{J}_n (\check{\Theta}_n^1 \bar{T}_n e_i + \Theta_n^0 e_i) \right\rangle - \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 - \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2;$$

onde  $e_i$  pertence a base canônica de  $\mathbb{R}^m$  para  $i = 1, \dots, m$ .

Segue da expressão (5.3.4), que o funcional dual pode ser escrito como

$$(5.3.5) \quad L_*(H, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) = - \left\{ \sum_{i=1}^m \mathbf{m}_i^s \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^m \mathbf{m}_i^n \right\} + \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 + \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2$$

onde, para  $i = 1, \dots, m$ , cada  $\mathbf{m}_i^s$  e  $\mathbf{m}_i^n$  são dados por

$$\mathbf{m}_i^s = \inf \left\{ \left\langle \check{\Theta}_s^1 T + \Theta_s^0 e_i, \check{J}_s (\check{\Theta}_s^1 T + \Theta_s^0 e_i) \right\rangle : T \in RH_2^m \right\}$$

$$\mathbf{m}_i^n = \inf \left\{ \left\langle \check{\Theta}_n^1 T + \Theta_n^0 e_i, \check{J}_n (\check{\Theta}_n^1 T + \Theta_n^0 e_i) \right\rangle : T \in RH_2^m \right\}$$

A seguir, assim como nos capítulos 3 e 4, mostra-se que determinar o funcional dual  $L_*(H, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n)$  para multiplicadores e filtros fixos, envolve essencialmente resolver problemas de otimização linear com restrições definidas por LMI's, uma vez que para

cada  $i=1,\dots,m$ ,  $\mathbf{m}^s$  e  $\mathbf{m}^n$  podem caracterizados por meio de valores ótimos de problemas de horizonte infinito LQR, os quais, com as devidas condições de existência, são as soluções dos problemas de otimização acima citados. Por sua vez, conforme visto na seção 4.2, as condições para que cada  $\mathbf{m}^s$  e  $\mathbf{m}^n$  sejam finitos são dadas por  $\|(F-H)W_s^{-1}\|_\infty < \sqrt{\mathbf{I}_s}$  e  $\|HW_n^{-1}\|_\infty < \sqrt{\mathbf{I}_n}$ . A partir desta caracterização do funcional dual, pode-se tanto considerar um problema de análise mantendo o filtro  $H$  fixo e fazendo a minimização de  $L_*(H, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n)$  com relação aos multiplicadores, como considerar um procedimento de síntese baseado na minimização de  $L_*(H, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n)$  sobre com relação aos multiplicadores e filtro simultaneamente.

A seguir, a Proposição 5.3.1 que associa a cada funcional quadrático  $\langle \check{\Theta}_s^1 T + \Theta_s^0 e_i, \check{J}_s (\check{\Theta}_s^1 T + \Theta_s^0 e_i) \rangle$  em  $RH_2^m$ , um funcional de custo de um problema L.Q.R. Um resultado similar vale para cada  $\langle \check{\Theta}_n^1 T + \Theta_n^0 e_i, \check{J}_n (\check{\Theta}_n^1 T + \Theta_n^0 e_i) \rangle$ .

**Proposição 5.3.1:** Considere o funcional quadrático definido em  $RH_2^m$  por

$$\mathbf{j}(Y) = \langle \check{\Theta}_s^1 Y + \Theta_s^0 e_i, \check{J}_s (\check{\Theta}_s^1 Y + \Theta_s^0 e_i) \rangle$$

onde

$$\check{\Theta}_s^1 = \begin{bmatrix} I \\ (F-H)W_s^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Theta_s^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ (F-H)\mathbf{f}_{s_0} \end{bmatrix}, \quad \check{J}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

$e_i$  pertence a base canônica de  $\mathbb{R}^m$ . Admita que  $\|(F-H)W_s^{-1}\|_\infty < \sqrt{\mathbf{I}_s}$  e sejam  $(A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0}, C_{s_0})$  realizações de  $(F-H)W_s^{-1}$  e  $(F-H)\mathbf{f}_{s_0}$  respectivamente, com  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0})$  controláveis, e  $A_{s_1}$  e  $A_{s_0}$  Hurwitz. Defina

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{s_1} & 0 \\ 0 & A_{s_2} \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} B_{s_1} \\ 0 \end{bmatrix}, x_{s_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{s_0} \end{bmatrix}, C_s = [C_{s_1} : C_{s_0}], S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xu} \\ S_{ux} & S_{uu} \end{bmatrix}, \text{ com}$$

$$S_{xx} = -C_s^T C_s, S_{xu} = -C_s^T D_{s_1}, S_{ux} = -D_{s_1}^T C_s, S_{uu} = I_s I - D_{s_1}^T D_{s_1}.$$

Então,  $\forall u \in (L_2[0, \infty))^m$  tal que  $Y(s)$  é a transformada de Laplace de  $u(t)$ , tem-se que

$$\mathbf{j}(Y) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

onde  $x(\cdot)$  satisfaz  $\dot{x}(t) = A_s x(t) + B_s u(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x(0) = x_{s_0} e_i$ ,  $A_s$  é Hurwitz,  $S = S^T$ ,

$S_{uu} > 0$ ,  $(A_z, R_z)$  é estabilizável e  $H_z = \begin{bmatrix} A_z & R_z \\ -Q_z & -A_z^T \end{bmatrix}$  não tem autovalores no eixo

imaginário, onde  $A_z = A_s - B_s S_{uu}^{-1} S_{ux}$ ,  $R_z = -B_s S_{uu}^{-1} B_s^T$ ,  $Q_z = S_{xx} - S_{xu} S_{uu}^{-1} S_{ux}$ .  $\nabla$

**Demonstração :** A demonstração é idêntica a demonstração da Proposição 4.2.1, utilizando-se a correspondência entre o funcional quadrático  $H_2$  e o funcional de custo LQR da mesma forma que na Proposição 4.2.1.  $\square$

Como mencionado anteriormente, um resultado análogo pode ser enunciado para cada  $\langle \check{\Theta}_n^1 T + \Theta_n^0 e_i, \check{J}_n(\check{\Theta}_n^1 T + \Theta_n^0 e_i) \rangle$ , trocando a condição  $\|(F-H)W_s^{-1}\|_{\infty} < \sqrt{I_s}$  por  $\|HW_n^{-1}\|_{\infty} < \sqrt{I_n}$ , e utilizando correspondências similares entre o funcional quadrático  $H_2$  e o funcional de custo LQR.

Utilizando o Lema 3.2.2 da seção 3.2, sob as hipóteses da Proposição 5.3 tem-se que cada  $\mathbf{m}^s$  (analogamente cada  $\mathbf{m}^l$ ) pode ser escrito por meio do valor ótimo de um problema de otimização linear com restrição L.M.I, qual seja:

$$\max_{P_{s_i}=P_{s_i}^T} e_i^T x_{s_0}^T P_{s_i} x_{s_0} e_i \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} A_s^T P_{s_i} + P_{s_i} A_s - C_s^T C_s & P_{s_i} B_s - C_s^T D_{s_1} \\ B_s^T P_{s_i} - D_{s_1}^T C_s & I_s I - D_{s_1}^T D_{s_1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Da mesma forma que na seção 4.2, utilizando-se uma mudança de variável, mostra-se que  $-\mathbf{m}^l$  é dado pelo valor ótimo de um problema de minimização convexa, e utiliza-se a fórmula do Complemento de Schur para escrever a desigualdade matricial acima em uma forma equivalente, sem termos quadráticos no filtro (que são dados por  $C_s^T C_s$ ,  $C_s^T D_{s_1}$ ,  $D_{s_1}^T C_s$  e  $D_{s_1}^T D_{s_1}$ ). Todos esses passos serão omitidos pois são os mesmos realizados na seção 4.2, e o resultado é a Proposição 5.3.2., que caracteriza o funcional dual para fixos multiplicadores e filtro, como problemas de otimização linear com restrições definidas por LMI's:

**Proposição 5.3.2** Se  $\|(F - H)W_s^{-1}\|_\infty < \sqrt{I_s}$  e  $\|HW_n^{-1}\|_\infty < \sqrt{I_n}$ , então

$$L_*(H, I_s, I_n) = \left\{ \sum_{i=1}^m \mathbf{m}_{i*}^s \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^m \mathbf{m}_{i*}^l \right\} + I_s \mathbf{d}_s^2 + I_n \mathbf{d}_n^2$$

onde, para  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{m}_{i*}^s$  é o valor ótimo do problema

$$\min_{P_{s_i}=P_{s_i}^T} e_i^T x_{s_0}^T P_{s_i} x_{s_0} e_i \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} A_s^T P_{s_i} + P_{s_i} A_s & P_{s_i} B_s & \vdots & C_s^T \\ B_s^T P_{s_i} & -I & \vdots & D_s^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_s & D_{s_1} & \vdots & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

onde

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{s_1} & 0 \\ 0 & A_{s_0} \end{bmatrix}; B_s = \begin{bmatrix} B_{s_1} \\ 0 \end{bmatrix}; x_{s_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{s_0} \end{bmatrix}; C_s = [C_{s_1} : C_{s_0}];$$

$(A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0}, C_{s_0})$  são realizações de  $(F-H)W_s^{-1}$  e  $(F-H)f_{s_0}$

respectivamente, com  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0})$  controláveis, e  $A_{s_1}$  e  $A_{s_0}$  Hurwitz;

e para  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{m}_i^*$  é o valor ótimo do problema

$$\min_{P_{n_i}=P_{n_i}^T} e_i^T x_{n_0}^T P_{n_i} x_{n_0} e_i \text{ sujeito a } \begin{bmatrix} A_n^T P_{n_i} + P_{n_i} A_n & P_{n_i} B_n & \vdots & C_n^T \\ B_n^T P_{n_i} & -I & \vdots & D_n^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n & D_{n_1} & \vdots & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

onde

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n_1} & 0 \\ 0 & A_{n_0} \end{bmatrix}; B_n = \begin{bmatrix} B_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}; x_{n_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{n_0} \end{bmatrix}; C_n = [C_{n_1} : C_{n_0}];$$

$(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, D_{n_1})$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0}, C_{n_0})$  são realizações de  $HW_n^{-1}$  e  $Hf_{n_0}$  respectivamente,

com  $(A_{n_1}, B_{n_1})$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0})$  controláveis, e  $A_{n_1}$  e  $A_{n_0}$  Hurwitz. ∇

**Comentário:** Como mencionado anteriormente, pode-se considerar um problema de análise de desempenho ao se fixar o filtro  $H$  e minimizar o funcional dual com relação aos multiplicadores, utilizando a caracterização dada pela Proposição 5.3.2.

Considere agora, o procedimento de síntese baseado na minimização do funcional dual sobre o conjunto dos multiplicadores e sobre o conjunto dos filtros simultaneamente, ou seja, considere o problema:

$$\textbf{Problema s: } \min_{H, I_s, I_n} L_*(H, I_s, I_n) \text{ sujeito a } \|(F - H)W_s^{-1}\|_\infty < \sqrt{I_s}; \|HW_n^{-1}\|_\infty < \sqrt{I_n}.$$

Novamente, será usado o procedimento de confinar variáveis de decisão a subespaços de dimensão finita. Como mencionado anteriormente, uma consequência de se considerar incertezas quadráticas, é que os multiplicadores já pertencem ao espaço euclidiano. Portanto, apenas a variável correspondente ao filtro será confinada a um subespaço de dimensão finita. Diferentemente do que foi feito para síntese de controladores, será utilizada uma classe linearmente parametrizada, qual seja

$$\bar{S}_H = \left\{ H \in RH_\infty^{m \times m} : H(s) = C_H (sI - \bar{A}_H)^{-1} \bar{B}_H + D_H ; C_H \in \mathbb{R}^{m \times n_H}, D_H \in \mathbb{R}^{m \times m} \right\}$$

onde  $\bar{A}_H \in \mathbb{R}^{n_H \times n_H}$  e  $\bar{B}_H \in \mathbb{R}^{n_H \times m}$  são tais que  $(\bar{A}_H, \bar{B}_H)$  é controlável e  $\bar{A}_H$  é Hurwitz.

A partir de realizações mínimas  $(A_F, B_F, C_F, D_F)$ ,  $(\check{A}_{W_s}, \check{B}_{W_s}, \check{C}_{W_s}, \check{D}_{W_s})$  e  $(\check{A}_{W_n}, \check{B}_{W_n}, \check{C}_{W_n}, \check{D}_{W_n})$  de  $F$ ,  $W_s^{-1}$  e  $W_n^{-1}$  respectivamente, é possível obter realizações de  $(F - H)W_s^{-1}$  e  $HW_n^{-1}$ , denotadas por

$$(A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}(C_H, D_H), D_{s_1}(C_H, D_H)) \text{ realização de } (F - H)W_s^{-1};$$

$(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}(C_H, D_H), D_{n_1}(C_H, D_H))$  realização de  $HW_n^{-1}$ ;

tais que  $A_{s_1}$  e  $A_{n_1}$  são Hurwitz,  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{n_1}, B_{n_1})$  não dependem de  $C_H$  e  $D_H$ ,  $C_{s_1}(C_H, D_H), D_{s_1}(C_H, D_H), C_{n_1}(C_H, D_H)$  e  $D_{n_1}(C_H, D_H)$  são funções afins de  $C_H$  e  $D_H$ . Essas realizações são dadas por:

$$(5.3.6) \left\{ \begin{array}{l} A_{s_1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F & 0 \\ 0 & \bar{A}_H \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_F \\ -\bar{B}_H \end{bmatrix} \tilde{C}_{W_s} \\ 0 & \tilde{A}_{W_s} \end{bmatrix}; B_{s_1} = \begin{bmatrix} B_F \tilde{D}_{W_s} \\ -\bar{B}_H \tilde{D}_{W_s} \\ \tilde{B}_{W_s} \end{bmatrix}; \\ C_{s_1}(C_H, D_H) = [C_F : C_H : D_F \tilde{C}_{W_s} - D_H]; D_{s_1} = D_F \tilde{D}_{W_s} - D_H \tilde{D}_{W_s} \end{array} \right.$$

$$(5.3.7) \left\{ \begin{array}{l} A_{n_1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_H & \bar{B}_H \tilde{C}_{W_n} \\ 0 & \tilde{A}_{W_n} \end{bmatrix}; B_{n_1} = \begin{bmatrix} \bar{B}_H \tilde{D}_{W_n} \\ \tilde{B}_{W_n} \end{bmatrix}; \\ C_{n_1}(C_H, D_H) = [C_H : D_H \tilde{C}_{W_n}]; D_{n_1} = D_H \tilde{D}_{W_n} \end{array} \right.$$

Admita que as realizações dadas por (5.3.6) e (5.3.7) são tais que  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{n_1}, B_{n_1})$  são controláveis. Então, devido ao “bounded real-lemma” (Boyd et al 1994) tem-se que

$\|(F-H)W_s^{-1}\|_\infty < \sqrt{I_s}$  se e somente se existe  $X_s = X_s^T$  tal que  $X_s > 0$  e  $Q_s(X_s, C_H, D_H) < 0$ , onde

$$(5.3.8) \quad Q_s(X_s, C_H, D_H) = \begin{bmatrix} A_{s_1}^T X_s + X_s A_{s_1} & X_s B_{s_1} & \vdots & C_{s_1}(C_H, D_H)^T \\ B_{s_1}^T X_s & -I_s I & \vdots & D_{s_1}(C_H, D_H)^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s_1}(C_H, D_H) & D_{s_1}(C_H, D_H) & \vdots & -I \end{bmatrix}$$

analogamente,

$\|HW_n^{-1}\|_\infty < \sqrt{I_n}$  se e somente se existe  $X_n = X_n^T$  tal que  $X_n > 0$  e  $Q_n(X_n, C_H, D_H) < 0$ ,

onde

$$(5.3.9) \quad Q_n(X_n, C_H, D_H) = \begin{bmatrix} A_{n_1}^T X_n + X_n A_{n_1} & X_n B_{n_1} & \vdots & C_{n_1}(C_H, D_H)^T \\ B_{n_1}^T X_n & -I_n I & \vdots & D_{n_1}(C_H, D_H)^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n_1}(C_H, D_H) & D_{n_1}(C_H, D_H) & \vdots & -I \end{bmatrix}$$

**Comentário:** Se as realizações dadas por (5.3.6) e (5.3.7) são tais que  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{n_1}, B_{n_1})$  não são controláveis, é sempre possível por meio de uma transformação de similaridade seguida de um truncamento, obter realizações controláveis de  $(F-H)W_s^{-1}$  e de  $HW_n^{-1}$  de maneira que os “termos  $C$  e  $D$ ” destas realizações sejam afins nos “parâmetros livres” da classe  $\bar{S}_H$ , conforme observado no capítulo 3, seção 3.3.

Finalmente, a partir de realizações mínimas  $(A_{f_s}, B_{f_s}, C_{f_s})$  e  $(A_{f_n}, B_{f_n}, C_{f_n})$  dos modelos nominais  $f_{s_0}$  e  $f_{n_0}$ , é possível obter uma realização  $(A_{s_0}, B_{s_0}, C_{s_0}(C_H, D_H))$  de  $(F-H)f_{s_0}$  e uma realização  $(A_{n_0}, B_{n_0}, C_{n_0}(C_H, D_H))$  de  $Hf_{n_0}$  tais que  $A_{s_0}$  e  $A_{n_0}$  são

Hurwitz,  $(A_{s_0}, B_{s_0})$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0})$  não dependem de  $C_H$  e  $D_H$ ,  $C_{s_0}(C_H, D_H)$  e

$C_{n_0}(C_H, D_H)$  são funções afins de  $C_H$  e  $D_H$ . Essas realizações são dadas por:

$$(5.3.10) \left\{ \begin{array}{l} A_{s_0} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F & 0 \\ 0 & \bar{A}_H \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_F \\ -\bar{B}_H \end{bmatrix} C_{sf} \\ 0 & A_{sf} \end{bmatrix}; B_{s_0} = \begin{bmatrix} B_F D_{sf} \\ -\bar{B}_H D_{sf} \\ B_{sf} \end{bmatrix}; \\ C_{s_0}(C_H, D_H) = [C_F : C_H : D_F C_{sf} - D_H]; \end{array} \right.$$

e

$$(5.3.11) \left\{ \begin{array}{l} A_{n_0} = \begin{bmatrix} \bar{A}_H & \bar{B}_H C_{fn} \\ 0 & A_{fn} \end{bmatrix}; B_{n_0} = \begin{bmatrix} \bar{B}_H D_{fn} \\ B_{fn} \end{bmatrix}; \\ C_{n_0}(C_H, D_H) = [C_H : D_H C_{fn}] \end{array} \right.$$

Assumindo que as realizações dadas por (5.3.10) e (5.3.11) são tais que  $(A_{s_0}, B_{s_0})$  e

$(A_{n_0}, B_{n_0})$  são controláveis (pois caso contrário, um comentário análogo ao feito para as

realizações (5.3.6) e (5.3.7) se aplica) segue-se que, ao se considerar a classe  $\bar{S}_H$ , o

**Problema s** pode ser reformulado em termos de um problema de otimização linear em

espaços euclidianos com restrições definidas por LMI's. Esse resultado da Proposição a

seguir, cuja demonstração decorre do desenvolvimento anterior.

**Proposição 5.3.3:** Seja

$$\bar{S}_H = \left\{ H \in RH_\infty^{m \times m} : H(s) = C_H (sI - \bar{A}_H)^{-1} \bar{B}_H + D_H ; C_H \in \mathbb{R}^{m \times n_H}, D_H \in \mathbb{R}^{m \times m} \right\}$$

então

$$\min_{H \in \bar{S}_H, (\mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) \in \mathbb{R}^2} L_*(H, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n) \text{ sujeito a } \|(F - H)W_s^{-1}\|_\infty < \sqrt{\mathbf{I}_s}; \|HW_n^{-1}\|_\infty < \sqrt{\mathbf{I}_n}$$

é equivalente a

$$\min_{X_s, X_n, P_{s_1}, \dots, P_{s_m}, P_{n_1}, \dots, P_{n_m}, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_n, C_H, D_H} \sum_{i=1}^m e_i^T x_{s_0}^T P_{s_i} x_{s_0} e_i + \sum_{i=1}^m e_i^T x_{n_0}^T P_{n_i} x_{n_0} e_i + \mathbf{I}_s \mathbf{d}_s^2 + \mathbf{I}_n \mathbf{d}_n^2$$

sujeito a

$$\mathbf{I}_s > 0, \mathbf{I}_n > 0, X_s^T = X_s > 0, X_n^T = X_n > 0, Q_s(X_s, C_H, D_H) < 0, Q_n(X_n, C_H, D_H) < 0,$$

onde  $Q_s(X_s, C_H, D_H)$  e  $Q_n(X_n, C_H, D_H)$  são matrizes definidas em (5.3.12) e (5.3.13),

$$\text{e } \forall i = 1, \dots, m : P_{s_i}^T = P_{s_i}, P_{n_i}^T = P_{n_i} \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} A_s^T P_{s_i} + P_{s_i} A_s & P_{s_i} B_s & \vdots & C_s^T(C_H, D_H) \\ B_s^T P_{s_i} & -I_s & \vdots & D_{s_1}^T(C_H, D_H) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_s(C_H, D_H) & D_{s_1}(C_H, D_H) & \vdots & -I \end{bmatrix} \leq 0;$$

$$\begin{bmatrix} A_n^T P_{n_i} + P_{n_i} A_n & P_{n_i} B_n & \vdots & C_n^T(C_H, D_H) \\ B_n^T P_{n_i} & -I_n & \vdots & D_{n_1}^T(C_H, D_H) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n(C_H, D_H) & D_{n_1}(C_H, D_H) & \vdots & -I \end{bmatrix} \leq 0;$$

onde

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{s_1} & 0 \\ 0 & A_{s_0} \end{bmatrix}; B_s = \begin{bmatrix} B_{s_1} \\ 0 \end{bmatrix}; x_{s_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{s_0} \end{bmatrix}; C_s(C_H, D_H) = [C_{s_1}(C_H, D_H); C_{s_0}(C_H, D_H)]$$

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n_1} & 0 \\ 0 & A_{n_0} \end{bmatrix}; B_n = \begin{bmatrix} B_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}; x_{n_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{n_0} \end{bmatrix};$$

$$C_n(C_H, D_H) = [C_{n_1}(C_H, D_H); C_{n_0}(C_H, D_H)] \quad \nabla$$

Na próxima seção serão formulados os problemas de análise de desempenho robusto de um dado filtro, e síntese de filtro para bom desempenho, relativo a incertezas nos fatores espectrais caracterizadas por “bolas”  $H_\infty$ .

## 5.4-Incertezas definidas por “bolas”

### $H_\infty$ – ponderadas

Nesta seção, são consideradas classes de incertezas para os fatores espectrais das densidades espectrais de potência do sinal e do ruído caracterizadas por “bolas”  $H_\infty$  – ponderadas. Diferentemente da seção anterior, os multiplicadores considerados ao se aplicar relaxação lagrangeana são caracterizados por funções de transferência.

Mesmo assim, ainda é possível tirar vantagem do fato do funcional lagrangeano não conter termos com produtos entre os multiplicadores e o filtro, de modo a evitar o procedimento “D-K iteration” utilizado em Controle Robusto.

Inicialmente, são definidas as classes de incerteza espectrais através de bolas “bolas”  $H_\infty$  – ponderadas. da seguinte forma

$$S_{f_s}^\infty = \left\{ \mathbf{f}_s \in RH_2^{m \times m} : \mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s ; \left\| W_s \Delta \mathbf{f}_s(j\omega) \right\|_F^2 \leq \mathbf{m}_s(j\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{f_n}^\infty = \left\{ \mathbf{f}_n \in RH_2^{m \times m} : \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n ; \left\| W_n \Delta \mathbf{f}_n(j\omega) \right\|_F^2 \leq \mathbf{m}_n(j\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \right\},$$

e as correspondentes classes de perturbações dadas por

$$S_{\Delta f_s}^\infty = \left\{ \Delta \mathbf{f}_s \in RH_\infty^{m \times m} : \left\| W_s \Delta \mathbf{f}_s(j\omega) \right\|_F^2 \leq \mathbf{m}_s(j\omega) \forall \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{\Delta f_n}^\infty = \left\{ \Delta \mathbf{f}_n \in RH_\infty^{m \times m} : \left\| W_n \Delta \mathbf{f}_n(j\omega) \right\|_F^2 \leq \mathbf{m}_n(j\omega) \forall \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

onde  $\mathbf{m}_s = \mathbf{f}_{m_s}^* \mathbf{f}_{m_s} \in RL_\infty$ ,  $\mathbf{m}_n = \mathbf{f}_{m_n}^* \mathbf{f}_{m_n} \in RL_\infty$  são tais que  $\mathbf{m}_s(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$  e

e  $\mathbf{m}_n(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}_{m_s} \in RH_2$ ,  $\mathbf{f}_{m_n} \in RH_2$  e  $W_s \in RH_\infty^{m \times m}$ , tais que  $W_s^{-1} \in RH_\infty^{m \times m}$

,  $W_n^{-1} \in RH_\infty^{m \times m}$  são os fatores de ponderação.

A seguir, note-se que para todo  $\Delta \mathbf{f}_s \in S_{\Delta f_s}^\infty$  e  $\Delta \mathbf{f}_n \in S_{\Delta f_n}^\infty$ , tem-se que

$$\langle h_s W_s \Delta \mathbf{f}_s, W_s \Delta \mathbf{f}_s \rangle \leq \langle h_s \mathbf{f}_{m_s}, \mathbf{f}_{m_s} \rangle$$

$$\langle h_n W_n \Delta \mathbf{f}_n, W_n \Delta \mathbf{f}_n \rangle \leq \langle h_n \mathbf{f}_{m_n}, \mathbf{f}_{m_n} \rangle$$

onde  $h_s \in RL_\infty$ ,  $h_n \in RL_\infty$  tais que  $h_s(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$  e  $h_n(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

O funcional Lagrangeano é então definido por

$$L(H, \Delta \mathbf{f}_s, \Delta \mathbf{f}_n, h_s, h_n) = \left\langle (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s), (F - H)(\mathbf{f}_{s_0} + \Delta \mathbf{f}_s) \right\rangle +$$

$$\left\langle H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n), H(\mathbf{f}_{n_0} + \Delta \mathbf{f}_n) \right\rangle - \langle h_s W_s \Delta \mathbf{f}_s, W_s \Delta \mathbf{f}_s \rangle - \langle h_n W_n \Delta \mathbf{f}_n, W_n \Delta \mathbf{f}_n \rangle + \langle h_s \mathbf{f}_{m_s}, \mathbf{f}_{m_s} \rangle$$

$$+ \langle h_n \mathbf{f}_{m_n}, \mathbf{f}_{m_n} \rangle.$$

Para simplificar a notação, considere a seguinte mudança de variável

$$W_s \Delta \mathbf{f}_s = X_s, \quad W_n \Delta \mathbf{f}_n = X_n$$

Assim como na seção 5.3, para usar os resultados dos capítulos anteriores de modo a expressar o funcional dual por meio de um valor ótimo de um problema LQR, o funcional Lagrangeano acima deve ser “separado” em tantos quantos forem os canais de entrada dos sinais (que, por hipótese, são  $m$ -dimensionais). Neste sentido, note que o funcional Lagrangeano pode se reescrito como

$$(5.4.1) \quad L(H, X_s, X_n, h_s, h_n) = - \left\{ \sum_{i=1}^m \langle h_s X_s e_i, X_s e_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle \Theta_s^1 X_s e_i + \Theta_s^0 e_i, \Theta_s^1 X_s e_i + \Theta_s^0 e_i \rangle \right\} \\ - \left\{ \sum_{i=1}^m \langle h_n X_n e_i, X_n e_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle \Theta_n^1 X_n e_i + \Theta_n^0 e_i, \Theta_n^1 X_n e_i + \Theta_n^0 e_i \rangle \right\} + \langle h_s \mathbf{f}_m, \mathbf{f}_m \rangle \\ + \langle h_n \mathbf{f}_m, \mathbf{f}_m \rangle$$

onde  $\Theta_s^1 = (F - H)W_s^{-1}$ ,  $\Theta_s^0 = (F - H)\mathbf{f}_{s_0}$ ,  $\Theta_n^1 = HW_n^{-1}$ ,  $\Theta_n^0 = H\mathbf{f}_{n_0}$  e  $e_i$  pertence a base canônica de  $\mathbb{R}^m$  para  $i = 1, \dots, m$ . Esta última expressão do Lagrangeano será usada para expressar o funcional dual, para filtro e multiplicadores fixos, definido por

$$(5.4.2) \quad L_*(H, h_s, h_n) = \sup \left\{ L(H, X_s, X_n, h_s, h_n) : (X_s, X_n) \in RH_\infty^m \times RH_\infty^m \right\}$$

por meio de problemas de otimização em espaços euclidianos com restrição LMI. Isto é feito relacionando cada termo  $\langle h_s X_s e_i, X_s e_i \rangle$ ,  $\langle h_n X_n e_i, X_n e_i \rangle$  do funcional Lagrangeano

com um funcional de custo de um problema LQR conforme feito na seção 3.2 (através de projeções) e relacionando os termos

$$\langle \Theta_s^1 X_s e_i + \Theta_s^0 e_i, \Theta_s^1 X_s e_i + \Theta_s^0 e_i \rangle; \langle \Theta_n^1 X_n e_i + \Theta_n^0 e_i, \Theta_n^1 X_n e_i + \Theta_n^0 e_i \rangle$$

conforme feito na seção 4.2 (sem projeções).

Por simplicidade, considere as representações gerais destes termos, através dos seguintes funcionais definidos em  $RH_2^m$ .

$$\mathbf{j}_1(Z) = \langle hZ, Z \rangle, \text{ onde } Z \in RH_2^m, h \in RL_\infty \text{ tais que } h(j\mathbf{w}) > 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{j}_2(Z) = \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle, \text{ onde } \Theta_1 \in RH_\infty^{m \times m} \text{ e } \Theta_0 \in RH_2^m.$$

Em conformidade com o desenvolvimento da seção 3.2, a associação de  $\mathbf{j}_1(Z)$  com um funcional de custo de um problema LQR. pode ser feita diretamente da seguinte forma

**Proposição 5.4.1:** Seja  $e_h \in RH_\infty$  tal que  $h = e_h + \tilde{e}_h$ , e  $e_h = c_{eh}^T (sI - A_{eh})^{-1} b_{eh} + d_{eh}$  com

$(A_h, b_h)$  controlável e  $A_h$  Hurwitz. Defina  $A_{eha} = I_m \otimes A_{eh}$ ,  $B_{eha} = I_m \otimes b_{eh}$ ,

$C_{eha} = I_m \otimes c_{eh}^T$ , e

$$S^h = \begin{bmatrix} 0 & C_{eha}^T \\ C_{eha} & 2d_{eh} I_m \end{bmatrix}$$

Então, para todo  $Z \in RH_2^m$  e  $u \in (L_2[0, m])^m$ , tal que  $Z$  é a transformada de Laplace de  $u$  tem-se que

$$\mathbf{j}_1(Z) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x_h(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} S^h \begin{bmatrix} x_h(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

onde  $x_h(\cdot)$  satisfaz  $x_h(0) = 0$  e  $\dot{x}_h(t) = A_{eha} x_h(t) + B_{eha} u(t)$  ∇

**Demonstração:** É essencialmente a mesma da Proposição 3.2.1 da seção 3.2 do capítulo 3. □

Agora, a associação de  $\mathbf{j}_2(Z) = \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle$  com um funcional de custo de um problema LQR é feita mediante a seguinte proposição:

**Proposição 5.4.2** Seja o funcional quadrático definido em  $RH_2^m$  por

$$\mathbf{j}_2(Z) = \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle$$

onde  $\Theta_1 \in RH_\infty^{m \times m}$  e  $\Theta_0 \in RH_2^m$ . Sejam  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  e  $(A_0, B_0, C_0)$  realizações de  $\Theta_1$  e  $\Theta_0$  respectivamente com  $(A_1, B_1)$  e  $(A_0, B_0)$  controláveis e  $A_1, A_0$  Hurwitz. Defina

$$A_H = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}, B_H = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{H_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix} \text{ e } S^H = \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_0 & C_1^T D_1 \\ C_0^T C_1 & C_0^T C_0 & C_0^T D_1 \\ \hline D_1^T C_1 & D_1^T C_0 & D_1^T D_1 \end{bmatrix}$$

Então, para todo  $Z \in RH_2^m$  e  $u \in (L_2[0, m])^m$ , tal que  $Z$  é a transformada de Laplace de  $u$  tem-se que

$$\mathbf{j}_2(Z) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x_H(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} S^H \begin{bmatrix} x_H(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

onde  $x_H(\cdot)$  satisfaz  $x_H(0) = x_{H_0}$  e  $\dot{x}_H(t) = A_H x_H(t) + B_H u(t)$  ∇

**Demonstração:** Embora a Proposição 5.4.2 esteja ligeiramente diferente da Proposição 4.2.1, a demonstração de ambas segue os mesmo passos, isto é, usa-se o Teorema de

Parseval para escrever  $\int_0^\infty \begin{bmatrix} x_H(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} S^H \begin{bmatrix} x_H(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$  como um funcional no domínio

da frequência, e a partir das correspondências definidas no enunciado da Proposição, verifica-se que este funcional é igual a  $\mathbf{j}_2(Z)$ . □

A partir das Proposições 5.4.1 e 5.4.2 tem-se que  $\langle hZ, Z \rangle - \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle$  pode ser relacionado com um funcional de custo LQR da seguinte forma

$$\langle hZ, Z \rangle - \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x_h(t)^T & x_H(t)^T & u(t) \end{bmatrix} (S^{ha} - S^{Ha}) \begin{bmatrix} x_h(t) \\ x_H(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

$$\text{onde } S^{ha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{eha}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{eha} & 0 & 2d_{eh} I_m \end{bmatrix} \text{ e } S^{Ha} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & S^H & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Satisfeita a condição de finitude, qual seja  $(hI - \Theta_1^{-1}\Theta_1)(j\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ , tem-se de maneira semelhante a seção 3.2 e 4.2 que o valor ótimo de

$$\min_{Z \in RH_2^m} \langle hZ, Z \rangle - \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle$$

ou equivalentemente

$$\min_{(u \in L_2[0, \infty))^m} \int_0^\infty \begin{bmatrix} x_h(t)^T & x_H(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} (S^{ha} - S^{Ha}) \begin{bmatrix} x_h(t) \\ x_H(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

é dado pelo valor ótimo do problema

$$\max_{P=P^T} x_0^T P x_0 \text{ sujeito a } \left[ \begin{array}{cc|c} A^T P + P A & & P B + \bar{C}_h \\ \hline & & 2d_h I_m \\ \hline B^T P + \bar{C}_h & & \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc|c} C_1^T C_1 & C_1^T C_0 & C_1^T D_1 \\ \hline C_0^T C_1 & C_0^T C_0 & C_0^T D_1 \\ \hline D_1^T C_1 & D_1^T C_0 & D_1^T D_1 \end{array} \right] \geq 0$$

ou equivalentemente (utilizando a fórmula de Complemento de Schur conforme a seção 4.2)

$$\max_{P=P^T} x_0^T P x_0 \text{ sujeito a } \left[ \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & C_1^T \\ & & & & C_0^T \\ & & & & D_1^T \\ \hline 0 & C_1 & C_0 & D_1 & I \end{array} \right] \leq 0$$

$$\text{onde } Q_h(P, \bar{C}_h, d_h) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline A^T P + P A & & & & P B + \bar{C}_h & \\ & & & & & \\ B^T P + \bar{C}_h & & & & & 2d_h I_m \end{array} \right],$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{eha} & 0 \\ 0 & A_H \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{eha} \\ B_H \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{H_0} \end{bmatrix},$$

$(A_{eha}, B_{eha}, C_{eha}, d_{eh})$  como definido na Proposição 5.4.1;

$(A_H, B_H, C_H, D_H)$ ,  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$ ,  $(A_0, B_0, C_0)$  e  $x_{H_0}$  como definidos na Proposição

5.4.2.

Aplicando todo o desenvolvimento feito para  $\langle hZ, Z \rangle - \langle \Theta_1 Z + \Theta_0, \Theta_1 Z + \Theta_0 \rangle$  a

cada

$$\langle h_s X_s e_i, X_s e_i \rangle - \langle \Theta_s^1 X_s e_i + \Theta_s^0 e_i, \Theta_s^1 X_s e_i + \Theta_s^0 e_i \rangle$$

$$\langle h_s X_n e_i, X_n e_i \rangle - \langle \Theta_n^1 X_n e_i + \Theta_n^0 e_i, \Theta_n^1 X_n e_i + \Theta_n^0 e_i \rangle,$$

existentes na expressão do funcional Lagrangeano dada pela expressão (5.4.1), e usando novamente uma mudança de variável (tal qual foi feito na seção 4.2) para se ter o funcional dual expresso pelo valor ótimo de um problema de minimização convexa, tem-se a Proposição 5.4.2 que é a caracterização de  $L_*(H, h_s, h_n)$ , para fixos multiplicadores e filtro, por meio de problema de otimização em espaços euclidianos com restrições definidas por LMI's.

**Proposição 5.4.2** Se  $(h_s I - (\Theta_s^1)^T \Theta_s^1)(j\mathbf{w}) > 0$  e  $(h_n I - (\Theta_n^1)^T \Theta_n^1)(j\mathbf{w}) > 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $L_*(H, h_s, h_n)$  é o valor ótimo do problema

$$\min_{\forall i=1, \dots, m: P_{s_i}^T = P_{s_i}, \tilde{P}_{n_i}^T = P_{n_i}} \left\{ \sum_{i=1}^m e_i^T x_{s_0}^T P_{s_i} x_{s_0} e_i + \sum_{i=1}^m e_i^T x_{n_0}^T P_{n_i} x_{n_0} e_i \right\} + \langle h_s \mathbf{f}_{ms}, \mathbf{f}_{ms} \rangle + \langle h_n \mathbf{f}_{mn}, \mathbf{f}_{mn} \rangle$$

sujeito a

$$(5.4.3) \quad \left[ \begin{array}{c|c} Q_{h_s}(P_{s_i}, C_{eha_s}, d_{h_s}) & \begin{bmatrix} 0 \\ C_{s_1}^T \\ C_{s_0}^T \\ D_{s_1}^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & C_{s_1} & C_{s_0} & D_{s_1} \end{bmatrix} & I \end{array} \right] \leq 0$$

$$(5.4.4) \quad \left[ \begin{array}{c|c} Q_{h_n}(P_{n_i}, C_{eha_n}, d_{h_n}) & \begin{bmatrix} 0 \\ C_{n_1}^T \\ C_{n_0}^T \\ D_{s_1}^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & C_{n_1} & C_{n_0} & D_{s_1} \end{bmatrix} & I \end{array} \right] \leq 0$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ , onde

$$Q_{h_s}(P_{s_i}, C_{eha_s}, d_{h_s}) = \begin{bmatrix} A_s^T P_{s_i} + P_{s_i} A_s & P_{s_i} B_s + C_{eha_s} \\ \dots & \dots \\ B_s^T P_{s_i} + C_{eha_s} & 2d_{h_s} I_m \end{bmatrix},$$

$$Q_{h_n}(P_{n_i}, C_{eha_n}, d_{h_n}) = \begin{bmatrix} A_n^T P_{n_i} + P_{n_i} A_n & P_{n_i} B_n + C_{eha_n}^T \\ \dots & \dots \\ B_n^T P_{n_i} + C_{eha_n} & 2d_{h_n} I_m \end{bmatrix},$$

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{eha_s} & 0 & 0 \\ 0 & A_{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{s_0} \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} B_{eha_s} \\ B_{s_1} \\ 0 \end{bmatrix}, x_{s_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{s_0} \end{bmatrix},$$

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{ha_n} & 0 & 0 \\ 0 & A_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{n_0} \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} B_{eha_n} \\ B_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}, x_{n_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{n_0} \end{bmatrix},$$

$(A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0}, C_{s_0})$  são realizações de  $\Theta_s^1 = (F - H)W_s^{-1}$  e

$\Theta_s^0 = (F - H)f_{s_0}$  respectivamente, com  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0})$  controláveis, e  $A_{s_1}$  e  $A_{s_0}$

Hurwitz;

$(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, D_{n_1})$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0}, C_{n_0})$  são realizações de  $\Theta_n^1 = HW_n^{-1}$  e  $\Theta_n^0 = Hf_{n_0}$

respectivamente, com  $(A_{n_1}, B_{n_1})$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0})$  controláveis, e  $A_{n_1}$  e  $A_{n_0}$  Hurwitz;

$A_{eha_s} = I_m \otimes A_{eh_s}$ ,  $B_{eha_s} = I_m \otimes b_{eh_s}$ ,  $C_{eha_s} = I_m \otimes c_{eh_s}^T$ , e  $A_{eha_n} = I_m \otimes A_{eh_n}$ ,  $B_{eha_n} = I_m \otimes b_{eh_n}$ ,  
 $C_{eha_n} = I_m \otimes c_{eh_n}^T$ , onde para  $e_{h_s} \in RH_\infty$  tal que  $h_s = \tilde{e}_{h_s} + e_{h_s}$  e  $e_{h_n} \in RH_\infty$  tal que  
 $h_n = \tilde{e}_{h_n} + e_{h_n}$  tem-se que  $e_{h_s} = c_{eh_s}^T (sI - A_{eh_s})^{-1} b_{eh_s} + d_{eh_s}$  com  $(A_{eh_s}, b_{eh_s})$  controlável e  
 $A_{eh_s}$  Hurwitz, e  $e_{h_n} = c_{eh_n}^T (sI - A_{eh_n})^{-1} b_{eh_n} + d_{eh_n}$  com  $(A_{eh_n}, b_{eh_n})$  controlável e  $A_{eh_n}$   
 Hurwitz ▽

Assim, a partir da caracterização de  $L_*(H, h_s, h_n)$  dada pela Proposição 5.4.2, pode-se conceber um procedimento de síntese baseado na minimização de  $L_*(H, h_s, h_n)$  com relação a multiplicadores e filtros simultaneamente, confinados a classes linearmente parametrizadas.

Considere novamente a classe linearmente parametrizada de filtros, usada na seção anterior definida por

$$\bar{S}_H = \left\{ H \in RH_\infty^{m \times m} : H(s) = C_H (sI - \bar{A}_H)^{-1} \bar{B}_H + D_H ; C_H \in \mathbb{R}^{m \times n_H}, D_H \in \mathbb{R}^{m \times m} \right\}$$

onde  $\bar{A}_H \in \mathbb{R}^{n_H \times n_H}$  e  $\bar{B}_H \in \mathbb{R}^{n_H \times m}$  são tais que  $(\bar{A}_H, \bar{B}_H)$  é controlável e  $\bar{A}_H$  é Hurwitz.

Já foi visto na seção anterior que realizações  $(A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1})$  de  $\Theta_s^1 = (F - H)W_s^{-1}$ , e  $(A_{s_0}, B_{s_0}, C_{s_0})$  de  $\Theta_s^0 = (F - H)\mathbf{f}_{s_0}$  podem ser obtidas de modo que  $A_{s_1}$  e  $A_{s_0}$  são Hurwitz,  $(A_{s_1}, B_{s_1})$  e  $(A_{s_0}, B_{s_0})$  não dependem de  $C_H$  e  $D_H$ ,  $C_{s_1}(C_H, D_H)$ ,  $D_{s_1}(C_H, D_H)$ , e  $C_{s_0}(C_H, D_H)$  são funções afins de  $C_H$  e  $D_H$ , e ainda com

$(A_{n_1}, B_{n_1})$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0})$  controláveis. O mesmo se aplica para realizações  $(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, D_{n_1})$  de  $\Theta_n^1 = HW_n^{-1}$  e  $(A_{n_0}, B_{n_0}, C_{n_0})$  de  $\Theta_n^0 = HF_{n_0}$ .

A seguir, considere as seguintes classes de multiplicadores linearmente parametrizadas

$$\bar{S}_{h_s} = \left\{ h_s = e_{h_s} + e_{h_s}^{\sim} : e_{h_s} \in RH_{\infty}, e_{h_s}(s) = c_{eh_s}^T (sI - \bar{A}_{eh_s})^{-1} \bar{b}_{eh_s} + d_{eh_s}, c_{eh_s} \in \mathbb{R}^{n_s}, d_{eh_s} \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} : eh_s(j\mathbf{w}) + eh_s^{\sim}(j\mathbf{w}) \geq 0 \right\},$$

$\bar{A}_{eh_s} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}, \bar{b}_{eh_s} \in \mathbb{R}^{n_s}$  são fixos;  $(\bar{A}_{eh_s}, \bar{b}_{eh_s})$  controlável e  $\bar{A}_{eh_s}$  Hurwitz.

$$\bar{S}_{h_n} = \left\{ h_n = e_{h_n} + e_{h_n}^{\sim} : e_{h_n} \in RH_{\infty}, e_{h_n}(s) = c_{eh_n}^T (sI - \bar{A}_{eh_n})^{-1} \bar{b}_{eh_n} + d_{eh_n}, c_{eh_n} \in \mathbb{R}^{n_n}, d_{eh_n} \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} : eh_n(j\mathbf{w}) + eh_n^{\sim}(j\mathbf{w}) \geq 0 \right\},$$

$\bar{A}_{eh_n} \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}, \bar{b}_{eh_n} \in \mathbb{R}^{n_n}$  são fixos;  $(\bar{A}_{eh_n}, \bar{b}_{eh_n})$  controlável e  $\bar{A}_{eh_n}$  Hurwitz.

É imediato verificar que as desigualdades (5.4.3) e (5.4.4) da Proposição 5.4.2 são de fato afins nos parâmetros “livres” das classes de multiplicadores  $\bar{S}_{h_s}$  e  $\bar{S}_{h_n}$  e nos parâmetros livres da classe de filtros  $\bar{S}_H$ .

Finalmente, note que a condição de finitude  $(h_s I - (\Theta_s^1)^{\sim} \Theta_s^1)(j\mathbf{w}) > 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , pode ser escrita (usando a fórmula de complemento de Schur) como:

$$\begin{bmatrix} h_s I & (\Theta_s^1)^{\sim} \\ \Theta_s^1 & I \end{bmatrix} (j\mathbf{w}) > 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} eh_s I & 0 \\ \Theta_s^1 & \frac{1}{2} I \end{bmatrix} (j\mathbf{w}) + \begin{bmatrix} eh_s I & (\Theta_s^1)^\sim \\ 0 & \frac{1}{2} I \end{bmatrix} (j\mathbf{w}) > 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$$

Defina  $E_s \triangleq \begin{bmatrix} eh_s I & 0 \\ \Theta_s^1 & \frac{1}{2} I \end{bmatrix}$ . Para  $h_s \in \bar{S}_{h_s}$  e  $H \in \bar{S}_H$ , pode-se obter uma realização

$(A_{E_s}, B_{E_s}, C_{E_s}, D_{E_s})$  de modo que  $A_{E_s}$  seja Hurwitz,  $(A_{E_s}, B_{E_s})$  não depende dos parâmetros livres das classes  $\bar{S}_{h_s}$  e  $\bar{S}_H$ , e  $C_{E_s}, D_{E_s}$  são funções afins de  $C_H, D_H, c_{eh_s}$  e  $d_{eh_s}$ . Essa realização é dada por

$$A_{E_s} = \begin{bmatrix} I \otimes \bar{A}_{eh_s} & 0 \\ 0 & A_{s_1} \end{bmatrix}, \quad B_{E_s} = \begin{bmatrix} I \otimes \bar{b}_{eh_s} & 0 \\ B_{s_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{E_s}(c_{eh_s}, C_H, D_H) = \begin{bmatrix} I \otimes c_{eh_s} & 0 \\ 0 & C_{s_1}(C_H, D_H) \end{bmatrix}, \quad D_{E_s}(d_{eh_s}, C_H, D_H) = \begin{bmatrix} d_{eh_s} I & 0 \\ D_{s_1}(C_H, D_H) & \frac{1}{2} I \end{bmatrix}$$

Admita que  $(A_{E_s}, B_{E_s})$  é controlável (isso possível devido ao mesmo argumento de transformação de similaridade seguido de truncamento usado na seção anterior), então pelo lema positivo real, tem-se que

$E_s(j\mathbf{w}) + E_s^\sim(j\mathbf{w}) > 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$  se e somente se existe  $P_{es} = P_{es}^T$  tal que  $P_{es} > 0$  e

$$(5.4.5) \quad \begin{bmatrix} A_{E_s}^T P_{es} + P_{es} A_{E_s} & P_{es} B_{E_s} - C_{E_s}^T(c_{eh_s}, C_H, D_H) \\ B_{E_s}^T P_{es} - C_{E_s}(c_{eh_s}, C_H, D_H) & -D_{E_s}(d_{eh_s}, C_H, D_H) - D_{E_s}^T(d_{eh_s}, C_H, D_H) \end{bmatrix} < 0$$

O mesmo desenvolvimento pode ser feito para a condição de finitude dada por

$$\left( h_n I - (\Theta_n^1)^* \Theta_n^1 \right) (j\mathbf{w}) > \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}, \text{ quando } h_n \in \bar{S}_{h_n} \text{ e } H \in \bar{S}_H, \text{ de modo que esta}$$

condição é equivalente existir  $P_{en} = P_{en}^T$  tal que  $P_{en} > 0$  e

$$(5.4.6) \quad \left[ \begin{array}{cc} A_{E_n}^T P_{en} + P_{en} A_{E_n} & P_{en} B_{E_n} - C_{E_n}^T (c_{eh_n}, C_H, D_H) \\ B_{E_n}^T P_{en} - C_{E_n} (c_{eh_n}, C_H, D_H) & -D_{E_n} (d_{eh_n}, C_H, D_H) - D_{E_n}^T (d_{eh_n}, C_H, D_H) \end{array} \right] < 0$$

onde  $A_{E_n}$  seja Hurwitz,  $(A_{E_n}, B_{E_n})$  é controlável e não depende dos parâmetros livres das classes  $\bar{S}_{h_n}$  e  $\bar{S}_H$ ,  $C_{E_n}(c_{eh_n}, C_H, D_H)$  e  $D_{E_n}(d_{eh_n}, C_H, D_H)$  são funções afins de  $C_H, D_H, c_{eh_n}$  e  $d_{eh_n}$ .

Finalmente, verifica-se facilmente que os termos  $\langle h_s \mathbf{f}_{ms}, \mathbf{f}_{ms} \rangle, \langle h_n \mathbf{f}_{mn}, \mathbf{f}_{mn} \rangle$  são escritos como funções lineares dos parâmetros  $c_{eh_s}, d_{eh_s}, c_{eh_n}$  e  $d_{eh_n}$ . Para isto, note que se  $h_s \in \bar{S}_{h_s}$ , tem-se que

$$\langle h_s \mathbf{f}_{ms}, \mathbf{f}_{ms} \rangle = \langle (e_{h_s} + \tilde{e}_{h_s}) \mathbf{f}_{ms}, \mathbf{f}_{ms} \rangle = 2 \langle e_{h_s} \mathbf{f}_{ms}, \mathbf{f}_{ms} \rangle = 2c_{eh_s}^T R_{ms} + 2d_{eh_s} \|\mathbf{f}_{ms}\|_2^2$$

$$\text{onde } R_{ms} = (2p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{ms}(j\mathbf{w})^* (j\mathbf{w} - \bar{A}_{eh_s})^{-1} \bar{b}_{eh_s} \mathbf{f}_{ms}(j\mathbf{w}) d\mathbf{w}$$

Analogamente, se  $h_n \in \bar{S}_{h_n}$ , então:

$$\langle h_n \mathbf{f}_{mn}, \mathbf{f}_{mn} \rangle = \langle (e_{h_n} + \tilde{e}_{h_n}) \mathbf{f}_{mn}, \mathbf{f}_{mn} \rangle = 2 \langle e_{h_n} \mathbf{f}_{mn}, \mathbf{f}_{mn} \rangle = 2c_{eh_n}^T R_{mn} + 2d_{eh_n} \|\mathbf{f}_{mn}\|_2^2$$

onde  $R_m = (2\mathbf{p})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_m(j\mathbf{w})^* (j\mathbf{w} - \bar{A}_{eh_n})^{-1} \bar{b}_{eh_n} \mathbf{f}_m(j\mathbf{w}) d\mathbf{w}$

Portanto, segue-se da Proposição 5.4.2 e de todo o desenvolvimento posterior a ela, que quando são consideradas as classes linearmente parametrizadas  $\bar{S}_{h_s}$ ,  $\bar{S}_{h_n}$  e  $\bar{S}_H$ , o procedimento de síntese baseado na minimização de  $L_*(H, h_s, h_n)$  com relação a multiplicadores e filtros simultaneamente, pode ser reformulado como um problema de otimização no espaço euclidiano, com restrições definidas por LMI. Esse é o resultado da próxima proposição:

**Proposição 5.4.3:** Sejam

$$\bar{S}_H = \left\{ H \in RH_{\infty}^{m \times m} : H(s) = C_H (sI - \bar{A}_H)^{-1} \bar{B}_H + D_H ; C_H \in \mathbb{R}^{m \times n_H}, D_H \in \mathbb{R}^{m \times m} \right\} ;$$

$$\bar{S}_{h_s} = \left\{ h_s = e_{h_s} + e_{h_s}^{\sim} : e_{h_s} \in RH_{\infty}, e_{h_s}(s) = c_{eh_s}^T (sI - \bar{A}_{eh_s})^{-1} \bar{b}_{eh_s} + d_{eh_s}, c_{eh_s} \in \mathbb{R}^{n_s}, d_{eh_s} \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} : eh_s(j\mathbf{w}) + eh_s^{\sim}(j\mathbf{w}) \geq 0 \right\},$$

$\bar{A}_{eh_s} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}, \bar{b}_{eh_s} \in \mathbb{R}^{n_s}$  são fixos;  $(\bar{A}_{eh_s}, \bar{b}_{eh_s})$  controlável e  $\bar{A}_{eh_s}$  Hurwitz.

$$\bar{S}_{h_n} = \left\{ h_n = e_{h_n} + e_{h_n}^{\sim} : e_{h_n} \in RH_{\infty}, e_{h_n}(s) = c_{eh_n}^T (sI - \bar{A}_{eh_n})^{-1} \bar{b}_{eh_n} + d_{eh_n}, c_{eh_n} \in \mathbb{R}^{n_n}, d_{eh_n} \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R} : eh_n(j\mathbf{w}) + eh_n^{\sim}(j\mathbf{w}) \geq 0 \right\},$$

$\bar{A}_{eh_n} \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}, \bar{b}_{eh_n} \in \mathbb{R}^{n_n}$  são fixos;  $(\bar{A}_{eh_n}, \bar{b}_{eh_n})$  controlável e  $\bar{A}_{eh_n}$  Hurwitz.

Então,

$$\min_{H \in \bar{S}_H, h_s \in \bar{S}_{h_s}, h_n \in \bar{S}_{h_n}} L_*(H, h_s, h_n)$$

é equivalente a

$$\min_{P_{es}, P_{en}, P_{s_1}, \dots, P_{s_m}, P_{n_1}, \dots, P_{n_m}, C_H, D_H, d_{e_{h_s}}, c_{e_{h_s}}, d_{e_{h_n}}} \left\{ \sum_{i=1}^m e_i^T x_{s_0}^T P_{s_i} x_{s_0} e_i + \sum_{i=1}^m e_i^T x_{n_0}^T P_{n_i} x_{n_0} e_i \right\} +$$

$$2c_{e_{h_s}}^T R_{ms} + 2d_{e_{h_s}} \left\| \mathbf{f}_{ms} \right\|_2^2 + 2c_{e_{h_n}}^T R_{mn} + 2d_{e_{h_n}} \left\| \mathbf{f}_{mn} \right\|_2^2.$$

sujeito a  $\forall i = 1, \dots, m : P_{s_i}^T = P_{s_i}, P_{n_i}^T = P_{n_i}$  e

$R_s(C_H, D_H, P_{s_i}, c_{e_{h_s}}, d_{e_{h_s}}) \leq 0$ ,  $R_s(C_H, D_H, P_{s_i}, c_{e_{h_s}}, d_{e_{h_s}})$  é dada pela expressão (5.4.3);

$R_n(C_H, D_H, P_{n_i}, c_{e_{h_n}}, d_{e_{h_n}}) \leq 0$ ,  $R_n(C_H, D_H, P_{n_i}, c_{e_{h_n}}, d_{e_{h_n}})$  é dada pela expressão (5.4.4);

$P_{es}^T = P_{es} > 0$ ,  $P_{en}^T = P_{en} > 0$  e

$L_s(C_H, D_H, P_{es}, c_{e_{h_s}}, d_{e_{h_s}}) < 0$ ,  $L_s(C_H, D_H, P_{es}, c_{e_{h_s}}, d_{e_{h_s}})$  é dada pela expressão (5.4.5);

$L_n(C_H, D_H, P_{en}, c_{e_{h_n}}, d_{e_{h_n}}) < 0$ ,  $L_n(C_H, D_H, P_{en}, c_{e_{h_n}}, d_{e_{h_n}})$  é dada pela expressão (5.4.6).  $\nabla$

## 5.5-Conclusões

Neste capítulo, foram considerados problemas de filtragem robusta em que as classes de incertezas são caracterizadas por conjuntos de fatores espectrais das densidades espectrais de potência do sinal e do ruído.

O objetivo principal foi aplicar a esses problemas, as mesmas técnicas utilizadas para os problemas de controle robusto estudados anteriormente. Mais especificamente, foram utilizadas as técnicas de relaxação lagrangeana e confinamento de variáveis de decisão a subespaços de dimensão finita.

Neste contexto, o funcional lagrangeano não possui termos com produtos entre multiplicadores e filtros, e conseqüentemente, um procedimento de síntese de filtro pode ser resolvido por meio de um problema de otimização de um funcional linear com restrição LMI correspondente a minimização do funcional dual sobre o conjunto dos multiplicadores e sobre o conjunto dos filtros considerados simultaneamente. Por fim, convém observar que heurísticas semelhantes às utilizadas em Controle para escolha de classes lineares podem ser aplicadas aqui.

# Capítulo 6

## Experimentos numéricos.

### 6.1-Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos, utilizando as rotinas do “LMI Control Toolbox” do Matlab para resolução de problemas de otimização com restrições definidas por LMI que ilustram os procedimentos descritos neste trabalho para obtenção de limitantes superiores para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$  de um dado modelo a ser controlado e um dado controlador robustamente estabilizante. Os problemas de otimização correspondentes às deduções por relaxação lagrangeana (seção 2.4), “S-Procedure” (seção 2.5) e operações de LFT (seção 2.6), com os correspondentes confinamentos das variáveis de decisão em subespaços de dimensão finita, serão citados como 1º índice, 2º índice e 3º índice

respectivamente. Por simplicidade, nestes experimentos será considerado o caso de *perturbação não-estruturada*.

Os limitantes obtidos serão comparados com um limitante superior potencialmente mais conservador do “pior-caso”  $H_2$ , obtido através de desigualdades de normas. Assim, recordando a definição do “pior-caso”  $H_2$  dada no capítulo 2, seção 2.3, por

$$\mathbf{h} = \sup \left\{ \left\| M_{zw} \mathbf{f}_w + M_{y\Delta} \Delta (I - M_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} M_{\Delta w} \mathbf{f}_w \right\|_2^2 : \|\Delta\|_\infty \leq \mathbf{g} \right\}$$

tem-se que

$$\mathbf{h} \leq \left\{ \left\| M_{yw} \mathbf{f}_w \right\|_2 + \left\| M_{y\Delta} \right\|_\infty \mathbf{g} (1 - \left\| M_{\Delta\Delta} \right\|_\infty \mathbf{g})^{-1} \left\| M_{\Delta w} \mathbf{f}_w \right\|_2 \right\}^2$$

No decorrer deste capítulo o limitante conservador deduzido acima será denotado por

$$L_g = \left\{ \left\| M_{yw} \mathbf{f}_w \right\|_2 + \left\| M_{y\Delta} \right\|_\infty \mathbf{g} (1 - \left\| M_{\Delta\Delta} \right\|_\infty \mathbf{g})^{-1} \left\| M_{\Delta w} \mathbf{f}_w \right\|_2 \right\}^2$$

O modelo nominal considerado inicialmente é o exemplo “benchmark” para controle robusto sugerido por Wie & Berstein (1992), dado por  $P(s) = 1/s^2 (s^2 + 2)$ . Inicialmente, são consideradas perturbações nos fatores coprimos normalizados a direita de  $P(s)$ , e a seguir, utiliza-se a correspondente configuração de perturbação em realimentação dada no capítulo 2, seção 2.2. Para tal exemplo, serão apresentados os limitantes superiores obtidos por meio de relaxação lagrangeana (seção 2.4) e por meio da “S-Procedure” (seção 2.5). Para o limitante superior obtido por operações de LFT na

seção 2.6, será considerado um outro exemplo em que são consideradas perturbações aditivas, e que será descrito posteriormente.

O capítulo 6 está organizado da seguinte forma:

Na seção 6.2, é descrito o modelo de perturbações nos fatores coprimos para o exemplo “benchmark” sugerido por Wie & Berstein (1992), em seguida determina-se a planta generalizada correspondente ao modelo de perturbação em realimentação, conforme apresentado na seção 2.2. Para um controlador fixo robustamente estabilizante é apresentada então a primeira sequência de experimentos, com objetivo de ilustrar o papel da dinâmica na melhoria dos limitantes, bem como o comportamento do 1º índice e 2º índice com relação a *diferentes classes de perturbação, diferentes fatores espectrais dos ruídos*, bem como a *diferentes localizações de ruídos* (ruído de entrada e ruído de saída).

Na seção 6.3, também no contexto de perturbações nos fatores coprimos (representada no modelo de perturbação em realimentação) para o modelo “benchmark”, apresenta-se a segunda sequência de experimentos com o objetivo de ilustrar o comportamento de diferentes controladores com relação ao 1º e 2º índice para uma classe de perturbações.

Na seção 6.4, é usado um modelo de perturbações aditivas (representado no modelo de perturbação em realimentação), e apresenta-se a terceira sequência de experimentos, com objetivo de comparar o comportamento do 1º índice e 3º índice tanto no caso constante, bem como a utilização de dinâmicas para determinação de classes lineares.

Na seção 6.5, também no contexto de perturbações aditivas, compara-se o comportamento de diferentes controladores com relação aos três índices, para uma mesma classe de perturbações, tal qual é feito na seção 6.3.

Conclusões são apresentadas na seção 6.6.

## 6.2-Comparação de limitantes para o modelo “benchmark” com diferentes classes dinâmicas de multiplicadores

Os experimentos desta seção, são referentes ao desempenho de um dado controlador que assegure a estabilidade de sistemas perturbados. Assim, considere a configuração de blocos da figura 6.1:

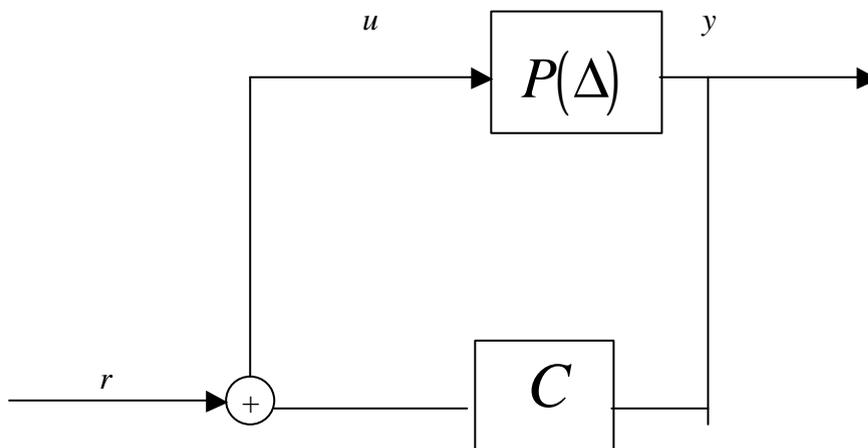


Figura 6.1-Sistemas perturbados com controlador estabilizante

onde  $P(\Delta)$ , em conformidade com a seção 2.2, figura 2.4, é dado por

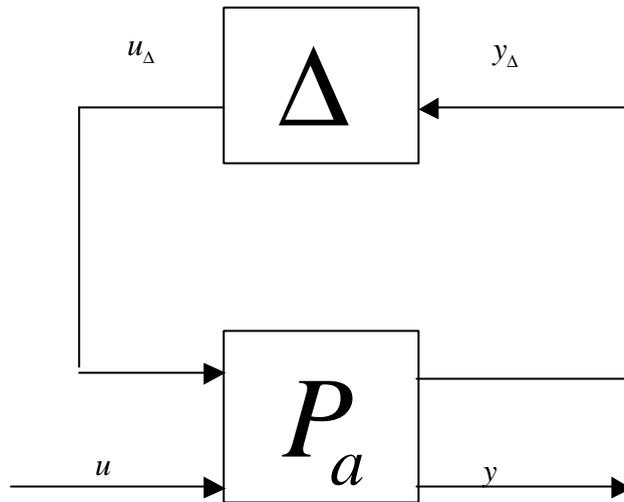


Figura 6.2-Perturbação em realimentação

onde  $P_a$  é a planta generalizada (que inclui o modelo nominal). Note que, em comparação com a figura 2.4 da seção 2.2 do capítulo 2, tem-se que  $\bar{w} = u$  e  $\bar{z} = y$ .

Considere inicialmente, o sistema massa-mola representado na Figura 6.3, composto de dois blocos interligados por duas molas.

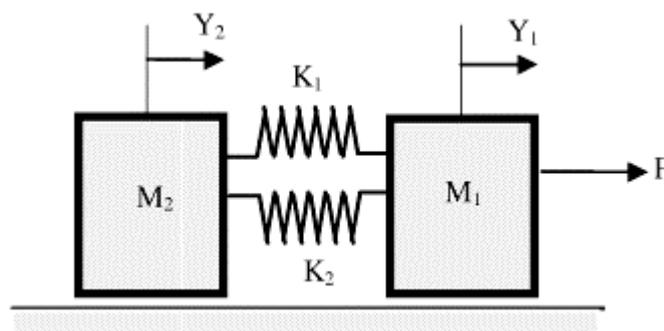


Figura 6.3-Diagrama do sistema massa-mola

A entrada do sistema é a força  $F$  aplicada ao bloco de massa  $M_1$  e a saída é a posição  $Y_2$  do bloco de massa  $M_2$ . Os demais parâmetros e variáveis do

problema são  $M_1$ ,  $Y_1$ ,  $K_1$  e  $K_2$ , que representam, respectivamente, a massa do bloco tracionado, a posição do bloco de massa  $M_1$  e as constantes elásticas das molas. Considerou-se que o efeito do atrito é desprezível,  $M_1 = M_2 = 1$ , e ainda que  $K_1 + K_2 = 1$ . Para tal sistema, a função de transferência é dada por  $P(s) = 1/s^2(s^2 + 2)$  (Wie & Berstein, 1992). Este modelo foi proposto como “benchmark” para comparação de técnicas de controle robusto devido à grande sensibilidade das funções de transferências em malha fechada obtidas com o mesmo face a perturbação da função de transferência nominal. Aqui, não serão feitas tais comparações e este modelo é utilizado apenas como um modelo escolhido de forma não-aleatória para ilustrar a obtenção de limitantes superiores para o “pior-caso”  $H_2$ .

Agora, recorde-se da seção 2.2 que, se  $P(s) = \bar{N}(s)\bar{D}^{-1}(s)$ , onde  $\bar{N}(s)$  e  $\bar{D}(s)$  são os fatores coprimos normalizados, tem-se que a planta generalizada correspondente a perturbação  $P(\Delta) = (\bar{N} + \Delta N)(\bar{D} + \Delta D)^{-1}$  é dada por

$$(6.2.1) \quad P_a = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{D}^{-1} & \bar{D}^{-1} \\ I & -P & P \end{bmatrix}.$$

Uma vez obtida  $P_a$ , considere o sistema de controle da figura 6.4

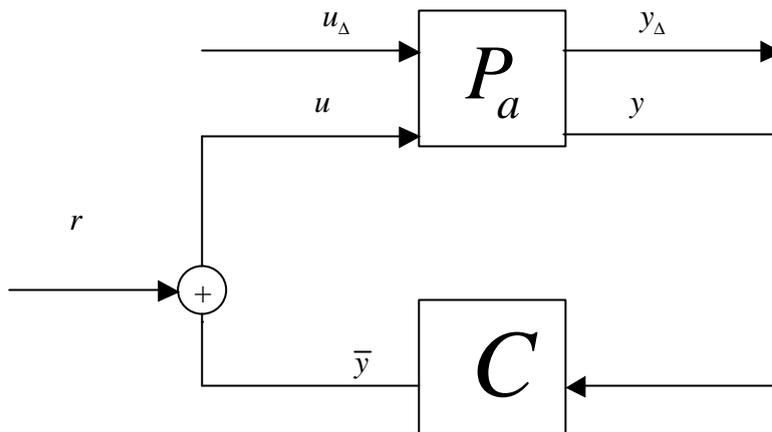


Figura 6.4-Sistema em malha fechada com ruído de entrada.

Conforme foi feito na seção 2.3, a função de transferência do sistema  $(P_a, C)$  é

$$\text{denotada por } M(s) = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(s) & M_{\Delta r}(s) \\ M_{y\Delta}(s) & M_{yr}(s) \end{bmatrix}.$$

Ainda em conformidade com a seção 2.3, quando o sistema de controle  $(P_a, C)$  é estável, para a finalidade de análise de desempenho de  $(P_a, C)$  na presença de perturbações em realimentação, referente a aplicação  $r \mapsto y$ , considera-se a configuração da figura 6.5

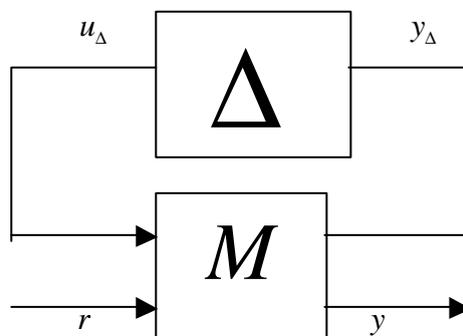


Figura 6.5-Sistema Perturbado estável

O controlador utilizado para primeira seqüência de experimentos será o controlador de margem ótima, isto é, o controlador tal que  $\frac{1}{\|M_{\Delta\Delta}(C)\|_{\infty}} = g_{\max}$ , obtido diretamente através das rotinas de programação do “Matlab” (neste caso  $g_{\max} = 0,27$ ). Assim, conforme foi visto na seção 2.3, para tal controlador a função  $F_{yr}(\Delta) = [M_{yr} + M_{y\Delta}\Delta(I - M_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}M_{\Delta r}]r$  (correspondente a aplicação  $r \mapsto y$  da configuração da figura 6.4) pertence a  $M(RH_{\infty})$  para qualquer perturbação  $\Delta$  tal que  $\|\Delta\|_{\infty} < g_{\max}$ .

Como foi dito anteriormente, a primeira seqüência de experimentos tem o objetivo de ilustrar o papel da dinâmica na melhoria dos limitantes dados pelos índices deduzidos por relaxação lagrangeana e “S-Procedure”.

No caso do 1º índice (obtido por relaxação lagrangeana) os limitantes são obtidos com a resolução do problema LMI dado pela Proposição 3.3.2 da seção 3.3, inicialmente para o caso de multiplicadores constantes, e em seguida para classes lineares de multiplicadores determinadas por dinâmicas de segunda e quarta ordem respectivamente.

No caso do 2º índice (obtido por meio da S-procedure) os limitantes são obtidos com a resolução do problema LMI dado pela Proposição 3.5.3 da seção 3.5, inicialmente para variáveis  $\Lambda$  e  $Y$  caracterizadas por números reais (caso constante) e em seguida para classes lineares de  $\Lambda$  e  $Y$  determinadas por dinâmicas de segunda e quarta ordem respectivamente.

Em ambos os caso, todas as matrizes das LMI’s envolvidas são obtidas com sucessivas operações envolvendo as realizações de  $M_{yr}$ ,  $M_{y\Delta}$ ,  $M_{\Delta\Delta}$  e  $M_{\Delta r}$ , que são obtidas a partir de uma realização da planta generalizada  $P_a$ , a qual por sua vez é obtida

a partir das realizações de fatores coprimos normalizados do modelo nominal  $P(s) = 1/s^2(s^2 + 2)$ . Mais especificamente, são obtidas realizações  $(A_{\bar{N}}, B_{\bar{N}}, C_{\bar{N}})$  de  $\bar{N}(s)$ , e  $(\check{A}_{\bar{D}}, \check{B}_{\bar{D}}, \check{C}_{\bar{D}}, \check{D}_{\bar{D}})$  de  $\bar{D}^{-1}(s)$  (ver Apêndice 6A para mais detalhes) a partir das quais uma realização da planta generalizada  $P_a$  é dada por

$$A_a = \begin{bmatrix} \check{A}_{\bar{D}} & 0 \\ B_{\bar{N}} \check{C}_{\bar{D}} & A_{\bar{N}} \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 0 & -\check{B}_{\bar{D}} & \check{B}_{\bar{D}} \\ 0 & -B_{\bar{N}} \check{D}_{\bar{D}} & B_{\bar{N}} \check{D}_{\bar{D}} \end{bmatrix}, C_a = \begin{bmatrix} \check{C}_{\bar{D}} & 0 \\ 0 & C_{\bar{N}} \end{bmatrix},$$

$$D_a = \begin{bmatrix} 0 & -\check{D}_{\bar{D}} & \check{D}_{\bar{D}} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez obtidas as realizações da planta generalizada  $P_a$ , uma realização de

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(s) & M_{\Delta r}(s) \\ M_{y\Delta}(s) & M_{yr}(s) \end{bmatrix}$$

é obtida a partir das equações de estado do sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 6.3. (Mais detalhes podem ser visto no Apêndice 6-B)

Os limitantes obtidos por meio do 1º índice, correspondentes a multiplicadores constantes e classes com dinâmicas de segunda e quarta ordem serão denotados respectivamente por  $L_*(h_i)$ ,  $i=1,2,3$ . Os limitantes obtidos por meio do 2º índice, correspondentes ao “caso constante” (variáveis de decisão caracterizadas por números reais) e classes lineares de dinâmicas de segunda e quarta ordem serão denotados por  $J_{wi}$ ,  $i=1,2,3$ .

Os três primeiros experimentos correspondem a uma mesma classe de perturbações, apresentando variação apenas de fatores espectrais do ruído de entrada, enquanto o quarto experimento corresponde a uma classe diferente de perturbação.

Para cada um destes experimentos, são apresentados em tabela:

- O desempenho nominal  $\|M_{yr} \mathbf{f}_r\|_2^2$ .
- O limitante  $L_g$ .
- Os limitantes  $L_*(h_i)$ ,  $J_{wi}$ ,  $i=1,2,3$ .
- Um limitante inferior dado por  $L_F \triangleq \|M_{yr}(C)\mathbf{f}_r + M_{y\Delta}(C)T_F\|_2^2$ , onde  $T_F \in RH_2^2$  é tal que  $c_0 [T_F(j\omega)] \leq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

Serão apresentados também, as dinâmicas utilizadas e os correspondentes pontos ótimos de cada experimento. A seguir, os experimentos:

**Experimento 1:** Aqui são permitidas perturbações que não ultrapassem 85% da margem ótima do sistema  $(P_a, C)$ , isto é  $\mathbf{g} = 0.85\mathbf{g}_{\max} \cong 0.22$ .

Fator espectral do ruído de entrada:  $\bar{\mathbf{f}}_r = \frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|_2}$ , onde  $\mathbf{f}_r = \frac{1}{s+1}$ .

Neste experimento, (assim como nos subsequentes) foram determinados limitantes utilizando-se diferentes classes de multiplicadores, que foram denotados por  $L_*(h_1)$ ,  $L_*(h_2)$  e  $L_*(h_3)$  para o 1º índice, e  $J_{w1}$ ,  $J_{w2}$  e  $J_{w3}$  para o 2º índice. Para  $i=1$ , foi resolvido o problema correspondente a multiplicadores constantes (variáveis de decisão

caracterizadas por números reais) e para  $i=2,3$  foram usadas classes lineares de multiplicadores determinadas por dinâmicas de segunda e quarta ordem.

Tabela1-Resultados do Experimento 1

$\ M_{yr} \bar{F}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$L_*(h_3)$	$J_{w1}$	$J_{w2}$	$J_{w3}$	$L_F$
6.5928	342.5771	179.4956	<b>145.53.55</b>	<b>141.8264</b>	686.4559	<b>37.2606</b>	<b>30.5822</b>	22.2770

**Comentário:** Note-se que o limitante  $L_g$  obtido por meio de propriedades elementares de norma é de fato extremamente grosseiro ( $L_g = 342.5771$ ). Observe-se também que a **inclusão de dinâmica** para determinação de classes lineares pode, de fato, dar origem a **limitantes menos conservadores**. Em particular, o 2º índice apresenta uma grande melhora entre o caso constante (que é pior que o caso constante do 1º índice) e o caso dinâmico de 2ª ordem (que chega a ser melhor que o caso dinâmico de 4ª ordem). Ainda com relação ao 2º índice, note-se que o limitante  $J_{w3}$ , correspondente ao caso dinâmico de 4ª , é o que mais se aproxima do limitante inferior  $L_F$ .

Os valores das normas envolvidas na determinação de  $L_g$  são dadas por

$$L_g = \{2.5677 + (3.8057)(1.4452)(2.9292)\}^2 = 342.5771.$$

Com relação ao 1º índice, caso constante, a restrição para que o problema L.M.I. tenha solução finita (de acordo com discussão de existência feita de soluções factíveis feita na seção 3.3) é dada por  $h_1 > \|M_{y\Delta} \mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{-1}\|_{\infty}^2 = 53.5751$ .

Dinâmicas utilizadas e respectivos pontos ótimos:

1º índice (Relaxação lagrangeana):

$$h_1 = 78.2424 \text{ (caso constante);}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$h_2 = g_2 + g_2^{\sim}, g_2 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_2})^{-1} b_{g_2} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix}, b_{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}}^T = [-629.4 \quad 1135.8], d_{g_{opt}} = 328.0342 \text{ são os valores ótimos obtidos.}$$

**Observação:** Para determinar a dinâmica  $(A_{g_2}, b_{g_2})$ , primeiro obteve-se  $c_0 [T_*(h_1)]$ , e em seguida utilizou-se a heurística da seção 3.4 que consiste em utilizar direções descendentes em  $h_1$ , aproximadamente alinhadas com o gradiente do funcional dual, as quais foram obtidas partir da avaliação do funcional

$$\mathfrak{S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \triangleq c_f^T M_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^T M_g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^{-1} M_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

(descrito no final da seção 3.4) em uma grade de  $\mathbb{R}^2$  dada por  $R = \{1.0, 1.5, 2.0, \dots, 11\} \times \{0.5, 1.0, \dots, 10.5\}$ . Foi verificado computacionalmente que  $\mathbf{a}_{1*} = 2.5$  e  $\mathbf{a}_{2*} = 1.5$  são os pontos que maximizam  $\mathfrak{S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  em  $R$ .

Caso dinâmico de ordem 4:

$h_3 = g_3 + g_3^{\sim}$ ,  $g_3 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_3})^{-1} b_{g_3} + d_{g_3}$ , onde:

$$A_{g_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \end{bmatrix}, b_{g_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$c_{g_{opt}} = [-7111.9 \quad 1366.8 \quad -1252.6 \quad 7647.7]$ ,  $d_{g_{opt}} = 551.0663$  são os valores ótimos obtidos.

**Observação:** Novamente, para determinar a dinâmica  $(A_{g_3}, b_{g_3})$ , utiliza-se a heurística da seção 3.4, que consiste em usar direções descendentes para o funcional dual, caracterizadas a partir de  $c_0 [T_*(h_2)]$ . Adicionalmente, avalia-se o funcional  $\mathfrak{S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

(que como foi visto na seção 3.4, é equivalente a avaliar  $\langle \{c_0 [T_*(h_2)]\}_+, \hat{g} \rangle$ , onde  $\hat{g} \in RH_2$  tem ordem prescrita igual a 2) na mesma região  $R$  descrita anteriormente obtendo-se  $\mathbf{a}_{1*} = 6.5$  e  $\mathbf{a}_{2*} = 2$ . A dinâmica final (de quarta ordem) utilizada foi dada por

$$A_{g_3} = \begin{bmatrix} A_{g_2} & 0 \\ 0 & A_{aux} \end{bmatrix}, b_{g_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde  $A_{aux} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -6.5 \end{bmatrix}$ .

Convém observar neste ponto, que o termo que origina o limitante inferior  $L_F$ , isto é,  $T_F \in RH_2^2$  tal que  $c_0 [T_F(j\mathbf{w})] \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , foi obtido a partir de  $T_*(h_3)$ , isto é,  $T_F = kT_*(h_3)$ , onde  $k \in (0,1)$  foi sendo diminuído até que  $c_0 [T_F(j\mathbf{w})] \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ . É possível obter  $T_F$  desta forma pois  $c_0 [0(j\mathbf{w})] \leq 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ , (isto é, 0 pertence ao conjunto factível).

2º índice (S-Procedure):

$$Y_{opt} = 686.4559, \mathbf{I}_{opt} = 116.4788 \text{ (caso constante)}$$

**Observação:** Para obter uma dinâmica para a classe linear  $\bar{S}_Y$ , a qual é confinada a variável de decisão  $Y$ , utiliza-se a heurística da seção 3.7 baseada em Elipsóide de Dynkin, com a simplificação obtida no caso monovariável (para mais detalhes, veja apêndice 6-C)

Caso dinâmico de ordem 2:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{s\~{a}o as din\~{a}micas utilizadas;}$$

$$c_{I_{opt}}^T = [-49.1149 \quad 85.7693], d_{I_{opt}} = 24.8370,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [48.1533 \quad -33.8607], d_{Y_{opt}} = 1.3258.$$

s\~{a}o os pontos \~{o}timos obtidos.

#### Caso din\~{a}mico de ordem 4:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

s\~{a}o as din\~{a}mica utilizadas.

$$c_{I_{opt}}^T = [-68.0570 \quad 127.9314 \quad 36.1371 \quad -229.9394], d_{I_{opt}} = 25.6716,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [-254.7556 \quad -51.4062 \quad 245.5028 \quad 169.6292], d_{Y_{opt}} = 10.5163,$$

s\~{a}o os valores \~{o}timos obtidos.

Todos os procedimentos nos experimentos subsequentes com rela\~{c}\~{a}o \~{a} obten\~{c}\~{a}o de din\~{a}micas e limitante inferior s\~{a}o os mesmos descritos no Experimento 1.

**Experimento 2:** Neste experimento a classe de perturbações é a mesma que a do experimento 1, com variação no fator espectral do ruído de entrada, isto é:

$$g = 0.85g_{\max} \cong 0.22$$

Fator espectral do ruído de entrada:  $\bar{f}_r = \frac{f_r}{\|f_r\|_2}$ , onde  $f_r = \frac{1}{s+0.7}$ .

Tabela2-Resultados do Experimento 2

$\ M_{yr} \bar{f}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$L_*(h_3)$	$J_{w1}$	$J_{w2}$	$J_{w3}$	$L_F$
7.8504	397.8084	237.5954	<b>202.0943</b>	<b>191.1395</b>	686.4559	<b>42.9056</b>	<b>31.5904</b>	21.4521

**Comentário:** Os mesmos comentários do experimento 1 se aplicam aqui. Adicionalmente, note-se que os limitantes correspondentes ao 1º índice estão bem **mais conservadores** que os limitantes correspondentes ao 2º índice (a exceção do caso constante do 2º índice que é sempre muito conservador).

Os valores das normas envolvidas na determinação de  $L_g$  são dadas por

$$L_g = \{2.8019 + (3.8057)(1.4452)(3.1169)\}^2 = 397.8084.$$

Com relação ao 1º índice, caso constante, a restrição para que o problema L.M.I. tenha solução finita é mesma que a do Experimento 1.

Dinâmicas utilizadas e respectivos pontos ótimos:

1º índice (Relaxação lagrangeana):

$$h_1 = 83.0929 \text{ (caso constante);}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$h_2 = g_2 + g_2^{\sim}, g_2 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_2})^{-1} b_{g_2} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_2} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}}^T = [-111.9952 \quad -154.8716] \quad d_{g_2} = 201.5272 \text{ são os valores ótimos obtidos.}$$

Caso dinâmico de ordem 4:

$$h_3 = g_3 + g_3^{\sim}, g_3 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_3})^{-1} b_{g_3} + d_{g_3}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9.5 \end{bmatrix}, b_{g_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}} = [-223.8 \quad -179.1 \quad -303.3 \quad 2768] \quad d_{g_{opt}} = 43.6961 \text{ são os valores ótimos}$$

obtidos.

2º índice (S-Procedure):

$$Y_{opt} = 686.4559, \mathbf{I}_{opt} = 116.4788 \text{ (caso constante)}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ são as dinâmicas utilizadas;}$$

$$c_{I_{opt}}^T = [-14.2520 \quad -21.1527], d_{I_{opt}} = 22.2055,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [68.5481 \quad -68.6980], d_{Y_{opt}} = 1.1291,$$

são os pontos ótimos obtidos.

Caso dinâmico de ordem 4:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

são as dinâmicas utilizadas.

$$c_{I_{opt}}^T = [-4.5 \quad -4.6 \quad -184.6 \quad 1713.4], d_{I_{opt}} = 25.8524,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [66.2285 \quad -58.3557 \quad -50.6619 \quad 129.1367], d_{Y_{opt}} = 2.9932$$

são os pontos ótimos obtidos.

**Experimento 3:** Neste experimento a classe de perturbações é a mesma que a do experimento 1, com variação no fator espectral do ruído de entrada, isto é:

$$g = 0.85g_{\max} \cong 0.22$$

Espectro do ruído de entrada :  $\bar{\mathbf{f}}_r = \frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|_2}$ , onde  $\mathbf{f}_r = \frac{1}{s+5}$ .

Tabela3-Resultados do Experimento 3

$\ M_{yr}\bar{\mathbf{f}}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$L_*(h_3)$	$J_{w1}$	$J_{w2}$	$J_{w3}$	$L_F$
1.9116	131.1869	35.5874	<b>34.5171</b>	<b>33.1</b>	686.4559	<b>15.9548</b>	<b>12.6794</b>	4.3908

**Comentário:** Os mesmos comentários do experimento 1 se aplicam aqui. Adicionalmente, note-se que os limitantes correspondentes ao 1º índice **estão mais próximos** dos limitantes do 2º índice (a exceção do caso constante do 2º índice que é sempre muito conservador).

Os valores das normas envolvidas na determinação de  $L_g$  são dadas por

$$L_g = \{1.3826 + (3.8057)(1.4452)(1.8311)\}^2 = 131.1869.$$

Com relação ao 1º índice, caso constante, a restrição para que o problema L.M.I. tenha solução finita é mesma que a do Experimento 1.

Dinâmicas utilizadas e respectivos pontos ótimos:

1º índice (Relaxação lagrangeana):

$$h_1 = 61.7385 \text{ (caso constante);}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$h_2 = g_2 + g_2^{\sim}, g_2 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_2})^{-1} b_{g_2} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_2} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, b_{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}}^T = [-62.7526 \quad -132.1698] \quad d_{g_{opt}} = 201.56.4222 \text{ são os valores ótimos obtidos.}$$

Caso dinâmico de ordem 4:

$$h_3 = g_3 + g_3^{\sim}, g_3 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_3})^{-1} b_{g_3} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -4.5 \end{bmatrix}, b_{g_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}} = [-465.2 \quad 1013.8 \quad 770.1 \quad -2963.8], d_{g_{opt}} = 20.0321 \text{ são os valores ótimos}$$

obtidos.

2º índice (S-Procedure):

$$Y_{opt} = 686.4559, \quad I_{opt} = 116.4788 \text{ (caso constante)}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ são as dinâmicas utilizadas;}$$

$$c_{I_{opt}}^T = [-60.4010 \quad 141.7101], \quad d_{I_{opt}} = 22.3691,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [33.7664 \quad 5.6851], \quad d_{Y_{opt}} = 1.5441,$$

são os pontos ótimos obtidos.

Caso dinâmico de ordem 4:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -4.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

são as dinâmicas utilizadas;

$$c_{I_{opt}}^T = [50.3939 \quad -59.7277 \quad -174.9735 \quad 612.1221], \quad d_{I_{opt}} = 24.3821,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [87.4593 \quad -49.5651 \quad -63.0944 \quad 57.4303], \quad d_{Y_{opt}} = 1.4481$$

são os pontos ótimos obtidos.

**Experimento 4:** Neste experimento, a classe de perturbações considerada é diferente dos experimentos anteriores.

$$g = 0.65g_{\max} \cong 0.17$$

Fator espectral do ruído de entrada:  $\bar{f}_r = \frac{f_r}{\|f_r\|_2}$ , onde  $f_r = \frac{1}{s+1}$ .

Tabela4- Resultados do Experimento 4

$\ M_{yr}\bar{f}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$L_*(h_3)$	$J_{w1}$	$J_{w2}$	$J_{w3}$	$L_F$
6.5928	63.2087	43.379	<b>40.0547</b>	<b>39.1863</b>	117.7824	<b>25.8612</b>	<b>18.6708</b>	15.3485

**Comentário:** Os mesmos comentários do experimento 1 se aplicam aqui. Adicionalmente, observa-se que foi o experimento em que  $J_{w3}$  esteve mais **próximo do limitante inferior**.

Os valores das normas envolvidas na determinação de  $L_g$  são dadas por

$$L_g = \{2.5677 + (3.8057)(0.4829)(2.9292)\}^2 = 63.2087.$$

Com relação ao 1º índice, caso constante, a restrição para que o problema L.M.I. tenha

solução finita é dada por  $h_1 > \|M_{y\Delta} f_{\Delta\Delta}^{-1}\|_{\infty}^2 = 25.0580$

Dinâmicas utilizadas e respectivos pontos ótimos:

1º índice (Relaxação lagrangeana):

$$h_1 = 45.5254 \text{ (caso constante);}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$h_2 = g_2 + g_2^{\sim}, g_2 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_2})^{-1} b_{g_2} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_2} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}}^T = [-36.9760 \quad -136.1619], d_{g_{opt}} = 86.2092 \text{ são os valores ótimos obtidos.}$$

Caso dinâmico de ordem 4:

$$h_3 = g_3 + g_3^{\sim}, g_3 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_3})^{-1} b_{g_3} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_3} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}, b_{g_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}} = [-45.3 \quad -192.7 \quad -171.4 \quad 1518.6], d_{g_{opt}} = 128.5871$$

são os valores ótimos obtidos.

2º índice (S-Procedure):

$$Y_{opt} = 117.7824, I_{opt} = 63.3012 \text{ (caso constante)}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ são as dinâmicas utilizadas;}$$

$$c_{I_{opt}}^T = [-10.4887 \quad -54.6498], d_{I_{opt}} = 25.2774,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [29.4919 \quad -12.9755], d_{Y_{opt}} = 0.7797,$$

são os pontos ótimos obtidos.

Caso dinâmico de ordem 4:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

são as dinâmicas utilizadas;

$$c_{I_{opt}}^T = [-5.8273 \quad -50.2795 \quad -46.2737 \quad 410.3915], d_{I_{opt}} = 25.8789,$$

$$c_{Y_{opt}}^T = [87.4593 \quad -49.5651 \quad -63.0944 \quad 57.4303], d_{Y_{opt}} = 1.4481$$

são os pontos ótimos obtidos.

Para alternar a localização do ruído, considere agora os sistema de controle da  
figura 6.6

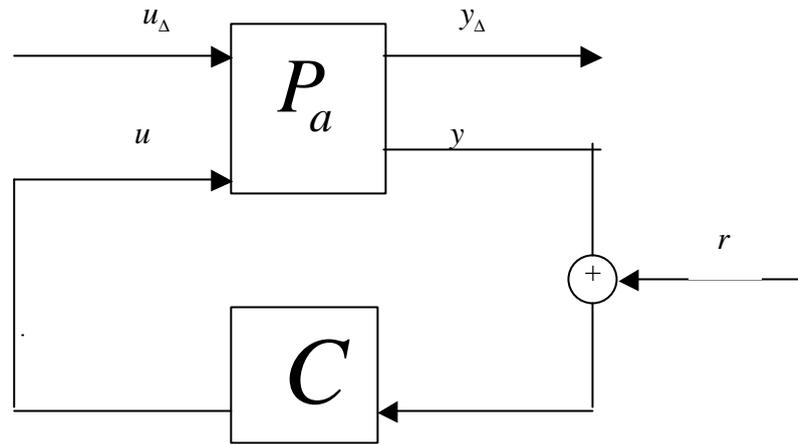


Figura 6.6–Sistema em malha fechada com ruído de medida

**Experimento 5:** Neste experimento, considerou-se a mesma classe de perturbações do experimento 1, isto é

$$g = 0.85g_{\max} \cong 0.22$$

Fator espectral do ruído de medida:  $\bar{f}_r = \frac{f_r}{\|f_r\|_2}$ , onde  $f_r = \frac{1}{s+1}$ .

Os resultados do Experimento 5 se encontram na Tabela 5

Tabela5-Resultados do Experimento 5

$\ M_{yr} \bar{f}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$J_{w1}$	$J_{w2}$	$L_F$
1.3916	218.9664	81.8941	<b>73.3114</b>	189.4319	<b>14.4783</b>	3.3309

**Comentário:** Os mesmos comentários do experimento 1 se aplicam aqui.

Os valores das normas envolvidas na determinação de  $L_g$  são dadas por

$$L_g = \{1.180 + (3.925)(1.4452)(2.4007)\}^2 = 218.9664.$$

Com relação ao primeiro índice, caso constante, a restrição para que o problema LMI

tenha solução finita é dada por  $h_1 > \|M_{y\Delta} f_{\Delta\Delta}^{-1}\|_{\infty}^2 = 60.2176$

Dinâmicas utilizadas e respectivos pontos ótimos:

1º índice (Relaxação lagrangeana):

$$h_1 = 81.8941 \text{ (caso constante);}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$$h_2 = g_2 + \tilde{g}_2, \quad g_2 = c_{g_{opt}}^T (sI - A_{g_2})^{-1} b_{g_2} + d_{g_{opt}}, \text{ onde:}$$

$$A_{g_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4.5 \end{bmatrix}, \quad b_{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ é a dinâmica utilizada;}$$

$$c_{g_{opt}}^T = [149.997 \quad -616.0514], \quad d_{g_{opt}} = 47.3321 \text{ são os valores ótimos obtidos.}$$

2º índice (S-Procedure):

$$Y_{opt} = 189.4319, \quad I_{opt} = 75.6599 \text{ (caso constante)}$$

Caso dinâmico de ordem 2:

$A_I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4.5 \end{bmatrix}, b_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, b_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , são as dinâmicas utilizadas;

$c_{I_{opt}}^T = [-28.4630 \quad 95.2941], d_{I_{opt}} = 11.7699,$

$c_{Y_{opt}}^T = [-33.5028 \quad 137.9397], d_{Y_{opt}} = 14.3662,$

são os pontos ótimos obtidos.

Na próxima seção, serão apresentados experimentos numéricos que ilustram o comportamento de diferentes controladores com relação ao 1º e 2º índices.

## **6.3-Avaliação de diferentes controladores para o modelo “benchmark”.**

Considere novamente, perturbações nos fatores coprimos para o modelo “benchmark” sugerido por Wie & Berstein (1992), a planta generalizada  $P_a$  e o sistema de controle da figura 6.1, com ruído de entrada, conforme foi feito na seção anterior. Será feita a avaliação, por meio dos dois primeiro índices (relaxação lagrangena e “S-Procedure”) de diferentes controladores robustamente estabilizantes para uma mesma classe de perturbações. Foram considerados controladores obtidos a partir da combinação linear convexa entre os parâmetros de Youla dos controladores de margem ótima e desempenho nominal ótimo do modelo “benchmark” (As realização desses controladores são obtidas imediatamente por rotinas computacionais do “Matlab” ).

Assim, denotando os parâmetros de Youla destes controladores respectivamente por  $K_{mo}$  e  $K_{go}$ , os controladores avaliados serão da forma

$$K(\mathbf{a}) = K_{mo} + \mathbf{a}(K_{go} - K_{mo}), \quad \mathbf{a} \in [0,1].$$

Note que para  $\mathbf{a} = 0$ , tem-se o controlador de margem ótima, e a medida que  $\mathbf{a}$  cresce, “caminha-se em direção” ao controlador de desempenho nominal ótimo. Os detalhes de como são obtidas as realizações de um controlador nesta classe escrito nesta encontram no Apêndice 6-D

A classe de perturbações considerada será  $S_{\Delta} = \{\Delta \in RH_{\infty}^{2 \times 1} : \|\Delta\|_{\infty} < \mathbf{g}\}$ , onde  $\mathbf{g} = 0.25\mathbf{g}_{\max} \cong 0.07$ .

Assim, para cada  $\mathbf{a}$  com o qual se obtém o controlador  $K(\mathbf{a})$  será apresentado na tabela 6

- A margem de estabilidade de cada controlador, isto é  $\mathbf{m}_{\mathbf{g}} = \frac{1}{\|M_{\Delta\Delta}(K(\mathbf{a}))\|_{\infty}}$
- O desempenho nominal  $\|M_{yr} \mathbf{f}_r\|_2^2$ .
- O limitante  $L_g$ .
- Os limitantes  $L_*(h_i)$ ,  $J_{wi}$ ,  $i=1,2$ , com dinâmicas de primeira e segunda ordem respectivamente.

**Observação:** Neste caso, para que  $K(\mathbf{a})$  defina um controlador robustamente estabilizante, o valor de  $\mathbf{m}_{\mathbf{g}}$  correspondente deve ser maior que 0.07.

## Experimento 6:

Espectro do ruído de entrada :  $\bar{\mathbf{f}}_r = \frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|_2}$ , onde  $\mathbf{f}_r = \frac{1}{s+1}$ .

Tabela6-Resultados do Experimento 6

$\mathbf{a}$	$\mathbf{m}_e$	$\ M_{yr} \bar{\mathbf{f}}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$J_{w1}$	$J_{w2}$
<b>0.2</b>	0.0754	<b>4.8732</b>	110.7342	<b>8.0194</b>	<b>7.9824</b>	<b>17.4966</b>	<b>9.8828</b>
0.15	0.0924	5.2188	23.8455	8.7369	8.6935	19.2156	10.7160
0.10	0.1187	5.5807	15.9186	9.4901	9.401	21.0991	11.5851
0.05	0.1645	5.90	13.501	10.310	10.2081	23.1683	12.5406
0	0.27	6.5928	13.2427	11.587	11.5870	25.5020	13.6082

**Observação:** Foi verificado que para  $\mathbf{a} > 0.2$ , o controlador obtido não estabiliza o sistema de controle  $(P_a, C)$  para a classe de perturbações considerada.

Como o aspecto a ser ilustrado era o desempenho de diferentes controladores por meio do 1º e do 2º índices, para cada controlador determinado por  $\mathbf{a}$  e para cada índice, foram usadas as mesmas classes lineares, quais sejam, a do experimento 1. Pelo mesmo motivo citado acima, não foram apresentados valores de um limitante inferior  $L_F$ .

Pode-se observar que o desempenho dos controladores vai piorando a medida que o desempenho nominal correspondente piora. Observa-se também, que o segundo índice mostrou-se sempre pior que o primeiro. Recorde-se que na seção anterior, em que se avaliou o desempenho do controlador de margem ótima para perturbações de magnitude igual a 85% da margem ótima, o caso de dinâmico de ordem 2 do segundo

índice mostrava-se consideravelmente melhor do que os caso dinâmicos de segunda e quarta ordem do primeiro índice.

Outro ponto a ser observado, é que à exceção de  $L_g$ , todos os outros índices mostram o controlador em  $\mathbf{a} = 0.2$  como o melhor dentre os considerados (veja em negrito), o que informalmente significa que **predomina o desempenho nominal em relação a margem de estabilidade.**

Na próxima seção, serão apresentados experimentos numéricos que comparam diretamente o 1º índice e o 3º índice.

## 6.4-Comparação entre o 1º e 3º índice.

Nesta seção, considera-se uma planta a nominal estável  $P(s) \in RH_\infty$ , e o conjunto de modelos perturbados dado por perturbações aditivas ponderadas, isto é

$$P(\Delta) = P + \Delta, \Delta \in RH_\infty: \|\bar{W}\Delta\|_\infty \leq \mathbf{g}$$

onde  $\bar{W} \in RH_\infty$  tal que  $\bar{W}^{-1} \in RH_\infty$  é o fator de ponderação. Escrevendo  $E \triangleq \bar{W}\Delta$  ou equivalentemente  $\Delta = WE$  onde  $W = \bar{W}^{-1}$ , tem-se que

$$P(\Delta) = P + WE, E \in RH_\infty: \|E\|_\infty \leq \mathbf{g}$$

A planta generalizada correspondente a representação dessas perturbações no modelo de perturbação em realimentação é dada por

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ W(s) & P(s) \end{bmatrix}.$$

Escrevendo  $P(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p$  ( $P(s) \in RH_2$ ) e  $W(s) = C_w (sI - A_w)^{-1} B_w + D_w$ , segue-se que

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_w & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_w & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_w)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_p)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix}.$$

ou seja, uma realização  $(A_a, B_a, C_a, D_a)$  de  $P_a$  é dada por

$$(6.4.1) \quad A_a = \begin{bmatrix} A_w & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_w & C_p \end{bmatrix}, \quad D_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_w & 0 \end{bmatrix}.$$

O fator de ponderação usado é  $W(s) = \frac{s+1}{s+2}$ , de modo que uma realização

$(A_w, B_w, C_w, D_w)$  de  $W(s)$  é dada por

$$(6.4.2) \quad A_w = -2, \quad B_w = 1, \quad C_w = -1, \quad D_w = 1.$$

A seguir, usa-se o fato de que sendo  $P(s)$  estável, monovariável, estritamente próprio, com uma realização dada por

$$(6.4.3) \quad A_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2], \mathbf{a}_1 > 0, \mathbf{a}_2 > 0,$$

tem-se que uma família de controladores estabilizantes é caracterizada pela seguinte família de realizações

$$(6.4.4) \quad \begin{cases} A_c = \begin{bmatrix} -(\mathbf{a}_{q1} + \mathbf{b}_1) & -(\mathbf{a}_{q2} + \mathbf{b}_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_c = [(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{q1} - \mathbf{b}_1) \quad (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{q2} - \mathbf{b}_2)]. \end{cases}$$

na qual para um dado modelo nominal (isto é , dados  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ ),  $\mathbf{a}_{q1}, \mathbf{a}_{q2}$  são os parâmetros livres da família de controladores.

Para obter a realização acima, foi usada a parametrização de controladores estabilizantes dada por  $C = (I - QP)^{-1} Q$ ,  $Q$  estável (Vidyasagar,1980). Os detalhes dessa dedução podem ser encontrados no Apêndice 6-D.

Antes de prosseguir com a descrição do experimento, convém observar que para o caso monovariável, a relaxação lagrangeana do **Problema c**, que corresponde a dedução do 3º índice feita na seção 2.6, torna-se mais simples. Recorde-se que o Problema c é dado por

$$\mathbf{Problema\ c:} \quad \sup_{T \in RH_\infty} \left\| \Theta_F^a T \Theta_F^b + \Xi_F \right\|_2^2, \quad \text{sujeito a } \left\| \Xi_c + T \right\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{g}}.$$

onde

$$\Theta_F^a = M_{y\Delta} P_{12}^{-1}; \quad \Theta_F^b = P_{21}^{-1} M_{\Delta r} \mathbf{f}_r; \quad \Xi_F = M_{yr} \mathbf{f}_r; \quad \Xi_c = P_{11},$$

$P_{11}$ ,  $P_{12}$  e  $P_{21}$  definidos de forma a saitsfazer as condições do Teorema 2.6.1 enunciado na seção 2.6.

No caso monovariável, **Problema c** pode ser escrito como

$$\max_{T \in RH_\infty} \left\| \Theta_F T + \Xi_F \right\|_2^2, \quad \text{sujeito a } \left\| \Xi_c + T \right\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{g}}, \quad \Theta_F = \Theta_F^a \Theta_F^b$$

e de maneira similar a feita na seção 2.6, o funcional lagrangeano correspondente ao problema de otimização restrito é dado por :

$$\begin{aligned} L(\tilde{T}, H) = & -\left\{ \langle H\tilde{T}, \tilde{T} \rangle + 2\langle \tilde{T}, \Xi_H \rangle \right\} + \left\| \Xi_F \right\|_2^2 + (1/\mathbf{g}^2) \langle g_0, g_0 H \rangle + (1/\mathbf{g}^2) \langle g_0, g_0 \tilde{\Gamma}_F \rangle \\ & - \langle H\tilde{\Xi}_c, \tilde{\Xi}_c \rangle - \langle \tilde{\Gamma}_F \tilde{\Xi}_c, \tilde{\Xi}_c \rangle, \end{aligned}$$

onde

$$H \in RL_\infty, \quad H^\sim = H \quad \text{e} \quad H(j\mathbf{w}) > 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{T} = g_0 T, \quad \Xi_H = H\tilde{\Xi}_c + (\tilde{\Gamma}_F \tilde{\Xi}_c - \tilde{\Xi}_F), \quad \tilde{\Xi}_F = \tilde{\Theta}_F \Xi_F, \quad \tilde{\Gamma}_F = \tilde{\Theta}_F \tilde{\Theta}_F, \quad \tilde{\Theta}_F = \Theta_F g_0^{-1}, \quad \tilde{\Xi}_c = \Xi_c g_0,$$

$$g_0 = (s+1)^{-1}.$$

Assim, a existência de uma solução finita para  $L_*(H) = \sup \{ L(\tilde{T}, H) : \tilde{T} \in RH_2 \}$

é garantida por pela condição  $H(j\mathbf{w}) > 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ . Para converter o problema de achar

$L_*(H)$  em um dado  $H$  em um problema de otimização com restrição definida por LMI, como é feita na Proposição 3.8.1 da seção 3.8, é necessário obter realizações de  $E_H$  e  $\{\tilde{\Xi}_H\}_+$  nas condições da Proposição 3.8.1, onde  $E_H \in RH_\infty$  é tal que  $H = E_H^\sim + E_H$ . Utilizando uma classe linearmente parametrizada definida por

$$S_H = \left\{ H = E_H^\sim + E_H, E_H \in RH_\infty : E_H = C_H (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} + D_H \right\}$$

onde  $(\bar{A}, \bar{B})$  é a dinâmica que define a classe,  $C_H$  e  $D_H$  são os parâmetros livres da classe, o resto do procedimento é análogo ao da seção 3.3, no sentido de que minimizar  $L_*(H)$  sobre  $S_H$  é equivalente a um problema de otimização linear no espaço euclidiano com restrição LMI.

Prosseguindo com a descrição dos experimentos, leva-se em conta (6.4.3) e (6.4.4) para escolher uma planta nominal estável  $P(s)$  e um controlador estabilizante  $C(s)$ . Assim, tem-se que

$$(6.4.5) \quad A_p = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = [1 \quad 1]$$

é a planta nominal considerada, e

$$(6.4.6) \quad A_c = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_c = [-1 \quad -1],$$

é o controlador estabilizante utilizado. Substituindo (6.4.5) e (6.4.2) em (6.4.1) para obter a realização da planta generalizada  $P_a$ , e considerando o sistema de controle  $(P_a, C)$ , com o controlador  $C$  determinado pela realização (6.4.6), com ruído de entrada conforme a figura 6.3, e o correspondente sistema em malha fechada

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(s) & M_{\Delta r}(s) \\ M_{y\Delta}(s) & M_{xr}(s) \end{bmatrix}$$

verifica-se que o que este sistema de controle  $(P_a, C)$  tem margem de estabilidade igual a  $m_e = 2.08$ . A magnitude das classes de perturbações consideradas nessa seção será

$g = 0.85M_e \cong 1.77$  e o espectro do ruído de entrada será  $\bar{\mathbf{f}}_r = \frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|_2}$ , onde  $\mathbf{f}_r = \frac{1}{s+1}$ . Os

limitantes correspondentes ao 1º índice serão novamente denotados por  $L_*(h_i)$ ,  $i=1,2$ , sendo  $L_*(h_1)$  o resultado obtido para o caso constante, e  $L_*(h_2)$  o resultado para classes lineares com dinâmica de ordem 2, obtida a com o mesmo procedimento descrito no Experimento 1 da seção 6.2. Analogamente, os limitantes correspondentes ao 3º índice serão denotados por  $L_*(H_i)$ ,  $i=1,2$ .

A seguir, o experimento 7:

### Experimento 7:

$g = 0.85m_e \cong 1.77$

Espectro do ruído de entrada:  $\bar{\mathbf{f}}_r = \frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|_2}$ , onde  $\mathbf{f}_r = \frac{1}{s+0.6}$ .

Tabela 7-Resultado do Experimento 7

$\ M_{yr} \bar{F}_r\ _2^2$	$L_g$	$L_*(h_1)$	$L_*(h_2)$	$L_*(H_1)$	$L_*(H_2)$
0.2922	116.67	10.5060	6.0456	<b>7.9745</b>	<b>4.2789</b>

Dinâmica utilizada para o 1º índice :  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dinâmica utilizada para o 3º índice :  $A = \begin{bmatrix} 0 & -7.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Comentário:** Observa-se então, que os limitantes do **3º índice são menos conservadores do que os do 1º índice**, tanto no caso constante, quanto no caso dinâmico de segunda ordem. Mais especificamente, tem-se que  $L_*(h_1)$  é aproximadamente 30% maior que  $L_*(H_1)$ , e  $L_*(h_2)$  é aproximadamente 40% maior que  $L_*(H_2)$ .

Na próxima seção, de maneira similar a que foi feita na seção 6.3, será avaliado o comportamento de diferentes controladores mediante os três índices apresentados neste trabalho de tese.

## 6.5-Desempenho de controladores em presença de perturbações aditivas estáveis.

Considere novamente a planta generalizada  $P_a$  relativa à perturbações aditivas para a planta nominal estável descrita na seção anterior, e o sistema de controle  $(P_a, C)$ , com ruído de entrada como na figura 6.3, onde  $C$  é o controlador estabilizante com uma realização dada por (6.4.6). Como foi dito anteriormente, a margem de estabilidade desse sistema de controle é  $\mathbf{m}_g = 2.08$ . Denotando por  $K_m$  o parâmetro de Youla deste controlador, e  $K_{qo}$  o parâmetro de Youla do controlador que determina o desempenho nominal ótimo do sistema de controle  $(P_a, C)$ , serão considerados diferentes controladores obtidos a partir da combinação linear convexa

$$K(\mathbf{a}) = K_m + \mathbf{a}(K_{qo} - K_{mo}), \quad \mathbf{a} \in [0, 1]$$

Será feita então, a avaliação por meio dos três índices apresentados neste trabalho de tese, de controladores  $K(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} \in [0, 1]$ , para uma mesma classe de perturbações. A classe de perturbações considerada será  $S_\Delta = \{\Delta \in RH_\infty^{2 \times 1} : \|\Delta\|_\infty < \mathbf{g}\}$ , onde  $\mathbf{g} = 0.50$ .

Para esse experimento foi considerado apenas o caso constante de cada índice. Para cada  $\mathbf{a}$  com o qual se obtém o controlador  $K(\mathbf{a})$  serão apresentados de forma tabulada

- A margem de estabilidade de cada controlador, isto é  $\mathbf{m}_e = \frac{1}{\|M_{\Delta\Delta}(K(\mathbf{a}))\|_{\infty}}$ .
- O desempenho nominal  $\|M_{yr}\mathbf{f}_r\|_2^2$ .
- O limitante  $L_g$ .
- Os limitantes  $L_*(h_{opt})$ ,  $J_w$ , e  $L_*(H_{opt})$  correspondentes ao caso constante do 1º, 2º e 3º índices respectivamente.

**Observação:** Neste caso, para que  $K(\mathbf{a})$  defina um controlador robustamente estabilizante, o valor de  $\mathbf{m}_e$  correspondente deve ser maior que 0.50

### Experimento 8:

Espectro do ruído de entrada:  $\bar{\mathbf{f}}_r = \frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|_2}$ , onde  $\mathbf{f}_r = \frac{1}{s+1}$ .

Tabela 8-Resultados do experimento 8

$\mathbf{a}$	$\mathbf{m}_e$	$\ M_{yr}\bar{\mathbf{f}}_r\ _2^2$	$L_g$	$\ M_{\Delta\Delta}\mathbf{f}_{\Delta\Delta}^{-1}\ _{\infty}^2$	$L_*(h_{opt})$	$h_{opt}$	$J_w = Y_{opt}$	$\mathbf{I}_{opt}$	$L_*(H_{opt})$	$H_{opt}$
0.15	0.5612	0.2418	28.34	7.5098	1.6215	7.54	63.2557	14.7337	1.3838	0.2680
0.125	0.6593	0.2522	6.9821	3.4585	0.92	3.47	12.7599	6.6140	0.7575	0.0997
0.10	0.7964	0.2631	3.5218	2.2596	0.7425	2.2649	5.1493	4.2079	0.6642	0.0741
0.075	1.0034	0.2742	2.2219	1.6892	0.6856	1.7156	2.7156	3.0614	0.6514	0.0687
<b>0.05</b>	<b>1.3513</b>	0.2856	<b>1.6391</b>	1.3584	<b>0.6839</b>	1.4915	<b>1.7836</b>	2.1848	<b>0.6453</b>	0.0670

**Observação:** Foi verificado que para  $\mathbf{a} > 0.15$ , o controlador obtido não estabiliza o sistema de controle  $(P_a, C)$  para a classe de perturbações considerada.

Pode-se observar, que todos os limitantes (incluindo o limitante mais conservador  $L_g$ ), vão melhorando a medida que a margem de estabilidade aumenta, e portanto, todos os índices mostram o controlador em  $\mathbf{a} = 0.05$  como o melhor entre os considerados, o que, informalmente significa que **predomina o efeito da margem de estabilidade em relação ao desempenho nominal.**

## 6.6-Conclusões

Neste capítulo, foram apresentados experimentos numéricos correspondentes a obtenção de limitantes superiores para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$ .

Utilizando-se o Matlab, foram feitas simulações para os três índices deduzidos neste trabalho nas seções 2.4, 2.5 e 2.6, utilizando-se as correspondentes parametrizações lineares descritas nas seções 3.3, 3.5 e 3.8 respectivamente. Adicionalmente, em alguns experimentos, foram utilizadas as heurísticas descritas nas seções 3.4 e 3.7, para escolha das dinâmicas que determinam as classes linearmente parametrizadas.

Os pontos ilustrados nestes experimentos foram

- O papel da dinâmica na melhoria dos limitantes (seção 6.2).

- Desempenho de diferentes controladores mediante os índices deduzidos neste trabalho para uma mesma classe de perturbações ( seções 6.3 e 6.5).
- Comparação entre o 1º e 3º índice, na qual este último deu origem a limitantes menos conservadores que o primeiro. (seção 6.4).

Os experimentos da seção 6.2 foram feitos com um fixo controlador, qual seja, o de margem ótima para o modelo “benchmark” sugerido por Wie & Berstein (1992), em presença de perturbações nos fatores coprimos (representadas no modelo de perturbação em realimentação) cujas magnitudes não ultrapassem 85% da margem ótima de estabilidade. Observa-se então, que aumentar a ordem das dinâmicas que determinam as classes lineares as quais serão confinadas as variáveis de decisão de cada problema de otimização correspondente a determinado índice, de fato, dá origem a limitantes substancialmente menos conservadores. Em particular, a melhoria do caso dinâmico em relação ao caso constante do 2º índice é consideravelmente superior à melhoria ocorrida no 1º índice.

Na seção 6.3, foram feitos experimentos para diferentes controladores e uma mesma classe de perturbações, para a mesma planta nominal usada na seção 6.2 em presença de perturbações nos fatores coprimos, e observou-se que tanto o 1º quanto o 2º índice de desempenho indicam o controlador com o melhor desempenho nominal como o melhor controlador entre os considerados, tendo predominado, neste caso, o desempenho nominal em relação a margem de estabilidade. Ainda neste exemplo, (com  $g = 0.07$ ) verificou-se que os limitantes fornecidos pelo 2º índice mostraram-se mais conservadores que os do 1º índice tanto no caso constante, como utilizando classes lineares determinadas por dinâmicas de segunda e quarta ordem. Recorde-se que na seção 6.2 (onde se permitiu perturbações de magnitudes maiores) o 2º índice com classe linear

determinada por dinâmica de segunda apresenta melhor limitante do que todos os outros limitantes do 1º índice.

Nas seções 6.4 e 6.5, foi considerada uma planta nominal estável e perturbações aditivas ponderadas. Na seção 6.4, foi comparado o desempenho de um mesmo controlador por meio do 1º e 3º índice. Nesse caso, observou-se que o 3º índice deu origem a limitantes menos conservadores.

Na seção 6.5, de maneira análoga à feita na seção 6.3, foram considerados diferentes controladores para avaliação de desempenho por meio do 1º, 2º e 3º índice. Neste caso, todos os índices apontam o controlador que determina a maior margem de estabilidade como o melhor controlador dentre os considerados.

## **Apêndice 6-A: Realizações de fatores coprimos normalizados**

Uma fatoração coprima normalizada de  $P(s)$  é determinada a partir de uma coprima não-normalizada. Neste sentido, escreve-se

$$D(s) = \frac{s^4 + 2s^2}{q_D(s)}, \quad N(s) = \frac{1}{q_D(s)}, \quad q_D(s) = (s+1)(s+2)(s+1.5)(s+2.5).$$

Note-se que  $q_D(s) = s^4 + 7s^3 + 17.75s^2 + 19.25s + 7.5$ , de modo que , sendo

$$D(s) = \frac{\hat{p}_D(s)}{q_D(s)} + 1 = \frac{\hat{p}_D(s) + q_D(s)}{q_D(s)} = \frac{s^4 + 2s^2}{q_D(s)},$$

$$\hat{p}_D(s) = s^4 + 2s^2 - q_D(s) = -7s^3 - 15.75s^2 - 19.25s - 7.5,$$

uma realização de  $D(s) = C_D (sI - A_D)^{-1} B_D + D_D$  utilizando a forma canônica de controle é dada por

$$A_D = \begin{bmatrix} -7 & -17.75 & -19.25 & -7.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_D = [-7 \quad -15.75 \quad -19.25 \quad -7.5],$$

$$D_D = 1.$$

Analogamente, uma realização de  $N(s)$ , utilizando a forma canônica de controle é dada por

$$N(s) = C_N (sI - A_D)^{-1} B_D, C_N = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Uma fatoração coprima normalizada de  $P(s)$  é então obtida a partir de fatoração “inner-outer” de  $\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$  (Francis, 1987, pg 94). Isto é, se

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = G_i(s) G_o(s)$$

onde  $G_i(s)$  é “inner” e  $G_o(s)$  é “outer”, define-se  $\bar{N}(s) = N(s)G_o^{-1}(s)$  e

$\bar{D}(s) = D(s)G_o^{-1}(s)$   $\bar{D}(s) = D(s)G_o^{-1}(s)$ , e é imediato verificar que

$$\bar{N}^{\sim}(s)\bar{N}(s) + \bar{D}^{\sim}(s)\bar{D}(s) = I,$$

isto é,  $\bar{N}(s)$  e  $\bar{D}(s)$  são fatores coprimos normalizados.

A seguir, é obtida uma realização  $(A_{\bar{N}}, B_{\bar{N}}, C_{\bar{N}})$  de  $\bar{N}(s)$ , qual seja

$$A_{\bar{N}} = \begin{bmatrix} -0.1914 & -0.1114 & -1.3276 & 0.4108 \\ 0.1093 & -0.4064 & -0.3732 & -0.7570 \\ 0.5035 & 1.7723 & 1.0569 & -0.7496 \\ 0.4346 & 2.2937 & 1.9226 & -1.8339 \end{bmatrix}, \quad B_{\bar{N}} = \begin{bmatrix} 0.3084 \\ 0.1884 \\ -0.5793 \\ -1.5918 \end{bmatrix},$$

$$C_{\bar{N}} = [-0.5345 \quad 0.1464 \quad 0.1038 \quad -0.1240],$$

e uma realização  $(\check{A}_{\bar{D}}, \check{B}_{\bar{D}}, \check{C}_{\bar{D}}, \check{D}_{\bar{D}})$  de  $\bar{D}^{-1}(s)$ , qual seja,

$$\check{A}_{\bar{D}} = \begin{bmatrix} -0.1807 & 0.0442 & -0.9569 & 0.0300 \\ 0.1158 & -0.3114 & -0.1468 & -0.9896 \\ 0.4834 & 1.4799 & 0.3607 & -0.0344 \\ 0.3797 & 1.4903 & 0.0097 & 0.1313 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_{\bar{D}} = \begin{bmatrix} -0.3084 \\ -0.1884 \\ 0.5793 \\ 1.5918 \end{bmatrix},$$

$$\check{C}_{\bar{D}} = [-0.0345 \quad -0.5047 \quad -1.2017 \quad 1.2346], \quad \check{D}_{\bar{D}} = 1,$$

## Apêndice 6-B: Realizações de um sistema em malha fechada

Considere o sistema de controle  $(P_a, C)$  da figura 6.3 da seção 6.2, e uma equação de estado correspondente a  $P_a$  dada por

$$P_a : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_a x(t) + B_{\Delta} u_{\Delta}(t) + B_u u(t) \\ y_{\Delta}(t) = C_{\Delta} x(t) + D_{\Delta\Delta} u_{\Delta}(t) + D_{\Delta u} u(t) \\ z = C_z x(t) + D_{z\Delta} u_{\Delta}(t) \end{cases}$$

$$\text{onde } B_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{B}_{\bar{D}} \\ 0 & -B_{\bar{N}} \tilde{D}_{\bar{D}} \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\bar{D}} \\ B_{\bar{N}} \tilde{D}_{\bar{D}} \end{bmatrix}, C_{\Delta} = [\tilde{C}_{\bar{D}} \quad 0], C_z = [0 \quad C_{\bar{N}}],$$

$$D_{\Delta\Delta} = [0 \quad -\tilde{D}_{\bar{D}}], D_{\Delta u} = \tilde{D}_{\bar{D}}, D_{z\Delta} = [I \quad 0].$$

Analogamente, considere uma equação de estado correspondente ao controlador  $C$  dada por

$$C : \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases}$$

O sistema de controle  $(P_a, C)$  pode ser descrito pela equação de estado

$$(P_a, C): \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = A_M \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + B_M \begin{bmatrix} u_\Delta(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_\Delta(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_M \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + D_M \begin{bmatrix} u_\Delta(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

onde

$$A_M = \begin{bmatrix} A_u + B_u D_C C_y & B_u C_C \\ B_C C_y & A_C \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} B_\Delta + B_u D_C D_{y\Delta} & B_u \\ B_C D_{y\Delta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_M = \begin{bmatrix} C_\Delta + D_{\Delta u} D_C C_y & D_{\Delta u} C_C \\ C_y & 0 \end{bmatrix}, \quad D_M = \begin{bmatrix} D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta u} D_C D_{y\Delta} & D_{\Delta u} \\ D_{y\Delta} & 0 \end{bmatrix}.$$

e portanto,

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{\Delta\Delta}(s) & M_{\Delta r}(s) \\ M_{y\Delta}(s) & M_{yr}(s) \end{bmatrix} = C_M (sI - A_M)^{-1} B_M + D_M.$$

## Apêndice 6-C: Escolha de dinâmicas para os experimentos relativos ao limitante obtido por meio de “S-Procedure”

Pelo Apêndice 3-E, referente a seção 3.7, tem-se que, para um ponto interior  $(Y, \Lambda)$  do conjunto factível do problema de otimização correspondente à dedução do limitante por “S-Procedure”, uma perturbação factível em  $Y$  é dada por

$$E_{Y^*}(j\omega) = -\frac{1}{2\mathbf{s}_s(j\omega)} \left\{ \Gamma_{TY}^{-1} \mathbf{f}_r \tilde{\mathbf{f}}_r \Gamma_{TY}^{-1} \right\} (j\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

onde

$$\mathbf{s}_s(j\omega) = \text{Tr} \left\{ \left[ T_Y^{-1} \mathbf{f}_r \tilde{\mathbf{f}}_r (T_Y^{-1})^\sim \right] (j\omega) \right\}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

$$\Gamma_{TY} = T_Y T_Y^\sim, \quad T_Y = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{f}_a, \quad A(Y, \Lambda) = \tilde{\mathbf{f}}_a \mathbf{f}_a.$$

No caso monovariável, isto é,  $\Gamma_{TY} \in RL_\infty$ , pode-se escrever  $\mathbf{s}_s = \Gamma_{TY}^{-1} \mathbf{f}_r \tilde{\mathbf{f}}_r$ , e

conseqüentemente tem-se que  $E_{Y^*} = -\frac{1}{2} \Gamma_{TY}^{-1}$ . Note-se então que

$$\Gamma_{TY} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{f}_a^{-1} (\mathbf{f}_a^{-1})^\sim \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} A(Y, \Lambda)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \left\{ A(Y, \Lambda)^{-1} \right\}_{33},$$

de modo que  $E_{Y^*} = -\frac{1}{2} \left[ \left\{ A(Y, \Lambda)^{-1} \right\}_{33} \right]^{-1}$ . Assim, para obter uma dinâmica  $(A_Y, b_Y)$

que determine uma classe linear  $\bar{S}_Y$  para a variável  $Y$ , basta obter uma realização para

a parte estável de  $\left[ \left\{ A(Y, \Lambda)^{-1} \right\}_{33} \right]^{-1}$ . Adicionalmente, pode-se impor uma restrição à

ordem de  $(A_Y, b_Y)$  utilizando-se das mesmas idéias do final da seção 3.4. Com relação à

variável  $\Lambda$ , para evitar o crescimento da ordem das dinâmicas que determinam as

classes  $\bar{S}_\Lambda$ , foi utilizada a mesma dinâmica obtida para o 1º índice.

## Apêndice 6-D: Controladores correspondentes a combinação linear convexa de parâmetros de Youla

Considere a combinação linear convexa apresentada na seção 6.3, qual seja

$$(1) \quad K(\mathbf{a}) = K_2 + \mathbf{a}(K_1 - K_2), \quad \mathbf{a} \in [0, 1],$$

onde  $K_1$  e  $K_2$ , são, respectivamente os parâmetros de Youla do controlador de desempenho nominal ótimo e de margem ótima e do controlador para o modelo “benchmark” sugerido por Wie & Berstein (1992) dado por  $P(s) = 1/s^2(s^2 + 2)$ .

Denotando por  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$  as funções de transferência dos controladores de desempenho nominal ótimo e de margem ótima respectivamente, será obtida uma expressão equivalente a (1), isto é, uma família monoparamétrica de controladores estabilizantes  $C(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} \in [0, 1]$ , tais que  $C(0) = C_2$  (controlador de margem ótima) e  $C(1) = C_1$  (controlador de desempenho nominal ótimo), em termos de fatorações coprimas. O ponto de partida para isto, é usar a própria parametrização de Youla de  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$  (Vidyasagar, 1980) dada por

$$C_i = (K_i \tilde{N}_p + Y_0)^{-1} (K_i \tilde{D}_p - X_0)$$

onde  $(\tilde{D}_p)^{-1} \tilde{N}_p = N_p D_p^{-1} = P$ ,  $P(s) = 1/s^2 (s^2 + 2)$ ,  $(X_0, Y_0)$  é uma solução particular de  $XN_p + YD_p = I$ ,  $K_1$  e  $K_2$  são, respectivamente, os parâmetros de Youla do controlador de desempenho nominal ótimo e de margem ótima. Assim, definindo  $N_C^i = (K_i \tilde{D}_p - X_0)$  e  $D_C^i = (K_i \tilde{N}_p + Y_0)$ , tem-se que  $(D_C^i)^{-1} N_C^i = C_i$  é uma fatoração coprima de  $C_i$ ,  $i=1,2$ . Pode-se pensar então, então uma fatoração coprima de cada  $C(\mathbf{a})$ , a partir de cada  $K(\mathbf{a})$  dado pela expressão (1). Neste sentido, define-se

$$N_C(\mathbf{a}) = K(\mathbf{a}) \tilde{D}_p - X_0 = \mathbf{a} K_1 \tilde{D}_p + (1-\mathbf{a}) K_2 \tilde{D}_p - (\mathbf{a} X_0 + (1-\mathbf{a}) X_0),$$

$$D_C(\mathbf{a}) = K(\mathbf{a}) \tilde{N}_p - Y_0 = \mathbf{a} K_1 \tilde{N}_p + (1-\mathbf{a}) K_2 \tilde{N}_p - (\mathbf{a} Y_0 + (1-\mathbf{a}) Y_0),$$

ou equivalentemente:

$$N_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a} N_C^1 + (1-\mathbf{a}) N_C^2, \quad D_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a} D_C^1 + (1-\mathbf{a}) D_C^2$$

de modo que uma expressão equivalente a (1) em termo de fatorações coprimas é dada por

$$(2) \quad C(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} D_C^1 + (1-\mathbf{a}) D_C^2)^{-1} (\mathbf{a} N_C^1 + (1-\mathbf{a}) N_C^2), \quad \mathbf{a} \in [0,1].$$

onde  $(D_C^i)^{-1} N_C^i = C_i$ . É preciso garantir que o controlador  $C(\mathbf{a})$  dado por (2) seja de fato estabilizante para o modelo  $P$ . Para isto, considere a seguinte Proposição auxiliar

**Proposição A6 :** Se  $C_i = (\bar{D}_C^i)^{-1} \bar{N}_C^i$  são controladores estabilizantes para  $P = N_p D_p^{-1}$ ,

onde  $(N_p, D_p)$  é fatoração coprima de  $P$ , e para  $i=1,2$ ,  $(\bar{D}_C^i)^{-1} \bar{N}_C^i$  são fatorações

coprimas de  $C_i$  tais que  $\bar{D}_C^i D_p - \bar{N}_C^i N_p = I$ , então o controlador definido por

$$C(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \bar{D}_C^1 + (1-\mathbf{a}) \bar{D}_C^2)^{-1} (\mathbf{a} \bar{N}_C^1 + (1-\mathbf{a}) \bar{N}_C^2)$$

é um controlador estabilizante para  $P = N_p D_p^{-1}$

▽

**Demonstração:** Serão usados os seguintes fatos cujas demonstrações podem ser encontradas Correa (1992):

**Fato 1:** Se  $(P, C)$  é estável, então para qualquer par de fatorações coprimas

$C = (\tilde{D}_C)^{-1} \tilde{N}_C$ ,  $P = N_p D_p^{-1}$ ,  $(\tilde{N}_C, \tilde{D}_C)$  tem-se que

$$\tilde{D}_C D_p - \tilde{N}_C N_p \in U(RH_\infty) \triangleq \{ \Gamma \in M(RH_\infty) : \Gamma^{-1} \in M(RH_\infty) \}.$$

**Fato2:** Se existe uma par de fatorações coprimas  $C = (\tilde{D}_C)^{-1} \tilde{N}_C$ ,  $P = N_p D_p^{-1}$ , para o

qual  $\tilde{D}_C D_p - \tilde{N}_C N_p \in U(RH_\infty)$ , tem-se que  $(P, C)$  é estável.

Assim escrevendo  $\bar{N}_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{N}_C^1 + (1-\mathbf{a})\bar{N}_C^2$ ,  $\bar{D}_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{D}_C^1 + (1-\mathbf{a})\bar{D}_C^2$ , pelo Fato 2, basta verificar que  $\bar{D}_C(\mathbf{a})D_P - \bar{N}_C(\mathbf{a})N_P \in U(RH_\infty)$ , para provar que  $(P, C(\mathbf{a}))$  é estável. Note-se então, que  $\bar{D}_C(\mathbf{a})D_P - \bar{N}_C(\mathbf{a})N_P$ , pode ser escrito como

$$\bar{D}_C(\mathbf{a})D_P - \bar{N}_C(\mathbf{a})N_P = \mathbf{a}(\bar{D}_C^1D_P - \bar{N}_C^1N_P) + (1-\mathbf{a})(\bar{D}_C^2D_P - \bar{N}_C^2N_P)$$

Da hipótese de que  $\bar{D}_C^iD_P - \bar{N}_C^iN_P = I$ , segue-se que

$$\bar{D}_C(\mathbf{a})D_P - \bar{N}_C(\mathbf{a})N_P = \mathbf{a}I + (1-\mathbf{a})I = I \in U$$

e portanto  $(P, C(\mathbf{a}))$  é estável, o que conclui a demonstração □

Assim, se  $(D_C^i)^{-1}N_C^i = C_i$  são fatorações coprimas quaisquer de  $C_i$ ,  $i=1,2$ , tem-se pelo

Fato 1 que  $D_C^iD_P - N_C^iN_P = U_i \in U(RH_\infty)$ . Definindo então

$$(3) \quad \bar{N}_C^i = U_i^{-1}N_C^i, \quad \bar{D}_C^i = U_i^{-1}D_C^i,$$

tem-se que  $(\bar{N}_C^i, \bar{D}_C^i)$  é uma fatoração coprima de  $C_i$  tal que  $\bar{D}_C^iD_P - \bar{N}_C^iN_P = I$ . Segue

da Proposição A-6 que

$$(4) \quad C(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\bar{D}_C^1 + (1-\mathbf{a})\bar{D}_C^2)^{-1}(\mathbf{a}\bar{N}_C^1 + (1-\mathbf{a})\bar{N}_C^2)$$

é um controlador estabilizante para  $P$ .

A seguir, será mostrado como um controlador  $C(\mathbf{a})$ , escrito na forma (4) pode ser escrito apenas em função de seus termos polinomiais (não necessariamente coprimos) e conseqüentemente, em função de suas realizações.

Usando o fato de que o modelo é monovariável, isto é  $P = \frac{n_p}{d_p}$ , pode-se escrever

$$(5) \quad N_p = \frac{n_p}{d_{FP}} \text{ e } D_p = \frac{d_p}{d_{FP}}$$

para algum polinômio  $d_{FP}$  tal que  $n_p$  e  $d_{FP}$  são coprimos e  $d_p$  e  $d_{FP}$  também são coprimos. O mesmo pode ser feito para os controladores  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$ , isto é, pode-se obter expressões para fatorações coprimas de  $(N_c^i, D_c^i)$  de  $C_i$  a partir de  $C_i = \frac{n_c^i}{d_c^i}$ , com uma simplificação adicional de que os controladores de desempenho nominal ótimo e de margem ótima para  $P(s) = 1/s^2(s^2 + 2)$ , encontrados com as rotinas de Matlab, são estáveis, de modo que uma fatoração coprime de cada  $C_i$  é dada por

$$(6) \quad N_c^i = \frac{n_c^i}{d_c^i} \text{ e } D_c^i = I,$$

com  $n_c^i$  e  $d_c^i$  primos entre si. Utilizando o Fato 1 e as expressões (5) e (6), tem-se que

$$D_c^i D_p - N_c^i N_p = U_i \in U(RH_\infty)$$

$\Leftrightarrow$

$$U_i = \frac{d_p}{d_{FP}} - \frac{n_c^i}{d_c^i} \frac{n_p}{d_{FP}} = \frac{d_c^i d_p - n_c^i n_p}{d_c^i d_{FP}}$$

$\Leftrightarrow$

$$U_i^{-1} = \frac{d_c^i d_{FP}}{d_c^i d_p - n_c^i n_p}.$$

Definindo então:

$$(7) \quad \bar{N}_C^i = U_i^{-1} N_C^i = \frac{d_c^i d_{FP}}{d_c^i d_p - n_c^i n_p} \frac{n_c^i}{d_c^i} = \frac{d_{FP} n_c^i}{\mathbf{x}_{ce}^i},$$

$$(8) \quad \bar{D}_C^i = U_i^{-1} D_C^i = U_i^{-1} = \frac{d_c^i d_{FP}}{d_c^i d_p - n_c^i n_p} = \frac{d_{FP} d_c^i}{\mathbf{x}_{ce}^i},$$

onde  $\mathbf{x}_{ce}^i = d_c^i d_p - n_c^i n_p$ , segue-se que  $(\bar{N}_C^i, \bar{D}_C^i)$  definidos por (7) e (8) são fatorações

coprimas de  $C_i$  tais que  $\bar{D}_C^i D_p - \bar{N}_C^i N_p = I$ . Segue da Proposição A6 que todo  $C(\mathbf{a})$

dado por

$$C(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \bar{D}_C^i + (1-\mathbf{a}) \bar{D}_C^2)^{-1} (\mathbf{a} \bar{N}_C^i + (1-\mathbf{a}) \bar{N}_C^2)$$

com  $(\bar{N}_C^i, \bar{D}_C^i)$  definidos por (7) e (8), é um controlador estabilizante para  $P$ .

Denotando  $N_C(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \bar{N}_C^i + (1-\mathbf{a}) \bar{N}_C^2)$  e  $D_C(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \bar{D}_C^i + (1-\mathbf{a}) \bar{D}_C^2)$ , segue-se de

(7) e (8) que

$$N_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \frac{d_{FP} n_c^1}{\mathbf{x}_{ce}^1} + (1-\mathbf{a}) \frac{d_{FP} n_c^2}{\mathbf{x}_{ce}^2} = \frac{\mathbf{a} d_{FP} n_c^1 \mathbf{x}_{ce}^2 + (1-\mathbf{a}) d_{FP} n_c^2 \mathbf{x}_{ce}^1}{\mathbf{x}_{ce}^1 \mathbf{x}_{ce}^2},$$

$$D_C(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \frac{d_{FP} d_c^1}{\mathbf{x}_{ce}^1} + (1-\mathbf{a}) \frac{d_{FP} d_c^2}{\mathbf{x}_{ce}^2} = \frac{\mathbf{a} d_{FP} d_c^1 \mathbf{x}_{ce}^2 + (1-\mathbf{a}) d_{FP} d_c^2 \mathbf{x}_{ce}^1}{\mathbf{x}_{ce}^1 \mathbf{x}_{ce}^2},$$

de modo que

$$C(\mathbf{a}) = (D_C(\mathbf{a}))^{-1} N_C(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} d_{FP} n_c^1 \mathbf{x}_{ce}^2 + (1-\mathbf{a}) d_{FP} n_c^2 \mathbf{x}_{ce}^1}{\mathbf{a} d_{FP} d_c^1 \mathbf{x}_{ce}^2 + (1-\mathbf{a}) d_{FP} d_c^2 \mathbf{x}_{ce}^1},$$

ou seja, a família monoparamétrica de controladores estabilizantes  $C(\mathbf{a})$ , tais que tais que  $C(0) = C_2$  (controlador de margem ótima) e  $C(1) = C_1$  (controlador de desempenho nominal ótimo), é dada apenas em função dos polinômios de  $P$  e  $C_i$  pela expressão

$$C(\mathbf{a}) = (D_C(\mathbf{a}))^{-1} N_C(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} n_c^1 \mathbf{x}_{ce}^2 + (1-\mathbf{a}) n_c^2 \mathbf{x}_{ce}^1}{\mathbf{a} d_c^1 \mathbf{x}_{ce}^2 + (1-\mathbf{a}) d_c^2 \mathbf{x}_{ce}^1}$$

onde  $\mathbf{x}_{ce}^i = d_c^i d_p - n_c^i n_p$ ,  $P = \frac{n_p}{d_p}$  e  $C_i = \frac{n_c^i}{d_c^i}$ .

**Observação:** Os controladores  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$  (desempenho nominal ótimo e margem

ótima) obtidos para  $P(s) = 1/s^2 (s^2 + 2)$  com uso das rotinas de Matlab, são dados por

$$n_c^1(s) = -178.1089s^4 - 257.139s^3 - 383.9761s^2 - 434.8411s - 141.4214,$$

$$d_c^1(s) = s^5 + 9.0824s^4 + 42.7454s^3 + 127.9544s^2 + 258.5543s + 166.4155,$$

$$n_c^2(s) = -144.28s^3 - 9.6139s^2 - 274.4237s - 68.3392,$$

$$d_c^2(s) = s^4 + 41.4495s^3 + 109.4988s^2 + 219.6122s + 254.2971.$$

## Apêndice 6-E: Uma classe de controladores estabilizantes obtida por meio de “parametrização $Q$ ”

Considere o modelo  $P$  estável, monovariável, estritamente próprio, caracterizado na seção 6.4 pela seguinte realização

$$(9) \quad A_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2], \mathbf{a}_1 > 0, \mathbf{a}_2 > 0,$$

Para se obter uma família de controladores estabilizantes para o modelo acima, considera-se inicialmente, a seguinte parametrização (Vidyasagar, 1980):

$$C = (I + QP)^{-1} Q, \quad Q \in RH_\infty$$

Escrevendo  $P = \frac{n}{d}$  e  $Q = \frac{n_q}{d_q}$ ,  $d_q$  Hurwitz, e substituindo na expressão acima, tem-se

que

$$C = \left(1 + \frac{n_q n}{d_q d}\right)^{-1} \frac{n_q}{d_q} = \left[\frac{dd_q + nn_q}{d_q d}\right]^{-1} \frac{n_q}{d_q}$$

$\Leftrightarrow$

$$C = \left[\frac{d_q d}{dd_q + nn_q}\right] \frac{n_q}{d_q} = \frac{dn_q}{dd_q + nn_q}.$$

Considerando o caso especial  $n_q = d$ , tem-se que

$$(10) \quad C = \frac{dd}{dd_q + nn_q} = \frac{d}{d_q + n}$$

Por outro lado, escrevendo

$$d_q(s) = s^2 + \mathbf{a}_{q_1}s + \mathbf{a}_{q_2}, \quad \mathbf{a}_{q_1} > 0, \mathbf{a}_{q_2} > 0,$$

$$n(s) = \mathbf{b}_1s + \mathbf{b}_2,$$

$$d(s) = s^2 + \mathbf{a}_1s + \mathbf{a}_2,$$

e substituindo em (10) obtém-se que

$$(11) \quad C = \frac{\tilde{n}}{d_c} + 1$$

onde

$$\tilde{n}(s) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{q_1} - \mathbf{b}_1)s + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{q_2} - \mathbf{b}_2), \quad d_c = s^2 + (\mathbf{a}_{q_1} + \mathbf{b}_1)s + (\mathbf{a}_{q_2} + \mathbf{b}_2).$$

Assim, tem-se que a família de controladores estabilizantes do modelo  $P$  caracterizado pela realização (9), tem uma família de realizações na forma canônica controlável dada

por

$$\begin{cases} A_c = \begin{bmatrix} -(\mathbf{a}_{q_1} + \mathbf{b}_1) & -(\mathbf{a}_{q_2} + \mathbf{b}_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_c = [(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{q_1} - \mathbf{b}_1) \quad (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{q_2} - \mathbf{b}_2)]. \end{cases}$$

# Considerações finais

Neste trabalho, foram estudados problemas de controle de sistemas lineares LTI envolvendo índices de desempenho  $H_2$  e perturbações não-paramétricas. Inicialmente, no capítulo 2, considerou-se a avaliação de desempenho de um dado controlador que assegure a estabilidade de um sistema sujeito a perturbações não-paramétricas em realimentação e limitadas em norma. Dada a dificuldade de resolução do correspondente problema  $H_2/H_\infty$ , foram deduzidos – no contexto de perturbações estruturadas caracterizadas por funções de transferência limitadas em norma – dois limitantes superiores para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$  análogos aos obtidos por Stoorvogel (1992), Toivonen & Pensar (1995) Paganini (1999), Feron (1997), Paganini & Feron (2000). O primeiro limitante (seção 2.4) foi obtido por meio de uma técnica de relaxação lagrangeana e o segundo problema (seção 2.5) por meio da técnica conhecida como “S-Procedure”. Adicionalmente, um terceiro limitante, distinto daqueles previamente conhecidos, foi obtido com base em propriedades elementares de LFT’s (seção 2.6).

Como estes limitantes superiores são definidos por meio de problemas de otimização em espaços de funções, foram consideradas versões truncadas dos mesmos, nas quais as variáveis de decisão (multiplicadores) são confinadas a subespaços de dimensão finita pré-especificados, de forma análoga ao que foi feito em Feron (1997) para o caso de perturbações passivas, e sugerido por Boyd et al (1994) em um contexto mais geral.

Mostrou-se então, que os correspondentes problemas truncados são equivalentes a problemas de minimização de funcionais lineares definidos em espaços euclidianos com restrições definidas por LMI's (**Proposição 3.3.2 e Proposição 3.5.2**). No sentido de evitar escolhas inteiramente arbitrárias para os subespaços considerados, foi possível utilizar o “gradiente” dos funcionais definidos em espaços de funções para a especificação iterativa destes subespaços (seção 3.4, seção 3.7 e seção 3.8).

No Capítulo 4, com base nos limitantes superiores para o índice “pior-caso”  $H_2$  (a exceção do limitante deduzido na seção 2.6) são propostos procedimentos de síntese de controladores para bom desempenho  $H_2$ -robusto, quais sejam, minimizar estes limitantes sobre conjuntos de controladores robustamente estabilizantes.

A existência de termos envolvendo produtos entre o parâmetro de Youla dos controladores e os multiplicadores correspondentes a cada limitante, sugere a utilização de procedimentos do tipo “D-K iteration” nos quais, em cada passo, tenta-se alternadamente resolver os problemas formulados com relação a determinadas variáveis, enquanto outras são mantidas fixas.

Assim como no Capítulo 3, mostrou-se que quando o parâmetro de Youla é confinado a subespaços de dimensão finita (e as demais variáveis têm seus valores fixados) os correspondentes problemas truncados podem ser formulados em termos de problemas de otimização linear em espaços euclidianos com restrições definidas por LMI's (**Proposição 4.2.4** e sua generalização na **seção 4.4**, e **Proposição 4.5.2**).

No caso da síntese baseada no limitante deduzido por meio de relaxação lagrangeana, pode-se também utilizar a caracterização de direções descendentes para o funcional de custo por meio do “gradiente” do mesmo, no sentido de evitar escolhas arbitrárias para o subespaço ao qual será confinado o parâmetro de Youla.

No Capítulo 5, foram considerados problemas de filtragem robusta relativos a perturbações não-paramétricas nos fatores espectrais das densidades espectrais de potência dos sinais. As mesmas técnicas utilizadas para os problemas relativos a controle robusto, mais especificamente, relaxação lagrangeana e confinamento de variáveis de decisão a subespaços de dimensão finita são aplicáveis aos problemas de filtragem considerados. Diferentemente do que ocorre nos problemas relativos a controle robusto, os problemas aqui formulados não possuem termos envolvendo produtos entre multiplicadores e filtros, de modo que a síntese de um filtro pode ser realizada por meio de um problema de otimização conjunta sobre filtros e multiplicadores sem necessidade de procedimentos do tipo “D-K iteration”. De fato, quando tanto as funções de transferência quanto os multiplicadores são confinados a subespaços de dimensão finita pré-especificados, os problemas de síntese de filtros em questão são equivalentes à problemas de minimização de funcionais lineares sob restrições dadas por LMI’s com respeito às variáveis correspondentes aos filtros e multiplicadores em conjunto (**Proposição 5.3.3 e Proposição 5.4.3**).

Por fim, são apresentados alguns exemplos numéricos, utilizando as rotinas de Matlab para resolução de problemas de otimização com restrições definidas por LMI’s que ilustram os procedimentos descritos neste trabalho para obtenção de limitantes superiores para o índice de desempenho “pior-caso”  $H_2$ .

Como sugestão de trabalhos futuros, seria natural analisar versões dos problemas de análise e síntese aqui tratados nas quais seriam consideradas classes de ordem fixa de multiplicadores e controladores/parâmetros de Youla (ao invés das classes lineares aqui utilizadas). Neste sentido, poder-se-ia estudar os correspondentes problemas de otimização com restrições dadas por desigualdades matriciais bilineares (BMI’s) tentando explorar o caráter específico das mesmas na sua possível conversão em

restrição LMI's (como no caso do chamado problema misto  $H_2/H_\infty$ , (Scherer, 1995)) ou na utilização de métodos iterativos para o tratamento de BMI's como sugeridos por Mesbashi et al (2000).

Com relação a um tópico mais específico, no contexto de “D-K iteration” para síntese com base no 1º limitante haveria também interesse em se analisar o problema de minimização do funcional dual (para um dado multiplicador) sobre todos os controladores estabilizantes – já que um dos principais resultados de Stoorvogel (1993) converte este problema (para o caso de multiplicadores constantes e perturbações não-estruturadas) em uma seqüência de problemas mistos  $H_2/H_\infty$  para os quais é possível obter (por meio de programação convexa) soluções aproximadas de ordem igual à ordem da planta generalizada (Kargonekar & Rotea, 1991).

## Referências Bibliográficas

- [1] BANJERDPONGCHAI, D. & JONATHAN, P. h., 1998. “Parametric Robust  $H_2$  control design with generalized multipliers via LMI synthesis” . *International Journal of Control*, v.70, n.3, pp. 481-503.
- [2] BERNSTEIN, D.S. & HADDAD, W.M.,1989. “LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: A Riccat equation approach”. *IEEE Trans.Automat.Control*, v.34, pp.293-305.
- [3] BOYD, S.P., EL GHAOUI, L., FERON, E. & BALAKRISHNAM V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM App. Math 15, Philadelphia.
- [4] BOLZERN, P. & COLANERI, P., 1994 “Optimal robust state estimation for uncertain linear systems”. *Proc. 1st IFAC Symp. Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 152-161.
- [5] BROWN, R. G. & HWANG, P.Y.,1997. *Introduction to Random Signal and Applied Kalman Filtering*, John Wiley & Sons.
- [6] CHEN, C.T. & KASSAM, S.A.,1984. “Robust Winer filtering for multiple inputs with channel distortion”. *IEEE Trans .Inform. Theory*, v.30, pp. 68-75.
- [7] CORRÊA, G.O.,1994. “Introdução ao Controle Ótimo no Domínio da Frequência”. *Controle e Automação*, 5 Edição Especial (mini-curso do 10º C.B.A).
- [8] CORRÊA,G.O; SOARES, T. M. and SALES, D. M., 1997. “Approximate solutions to  $H_2 / H_\infty$  problems via  $H_2 - \text{cost} / H_2 - \text{constraint}$  problems”. *International Journal of Control*, v. 67, n. 14, pp. 333-353.
- [9] CORRÊA, G.O & SALES, D.M., 2005. *On Upper Bounds on Worst-Case  $H_2$  Performance Obtained with Dynamic Multipliers*. In:Research Report CSC/LNCC nº 41/2005.
- [10] DARRAGH, J.C. & LOOZE, D.P., 1984. “Noncausal minimax linear estimation for systems with uncertain second-order statistics”. *IEEE Trans.Automat.Control*, v. 29, pp. 555-557.
- [11] DOYLE, J.,1982. “Analysis of feedback systems with structured uncertainties”. *IEE Proceedings*, v. 129, pp. 242-250.

- [12] DOYLE, J., ZHOU, K., & BODENHEIMER, B., 1989. "Optimal control with mixed  $H_2$  performances objectives". *Proc. of Amer. Control Conf.*, Pittsburgh, PA, pp. 2065-2070.
- [13] DULLERUD, G.E. & PAGANINI, F., 2000. "A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach". Springer –Verlag, New York.
- [14] FAN, M. K. H., TITS, A.L., & DOYLE, J.C., 1991. "Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics". *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 36, pp. 25-38.
- [15] FERON, E., 1997. "Analysis of robust  $H_2$  performance using multiplier theory" . *SIAM J. Control Optimization*, v.35, pp. 160-177.
- [16] FERON, E., APKARIAN, P., & GAHINET, P. 1996. "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions". *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 41, n.7, pp. 1041-1046.
- [17] FRANCIS, B., 1987. "A Course on  $H_\infty$  Control Theory". v.88, Lect. Not. & Inf. Sc., Springer-Verlag.
- [18] GAHINET, P, APKARIAN, P., & CHILALI, M., 1996. "Parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainties". *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 41, n.7, pp. 1041-1046.
- [19] GREEN, M & LIMEBER, D.J., 1995. *Linear Robust Control*, Prentice – Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- [20] GEROMEL, J.C., 1999. "Optimal linear filtering under parameter uncertainty" . *IEEE Signal. Processing. Control*, v. 47, pp. 168-175.
- [21] HOW, J.P., 1993. *Robust Control design with real parameter uncertainty using absolute stability theory*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [22] KARINA, A. B., SOUZA, C.E. & TROFINO, A., 2005. "Robust  $H_2$  filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric lyapunov functions". *Systems & Control Letters*, v. 54, pp. 251-262.
- [23] KASSAM, S.A & POOR, H.V., 1985. "Robust techniques for signal processing: a survey" . *IEEE Proceedings*, v. 73, pp. 433-481.
- [24] KHARGONEKAR, P. P. & ROTEA, M. A., 1991. "Mixed  $H_2/H_\infty$  control : A convex optimization approach". *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 36, pp. 824-837.
- [25] MCFARLANE, D. & GLOVER, K., 1990. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description*. v. 138, Lect. Not. Cont. & Inf. Sc., Springer –Verlag.

- [26] MESBASHI, M., SAFANOV, M. G. & PAPAVALASSILOPOULOS, G. P.,2000. "Bilinearity and Complementary in Robusto Control". In: *Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control*, El Ghaoui, L.& Niculescu, S.I.(eds), SIAM, Philadelphia.
- [27] NETT, C. N.,1986. "Algebraic Aspects of Linear Control Systems Stability". *IEEE Trans. Automat. Control*, v.31, pp. 941-949.
- [28] NEMIROVSKI, A. & GAHINET, 1997. "The Projective method for solving linear matrix inequalities". *Math. Programming*, v.77,pp. 163-190.
- [29] NIKOUKHAH, R. & DELEBECQUE, F.,1992. "On a stochastic diffrential game and its relationship with mixed  $H_2/H_\infty$  control" *Proc. Amer. Control Conf.*, Chigaco, pp. 1380-1384.
- [30] ORHN, K., AHLÉN, A. & STERNAD, M., 1995. "A probabilistic approach to multivariable robust filtering and open-loop control". *IEEE Trans.Automat. Control*, v.40, pp. 405-418.
- [31] PAGANINI, F., 1999. "Convex methods robustness analysis of continuous-time systems". *IEEE Trans.Automat.Control*, v. 44, pp. 239-252.
- [32] PAGANINI, F. & FERON, E., 2000. "Linear Matrix Inequality Methods for Robust  $H_2$  Analysis : A Survey with Comparisons". In: "*Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control*", El Ghaoui, L.& Niculescu, S.I.(eds), SIAM , Philadelphia.
- [33] PETERSON, I.R. & McFARLANE, D.C.,1991. "Robust estimation for uncertain systems". *Proc. of the 30th Conf. Decision and Control*, Brighton,U.K, pp. 2630-2631.
- [34] PETERSON, I.R. & McFARLANE, D.C.,1994. "Optimal guaranted cost control and filtering for uncertain linear systems".*IEEE Trans.Automat.Control*, v. 39, pp. 1971-1977.
- [35] POOR, H.V.,1980. "On Robust Wiener Filterinnng". *IEEE Trans.Automat. Control*, v. 25, pp. 531-536.
- [36] SABERI, A., PEDDAPULLAIAH, S. & CHEN, B. M., K.,1995. " $H_2$  Optimal Control". Prentice Hall Interantional, UK.
- [37] STOORVOGEL, A A.,1993. "The robust  $2 H$  control problem: A worst-case design". *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 38, pp.1358-1370.
- [38] SCHERER, C.W., 1995. "From LMI analysis to multichannel mixed lmi synthesis: A general procedure". *Selected Topics Identification Model. Control*, v. 8, pp. 1-8.
- [39] SHAKED, U. & SOUZA, C.E.,1995. "Robust minimum variance filtering". *IEEE Signal. Processing. Control*, v. 43, pp. 2474-2483.

- [40] SOUZA, C.E. & TROFINO, A., 2000. “An LMI approach to the design of robust  $H_2$  filters”. In: “*Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control*”, El Ghaoui, L.& Niculescu, S.I.(eds), SIAM, Philadelphia.
- [41] TOIVONEN, H. & PENSAR, J.,1995. “LQG control with robust performance against LTI uncertainties”. *Proc. of the 3<sup>rd</sup> Eur.Cont.Conf.*, Rome.
- [42] WIE, B., & BERNSTEIN, D.S. 1992. “Benchmark problems for robust control design”. *Proc. of the 3<sup>rd</sup> Am.Cont.Conf.*, Chicago.
- [43] WILLEMS, J.C., 1971. “Lest Squares Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation”. *IEEE Trans. Automat. Control*, v.16, pp.621-634.
- [44] YANG, K.Y, HALL, S. R., FERON, E., 2000. “ Robust  $H_2$  control”. In *Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control*, El Ghaoui, L.& Niculescu, S.I.(eds), SIAM , Philadelphia.
- [45] YOUNG, P.M.,1993. *Robustness with parametric and dynamic uncertainty*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125.
- [46] ZHOU, K., DOYLE, J. & GLOVER , K.,1996. “*Robust and Optimal Control*”. Prentice – Hall, Enplewood Cliffs, NJ, USA.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)