Resumo

Neste trabalho usamos métodos variacionais para mostrar a existência de solução fraca para dois tipos de problema. O primeiro trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t).$$

O segundo é referente ao sistema Hamiltoniano

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Abstract

In this work we use variational methods to show the existence of weak solutions for two types problems. The first, is related with a following Ordinary Differential Equations of the form

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t).$$

The second is relating at the Hamiltonian Systems

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoria dos Pontos Críticos e Sistemas Hamiltonianos

por

Leopoldo Maurício Tavares Barbosa †

sob orientação do

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Outubro de 2007

†O autor contou com apoio financeiro da Capes

Teoria dos Pontos Críticos e Sistemas Hamiltonianos

por

Leopoldo Maurício Tavares Barbosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG
Orientador

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro de 2007

Agradecimentos

-Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bençãos e as graças alcançadas.

-Aos Professores José de Arimatéia e Claudianor Oliveira pela atenção e paciência durante a realização deste trabalho.

-Ao Professor Marco Aurélio pela atenção e auxilio dado durante todo o curso.

-Aos Professores Giovany e Angelo por terem aceitado me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

-A todos que fazem parte da minha família, em especial a meu irmão Renato Maurício pelo apoio e confiança depositada em mim.

-Aos professores da Pós-Graduação: Daniel Cordeiro, Jaime, Marco Aurélio e Arimatéia pelas disciplinas lecionadas e que contribuiram para a formação do meu conhecimento.

-Aos professores: Vânio e Braulio pela confiança a mim atribuida.

-A todos os que fazem parte do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG.

-Aos colegas de curso pelo companherismo, motivação e que diretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

-A Capes pelo apoio financeiro.

-Aos projetos Casadinho/CNPQ e Instituto do Milênio.

Dedicatória

A minha família em especial a meu irmão Renato Maurício.

Notações

(1) $(.,.)$ produto interno.

(2) Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função, usamos ao longo da dissertação as seguintes notações:

(i) $\|v\|$ é referente a norma usual de v no $\mathbb{R}^N$.

(ii) $|x|$ é o valor absoluto de x, se $n = 1$.

(3) Se $f : X \to Y$ é uma função com X e Y espaços de Banach, usamos as mesmas notações do item (2).

(4) [.] referência bibliográfica.

(5) $D^{'}$ derivada no sentido das distribuições.

(6) X^* espaço dual de X.

(7) $\rightharpoonup$ convergência fraca.

(8) $q.t.p$ quase todo ponto.

(9) $\phi^c = \{u \in X : \phi(u) \leq c\}$.

(10) $K^c = \{u \in X : \phi(u) = c \text{ e } \phi^{'}(u) = 0\}$.

(11) $A_\delta = \{u \in X : dist(u, A) \leq \delta\}$.

(12) $\mathbb{C}^k$ Espaço dos vetores com k coordenadas complexas.

(13) $dist(u, A) = inf\{\|u - v\|; v \in A\}$ distância do ponto u ao conjunto A.

(14) $\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} = \left(\int_0^T \|v(t)\|^p dt + \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ norma no Espaço $W^{1,p}([0, T])$.

Conteúdo

Notações 6

Introdução 6

1 Princípios de Minimax **9**

1.1 Pseudo - gradiente 9

1.2 Lema de Deformação 13

1.3 Condições de Compacidade 21

2 Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado **29**

2.1 A Desigualdade de Wirtinger 30

2.2 Existência de Solução 35

3 A Transformada de Legendre **46**

3.1 Introdução 46

3.2 Funções Convexas 47

3.3 Função de Legendre 49

3.4 Inequações 59

3.5 Dual Hamiltoniano 73

3.6 Soluções Periódicas para o Sistema Hamiltoniano Convexo 78

3.7 Subharmônicas 92

3.8 Oscilações Livres com Período Minimal Prescrito 98

3.9 Oscilações Livres com Energia Prescrita 102

4 Pontos Críticos de Funcionais Invariantes **114**

4.1 S^1-índice 115

4.2 O Lema de Deformação 115
4.3 Teorema da Multiplicidade 130
4.4 Multiplicidade de Órbitas Hamiltonianas Periódicas em uma Superfície Convexa 134

A Séries de Fourier **144**

B Funcionais Diferenciáveis **147**

C Resultados Gerais **153**

Bibliografia **157**

Introdução

Nesta dissertação nos baseamos principalmente em [12] que corresponde ao curso de Métodos de Minimax em Teoria de Pontos Críticos que foi ministrado na Universidade de Brasília em Janeiro e Fevereiro de 1983. Estamos interessados em usar métodos variacionais para determinar soluções fracas para os seguintes problemas. O primeiro trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t). \tag{1}$$

Em particular, se considerarmos $G(u) = -cosu$, obtemos a equação do pêndulo forçado

$$u^{''}(t) + sen(u(t)) = f(t).$$

A existência de solução T-periódica para a equação (1) é devido a Ambrosetti-Rabinowitz e consiste em determinar os pontos críticos do funcional energia definido por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'}{}^2}{2} - G(u) + fu \right] dt.$$

O segundo problema trata-se de encontrar soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

onde $J : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ é tal que

$$J(x, y) = (-y, x)$$

e ∇ denota o gradiente com respeito a u.

No caso forçado é natural assumir que H é T-periódica com respeito a t e observar soluções T-periódicas ou soluções kT-periódicas para algum $k \geq 2$, o qual chamaremos posteriormente de soluções subharmônicas.

No caso livre é natural observar soluções periódicas não-constantes com período prescrito ou energia prescrita.

No **Capítulo 1** fizemos um breve estudo sobre Pseudo-gradiente, o qual é uma ferramenta importante para o desenvolvimento do Lema de Deformação que foi abordado neste capítulo. Além disso, definimos algumas condições de compacidade que são de grande importância para o desenvolvimento e o entendimento dos Lemas e os Teoremas abstratos que serão vistos no decorrer desta dissertação.

No **Capítulo 2** primeiramente mostramos algumas desigualdades, dentre as quais, a desigualdade de Wirtinger, as quais são muito importantes no estudo de soluções periódicas. Mostramos também que o espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \ \textit{é absolutamente contínua, T-periódica e} \int_0^T |u^{'}(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno definido por

$$(u, v) = \int_0^T (u^{'} v^{'} + uv) dt,$$

e o funcional energia ϕ associado a equação (1) satisfaz a condição Fraca de Palais-Smale (WPS) definida no Capítulo 1. Além disso, verificamos a existência de solução T-periódica para a equação

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t),$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função 2π-periódica e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função T-periódica.

No **Capítulo 3** fizemos um breve estudo sobre função de Legendre e transformada de Legendre, os quais serão muito utilizados na procura de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano convexo. No primeiro momento nos preocupamos em encontrar soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'}(t) = J \nabla H(t, u(t)).$$

Num segundo momento encontramos soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) = J \nabla H(u(t))$$

com período minimal prescrito e com energia prescrita.

No **Capítulo 4** fizemos um breve estudo sobre funcionais invariantes, subconjuntos invariantes e aplicações invariantes, que serão de muita importância para mostrarmos e entendermos uma forma mais geral do Lema de Deformação e o Teorema da Multiplicidade de pontos críticos que abordaremos neste capítulo. Além disso, vamos fazer um breve estudo sobre o número de órbitas Hamiltonianas periódicas em uma superfície convexa.

No **Apêndice A** fizemos uma breve revisão sobre as séries de Fourier.

No **Apêndice B** definimos a derivada de Fréchet e mostramos que os funcionais utilizados na dissertação são de classe C^1.

Finalmente no **Apêndice C** enunciamos alguns resultados da Análise funcional, Teoria da medida e Espaços de Sobolev que foram usados na dissertação.

Capítulo 1

Princípios de Minimax

Neste capítulo nosso objetivo é demonstrar o Lema de Deformação e alguns Teoremas abstratos, os quais serão de grande importância no desenvolvimento dos próximos capítulos, para tanto, usaremos o conceito de pseudo-gradiente e algumas condições de compacidade.

1.1 Pseudo - gradiente

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $Y = \{u \in X : \phi^{'}(u) \neq 0\}$. Um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y é uma aplicação contínua localmente Lipschitziana $V : Y \to X$ tal que, para cada $u \in Y$,*

$$\|V(u)\| \leq 2\,\|\phi^{'}(u)\|, \tag{1.1}$$

$$\langle \phi^{'}(u), V(u)\rangle \geq \|\phi^{'}(u)\|^2. \tag{1.2}$$

Lema 1.1 *Sob as hipóteses da Definição 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y.*

Demonstração:

Dado $u \in Y$, temos $\phi^{'}(u) \neq 0$ e

$$\|\phi^{'}(u)\| = sup\,\{\langle \phi^{'}(u), w\rangle : \|w\| = 1\}.$$

Segue da definição de supremo que dado $\epsilon = \frac{\|\phi^{'}(u)\|}{3} > 0$, existe $w_u \in X$ com $\|w_u\| = 1$ e

$$\langle \phi^{'}(u), w_u\rangle > \|\phi^{'}(u)\| - \epsilon$$

implicando

$$\langle \phi^{'}(u), w_u \rangle > \frac{2}{3} \ \|\phi^{'}(u)\|.$$

Considerando a função $v : Y \to X$ dada por

$$v(u) = \frac{3}{2}\|\phi^{'}(u)\| \, w_u$$

e denotando $v = v(u)$, temos

$$\|v\| = \frac{3}{2} \ \|\phi^{'}(u)\| < 2 \, \|\phi^{'}(u)\|. \tag{1.3}$$

Por outro lado,

$$\langle \phi^{'}(u), v \rangle = \frac{3}{2} \ \|\phi^{'}(u)\| \, \langle \phi^{'}(u), w_u \rangle$$

de onde segue,

$$\langle \phi^{'}(u), v \rangle > \frac{3}{2} \ \|\phi^{'}(u)\| \, \frac{2}{3} \ \|\phi^{'}(u)\|$$

logo,

$$\langle \phi^{'}(u), v \rangle > \|\phi^{'}(u)\|^2. \tag{1.4}$$

Visto que $\phi^{'}$ é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de u em Y tal que

$$\|v\| < 2 \, \|\phi^{'}(w)\| \, , \forall \, w \in N_u \tag{1.5}$$

e

$$\langle \phi^{'}(w), v \rangle > \ \|\phi^{'}(w)\|^2 \ , \forall \, w \in N_u. \tag{1.6}$$

Desde que a família $\{N_u, u \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y, existe um refinamento localmente finito N_{u_i} de Y (Ver[10]).

No que segue, consideramos

$$\rho_i(u) = dist(u, (N_{u_i})^c), \forall \, u \in Y$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\sum_j \rho_j(u)} v_i \, , \forall \ u \in Y \tag{1.7}$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2} \ \|\phi^{'}(u_i)\| \, w_{u_i}.$$

Sendo N_{u_i} localmente finita, cada $u \in Y$ só pertence apenas a um número finito de N_{u_i} (Ver[10]). Logo as somas definidas em (1.7) são finitas, pois ρ_i se anula fora de N_{u_i}. Assim $V(u)$ é uma combinação convexa dos $v_i's$, que verificam

$$\|v_i\| < 2\,\|\phi^{'}(u)\|,\ \forall\, u \in N_{u_i}$$

e

$$\langle \phi^{'}(u), v_i\rangle > \ \|\phi^{'}(u)\|^2, \quad \forall\, u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado $u \in Y$

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_i \ = \frac{\rho_1(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_1 + \frac{\rho_2(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_2 + ... + \frac{\rho_n(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_n$$

implicando que,

$$\|V(u)\| \leq \ \frac{\rho_1(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_1\| + \frac{\rho_2(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_2\| + ... + \frac{\rho_n(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_n\|$$

e portanto,

$$\|V(u)\| \leq \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\| \ = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada u, segue que

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi^{'}(u)\|$$

e

$$\langle \phi^{'}(u), V(u)\rangle \geq \ \|\phi^{'}(u)\|^2.$$

Para mostrar que V é localmente lipschitiziana, basta mostrar que cada parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\|$$

é localmente lipschitziana.Observando que para cada i, $\|v_i\|$ é constante, vamos mostrar que no caso de duas parcelas a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

é localmente lipschitziana. Para tanto considerando z arbitrário tal que $u, v \in V_z$ temos,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)}$$

donde segue,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\,\rho_1(v) + \rho_1(u)\,\rho_2(v) - \rho_1(u)\,\rho_1(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

o que implica,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\,\rho_2(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}.$$

Assim,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\,\rho_2(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(v) + \rho_1(v)\,\rho_2(v) - \rho_1(v)\,\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

de onde segue que,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v)\,[\rho_1(u) - \rho_1(v)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]} + \frac{\rho_1(v)\,[\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| \leq & \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,|\rho_1(u) - \rho_1(v)| + \\ & + \frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]\,[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,|\rho_2(v) - \rho_2(u)|. \end{aligned}$$

Sendo ρ_1 e ρ_2 funções lipschitzianas, existem K_1 e K_2 tais que $|\rho_1(u) - \rho_1(v)| \leq K_1 \|u - v\|$ e $|\rho_2(v) - \rho_2(u)| \leq K_2 \|u - v\|$, logo

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| \leq & \frac{1}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]}\,\frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,K_1\,\|u - v\| + \\ & + \frac{1}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]}\,\frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(v) + \rho_2(v)]}\,K_2\,\|u - v\|. \end{aligned}$$

Desde que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$, existe $a > 0$ tal que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > a > 0$ e como ρ_1 e ρ_2 são funções contínuas, existe uma vizinhança V_z de u tal que

$$\rho_1(v) + \rho_2(v) > a\ , \forall\, v \in V_z.$$

Portanto,

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a}\,K_1\,\|u - v\| + \frac{1}{a}\,K_2\,\|u - v\|$$

pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)} \leq 1 \ , \ \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo,

$$|g(u)-g(v)| \leq \frac{1}{a}\,(K_1+K_2)\|u-v\| \ , \ \forall\, u,v \in V_z$$

mostrando que g é localmente lipschitziana. Concluíndo assim que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ em Y.

■

1.2 Lema de Deformação

Nesta subseção iremos demonstrar alguns lemas de deformação, o primeiro deles é o lema de deformação de Clark.

Considerando X um Espaço de Banach, para $S \subset X$ e $\alpha > 0$ definamos

$$S_\alpha = \{u \in X : dist(u,S) \leq \alpha\}.$$

Lema 1.2 *Sejam $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e ϵ,δ > 0 tais que, para todo $u \in \phi^{-1}([\ c-2\ \epsilon, c+2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta}$,*

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}. \tag{1.8}$$

Então, existe $\eta \in C(\ [\ 0,1\ ] \times X, X)$ tal que
(i) *$\eta(0,u) = u$, $\forall\, u \in X$*
(ii) *$\eta(t,u) = u$, $\forall\, u \in (\phi^{-1}([\ c-2\ \epsilon, c+2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta})^c$, $\forall\ \ t \in [0,1]$*
(iii) *$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$*
(iv) *$\eta(t,.)$ é um homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$.*

Demonstração:

No que segue denotamos por $A, B \subset X$ os seguintes conjuntos

$$A = \phi^{-1}([\ c-2\ \epsilon, c+2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta}$$

e

$$B = \phi^{-1}([\ c-\epsilon, c+\epsilon\ ]) \cap S_\delta.$$

Pelo Lema 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente V para ϕ em $Y = \{u \in X : \phi^{'}(u) \neq 0\}$. Sendo $A = \phi^{-1}([\ c - 2\ \epsilon, c + 2\ \epsilon\ ]) \cap S_{2\delta}$, segue que $A \subset Y$. De fato, por (1.8)

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} > 0,\ \forall\, u \in A$$

logo $\phi^{'}(u) \neq 0$, mostrando que $A \subset Y$.

Considerando a função $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana dada por

$$\psi(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

onde

$$\rho_1(u) = dist(u, \overline{A^c})$$

e

$$\rho_2(u) = dist(u, B)$$

tem-se,

$$\begin{cases} \psi(u) = 1 \ \text{ em } \ B \\ \psi(u) = 0 \ \text{ em } \ \overline{A^c} \\ 0 \leq \psi(u) \leq 1 \ \text{ em } \ X. \end{cases} \tag{1.9}$$

Se $f : X \longrightarrow X$ é o campo vetorial definido por

$$f(u) = \begin{cases} -\dfrac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\ V(u) \ \text{ em } A \\ 0 \ \text{ em } \ A^c \end{cases}$$

note que f é localmente lipschitziana, pois

$$f(u) - f(v) = \frac{\psi(v)}{\|V(v)\|}\ V(v) - \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\ V(u)$$

daí,

$$f(u) - f(v) = \frac{\psi(v)\ \|V(u)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(u)}{\|V(u)\|\ \|V(v)\|}$$

assim,

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\|V(u)\|\ \|V(v)\|}[\psi(v)\ \|V(u)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(u)\|\ V(v) +$$

$$+\psi(u)\ \|V(u)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(v) + \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(v) - \psi(u)\ \|V(v)\|\ V(u)]$$

consequentemente,

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\|V(u)\| \ \|V(v)\|}\{\|V(u)\| \ V(v) \ (\psi(v) - \psi(u)) +$$

$$+\psi(u) \ \|V(v)\|(V(v) - V(u)) + \psi(u) \ V(v)(\|V(u)\| - \|V(v)\|)\}$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq |\psi(v) - \psi(u)| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\|V(v) - V(u)\| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}\|V(u) - V(v)\|.$$

Sendo ψ e V localmente lipschitzianos, existem $K_1, K_2 > 0$ e z arbitrário tal que $u, v \in V_z$ satisfazendo

$$|\psi(v) - \psi(u)| \leq K_1 \ \|v - u\|, \quad \forall \ u, v \in V_z$$

e

$$\|V(v) - V(u)\| \leq K_2\|v - u\|, \quad \forall \ u, v \in V_z$$

mostrando que,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K_1 \ \|v - u\| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} \ K_2\|v - u\| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} \ K_2\|v - u\|$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left(K_1 + 2\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|}K_2\right) \|v - u\|.$$

Usando a continuidade das funções ψ e V, podemos concluir que f é localmente lipschitziana. Usando o fato que a função f é limitada e localmente lipschitziana, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy, que denotaremos por (PC),

$$(PC) \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt}(t) = f(w(t)) \\ w(0) = u \end{cases}$$

possui uma única solução, a qual denotaremos por $w(t, u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$.

No que segue, consideramos $\eta : [0, 1] \times X \to X$ o campo vetorial dado por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$

Assim,

$$\eta(0,u) = w(0,u) = u$$

isto é,

$$\eta(0,u) = u$$

mostrando (i).

Seja $u \in A^c$ e defina $w_1(t) = u$. Observe que

$$w_1^{'}(t) = 0 = f(w_1(t))$$

pois, se $u \in A^c$, tem-se $f(u) = 0$. Desse modo

$$\begin{cases} w_1^{'}(t) = f(w_1(t)) \\ w_1(0) = u. \end{cases}$$

Logo, pela unicidade de solução de (PC), devemos ter

$$w_1(t) = w(t,u) = u, \ \forall \ u \in \ A^c \ e \ \forall \ t \in [0,1],$$

e consequentemente

$$\eta(t,u) = u, \ \forall \ u \in \ A^c \ e \ \forall \ t \in [0,1]$$

o que mostra (ii).

Agora, observe que para $t \geq 0$,

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau,u))d\tau$$

assim,

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| = \left\| \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\|d\tau$$

o que implica,

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \frac{|\psi(w(\tau,u))|}{\|V(w(\tau,u))\|} \ \|V(w(\tau,u))\| \ d\tau.$$

Usando (1.9)

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t 1 \ d\tau \ = t \tag{1.10}$$

o que mostra que se $u \in S$, então $w(t,u) \in S_t$. De acordo com a igualdade

$$\frac{d}{dt} \ \phi(w(t,u)) = \langle \phi^{'}(w(t,u)), w^{'}(t,u) \rangle$$

temos,

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) = \langle \phi^{'}(w(t,u)), f(w(t,u))\rangle$$

consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) = -\langle \phi^{'}(w(t,u)), \frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ V(w(t,u))\rangle$$

logo,

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) = -\frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ \langle \phi^{'}(w(t,u)), V(w(t,u))\rangle.$$

Sendo V um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ, temos

$$\frac{d}{dt}\ \phi(w(t,u)) \leq -\frac{\psi(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\ \|\phi^{'}(w(t,u))\|^2 \leq 0.$$

Portanto, a aplicação

$$t \mapsto \phi(w(.\ ,u))$$

é não-crescente.

Se $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$, iremos considerar dois casos:

(1) Para algum $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \delta]$, temos $\phi(\mathbf{w}(\mathbf{t}, \mathbf{u})) \leq \mathbf{c} - \epsilon$.

Assim, como $\phi(w(.\ ,u))$ é não-crescente,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(t,u)) \leq c - \epsilon$$

donde segue,

$$w(\delta,u) \in \phi^{c-\epsilon}.$$

Por outro lado, de (1.10),

$$\|w(\delta,u) - u\| \leq \delta$$

assim,

$$w(\delta,u) \in S_\delta$$

implicando que

$$w(\delta,u) \in\ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Segue da definição de η , que

$$\eta(1,u) \in\ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$$

e portanto,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

(2) Para todo $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \delta]$, temos $\phi(\mathbf{w}(\mathbf{t}, \mathbf{u})) \geq \mathbf{c} - \epsilon$.

Visto que $\phi(w(.\ , u))$ é não-crescente,

$$\phi(w(t, u)) \leq \phi(w(0, u)) = \phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Por (1.10),

$$\|w(t, u) - u\| \leq \delta$$

assim,

$$w(t, u) \in S_\delta,$$

portanto,

$$w(t, u) \in B = \phi^{-1}([\ c - \epsilon, c + \epsilon\ ]) \cap S_\delta.$$

Uma vez que,

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\ \phi(w(t, u))\ dt$$

temos, por (PC)

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \langle \phi^{'}(w(t, u)), f(w(t, u))\rangle dt$$

isto é,

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|}\ \langle \phi^{'}(w(t, u)), V(w(t, u))\rangle dt.$$

Usando o fato que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ϕ,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|}\ \|\phi^{'}(w(t, u))\|^2\ dt$$

ou ainda

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t, u))}{2}\ \|\phi^{'}(w(t, u))\|\ dt.$$

Sendo $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$ e $w(t, u) \in B$,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - \int_0^\delta \frac{1}{2}\ \|\phi^{'}(w(t, u))\|\ dt$$

e por (1.8),

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{4\epsilon}{\delta}\ \ dt$$

logo,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon$$

portanto,

$$w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Pela definição de η,

$$\eta(1, u) \in \ \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Assim, em qualquer dos casos (1) ou (2), encontramos

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta,$$

O que prova (iii).

Finalmente, para mostrarmos (iv), consideramos as funções

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow X \\ u &\rightarrowtail h(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ u &\rightarrowtail g(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Observe que

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, g(u))$$

o que implica,

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Consequentemente,

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t - \delta t, u)) = w(0, u) = u$$

isto é,

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Analogamente,

$$(g \circ h)(u) = u$$

mostrando assim que η é inversível.

Visto que, $w(\delta t, u)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais, temos de modo análogo que $w(-\delta t, u)$ é contínua, assím concluímos que η é um homeomorfismo, para todo $t \in [0, 1]$. Mostrando (iv).

■

Corolário 1.2 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitada inferiormente, $v \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que $\phi(v) \leq inf\phi + \epsilon$. Então, para todo $\delta > 0$ existe $u \in X$ tal que $\|u - v\| \leq 2\delta$, $\phi(u) \leq inf\phi + 2\epsilon$ e $\|\phi^{'}(u)\| < \dfrac{4\epsilon}{\delta}$.*

Demonstração:

Sendo ϕ limitado inferiormente, considere $c = inf\phi$, $S = \{v\}$ e observe que

$$v \in \phi^{-1}([\ inf\phi - \epsilon,\ inf\phi + \epsilon\ ]) \cap S. \tag{1.11}$$

Agora, suponha por contradição que existe $\delta > 0$, tal que para todo $u \in X$ verificando

$$\|u - v\| \leq 2\ \delta \quad e \quad \phi(u) \leq c + 2\ \epsilon$$

ou seja,

$$u \in \phi^{-1}\left([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]\right) \cap S_{2\delta} \tag{1.12}$$

tem-se,

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}.$$

Usando o item (iii) do Lema 1.2,

$$\eta(1, v) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_{\delta},$$

o que é um absurdo, pois $\phi^{c-\epsilon} = \emptyset$.

■

1.3 Condições de Compacidade

O Corolário 1.2 ainda não implica na existência de um ponto crítico para ϕ. A fim de provar a existência de pontos críticos, veremos algumas condições de compacidade para ϕ.

Definição 1.3 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$.*

O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$ tem uma subsequência convergente.

O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale fraca (WPS) se toda sequência limitada $\{u_n\} \subset X$ tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$ tem uma subsequência convergente.

O funcional ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ se, quando $\{u_n\} \subset X$ é tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi^{'}(u_n) \to 0$, então c é um valor crítico de ϕ.

Lema 1.3 *A condição (PS) implica ao mesmo tempo em (WPS) e $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Primeiramente, vamos mostrar que a condição (PS) implica na condição (WPS)

De fato, seja (u_n) uma sequência limitada em X tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$, logo $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$, como por hipótese (u_n) satisfaz (PS) segue que (u_n) tem uma subsequência convergente.

Portanto, $(PS) \;\Rightarrow\; (WPS)$.

Agora, mostraremos que a condição (PS) implica na condição $(PS)_c$.

Com efeito, considere uma sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi^{'}(u_n) \to 0$. Visto que por hipótese ϕ satisfaz (PS), segue que existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que $u_{n_j} \to u \in X$. Sendo $\phi \in C^1$ em X, temos

$$\phi^{'}(u) = \phi^{'}(lim\ u_{n_j}) = lim\ \phi^{'}(u_{n_j}) = 0$$

e

$$\phi(u) = \phi(lim\ u_{n_j}) = lim\ \phi(u_{n_j}) = c$$

logo,

$$\phi(u) = c \quad e \quad \phi^{'}(u) = 0$$

ou seja, c é um valor crítico de ϕ. Portanto, $(PS) \;\Rightarrow\; (PS)_c$.

■

Lema 1.4 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $d \in \mathbb{R}$. Se ϕ satisfaz $(PS)_d$ e se d não é valor crítico de ϕ, então para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\eta \in C(\ [\ 0,1\ ] \times X, X)$ tal que:*
(i) $\eta(0,u) = u \quad , \forall\, u \in X$
(ii) $\eta(t,u) = u \quad , \forall\, u \in (\phi^{-1}([\ d-2\epsilon, d+2\epsilon\ ]))^c, \ \ \forall \ \ t \in [0,1]$
(iii) $\eta(1, \phi^{d+\epsilon}) \subset \phi^{d-\epsilon}$
(iv) $\eta(t,.)$ *é homeomorfismo para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração:

Uma vez que por hipótese d não é valor crítico de ϕ, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([d-2\alpha, d+2\alpha])$ então $\|\phi^{'}(u)\| \geq \beta$.

Com efeito, pois caso contrário existiria uma sequência (u_n) verificando

$$u_n \in \phi^{-1}\left(\left[d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| < \frac{1}{n}$$

isto é,

$$\phi(u_n) \in \left(\left[d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| \to 0$$

ou ainda,

$$\phi(u_n) \to d \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| \to 0.$$

Como por hipótese ϕ satisfaz $(PS)_d$, d seria um valor crítico de ϕ, o que é um absurdo.

Portanto existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([d-2\alpha, d+2\alpha])$ então $\|\phi^{'}(u)\| \geq \beta$.

Considerando

$$\epsilon \in (0, \alpha] \quad , \quad S = X \quad e \quad \delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$$

para cada,

$$u \in \phi^{-1}([d-2\epsilon, d+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

temos,

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

logo, pelo Lema 1.2, existe $\eta \in C([\ 0,1\ ] \times X, X)$ sastifazendo (i) , (ii) , (iii) e (iv).

■

Teorema 1.4 *Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitada inferiormente e seja $c = \inf \phi$. Se ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é um valor crítico (e o mínimo) de ϕ.*

Demonstração:

Suponhamos por contradição que c não é um valor crítico de ϕ, então pelo Lema 1.4, existem $\epsilon > 0$ e $\eta \in C([\,0,1\,] \times X, X)$ tais que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

o que é um absurdo, pois $c = \inf \phi$.

■

Teorema 1.5 *Sejam* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $u \neq v \in X$, $c = \inf\limits_{g \in \Gamma} \max\limits_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t))$ *e* $\Gamma = \{g \in C([\,0,1\,], X) : g(0) = u$ *e* $g(1) = v\,\}$. *Se*
(i) ϕ *satisfaz a condição* $(PS)_c$
(ii) *Existem* $0 < R < \|u - v\|$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *tais que se* $\|w - u\| = R$, *então* $\phi(w) \geq b > a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$.

Então $c \geq b$ *e* c *é valor crítico de* ϕ.

Demonstração:

Usando a condição (ii), para cada $g \in \Gamma$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Ver [9]), existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\|g(t_0) - u\| = R$$

de onde encontramos,

$$\phi(g(t_0)) \geq b > a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

e consequentemente,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \geq b$$

mostrando que,

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \geq b.$$

Suponhamos por contradição que c não é valor crítico de ϕ e fixemos $\epsilon \in \left(0, \dfrac{c-a}{2}\right)$, então pelo Lema 1.4, existe $\eta \in C([\,0,1\,] \times X, X)$ satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv). Segue da definição de ínfimo que existe $g \in \Gamma$ verificando

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \leq c + \epsilon. \tag{1.13}$$

Definindo,

$$h(t) = \eta(1, g(t))$$

temos, $h(t) \in C([0,1], X)$, e como

$$a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

devemos ter

$$\phi(u) < c - 2\epsilon \quad e \quad \phi(v) < c - 2\epsilon$$

ou seja,

$$v, u \in (\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]))^c$$

pelo item (ii) do Lema 1.4, obtemos

$$h(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, u) = u$$

e

$$h(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, v) = v$$

isto é,

$$h(0) = u \quad e \quad h(1) = v$$

portanto, $h \in \Gamma$.

Por (iii) do Lema 1.4,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

juntamente com (1.13), temos

$$g(t) \in \phi^{c+\epsilon}$$

assim,

$$\eta(1, g(t)) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

donde concluímos,

$$\phi(\eta(1, g(t))) \leq c - \epsilon$$

portanto,

$$\phi(h(t)) \leq c - \epsilon, \quad \forall\ t \in [0,1]$$

mostrando que,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(h(t)) \leq c - \epsilon$$

o que é um absurdo , pois

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)).$$

■

Teorema 1.6 *Sejam* $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $u \neq v \in X$, $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t))$ *e* $\Gamma = \{g \in C(\ [\ 0,1\ ], X)\ :\ g(0) = u\ e\ g(1) = v\ \}$. *Se*
(i) ϕ *satisfaz as condições* $(PS)_c$ *e* (WPS)
(ii) *Existem* $0 < r < R < \|u - v\|$ *tais que se* $r \leq \|w - v\| \leq R$, *então* $\phi(w) \geq a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$.

Então, $c \geq a$ *é valor crítico de* ϕ. *Além disso, se* $c = a$, *existe um ponto crítico* w *tal que* $\phi(w) = a$ *e* $\|w - u\| = \dfrac{R+r}{2}$.

Demonstração:

Observe que, se $c > a$ é suficiente usar a prova do Teorema 1.5.

Agora, consideremos $c = a$ e $n \in N^*$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{R-r}{2}. \tag{1.14}$$

Segue da definição de c, que existe $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0\leq t\leq 1} \phi(g(t)) \leq a + \frac{1}{n}$$

o que implica,

$$\phi(g(t)) \leq a + \frac{1}{n}\ ,\ \forall\ t \in [0,1]$$

e consequentemente,

$$g(t) \in \phi^{a+\frac{1}{n}}\ ,\ \forall\ t \in [0,1].$$

Afirmação: Para cada $g \in \Gamma$, existe $t_n \in [0,1]$ tal que $\|g(t_n) - u\| = \dfrac{R+r}{2}$.

De fato, considere a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = \|g(t) - u\|, \quad g \in \Gamma.$$

Note que $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e

$$f(0) = \|g(0) - u\| = 0.$$

Além disso, sendo $0 < r < R$, temos

$$\frac{r}{2} < r < \frac{R+r}{2} < R.$$

Assim,

$$f(1) = \|g(1) - u\| = \|v - u\| > R > \frac{R+r}{2}$$

e

$$f(0) < \frac{R+r}{2} < f(1).$$

Sendo f contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário (ver[9]), existe $t_n \in [0,1]$ tal que

$$f(t_n) = \frac{R+r}{2}$$

e portanto,

$$\|g(t_n) - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Escrevendo,

$$u_n = g(t_n)$$

temos,

$$a \leq \phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n} \tag{1.15}$$

e

$$\|u_n - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Considere,

$$S = \{u_n\} \quad , \quad c = a \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{n} \quad , \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{1.16}$$

e suponhamos que, para todo

$$u \in \phi^{-1}\left(\left[c - \frac{2}{n}, c + \frac{2}{n}\right]\right) \cap S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

temos

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Então, pelo Lema 1.2, existe $\eta \in C\left([\ 0,1\ ] \times X, X\right)$ tal que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_{\delta}.$$

Por (1.15) e (1.16),

$$u_n \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$$

e

$$v_n = \eta(1, u_n) \in \phi^{a-\frac{1}{n}} \cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Assim,

$$\phi(v_n) \leq a - \frac{1}{n} < a \tag{1.17}$$

e

$$\|v_n - u\| \leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\|$$

implicando,

$$\|v_n - u\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2}.$$

Usando (1.14),

$$\|v_n - u\| \leq \frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2} = R$$

isto é,

$$\|v_n - u\| \leq R.$$

Por outro lado,

$$\|u_n - u\| \leq \|v_n - u\| + \|v_n - u_n\|$$

assim,

$$\|v_n - u\| \geq \|u_n - u\| - \|v_n - u_n\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e por (1.14),

$$\|v_n - u\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{R-r}{2} = r$$

logo,

$$r \leq \|v_n - u\| \leq R$$

implicando por (ii) que $\phi(v_n) \geq a$, o que é um absurdo com (1.17).

Portanto, existe

$$w_n \in \phi^{-1}([\, c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \tag{1.18}$$

tal que,

$$\|w_n - u_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

e

$$\|\phi^{'}(w_n)\| < \frac{4}{\sqrt{n}}. \tag{1.19}$$

Note que,

$$\|w_n - u\| \leq \|w_n - u_n\| + \|u_n - u\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq R - r + \frac{R+r}{2}$$

logo,

$$\|w_n - u\| \leq \frac{3R-r}{2}$$

assim,

$$\|w_n\| - \|u\| \leq \frac{3R - r}{2}$$

ou seja,

$$\|w_n\| \leq \frac{3R - r}{2} + \|u\| \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

isto é, a sequência (w_n) é limitada.

Uma vez que (1.18) e (1.19) implicam que

$$\phi(w_n) \longrightarrow c \quad e \quad \phi^{'}(w_n) \longrightarrow 0.$$

Segue da hipótese que ϕ satisfaz a condição (WPS), que existe uma subsequência (w_{n_j}) tal que

$$w_{n_j} \longrightarrow w \quad em \quad X.$$

Como $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue

$$\phi(w) = \phi(lim\ w_{n_j}) = lim\ \phi(w_{n_j}) = c$$

e

$$\phi^{'}(w) = \phi^{'}(lim\ w_{n_j}) = lim\ \phi^{'}(w_{n_j}) = 0$$

mostrando que c é um valor crítico de ϕ.

Por outro lado,

$$\|u_{n_j} - w\| \leq \frac{2}{\sqrt{n_j}} + \|w_{n_j} - w\|$$

de onde concluímos que

$$\|u_{n_j} - w\| \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$u_{n_j} \longrightarrow w.$$

Desde que,

$$\|u_{n_j} - u\| = \frac{R + r}{2}$$

passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\|w - u\| = \frac{R + r}{2}.$$

■

Capítulo 2

Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado

Neste capítulo nosso objetivo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções T-periódicas para a equação

$$u^{''}(t) + G^{'}(u(t)) = f(t).$$

Em particular, considerando $G(u(t)) = -cos(u(t))$, obtemos a equação do pêndulo forçado

$$u^{''}(t) + sen(u(t)) = f(t).$$

A garantia de solução T-periódica para $u^{''} + G^{'}(u) = f(t)$ é devido a Ambrosetti-Rabinowitz (Ver [1]) e consiste em determinar os pontos críticos do funcional energia dado por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'2}}{2} - G(u) + fu\right] dt. \tag{2.1}$$

Começamos nosso estudo neste capítulo verificando algumas desigualdades elementares que são ferramentas básicas na teoria de soluções periódicas.

2.1 A Desigualdade de Wirtinger

Proposição 2.1 *Seja $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uma função T-periódica absolutamente contínua tal que $\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt < \infty$. Se $\int_0^T u(t)dt = 0$, então*

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \quad \textit{(Desigualdade de Wirtinger)}$$

e

$$\|u\|_\infty^2 \leq \left(\frac{T}{12}\right) \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \quad \textit{(Desigualdade de Sobolev)}$$

Demonstração:

Considere o seguinte resultado, se u contínua, com $u^{'} \in L^2([0,T])$ e u T-periódica, então a série de Fourier gerada por u converge uniformemente a u. Além disso, vale a identidade de Parseval

$$\|c_k\|_2^2 = \sum_{k \neq 0} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt = \frac{1}{T} \|u\|_2^2.$$

Se

$$u \cong \sum_{k \neq 0} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T} t}$$

é a série de Fourier gerada por u, (Ver [Apêndice A]), a série de Fourier da sua derivada, $u^{'}$, é dada por

$$u^{'} \cong \sum_{k \neq 0} \frac{i2k\pi}{T} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T} t}.$$

Pela identidade de Parseval,

$$\sum_{k \neq 0} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$$

e

$$\sum_{k \neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T^2} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

ou seja,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Donde segue,

$$\sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{T} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

desde que,

$$\sum_{k\neq 0} k^2|c_k|^2 \geq \sum_{k\neq 0} |c_k|^2$$

obtemos

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\frac{1}{T}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

logo,

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Além disso, note que

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0} |c_k|\right)^2, \quad \forall\ t \in [0,T]$$

implicando

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0} \frac{T^{\frac{1}{2}}}{2\pi k}.\frac{2\pi k}{T^{\frac{1}{2}}}|c_k|\right)^2, \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Observando que

$$\left(\frac{T^{\frac{1}{2}}}{2\pi k}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2 \quad e \quad \left(\frac{2\pi k}{T^{\frac{1}{2}}}|c_k|\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$$

tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|u(t)\|^2 \leq \left(\sum_{k\neq 0} \frac{T}{4\pi^2 k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T}|c_k|^2\right).$$

Desde que,

$$\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

ficamos com

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{T}{12}\sum_{k\neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T}|c_k|^2 = \frac{T}{12}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

e consequentemente

$$\|u\|_\infty^2 \leq \left(\frac{T}{12}\right)\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

■

Corolário 2.2 *Seja $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua l - lipschitziana. Se u é uma solução não - constante T-periódica de $u^{'} = f(u)$, então*

$$T \geq \frac{2\pi}{l}.$$

Demonstração:

Sendo u solução não - constante T-periódica de $u^{'}(t) = f(u(t))$, devemos ter $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Desse modo $u^{'}(t)$ tem derivada $q.t.p$ em $\mathbb{R}$. Por definição

$$\frac{\|u^{'}(t+h) - u^{'}(t)\|}{h} = \frac{\|f(u(t+h)) - f(u(t))\|}{h}$$

Usando o fato que a função f é l-lipschitziana tem-se

$$\frac{\|u^{'}(t+h) - u^{'}(t)\|}{h} \leq l\frac{\|u(t+h) - u(t)\|}{h}$$

passando ao limite quando $h \longrightarrow 0$, obtemos

$$\|u^{''}(t)\| \leq l\|u^{'}(t)\| \quad q.t.p \quad em \quad \mathbb{R}.$$

Desde que,

$$\int_0^T \|u^{''}(t)\|^2 dt \leq l^2 \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt < \infty$$

pela Proposição 2.1, temos

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u^{''}(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T l^2 \|u^{'}(t)\|^2 dt$$

donde segue,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2 l^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt.$$

Por hipótese, u é não constante, logo

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 \neq 0 \quad e \quad \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt < \infty$$

desse modo,

$$1 \leq \frac{T^2 l^2}{4\pi^2}$$

portanto,

$$T \geq \frac{2\pi}{l}.$$

■

Proposição 2.3 *Seja $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uma função T-periódica absolutamente contínua tal que $\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt < \infty$ com $p > 1$. Se $\int_0^T u(t)dt = 0$, então*

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt.$$

Demonstração:

Considere

$$M = \left\{ u \in H_T^{1,p}([0,T]); \int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1 \;\; e \;\; \int_0^T u(t)dt = 0 \right\}$$

onde

$$H_T^{1,p}([0,T]) = \left\{ u \in W^{1,p}([0,T]); u(0) = u(T) \right\}$$

e $S : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(u) = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt.$$

Sendo S limitado inferiormente, denotamos por $C \geq 0$ o ínfimo de S, isto é,

$$\inf_{u \in M} S(u) = C.$$

Afirmação 1: O ínfimo C é atingido.

De fato, seja $\{u_n\} \subset M$ uma sequência tal que

$$\int_0^T \|u_n^{'}(t)\|^p dt \longrightarrow C \;, \; \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1 \;\; e \;\; \int_0^T u_n(t)dt = 0.$$

Usando o fato de que,

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1,$$

segue que $\|u_n\|_{L^p([0,T])}$ é limitada, daí $\{u_n\} \subset H_T^{1,p}([0,T])$ é limitada. Visto que $H_T^{1,p}([0,T])$ é reflexivo, existe uma subsequência, que denotaremos por (u_n) e $u \in H_T^{1,p}([0,T])$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \;\; em \;\; H_T^{1,p}([0,T]).$$

Por imersões de Sobolev,

$$u_n \longrightarrow u \;\; em \;\; L^p([0,T])$$

assim,

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt = lim \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt.$$

Sendo

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1$$

e

$$\int_0^T \|u_n(t)\| dt = 0$$

pelas imersões compactas de Sobolev

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1$$

e

$$\int_0^T \|u(t)\| dt = 0$$

mostrando que $u \in M$.

Visto que $u \in M$, devemos ter

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \geq C.$$

Por outro lado, da convergência fraca

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \leq \underline{lim} \int_0^T \|u_n^{'}(t)\|^p dt.$$

daí,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \leq C.$$

Donde segue,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt = C$$

ou seja, o ínfimo C é atingido.

Portanto,

$$\min_{u \in M} S(u) = C$$

Afirmação 2: $C > 0$.

Com efeito, suponhamos, por contradição, que $C = 0$, então

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt = 0$$

o que implicaria

$$\|u^{'}(t)\|^p = 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}$$

ou ainda

$$u^{'}(t) = 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R},$$

implicando que u é constante.

Uma vez que $u \in M$, a condição $\int_0^T u(t)dt = 0$ implica $u = 0$ $q.t.p$ em $\mathbb{R}$, enquanto a condição $\int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1$ implica que $u \neq 0$, chegando a um absurdo, portanto $C > 0$.

Sendo,

$$\min_{u\in M}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt = C.$$

segue que,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \geq C, \quad \forall \quad u \in M.$$

Agora, dado $u \in H_T^{1,p}([0,T])\backslash\{0\}$ com

$$\int_0^T \|u(t)\| dt = 0$$

definamos

$$w = \frac{u}{\|u\|_{L^p([0,T])}}.$$

Observe que $w \in M$, pois

$$\int_0^T \|w(t)\|^p dt = \frac{1}{\|u\|^p_{L^p([0,T])}} \int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1.$$

Portanto,

$$\int_0^T \|w^{'}(t)\|^p dt \geq C$$

o que implica,

$$\frac{\displaystyle\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt}{\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^p dt} \geq C$$

ou seja,

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt.$$

■

2.2 Existência de Solução

Sejam $G \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ uma função 2π-periódica e $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ uma função T-periódica. Consideremos a existência de soluções T-periódicas da equação

$$u^{''} + G^{'}(u) = f(t). \tag{2.2}$$

Se u é solução da equação (2.2), então para todo $k \in \mathbb{Z}$, $u + 2\pi k$ tambem é solução de (2.2).

Denotemos, no que segue, H como sendo o seguinte espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \ \text{ é absolutamente contínua, T-periódica e } \int_0^T |u^{'}(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

com o produto interno

$$(u, v) = \int_0^T (u^{'} v^{'} + uv) dt,$$

e o funcional energia

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'}}{2}^2 - G(u) + fu \right] dt,\ \forall\ u \in H$$

o qual está bem definido sendo de classe $C^1(H, \mathbb{R})$ (Ver [Apêndice B]). Além disso, os pontos críticos de ϕ são soluções fracas de (2.2), com

$$\langle \phi^{'}(u), h \rangle = \int_0^T \left[u^{'} h^{'} - G^{'}(u) h + fh \right] dt,\ \forall\ h \in H. \tag{2.3}$$

Lema 2.1 *O espaço H é Hilbert com relação ao produto interno dado por*

$$(u, v) = \int_0^T (u^{'} v^{'} + uv) dt.$$

Demonstração:

Seja $\{u_n\} \subset H$ uma sequência de Cauchy, assim dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\|u_n - u_m\|_H < \epsilon \ \ para \ \ m, n \geq n_0.$$

Observe que

$$\|u_n\|_H^2 = \|\widehat{u}_n\|^2_{H^1_T([0,T])}$$

onde

$$\widehat{u}_n = u_n|_{[0,T]}$$

e

$$H^1_T([0, T]) = \left\{ u \in W^{1,2}_T([0, T]); u(0) = u(T) \right\}.$$

Usando fato que $H^1_T([0, T])$ é Hilbert, existe $\widehat{u} \in H^1_T([0, T])$ tal que

$$\widehat{u}_n \to \widehat{u} \in H^1_T([0, T]).$$

Considere $u(t) = \widehat{u}(t); t \in [0, T]$ e defina

$$u(t) = \widehat{u}(t - kT) \ \ se \ \ t \in [kT, (k + 1)T]; k \in \mathbb{Z}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev,

$$H_T^1([0,T]) \hookrightarrow C([0,T])$$

assim,

$$u_n(0) = \widehat{u_n}(0) \to \widehat{u}(0)$$

e

$$u_n(T) = \widehat{u_n}(T) \to \widehat{u}(T).$$

Segue do fato que a sequência $\{u_n\} \subset H$ é T-periódica e da unicidade do limite que

$$\widehat{u}(0) = \widehat{u}(T).$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$u(t+T) = \widehat{u}(t+T-kT) = u(t)$$

ou seja,

$$u(t+T) = u(t).$$

mostrando que u é T-periódica.

Afirmação 1: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda sequência finita de intervalos disjuntos (a_i, b_i) de $[0,T]$ temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| < \epsilon.$$

Considere ,

$$B = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup ... \cup (a_n, b_n) \;\; em \;\; [0,T] \;\; tal \;\; que \;\; |b_j - a_j| < \frac{\delta}{n}, \;\; j = 1, ..., n.$$

Usando o fato que a união é disjunta, segue

$$\mu(B) = \mu((a_1, b_1)) + \mu((a_2, b_2)) + ... + \mu((a_n, b_n)),$$

onde $\mu(B) :=$ medida de Lebesgue. Portanto,

$$\mu(B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + ... + |b_n - a_n| = \sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta.$$

Segue de (C.9) (Ver [Apêndice C]) e (C.10) (Ver [Apêndice C])

$$\sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{a_j}^{b_j} u^{'}(t)dt \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} |u^{'}(t)|dt$$

o que implica,

$$\sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| \leq \int_{\cup_{j=1}^{n}(a_j,b_j)} |u^{'}(t)|dt = \int_B |u^{'}(t)|dt < \epsilon.$$

Segue deste argumento acima e do fato que u é T-periódica que u é absolutamente contínua.

Sendo $u(t) = \widehat{u}(t), t \in [0,T]$ uma função T-periódica e absolutamente contínua com $u_n \to u$ em $H^1([0,T])$, então

$$\|u_n - u\|_H^2 = \int_0^T |\widehat{u_n} - \widehat{u}|^2 = \|\widehat{u_n} - \widehat{u}\|^2_{H^1_T([0,T])} \to 0$$

isto é,

$$u_n \to u \;\; em \;\; H.$$

■

Lema 2.2 *O funcional ϕ satisfaz a condição (WPS).*

Demonstração:

Seja $J : H \longrightarrow H^*$ tal que,

$$\langle J(u), h\rangle = \int_0^T u^{'}h^{'}dt + \int_0^T uh\ dt,\ \forall\ u, h \in H$$

e considere $N : H \longrightarrow H^*$ tal que,

$$\langle N(u), h\rangle = \int_0^T uh\ dt + \int_0^T G^{'}(u)h\ dt - \int_0^T fh\ dt,\ \forall\ h \in H$$

portanto,

$$\langle \phi^{'}(u), h\rangle = \langle J(u), h\rangle - \langle N(u), h\rangle,\ \forall\ h \in H$$

isto é,

$$\phi^{'}(u) = J(u) - N(u), \quad \forall u \in H.$$

Afirmação 1: Se $u_k \rightharpoonup u$ em H, então $N(u_k) \to N(u)$ em H^*.

Com efeito, seja $\{u_k\} \subset H$ uma sequência limitada tal que $\phi(u_k)$ é limitada e $\phi^{'}(u_k) \to 0$. Note que,

$$\langle N(u_k) - N(u), h\rangle = \int_0^T \Big([u_kh + G^{'}(u_k)h - fh] - [uh + G^{'}(u)h - fh]\Big)\, dt$$

assim,

$$\langle N(u_k) - N(u), h\rangle = \int_0^T \Big((u_k - u)h + (G^{'}(u_k) - G^{'}(u))h\Big)\, dt$$

donde segue,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq \int_0^T \Big(\|u_k - u\|\|h\| + |G^{'}(u_k) - G^{'}(u)|\|h\|\Big)\, dt.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq \|u_k - u\|_{L^2([0,T])}\|h\|_{L^2([0,T])} + \|G^{'}(u_k) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}\|h\|_{L^2([0,T])}. \tag{2.4}$$

e pelas imersões contínuas de Sobolev

$$|\langle N(u_k) - N(u), h\rangle| \leq C\|u_k - u\|_{L^2([0,T])}\|h\|_H + C\|G^{'}(u_k) - G^{'}(u))\|_{L^2([0,T])}\|h\|_H. \tag{2.5}$$

Portanto, usando a norma em H^*,

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H^*} = \sup_{\|h\|\leq 1} |\langle N(u_k) - N(u), h\rangle|$$

ficamos com

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H^*} \leq C\|u_k - u\|_{L^2([0,T])} + C\|G^{'}(u_k) - G^{'}(u))\|_{L^2([0,T])}.$$

Usando as hipóteses sobre a sequência (u_k), existe uma subseqüência (u_{k_j}) tal que

$$u_{k_j} \to u \ em \ L^2([0,T]) \tag{2.6}$$

e

$$u_{k_j} \to u \ q.t.p \ em \ [0,T].$$

Por outro lado, sendo $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, segue

$$G^{'}(u_{k_j}) \to G^{'}(u) \ q.t.p \ em \ [0,T]$$

logo,

$$|G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)| \to 0 \ q.t.p \ em \ [0,T],$$

portanto,

$$|G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 \to 0 \ q.t.p \ em \ [0,T].$$

Desde que,

$$|G^{'}(t)| \leq K, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

obtemos,

$$|G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 \leq 4K^2 \in L^1([0,T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [2]), segue

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^T |G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 dt = \int_0^T \lim_{j\to\infty} |G^{'}(u_{k_j}) - G^{'}(u)|^2 dt = 0,$$

ou seja,

$$G^{'}(u_{k_j}) \to G^{'}(u) \ em \ L^2([0,T]). \tag{2.7}$$

Usando (2.6) e (2.7),

$$\|N(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} \to 0$$

ou equivalentemente

$$N(u_{k_j}) \to N(u) \ \ em \ \ H^*$$

mostrando a Afirmação.

Por outro lado,

$$\phi^{'}(u_{k_j}) = J(u_{k_j}) - N(u_{k_j}),$$

e desde que,

$$\phi^{'}(u_{k_j}) \to 0 \ \ e \ \ N(u_{k_j}) \to N(u),$$

segue,

$$J(u_{k_j}) \to N(u) \ \ quando \ \ j \to \infty.$$

Por outro lado,

$$\langle J(u_{k_j}), h\rangle = \int_0^T u_{k_j}^{'} h^{'} dt + \int_0^T u_{k_j} h dt, \ \ \forall \ \ u, h \in H,$$

ou seja,

$$\langle J(u_{k_j}), h\rangle_{H^*} = \left(u_{k_j}, h\right)_H.$$

Logo pelo Teorema de Riesz-Fréchet (Ver[3]),

$$\|J(u_{k_j})\|_{H^*} = \|u_{k_j}\|_H.$$

Segue da definição de N e do Teorema de Riesz-Fréchet (Ver[3]) que existe $w \in H$ tal que

$$\langle N(u), h\rangle_{H^*} = (w, h)_H$$

e

$$\|N(u)\|_{H^*} = \|w\|_H.$$

Assim,

$$\langle J(u_{k_j}) - N(u), h\rangle_{H^*} = \big(u_{k_j} - w, h\big)_H$$

usando novamente o Teorema de Riesz-Fréchet,

$$\|J(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} = \|u_{k_j} - w\|_H.$$

Usando o fato que,

$$\|J(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} \to 0$$

segue,

$$\|u_{k_j} - w\|_H \to 0.$$

Portanto,

$$u_{k_j} \to w \quad em \quad H,$$

mostrando desse modo, que ϕ satisfaz a condição (WPS).

■

Teorema 2.4 *Se* $\int_0^T f(t)dt = 0$, *a equação* (2.2) *tem duas soluções* T*-periódicas que não diferem por multiplicidade* 2π.

Demonstração:

Para cada $u \in H$, sejam

$$v(t) = u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

e

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

assim,

$$u(t) = v(t) + w \tag{2.8}$$

e

$$u^{'}(t) = v^{'}(t). \tag{2.9}$$

Desde que,

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u^{'}{}^2}{2} - G(u) + fu\right]dt$$

obtemos, de (2.8) e (2.9)

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{v'^2}{2} - G(v+w) + f.(v+w)\right] dt.$$

Sendo,

$$\int_0^T f(t)dt = 0$$

segue que,

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{v'^2}{2} - G(v+w) + fv\right] dt.$$

Afirmação 1: ϕ é limitado inferiormente.

De fato, seja $\alpha = \max_{u\in\mathbb{R}} G(u)$, logo

$$G(u) \leq \alpha, \quad \forall \quad u \in \mathbb{R}.$$

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver[3])

$$\phi(u) \geq \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \alpha T - \left(\int_0^T f^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T v^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e pela Proposição 2.1,

$$\phi(u) \geq \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \alpha T - \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T f^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

logo,

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2([0,T])} - k_1\|v'\|_{L^2([0,T])} - k_2, \tag{2.10}$$

isto é, ϕ é limitada inferiormente.

Afirmação 2: ϕ é 2π-periódica, isto é, $\phi(u+2\pi) = \phi(u)$.

Com efeito, usando (2.1), (2.8) e (2.9)

$$\phi(u+2\pi) = \int_0^T \frac{v'^2}{2}\ dt - \int_0^T G(v+w+2\pi)\ dt + \int_0^T f(v+w+2\pi)\ dt$$

assim,

$$\phi(u+2\pi) = \int_0^T \frac{v'^2}{2}\ dt - \int_0^T G(v+w+2\pi)\ dt + \int_0^T fv\ dt.$$

Desde que,

$$G(v+w+2\pi) = G(v+w)$$

temos

$$\phi(u+2\pi) = \int_0^T \frac{v'^2}{2}\ dt - \int_0^T G(v+w)\ dt + \int_0^T fv\ dt\ = \phi(u)$$

ou seja,

$$\phi(u+2\pi)=\phi(u)$$

mostrando a Afirmação 2.

Afirmação 3: ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c\in\mathbb{R}$.

De fato, seja $\{u_k\}\subset H$ uma sequência tal que

$$\phi(u_k)\to c \;\; e \;\; \phi^{'}(u_k)\to 0.$$

Por (2.10) tem-se

$$\phi(u_k)\geq \frac{1}{2}\|v_k^{'}\|^2_{L^2([0,T])}-k_1\|v_k^{'}\|_{L^2([0,T])}-k_2$$

Por outro lado, sendo $\phi(u_k)$ convergente, segue que $\phi(u_k)$ é limitada, assim existe $k_3>0$ tal que $\phi(u_k)\leq k_3$ o que implica

$$\frac{1}{2}\|v_k^{'}\|^2_{L^2([0,T])}-k_1\|v_k^{'}\|_{L^2([0,T])}\leq k_3+k_2$$

ou seja, $(v_k^{'})$ é limitada em $L^2([0,T])$.

Por outro lado, temos

$$\int_0^T|v_k|^2dt\leq\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T|v_k^{'}|^2dt,$$

ou ainda,

$$\|v_k\|^2_{L^2([0,T])}\leq k_4\|v_k^{'}\|^2_{L^2([0,T])}.$$

Portanto, sendo $(v_k^{'})$ limitada em $L^2([0,T])$, segue que existe $k_5>0$ verificando

$$\|v_k\|^2_{L^2([0,T])}\leq k_5, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$$

isto é, (v_k) é limitada em $L^2([0,T])$.

Por (2.8),

$$u_k=v_k+w_k,$$

pela periodicidade de ϕ, deve existir $\widehat{w_k}\in[0,2\pi]$ verificando

$$\phi(u_k)=\phi(v_k+\widehat{w}_k).$$

Fazendo $\widehat{u}_k=v_k+\widehat{w}_k$, segue

$$\phi(\widehat{u}_k)\to c \;\; e \;\; \phi^{'}(\widehat{u}_k)\to 0.$$

Visto que, $\widehat{w}_k \in [0, 2\pi]$, temos

$$\|\widehat{w}_k\|^2_{L^2([0,T])} \leq 4\pi^2 T$$

mostrando que $(\widehat{w}_k)$ é limitada em $L^2([0,T])$. Portanto sendo (v_k) e $(\widehat{w}_k)$ limitadas, segue que $(\widehat{u}_k)$ é limitada em H.

Pelo Lema 2.2, existe $(\widehat{u}_{k_j})$ tal que

$$\widehat{u}_{k_j} \to u \quad em \quad H.$$

Sendo $\phi \in C^1$, segue

$$\phi(\widehat{u}_{k_j}) \to \phi(u) \quad e \quad \phi^{'}(\widehat{u}_{k_j}) \to \phi^{'}(u),$$

pela unicidade do limite,

$$\phi(u) = c \quad e \quad \phi^{'}(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ϕ. Portanto ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$. Mostrando, desta forma, a Afirmação 3.

Pelas Afirmações 1, 3 e pelo Teorema 1.4, segue que ϕ tem mínimo em algum ponto $u \in H$, ou seja,

$$\phi(u) = \min_H \phi.$$

Da Afirmação 2,

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u) = \min_H \phi.$$

Considere, $v = u + 2\pi$, assim

$$\|u - v\|^2_{L^2([0,T])} = \int_0^T |u - v|^2 dt = 4\pi^2 T$$

ou seja,

$$\|u - v\|_{L^2([0,T])} = 2\pi\sqrt{T}.$$

Considere, $0 < r < R < 2\pi\sqrt{T} = \|u - v\|$ e $w \in X$ tal que $r \leq \|w - u\| \leq R$. Sendo

$$\phi(v) = \phi(u) = \min_H \phi$$

segue que,

$$\phi(w) \geq a = max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

logo, pelo Teorema 1.6, segue que $c \geq a$, onde c é o nivel Minimax dado no Teorema 1.6, é valor crítico de ϕ. Observe que

(i) Se $c > a$ e u_1 um ponto crítico com $\phi(u_1) = c$ e sendo $\phi(u) = a$, segue

$$\phi(u_1) > \phi(u)$$

logo,

$$u_1 \neq u + 2k\pi,$$

de fato, caso contrário, teríamos em vista da periodicidade de ϕ que $\phi(u_1) = \phi(u)$, o que é absurdo.

(ii) Se $c = a$, pelo Teorema 1.6, existe um ponto crítico u_1 tal que

$$\phi(u_1) = a \quad com \quad \|u_1 - u\| = \frac{R+r}{2}. \tag{2.11}$$

Considere $u_1 = u + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Assim

$$\|u_1 - u\|^2 = \int_0^T |u_1^{'} - u^{'}|^2 dt + \int_0^T (2k\pi)^2 dt$$

e usando o fato de que $u_1^{'} = u^{'}$, segue

$$\|u_1 - u\|^2 = 4k^2\pi^2 T$$

donde segue,

$$\|u_1 - u\| = 2|k|\pi\sqrt{T}.$$

Sendo,

$$0 < r < R < 2\pi\sqrt{T} \leq 2|k|\pi\sqrt{T}$$

segue,

$$\frac{R+r}{2} < 2|k|\pi\sqrt{T} = \|u_1 - u\|$$

o que é um absurdo, por (2.11). Logo, $u_1 \neq u + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, mostrando que a equação (2.2) possui duas soluções que não diferem por multiplicidade 2π.

■

Capítulo 3

A Transformada de Legendre

Nosso objetivo neste capítulo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)).$$

Para tanto, faremos um breve estudo sobre função de Legendre e transformada de Legendre, as quais serão muito utilizadas na procura de soluções periódicas para um sistema Hamiltoniano convexo.

3.1 Introdução

Definição 3.1 *A transformada de Legendre F^* de uma função $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ é dada pela fórmula implícita*

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u), \end{aligned}$$

quando ∇F é invertível.

3.2 Funções Convexas

Uma função $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ diz-se convexa se, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $\lambda \in (0,1)$, tem-se

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v).$$

No caso em que acima vale a desigualdade estrita sempre que $u \neq v$, a função diz-se estritamente convexa.

Proposição 3.2 *Se $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *F é convexa*
(ii) $F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w-u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Supondo F convexa, para $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ temos

$$F((1-\lambda)u + \lambda w) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(w)$$

assim,

$$F((1-\lambda)u + \lambda w) - F(u) \leq -\lambda F(u) + \lambda F(w)$$

logo para $\lambda > 0$,

$$\frac{F(u + \lambda(w-u)) - F(u)}{\lambda} \leq F(w) - F(u).$$

Passando ao limite quando $\lambda \to 0^+$ na última desigualdade, obtemos

$$(\nabla F(u), w-u) \leq F(w) - F(u)$$

o que implica,

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w-u)\,. \tag{3.1}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Sendo (ii) válida para quaisquer $u, w \in \mathbb{R}^N$, podemos escrever

$$F(u) \geq F(w) + (\nabla F(w), u-w) \tag{3.2}$$

e

$$F(v) \geq F(w) + (\nabla F(w), v-w)\,. \tag{3.3}$$

Considerando $w = (1-\lambda)u + \lambda v$, segue de (3.2) e (3.3),

$$F(u) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) + (\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), \lambda(u-v))$$

e

$$F(v) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) + (\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), (1-\lambda)(v-u))$$

consequentemente

$$F(u) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) + \lambda\,(\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), u-v) \tag{3.4}$$

e

$$F(v) \geq F((1-\lambda)u + \lambda v) - (1-\lambda)\,(\nabla F((1-\lambda)u + \lambda v), u-v)\,. \tag{3.5}$$

Multiplicando (3.4) por $(1-\lambda)$ e (3.5) por λ e adicionando membro a membro as duas desigualdades, ficamos com

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v).$$

■

Lema 3.1 *A função $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ é convexa se, e somente se, o gradiente de F, $\nabla F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma aplicação monotônica, isto é,*

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u-v) \geq 0, \quad \forall \quad u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \tag{3.6}$$

Demonstração:

Segue da Proposição 3.2

$$(\nabla F(u), v-u) \leq F(v) - F(u). \tag{3.7}$$

Analogamente,

$$(\nabla F(v), u-v) \leq F(u) - F(v)$$

logo,

$$-\,(\nabla F(v), v-u) \leq F(u) - F(v). \tag{3.8}$$

Somando (3.7) e (3.8) membro a membro, segue

$$(\nabla F(u), v-u) - (\nabla F(v), v-u) \leq 0$$

e portanto,

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) \geq 0.$$

Reciprocamente, segue do Teorema do Valor Médio aplicado a função $g(t) = F(u + t(w - u))$ que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$F(u + (w - u)) = F(u) + (\nabla F(u + \theta(w - u)), w - u)\,. \tag{3.9}$$

Por outro lado, usando (3.6), obtemos

$$(\nabla F(u + \theta(w - u)) - \nabla F(u), \theta(w - u)) \geq 0$$

assim,

$$\theta\,(\nabla F(u + \theta(w - u)) - \nabla F(u), (w - u)) \geq 0$$

sendo $\theta > 0$, temos

$$(\nabla F(u + \theta(w - u)), (w - u)) \geq (\nabla F(u), (w - u))\,. \tag{3.10}$$

Substituindo (3.10) em (3.9), encontramos

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Portanto pela Proposição **??**, segue que F é convexa.

■

Observação 3.1 *Pelo estudo feito acima, observa-se que a função F é estritamente convexa se, e somente se, o gradiente de F, $\nabla F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma aplicação estritamente monotônica, isto é,*

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) > 0, \quad \forall \quad u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; u \neq v.$$

3.3 Função de Legendre

Definição 3.3 *Uma função $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é uma função de Legendre, se F satisfaz às seguintes condições:*
(i) *$F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$*
(ii) *F é estritamente convexa*
(iii) *$\dfrac{F(u)}{\|u\|} \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$.*

Proposição 3.4 *Se F é uma função de Legendre, então ∇F é um homeomorfismo do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração:

Iremos dividir a nossa demonstração em alguns passos.

Passo 1: **∇F é injetivo.**

De fato, por hipótese F é estritamente convexa, logo pela Observação 3.1

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) > 0, \quad \forall \quad u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u \neq v. \tag{3.11}$$

De (3.11), segue que

$$u \neq v \Rightarrow \nabla F(u) \neq \nabla F(v)$$

mostrando que ∇F é injetivo.

Passo 2: **∇F é sobrejetivo.**

Com efeito, dado $v \in \mathbb{R}^N$ e supondo $u \neq 0$, temos

$$F(u) - (v, u) \geq F(u) - \|v\|\|u\| = \|u\| \left(\frac{F(u)}{\|u\|} - \|v\| \right).$$

Usando (iii) da Definição 3.3, temos

$$F(u) - (v, u) \to \infty \quad quando \quad \|u\| \to \infty. \tag{3.12}$$

Definamos a função $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ por

$$g(u) = F(u) - (v, u).$$

Por (3.12), segue

$$g(u) \to \infty \quad quando \quad \|u\| \to \infty$$

assim, para todo $M_1 > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$g(u) > M_1 \quad quando \quad \|u\| > C$$

isto é, se $\|u\| > C$ então g é limitada inferiormente por M_1.

Agora consideremos $\|u\| \leq C$. Sendo g contínua, segue que g atinge um mínimo M_2 em $B_C(0)$, ou seja

$$M_2 = \min_{\|u\| \leq c} g(u).$$

Considere

$$K = min\{M_1, M_2\} = M_2.$$

Desse modo,

$$g(u) \geq K, \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

mostrando que g é limitada inferiormente. Considere

$$g_0 = \inf_{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} g(u)$$

e $\{u_n\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} g(u_n) = g_0 < \infty.$$

Note que a sequência (u_n) é limitada, portanto existe (u_{n_j}) e $u_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_j} \to u_0 \quad em \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Sendo g contínua,

$$g(u_{n_j}) \to g(u_0),$$

logo pela unicidade do limite,

$$g(u_0) = g_0,$$

ou seja, g atinge seu mínimo no ponto $u_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e portanto $\nabla g(u_0) = 0$

Por outro lado,

$$\nabla g(u_0) = \nabla F(u_0) - v$$

logo

$$\nabla F(u_0) = v$$

mostrando que ∇F é sobrejetivo.

Passo 3: $(\nabla \mathbf{F})^{-1}$ **é contínua.**

De fato, primeiramente note que ∇F é coercivo, pois sendo F convexa,

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u)\,, \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Assim,

$$F(0) \geq F(u) + (\nabla F(u), -u) = F(u) - (\nabla F(u), u)$$

o que implica,

$$(\nabla F(u), u) \geq F(u) - F(0).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|\nabla F(u)\| \geq \frac{F(u) - F(0)}{\|u\|}.$$

Sendo F uma função de Legendre, temos que o lado direito da última desigualdade tende a infinito quando $\|u\| \to \infty$, logo

$$\|\nabla F(u)\| \to \infty \;\; quando \;\; \|u\| \to \infty,$$

ou seja, ∇F é coercivo.

Para mostrar que $(\nabla F)^{-1}$ é contínua, basta verificar que

$$x_n \to x \;\; quando \;\; \nabla F(x_n) \to \nabla F(x).$$

Supondo $\nabla F(x_n) \to \nabla F(x)$, sendo ∇F coercivo, (x_n) é uma sequência limitada. Seja (x_{n_j}) uma subsequência qualquer de (x_n) , assim (x_{n_j}) é uma sequência limitada. Logo existe $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$ tal que

$$x_{n_{j_k}} \to x_1 \;\; em \;\; \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Usando a continuidade de ∇F, segue

$$\nabla F(x_{n_{j_k}}) \to \nabla F(x_1).$$

Por outro lado,

$$\nabla F(x_{n_{j_k}}) \to \nabla F(x)$$

logo pela unicidade do limite,

$$\nabla F(x) = \nabla F(x_1).$$

Usando o Passo 1, concluimos que $x = x_1$.

Portanto, para toda $(x_{n_j}) \subset (x_n)$, existe $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$ tal que

$$x_{n_{j_k}} \to x \;\; em \;\; \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Suponhamos que,

$$x_n \nrightarrow x$$

assim existe $\epsilon_0 > 0$ e $(x_{n_j}) \subset (x_n)$, tal que

$$\|x_{n_j} - x\| \geq \epsilon_0 \;\; \forall \; n_j \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Por outro lado, existe $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$ tal que

$$x_{n_{j_k}} \to x. \tag{3.14}$$

Usando (3.13) e (3.14),

$$\|x_{n_{j_k}} - x\| \geq \epsilon_0 \;\; e \;\; \|x_{n_{j_k}} - x\| \to 0$$

o que é um absurdo. Logo,

$$x_n \to x \;\; em \;\; \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

portanto, $(\nabla F)^{-1}$ é contínua, mostrando o Passo 3.

■

Lema 3.2 *Se F_1 e F_2 são funções de Legendre tais que $F_1 \leq F_2$, então $F_1^* \geq F_2^*$.*

Demonstração:

Sendo

$$F^*(v) = (v, u) - F(u)$$
$$v = \nabla F(u)$$

pela Proposição **??**, temos

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u), \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

assim,

$$F(w) \geq F(u) + (v, w) - (v, u) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

implicando que

$$F^*(v) \geq (v, w) - F(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Em particular,

$$F^*(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v, w) - F(w)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Assim, sendo $F_1 \leq F_2$, devemos ter

$$F_1(w) - (v, w) \leq F_2(w) - (v, w)$$

o que implica,

$$(v, w) - F_1(w) \geq (v, w) - F_2(w)$$

logo,

$$(v,w) - F_2(w) \leq \sup_{w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v,w) - F_1(w))$$

portanto,

$$F_2^* = \sup_{w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v,w) - F_2(w)) \leq \sup_{w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v,w) - F_1(w)) = F_1^*$$

ou seja, $F_1^* \geq F_2^*$.

■

No que segue vamos demonstrar o seguinte Lema que será importante no decorrer deste trabalho.

Lema 3.3 *Se F é uma função de Legendre, então F^* é Fréchet diferenciável.*

Demonstração:

Sejam $u = (\nabla F)^{-1}(v)$ e $u_t = (\nabla F)^{-1}(v+th)$. Sendo,

$$F^*(v) = (v,u) - F(u) \quad e \quad F^*(v+th) = (v+th, u_t) - F(u_t)$$

para todo $t > 0$, tem-se que

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} = \frac{(v+th,u_t) - F(u_t) - (v,u) + F(u)}{t}$$

donde segue,

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} = \frac{(v,u_t) + t\,(h,u_t) - F(u_t) - (v,u) + F(u)}{t}.$$

Assim,

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} = (h,u_t) + \frac{(v,u_t-u) - F(u_t) + F(u)}{t}$$

e desde que,

$$F(u_t) \geq F(u) + (\nabla F(u), u_t - u)\,,$$

segue,

$$(v,u_t-u) - F(u_t) + F(u) \leq 0$$

e portanto

$$\frac{F^*(v+th) - F^*(v)}{t} \leq (h,u_t)\,. \tag{3.15}$$

Por outro lado, usando o Lema 3.2

$$F^*(v+th) \geq (v+th,u) - F(u)$$

consequentemente

$$\frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} \geq \frac{(v+th,u)-F(u)-(v,u)+F(u)}{t}$$

ou ainda

$$\frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} \geq (h,u)\,. \tag{3.16}$$

Portanto por (3.15) e (3.16),

$$(h,u) \leq \frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} \leq (h,u_t)\,.$$

Passando ao limite quando $t \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F^*(v+th)-F^*(v)}{t} = (h,u)\,.$$

Por outro lado, note que

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) \geq 0,$$

pois

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = F^*(v+h)-[(v,u)-F(u)]-(h,u)$$

e assim,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = F^*(v+h)-[(v+h,u)-F(u)]$$

pela definição de $F^*(v+h)$ tem-se

$$F^*(v+h)-[(v+h,u)-F(u)] \geq 0$$

logo,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) \geq 0.$$

Além disso,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) \leq (h,(u_h-u))\,.$$

Com efeito, temos

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = (v+h,u_h)-F(u_h)-(h,u)-F^*(v)$$

o que implica,

$$F^*(v+h)-F^*(v)-(h,u) = [(v,u_h)-F(u_h)]-F^*(v)+(h,(u_h-u))$$

usando a definição de $F^*(v)$, obtemos

$$[(v, u_h) - F(u_h)] - F^*(v) \leq 0$$

portanto,

$$F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u) \leq (h, (u_h - u)).$$

Assim,

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)|}{\|h\|} = \frac{F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)}{\|h\|} \leq \frac{(h, (u_h - u))}{\|h\|}$$

usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)|}{\|h\|} \leq \|u_h - u\|.$$

Por outro lado,

$$u_h = (\nabla F)^{-1}(v + th) \to (\nabla F)^{-1}(v) = u \quad quando \quad h \to 0$$

isto é,

$$\|u_h - u\| \to 0 \quad quando \quad h \to 0$$

e consequentemente

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)|}{\|h\|} \to 0 \quad quando \quad h \to 0$$

Mostrando que F^* é Fréchet diferenciável.

■

Proposição 3.5 *Se F é uma função de Legendre, então*

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \to \infty \quad quando \quad \|v\| \to \infty.$$

Demonstração:

Devemos mostrar que dado $C > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$\|v\| > A \Longrightarrow \frac{F^*(v)}{\|v\|} > C$$

ou equivalentemente,

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C \Longrightarrow \|v\| \leq A.$$

Para cada $C > 0$, considere $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C,$$

ou

$$F^*(v) \leq C\|v\|.$$

Definindo

$$M = \max_{\|w\|=2C} F(w)$$

desde que pelo Lema 3.2,

$$F^*(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} ((v, w) - F(w))$$

fazendo $w = \dfrac{2C}{\|v\|}v$, obtemos

$$2C\|v\| = \left(v, \frac{2C}{\|v\|}v\right) \leq F^*(v) + F\left(\frac{2C}{\|v\|}v\right) \leq M + C\|v\|$$

logo,

$$C\|v\| \leq M$$

portanto,

$$\|v\| \leq \frac{M}{C}.$$

Assim, dado $C > 0$, considere $A = \dfrac{m}{C}$ que teremos

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C \Longrightarrow \|v\| \leq A.$$

Portanto,

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \to \infty \quad \textit{quando} \quad \|v\| \to \infty.$$

■

Teorema 3.6 *Se F é uma função de Legendre, temos*
(i) $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$
(ii) $F^* \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$.

Demonstração:

Pelo Lema 3.3, F^* é Fréchet diferenciável e

$$(\nabla F^*(v), h) = (h, u)\,.$$

Assim,

$$(\nabla F^*(v) - u, h) = 0, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

o que implica,

$$\nabla F^*(v) = u.$$

Desde que pelo Lema 3.3, $u = (\nabla F)^{-1}(v)$, segue

$$\nabla F^*(v) = (\nabla F)^{-1}(v)$$

o que mostra (i).

Desde que $(\nabla F)^{-1}$ é contínua e $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$, temos $F^* \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$, mostrando (ii).

■

Corolário 3.7 *Se F é uma função de Legendre, a função F^* é estritamente convexa.*

Demonstração:

Sendo F uma função de Legendre, por definição F é estritamente convexa e usando a Observação 3.1 podemos concluir que $(\nabla F)^{-1}$ é estritamente monótono. Pelo Teorema 3.6,

$$\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$$

sendo $(\nabla F)^{-1}$ estritamente monótono, segue que ∇F^* é estritamente monótono, novamente usando a Observação 3.1, segue que F^* é estritamente convexa.

■

Observação 3.2 *Sendo F uma função de Legendre, segue dos resultados demonstrados que F^* é uma função de Legendre. Além disso,*

$$F^*(v) = (v, u) - F(u)$$
$$v = \nabla F(u), \quad u = \nabla F^*(v)$$

e

$$(F^*)^* = F.$$

De fato, observe que

$$(F^*)^*(w) = (w, v) - F^*(v)$$
$$w = \nabla F^*(v)$$

e

$$F^*(v) = (v,u) - F(u)$$
$$v = \nabla F(u).$$

Usando a Proposição 3.4 temos $u = (\nabla F)^{-1}(v)$ e pelo Teorema 3.6 podemos concluir que $u = w$. Logo,

$$(F^*)^*(u) = (u,v) - F^*(v) = (u,v) - (v,u) + F(u)$$

ou seja,

$$(F^*)^* = F.$$

3.4 Inequações

Nesta subseção, demonstraremos algumas desigualdades que são fundamentais no estudo de sistemas Hamiltonianos convexos.

Lema 3.4 *Sejam $G : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por $G(u) = \gamma\|u\|^q + \alpha$, com $\gamma > 0$, $q > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3.17}$$

temos que

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha. \tag{3.18}$$

Demonstração:

Sendo $G(u) = \gamma\|u\|^q + \alpha$, é fácil verificar que G é uma função de Legendre. Além disso,

$$\nabla G(u) = \gamma q\|u\|^{q-2}u \quad e \quad \nabla G(0) = 0. \tag{3.19}$$

Considerando $v = \nabla G(u)$, segue do Teorema 3.6 que $(\nabla G)^{-1}(v) = u$. Observe que

$$\|v\| = \gamma q\|u\|^{q-1}$$

o que implica,

$$\|u\| = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

e por (3.17)

$$\|u\| = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Desse modo,

$$(\nabla G)^{-1}(v) = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{v}{\|v\|}$$

ou

$$(\nabla G)^{-1}(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v.$$

Logo, por definição

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} \|v\|^2 - G\left(\frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v\right)$$

donde segue,

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} \|v\|^2 - \gamma \left\| \frac{\|v\|^{\frac{p}{q}-1}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v \right\|^q - \alpha.$$

Usando (3.17),

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^p}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} - \gamma \left(\frac{\|v\|^p}{(\gamma q)^p}\right) - \alpha$$

mostrando que

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \|v\|^p \left(1 - \gamma \frac{1}{\gamma q}\right) - \alpha$$

ou seja,

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \|v\|^p \left(1 - \frac{1}{q}\right) - \alpha.$$

Usando novamente (3.17), temos

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha.$$

■

Proposição 3.8 *Seja F uma função de Legendre tal que*

$$n \leq F(u) \leq \gamma \|u\|^q + \alpha \tag{3.20}$$

para algum $\gamma > 0$, $q > 1$, $\alpha, n \in \mathbb{R}$. Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

Demonstração:

Fixando $v = \nabla F(u)$, segue do Lema 3.4 e de (3.20) que

$$F^*(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha$$

ou equivalentemente

$$F^*(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} - \alpha. \tag{3.21}$$

Desde que

$$F^*(v) = (v, u) - F(u) \tag{3.22}$$

por (3.21) e (3.22),

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} - \alpha \leq (\nabla F(u), u) - F(u) \leq (\nabla F(u), u) - n$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

■

Lema 3.5 *Supondo as hipóteses da Proposição 3.8, existem constantes $C_2, C_3 > 0$ tais que*

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{q-1} + C_3.$$

Demonstração:

Com efeito, pela Proposição 3.8, temos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq \|\nabla F(u)\| \|u\| + \alpha - n. \tag{3.23}$$

Pela desigualdade de Young, existem $\epsilon > 0$ e $C_\epsilon > 0$ tais que

$$\|\nabla F(u)\| \|u\| \leq \epsilon \|\nabla F(u)\|^p + C_\epsilon \|u\|^q. \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23), obtemos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq \epsilon \|\nabla F(u)\|^p + C_\epsilon \|u\|^q + \alpha - n.$$

Fixando $0 < \epsilon < \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}$ e $C = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} - \epsilon > 0$, ficamos com

$$C\|\nabla F(u)\|^p \leq C_\epsilon \|u\|^q + C_1, \quad \textit{onde} \quad C_1 = \alpha - n.$$

Assim,

$$\|\nabla F(u)\| \leq \left(\frac{C_\epsilon}{C}\|u\|^q + \frac{C_1}{C}\right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2\|u\|^{\frac{q}{p}} + C_3$$

onde $C_2 = \left(\frac{C_\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{p}}$ e $C_3 = \left(\frac{C_1}{C}\right)^{\frac{1}{p}}$. Usando (3.17), ficamos com

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2\|u\|^{q-1} + C_3.$$

O Lema anterior nos diz que ∇F pode crescer no máximo até a potência $q-1$. ■

No que segue, vamos definir e verificar algumas propriedades de um funcional que será de grande importância na procura de soluções periódicas para um sistema Hamiltoniano convexo.

Lema 3.6 *Considere a função $J : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, dada por $J(x,y) = (-y,x)$. Então para $u, v \in \mathbb{R}^{2N}$ temos:*
(i) $(Ju, u) = 0$
(ii) $(u, Jv) = -(Ju, v)$
(iii) $J^2u = -u$
(iv) $\|Ju\| = \|u\|$

Demonstração:

Sejam $u = (x,y)$, $v = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^{2N}$. Por definição

$$(J(x,y),(x,y)) = ((-y,x),(x,y)) = -(y,x) + (x,y) = 0$$

o que mostra (i).

Com relação a (ii), considere $u = (x,y)$ e $v = (x_1,y_1)$. Então,

$$((x,y), J(x_1,y_1)) = ((x,y),(-y_1,x_1)) = -(x,y_1) + (y,x_1) = -\left[(x,y_1) - (y,x_1)\right]$$

portanto,

$$(u, J(v)) = -\left[(-y,x),(x_1,y_1)\right] = -(J(u),v),$$

mostrando (ii).

Note que

$$J(x,y) = (-y,x) \Rightarrow J^2(x,y) = J(-y,x)$$

o que implica,

$$J^2(x,y) = (-x,-y) = -(x,y)$$

mostrando a igualdade

$$J^2(u) = -u$$

mostrando (iii).

Finalmente,

$$\|J(u)\|^2 = (J(u), J(u)) = \left(-J^2(u), u\right) = (u,u) = \|u\|^2$$

logo,

$$\|J(u)\| = \|u\|$$

mostrando o item (iv).

■

Proposição 3.9 *Sejam $q > 1$ e*

$$X = \left\{ u : [0,T] \to \mathbb{R}^{2N};\ u \text{ é absolutamente contínua}, \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt < \infty \text{ e } u(0) = u(T) \right\}$$

com norma

$$\|u\|_X = \|u\|_{L^q([0,T])} + \|u^{'}\|_{L^q([0,T])}.$$

Então

$$\min_{u \in X} \left\{ \int_0^T \left(Ju^{'}(t), u(t) \right) dt \ ; \ \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T \right\} = -\frac{T^2}{2\pi}.$$

Demonstração:

Primeiramente, consideremos os seguintes conjuntos

$$M = \left\{ u \in X; \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T \right\}$$

e

$$N = \left\{ u \in X; \int_0^T \left(u^{'}(t), Ju(t) \right) dt = 1 \right\}.$$

Desse modo vamos dividir nossa demonstração em algumas etapas:

Etapa 1: O funcional $u \mapsto \int_0^T \left(u^{'}(t), Ju(t) \right) dt$ é limitado superiormente no conjunto M.

De fato, note que

$$\int_0^T \left(u^{'}(t), Ju(t) \right) dt \quad = \quad -\int_0^T \left(Ju^{'}(t), u(t) \right) dt.$$

Para todo $u \in X$, considere

$$\widehat{u} = u - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt.$$

Afirmação: $\displaystyle\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt.$

De fato, para fixar as idéias, considere $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Por definição

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt = \int_0^T \left(\Big(-u_2^{'}(t), u_1^{'}(t)\Big), \left(u_1 - \frac{1}{T}\int_0^T u_1(t)dt, u_2 - \frac{1}{T}\int_0^T u_2(t)dt\right)\right) dt$$

o que implica,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt = -\int_0^T u_2^{'}(t)u_1(t)dt - \frac{1}{T}\left(\int_0^T u_1^{'}(t)dt\right)\left(\int_0^T u_2(t)dt\right) + \int_0^T u_1^{'}(t)u_2(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\left(\int_0^T u_2^{'}(t)dt\right)\left(\int_0^T u_1(t)dt\right).$$

Sendo $u_1(0) = u_1(T)$ e $u_2(0) = u_2(T)$, tem-se

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt = -\int_0^T u_2^{'}(t)u_1(t)dt + \int_0^T u_1^{'}(t)u_2(t)dt$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big(u_1^{'}(t)u_2(t) - u_2^{'}(t)u_1(t)\Big)\, dt$$

logo,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt \tag{3.25}$$

mostrando a Afirmação.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), \widehat{u}(t)\Big)\, dt \geq -\left(\int_0^T \|Ju^{'}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\widehat{u}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade de Wirtinger a $\widehat{u}$, obtemos

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt \geq -\left(\int_0^T \|Ju^{'}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \frac{T^2}{4\pi^2}\|\widehat{u}^{'}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt \geq -\frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T \|Ju^{'}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\widehat{u}^{'}(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando o item (iv) do Lema 3.6 e a definição de $\widehat{u}$, segue

$$\|Ju^{'}(t)\|^2 = \|u^{'}(t)\|^2 = \|\widehat{u}^{'}(t)\|^2$$

assim,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt \geq -\frac{T}{2\pi}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt, \quad \forall\ u \in M$$

logo,

$$\int_0^T \Big(u^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt \leq \frac{T}{2\pi}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt = \frac{T^2}{2\pi}, \quad \forall\ u \in M$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(u^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt,$$

é limitado superiormente em M.

Seja

$$\sup_{u\in M}\int_0^T \Big(u^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt = A. \tag{3.26}$$

Etapa 2: O funcional $u \mapsto \displaystyle\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt$ é limitado inferiormente sobre N.

Com efeito, sendo $\|u^{'}(t)\|^q \geq 0$, temos

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt \quad \geq 0, \quad \forall\ u \in N$$

mostrando a Etapa 2.

Considere

$$\inf_{u\in N}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = B.$$

Etapa 3: B é atingido e $B > 0$.

Com efeito, Seja $\{u_n\} \subset N$ uma sequência tal que

$$\int_0^T \|u_n^{'}(t)\|^q dt \to B. \tag{3.27}$$

Considerando

$$w_n(t) = u_n(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u_n(t) dt$$

tem-se

$$w_n^{'}(t) = u_n^{'}(t) \quad e \quad \int_0^T \|w_n^{'}(t)\|^q dt \to B.$$

Além disso, por (3.25) temos

$$\int_0^T \Big(u_n^{'}(t), Ju_n(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big(w_n^{'}(t), Jw_n(t)\Big)\, dt$$

logo,

$$\int_0^T \Big(w_n^{'}(t), Jw_n(t)\Big)\, dt = 1.$$

Por (3.27), $\|w_n^{'}\|_{L^q}$ é limitada e pela desigualdade de Wirtinger segue que $\|w_n\|_{L^q}$ é limitada, o que implica que (w_n) é limitada em X. Logo, existe uma subsequência, que denotaremos por (w_n) , tal que

$$w_n \rightharpoonup w \quad em \quad X.$$

Pelas imersões de Sobolev, temos

$$w_n \to w \quad em \quad L^q([0,T])$$

logo,

$$\int_0^T \Big(w_n^{'}(t), Jw_n(t)\Big)\, dt \to \int_0^T \Big(w^{'}(t), Jw(t)\Big)\, dt$$

mostrando que

$$\int_0^T \Big(w^{'}(t), Jw(t)\Big)\, dt = 1.$$

Usando o fato que $\displaystyle\int_0^T \|w_n^{'}(t)\|^q dt$ é convexa, temos

$$\underline{lim} \int_0^T \|(w_n^{'}(t)\|^q \geq \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt$$

ou seja,

$$B \geq \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt. \tag{3.28}$$

Por outro lado, sendo

$$B = \inf_{u \in N} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt$$

devemos ter

$$B \leq \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt. \tag{3.29}$$

Por (3.28) e (3.29)

$$B = \int_0^T \|w^{'}(t)\|^q dt$$

mostrando a Etapa 3.

Etapa 4: $B = \dfrac{T}{A^{\frac{q}{2}}}$

Sendo

$$\inf_{u \in N} \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = B$$

existem $v_n \in N$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\int_0^T \|v_n^{'}(t)\|^q dt = B + \epsilon_n.$$

Denotemos $B_n = B + \epsilon_n$, assim

$$\int_0^T \|v_n^{'}(t)\|^q dt = B_n.$$

Note que,

$$\int_0^T \left\| \left(\frac{v_n}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right)^{'} \right\|^q dt = 1$$

assim,

$$T \int_0^T \left\| \frac{v_n^{'}}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right\|^q dt = T$$

logo,

$$\int_0^T \left\| \frac{T^{\frac{1}{q}} v_n^{'}}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right\|^q dt = T.$$

Considerando

$$\alpha_n = \left(\frac{B_n}{T} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.30}$$

temos

$$\int_0^T \left\| \left(\frac{v_n}{\alpha_n} \right)^{'} \right\|^q dt = T$$

ou seja, $g_n = \dfrac{v_n}{\alpha_n} \in M$. Assim,

$$\int_0^T \left(\left(\frac{v_n}{\alpha_n} \right)^{'}, J\left(\frac{v_n}{\alpha_n} \right) \right) dt \leq A \Longrightarrow \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^T \left(v_n^{'}, J v_n \right) dt \leq A$$

o que implica,

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \leq A.$$

Usando (3.30), temos

$$A^{\frac{q}{2}} \geq \frac{T}{B_n}.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$B \geq \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}. \tag{3.31}$$

Por outro lado, por (3.26), existem $w_n \in M$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\int_0^T \left(w_n^{'}(t), J w_n(t) \right) dt = A + \epsilon_n.$$

Fazendo $A_n = A + \epsilon_n$, temos

$$\int_0^T \left(w_n^{'}(t), J w_n(t) \right) dt = A_n. \tag{3.32}$$

Logo, por (3.32)

$$\int_0^T \left(\left(\frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \right)', J\left(\frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \right) \right) dt = 1$$

ou seja,

$$F_n = \frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \in N.$$

Assim,

$$\int_0^T \|F_n'(t)\|^q dt \geq B \Longrightarrow \int_0^T \left\| \left(\frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \right)' \right\|^q \geq B$$

ou seja,

$$B \leq \frac{1}{A_n^{\frac{q}{2}}} \int_0^T \|w_n'(t)\|^q dt$$

portanto,

$$B \leq \frac{T}{A_n^{\frac{q}{2}}}$$

passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$B \leq \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}. \tag{3.33}$$

Portanto, por (3.31) e (3.33) temos

$$B = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}.$$

Etapa 5: A é atingido.

De fato, se B é atingido em $w \in N$ temos

$$\int_0^T \|w'(t)\|^q dt = B$$

assim,

$$\int_0^T \|w'(t)\|^q dt = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|A^{\frac{1}{2}} w'(t)\|^q dt = T.$$

Portanto, $h(t) = A^{\frac{1}{2}} w(t) \in M$ e

$$\int_0^T \left(\left(A^{\frac{1}{2}} w(t) \right)', J\left(A^{\frac{1}{2}} w(t) \right) \right) dt = A \int_0^T (w'(t), Jw(t))$$

logo,

$$\int_0^T \left(\left(A^{\frac{1}{2}} w(t) \right)', J\left(A^{\frac{1}{2}} w(t) \right) \right) dt = A$$

mostrando a Etapa 5. Logo,

$$max \int_0^T \Big(u^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt = A, \quad \forall\ u \in M.$$

Desse modo concluímos que

$$min \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt$$

é atingido em algum ponto $u \in X$, onde

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T.$$

Para $u \in X$, considere

$$G(u^{'}) = \|u^{'}\|^q, \quad F(u) = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt \quad e \quad H(u) = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt.$$

Por definição

$$\frac{F(u+sh) - F(u)}{s} = \frac{\displaystyle\int_0^T \Big(J(u^{'}(t) + sh^{'}(t)), u(t) + sh(t)\Big)\, dt - \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt}{s}.$$

Passando ao limite quando $s \to 0$, encontramos

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(u+sh) - F(u)}{s} = \int_0^T \Big(J(u^{'}(t), h(t)\Big)\, dt + \int_0^T \Big(Jh^{'}(t), u(t)\Big)\, dt. \tag{3.34}$$

Sendo,

$$\int_0^T \Big(J(h^{'}(t)), u(t)\Big)\, dt = -\int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt$$

por (3.34),

$$(\nabla F(u), h) = \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt - \int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt. \tag{3.35}$$

Integrando $\displaystyle\int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt$ por partes e usando o fato de que $u(0) = u(T)$, encontramos

$$\int_0^T \Big(h^{'}(t), Ju(t)\Big)\, dt = -\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.36) em (3.35), obtemos

$$(\nabla F(u), h) = 2\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt. \tag{3.37}$$

Sendo

$$H(u) = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt.$$

Por definição

$$\left|\frac{H(u+sh)-H(u)}{s}\right| = \left|\frac{\displaystyle\int_0^T (\|u^{'}(t)+sh^{'}(t)\|^q - \|u^{'}(t)\|^q)dt}{s}\right|$$

e pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\left|\frac{\|u^{'}(t)+sh^{'}(t)\|^q - \|u^{'}(t)\|^q}{s}\right| = \left|\frac{(\|u^{'}(t)+\lambda sh^{'}(t)\|^q)^{'}\|sh^{'}\|}{s}\right|$$

consequentemente

$$\left|\frac{\|u^{'}(t)+sh^{'}(t)\|^q - \|u^{'}(t)\|^q}{s}\right| \leq q\ 2^{q-1}(\|u^{'}(t)\|^{q-1} + \|h^{'}(t)\|^{q-1})\|h^{'}(t)\|.$$

Observe que usando a desigualdade de Hölder e o fato que $\displaystyle\int_0^T \|h^{'}(t)\|^q dt < \infty$ tem-se

$$q(\|u^{'}(t)\|^{q-1} + \|h^{'}(t)\|^{q-1})\|h^{'}(t)\| \in L^1([0,T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver[2]), segue

$$(\nabla H(u), h) = \int_0^T \Big(q\|u^{'}(t)\|^{q-2}u^{'}(t), h^{'}(t)\Big)\, dt.$$

Desde que

$$\nabla G(u^{'}(t)) = q\|u^{'}(t)\|^{q-2}u^{'}(t)$$

ficamos com

$$(\nabla H(u), h) = \int_0^T \Big(\nabla G(u^{'}(t)), h^{'}(t)\Big)\, dt.$$

Integrando $\displaystyle\int_0^T \Big(\nabla G(u^{'})(t), h^{'}(t)\Big)\, dt$ por partes e usando o fato de que $u(0) = u(T)$, obtemos

$$\int_0^T \Big(\nabla G(u^{'})(t), h^{'}(t)\Big)\, dt = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'})(t), h(t)\right) dt \tag{3.38}$$

e consequentemente

$$(\nabla H(u), h) = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'})(t), h(t)\right) dt.$$

Pelo método do Multiplicadores de Lagrange em espaços de Banach, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(\nabla F(u), h) = \lambda_1\, (\nabla H(u), h)$$

ou seja,

$$2\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), h(t)\Big)\, dt = -\lambda_1 \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'})(t), h(t)\right) dt, \quad \forall\, h \in X.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\nabla G(u^{'}) = -\lambda J u^{'}.$$

Considere G^* a transformada de Legendre da função G. Se $v = \nabla G(u^{'})$ temos $u^{'} = \nabla G^*(v)$, e assim, obtemos o sistema Hamiltoniano

$$v^{'} + \lambda J \nabla G^*(v) = 0. \tag{3.39}$$

Observe que,

$$\frac{d}{dt}G^*(v) = \Big(\nabla G^*(v), v^{'}\Big) = (\nabla G^*(v), -\lambda J \nabla G^*(v)) = -\lambda\,(\nabla G^*(v), J\nabla G^*(v))$$

logo, pelo item (i) do Lema 3.6

$$\frac{d}{dt}G^*(v) = 0$$

o que implica que $G^*(v)$ é constante.

Pelo Lema 3.4, temos

$$G^*(v) = q^{\frac{-p}{q}}\frac{\|v\|^p}{p}$$

sendo $G^*(v)$ constante, segue que $\|v\|$ é constante. Visto que,

$$v = \nabla G(u^{'}) = q\|u^{'}\|^{q-2}u^{'} \tag{3.40}$$

temos,

$$\|v\| = q\|u^{'}\|^{q-1}$$

mostrando que $\|u^{'}\|$ é constante.

Por outro lado,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^q dt = T$$

assim, $\|u^{'}\| = 1$. Logo, por (3.40)

$$v = qu^{'}$$

o que implica,

$$v^{'} = qu^{''}. \tag{3.41}$$

Substituindo (3.41) em (3.39) segue

$$qu^{''} + \lambda J u^{'} = 0$$

ou seja,

$$u^{''} + \frac{\lambda}{q} J u^{'} = 0.$$

No que segue denotaremos $\frac{\lambda}{q}$ por λ, assim

$$u^{''} + \lambda J u^{'} = 0. \tag{3.42}$$

No que segue vamos mostrar que $\lambda = \frac{-2\pi}{T}$.

De fato, para fixar as idéias, consideremos $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, assim

$$u^{''} + \lambda J u^{'} = 0 \Leftrightarrow \left(u_1^{''}, u_2^{''}\right) + \lambda \left(-u_2^{'}, u_1^{'}\right) = 0$$

o que implica,

$$\begin{cases} u_1^{''} - \lambda u_2^{'} = 0 \\ u_2^{''} + \lambda u_1^{'} = 0 \end{cases}$$

assim,

$$\begin{cases} u_1^{'''} - \lambda u_2^{''} = 0 \\ u_2^{''} + \lambda u_1^{'} = 0 \end{cases}$$

logo,

$$u_1^{'''} + \lambda^2 u_1^{'} = 0.$$

Fazendo, $y = u_1^{'}$, obtemos

$$\begin{cases} y^{''} + \lambda^2 y = 0 \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$

que tem equação característica dada por

$$r^2 + \lambda^2 = 0 \tag{3.43}$$

com raizes complexas

$$r = \pm|\lambda| i$$

onde sem perda de generalidade podemos supor $\lambda > 0$. Portanto, a solução geral da equação (3.43) é dada por

$$y(t) = C_1 cos(\lambda t) + C_2 sen(\lambda t).$$

Sendo $y(0) = y(T)$, segue

$$C_1 cos(0) + C_2 sen(0) = C_1 cos(\lambda T) + C_2 sen(\lambda T)$$

obtendo,

$$cos(\lambda T) = 1$$

e consequentemente,

$$\lambda = \frac{2k\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Além disso,

$$\int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt = \int_0^T -\Big(u^{''}(t), u(t)\Big)\, dt$$

usando (3.42), obtemos

$$T = \int_0^T \|u^{'}(t)\|^2 dt = \int_0^T -\Big(u^{''}(t), u(t)\Big)\, dt = \lambda \int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt$$

portanto,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \frac{T}{\lambda}.$$

Observe que

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \frac{T^2}{2k\pi}, \quad \forall\ u \in M$$

atinge o menor valor quando $k = -1$. Portanto,

$$\int_0^T \Big(Ju^{'}(t), u(t)\Big)\, dt = \frac{-T^2}{2\pi}, \quad \forall\ u \in M.$$

■

3.5 Dual Hamiltoniano

Nesta subseção vamos considerar de maneira informal que os funcionais que consideraremos são continuamente diferenciáveis em $W_T^{1,p}([0,T])$. Além disso, vamos mostrar qual deve ser o funcional adequado afim de que os pontos críticos desse funcional sejam soluções do sistema Halmitoniano

$$\begin{cases} q^{'}(t) = D_z H(t,q,p) \\ p^{'}(t) = -D_x H(t,q,p). \end{cases}$$

Seja $L(t,x,y)$ uma função suave definida em $[0,T]\times\mathbb{R}^{2N}$ tal que para qualquer $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N$, $L(t,x,.)$ é uma função de Legendre. Considere $H(t,x,.)$ a transformada de Legendre de $L(t,x,.)$. Assim,

$$\begin{cases} H(t,x,z)=(z,y)-L(t,x,y) \\ z=D_yL(t,x,y), \quad y=D_zH(t,x,z) \end{cases} \tag{3.44}$$

ou

$$H(t,x,z)=\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[(z,y)-L(t,x,y)\right], \quad \forall z\in\mathbb{R}^N. \tag{3.45}$$

Se $q:[0,T]\to\mathbb{R}^N$ é ponto crítico de

$$\phi(q)=\int_0^T L(t,q,q^{'})dt \tag{3.46}$$

definida em um espaço de funções suaves T-periódicas, então

Afirmação 1: $\dfrac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'})=D_xL(t,q,q^{'})$.

De fato, sendo ϕ continuamente diferenciável em $W_T^{1,p}([0,T])$, para cada $v\in W_T^{1,p}([0,T])$, considere

$$F(\lambda,t)=L(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'})$$

e

$$\psi(\lambda)=\int_0^T F(\lambda,t)dt$$

assim,

$$\psi(\lambda)=\int_0^T F(\lambda,t)dt=\phi(q+\lambda v). \tag{3.47}$$

Por outro lado,

$$\psi^{'}(\lambda)=\int_0^T D_\lambda F(\lambda,t)dt=\int_0^T D_\lambda L(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'})$$

sendo,

$$D_\lambda L(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'})=\Big(D_xL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\Big)+\Big(D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v^{'}\Big)$$

temos,

$$\psi^{'}(\lambda)=\int_0^T\Big(D_xL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\Big)\,dt+\int_0^T\Big(D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v^{'}\Big)\,dt. \tag{3.48}$$

Integrando $\int_0^T \Big(D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v^{'}\Big)\,dt$ por partes e usando o fato das funções serem T-periódicas, obtemos

$$\int_0^T \Big(D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v^{'}\Big)\,dt = -\int_0^T \left(\frac{d}{dt}D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\right)dt \tag{3.49}$$

logo, substituindo (3.49) em (3.48),

$$\psi^{'}(\lambda) = \int_0^T \left(\Big(D_xL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\Big) - \left(\frac{d}{dt}D_yL(t,q+\lambda v,q^{'}+\lambda v^{'}),v\right)\right)dt. \tag{3.50}$$

Por (3.47),

$$\psi^{'}(\lambda) = \langle \phi^{'}(q+\lambda v), v\rangle$$

o que implica,

$$\psi^{'}(0) = \langle \phi^{'}(q), v\rangle. \tag{3.51}$$

Substituindo (3.51) em (3.50), obtemos em $\lambda = 0$

$$\langle \phi^{'}(q), v\rangle = \int_0^T \left(\Big(D_xL(t,q,q^{'}),v\Big) - \left(\frac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'}),v\right)\right)dt, \quad \forall\ v \in W_T^{1,p}.$$

Sendo q um ponto crítico de ϕ,

$$\int_0^T \left(\Big(D_xL(t,q,q^{'}),v\Big) - \left(\frac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'}),v\right)\right)dt = 0, \quad \forall\ v \in W_T^{1,p}([0,T]).$$

Visto que

$$C_0^1([0,T]) \subset W_T^{1,p}([0,T])$$

tem-se

$$\int_0^T \left(\Big(D_xL(t,q,q^{'}),v\Big) - \left(\frac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'}),v\right)\right)dt = 0 \ \ \forall\ v \in C_0^1([0,T]).$$

Pelo Teorema de Dubois-Raymond (Ver [Apêndice C]), temos

$$D_xL(t,q,q^{'}) - \frac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'}) = 0$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}D_yL(t,q,q^{'}) = D_xL(t,q,q^{'})$$

mostrando a Afirmação.

Considerando

$$p(t) = D_yL(t,q,q^{'}) \tag{3.52}$$

temos,

$$p^{'}(t) = D_x L(t, q, q^{'}). \tag{3.53}$$

Analogamente a (3.44), segue de (3.52)

$$q^{'}(t) = D_z H(t, q, p). \tag{3.54}$$

Por (3.44)

$$H(t, x, z) = (z, y) - L(t, x, y)$$

implicando que $y = y(t, x, z)$. De maneira informal, obtemos por (3.44)

$$D_{x_i} H = (D_{x_i} z, y) + (z, D_{x_i} y) - D_{x_i} L - (D_y L, D_{x_i} y)\,,$$

sendo x e z independentes, segue

$$D_{x_i} H = (z, D_{x_i} y) - D_{x_i} L - (D_y L, D_{x_i} y)\,,$$

usando (3.44),

$$D_{x_i} H = -D_{x_i} L$$

mostrando que $D_x H = -D_x L$. Assim, por (3.53) temos

$$p^{'}(t) = -D_x H(t, q, p). \tag{3.55}$$

Afirmação 2: As soluções do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} q^{'}(t) = D_z H(t, q, p) \\ p^{'}(t) = -D_x H(t, q, p) \end{cases} \tag{3.56}$$

são os pontos críticos do funcional

$$\phi(p, q) = \int_0^T \left(p, q^{'}\right) dt - \int_0^T H(t, q, p) dt.$$

De fato, primeiramente considerando

$$I(p, q) = \int_0^T \left(p, q^{'}\right) dt$$

por definição

$$\frac{I(p + sv, q + sw) - I(p, q)}{s} = \frac{\displaystyle\int_0^T \left(p + sv, q^{'} + sw^{'}\right) dt - \int_0^T \left(p, q^{'}\right) dt}{s}$$

logo,

$$\frac{I(p+sv,q+sw)-I(p,q)}{s}=\frac{s\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt+s\int_0^T\left(v,q^{'}\right)dt+s^2\int_0^T\left(v,w^{'}\right)dt}{s}.$$

Passando ao limite quando $s\to 0$, obtemos

$$\lim_{s\to 0}\frac{I(p+sv,q+sw)-I(p,q)}{s}=\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt+\int_0^T\left(v,q^{'}\right)dt$$

ou seja,

$$I^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left[\left(p,w^{'}\right)+\left(v,q^{'}\right)\right]dt. \tag{3.57}$$

Integrando $\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt$ por partes e usando o fato das funções serem T-periódicas, obtemos

$$\int_0^T\left(p,w^{'}\right)dt=-\int_0^T\left(p^{'},w\right)dt, \tag{3.58}$$

substituindo (3.58) em (3.57), encontramos

$$I^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left[\left(v,q^{'}\right)\right]-\left(p^{'},w\right)dt.$$

Por outro lado, se

$$K(p,q)=\int_0^T H(t,q,p)dt$$

seguindo o mesmo raciocínio da Afirmação 1,

$$K^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left[(D_xH(t,q,p),w)+(D_zH(t,q,p),v)\right]dt.$$

Logo,

$$\phi^{'}(p,q).(v,w)=I^{'}(p,q).(v,w)-K^{'}(p,q).(v,w)$$

ou seja,

$$\phi^{'}(p,q).(v,w)=\int_0^T\left(v,q^{'}\right)-\int_0^T\left(p^{'},w\right)dt-\int_0^T(D_xH(t,q,p),w)\,dt-\int_0^T(D_zH(t,q,p),v)\,dt. \tag{3.59}$$

Agora vamos mostrar que os pontos críticos de ϕ são soluções de (3.56).

Analisemos os seguintes casos:

(i) Se $(v,w)=(0,w)$, segue

$$-\int_0^T\left(p^{'},w\right)dt-\int_0^T(D_xH(t,q,p),w)\,dt=0,\quad\forall\ w\in W_T^{1,p}([0,T])$$

o que implica,

$$\int_0^T \left(\left(-p^{'} - D_xH(t,q,p)\right), w\right) dt = 0, \quad \forall\, w \in C_0^1([0,T])$$

portanto,

$$p^{'} = -D_xH(t,q,p).$$

(ii) Se $(v,w) = (v,0)$, obtemos

$$\int_0^T \left(q^{'}, v\right) dt - \int_0^T \left(D_zH(t,q,p), v\right) dt = 0, \quad \forall\, v \in W_T^{1,p}([0,T])$$

e consequentemente,

$$\int_0^T \left(\left(q^{'} - D_zH(t,q,p)\right), v\right) dt = 0, \quad \forall\, v \in C_0^1([0,T])$$

portanto,

$$q^{'} = D_zH(t,q,p).$$

Por (i) e (ii) segue a Afirmação 2.

3.6 Soluções Periódicas para o Sistema Hamiltoniano Convexo

Nesta seção trataremos da existência de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u^{'} = J\nabla H(t,u)$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'} = J\nabla H(u),$$

onde J é definido como no Lema 3.6 e ∇ denota o gradiente com respeito a u.

No caso forçado assumiremos que H é T-periódica com respeito a t com o objetivo de encontrar soluções T-periódicas ou kT-periódicas para algum $k \geq 2$.

No caso livre, a energia é constante, pois

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \left(\nabla H(u(t)), u^{'}(t)\right) = (\nabla H(u(t)), J\nabla H(u(t)))$$

e pelo item i) do Lema 3.6

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = 0$$

mostrando que $H(u(t))$ é constante.

No que segue, assumimos as seguintes hipóteses sobre o Hamiltoniano $H(t,u)$:

$(\mathbf{H_1})$ H é contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N}$, diferenciável com respeito a u e $\nabla H(t,u)$ é contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N}$.

$(\mathbf{H_2})$ H é estritamente convexa com respeito a u.

$(\mathbf{H_3})$ Existem $q\in(1,2)$, $\alpha\geq 0$ e $\beta,\gamma>0$ tais que

$$\beta\|u\|^q-\alpha\leq H(t,u)\leq\gamma\|u\|^q+\alpha.$$

$(\mathbf{H_4})$ H é T-periódica com respeito a t.

Observação 3.3 *Assumindo a hipótese (H_3), existem $q\in(1,2)$, $\alpha\geq 0$ e $\beta,\gamma>0$ tais que*

$$\beta\|u\|^{q-1}-\frac{\alpha}{\|u\|}\leq\frac{H(t,u)}{\|u\|}\leq\gamma\|u\|^{q-1}+\frac{\alpha}{\|u\|}\quad com\quad \|u\|\neq 0.$$

Passando ao limite quando $\|u\|\to\infty$, encontramos

$$\frac{H(t,u)}{\|u\|}\to\infty$$

de onde concluímos que H é uma função de Legendre.

Denotaremos por $G(t,.)$ a transformada de Legendre de $H(t,.)$, isto é,

$$\begin{cases} G(t,v)=(v,u)-H(t,u)\\ v=\nabla H(t,u),\quad u=\nabla G(t,v)\end{cases}$$

ou

$$G(t,v)=\sup_{w\in\mathbb{R}^{2N}}\left[(v,w)-H(t,w)\right].$$

Se $p>2$ e $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, segue da Afirmação (H_3) e do Lema 3.4 que

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|v\|^p}{p}-\alpha\leq G(t,v)\leq\left(\frac{1}{\beta q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|v\|^p}{p}+\alpha. \tag{3.60}$$

Denotaremos por X o seguinte espaço vetorial

$$X=\left\{\begin{array}{l} v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2N} absolutamente\ contínua, T-periódica,\\ \displaystyle\int_0^T v(t)dt=0\ e\int_0^T\|v'(t)\|^p dt<\infty\end{array}\right\}$$

com norma (Ver [Apêndice C])

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.61}$$

e por $\phi : X \to \mathbb{R}$ o seguinte funcional

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}, v\right) + G(t, v^{'})\right] dt.$$

Se $v \in W^{1,p}([0,T])$ e $\displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0$, pela Proposição 2.3 existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p dt \leq C\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt$$

o que implica,

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq \left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt + C\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq (C+1)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

mostrando que

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq T^{\frac{1}{p}}(C+1)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fixando $C_1 = T^{\frac{1}{p}}(C+1)^{\frac{1}{p}}$, da última desigualdade

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq C_1\|v\|_X. \tag{3.62}$$

Por outro lado,

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{T^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt + \int_0^T \|v(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fixando $C_2 = T^{\frac{1}{p}}$ ficamos com

$$C_2\|v\|_X \leq \|v\|_{W^{1,p}([0,T])}. \tag{3.63}$$

Por (3.62) e (3.63), temos

$$C_1\|v\|_X \geq \|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \geq C_2\|v\|_X,$$

de onde concluímos que $\|.\|_{W^{1,p}([0,T])}$ e $\|.\|_X$ são equivalentes em X.

Sendo $W^{1,p}([0,T])$ um espaço de Banach com norma $\|.\|_{W^{1,p}([0,T])}$ para $1 \leq p \leq \infty$, concluímos que X é um espaço de Banach com norma $\|.\|_X$.

O funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}, v\right) + G(t, v^{'})\right] dt$$

está bem definido, pois usando (3.60) e o Lema 3.5, ∇G cresce no máximo até a potência $p-1$, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ (Ver [Apêndice B]) e

Afirmação 1: $\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \displaystyle\int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'})\right)$ dt.

De fato, considerando $I : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(v) = \int_0^T \left(Jv^{'}, v\right) dt,$$

é simples verificar que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$\langle I^{'}(v), h\rangle = -2\int_0^T \left(Jv, h^{'}\right) dt.$$

Por outro lado, definindo

$$K(v) = \int_0^T G(t, v^{'})dt,$$

tem-se (Ver [Apêndice B]),

$$\langle K^{'}(v), h\rangle = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}), h^{'}\right) dt.$$

Sendo,

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \frac{1}{2}\langle I^{'}(v), h\rangle + \langle K^{'}(v), h\rangle$$

temos,

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = -\int_0^T \left(Jv, h^{'}\right) dt + \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}), h^{'}\right) dt$$

ou

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'}\right) dt \tag{3.64}$$

mostrando a Afirmação 1.

Lema 3.7 *Se v é um ponto crítico de ϕ, existe uma solução T-periódica u para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right).$$

Demonstração:

Por (3.64),

$$\langle \phi^{'}(v), h\rangle = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'}\right) dt.$$

Sendo v um ponto crítico de ϕ,

$$\int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h^{'}\right) dt = 0, \quad \forall\ h \in X.$$

Dado $\varphi \in C_0^{\infty}([0, T])$, considerando

$$h_{\varphi}(t) = \varphi(t) - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(s)ds$$

tem-se, $h_{\varphi}^{'} = \varphi^{'}$ e

$$\int_0^T h_{\varphi}(t)dt = \int_0^T \varphi(t)dt - \int_0^T \frac{1}{T}\left(\int_0^T \varphi(s)ds\right) dt$$

ou seja,

$$\int_0^T h_{\varphi}(t)dt = 0.$$

Mostrando que $h_{\varphi} \in X$.

Logo,

$$0 = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, h_{\varphi}^{'}\right) dt = \int_0^T \left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv, \varphi^{'}\right) dt, \quad \forall\ \varphi \in C_0^{\infty}([0, T])$$

o que implica,

$$D^{'}\left(\nabla G(t, v^{'}) - Jv\right) = 0$$

onde $D^{'}$ denota a derivada no sentido das distribuições.

Consequentemente

$$\left(D^{'}\nabla G(t, v^{'}), \varphi\right) = \int_0^T Jv^{'}\varphi$$

ou seja,

$$D^{'}\nabla G(t, v^{'}) = Jv^{'}$$

portanto,

$$\frac{d}{dt}\nabla G(t, v^{'}) = Jv^{'}.$$

Considerando

$$u = \nabla G(t, v^{'})$$

temos

$$v^{'} = \nabla H(t,u)$$

assim,

$$u^{'} = \frac{d}{dt}\nabla G(t,v^{'}) = Jv^{'} \tag{3.65}$$

o que implica,

$$u^{'} = J\nabla H(t,u).$$

Logo, u é solução para

$$u^{'} = J\nabla H(t,u).$$

Sendo ∇G e $v^{'}$ T-periódicas, segue que u é T-periódica.

Observando que

$$J^2 = -I, I := identidade,$$

de (3.65) segue

$$Ju^{'}(t) = -v^{'}(t).$$

Integrando de 0 a s, obtemos

$$\int_0^s v^{'}(t)dt = -J\left(\int_0^s u^{'}(t)dt\right)$$

assim (Ver [3]),

$$v(s) - v(0) = -J(u(s) - u(0))$$

ou seja,

$$v(s) - v(0) = -Ju(s) + Ju(0). \tag{3.66}$$

Integrando de 0 a T,

$$\int_0^T v(t)dt - \int_0^T v(0)dt = -J\left(\int_0^T u(t)dt\right) + J\left(\int_0^T u(0)dt\right)$$

e sendo $\displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0$, temos

$$-Tv(0) = -J\left(\int_0^T u(t)dt\right) + TJu(0)$$

consequentemente,

$$v(0) = J\left(\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\right) - Ju(0). \tag{3.67}$$

Por (3.66) e (3.67) segue

$$v(s) = J\left(\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\right) - Ju(0) - Ju(s) + Ju(0)$$

ou seja,

$$v(t) = J\left(\frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right) - Ju(t)$$

portanto,

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right).$$

■

Lema 3.8 *O funcional ϕ é limitado inferiormente.*

Demonstração:

Para

$$w(t) = \frac{T^{\frac{1}{p}}v(t)}{\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}$$

temos,

$$\|w^{'}(t)\|^p = \frac{T\|v^{'}(t)\|^p}{\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt}$$

e consequentemente

$$\int_0^T \|w^{'}(t)\|^p dt = T.$$

Pela Proposição 3.9,

$$\int_0^T \left(Jw^{'}(t), w(t)\right) dt \geq -\frac{T^2}{2\pi}$$

o que implica,

$$\frac{T^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}}} \int_0^T \left(Jv^{'}(t), v(t)\right) dt \geq -\frac{T^2}{2\pi}$$

logo,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left(Jv^{'}(t), v(t)\right) dt \geq -\frac{T^2}{4\pi}\|v\|_X^2. \tag{3.68}$$

Por outro lado, usando a equação (3.60) segue

$$\int_0^T G(t, v^{'})dt \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt - \alpha T$$

e assim,

$$\int_0^T G(t,v^{'})dt \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt\right) - \alpha T. \tag{3.69}$$

Por (3.68) e (3.69) tem-se

$$\phi(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p}\|v\|_X^p - \frac{T^2}{4\pi}\|v\|_X^2 - \alpha T.$$

■

Lema 3.9 *O funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).*

Demonstração:

Seja (v_k) uma sequência em X tal que $(\phi(v_k))$ é limitada e $\phi^{'}(v_k) \to 0$. Pelo Lema 3.8,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p}\|v_k\|_X^p - \frac{T^2}{4\pi}\|v_k\|_X^2 - \alpha T \leq \phi(v_k)$$

e sendo $(\phi(v_k))$ limitada, existe $M > 0$ tal que

$$\phi(v_k) \leq M.$$

Usando estas últimas desigualdades, tem-se (v_k) é limitada em X. Logo, (v_k) é limitada em $W^{1,p}([0,T])$. Desse modo, existe uma subsequência, que denotaremos por (v_k), tal que

$$v_k \to v \quad uniformemente \quad em \quad [0,T] \tag{3.70}$$

pois

$$W^{1,p}([0,T]) \hookrightarrow C([0,T]).$$

Sendo

$$\{v_k\} \subset W^{1,p}([0,T]) \tag{3.71}$$

segue que

$$\{v_k^{'}\} \subset L^p([0,T]).$$

Visto que $L^p([0,T])$ é um espaço reflexivo, existe uma subsequência, que denotaremos por $(v_k^{'})$, tal que

$$v_k^{'} \rightharpoonup w \quad em \quad L^p([0,T]).$$

Por (3.71) temos

$$\int_0^T v_k^{'}(t)\psi(t)dt = -\int_0^T v_k(t)\psi^{'}(t)dt, \quad \forall \ \ \psi \in C_0^1([0,T]). \tag{3.72}$$

Por definição

$$v_k^{'} \rightharpoonup w \;\; em \;\; L^p([0,T]) \Longleftrightarrow \varphi(v_k^{'}) \to \varphi(w), \;\; \forall\, \varphi \in (L^p([0,T]))^*.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Ver [3])

$$\int_0^T v_k^{'}(t)\varphi(t)dt \to \int_0^T w(t)\varphi(t)dt.$$

Por outro lado,

$$\left|\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt\right| \leq \int_0^T \|v_k(t) - v(t)\| \; |\varphi^{'}(t)|dt, \;\; \forall \;\; \varphi \in C_0^1([0,T])$$

assim,

$$\left|\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt\right| \leq C \int_0^T \|v_k(t) - v(t)\|dt.$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue

$$\left|\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt\right| \leq C \; T^{\frac{1}{q}} \; \|v_k - v\|_{L^p}^p.$$

De (3.70), segue

$$\int_0^T v_k(t)\varphi^{'}(t)dt \to \int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt, \;\; \forall \;\; \varphi \in C_0^1([0,T]).$$

Usando (3.72), temos

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt, \;\; \forall \;\; \varphi \in C_0^1([0,T]).$$

Integrando $\displaystyle\int_0^T v(t)\varphi^{'}(t)dt$ por partes e usando o Teorema de Dubois-Raymond (Ver [3]), obtemos

$$w = v^{'}$$

portanto,

$$v_k^{'} \rightharpoonup v^{'} \;\; em \;\; L^p([0,T]). \tag{3.73}$$

Observando que

$$\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k \in L^q([0,T])$$

podemos escrever,

$$\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k = w_k + f_k$$

onde

$$w_k = \frac{1}{T}\int_0^T \nabla G(t, v_k^{'})dt.$$

Desse modo,

$$\int_0^T \left(\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k, h^{'}\right) dt = \int_0^T \left(w_k + f_k, h^{'}\right) dt$$

mostrando que

$$\int_0^T \left(\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k, h^{'}\right) dt = \int_0^T \left(f_k, h^{'}\right) dt.$$

Por outro lado, sendo $\phi^{'}(v_k) \to 0$ tem-se

$$\sup\left\{\left|\int_0^T \left(\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k, h^{'}\right) dt\right|; \quad \|h^{'}\|_{L^p([0,T])} \leq 1\right\} \to 0$$

portanto,

$$\sup\left\{\left|\int_0^T \left(f_k, h^{'}\right) dt\right|; \quad \|h^{'}\|_{L^p([0,T])} \leq 1\right\} \to 0. \tag{3.74}$$

Desde que $f_k \in L^q([0,T])$, existe $\psi_k \in C([0,T])$ (Ver[3]), tal que

$$\|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])} \leq \frac{1}{k}.$$

Considere

$$h_k(t) = \varphi_k(t) - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_k(s)ds$$

onde

$$\varphi_k(t) = \int_0^t \psi_k|\psi_k|^{q-2}ds.$$

Então,

$$\int_0^T f_k h_k^{'}dt = \int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'}dt + \int_0^T \psi_k h_k^{'}dt$$

ou equivalentemente

$$\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])}\int_0^T f_k\left(\frac{h_k}{\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])}}\right)^{'} dt = \int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'}dt + \int_0^T \psi_k h_k^{'}dt. \tag{3.75}$$

Usando (3.74) e o fato que $\|h_k^{'}\|_{L^q([0,T])} \leq C$, podemos afirmar que

$$\left|\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])}\int_0^T f_k\left(\frac{h_k}{\|h_k^{'}\|_{L^p([0,T])}}\right)^{'} dt\right| \to 0.$$

Além disso,

$$\int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'}dt = \int_0^T (f_k - \psi_k)\varphi_k^{'}dt \leq \|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])}\|\varphi_k^{'}\|_{L^p([0,T])}$$

o que implica,

$$\int_0^T (f_k - \psi_k)h_k^{'}dt \leq \frac{1}{k}\|\psi_k\|_{L^q([0,T])}^{\frac{p}{q}} \leq \frac{C_1}{k} \to 0$$

consequentemente por (3.75),

$$\int_0^T \psi_k h_k^{'}dt \to 0.$$

Observando que

$$\int_0^T \psi_k h_k^{'}dt = \int_0^T |\psi_k|^q dt$$

temos,

$$\|\psi_k\|_{L^q([0,T])} \to 0 \;\; quando \;\; k \to +\infty.$$

Por outro lado,

$$\|f_k\|_{L^q([0,T])} = \|f_k - \psi_k + \psi_k\|_{L^q([0,T])} \leq \|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])} + \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}$$

ou seja,

$$\|f_k\|_{L^q([0,T])} \leq \frac{1}{k} + \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}$$

mostrando que

$$f_k \to 0 \;\; em \;\; L^q([0,T]).$$

Portanto,

$$\nabla G(t, v_k^{'}) - Jv_k - w_k = f_k \to 0 \;\; em \;\; L^q([0,T]) \tag{3.76}$$

onde

$$w_k = \frac{1}{T}\int_0^T \nabla G(t, v_k^{'})dt.$$

Note que,

$$\|w_k\| \leq \frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla G(t, v_k^{'})\|dt. \tag{3.77}$$

Sendo $G(t,.)$ a transformada de Legendre de $H(t,.)$, usando (3.60) e a Observação 3.5 existem $C_2 > 0$ e $C_3 > 0$ tais que

$$\|\nabla G(t, v_k^{'})\| \leq C_2\|v_k^{'}\|^{p-1} + C_3$$

logo, (w_k) é limitada em $\mathbb{R}^{2N}$. Portanto, existem uma subsequência, que denotaremos por (w_k), e $w \in \mathbb{R}^{2N}$ tais que

$$w_k \to w \;\; em \;\; \mathbb{R}^{2N}.$$

Usando (3.76),

$$v_k^{'} = \nabla H(f_k + Jv_k + w_k).$$

Por (H_3) e usando o Lema 3.5 existem $C_6 > 0$ e $C_7 > 0$ tais que

$$\|v_k^{'}\| \leq C_6\|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q-1} + C_7$$

o que implica,

$$\|v_k^{'}\|^p \leq \left(C_6\|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q-1} + C_7\right)^p.$$

Considerando

$$g_k = C_6\|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{q-1} + C_7,$$

temos,

$$\|v_k^{'}\| \leq g_k.$$

Observe que

$$|g_k|^p \leq C_8\|(f_k + Jv_k + w_k)\|^{(q-1)p} + C_9$$

ou seja,

$$|g_k|^p \leq C_8\|(f_k + Jv_k + w_k)\|^q + C_9.$$

Usando (3.76),

$$g_k \in L^p([0,T]).$$

Por outro lado, passando a subsequência se necessário,

$$v_k^{'}(t) \to g(t) \quad q.t.p \ em \ [0,T]$$

onde $g = \nabla H(Jv + w)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizado de Lebesgue

$$\int_0^T \|v_k^{'}(t) - g(t)\|^p dt \to 0 \quad em \quad L^p([0,T])$$

ou seja,

$$\int_0^T \|v_k^{'}(t) - v^{'}(t)\|^p dt \to 0 \quad em \quad L^p([0,T])$$

portanto,

$$v_k \to v \quad em \quad X.$$

■

Teorema 3.10 *Assumindo as hipóteses* $(H_1) - (H_4)$*, existe uma solução* T*-periódica* u *para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right)$$

minimiza ϕ *em* X*.*

Demonstração:

Uma vez que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, pelos Lemas 3.8 e 3.9 o funcional ϕ é limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_c$. Logo pelo Teorema 1.4 existe um ponto crítico v que minimiza ϕ em X.

Portanto, sendo v um ponto crítico de ϕ, pelo Lema 3.7 existe uma solução T-periódica u para

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right)$$

minimiza ϕ em X.

■

Proposição 3.11 *Assumindo as hipóteses* $(H_1) - (H_4)$ *e que* u *é uma solução de*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

verificando $u(0) = u(T)$*. Então*

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p}\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi}\left(\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p\right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T \tag{3.78}$$

e

$$\beta\int_0^T \|u(t)\|^q dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi}\left(\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p\right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T. \tag{3.79}$$

Demonstração:

Assumindo as hipóteses $(H_1) - (H_4)$, temos que H é uma função de Legendre e existem $q \in (1, 2)$, $\alpha \geq 0$ e $\beta, \gamma > 0$ tais que

$$\beta\|u\|^q - \alpha \leq H(t, u) \leq \gamma\|u\|^q + \alpha,$$

com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ e

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|\nabla H(t,u)\|^p}{p}\leq(\nabla H(t,u),u)+2\alpha.$$

Sendo u solução de

$$u^{'}(t)=J\nabla H(t,u(t))$$

temos

$$Ju^{'}(t)=-\nabla H(t,u(t))$$

o que implica,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{\|\nabla H(t,u)\|^p}{p}\leq-\left(Ju^{'},u\right)+2\alpha.$$

Integrando ambos os membros de 0 a T, obtemos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_0^T\|\nabla H(t,u)\|^p dt\leq-\int_0^T\left(Ju^{'},u\right)dt+2\alpha T. \tag{3.80}$$

Observe que,

$$\|u^{'}\|^2=(J\nabla H(t,u(t)),J\nabla H(t,u(t)))=\left(\nabla H(t,u(t)),J^2\nabla H(t,u(t))\right)$$

assim,

$$\|u^{'}\|^2=\|\nabla H(t,u)\|^2. \tag{3.81}$$

Substituindo (3.81) em (3.80) e usando a Proposição 3.9, ficamos com

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\leq\frac{T^2}{2\pi}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T.$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\leq\frac{T^2}{2\pi}\frac{1}{T^{\frac{2}{p}}}\left(\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\leq\frac{T^{2-\frac{2}{p}}}{2\pi}\left(\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T.$$

Usando o fato que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, tem-se

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1}{p}\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\leq\frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi}\left(\int_0^T\|u^{'}(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}}+2\alpha T$$

mostrando (3.78).

Por outro lado, pela Proposição 3.2

$$H(t,0) \geq H(t,u) + (\nabla H(t,u), -u)$$

ou seja,

$$H(t,u) \leq H(t,0) + (\nabla H(t,u), u)\,.$$

Usando (H_3),

$$\beta\|u\|^q - \alpha \leq H(t,u) \leq (\nabla H(t,u), u) + H(t,0)$$

e

$$H(t,0) \leq \alpha.$$

Logo,

$$\beta\|u\|^q \leq (\nabla H(t,u), u) + 2\alpha.$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para mostrar (3.78), obtemos

$$\beta \int_0^T \|u(t)\|^q dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi} \left(\int_0^T \|u^{'}(t)\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T$$

demonstrando (3.79).

■

3.7 Subharmônicas

Considerando o sistema Hamiltoniano

$$Ju^{'}(t) + \nabla H(t, u(t)) = 0, \tag{3.82}$$

uma solução u de (3.82) em $[0,T]$ verificando

$$u(0) = u(T)$$

pode ser extendida pela T-periodicidade para $\mathbb{R}$, obtendo-se uma solução u de (3.82) satisfazendo

$$u(t+T) = u(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.83}$$

Se (3.83) não é satisfeita substituindo T por $\dfrac{T}{k}$, onde $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k \geq 2$, T é chamado **período minimal** de u.

Nesta seção mostraremos que (3.82) admite solução u tal que

$$u(t) = u(t + kT), \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

para algum $k \geq 2$. Estas soluções são chamadas soluções subharmônicas ou simplesmente subharmônicas.

Teorema 3.12 *Assumindo as hipóteses $(H_1) - (H_4)$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, existe uma solução, u_k, kT-periódica para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$\|u_k\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} \|u_k(t)\| \to \infty \quad quando \quad k \to \infty.$$

Além disso, o período minimal (T_k) de u_k verifica

$$T_k \to \infty \quad quando \quad k \to \infty.$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor $T = 2\pi$. Visto que toda solução T-periódica é também kT-periódica, considere $T = 2k\pi$, pelo Teorema 3.10 existe uma solução $2k\pi$ - periódica de

$$u^{'}(t) = J\nabla H(t, u(t)) \tag{3.84}$$

tal que

$$v_k(t) = -J\left(u_k(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u_k(s)ds\right) \tag{3.85}$$

minimiza

$$\phi_k(v) = \int_0^{2k\pi} \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}(t), v(t)\right) + G(t, v^{'}(t))\right] dt$$

em X.

Vamos estimar superiormente $C_k = \phi_k(v_k)$. Considere $e \in \mathbb{R}^{2N}$ tal que $\|e\| = 1$ e

$$m = max\{G(t, v(t)) : t \in \mathbb{R}, \|v\| = 1\}. \tag{3.86}$$

Se

$$h_k = k \ cos\left(\frac{t}{k}\right) e + k \ sen\left(\frac{t}{k}\right) Je$$

temos

$$h_k^{'} = -sen\left(\frac{t}{k}\right) e + cos\left(\frac{t}{k}\right) Je$$

e consequentemente,

$$\|h_k^{'}\|^2 = \left(-sen\left(\frac{t}{k}\right)e + cos\left(\frac{t}{k}\right)Je, -sen\left(\frac{t}{k}\right)e + cos\left(\frac{t}{k}\right)Je\right)$$

de onde encontramos,

$$\|h_k^{'}\|^2 = sen^2\left(\frac{t}{k}\right)\|e\|^2 + 2\,(e, Je)\left(-sen\left(\frac{t}{k}\right)cos\left(\frac{t}{k}\right)\right) + cos^2\left(\frac{t}{k}\right)\|Je\|^2.$$

Por definição $\|e\| = \|Je\| = 1$ e por (i) do Lema 3.6 temos $(e, Je) = 0$. Portanto,

$$\|h_k^{'}\|^2 = sen^2\left(\frac{t}{k}\right) + cos^2\left(\frac{t}{k}\right)$$

donde concluímos que

$$\|h_k^{'}\| = 1. \tag{3.87}$$

Além disso,

$$C_k \leq \phi_k(h_k) = \int_0^{2k\pi}\left[\frac{1}{2}\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) + G(t, h_k^{'}(t))\right]dt.$$

Usando (3.86) e (3.87), temos

$$C_k \leq \int_0^{2k\pi}\left[\frac{1}{2}\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) + m\right]dt$$

assim,

$$C_k \leq \int_0^{2k\pi}\frac{1}{2}\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right)dt + 2km\pi. \tag{3.88}$$

Por outro lado,

$$\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) = \left(-sen\left(\frac{t}{k}\right)Je - cos\left(\frac{t}{k}\right)e, k\ cos\left(\frac{t}{k}\right)e + k\ sen\left(\frac{t}{k}\right)Je\right)$$

o que implica,

$$\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) = -k\ sen^2\left(\frac{t}{k}\right)\|Je\|^2 - k\ cos^2\left(\frac{t}{k}\right)\|e\|^2$$

e portanto,

$$\left(Jh_k^{'}(t), h_k(t)\right) = -k. \tag{3.89}$$

Substituindo (3.89) em (3.88) tem-se

$$C_k \leq -\frac{1}{2}\int_0^{2k\pi} k\ dt + 2km\pi$$

assim,

$$C_k \leq 2km\pi - k^2\pi. \tag{3.90}$$

Afirmação 1: $\|u_k\|_\infty \to \infty$ quando $k \to \infty$.

De fato, Se $\|u_k\|$ não converge para $+\infty$, existem $C_2 > 0$ e uma subsequência (u_{k_n}) tal que

$$\|u_{k_n}\|_\infty \leq C_2.$$

Observe que, $\nabla H|_{[0,T]\times\mathbb{R}^{2N}}$ é contínua e usando (3.84) temos

$$\|u_{k_n}^{'}\|_\infty \leq max\{\|J\nabla H(t,z)\| : t \in [0,T], \|z\| \leq C_2\}$$

portanto,

$$\|u_{k_n}^{'}\|_\infty \leq C_3.$$

Usando (3.85) obtemos

$$\|v_{k_n}\|_\infty = \left\| u_{k_n} - \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2k\pi} u_{k_n}(s)ds \right\|_\infty$$

o que implica,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq \|u_{k_n}\|_\infty + \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2k\pi} \|u_{k_n}(s)\|_\infty ds$$

logo,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq C_2 + \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2k\pi} C_2 \; ds$$

ou seja,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq 2 \; C_2.$$

Analogamente,

$$\|v_{k_n}^{'}\|_\infty \leq C_3.$$

Desse modo existe $C > 0$ tal que

$$\|v_{k_n}\|_\infty . \|v_{k_n}^{'}\|_\infty \leq C.$$

Note que,

$$\left(Jv_k^{'}, v_k\right) \geq -\left|\left(Jv_k^{'}, v_k\right)\right| \geq -\|Jv_k^{'}\|\|v_k\| = -\|v_k^{'}\|\|v_k\|.$$

Sendo

$$C_k = \int_0^{2k\pi} \left[\frac{1}{2}\left(Jv_k^{'}(t), v_k(t)\right) + G(t, v_k^{'}(t))\right] dt$$

temos,

$$C_{k_n} \geq -\int_0^{2k_n\pi} \frac{1}{2}\|v_{k_n}\|_\infty.\|v_{k_n}^{'}\|_\infty \, dt + \int_0^{2k_n\pi} G(t, v_{k_n}^{'}(t)) \, dt.$$

Por outro lado, usando (3.60) obtemos

$$G(t, v_k^{'}) \geq -\alpha.$$

logo,

$$C_{k_n} \geq -k_n C\pi - 2k_n\alpha\pi$$

o que implica,

$$C_{k_n} \geq -2k_n\pi\left(\frac{C}{2} + \alpha\right) \tag{3.91}$$

o que é um absurdo, pois por (3.90) e (3.91) segue

$$-2k_n\pi\left(\frac{C}{2} + \alpha\right) \leq -k_n^2\pi + 2k_n\pi m$$

donde segue,

$$-2\left(\frac{C}{2} + \alpha\right) \leq -k_n + 2m$$

ou seja,

$$k_n \leq 2m + C - 2\alpha$$

mostrando que (u_{k_n}) é limitada, o que é um absurdo. Portanto,

$$\|u_k\|_\infty \to \infty \;\; quando \;\; k \to \infty$$

mostrando a Afirmação 1.

Afirmação 2: $T_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Com efeito, caso contrário existe $\tau > 0$ e uma subsequência (T_{k_n}) tal que o período minimal T_{k_n} de u_{k_n} satisfaz $T_{k_n} \leq \tau$ onde $n \in \mathbb{N}^*$ e $k_n \to \infty$.

Pela Proposição 3.11, existem $A_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, tais que

$$\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}^{'}\|^p \leq A_1 \frac{\tau^{\frac{2}{q}}}{2\pi} + A_2\tau \tag{3.92}$$

e

$$\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}\|^q \leq A_3 T_{k_n}^{\frac{2}{q}} + A_4 T_{k_n}. \tag{3.93}$$

Considere

$$u_{k_n} = \widehat{u_{k_n}} + \overline{u_{k_n}}$$

onde,

$$\widehat{u_{k_n}} = \frac{1}{T_{k_n}} \int_0^{T_{k_n}} u_{k_n}(t)dt.$$

Observe que,

$$u_{k_n}^{'} = \overline{u_{k_n}}^{'}$$

pela desigualdade de Sobolev (Ver Proposição 2.1),

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq \frac{T_{k_n}}{12} \int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}^{'}\|^2 dt.$$

Sendo $p > 2$, por imersões de Sobolev

$$W_T^{1,p}([0,T]) \hookrightarrow W_T^{1,2}([0,T])$$

assim,

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq C\frac{T_{k_n}}{12} \left(\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}^{'}\|^p dt \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Usando (3.92) tem-se

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq C\frac{\tau}{12} \left(A_1 \frac{\tau^{\frac{2}{q}}}{2\pi} + A_2\tau \right)^{\frac{2}{p}}$$

logo, $\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty$ é limitada.

Por outro lado, temos

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}(t)\| dt$$

usando a desigualdade de Hölder, segue

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \left(\int_0^{T_{k_n}} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}(t)\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando (3.93) tem-se

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \left[T_{k_n}^{\frac{1}{p}} \left(A_3 T_{k_n}^{\frac{2}{q}} + A_4 T_{k_n} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

assim,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left[T_{k_n}^{\frac{1}{p}} \left(A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{1}{q}} \right) \right]$$

o que implica,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left(A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}+\frac{1}{p}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \right)$$

ou seja,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}}\left(A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}+\frac{1}{p}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}\right).$$

Observe que,

$$\frac{1}{p}+\frac{2}{q^2} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}-\frac{1}{q} = 1+\frac{2}{q^2}-\frac{q}{q^2}$$

o que implica,

$$\frac{1}{p}+\frac{2}{q^2} = 1+\frac{2-q}{q^2} > 1$$

poís, sendo $q \in (1,2)$ tem-se

$$\frac{2-q}{q^2} > 0.$$

Portanto,

$$\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(A_3^{\frac{1}{q}} \tau^{\frac{2}{q^2}+\frac{1}{p}-1} + A_4^{\frac{1}{q}}\right).$$

mostrando que $\|\widehat{u_{k_n}}\|_\infty$ é limitada.

Pela definição de u_{k_n} segue que $\|u_{k_n}\|_\infty$ é limitada, o que é um absurdo. Portanto,

$$T_k \to \infty \quad \textit{quando} \quad k \to \infty$$

mostrando a Afirmação 2.

■

3.8 Oscilações Livres com Período Minimal Prescrito

No que segue considere as seguintes afirmações sobre o Hamiltoniano livre $H(u)$:

$(\mathbf{H_5})$ $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$

$(\mathbf{H_6})$ H é estritamente convexa com respeito a u

$(\mathbf{H_7})$ Existem $q \in (1,2)$, $\alpha \geq 0$ e $\beta, \gamma > 0$ tais que

$$\beta\|u\|^q - \alpha \leq H(u) \leq \gamma\|u\|^q + \alpha,$$

e considere G é a transformada de Legendre de H.

Observação 3.4 *Assumindo $(H_5)-(H_7)$, podemos supor sem perda de generalidade $H(0)=0$.*

De fato, usando (H_7) e passando ao limite quando $\|u\| \to \infty$, temos

$$\lim_{\|u\|\to\infty} (\beta\|u\|^q - \alpha) \leq \lim_{\|u\|\to\infty} H(u) \leq \lim_{\|u\|\to\infty} (\gamma\|u\|^q + \alpha)$$

logo,

$$H(u) \to \infty \quad quando \quad \|u\| \to \infty.$$

Assim H possui mínimo em algum ponto $q \in \mathbb{R}^{2N}$.

Considere,

$$h_0 = H(q) = \min_{z \in \mathbb{R}^{2N}} H(z)$$

e a função $\widehat{H} : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{H}(v) = H(v+q) - h_0.$$

Por definição

$$\widehat{H}(v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Observe que

$$\widehat{H}(0) = H(q) - h_0 = 0,$$

ou seja, $\widehat{H}$ possui mínimo no ponto 0.

Por outro lado,

$$\nabla H(u) = \nabla \widehat{H}(v)$$

onde $i = v + q$. Se

$$v^{'}(t) = J \nabla \widehat{H}(v(t))$$

usando $u^{'} = v^{'}$ e $\nabla H(u) = \nabla \widehat{H}(v)$ tem-se

$$u^{'}(t) = J \nabla H(u(t)).$$

No que segue, podemos assumir que $H(0) = 0$ e $\nabla H(0) = 0$. Sendo G a transformada de Legendre de H, obtemos

$$G(u) \geq 0, \quad \forall \quad u \in \mathbb{R}^{2N}$$

e

$$G(0) = (v, 0) - H(0) = 0$$

logo,

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} G(u) = 0 = G(0).$$

Portanto,

$$0 = \min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} H(u) = \min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} G(u) = G(0).$$

Teorema 3.13 *Assumindo* $(H_5)-(H_7)$ *e* $H(0)=0$, *existe* $T_0 \geq 0$ *tal que para todo* $T > T_0$, *a equação*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)) \tag{3.94}$$

admite solução não-trivial u_T *com período minimal prescrito* T. *Além disso,*

$$\|u_T\|_\infty \to \infty \quad quando \quad T \to \infty.$$

Demonstração:

Pelo Teorema 3.10, para todo $T > 0$ existe uma solução u_T para

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

tal que

$$v_T(t) = -J\left(u_T(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u_T(s)ds\right)$$

minimiza

$$\phi_T(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}(t), v(t)\right) + G(v^{'}(t))\right] dt$$

em X.

Vamos estimar superiormente $C_T = \phi_T(v_T)$. Consideremos $e \in \mathbb{R}^{2N}$ tal que $\|e\| = 1$ e

$$m = \max_{\|v\|=1} G(v).$$

Se

$$h_T = \frac{T}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) e + \frac{T}{2\pi} sen\left(\frac{2\pi}{T}t\right) Je$$

repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 3.12, obtemos

$$C_T \leq -\frac{T^2}{4\pi} + mT$$

e

$$\|u_T\|_\infty \to \infty \quad quando \quad T \to \infty.$$

Além disso, se

$$T > T_0 = 4m\pi$$

temos

$$\frac{T^2}{4\pi} > mT$$

o que implica,

$$mT - \frac{T^2}{4\pi} < 0$$

ou seja, se $T > T_0 = 4m\pi$ devemos ter

$$C_T < 0 = \phi_T(0)$$

mostrando que u_T é uma solução não trivial.

Afirmação: A solução u_T tem período minimal T.

Com efeito, caso contrário u_T é $\left(\frac{T}{k}\right)$-periódica para algum $k \geq 2$. Então

$$v(t) = k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)$$

é T-periódica, pois

$$v(t+T) = k\ v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) \tag{3.95}$$

e

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = -J\left(u_T\left(\frac{t+T}{k}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T u_T\left(\frac{t+T}{k}\right)\right)dt.$$

Logo

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = -J\left(u_T\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T u_T\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt$$

mostrando a igualdade

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = v_T\left(\frac{t}{k}\right). \tag{3.96}$$

Substituindo (3.96) em (3.95) tem-se

$$v(t+T) = k\ v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)$$

ou seja,

$$v(t+T) = v(t)$$

mostrando que $v(t) = k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)$ é T-periódica.

Além disso,

$$\phi_T(v) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(Jv_T^{'}\left(\frac{t}{k}\right), k\ v_T\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt + \int_0^T G\left(v_T^{'}\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt$$

ou seja,

$$\phi_T(v) = \frac{k}{2}\int_0^T \left(Jv_T^{'}\left(\frac{t}{k}\right), v_T\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt + \int_0^T G\left(v_T^{'}\left(\frac{t}{k}\right)\right)dt.$$

Considerando $s = \frac{t}{k}$ temos $dt = kds$, logo

$$\phi_T(v) = \frac{k^2}{2}\int_0^{\frac{T}{k}} \left(Jv_T^{'}(s), v_T(s)\right)ds + k\int_0^{\frac{T}{k}} G\left(v_T^{'}(s)\right)ds. \tag{3.97}$$

Definindo

$$f(s) = \left(Jv_T^{'}(s), v_T(s)\right)$$

observe que

$$\int_0^T f(s)ds = \int_0^{\frac{T}{k}} f(s)ds + \int_{\frac{T}{k}}^{\frac{2T}{k}} f(s)ds + ... + \int_{\frac{(k-2)T}{k}}^{\frac{(k-1)T}{k}} f(s)ds + \int_{\frac{(k-1)T}{k}}^{T} f(s)ds$$

o que implica,

$$\int_0^T f(s)ds = k \int_0^{\frac{T}{k}} f(s)ds.$$

Substituindo a última igualdade em (3.97) e usando um argumento semelhante para $\int_0^{\frac{T}{k}} G\left(v_T^{'}(s)\right) ds$, ficamos com

$$\phi_T(v) = \frac{k}{2}\int_0^T \left(Jv_T^{'}(s), v_T(s)\right) ds + \int_0^T G\left(v_T^{'}(s)\right) ds$$

ou ainda

$$\phi_T(v) = \phi_T(v_T(t)) + \frac{k-1}{2}\int_0^T \left(Jv_T^{'}(t), v_T(t)\right) dt.$$

Desde que,

$$G(v) \geq 0, \forall\ v \in \mathbb{R}^{2N}$$

tem-se

$$0 > \phi_T(v_T) \geq \int_0^T \frac{1}{2}\left(Jv_T^{'}(t), v_T(t)\right) dt$$

o que implica,

$$\int_0^T \frac{1}{2}\left(Jv_T^{'}(t), v_T(t)\right) dt < 0.$$

Portanto,

$$\phi_T(v) < \phi_T(v_T)$$

o que é um absurdo. Mostrando que u_T é T-periódica.

■

3.9 Oscilações Livres com Energia Prescrita

Se u é solução do sistema Hamiltoniano livre

$$u^{'}(t) - J\nabla H(u(t)) = 0$$

sabemos que $H(u(t))$ é constante.

As órbitas de $u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$ em uma hiper-superfície S, é o conjunto

$$\{u(t) \in \mathbb{R}^{2N} : u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)), t \in [0,T] \;\; e \;\; H(u) \;\; é \;\; constante\}.$$

Lema 3.10 *Sejam $H_1, H_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$S = H_1^{-1}(c_1) = H_2^{-1}(c_2).$$

Se

$$\nabla H_i(u(t)) \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall\, u \in S,$$

então as órbitas de $u^{'}(t) = J\nabla H_i(u(t))$, i = 1,2 em S são as mesmas.

Demonstração:

Seja $u_1 : [0,T] \to S$ solução de

$$u^{'}(t) = J\nabla H_1(u(t)).$$

Sendo S uma hiper-superfície, $\nabla H_1(u_1(t))$ e $\nabla H_2(u_1(t))$ são paralelos ao vetor normal ao plano tangente S que passa pelo ponto $u_1(t)$. Portanto $\nabla H_1(u_1(t))$ e $\nabla H_2(u_1(t))$ são linearmente dependentes. Assim, existe uma função $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla H_2(u_1(t)) = \lambda(t)\nabla H_1(u_1(t)), \quad t \in [0,T]$$

o que implica,

$$\|\nabla H_2(u_1(t))\| = |\lambda(t)| \; \|\nabla H_1(u_1(t))\|, \quad t \in [0,T].$$

Visto que $\nabla H_i(u(t)) \neq 0$, i = 1, 2, tem-se

$$\lambda(t) \neq 0, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.98}$$

Observe que,

$$\lambda(t) = \frac{(\nabla H_2(u_1(t)), \nabla H_1(u_1(t)))}{\|\nabla H_1(u_1(t))\|^2}$$

e sendo $H_1, H_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$, podemos concluir que λ é contínua. Usando (3.98), o fato de λ ser contínua e o Teorema do Valor Intermediário (Ver [9]), temos que

$$\lambda(t) > 0 \;\; ou \;\; \lambda(t) < 0, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.99}$$

Considere a função $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{dt}{\lambda(t)}.$$

Afirmação: ψ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

De fato, sendo

$$\psi^{'}(s) = \frac{1}{\lambda(s)}$$

usando (3.99) segue

$$\psi^{'}(s) > 0, \quad \forall\ s \in [0, T]$$

ou

$$\psi^{'}(s) < 0, \quad \forall\ s \in [0, T]$$

mostrando que ψ é injetiva.

Sendo ψ contínua e injetiva, existe pelo teorema da Função Inversa $\psi^{-1} : \psi([0, T]) \to \mathbb{R}$ tal que ψ^{-1} é contínua. Visto que

$$\psi^{'}(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \quad e \quad \lambda(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, T]$$

pelo Teorema da Regra da Cadeia, ψ^{-1} é derivável para todo $s \in \psi([0, T])$. Logo, ψ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Mostrando a Afirmação.

Considere a função $u_2 : \psi([0, T]) \to \mathbb{R}^{2N}$ tal que

$$u_2(t) = u_1(\psi^{-1}(t))$$

onde $t = \psi(s)$. Observe que

$$t = \psi(s) \Leftrightarrow s = \psi^{-1}(t), \quad \forall\ s \in [0, T].$$

Logo,

$$u_2^{'}(t) = u_1^{'}(\psi^{-1}(t)).\frac{1}{\psi^{'}(s)}$$

o que implica,

$$u_2^{'}(t) = u_1^{'}(\psi^{-1}(t)).\frac{1}{\psi^{'}(\psi^{-1}(t))}$$

ou seja,

$$u_2^{'}(t) = \left(\frac{1}{\psi^{'}}(\psi^{-1}(t))\right).\left(u_1^{'}(\psi^{-1}(t))\right).$$

sendo u_1 solução de $u^{'}(t) = J\nabla H_1(u(t))$, segue

$$u_2^{'}(t) = \left(\frac{1}{\psi^{'}}(\psi^{-1}(t))\right) J\nabla H_1(u_1(\psi^{-1}(t))$$

e usando a definição de ψ,

$$u_2^{'}(t) = \lambda\left(\psi^{-1}(t)\right) J\nabla H_1(u_1(\psi^{-1}(t))$$

visto que $\psi^{-1}(t) \in [0,T]$, logo

$$u_2^{'}(t) = J\nabla H_2(u_2(t)).$$

Por outro lado, se considerarmos $u_2 : [0,T] \to S$ solução de

$$u^{'}(t) = J\nabla H_2(u(t)).$$

Usando o mesmo argumento devemos ter

$$u_1^{'}(t) = J\nabla H_1(u_1(t)).$$

■

Lema 3.11 *Sejam $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla H(u) \neq 0$ para todo $u \in H^{-1}(c) = S$, onde S a fronteira de um conjunto C compacto e estritamente convexo com $0 \in intC$. Se $j_c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ é tal que*

$$j_c(u) = inf\left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

e

$$F(u) = j_c^{\frac{3}{2}}(u)$$

temos:
(i) *$F^{-1}(1) = S$*
(ii) *F é homogênea positiva de grau $\dfrac{3}{2}$*
(iii) *$F \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$*
(iv) *F é estritamente convexa*
(v) *Existem $\beta, \gamma > 0$ tais que*

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}$$

(vi) *$\nabla F(u) \neq 0, \ \forall\ u \in S$.*

Demonstração:

No que segue vamos fazer algumas observações que serão utilizadas na demonstração do Lema.

I: Se $u \in C$ então $j_c(u) \leq 1$.

De fato, sendo $u \in C$ temos

$$1 \in \left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

e pela definição de j_c,

$$j_c(u) \leq 1$$

mostrando I.

II: $u \in intC$ se, e somente se, $j_c(u) < 1$.

Com efeito, se $u \in intC$ então $(1+\epsilon)u \in C$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, assim

$$\frac{1}{1+\epsilon} \in \left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

logo,

$$j_c(u) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$$

isto é,

$$j_c(u) < 1.$$

Reciprocamente, se $j_c(u) < 1$ existe α tal que

$$j_c(u) < \alpha < 1 \quad com \quad \frac{u}{\alpha} \in C.$$

Sendo $0 \in intC$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset C$. Para todo $v \in C$, usando o fato de C ser estritamente convexo, temos

$$u + (1-\alpha)v = \alpha\left(\frac{u}{\alpha}\right) + (1-\alpha)v \in C$$

logo,

$$B(u, (1-\alpha)\delta) \subset C$$

ou seja,

$$u \in intC$$

o que mostra II.

III: Se $j_c(u) = 1$ então $u \in \partial C$.

De fato, se $j_c(u) = 1$ existe uma sequência (λ_n) com $\lambda_n > 1$ tal que

$$\lambda_n \to 1 \quad e \quad \frac{u}{\lambda_n} \in C.$$

Observe que,

$$u = \lim_{n\to\infty} \frac{u}{\lambda_n},$$

e sendo C fechado, devemos ter $u \in C$.

Portanto usando I, II e III e o fato que C é fechado, tem-se

$$u \in \partial C \quad se, \quad e \quad somente \quad se, \quad j_c(u) = 1. \tag{3.100}$$

Portanto, $j_c^{-1}(1)$ é o conjunto de pontos de ∂C, isto é,

$$j_c^{-1}(1) = S.$$

Observe que

$$u \in F^{-1}(1) \Leftrightarrow F(u) = 1 \Leftrightarrow (j_c(u))^{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow j_c(u) = 1 \Leftrightarrow u \in j_c^{-1}(1).$$

Portanto $F^{-1}(1) = S$, o que mostra (i).

Para mostrar (ii), note que para $t > 0$

$$j_c(tu) = inf\left\{\lambda > 0; \frac{tu}{\lambda} \in C\right\},$$

o que implica

$$j_c(tu) = t\ inf\left\{\widehat{\lambda} > 0; \frac{u}{\widehat{\lambda}} \in C\right\}$$

ou seja,

$$j_c(tu) = tj_c(u).$$

Portanto,

$$F(tu) = (j_c(tu))^{\frac{3}{2}} = (tj_c(u))^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}}\ (j_c(u))^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}}\ F(u),$$

mostrando (ii).

Com relação a (iii), primeiramente sejam $U = \{(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{2N+1}; u \neq 0 \quad e \quad \lambda > 0\}$ e considere a função $G : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(u, \lambda) = H\left(\frac{u}{\lambda}\right) - c.$$

Observe que,

$$G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{\lambda} \in S \Leftrightarrow j_c\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$$

logo,

$$G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow j_c(u) = \lambda.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = \left(\nabla H\left(\frac{u}{\lambda}\right), -\frac{u}{\lambda^2}\right)$$

o que implica,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left(\nabla H\left(\frac{u}{\lambda}\right), \frac{u}{\lambda}\right)$$

ou seja,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = -\frac{1}{j_c(u)}\left(\nabla H\left(\frac{u}{j_c(u)}\right), \frac{u}{j_c(u)}\right).$$

Usando o fato de $0 \in intC$ segue

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) = -\frac{1}{j_c(u)}\left(\nabla H\left(\frac{u}{j_c(u)}\right), \frac{u}{j_c(u)}\right) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, para cada $u \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ existe $B = B_\delta(u) \subset \mathbb{R}^{2N}$ e um intervalo $J = (j_c(u) - \epsilon, j_c(u) + \epsilon)$ tal que, existe uma única função $\xi : B \to J$ de classe C^1 satisfazendo

$$G(z, \xi(z)) = 0, \quad \forall\ z \in B.$$

Pela unicidade da função ξ temos

$$F(z) = \xi(z), \quad \forall\ z \in B$$

portanto,

$$F \in C^1\left(B, \mathbb{R}\right).$$

Sendo u qualquer em $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$, concluímos que

$$F \in C^1\left(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \mathbb{R}\right).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(0+th) - F(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(j_c(th))^{\frac{3}{2}} - (j_c(0))^{\frac{3}{2}}}{t}$$

o que implica,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\frac{3}{2}}(j_c(h))}{t}$$

logo,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{2}} j_c(h) = 0.$$

Agora iremos mostrar que

$$\frac{F(0+h) - F(0)}{\|h\|} \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ \|h\| \to 0.$$

Sendo $F(0) = 0$ e considerando $r(h) = F(h)$, temos

$$(j_c(h))^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

ou seja,

$$\left(j_c\left(\|h\|\frac{h}{\|h\|}\right)\right)^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

o que implica,

$$\|h\|^{\frac{3}{2}}\left(j_c\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right)^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

assim,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\|h\|^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = 0$$

mostrando que

$$\frac{F(0+h)-F(0)}{\|h\|} \to 0 \quad quando \quad \|h\| \to 0$$

de onde segue $F^{'}(0) = 0$. Obviamente ∇F é homogênea positiva de grau $\dfrac{1}{2}$, logo

$$\lim_{\|u\|\to 0}\nabla F(u) = \lim_{\|u\|\to 0}\nabla F\left(\|u\|\frac{u}{\|u\|}\right) = \lim_{\|u\|\to 0}\|u\|^{\frac{1}{2}}\nabla F\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \quad h \in \mathbb{R}^{2N}$$

e

$$\lim_{\|u\|\to 0}\nabla F(u) = 0 = \nabla F(0)$$

ou seja, F é diferenciável no ponto 0 e ∇F é contínua no ponto 0. Portanto

$$F \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$$

mostrando (iii).

Com relação a (iv), para $u, v \in \mathbb{R}^m$ fixe

$$\lambda \in \left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\}$$

e

$$\mu \in \left\{\mu > 0; \frac{u}{\mu} \in C\right\}.$$

Usando a convexidade de C,

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{v}{\mu}\right) \in C$$

pois, fixando

$$0 < t = \frac{\mu}{\lambda+\mu} < 1$$

tem-se

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = (1-t)\left(\frac{u}{\lambda}\right) + t\left(\frac{v}{\mu}\right)$$

e consequentemente,

$$\lambda+\mu \in \left\{\theta > 0; \frac{u+v}{\theta} \in C\right\}.$$

Usando propriedades de ínfimo, tem-se

$$inf\left\{\lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C\right\} + inf\left\{\mu > 0; \frac{v}{\mu} \in C\right\} \geq inf\left\{\theta > 0; \frac{u+v}{\theta} \in C\right\},$$

ou seja,

$$j_c(u+v) \leq j_c(u) + j_c(v).$$

Se $0 < \alpha < 1$ e $u, v \in \mathbb{R}^m$,

$$j_c((1-\alpha)u + \alpha v) \leq j_c((1-\alpha)u) + j_c(\alpha v)$$

o que implica,

$$j_c((1-\alpha)u + \alpha v) \leq (1-\alpha)j_c(u) + \alpha j_c(v)$$

o que mostra que j_c é uma função convexa.

Sendo C um conjunto estritamente convexo, para $u, v \in C$ com $u \neq v$ e $\theta \in (0,1)$ temos

$$\theta\left(\frac{u}{j_c(u)}\right) + (1-\theta)\left(\frac{v}{j_c(v)}\right) \in intC.$$

Usando II,

$$j_c\left(\theta\left(\frac{u}{j_c(u)}\right) + (1-\theta)\left(\frac{v}{j_c(v)}\right)\right) < 1.$$

Para cada $t \in [0,1]$, considerando

$$\theta = \frac{tj_c(u)}{tj_c(u) + (1-t)j_c(v)}$$

tem-se

$$1-\theta = \frac{(1-t)j_c(v)}{tj_c(u) + (1-t)j_c(v)}$$

e

$$j_c(tu + (1-t)v) < tj_c(u) + (1-t)j_c(v)$$

mostrando que j_c é uma função estritamente convexa. Portanto, sendo F a composição de duas funções estritamente convexas, concluímos que F é estritamente convexa. Mostrando (iv).

Para a prova de (v), observe que existem $\gamma, \beta > 0$ tais que

$$\beta \leq F\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \leq \gamma$$

usando (ii) tem-se

$$\beta \leq \left(\frac{1}{\|u\|}\right)^{\frac{3}{2}} F(u) \leq \gamma$$

o que implica,

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}$$

mostrando (v).

Finalmente, para mostrarmos (vi) observe que $F(0) = 0$ e usando o fato que a função F é estritamente convexa segue que 0 é o único ponto crítico de F. Logo, sendo $F^{-1}(1) = S$ devemos ter

$$\nabla F(u) \neq 0, \ \forall \ u \in S.$$

■

Teorema 3.14 *Sejam $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla H(u) \neq 0$ para todo $u \in S = H^{-1}(c)$ onde S é a fronteira de um conjunto C compacto e estritamente convexo com $0 \in intC$. Então existe pelo menos uma órbita periódica para*

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

com $u(t) \in S, \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Considere G a transformada de Legendre de F, onde F é a função definida no Lema 3.11. Do Teorema 3.10, existe uma solução u (2π)-periódica para

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)ds\right)$$

minimiza

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}(t), v(t)\right) + G(t, v^{'}(t))\right] dt$$

em X. Pelo Lema 3.11, existem $\beta, \gamma > 0$ tais que

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}.$$

Considerando $p = 3$ e $q = \frac{3}{2}$, segue do Lema 3.4

$$\left(\frac{2}{3\gamma}\right)^2 \frac{\|v\|^3}{3} \leq G(v) \leq \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|v\|^3}{3}.$$

Se

$$h(t) = (cost)e + (sent)Je, \quad com\ e \in \mathbb{R}^{2N}$$

usando o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 3.12 tem-se

$$\phi(h) \leq -\pi\|e\|^2 + 2\pi\left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|e\|^3}{3}.$$

Assim,

$$\min_{v\in X} \phi(v) \leq \phi(h) \leq -\pi\|e\|^2 + 2\pi\left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|e\|^3}{3},$$

e fixando $\|e\| < \dfrac{27\beta^2}{8}$ obtemos

$$\min_{v\in X} \phi(v) < 0 = \phi(0). \tag{3.101}$$

Portanto, usando a hipótese que v minimiza ϕ, segue por (3.101) que $v \neq 0$, o que implica que $u \neq 0$.

Por conservação de energia e pelas propriedades de F, segue

$$F(u(t)) = d > 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Considere

$$w(t) = d^{-\frac{2}{3}} u(d^{\frac{1}{3}} t), \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Observe que w é $\left(\dfrac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right)$-periódica. De fato, temos

$$w\left(t + \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right) = d^{-\frac{2}{3}} u(d^{\frac{1}{3}} t + 2\pi)$$

sendo u uma função (2π)-periódica, segue

$$w\left(t + \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right) = w(t).$$

Por outro lado,

$$F(w(t)) = F\left(d^{-\frac{2}{3}} u(d^{\frac{1}{3}} t)\right) = 1$$

Além disso,

$$Jw^{'}(t) = d^{-\frac{2}{3}} Ju^{'}\left(d^{\frac{1}{3}} t\right).d^{\frac{1}{3}} = d^{-\frac{1}{3}} Ju^{'}\left(d^{\frac{1}{3}} t\right).$$

Sendo,

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t))$$

obtemos,

$$Jw^{'}(t) = -d^{-\frac{1}{3}}\nabla F\left(u\left(d^{\frac{1}{3}}t\right)\right)$$

o que implica,

$$Jw^{'}(t) = -\nabla F(w(t))$$

ou ainda,

$$w^{'}(t) = J\nabla F(w(t)).$$

Logo, w é solução $\left(\dfrac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right)$-periódica de

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t))$$

com $F(w(t)) = 1$.

Pelo Lema 3.10, os sistemas Hamiltonianos

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t)) \quad e \quad u^{'}(t) = J\nabla H(u(t))$$

admitem a mesma órbita para

$$S = F^{-1}(1) = H^{-1}(c).$$

■

Capítulo 4

Pontos Críticos de Funcionais Invariantes

Nosso objetivo neste capítulo é obter resultados de multiplicidade de pontos críticos de funcionais invariantes por uma ação de S^1.

Quando o problema apresenta simetrias, isto é, quando existe um determinado grupo G agindo de uma forma contínua no espaço X, onde X um espaço de Banach e $G = S^1$ é um grupo topológico compacto, e o funcional $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é invariante sob esta ação, é possível mostrar que o funcional ϕ possui muitos pontos críticos. Para tanto, vamos introduzir conceitos, tais como, S^1-índice e funcionais invariantes. Vamos mostrar também uma versão mais geral do Lema de Deformação, para o qual vamos trabalhar com funcionais invariantes e com vizinhança invariante.

Neste capítulo apresentaremos a teoria de representação de grupos topológicos compactos em espaços de Banach (ou grupo de representação por operadores lineares). O grupo S^1 terá grande importância para o estudo de soluções periódicas dos sistemas Hamiltonianos livres, uma vez que, se $u(t)$ é solução de tal sistema o mesmo acontece com $u(t+\theta)$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$ e portanto, se $u(t)$ é T-periódica vemos o surgimento da representação $L(\theta)$ do grupo $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \sim S^1$ dado por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta).$$

4.1 S^1-índice

Suponha que $\{L(\theta); \theta \in S^1\}$ é uma dada representação isométrica de S^1 em X, isto é, para cada, $\theta \in S^1$, $L(\theta) : X \to X$ é um operador linear e com as seguintes propriedades:

(i) $\|L(\theta)u\| = \|u\|$

(ii) $L(\theta_1 + \theta_2) = L(\theta_1)L(\theta_2),\ \forall\ \theta_1, \theta_2 \in S^1$

(iii) $L(0) := I_d$

(iv) $(\theta, u) \longmapsto L(\theta)u$ é contínua

(v) $L(\theta + 2\pi) = L(\theta)$.

Definição 4.1 *A órbita de um elemento $u \in X$ é o conjunto $\sigma(u) = \{L(\theta)u; \theta \in S^1\}$. Um subconjunto $\Omega \subset X$ é invariante se $L(\theta)\Omega = \Omega$, para todo $\theta \in S^1$. O grupo S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω se $L(\theta)u = u$ para algum $\theta \in S^1$ e para algum $u \in \Omega$, implica $\theta = 0$.*

Definição 4.2 *Uma aplicação T entre dois conjuntos invariantes diz-se equivariante se $T \circ L(\theta) = L(\theta) \circ T$, para todo $\theta \in S^1$.*

Definição 4.3 *Um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ é invariante se $\phi \circ L(\theta) = \phi$, para todo $\theta \in S^1$.*

4.2 O Lema de Deformação

Lema 4.1 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\theta \in S^1$. Se ϕ é invariante, então*
(i) $\langle \phi'(L(\theta)u), h\rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h\rangle$
(ii) $\|\phi'(L(\theta)u)\| = \|\phi'(u)\|$.

Demonstração:

Por definição,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(L(\theta)u + th) - \phi(L(\theta)u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi\left[L(\theta)(u + L(-\theta)(th))\right] - \phi(L(\theta)u)}{t}.$$

Sendo ϕ invariante,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(u + L(-\theta)(th)) - \phi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(u + tL(-\theta)h) - \phi(u)}{t}$$

logo,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h\rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h\rangle,$$

o que mostra (i).

Sendo

$$\langle \phi^{'}(L(\theta)u), h\rangle = \langle \phi^{'}(u), L(-\theta)h\rangle,$$

segue que

$$\langle \phi^{'}(L(\theta)u), h\rangle \leq \|\phi^{'}(u)\|\|L(-\theta)h\| = \|\phi^{'}(u)\|\|h\|, \forall h \in X.$$

Considerando $h \in X$ com $\|h\| \leq 1$, tem-se

$$\|\phi^{'}(L(\theta)u)\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \frac{|\langle \phi^{'}(L(\theta)u), h\rangle|}{\|h\|} \leq \|\phi^{'}(u)\|$$

ou seja,

$$\|\phi^{'}(L(\theta)u)\| \leq \|\phi^{'}(u)\|. \tag{4.1}$$

Por outro lado, dado $h_1 \in X$, $\|h_1\| \leq 1$, existe $h \in X$ tal que

$$L(-\theta)h = h_1$$

pois $L(-\theta)$ é sobrejetiva. Assim

$$\langle \phi^{'}(u), h_1\rangle = \langle \phi^{'}(L(\theta)u), L(\theta)h_1\rangle$$

desse modo,

$$\langle \phi^{'}(u), h_1\rangle \leq \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|\|L(\theta)h_1\| = \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|\|h_1\|$$

portanto,

$$\|\phi^{'}(u)\| \leq \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|. \tag{4.2}$$

Usando (4.1) e (4.2), tem-se

$$\|\phi^{'}(u)\| = \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|.$$

■

Lema 4.2 *Sejam $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $Y = \{u \in X; \phi^{'}(u) \neq 0\}$. Se ϕ é invariante, existe um campo vetorial pseudo-gradiente equivariante para ϕ em Y.*

Demonstração:

Primeiramente note que usando o Lema 4.1 é fácil verificar que o conjunto Y é invariante. Pelo Lema 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente $w : Y \to X$.

Considere $v : Y \to X$ dada por

$$v(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(-\theta)w(L(\theta)u)d\theta, \quad \forall\ u \in Y.$$

Assim,

$$\|v(u)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|L(-\theta)w(L(\theta)u)\|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|w(L(\theta)u)\|d\theta.$$

Usando o fato de que w é pseudo-gradiente e o Lema 4.1,

$$\|v(u)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\|\phi^{'}(L(\theta)u)\|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\|\phi^{'}(u)\|d\theta$$

e portanto

$$\|v(u)\| \leq 2\|\phi^{'}(u)\|.$$

Por outro lado,

$$\langle \phi^{'}(u), v(u)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \phi^{'}(u), L(-\theta)w(L(\theta)u)\rangle d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \phi^{'}(L(\theta)u), w(L(\theta)u)\rangle d\theta$$

e consequentemente

$$\langle \phi^{'}(u), v(u)\rangle \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\phi^{'}(L(\theta)u)\|^2 d\theta$$

ou seja,

$$\langle \phi^{'}(u), v(u)\rangle \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\phi^{'}(u)\|^2 d\theta$$

mostrando que

$$\langle \phi^{'}(u), v(u)\rangle \geq \|\phi^{'}(u)\|^2.$$

Observe que,

$$v(L(\tau)u) = \int_0^{2\pi} L(-\theta)w(L(\theta+\tau)u)d\theta$$

o que implica para $\sigma = \theta + \tau$

$$v(L(\tau)u) = \frac{L(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(-\sigma)w(L(\sigma)u)d\sigma$$

isto é,

$$v(L(\tau)u) = L(\tau)v(u)$$

mostrando que v é equivariante.

Finalmente, considerando $u \in Y$, observando que Y é invariante e

$$A = \{L(\theta(u)), \theta \in S^1\} \subset Y$$

tem-se que A é invariante. De fato, seja $v \in A$, assim $v = L(\theta)u$ e

$$L(\widehat{\theta})L(\theta)u = L(\widehat{\theta} + \theta)u = L(\sigma)u, \quad onde \quad \sigma \in S^1.$$

Assim,

$$L(\widehat{\theta})A \subset A, \ \forall \ \widehat{\theta} \in S^1. \tag{4.3}$$

Por outro lado,

$$L(\widehat{\theta}) \left(L(-\widehat{\theta})A \right) \subset L(\widehat{\theta})A$$

isto é,

$$L(\widehat{\theta} - \widehat{\theta})A \subset L(\widehat{\theta})A$$

o que implica,

$$A \subset L(\widehat{\theta})A, \ \forall \ \widehat{\theta} \in S^1. \tag{4.4}$$

Por (4.3) e (4.4) segue que A é invariante.

Agora considere a seguinte afirmação que será bastante utilizada nesta seção.

Afirmação 1: O conjunto $A_\delta = \{u \in X; dist(u, A) \leq \delta\}$ é invariante.

Com efeito, se $u \in L(\theta)A_\delta$, por definição

$$dist(u, A) = inf\{\|u - v\|; v \in A\}$$

o que implica para $u = L(\theta)z$

$$dist(u, A) = inf\{\|L(\theta)z - L(\theta)w\|, \ w \in A\}$$

assim,

$$dist(u, A) = inf\{\|z - w\|,\ w \in A\}$$

ou seja,

$$dist(u, A) = dist(z, A) \leq \delta$$

mostrando que

$$L(\theta)A_\delta \subset A_\delta,\ \forall\ \theta \in S^1.$$

Por outro lado,

$$L(\theta)\left(L(-\theta)A_\delta\right) \subset L(\theta)A_\delta$$

isto é,

$$L(\theta - \theta)A_\delta \subset L(\theta)A_\delta$$

o que implica,

$$A_\delta \subset L(\theta)A_\delta,\ \forall\ \theta \in S^1.$$

mostrando a Afirmação 1.

Considere $u_1, u_2 \in B_\delta(u)$, usando o fato que A_δ é invariante, segue

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|L(-\theta)[w(L(\theta)u_1) - w(L(\theta)u_2)]\|d\theta$$

o que implica,

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|w(L(\theta)u_1) - w(L(\theta)u_2)\|d\theta$$

considerando $\delta > 0$ tal que w é localmente lipschitziana em $B_\delta(L(\theta)u)$, existe uma constante l tal que

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{l}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|L(\theta)(u_1 - u_2)\|d\theta$$

e assim,

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq l\|u_1 - u_2\|$$

mostrando que v é localmente lipschitziana. Portanto, v é um campo vetorial pseudo-gradiente equivariante para ϕ em Y.

■

Observação 4.1 *Note que para mostrarmos que um conjunto $\Omega \subset X$ é invariante, basta mostrarmos que $L(\theta)\Omega \subset \Omega$, $\forall\ \theta \in S^1$. Além disso, usando a Afirmação 1 do Lema 4.2 concluímos que se o conjunto Ω é invariante então a função distância dada por*

$$dist(u, \Omega) = inf\{\|u - v\|; v \in \Omega\}$$

é invariante.

No que segue, definamos, $ind\Omega = k$ se k é o menor inteiro tal que existem uma aplicação $\phi \in C\left(\Omega, \mathbb{C}^k \setminus \{0\}\right)$ e algum $n \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo a relação

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(u), \quad \forall\ \theta \in S^1, \quad \forall\ u \in \Omega. \tag{4.5}$$

Além disso, defina $ind\Omega = \infty$ se uma tal aplicação não existe e defina $ind\emptyset = 0$.

Teorema 4.4 *Para todo conjunto invariante Ω que age livremente em S^1, existe um inteiro, denotado por $ind\Omega$, tal que*
(i) *Se existe uma aplicação contínua equivariante $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ então $ind\Omega_1 \leq ind\Omega_2$*
(ii) $ind(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq ind\Omega_1 + ind\Omega_2$
(iii) *Se Ω é compacto, existe uma vizinhança fechada invariante N de Ω com $indN = ind\Omega$*
(iv) *Se $ind\Omega \geq 2$ e $\Omega \cap Fix(S^1) = \emptyset$, então Ω contém infinitas S^1-órbitas distintas*
(v) *Sejam Y um subespaço invariante de dimensão finita de X e D uma vizinhança aberta limitada invariante de 0 em Y. Se*

$$D \cap Fix(S^1) = \{0\}$$

então

$$ind\partial D = \frac{1}{2}dimY,$$

onde

$$Fix(S^1) = \{u \in X; L(\theta)u = u,\ \forall\ \theta \in S^1\}.$$

Demonstração:

No que segue mostraremos os itens (i), (ii), (iii) e (iv), com relação ao item (v) Ver [7].

Considere

$$\widehat{\Omega} = \{\Omega \subset X;\ \Omega \text{ é } \ fechado,\ L(\theta)\Omega = \Omega,\ \forall\ \theta \in S^1\}.$$

Prova de (i):

Por hipótese existe uma aplicação $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ contínua equivariante. Suponhamos, sem perda de generalidade, $ind\Omega_2 = \mathrm{k} < \infty$. Assim existe uma aplicação contínua $\phi : \Omega_2 \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(u), \quad \forall\ \theta \in S^1, \quad \forall\ u \in \Omega_2.$$

Sendo ϕ e T funções contínuas, a função $\psi = \phi \circ T : \Omega_1 \to \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ é contínua.

Por outro lado,

$$\psi(L(\theta)u) = \phi(T(L(\theta)u))$$

e sendo T equivariante,

$$\psi(L(\theta)u) = (\phi \circ L(\theta))(T(u))$$

o que implica,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(T(u))$$

ou seja,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\psi(u)$$

mostrando que ψ satisfaz (4.5). Portanto,

$$ind\Omega_1 \leq k$$

de onde segue (i).

Prova de (ii):

Suponhamos que $ind\Omega_1 = k_1 < \infty$ e $ind\Omega_2 = k_2 < \infty$. Portanto, existem aplicações contínuas $\phi_j : \Omega_j \to \mathbb{C}^{k_j} \setminus \{0\}$ e algum $n_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, 2$ satisfazendo

$$\phi_j(L(\theta)u) = e^{in_j\theta}\phi_j(u), \quad \forall\ \theta \in S^1, \quad \forall\ u \in \Omega_j. \tag{4.6}$$

Sejam $\widehat{\phi_j} : X \to \mathbb{C}^{k_j}$ uma extensão contínua de ϕ_j dada pelo Teorema de Tietze (Ver [Apêndice C]) e $\psi_j : X \to \mathbb{C}^{k_j}$ definida por

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}\widehat{\phi_j}(L(\theta)u)d\theta, \quad j = 1, 2.$$

Para $u \in \Omega_j$ tem-se

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}\phi_j(L(\theta)u)d\theta, \quad j = 1, 2$$

o que implica,

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}e^{in_j\theta}\phi_j(u)d\theta, \quad j = 1, 2$$

ou seja,

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_j(u)d\theta, \quad j = 1, 2$$

logo,

$$\psi_j(u) = \phi_j(u), \quad j = 1, 2$$

mostrando que ψ_j é uma extensão contínua de ϕ_j. Além disso ψ_j satisfaz (4.6).

Definindo $\psi : \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{C}^{k_1+k_2}$ por

$$\psi(u) = (\psi_1(u)^{n_2}, \psi_2(u)^{n_1})$$

onde

$$\psi_1(u)^{n_2} = (\psi_{1,1}(u)^{n_2}, ..., \psi_{1,k_1}(u)^{n_2}) \ \ e \ \ \psi_2(u)^{n_1} = (\psi_{2,1}(u)^{n_1}, ..., \psi_{2,k_2}(u)^{n_1}),$$

observamos que

- $\psi_j(\Omega_j) = \phi_j(\Omega_j) \subset \mathbb{C}^{k_j}\backslash\{0\}, \quad j = 1, 2$
- $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \mathbb{C}^{k_1+k_2}\backslash\{0\}$

e

$$\psi(L(\theta)u) = (\psi_1(L(\theta)u)^{n_2}, \psi_2(L(\theta)u)^{n_1}).$$

Assim,

$$\psi(L(\theta)u) = \left((e^{in_1\theta}\psi_1(u))^{n_2}, (e^{in_2\theta}\psi_2(u))^{n_1}\right)$$

o que implica,

$$\psi(L(\theta)u) = \left(e^{in_1n_2\theta}\psi_1(u)^{n_2}, e^{in_1n_2\theta}\psi_2(u)^{n_1}\right)$$

ou seja,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in_1n_2\theta}\psi(u).$$

Considerando $n = n_1n_2$, segue que ψ satisfaz (4.5). Logo,

$$\psi \in C\left(\Omega_1 \cup \Omega_2, \mathbb{C}^{k_1+k_2} \setminus \{0\}\right)$$

portanto,

$$ind(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq k_1 + k_2$$

mostrando (ii).

Prova de (iii):

Considerando $ind\Omega = k < \infty$ existe uma função

$$\phi \in C\left(\Omega, \mathbb{C}^k \setminus \{0\}\right)$$

satisfazendo (4.5). Seja $\psi : X \to \mathbb{C}^k$ uma extensão contínua de ϕ verificando (4.5).

Visto que,

$$0 \notin \psi(\Omega) = \phi(\Omega)$$

e Ω é compacto, segue que ψ é uniformemente contínua em Ω. Considerando $\epsilon = dist(0, \psi(\Omega)) > 0$ devemos ter

$$\|\psi(u)\| \geq \epsilon, \quad \forall\ u \in \Omega. \tag{4.7}$$

Desde que,

$$\Omega_\delta = \{u \in X; dist(u, \Omega) \leq \delta\}$$

para $\epsilon = dist(0, \psi(\Omega))$ existe $\delta > 0$ tal que

$$u, v \in \Omega_\delta, \|u - v\| < \delta \Rightarrow \|\psi(u) - \psi(v)\| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{4.8}$$

Se $u \in \Omega_\delta$ existe $v \in \Omega$ tal que $\|u - v\| < \delta$ consequentemente por (4.7) e (4.8),

$$\|\psi(u)\| \geq \frac{3\epsilon}{4}$$

ou seja,

$$\psi(u) \neq 0, \quad \forall\, u \in \Omega_\delta.$$

Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \notin \psi(\Omega_\delta).$$

Desse modo, $\Omega_\delta = N$ é uma vizinhança fechada de Ω. Pela Afirmação 1 do Lema 4.2 N é invariante. Portanto,

$$indN \leq k.$$

Por outro lado, sendo a inclusão uma aplicação equivariante, por (i) do Teorema 4.4, tem-se

$$indN \geq k.$$

Logo,

$$indN = ind\Omega = k$$

mostrando (iii).

Prova de (iv):

Primeiramente, considere a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Se $u \notin Fix(S^1)$ então ind $(\sigma(u)) = 1$.

Com efeito, visto que $u \notin Fix(S^1)$ a aplicação contínua $\theta \to L(\theta)u$ tem período minimal $\dfrac{2\pi}{n}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Definamos a função $\phi : \sigma(u) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ por

$$\phi(v) = e^{in\theta}, \ \forall\, v \in \sigma(u).$$

Assim, existe $\theta \in S^1$ tal que

$$v = L(\theta)u$$

o que implica,

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}.$$

Observe que,

$$\phi(L(\widehat{\theta})L(\theta)u) = e^{in(\widehat{\theta}+\theta)}$$

ou seja,

$$\phi(L(\widehat{\theta})L(\theta)u) = e^{in\widehat{\theta}}.e^{in\theta} = e^{in\widehat{\theta}}\phi(L(\theta)u)$$

mostrando que ϕ satisfaz (4.5). Portanto, sendo ϕ contínua, temos

$$ind(\sigma(u)) = 1$$

mostrando a Afirmação 1.

Se

$$\Omega = \sigma(u_1) \cup \sigma(u_2) \cup ... \cup \sigma(u_k)$$

é uma união disjunta com

$$u_j \notin Fix(S^1), \quad \forall\ j = 1, 2, ..., k.$$

Considerando a aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por

$$\phi(u) = e^{in_j\theta},$$

se $u \in \sigma(u_j)$ e $\theta \to L(\theta)u_j$ tem período minimal $\dfrac{2\pi}{n_j}$. Desse modo, usando a Afirmação 1, tem-se

$$ind\Omega = 1.$$

Portanto, se $ind\Omega \geq 2$, Ω contém uma infinidade de S^1-órbitas. Mostrando (iv).

■

Observação 4.2 *Note que $u \in Fix(S^1)$ se, e somente se, a S^1-órbita de u, $\sigma(u)$, se reduz ao conjunto $\{u\}$. Neste caso, $ind\{u\} = \infty$, pois (4.5) não pode ser satisfeita com $\phi(u) \neq 0$.*

Lema 4.3 *Seja ϕ um funcional invariante satisfazendo a condição (PS). Sejam $c \in \mathbb{R}$ e N uma vizinhança aberta invariante de K_c. Então existem $\epsilon > 0$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que*
(i) $\eta(0, u) = u, \quad \forall\ u \in X$
(ii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \backslash N) \subset \phi^{c-\epsilon}$
(iii) $\eta(t, L(\theta)u) = L(\theta)\eta(t, u), \quad \forall\ t \in [0,1], \quad \forall\ u \in X, \quad \forall\ \theta \in S^1.$

Demonstração:

Considerando $S = N^c$, existem $\epsilon, \delta > 0$ tais que

$$u \in \phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right) \cap S_{2\delta} \Rightarrow \|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

pois, caso contrário, tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ e $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ existe $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$u_n \in S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}, \quad u_n \in \phi^{-1}\left([c-\frac{2}{n}, c+\frac{2}{n}]\right) \quad e \quad \|\phi^{'}(u_n)\| < \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Assim, $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi^{'}(u_n) \to 0$. Desde que ϕ satisfaz (PS), (u_n) possui uma subsequência, que denotaremos por (u_n), tal que $u_n \to u$ em X para algum $u \in X$. Logo,

$$\phi(u) = \phi(lim\ u_n) = lim\ \phi(u_n) = c$$

e

$$\phi^{'}(u) = \phi^{'}(lim\ u_n) = lim\ \phi^{'}(u_n) = 0$$

ou seja,

$$u \in K_c \cap S$$

o que é um absurdo, pois $S = X \setminus N$ e $K_c \subset N$. Pelo Lema 1.2, existe $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ satisfazendo (i) e (ii).

Finalmente, sendo ϕ invariante, em vista do Lema 4.2, podemos supor que o campo pseudo-gradiente V escolhido para ϕ é equivariante.

Definamos a função $\psi : X \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{dist(u, A^c)}{dist(u, A^c) + dist(u, B)}$$

onde,

$$A = \phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right) \cap (N^c)_{2\delta}$$

e

$$B = \phi^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right) \cap (N^c)_{\delta}.$$

Afirmação 1: ψ é invariante.

Com efeito, note que

$$A^c = \left(\phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)\right)^c \cup N_{2\delta}$$

logo, se $u \in A^c$ temos

$$u \in \left(\phi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right)\right)^c \ \ ou \ u \in N_{2\delta}.$$

Se $u \in (\phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]))^c$ então

$$\phi(u) > c+2\epsilon \quad ou \quad \phi(u) < c-2\epsilon$$

o que implica,

$$\phi(L(\theta)u) = \phi(u) > c+2\epsilon \quad ou \quad \phi(L(\theta)u) = \phi(u) < c-2\epsilon$$

mostrando que $(\phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]))^c$ e $N_{2\delta}$ são invariantes, ou seja A^c é invariante.

Usando um argumento análogo, segue que B é invariante.

Por outro lado, pela Observação 4.1 $dist(u, A^c)$ é invariante e $dist(u, B)$ é invariante. Desse modo, ψ é invariante. Mostrando a Afirmação 1.

Definamos a função $f : X \to X$ por

$$f(u) = -\psi(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|}.$$

Observe que

$$f(L(\theta)u) = -\psi(L(\theta)u)\frac{V(L(\theta)u)}{\|V(L(\theta)u)\|}.$$

Usando a Afirmação 1 e o fato de V ser equivariante tem-se

$$f(L(\theta)u) = -\psi(u)\frac{L(\theta)V(u)}{\|V(u)\|}$$

e consequentemente,

$$f(L(\theta)u) = L(\theta)f(u)$$

mostrando que f é equivariante.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, para todo $u \in X$ o problema de Cauchy

$$(PC)_1 \qquad \begin{cases} w^{'} = f(w) \\ w(0) = u \end{cases}$$

possui uma única solução contínua $w(., u)$.

Afirmação 2: Se $w(t, u)$ é solução de $(PC)_1$, então

$$w_\theta(t) = L(\theta)w(t, u)$$

é solução do problema

$$(PC)_2 \qquad \begin{cases} w_\theta^{'} = f(w_\theta) \\ w_\theta(0) = L(\theta)u. \end{cases}$$

Com efeito, desde que $L(\theta)$ é linear e contínua, temos

$$w_\theta^{'}(t) = L(\theta)w^{'}(t, u) = L(\theta)f(w)$$

usando o fato que f é equivariante tem-se

$$w_\theta^{'}(t) = f(L(\theta)w) = f(w_\theta).$$

Note que

$$w_\theta(0) = L(\theta)u$$

portanto,

$$w_\theta(t) = w(t, L(\theta)u)$$

o que mostra a Afirmação 2, e portanto

$$L(\theta)w(t, u) = w(t, L(\theta)u)$$

mostrando que w é equivariante. Por definição $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$, donde segue (iii).

■

No Lema que segue, denotaremos por X o seguinte espaço de Banach

$$X = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N} absolutamente\ contínua, (2\pi) - periódica, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} v(t)dt = 0\ e \int_0^{2\pi} \|v^{'}(t)\|^3 dt < \infty \end{array} \right\}$$

com norma (Ver [Apêndice C])

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v^{'}(t)\|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}},$$

onde a ação de S^1 é dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta)$$

sobre X.

Lema 4.4 *Sejam Y o subespaço de X dado por*

$$Y = \{(cost)e + (sent)Je,\ e \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

e $D = \{z \in Y; \|z\| < \delta\}$. Então $ind\partial D = N$.

Demonstração:

Primeiramente, note que Y é invariante.

De fato, se $u \in Y$ temos

$$u(t) = (cost)e + (sent)Je$$

para algum $e \in \mathbb{R}^{2N}$. Assim,

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta) = (cos(t+\theta))e + (sen(t+\theta))Je$$

desse modo,

$$(L(\theta)u)(t) = (cost\ cos\theta - sen\theta\ sent)e + (sent\ cos\theta + sen\theta\ cost)Je$$

donde segue,

$$(L(\theta)u)(t) = cost(cos\theta\ e + sen\theta\ Je) + sent(cos\theta\ Je - sen\theta\ e).$$

Considerando $\widehat{e} = cos\theta\ e + sen\theta\ Je$ tem-se

$$(L(\theta)u)(t) = cost\widehat{e} + sentJ\widehat{e}$$

logo, $L(\theta)u \in Y$ e portanto $L(\theta)Y \subset Y$. Mostrando que Y é invariante.

Sendo

$$D = \{z \in Y; \|z\| < \delta\},$$

observe que

$$Fix(S^1) \cap D = \{0\}.$$

De fato, se $u \in Fix(S^1) \cap D$ então

(1) $u \in Fix(S^1)$ e

(2) $u \in Y$ com $\|u\| < \delta$.

Logo, por (1)

$$(L(\theta)u)(t) = u(t),$$

ou seja,

$$u(t+\theta) = u(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Mostrando que $\theta \in [0, 2\pi)$ é período para u. Usando (2) segue que o período minimal de u é 2π, logo devemos ter $u \equiv 0$.

Portanto,

$$Fix(S^1) \cap D = \{0\}.$$

Pelo item (v) do Teorema 4.4 tem-se

$$ind\partial D = N.$$

■

4.3 Teorema da Multiplicidade

Teorema 4.5 *Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional invariante limitado inferiormente e satisfazendo a condição (PS). Se S^1 age livremente em um subconjunto invariante*

$$\Omega = \{u \in X; \phi(u) < m\}$$

com $m \in \mathbb{R}$ e Ω contém uma esfera Σ, $(2n-1)$ dimensional invariante, em que a ação de S^1 é dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta).$$

Então Ω contém pelo menos n S^1-órbitas distintas de pontos críticos de ϕ.

Demonstração:

Definamos, para $k = 1, 2, ..., n$

$$\Gamma_k = \{\gamma \subset \Omega : \gamma \ \text{ é } \ compacto, \ \ invariante \ \ e \ \ ind\gamma \geq k\}.$$

Por hipótese S^1 age livremente em γ. Além disso, $\Sigma \subset \Omega$ e $ind\Sigma = n$. Assim,

$$\Sigma \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Considere, para $k = 1, 2, ..., n$

$$c_k = \inf_{\gamma \in \Gamma_k} \max_{u \in \gamma} \phi(u).$$

Observe que,

$$\Gamma_k \subset \Gamma_{k-1}$$

onde $k \geq 2$. Logo,

$$-\infty < inf\phi \leq c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_k \leq \max_{u \in \Sigma} \phi(u) < m.$$

Afirmação 1: Cada c_k é um valor crítico de ϕ.

De fato, caso contrário, sabendo que existe $\gamma \in \Gamma_k$ tal que

$$\max_{u \in \gamma} \phi(u) \leq c_k + \epsilon$$

podemos aplicar o Lema 4.3 com $c = c_k$ e $K_{c_k} = N = \emptyset$. Assim, pelo item (ii) do Lema 4.3 segue que

$$\widehat{\gamma} = \eta(1, \gamma) \subset \phi^{c_k - \epsilon}.$$

Sendo γ compacto, segue que $\widehat{\gamma}$ é compacto e pelo item (iii) do Lema 4.3, obtemos que $\widehat{\gamma}$ é invariante. Observe que,

$$\max_{u \in \widehat{\gamma}} \phi(u) \leq c_k - \epsilon < c_k < m$$

ou seja,

$$\widehat{\gamma} \subset \Omega.$$

Note que,

$$\begin{aligned} T : \gamma &\rightarrow \widehat{\gamma} \\ u &\rightarrowtail T(u) = \eta(1, u) \end{aligned}$$

é equivariante. Logo, pelo item (i) do Teorema 4.4

$$ind\widehat{\gamma} \geq ind\gamma \geq k$$

ou seja, $\widehat{\gamma} \in \Gamma_k$, assim,

$$c_k \leq \max_{u \in \widehat{\gamma}} \phi(u) \leq c_k - \epsilon$$

o que é um absurdo. Mostrando Afirmação 1.

Afirmação 2: Se todos os $c_{k's}$ são distintos, então cada $\phi^{-1}(c_k)$ possui pelo menos uma S^1-órbita de pontos críticos de ϕ.

De fato, considere $u_k \in X$ tal que $\phi(u_k) = c_k$ e $\phi^{'}(u_k) = 0$. Desse modo, sendo $v \in \sigma(u_k)$ tem-se

$$v = L(\theta)u_k$$

assim,

$$\phi(v) = \phi(L(\theta)u_k) = \phi(u_k) = c_k$$

o que implica,

$$\sigma(u_k) \subset \phi^{-1}(\{c_k\}).$$

Por outro lado, usando o Lema 4.1 tem-se

$$\langle \phi^{'}(v), h \rangle = \langle \phi^{'}(L(\theta)u_k), h \rangle = \langle \phi^{'}(u_k), L(-\theta)h \rangle = 0, \quad \forall\ h \in X$$

logo,

$$\sigma(u_k) \subset K_{c_k}$$

mostrando a Afirmação 2.

Por outro lado, vamos mostrar que se $c_j = c_k$ com $j < k$, temos

$$indK_c > k - j$$

ou seja,

$$indK_c \geq 2$$

onde $c = c_j = c_k$. Assim, pelo item (iv) do Teorema 4.4, K_c possui uma infinidade de S^1-órbitas. Donde concluímos, usando o fato que $K_c \subset \Omega$ é um conjunto fechado invariante, que Ω contém uma infinidade de S^1-órbitas distintas de pontos críticos de ϕ.

Sendo,

$$K_c = \{u \in X; \phi(u) = c \;\; e \;\; \phi^{'}(u) = 0\}$$

e usando o fato que ϕ satisfaz a condição (PS), segue que K_c é compacto.

Pelo item (iii) do Teorema 4.4, existe uma vizinhança fechada invariante N de K_c com $indN = indK_c$. Então o interior de N, denotado por $intN$, é uma vizinhança aberta invariante de K_c, de sorte que podemos aplicar o Lema 4.3 e concluir a existência de $\epsilon > 0$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ satisfazendo as propriedades (i) - (iii).

Agora, pela definição de $c = c_k$, tomemos $\gamma \in \Gamma_k$ tal que

$$\max_{u \in \gamma} \phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Definamos

$$\beta = \gamma \backslash int\ N.$$

Usando a definição de S^1-órbita,

$$k \leq ind\gamma \leq ind(\beta \cup N) \leq ind\beta + indN = ind\beta + indK_c.$$

Visto que,

$$\beta \subset \phi^{c+\epsilon} \backslash int\ N$$

usando o Lema 4.3,

$$\widehat{\beta} = \eta(1, \beta) \subset \phi^{c-\epsilon}.$$

Por outro lado, sendo β compacto segue que $\widehat{\beta}$ é compacto. Note que,

$$L(\theta)\widehat{\beta} = L(\theta)\eta(1,\beta)$$

usando o Lema 4.3 e o fato que β é invariante, segue

$$L(\theta)\widehat{\beta} = \eta(1, L(\theta)\beta) = \eta(1,\beta) = \widehat{\beta}$$

ou seja, $\widehat{\beta}$ é invariante.

Observe que,

$$\max_{u\in\widehat{\beta}} \phi(u) \leq c - \epsilon$$

pela definição de $c_j = c$, temos

$$ind\widehat{\beta} < j.$$

Pelo item (i) do Teorema 4.4

$$ind\beta \leq ind\widehat{\beta} < j$$

logo,

$$k < j + indK_c$$

ou seja,

$$indK_c > k - j$$

e consequentemente

$$indK_c \geq 2.$$

■

4.4 Multiplicidade de Órbitas Hamiltonianas Periódicas em uma Superfície Convexa

Para $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ é possivel mostrar usando o Teorema 3.14 a existência de pelo menos uma órbita periódica para

$$u^{'}(t) = J\nabla H(u(t)) \tag{4.9}$$

em $S = H^{-1}(c)$, desde que

($\mathbf{H_8}$) Para todo $u \in S$, $\nabla H(u) \neq 0$ e S é a fronteira de um conjunto compacto estritamente convexo C com $0 \in intC$.

Assumiremos a seguinte hipótese que será de grande importância no decorrer desta seção.

($\mathbf{H_9}$) Existe $0 < r \leq R$ tal que

$$\frac{R}{r} < \sqrt{2},$$

e

$$B[0,r] \subset C \subset B[0,R].$$

Teorema 4.6 *Assumindo as hipóteses* (H_8) *e* (H_9) *existe pelo menos* N *órbitas periódicas para* (4.9) *em* S.

Antes de demonstrar o Teorema 4.6 iremos mostrar algumas propriedades da função F definida no Lema 3.11 e alguns resultados que serão utilizados nesta demonstração. Desde que F satisfaz os itens (i)-(vi) do Lema 3.11, assumindo (H_9) acima temos

$$\left(\frac{|u|}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \left(\frac{|u|}{r}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

De fato, observe que

$$r\frac{u}{|u|} \in B[0,r] \subset C$$

assim,

$$r\frac{u}{|u|} \in C$$

o que implica,

$$\frac{|u|}{r} \geq inf\{\lambda > 0; u \in \lambda C\}$$

isto é,

$$j_c(u) \leq \frac{|u|}{r}. \tag{4.10}$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$j_c(u) \leq \lambda < j_c(u) + \epsilon \quad e \quad \frac{u}{\lambda} \in C.$$

Logo,

$$\frac{u}{\lambda} \in B[0, R]$$

assim,

$$\left|\frac{u}{\lambda}\right| \leq R$$

o que implica,

$$|u| \leq R j_c(u) + R\epsilon, \quad \forall\, \epsilon > 0$$

portanto,

$$|u| \leq R j_c(u)$$

ou seja,

$$j_c(u) \geq \frac{|u|}{R}. \tag{4.11}$$

Segue de (4.10) e (4.11) que

$$\frac{|u|}{R} \leq j_c(u) \leq \frac{|u|}{r}$$

e consequentemente,

$$\left(\frac{|u|}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \left(\frac{|u|}{r}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.12}$$

Desde que

$$H^{-1}(c) = S = F^{-1}(1)$$

é suficiente, pelo Lema 3.10, encontrar N órbitas periódicas distintas para

$$u^{'}(t) = J\nabla F(u(t)) \tag{4.13}$$

em S.

Sejam $u_1, ..., u_N$ N soluções descrevendo órbitas distintas de (4.13) com período minimal 2π. Se

$$F(u_k(t)) = d_k > 0$$

então w_k definido por

$$w_k(t) = d_k^{-\frac{2}{3}} u_k \left(d_k^{\frac{1}{3}} t \right)$$

é solução de (4.13) com período minimal $\dfrac{2\pi}{d_k^{\frac{1}{3}}}$ e energia

$$F(w_k(t)) = 1.$$

Se w_j e w_k descrevem a mesma órbita em $S = F^{-1}(1)$, existe uma função $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$w_k = w_j \circ \psi$$

assim,

$$J\nabla F(w_k) = w_k^{'} = \psi^{'}(w_j^{'} \circ \psi) = \psi^{'} J\nabla F(w_j \circ \psi)$$

o que implica,

$$J\nabla F(w_k) = \psi^{'} J\nabla F(w_k)$$

logo, $\psi^{'} \equiv 1$ e sendo $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ segue

$$w_k(t) = w_j(t + \alpha).$$

Desse modo, w_j e w_k têm o mesmo período minimal, isto é, $d_k = d_j$. Consequentemente,

$$u_k(t) = u_j(t + \widehat{\alpha}),$$

ou seja, u_j e u_k descrevem a mesma órbita e usando o fato que as órbitas são distintas temos $j = k$. Assim, é suficiente encontrarmos N soluções descrevendo órbitas de (4.13) com período minimal 2π.

Seja G a transformada de Legendre da função F, usando (4.12), obtemos

$$\eta r^3 |v|^3 \leq G(v) \leq \eta R^3 |v|^3 \tag{4.14}$$

onde $\eta = \dfrac{4}{27}$.

No que segue, considere X o espaço de Banach utilizado no Lema 4.4, $\phi : X \to \mathbb{R}$ o funcional energia dado por

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(Jv^{'}, v) + G(v^{'})\right] dt$$

e os seguintes subespaços

$$Y = \{(cos\ t)e + (sen\ t)Je : \quad e \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

e

$$Z = \left\{v \in X; v \ \ é \ \ \frac{2\pi}{k} - periódica \ \ para \ \ algum \ \ k \geq 2\right\}.$$

Lema 4.5 *Se $v \in Y$ e $\|v\|_X = \rho = (3\eta R^3)^{-1}$, então*

$$\phi(v) \leq M = -\frac{\pi}{3}\rho^2.$$

Demonstração:

Se $v \in Y$,

$$v = (cos\ t)e + (sen\ t)Je, \quad e \in \mathbb{R}^{2N}$$

sendo,

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(Jv^{'}, v) + G(v^{'})\right] dt,$$

tem-se

$$\phi(v) \leq -\pi\|v\|^2 + 2\pi\eta R^3\|v\|^3$$

isto é,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\left(3\|v\|^2 - 6\eta R^3\|v\|^3\right)$$

o que implica,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\left(3\rho^2 - 6\eta R^3\rho^3\right)$$

assim,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\rho^2\left(3 - 6\eta R^3\rho\right)$$

logo,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\rho^2.$$

■

Lema 4.6 *Se $v \in Z$ então*

$$\phi(v) \geq m = -\frac{\pi}{6}\left(6\eta r^3\right)^{-2}.$$

Demonstração:

Se $\|v\|_X = 1$ e v é $\dfrac{2\pi}{k}$ - periódica para algum $k \geq 2$, então por definição

$$\int_0^{2\pi} \|v^{'}(t)\|^3 dt = 2\pi$$

usando a Proposição 3.9, temos

$$\int_0^{2\pi} \left(Jv^{'}, v\right) dt = k\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \left(Jv^{'}, v\right) dt \geq -\frac{2\pi}{k} \geq -\pi.$$

Assim, se $v \in Z$, considerando $w = \dfrac{v}{\|v\|_X}$ usando (4.14),

$$\phi(v) \geq 2\pi\eta r^3\|v\|_X^3 - \frac{\pi}{2}\|v\|_X^2. \tag{4.15}$$

Afirmação 1: O segundo membro da desigualdade (4.15) é minimo quando $\|v\| = (6\eta r^3)^{-1}$.

Com efeito, considerando

$$f(t) = 2\pi\eta r^3 t^3 - \frac{\pi}{2}t^2$$

tem-se

$$f^{'}(t) = 6\pi\eta r^3 t^2 - \pi t$$

fazendo $f^{'}(t) = 0$ ficamos com

$$t = 0 \quad ou \quad t = \left(6\eta r^3\right)^{-1}.$$

Por outro lado,

$$f^{''}(t) = 12\pi\eta r^3 t - \pi$$

donde segue,

$$f''(0) = -\pi < 0$$

e

$$f''\left(\left(6\eta r^3\right)^{-1}\right) = \pi > 0$$

logo, f atinge seu mínimo quando $\|v\|_X = (6\eta r^3)^{-1}$.

Portanto,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\left(-12\eta r^3\|v\|^3 + 3\|v\|^2\right)$$

o que implica,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\|v\|^2$$

logo,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\left(6\eta r^3\right)^{-2}.$$

■

Agora vamos demonstrar o Teorema 4.6.

Demonstração:

Considere sobre X a ação de S^1 dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t+\theta).$$

Afirmação 1: S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω se e somente se $\Omega \cap Z = \emptyset$.

De fato, primeiramente vamos mostrar que se S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω então $\Omega \cap Z = \emptyset$. Suponhamos, por contradição, que existe

$$u \in \Omega \cap Z$$

desse modo, $u \in X$ e u é $\dfrac{2\pi}{k}$-periódica para algum $k \geq 2$. Por hipótese,

$$L(\theta)u(t) = u(t+\theta).$$

Considerando $\theta = \dfrac{2\pi}{k}$ para algum $k \geq 2$, ficamos com a igualdade

$$L(\theta)u(t) = u(t).$$

Portanto, existe $u \in X$ e $\theta \neq 0 \in S^1$ tal que

$$L(\theta)u = u$$

o que é um absurdo.

Reciprocamente, vamos mostrar que se $\Omega \cap Z = \emptyset$ então S^1 age livremente em um subconjunto invariante Ω. Suponhamos, por contradição, que S^1 não age livremente em um subconjunto invariante Ω, então

$$(L(\theta)u)(t) = u(t)$$

para todo $\theta \in S^1$, para todo $u \in \Omega$ mas $\theta \neq 0$. Assim,

$$u(t + \theta) = u(t)$$

com $\theta \neq 0$. Logo $\theta = \dfrac{2\pi}{k}$ para algum $k \geq 2$. Assim, $u \in Z$. Portanto

$$u \in \Omega \cap Z$$

o que é um absurdo. Mostrando a Afirmação 1.

Observe que o funcional ϕ é invariante, limitado inferiormente pelo Lema 3.8 e satisfaz a condição (PS) pelo Lema 3.9. Pelo Lema 4.6 tem-se

$$\Omega \cap Z = \emptyset$$

onde

$$\Omega = \{v \in X; \phi(v) < m\}.$$

Note que Ω é invariante, poís ϕ é invariante. Da Afirmação 1, acima, segue que S^1 age livremente em Ω.

Considere

$$\Sigma = \{v \in Y; \|v\| = \rho\}.$$

Observe que, se $M < m$ e assumindo que existe $0 < r \leq R$ tal que

$$\frac{R}{r} < \sqrt{2}$$

e

$$B[0,r] \subset C \subset B[0,R]$$

temos

$$\Sigma \subset \Omega.$$

De fato, note que

$$M < m \Leftrightarrow -\frac{\pi}{27\eta^2 R^6} < -\frac{\pi}{216\eta^2 r^6}$$

o que implica,

$$M < m \Leftrightarrow R^6 < 8r^6$$

logo,

$$M < m \Leftrightarrow \frac{R}{r} < \sqrt{2}.$$

Mostrando que

$$\Sigma \subset \Omega.$$

Pelo Teorema 4.5, Ω contém pelo menos N S^1-órbitas distintas

$$\{L(\theta)v_k; \theta \in S^1\}, \quad k = 1, ..., n$$

de pontos críticos de ϕ. Pelo Lema 3.7 para cada v_k existe uma solução u_k 2π-periódica para

$$u_k^{'}(t) = J\nabla F(u_k(t))$$

tal que

$$v_k(t) = -J\left(u_k(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_k(s)ds\right). \tag{4.16}$$

Além disso, 2π é período minimal de v_k, e assim, u_k tem período minimal 2π.

Se u_j e u_k descrevem a mesma órbita, então, como já visto,

$$u_k(t) = (u_j \circ \psi)(t)$$

onde ψ é uma translação. Assim,

$$u_k(t) = u_j(t + \theta)$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$. Ou seja,

$$u_k(t) = L(\theta)u_j$$

para algum $\theta \in S^1$. Usando (4.16) tem-se

$$v_k(t) = L(\theta)v_j.$$

Logo, v_j e v_k tem a mesma S^1-órbita e $k = j$.

■

Apêndice A

Séries de Fourier

Neste Apêndice faremos um breve estudo sobre as séries de Fourier. Mais detalhes podem ser encontrados em [6].

Seja $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, a sua série de Fourier é a série dada por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right). \tag{A.1}$$

Podemos reescrever a série de Fourier de uma função u definida em [0, T] usando exponênciais complexas. Lembre-se que se $t \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{\frac{i2k\pi}{T}t} = cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$$

o que implica,

$$e^{\frac{-i2k\pi}{T}t} = cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) - isen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$$

assim,

$$cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2}$$

e

$$sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2i}.$$

Logo,

$$a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = a_k\left(\frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}}{2i}\right)$$

donde segue,

$$a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}$$

usando o fato que $i^2 = -1$, obtemos

$$a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}.$$

Reescrevendo (A.1) temos

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{\frac{-i2k\pi}{T}t}$$

portanto,

$$S[u] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

é a série de Fourier complexa de u, onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) \quad e \quad c_{-k} = \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Recorde-se que a_0, b_k e a_k são obtidos da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) dt$$

e

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) dt.$$

Além disso, os coeficientes de Fourier complexos de u e u' satisfazem

$$c_k' = \frac{i2\pi k}{T}c_k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Quanto aos coeficientes reais, se as séries de Fourier de u e u' são dadas, respectivamente, por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k sen\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right)$$

e

$$S[u^{'}] = \frac{a_0^{'}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{'} cos \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) + b_k^{'} sen \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) \right)$$

então

$$a_0^{'} = 0, \quad a_k^{'} = \frac{2k\pi}{T} b_k \quad e \quad b_k^{'} = -\frac{2k\pi}{T} a_k$$

e portanto,

$$S[u^{'}] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{i2\pi k}{T} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T} t}.$$

é a série de Fourier complexa de $u^{'}$.

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Neste Apêndice nossa intenção é mostrar que os funcionais usados no decorrer desta dissertação são de classe C^1.

Definição B.1 *Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, definido em um espaço normado. Diremos que J é Fréchet diferenciável em $u \in X$, se existe $L : X \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando*

$$\frac{|J(u+h) - J(u) - L(h)|}{\|h\|} \to 0 \quad \textit{quando} \quad \|h\| \to 0.$$

Primeiramente vamos mostrar que o funcional $\phi : H \to \mathbb{R}$ definido no Capítulo 2 por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[\frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt$$

é de classe $C^1(H, \mathbb{R})$, onde

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \ \text{ é absolutamente contínua, T-periódica e } \int_0^T |u'(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Para tanto, basta mostrarmos que o funcional $\psi : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) = \int_0^T G(u) dt$$

é de classe $C^1(H, \mathbb{R})$.

Afirmação 1: ψ é Fréchet diferenciável e $\psi^{'}(u)v = \displaystyle\int_0^T G^{'}(u)vdt$.

Com efeito, para $u, v \in H$ considere

$$r(v) = \psi(u+v) - \psi(u) - \int_0^T G^{'}(u)vdt \tag{B.1}$$

onde esta última parcela é obtida usando o mesmo raciocínio da seção (3.5). Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Usando (B.1) tem-se

$$r(v) = \int_0^T [G(u+v) - G(u)]dt - \int_0^T G^{'}(u)vdt$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$G(u+v) - G(u) = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv)dx$$

o que implica,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv)dx = \int_0^1 G^{'}(u+xv)vdx.$$

Assim,

$$r(v) = \int_0^T \left[\int_0^1 G^{'}(u+xv)vdx \right] dt - \int_0^T G^{'}(u)vdt$$

donde segue,

$$r(v) = \int_0^T \left[\int_0^1 \left(G^{'}(u+xv) - G^{'}(u) \right) vdx \right] dt$$

logo,

$$|r(v)| \leq \int_0^T \left[\int_0^1 \left| G^{'}(u+xv) - G^{'}(u) \right| |v| dx \right] dt. \tag{B.2}$$

Observe que, usando o mesmo raciocinio que na Afirmação 1 do Lema (2.2), tem-se

$$G^{'}(u+xv) - G^{'}(u) \in L^2([0,T]).$$

Aplicando o Teorema de Fubini em (B.2), obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_0^T \left| G^{'}(u+xv) - G^{'}(u) \right| |v| dt \right] dx$$

usando a desigualdade de Hölder, temos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\|_{L^2([0,T])} dx$$

Por Imersões contínuas de Sobolev segue

$$|r(v)| \leq C \int_0^1 \|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\|_H dx$$

logo,

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|} \leq C \int_0^1 \|G^{'}(u+xv) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])} dx.$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\theta_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\theta_n(x) = \|G^{'}(u+xv_n) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}.$$

Desse modo,

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C \int_0^1 \theta_n(x) dx.$$

Para cada x fixado, temos usando o mesmo raciocínio que na Afirmação 1 do Lema (2.2)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |G^{'}(u+xv_n) - G^{'}(u)|^2 dt = 0$$

assim, para cada x fixado $\theta_n(x) \to 0, \quad \forall\, x \in [0,1]$. Por outro lado,

$$0 \leq \theta_n(x) \leq \|G^{'}(u+xv_n)\|_{L^2([0,T])} + \|G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}$$

o que implica,

$$0 \leq \theta_n(x) \leq 2MT^{\frac{1}{2}} = \beta \in L^1([0,T])$$

onde $G^{'}$ é tal que

$$|G^{'}(x)| \leq M, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \theta_n(x)dx = 0$$

ou seja,

$$\theta_n \to 0 \;\; em \;\; L^1([0,T])$$

mostrando a Afirmação 1.

Agora vamos mostrar que $\psi^{'}$ é contínua, para tanto, basta mostrarmos que, se $u_n \to u$ em H então

$$\|\psi^{'}(u_n) - \psi^{'}(u)\|_{H^*} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

Primeiramente, considere $\{v_n\} \subset H$ com $v_n \to 0$. Das imersões contínuas de Sobolev

$$v_n \to 0 \;\; em \;\; L^2([0,T])$$

logo, a menos de subsequência

$$v_n(x) \to u(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T].$$

Usando a continuidade de $G^{'}$

$$G^{'}(u+v_n)(x) \to G^{'}(u(x)) \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T]$$

o que implica,

$$|G^{'}(u+v_n)(x) - G^{'}(u(x))|^2 \to 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; [0,T].$$

Por outro lado,

$$|G^{'}(u+v_n)(x) - G^{'}(u(x))|^2 \leq (2M)^2 \in L^1([0,T]).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |G^{'}(u+v_n)(x) - G^{'}(u(x))|^2 dx = 0$$

ou seja,

$$G^{'}(u+v_n) \to G^{'}(u) \;\; em \;\; L^2([0,T])$$

mostrando que,

$$G^{'}(u+v) \to G^{'}(u) \;\; em \;\; L^2([0,T]); \;\; quando \;\; v \to 0; \;\; v \in H.$$

Por definição,

$$\|\psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u)\|_{H^*} = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \langle \psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u), v \rangle \right|$$

usando o que mostramos na Afirmação 1, segue

$$\left| \langle \psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u), v \rangle \right| \leq \int_0^T |G^{'}(u+v_n) - G^{'}(u)||v| dt$$

usando a desigualdade de Hölder, as imersões contínuas de Sobolev e o fato que $\|v\|_H \leq 1$ tem-se

$$\left| \langle \psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u), v \rangle \right| \leq C\|G^{'}(u+v_n) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])}$$

o que implica,

$$\|\psi^{'}(u+v_n) - \psi^{'}(u)\|_{H^*} \leq C\|G^{'}(u+v_n) - G^{'}(u)\|_{L^2([0,T])} \to 0 \;\; quando \;\; n \to \infty$$

ou seja,

$$\psi^{'}(u+v_n) \to \psi^{'}(u)$$

mostrando que $\psi^{'}$ é contínuo.

■

Nosso objetivo agora é mostrar que o funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ definido no Capítulo 3 por

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \left(Jv^{'}, v \right) + G(t, v^{'}) \right] dt$$

é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$. Para tanto, vamos mostrar que o funcional $K : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$K(v) = \int_0^T G(t, v^{'}) dt$$

é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.

Por definição, $G = H^*$ está bem definida e satisfaz

$$\left(\frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha \leq G(t,v) \leq \left(\frac{1}{\beta q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} + \alpha.$$

Em particular, a segunda desigualdade acima mostra que a ação dual

$$\phi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}\left(Jv^{'}, v\right) + G(t, v^{'})\right] dt$$

está bem definida.

Pelo Teorema 3.6 temos $G \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e pelo Lema 3.5 tem-se

$$\|\nabla G(t, v^{'})\| \leq C_2 \|v^{'}\|^{q-1} + C_3.$$

Para mostrar que o funcional

$$K(v) = \int_0^T G(t, v^{'}) dt$$

é diferenciável a Fréchet, basta utilizarmos um raciocínio análogo ao usado na Afirmação 1 deste Apêndice. Portanto para mostrar que o funcional K é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ vamos mostrar que $K^{'}$ é contínua.

Afirmação: $K^{'}$ é contínua, ou seja, se $u_n \to u$ em X, devemos ter

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \to 0 \;\; quando \;\; n \to \infty.$$

Com efeito, por definição

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} = \sup_{\|h\| \leq 1} \left|\langle K^{'}(u_n) - K^{'}(u), h\rangle\right|$$

e consequentemente,

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \leq \int_0^T \left(\nabla G(t, u_n^{'}) - \nabla G(t, u^{'}), h^{'}\right) dt.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \leq \|\nabla G(t, u_n^{'}) - \nabla G(t, u^{'})\|_{L^q([0,T])} \|h^{'}\|_{L^p([0,T])}$$

Supondo $u_n \to u$ em X, concluímos que

$$\|K^{'}(u_n) - K^{'}(u)\|_{H^*} \to 0 \;\; quando \;\; n \to \infty.$$

■

Apêndice C

Resultados Gerais

Neste Apêndice enunciaremos uma definição e os principais teoremas utilizados nesta dissertação.

Definição C.1 (Ver[10]) Uma família $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se localmente finita quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que intercecta apenas um número finito de conjuntos C_λ.

Teorema C.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver[2]) Seja f_n uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Teorema C.3 (Desigualdade de Hölder) (Ver[2]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$fg \in L^1(\Omega) \ \ e \ \ \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema C.4 (Ver[3]) Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente em um espaço normado, isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X. Então,

(**i**) O limite fraco x de (x_n) é único

(**ii**) Toda subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge fraco para x

(**iii**) A sequência (x_n) é limitada.

Teorema C.5 (Teorema de Riez) (Ver[3]) Todo funcional linear contínuo f sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,

$$f(x) = (z, x)$$

onde z é unicamente determinado e verifica

$$\|f\| = \|z\|.$$

Teorema C.6 (Ver[3]) Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em H, então existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad em \quad H.$$

Teorema C.7 (Du Bois Raymond) (Ver[3]) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\phi dx = 0, \quad \forall\ \phi \in C_0(\Omega).$$

Então,

$$u = 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \Omega.$$

Teorema C.8 (Ver[3]) Se $u \in W^{1,p}(I)$, então

$$u(x) - u(y) = \int_y^x |u^{'}(t)|dt.$$

onde $I = (a, b)$ é um intervalo limitado ou não.

Teorema C.9 (Ver[2]) Se $f \in L^1(X, \chi, \mu)$ dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B f d\mu < \epsilon.$$

Teorema C.10 (Teorema de Tietze) (Ver[10]) Dada uma função real contínua $f : X \to \mathbb{R}$, definida em um subconjunto fechado $X \subset \mathbb{R}^m$, existe uma função $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua tal que $F|_X = f$.

Teorema C.11 (Teorema do Valor Intermediário) (Ver[9]) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Teorema C.12 (Teorema de Fubini) (Ver[3]) Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \;\; e \;\; \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx.$$

Lema C.13 Considere X o seguinte espaço vetorial

$$X = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N}; absolutamente\ contínua, T - periódica, \\ \displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0 \ e \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt < \infty \end{array} \right\}.$$

Então a função $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|v\|_X = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma.

Demonstração:

Devemos mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\|v\|_X \geq 0, \quad \forall\, v \in X$

(ii) $\|v\|_X = 0$ se, e somente se, $v \equiv 0$

(iii) $\|\alpha v\|_X = |\alpha|\ \|v\|_X, \ \forall\, v \in X$ e $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

(iv) $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X, \quad \forall\, u, v \in X.$

Observe que os itens (i), (iii) e (iv) seguem diretamente das propriedades da norma nos Espaços $L^p([0,T])$.

Se $\|v\|_X = 0$, temos

$$\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt = 0$$

o que implica,

$$\|v^{'}\|^p = 0 \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}$$

e consequentemente

$$v = C \;\; q.t.p \;\; em \;\; X.$$

Sendo $\displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0$ tem-se $v \equiv 0$.

Reciprocamente, se $v \equiv 0$ então

$$\int_0^T \|v^{'}(t)\|^p dt = 0$$

assim,

$$\|v\|_X = 0$$

o que mostra (ii).

■

Lema C.14 (Ver [5]) Seja G um espaço de Banach e $f : [a, b] \to G$ uma função contínua. Então,

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Bibliografia

[1] A. Anbrosetti, P. H Rabinowitz.,*Dual Variational methods in critical theory and apllications*. J. Funct. Anal. 14 (1973).

[2] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[3] Brézis, Haim., *Analyse Fonctionelle*. 2^a ed. Masson, 1987.

[4] Costa, David Goldstein., *Tópicos em análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[5] Dantas, Moisés dos Santos, *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos Variacionais*. Dissertação de Mestrado. UFCG, 2005.

[6] Iório Jr., Rafael José e Iório, Valéria., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[7] J. Mawhin, M. Willem., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, New York, 1983.

[8] Lang, Serg., *Analysis II*. Addison-Wesley, 1969.

[9] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[10] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.

[11] Sotomayor, Jorge., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[12] Willem, Michel. , *Lectures on Critical Point Theory*, Trabalho de Matemática N. 199, UnB, 1983. New York, 1983.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo