# Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução não nula, via Métodos Variacionais para uma classe de problemas Elípticos do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apresenta uma descontinuidade, do tipo salto, com seu conjunto de pontos de descontinuidade sendo um conjunto enumerável sem pontos de acumulação e $\Omega$ é um domínio limitado com fronteira suave.

# Abstract

In this work we study the existence of solutions for the following class of Elliptic problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

where the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has some discontinuities and $\Omega$ is a bounded domain with smooth boundary. The main tool used is the Variational Methods together arguments developed by Chang [9].

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Teoremas Minimax para Funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações

**por**

**Jefferson Abrantes Dos Santos** †

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes, Casadinho e Instituto Milênio de Matemática.

# Teorema Minimax para Funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações

**por**

**Jefferson Abrantes Dos Santos**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Paulo César Carrião**

---

**Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto**

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**Dezembro/2007**

# Agradecimentos

À **Deus**, pela saúde e força.

À minha família em especial a minha mãe, **Dilva Abrantes** e meu avô, **Durval Soares** (que já não está mais aqui presente entre nós), por todo apoio e carinho.

Aos meus Padrinhos **Alzenira Oliveira e Raimundo Ferreira**, por todo apoio e carinho.

Ao Prof. **Claudianor Oliveira**, por todo apoio, orientação e compreensão dado durante todo o périodo da Pós-Graduação.

Ao Prof. **Paulo César Carrião e Marco Aurélio** pelas sugestões e disposição nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

A grande família UAME em especial aos Prof.'s **Daniel Cordeiro, Francisco Antonio, Jaime Alves, Marco Aurélio e Rosana Marques**, pela motivação, orientação, bronca e atenção dada durante toda minha caminhada acadêmica.

Aos colegas da Pós-Graduação (UFCG).

Aos funcionários do DME/UFCG.

Aos amigos, que sempre estiveram comigo nas horas difíceis.

A Capes, Casadinho e Instituto Milênio de Matemática, pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus familiares: Dilva Abrantes de Oliveira (minha mãe) e Durval Soares de Oliveira (meu avô).

# Conteúdo

# Introdução

O nosso objetivo neste trabalho é encontrar solução forte, via Métodos Variacionais, para uma classe de problemas Elípticos do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = \widehat{f}(u), \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apresenta uma descontínuidade, do tipo salto e $\Omega$ é um domínio limitado com fronteira suave. Sendo $\widehat{f}$ descontínua, concluíremos neste estudo, que o funcional energia associado ao problema (1), $\widehat{I} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\widehat{I}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \widehat{F}(u)dx,$$

onde $\widehat{F}$ é a primitiva de $\widehat{f}$, é Localmente Lipschitz. Iremos mostrar ao longo desta dissertação, que os pontos críticos do funcional $\widehat{I}$, são soluções forte do problema (1). Para encontrar pontos críticos de um funcional que é apenas Localmente Lipschitz, estudamos aqui a generalização da definição de ponto crítico através da Análise Convexa e Gradiente Generalizado. Tais pontos críticos serão obtidos usando os Teoremas do Passo da Montanha e de Minimização, demonstrados aqui para funcionais Localmente Lipschitz, usando as propriedades de Gradiente Generalizados.

Segundo A. Ambrosetti e R.E.L. Turner (ver [2]), uma aplicabilidade para o problema estacionário (1) é obter a distribuição de temperatura de um gás ionizado, por uma corrente elétrica, confinado em um cilindro que tem temperatura constante, onde $\Omega$ representaria a secção transversal deste cilindro e $\widehat{f}$ os pontos onde o gás está sujeito ao fluxo de elétrons. A função $\widehat{f}$ para esta aplicação pode ter o seguinte comportamento:

Quando a temperatura do gás for menor que uma certa temperatura fixada de valor $a$ (conhecida como temperatura de descarga), este gás não está sujeito ao fluxo de elétrons, tornando assim uma variação de temperatura nesta região quase que linear, o que representaria matematicamente $\Delta u = 0$ nesta região, ou melhor $\widehat{f}(u) = 0$, se $u < a$. Quando a temperatura do gás for maior ou igual a $a$, o gás esta sujeito ao fluxo de elétrons, o que é natural, pois o fluxo de elétrons faz com que os atômos do gás se agitem elevando assim sua temperatura. Nesta região temos uma variação de temperatura considerável em relação a posição do gás, portanto podemos supor que $-\Delta u(x) = \widehat{f}(u)$, se $u \geq a$, onde $\widehat{f}$ poderia ser por exemplo uma função polinômial crescente para $u \geq a$.

Perceba que a função $\widehat{f}$ para este tipo de problema pode ter uma decontinuidade do tipo salto no ponto $a$, justificando o porquê de considerarmos em nosso problema uma função com descontinuidade do tipo salto.

Esta dissertação esta organizada da seguinte forma:

**Capítulo 1:** Neste Capítulo, apresentamos uma teoria desenvolvida por Clarke [10] conhecida como Gradiente Generalizado, onde seguindo o livro dos autores Grossinho & Tersian [17], com o auxilio do artigo do autor Chang [9], abordamos algumas definições, exemplos e propriedades que serão úteis para demonstrar os teoremas apresentados em Capítulos posteriores.

**Capítulo 2:** Neste Capítulo, seguindo o livro dos autores Grossinho & Tersian [17] aplicamos a teoria de Gradiente Generalizado para funcionais definido sobre $L^p(\Omega)$.

**Capítulo 3:** Neste Capítulo, seguindo o artigo do autor Chang [9] demostramos o Lema da Deformação, Teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Minimização para funcionais Localmente Lipschitz.

**Capítulo 4:** Neste Capítulo, encontramos uma solução forte via Teorema de Minimização, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = H(u-a)u^q + |u|^{p-1}u, \ \Omega, \ 0 < p, q < 1, \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $H$ é a função de Heavside.

**Capítulo 5:** Neste Capítulo, seguindo o artigo dos autores Costa & Tehrani [11] encontramos uma solução forte, via teorema de Minimização, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), \text{ em } \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, satisfaz algumas propriedades.

**Capítulo 6:** Neste Capítulo, seguindo o artigo do autor Badiale [5] encontramos uma solução forte, via teorema do Passo da Montanha, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + f(u), \text{ em } \Omega, \\ u(x) \geq 0, \ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfaz algumas propriedades.

**Apêndice A:** Neste Apêndice, colocamos alguns resultados e definições, que envolve a teoria de Análise Funcional, utilizados durante nosso estudo.

**Apêndice B:** Neste Apêndice, colocamos alguns resultados envolvendo uma função de variação limitada, com o objetivo de justificar que toda função Localmente Lipschitz é diferenciálvel em quase toda parte.

**Apêndice C:** Neste Apêndice, colocamos alguns resultados de Medida e Integração utilizados em nosso estudo.

**Apêndice D:** Neste Apêndice, colocamos alguns resultados e definições de Espaços Métricos, integrais em Espaços de Banach e Equações Diferenciais em Espaços de Banach, utilizados durante nosso estudo.

**Apêndice E:** Neste Apêndice, colocamos alguns resultados e definições sobre espaços de Sobolev.

**Apêndice F:** Neste Apêndice, colocamos alguns resultados envolvendo Simetrização de Schwarz.

# Notações

- $(X,||.||)$ um espaço de Banach separável reflexivo, munido da norma $||.||$.
- $(X^*,||.||_{X^*})$ o espaço dual de $X$, munido da norma $||.||_{X^*}$.
- $X^{**}$ o espaço bidual de X.
- $LL(X,\mathbb{R})$ espaço dos funcionais Localmente Lipschtz definidos em $X$.
- $Df(x)v$ ou $\langle f'(x), v\rangle$ é a derivada a Gâteaux da função $f$ no ponto $x$ e direção $v$.
- $\mathcal{P}(X^*)$ conjunto das partes de $X^*$.
- $[u > a]$ o conjunto $\{x \in \Omega; u(x) > a\}$.
- $\mathcal{M}$ o conjunto das funções mensuráveis.
- $B_1$ uma bola de raio 1 e centro na origem.
- $|A|$ medida de Lebesgue do conjunto A.
- $dist(x, A) = \inf\{||x - y||; y \in A \subset X\}$.
- $||f||_p = \left( \int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ $\forall f \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$.
- $\langle v\rangle$ espaço gerado pelo elemento $v \in X$.
- $\operatorname{ess\,inf}\{\phi(x, s); |s - t| < \varepsilon\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}; \phi(x, s) \geq \alpha$ q.t.p. em $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)\}$.
- $\operatorname{ess\,sup}\{\phi(x, s); |s - t| < \varepsilon\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; \phi(x, s) \leq \alpha$ q.t.p. em $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)\}$.

# Capítulo 1

# Gradiente Generalizado

Apresentaremos aqui uma teoria desenvolvida por Clarke [10] Gradiente Generalizado, onde seguindo o livro dos autores Grossinho & Tersian [17] colocaremos algumas definições, exemplos e propriedades domonstradas com o auxilio do artigo do autor Chang [9]. Iremos, perceber ao longo deste Capítulo que esta teoria generaliza a definição no sentido clássico de gradiente, pois pedimos que a função seja apenas Localmente Lipschitz.

No que segue, $X$ denota um espaço de Banach separável e reflexivo.

**Definição 1.1** *Um funcional $f : X \to \mathbb{R}$ é dito ser um **Funcional Localmente Lipschitz** ($f \in LL(X, \mathbb{R})$), se para cada $x \in X$, existir uma vizinhança aberta de $x$, $N(x)$, e uma constante $K(x) > 0$, tal que*

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x)||y_1 - y_2||, \ \forall y_1, y_2 \in N(x). \tag{1.1}$$

Quando (1.1) ocorrer em todo espaço $X$, a função $f$ é dita ser **Lipschitz**.

**Definição 1.2** *A **Derivada Direcional Generalizada** de um funcional Localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $x \in X$ na direção $v \in X$, denotado por $f^0(x; v)$ (ou $Df(x)(v)$), é definido por*

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x + h + \lambda v) - f(x + h)\Big). \tag{1.2}$$

**Teorema 1.3** *Se $f$ é contínua e a diferencial a Gâteaux $f^{'} : X \to X^*$ é contínua na topologia fraca-*, então $f \in LL(X, \mathbb{R})$ e $f^0(x; v) = \langle f^{'}(x), v\rangle$.*

**Demonstração:**

Mostraremos primeiramente que $f \in LL(X, \mathbb{R})$. Seja $x \in X$.

**Afirmação 1.1** *Para cada $x \in X$, existem $\rho > 0$ e $M(x) > 0$ tais que*

$$||f^{'}(y)||_{X^*} \leq M(x), \ \forall y \in B_\rho(x).$$

Com efeito, suponha por absurdo que a afirmação não vale, logo dado $\rho_n > 0$ e $M_n > 0$, com $\rho_n \to 0$ e $M_n \to \infty$, existe $y_n \in B_{\rho_n}(x)$, tal que

$$||f^{'}(y_n)||_{X^*} > M_n \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Note que $y_n \to x$ em $X$, pois $(y_n) \subset B_{\rho_n}(x)$ e $\rho_n \to 0$. Passando ao limite de $n \to +\infty$ em (1.3), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} ||f^{'}(y_n)||_{X^*} = +\infty. \tag{1.4}$$

Sabendo que $y_n \to x$ e $f^{'} : X \to X^*$ é contínua na topologia fraca-*, temos

$$f^{'}(y_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f^{'}(x), \ \text{em } X^*,$$

isto é

$$\langle f^{'}(y_n), v\rangle \longrightarrow \langle f^{'}(x), v\rangle, \ \forall v \in X.$$

Considerando a aplicação $T : \mathbb{N} \to X^*$ dada por

$$T(n) = T_n \equiv f^{'}(y_n),$$

observe que $(T_n(v)) = (\langle f^{'}(y_n), v\rangle)$ é uma sequência convergente para todo $v \in X$. Recordando que toda sequência convergente é limitada, existe $c_v > 0$ tal que

$$|T_n(v)| \leq c_v \ \forall n \in \mathbb{N}, v \in X,$$

donde segue-se, pelo Teorema de Banach-Steinhaus (ver Apêndice A), que existe $c > 0$ tal que

$$||T_n||_{X^*} \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é $||f^{'}(y_n)||_{X^*} \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}$, contradizendo (1.4) e mostrando assim a Afirmação 1.1.

Dados $y, z \in B_\rho(x)$, defina as funções $\varphi : [0, 1] \to X$ dada por $\varphi(t) = y + t(z - y)$ e

$\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(t) = f(\varphi(t))$.

Observe que $\psi$ é diferenciável em $(0,1)$, pois para cada $t \in (0,1)$, temos

$$\psi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(y + t(z-y) + h(z-y)) - f(y + t(z-y)}{h},$$

e sendo $f$ Gâteaux diferenciável concluímos

$$\psi'(t) = \langle f'(y + t(z-y)), z - y\rangle.$$

Sabendo que $\psi$ é diferenciável em $[0,1]$, segue pelo Teorema do Valor Médio que existe um $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \langle f'(y + t_0(z-y)), z - y\rangle,$$

equivalentemente, existe um $w \in [y,z] \subset B_\rho(x)$ (pois $B_\rho(x)$ é convexo) tal que

$$f(z) - f(y) = \langle f^{'}(w), (y-z)\rangle,$$

daí

$$|f(z) - f(y)| = |\langle f^{'}(w), (y-z)\rangle| \le ||f^{'}(w)||_{X^*}||y - z||,$$

donde segue-se da Afirmação 1.1 que

$$|f(z) - f(y)| \le M(x)||y - z||, \ \forall y, z \in B_\rho(x),$$

mostrando que $f \in LL(X, \mathbb{R})$.

Sejam $x, v \in X$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ e $(h_n) \subset X$, tais que $h_n \to 0$ em $X$ e $\lambda_n \to 0^+$ em $\mathbb{R}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n$ suficientemente grande, definamos as seguintes funções

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n : [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \varphi_n(t) = x + h_n + t(\lambda_n v) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \psi_n \equiv f \circ \varphi_n : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \psi_n(t) = f(\varphi_n(t)). \end{array}$$

Observe que $\varphi_n \in C^\infty$ e que $\psi_n$ é derivável em $[0,1]$, pois $f$ é Gâteaux diferenciável. Daí, pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta_n \in [0,1]$ tal que

$$\psi_n(1) - \psi_n(0) = \psi_n^{'}(\theta_n),$$

ou equivalentemente,

$$f(\varphi_n(1)) - f(\varphi_n(0)) = (f \circ \varphi_n)^{'}(\theta_n),$$

donde segue-se que

$$f(x + h_n + \lambda_n v) - f(x + h_n) = \langle f^{'}(x + h_n + \theta_n \lambda_n v), \lambda_n v \rangle,$$

implicando assim que

$$\frac{f(x + h_n + \lambda_n v) - f(x + h_n)}{\lambda_n} = \langle f^{'}(x + h_n + \theta_n \lambda_n v), v \rangle, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x + h_n + \lambda_n v) - f(x + h_n)}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \langle f^{'}(x + h_n + \theta_n \lambda_n v), v \rangle. \tag{1.5}$$

Sabendo que $f^{'}$ é contínua na topologia fraca-* e $\lim\limits_{n\to\infty}(x + h_n + \theta_n \lambda_n v) = x$, temos

$$f^{'}(x + h_n + \theta_n \lambda_n v) \overset{*}{\rightharpoonup} f^{'}(x) \text{ em } X^*,$$

isto é,

$$f^{'}(x + h_n + \theta_n \lambda_n v)w \longrightarrow \langle f^{'}(x), w \rangle, \ \forall w \in X. \tag{1.6}$$

Em particular para $w = v$, segue-se de (1.5) e (1.6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x + h_n + \lambda_n v) - f(x + h_n)}{\lambda_n} = \langle f^{'}(x), v \rangle. \tag{1.7}$$

Tendo em vista que (1.7) acontece, para toda sequencia $(h_n)$ e $(\lambda_n)$ convergindo para zero, em particular para um $(h_n)$ e $(\lambda_n)$ verificando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x + h_n + \lambda_n v) - f(x + h_n)}{\lambda_n} = f^0(x; v),$$

vamos obter

$$f^0(x; v) = \langle f^{'}(x), v \rangle. \ \blacksquare$$

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(\mathbf{A_1})$ $f^0(x; .) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homôgeneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos

$(a)$ $f^0(x; v_1 + v_2) \leq f^0(x; v_1) + f^0(x; v_2), \forall \ v_1, v_2 \in X$

e

$(b)$ $f^0(x;kv) = kf^0(x;v), \forall\ v \in X, k \geq 0.$

**Demonstração:**

Sabendo que

$$f^0(x;v_1+v_2) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda(v_1+v_2)) - f(x+h)\Big),$$

temos

$$\begin{aligned} f^0(x;v_1+v_2) &= \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \Big(\frac{f(x+(h+\lambda v_1)+\lambda v_2)+f(x+(h+\lambda v_1))}{\lambda} \\ &\quad -\frac{f(x+h+\lambda v_1)+f(x+h)}{\lambda}\Big), \end{aligned}$$

ou ainda pela definição de limsup (ver [14])

$$\begin{aligned} f^0(x;v_1+v_2) &= \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} \Big(\sup\Big\{\frac{f(x+(h+\lambda v_1)+\lambda v_2)-f(x+(h+\lambda v_1))}{\lambda} \\ &\quad +\frac{f(x+h+\lambda v_1)-f(x+h)}{\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\Big\}\Big). \end{aligned}$$

Utilizando propriedade de supremo

$$\begin{aligned} f^0(x;v_1+v_2) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} \Big(\sup\Big\{\frac{f(x+(h+\lambda v_1)+\lambda v_2)-f(x+(h+\lambda v_1))}{\lambda}; \\ &\quad h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\Big\} \\ &\quad +\sup\Big\{\frac{f(x+h+\lambda v_1)-f(x+h)}{\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\Big\}\Big), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} f^0(x;v_1+v_2) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} \sup\Big\{\frac{f(x+(h+\lambda v_1)+\lambda v_2)-f(x+(h+\lambda v_1))}{\lambda}; \\ &\quad h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\Big\} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} \sup\Big\{\frac{f(x+h+\lambda v_1)-f(x+h)}{\lambda}; h \in B_\varepsilon, \\ &\quad \lambda \in (0,\delta)\Big\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$f^0(x;v_1+v_2) \leq f^0(x;v_1) + f^0(x;v_2),\ \forall\ v_1, v_2 \in X,$$

mostrando assim o item $(a)$.

Para mostrar o item $(b)$, iremos considerar os seguintes casos:

$1^0$ **caso:** $k=0$. Para cada $v \in X$,

$$\begin{aligned} f^0(x;kv) &= f^0(x;0v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda(0)) - f(x+h)\Big) \\ &= \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h) - f(x+h)\Big) = 0 = 0f^0(x;v) \\ &= kf^0(x;v). \end{aligned}$$

$2^0$ **caso:** $k>0$. Para cada $v \in X$,

$$\begin{aligned} f^0(x;kv) &= \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda(kv)) - f(x+h)\Big) \\ &= \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{k}{k\lambda}\Big(f(x+h+(k\lambda)v) - f(x+h)\Big), \end{aligned}$$

utilizando propriedade de limite superior, segue que

$$\begin{aligned} f^0(x;kv) &= k\limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{k\lambda}\big(f(x+h+(k\lambda)v) - f(x+h)\big) \\ &= kf^0(x;v). \ \blacksquare \end{aligned}$$

$(\mathbf{A_2})$ $f^0(x;.)$ é um funcional convexo.

**Demonstração:**

Dados $v_1, v_2 \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se de $(A_1)$, que

$$f^0(x; v_1t + v_2(1-t)) \leq f^0(x;v_1t) + f^0(x;v_2(1-t)),$$

tendo em vista que $t, (1-t) > 0$, segue, novamente pelo item $(i)$, que

$$f^0(x; v_1t + v_2(1-t)) \leq tf^0(x;v_1) + (1-t)f^0(x;v_2). \ \blacksquare$$

$(\mathbf{A_3})$ $|f^0(x;v)| \leq K(x)||v||$, onde $K(x)$ satisfaz (1.1) e depende do conjunto aberto $N(x)$, para cada $x \in X$.

**Demonstração:**

Observe que,

$$\begin{aligned} f^0(x;v) &= \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v) - f(x+h)\Big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to 0^+} \left(\sup\left\{\frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\}\right), \end{aligned}$$

donde segue-se, por propriedade de supremo, que

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\Big(\sup\Big\{\Big|\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}\Big|; h\in B_\varepsilon, \lambda\in(0,\delta)\Big\}\Big).$$

Sendo $f \in LL(X,\mathbb{R})$, temos de (1.1)

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} K(x)||v|| = K(x)||v||. \tag{1.8}$$

Obseve agora que

$$\begin{aligned} f^0(x;v) &= \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v)-f(x+h)\Big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\Big(\sup\Big\{\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}; h\in B_\varepsilon, \lambda\in(0,\delta)\Big\}\Big), \end{aligned}$$

por propriedade de supremo temos

$$f^0(x;v) \geq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\Big(\sup\Big\{-\Big|\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}\Big|; h\in B_\varepsilon, \lambda\in(0,\delta)\Big\}\Big),$$

e sendo $f \in LL(X,\mathbb{R})$

$$f^0(x;v) \geq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0}\big(-K(x)||v||\big),$$

implicando

$$f^0(x;v) \geq -K(x)||v||,\ \forall x,v\in X. \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9)

$$|f^0(x;v)| \leq K(x)||v||,$$

como queriamos mostrar. ■

$(\mathbf{A_4})$ $f^0(x;v)$ é uma função semicontínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{j\to\infty} f^0(x_j;v_j) \leq f^0(x;v),$$

onde $\lim_{j\to\infty}(x_j,v_j) = (x,v)$, $(x,v)\in X\times X$.

**Demonstração:**

Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $(x_j,v_j)$ com $\lim_{j\to\infty}(x_j,v_j) = (x,v)$ verificando

$$\limsup_{j\to\infty} f^0(x_j;v_j) > f^0(x;v).$$

Daí, existe $r>0$ tal que $\limsup_{j\to\infty} f^0(x_j;v_j) > f^0(x;v)+r$.

Logo, existe $j_0\in\mathbb{N}$ e $(x_{j_k},v_{j_k})_{j_k\in\mathbb{N}} \subset (x_j,v_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tais que

$$f^0(x_{j_k};v_{j_k}) > f^0(x;v)+r,\ \forall\ j_k\geq j_0,$$

implicando que

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{f(x_{j_k}+h+\lambda v_{j_k})-f(x_{j_k}+h)}{\lambda};h\in B_\varepsilon,\lambda\in(0,\delta)\right\}\right)>f^0(x;v)+r,\ \forall j_k\geq j_0.$$

Por definição de limite, existem $\varepsilon_0,\delta_0>0$ tais que

$$\sup\left\{\frac{f(x_{j_k}+h+\lambda v_{j_k})-f(x_{j_k}+h)}{\lambda};h\in B_\varepsilon,\lambda\in(0,\delta)\right\}>f^0(x;v)+r,\ \forall j_k\geq j_0,$$

para todo $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ e $\delta\in(0,\delta_0)$.

Por propriedade de supremo, existem $h_0\in B_\varepsilon$ e $\lambda_0\in(0,\delta)$ tais que

$$\frac{f(x_{j_k}+h_0+\lambda_0 v_{j_k})-f(x_{j_k}+h_0)}{\lambda_0}>f^0(x;v)+r,\ \forall j_k\geq j_0.$$

Passando ao limite $j_k\to+\infty$ tem-se, pelo fato de $f$ ser contínua

$$\frac{f(x+h_0+\lambda_0 v)-f(x+h_0)}{\lambda_0}\geq f^0(x;v)+r,$$

com $h_0\in B_\varepsilon$ e $\delta_0\in(0,\delta)$, para todo $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ e $\delta\in(0,\delta_0)$.

Donde segue-se que

$$\sup\left\{\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda};h\in B_\varepsilon,\lambda\in(0,\delta)\right\}\geq f^0(x;v)+r,$$

para todo $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ e $\delta\in(0,\delta_0)$. Passando ao limite $\varepsilon\to 0$ e $\delta\to 0^+$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda};h\in B_\varepsilon,\lambda\in(0,\delta)\right\}\right)\geq f^0(x;v)+r,$$

ou ainda

$$f^0(x;v)\geq f^0(x;v)+r,$$

com $r>0$, o que é uma contradição. ■

$(\mathbf{A_5})$ $|f^0(x;u)-f^0(x;v)|\leq K(x)||u-v||$, para todo $u,v\in X$, isto é, $f^0(x;.):X\to\mathbb{R}$ é uma função Lipschitz, com constante $K(x)$.

**Demonstração:**

Observe que de $(A_1)$

$$f^0(x;u)=f^0(x;u-v+v)\leq f^0(x;u-v)+f^0(x;v)$$

e

$$f^0(x;v)=f^0(x;v-u+u)\leq f^0(x;v-u)+f^0(x;u).$$

Assim,

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq f^0(x;u-v) \leq |f^0(x;u-v)|$$

e por $(A_3)$

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq K(x)||u-v||. \tag{1.10}$$

Por outro lado

$$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq f^0(x;v-u) \leq |f^0(x;v-u)|,$$

donde segue de $(A_3)$

$$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq K(x)||v-u|| = K(x)||u-v||. \tag{1.11}$$

De (1.10) e (1.11)

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)||u-v||, \forall\ u,v \in X. \ \blacksquare$$

$(\mathbf{A_6})$ $f^0(x;-v) = (-f)^0(x;v),\ \forall x,v \in X.$

**Demonstração:**

Por definição,

$$f^0(x;-v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda(-v)) - f(x+h)\Big),$$

implicando que,

$$f^0(x;-v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h-\lambda v) - f(x+h-\lambda v+\lambda v)\Big),$$

e portanto

$$f^0(x;-v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big( - f(x+(h-\lambda v)+\lambda v) + f(x+(h-\lambda v))\Big),$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} f^0(x;-v) &= \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big((-f)(x+(h-\lambda v)+\lambda v) - (-f)(x+(h-\lambda v))\Big), \\ &\leq (-f)^0(x;v),\ \forall\ x,v \in X, \end{aligned}$$

de modo análogo mostra-se que $(-f)^0(x;v) \leq f^0(x;-v),\ \forall x,v \in X.$ Portanto, $f^0(x;-v) = (-f)^0(x;v),\ \forall x,v \in X.$ $\blacksquare$

**Definição 1.4** *O* ***Gradiente Generalizado*** *de* $f \in LL(X,\mathbb{R})$ *no ponto* $x \in X$ *é um subconjunto* $\partial f(x) \subset X^*$*, onde* $X^*$ *é o dual topológico de* $X$*, definido por*

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*; f^0(x;v) \geq \langle \xi, v\rangle, \forall\ v \in X\}.$$

**Exemplo 1:** Seja

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

Note que $f$ é uma função Lipschitz, implicando $f \in LL(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Mostraremos agora que

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } x > 0, \\ [-1,1], & \text{se } x = 0, \\ \{-1\}, & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Para $x = 0$, temos

$$f^0(0;v) = |v|,\ \forall v \in \mathbb{R}.$$

De fato, pois para $v > 0$ temos

$$f^0(0,v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(h+\lambda v) - f(h)\Big),$$

donde segue

$$f^0(0;v) = \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda}v; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\}\right),$$

isto é

$$f^0(0;v) = v \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\}\right). \tag{1.13}$$

**Afirmação 1.2** *Dados* $\varepsilon, \delta > 0$ *e* $v > 0$*,*

$$\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\} = 1.$$

De fato, dados $\varepsilon, \lambda > 0$ e $v > 0$ observe que 1, é cota superior para o conjunto

$$H = \left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\},$$

pois

$$\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} = \frac{|h+\lambda v| - |h|}{v\lambda},$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} \leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda},$$

implicando

$$\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} \leq \frac{|v|}{v} = 1,\ \forall h \in B_\varepsilon,\ \lambda \in (0,\delta).$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$ temos

$$\frac{f(0+\lambda v)-f(0)}{v\lambda} = \frac{|0+\lambda v|-|0|}{v\lambda} = \frac{|\lambda v|}{v\lambda},$$

sendo $v, \lambda > 0$

$$\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} = \frac{\lambda v}{v\lambda} = 1.$$

Sabendo que 1 é cota superior do conjunto $H$ e $1 \in H$, temos

$$\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\} = 1,$$

para todo $\varepsilon, \delta > 0$ e $v \geq 0$, mostrando a Afirmação 1.2.

Da Afirmação 1.2 e de (1.13), concluímos que

$$f^0(x;v) = v,\ \forall v > 0. \tag{1.14}$$

Se $v < 0$,

$$f^0(0;v) = \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda}v; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\}\right),$$

donde segue-se, por propriedade de supremo e de limite, que

$$f^0(0;v) = (-v)\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\left(\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{(-v)\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\}\right), \tag{1.15}$$

pois $-v > 0$. De modo análogo, mostra-se que

$$\sup\left\{\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{(-v)\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\right\} = 1,\ \forall \varepsilon, \delta > 0 \text{ e } v < 0.$$

Sendo assim segue, de (1.15), que

$$f^0(0,v) = -v,\ \forall v < 0. \tag{1.16}$$

De (1.14) e (1.16)

$$f^0(0;v) = |v|, \forall v \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

De (1.17)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R}; \xi v \leq |v|,\ \forall v \in \mathbb{R}\},$$

logo $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Quando $x < 0$, temos $f'$ contínua, implicando que $f'$ é contínua na topologia fraca-*.
Do Teorema 1.3, obtemos

$$f^0(x; v) = f^{'}(x)v = -v, \forall x < 0 \text{ e } v \in \mathbb{R},$$

e portanto

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^*; \langle \xi, v\rangle \leq -v,\ \forall v \in \mathbb{R}\},$$

donde segue-se que

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}; \xi v \leq -v,\ \forall v \in \mathbb{R}\}.$$

Daí $\xi \in \partial f(x)$ se, e só se,

$$\begin{cases} \xi \leq -1, & \text{se } v \geq 0; \\ \xi \geq -1, & \text{se } \ v < 0. \end{cases}$$

Portanto, $\partial f(x) = \{-1\}$.

Para $x > 0$, mostra-se de maneira análoga que $\partial f(x) = \{1\}$, mostrando assim (1.12). ■

**Lema 1.1** *O Gradiente Generalizado de uma função $f \in LL(X, \mathbb{R})$ $(\partial f(x))$ é sempre um conjunto diferente do vazio.*

**Demonstração:**

De fato, observe que se $f^0(x; v) = 0, \forall v \in X$, então $\partial f(x) = \{0\}$, pois

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*; \langle \xi, v\rangle \leq f^0(x, v) = 0, \forall\ v \in X\},$$

logo,

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*; \langle \xi, v\rangle \leq 0, \forall\ v \in X\}.$$

Suponha que exista um $\xi \in X^* \backslash \{0\}$ tal que

$$\langle \xi, v\rangle \leq 0,\ \forall v \in X. \tag{1.18}$$

Assim existi um $v_0 \in X$ tal que

$$\langle \xi, v_0\rangle \ < \ 0,$$

donde segue-se, pelo fato de $(-v_0) \in X$, que

$$\langle \xi, (-v_0) \rangle = -\langle \xi, v_0 \rangle \ > \ 0,$$

contradizendo (1.18), mostrando assim que $\partial f(x) = \{0\} \neq \varnothing$.
Suponha, agora, que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; .)$, existe um $v_0 \in X$ talque

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

Observe que,

$$0 = p(0) = f^0(x; 0) = f^0(x; v_0 - v_0)$$

implicando, de $(A_1)$ que

$$0 \leq f^0(x; v_0) + f^0(x; -v_0) = p(v_0) + p(-v_0),$$

logo

$$0 \leq p(v_0) + p(-v_0),$$

donde segue que

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{1.19}$$

Defina,

$$\begin{aligned} \xi : \langle v_0 \rangle \ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ y = tv_0 \ &\longmapsto \ \langle \xi, y \rangle = tp(v_0). \end{aligned}$$

Observe que $\xi$ é um funcional linear, pois dados $y_1, y_2 \in \langle v_0 \rangle$ temos $y_1 = t_1 v_0$ e $y_2 = t_2 v_0$ de onde segue $y_1 + ky_2 = (t_1 + kt_2)v_0$ e

$$\langle \xi, (y_1 + ky_2) \rangle = (t_1 + kt_2)p(v_0) = t_1 p(v_0) + kt_2 p(v_0),$$

donde

$$\langle \xi, (y_1 + ky_2) \rangle = \langle \xi, y_1 \rangle + k \langle \xi, y_2 \rangle.$$

**Afirmação 1.3** $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x, y), \ \forall y \in \langle v_0 \rangle$.

De fato, pois

$$tp(v_0) = p(tv_0) = f^0(x; tv_0), \ \forall t \geq 0. \tag{1.20}$$

Para $t < 0$, segue de (1.19),

$$tp(v_0) = -(-t)f^0(x; v_0) \leq (-t)f^0(x; (-v_0)),$$

logo por $(A_1)$, pois $-t > 0$, temos

$$tp(v_0) \leq f^0(x; (tv_0)), \ \forall t < 0. \tag{1.21}$$

De (1.20) e (1.21)

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\xi(y) \leq f^0(x; y), \ \forall y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.3.

Da Afirmação 1.3 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice A), que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, i.e.

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \ \forall v \in \langle v_0 \rangle$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \ \forall v \in X. \tag{1.22}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)| \leq K(x)||v||, \ \forall v \in X,$$

implicando que $F$ é contínua. Logo, $F \in X^*$ donde segue-se de (1.22), que $F \in \partial f(x)$, mostrando que $\partial f(x) \neq \varnothing, \ \forall x \in X$. ■

**Lema 1.2** *Dados $x, v \in X$, tem-se* $f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle; \xi \in \partial f(x)\}$.

**Demonstração:**

De fato, dados $x, v \in X$, defina o seguinte funcional

$$\begin{aligned} \xi_x : \langle v \rangle \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ w = tv \quad &\longmapsto \quad \langle \xi_x, w \rangle = tf^0(x; v). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\xi_x$ é um funcional linear, pois dados $w_1, w_2 \in \langle v \rangle$, com $w_1 = t_1 v$, $w_2 = t_2 v$ e $k \in \mathbb{R}$, temos $w_1 + kw_2 = (t_1 + kt_2)v$ o que implica

$$\langle \xi_x, (w_1 + kw_2) \rangle = (t_1 + kt_2)f^0(x; v),$$

ou seja

$$\langle \xi_x, (w_1 + kw_2)\rangle = t_1 f^0(x; v) + kt_2 f^0(x; v) = \langle \xi_x, w_1\rangle + k\langle \xi, w_2\rangle.$$

Por um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.1 mostra-se que

$$\langle \xi_x, w\rangle \leq f^0(x; w), \ \forall w \in \langle v\rangle.$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banch (ver Apêndice A) e de $(A_1)$, que existe um funcional linear $\xi_x^*$ definido em $X$ tal que

$$\langle \xi_x^*, w\rangle \leq f^0(x; w), \ \forall w \in X \tag{1.23}$$

e

$$\langle \xi_x^*, w\rangle = tf^0(x; v), \ \forall w \in \langle v\rangle,$$

implicando

$$\langle \xi_x^*, v\rangle = f^0(x; v). \tag{1.24}$$

De $(A_3)$ e (1.23)

$$\langle \xi_x^*, w\rangle \leq K(x)||w||, \ \forall w \in X,$$

mostrando que $\xi_x^*$ é um funcional linear contínuo, i.e. $\xi_x^* \in X^*$. Sendo assim, segue de (1.23), que $\xi_x^* \in \partial f(x)$.

De (1.24)

$$\langle \xi_x^*, v\rangle \geq \langle \xi, v\rangle, \ \forall \xi \in \partial f(x).$$

Logo $\langle \xi_x^*, v\rangle$ é uma cota superior do conjunto $\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\}$ e $\langle \xi_x^*, v\rangle \in \{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\}$ (pois $\xi_x^* \in X^*$ e satisfaz a desigualdade (1.23)).

Sendo assim, podemos concluir que

$$f^0(x; v) = \langle \xi_x^*, v\rangle = \max\{\langle \xi, v\rangle; \xi \in \partial f(x)\}, \ \forall v \in X,$$

demonstrando o lema. ■

**Definição 1.5** *Definimos como* ***função suporte*** *de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função*

$$\begin{aligned} \sigma(C, .) : X^* &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x\rangle; x \in C\}. \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 1.5, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, .) : X^{**} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi \rangle; \xi \in \Sigma\}.$$

É comum utilizar $X$ ao em vez de $X^{**}$, pois sendo $X$ reflexivo a aplicação canônica

$$\begin{array}{rcl} J : X & \to & X^{**} \\ v & \mapsto & J(v) : X^* \to \ \mathbb{R} \\ & & \qquad\qquad \xi \ \mapsto \ \langle J(v), \xi \rangle = \langle \xi, v \rangle, \end{array}$$

é sobrejetora, isto é $J(X) = X^{**}$. Portanto, para cada $\varphi \in X^{**}$ existe um único $v \in X$ tal que, $\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \xi, v \rangle$. Por isso, podemos denotar

$$\begin{array}{rcl} \sigma(\Sigma, .) : X & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \sigma(\Sigma, v) = \sup\{\langle \xi, v \rangle; \xi \in \Sigma\}. \end{array}$$

**Exemplo 2:** Segue do Lema 1.2, que $f^0(x; v)$ pode ser interpretado como sendo função suporte de $\partial f(x) \subset X^*$.

Mostraremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam $C, D, C_1, C_2 \subset X$ e $\Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*$.

$(\mathbf{S_1})$ Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \forall \ \xi \in X^*.$$

**Demonstração:**

Dado $\xi \in X^*$, temos

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \sup\{\langle \xi, x \rangle; x \in \{x_0\}\} = \langle \xi, x_0 \rangle. \ \blacksquare$$

$(\mathbf{S_2})$ Sejam $B \subset X$ e $B^* \subset X^*$ bolas unitárias de centro 0. Então, dados $\xi \in X^*$ e $v \in X$, tem-se que

$$\sigma(B, \xi) = ||\xi||_{X^*} \ e \ \sigma(B^*, v) = ||v||_X.$$

**Demonstração:**

Dados $v \in X$ e $\xi \in X^*$, temos

$$\sigma(B, \xi) = \sup\{\langle \xi, x \rangle; x \in B\} = \sup\{\langle \xi, x \rangle; ||x|| \leq 1, x \in X\},$$

implicando, por definição de norma para funcionais lineares, que

$$\sigma(B, \xi) = ||\xi||_{X^*}, \ \forall \xi \in X^*.$$

Por outro lado,

$$\sigma(B^*, v) = \sup\{\langle \varphi, v \rangle; \varphi \in B^*\} = \sup\{\langle \varphi, v \rangle; ||\varphi||_{X^*} \leq 1, \varphi \in X^*\},$$

donde segue-se, do corolário do Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice A), que

$$\sigma(B^*, v) = ||v||, \ \forall v \in X. \ \blacksquare$$

($\mathbf{S_3}$) Sejam $C$, $D$ subconjuntos de $X$ não-vazio, fechados e convexos, e $\Sigma, \Delta \subset X^*$ subconjuntos não-vazio, fechados fraco-* e convexos. Então

$$C \subset D \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) \leq \sigma(D, \xi), \ \forall \xi \in X^*$$

e

$$\Sigma \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma(\Sigma, v) \leq \sigma(\Delta, v), \ \forall v \in X.$$

**Demonstração:**

Suponha que $C \subset D$, logo

$$\{\langle \xi, v \rangle; v \in C\} \subset \{\langle \xi, v \rangle; v \in D\}, \ \forall \xi \in X^*,$$

implicando que

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, v \rangle; v \in C\} \leq \sup\{\langle \xi, v \rangle; v \in D\} = \sigma(D, \xi), \ \forall \xi \in X^*.$$

Portanto,

$$\sigma(C, \xi) \leq \sigma(D, \xi), \ \forall \xi \in X^*.$$

Reciprocamente, suponha por absurdo que $C \not\subset D$, isto é, exista um $v_0 \in C$, tal que $v_0 \notin D$. Sabendo que $D \subset X$ é um conjunto convexo, não-vazio e fechado e $\{v_0\} \subset X$

um conjunto convexo e compacto, pelo Teorema Hahn-Banach $2^a$ Forma Geométrica (ver Apêndice A), existem $\xi_0 \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que

$$\langle \xi_0, v_0 \rangle \ > \alpha \ > \ \langle \xi_0, v \rangle, \ \forall v \in D,$$

daí

$$\langle \xi_0, v_0 \rangle \ > \alpha \ \geq \ \sup\{\langle \xi_0, v \rangle ; v \in D\} = \sigma(D, \xi_0),$$

donde segue-se que

$$\sigma(C, \xi_0) \geq \langle \xi_0, v_0 \rangle \ > \ \sigma(D, \xi_0),$$

implicando que

$$\sigma(C, \xi_0) > \sigma(D, \xi_0),$$

o que é um absurdo, pois contradiz a hipotése. Logo, $C \subset D$.
Mostraremos, agora, que

$$\Sigma \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma(\Sigma, v) \leq \sigma(\Delta, v), \ \forall v \in X.$$

Se $\Sigma \subset \Delta$, então dado $v \in X$, temos

$$\{\langle \xi, v \rangle ; \xi \in \Sigma\} \subset \{\langle \xi, v \rangle ; \xi \in \Delta\},$$

daí

$$\sup\{\langle \xi, v \rangle ; \xi \in \Sigma\} \leq \sup\{\langle \xi, v \rangle ; \xi \in \Delta\},$$

implicando que

$$\sigma(\Sigma, v) \leq \sigma(\Delta, v), \ \forall v \in X.$$

Reciprocamente, suponha por absurdo que $\Sigma \not\subseteq \Delta$, isto é, que existe $\xi_0 \in \Sigma$ tal que $\xi_0 \notin \Delta$. Sabendo que $\Delta$ é convexo e fechado fraco-*, então $\Delta$ é fechado forte. Segue, pelo fato de $\{\xi_0\} \subset X^*$ ser um conjunto compacto e convexo e $\Delta \subset X^*$ um conjunto convexo e fechado, pelo Teorema de Hahn-Banach, $2^a$ Forma Geométrica (ver Apêndice A), existem $\varphi_{v_0} \in X^{**}$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\langle \varphi_{v_0}, \xi_0 \rangle > \alpha > \langle \varphi_{v_0}, \xi \rangle, \ \forall \xi \in \Delta, \tag{1.25}$$

onde $v_0 \in X$. Observe que $\varphi$ está associado ao ponto $v_0$, isto se justifica pelo fato de supormos, neste trabalho, que $X$ é um espaço reflexivo.
De (1.25), segue que

$$\langle \xi_0, v_0 \rangle \ > \alpha \ > \ \langle \xi, v_0 \rangle, \ \forall \xi \in \Delta,$$

daí, temos

$$\sigma(\Sigma, v_0) \ \geq \ \langle \xi_0, v_0 \rangle \ > \alpha \ \geq \ \sup\{\langle \xi, v_0 \rangle ; \xi \in \Delta\} = \sigma(\Delta, v_0),$$

implicando que

$$\sigma(\Sigma, v_0) \ > \ \sigma(\Delta, v_0),$$

o que contradiz a hipotése. Portanto $\Sigma \subset \Delta$, como queriamos demonstrar. ■

($\mathbf{S_4}$) O conjunto $\Sigma$ é limitado e compacto na topologia fraca-* se, e somente se, a função suporte $\sigma(\Sigma, .)$ for finita sobre X.

**Demonstração:**

De fato, se $\Sigma$ é limitado, existe $M > 0$ tal que

$$||\xi||_{X^*} \leqslant M, \ \forall \xi \in \Sigma. \tag{1.26}$$

Dado $v \in X \backslash$, temos

$$\sigma(\Sigma, v) = \sup\{\langle \xi, v \rangle ; \xi \in \Sigma\} \leq \sup\{||\xi||_{X^*} ||v||; \xi \in \Sigma\},$$

donde segue-se de (1.26),

$$\sigma(\Sigma, v) \leq M||v|| < +\infty.$$

Logo, $\sigma(\Sigma, v)$ é finito $\forall v \in X$, isto é $\sigma(\Sigma, .)$ é uma função finita sobre $X$.

Reciprocamente, suponha agora que $\sigma(\Sigma, .)$ seja uma função finita sobre $X$. Daí, para cada $v \in X$ existe um $c = c(v)$ tal que

$$\sup\{\langle \xi, v \rangle ; \xi \in \Sigma\} < c,$$

o que implica

$$|\langle \xi, v \rangle| < c, \ \forall \xi \in \Sigma,$$

donde segue-se, pelo Teorema de Banach-Stainhaus (ver Apêndice A), que existe $M > 0$ tal que

$$||\xi||_{X^*} \leq M, \ \forall \xi \in \Sigma,$$

implicando que $\Sigma \subset \overline{B}_M(0)$. Logo, $\Sigma$ é limitado. Desde que $\Sigma$ é fechado fraco-* e $\overline{B}_M(0)$ é compacto fraco-* (ver Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki no Apêndice A), podemos concluir que $\Sigma$ é compacto fraco-*. Mostrando assim a Propriedade ($A_4$). ■

($\mathbf{S_5}$) Dados $\xi \in X^*$ e $w \in X$, tem-se que:

**(i)** $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$;

**(ii)** $\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w)$;

**(iii)** $\sigma(\lambda C, \xi) = \lambda\sigma(C, \xi),\ \forall\lambda > 0$;

**(iv)** $\sigma(\lambda\Sigma, w) = \lambda\sigma(\Sigma, w),\ \forall\lambda > 0$.

**Demonstração:**

**(i)**: Seja $\xi \in X^*$ e observe que

$$\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sup\{\langle\xi, v\rangle; v \in C_1 + C_2\},$$

isto é,

$$\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sup\{\langle\xi, v\rangle; v = v_1 + v_2, v_1 \in C_1 \text{ e } v_2 \in C_2\},$$

logo

$$\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sup\{\langle\xi, v_1\rangle + \langle\xi, v_2\rangle; v_1 \in C_1 \text{ e } v_2 \in C_2\},$$

de onde segue que

$$\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sup\Big(\{\langle\xi, v_1\rangle; v_1 \in C_1\} + \{\langle\xi, v_2\rangle; v_2 \in C_2\}\Big),$$

implicando, por proriedade de supremo, que

$$\sigma(C_1 + C_2, \xi) \leq \sup\{\langle\xi, v_1\rangle; v_1 \in C_1\} + \sup\{\langle\xi, v_2\rangle; v_2 \in C_2\},$$

ou seja

$$\sigma(C_1 + C_2, \xi) \leq \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi). \tag{1.27}$$

Por outro lado, temos

$$\langle\xi, v_1\rangle + \langle\xi, v_2\rangle = \langle\xi, v_1 + v_2\rangle \leq \sup\{\langle\xi, w_1 + w_2\rangle; w_1 \in C_1 \text{ e } w_2 \in C_2\},$$

$\forall v_1 \in C_1$ e $v_2 \in C_2$, isto é

$$\langle\xi, v_1\rangle + \langle\xi, v_2\rangle \leq \sigma(C_1 + C_2, \xi),\ \forall v_1 \in C_1 \text{ e } v_2 \in C_2.$$

Fixando $v_1 \in C_1$, segue que

$$\langle \xi, v_2 \rangle \leq \sigma(C_1 + C_2, \xi) - \langle \xi, v_1 \rangle, \ \forall v_2 \in C_2,$$

logo

$$\sup\{\langle \xi, w_2 \rangle; w_2 \in C_2\} \leq \sigma(C_1 + C_2, \xi) - \langle \xi, v_1 \rangle, \ \forall v_1 \in C_1,$$

ou seja

$$\langle \xi, v_1 \rangle \leq \sigma(C_1 + C_2, \xi) - \sigma(C_2, \xi), \ \forall v_1 \in C_1,$$

daí

$$\sup\{\langle \xi, w_1 \rangle; w_1 \in C_1\} \leq \sigma(C_1 + C_2, \xi) - \sigma(C_2, \xi),$$

implicando que

$$\sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi) \leq \sigma(C_1 + C_2, \xi). \tag{1.28}$$

De (1.27) e (1.28), temos

$$\sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi) = \sigma(C_1 + C_2, \xi), \ \forall \xi \in X^*. \ \blacksquare$$

**(ii):** Veja que, para cada $w \in X$

$$\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sup\{\langle \varphi, w \rangle; \varphi \in \Sigma_1 + \Sigma_2\},$$

reescrevendo de outra forma

$$\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sup\{\langle \varphi_1, w \rangle + \langle \varphi_2, w \rangle; \varphi_1 \in \Sigma_1 \text{ e } \varphi_2 \in \Sigma_2\},$$

ou seja

$$\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sup\Big(\{\langle \varphi_1, w \rangle; \varphi_1 \in \Sigma_1\} + \{\langle \varphi_2, w \rangle; \varphi_2 \in \Sigma_2\}\Big),$$

implicando, por propriedade de supremo, que

$$\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, v) \leq \sup\{\langle \varphi_1, w \rangle; \varphi_1 \in \Sigma_1\} + \sup\{\langle \varphi_2, w \rangle; \varphi_2 \in \Sigma_2\},$$

isto é

$$\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) \leq \sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w). \tag{1.29}$$

Por outro lado, observe que

$$\langle \varphi_1, w \rangle + \langle \varphi_2, w \rangle = \langle \varphi_1 + \varphi_2, w \rangle \leq \sup\{\langle \psi_1 + \psi_2, w \rangle; \psi_1 \in \Sigma_1 \text{ e } \psi_2 \in \Sigma_2\},$$

$\forall\varphi_1 \in \Sigma_1$ e $\varphi_2 \in \Sigma_2$. Fixando $\varphi_1 \in \Sigma_1$, note que

$$\langle\varphi_2, w\rangle \leq \sup\{\langle\psi_1 + \psi_2, w\rangle; \psi_1 \in \Sigma_1 \text{ e } \psi_2 \in \Sigma_2\} - \langle\varphi_1, w\rangle,\ \forall\varphi_2 \in \Sigma_2,$$

daí

$$\sup\{\langle\psi_2, w\rangle; \psi_2 \in \Sigma_2\} \leq \sup\{\langle\psi_1 + \psi_2, w\rangle; \psi_1 \in \Sigma_1 \text{ e } \psi_2 \in \Sigma_2\} - \langle\varphi_1, v\rangle,$$

$\forall\varphi_1 \in \Sigma_1$, ou seja

$$\langle\varphi_1, w\rangle \leq \sup\{\langle\psi_1 + \psi_2, w\rangle; \psi_1 \in \Sigma_1 \text{ e } \psi_2 \in \Sigma_2\} - \sup\{\langle\psi_2, w\rangle; \psi_2 \in \Sigma_2\},$$

$\forall\varphi_1 \in \Sigma_1$, donde, segue-se que

$$\begin{aligned}\sup\{\langle\psi_1, w\rangle; \psi_1 \in \Sigma_1\} \ &\leq\ \sup\{\langle\psi_1 + \psi_2, v\rangle; \psi_1 \in \Sigma_1 \text{ e } \psi_2 \in \Sigma_2\}\\ &\quad - \sup\{\langle\psi_2, v\rangle; \psi_2 \in \Sigma_2\},\ \forall\psi_1 \in \Sigma_1,\end{aligned}$$

implicando que

$$\sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w) \leq \sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w). \tag{1.30}$$

De (1.29) e (1.30), podemos concluir que

$$\sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w) = \sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w),\ \forall w \in X.\ \blacksquare$$

**(iii):** Para cada $\lambda > 0$, temos

$$\sigma(\lambda C, \xi) = \sup\{\langle\xi, v\rangle; v \in \lambda C\},$$

considerando $\overline{v} = v/\lambda$, segue que

$$\sigma(\lambda C, \xi) = \sup\{\langle\xi, \lambda\overline{v}\rangle; \overline{v} \in C\},$$

implicando, pelo fato de $\xi$ ser um funcional linear, que

$$\sigma(\lambda C, \xi) = \sup\{\lambda\langle\xi, \overline{v}\rangle; \overline{v} \in C\},$$

utilizando propriedade de supremo, podemos concluir que

$$\sigma(\lambda C, \xi) = \lambda \sup\{\langle\xi, \overline{v}\rangle; \overline{v} \in C\} = \lambda\sigma(C, \xi),$$

isto é

$$\sigma(\lambda C, \xi) = \lambda\sigma(C, \xi),\ \forall\lambda > 0,$$

como queriamos mostrar. $\blacksquare$

**(iv):** A prova desta propriedade é análoga a demonstração do item anterior. ■

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

**($\mathbf{P_1}$)** Para todo $x \in X$ o conjunto $\partial f(x) \subset X^*$ é convexo e compacto na topologia fraca-*. Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$ temos $||\xi||_{X^*} \leq K(x)$.

**Demonstração:**

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v\rangle, \langle \xi_2, v\rangle \leq f^0(x; v), \ \forall v \in X,$$

daí, para cada $t \in (0, 1)$, segue que

$$t\langle \xi_1, v\rangle + (1-t)\langle \xi_2, v\rangle \leq tf^0(x; v) + (1-t)f^0(x; v),$$

implicando que

$$\langle t\xi_1, v\rangle + \langle (1-t)\xi_2, v\rangle \leq f^0(x; v), \forall v \in X,$$

logo

$$\langle t\xi_1 + (1-t)\xi_2, v\rangle \leq f^0(x; v), \forall v \in X.$$

Portanto, $t\xi_1 + (1-t)\xi_2 \in \partial f(x)$, para todo $t \in (0, 1)$, mostrando que $\partial f(x)$ é convexo.

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-*.

Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v\rangle \leq f^0(x; v) \leq |f^0(x; v)|,$$

donde segue-se, pela Propriedade $(A_3)$, que

$$\langle \xi, v\rangle \leq K(x)||v||, \ \forall v \in X,$$

isto é

$$\langle \xi, v\rangle \leq K(x), \ \forall v \in X,$$

com $||v|| \leq 1$. Logo,

$$||\xi||_X^* = \sup\{\langle \xi, v\rangle; ||v|| \leq 1, v \in X\} \leq K(x),$$

implicando que $\partial f(x) \subset \overline{B}_{K(x)}(0) \subset X^*$.

**Afirmação 1.4** *$\partial f(x)$ é fechado fraco-*.*

De fato, seja $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial f(x)$ uma sequência, tal que $\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0$ em $X^*$, isto é

$$\langle \xi_n, v\rangle \;\to\; \langle \xi_0, v\rangle,\ \forall v \in X.$$

Desde que $\xi_n \in \partial f(x)$

$$\langle \xi_n, v\rangle \leq f^0(x; v),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

logo por passagem ao limite

$$\langle \xi_0, v\rangle \leq f^0(x; v),\ \forall v \in X,$$

implicando que $\xi_0 \in \partial f(x)$, provando assim, a Afirmação 1.4.
Sabendo que $\partial f(x)$ é fechado fraco-* e $\partial f(x) \subset \overline{B}_{K(x)}(0)$, com $\overline{B}_{K(x)}(0)$ compacto na topologia fraca-*, temos $\partial f(x)$ é compacto fraco-*, como queriamos mostrar. ∎

**Lema 1.3** *Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(X)$ tal que*

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*}; \xi \in \partial f(x)\}.$$

**Demonstração:**

Para mostrar este lema, basta mostrar que o ínfimo do conjunto

$$A = \{||\xi||_{X^*}; \xi \in \partial f(x)\} \subset \mathbb{R}$$

é atingido. Primeiramente, observe que o conjunto $A$ é limitado inferiormente, pois

$$||\xi||_{X^*} \geq 0, \forall \xi \in \partial f(x).$$

Definamos,

$$C_f(x) = \inf\{||\xi||_{X^*}; \xi \in \partial f(x)\}.$$

Logo, $C_f(x)$ é ponto aderente do conjunto $A$, e assim existe uma sequência $(\xi_n) \subset \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_n||_{X^*} \;\to\; C_f(x). \tag{1.31}$$

Note que $(\xi_n) \subset \partial f(x) \subset \overline{B}_{K(x)}(0) \subset X^*$, onde $\overline{B}_{K(x)}(0)$ é compacto fraco-*. Segue, pelo fato de $(\xi_n) \subset \overline{B}_{K(x)}(0)$, que existe uma subsequência $(\xi_{n_j})$ de $(\xi_n)$ e $\xi_0 \in X^*$ tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*. \tag{1.32}$$

Sendo $\partial f(x)$ fechado fraco-*, concluímos que $\xi_0 \in \partial f(x)$.

Defina agora a seguinte função

$$\begin{aligned} \varphi : X^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \varphi(\xi) = ||\xi||_{X^*}. \end{aligned}$$

De (1.32)

$$\liminf_{n\rightarrow+\infty} \varphi(\xi_n) \geq \varphi(\xi), \tag{1.33}$$

para toda sequência $(\xi_n) \subset X^*$ tal que $\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ em $X^*$.

De (1.31), (1.32) e (1.33), temos

$$C_f(x) = \liminf_{n_j\rightarrow+\infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*}.$$

Donde segue-se, pelo fato de $C_f(x) = \inf A$, que

$$C_f(x) = ||\xi_0||_{X^*},$$

pois $\xi_0 \in \partial f(x)$, mostrando que o ínfimo do conjunto $A$ é atingido. ■

**Observação 1.1** *Consideraremos a partir de agora a função* $\lambda_f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, dada por* $\lambda_f(x) = \min\{||\xi||_{X^*}; \xi \in \partial f(x)\}$.

$(\mathbf{P_2})$ Para cada $f, g \in LL(X, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

**Demonstração:**

Para cada $v \in X$

$$(f+g)^0(x;v) = \limsup_{h\rightarrow 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big((f+g)(x+h+\lambda v) - (f+g)(x+h)\Big),$$

isto é

$$\begin{aligned} (f+g)^0(x;v) &= \lim_{\varepsilon\rightarrow 0, \delta\rightarrow 0^+} \Bigg(\sup\Bigg\{\frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h))}{\lambda} \\ &\quad + \frac{g(x+h+\lambda v) - g(x+h)}{\lambda}; h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0,\delta)\Bigg\}\Bigg). \end{aligned}$$

Por propriedade de supremo

$$\begin{aligned}(f+g)^0(x;v) \;\leq\; & \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+}\Big(\sup\Big\{\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h))}{\lambda}; h\in B_\varepsilon, \lambda\in(0,\delta)\Big\}\\ & +\sup\Big\{\frac{g(x+h+\lambda v)-g(x+h))}{\lambda}; h\in B_\varepsilon, \lambda\in(0,\delta)\Big\}\Big)\end{aligned}$$

implicando que

$$(f+g)^0(x;v)\leq \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v)-g(x+h)\Big)+\limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}\Big(g(x+h+\lambda v)-g(x+h)\Big),$$

ou seja

$$(f+g)^0(x;v)\leq f^0(x;v)+g^0(x;v),\ \forall v\in X.$$

Sabendo que $(f+g)^0(x;.)$ é a função suporte de $\partial(f+g)(x)\subset X^*$ e $f^0(x;.)+g^0(x;.)$ é a função suporte de $\partial f(x)+\partial g(x)\subset X^*$, pela Propriedade $(S_3)$

$$\partial(f+g)(x)\subset\partial f(x)+\partial g(x).$$

Mostraremos agora que $\partial(\lambda f)(x)=\lambda\partial f(x),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Para cada $\lambda\in\mathbb{R}$, vamos considerar os seguintes casos:

$1^0$ **caso:** $\lambda=0$, imediato.

$2^0$ **caso:** $\lambda>0$. Neste caso

$$\partial(\lambda f)(x)=\{\xi\in X^*;\langle\xi,v\rangle\leq(\lambda f)^0(x;v),\ \forall v\in X\}$$

donde segue-se

$$\partial(\lambda f)(x)=\{\xi\in X^*;\langle\xi,v\rangle\leq\lambda f^0(x;v),\ \forall v\in X\},$$

daí

$$\partial(\lambda f)(x)=\{\xi\in X^*;\frac{1}{\lambda}\langle\xi,v\rangle\leq f^0(x;v),\ \forall v\in X\},$$

considerando $\xi^*=\frac{1}{\lambda}\xi$, tem-se que

$$\begin{aligned}\partial(\lambda f)(x) &= \{\lambda\xi^*\in X^*;\langle\xi^*,v\rangle\leq f^0(x;v),\ \forall v\in X\}\\ &= \lambda\{\xi^*\in X^*;\langle\xi^*,v\rangle\leq f^0(x;v),\ \forall v\in X\},\end{aligned}$$

implicando que

$$\partial(\lambda f)(x)=\lambda\partial f(x).$$

$3^0$ **caso:** Se $\lambda < 0$, veja que

$$\begin{aligned} \partial(\lambda f)(x) &= \{\xi \in X^*; \langle \xi, v\rangle \leq (\lambda f)^0(x;v),\ \forall v \in X\} \\ &= \{\xi \in X^*; \langle \xi, v\rangle \leq ((-\lambda)(-f))^0(x;v),\ \forall v \in X\}, \end{aligned}$$

donde segue-se, da Propriedade $(A_1)$, que

$$\partial(\lambda f)(x) = \{\xi \in X^*; \langle \xi, v\rangle \leq (-\lambda)(-f)^0(x;v),\ \forall v \in X\},$$

logo, pela Propriedade $(A_6)$, temos

$$\begin{aligned} \partial(\lambda f)(x) &= \{\xi \in X^*; \frac{1}{(-\lambda)}\langle \xi, v\rangle \leq f^0(x;-v),\ \forall v \in X\}, \\ &= \{\xi \in X^*; \langle \frac{1}{\lambda}\xi, -v\rangle \leq f^0(x;-v),\ \forall v \in X\}, \end{aligned}$$

considerando $\xi^* = \frac{1}{\lambda}\xi$, tem-se que

$$\begin{aligned} \partial(\lambda f)(x) &= \{\lambda\xi^* \in X^*; \langle \xi^*, -v\rangle \leq f^0(x;-v),\ \forall v \in X\} \\ &= \lambda\{\xi^* \in X^*; \langle \xi^*, -v\rangle \leq f^0(x;-v),\ \forall v \in X\}, \end{aligned}$$

logo

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

$(\mathbf{P_3})$ A função

$$\begin{aligned} \partial f : X &\rightarrow \mathcal{P}(X^*) \\ x &\mapsto \partial f(x). \end{aligned}$$

é semi-contínua superiormente, isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se $||x - x_0|| < \delta$ e $\xi \in \partial f(x)$, existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$||\xi - \xi_0||_{X^*} < \varepsilon,$$

ou equivalentemente

$$|\langle \xi - \xi_0, v\rangle| < \varepsilon,\ \forall v \in X,\ \text{com } ||v|| \leq 1.$$

**Demonstração:**

Com efeito, suponha por absurdo que exista um $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ e $v_0 \in X$, com $||v|| \leq 1$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$||x_n - x_0|| < \frac{1}{n} \text{ e } \xi_n \in \partial f(x_n),$$

mas

$$|\langle \xi_n - \xi, v_0 \rangle| \geq \varepsilon_0, \ \forall \xi \in \partial f(x_0). \tag{1.34}$$

Seja $N(x_0)$ uma vizinhança de $x_0$ e $K(x_0) > 0$ tal que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)||y_1 - y_2||, \ \forall y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que $x_n \to x_0$, fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \ \forall n \geq n_1.$$

Daí,

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0), \ \forall n \geq n_1,$$

pois $\xi_n \in \partial f(x_n)$ e $x_n \in N(x_0)$, $\forall n \geq n_1$. Defina

$$\overline{K} = \max\{||\xi_1||_{X^*}, ..., ||\xi_{n_1-1}||_{X^*}, K(x_0)\},$$

e observe que

$$||\xi_n||_{X^*} \leq \overline{K}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donde segue-se que existe uma subsequência $(\xi_{n_j})$ de $(\xi_n)$, tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*, \tag{1.35}$$

pois estamos considerando $X$ um espaço separável.

**Afirmação 1.5** $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

De fato, pois

$$\langle \xi_{n_j}, v \rangle \leq f^0(x_{n_j}; v), \ \forall n_j \in \mathbb{N}, v \in X,$$

daí, passando ao limite superior de $n_j \to +\infty$, obtemos

$$\limsup_{n_j \to +\infty} \langle \xi_{n_j}, v \rangle \leq \limsup_{n_j \to +\infty} f^0(x_{n_j}; v), \ \forall v \in X,$$

obtendo da Propriedade $(A_4)$, que

$$\limsup_{n_j \to +\infty} \langle \xi_{n_j}, v\rangle \leq f^0(x_0; v), \ \forall v \in X. \tag{1.36}$$

De (1.35) e (1.36), temos

$$\langle \xi_0, v\rangle \leq f^0(x_0, v), \ \forall v \in X,$$

mostrando, assim que $\xi_0 \in \partial f(x_0)$, provando a Afirmação 1.5.
Sabendo que $\xi_{n_j} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \xi_0$, temos

$$\lim_{n_j \to +\infty} \langle \xi_{n_j}, v\rangle = \langle \xi_0, v\rangle, \ \forall v \in X.$$

Segue-se, por definição de limite pontual, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \xi_{n_j} - \xi_0, v_0\rangle| < \varepsilon_0, \ \forall n_j \geq n_0,$$

contradizendo (1.34). ■

$(\mathbf{P_4})$ Seja

$$\begin{aligned} \partial f : X &\to \mathcal{P}(X^*) \\ x &\mapsto \partial f(x). \end{aligned}$$

A função $\partial f$ é fechado fraco-*, isto é, se $(x_j, \xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que $\xi_j \in \partial f(x_j)$, $\lim x_j = x \in X$ e $\lim \langle \xi_j - \xi_0, v\rangle = 0$, $\forall v \in X$, então $\xi_0 \in \partial f(x)$.
**Demonstração:**
Recorde primeiramente que

$$\langle \xi_j, v\rangle \leq f^0(x_j; v), \ \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } v \in X,$$

logo passando ao limite superior $j \to +\infty$, obtemos

$$\limsup_{j \to +\infty} \langle \xi_j, v\rangle \leq \limsup_{j \to +\infty} f^0(x_j; v), \ \forall v \in X,$$

e portanto, por hipotése e pela Propriedade $(A_4)$

$$\langle \xi_0, v\rangle \leq f^0(x_0, v), \ \forall v \in X,$$

mostrando que $\xi_0 \in \partial f(x_0)$. ■

$(\mathbf{P_5})$ O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

**Demontração:**

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em $X$ tal que

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x_n) < \lambda_f(x_0). \tag{1.37}$$

Sejam $||\xi_n||_{X^*} = \lambda_f(x_n)$, $||\xi_0||_{X^*} = \lambda_f(x_0)$, com $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ e $\xi_n \in \partial f(x_n)$. Já mostramos anteriormente que existe $K(x_0) > 0$

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0),$$

pois $x_n \to x_0$. Daí, existe uma subsequência $(\xi_{n_j}) \subset (\xi_n)$ tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^*,$$

para algum $\xi^* \in \partial f(x_0)$. Assim,

$$\liminf_{n_j \to +\infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi^*||_{X^*},$$

e desde que $||\xi^*||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*}$, pois $\xi^* \in \partial f(x_0)$, temos

$$\liminf_{n_j \to +\infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*},$$

ou seja

$$\liminf_{n_j \to +\infty} \lambda_f(x_{n_j}) \geq \lambda_f(x_0),$$

contradizendo (1.37). ■

$(\mathbf{P_6})$ Sejam $\phi \in C^1([0,1], X)$ e $f \in LL(X, \mathbb{R})$. Então, a função $h = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ é differenciável q.t.p. em $[0,1]$ e

$$h'(t) \leq \max\{\langle \xi, \phi'(t) \rangle; \xi \in \partial f(\phi(t))\}, \text{ q.t.p. em } [0,1].$$

**Demonstração:**

Mostraremos que o funcional $h \in LL([0,1]; \mathbb{R})$.

Dado $t \in [0,1]$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(\phi(s_1)) - f(\phi(s_2))| \leq K(t)||\phi(s_1)) - \phi(s_2)||, \ \forall \phi(s_1), \phi(s_2) \in B_\varepsilon(\phi(t)). \tag{1.38}$$

Observe que

$$|h(s_1)-h(s_2)| = |(f\circ\phi)(s_1)-(f\circ\phi)(s_2)| = |f(\phi(s_1))-f(\phi(s_2))|,$$

donde segue-se de (1.38)

$$|h(s_1)-h(s_2)| \leq K(t)||\phi(s_1)-\phi(s_2)||, \forall \phi(s_1),\phi(s_2)\in B_\varepsilon(\phi(t)). \tag{1.39}$$

Sabendo que $\phi$ é diferenciável, temos pela Desigualdade do Valor Médio

$$\big|\phi(s_1)-\phi(s_2)\big| \leq M|s_1-s_2|. \tag{1.40}$$

Note que para $\delta>0$ pequeno se $s_1,s_2\in[t-\delta,t+\delta]$ temos $\phi(s_1),\phi(s_2)\in B_\varepsilon(\phi(t))$, assim de (1.39) e (1.40)

$$|h(s_1)-h(s_2)| \leq M(t)|s_1-s_2|,\ \forall s_1,s_2\in B_\delta(t),$$

mostrando que $h\in LL([0,1],\mathbb{R})$. Sendo assim $h$ é diferenciável a menos de um conjunto de medida nula em $[0,1]$ (ver Apêndice B). Mostraremos, agora, que

$$h'(t)\leq \max\{\langle w,\phi'(t)\rangle; w\in\partial f(\phi(t))\},\ \text{q.t.p. em } [0,1].$$

Supondo que $h$ é diferenciável em $t_0\in[0,1]$

$$h'(t_0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\Big(f(\phi(t_0+\lambda))-f(\phi(t_0))\Big),$$

implicando, pelo fato de $\phi$ ser diferenciável, que

$$h'(t_0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\Big(f(\phi(t_0)+\lambda\phi'(t_0)+o(\lambda))-f(\phi(t_0))\Big),$$

onde $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{o(\lambda)}{\lambda}=0$, daí

$$h'(t_0)\leq \limsup_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\Big(f(\phi(t_0)+\frac{o(\lambda)}{\lambda}\lambda+\lambda\phi'(t_0))-f(\phi(t_0+\frac{o(\lambda)}{\lambda}\lambda))\Big),$$

logo

$$h'(t_0)\leq f^0(\phi(t_0);\phi'(t_0)),$$

e pelo Lema 1.2

$$h'(t_0)\leq max\{\langle\xi,\phi'(t_0)\rangle;\xi\in\partial f(\phi(t_0))\}.$$

Assim, podemos concluir que

$$h'(t)\leq \max\{\langle w,\phi'(t)\rangle; w\in\partial f(\phi(t))\},\ \text{q.t.p. em } [0,1].\ \blacksquare$$

($\mathbf{P_7}$) Se $f$ é continuamente diferenciável a Fréchet numa vizinhança aberta de $x \in X$, temos

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

**Demonstração:**

Se $f$ é diferenciável a Fréchet numa vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$, então

$$f^0(x;v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \Big( \frac{f(x+h) + \lambda v f'(x+h)) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||}||v|| \Big),$$

onde $\lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} = 0$, implicando que

$$f^0(x;v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} f'(x+h)v.$$

Sendo $f'$ é contínua na vizinhança $V_x$ podemos concluir que

$$f^0(x;v) = f'(x)v \ \forall v \in X. \tag{1.41}$$

De (1.41)

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*; \langle \xi, v\rangle \leq f'(x)v, \ \forall v \in X\},$$

ou equivalentemente

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*; \langle \xi - f'(x), v\rangle \leq 0, \ \forall v \in X\},$$

implicando que $\xi - f'(x) \equiv 0$, (pois $\xi - f'(x) \in X^*$), isto é, $\xi = f'(x)$.
Provando que $\partial f(x) = \{f'(x)\}$. ■

O próximo exemplo mostra que a continuidade de $f'$ não pode ser omitida na Propriedade ($P_7$).

**Exemplo 3:** A função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } \ x \neq 0 \\ 0, \text{ se } \ x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

é diferenciável a Fréchet, com $\partial f(x) \neq \{f'(x)\}$, pois $\partial f(0) = [-1, 1]$. A prova deste exemplo será omitida, pois é análogo ao Exemplo 1, para melhores detalhes veja o livro do Clarke [10].

$(\mathbf{P_8})$ Se $f \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $g \in LL(X,\mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

**Demonstração:**

Sendo $f \in LL(X,\mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação.

**Afirmação 1.6** $(f+g)^0(x;v) \geq f^0(x;v) + g^0(x;v), \ \forall v \in X.$

Sejam $h_n \to 0$ em $X$ e $\lambda_n \to 0^+$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x+h_n+\lambda_n v) - g(x+h_n)}{\lambda_n} = g^0(x;v).$$

Considere,

$$w_n(x,v) = \frac{f(x+h_n+\lambda_n v) - f(x+h_n)}{\lambda_n}$$

e

$$u_n(x,v) = \frac{g(x+h_n+\lambda_n v) - g(x+h_n)}{\lambda_n}.$$

Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x,v) = g^0(x;v)$$

e como $f \in C^1(X,\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(x,v) = f^0(x;v).$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) = f^0(x;v) + g^0(x;v), \tag{1.42}$$

e portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) \leq (f+g)^0(x;v), \tag{1.43}$$

implicando

$$(f+g)^0(x;v) \geq f^0(x;v) + g^0(x;v),$$

mostrando a Afirmação 1.6.

Observando que $(f+g)^0(x;.)$ é a função suporte de $\partial(f+g)(x)$ e $f^0(x;.) + g^0(x;.)$ é a função suporte de $\partial f(x) + \partial g(x)$, segue da Afirmação 1.6 e da Propriedade $(S_3)$

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x),$$

donde segue-se da Propriedade $(P_2)$

$$\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f+g)(x),$$

como queriamos demonstrar. ■

**Definição 1.6** *Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser* ***ponto crítico*** *do funcional $f \in LL(X,\mathbb{R})$ se $0 \in \partial f(x_0)$, isto é*

$$0 \leq f^0(x_0; v), \ \forall v \in X.$$

**Definição 1.7** *O número $c \in \mathbb{R}$ é* ***valor crítico*** *de $f$ se existe um ponto crítico $x_0 \in X$ tal que*

$$f(x_0) = c.$$

**Lema 1.4** *Se $f \in LL(X,\mathbb{R})$ e $x_0$ é ponto de mínimo, tem-se que $x_0$ é ponto crítico de $f$.*

**Demonstração:**

Sendo $x_0$ um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Para cada $\lambda > 0$ e $v \in X$ tal que $x_0 + \lambda v \in B_\varepsilon(x_0)$, observe que

$$f(x_0 + \lambda v) - f(x_0) \geq 0,$$

logo

$$\frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

e portanto

$$\limsup_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

donde segue-se, por definição da função suporte $f^0(x_0; .)$, que

$$f^0(x_0; v) \geq 0, \ \forall v \in X.$$

Logo, $0 \in \partial f(x_0)$. ■

**Lema 1.5** *Sejam $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

*(a)* $f^0(x_0; v) + \varepsilon ||v|| \geq 0, \ \forall v \in X;$

*(b)* $0 \in \partial f(x_0) + \varepsilon B^*$, *onde* $B^* = \{\xi \in X^*; ||\xi||_{X^*} \leq 1\}$

*(c)* $\lambda_f(x_0) \leq \varepsilon$.

**Demonstração:**

Suponha que

$$f^0(x_0; v) + \varepsilon ||v|| \geq 0, \ \forall v \in X. \tag{1.44}$$

Observe que, da Propriedade $(S_2)$

$$f^0(x_0; v) + \varepsilon ||v|| = \sigma(\partial f(x_0), v) + \varepsilon \sigma(B^*, v),$$

e de $(S_5)$

$$\begin{aligned} f^0(x_0; v) + \varepsilon ||v|| &= \sigma(\partial f(x_0), v) + \sigma(\varepsilon B^*, v), & (1.45) \\ &= \sigma(\partial f(x_0) + \varepsilon B^*, v). & (1.46) \end{aligned}$$

De (1.44) e (1.46)

$$\sigma(\partial f(x_0) + \varepsilon B^*, v) \geq 0 = \sigma(\{0\}, v), \ \forall v \in X.$$

Desde que $\partial f(x_0) + \varepsilon B^*$ e $\{0\}$ são conjuntos convexos e fechados fraco-*, de $(S_3)$

$$\{0\} \subset \partial f(x_0) + \varepsilon B^*,$$

isto é $0 \in \partial f(x_0) + \varepsilon B^*$.

Suponha agora, que exista um $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ e $\eta \in B^*$ tais que

$$\xi_0 + \varepsilon \eta = 0. \tag{1.47}$$

Note que,

$$\lambda_f(x_0) = \min\{||\xi||_{X^*}; \xi \in \partial f(x_0)\} \leq ||\xi_0||_{X^*}. \tag{1.48}$$

De (1.47) e (1.48)

$$\lambda_f(x_0) \leq |\varepsilon| ||\eta||_{X^*},$$

donde segue-se, pelo fato de $\eta \in B^*$, que

$$\lambda_f(x_0) \leq \varepsilon.$$

Para finalizar este lema, mostraremos que (c) implica em (a).

Seja $\lambda_f(x_0) = ||\xi_0||_{X^*}$, onde $\xi_0 \in \partial f(x_0)$. Por hipótese

$$||\xi_0||_{X^*} \leq \varepsilon,$$

logo

$$-\varepsilon||v|| \leq \langle \xi_0, v \rangle \leq \varepsilon||v||, \ \forall v \in X, \setminus\{0\},$$

de onde segue

$$\langle \xi_0, v \rangle + \varepsilon||v|| \geq 0, \ \forall v \in X.$$

Desde que $\xi_0 \in \partial f(x_0)$, $f^0(x_0, v) \geq \langle \xi_0, v \rangle$ e portanto

$$0 \leq \varepsilon||v|| + f^0(x_0; v) \ \forall v \in X,$$

como queriamos mostrar. ■

**Lema 1.6** *Sejam $f \in LL(X, \mathbb{R})$ e $g$ um funcional definido por*

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(t) = f(x_t) = f(x + t(y - x)). \end{array}$$

*Então $g$ é Lipschitz e*

$$\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x \rangle,$$

*onde $\langle \partial f(x_t), y - x \rangle = \{\langle \phi, y - v \rangle; \phi \in \partial f(x_t)\}$.*

**Demonstração:**

Observe que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K||y_1 - y_2||, \ \forall y_1, y_2 \in [x, y],$$

onde $K > 0$ (pois por hipotése $f$ é Lipschitz em $[x, y]$). Daí,

$$\begin{array}{rcl} |g(t_1) - g(t_2)| & = & |f(x + t_1(y - x)) - f(x + t_2(y - x))| \\ & \leq & K||x + t_1(y - x) - (x + t_2(y - x))||, \end{array}$$

implicando que

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq K||(t_1 - t_2)(y - x))|| = M|t_1 - t_2|, \ \forall t_1, t_2 \in [0, 1], \tag{1.49}$$

onde $M = K||y - x||$, mostrando que $g$ é Lipschitz em $[0, 1]$, o que implica $g \in LL([0, 1], \mathbb{R})$.

Observe agora, que dado $v \in \mathbb{R}$

$$g^0(t, v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\big(g(t + h + \lambda v) - g(t + h)\big),$$

e portanto

$$g^0(t;v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+(t+h+\lambda v)(y-x)) - f(x+(t+h)(y-x))\Big),$$

implicando que

$$g^0(t;v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+t(y-x)+\tilde{h}+\lambda v(y-x)) - f(x+t(y-x)+\tilde{h})\Big),$$

onde $\tilde{h} = h(y-x)$. Assim,

$$g^0(t;v) \leq f^0(x+t(y-x), v(y-x)) = f^0(x_t, v(y-x)),\ \forall v \in \mathbb{R}. \tag{1.50}$$

Do Lema 1.2 e de (1.50), temos para cada $\xi \in \partial g(t)$

$$\xi v \leq f^0(x_t, v(y-x)),\ \forall v \in \mathbb{R},$$

Em particular para $v = 1$ e $v = -1$ temos

$$\xi \leq f^0(x_t,(y-x)) \text{ e } -\xi \leq f^0(x_t, -(y-x)).$$

Do Lema 1.2, segue que

$$\min\{\langle \phi,(y-x)\rangle; \phi \in \partial f(x_t)\} \leq \xi \leq \max\{\langle \phi,(y-x)\rangle; \phi \in \partial f(x_t)\}. \tag{1.51}$$

Note que o conjunto $\langle \partial f(x_t),(y-x)\rangle \subset \mathbb{R}$ é convexo (pois de $(P_1)$, $\partial f(x_t)$ é um conjunto convexo). Sendo $\langle \partial f(x_t),(y-x)\rangle \subset \mathbb{R}$ convexo, de (1.51) existe um $\xi^* \in \partial f(x_t)$ tal que

$$\xi = \langle \xi^*,(y-x)\rangle$$

o que implica $\xi \in \langle \partial f(x_t), y-x\rangle$. Assim, $\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y-x\rangle$, demonstrando assim o lema. ■

O teorema que mostraremos a seguir é conhecido como Teorema do Valor Médio de Lebourg.

**Teorema 1.8** *Sejam $f \in LL(X,\mathbb{R})$ e $x, y \in X$ tais que $f$ é Lipschitz em $[x,y]$. Então existe um ponto*

$$x_t = x + t(y-x),\ 0 < t < 1,$$

*e $\xi \in \partial f(x_t)$ tal que*

$$f(y) - f(x) = \langle \xi, y-x\rangle.$$

**Demonstração:**

Começamos a nossa demonstração definindo a função

$$\begin{array}{rcl} \theta : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \theta(t) = g(t) + t(f(x) - f(y)), \end{array}$$

onde $g$ foi dada no Lema 1.6.

Dados $t_1, t_2 \in [0,1]$, temos

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| \leq |g(t_1) - g(t_2)| + |f(x) - f(y)||t_1 - t_2|,$$

logo por (1.49)

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| \leq M_1|t_1 - t_2|, \ \forall t_1, t_2 \in [0,1],$$

onde $M_1 = M + |f(x) - f(y)|$, mostrando que a função $\theta$ é Lipschitz.

Sendo $\theta$ uma função contínua a valores reais, existe um ponto $t_0 \in [0,1]$ que é ponto de mínimo de $\theta$. Segue pelo Lema 1.4, que $0 \in \partial\theta(t_0)$.

Definindo $\eta(t) = t(f(x) - f(y))$, temos $\eta \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ e

$$\partial\eta(t) = \{\eta'(t)\} = \{f(x) - f(y)\}.$$

Note que de $(P_7)$

$$0 \in \partial\theta(t_0) = \partial(g + \eta)(t_0),$$

implicando, pela Propriedade $(P_8)$ que

$$0 \in \partial g(t_0) + \partial\eta(t_0) = \partial g(t_0) + \{f(x) - f(y)\}.$$

Desde que $\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x\rangle$ (ver Lema 1.6) temos

$$0 \in \langle \partial f(x_{t_0}), y - x\rangle + \{f(x) - f(y)\}.$$

Sendo assim, vai existir um $\xi \in \partial f(x_{t_0})$ tal que

$$0 = \langle \xi, y - x\rangle + f(x) - f(y),$$

isto é

$$f(y) - f(x) = \langle \xi, y - x\rangle.$$

Provando o Teorema 1.8. ■

**Teorema 1.9** *(Regra da Cadeia) Seja $f : X \to Y$ onde $X$ e $Y$ são espaços de Banach. Se $f$ é de classe $C^1$, $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz e $F \equiv g \circ f$, para cada $x \in X$ temos*

$$\partial F(x) \subset \partial g(f(x)) \circ Df(x). \tag{1.52}$$

**Demonstração:**

A inclusão (1.52), significa que para todo $\xi \in \partial F(x) \subset X^*$, existe $\widehat{\xi} \in \partial g(f(x)) \subset Y^*$ tal que

$$\langle \xi, v \rangle = \langle \widehat{\xi}, Df(x)v \rangle = \langle Df(x)^* \widehat{\xi}, v \rangle, \ \forall v \in X,$$

onde $Df(x)^* : Y^* \to X^*$ é o adjunto de $Df(x) : X \to Y$. Veja que

$$\partial g(f(x)) \circ Df(x) = \{Df(x)^* \widehat{\xi} \in X^*; \widehat{\xi} \in \partial g(f(x)) \subset Y^*\}.$$

Sejam $x, v \in X$ e

$$q_0(x, v) = \max\{\langle \xi, Df(x)v \rangle; \xi \in \partial g(f(x))\}.$$

Afirmamos que se $F^0(x; v) \leq q_0(x, v)$ $\forall v \in X$, então $\partial F(x) \subset \partial g(f(x)) \circ Df(x)$.
De fato, basta observar que $q_0(x, v)$ é a função suporte do conjunto $\partial g(f(x)) \circ Df(x)$, isto é, para cada $v \in X$, $\sigma(\partial g(f(x)) \circ Df(x), v) = q_0(x, v)$.
Para $v = 0$, a desigualdade $F^0(x; v) \leq q_0(x, v)$ é imediata.
Sendo assim, considere $v \in X \setminus \{0\}$. Dado $\varepsilon > 0$ defina

$$q_\varepsilon(x, v) = \max\{\langle \xi, Df(y)v \rangle; \xi \in \partial g(B_\varepsilon(f(x))), y \in B_\varepsilon(x)\}.$$

Sabendo que $g$ é Lipchitz e $f$ é de classe $C^1$ a função $F \equiv g \circ f$ é Lipschitz em $\overline{B}_1(x)$. Por propriedade de limite superior, existem $h_\varepsilon \in X$ e $\lambda_\varepsilon > 0$, com $h_\varepsilon \to 0$ e $\lambda_\varepsilon \to 0$ tais que $x + h_\varepsilon \in B_\varepsilon(x) \subset X$, $x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v \in B_\varepsilon(x) \subset X$ e

$$F^0(x; v) - \varepsilon \leq \frac{F(x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v) - F(x + h_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon}, \tag{1.53}$$

com $f(x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v), f(x + h_\varepsilon) \in B_\varepsilon(f(x))$ (isto é possivel pois $f$ é contínua).
Sabendo que $g$ é Lipschitz, segue, pelo Teorema do Valor Médio de Lebourg, que

$$\begin{aligned} F(x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v) - F(x + h_\varepsilon) &= g(f(x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v)) - g(f(x + h_\varepsilon)) \\ &= \langle \xi, f(x + h_\varepsilon + \lambda_\varepsilon v) - f(x + h_\varepsilon) \rangle, \end{aligned}$$

onde $\xi \in \partial g(u)$, $u \in [f(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v), f(x+h_\varepsilon)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Sendo $f$ de classe $C^1$

$$F(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - F(x+h_\varepsilon) = \langle \xi, Df(x+h_\varepsilon)\lambda_\varepsilon v + o(x+h_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v)\rangle,$$

implicando na igualdade

$$\frac{F(x+h_\varepsilon+\lambda_\varepsilon v) - F(x+h_\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon} = \langle \xi, Df(x+h_\varepsilon)v\rangle + \langle \xi, \frac{o(x+h_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v)}{\lambda_\varepsilon ||v||}||v||\rangle, \quad (1.54)$$

onde $\lim\limits_{||\lambda_\varepsilon v|| \to 0} \dfrac{o(x+h_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v)}{\lambda_\varepsilon ||v||} = 0$. De (1.53) e (1.54)

$$F^0(x;v) - \varepsilon \leq \langle \xi, Df(x+h_\varepsilon)v\rangle + \langle \xi, \frac{o(x+h_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v)}{\lambda_\varepsilon ||v||}||v||\rangle, \ \forall \varepsilon \approx 0. \quad (1.55)$$

Desde que $x + h_\varepsilon \in B_\varepsilon(x)$ temos

$$f^0(x;v) - \varepsilon \leq q_\varepsilon(x,v) + \langle \xi, \frac{o(x+h_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v)}{\lambda_\varepsilon ||v||}||v||\rangle,$$

logo passando ao limite $\lambda_\varepsilon \to 0$ em (1.55)

$$F^0(x;v) - \varepsilon \leq \langle \xi, D_s f(x+h_\varepsilon)v\rangle \leq q_\varepsilon, \ \forall \varepsilon \approx 0, \quad (1.56)$$

pois $x + h_\varepsilon \in B_\varepsilon(x)$.

**Afirmação 1.7** $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} q_\varepsilon(x,v) = q_0(x,v), \ \forall x, v \in X$.

Para mostrar a Afirmação 1.7, basta mostrar que dado $\delta' > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$q_0(x,v) - \delta' \leq q_\varepsilon(x,v) \leq q_0(x,v) + \delta', \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (1.57)$$

Por definição,

$$q_0(x,v) \leq q_\varepsilon(x,v), \ \forall \varepsilon > 0, \ \forall x, v \in X. \quad (1.58)$$

Dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$Df(B_\varepsilon(x)) \subset B_\delta(Df(x)), \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1), \quad (1.59)$$

pois $Df$ é contínua. Sabendo que $\partial f$ é semi-contínua superiormente pela Propriedade $(P_3)$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $y \in B_{\varepsilon_2}(f(x))$ e $\xi \in \partial g(y)$, isto é $\xi \in \partial g(B_{\varepsilon_2}(f(x)))$, satisfazendo

$$||\xi - \xi_0||_{X^*} < \delta,$$

para algum $\xi_0 \in \partial g(f(x))$, ou seja

$$\xi \in B_\delta + \{\xi_0\} \subset B_\delta + \partial g(f(x)).$$

Mostrando assim que existe $\varepsilon_2 > 0$, tal que

$$\partial g(f(x) + \varepsilon_2 B) \subset \partial g(f(x)) + \delta B. \tag{1.60}$$

Defina $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, observe que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, temos de (1.59) e (1.60)

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &= \max\{\langle \varepsilon, Df(y)v\rangle; \xi \in \partial g(f(x) + B_\varepsilon), y \in B_\varepsilon(x)\}, \\ &\leq \sup\{\langle \xi, Df(y)v\rangle; \xi \in \Big(\partial g(f(x)) + \delta B\Big), Df(y) \in \Big(\delta B + \{D(f(x))\}\Big)\}, \end{aligned}$$

donde segue-se, por propriedade de supremo, que

$$\begin{aligned} q_\varepsilon \leq\ & \sup\{\langle \xi, Df(y)v\rangle; \xi \in \partial g(f(x)), Df(y) \in \{D_s(f(x))\}\} \\ & + \sup\{\langle \xi, Df(y)v\rangle; \xi \in \partial g(f(x)), Df(y) \in \delta B\} \\ & + \sup\{\langle \xi, Df(y)v\rangle; \xi \in \delta B, Df(y) \in \{D(f(x))\}\}, \\ & + \sup\{\langle \xi, Df(y)v\rangle; \xi \in \delta B, Df(y) \in \delta B\}, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} q_\varepsilon \leq\ & q_0 + \sup\{||\xi||_{X^*}||Df(y)v||; \xi \in \partial g(f(x)), Df(y) \in \delta B\} + \sup\{\langle \xi, Df(x)v\rangle; \xi \in \delta B\} \\ & + \sup\{||\xi||_{X^*}||Df(y)v||; \xi \in \delta B, Df(y) \in \delta B\}. \end{aligned}$$

Usando $(P_1)$, Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice A) e propriedade de supremo,

$$\begin{aligned} q_\varepsilon &\leq q_0 + K(f(x)) \sup\{||Df(y)v||; Df(y) \in \delta B\} + \delta||Df(x)v|| \\ &\quad + \delta \sup\{||Df(y)v||; Df(y) \in B\}, \\ &\leq q_0 + K(f(x))\delta||v||_Y + \delta||Df(x)||_*||v||_Y + \delta^2||v||_Y, \end{aligned}$$

concluindo que

$$q_\varepsilon \leq q_0 + \delta||v||_Y\Big(K(f(x)) + ||Df(x)||_* + \delta\Big),\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Considerando $0 < \delta < \dfrac{\delta'}{||v||_Y\Big(K(f(x)) + ||Df(x)||_*\Big)} > 0$, tem-se

$$q_\varepsilon \leq q_0 + \delta',\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

mostrando a Afirmação 1.7. Note que a norma $||.||_*$ aqui colocada é a norma do espaço das aplicações lineares $X \to Y$.

Passando ao limite $\varepsilon \to 0$ em (1.56), temos da Afirmação 1.7

$$F^0(x;v) \leq q_0(x,v), \ \forall v \in X,$$

como queriamos mostrar. ■

**Corolário 1.10** *Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach $Y$. Se $X$ é um espaço de Banach imerso continuamente em $Y$ e $X$ é um subespaço denso em $Y$, temos*

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \ \forall x \in X.$$

**Demonstração:**

Segue, pelo fato de $X \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} Y$, que existe $K > 0$ tal que

$$||u||_Y \leq K||u||_X, \forall u \in X.$$

Sendo assim, a aplicação

$$\begin{aligned} id : X &\to Y \\ x &\mapsto id(x) = x, \end{aligned}$$

é linear e contínua, logo $id$ é de classe $C^\infty$ com $Did(x) = I$, onde $I$ é a aplicação identidade. Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x) \ \forall x \in X,$$

a qual pertence a $LL(X, \mathbb{R})$ (pois $g$ e $id$ são Lipschitz). Usando o Teorema da Regra da Cadeia

$$\partial F(x) \subset \partial g(id(x)) \circ D(id(x)),$$

ou seja

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \ \forall x \in X. \ \blacksquare$$

**Lema 1.7** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional convexo, a derivada direcional*

$$f'(x;v) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda},$$

*existe para todo $v \in X$.*

**Demonstração:**

Dado $v \in X$, defina a seguinte função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x + tv)$ e observe que a mesma é uma função convexa, pois

$$g(ta + (1-t)b) = f(x + (t + (1-t)b)v) = f(t(x + av) + (1-t)(x + bv)),$$

e sendo $f$ um funcional convexo

$$g(ta + (1-t)b) \leq tf(x + av) + (1-t)f(x + bv) = tg(a) + (1-t)g(b),$$

mostrando que $g$ é convexo.

Mostraremos agora que $g$ possui derivada lateral a direita. Dado $c \in \mathbb{R}$, defina a aplicação $\phi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_c(t) = \frac{g(t) - g(c)}{t - c}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Afirmação 1.8** *$\phi_c$ é uma função monótona não-decrescente no intervalo $J = \mathbb{R} \cap (c, +\infty)$.*

De fato, sejam $a, b \in J$, com $c < a \leq b$. Sendo $g$ uma função convexa

$$g(x) \leq \Big(\frac{g(b) - g(c)}{b - c}\Big)(x - c) + g(c), \ \forall x \in (c, b],$$

o que implica

$$\frac{g(a) - g(c)}{a - c} \leq \frac{g(b) - g(c)}{b - c},$$

pois $a \in (c, b]$. Portanto $\phi_c(a) \leq \phi_c(b)$, mostrando assim que $\phi_c|_J$ monótona não-decrescente.

Note que $\phi_c|_J$ é limitado inferiormente, pois para $d < c$, considere $l$ a função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $d$ e $x$, onde $x \in J$. Logo, $l$ pode ser dada por

$$l(z) = \frac{g(d) - g(x)}{d - x}(z - x) + g(x),$$

ou

$$l(z) = \frac{g(d) - g(x)}{d - x}(z - d) + g(d).$$

Segue, pelo fato de $g$ ser convexo e $c \in (d, x)$, que

$$g(c) \leq \frac{g(d) - g(x)}{d - x}(c - x) + g(x)$$

e

$$g(c) \leq \frac{g(d)-g(x)}{d-x}(c-d)+g(d),$$

isto é

$$\frac{g(c)-g(x)}{(c-x)} \geq \frac{g(d)-g(x)}{d-x}, \tag{1.61}$$

pois $(c-x)<0$, e

$$\frac{g(c)-g(d)}{(c-d)} \leq \frac{g(d)-g(x)}{d-x}. \tag{1.62}$$

De (1.61) e (1.62)

$$\frac{g(c)-g(d)}{(c-d)} \leq \frac{g(d)-g(x)}{d-x} \leq \frac{g(c)-g(x)}{(c-x)}, \ \forall x \in J.. \tag{1.63}$$

Portanto, $\phi_c(d) \leq \phi_c(x)$, $\forall x \in J$, implicando que $\phi_c|_J$ é limitada inferiormente.

Sabendo que $\phi_c|_J$ é limitada inferiormente e monótona não-decrescente, temos que o limite lateral

$$\lim_{x\to c^+} \phi_c|_J(x)$$

existe, ou seja

$$\lim_{\lambda\to c^+} \frac{g(\lambda)-g(c)}{\lambda-c}, \ \forall c \in \mathbb{R},$$

existe. Considerando $c=0$, segue que

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{g(\lambda)-g(0)}{\lambda-0} = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(x+\lambda v)-f(x)}{\lambda} = f'(x;v)$$

Mostrando que a derivada direcional $f'(x;v)$ existe para todo $v \in X$. ■

**Lema 1.8** *Se $f: X \to \mathbb{R}$ um funcional Localmente Lipschitz e convexo, temos que*

$$f'(x;v) = f^0(x;v) \ \forall v \in X$$

**Demonstração:**

Sejam $\delta > 0$ e $v \in X$, logo

$$\begin{aligned} f^0(x;v) &= \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda} \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big( \sup\{ \frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}; h \in B_{\varepsilon\delta}, \lambda \in (0,\varepsilon)\}\Big), \end{aligned}$$

donde segue, pelo fato da função $\frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}$ ser limitada para todo $\lambda \in (0,\varepsilon)$ e $h \in B_\varepsilon\delta$, com $\varepsilon \approx 0$, que

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big( \sup_{h\in B_{\varepsilon\delta}} \Big( \sup_{\lambda\in(0,\varepsilon)} \frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda} \Big)\Big).$$

Mostramos, através da observação anterior, que a função $\phi_0(\lambda) = \frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda}$ é monótona não-decrescente para todo $\lambda > 0$, assim

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big( \sup_{h \in B_{\varepsilon\delta}} \frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+h)}{\varepsilon} \Big). \tag{1.64}$$

Veja que

$$\Big|\frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+\varepsilon v)}{\varepsilon} - \frac{f(x+h) - f(x)}{\varepsilon}\Big| \leq \Big|\frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+\varepsilon v)}{\varepsilon}\Big| + \Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{\varepsilon}\Big|,$$

sabendo que $f \in LL(X, \mathbb{R})$, temos para algum $R > 0$

$$\Big|\frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+\varepsilon v)}{\varepsilon} - \frac{f(x+h) - f(x)}{\varepsilon}\Big| \leq \frac{K(x)}{\varepsilon}||h|| + \frac{K(x)}{\varepsilon}||h||,$$

considerando $h \in B_{\varepsilon\delta}$, tem-se que

$$\Big|\frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+\varepsilon v)}{\varepsilon} - \frac{f(x+h) - f(x)}{\varepsilon}\Big| < 2K(x)\delta, \ \forall \delta > 0,$$

$\forall x + h + \varepsilon v, x + h, x + \varepsilon v \in B_R(x)$. Portanto,

$$\Big|\frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+h)}{\varepsilon} - \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}\Big| < 2\delta K(x), \ \forall h \in B_{\varepsilon\delta}, \delta > 0, \text{ e } \varepsilon \approx 0.$$

implicando, por propriedade de módulo, que

$$\frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+h)}{\varepsilon} < 2\delta K(x) + \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}, \ \forall h \in B_{\varepsilon\delta}, \delta > 0, \text{ e } \varepsilon \approx 0,$$

logo

$$\sup_{h \in B_{\varepsilon\delta}} \frac{f(x+h+\varepsilon v) - f(x+h)}{\varepsilon} \leq 2\delta K(x) + \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}, \ \forall \delta > 0 \text{ e } \varepsilon \approx 0,$$

passando, agora, ao limite $\varepsilon \to 0^+$, obtemos de (1.64)

$$f^0(x;v) \leq 2\delta K(x) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}, \ \forall \delta > 0,$$

donde segue-se, da observação anterior, que

$$f^0(x;v) \leq 2\delta K(x) + f'(x;v), \ \forall \delta > 0,$$

com isto, podemos concluir que

$$f^0(x;v) \leq f'(x;v), \ \forall v \in X. \tag{1.65}$$

Veja que

$$f^0(x;v) = \limsup_{h\to 0,\lambda\downarrow 0} \frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda} = f'(x;v), \tag{1.66}$$

para todo $v \in X$.

De (1.65) e (1.66)

$$f^0(x;v) = f'(x;v),$$

como queriamos demonstrar. ■

# Capítulo 2

# Gradientes Generalizados sobre o espaço $L^p(\Omega)$

Neste capítulo pretendemos demonstrar algumas propriedades envolvendo funcionais definidos em $L^p(\Omega)$ e gradientes generalizados.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ suave, e $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável com **crescimento subcrítico**, isto é, satisfaz a seguinte condição

$$|\phi(x,t)| \leq a + b|t|^p, \ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde $a > 0$ e $b > 0$ são constantes e

$$\begin{aligned} 0 \leq \ & p \ \leq \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1, \text{ se } N \geq 3, \text{ e} \\ 0 \leq \ & p \ < +\infty, \text{ se } N = 1, 2. \end{aligned}$$

**Definição 2.1** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ um domínio limitado. Dizemos que $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função de Carathéodory**, quando:*

**(i)** *$F(.,s)$ é mensurável em $\Omega$ para todo $s \in \mathbb{R}$ fixado*

**(ii)** *$F(x,.)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$.*

**Lema 2.1** *Seja $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com crescimento subcrítico. Supondo que $\phi(.,s)$ seja uma função mensurável em $\Omega$ para todo $s \in \mathbb{R}$ fixado e $\phi(x,.)$ contínua a menos de um conjunto de medida nula para todo $x \in \Omega$, o funcional $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s)ds,$$

*é uma função Carathédory.*

**Demonstração:**

Mostraremos agora que a função $\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s)ds$ é contínua em todo ponto da reta.

Dados $t \in \mathbb{R}_+$ e $(t_n)$ uma sequência tal que $t_n \to t^+$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(x,t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s)ds. \tag{2.1}$$

Sendo $\phi$ uma função com crescimento subcrítico, temos

$$|\phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s)| = |\phi(x,s)||\chi_{[0,t_n]}(s)| \leq |a+b|s|^p||\chi_{[0,t_n]}(s)|,$$

onde $a, b > 0$, sabendo que $t_n \to t^+$, existe $c > 0$ tal que $0 \leq t_n \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo segue que

$$|\phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s)| \leq |a+b|s|^p|\chi_{[-c,c]}(s), \tag{2.2}$$

onde $|a+b|s|^p|\chi_{[-c,c]} \in L^1(\mathbb{R})$ (pois $|a+b|s|^p|$ é uma função contínua).

**Afirmação 2.1** $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s) = \phi(x,s)\chi_{[0,t]}(s)$, *q.t.p. em* $\mathbb{R}$.

De fato, considerando $t > 0$, temos os seguintes casos:

$1^0$ **caso:** $s \leq 0$:

Note que para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que

$$0 = \Big|\phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s) - \phi(x,s)\chi_{[0,t]}(s)\Big| < \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$2^0$ **caso:** $s > t$:

Neste caso existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n < s, \ \forall n \geq n_0.$$

Daí, para todo $\varepsilon > 0$

$$0 = \Big|\phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s) - \phi(x,s)\chi_{[0,t]}(s)\Big| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

$3^0$ **caso:** $s \in (0,t)$.

Neste caso existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n > s \ \forall n \geq n_0,$$

portanto $s \in [0, t_n]$, $\forall n \geq n_0$. Donde segue-se que para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$0 = \left| \phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s) - \phi(x,s)\chi_{[0,t]}(s) \right| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Para $s = t$ não podemos garantir nada, sendo assim podemos concluir pelos três casos aqui mostrado que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi(x,s)\chi_{[0,t_n]}(s) = \phi(x,s)\chi_{[0,t]}(s), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R},$$

mostrando assim a Afirmação 2.1.

De (2.2), da Afirmação 2.1, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice C) e de (2.1)

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(x, t_n) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,s)\chi_{[0,t]}(s)ds = \Phi(x,t).$$

Mostrando assim que $\Phi(x, .)$ é contínua em $\mathbb{R}_+$ para todo $x \in \Omega$. Para $t \in \mathbb{R}_-$ é análogo ao que foi feito anteriormente, por isto podemos concluir que $\Phi(x, .)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega$.

**Afirmação 2.2** *A função $\Phi(x,t)$ é mensurável em relação a $x$, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Por hipotése $\phi(., s)$ é mensurável para cada $s$ fixado. Note que $\phi(x, s)$ é integrável a Riemann em relação a $s$, pois por hipotése para cada $x \in \Omega$, $\phi(x, .)$ é contínua a menos de um conjunto de medida nula.

Sendo assim, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, fixe a seguinte partição

$$P_n = \left\{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, ..., \frac{(n-1)t}{n}, t\right\} \subset [0, t].$$

Assim,

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s)ds = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \phi(x, \frac{it}{n})\frac{t}{n} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde $\phi(x, \frac{it}{n})$ é mensurável para cada $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Logo, $\phi(x, \frac{it}{n})\frac{t}{n}$ também é mensurável (pois produto de uma constante por uma função mensurável é mensurável), o que implica

$$\sum_{i=0}^{n} \phi(x, \frac{it}{n})\frac{t}{n}$$

é mensurável (pois soma de funções mensuráveis é mensurável). Portanto,

$$\Phi(x,t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \phi(x, \frac{it}{n})\frac{t}{n} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

de onde concluimos que $\Phi$ é uma função mensurável, pois limite de funções mensuráveis é mensurável. Mostrando que a função

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s)ds,$$

é mensurável em relação a variável $x$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
Sabendo que

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s)ds,$$

satisfaz as condições (i) e (ii) de Carathéodory, podemos concluir que $\Phi$ é uma função de Carathéodory, demonstrando assim o lema. ■

**Lema 2.2** *Considere o seguinte funcional*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : L^{p+1}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \Psi(u) = \displaystyle\int_\Omega \Phi(x,u(x))dx. \end{array}$$

*onde* $\Phi$ *é dado pelo Lema 2.1. Então* $\Psi \in LL(L^{p+1}(\Omega), \mathbb{R})$ *e* $\Phi(x,.) \in LL(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

**Demonstração:**

Dado $w \in L^{p+1}(\Omega)$, fixe $R > 0$. Para cada $u, v \in B_R(w)$ observe que

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| = \Big| \int_\Omega \Big( \int_0^{u(x)} \phi(x,t)dt\Big)dx - \int_\Omega \Big( \int_0^{v(x)} \phi(x,t)dt\Big)dx\Big|,$$

o que implica

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq \int_\Omega \Big| \int_0^{u(x)} \phi(x,t)dt + \int_{v(x)}^0 \phi(x,t)dt\Big|dx,$$

considerando $\theta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$, temos

$$\begin{aligned} |\Psi(u) - \Psi(v)| &\leq \int_\Omega \Big| \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} \phi(x,t)dt\Big|dx \\ &\leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |\phi(x,t)|dtdx. \end{aligned}$$

Usando o crescimento subcrítico de $\phi$, tem-se

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} (a + b|t|^p)dtdx,$$

ou ainda

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq a \int_{\Omega} (\theta(x) - \eta(x))dx + b \int_{\Omega} \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |t|^p dt dx.$$

Note que $(\theta(x) - \eta(x)) = |u(x) - v(x)|$, de onde segue pelo fato de $L^{p+1}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^1(\Omega)$

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + b \int_{\Omega} \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |t|^p dt dx, \tag{2.3}$$

para algum $C > 0$. Observe, agora que para $p > 1$, a função

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto G(s) = \frac{s|s|^p}{p+1}, \end{aligned}$$

é diferenciável e

$$G'(s) = |s|^p \ \forall s \in \mathbb{R},$$

usando a ultima igualdade em (2.3)

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + \int_{\Omega} \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} G'(t) dt dx,$$

implicando que

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + \int_{\Omega} \Big( G(\theta(x)) - G(\eta(x)) \Big) dx.$$

Sabendo que a função $G$ é diferenciável, segue pelo Teorema do Valor Médio

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + \int_{\Omega} \big( |u(x)|^p + |v(x)|^p \big) \Big( \theta(x) - \eta(x) \Big) dx,$$

logo

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + \int_{\Omega} |u(x)|^p |u(x) - v(x)| dx + \int_{\Omega} |v(x)|^p |u(x) - v(x)| dx,$$

o que implica pela Desigualdade de Hölder (ver Apêndice C)

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + ||u^p||_{\frac{p+1}{p}} ||u - v||_{p+1} + ||v^p||_{\frac{p+1}{p}} ||u - v||_{p+1},$$

consequentemente

$$|\Psi(u) - \Psi(v)| \leq aC||u - v||_{p+1} + (||u - w + w||_{p+1}^p + ||v - w + w||_{p+1}^p) ||u - v||_{p+1},$$

utilizando Desigualdade de Minkowski (ver Apêndice C), tem-se que

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq (aC+\big((||u-w||_{p+1}+||w||_{p+1})^p+(||v-w||_{p+1}+||w||_{p+1})^p\big)||u-v||_{p+1},$$

assim

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq (aC+2(R+||w||_{p+1})^p)||u-v||_{p+1},\ \forall u,v \in B_R(w).$$

Considerando, $M = aC+2(R+||w||_{p+1})^p$ concluímos que

$$|\Psi(u)-\Psi(v)| \leq M||u-v||_{p+1},\ \forall u,v \in B_R(w),$$

mostrando assim que $\Psi \in LL(L^{p+1}(\Omega),\mathbb{R})$.
Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, fixe $\delta > 0$. Para cada $t_1, t_2 \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, temos

$$|\Phi(x,t_1)-\Phi(x,t_2)| = \Big|\int_0^{t_1}\phi(x,s)ds - \int_0^{t_2}\phi(x,s)ds\Big|,$$

implicando que

$$|\Phi(x,t_1)-\Phi(x,t_2)| = \Big|\int_{t_2}^{t_1}\phi(x,s)ds\Big|,$$

considerando $\alpha = \min\{t_1,t_2\}$ e $\beta = \max\{t_1,t_2\}$

$$|\Phi(x,t_1)-\Phi(x,t_2)| \leq \int_\alpha^\beta |(a+b|s|^p)ds.$$

Utilizando a mesma idéia usada para mostrar que $\Psi$ é Localmente Lipschitz, temos

$$|\Phi(x,t_1)-\Phi(x,t_2)| \leq a|t_1-t_2| + b(G(\beta)-G(\alpha)),$$

pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [\alpha,\beta]$ tal que

$$|\Phi(x,t_1)-\Phi(x,t_2)| \leq \big(a+bG'(c)\big)|t_1-t_2| = \big(a+b|c|^p\big)|t_1-t_2|,$$

somando e subtraindo por $t_0$, concluimos

$$|\Phi(x,t_1)-\Phi(x,t_2)| \leq \big(a+b(\delta+|t_0|)^p\big)|t_1-t_2|\ \forall t_1,t_2 \in [t_0-\delta,t_0+\delta],$$

mostrando que $\Phi(x,.) \in LL(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Dados $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denotemos as seguintes funções:

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) = \operatorname{ess\,inf}\{\phi(x,s); |s-t| < \varepsilon\},$$

$$\overline{\phi}_\varepsilon(x,t) = \operatorname{ess\,sup}\{\phi(x,s); |s-t| < \varepsilon\},$$

$$\underline{\phi}(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underline{\phi}_\varepsilon(x,t)$$

e

$$\overline{\phi}(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overline{\phi}_\varepsilon(x,t).$$

**Lema 2.3** *Sejam $\Phi$ e $\phi$ funções dadas no Lema 2.1*

$$\Phi^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{\phi}(x,t)v, & se\ v > 0 \\ \underline{\phi}(x,t)v, & se\ v < 0. \end{cases}$$

**Demontração:**

Sabemos que

$$\Phi^0((x,t);v) = \limsup_{h\to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(x,t+h+\lambda v) - \Phi(x,t+h)}{\lambda},$$

utilizando a definição de $\Phi$

$$\Phi^0((x,t);v) = \limsup_{h\to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(\int_0^{t+h+\lambda v} \phi(x,s)ds - \int_0^{t+h} \phi(x,s)ds\Big).$$

Se $v > 0$, temos

$$\Phi^0((x,t);v) = \limsup_{h\to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\Big(\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} \phi(x,s)ds\Big),$$

implicando que

$$\Phi^0((x,t);v) \leq \limsup_{h\to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\overline{\phi}_\varepsilon(x,t)\Big(\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} ds\Big),\ \forall \varepsilon > 0,$$

sendo assim

$$\Phi^0((x,t);v) \leq \limsup_{h\to 0, \lambda \downarrow 0} \overline{\phi}_\varepsilon(x,t)v = \overline{\phi}_\varepsilon(x,t)v,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Passando ao limite $\varepsilon \to 0$, temos

$$\Phi^0((x,t);v) \leq \overline{\phi}(x,t)v,\ \forall v > 0. \tag{2.4}$$

Se $v < 0$, observe que

$$\Phi^0((x,t);v) = \limsup_{h\to 0, \lambda \downarrow 0} -\frac{1}{\lambda}\int_{t+h+\lambda v}^{t+h} \phi(x,s)ds.$$

Usando a mesma argumentação feita anteriormente, temos

$$\Phi^0((x,t);v) \leq \underline{\phi}_\varepsilon(x,t)v,\ \forall \varepsilon > 0,$$

passando ao limite $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\Phi^0((x,t);v) \leq \underline{\phi}(x,t)v,\ \forall v < 0. \tag{2.5}$$

De (2.4) e (2.5) podemos concluir o Lema 2.3. ■

**Lema 2.4** *Denote*

$$\phi(x, t+0) = \lim_{h\to 0+} \phi(x, t+h),$$

$$\phi(x, t-0) = \lim_{h\to 0+} \phi(x, t-h).$$

*e*

$$\phi(x, t\pm 0) = \lim_{h\to 0} \phi(x, t+h).$$

*Se $\phi(x, .)$ é uma função descontínua do tido salto, com seu conjunto de pontos de descontinuidade não contendo ponto de acumulação, então*

$$\underline{\phi}(x, t) = \min\{\phi(x, t+0), \phi(x, t-0)\}$$

*e*

$$\overline{\phi}(x, t) = \max\{\phi(x, t+0), \phi(x, t-0)\}.$$

Seja $x \in \Omega$. Dado $t \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ (com $\varepsilon \approx 0$) defina

$$\begin{array}{rcl} \phi^1_\varepsilon : [t-\varepsilon, t] & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \phi^1_\varepsilon(s) = \begin{cases} \phi(x, s) \text{ se } s \in [t-\varepsilon, t) \\ \lim\limits_{s\to t^-} \phi(x, s) \text{ se } s = t \end{cases} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \phi^2_\varepsilon : [t, t+\varepsilon] & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \phi^2_\varepsilon(s) = \begin{cases} \phi(x, s) \text{ se } s \in (t, t+\varepsilon] \\ \lim\limits_{s\to t^+} \phi(x, s) \text{ se } s = t. \end{cases} \end{array}$$

Sabendo que o conjunto dos pontos de descontinuidade da função $\phi(x, .)$ é enumerável sem ponto de acumulação, podemos assumir que $\phi^1_\varepsilon$ e $\phi^2_\varepsilon$ são funções contínuas para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \approx 0$. Considere agora $s^1_\varepsilon, s^2_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) = \min\{\phi^1_\varepsilon(s); s \in [t-\varepsilon, t]\}$$

e

$$\phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon) = \min\{\phi^2_\varepsilon(s); s \in [t, t+\varepsilon]\}.$$

**Afirmação 2.3** $\underline{\phi}_\varepsilon(x, t) = \min\{\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon), \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon)\}$.

De fato, note que

$$\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) \le \phi(x, s) \ \forall s \in (t-\varepsilon, t)$$

e

$$\phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2) \leq \phi(x,s) \ \forall s \in (t, t+\varepsilon),$$

o que implica

$$\min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\} \leq \phi(x,s) \ \forall s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \setminus \{t\}$$

logo

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R}; \phi(x,s) \geq \alpha \text{ q.t.p. em } (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\} \geq \min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\},$$

ou seja

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) = \operatorname{ess\,inf}\{\phi(x,s); |s-t| < \varepsilon\} \geq \min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\}. \tag{2.6}$$

Mostraremos agora que $\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) \leq \min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2))\}$.
Suponha que $\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) > \min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\}$.
Sem perda de generalidade, considerando $\min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\} = \phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1)$, temos

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) > \phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1),$$

onde $s_\varepsilon^1 \in [t-\varepsilon, t]$. Sendo $\phi_\varepsilon^1$ uma função contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) > \phi_\varepsilon^1(s) \ \forall s \in (s_\varepsilon^1 - \delta, s_\varepsilon^1 + \delta),$$

em particular

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) > \phi_\varepsilon^1(s) \ \forall s \in (s_\varepsilon^1 - \delta, s_\varepsilon^1 + \delta) \cap (t-\varepsilon, t),$$

equivalentemente

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) > \phi(x,s) \ \forall s \in (s_\varepsilon^1 - \delta, s_\varepsilon^1 + \delta) \cap (t-\varepsilon, t),$$

o que é um absurdo, pois o conjunto $(s_\varepsilon^1 - \delta, s_\varepsilon^1 + \delta) \cap (t-\varepsilon, t)$ é um conjunto aberto e todo conjunto aberto tem medida positiva. Logo,

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) \leq \phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1).$$

Mostrando assim que

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) \leq \min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\}. \tag{2.7}$$

De (2.6) e (2.7)

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) = \min\{\phi_\varepsilon^1(s_\varepsilon^1), \phi_\varepsilon^2(s_\varepsilon^2)\}$$

**Afirmação 2.4** $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) = \phi(x, t-0)$ *e* $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon) = \phi(x, t+0)$.

Observe que $t - \varepsilon \leq s^1_\varepsilon \leq t$ e $t \leq s^2_\varepsilon \leq t + \varepsilon$, daí passando ao limite de $\varepsilon \to 0^+$ obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} s^1_\varepsilon = t \text{ e } \lim_{\varepsilon\to 0^+} s^2_\varepsilon = t.$$

Donde segue pelo fato de

$$\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) = \begin{cases} \phi(x, s^1_\varepsilon) \text{ se } s^1_\varepsilon \in [t-\varepsilon, t) \\ \lim_{s\to t^-} \phi(x,s) = \phi(x, t-0) \text{ se } s^1_\varepsilon = t. \end{cases}$$

e

$$\phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon) = \begin{cases} \phi(x, s^2_\varepsilon) \text{ se } s^2_\varepsilon \in (t, t+\varepsilon] \\ \lim_{s\to t^+} \phi(x,s) = \phi(x, t+0) \text{ se } s^2_\varepsilon = t. \end{cases}$$

que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) = \phi(x, t-0)$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon) = \phi(x, t+0),$$

mostrando a Afirmação 2.4.

Note que

$$\min\{\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon), \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon)\} = \frac{(\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) + \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon)) - |\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) - \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon)|}{2}$$

implicando da Afirmação 2.3

$$\underline{\phi}_\varepsilon(x,t) = \frac{(\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) + \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon)) - |\phi^1_\varepsilon(s^1_\varepsilon) - \phi^2_\varepsilon(s^2_\varepsilon)|}{2},$$

passando ao limite de $\varepsilon \to 0^+$, obtemos da Afirmação 2.4

$$\underline{\phi}(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underline{\phi}_\varepsilon(x,t) = \frac{(\phi(x,t-0) + \phi(x,t+0)) - |\phi(x,t-0) - \phi(x,t+0)|}{2},$$

logo

$$\underline{\phi}(x,t) = \min\{\phi(x,t-0), \phi(x,t+0)\}.$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\overline{\phi}(x,t) = \max\{\phi(x,t-0), \phi(x,t+0)\}. \blacksquare$$

**Lema 2.5** *Se $\phi(x, .)$ é a função dada no Lema 2.4, temos*

$$\partial_t \Phi(x,t) = [\underline{\phi}(x,t), \overline{\phi}(x,t)].$$

**Demonstração:**

Sendo $\phi(x,.)$ descontinua do tipo salto, temos que os limites laterais de $\phi(x,.)$ existem. Sabendo disto mostra-se que para todo $v \in \mathbb{R}$

$$\Phi^0((x,t);v) \geq \begin{cases} \phi(x,t-0)v \\ \phi(x,t+0)v. \end{cases} \tag{2.8}$$

De (2.8), podemos concluir que $\phi(x,t+0), \phi(x,t-0) \in \partial_t \Phi(x,t)$, donde segue-se, do Lema 2.4, que $\overline{\phi}(x,t), \underline{\phi}(x,t) \in \partial_t \Phi(x,t)$.

Do Lema 2.3

$$\partial_t \Phi(x,t) \subset [\underline{\phi}(x,t), \overline{\phi}(x,t)].$$

De fato, dado $\xi \in \partial_t \Phi(x,t)$ temos

$$\langle \xi, v \rangle \leq \Phi^0((x,t),v), \ \forall v \in \mathbb{R}.$$

Assim, segue do Lema 2.3

$$\xi v \leq \overline{\phi}(x,t)v \ \forall v > 0$$

e

$$\xi v \leq \underline{\phi}(x,t) \ v \forall v < 0,$$

o que implica

$$\underline{\phi}(x,t) \leq \xi \leq \overline{\phi}(x,t).$$

Portanto, $\xi \in [\underline{\phi}(x,t), \overline{\phi}(x,t)]$, implicando que $\partial_t \Phi(x,t) \subset [\underline{\phi}(x,t), \overline{\phi}(x,t)]$. Sabendo que $\partial_t \Phi(x,t)$ é um conjunto convexo (ver Propriedade $(P_1)$) e $\overline{\phi}(x,t), \underline{\phi}(x,t) \in \partial_t \Phi(x,t)$, tem-se que

$$\partial_t \Phi(x,t) = [\underline{\phi}(x,t), \overline{\phi}(x,t)]. \ \blacksquare$$

**Definição 2.2** *Seja $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $\psi$ é **superposicionalmente mensurável** se para toda função vetorial mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}^K$, a composição $\psi(x, u(x))$ é uma função mensurável.*

**Lema 2.6** *Toda função de Carathéodory é superposicionalmente mensurável.*

**Demonstração:**

Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Logo, existe uma sequência de funções simples

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{k(n)} a_i^n \chi_{E_i^n}(x),$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ $E_i^n = \{x \in \Omega; \Psi_n(x) = a_i^n,\ a_i^n \in \mathbb{R}\}$, com $\cup_{i=1}^{k(n)} E_i^n = \Omega$, que converge pontualmente para $u(x)$, i.e. para cada $x \in \Omega$ temos

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(x) = u(x).$$

Sendo assim, observe que

$$\Phi(x, u(x)) = \Phi(x, \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x)),$$

implicando, pelo fato de $\Phi(x, .)$ ser contínua em quase todo ponto $x \in \Omega$, que

$$\Phi(x, u(x)) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x, \psi_n(x)),\ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Daí,

$$\Phi(x, u(x)) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x, \sum_{i=1}^{k(n)} a_i^n \chi_{E_i^n}(x)),$$

consequentemente

$$\Phi(x, u(x)) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\Phi(x, 0)\chi_{\Omega\setminus\cup_{i=1}^{K(n)}}(x) + \sum_{i=1}^{k(n)} \Phi(x, a_i^n)\chi_{E_i^n}(x)\Big).$$

Mostrando assim que $\Phi(x, u(x))$ é uma função mensurável, já que limite de funções mensuráveis é mensurável. ■

**Teorema 2.3** *Suponha que $\phi(x, t)$ seja uma função de crescimento subcrítico e que $\overline{\phi}$ e $\underline{\phi}$ são superposicionalmente mensurável. Então $\Psi \in LL(L^{p+1}(\Omega), \mathbb{R})$ e*

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t\Phi(x, u(x)) = [\underline{\phi}(x, u(x)), \overline{\phi}(x, u(x))],\ \textit{q.t.p. em } \Omega.$$

*Alem disso, se $\widehat{\Psi} = \Psi|_X$, onde $X = H_0^1(\Omega)$ ou $X = H^1(\Omega)$, então*

$$\partial\widehat{\Psi}(u) \subset \partial\Psi(u),\ \forall u \in X.$$

**Demonstração:**

Antes de demonstrarmos este teorema, observe que a inclusão

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t\Phi(x, u(x)),\ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

que estamos fazendo aqui é uma notação. Na verdade o que temos é que dado $z \in \partial\Psi(u) \subset (L^{p+1}(\Omega))^*$, existe um $\overline{z} \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice C), tal que

$$\langle z, v\rangle = \int_\Omega \overline{z}(x)v(x)dx,\ \forall v \in L^{p+1}(\Omega),$$

e $\overline{z}(x) \in \partial_t\Phi(x,u(x)) = [\underline{\phi}(x,u(x)), \overline{\phi}(x,u(x))]$, q.t.p. em $\Omega$. Afim de simplificar a demonstração consideraremos $z(x)$ ao invés de $\overline{z}(x)$.

No Lema 2.2, mostramos que $\Psi \in LL(L^{p+1}(\Omega), \mathbb{R})$.

Sejam $(h_j) \subset L^{p+1}(\Omega)$ e $(\lambda_j) \subset \mathbb{R}^+$ duas sequências tais que $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e $\lambda_j \to 0$ na reta. Assim podemos assumir que $(h_j(x))$ converge para 0 em quase todo ponto em $\Omega$ e que existe $g \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que

$$|h_j(x)| \leq g(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

pois toda sequência que converge em $L^{p+1}(\Omega)$, possui uma subsequência que converge q.t.p. em $\Omega$ e esta subsequência é limitada a menos de um conjunto de medida nula, por uma função de $L^{p+1}(\Omega)$.

Observe que

$$\Psi^0(u;v) = \limsup_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_j}\Big(\int_\Omega \Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x))dx - \int_\Omega \Phi(x,u(x)+h_j(x))dx\Big),$$

isto é

$$\Psi^0(u;v) = \limsup_{j\to+\infty} \int_\Omega \frac{1}{\lambda_j}\Big(\Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - \Phi(x,u(x)+h_j(x))\Big)dx. \quad (2.9)$$

Definindo $\theta_j(x) = \max\{u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x), u(x)+h_j(x)\}$ e $\eta_j(x) = \min\{u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x), u(x)+h_j(x)\}$, temos

$$\frac{1}{\lambda_j}\Big(\Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - \Phi(x,u(x)+h_j(x)\Big) \leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j(x)}^{\theta_j(x)} |\phi(x,s)|ds,$$

de onde segue pelo fato de $\phi$ ter crescimento subcrítico

$$\frac{1}{\lambda_j}\Big(\Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - \Phi(x,u(x)+h_j(x)\Big) \leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j(x)}^{\theta_j(x)} (a+b|s|^p)ds,$$

utilizando a função $G$ definida na demonstração do Lema 2.2, tem-se que

$$\frac{1}{\lambda_j}\Big(\Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - \Phi(x,u(x)+h_j(x)\Big) \leq \frac{1}{\lambda_j}\big(a|\lambda_j v| + b(G(\eta_j) - G(\theta_j))\big),$$

segue pelo Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_j}\Big(\Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - \Phi(x,u(x)+h_j(x)\Big) \ &\leq \ a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u+h_j+\lambda_j v| \\ &\quad +|u+h_j|)^p|\lambda_j v|,\end{aligned}$$

implicando

$$\frac{1}{\lambda_j}\Big(\Phi(x,u+h_j+\lambda_j v)-\Phi(x,u+h_j)\Big) \leq a|v|+C_1|u|^p|v|+C_2|g|^p|v|+C_3|v|^{p+1} \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{2.10}$$

$\forall j \in \mathbb{N}$, para algum $C_1, C_2, C_3 > 0$. Segue pelo fato de $v, u, g \in L^{p+1}(\Omega)$, que $v \in L^1(\Omega)$ (pois $L^{p+1}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$), $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega)$, $|u|^p|v| \in L^1(\Omega)$ (pois como $|u|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $\frac{1}{(p+1)/p} + \frac{1}{p+1} = 1$ temos pela Desigualdade de Hölder (ver Apêndice C) que $|u|^p|v| \in L^1(\Omega)$) assim como $|g|^p|v| \in L^1(\Omega)$. Sabendo disto temos

$$a|v| + C_1|u|^p|v| + C_2|g|^p|v| + C_3|v|^{p+1} \in L^1(\Omega).$$

Sabendo que $a|v| + C_1|u|^p|v| + C_2|g|^p|v| + C_3|v|^{p+1} \in L^1(\Omega)$, pelo corolário do Lema de Fatou (ver Apêndice C), segue por (2.9) e (2.10)

$$\Psi^0(u;v) \leq \int_\Omega \limsup_{j\to+\infty}\Big(\frac{\Phi(x,u(x)+h_j(x)+\lambda_j v(x)) - \Phi(x,u(x)+h_j(x))}{\lambda_j}\Big)dx,$$

o que implica

$$\Psi^0(u;v) \leq \int_\Omega \Phi^0((x,u(x);v(x))dx = \int_\Omega \max\{w(x)v(x); w(x) \in \partial_t\Phi(x,u(x))\}dx,$$

donde segue-se, pelo Lema 2.5, que

$$\Psi^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{\phi}(x,u(x))v(x)dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{\phi}(x,u(x))v(x)dx. \tag{2.11}$$

Devemos mostrar que, para cada $z(x) \in \partial\Psi(u)$, temos

$$\underline{\phi}(x,u(x)) \leq z(x) \leq \overline{\phi}(x,u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Suponha por absurdo, que existe um conjunto $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$, tal que

$$z(x) < \underline{\phi}(x,u(x)), \ \forall x \in M.$$

Considerando $v(x) = -\chi_M(x) \in L^{p+1}(\Omega)$

$$-\int_M z(x)dx = \int_\Omega z(x)(-\chi_M(x))dx \leq \Psi^0(u;-\chi_M).$$

De (2.11) temos

$$-\int_M z(x)dx \leq -\int_\Omega \underline{\phi}(x,u(x))\chi_M dx = -\int_M \underline{\phi}(x,u(x))dx,$$

implicando que

$$\int_M z(x)dx \geq \int_M \underline{\phi}(x, u(x))dx,$$

o que é um absurdo. Logo, $z(x) \geq \underline{\phi}(x, u(x))$ q.t.p. em $\Omega$.

Para mostrarmos que $z(x) \leq \overline{\phi}(x, u(x))$ q.t.p. em $\Omega$, utilizamos a mesma idéia usada anteriormente. Sendo assim, podemos concluir que para todo $z(x) \in \partial\Psi(u)$ temos

$$\underline{\phi}(x, u(x)) \leq z(x) \leq \overline{\phi}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

consequentemente

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t\Phi(x, u(x)) = [\underline{\phi}(x, u(x)), \overline{\phi}(x, u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Para mostrarmos que

$$\partial\widehat{\Psi}(u) \subset \partial\Psi(u), \ \forall u \in X,$$

basta verificar que $X \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{p+1}(\Omega)$ e $\overline{X} = L^{p+1}(\Omega)$, logo pelo Corolário do Teorema da Regra da Cadeia (ver Capítulo 1) podemos concluir que $\partial\widehat{\Psi}(u) \subset \partial\Psi(u), \ \forall u \in X$. ■

# Capítulo 3

# Lema da Deformação para Funcionais Localmente Lipschitz

Aplicaremos aqui toda a teoria apresentada nos capítulos anteriores, para demonstrar o Lema da Deformação, Teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Minimização para funcionais Localmente Lipschitz.

**Definição 3.1** *Uma função $f \in LL(X, \mathbb{R})$ satisfaz a* ***condição de Palais Smale*** *(PS), se para todo $(x_j) \subset X$ tal que $f(x_j)$ seja convergente e*

$$\lambda_f(x_j) \to 0,$$

*temos a existência de uma subsequência de $(x_j)$ que converge forte em $X$.*

**Observação 3.1** *Se a condição (PS) é verificada na região onde $f \geq \alpha > 0$ (resp. $f \leq \alpha < 0$), $\forall \alpha > 0$, dizemos que $f$ verifica a condição $(PS)^+$ (resp. a condição $(PS)^-$).*

**Observação 3.2** *Seja $c \in \mathbb{R}$, dizemos que $f$ satisfaz a* ***condição de Palais Smale no nível*** *$c$, $(PS)_c$, se para todo $(x_j) \subset X$ tal que:*

- *$f(x_j) \to c$;*
- *$\lambda_f(x_j) \to 0$,*

*existe uma subsequência de $(x_j)$ que converge forte em $X$.*

Defina os seguintes conjuntos

$$A_c = \{x \in X; f(x) \leq c\},$$

$$K_c = \{x \in X; 0 \in \partial f(x), f(x) = c\},$$

$$N_\delta(K_c) = \{x \in X; dist(x, K_c) < \delta\}$$

e

$$B(c, \varepsilon, \delta) = \Big(A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}\Big) - N_\delta(K_c).$$

**Lema 3.1** *Suponha que $f \in LL(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), então $K_c$ é compacto.*

**Demonstração:**

Seja $(x_n) \subset K_c$. Observe que

$$f(x_n) = c \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lambda_f(x_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

pois $0 \in \partial f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Desde que, $f$ cumpre a condição (PS), $(x_n)$ possui uma subsequência $(x_{n_j})$ convergente, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que

$$x_{n_j} \to x_0.$$

Assim,

$$c = \lim_{n_j \to +\infty} f(x_{n_j}) = f(\lim_{n_j \to +\infty} x_{n_j}) = f(x_0),$$

implicando que $f(x_0) = c$. Da Propriedade $(P_5)$, do Capítulo 1, temos

$$0 = \liminf_{n_j \to +\infty} \lambda_f(x_{n_j}) \geq \lambda_f(x_0) \geq 0,$$

o que implica $\lambda_f(x_0) = 0$. Logo, $0 \in \partial f(x_0)$ e $f(x_0) = c$. Daí, podemos concluir que $x_0 \in K_c$, mostrando que $K_c$ é compacto. ■

**Lema 3.2** *Assumindo as hipóteses do Lema 3.1, para cada $\delta > 0$, existem $b, \varepsilon > 0$ tais que*

$$\lambda_f(x) \geq b, \ \forall x \in B(c, \varepsilon, \delta).$$

**Demontração:**

Suponha, por absurdo, que exista um $\delta > 0$, tal que para todo $b_n, \varepsilon_n > 0$ temos um $x_n \in B(c, \varepsilon_n, \delta)$, com

$$\lambda_f(x_n) < b_n. \tag{3.1}$$

Assuma que $b_n \to 0$ e $\varepsilon_n \to 0$.

Observe que $x_n \in B(c, \varepsilon_n, \delta)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, logo

$$c - \varepsilon_n \leq f(x_n) \leq c + \varepsilon_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, sabendo que $\varepsilon_n \to 0$, segue que

$$f(x_n) \to c. \tag{3.2}$$

Passando ao limite $n \to +\infty$ em (3.1), obtemos:

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} \lambda_f(x_n) \leq \lim_{n \to +\infty} b_n = 0,$$

logo

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_f(x_n) = 0. \tag{3.3}$$

Por hipotése $f$ satisfaz a condição (PS), logo de (3.2) e (3.3), a sequência $(x_n)$ possui uma subsequência $(x_{n_j})$ convergente, isto é

$$x_{n_j} \to x_0,$$

para algum $x_0 \in X$.

**Afirmação 3.1** *$f(x_0) = c$ e $\lambda(x_0) = 0$.*

De fato, como $x_{n_j} \in B(c, \varepsilon_{n_j}, \delta)$, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, temos (3.2)

$$\lim_{n_j \to +\infty} f(x_{n_j}) = c.$$

Sendo $f$ contínua,

$$f(x_0) = f(\lim_{n_j \to +\infty} x_{n_j}) = c,$$

logo $f(x_0) = c$. Sendo assim, para mostrar a Afirmação 3.1 basta mostrar que $\lambda(x_0) = 0$.

Da propriedade $(P_5)$, do Capítulo 1, temos

$$\liminf_{n_j \to +\infty} \lambda(x_{n_j}) \geq \lambda(x_0),$$

portanto

$$0 \leq \lambda(x_0) \leq \liminf_{n_j \to +\infty} \lambda(x_{n_j}) = 0,$$

implicando assim que $\lambda(x_0) = 0$, como queriamos mostrar. Logo, $0 \in \partial f(x_0)$. Sendo assim $x_0 \in K_c$, o que é um absurdo. De fato, pois $x_0 \in K_c$ implica que $x_0 \in N_\delta(K_c)$, onde $N_\delta$ é um conjunto aberto. Daí, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x_0) \subset N_\delta(K_c),$$

mas $x_{n_j} \notin N_\delta(K_c)$, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, ou seja $x_{n_j} \notin B_\varepsilon(x_0)$, o que é um absurdo, já que $x_{n_j} \to x_0$. Logo, $x_0 \notin K_c$.

**Lema 3.3** *Assuma as hipóteses do Lema 3.2, e suponha que $X$ seja reflexivo Então existe um campo vetorial $v(x)$ Localmente Lipschitz definido em $B(c, \varepsilon, \delta)$ satisfazendo*

$$||v(x)|| < 1$$

*e*

$$\langle x^*, v(x) \rangle > \frac{1}{3} b, \ \forall x^* \in \partial f(x).$$

**Demonstração:**

Para cada $\delta > 0$, existem $b, \varepsilon > 0$ tais que

$$\lambda_f(x_0) > b, \tag{3.4}$$

para $x_0 \in B(c, \varepsilon, \delta)$. Seja $w_0 \in \partial f(x_0)$, tal que

$$||w_0||_{X^*} = \lambda_f(x_0) = \min\{||w||_{X^*}; w \in \partial f(x_0)\}.$$

Logo, $\overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0) \cap \partial f(x_0) = \varnothing$.

Sabendo que $\overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0)$ e $\partial f(x_0)$ são conjuntos convexos, não vazios e disjuntos, segue que existe um $\psi_0 \in X^{**} \backslash \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ver Teorema de Hahn-Banach, $1^a$ Forma Geométrica, no Apêndice A) tais que

$$\langle \psi_0, \xi \rangle \geq \alpha \geq \langle \psi_0, w \rangle, \ \forall \xi \in \partial f(x_0) \text{ e } \forall w \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0).$$

Sendo $X$ reflexivo, $\langle \psi_0, \xi \rangle = \langle \xi, u_0 \rangle$, para algum $u_0 \in X \setminus \{0\}$, tem-se que

$$\langle \xi, u_0 \rangle \geq \alpha \geq \langle w, u_0 \rangle, \ \forall \xi \in \partial f(x_0) \text{ e } \forall w \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0),$$

implicando que

$$\langle \xi, \frac{u_0}{||u_0||} \rangle \geq \langle w, \frac{u_0}{||u_0||} \rangle, \ \forall \xi \in \partial f(x_0) \text{ e } \forall w \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0).$$

Considerando $h_0 = \frac{u_0}{||u_0||}$, temos

$$\langle \xi, h_0 \rangle \geq \langle w, h_0 \rangle, \ \forall \xi \in \partial f(x_0) \text{ e } \forall w \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0). \tag{3.5}$$

Pelo corolário do Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice A), temos

$$\max\{\langle \xi, h_0 \rangle; ||\xi||_{X^*} \leq 1\} = ||h_0||,$$

isto é

$$\max\{\langle w, h_0 \rangle; w \in \overline{B}_1(0) \subset X^*\} = ||h_0||,$$

implicando que

$$\frac{1}{2}||w_0||_{X^*} \max\{\langle w, h_0 \rangle; w \in \overline{B}_1(0) \subset X^*\} = \frac{1}{2}||w_0||_{X^*}||h_0||,$$

donde segue-se que

$$\max\{\langle \frac{1}{2}||w_0||_{X^*} w, h_0 \rangle; \frac{w}{2||w_0||_{X^*}} 2||w_0||_{X^*} \in \overline{B}_1(0) \subset X^*\} = \frac{1}{2}||w_0||_{X^*}||h_0||,$$

considerando $\overline{w} = \frac{1}{2}||w_0||_{X^*} w$, temos

$$\max\{\langle \overline{w}, h_0 \rangle; \overline{w} \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}(0)\} = \frac{1}{2}||w_0||_{X^*}||h_0||. \tag{3.6}$$

De (3.5), temos para cada $\xi \in \partial f(x_0)$

$$\langle \xi, h_0 \rangle \geq \sup_{w \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}} \langle w, h_0 \rangle = \max\{\langle w, h_0 \rangle; w \in \overline{B}_{\frac{1}{2}||w_0||_{X^*}}\},$$

donde segue-se de (3.4) e (3.6)

$$\langle \xi, h_0 \rangle \geq \frac{1}{2}||w_0||_{X^*}||h_0|| = \frac{1}{2}||w_0||_{X^*} > \frac{b}{2},$$

assim

$$\langle \xi, h_0 \rangle > \frac{b}{2}, \ \forall \xi \in \partial f(x_0). \tag{3.7}$$

Desde que a função $x \mapsto \partial f(x)$ semi-contínua superiormente, temos para cada $x_0 \in B(c, \varepsilon, \delta) \subset X$, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$x^* \in \partial f(x) \text{ e } ||x - x_0|| < \eta_0 \Rightarrow \exists w \in \partial f(x_0) \text{ tal que } ||x^* - w||_{X^*} < \frac{b}{6},$$

daí
$$\langle w - x^*, h_0\rangle \leq ||x^* - w||_{X^*} < \frac{b}{6},\ \forall x^* \in \partial f(x),$$
com $||x - x_0|| < \eta_0$, o que implica
$$\langle w, h_0\rangle - \langle x^*, h_0\rangle < \frac{b}{6}.$$
De (3.7)
$$\langle x^*, h_0\rangle > \frac{b}{3},\ \forall x^* \in \partial f(x),\ x \in B_{\eta_0}(x_0).$$
Sendo assim, acabamos de obter uma cobertura para o conjunto $B(c,\varepsilon,\delta)$, dado por $\cup_{x\in B(c,\varepsilon,\delta)} B(x,\eta_x)$.
Sabendo que $B(c,\varepsilon,\delta)$ é metrizável, o mesmo é paracompacto e portanto admite um refinamento, enumerável e localmente finito (ver Apêndice D), dado por $\cup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i,\eta_i)$.
No que segue, fixamos para cada $i \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} \rho_i : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \rho_i(x) = dist(x, B(x_i,\eta_i)^c). \end{aligned}$$
Observe que, dados $x, y \in X$ temos
$$|\rho_i(x) - \rho_i(y)| = |dist(x, B(x_i,\eta_i)^c) - dist(y, B(x_i,\eta_i)^c)| \leq ||x - y||$$
Mostrando que $\rho_i$ é uma função Lipschitz, para todo $i \in \mathbb{N}$.
Dado $i \in \mathbb{N}$, defina
$$\begin{aligned} \beta_i : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \beta_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho_i(x)}{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \rho_i(x)}, & x \in B(c,\varepsilon,\delta) \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases} \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} v : B(c,\varepsilon,\delta) &\to X \\ x &\mapsto v(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i(x) h_i. \end{aligned}$$

**Afirmação 3.2** $v \in LL(B(c,\varepsilon,\delta), X)$.

Sabendo que $\cup_{i\in\mathbb{N}}B(x_i,\eta_i)$ é um refinamento localmente finito, para cada $w \in B(c,\varepsilon,\delta)$ existe $\delta' > 0$, tal que $B_{\delta'}(w)$ intercepta uma quantidade finita de bolas da união $\cup_{i\in\mathbb{N}}B(x_i,\eta_i)$.

Daí, segue-se que existe $J = \{\eta_1, ..., \eta_k\} \subset \mathbb{N}$, um subconjunto finito, tal que

$$v(x) = \sum_{i\in J} \beta_i(x)h_i$$

e

$$\beta_i(x)h_i = \frac{\rho_i(x)}{\sum_{j\in J}\rho_j(x)}h_i,\ i \in \mathbb{N},\ x \in B_{\delta'}(w).$$

Para mostrar que $v$ é Localmente Lipschitz, basta mostrar que $\beta_i h_i$ é Localmente Lipschitz, pois soma de funções Localmente Lipschitz é uma função Localmente Lipschitz. Sendo assim, dados $i \in J$ e $x, y \in B'_\delta(w)$ obtemos:

$$||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| = \Big|\Big|\frac{\rho_i(x)}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)}h_i - \frac{\rho_i(y)}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(y)}h_i\Big|\Big|,$$

o que implica

$$||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| = \Bigg|\Bigg|\frac{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(y)\rho_i(x)h_i - \sum_{j\in J}\rho_j(x)\rho_i(y)h_i}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)\sum_{j\in J}\rho_j(y)}\Bigg|\Bigg|,$$

consequentemente

$$||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| = \Bigg|\frac{1}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)\sum_{j\in J}\rho_j(y)}\Bigg|\,||h_i||\,\Bigg|\sum_{j\in J}\Big(\rho_j(y)\rho_i(x) - \rho_j(x)\rho_i(y)\Big)\Bigg|,$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| \leq \Bigg|\frac{1}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)\sum_{j\in J}\rho_j(y)}\Bigg|\sum_{j\in J}\Big|\rho_j(y)\rho_i(x) - \rho_j(x)\rho_i(y)\Big|.$$

Somando e subtraindo $\rho_i(y)\rho_j(y)$, e utilizando novamente desigualdade triângular,

$$\begin{aligned}||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| \ &\leq\ \Bigg|\frac{1}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)\sum_{j\in J}\rho_j(y)}\Bigg|\sum_{j\in J}\Big(\rho_j(y)|\rho_i(x) - \rho_i(y)| \\ &\qquad +\rho_i(y)|\rho_j(x) - \rho_j(y)|\Big),\end{aligned}$$

donde segue-se, pelo fato de $\rho_i$ ser uma função Lipschitz, $\forall i \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{aligned} ||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| &\leq \Big|\frac{1}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)\sum_{j\in J}\rho_j(y)}\Big|\sum_{j\in J}\Big(\rho_j(y)||x-y|| + \rho_i(y)||x-y||\Big) \\ &\leq \frac{2\sum_{j\in J}\rho_j(y)||x-y||}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)\sum_{j\in J}\rho_j(y)} = \frac{2||x-y||}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)} \end{aligned}$$

Dado $x \in B_\delta(w)$, temos

$$\sum_{j\in J}\rho_j(x) > 0,$$

daí existe um $M(w) > 0$ tal que

$$\sum_{j\in J}\rho_j(x) \geq M(w),\ \forall x \in B_\delta(w).$$

Portanto,

$$||\beta_i(x)h_i - \beta_i(y)h_i|| \leq \frac{2}{M(w)}||x-y||,\ \forall x, y \in B_\delta(w),$$

mostrando a Afirmação 3.2.

Veja que,

$$||v(x)|| = ||\sum_{j\in J(x)}\beta_j(x)h_j|| \leq \sum_{j\in J(x)}|\beta_j(x)|||h_j|| = \sum_{j\in J(x)}|\beta_j(x)| = 1,$$

e

$$\langle x^*, v(x)\rangle = \langle x^*, \sum_{i\in J}\frac{\rho_i(x)}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)}h_i\rangle = \sum_{i\in J}\frac{\rho_i(x)}{\displaystyle\sum_{j\in J}\rho_j(x)}\langle x^*, h_i\rangle > \frac{b}{3},$$

mostrando assim o Lema 3.3. ■

**Lema 3.4** *Seja* $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$, *defina*

$$V(x) = g(x)\overline{g}(x)v(x),$$

*onde o campo vetorial* $v : B(c, \overline{\varepsilon}, \delta) \to X$ *é dado no Lema 3.3 com*

$$\begin{aligned} g : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon} \\ 0, & x \notin A_{c+\overline{\varepsilon}} - A_{c-\overline{\varepsilon}} \end{cases} \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} \overline{g} : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \overline{g}(x) = \begin{cases} 1, & x \notin N_{4\delta}(K_c) \\ 0, & x \in N_{2\delta}(K_c), \end{cases} \end{aligned}$$

*onde $g$ e $\overline{g}$ são funcionais Localmente Lipschitz, com imagem no intervalo* $[0,1]$.
*Se $\eta(x,t)$ é a solução do Problema de Cauchy*

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\eta(x,t) = -V(\eta(x,t)),\\ &\eta(x,0) = x,\end{aligned} \tag{3.8}$$

*o funcional $f$ restrito ao longo do caminho $\eta(x,.)$ é não-crescente, com*

$$||\eta(x,t) - x|| \leq t,$$

*e*

$$f(x) - f(\eta(x,t)) \geq (\frac{b}{3})t, \ \textit{se } \eta(x,s) \in B(c,\varepsilon,4\delta), \ \forall s \in [0,t).$$

**Demontração:**

Antes de mais nada observe que $\eta(x,.)$ é solução única da EDO (3.8) em $\mathbb{R}$, pois $V \in LL(X,\mathbb{R})$ e $||V(x)|| \leq 1, \ \forall x \in X$ (ver Apêndice D). Mais ainda $\eta(x,.) \in C^1(\mathbb{R},X)$, pois $V$ é contínua.

Observe que

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\eta(x,s)ds = -\int_0^t V(\eta(x,s))ds,$$

daí

$$\eta(x,t) - \eta(x,0) = -\int_0^t V(\eta(x,s))ds,$$

o que implica

$$||\eta(x,t) - x|| = \Big|\Big|\int_0^t V(\eta(x,s))ds\Big|\Big|,$$

donde segue-se, por propriedade de integral, que

$$||\eta(x,t) - x|| \leq \int_0^t ||V(\eta(x,s))||ds \leq \int_0^t ds = t.$$

Fixado $x \in X$, definamos a seguinte função

$$\begin{aligned} h_x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto h_x(t) = f(\eta(x,t)). \end{aligned}$$

**Afirmação 3.3** *$h_x \in LL(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

De fato, sendo $f \in LL(X,\mathbb{R})$, temos para cada $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ a existência de um $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(\eta(x,s_1)) - f(\eta(x,s_2))| \leq K(\eta(x,t))||\eta(x,s_1) - \eta(x,s_2)||, \ \forall \eta(x,s_1), \eta(x,s_2) \in B_\varepsilon(\eta(x,t)).$$

Daí, segue-se que

$$|f(\eta(x,s_1)) - f(\eta(x,s_2))| \leq K(\eta(x,t))||\eta(x,s_1) - \eta(x,s_2)||,$$

considerando $\theta = \max\{s_1, s_2\}$ e $\eta = \min\{s_1, s_2\}$, temos

$$\begin{aligned} |f(\eta(x,s_1)) - f(\eta(x,s_2))| &\leq K(\eta(x,t))\Big|\Big| - \int_\eta^\theta V(\eta(x,s))ds\Big|\Big| \\ &\leq K(\eta(x,t))\int_\eta^\theta ||V(\eta(x,s))||ds, \end{aligned}$$

donde segue-se, pelo fato de $||V(\eta(x,s))|| \leq 1$, que

$$|f(\eta(x,s_1)) - f(\eta(x,s_2))| \leq K(\eta(x,t))(\theta - \eta) = K(\eta(x,t))|s_1 - s_2|,\ \forall s_1, s_2 \in B_{\delta(\varepsilon)}(t),$$

onde $\delta$ é tomado a partir do $\varepsilon$, pela continuidade de $\eta$. Logo, $h_x \in LL(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mostrando assim a Afirmação 3.3

Sabendo que $\eta(x,.) \in C^1(\mathbb{R}, X)$, para cada $x \in X$ e $f \in LL(X, \mathbb{R})$, podemos concluir, pela Propriedade $(P_6)$ do Capítulo 1, que $h_x \equiv f \circ \eta$ é diferenciável q.t.p. em $\mathbb{R}$ e

$$h'_x(s) \leq \max\left\{\langle w, \frac{d}{ds}\eta(x,s)\rangle; w \in \partial f(\eta(x,s))\right\} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R},$$

ou ainda

$$h'_x(s) \leq -\min\{\langle w, V(\eta(x,s))\rangle; w \in \partial f(\eta(x,s))\} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Por definição

$$\langle w, V(\eta(x,s))\rangle = \langle w, v(\eta(x,s))\rangle,\ \forall \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta),$$

logo pelo Lema 3.3

$$\langle w, V(\eta(x,s))\rangle > \frac{b}{3},\ \forall w \in \partial f(\eta(x,s)) \text{ e } \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta),$$

e

$$-\langle w, V(\eta(x,s))\rangle < -\frac{b}{3},\ \forall w \in \partial f(\eta(x,s)) \text{ e } \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta),$$

implicando que

$$-\min\{\langle w, V(\eta(x,s))\rangle; w \in \partial f(\eta(x,s))\} < -\frac{b}{3},\ \forall \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta). \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10)

$$h'_x(s) \leq \begin{cases} -\frac{b}{3}, \ \eta(x,s) \in B(c,\varepsilon,4\delta) \\ 0, \ c.c. \end{cases} \tag{3.11}$$

Portanto $h'_x(s) \leq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Mostraremos agora que $h_x$ é monótona não-crescente. Dado $s \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que $h_x \in L([s-\delta, s+\delta], \mathbb{R})$, isto é $h_x$ é Lipschitz em $[s-\delta, s+\delta]$, pois da Afirmação 3.3 $h_x \in LL(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Afirmação 3.4** *$h_x \in W^{1,p}(t_1, t_2)$, para $(t_1, t_2) \subset (s-\delta, s+\delta)$.*

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $[a,b] \subset (t_1, t_2)$, $t \in (a,b)$ e $0 < \varepsilon < \min\{dist((t_1,t_2)^c, \{a,b\}), \delta\}$. Observe que, pela Desigualdade do Valor Médio para espaços de Banach temos

$$|\eta(t+\varepsilon) - \eta(t)| \leq \varepsilon \sup_{\alpha \in [t, t+\varepsilon]} |\eta'(\alpha)|,$$

donde segue-se, por propriedade de supremo, que

$$|\eta(t+\varepsilon) - \eta(t)| \leq \varepsilon \sup_{\alpha \in [a,b]} |\eta'(\alpha)|,$$

implicando, pelo fato de $\eta \in C^1(\mathbb{R}, X)$, que

$$|\eta(t+\varepsilon) - \eta(t)| \leq \varepsilon ||\eta'||_{L^\infty([a,b])}. \tag{3.12}$$

Observe, também que

$$|f(\eta(t+\varepsilon)) - f(\eta(t))| \leq K(t)|\eta(t+\varepsilon) - \eta(t)|,$$

pois $\varepsilon < \delta$, o que implica de (3.12)

$$|f(\eta(t+\varepsilon)) - f(\eta(t))| \leq K\varepsilon M,$$

onde $M = ||\eta'||_{L^\infty([a,b])}$, consequentemente,

$$|\zeta_\varepsilon h_x(t) - h_x(t)| \leq KM\varepsilon,$$

onde $\zeta_\varepsilon \circ h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por $\zeta_\varepsilon h_x(t) = h_x(t+\varepsilon)$. Sendo assim, segue que

$$\int_{(a,b)} |\zeta_\varepsilon h_x - h_x|^p dt \leq \int_{(a,b)} (KM\varepsilon)^p dt = K^p M^p \varepsilon^p (b-a),$$

logo

$$||\zeta_\varepsilon h_x(t) - h_x(t)||_{L^p(a,b)} \leq C|\varepsilon|.$$

onde $C = KM(b-a)^{\frac{1}{p}}$, onde $(a,b) \subset\subset (t_1,t_2)$.

Mostrando assim, que para todo intervalo $I$, $I \subset\subset (t_1,t_2)$, temos

$$||\zeta_\varepsilon h_x(t) - h_x(t)||_{L^p(I)} \leq C|\varepsilon|,$$

onde $\varepsilon < \min\{dist((t_1,t_2)^c, \{a,b\}), \delta\}$.

Daí, segue que $h_x \in W^{1,p}(t_1,t_2)$ (ver Teorema no Apêndice E), mostrando a Afirmação 3.4.

Da Afirmação 3.4, segue que

$$h_x(t_2) - h_x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} Dh_x(t)dt, \tag{3.13}$$

onde $Dh_x$ é a derivada de $h_x$ no sentido das distribuições (ver Teorema no Apêndice E).

**Afirmação 3.5** *$Dh_x = h_x'$ em $L^p(t_1,t_2)$, onde $h_x'$ é a derivada de $h_x$ q.t.p. em $\mathbb{R}$.*

De fato, definindo

$$g_n(t) = \frac{h_x(t+\frac{1}{n}) - h_x(t)}{\frac{1}{n}},$$

temos $g_n \to h_x'$ q.t.p. em $\mathbb{R}$.

Sendo assim dado $\psi \in C_0^\infty([t_1,t_2])$ temos

$$\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\psi(t)dt = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{t_1}^{t_2} (\zeta_{\frac{1}{n}} h_x - h_x)\psi dt,$$

o que implica

$$\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\psi(t)dt = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{t_1}^{t_2} h_x(t+\frac{1}{n})\psi(t)dt - \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{t_1}^{t_2} h_x(t)\psi(t)dt,$$

considere $y = t + \frac{1}{n}$, daí $dy = dt$ e segue que

$$\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\psi(t)dt = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{t_1+\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}} h_x(y)\psi(y-\frac{1}{n})dy - \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{t_1}^{t_2} h_x(t)\psi(t)dt. \tag{3.14}$$

Sabendo que $\psi \in C_0^\infty([t_1,t_2])$, temos

$$\text{supp}\psi \subset (t_1,t_2),$$

portanto para $n$ suficientemente grande

$$\psi(t) = 0,\ \forall t \in [t_1, t_1+\frac{1}{n}] \cup [t_2, t_2+\frac{1}{n}]. \tag{3.15}$$

Segue de (3.14) e (3.15) para $n$ suficientemente grande

$$\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\psi(t)dt = \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{t_1}^{t_2} h_x(t)\psi(t-\frac{1}{n})dt - \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{t_1}^{t_2} h_x(t)\psi(t)dt,$$

implicando

$$\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\psi(t)dt = \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{t_1}^{t_2} h_x(\psi(t-\frac{1}{n})-\psi(t))dt = -\int_{t_1}^{t_2} h_x(t)\Big(\frac{\zeta_{-\frac{1}{n}}(\psi)-\psi}{-\frac{1}{n}}\Big)dt. \quad (3.16)$$

Observe que para $t \in (t_1, t_2)$

$$|g_n(t)\psi(t)| = \Big|\frac{h_x(t+\frac{1}{n})-h_x(t)}{\frac{1}{n}}\Big||\psi(t)|,$$

donde segue-se, pelo fato de $h_x \in L([t_1,t_2],\mathbb{R})$, que existe $K>0$ tal que

$$|g_n(t)\psi(t)| \leq K|\psi(t)|, \quad (3.17)$$

para n suficientemente grande, com $K|\psi(t)| \in L^1([t_1,t_2])$ (pois $\psi \in C_0^\infty([t_1,t_2])$).

Assim como

$$|h_x(t)(\zeta_{-\frac{1}{n}}(\psi(t))-\psi(t))(-n)| = |h_x(t)||\psi(t-\frac{1}{n})-\psi(t)|n,$$

o que implica pela Desigualdade do Valor Médio

$$h_x(t)(\zeta_{-\frac{1}{n}}(\psi)-\psi)(-n)| \leq |h_x(t)| \sup_{v\in[t-\frac{1}{n},t]} |\psi'(v)| \leq ||\psi'||_{L^\infty([t_1,t_2])}|h_x(t)|, \quad (3.18)$$

para $n$ suficientemente grande.

De (3.17) e (3.18), temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_1}^{t_2} g_n(t)\psi(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} h_x'(t)\psi(t)dt \quad (3.19)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} -\int_{t_1}^{t_2} h_x(t)\Big(\frac{\zeta_{-\frac{1}{n}}(\psi)-\psi}{-\frac{1}{n}}\Big)dt = -\int_{t_1}^{t_2} h_x(t)D\psi(t)dt. \quad (3.20)$$

Passando ao limite $n \to +\infty$ em (3.16), segue, de (3.19) e (3.20), que

$$\int_{t_1}^{t_2} h_x'(t)\psi(t)dt = -\int_{t_1}^{t_2} h_x(t)D\psi(t)dt,$$

implicando, por definição de derivada no sentido da distribuição, que $Dh_x = h_x'$ em $L^p(t_1,t_2)$, mostrando assim a Afirmação 3.5.

Sabendo que a Afirmação 3.5 é verdadeira, temos de (3.13) a seguinte igualdade

$$h_x(t_2) - h_x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h_x'(t)dt.$$

Assim, como $h'_x(t) \leq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, podemos concluir que

$$h_x(t_2) \leq h_x(t_1), \ \forall t_1 < t_2, \ \text{com } t_1, t_2 \in (s-\delta, s+\delta).$$

Sejam $\bar{t}_1, \bar{t}_2 \in \mathbb{R}$, com $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$. Logo,

$$[\bar{t}_1, \bar{t}_2] \subset \cup_{s \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]}(s-\delta_s, s+\delta_s),$$

onde $\delta_s > 0$ é tomado de tal forma que $h_x \in L((s-\delta_s, s+\delta_s), \mathbb{R})$. Obtendo assim uma cobertura aberta para o conjunto compacto $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$. Daí, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, vai existir uma subcobertura finita $\cup_{n \in J}(s_n - \delta_n, s_n + \delta_n)$, tal que

$$[\bar{t}_1, \bar{t}_2] \subset \cup_{n \in J}(s_n - \delta_n, s_n + \delta_n),$$

e

$$(s_i - \delta_i, s_i + \delta_i) \cap (s_{i+1} - \delta_{i+1}, s_{i+1} + \delta_{i+1}) \neq \varnothing \ \forall i \in \{1, ..., k-1\},$$

onde sem perda de generalidade estamos considerando $J = \{1, 2, ..., k\}$ e $s_1 < s_2$ $< ... < s_k$. Seja $r_i \in (s_i - \delta_i, s_i + \delta_i) \cap (s_{i+1} - \delta_{i+1}, s_{i+1} + \delta_{i+1})$, $1 \leq i \leq k-1$.
Daí, aplicando toda teoria feita anteriormente, temos

$$h_x(s_1 - \delta_1) \geq h_x(\bar{t}_1) \geq h_x(r_1) \geq ... \geq h_x(r_i) \geq h_x(r_{i+1}) ... \geq h_x(r_k) \geq h_x(\bar{t}_2) \geq h_x(s_k - \delta_k).$$

Mostrando que

$$h_x(\bar{t}_1) \geq h_x(\bar{t}_2), \ \forall \bar{t}_1 < \bar{t}_2, \ \bar{t}_1, \bar{t}_2 \in \mathbb{R},$$

logo $h_x$ é uma função monótona não-crescente, como queriamos mostrar.
Logo, o funcional $f$ ao longo de $\eta(x,.)$ é não-crescente.
Para finalizarmos este lema mostraremos que

$$f(x) - f(\eta(x,t)) \geq (\frac{b}{3})t, \ \text{se } \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta), \ \forall s \in [0,t).$$

Note que,

$$-\int_0^t \frac{b}{3} ds \geq \int_0^t h'_x(s) ds = h_x(t) - h_x(0) = f(\eta(x,t)) - f(x), \ \forall \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta), \ s \in [0,t),$$

o que implica

$$f(x) - f(\eta(x,t)) \geq \frac{b}{3}, \ \forall \eta(x,s) \in B(c, \varepsilon, 4\delta), \ s \in [0,t).$$

**Teorema 3.2** *(Lema da Deformação) Suponha que $X$ seja um espaço de Banach reflexivo e $f \in LL(X,\mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ e $N$ é uma vizinhança aberta que contém $K_c$, então para todo $\varepsilon_0 > 0$ existe $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ e um homeomorfismo $\eta : X \to X$ tal que:*

$(1^0)$ $\eta(x) = x,\ \forall x \notin A_{c+\varepsilon_0} - A_{c-\varepsilon_0}$;

$(2^0)$ $\eta(A_{c+\varepsilon} \backslash N) \subset A_{c-\varepsilon}$;

$(3^0)$ *Se* $K_c = \varnothing$, *então* $\eta(A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

**Demonstração:**

Sejam $c \in \mathbb{R}$, $N$ uma vizinhança aberta de $K_c$, $t_0 = \frac{6}{b}\overline{\varepsilon}$ e $\eta : X \to X$ uma função dada por $\eta(x) = \eta(x,t_0)$, onde $\eta$ é a função obtida no Lema 3.4.

**Afirmação 3.6** *$\eta$ é um homeomorfismo.*

De fato, definindo a aplicação

$$\begin{aligned} \eta_{-t_0} : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \eta(x) = \eta(x,-t_0), \end{aligned}$$

note que

$$(\eta \circ \eta_{-t_0})(x) = \eta(\eta(x,-t_0),t_0) = \eta(x,t_0-t_0) = \eta(x,0) = x$$

e

$$(\eta_{-t_0} \circ \eta)(x) = \eta(\eta(x,t_0),-t_0) = \eta(x,t_0-t_0) = x.$$

Logo $\eta$ é bijetora e $\eta_{-t_0} \equiv \eta^{-1}$. Daí, segue pelo fato de que $\eta$ e $\eta_{-t_0}$ serem funções funções contínuas, que $\eta$ é um homeomorfismo.

Seja $\delta > 0$ tal que $N_{6\delta} \subset N$ e $b, \overline{\varepsilon} > 0$ as constantes do Lema 3.2. Fixe $0 < \varepsilon' < \min\{\overline{\varepsilon}, \frac{b\delta}{6}, \varepsilon_0, \delta\}$ e $\varepsilon \in (0,\varepsilon')$, com $\varepsilon_0 > 0$ qualquer.

Observe que $\psi(t) = x,\ \forall x \notin A_{c+\varepsilon'} - A_{c-\varepsilon'}$ e $t \in \mathbb{R}$ é solução da EDO do Lema 3.4, pois

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\psi}{dt}(t) = -V(\psi(t)) \\ &\psi(0) = x. \end{aligned}$$

Daí, por unicidade de solução segue que $\psi(t) = \eta(x,t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, isto é

$$\eta(x,t) = x,\ \forall x \notin A_{c+\varepsilon'} - A_{c-\varepsilon'}.$$

Sabendo que

$$A_{c+\varepsilon'} - A_{c-\varepsilon'} \subset A_{c+\varepsilon_0} - A_{c-\varepsilon_0},$$

temos

$$\Big(A_{c+\varepsilon_0} - A_{c-\varepsilon_0}\Big)^c \subset \Big(A_{c+\varepsilon'} - A_{c-\varepsilon'}\Big)^c,$$

daí

$$\eta(x,t) = x, \forall x \notin A_{c+\varepsilon_0} - A_{c-\varepsilon_0}, \forall t \in \mathbb{R},$$

o que implica $\eta(x) = \eta(x,t_0) = x$, $\forall x \notin A_{c+\varepsilon_0} \setminus A_{c-\varepsilon_0}$.

Seja $x \in A_{c+\varepsilon} - N_{6\delta}$, equivalentemente, $x \in \big(A_{c-\varepsilon} \setminus N_{6\delta}\big) \cup B(c,\varepsilon,6\delta)$, basta observar que $A_{c+\varepsilon} = \big(A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}\big) \cup A_{c-\varepsilon}$.

Considere agora os seguintes casos:

**(i)** Se $x \in \big(A_{c-\varepsilon} \setminus N_{6\delta}\big)$, então $\eta(x) \in A_{c-\varepsilon}$.

De fato, sabendo que $t_0 > 0$, temos para cada $x \in A_{c-\varepsilon}$ e pelo fato de $f(\eta(x,.))$ ser não crescente

$$c - \varepsilon \geq f(x) = f(\eta(x,0)) \geq f(\eta(x,t_0)).$$

Logo, $\eta(x,t_0) \in A_{c-\varepsilon}$. Mostrando que $\eta(A_{c-\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

**(ii)** Se $x \in B(c,\varepsilon,6\delta)$, então $\eta(x) \in A_{c-\varepsilon}$.

Com efeito, suponha, por absurdo que $\eta(x) \notin A_{c-\varepsilon}$ daí

$$\eta(x) \in (A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}) \cup \Big(A_{c+\varepsilon}\Big)^c.$$

**(1)** Se $\eta(x,t_0) \in (A_{c+\varepsilon})^c$, então

$$c + \varepsilon < f(\eta(x,t_0)) < f(\eta(x,0)) = f(x),$$

o que implica $x \notin A_{c+\varepsilon}$, o que é um absurdo, pois $x \in B(c,\varepsilon,6\delta)$.

**(2)** Se $\eta(x,t_0) \in A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}$, então dado $s \in [0,t_0]$, temos

$$f(\eta(x,s)) \begin{cases} \leq f(\eta(x,0)) = f(x) \leq c + \varepsilon \\ \geq f(\eta(x,t_0)) > c - \varepsilon, \end{cases} \tag{3.21}$$

pois $f(\eta(x,.))$ é não-crescente. Logo, $\eta(x,s) \in A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}$, $\forall s \in [0,t_0]$.

Sabendo que $\eta(x,0) \notin N_{6\delta}$ (pois $x \in B(c,\varepsilon,6\delta)$), temos $\eta(x,0) \notin N_{4\delta}$.

**Afirmação 3.7** $\eta(x,s) \notin N_{4\delta},\ \forall s \in [0,t_0]$.

Com efeito, suponha que exista um $t_1 \in [0,t_0]$ tal que $\eta(x,s_1) \in N_{4\delta}$.
Segue, pelo fato de $\eta(x,0) \notin N_{4\delta}$, que podemos fixar

$$s_0 = \inf\{s > 0; \eta(x,s) \in \partial N_{4\delta}\}.$$

Daí, $\eta(x,s) \notin N_{4\delta},\ \forall s \in [0,s_0)$ e $\eta(x,s_0) \in \partial N_{4\delta}$ (pois $\partial N_{4\delta}$ é fechado e $\eta(x,.)$ é contínua). Portanto,

$$\eta(x,s) \in A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon} - N_{4\delta} = B(c,\varepsilon,4\delta),\ \forall s \in [0,s_0),$$

donde segue-se pelo Lema 3.4, que

$$||\eta(x,s_0) - x|| \leq s_0 \leq \frac{3}{b}\Big(f(x) - f(\eta(x,s_0))\Big) < \frac{3}{b}(c+\varepsilon-(c-\varepsilon)) = \frac{6\varepsilon}{b},$$

sendo $\varepsilon < \frac{b\delta}{6}$ temos

$$||\eta(x,s_0) - x|| < \delta,$$

implicando que $x \in B_\delta(\eta(x,s_0)) \subset N_{6\delta}$ (pois $\eta(x,s_0) \in \partial N_{4\delta}$), o que é um absurdo, já que $x \notin N_{6\delta}$, mostrando assim a Afirmação 3.7.
Segue, da Afirmação 3.7, que

$$\eta(x,s) \in \Big(A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}\Big) - N_{4\delta},\ \forall s \in [0,t_0],$$

isto é

$$\eta(x,s) \in B(c,\varepsilon,4\delta),\ \forall s \in [0,t_0].$$

Donde segue-se pelo Lema 3.4 e (3.21), que

$$f(x) - f(\eta(x,t_0)) > \frac{b}{3}t_0 = 2\overline{\varepsilon} > 2\varepsilon' > 2\varepsilon,$$

o que implica

$$f(x) > 2\varepsilon + f(\eta(x,t_0))$$

sendo assim de (3.21) temos

$$f(x) > \varepsilon + c,$$

logo $x \notin A_{c+\varepsilon}$, o que é um absurdo.
De (i) e (ii), podemos concluir que $\eta(A_{c+\varepsilon} - N_{6\delta}) \subset A_{c-\varepsilon}$, como queriamos mostrar.
Caso $K_c = \varnothing$, então $N_{6\delta} = \varnothing$, implicando $\eta(A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$. $\blacksquare$

**Teorema 3.3** *(Teorema do Passo da Montanha) Seja $X$ um espaço de Banach reflexivo e $I \in LL(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição (PS). Suponha que $I(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

$(I_1)$ *Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$*

$(I_2)$ *Existe $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.*

*Então, $I$ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max\{I(u); u \in g([0,1])\},$$

*onde* $\Gamma = \{g \in C([0,1], X); g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e\}$.

**Demonstração:**

Seja

$$c = \inf_{g \in \Gamma} max\{I(g(t)); t \in [0,1]\}.$$

Afirmamos que $c$ está bem definido.

De fato, pois sendo $I \in LL(X, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], X)$, segue que $I \circ g$ é uma função contínua a valores reais e sendo $[0,1]$ um conjunto compacto, temos que $I \circ g$ possui valor máximo em $[0,1]$. Logo, $\max\{I(g(t)); t \in [0,1]\}$ está bem definido.

**Afirmação 3.8** $\max\{I(g(t)); t \in [0,1]\} \geq \alpha, \ \forall g \in \Gamma$.

De fato, dado $g \in \Gamma$ defina

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(t) = ||g(t)||. \end{array}$$

Observe que $h$ é uma composição de funções contínuas, logo $h$ é contínua. Além disso, sendo $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$, temos

$$h(0) = ||g(0)|| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = ||g(1)|| = ||e|| > \rho,$$

pois $e \notin \overline{B}_\rho$, implicando que

$$h(0) < \rho < h(1).$$

Segue, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$h(t_0) = ||g(t_0)|| = \rho,$$

logo $g(t_0) \in \partial B_\rho$. Daí, por $(I_1)$ temos

$$I(g(t_0)) \geq \alpha.$$

Mostrando que

$$\max\{I(g(t)); t \in [0,1]\} \geq \alpha, \ \forall g \in \Gamma,$$

mostrando assim a Afirmação 3.8.

Considerando o seguinte conjunto

$$H = \Big\{ \max\{I(g(t)); t \in [0,1]\}; g \in \Gamma \Big\} \subset \mathbb{R}.$$

Pela Afirmação 3.8, o conjunto $H$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Logo, $H$ possui ínfimo em $\mathbb{R}$, isto é

$$\inf_{g \in \Gamma} \max\{I(g(t)); t \in [0,1]\},$$

está bem definido.

Sabendo que $\alpha$ é uma cota inferior para o conjunto $H$, devemos ter $c \geq \alpha$.

Para finalizarmos o Teorema do Passo da Montanha, basta mostrar que $c$ é valor crítico de $I$.

Suponha que $c$ não seja um valor crítico de $I$. Logo, $K_c = \varnothing$. Donde segue-se, pelo Lema da Deformação, que dado $0 < \varepsilon < \frac{c-\alpha}{2}$ (sem perda de generalidade estamos considerando aqui $\alpha < c$), existe $\eta \in C(X,X)$ tal que

**(i)** $\eta(u) = u$, $\forall u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$;

**(ii)** $\eta(I^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]) \subset I^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$.

Além disso, pela definição do valor $c$, existe $g_\varepsilon \in \Gamma$ tal que

$$\max\{I(g_\varepsilon(t)); t \in [0,1]\} \leq c + \varepsilon. \tag{3.22}$$

Considerando $\overline{h}_\varepsilon(t) = \eta(g_\varepsilon(t))$, temos que $\eta \in C(X,X)$ e $g_\varepsilon \in C([0,1],X)$, segue que $\overline{h} \in C([0,1],X)$.

Observe que, de $(I_2)$

$$I(e) \leq 0 < \alpha < c - 2\varepsilon,$$

pois $\varepsilon < \frac{c-\alpha}{2}$. Daí, $I(e) \notin [c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$, o que implica $e \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$.

Da mesma forma, sendo $I(0) = 0 < \alpha < c - 2\varepsilon$, tem-se que $I(0) \notin [c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$, ou seja, $0 \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$.

Sendo assim, de (i)

$$\overline{h}(0) = \eta(g_\varepsilon(0)) = \eta(0) = 0$$

e

$$\overline{h}(1) = \eta(g_\varepsilon(1)) = \eta(e) = e,$$

implicando que $\overline{h} \in \Gamma$.

De (3.22)

$$I(g_\varepsilon(t)) \leq \max\{I(g_\varepsilon(t)); t \in [0,1]\} \leq c+\varepsilon,$$

logo $g_\varepsilon(t) \in I^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$, sendo assim segue, de (ii), que

$$\overline{h}_\varepsilon(t) = \eta(g_\varepsilon(t)) \in I^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]),\ \forall t \in [0,1],$$

ou seja, $I(\overline{h}_\varepsilon(t)) \leq c-\varepsilon,\ \forall t \in [0,1]$, logo

$$\max\{I(g_\varepsilon(t)); t \in [0,1]\} \leq c-\varepsilon,$$

o que implica

$$c \leq c-\varepsilon,$$

visto que $\overline{h}_\varepsilon \in \Gamma$, o que é um absurdo. Portanto, concluimos que $c$ é um valor crítico para $I$. ■

**Observação 3.3** *No teorema do Passo da Montanha poderiamos pedir apenas que o funcional $I$ satisfaça a condição de (PS) no nível $c$ ($(PS)_c$), pois se o leitor observar a demonstração dos lemas que foram úteis na demonstração do Lema da Deformação, vai perceber que basta que o funcional seja $(PS)_c$.*

**Teorema 3.4** *(Teorema de Minimização) Seja $I \in LL(X, \mathbb{R})$, verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível $c = \inf_{u \in X} I(u)$ é um valor crítico para $I$.*

**Demonstração:**

Mostrar que $c$ é valor crítico de $I$ é equivalente a mostrar que $K_c \neq \varnothing$.

Se $K_c = \varnothing$, segue do Lema da Deformação que existe um $\varepsilon > 0$ e um campo $\eta : X \to X$ tal que

$$\eta\Big(I^{-1}\big((-\infty, c+\varepsilon]\big)\Big) \subset I^{-1}\big((-\infty, c-\varepsilon]\big),$$

ou seja, existem pontos $\overline{v} = \eta(v)$ com $v \in I^{-1}\big((-\infty, c+\varepsilon]\big)$ que verifica

$$I(\overline{v}) \leq c - \varepsilon < c,$$

o que é um absurdo, pois

$$c = \inf_{u \in X} \Big(I(u)\Big) \leq I(\overline{v}) < c. \ \blacksquare$$

No que segue considere $X$ um espaço de Hilbert, munido de um produto interno $\langle .,. \rangle$ denso no espaço de Banach $Y$, com $X \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} Y$. Assuma que $g$ é uma função Localmente Lipschitz sobre $Y$, e defina $\widehat{g} = g|_X$.

**Teorema 3.5** *Seja*

$$\begin{aligned} \widehat{f} : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \widehat{f}(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - \widehat{g}(u), \end{aligned}$$

*onde $\widehat{g} \in LL(X, \mathbb{R})$ e $L : X \to X$ é um operador linear limitado auto-adjunto. Suponha que $L$ seja um operador definido positivo, isto é,*

$$\langle Lu, u\rangle \geq \alpha ||u||^2, \alpha > 0,$$

*e $\widehat{g}$ satisfaz*

$$\widehat{g}(u) \leq \theta \min\{\langle w, u\rangle; w \in \partial\widehat{g}(u)\} + M,$$

*onde $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ e $M > 0$. Então, $\widehat{f}$ satisfaz a condição (PS).*

**Demonstração:**

Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência que verifica a condição de (PS). Logo,

**(i)** $\widehat{f}(u_n) \to \beta$ em $\mathbb{R}$;

**(ii)** $\lambda(u_n) = \min\{||w||_{X^*}; w \in \partial\widehat{f}(u_n)\} \to 0.$

Considerando $||v_n||_{X^*} = \lambda(u_n)$, onde $v_n \in \partial\widehat{f}(u_n)$, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||v_n||_{X^*} \leq 1, \ \forall n \geq n_0. \tag{3.23}$$

Sabendo que $L$ é um operador linear limitado, temos que $L \in C^1(X, X)$. Logo, o funcional $J(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle$ pertence a $C^1(X, \mathbb{R})$. Sendo assim, observe que a derivada a Gâteux de $J$ é dada por $J'(u)v = \langle Lu, v\rangle$. Desta forma

$$\partial\widehat{f}(u_n) = \{J'(u_n)\} - \partial\widehat{g}(u_n),$$

donde segue-se, pelo fato de $v_n \in \partial \widehat{f}(u_n)$, que existe $w_n \in \partial \widehat{g}(u_n)$ tal que

$$\langle v_n, \phi \rangle = \langle Lu_n, \phi \rangle - \langle w_n, \phi \rangle, \ \forall \phi \in X. \tag{3.24}$$

Observando que

$$\widehat{f}(u_n) - \theta \langle v_n, u_n \rangle \leq |\widehat{f}(u_n) - \theta \langle v_n, u_n \rangle| \leq |\widehat{f}(u_n)| + \theta ||v_n||_{X^*} ||u_n||,$$

segue de (3.23) e pelo fato da sequência $\widehat{f}(u_n)$ ser convergente, que existe $c > 0$ tal que

$$\widehat{f}(u_n) - \theta \langle v_n, u_n \rangle \leq c + \theta ||u_n||, \ \forall n \geq n_0. \tag{3.25}$$

Observe, também que de (3.24)

$$\begin{aligned} \widehat{f}(u_n) - \theta \langle v_n, u_n \rangle &= \frac{1}{2} \langle Lu_n, u_n \rangle - \widehat{g}(u_n) - \theta \Big( \langle Lu_n, u_n \rangle - \langle w_n, u_n \rangle \Big) \\ &= (\frac{1}{2} - \theta) \langle Lu_n, u_n \rangle - \widehat{g}(u_n) + \theta \langle w_n, u_n \rangle, \end{aligned}$$

donde segue-se, das hipotéses

$$\begin{aligned} \widehat{f}(u_n) - \theta \langle v_n, u_n \rangle &\geq (\tfrac{1}{2} - \theta) \alpha ||u_n||^2 + \theta \Big( \langle w_n, u_n \rangle \\ &\quad - \min\{ \langle w, u_n \rangle ; w \in \partial \widehat{g}(u_n) \} \Big) - M \\ &\geq (\tfrac{1}{2} - \theta) \alpha ||u_n||^2 - M. \end{aligned} \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26)

$$(\frac{1}{2} - \theta) \alpha ||u_n||^2 - M \leq c + \theta ||u_n||, \ \forall n \geq n_0,$$

implicando que

$$(\frac{1}{2} - \theta) \alpha ||u_n||^2 - \theta ||u_n|| - (M + c) \leq 0, \ \forall n \geq n_0.$$

Mostrando assim que a sequência $(u_n)$ é limitada. Daí, segue-se que vai existir uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0, \ \text{em } X,$$

isto é,

$$\langle \xi, u_{n_j} \rangle \to \langle \xi, u_0 \rangle, \ \forall \xi \in X^*.$$

Considerando $K_n$ a constante Lipschitz da função $\widehat{g}$ no ponto $u_n$, temos para cada $w_n \in \partial \widehat{g}(u_n)$

$$||w_n||_{X^*} \leq K_n.$$

Sabendo que $K_n$ é uma constante que depende da norma de $u_n$ e do raio da bola que torna $\widehat{g}$ Lipschitz, assumiremos aqui que $K_n \leq K_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para algum $K_0 > 0$. Portanto a sequência $(w_{n_j})$ é limitada, implicando que existem uma subsequência $(w_{n_{j_k}}) \subset (w_{n_j})$ e um ponto $w_0 \in X$ tais que

$$w_{n_{j_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} w_0 \text{ em } X^*. \tag{3.27}$$

ou seja,

$$\langle w_{n_{j_k}}, v\rangle \to \langle w_0, v\rangle,\ \forall v \in X.$$

Por hipotése,

$$\alpha||u_{n_{j_k}} - u_0||^2 \leq \langle L(u_{n_{j_k}} - u_0), u_{n_{j_k}} - u_0\rangle = \langle Lu_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle - \langle Lu_{n_{j_k}}, u_0\rangle - \langle Lu, u_{n_{j_k}} - u_0\rangle$$

somando e subtraindo por $\langle w_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle$ segue, de (3.24), que

$$\begin{aligned} \alpha||u_{n_{j_k}} - u_0||^2 &\leq \langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}} - u_0 + u_0\rangle - \langle Lu_{n_{j_k}}, u_0\rangle - \langle Lu, u_{n_{j_k}} - u_0\rangle \\ &= \langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}} - u_0\rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_0\rangle - \langle Lu_{n_{j_k}}, u_0\rangle - \langle Lu_0, u_{n_{j_k}} - u_0\rangle. \end{aligned} \tag{3.28}$$

**Afirmação 3.9**

$$\langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}} - u_0\rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_0\rangle - \langle Lu_{n_{j_k}}, u_0\rangle - \langle Lu, u_{n_{j_k}} - u_0\rangle \to 0.$$

De fato, note que

$$|\langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle| \leq ||v_{n_{j_k}}||_{X^*}||u_{n_{j_k}}||,$$

implicando, pelo fato de $(u_{n_{j_k}})$ ser limitada, que

$$|\langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle| \leq \overline{c}||v_{n_{j_k}}||_{X^*},$$

para algum $\overline{c} > 0$. Passando ao limite $n_{j_k} \to +\infty$, temos de (ii)

$$\lim_{n_{j_k} \to +\infty} |\langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle| = 0,$$

e portanto

$$\lim_{n_{j_k} \to +\infty} \langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle = 0. \tag{3.29}$$

Defina as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} J_1 : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto J_1(x) = \langle Lu_0, x\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_2 : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto J_2(x) = \langle Lx, u_0 \rangle. \end{aligned}$$

Observe que $J_1, J_2 \in X^*$. Logo,

$$J_1(u_{n_{j_k}} - u_0) \rightarrow 0 \tag{3.30}$$

e

$$J_2(u_{n_{j_k}}) \rightarrow J_2(u_0), \tag{3.31}$$

pois $u_{n_{j_k}} \rightharpoonup u_0$ em $X$.

Afirmamos que

$$w_{n_{j_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} w_0 \text{ em } Y^*, \tag{3.32}$$

isto é

$$\langle w_{n_{j_k}}, y \rangle \rightarrow \langle w_0, y \rangle \ \forall y \in Y.$$

De fato, dado $y \in Y$ considere $(x_m) \subset X$ tal que $x_m \rightarrow y$ em $Y$ (isto é possivel pois $\overline{X} = Y$).

Para cada $\varepsilon > 0$, existem $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$||x_m - y||_Y < \min\left\{\frac{\varepsilon}{3K_0}, \frac{\varepsilon}{3||w_0||}\right\} \ \forall m \geq m_1 \tag{3.33}$$

e

$$|\langle w_{n_{j_k}}, x \rangle - \langle w_0, x \rangle| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall n_{j_k} \geq m_2, \forall x \in X. \tag{3.34}$$

Fixando $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$, observe que

$$|\langle w_{n_{j_k}}, y \rangle - \langle w_0, y \rangle| \leq |\langle w_{n_{j_k}}, y - x_{m_0}| + |\langle w_{n_{j_k}}, x_{m_0} \rangle - \langle w_0, x_{m_0} \rangle| + |\langle w_0, x_{m_0} \rangle - \langle w_0, y \rangle|,$$

de onde segue

$$|\langle w_{n_{j_k}}, y \rangle - \langle w_0, y \rangle| \leq K_0 ||y - x_{m_0}||_Y + |\langle w_{n_{j_k}}, x_{m_0} \rangle - \langle w_0, x_{m_0} \rangle| + ||w_0||_{Y^*} ||x_{m_0} - y||_Y$$

o que implica de (3.33) e (3.34)

$$|\langle w_{n_{j_k}}, y \rangle - \langle w_0, y \rangle| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ \forall n_{j_k} \geq m_0,$$

mostrando que $w_{n_{j_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} w_0$ em $Y^*$.

Sabendo que $u_{n_{j_k}} \rightharpoonup u_0$ em $X$ e $X \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} Y$, temos

$$u_{n_{j_k}} \to u_0 \text{ em } Y,$$

implicando

$$u_{n_{j_k}} - u_0 \to 0 \text{ em } Y. \tag{3.35}$$

De (3.32) e (3.35)

$$\langle w_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}} - u_0 \rangle \to \langle w_0, 0 \rangle = 0. \tag{3.36}$$

Note que

$$\langle v_{n_{j_k}}, u_0 \rangle = \langle Lu_{n_{j_k}}, u_0 \rangle - \langle w_{n_{j_k}}, u_0 \rangle$$

assim

$$\langle Lu_{n_{j_k}}, u_0 \rangle = \langle v_{n_{j_k}}, u_0 \rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_0 \rangle,$$

donde segue-se, de (3.29) e pelo fato de $w_{n_{j_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} w_0$ em $X^*$, que

$$\langle Lu_{n_{j_k}}, u_0 \rangle \to \langle w_0, u_0 \rangle. \tag{3.37}$$

De (3.29)-(3.31), (3.36) e (3.37)

$$\langle v_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}} \rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}} - u_0 \rangle + \langle w_{n_{j_k}}, u_0 \rangle - \langle Lu_{n_{j_k}}, u_0 \rangle - \langle Lu, u_{n_{j_k}} - u_0 \rangle \to = 0,$$

mostrando a Afirmação 3.9.

Da Afirmação 3.9 e de (3.28), temos

$$\alpha ||u_{n_{j_k}} - u_0||^2 \to 0,$$

ou seja

$$||u_{n_{j_k}} - u_0|| \to 0,$$

mostrando que a sequência $(u_n)$ possui uma subsequência convergente. Assim $\widehat{f}$ satisfaz a condição (PS). ■

# Capítulo 4

# Um problema sublinear

Será mostrado aqui uma solução forte para uma classe de problema elíptico sublinear, via Teorema de Minimização.

**Definição 4.1** *(Definição de Solução) Por uma solução do problema do tipo*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

*entendemos como sendo uma função* $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$*, para algum* $p > 1$*, verificando*

$$-\Delta u(x) \in [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))] \ \textit{q.t.p. em } \Omega.$$

**Observação 4.1** *Quando*

$$-\Delta u(x) = f(x,u(x)) \ \textit{q.t.p. em } \Omega,$$

*dizemos que u é* ***solução forte****.*

Aplicando a Definição 4.1 para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = H(u-a)u^q + |u|^{p-1}u, \ \Omega, \ 0 < p,q < 1, \\ u = 0, \ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $a > 0$ e $H$ é a função de Heaviside, temos $u$ é solução de (4.1) se:

**(i)** Existe $p > 1$ tal que $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, e

$$\textbf{(ii)} \begin{cases} -\Delta u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ se } u(x) < a; \\ -\Delta u(x) = u(x)^q + |u(x)|^{p-1}u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ se } u(x) > a \\ -\Delta u(x) \in [a^p, a^p + a^q], \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ se } u(x) = a. \end{cases}$$

Para encontrarmos uma solução de (4.1), vamos encontrar um ponto crítico para o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \int_\Omega F(u)dx,$$

onde

$$F(t) = \int_0^t H(s-a)s^q ds = \begin{cases} 0, \ t \leq a; \\ \frac{t^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}, \ t > a. \end{cases}$$

Defina $f(t) = H(t-a)t^q$ e observe que

$$|f(t)| = |H(t-a)||t^q| \leq |t^q| \leq 1 + |t|^q.$$

Logo, $f$ é uma função com crescimento subcrítico e do Lema 2.2, o funcional

$$\begin{aligned} \Psi : H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \ &\to \ \mathbb{R} \\ u \ &\mapsto \ \Psi(u) = \int_\Omega F(u)dx \end{aligned}$$

é Localmente Lipschitz.

**Lema 4.1** *O funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

*pertence a $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso,*

$$J'(u)v = \langle u, v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Demonstração:**

Primeiro mostraremos que $J$ é Gâteaux diferenciável.

Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$, daí

$$\frac{\partial J}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\langle u+tv, u+tv\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{t}$$

o que implica

$$\frac{\partial J}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0}\frac{t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle}{t} = \langle u, v\rangle.$$

Assim, $\langle u, v\rangle$ é o candidato natural para ser $J'(u)v$.

Observe que $J$ é diferenciável a Fréchet, pois

$$\frac{J(u+v)-J(u)-\langle u,v\rangle}{||v||}=\frac{\frac{1}{2}\langle u+v,u+v\rangle-\frac{1}{2}||u||^2-\langle u,v\rangle}{||v||}=\frac{||v||}{2}.$$

Passando ao limite $||v||\to 0$, obtemos

$$\lim_{||v||\to 0}\Big(\frac{J(u+v)-J(u)-J'(u)v}{||v||}\Big)=\lim_{||v||\to 0}\frac{||v||}{2}=0,$$

mostrando assim que $J$ é diferenciável a Fréchet.

**Afirmação 4.1** *$J'$ é contínua.*

De fato, seja $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n\to u \text{ em } H_0^1(\Omega). \tag{4.2}$$

Para mostrar que $J'$ é contínua, devemos verificar que

$$J'(u_n)\to J'(u) \text{ em } (H_0^1(\Omega))^*,$$

isto é

$$||J'(u_n)-J(u)||_{(H_0^1(\Omega))^*}=\sup_{||v||\leq 1}|\langle J'(u_n)-J'(u),v\rangle|\to 0.$$

Dado $v\in H_0^1(\Omega)$, com $||v||\leq 1$, temos

$$|\langle J'(u_n)-J'(u),v\rangle|=|\langle u_n,v\rangle-\langle u,v\rangle|=|\langle u_n-u,v\rangle|,$$

implicando que

$$|\langle J'(u_n)-J'(u),v\rangle|\leq ||u_n-u||||v||,$$

logo

$$|\langle J'(u_n)-J'(u),v\rangle|\leq ||u_n-u||,\ \forall v\in X \text{ com } ||v||\leq 1,$$

donde segue-se que

$$\sup_{||v||\leq 1}|\langle J'(u_n)-J'(u),v\rangle|\leq ||u_n-u||.$$

Passando ao limite $n\to+\infty$, obtemos de (4.2)

$$\lim_{n\to+\infty}||J'(u_n)-J'(u)||_{(H_0^1(\Omega))^*}=0,$$

provando assim a Afirmação 4.1. ■

**Lema 4.2** *$J \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e*

$$||J'(u)||_{(H_0^1(\Omega))^*} = ||u||, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Demonstração:**

Por definição,

$$||J'(u)||_{(H_0^1(\Omega))^*} = \sup_{||v||=1} |\langle J'(u), v\rangle| = \sup_{||v||=1} |\langle u, v\rangle|.$$

Definindo $A = \{|\langle u, v\rangle|; ||v|| = 1\}$, observe que

$$||u|| = \frac{\langle u, u\rangle}{||u||} = \langle u, \frac{u}{||u||}\rangle \in A,$$

e

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v|| = ||u||, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ com } ||v|| = 1.$$

Logo,

$$\sup_{||v||=1} |\langle u, v\rangle| = ||u||,$$

isto é

$$||J'(u)||_{(H_0^1(\Omega))^*} = ||u||. \tag{4.3}$$

Mostraremos agora que $J \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Dado $w \in H_0^1(\Omega)$, fixe $K > 0$, segue, pelo fato de $J$ ser diferenciável, que

$$|J(u) - J(v)| \leq \sup_{\theta \in [u,v]} ||J'(\theta)||_{(H_0^1(\Omega))^*}||u - v||.$$

De (4.3), que

$$|J(u) - J(v)| \leq \sup_{\theta \in [u,v]} ||\theta||||u - v|| \leq (K + ||w||)||u - v||, \ \forall u, v \in B_K(w),$$

Logo, $J \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. ■

Defina agora as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = |t|^{p-1}t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto G(t) = \int_0^t g(s)ds = \frac{1}{p+1}|t|^{p+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}: H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}\\ u &\mapsto \widehat{\Psi}(u)=\int_\Omega G(u)dx=\frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx.\end{aligned}$$

**Lema 4.3** *Seja $\widehat{\Psi}: H_0^1(\Omega)\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida anteriormente. Então $\widehat{\Psi}\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e para cada $u\in H_0^1(\Omega)$*

$$\widehat{\Psi}'(u)v=\int_\Omega g(u)vdx.$$

**Demonstração:**

O lema segue, mostrando que

$$\lim_{||v||\rightarrow 0}\Big(\frac{\widehat{\Psi}(u+v)-\widehat{\Psi}(u)-\int_\Omega g(u)uvdx}{||v||}\Big)=0,$$

e que $\widehat{\Psi}'\in C(H_0^1(\Omega))$.

Seja $(v_n)\subset H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$, com $v_n\rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Observe que

$$\widehat{\psi}(u+v_n)-\widehat{\psi}(u)-\int_\Omega g(u)v_n dx=\int_\Omega\Big(G(u+v_n)-G(u)\Big)dx-\int_\Omega g(u)v_n dx. \quad (4.4)$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$G(u+v_n)-G(u)=\int_0^1\frac{d}{dt}(G(u+tv_n))dt=\int_0^1 G'(u+tv_n)v_n dt,$$

o que implica

$$G(u+v_n)-G(u)=\int_0^1 g(u+tv_n)v_n dt. \quad (4.5)$$

De (4.4) e (4.5)

$$\widehat{\psi}(u+v_n)-\widehat{\psi}(u)-\int_\Omega g(u)v_n dx=\int_\Omega\int_0^1(g(u+tv_n)-g(u))v_n dtdx,$$

donde segue-se pelo Teorema de Fubini (ver Apêndice C)

$$\widehat{\psi}(u+v_n)-\widehat{\psi}(u)-\int_\Omega g(u)v_n dx=\int_0^1\int_\Omega(g(u+tv_n)-g(u))v_n dxdt.$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder (ver Apêndice C)

$$\Big|\widehat{\psi}(u+v_n)-\widehat{\psi}(u)-\int_\Omega g(u)v_n dx\Big|\leq\int_0^1||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}}||v_n||_{\frac{2^*}{2^*-p}}dt,$$

onde $1 < \frac{2^*}{2^*-p} < 2^*$. Recordando que $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{\frac{2^*}{2^*-p}}(\Omega)$

$$\left|\widehat{\psi}(u+v_n) - \widehat{\psi}(u) - \int_\Omega g(u)v_n dx\right| \leq C||v_n|| \int_0^1 ||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} dt, \tag{4.6}$$

para algum $C > 0$.

Mostraremos agora que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 ||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} dt = 0.$$

Veja que

$$||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} = \left(\int_\Omega \left||u+tv_n|^{p-1}(u+tv_n) - |u|^{p-1}u\right|^{\frac{2^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{2^*}},$$

implicando pela Desigualdade Triângular e Desigualdade de Minkowski (ver Apêndice C)

$$||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} \leq |||u+tv_n|^p||_{\frac{2^*}{p}} + |||u|^p||_{\frac{2^*}{p}} = ||u+tv_n||_{2^*}^p + ||u||_{2^*}^p,$$

utilizando novamente Desigualdade de Minkowski

$$||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} \leq \Big(||u||_{2^*} + t||v_n||_{2^*}\Big)^p + ||u||_{2^*}^p \leq (1+2^p)||u||_{2^*}^p + t2^p||v_n||_{2^*}^p.$$

Sabendo que $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega)$, temos $v_n \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega)$, logo vai existir um $C_1 > 0$ tal que

$$||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} \leq (1+2^p)||u||_{2^*}^p + 2^p t C_1 = M, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Note que $M \in L^1([0,1])$.

**Afirmação 4.2** $\lim\limits_{n\to+\infty} ||g(u(.)+tv_n(.))||_{\frac{2^*}{p}} = 0.$

Observe que

$$|g(u+tv_n) - g(u)|^{\frac{2^*}{p}} \leq (|u+tv_n|^p + |u|^p)^{\frac{2^*}{p}} \leq 2^{\frac{2^*}{p}}(|u+tv_n|^{2^*} + |u|^{2^*}). \tag{4.8}$$

Desde que $v_n \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega)$, existe $(v_{n_j}) \subset (v_n)$ tal que

$(a)$ $v_{n_j}(x) \to 0$, q.t.p. em $\Omega$;

$(b)$ $|v_{n_j}(x)| \leq \overline{v}(x)$, q.t.p. em $\Omega$, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, para algum $\overline{v} \in L^{2^*}(\Omega)$ (ver Apêndice C).

De (4.8)

$$|g(u+tv_{n_j})-g(u)|^{\frac{2^*}{p}} \leq C((1+2^{2^*})|u|^{2^*}+t2^{2^*}|\overline{v}|^{2^*}), \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall n_j \in \mathbb{N},$$

onde $C = 2^{\frac{2^*}{p}}$. Definindo $h(x) = C((1+2^{2^*})|u|^{2^*}+t2^{2^*}|\overline{v}|^{2^*})$, temos que $h \in L^{2^*}(\Omega)$. Desde que que $v_{n_j}(x) \to 0$, q.t.p. em $\Omega$ (ver item $(a)$) e que $g$ é uma função contínua, temos

$$\lim_{n_j \to +\infty} |g(u+tv_{n_j})-g(u)|^{\frac{2^*}{p}} = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Podemos concluir, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice C) que

$$\lim_{n_j \to +\infty} \int_\Omega |g(u+tv_{n_j})-g(u)|^{\frac{2^*}{p}} dx = 0,$$

implicando

$$\lim_{n_j \to +\infty} ||g(u(.)+tv_{n_j}(.))-g(u(.))||_{\frac{2^*}{p}} = 0,$$

Observe agora que repetindo este mesmo argumento para uma subsequência qualquer $(v_{n_{\overline{j}}}) \subset (v_n)$, iremos obter uma subsequência $(v_{n_{\overline{j}_k}}) \subset (v_{n_{\overline{j}}})$ tal que

$$\lim_{n_{\overline{j}_k} \to +\infty} ||g(u(.)+tv_{n_{\overline{j}_k}}(.))-g(u(.))||_{\frac{2^*}{p}} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} ||g(u(.)+tv_n(.))-g(u(.))||_{\frac{2^*}{p}} = 0, \tag{4.9}$$

mostrando a Afirmação 4.2.

Portanto de (4.7), (4.9) e Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 ||g(u(.)+tv_n(.))-g(u(.))||_{\frac{2^*}{p}} dt = 0.$$

donde segue-se de (4.6)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}(u+v_n)-\widehat{\psi}(u)-\int_\Omega g(u)v_n dx\right|}{||v_n||} = 0,$$

$\forall (v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ com $v_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Logo,

$$\lim_{||v|| \to 0} \frac{\left|\widehat{\psi}(u+v)-\widehat{\psi}(u)-\int_\Omega g(u)v dx\right|}{||v||} = 0,$$

como queriamos mostrar.

**Afirmação 4.3** $\psi' \in C(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Se $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, pela imersão $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega)$, $u_n \to u_0$ em $L^{2^*}(\Omega)$, assim existem uma subsequência $(u_{n_j})$ de $(u_n)$ e $\widehat{h} \in L^{2^*}(\Omega)$ (ver Apêndice C) tais que

$(a_1)$ $|u_{n_j}(x)| \leq \widehat{h}(x)$, q.t.p. em $\Omega$, $\forall n_j \in \mathbb{N}$.

$(a_2)$ $u_{n_j}(x) \to u_0(x)$, q.t.p. em $\Omega$.

Para mostrar esta afirmação, basta mostrar que

$$||\Psi'(u_n) - \Psi'(u_0)||_{(H_0^1(\Omega))^*} \to 0.$$

Sendo assim, veja que

$$||\Psi'(u_n) - \Psi'(u_0)||_{(H_0^1(\Omega))^*} = \sup_{||v|| \leq 1} |\langle \Psi'(u_n) - \Psi'(u_0), v\rangle| = \sup_{||v|| \leq 1} \Big| \int_\Omega (g(u_n) - g(u_0))v dx \Big|.$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$, com $||v|| \leq 1$, observe que $v \in L^{\frac{2^*}{2^*-p}}(\Omega)$ (pois $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2^*}{2^*-p}}(\Omega)$),

$$|(g(u_{n_j}) - g(u_0))| \leq (|u_{n_j}|^p + |u_0|^p),$$

onde $(|u_{n_j}|^p + |u_0|^p) \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)$ $\forall n_j \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{\frac{2^*}{2^*-p}} + \frac{1}{\frac{2^*}{p}} = 1$.
Assim pela Desigualdade de Hölder (ver Apêndice C)

$$\Big| \int_\Omega (g(u_{n_j}) - g(u_0))v dx \Big| \leq ||g(u_{n_j}(.)) - g(u_0(.))||_{\frac{2^*}{p}} ||v||_{\frac{2^*}{2^*-p}},$$

implicando da imersão $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{\frac{2^*}{2^*-p}}(\Omega)$ que para algum $C > 0$

$$\Big| \int_\Omega (g(u_{n_j}) - g(u_0))v dx \Big| \leq C||g(u_{n_j}(.)) - g(u_0(.))||_{\frac{2^*}{p}} ||v|| \leq C||g(u_{n_j}(.)) - g(u_0(.))||_{\frac{2^*}{p}},$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$, com $||v|| \leq 1$. Logo,

$$\sup_{||v|| \leq 1} \Big| \int_\Omega (g(u_n) - g(u_0))v dx \Big| \leq C||g(u_{n_j}(.)) - g(u_0(.))||_{\frac{2^*}{p}} \tag{4.10}$$

Afirmamos que

$$||g(u_{n_j}(.)) - g(u_0(.))||_{\frac{2^*}{p}} \to 0.$$

Note que de $(a_1)$

$$|g(u_{n_j}) - g(u_0)|^{\frac{2^*}{p}} \leq (|u_{n_j}|^p + |u_0|^p)^{\frac{2^*}{p}} \leq 2^{\frac{2^*}{p}} (|\widehat{h}|^{2^*} + |u_0|^{2^*}) \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4.11}$$

onde $|\widehat{h}|^{2^*} + |u_0|^{2^*} \in L^1(\Omega)$ (pois $\widehat{h} \in L^{2^*}(\Omega)$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$).
Sabendo que $u_{n_j}(x) \to u_0(x)$ q.t.p. em $\Omega$ (ver item $(a_2)$), temos

$$\lim_{n_j \to +\infty} |g(u_{n_j}) - g(u_0)|^{\frac{2^*}{p}} = \lim_{n_j \to +\infty} \left||u_{n_j}|^p - |u_0|^p\right|^{\frac{2^*}{p}} = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{4.12}$$

Segue de (4.11) e (4.12), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice C)

$$\lim_{n_j \to +\infty} \int_\Omega |g(u_{n_j}) - g(u_0)|^{\frac{2^*}{p}} dx = 0,$$

implicando

$$||g(u_{n_j}(.)) - g(u_0(.))||_{\frac{2^*}{p}} \to 0. \tag{4.13}$$

Passando ao limite de $n_j \to +\infty$ em (4.10), obtemos de (4.13)

$$\sup_{||v|| \le 1} \left| \int_\Omega (g(u_{n_j}) - g(u_0)) v dx \right| \to 0,$$

ou seja,

$$||\Psi'(u_{n_j}) - \Psi'(u_0)||_{(H_0^1(\Omega))^*} \to 0.$$

Observe agora que repetindo este argumento para uma subsequência $(u_{n_i}) \subset (u_n)$, iremos obter uma subsequência $(u_{n_{i_k}})$ de $(u_{n_i})$ tal que

$$||\Psi'(u_{n_{i_k}}) - \Psi'(u_0)||_{(H_0^1(\Omega))^*} \to 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} ||\Psi'(u_n) - \Psi'(u_0)||_{(H_0^1(\Omega))^*} = 0,$$

mostrando que $\Psi' \in C(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, o que prova a Afirmação 4.3. ■
Sabendo que $\Psi \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $J, \widehat{\Psi} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, temos da propriedade $(P_8)$ do Capítulo 1

$$\partial I(u) = \{J'(u)\} - \{\widehat{\Psi}'(u)\} - \partial\Psi(u), \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Note que

$$\underline{f}(u(x)) = \begin{cases} 0, \ u(x) \le a \\ u(x)^q, \ u(x) > a, \end{cases}$$

e

$$\overline{f}(u(x)) = \begin{cases} 0, \ u(x) < a \\ u(x)^q, \ u(x) \ge a, \end{cases}$$

são funções mensuráveis, pois $\underline{f}(u(x)) = u(x)^q \chi_{[u>a]}(x)$, $\overline{f}(u(x)) = u(x)^q \chi_{[u\geq a]}(x)$ e sabemos que $u, \chi_{[u>a]}, \chi_{[u\geq a]} \in \mathcal{M}$. Note, também que $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são funções não-decrescente. Dado $w \in \partial\Psi(u) \subset (L^{q+1}(\Omega))^*$, existe pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice C), $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que

$$\langle w, v\rangle = \int_\Omega \overline{w} v dx,$$

donde segue-se, pelo Teorema 2.3, que

$$\overline{w}(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Lema 4.4** *O funcional $I$ possui um ponto crítico, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I(u)$.*

**Demonstração:**

Iremos mostrar que o funcional $I$ é limitado inferiormente e verifica a condição Palais-Smale, pois pelo Teorema de Minimização 3.4 segue que

$$c = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$$

é um valor crítico.

Sendo assim, vejamos:

**(i)** $I$ é limitado inferiormente.

Obeserve que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}||u||_{p+1}^{p+1} - \Big(\int_{[u\leq a]} F(u)dx + \int_{[u>a]} F(u)dx\Big), \end{aligned}$$

implicando, pelo fato de $F(t) = 0, \ \forall t \leq a$, que

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}||u||_{p+1}^{p+1} - \int_{[u>a]} \Big(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\Big)dx,$$

donde segue-se, pelo fato de $H_0^1(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\text{cont}} L^{p+1}(\Omega)$, que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}C_1||u||^{p+1} - \frac{1}{q+1}\int_{[u>a]} u^{q+1}dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}\int_{[u>a]} dx,$$

para algum $C_1 > 0$. Assim

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}C_1||u||^{p+1} - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx,$$

usando novamente imersão, obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{C_1}{p+1}||u||^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}||u||^{q+1}, \tag{4.14}$$

onde $C_2 > 0$.

Definindo $h(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{C_1}{p+1}t^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}t^{q+1}$, note que

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty,$$

pois $p+1, q+1 < 2$. Logo, existem $M, K > 0$ tais que

$$h(t) > M, \ \forall t > K. \tag{4.15}$$

Observe que $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, logo existe $t_0 \in [0, k]$ tal que

$$h(t_0) = \min\{h(t); t \in [0, K]\}. \tag{4.16}$$

De (4.15) e (4.16), segue que

$$h(t) \geq \min\{M, h(t_0)\}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

mostrando que $h$ é limitado inferiormente.

Sendo assim, concluimos de (4.14) que o funcional $I$ é limitado inferiormente, como queriamos mostrar.

**(ii)** O funcional $I$ verifica a condição (PS), isto é, se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ verifica:

- $I(u_n) \to \beta$;
- $||v_n||_{X^*} = \lambda_I(u_n) \to 0$,

existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \to u, \ \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Desde que $v_n \in \partial I(u_n)$, existe $w_n \in \partial\Psi(u_n) \subset (L^{q+1}(\Omega))^*$, tal que

$$v_n = J'(u_n) - \widehat{\Psi}'(u_n) - w_n,$$

o que implica

$$\langle v_n, \phi\rangle = J'(u_n)\phi - \widehat{\Psi}'(u_n)\phi - \langle w_n, \phi\rangle, \forall\phi \in H_0^1(\Omega),$$

donde segue-se, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice C), que

$$\langle v_n, \phi\rangle = \langle u_n, \phi\rangle - \int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n\phi dx - \int_\Omega \overline{w}_n\phi dx, \forall\phi \in H_0^1(\Omega),$$

para algum $\overline{w_n} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, ou ainda,

$$\langle v_n, \phi\rangle = \int_\Omega \nabla u_n\nabla\phi dx - \int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n\phi dx - \int_\Omega \overline{w}_n\phi dx, \forall\phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.17}$$

**Afirmação 4.4** *A sequência $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.*

Com efeito, suponha que $(u_n)$ não seja limitada, logo existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $||u_{n_j}|| \to +\infty$. Por hipotése sabemos que $(I(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, logo existe $K > 0$ tal que

$$I(u_n) \leq |I(u_n)| \leq K,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

Segue de (4.14) e (4.18)

$$K \geq I(u_{n_j}) \geq \frac{1}{2}||u_{n_j}||^2 - \frac{C_1}{p+1}||u_{n_j}||^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}||u_{n_j}||^{q+1},\ \forall n_j \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite $n_j \to +\infty$, obtemos

$$K \geq \lim_{n_j\to+\infty} I(u_{n_j}) \geq +\infty,$$

o que é um absurdo, mostrando a Afirmação 4.4.

Logo, existe $\overline{M} > 0$ tal que

$$||u_n|| \leq \overline{M},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Afirmação 4.5** *A sequência $(\overline{w}_n) \subset L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ é limitado em $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$.*

De fato, já sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\overline{w}_n(x) \in [0, |u_n(x)|^q],\ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Logo,

$$|\overline{w}_n(x)|^{\frac{q+1}{q}} \leq |u_n(x)|^{q+1} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que implica

$$\int_\Omega |\overline{w}_n(x)|^{\frac{q+1}{q}} dx \leq \int_\Omega |u_n(x)|^{q+1}dx,$$

assim temos

$$||\overline{w}_n||_{\frac{q+1}{q}} \leq ||u_n||_{q+1}^{q+1},$$

donde segue-se, por imersão, que

$$||\overline{w}_n||_{\frac{q+1}{q+1}} \leq C||u_n||^{q+1} \leq CM^q, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando assim a Afirmação 4.5.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ espaços reflexivos e $(u_n)$ e $(\overline{w}_n)$ sequências limitadas, da teoria de Análise funcional, existem $(u_{n_j}) \subset (u_n)$, $(\overline{w}_{n_j}) \subset (\overline{w}_n)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\overline{w}_0 \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0, \ \text{em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$\overline{w}_{n_j} \rightharpoonup \overline{w}_0, \ \text{em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega).$$

**Afirmação 4.6** *Dado $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tem-se que:*

$$\int_\Omega \nabla u_{n_j} \nabla \phi dx \to \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx$$

*e*

$$\int_\Omega \overline{w}_{n_j} \phi dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx.$$

Dado $\phi \in H_0^1(\Omega)$, considere o funcional

$$\begin{array}{rcl} T_\phi : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle T_\phi, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx. \end{array}$$

Note que $T_\phi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^*$, $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$. Sabendo disto, segue pelo fato de $u_{n_j} \rightharpoonup u_0$, em $H_0^1(\Omega)$

$$\langle T_\phi, u_{n_j}\rangle \to \langle T_\phi, u_0\rangle,$$

mostrando que

$$\int_\Omega \nabla u_{n_j} \nabla \phi dx \to \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

Seja $\phi \in H_0^1(\Omega)$ e defina o funcional

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T}_\phi : L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle \widehat{T}_\phi, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega v \phi dx. \end{array}$$

Note que $\widehat{T}_\phi \in \left(L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)\right)^*$ $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, pois $\widehat{T}_\phi$ é linear e pela Desigualdade de Hölder

$$|\langle \widehat{T}_\phi, v\rangle| \leq C||v||_{\frac{q+1}{q}}$$

onde $C = ||\phi||_{q+1}$. Desde que $\overline{w}_{n_j} \rightharpoonup \overline{w}_0$ em $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, temos

$$\langle \widehat{T}_\phi, \overline{w}_{n_j} \rangle \to \langle \widehat{T}_\phi, \overline{w}_0 \rangle, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que

$$\int_\Omega \overline{w}_{n_j} \phi dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando a Afirmação 4.5.

**Afirmação 4.7** $\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \phi dx \to \int_\Omega |u_0|^{p-1} u_0 \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, *a menos de subsequência.*

Sendo

$$H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^s(\Omega), \ \forall 1 < s < 2^*,$$

temos

$$u_{n_j} \to u_0, \ \text{em } L^s(\Omega), \ 1 < s < 2^*,$$

implicando que existe $(u_{n_{j_k}}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_{j_k}}(x) \to u_0(x), \ \text{q.t.p. em } \ \Omega$$

e

$$|u_{n_{j_k}}(x)| \leq g(x), \ \text{q.t.p. em } \ \Omega, \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguma função $g \in L^s(\Omega)$, $s = \frac{p+1}{p}$ (ver Apêndice C). Daí, dado $\phi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$||u_{n_{j_k}}|^{p-1} u_{n_{j_k}} \phi| \to ||u_0|^{p-1} u_0 \phi|, \ \text{q.t.p. em } \ \Omega$$

e

$$||u_{n_{j_k}}|^{p-1} u_{n_{j_k}} \phi| \leq g^p |\phi|, \ \text{q.t.p. em } \ \Omega,$$

onde $g^p|\phi| \in L^1(\Omega)$, pois $\phi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ e $g \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Assim utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega |u_{n_{j_k}}|^{p-1} u_{n_{j_k}} \phi dx \to \int_\Omega |u_0|^{p-1} u_0 \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando a Afirmação 4.7.

Por hipotése de (PS) tem-se que

$$|\langle v_{n_{j_k}}, \phi \rangle| \leq ||v_{n_{j_k}}||_{(H_0^1(\Omega))^*} ||\phi|| \to 0, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.19}$$

Passando ao limite $n_{j_k} \to +\infty$ em (4.17), obtemos das Afirmações 4.6 e 4.7 e de (4.19)

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx = \int_\Omega |u_0|^{p-1} u_0 \phi dx + \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.20}$$

**Afirmação 4.8** $\int_\Omega \overline{w}_{n_{j_k}} u_{n_{j_k}} dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 u_0 dx.$

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{n_{j_k}} : L^{q+1}(\Omega) &\to \mathbb{R} && (4.21)\\ v &\mapsto \langle \widehat{T}_{n_{j_k}}, v\rangle = \int_\Omega \overline{w}_{n_{j_k}} v dx. && (4.22) \end{aligned}$$

Seja $\widehat{T}_0 : L^{q+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle \widehat{T}_0, v\rangle = \int_\Omega \overline{w}_0 v dx, \ v \in L^{q+1}(\Omega).$$

Desde que $w_{n_{j_k}} \rightharpoonup w_0$ em $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \overline{w}_{n_{j_k}} v dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 v dx, \ \forall v \in L^{q+1}(\Omega)$$

a demonstração aqui será evitada, pois basta utilizar a mesma idéia feita na prova da Afirmação 4.6, considerando $L^{q+1}(\Omega)$ ao invés de $H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$\langle \widehat{T}_{n_{j_k}}, v\rangle \to \langle \widehat{T}_0, v\rangle, \ \forall v \in L^{q+1}(\Omega),$$

ou equivalentemente

$$\widehat{T}_{n_{j_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \widehat{T}_0, \ \text{em } \left(L^{q+1}(\Omega)\right)^*. \tag{4.23}$$

Sabendo que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^{q+1}(\Omega)$, onde $1 < q+1 < 2^*$ e $u_{n_{j_k}} \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$u_{n_{j_k}} \to u_0 \text{ em } L^{q+1}(\Omega). \tag{4.24}$$

De (4.23) e (4.24)

$$\langle \widehat{T}_{n_{j_k}}, u_{n_{j_k}}\rangle \to \langle \widehat{T}_0, u_0\rangle,$$

consequentemente

$$\int_\Omega \overline{w}_{n_{j_k}} u_{n_{j_k}} dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 u_0 dx,$$

mostrando a Afirmação 4.8.

No intuito de simplificar a notação considere $k = n_{j_k}$.

Desde que $u_k \to u_0$ em $L^{p+1}(\Omega)$, pois $p+1 \in (1, 2^*)$, existe uma subsequência $(u_{k_i}) \subset (u_k)$ tal que

$$u_{k_i}(x) \to u_0(x), \ \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|u_{k_i}(x)| \leq \overline{g}(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum $g \in L^{p+1}(\Omega)$ (ver Apêndice C). Sendo assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_\Omega |u_{k_i}|^{p+1} dx \to \int_\Omega |u_0|^{p+1} dx \tag{4.25}$$

Considerando $\phi = u_{k_i}$ em (4.17), obtemos

$$\langle v_{k_i}, u_{k_i} \rangle = \int_\Omega \nabla u_{k_i} \nabla u_{k_i} dx - \int_\Omega |u_{k_i}|^{p-1} (u_{k_i})^2 dx - \int_\Omega \overline{w}_{k_i} u_{k_i} dx,$$

o que implica

$$||u_{k_i}||^2 = \langle u_{k_i}, u_{k_i} \rangle = \langle v_{k_i}, u_{k_i} \rangle + \int_\Omega |u_{k_i}|^{p+1} dx - \int_\Omega \overline{w}_{k_i} u_{k_i} dx,$$

passando ao limite de $k_i \to \infty$, obtemos da Afirmação 4.8, e de (4.19) e (4.25)

$$||u_{k_i}||^2 \to \int_\Omega |u_0|^{p+1} dx - \int_\Omega \overline{w}_0 u_0 dx. \tag{4.26}$$

Considerando, agora $\phi = u_0$ em (4.20), temos

$$||u_0||^2 = \int_\Omega |u_0|^{p+1} dx + \int_\Omega \overline{w}_0 u_0 dx, \tag{4.27}$$

De (4.26) e (4.27)

$$||u_{k_i}||^2 \to ||u_0||^2.$$

Sabendo que $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo (pois $H_0^1(\Omega)$ é Hilbert), $||u_{k_i}|| \to ||u_0||$ e $u_{k_i} \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ podemos concluir

$$u_{k_i} \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

mostrando a condição (PS). ■

**Lema 4.5** *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ um ponto crítico do funcional $I$ obtido no Lema 4.4. Então existe $a^* > 0$ tal que $u$ é solução forte, não trivial, do problema (4.1), $\forall a \in (0, a^*)$.*

**Demonstração:**

Sabendo que $u \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico do funcional $I$, temos por definição $0 \in \partial I(u)$. Logo,

$$\langle 0, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle - \int_\Omega |u|^{p-1} u \phi dx - \int_\Omega \overline{w} \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

para algum $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, o que implica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega (|u|^{p-1}u + \overline{w})\phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Daí podemos concluir que $u$ é solução fraca do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \overline{w}, \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.28}$$

onde $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$.

**Afirmação 4.9** $|u|^{p-1}u + \overline{w} \in L^r(\Omega)$, *onde* $r = min\{\frac{q+1}{q}, \frac{2^*}{p}\}$.

De fato, como

$$||u|^{p-1}u| = |u|^p \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega),$$

(pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$) e $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, considerando $r = min\{\frac{2^*}{p}, \frac{q+1}{q}\}$, temos

$$|u|^p, \overline{w} \in L^r(\Omega),$$

pois pela definição de $r$, tem-se que $L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega), L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$. Logo $|u|^p + \overline{w} \in L^r(\Omega)$, mostrando a Afirmação 4.9.

Da Afirmação 4.9, segue-se pelo Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg (ver Apêndice E), que $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$, isto é

$$-\Delta u \in L^r(\Omega).$$

Sendo assim,

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u + \overline{w}, \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

implicando que

$$-\Delta u - |u|^{p-1}u = \overline{w}, \ \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Recordando que $\overline{w}(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))]$ q.t.p. em $\Omega$, temos

$$-\Delta u - |u|^{p-1}u \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \ \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{4.29}$$

mostrando que $u$ é solução do problema (4.1).

**Afirmação 4.10** *Seja* $A = \{x \in \Omega; u(x) = a\}$, *então* $|A| = 0$.

Com efeito, suponha que $|A| > 0$, por Stampacchia [20]

$$-\Delta u(x) = 0 \text{ q.t.p. em } A. \tag{4.30}$$

Observe que

$$[\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] = \begin{cases} 0, \ u(x) < a; \\ [0, a^q], \ u(x) = a; \\ u(x)^q, \ u(x) > a. \end{cases}$$

Sendo assim, de (4.30)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q],$$

isto é $-a^p \geq 0$, o que é um absurdo, pois $a > 0$. Logo $|A| = 0$, mostrando a Afirmação 4.10.

Da Afirmação 4.10 e de (4.29), podemos concluir que

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u + H(u-a)u^q \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

isto é $u$ é solução forte do problema (4.1).

Assim, para finalizar este lema falta mostrar que $u$ é uma solução não trivial.

Recorde que

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{[u>a]} \Big(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\Big)dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx,$$

consequentemente

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{q+1}\int_{[u>a]} |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}|[u>a]|,$$

implicando

$$I(u) \leq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{q+1}\int_{[u>a]} |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}|\Omega|,$$

somando e subtraindo $\frac{1}{q+1}\int_{[u\leq a]} |u|^{q+1}dx$

$$I(u) \leq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \frac{1}{q+1}\int_{[u\leq a]} |u|^{q+1}dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}|\Omega|,$$

logo

$$I(u) \leq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \frac{2a^{q+1}}{q+1}|\Omega|. \tag{4.31}$$

Fixe $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\phi \geq 0$ $(\phi \neq 0)$. Considerando $t \geq 0$, temos de (4.31)

$$I(t\phi) \leq \frac{t^2||\phi||^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega |\phi|^{q+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |\phi|^{p+1}dx + \frac{2a^{q+1}}{q+1}|\Omega|,$$

ou seja

$$I(t\phi) \leq t^2A - t^{q+1}B - t^{p+1}C + \frac{2a^{q+1}}{q+1}|\Omega|,$$

com $A = \frac{||\phi||^2}{2}$, $B = \frac{1}{q+1}\int_\Omega |\phi|^{q+1}$ e $C = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\phi|^{p+1}dx$.

Observe que

$$t^2A - t^{q+1}B - t^{p+1}C < 0, \text{ para } t \approx 0,$$

pois $q+1, p+1 < 2$, sendo assim, fixe $t_0 \approx 0$ tal que

$$-D = t_0^2A - t_0^{q+1}B - t_0^{p+1}C < 0.$$

Logo, se $a > 0$ verifica

$$-D + \frac{2a^{q+1}}{q+1}|\Omega| < 0,$$

isto é

$$0 < a < \left(\frac{(q+1)D}{2|\Omega|}\right)^{\frac{1}{q+1}} \equiv a^*,$$

concluímos

$$I(t_0\phi) < 0.$$

Assim, a solução que encontramos deve verificar

$$I(u) = \min\{I(w); w \in H_0^1(\Omega)\} \leq I(t_0\phi) < 0.$$

Uma vez que $I(0) = 0$, podemos afirmar que $u \neq 0$, $\forall a \in (0, a^*)$. $\blacksquare$

# Capítulo 5

# Uma aplicação envolvendo Crescimento Subcrítico

Neste capítulo, encontraremos uma solução, via Teorema de Minimização, para uma outra classe de problema Elíptico com Crescimento Subcrítico.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), \text{ em } \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\lambda$ é um parâmetro positivo e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função crescente e contínua. Considere aqui as seguintes propriedades:

$(F_0)$ $f(0) = -a < 0$;

$(F_1)$ $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s} = 0 < \lambda_1$, onde $\lambda_1$ é o primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \text{ em } \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

$(F_2)$ Para algum $C > 0$, $|f(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$, onde $1 \leq p - 1 < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, se $N > 2$ ($2^* = +\infty$ se $N = 1, 2$), subcrítico.

$(\widehat{F}_2)$ Existem $k > 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, tais que $F(s) \leq \theta f(s)s, \ \forall s \geq k$.

$(F_3)$ Para algum $\delta > 0$, temos $F(\delta) > 0$, onde

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = H(s)f(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0; \\ f(s), & s > 0. \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto G(s) = \int_0^s g(t)dt. \end{aligned}$$

Considere o problema,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

O funcional energia associado a (5.2) é $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega G(u)dx.$$

Observando que $g$ tem um crescimento subcrítico (ver $(F_2)$), segue-se do Lema 2.2, que a função

$$\begin{aligned} \Psi : L^{q+1}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \Psi(u) = \int_\Omega G(u)dx, \end{aligned}$$

onde $q = p - 1$, é Localmente Lipschitz.

Portanto $\lambda\Psi \in LL(L^{q+1}(\Omega), \mathbb{R})$, consequentemente $\lambda\Psi|_{H_0^1(\Omega)} \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Com o objetivo de simplificar a notação consideraremos aqui a função $\Psi \equiv \Psi|_{H_0^1(\Omega)}$.

Do Lema 4.1 temos que a função

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega))$, logo $J \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, sendo assim $I_\lambda \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

**Lema 5.1** *Suponha que $f$ cumpre as propriedades $(F_0)$, $(F_1)$ e $(F_3)$. Então existe $\eta_0 > 0$ tal que (5.2) não possui solução forte $0 \leq u \in H_0^1(\Omega)$ não trivial $\forall \lambda \in (0, \eta_0)$.*

**Demonstração:**

Suponha que $u \geq 0$ seja solução não-trivial de (5.2) então, multiplicando por $u$ e integrando sobre o domínio $\Omega$ na equação (5.2), temos

$$\int_\Omega -\Delta u u dx = \int_\Omega \lambda g(u) u dx,$$

donde segue-se Teorema do Divergente Forte (ver Apêndice E) que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \lambda g(u) u dx,$$

ou seja

$$||u||^2 = \int_\Omega \lambda g(u) u dx = \lambda \int_{[u<\delta_0]} g(u) u dx + \lambda \int_{[u \geq \delta_0]} g(u) u dx, \tag{5.3}$$

onde $\delta_0 > 0$ é fixado de tal maneira que $g(s) \leq 0 \ \forall \ s \leq \delta_0$. (isto é possivel pelas propriedades $(F_0)$ e $(F_3)$).

De $(F_1)$, temos

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = 0,$$

donde segue-se, por definição de limite, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\overline{k} > 0$ tal que

$$\frac{g(s)}{s} < \varepsilon \ \forall s > \overline{k},$$

o que implica

$$sg(s) < \varepsilon s^2, \forall s > \overline{k}. \tag{5.4}$$

Sendo $sg(s)$ uma função contínua, existe $M > 0$ tal que

$$sg(s) \leq M, \ \forall s \in [0, \overline{k}], \tag{5.5}$$

Logo, de (5.4) e (5.5)

$$sg(s) \leq \varepsilon s^2 + M, \ \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

e considerando $c = \varepsilon + M$, vamos ficar com

$$sg(s) \leq cs^2 + c = c(1 + s^2), \ \forall s \in \mathbb{R}^+. \tag{5.6}$$

De (5.3) e (5.6), temos

$$||u||^2 \leq \lambda c \int_{[u \geq \delta_0]} (1 + u^2) dx. \tag{5.7}$$

De (5.7)

$$||u||^2 \leq \lambda c\Big(\frac{1}{\delta_0^2}\int_{[u\geq\delta_0]} u^2dx + \int_{[u\geq\delta_0]} u^2dx\Big) \leq \lambda c\Big(\frac{1}{\delta_0^2}+1\Big)\int_\Omega u^2dx.$$

Utilizando a Desigualdade de Poincaré (ver Apêndice E), tem-se que

$$||u||^2 \leq \frac{\lambda c}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{\delta_0^2}+1\Big)\int_\Omega |\nabla u|^2dx = \lambda\overline{c}||u||^2,$$

onde $\overline{c} = \frac{c}{\lambda_1}\Big(\frac{1}{\delta_0^2}+1\Big)$, o que implica

$$\lambda \geq \frac{1}{\overline{c}} = \eta_0.$$

Mostrando que se (5.2) possui solução, $u \geq 0$ não-trivial, então $\lambda \geq \eta_0$, para algum $\eta_0 > 0$. Portanto, para $\lambda < \eta_0$ o problema (5.2) não possui solução, $u \geq 0$ não-trivial.

■

**Teorema 5.1** *(Teorema de Regularidade) Uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u), \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.8}$$

*pertence a $W^{2,p}(\Omega)$ $\forall p > 1$, e portanto $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \mu < 1$.*

**Demonstração:**

Por hipotése $u$ é solução de (5.8), logo $-\Delta u(x) \in \lambda[\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))]$, q.t.p. em $\Omega$.

Considere $-\Delta u = w$ em $\Omega$. Daí, $u$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = w, \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

assim pelo Lema E.1

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v = \int_\Omega wv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e $w(x) \in \lambda[\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))]$, q.t.p. em $\Omega$. Desde que $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, temos $u \in L^{2^*}(\Omega)$.

Sabendo que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{s} = 0$, temos para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$f(s) \leq \varepsilon s, \ \forall s \geq M,$$

implicando

$$g(s) \leq \varepsilon s \ \forall s \geq M. \tag{5.9}$$

**Afirmação 5.1** *Existe $K > 0$ tal que $|g(s)| \leq K$, $\forall s \in [0, M]$.*

Com efeito, suponha por absurdo que $g$ não seja limitada em $[0, M]$. Logo, existe $\{s_n\} \subset (0, M)$ tal que

$$|g(s_n)| \geq n. \tag{5.10}$$

Sendo $(s_n) \subset (0, M)$, existe uma subsequência $(s_{n_j}) \subset (s_n)$ convergente, isto é

$$s_{n_j} \to c,$$

para algum $c \in [0, M]$.
Se $c > 0$, temos

$$g(s_{n_j}) \to g(c) \tag{5.11}$$

pois $g$ é uma função contínua em $(0, M]$. De (5.10)

$$|g(s_{n_j})| \to +\infty, \tag{5.12}$$

contradizendo (5.11).
Se $c = 0$,

$$g(s_{n_j}) \to g(0) = -a,$$

pois $g$ é contínua em $(0, M]$, contradizendo (5.12). Logo, $g$ é limitado em $[0, M]$, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq K \ \forall s \in [0, M],$$

mostrando a Afirmação 5.1.
Da Afirmação 5.1 e de (5.9), temos

$$|g(s)| \leq \varepsilon s + K, \ \forall s \in [0, +\infty),$$

donde segue-se pelo fato de $g(s) = 0 \ \forall s < 0$

$$|g(s)| \leq \varepsilon |s| + K, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

considerando $C = \varepsilon + K$, segue que

$$|g(s)| \leq C(|s| + 1), \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$|\lambda g(s)|^{2^*} \leq \overline{C}(|s|^{2^*} + 1), \tag{5.13}$$

onde $\overline{C} > 0$.

Observe que

$$w(x) \in \lambda[\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] = \begin{cases} 0, \ u(x) < 0 \\ \lambda[-a, 0], \ u(x) = 0 \\ \lambda g(u(x)), \ u(x) > 0, \end{cases}$$

q.t.p. em $\Omega$, portanto

$$\begin{cases} |w(x)| = 0, \ \text{q.t.p. em } [u < 0] \\ |w(x)| \leq \lambda a, \ \text{q.t.p. em } [u = 0] \\ |w(x)| = |\lambda g(u(x))|, \ \text{q.t.p. em } [u > 0]. \end{cases} \tag{5.14}$$

Considerando $\overline{C} \geq \lambda a$, temos de (5.13) e (5.14)

$$|w(x)|^{2^*} \leq C(|u(x)|^{2^*} + 1) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{5.15}$$

Desde que $u \in L^{2^*}(\Omega)$, temos de (5.15), $w \in L^{2^*}(\Omega)$ e assim segue pelo Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg (ver Apêndice E)

$$u \in W^{2,2^*}(\Omega).$$

Por outro lado, temos do Teorema E.9

$$W^{2,2^*}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{q_1}(\Omega),$$

para $q_1$ nos seguintes casos:

$1^0$ **caso:** Se $\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N} \leq 0$, isto é, $2^* > \frac{N}{2}$ $(N = 3, 4, 5)$, então do Teorema E.9

$$W^{2,2^*}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{\infty}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega) \ \forall p \geq 1.$$

Assim, sabendo que $u \in W^{2,2^*}(\Omega)$, temos $u \in L^p(\Omega), \ \forall p \geq 1$.

Utilizando a mesma idéia para mostrar (5.15), mostra-se que

$$|w(x)|^p \leq C(|u(x)|^p + 1), \ \text{q.t.p. em } \Omega, \forall p \geq 1, \tag{5.16}$$

para algum $C > 0$, implicando $w \in L^p(\Omega)$ $\forall p \geq 1$ (pois $u \in L^p(\Omega), \ \forall p \geq 1$). Segue-se do Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg, que $u \in W^{2,p}(\Omega), \ \forall p \geq 1$. Portanto do Teorema E.10, $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$.

$2^0$ **caso:** Se $\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N} > 0$, isto é, $2^* < \frac{N}{2}$ $(N > 6)$ então

$$W^{2,2^*}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{q_1}(\Omega), \ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N}.$$

Portanto, por argumento análogo se $u \in W^{2,2^*}(\Omega)$, então $w \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N}$, implicando

$$u \in W^{2,q_1}(\Omega), \text{ onde } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N} = \frac{1}{2} - \frac{3}{N}.$$

Considere agora os seguintes subcasos:

**(i)** $q \geq \frac{N}{2}$, isto é $N = 7, 8, 9, 10$.

Logo, do Teorema E.11

$$W^{2,q_1}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega}) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^\infty(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega), \ \forall p \geq 1,$$

assim $u \in L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$. Segue-se da desigualdade (5.16), $w \in L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$, implicando pelo Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg, $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \geq 1$, daí $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$ (ver Teorema E.10).

**(ii)** Se $q_1 < \frac{N}{2}$ $(N > 10)$, então

$$W^{2,q_1}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{q_2}(\Omega), \ \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{2}{N} = \frac{1}{2^*} - \frac{4}{N}.$$

Utilizando os mesmos argumentos anteriores, desde que $u \in W^{2,q_1}(\Omega)$ temos $u \in L^{q_2}(\Omega)$ e assim $w \in L^{q_2}(\Omega)$ logo $u \in W^{2,q_2}(\Omega)$.

Se $q_2 \geq \frac{N}{2}$ $(N = 11, 12, 13, 14)$

$$W^{2,q_2}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega}),$$

assim $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$, e portanto $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$.

Se $q_2 < \frac{N}{2}$ $(N > 14)$

$$W^{2,q_2}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{q_3}(\Omega),$$

onde

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_2} - \frac{2}{N} = \frac{1}{2^*} - \frac{6}{N} = \frac{1}{2} - \frac{7}{N}.$$

Desde que $u \in W^{2,q_2}(\Omega)$ temos $u \in L^{q_3}(\Omega)$ e assim $w \in L^{q_3}(\Omega)$, logo $u \in W^{2,q_3}(\Omega)$.

Se $q_3 \geq \frac{N}{2}$ $(N = 15, 16, 17, 18)$

$$W^{2,q_3}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega}),$$

o que implica $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p > 1$, e assim $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$.

Se $q_3 < \frac{N}{2}$ $(N > 18)$, argumentamos como anteriormente.

Repetindo esse argumento $n$-vezes, obteremos

$$\frac{1}{t_n} = \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{N}.$$

Assim, para $n$ suficientemente grande temos

$$\frac{1}{2} - \frac{2n+1}{N} \leq 0.$$

Portanto, $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \geq 1$, o que implica $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$. ■

**Lema 5.2** *Seja $\widehat{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ um ponto crítico de $I_\lambda$. Assumindo que $f$ cumpre as propriedades $(F_0)$ e $(F_1)$, $\widehat{u}_\lambda \in C^{1,\varepsilon}(\overline{\Omega})$ e $\widehat{u}_\lambda$ é uma solução forte não-negativa de (5.2).*

**Demonstração:**

Sabendo que $\widehat{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico de $I_\lambda$, temos $0 \in \partial I_\lambda(\widehat{u})$. Logo, existe $w \in \partial\Psi(\widehat{u}_\lambda) \subset (L^{q+1}(\Omega))^*$ tal que

$$0 = \langle \widehat{u}_\lambda, v\rangle - \lambda\langle w, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Segue, pelo Teorema da Representação de Riesz, que existe $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que

$$0 = \int_\Omega \nabla\widehat{u}_\lambda \nabla v dx - \lambda \int_\Omega \overline{w} v dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

implicando assim que $\widehat{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta\widehat{u} = \lambda\overline{w},\ \Omega \\ \widehat{u} = 0,\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.17}$$

Sabendo que $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, temos pelo Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg (ver Apêndice E)

$$\widehat{u}_\lambda \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

donde segue-se, pelo Teorema da Regularidade, que $\widehat{u}_\lambda \in C^{1,\varepsilon}(\overline{\Omega})$, com $0 < \varepsilon < 1$. Pelo Teorema 2.3, observe que

$$\overline{w}(x) \in [\underline{g}(\widehat{u}_\lambda(x)), \overline{g}(\widehat{u}_\lambda(x))],\ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

logo de (5.17) e pelo fato de $\lambda > 0$

$$-\Delta\widehat{u}_\lambda \in \lambda[\underline{g}(\widehat{u}_\lambda(x)), \overline{g}(\widehat{u}_\lambda(x))],\ \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{5.18}$$

onde

$$[\underline{g}(\widehat{u}_\lambda(x)), \overline{g}(\widehat{u}_\lambda(x))] = \begin{cases} g(\widehat{u}_\lambda) = 0, \ \widehat{u}_\lambda < 0, \\ [-a, 0], \ \widehat{u}_\lambda = 0, \\ g(\widehat{u}_\lambda), \ \widehat{u}_\lambda > 0. \end{cases}$$

Por Stampacchia [20]

$$-\Delta \widehat{u}_\lambda(x) = 0, \text{ q.t.p. em } \{x \in \Omega; \widehat{u}_\lambda(x) = 0\},$$

assim, sabendo que $g(\widehat{u}_\lambda(x)) = 0$, se $\widehat{u}_\lambda(x) = 0$, temos

$$-\Delta \widehat{u}_\lambda(x) = \lambda g(\widehat{u}_\lambda(x)), \text{ q.t.p. em } \{x \in \Omega; \widehat{u}_\lambda(x) = 0\}. \tag{5.19}$$

Segue de (5.18) e (5.19) que

$$-\Delta \widehat{u}_\lambda(x) = \lambda g(\widehat{u}_\lambda(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mostrando que $\widehat{u}_\lambda$ é solução forte de (5.2). Assim para finalizar este teorema, basta mostrar que $\widehat{u}_\lambda$ é não-negativa.

Sabemos que

$$\int_\Omega \nabla \widehat{u}_\lambda \nabla \varphi dx = \int_\Omega \lambda \overline{w} \varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Desde que $u^+$, $u^- \in H_0^1(\Omega)$, onde $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$, temos

$$\int_\Omega \nabla \widehat{u} \nabla \widehat{u_\lambda^-} dx = \int_\Omega \lambda \overline{w} \widehat{u_\lambda^-} dx. \tag{5.20}$$

Observando que

$$\langle \widehat{u}_\lambda, \widehat{u_\lambda^-} \rangle = \langle \widehat{u_\lambda^-}, \widehat{u_\lambda^-} \rangle,$$

tem-se de (5.20)

$$||\widehat{u_\lambda^-}||^2 = \int_\Omega \lambda \overline{w} \widehat{u_\lambda^-} dx.$$

Sendo $\overline{w}(x) = 0$ se $\widehat{u}_\lambda(x) < 0$ e $\widehat{u_\lambda^-}(x) = 0$ se $\widehat{u}_\lambda(x) \geq 0$, e concluímos que $\overline{w}\widehat{u_\lambda^-} \equiv 0$, o que implica

$$||\widehat{u_\lambda^-}||^2 = 0,$$

mostrando que $\widehat{u}_\lambda$ é não-negativa. ■

**Lema 5.3** *Assuma que $f$ cumpre a condição $(\widehat{F}_2)$. Então, $I_\lambda$ satisfaz a condição (PS).*

**Demonstração:**

Defina $L : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ dado por $L(u) = u$. Observe, que $L$ é um operador linear auto-adjunto limitado.

Observe, também que

$$\langle Lu, u\rangle = \langle u, u\rangle = ||u||^2,$$

logo $L$ é definido positivo. Sendo assim, pelo Teorema 3.5, $I_\lambda$ satisfaz a condição (PS), se a aplicação $\Psi$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\Psi(u) \leq \theta \min\{\langle w, u\rangle; w \in \partial\Psi(u)\},$$

para algum $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ e $M > 0$.

Dado $w \in \partial\Psi(u)$, sabemos que existe $\overline{w} \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ verificando

$$\overline{w}(x) \in [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] = \begin{cases} g(u) = 0, \ u(x) < 0 \\ [-a, 0], \ u(x) = 0 \qquad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ g(u), \ u(x) > 0 \end{cases}$$

com

$$\langle w, v\rangle = \int_\Omega \overline{w} v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Desde que $\overline{w}(x)u(x) = g(u(x))u(x)$ q.t.p. em $\Omega$, temos

$$\langle w, u\rangle = \int_\Omega \overline{w} u dx = \int_\Omega g(u) u dx, \ \forall w \in \partial\Psi(u). \tag{5.21}$$

Da hipotése $(\widehat{F_2})$, temos

$$G(s) \leq \theta g(s)s, \ \forall s \geq k, \ \theta \in (0, \frac{1}{2}), \ k > 0,$$

logo de (5.21)

$$\langle w, u\rangle \geq \frac{1}{\theta}\int_{[u\geq k]} G(u)dx + \int_{[u<k]} g(u)udx. \tag{5.22}$$

Observe que a função $h(s) = g(s)s$ é contínua, logo existe $M > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq M, \ \forall s \in [0, k]. \tag{5.23}$$

De (5.22) e (5.23)

$$\begin{aligned} \langle w, u\rangle &\geq \frac{1}{\theta}\int_{[u\geq k]} G(u)dx - M\int_{[u<k]} dx \\ &\geq \frac{1}{\theta}\int_{[u\geq k]} G(u)dx - M|\Omega|, \ \forall w \in \partial\Psi(u), \end{aligned}$$

o que implica

$$\min\{\langle w,u\rangle; w\in\partial\Psi(u)\}\geq \frac{1}{\theta}\int_{[u\geq k]} G(u)dx-\overline{M},$$

onde $\overline{M}=M|\Omega|$. Portanto,

$$\min\{\langle w,u\rangle; w\in\partial\Psi(u)\}\geq \frac{1}{\theta}\int_{\Omega} G(u)dx-\frac{1}{\theta}\int_{[u<k]} G(u)dx-\overline{M}.$$

Sabendo que $G(s)=0\ \forall s<0$ e que existe $K>0$ tal que $|G(s)|\leq K,\ \forall s\in[0,k]$ (pois $G$ é contínua), segue que

$$\min\{\langle w,u\rangle; w\in\partial\Psi(u)\}\geq \frac{1}{\theta}\Psi(u)-C\frac{1}{\theta},$$

onde ainda

$$\theta\min\{\langle\lambda w,u\rangle; w\in\partial\Psi(u)\}+\lambda C\geq\lambda\Psi(u),\ \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, da Propriedade $(P_2)$ do Capítulo 1, temos

$$\theta\min\{\langle w,u\rangle; w\in\partial(\lambda\Psi)(u)\}+\lambda C\geq(\lambda\Psi)(u),\ \forall u\in H_0^1(\Omega).\ \blacksquare$$

**Lema 5.4** *Assuma que $f$ verifica $(F_0)$, $(F_1)$ e que $\Omega=B_R(0)$. Se existe $u\in C^1(\overline{B}_R)\cap H_0^1(\Omega)$ que é não-negativa, radialmente e decrescente com $I_\lambda(u)=\min\limits_{u\in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$, temos que $u(x)>0$ em $B_R$.*

**Demonstração:**

Sabemos que $u=0$, em $\partial B_R$, desde que $u\not\equiv 0$, considere

$$R_0=\inf\{r\leq R; u(s)=0,\ r\leq s\leq R\},$$

onde $u(x)=u(r)$, $r=||x||$ e $0<R_0\leq R$.

Se $R_0=R$, temos

$$u(r)>0\ \forall r<R$$

pois $u$ é decrescente.

Se $R_0<R$, por definição de $R_0$

$$u(r)=0\ \forall r\in[R_0,R]$$

e

$$u(r)>0\ \forall r\in[0,R_0).$$

Defina $v : \Omega \to \mathbb{R}$ por $v(x) = u(\frac{R_0 x}{R})$, e observe que $v \in H_0^1(\Omega)$. Note também que

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_\Omega G(v)dx$$

ou seja

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u\Big(\frac{R_0 x}{R}\Big)|^2 \Big(\frac{R_0}{R}\Big)^2 dx - \lambda \int_{B_R} G\Big(u\Big(\frac{R_0}{R}x\Big)\Big)dx. \tag{5.24}$$

Defina, agora

$$\begin{aligned} h : B_R &\to B_{R_0} \\ x &\mapsto h(x) = \frac{R_0 x}{R}. \end{aligned}$$

Note que $h$ é um Difeomorfismo e $|Jh(x)| = (\frac{R_0}{R})^N$, sabendo disto temos pelo Teorema da Mudança de Variáveis

$$\int_{B_{R_0} = h(B_R)} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{B_R} |\nabla u(h(x))|^2 |J(h(x))| dx$$

e

$$\int_{B_{R_0} = h(B_R)} G(u(x))dx = \int_{B_R} G(h(x))|J(h(x))|dx,$$

o que implica

$$\int_{B_R} \Big|\nabla u\Big(\frac{Rx}{R_0}\Big)\Big|^2 dx = \Big(\frac{R}{R_0}\Big)^N \int_{B_{R_0}} \Big|\nabla u(x)\Big|^2 dx \tag{5.25}$$

e

$$\int_{B_R} G\Big(u\Big(\frac{Rx}{R_0}\Big)\Big)dx = \Big(\frac{R}{R_0}\Big)^N \int_{B_{R_0}} G(u(x))dx. \tag{5.26}$$

De (5.24)-(5.26)

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{R_0}\Big)^{N-2}\Big(\int_{B_{R_0}} |\nabla u|^2 dx - \lambda\Big(\frac{R}{R_0}\Big)^2 \int_{B_{R_0}} G(u)dx\Big). \tag{5.27}$$

Por outro lado, recordando que

$$u(r) = 0 \ \forall r \in [R_0, R]$$

temos

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{B_{R_0}} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{B_{R_0}} G(u)dx, \tag{5.28}$$

onde por hipotése $I_\lambda(u) = m < 0$.

De (5.27) e (5.28)

$$I_\lambda(v) = \Big(\frac{R}{R_0}\Big)^{N-2}\Big(m + \Big(1 - \Big(\frac{R}{R_0}\Big)^2\Big)\lambda \int_{B_{R_0}} G(u)dx\Big).$$

Observe que $\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 > 1$, pois estamos assumindo $R_0 < R$. Sendo assim

$$I_\lambda(v) < \Big(\frac{R}{R_0}\Big)^{N-2} m,$$

pois $G(u) \geq 0$, donde segue-se pelo fato de $\left(\frac{R}{R_0}\right)^{N-2} > 1$ (pois $N \geq 2$) e $m < 0$

$$I_\lambda(v) < m,$$

contradizendo o fato de $u$ ser o mínimo global do funcional $I_\lambda$. Logo, $R = R_0$ e portanto $u(x) > 0, \forall x \in B_R$. ■

**Teorema 5.2** *Assuma $(F_0)$, $(F_1)$ e $(F_3)$. Então, existe $\eta_1 > \eta_0$ tal que o problema (5.2) têm solução não-trivial e não-negativa $\widehat{u}_\lambda$ para todo $\lambda > \eta_1$. Além disso, quando $\Omega = B_R(0)$, temos uma solução não-trivial, não-crescente, radialmente-simétrica do problema (5.38) e se $N \geq 2$ esta solução é positiva.*

**Demonstração:**

Mostraremos agora que $I_\lambda$ é limitado inferiormente.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_2 > 0$ tal que

$$g(s) \leq \varepsilon s, \forall s \geq k_2,$$

implicando

$$G(s) \leq \int_0^{k_2} g(t)dt + \varepsilon \int_{k_2}^{s} tdt, \ \forall s \geq k_2,$$

assim

$$G(s) \leq \int_0^{k} g(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}(s^2 - k^2), \forall s \geq k_2. \tag{5.29}$$

Observe que

$$G(s) \leq M, \ \forall s \in [0, k_2], \tag{5.30}$$

pois $G$ é uma função contínua. Donde segue-se

$$G(s) \leq \frac{\varepsilon}{2}s^2 + C, \ \forall s \geq 0,$$

onde $C = -\varepsilon k^2 + M > 0$, (pois $\varepsilon \approx 0$) $\forall s \geq 0$.

Sabendo que $G(s) = 0$ $\forall s < 0$, temos

$$|G(s)| \leq \varepsilon |s|^2 + C,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega G(u)dx \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \varepsilon \int_\Omega |u|^2 dx - C|\Omega|,$$

consequentemente

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \varepsilon ||u||_2^2 - C|\Omega|.$$

Sabendo que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$I_\lambda(u) \geq (\frac{1}{2} - C_1\varepsilon)||u||^2 - C_2.$$

para algum $C_1 > 0$, onde $C_2 = C|\Omega|$.

Fixando $\varepsilon \approx 0$, de tal forma que $\frac{1}{2} - C_1\varepsilon > 0$, a função $h(t) = (\frac{1}{2} - C_1\varepsilon)t^2 - C_2$ é uma função limitada inferiormente, implicando que $I_\lambda(u)$ é limitada inferiormente, como queriamos mostrar.

Sabendo que $I_\lambda$ é um funcional Localmente Lipschitz, limitado inferiormente e verifica a condição de Palais-Smalle (ver Lema 5.3), temos pelo Teorema de Minimização 3.4 que o número real

$$c = \inf_{u \in X} I_\lambda(u)$$

é um valor crítico para $I_\lambda$, isto é existe $\widehat{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$0 \in \partial I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) \text{ e } c = I_\lambda(\widehat{u}_\lambda).$$

Pelo Lema 5.2, temos $\widehat{u}_\lambda \in C^{1,\alpha}$ e $\widehat{u}_\lambda$ é uma solução não-negativa de (5.2), onde $\alpha \in (0,1)$.

**Afirmação 5.2** *Existe* $\Lambda > 0$ *tal que* $I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) < 0,\ \forall \lambda \geq \Lambda$.

Seja $\widehat{w} \in H_0^1(\Omega)$, onde $\widehat{w}(x) = \delta$ $\forall x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ e $\widehat{w}(x) \in [0, \delta]$, $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, com $\delta > 0$ satisfazendo a Propriedade $(F_3)$.

Assim

$$I_\lambda(\widehat{w}) = \frac{1}{2}||\widehat{w}||^2 - \lambda\Big(\int_{\Omega_\varepsilon} G(\widehat{w})dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} G(\widehat{w})dx\Big),$$

segue pelo fato de $G(\delta) > 0$

$$I_\lambda(\widehat{w}) \leq \frac{1}{2}||\widehat{w}||^2 - \lambda\Big(G(\delta)|\Omega_\varepsilon| + \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} G(\widehat{w}))dx\Big) + \lambda G(\delta)|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|. \tag{5.31}$$

Sabendo que $G$ é contínua temos para algum $\widehat{M} > 0$

$$-\widehat{M} \leq G(t) \leq \widehat{M},\ \forall t \in [0, \delta],$$

o que implica

$$-G(t) \leq \widehat{M},\ \forall t \in [0, \delta]. \tag{5.32}$$

Existe $C > 0$, tal que

$$G(s) \leq C(1 + s^2),\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{5.33}$$

De fato, observe que por $(F_1)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_1 > 1$, tal que

$$g(s) \leq \varepsilon \leq \varepsilon s^{2-1}\ \forall s \geq k_1,$$

implicando que

$$G(s) \leq \int_0^{k_1} g(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}s^2 - \frac{\varepsilon}{2}k_1^2\ \forall s \geq k_1. \tag{5.34}$$

Sabendo que $G(s)$ é uma função contínua, existe $M > 0$ tal que

$$G(s) \leq M\ \forall s \in [0, k_1]. \tag{5.35}$$

Logo, de (5.34) e (5.35)

$$G(s) \leq M + \frac{\varepsilon}{2}s^2\ \forall s \in [0, +\infty),$$

consequentemente

$$G(s) \leq M + \frac{\varepsilon}{2}s^2\ \forall s \in \mathbb{R},$$

pois $G(s) = 0$, $\forall s < 0$. Considerando $C = \frac{\varepsilon}{2} + M$ temos

$$G(s) \leq C(1 + |s|^2)\ \forall s \in \mathbb{R},$$

como queriamos mostrar.

De (5.31)-(5.33)

$$I_\lambda(\widehat{w}) \leq \frac{1}{2}||\widehat{w}||^2 - \lambda G(\delta)|\Omega_\varepsilon| + \lambda|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|(\widehat{M} + C(1 + \delta^2)),$$

considerando $\overline{C} = \widehat{M} + C$

$$I_\lambda(\widehat{w}) \leq \frac{1}{2}||\widehat{w}||^2 - \lambda(G(\delta)|\Omega_\varepsilon| - \overline{C}(2+\delta^2)|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|).$$

Observe que

$$G(\delta)|\Omega_\varepsilon| - \overline{C}(2+\delta^2)|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| > 0,$$

para $\varepsilon \approx 0$ (pois $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| \approx 0$, para $\varepsilon \approx 0$), logo fixando $\varepsilon$, tal que

$$\eta = G(\delta)|\Omega_\varepsilon| - \overline{C}(2+\delta^2)|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| > 0,$$

temos

$$I_\lambda(\widehat{w}) \leq \frac{1}{2}||\widehat{w}||^2 - \lambda\eta.$$

Se

$$\lambda > \frac{||\widehat{w}||^2}{2\eta} = \Lambda > 0,$$

temos que

$$I_\lambda(\widehat{w}) < 0,$$

logo considerando $\eta_1 = \max\{\Lambda, \eta_0\}$ e sabendo que $\widehat{u}_\lambda$ é solução do problema (5.2) e $I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$, temos

$$I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) \leq I_\lambda(\widehat{w}) < 0, \ \forall \lambda > \eta_1 > 0,$$

mostrando a Afirmação 5.2.

Da Afirmação 5.2 podemos concluir que $\widehat{u}_\lambda$ é uma solução não-trivial.

Desde que a solução $\widehat{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ é não-negativa, temos pelo Teorema de Simetrização Schwarz (ver Apêndice F) que existe $\widehat{u}_\lambda^* \in H_0^1(\Omega)$ não-negativa radialmente simétrica decrescente, e mais, sendo $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, crescente (pois $f$ é crescente) e $G(0) = 0$

$$\int_\Omega G(\widehat{u}_\lambda)dx = \int_\Omega G(\widehat{u}_\lambda^*)dx, \tag{5.36}$$

Do Lema F.1 (ver Apêndice F), tem-se também

$$\int_\Omega |\nabla \widehat{u}_\lambda^*|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla \widehat{u}_\lambda| dx. \tag{5.37}$$

Sabendo que $I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$, temos

$$I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) \leq I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

mas de (5.36) e (5.37)

$$I_\lambda(\widehat{u}_\lambda^*) \leq I_\lambda(\widehat{u}_\lambda),$$

implicando que

$$I_\lambda(\widehat{u}_\lambda) = I_\lambda(\widehat{u}_\lambda^*).$$

Logo, $\widehat{u}_\lambda^*$ é um ponto crítico de $I_\lambda$. Donde segue-se pelo Lema 5.2, que $\widehat{u}_\lambda^* \in C^{1,\varepsilon}(\overline{\Omega})$ é uma solução de (5.2) e $I_\lambda(\widehat{u}_\lambda^*) < 0$.

Sabendo que $\Omega = B_R$, $N \geq 2$, $\widehat{u}_\lambda^* \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é radialmente simétrico, decrescente e $\widehat{u}_\lambda^* \geq 0$ um mínimo global de $I_\lambda$, com $I_\lambda(\widehat{u}_\lambda^*) < 0$, temos pelo Lema 5.4

$$\widehat{u}_\lambda^*(x) > 0, \ \forall x \in B_R.$$

Assim, segue-se que

$$\begin{cases} -\Delta \widehat{u}_\lambda^* = \lambda f(\widehat{u}_\lambda^*), \ \text{q.t.p. em } \Omega \\ \widehat{u}_\lambda^* = 0, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.38}$$

pois $g(t) = f(t)$, $\forall t > 0$. Mostrando que $\widehat{u}_\lambda^*$ é solução do Problema (5.38), como queriamos demonstrar. ■

# Capítulo 6

# Uma aplicação envolvendo Crescimento Crítico

Será mostrado aqui uma solução para uma classe de problemas Elípticos, envolvendo Crescimento Crítico, via Teorema do Passo da Montanha.

Considere o seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + f(u), \text{ em } \Omega, \\ u(x) \geq 0, \; u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{6.1}$$

com as seguintes hipotéses:

($\alpha_1$) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é regular ($C^{2,\beta}$), $\beta \in (0,1)$, limitado e aberto.

($\alpha_2$) Considere $f$ uma função mensurável, monótona crescente e que seu conjunto de pontos de descontinuidade (de primeira espécie ou tipo salto) seja enumerável, não contendo ponto de acumulação.

($\alpha_3$) Existem $C_1, C_2 > 0$ e $\sigma \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ tais que

$$|f(t)| \leq C_1 + C_2|t|^\sigma, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

($\alpha_4$) Assumiremos que $f(t) = 0$, se $t \leq 0$, com $f(0^+) = 0$ e para algum $a, b > 0$

$$f(t) \geq bh(t-a), \; \forall t \in \mathbb{R},$$

com $h(t) = 0$, se $t \leq 0$ e $h(t) = 1$, se $t > 0$.

$(\alpha_5)$ $\displaystyle\limsup_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} < \lambda_1$.

$(\alpha_6)$ $F(t) \leq \frac{1}{2^*}\underline{f}(t)t,\ \forall t\in\mathbb{R}$, onde

$$F(t)=\int_0^t f(s)ds.$$

Observe que o funcional energia associado ao problema (6.1) é $I : H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, dado por:

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx-\int_\Omega F(u)dx.$$

**Lema 6.1** *Sejam $u\in H_0^1(\Omega)$ e $\sigma'=\frac{\sigma+1}{\sigma}$. Se $w\in\partial I(u)$, existe $\overline{w}\in L^{\sigma'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle w,v\rangle=\int_\Omega \nabla u\nabla v dx-\int_\Omega |u|^{2^*-2}uvdx-\int_\Omega \overline{w}vdx,\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

*e*

$$\overline{w}(x)\in[\underline{f}(u(x)),\overline{f}(u(x))],\ q.t.p.\ em\ \Omega.$$

**Demonstração:**

Defina as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl}\Psi : H_0^1(\Omega)\subset L^{\sigma+1}(\Omega) & \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & \Psi(u)=\displaystyle\int_\Omega F(u)dx,\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\widehat{\Psi} : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & \widehat{\Psi}(u)=\displaystyle\frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl}J : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & J(u)=\displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx.\end{array}$$

**Afirmação 6.1** *$J,\widehat{\Psi}\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$, com*

$$\widehat{\Psi}'(u)=\int_\Omega |u|^{2^*-2}uvdx\ e\ J'(u)v=\langle u,v\rangle,\ \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Do Lema 4.1, $J\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e $J'(u)v=\langle u,v\rangle$, $\forall v\in H_0^1(\Omega)$.

Para provar que $\widehat{\Psi}\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e $\widehat{\Psi}'(u)v=\int_\Omega |u|^{2^*-2}uvdx$, $\forall v\in H_0^1(\Omega)$, basta observar que esta prova é feita de modo análogo ao que foi feito no Lema 4.3.

De $(\alpha_3)$, podemos concluir que $f$ têm crescimento subcrítico, daí segue-se, pelo Lema 2.2, que $\Psi \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Assim, pela Propriedade $(P_8)$ do Capítulo 1, tem-se que

$$\partial I(u) = \{J'(u)\} - \{\widehat{\Psi}'(u)\} - \partial \Psi(u).$$

Logo, dado $w \in \partial I(u)$ existe $\widehat{w} \in \partial \Psi(u) \subset (L^{\sigma+1}(\Omega))^*$ tal que

$$\langle w, v \rangle = J'(u)v - \widehat{\Psi}'(u)v - \langle \widehat{w}, v \rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.2}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice C) existe $\overline{w} \in L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$\langle \widehat{w}, v \rangle = \int_\Omega \overline{w} v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.3}$$

Da Afirmação 6.1 e de (6.2) e (6.3), segue que

$$\langle w, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{2^*-2} u v dx - \int_\Omega \overline{w} v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde pelo Teorema 2.3

$$\overline{w}(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

como queriamos demonstrar. ■

**Lema 6.2** *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ um ponto crítico de $I$. Então $u \in W^{2,\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e*

$$-\Delta u(x) - |u(x)|^{2^*-2} u(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \ \textit{q.t.p. em } \Omega.$$

**Demonstração:**

Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ seja um ponto crítico de $I$. Logo $0 \in \partial I(u)$. Daí, pelo Lema 6.1 existe $\overline{w} \in L^{\sigma'}(\Omega)$ tal que

$$\langle 0, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{2^*-2} u v dx - \int_\Omega \overline{w} v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega (|u|^{2^*-2} u + \overline{w}) v, \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que $u$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u + \overline{w}, \ \text{em } \Omega, \\ u = 0, \ \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.4}$$

Observe que $|u|^{2^*-2}u \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ e $\overline{w} \in L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\Omega)$.

Note que $\frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2N}{N+2}$ e $\frac{\sigma+1}{\sigma} > \frac{2N}{N+2}$, daí, $|u|^{2^*-2}u \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e $\overline{w} \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ (pois $L^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\Omega)) \subset L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega))$.

Sabendo que $u$ é solução fraca do problema (6.4) e $(|u|^{2^*-2}u + \overline{w}) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega))$, segue do Teorema de Agnon-Douglas-Niremberg (ver Apêndice E)

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\frac{2N}{N+2}}(\Omega).$$

Assim,

$$-\Delta u - |u|^{2^*-2}u = \overline{w}, \text{em } L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega), \tag{6.5}$$

Do Lema 6.1, temos

$$\overline{w}(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.6}$$

De (6.5) e (6.6)

$$-\Delta u(x) - |u(x)|^{2^*-2}u(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

mostrando que $u$ é solução do Problema (6.1). ■

**Lema 6.3** *Se $u$ é solução do problema* (6.1)*, então $u$ é solução forte deste problema.*

**Demonstração:**

Observe que o intervalo $[\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))]$ é sempre não-degenerado nos pontos onde $f$ é descontínua, do tipo salto, isto é

$$[\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \neq \{f(u(x))\},$$

para todo $x \in \Omega$ tal que $f$ é descontínua em $u(x)$. Assim, para mostrar que $u$ é solução forte do problema (6.1), basta mostrar que o conjunto dos pontos de descontínuidade tem medida nula.

Lembre que $f$ é contínua para todo $t \leq 0$. Suponha que $f$ seja descontínua em $a$, com $a > 0$.

**Afirmação 6.2** *Definindo $\Omega_a = \{x \in \Omega; u(x) = a\}$, temos $|\Omega_a| = 0$.*

Com efeito, suponha que $|\Omega_a| > 0$, por Stampacchia [20]

$$-\Delta u(x) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_a,$$

implicando, pela hipotése de $u$ ser solução de (6.1), que

$$-|a|^{2^*-2}a \in [\underline{f}(a), \overline{f}(a)], \text{ q.t.p. em } \Omega_a.$$

De $(\alpha_4)$, temos $\underline{f}(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, assim segue que

$$-|a|^{2^*-2}a = -a^{2^*-1} \geq 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

contradizendo o fato de $a > 0$. Logo $|\Omega_a| = 0$, mostrando a Afirmação 6.2.
Repetindo este argumento para um conjunto $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{a_n}$ enumerável tal que $f$ é descontínua no ponto $a_n$, do tipo salto, mostra-se que $|A| = 0$ (pois união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula).
Portanto,

$$-\Delta u(x) - |u(x)|^{2^*-2}u(x) \in \{f(x)\}, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

isto é

$$-\Delta u(x) = |u(x)|^{2^*-2}u(x) + f(x), \text{ q.t.p em } \Omega,$$

mostrando que $u$ é solução forte do problema 6.1. ■

**Lema 6.4** *O funcional $I$ satisfaz a condição $(PS)_c$, para $c \in (0, \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}})$ onde*

$$S = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\Big(\int_\Omega |u|^2 dx\Big)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

**Demonstração:**
Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$

$$\textbf{(i) } I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \textbf{(ii) } \lambda_I(u_n) \to 0.$$

**Afirmação 6.3** *A sequência $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.*

De fato, seja $w_n \in \partial I(u_n)$ tal que $||w_n||_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} = \lambda_I(u_n)$.
Segue, do Lema 6.1, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx - \int_\Omega F(u_n)dx \\ &\quad -\frac{1}{2^*}\Big(\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n dx - \int_\Omega |u_n|^{(2^*-2)}u_n u_n dx - \int_\Omega \overline{w}_n u_n dx\Big), \end{aligned}$$

implicando que

$$I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)||u_n||^2 + \int_\Omega \Big(\frac{\overline{w}_n u_n}{2^*} - F(u_n)\Big)dx,$$

donde segue-se, pelo fato de $\overline{w}_n(x) \geq \underline{f}(u_n(x))$ q.t.p. em $\Omega$, que

$$I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)||u_n||^2 + \int_\Omega \Big(\frac{\underline{f}(u_n)u_n}{2^*} - F(u_n)\Big)dx.$$

Assim, de $(\alpha_6)$

$$I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)||u_n||^2 + \int_\Omega \Big(F(u_n) - F(u_n)\Big)dx.$$

consequentemente

$$I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)||u_n||^2. \tag{6.7}$$

Observe, agora, que

$$I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle \leq |I(u_n)| + \frac{1}{2^*}|\langle w_n, u_n\rangle| \leq |I(u_n)| + \frac{1}{2^*}||w_n||_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*}||u_n||. \tag{6.8}$$

Sabendo que as sequências $(I(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(||w_n||_{(H_0^1(\Omega))^*})_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, existem $M_1, M_2 > 0$ tais que

$$|I(u_n)| \leq M_1 \text{ e } ||w_n||_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} \leq M_2, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

assim de (6.8)

$$I(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle \leq K(1 + ||u_n||), \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6.9}$$

onde $K = M_1 + \frac{1}{2^*}M_2$.

De (6.7) e (6.9)

$$K(1 + ||u_n||) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)||u_n||^2, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)||u_n||^2 - K(1 + ||u_n||) \leq 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

logo $||u_n||$ é limitado, ou seja a sequência $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, mostrando assim a Afirmação 6.3.

Sabendo que $(u_n)$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, e que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0, \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Donde segue-se, pela imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, 2^*),$$

que

$$u_{n_j} \to u_0, \text{ em } L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, 2^*). \tag{6.10}$$

Portanto considerando $q = \sigma + 1$, existe uma subsequência $(u_{n_{j_k}})$ de $(u_{n_j})$ verificando

$(a)$ $u_{n_{j_k}} \to u_0$, q.t.p. em $\Omega$;

$(b)$ $|u_{n_{j_k}}(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em $\Omega$, $\forall n_{j_k} \in \mathbb{N}$,

para algum $g \in L^{\sigma+1}(\Omega)$ (ver Apêndice C).

No intuito de simplificar a notação considere $k = n_{j_k}$.

**Afirmação 6.4** $\int_\Omega F(u_k)dx \to \int_\Omega F(u_0)dx$.

Sendo $f$ uma função de crescimento subcrítico, $(\alpha_3)$, segue do Lema 2.2 que $F$ é uma função Localmente Lipschitz. Assim, do item $(a)$

$$\lim_{k \to +\infty} F(u_k) = F(\lim_{k \to +\infty} u_k) = F(u_0), \text{ q.t.p em } \Omega,$$

implicando que

$$|F(u_k) - F(u_0)| \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.11}$$

Observe que

$$|F(s)| = \Big| \int_0^s f(t)dt \Big| \leq \int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} |f(t)|dt \leq \int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} (C_1 + C_2|t|^\sigma)dt,$$

implicando que

$$|F(s)| \leq C_1 \int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} dt + C_2 \int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} |t|^\sigma dt.$$

Se $s \geq 0$, temos

$$\int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} |t|^\sigma dt = \int_0^s t^\sigma dt = \frac{1}{\sigma+1} s^{\sigma+1} = \frac{1}{\sigma+1} |s|^\sigma s,$$

e se $s < 0$,

$$\int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} |t|^\sigma dt = \int_s^0 (-t)^\sigma dt = \frac{1}{\sigma+1} \Big( -(-s)^{\sigma+1} \Big) = \frac{1}{\sigma+1} |s|^\sigma s.$$

Portanto,

$$|F(s)| \leq C_1 \int_{\min\{0,s\}}^{\max\{0,s\}} dt + \frac{C_2}{\sigma+1} |s|^{\sigma+1} = C_1|s| + \frac{C_2}{\sigma+1} |s|^{\sigma+1}. \tag{6.12}$$

Veja que, se $|s| \leq 1$

$$|F(s)| \leq C_1 + \frac{C_2}{\sigma+1}|s|^{\sigma+1},$$

e se $|s| > 1$ temos

$$|F(s)| \leq C_1|s|^{\sigma+1} + \frac{C_2}{\sigma+1}|s|^{(\sigma+1)} = (C_1 + \frac{C_2}{\sigma+1})|s|^{(\sigma+1)}.$$

Logo,

$$|F(s)| \leq C_1 + \overline{C}_2|s|^{(\sigma+1)}, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{6.13}$$

onde $\overline{C}_2 = C_1 + \frac{C_2}{\sigma+1}$. De (6.12) e (6.13)

$$|F(s)| \leq C_1 + \overline{C}_2|s|^{(\sigma+1)}, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim

$$|F(u_k) - F(u_0)| \leq |F(u_k)| + |F(u_0)| \leq 2C_1 + \overline{C}_2|u_k|^{(\sigma+1)} + \overline{C}_2|u_0|^{(\sigma+1)}$$

implicando, do item $(b)$

$$|F(u_k) - F(u_0)| \leq 2C_1 + 2\overline{C}_2|g|^{(\sigma+1)} + C_2|u_0|^{(\sigma+1)}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Do item $(b)$ temos $u_0, g \in L^{\sigma+1}(\Omega)$. Assim, definindo

$$h(x) = 2C_1 + 2\overline{C}_2|g(x)|^{(\sigma+1)} + C_2|u_0(x)|^{(\sigma+1)},$$

tem-se que $h \in L^1(\Omega)$. Portanto

$$|F(u_k(x)) - F(u_0(x))| \leq h(x), \ \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{6.14}$$

com $h \in L^1(\Omega)$.

De (6.11) e (6.14), segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice C) que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |F(u_k) - F(u_0)| dx = 0,$$

o que implica

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \Big(F(u_k) - F(u_0)\Big) dx = 0, \tag{6.15}$$

mostrando a Afirmação 6.4.

**Afirmação 6.5** $\int_\Omega F(u_k - u_0)dx \to 0.$

Note que

$$F(u_k - u_0) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{6.16}$$

pois $F \in LL(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $u_k \to u_0$ q.t.p. em $\Omega$ (ver item $(a)$).
De (6.13)

$$|F(u_k - u_0)| \leq C_1 + \overline{C}_2 |u_k - u_0|^{(\sigma+1)} \leq C_1 + 2^{(\sigma+1)} \overline{C}_2 (|u_k|^{(\sigma+1)} + |u_0|^{(\sigma+1)})$$

implicando do item $(b)$, que

$$|F(u_k - u_0)| \leq C_1 + 2^{(\sigma+1)} \overline{C}_2 (g^{(\sigma+1)} + |u_0|^{(\sigma+1)}), \tag{6.17}$$

definindo $\overline{h}(x) = C_1 + 2^{(\sigma+1)} \overline{C}_2 (g^{(\sigma+1)}(x) + |u_0(x)|^{(\sigma+1)})$, temos $\overline{h} \in L^1(\Omega)$.
De (6.16) e (6.17), segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega |F(u_k - u_0)| dx = 0,$$

Portanto

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega F(u_k - u_0) dx = 0,$$

mostrando a Afirmação 6.5.

**Afirmação 6.6** *$u_0 \in W^{2, \frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e*

$$-\Delta u_0(x) - |u_0(x)|^{(2^*-2)} u_0(x) \in [\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Seja $w_n \in \partial I(u_n)$, com $||w_n||_{(H_0^1(\Omega))^*} = \lambda_I(u_n)$. Observe que do Lema 6.1

$$\langle w_n, \phi \rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx - \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n \phi dx - \int_\Omega \overline{w}_n \phi dx, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{6.18}$$

com

$$\overline{w}_n(x) \in [\underline{f}(u_n(x)), \overline{f}(u_n(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.19}$$

Observe, também, que

$$\lim_{n \to +\infty} |\langle w_n, \phi \rangle| \leq \lim_{n \to +\infty} ||w_n||_{(H_0^1(\Omega))^*} ||\phi|| = 0,$$

logo

$$\langle w_n, \phi \rangle \to 0, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{6.20}$$

Defina as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl} T_\phi : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & T_\phi(u) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \langle u, \phi \rangle \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T}_\phi : L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \widehat{T}_\phi(u) = \displaystyle\int_\Omega u\phi dx, \end{array}$$

onde $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Note que $T_\phi \in (H_0^1(\Omega))^*$ e $\widehat{T}_\phi \in (L^{\frac{2^*}{\sigma}})^*$.
Desde que

$$u_k \rightharpoonup u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

temos

$$T_\phi(u_k) \to T_\phi(u_0),$$

isto é

$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla \phi dx \to \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx, \tag{6.21}$$

Usando o crescimento de $f$

$$|f(t)| \leq C_1 + C_2|t|^\sigma, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

obtemos

$$|\overline{f}(s)| \leq C_1 + C_2|s|^\sigma.$$

Logo,

$$|\overline{f}(s)| \leq C_1 + C_2|s|^\sigma, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{6.22}$$

Observe que

$$0 \leq \underline{f}(u_k(x)) \leq \overline{w}_k(x) \leq \overline{f}(u_k(x)) \leq |\overline{f}(u_k(x))|, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde segue-se de (6.22)

$$|\overline{w}_k(x)| \leq C_1 + C_2|u_k(x)|^\sigma, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que implica

$$|\overline{w}_k(x)|^{\frac{2^*}{\sigma}} \leq 2^{\frac{2^*}{\sigma}}(C_1^{\frac{2^*}{\sigma}} + C_2|u_k|^{2^*}) = \overline{C}_1 + \overline{C}_2|u_k|^{2^*}, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

logo
$$\int_\Omega |\overline{w}_k|^{\frac{2^*}{\sigma}} dx \leq \int_\Omega \overline{C}_1 dx + \overline{C}_2 \int_\Omega |u_k|^{2^*} dx,$$
sendo assim
$$||\overline{w}_k||_{\frac{2^*}{\sigma}}^{\frac{2^*}{\sigma}} \leq \overline{C}_1|\Omega| + \overline{C}_2||u_k||_{2^*}^{2^*}. \tag{6.23}$$
Sabendo que $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega)$ e $(u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ (ver Afirmação 6.3), temos para algum $M > 0$
$$||u_k||_{2^*} \leq C||u_k|| \leq CM = M_0, \tag{6.24}$$
portanto $(u_k)$ é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$. Assim, segue de (6.23)
$$||\overline{w}_k||_{\frac{2^*}{\sigma}}^{\frac{2^*}{\sigma}} \leq K_1 + \overline{C}_2 M_0 = M_1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$
onde $M_1 > 0$. Logo, $(\overline{w}_k)$ é uma sequência limitada em $L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega)$. Desde que $L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, existem uma subsequência $(\overline{w}_{k_i}) \subset (\overline{w}_k)$ e $\overline{w}_0 \in L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega)$ tais que
$$\overline{w}_{k_i} \rightharpoonup \overline{w}_0 \text{ em } L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega),$$
Assim, segue pelo fato de $\widehat{T} \in (L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega))^*$ que
$$\widehat{T}_\phi(\overline{w}_{k_i}) \to \widehat{T}_\phi(\overline{w}_0),$$
implicando que
$$\int_\Omega \overline{w}_{k_i}\phi dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx, \ \forall \phi \in L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega), \tag{6.25}$$
Em particular
$$\int_\Omega \overline{w}_{k_i}\phi dx \to \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{6.26}$$
pois $H_0^1 \subset L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega)$.

Do item $(a)$, tem-se
$$|u_k|^{2^*-2}u_k \to |u_0|^{2^*-2}u_0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{6.27}$$
Defina
$$g_k(x) = |u_k(x)|^{2^*-2}u_k(x) \text{ e } g_0(x) = |u_0(x)|^{2^*-2}u_0(x),$$
logo, $|g_k| = |u_k|^{2^*-1}$ e $g_k \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$, pois $u_k \in H_0^1 \subset L^{2^*}(\Omega)$

Observe que
$$\int_\Omega |g_k|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx = \int_\Omega |u_k|^{2^*} dx,$$

implicando de (6.24)

$$||g_k||_{\frac{2^*}{2^*-1}}^{\frac{2^*}{2^*-1}} = ||u_k||^{2^*} \leq M_0,$$

mostrando que a sequência $(g_k)$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$.

Sabendo que $(g_{k_i})$ é limitado em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ (pois $(g_{k_i}) \subset (g_k)$) e verifica (6.27) (pois toda subsequência de uma sequência convergente é convergente), temos

$$g_{k_i} \rightharpoonup g \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$$

(ver Apêndice C), logo

$$\int_\Omega g_{k_i}\phi dx \to \int_\Omega g_0\phi dx,\ \forall \phi \in L^{2^*}(\Omega),$$

em particular

$$\int_\Omega g_{k_i}\phi dx \to \int_\Omega g_0\phi dx,\ \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{6.28}$$

Passando ao limite $m \to +\infty$ em (6.18), obtemos de (6.20), (6.21), (6.26) e (6.28)

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx = \int_\Omega |u_0|^{(2^*-2)} u_0 \phi dx + \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx. \tag{6.29}$$

Logo, $u_0$ é solução fraca do problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = |u_0|^{(2^*-2)} u_0 + \overline{w}_0, \text{ em } \Omega \\ u_0 = 0,\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.30}$$

onde $|u_0|^{(2^*-2)} u_0 \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}} = L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e $\overline{w}_0 \in L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega)$.

Note que $\frac{2^*}{\sigma} > \frac{2N}{N+2}$ (pois $\sigma \in (1, \frac{N+2}{N-2})$), o que implica $L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega) \subset L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, logo $\overline{w}_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Assim, segue que

$$(|u_0|^{(2^*-2)} u_0 + \overline{w}_0) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega), \tag{6.31}$$

implicando, pelo Teorema Agnon-Douglas-Niremberg (ver Apêndice E) $u_0 \in W^{2,\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega) = W^{2,\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, portanto $-\Delta u_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, donde segue-se, de (6.30) e (6.31)

$$-\Delta u_0 - |u_0|^{2^*-2} u_0 = \overline{w}_0 \text{ em } L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega). \tag{6.32}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Apêndice C) existe um $w_0 \in \left(L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega)\right)^*$ tal que

$$\langle w_0, \phi \rangle = \int_\Omega \overline{w}_0 \phi dx,\ \forall \phi \in L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega). \tag{6.33}$$

Assim como, para cada $k_i$ existe um $\widehat{w}_{k_i} \in \Big(H_0^1(\Omega)\Big)^* \subset \Big(L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega)\Big)^*$ tal que

$$\langle \widehat{w}_{k_i}, \phi \rangle = \int_\Omega \overline{w}_{k_i} \phi dx, \ \forall \phi \in L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega), \tag{6.34}$$

onde $\widehat{w}_{k_i} \in \partial\psi(u_{k_i})$.

Observe que de (6.25), (6.33) e (6.34)

$$\widehat{w}_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} w_0, \text{ em } \Big(L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega)\Big)^*, \tag{6.35}$$

De (6.10)

$$u_{k_i} \to u_0, \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega). \tag{6.36}$$

Sabendo que $\partial\Psi$ é fechado-* (ver $(P_4)$), temos de (6.35) e (6.36) $w_0 \in \partial\Psi(u_0)$. Daí segue-se, pelo Teorema 2.3

$$\overline{w}_0(x) \in [\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.37}$$

De (6.32) e (6.37)

$$-\Delta u_0(x) - |u_0(x)|^{2^*-2}u_0(x) \in [\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

mostrando a Afirmação 6.6.

Veja que considerando $\phi = u_0$ em (6.29) temos

$$I(u_0) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big) \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\overline{w}_0 u_0 - F(u_0)\Big) dx. \tag{6.38}$$

Sabendo que $\overline{w}_0(x) \geq \underline{f}(u_0(x))$, q.t.p. em $\Omega$, $u_0(x)\underline{f}(u_0(x)) = 0$, se $u_0(x) < 0$ (pois $\underline{f}(u_0(x)) = 0$, se $u_0(x) < 0$) e $u_0(x)\overline{w}_0(x) = 0$, se $u_0(x) < 0$ (pois $\overline{w}_0(x) = 0$, se $u_0(x) < 0$), temos

$$\overline{w}_0(x)u_0(x) \geq \underline{f}(u_0(x))u_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

implicando pelo fato de $2 < 2^*$

$$\frac{1}{2}\overline{w}_0(x)u_0(x) \geq \frac{1}{2^*}\underline{f}(u_0(x))u_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.39}$$

De (6.38) e (6.39)

$$I_\lambda(u_0) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big) \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \int_\Omega \Big(\frac{1}{2^*}\underline{f}(u_0)u_0 - F(u_0)\Big) dx,$$

donde segue-se de $(\alpha_6)$, que

$$I(u_0) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big) \int_\Omega |u_0|^2 dx \geq 0, \tag{6.40}$$

pois $2 < 2^*$.

Observe, agora, que

$$\int_\Omega |\nabla u_{k_i}|^2 dx = \langle u_{k_i}, u_{k_i}\rangle = \langle u_{k_i} - u_0, u_{k_i} - u_0\rangle + 2\langle u_{k_i} - u_0, u_0\rangle + \langle u_0, u_0\rangle. \tag{6.41}$$

Sabendo que $u_{k_i} \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos $(u_{k_i} - u_0) \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$, implicando

$$\langle u_{k_i} - u_0, u_0\rangle = \int_\Omega \nabla(u_{k_i} - u_0)\nabla u_0 dx \to 0. \tag{6.42}$$

Segue de (6.41) e (6.42) que

$$\int_\Omega |\nabla u_{k_i}|^2 dx = \int_\Omega |\nabla(u_{k_i} - u_0)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + o_m(1). \tag{6.43}$$

onde $o_{k_i}(1) \approx 0$, para $m$ suficientemente grande.

**Afirmação 6.7**

$$\int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*} dx = \int_\Omega |u_{k_i} - u_0|^{2^*} dx + \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + o_{k_i}(1),$$

*e*

$$\int_\Omega (u_{k_i}|u_{k_i}|^{(2^*-2)} - |u_0|^{(2^*-2)}u_0)(u_{k_i} - u_0)dx = \int_\Omega |u_{k_i} - u_0|^{2^*} dx + o_{k_i}(1),$$

*onde $o_{k_i}(1) \approx 0$, para $k_i$ suficientemente grande.*

Note que $(u_{k_i})$ é limitado em $L^{2^*}(\Omega)$, pois $(u_{k_i})$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega)$. Desde que $(u_{k_i})$ é limitado em $L^{2^*}(\Omega)$ e $u_{k_i} \to u_0$ pontualmente q.t.p. em $\Omega$ (ver item $(a)$), temos

$$\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = \lim_{k_i \to +\infty} \Big(\int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*} dx - \int_\Omega |u_{k_i} - u_0|^{2^*} dx\Big)$$

(ver Apêndice C), consequentemente

$$\int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*} dx = \int_\Omega |u_{k_i} - u_0|^{2^*} dx + \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + o_{k_i}(1). \tag{6.44}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_{k_i}|u_{k_i}|^{2^*-2} - |u_0|^{2^*-2}u_0)(u_{k_i} - u_0) &= \int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*} - \int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*-2}u_{k_i}u_0 \\ &\quad - \int_\Omega |u_0|^{2^*-2}u_0u_{k_i} + \int_\Omega |u_0|^{2^*}. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Desde que $u_{k_i} \to u_0$ q.t.p. em $\Omega$ (ver itema $(a)$), temos

$$|u_{k_i}|^{2^*-2}u_{k_i} \to |u_0|^{2^*-2}u_0, \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{6.46}$$

Assim, sabendo que $(u_{k_i})$ é limitada em $L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, 2^*]$ (pois $(u_{k_i})$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, 2^*]$), segue que

$$u_{k_i} \rightharpoonup u_0, \text{ em } L^{2^*}(\Omega)$$

e

$$|u_{k_i}|^{2^*-2}u_{k_i} \rightharpoonup |u_0|^{2^*-2}u_0, \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$$

(ver Apêndice C), ou seja,

$$\int_\Omega u_{k_i}\phi_1 dx \to \int_\Omega u_0\phi_1 dx, \ \forall \phi_1 \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*-2}u_{k_i}\phi_2 dx \to \int_\Omega |u_0|^{2^*-2}u_0\phi_2 dx, \ \forall \phi_2 \in L^{2^*}(\Omega).$$

em particular para $\phi_1 = |u_0|^{2^*-2}u_0 \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ e $\phi_2 = u_0 \in L^{2^*}$. Logo,

$$\int_\Omega u_{k_i}|u_0|^{2^*-2}u_0 dx \to \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \tag{6.47}$$

e

$$\int_\Omega |u_{k_i}|^{2^*-2}u_{k_i}u_0 dx \to \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx. \tag{6.48}$$

De (6.44)-(6.48)

$$\int_\Omega (u_{k_i}|u_{k_i}|^{(2^*-2)} - |u_0|^{(2^*-2)}u_0)(u_{k_i} - u_0)dx = \int_\Omega |u_{k_i} - u_0|^{2^*} dx + o_{k_i}(1),$$

mostrando a Afirmação 6.7.

Defina $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$J(u) = I(u) + \int_\Omega F(u)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx.$$

Observe que de (6.43) e da Afirmação 6.7

$$I(u_{k_i}) = I(u_0) + J(u_{k_i} - u_0) - \int_\Omega F(u_{k_i})dx + \int_\Omega F(u_0)dx + o_{k_i}(1),$$

para $k_i$ suficientemente grande. Logo, da Afirmação 6.4

$$I(u_{k_i}) = I(u_0) + J(u_{k_i} - u_0) + o_{k_i}(1), \tag{6.49}$$

para $k_i$ suficientemente grande.

Observe, agora, que

$$\langle w_{k_i}, u_{k_i}-u_0\rangle = \int_\Omega |\nabla(u_{k_i}-u_0)|^2dx - \int_\Omega |u_{k_i}-u_0|^{(2^*-2)}(u_{k_i}-u_0)^2dx - \int_\Omega \overline{w}(u_{k_i}-u_0)dx,$$

consequentemente

$$\langle w_{k_i}, u_{k_i}-u_0\rangle = \int_\Omega |\nabla(u_{k_i}-u_0)|^2dx - \int_\Omega |u_{k_i}-u_0|^{2^*}dx + \langle \widehat{w}_{k_i}, u_{k_i}-u_0\rangle,$$

donde segue-se pelo fato de $\langle \widehat{w}_{k_i}, u_{k_i}-u_0\rangle$, pois $\widehat{w}_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} w_0$ em $\left(L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega)\right)^*$ (ver (6.35)) e $u_{k_i}-u_0 \to 0$ em $L^{\frac{2^*}{2^*-\sigma}}(\Omega)$ (ver (6.36))

$$\langle w_{k_i}, u_{k_i}-u_0\rangle = \int_\Omega |\nabla(u_{k_i}-u_0)|^2dx - \int_\Omega |u_{k_i}-u_0|^{2^*}dx + o_{k_i}(1), \tag{6.50}$$

onde $o_{k_i}(1) \approx 0$, para $k_i$ suficientemente grande.

Desde que

$$w_{k_i} \to 0 \text{ em } \left(H_0^1(\Omega)\right)^*,$$

e $(u_{k_i})$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ (ver Afirmação 6.3),

$$\langle w_{k_i}, u_{k_i}-u_0\rangle \to 0. \tag{6.51}$$

De (6.50) e (6.51)

$$\int_\Omega |\nabla(u_{k_i}-u_0)|^2dx = \int_\Omega |u_{k_i}-u_0|^{2^*}dx + o_{k_i}(1). \tag{6.52}$$

Logo,

$$J(u_{k_i}-u_0) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |\nabla(u_{k_i}-u_0)|^2dx + o_{k_i}(1),$$

o que implica

$$J(u_{k_i}-u_0) = \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla(u_{k_i}-u_0)|^2dx + o_{k_i}(1).$$

Sendo assim, segue de (6.49)

$$\frac{1}{N}||u_{k_i}-u_0||^2 + o_{k_i}(1) = J(u_{k_i}-u_0) = I(u_{k_i}) - I(u_0) + o_{k_i}(1). \tag{6.53}$$

Por hipotése, $c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, logo podemos fixar um $\varepsilon > 0$ tal que

$$c+\varepsilon < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Desde que $I(u_{k_i}) + o_{k_i}(1) \to c$, existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(u_{k_i}) + o_{k_i}(1) \leq c + \varepsilon, \ \forall k_i \geq m_0. \tag{6.54}$$

De (6.53) e (6.54)

$$\frac{1}{N}||u_{k_i} - u_0||^2 + o_{k_i}(1) \leq c + \varepsilon - I(u_0)$$

implicando, pelo fato de $I(u_0) \geq 0$ (ver (6.50)), que

$$\frac{1}{N}||u_{k_i} - u_0||^2 + o_{k_i}(1) \leq c + \varepsilon < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}, \ \forall k_i \geq m_0. \tag{6.55}$$

para $k_i$ suficientemente grande.

Definindo $y_{k_i} = ||u_{k_i} - u_0||^2$, observamos que $(y_{k_i}) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência real limitada (pois $(u_{k_i})$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$), logo pelo Teorema de Bolzano Weierstrass $(y_{k_i})$ possui uma subsequência convergente, isto é existe $(y_{k_{i_m}}) \subset (y_{k_i})$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_{k_{i_m}} \to y_0.$$

Suponha que $y_0 > 0$. De (6.55) temos

$$y_{k_{i_m}} + o_{k_{i_m}}(1) \leq N(c + \varepsilon) < S^{\frac{N}{2}}, \ \forall k_{i_m} \geq m_0,$$

passando ao limite $k_{i_m} \to +\infty$, obtemos

$$0 < y_0 \leq N(c + \varepsilon) < S^{\frac{N}{2}},$$

o que implica $y_0 < S^{\frac{N}{2}}$.

Defina agora $\widehat{y}_{k_{i_m}} = ||u_{k_{i_m}} - u_0||_{2^*}^{2^*}$, observe que

$$\widehat{y}_{k_{i_m}} \to y_0,$$

pois de (6.52)

$$\int_\Omega |\nabla(u_{k_{i_m}} - u_0)|^2 dx = \int_\Omega |u_{k_{i_m}} - u_0|^{2^*} dx + o_{k_{i_m}}(1),$$

isto é

$$||u_{k_{i_m}} - u_0||^2 = ||u_{k_{i_m}} - u_0||_{2^*}^{2^*} + o_{k_{i_m}}(1).$$

Sendo assim, sabendo que

$$S \leq \frac{||u_n - u_0||^2}{(||u_n - u_0||_{2^*}^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

temos

$$S \leq \frac{y_{k_{i_m}}}{(y_{k_{i_m}})^{\frac{2}{2^*}}},$$

passando ao limite $k_{i_m} \to +\infty$, obtemos

$$S \leq \frac{y_0}{(y_0)^{\frac{2}{2^*}}} = (y_0)^{1-\frac{2}{2^*}} = (y_0)^{\frac{2}{N}}$$

o que implica

$$y_0 \geq S^{\frac{N}{2}},$$

contradizendo o fato de $y_0 < S^{\frac{N}{2}}$. Logo $y_0 = 0$.

Mostrando que

$$||u_{k_{i_m}} - u_0|| \to 0,$$

ou seja $(u_n)$ possui uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$. Assim o funcional $I$ satisfaz a condição $(PS)_c$. ■

**Observação 6.1** *No lema a seguir consideraremos $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ uma auto-função positiva de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associado a $\lambda_1$, isto é*

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, \ \ em \ \Omega, \\ \phi_1 > 0 \ \Omega \\ \phi_1 = 0, \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*com $||\phi_1||_2 = 1$.*

**Lema 6.5** *Para todo $b > 0$, existem $a^* = a^*(b) > 0$ e $T = T(b) > 0$, tal que $\forall a \in (0, a^*)$ temos*

$$c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

*onde $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max \Big\{ I(\gamma(t)); t \in [0,1] \Big\}$, com*

$$\Gamma = \Big\{ \gamma \in C^0([0,1], H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = T\phi_1 \Big\} \quad e \quad I(T\phi_1) < 0.$$

**Demonstração:**

Defina as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} J : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \dfrac{1}{2^*}\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} dx, \end{array}$$

$g(t) = I(t\phi_1)$ e $j(t) = J(t\phi_1)$. Veja que

$$g(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\phi_1 t)|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |t\phi_1|^{2^*} dx - \int_\Omega F(\phi_1 t),$$

sendo $F(\phi_1 t) \geq 0$, temos

$$g(t) \leq \frac{1}{2}||t\phi_1||^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\phi_1|^{2^*} dx = \frac{\lambda_1}{2}t^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\phi_1|^{2^*} dx = j(t).$$

Observe que $j'(t) = 0$ se, e só se

$$\frac{2\lambda_1}{2}t - \frac{2^*}{2^*}t^{(2^*-1)}\int_\Omega |\phi_1|^{2^*} dx = 0,$$

o que implica

$$t = \Big(\frac{\lambda_1}{\int_\Omega |\phi|^{2^*} dx}\Big)^{\frac{1}{2^*-2}} \text{ ou } t = 0.$$

Portanto, considerando $t^* = \Big(\frac{\lambda_1}{\int_\Omega |\phi|^{2^*} dx}\Big)^{\frac{1}{2^*-2}}$, temos $j'(t^*) = 0$. Observe, também, que $j'(t) > 0$, $\forall t \in (0, t^*)$ e $j'(t) < 0$, $\forall t \in (t^*, +\infty)$, daí $j|_{(0,t^*]}$ é crescente e $j|_{[t^*,+\infty)}$ é decrescente. Logo, $t^*$ é um ponto de máximo para a função $j$. Fixe $T \approx 0$, $T > 0$ tal que

**(j)** $T < t^*$;

**(jj)** $\lambda_1 \frac{T^2}{2} - \frac{T^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\phi_1|^{2^*} dx - bT\int_\Omega \phi_1 dx < 0$;

**(jjj)** $\lambda_1 \frac{T^2}{2} - \frac{T^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \phi_1^{2^*} dx < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

**Afirmação 6.8** $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_\Omega (T\phi_1 - a)^+ dx = b\int_\Omega T\phi_1 dx$

Sabendo que $T\phi_1(x) > 0$, existe $a_0 = a_0(x) > 0$, tal que

$$(T\phi_1 - a)^+(x) = T\phi_1(x) - a, \ \forall a \in (0, a_0),$$

passando ao limite de $a \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{a\to 0^+}(T\phi_1 - a)^+(x) = T\phi_1(x). \tag{6.56}$$

Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $a_n \to 0^+$, logo existe $c > 0$ tal que

$$|a_n| \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que,

$$|b(T\phi_1 - a_n)^+| \leq |bT\phi_1| + |ba_n| \leq bT|\phi_1| + bc, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6.57}$$

onde $bT|\phi_1|, bc \in L^1(\Omega)$, e de (6.56)

$$b(T\phi_1 - a_n)^+(x) \to bT\phi_1(x). \tag{6.58}$$

De (6.57) e (6.58), segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty} b \int_\Omega (T\phi_1 - a_n)^+ dx = b \int_\Omega T\phi_1 dx,$$

para toda sequência $a_n \to 0^+$.

Portanto,

$$\lim_{a\to 0^+} b \int_\Omega (T\phi_1 - a)^+ dx = b \int_\Omega T\phi_1 dx,$$

provando assim a Afirmação 6.8.

Por definição, segue da Afirmação 6.8, que dado $\varepsilon > 0$, existe $a^* = a^*(b) > 0$ tal que

$$|b \int_\Omega (T\phi_1 - a)^+ dx - b \int_\Omega T\phi_1 dx| < \varepsilon, \ \forall a \in (0, a^*),$$

o que implica

$$b \int_\Omega (T\phi_1 - a)^+ dx > b \int_\Omega T\phi_1 dx - \varepsilon, \ \forall a \in (0, a^*). \tag{6.59}$$

De $(\alpha_4)$, temos

$$f(t) \geq bh(t-a), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim dado $s \in \mathbb{R}$, segue que

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \geq \int_0^s bh(t-a)dt,$$

onde

$$\int_0^s bh(t-a)dt = \begin{cases} 0, \ \text{se } s \leq a \\ b(s-a), \ \text{se } s > a, \end{cases}$$

logo

$$F(s) \geq b(s-a)^+, \ s \in \mathbb{R},$$

o que implica

$$\int_\Omega F(T\phi_1)dx \geq \int_\Omega b(T\phi_1 - a)^+ dx. \tag{6.60}$$

Segue de (6.59) e (6.60)

$$\int_\Omega F(T\phi_1)dx > b\int_\Omega T\phi_1 dx - \varepsilon,\ \forall a \in (0,a^*).$$

Assim,

$$I(T\phi_1) < \frac{\lambda_1}{2}T^2 - \frac{T^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\phi_1|^{2^*}dx - b\int_\Omega T\phi_1 dx + \varepsilon,$$

donde segue-se, de **(jj)** e pelo fato de $\varepsilon \approx 0$, que

$$I(T\phi_1) < 0.$$

Sabemos que $j|_{(0,t^*]}$ é crescente, logo sendo $T < t^*$ (ver **(j)**), temos $j(t) \leq j(T),\ \forall t \in [0,T]$. Sendo assim

$$I(t\phi_1) = j(t) - \int_\Omega F(t\phi_1)dx \leq j(t) \leq j(T) = \frac{\lambda_1}{2}T^2 - \frac{T^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\phi_1|^{2^*}dx,$$

implicando de **(jjj)**

$$I(t\phi_1) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},\ \forall t \in [0,T].$$

Portanto,

$$\max\Big\{I(t\phi_1); t \in [0,T]\Big\} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}. \tag{6.61}$$

Defina

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\ \rightarrow\ H_0^1(\Omega) \\ t &\ \mapsto\ \gamma(t) = t(T\phi_1), \end{aligned}$$

observe que

$$\gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = T\phi_1,$$

e mais $\gamma \in C^0([0,1]; H_0^1(\Omega))$, logo $\gamma \in \Gamma$. Note que

$$\max\{I(\gamma(t)); t \in [0,1]\} = \max\{I(t\phi_1); t \in [0,T]\},$$

logo de (6.61)

$$\max\{I(\gamma(t)); t \in [0,1]\} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},$$

donde segue-se

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\Big(\max\{I(\gamma(t)); t \in [0,1]\}\Big) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},$$

como queriamos demonstrar.

**Lema 6.6** *Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha$, $\forall u \in \partial B_\rho \subset H_0^1(\Omega)$.*

**Demonstração:**

De $(\alpha_5)$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = m < \lambda_1,$$

logo dado $\varepsilon > 0$, tal que $m + \varepsilon < \lambda_1$, existe $\delta_0$ satisfazendo

$$\frac{f(t)}{t} < m + \varepsilon < \lambda_1,\ \forall t \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\},$$

assim

$$f(t) < (m + \varepsilon)t < t\lambda_1,\ \forall t \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\},$$

de onde segue que

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t (m+\varepsilon)sds = \frac{1}{2}(m+\varepsilon)t^2,\ \forall t \in (-\delta_0, \delta_0),$$

implicando

$$F(t) \leq \frac{1}{2}(m+\varepsilon)t^2,\ \forall t \in (-\infty, \delta_0), \tag{6.62}$$

pois $F(t) = 0$, $\forall t \leq 0$. Sabemos que

$$F(t) \leq C_1 + C_2|t|^{\sigma+1},\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.63}$$

De (6.62) e (6.63)

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx - \Big(\int_{[u<\delta_0]} \frac{\varepsilon + m}{2}|u|^2 dx + \int_{[u\geq\delta_0]} (C_1 + C_2|u|^{\sigma+1} dx\Big)$$

o que implica

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2^*}||u||_{2^*}^{2^*} - \Big(\frac{\varepsilon+m}{2}\Big)||u||_2^2 - C_1\int_{[u\geq\delta_0]} dx - C_2||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1},$$

da Desigualdade de Poincaré (ver Apêndice E) segue que

$$I(u) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon+m}{2\lambda_1}\Big)||u||^2 - \frac{1}{2^*}||u||_{2^*}^{2^*} - C_1\int_{[u\geq\delta_0]} dx - C_2||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1},$$

donde segue-se, pelas imersões $L^{2^*}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$ e $L^{\sigma+1}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$

$$I(u) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon+m}{2\lambda_1}\Big)||u||^2 - \frac{1}{2^*}C_3||u||^{2^*} - C_1\int_{[u\geq\delta_0]} dx - C_4||u||^{\sigma+1},$$

para algum $C_3, C_4 > 0$. Se $u \geq \delta_0$, então $\left(\frac{u}{\delta_0}\right)^{2^*} \geq 1$. Assim segue que

$$I(u) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon + m}{2\lambda_1}\Big)||u||^2 - \frac{1}{2^*}C_3||u||^{2^*} - \frac{C_1}{\delta_0^{2^*}}\int_{[u\geq\delta_0]} u^{2^*}dx - C_4||u||^{\sigma+1},$$

consequentemente

$$I(u) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon + m}{2\lambda_1}\Big)||u||^2 - \frac{1}{2^*}C_3||u||^{2^*} - \frac{C_1}{\delta_0^{2^*}}||u||_{2^*}^{2^*} - C_4||u||^{\sigma+1},$$

usando novamente a imersão $L^{2^*}(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$ temos

$$I(u) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon + m}{2\lambda_1}\Big)||u||^2 - \Big(\frac{1}{2^*}C_3 + \frac{C_5}{\delta_0^{2^*}}\Big)||u||^{2^*} - C_4||u||^{\sigma+1}, \tag{6.64}$$

para algum $C_5 > 0$. Logo,

$$I(u) \geq \Big(\frac{1}{2} - \mu\Big)||u||^2 - C_0||u||^{\sigma+1}\Big(1 + ||u||^{(2^*-(\sigma+1))}\Big), \tag{6.65}$$

onde

$$\mu = \frac{\varepsilon + m}{2\lambda_1}.$$

Sabendo que $\varepsilon > 0$ foi fixado de tal maneira que

$$\varepsilon + m < \lambda_1,$$

temos

$$\mu = \frac{\varepsilon + m}{2\lambda_1} < \frac{1}{2},$$

ou seja $(\frac{1}{2} - \mu) > 0$. Portanto, para $||u|| \approx 0$ tem-se de (6.65) $I(u) > 0$. Daí, podemos fixar $\rho > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $I(u) > 0$, $\forall u \in \partial B_\rho$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$0 < \alpha \leq \big(\frac{1}{2} - \mu\big)\rho^2 - C_0\rho^{\sigma+1}\big(1 + \rho^{(2^*-(\sigma+1))}\big),$$

segue de (6.65)

$$I(u) \geq \alpha > 0, \ \forall u \in \partial B_\rho(0). \ \blacksquare$$

**Teorema 6.1** *Dado $b > 0$, considere $T$, $a^* = a^*(b)$ constantes do Lema 6.5 e $a \in (0, a^*)$. Sejam $\alpha$ a constante do Lema 6.6 e $c = c(a, b)$ a constante definida no Lema 6.5. Então $c \geq \alpha$ e existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$I(u_0) = c \ e \ 0 \in \partial I(u_0).$$

**Demonstração:**

Sabendo que $c$ é a constante definida no Lema 6.5, segue do Lema 6.4 que $I$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Sendo assim dos Lemas 6.5 e 6.6, podemos concluir que $I$ satisfaz as hipotéses do Teorema do Passo da Montanha, mostrado no Capítulo 3. Sabendo disto, podemos concluir que $c$ é um valor crítico para o funcional $I$, ou seja existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I(u_0)$, como queriamos demonstrar. ■

**Lema 6.7** *Seja $u_0$ o ponto crítico obtido no Teorema 6.1. Então $u_0 \geq 0$, isto é $u_0^- \equiv 0$.*

**Demonstração:**

Suponha, por contradição, que $u_0^- \not\equiv 0$.

Sabendo que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico do funcional $I$, segue dos Lemas 6.2 e 6.3

$$-\Delta u_0(x) = |u_0(x)|^{(2^*-2)}u_0(x) + \overline{w}_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{6.66}$$

onde

$$\overline{w}_0(x) \in [\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Multiplicando (6.66) por $u_0^-$, tem-se que

$$-u_0^-(x)\Delta u_0(x) = |u_0(x)|^{(2^*-2)}u_0(x)u_0^-(x) + \overline{w}_0(x)u_0^-(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.67}$$

Observe que $\overline{w}_0 u_0^- \equiv 0$, pois $\overline{w}_0(x) = 0$, se $u_0(x) < 0$ e $u_0^-(x) = 0$, se $u_0(x) > 0$.

Integrando (6.67), temos pelo Teorema do Divergente Forte (ver Apêndice E)

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla u_0^- dx = \int_\Omega |u_0|^{(2^*-2)}u_0 u_0^- dx = \int_\Omega |u_0^-|^{2^*} dx,$$

observando que

$$\langle u_0, u_0^- \rangle = \langle u_0^+ + u_0^-, u_0^- \rangle = \langle u_0^+, u_0^- \rangle + \langle u_0^-, u_0^- \rangle = \langle u_0^-, u_0^- \rangle,$$

segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx = \int_\Omega |u_0^-|^{2^*} dx. \tag{6.68}$$

Por definição de $S$, temos

$$||u|| \geq S||u||_{2^*},$$

daí

$$\int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx \geq S\Big(\int_\Omega |u_0^-|^{2^*} dx\Big)^{\frac{2}{2^*}},$$

segue-se de (6.68) que

$$\int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx \geq S\Big(\int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx\Big)^{\frac{2}{2^*}},$$

sendo $u_0^- \not\equiv 0$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx \geq S^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} = S^{\frac{N}{2}}. \tag{6.69}$$

Multiplicando, agora, a igualdade (6.66) por $u_0$ e integrando sobre o domínio $\Omega$, temos

$$\int_\Omega -\Delta u_0 u_0 dx = \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \int_\Omega \overline{w}_0 u_0 dx,$$

donde segue-se pelo Teorema do Divergente Forte

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \int_\Omega \overline{w}_0 u_0 dx.$$

Assim

$$I(u_0) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big) \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{2^*} \int_\Omega \big(\overline{w}_0 u_0 dx - F(u_0)\big) dx,$$

utilizando a mesma idéia usada na demonstração do Lema 6.4, mostra-se que

$$\int_\Omega \big(\overline{w}_0 u_0 dx - F(u_0)\big) dx \geq 0.$$

Sendo assim

$$I(u_0) \geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big) \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx. \tag{6.70}$$

Observe, agora, que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \langle u_0, u_0 \rangle = \langle u_0^+ + u_0^-, u_0^+ + u_0^- \rangle = \langle u_0^+, u_0^+ \rangle + \langle u_0^-, u_0^- \rangle,$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_0^+|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx. \tag{6.71}$$

De (6.70) e (6.71)

$$I(u_0) \geq \frac{1}{N}\Big(\int_\Omega |\nabla u_0^+|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx\Big)$$

consequentemente

$$I(u_0) \geq \frac{1}{N} \int_\Omega |\nabla u_0^-|^2 dx,$$

implicando de (6.69) que

$$I(u_0) \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

o que é um absurdo, pois do Lema 6.5 e do Teorema 6.1

$$I(u_0) = c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Logo, $u_0^- \equiv 0$ como queriamos demonstrar. ■

**Observação 6.2** *Observe que do Teorema 6.1 e dos Lemas 6.2, 6.3 e 6.7, podemos concluir que* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *é solução forte do problema (6.1).*

# Apêndice A

# Teoria de Análise Funcional

Apresentaremos aqui alguns resultados de Análise Funcional que foram utilizados ao longo desta dissertação.

Considere $B(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados de $X$ em $Y$.

**Definição A.1** *(**ver** [7]) Um espaço vetorial $(X, ||.||)$ é dito ser de **Banach** quando toda sequência de Cauchy é convergente.*

**Definição A.2** *(**ver** [7]) Um espaço vetorial é dito **separável** se existe $M \subset X$ enumerável e denso em $X$, isto é, $\overline{M} = X$.*

**Teorema A.3** *(Teorema de Banach-Steinhaus) (**ver** [7]) Sejam $X$ um espaço de Banach, $Y$ um espaço vetorial normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores lineares limitados de $X$ em $Y$. Suponha que*

$$\sup_{i\in I} ||T_i x|| < +\infty, \ \forall x \in X.$$

*Então $\sup\limits_{i\in I} ||T_i x||_{B(X,Y)} < +\infty$, ou equivalentemente, existe $C > 0$ tal que*

$$||T_i(x)|| \leq C||x||, \ \forall i \in I, \forall x \in X$$

**Teorema A.4** *(Teorema de Hahn-Banach, Forma análitica) (**ver** [7]) Seja $X$ um espaço vetorial real e $p : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo*

*(i)* $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$

*(ii)* $p(\lambda x) = \lambda(p(x)), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda > 0.$

*Se $G \subset X$ é um subespaço $X$ e $g : G \to \mathbb{R}$ é um funcional linear que verifica*

$$g(x) \leq p(x), \ \forall x \in G,$$

*existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ verificando*

**(I)** $f(x) = g(x), \ \forall x \in G$

**(II)** $f(x) \leq p(x), \ \forall x \in X.$

**Corolário A.5** *(**ver** [7]) Seja $X$ um espaço vetorial normado e $x \in X$. Então,*

$$||x|| = \sup_{||f||_{X^*}=1} \langle f, x \rangle = max\{\langle f, x \rangle; f \in X^*, ||f||_{X^*} = 1\}.$$

**Definição A.6** *(**ver** [7]) Um **hiperplano** (afim) é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$$

*para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear não identicamente nulo. Diremos que neste caso, o hiperplano $H$ tem equação $[f = \alpha]$.*

**Definição A.7** *(**ver** [7]) Sejam $A, B \subset X$. Dizemos que um hiperplano $H$ de equação $[f = \alpha]$ separa os conjuntos $A$ e $B$ no **sentido forte** se:*

$$f(x) \leq \alpha, \ \forall x \in A \ e \ f(x) \geq \alpha, \ \forall x \in B.$$

*Diremos que a separação é **estrita** se existe $\varepsilon > 0$, tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \ \forall x \in A \ e \ f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \ \forall x \in B.$$

**Teorema A.8** *(Teorema de Hahn-Banach, $1^a$ Forma Geométrica) (**ver** [7]) Sejam $A, B \subset X$, dois conexos, não vazios e disjuntos. Se $A$ é um aberto, existe um hiperplano fechado que separa $A$ e $B$ no sentido forte.*

**Teorema A.9** *(Teorema de Hahn-Banach, $2^a$ Forma Geométrica) (**ver** [7]) Sejam $A, B \subset X$ convexos, não vazios e disjuntos. Suponha que $A$ é fechado e $B$ é compacto. Então, existe um hiperplano fechado que separa no sentido estrito os conjuntos $A$ e $B$.*

**Teorema A.10** *(Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) (**ver** [7]) O conjunto*

$$B_{X^*} = \{f \in X^*; ||f|| \leq 1\}$$

*é compacto pela topologia fraca-*.*

**Teorema A.11** *(Teorema de Kakutami) (**ver** [7]) Seja $X$ um espaço de Banach. Então, $X$ é reflexivo se, e somente se,*

$$B_1 = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$$

*é compacto na topologia fraca.*

**Teorema A.12** *(**ver** [7]) Seja $X$ um espaço de Banach separável. Então, $B_1 \subset X^*$ é metrizável pela topologia fraca-*. Reciprocamente, se $B_1 \subset X^*$ é metrizável na topologia fraca-*, temos que $X$ é separável.*

**Teorema A.13** *(**ver** [7]) Seja $X$ um espaço de Banach com $X^*$ separável. Então, $B_1 \subset X$ é metrizável na topologia fraca de $X$. Além disso, a recíproca também é verdadeira.*

**Teorema A.14** *(**ver** [7]) Seja $(f_n)$ uma sequência de $X^*$. Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então*

$$||f||_{X^*} \leq \liminf_{n \to +\infty} ||f_n||_{X^*}.$$

**Definição A.15** *(**ver** [7]) Um espaço de Banach é dito ser **Uniformente Convexo** se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo:*

$$\text{"Se } ||x||, ||y|| \leq 1 \text{ e } ||x - y|| > \varepsilon, \text{ então } \left|\left|\frac{x + y}{2}\right|\right| < 1 - \delta\text{"}.$$

**Teorema A.16** *(**ver** [7]) Seja $X$ um espaço de Banach uniformemente convexo e $(x_n) \subset X$ uma sequência verificando:*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X$$

*e*

$$\limsup_{n \to +\infty} ||x_n|| \leq ||x||.$$

*Então, $x_n \to x$ em $X$.*

# Apêndice B

# Função de Variação Limitada

Colocamos este apêndice com o objetivo de mostrar que toda função Localmente Lipschitz é diferenciável em quase todo ponto.

**Definição B.1** *(**ver** [**19**]) Uma função $f$ definida sobre um intervalo $[a,b]$, é dita uma **função de Variação Limitada**, se existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C,$$

*para toda partição $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Lema B.1** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função Localmente Lipschitz. Então $f$ é uma função de Variação Limitada.*

**Demonstração:**

Seja $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a,b]$.

Sendo $f \in LL([a,b],\mathbb{R})$, para cada $y \in [a,b]$ existe $\delta_y > 0$ tal que $f$ é Lipschitz em $B_{\delta_y}(y)$. Note que $[a,b] \subset \cup_{y\in[a,b]} B_{\delta_y}(y)$, assim $\{B_{\delta_y}(y)\}_{y\in[a,b]}$ é uma cobertura para o intervalo $[a,b]$. Segue pelo fato de $[a,b]$ ser um conjunto compacto, que existe uma cobertura finita, $\{B_{\delta_j}(y_j)\}_{j=1}^{N}$, tal que

$$[a,b] \subset \cup_{j=1}^{N} B_{\delta_j}(y_j).$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $a = y_1 < y_2 < ... < y_{N-1} < y_N = b$, com

$$B_{\delta_j}(y_j) \cap B_{\delta_{j+1}}(y_{j+1}) \neq \varnothing, \ \forall j \in \{1, ..., N-1\}.$$

Considere $K_j$ a constante Lipschitz da função $f$ em $B_{\delta_j}(y_j)$.

Para cada $j \in \{1, ..., N-1\}$ considere $\overline{y}_j \in B_{\delta_j}(y_j) \cap B_{\delta_{j+1}}(y_{j+1})$.

Desde que $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$, existe $j_i \in \{1, ..., N\}$ tal que $x_i \in B_{\delta_{j_i}}(y_{j_i})$. Sabendo disto, tem-se que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i+1})| &= \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(\overline{y}_{j_i}) + f(\overline{y}_{j_i}) - f(\overline{y}_{j_i+1}) + ... + f(\overline{y}_{j_{(i+1)}-1}) \\ &\quad -f(\overline{y}_{j_{(i+1)}}) + f(\overline{y}_{j_{(i+1)}}) - f(x_{i+1})|,\end{aligned}$$

donde segue-se pelo fato de $K_j$ ser a constante Lipschitz da função $f$ em $B_{\delta_j}(y_j)$, $j \in \{1, ..., N\}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i+1})| &\leq \sum_{i=0}^{n} \Big( K_{j_i}|x_i - \overline{y}_{j_i}| + K_{j_i+1}|\overline{y}_{j_i} - \overline{y}_{j_i+1}| + ... + K_{j_{(i+1)-1}}|\overline{y}_{j_{(i+1)}-1} - \overline{y}_{j_{(i+1)}}| \\ &\quad +K_{j_{(i+1)}}|\overline{y}_{j_{(i+1)}} - x_{i+1}| \Big) \leq KM,\end{aligned}$$

considerando $K = \sum_{j=1}^{N} K_j$ e $M = b - a$ temos

$$\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i+1})| < KM,$$

para toda partição $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Portanto $f$ é uma função de variação limitada. ■

**Teorema B.2** *(**ver** [**19**]) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Então $f$ é diferenciável em quase todo ponto de $[a, b]$.*

**Teorema B.3** *(**ver** [**19**]) Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ têm variação limitada se, e só se existirem duas funções crescentes a volores reais $g$ e $h$ definida no intervalo $[a, b]$, tais que $f = g - h$.*

**Corolário B.4** *(**ver** [**19**]) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem variação limitada então, $f'(x)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[a, b]$.*

# Apêndice C

# Teoria de Medida e Integração

Neste apêndice enunciaremos os principais teoremas da teoria de Medida e Integração utilizados nas demonstração durante todo este trabalho.

No que segue-se temos as seguintes notações:

- X é um conjunto mensurável;
- $\mu$ é uma medida em X;
- $M^+$ é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas em $X$.

**Teorema C.1** *(Lema de Fatou) (**ver** [**6**]) Se $f_n$ pertence a $M^+$, então*

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

**Corolário C.2** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_n \leq g \text{ q.t.p. em } X, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

*onde $g$ é uma função mensurável. Então*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu.$$

**Demonstração:**

Observe que

$$g - f_n \geq 0, \text{ q.t.p. em } X, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

e $g - f_n$ é mensurável (pois subtração de funções mensuráveis é mensurável).

Assim segue pelo Lema de Fatou

$$\int \liminf_{n\to+\infty}(g - f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int (g - f_n)d\mu,$$

implicando

$$\limsup_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu,$$

como queriamos demonstrar. ■

**Teorema C.3** *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) (**ver** [**6**]) Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável $f$. Se existe uma função integrável $g$ tal que*

$$|f_n| \leq g, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

*então $f$ é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

**Teorema C.4** *(Desigualdade de Hölder) (**ver** [**6**]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) e \ \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Teorema C.5** *(Desigualdade de Minkowski) (**ver** [**6**]) Se $f$ e $h$ pertencem a $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, então $f + g$ pertencem a $L^p(\Omega)$ e*

$$||f + h||_p \leq ||f||_p + ||h||_p.$$

**Teorema C.6** *(Teorema da Representação de Riesz) (**ver** [**6**]) Seja $G : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado, $1 < p < +\infty$. Então existe uma função $g \in L^q(\Omega)$, onde $q = \frac{p}{(p-1)}$, tal que*

$$\langle G, f\rangle = \int_\Omega fg d\mu, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

*Além disso, $||G||_p = ||g||_q$.*

**Teorema C.7** *(Teorema de Fubini) (**ver** [**6**]) Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \ e \ \int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

*Além disso,*

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx.$$

**Teorema C.8** *(**ver** [**6**]) Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

*Então existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$ tal que*

**(i)** $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$

**(ii)** $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, *onde* $h \in L^p(\Omega)$.

**Teorema C.9** *(**ver** [**16**]) Sejam $1 < p < +\infty$ e $(f_n)$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ que converge pontualmente para $f$, q.t.p. em $\Omega$. Então*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega).$$

**Lema C.1** *(**ver** [**16**]) Sejam $1 < p < +\infty$ e $(f_n)$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ que converge pontualmente para $f$ q.t.p. em $\Omega$. Então $f \in L^p(\Omega)$ e*

$$||f||_p^p = \lim_{n \to +\infty} (||f_n||_p^p - ||f - f_n||_p^p).$$

**Demonstração:** Observe que

$$\lim_{|s| \to +\infty} \left| \frac{|s+1|^p - |s|^p - 1}{|s|^p} \right| = 0.$$

Por definição de limite, temos para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \frac{|s+1|^p - |s|^p - 1}{|s|^p} \right| < \varepsilon, \ \forall |s| > M_\varepsilon,$$

consequentemente

$$||s+1|^p - |s|^p - 1| < \varepsilon |s|^p, \ \forall |s| > M_\varepsilon. \tag{C.1}$$

Sabendo que a função, a valores reais, $f(s) = ||s+1|^p - |s|^p - 1|$ é contínua, temos

$$|f(s)| \leq C_\varepsilon, \ \forall s \in [-M_\varepsilon, M_\varepsilon], \tag{C.2}$$

para algum $C_\varepsilon > 0$. De (C.1) e (C.2)

$$||s+1|^p - |s|^p - 1| \leq C_\varepsilon + \varepsilon |s|^p, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, logo

$$\left| |\frac{a}{b} + 1|^p - |\frac{a}{b}|^p - 1 \right| \leq C_\varepsilon + \varepsilon |\frac{a}{b}|^p,$$

implicando

$$||a+b|^p - |a|^p - |b|^p| \leq C_\varepsilon |b|^p + \varepsilon |a|^p, \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Considerando $a = f - f_n$ e $b = f$, segue que

$$||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \leq C_\varepsilon |f|^p + \varepsilon |f_n - f|^p, \ \forall x \in \Omega. \tag{C.3}$$

Defina,

$$u_n = ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p|$$

e

$$z_n = (u_n - \varepsilon |f_n - f|^p)^+.$$

Segue da estimativa (C.3)

$$0 \leq z_n \leq |f|^p C_\varepsilon, \tag{C.4}$$

onde $|f|^p C_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ e que

$$z_n \to 0, \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{C.5}$$

pois $f_n \to f$ q.t.p. em $\Omega$. Donde segue-se pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$||z_n||_1 \to 0. \tag{C.6}$$

Sendo assim, desde que

$$0 \leq u_n = u_n - \varepsilon |f_n - f|^p + \varepsilon |f_n - f|^p \leq z_n + \varepsilon |f_n - f|^p,$$

o que implica

$$\int_\Omega u_n dx \leq \int_\Omega z_n dx + \varepsilon \int_\Omega |f_n - f|^p dx.$$

Utilizando a Desigualdade de Minkowski (ver Apêndice C), temos

$$0 \leq ||u_n||_1 \leq ||z_n||_1 + \varepsilon (||f_n||_p + ||f||_p)^p \leq ||z_n||_1 + 2^p \varepsilon (||f_n||_p^p + ||f||_p^p). \tag{C.7}$$

Desde que $(f_n)$ é limitada em $L^p(\Omega)$, existe $M > 0$

$$||f_n||_p \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{C.8}$$

De (C.7) e (C.8)

$$0 \leq ||u_n||_1 \leq ||z_n||_1 + 2^p \varepsilon (M^p + ||f||_p^p) = ||z_n||_1 + \varepsilon C,$$

onde $C = 2^p(M^p + ||f||_p^p)$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$0 \leq ||u_n||_1 \leq ||z_n||_1 + \varepsilon C, \ \forall \varepsilon > 0,$$

considerando $\varepsilon = \frac{1}{m}$, segue que

$$0 \leq ||u_n||_1 \leq ||z_n||_1 + \frac{1}{m}C, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

passando ao limite de $m \to +\infty$, obtemos

$$0 \leq ||u_n||_1 \leq ||z_n||_1.$$

Passando agora ao limite de $n \to +\infty$, obtemos de (C.6)

$$||u_n||_1 \to 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega \big||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\big| dx \to 0.$$

Assim, observando que

$$0 \leq \Big| \int_\Omega \big(|f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\big) dx \Big| \leq \int_\Omega \big||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\big| dx \to 0$$

concluimos

$$\int_\Omega |f_n|^p dx - \int_\Omega |f_n - f|^p dx - \int_\Omega |f|^p dx \to 0,$$

ou seja

$$||f_n||_p^p - ||f_n - f||_p^p - ||f||_p^p \to 0,$$

e portanto

$$||f||_p^p = \lim_{n \to +\infty} (||f_n||_p^p - ||f - f_n||_p^p),$$

como queriamos demonstrar. ■

# Apêndice D

# Resultados Gerais

## D.1 Espaços Métricos

**Definição D.1** *(**ver** [**15**]) Uma família $F = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico $M$ chama-se **localmente finita** quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhaça que intercepta apenas um número finito de conjuntos $C_\lambda$.*
*Em termos mais explicitos: $F$ é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in M$ existem índices $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ e uma vizinhaça $V$, com $x \in V$, tais que $V \cap C_\lambda \neq \varnothing$, implica $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.*

**Definição D.2** *(**ver** [**15**]) Um espaço métrico $M$ chama-se **paracompacto** quando toda cobertura aberta de $M$ pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.*

**Teorema D.3** *(**ver** [**15**]) Todo espaço métrico separável é paracompacto.*

## D.2 Integrais em Espaços de Banach

Nesta seção iremos estudar o conceito de integrais em espaços de Banach e estudar algumas de suas propriedades, para maiores detalhes ver [12, 13] .
No que segue, $X$ é um espaço vetorial normado completo cuja a norma é denotada por $|.|$. Considere $E$ o espaço das funções limitadas de $[a, b]$ em $X$ com a norma

$$||f|| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Sejam $a, b$ números reais tais que $a < b$, $P$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e considere a sequência de números $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tal que

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b.$$

**Definição D.4** *Seja $f : [a, b] \to X$ uma função. Dizemos que $f$ é uma* ***função escada****, se existem elementos $w_1, ..., w_n \in X$ tais que*

$$f(t) = w_i \text{ para } a_{i-1} < t < a_i, \; i = 1, ..., n.$$

Assim, pela definição acima, $f$ tem valor constante em cada intervalo aberto determinado pela partição.

**Definição D.5** *Seja $f$ uma função escada com respeito a partição $P$. O* ***valor da integral*** *de $f$ será definido por*

$$I_P(f) = (a_1 - a_0)w_1 + ... + (a_n - a_{n-1})w_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})w_i.$$

**Lema D.1** *Suponha que $f$ é uma função escada com respeito a outra partição $Q$ de $[a, b]$, então*

$$I_P(f) = I_Q(f).$$

**Lema D.2** *O conjunto das funções escadas $f : [a, b] \to X$ é um subespaço do espaço de todas as funções limitadas de $[a, b]$ em $X$, que denotaremos por $S_t([a, b], X)$. A função*

$$I : S_t([a, b], X) \to X$$

*é linear e limitada, isto é,*

$$|I(f)| \leq (b - a)||f||.$$

**Teorema D.6** *Toda função contínua de $[a, b]$ em $X$ pode ser aproximada uniformemente por funções escadas. Além disso, o fecho de $S_t([a, b], X)$ contém $C([a, b], X)$.*

**Teorema D.7** *(Extensão Linear) Seja $Y$ um espaço vetorial normado, e $F$ um subespaço de $Y$. Seja $T : F \to X$ um funcional linear contínuo. Então, $T$ tem uma única extensão linear contínua $\widehat{T} : \overline{F} \to X$, onde*

$$\widehat{T}(x) = T(x), \; \forall x \in F.$$

Agora, considere a aplicação $I : S_t([a, b], X) \to X$, dado por

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Considerando $F = S_t([a,b],X)$ e $I = T$, podemos aplicar o Teorema D.7 e concluir que existe uma única extensão linear contínua $\widehat{I} : \overline{F} \to X$, onde

$$\widehat{I}(f) = I(f), \ \forall f \in S_t([a,b],X). \tag{D.1}$$

Do Teorema D.6 $C([a,b],X) \subset \overline{S_t([a,b],X)}$, assim podemos definir $\widehat{T} = \widehat{I}|_{C([a,b],X)}$. Dado $f \in C([a,b],X)$, pelo Teorema D.6, existe uma sequência $(f_n) \subset S_t([a,b],X)$ tal que

$$f_n \to f \text{ uniformemente em } S_t([a,b],X).$$

Sendo $\widehat{T}$ um operador linear contínuo, segue

$$\widehat{T}(f_n) \to \widehat{T}(f) \text{ em } X.$$

Logo, definimos integral de uma função contínua em um espaço de Banach da seguinte forma:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

O próximo resultado é uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema D.8** *Seja $f : [a,b] \to X$ contínua e $F : [a,b] \to X$ diferenciável em $[a,b]$ com $F' = f$. Então,*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Corolário D.9** *Se $f : [a,b] \to X$ é contínua e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $F'(x) = f(x)$.*

## D.3 Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach

Nesta seção iremos fazer um breve estudo sobre as Equações Diferenciais ordinárias em Espaços de Banach, mais especificamente sobre o problema de Cauchy [12]. Seja $U$ um conjunto aberto em $X$. Um **campo vetorial** de classe $C^p$, $1 \le p \le \infty$ em $U$ é uma aplicação $f : U \to X$ de classe $C^p$. Ao campo vetorial $f$ associemos a equação diferencial

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)). \tag{D.2}$$

As soluções desta equação, são, as aplicações diferenciáveis $\alpha : J \subset \mathbb{R} \to U$, onde $J$ é um intervalo aberto contendo o zero, tais que

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t) = f(\alpha(t))$$

e satisfazendo a condição inicial

$$\alpha(0) = x_0,\ x_0 \in U.$$

Essas soluções são chamadas **trajetórias** ou **curvas integrais** de $f$ ou da equação diferencial (D.2).

**Observação D.1** *Seja $\alpha : J \to U$ uma função contínua satisfazendo a condição*

$$\alpha(t) = x_0 + \int_0^t f(\alpha(s))ds.$$

*Então, pelo Teorema D.8*

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)).$$

**Definição D.10** *Seja $U_0$ uma aberto de $U$ contendo $x_0$. A aplicação $\alpha : J \times U_0 \to U$, $J \times U_0 = \{(t,x); x \in U_0, t \in J\}$ chama-se **fluxo gerado por** $f$ e vale as seguintes propriedades:*

**(i)** $\alpha(0,x) = x$,

**(ii)** $\alpha(t+s,x) = \alpha(t,\alpha(x+s))$.

**Teorema D.11** *Sejam $J$ um intervalo aberto contendo o zero e $U$ um aberto em $X$, $x_0 \in X$, e $0 < a < 1$ tais que $\overline{B}_{2a}(x_0) \subset U$. Considere $f : J \times U \to X$ uma função contínua, limitada por uma constante $c > 0$ satisfazendo a condição de Lipschitz em $U$ com costante de Lipschitz $K > 0$, uniformemente com respeito a $J$. Se $b < \min\left\{\frac{a}{c}, \frac{1}{k}\right\}$, então existe um único fluxo*

$$\alpha : J_b \times B_a \to U.$$

*Além disso, se $f$ é de classe $C^p$, então cada curva integral $\alpha(t,x)$ referente a (D.2), também é de classe $C^p$.*

# Apêndice E

# Espaços de Sobolev

Mostraremos aqui neste apêndice alguns teoremas utilizados durante esta dissertação, envolvendo Espaços de Sobolev. No que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

**Definição E.1** *(**ver** [7]) O **espaço de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ é definido da seguinte forma:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \quad ; \quad \exists g_1, ...g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i \in \{1, ..., N\} \Big\}$$

**Observação E.1** *Denotamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ é o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,2}(\Omega)$.*

**Teorema E.2** *(Desigualdade de Poincaré) (**ver** [7]) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado numa direção $e_j = (0_1, 0_2, ..., 0_{j-1}, 1_j, 0_{j+1}, ..., 0_N)$, com fronteira suave, então existe $C = C(N,p) > 0$, $1 < p < +\infty$ tal que*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Observação E.2** *Em $H_0^1(\Omega)$ temos duas normas*

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \Big( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

*e*

$$||u|| = \Big( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

*Estas duas normas são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$.*

De fato, pela Desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

pois estamos considerando aqui $\Omega$ limitado com fronteira suave. Daí

$$\Big( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq (C+1)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

o que implica

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq (C+1)^{\frac{1}{2}} ||u||. \tag{E.1}$$

Observe, agora, que

$$\Big( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

logo

$$||u|| \leq ||u||_{H^1(\Omega)}. \tag{E.2}$$

De (E.1) e (E.2)

$$||u|| \leq ||u||_{H^1(\Omega)} \leq (C+1)^{\frac{1}{2}} ||u||,$$

mostrando assim a equivalência das normas $||.||$ e $||.||_{H_1(\Omega)}$.

**Teorema E.3** *(Teorema Du Bois Raymond) (**ver** [7]) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\phi dx = 0, \quad \forall\ \phi \in C_0(\Omega).$$

*Então,*

$$u = 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \Omega.$$

**Teorema E.4** *(**ver** [7]) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $u \in W^{1,p}(I)$. Então existe $\widehat{u} \in C(I)$ tal que*

$$u = \widehat{u}, \ \ q.t.p. \ \ em \ I$$

*e*

$$\widehat{u}(x) - \widehat{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \ \forall x, y \in \overline{I}.$$

**Teorema E.5** *(**ver** [7]) Seja $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$. Então são equivalentes:*

**(i)** *$u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

**(ii)** *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\Big| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \Big| \leq C ||\varphi||_q, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

*onde* $q = \frac{p}{p-1}$.

**(ii)** *Se* $U \subset\subset \Omega$ *e* $|h| < dist(U, \partial\Omega)$, *então existe um* $C > 0$ *tal que*

$$||\zeta_h u - u||_p \leq C|h|.$$

**Lema E.1** *(Teorema do Divergente Forte) (**ver** [**18**]) Sejam* $u, v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. *Então*

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega u\Delta v dx$$

*e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx.$$

**Definição E.6** *Dado* $w \in L^p(\Omega)$, *dizemos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma **solução forte** do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = w \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*quando* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *e* $-\Delta u = w$ *em* $L^p(\Omega)$, *ou seja quando*

$$-\Delta u(x) = w(x) \ q.t.p. \ em \ \Omega.$$

**Definição E.7** *Dado* $w \in L^p(\Omega)$, *dizemos que* $u$ *é **solução fraca** do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = w \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{E.3}$$

*quando* $u \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega w v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Observação E.3** *A solução fraca é única. De fato, pois suponha que existam duas soluções fracas,* $u_1$ *e* $u_2$, *para o problema E.3. Sendo assim*

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx = \int_\Omega w v dx \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

*e*

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla v dx = \int_\Omega w v dx \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

*o que implica*

$$\int_\Omega (\nabla u_1 - \nabla u_2) \nabla v dx = 0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

*isto é*

$$\langle (u_1 - u_2), v \rangle = 0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

*em particular para* $v = u_1 - u_2$

$$||u_1 - u_2||^2 = 0,$$

*implicando* $u_1 = u_2$, *mostrando assim a unicidade da solução fraca.*

**Teorema E.8** *(Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg) (**ver** [**16**]) Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < \infty$. *Então existe uma única* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *que é solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ \Omega \\ u = 0, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*além disso, existe uma constante* $C$, *que independe de* $f$ *e* $u$, *tal que*

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||f||_p.$$

*Em particular, se* $p > \frac{N}{2}$ *e* $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ *então existe uma única solução fraca do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \Omega \\ u = \varphi, \ \partial\Omega, \end{cases}$$

**Teorema E.9** [*1*] *Sejam* $m \geq 1$ *um inteiro e* $1 \leq p < +\infty$. *Então:*

- *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ *temos* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$;
- *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ *temos* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty)$;
- *se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ *temos* $W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} L^\infty(\Omega)$,

*onde* $\Omega$ *é limitado.*

**Teorema E.10** *(**ver** [**1**]) Suponha* $p > N$. *Então*

$$W^{2,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \ \mu \in \big(0, 1 - \frac{N}{p}\big).$$

**Teorema E.11** *(**ver** [**1**]) Suponha* $m > j + \frac{N}{p}$. *Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \underset{cont}{\hookrightarrow} C^j(\overline{\Omega}).$$

# Apêndice F

# Simetrização de Schwarz

Toda a teoria apresentada neste apêndice têm como referência [8, 16].

**Definição F.1** *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ alguns conjuntos borelianos do $\mathbb{R}^N$, dois a dois disjuntos de medida finita, e $0 < a_n < a_{n-1} < ... < a_1$ números reais. Se $f$ é uma função* ***degrau*** *tal que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

*então definiremos ser um* ***rearranjo*** *de $f$ por*

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]}$$

*onde $R_0 = 0$ e $R_{i-1} \leq R_i$ são dados pela relação*

$$med([R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]) = med(A_i),$$

*onde* ***med*** *é a medida de Lebesgue.*

**Notação:** $[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i] = \{x \in \mathbb{R}^N; R_{i-1} \leq |x| \leq R_i\}$, onde $|.|$ é a norma euclidiana do $R^N$.

**Observação F.1** *Note que esta definição mostra que a partir da função degrau $f$ encontramos uma função $f^*$ que tem as seguintes propriedades:*

**(i)** *Simétrica em relação a origem;*

**(ii)** *Decrescente quando os raios $R_i$ vão aumentando;*

**(iii)** *A integral de Lebesgue de $f^*$ no $\mathbb{R}^N$ é igual a de $f$, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx.$$

**Teorema F.2** *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\alpha > 0$*

$$med([f \geq \alpha]) = med([f^* \geq \alpha]),$$

*onde o conjunto $[f^* \geq \alpha]$ é uma bola $B_{R_\alpha}(0)$. A função $f^*$ é radialmente decrescente e é chamada de **rearranjo decrescente** ou a **Simetrização de Schwarz** da função $f$. Além do mais, para toda função contínua e crescente*

$$G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

*tal que $G(0) = 0$ temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx.$$

**Lema F.1** *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Então a simetrização $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

# Bibliografia


[1] Adams, R.A., *Sobolev spaces.* Academic press (1975).

[2] A. Ambrosetti & R.E.L. Turner, *Some discontinuos Variational problems.* Differential and Integral Equations, Volume 1, Number 3, July 1988, pp. 341-149.

[3] C. O. Alves, A. M. Bertone & J.V. Gonçalves, *A Variational approach to discontinuous problems with critical Sobolev exponents.* J. math. Anaysis Aplic., 2002, 265, 103-127.

[4] C. O. Alves, A. M. Bertone, *A discontinuous problem involving the p-Laplacian operator and critical expoent in* $\mathbb{R}$. Electronic J. Diff. Eqns, Vol. 2003(2003), No. 42, pp. 1-10.

[5] Badiale, M., *Some Remark on elliptic problems with discontionuous nonlinearities.* Partial Diff. Eqns. Vol. 51, 4 (1993).

[6] Bartle, R.G., *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[7] Brézis, H., *Analyse fonctionelle,* 2a ed. Masson, 1987.

[8] Cavalvante, L.P.L., *Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não Limitados*, dissertação de mestrado, UFCG, 2004.

[9] Chang, K. C., *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations.* J. math. Anaysis Aplic, 1981, 80, 102-129.

[10] Clarke, F.H., *Optimization and nonsmooth analysis.* SIAM, Philadelphia, 1990.

[11] D. G, Costa, H. Tehrani & J. Yang, *On a variational approach to existence and multiplicity results for semi positone probleens* Electronic J. Diff. Eqns, Vol 2006, N. 11(2006), 1-10.

[12] Dantas dos Santos, M. *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais*, dissertação de mestrado, UFCG, 2005.

[13] Lang, S., *Analysis II*, Addison-Wesley, 1969.

[14] Lima, E. L., *Curso de análise*, Vol.1. 11.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[15] Lima, E. L., *Espaços métricos*, Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.

[16] Kavian, O. *Introduction a la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, 1993.

[17] M.R. Grossinho & S.A. Tersian, *An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations.* Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001.

[18] Melo, R. A. *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais*, dissertação de mestrado, UFCG, 2006.

[19] Royden, H.L., *Real analysis.* Third Edition, Prentice Hall, Inc, New Jersey, 1988.

[20] Stampacchia, G., *Le problemème de Dirichlet pour les èquations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) tome 15, $n^0$ 1 (1965), p. 189-257.15 (1965).