

Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia Elétrica

# **Aplicação da Técnica LOD em Métodos no Domínio do Tempo e Frequência para Modelagem de Meios Convencionais e Metamateriais**

**Valtemir Emerencio do Nascimento**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

**Orientador: Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges**

São Carlos  
2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

A minha querida e amada família.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus.

Aos meus amados pais Edeval e Zilda e minha amada irmã Kamilla por todo apoio incondicional, mesmo tanto tempo distante e por serem a minha fonte de inspiração.

Ao Prof. Ben-Hur Viana Borges pelo incansável estímulo ao longo dos anos.

Ao Prof. Fernando Lisboa Teixeira e Prof. José Alberto Cuminato pela valiosa contribuição dada ao trabalho.

Ao grande amigo Carlos Alberto de Francisco pela preciosa convivência nestes anos e por me mostrar que a vida não é feita somente de equações.

Ao amigo Licinius Dimitri Sá de Alcântara pela amizade e pelo seu exemplo como pessoa.

Ao amigo Danilo Henrique Spadoti pela amizade e a sua maneira positiva de encarar a vida.

Aos amigos de laboratório Nilson, Fernanda, Regiane, Helvécio, Anderson, Emiliano, Pizolato, Silvio, Aline, Odilon, Murilo, Bruno Feres, Waldo, Ricardo Kdo, Wesley, Eugênia, Luis, Danilo Minhoni e Marcos Lima pelos inesquecíveis dias de convivência.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica que de uma forma ou de outra ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

À FAPESP, pelo suporte a este trabalho.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	i
LISTA DE TABELAS .....	iv
LISTA DE SIGLAS .....	v
LISTA DE SÍMBOLOS .....	vi
RESUMO .....	vii
ABSTRACT .....	viii
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 MÉTODO FDTD .....	6
1.2 MÉTODO TD-WPM .....	7
1.3 MÉTODO ADI-FDTD .....	9
1.4 MÉTODO LOD-FDTD .....	10
1.5 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO .....	11
1.6 PUBLICAÇÕES .....	12
1.7 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	13
2 TÉCNICAS DE MODELAGEM NUMÉRICA .....	14
2.1 MÉTODOS EXPLÍCITOS .....	14
2.1.1 Método FDTD .....	14
2.2 MÉTODOS IMPLÍCITOS .....	18
2.2.1 Método LOD TD-WPM .....	18
2.2.2 Métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD .....	23
2.2.3 Desenvolvimento do Método ADI-FDTD .....	23
2.2.4 Desenvolvimento do Método LOD-FDTD .....	26
2.2.5 Condição de Contorno de Camada Perfeitamente Casada (PML) .....	29
2.2.6 Desenvolvimento do Método ADI-FDTD com PML .....	35
2.2.7 Desenvolvimento do Método LOD-FDTD com PML .....	40
2.2.8 Esquemas para Implementação da PML no LOD-FDTD .....	43
2.2.9 Esquema Eficiente para Implementação de Fonte Explícita Aplicado aos Métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD .....	44
2.3 ANÁLISES DE MEIOS METAMATERIAIS UTILIZANDO MÉTODOS EXPLÍCITOS E IMPLÍCITOS .....	48
2.3.1 Modelo de DRUDE .....	48
2.3.2 Método FDTD para Análise de Metamateriais .....	51
2.3.3 Método LOD-FDTD para Análise de Metamateriais .....	53
2.3.4 Método LOD-FDTD-SS para Análise de Metamateriais .....	58
2.3.5 Método ADI-FDTD para Análise de Meios Metamateriais .....	61
3 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	64
3.1 MÉTODO LOD FD-BPM .....	64
3.2 MÉTODO LOD TD-WPM .....	71

3.3 MÉTODO LOD-FDTD E ADI-FDTD .....	76
3.4 MÉTODOS ADI-FDT E LOD-FDTD COM PML.....	81
3.5 ESQUEMA EFICIENTE PARA IMPLEMENTAÇÃO DE FONTE EXPLÍCITA APLICADO AOS MÉTODOS ADI-FDTD E LOD-FDTD.....	86
3.6 ANÁLISE DE MEIOS METAMATERIAIS EMPREGANDO o LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD .....	88
4 CONCLUSÕES .....	98
APÊNDICE A - Técnicas de divisão do operador .....	101
APÊNDICE B - Método LOD FD-BPM .....	105
APÊNDICE C – Análise de estabilidade e dispersão do método LOD-FDTD .....	111
C.1 Estudo de estabilidade do Método LOD-FDTD.....	111
C.2 Estudo de dispersão numérica do método LOD-FDTD .....	123
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	126

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Arranjo de fios condutores para produzir um meio efetivo com permissividade negativa. Rotman [2].....	2
FIGURA 2: Ressonador em anel dividido (SRR) para produzir um meio efetivo com permeabilidade negativa. Pendry <i>et al.</i> [3].....	2
FIGURA 3: Combinação de fios metálicos e ressoadores em anel divididos criando um meio efetivo com $\epsilon$ e $\mu$ negativos. Smith <i>et al.</i> [4].....	3
FIGURA 4: Contextualização do emprego da técnica LOD para métodos de propagação no domínio do tempo e frequência, destacado na cor cinza.....	8
FIGURA 5: Esquema de evolução temporal do método FDTD baseado no esquema <i>leapfrog</i> . .....	15
FIGURA 6: Célula de Yee composta pelo arranjo espacial das componentes de campo elétrico e magnético. ....	15
FIGURA 7: Célula para discretização espacial unidimensional. $\delta y$ é o tamanho do passo de discretização no eixo y. ....	16
FIGURA 8: Célula para discretização bidimensional. $\delta x$ e $\delta y$ representam o tamanho do passo da discretização nos eixos x e y, respectivamente. ....	17
FIGURA 9: Ilustração do esquema de absorção utilizando ABC.....	31
FIGURA 10: Regiões de camadas absorventes (PML) no caso de um problema bidimensional. ....	34
FIGURA 11: Reposta em frequência da parte real do índice de refração associado ao modelo de Drude com perdas. Curva em azul (superior) para $n = -1$ curva em verde (inferior) $n = -6$ .....	50
FIGURA 12: Fração de energia remanescente no núcleo do guia de onda em função da distância de propagação do modo dentro da estrutura. A linha sólida representa os resultados obtidos com o LOD FD-BPM de ângulo largo, e os símbolos os resultados obtidos de [82]. ....	65
FIGURA 13: Distribuição de campo em uma estrutura tipo <i>rib</i> variando longitudinalmente após propagação de $40\mu\text{m}$ . ....	66
FIGURA 14: Velocidade de convergência em função do número de iterações para o formalismo paraxial (linha tracejada) e de ângulo largo (linha sólida). A figura inserida mostra a seção transversal da PCF com o perfil do modo fundamental. ....	67
FIGURA 15: Perdas por confinamento como função do pitch ( $\Lambda$ ) tendo o número de anéis como parâmetro. A linha sólida (2 anéis) e a linha tracejada (três anéis) foram obtidas utilizando o LOD FD-BPM, os símbolos foram obtidos pelo método multipólo [83]. ....	69
FIGURA 16: Perda por confinamento vs. variação percentual do raio para uma PCF com três anéis. São consideradas três variações percentuais do raio: $\pm 5\%$ (quadrados), $\pm 10\%$ (círculos) e $\pm 15\%$ (diamantes). ....	70

FIGURA 17: Perda por confinamento vs. variação percentual do raio para uma PCF com três anéis. São consideradas três variações percentuais do raio: $\pm 5\%$ (quadrados), $\pm 10\%$ (círculos) e $\pm 15\%$ (diamantes).....	71
FIGURA 18: Guia de onda de três camadas simétrico, sendo $z$ a direção de propagação do pulso gaussiano. ....	72
FIGURA 19: Evolução temporal de um pulso gaussiano para o campo elétrico em $t=0$ fs.....	73
FIGURA 20: Evolução temporal de um pulso gaussiano para o campo elétrico em $t=70$ fs chocando-se com uma parede metálica. Neste caso observa-se o efeito de reflexão do pulso ao incidir na parede metálica. ....	73
FIGURA 21: Evolução temporal de um pulso gaussiano para o campo elétrico em $t=123$ fs. Neste caso observa-se que o pulso foi totalmente refletido. ....	74
FIGURA 22: Vista longitudinal do acoplador direcional. ....	75
FIGURA 23: Pulso gaussiano em um acoplador direcional em $t=0$ fs. ....	76
FIGURA 24: Pulso gaussiano em $t=90$ fs. O comprimento de acoplamento neste caso é $L_\pi=12,9\mu\text{m}$ . ....	76
FIGURA 25: Comparação do esforço computacional dos métodos FDTD convencional e ADI-FDTD com o presente LOD-FDTD. (a) CFLN=1, (b) CFLN=8, e (c) CFLN=12. ....	79
FIGURA 26: Guia de onda de três camadas com variação longitudinal. ....	79
FIGURA 27: Evolução do modo fundamental ao longo de um guia de onda de três camadas variando longitudinalmente. O ângulo de inclinação é $\theta=16^\circ$ . (a) ADI-FDTD com CFLN=5, (b) LOD-FDTD com CFLN=7, (c) FDTD tradicional com CFLN=1. A inclinação ocorre em $Lz/8$ . ....	80
FIGURA 28: Erro de reflexão da PML para o método LOD-FDTD, primeiro esquema. ....	82
FIGURA 29: Erro de reflexão da PML para o método LOD-FDTD, segundo esquema. ....	83
FIGURA 30: Primeiro esquema LOD-FDTD.....	84
FIGURA 31: Segundo esquema LOD-FDTD.....	84
FIGURA 32: Erro numérico do ADI-FDTD para o segundo esquema. ....	85
FIGURA 33: Custo computacional para os métodos LOD-FDTD e ADI-FDTD. ....	86
FIGURA 34: Comparação entre o primeiro e o segundo esquemas para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD para diferentes valores de CFLN: (a) e (b) representam o primeiro esquema, (c) e (d) o segundo esquema. ....	88
FIGURA 35: Diagrama esquemático de uma estrutura planar de três camadas composta por meio <i>metamaterial</i> , circundada por ar. ....	89
FIGURA 36: Trajetória do feixe em uma estrutura planar paralela com $n=-1$ . ....	90
FIGURA 37: Distribuições do campo magnético para a componente $H_z$ , obtidas por meio dos métodos FDTD (a), LOD-FDTD (b) e LOD-FDTD SS (c) e ADI-FDTD (d), para $t=2500 \Delta t$ em um meio <i>metamaterial</i> sem perdas e CFLN=1. A unidade dos eixos está em cm. ....	92
FIGURA 38: Distribuições do campo magnético para a componente $H_z$ , obtidas por meio dos métodos FDTD (a), LOD-FDTD (b) e LOD-FDTD SS (c) e ADI-FDTD (d), para $t=2500 \Delta t$ em um meio <i>metamaterial</i> sem perdas e CFLN=5 para os formalismos LOD e ADI. A unidade dos eixos está em cm. ....	92
FIGURA 39: Distribuições de campo magnético para a componente $H_z$ , para $\Gamma = 10^8 \text{ rad/s}$ , $\omega_p = 377 \times 10^9 \text{ rad/s}$ e $t=2500 \Delta t$ . (a) método FDTD, com CFLN=1,	



(b) LOD-FDTD, (c) LOD-FDTD-SS e (d) ADI-FDTD tendo sido adotado CFLN=5 para os três últimos. A unidade dos eixos em cm. ....	93
FIGURA 40: Norma do erro normalizado versus $p$ ( $\Delta t = \frac{\Delta t_{CFL}}{2^p}$ ) para os métodos LOD-FDTD, ADI-FDTD e LOD-FDTD-SS considerando a componente $H_z$ .....	96
FIGURA 41: Norma do erro normalizada total versus $p$ ( $\Delta t = \frac{\Delta t_{CFL}}{2^p}$ ) para os métodos LOD-FDTD, ADI-FDTD e LOD-FDTD-SS considerando as componentes $H_z$ , $E_x$ e $E_y$ simultaneamente. ....	97

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1: Propriedade das regiões PML. ....	34
TABELA 2: Parâmetros físicos inseridos no modelo de Drude com perdas. ....	50
TABELA 3: Parâmetros físicos geométricos de uma estrutura tipo rib variando longitudinalmente. $L_x$ e $L_y$ representam o tamanho da janela computacional, $N_x$ e $N_y$ representam o número de pontos de discretização transversal, $\lambda$ o comprimento de onda, $n_c$ e $n_{sub}$ , o índice de refração do núcleo e do substrato, respectivamente, e $\Delta z$ o passo de propagação longitudinal. ....	64
TABELA 4: Parâmetros físicos e geométricos para uma PCF. ....	67
TABELA 5: parâmetros utilizados na simulação dos resultados mostrados na FIGURA 15. ....	68
TABELA 6: parâmetros pertinentes utilizados na simulação dos resultados mostrados na FIGURA 16 e FIGURA 17. ....	69
TABELA 7: Parâmetros físicos e geométricos de uma guia de onda de três camadas simétrico. ....	72
TABELA 8: Parâmetros da janela computacional. ....	75
TABELA 9: Parâmetros físicos e geométricos relativos ao acoplador direcional. Comprimento de onda $\lambda = 1,5 \mu m$ . ....	75
TABELA 10: Parâmetros de simulação para o espaço livre. ....	77
TABELA 11: Parâmetros do domínio computacional. ....	80
TABELA 12: Parâmetros físicos e geométricos relativos a estrutura guia de onda planar. ( $\lambda = 1,55 \mu m$ ). ....	80
TABELA 13: PARÂMETROS PARA SIMULAÇÃO NO ESPAÇO LIVRE. ....	86
TABELA 14: Parâmetros físicos e geométricos de uma estrutura do tipo planar composta por meio <i>metamaterial</i> , para simulação utilizando o método FDTD, LOD-FDTD, LOD-FDTD SS e ADI-FDTD. ....	89
TABELA 15: Comparação do custo computacional para o LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD com a implementação da split PML (SPML). ....	95
TABELA 16: Comparação do custo computacional para o LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD para análise de meios metamateriais sem PML. ....	95

## LISTA DE SIGLAS

ADI	- Alternating direction implicit
ABC	- Absorbent boundary condition
ADI-FDTD	- Alternating direction implicit - finite difference time domain
BPM	- Beam propagation method
CFLN	- Courant Friedrich Levy number
CN	- Crank-Nicolson
FD-BPM	- Frequency domain beam propagation method
FDTD	- Finite difference time domain
LOD	- Locally one dimensional
LOD-FDTD	- Locally one dimensional - finite difference time domain
LOD-FDTD SS	- Locally one dimensional –finite difference time domain ( <i>Strang Splitting</i> )
PCF	- Photonic crystal fiber
PML	- Perfectly matched layer
SRR	- Split ring resonator
SVEA	- Slowly varying envelope approximation
TBC	- Transparent boundary condition
TD-WPM	- Time domain wave propagation method
TE	- Transversal electric
TM	- Transversal magnetic

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{E}$	- Vetor campo elétrico (V/m)
$\vec{H}$	- Vetor campo magnético (A/m)
$k$	- Número de onda no vácuo (rad/m)
$\beta$	- Constante de propagação do modo guiado (rad/m)
$n_0$	- índice efetivo do modo guiado, $\beta/k$
$c_0$	- Velocidade da luz no vácuo (m/s)
$\epsilon_0$	- Permissividade elétrica no vácuo (F/m)
$\mu_0$	- Permeabilidade magnética no vácuo (H/m)
$\eta_0$	- Impedância intrínseca no vácuo (Ohm)
$\lambda$	- Comprimento de onda (m)

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes, tanto no domínio do tempo quanto na frequência, para a modelagem da propagação de ondas em estruturas que apresentem combinações de meios convencionais e/ou metamateriais, particularmente os metamateriais onde tanto a permissividade quanto a permeabilidade são simultaneamente negativos. Em alguns casos a simulação de tais estruturas representa um grande desafio em virtude da grande demanda computacional requerida. Uma forma eficiente de se contornar este problema é a utilização de técnicas de divisão de operador, com destaque para a técnica implícita das direções alternadas (ADI), já amplamente explorada nos domínios do tempo e da frequência, e mais recentemente a técnica localmente unidimensional (LOD).

A técnica LOD é utilizada com destaque neste trabalho, onde pela primeira vez esta foi empregada em um método de propagação de feixe de ângulo largo em diferenças finitas no domínio da frequência, o qual foi denominado por LOD FD-BPM. O passo seguinte foi estender sua aplicação para o domínio do tempo, sendo a primeira abordagem empregada em um método de propagação de onda em diferenças finitas no domínio do tempo, denominado por LOD TD-WPM. Em seguida, a técnica LOD foi aplicada ao método FDTD resultando em um formalismo implícito, denominado LOD-FDTD, o qual apresenta uma maior eficiência computacional do que o tradicional ADI-FDTD. Estas abordagens apresentaram uma excelente eficiência computacional em virtude da possibilidade de utilização de passos de tempos maiores do que o permitido pela condição de estabilidade de Courant-Friedrich-Levy (CFL), além de serem incondicionalmente estáveis como consequência da aplicação do esquema de Crank-Nicolson (CN). A restrição do método LOD-FDTD, referente à sua precisão de apenas primeira ordem no tempo, foi contornada com o uso do esquema de divisão de operadores conhecido como *Strang splitting* (SS), resultando no método de segunda ordem no tempo LOD-FDTD-SS. Os métodos FDTD, ADI-FDTD, LOD-FDTD e LOD-FDTD-SS foram também implementados com base no modelo de Drude com perdas, possibilitando, assim, uma modelagem adequada de meios metamateriais.

Outra contribuição importante deste trabalho foi à implementação da condição de contorno *split* PML no formalismo LOD-FDTD para a simulação de problemas eletromagnéticos abertos.

Palavras-chave: LOD TD-WPM, LOD FD-BPM, LOD-FDTD e metamaterial

## ABSTRACT

This work focuses on developing efficient numerical methods, both in time and frequency domains, for modeling wave propagation in structures that present conventional media and/or metamaterial media combinations, particularly the metamaterials where both permeability and permittivity are simultaneously negative. In some cases, the simulation of such structures represent a great challenge, due to the great computational requirements. An efficient way of solving this problem is the usage of operator splitting techniques, specifically the alternate direction implicit (ADI) technique, already explored both in time and frequency domains, and recently the locally one-dimensional (LOD) .

This work dedicates special attention to the LOD technique, where, for the first time, this one was applied in a finite difference frequency domain wide-angle propagation method, which was denominated LOD FD-BPM. The next step was to extend its application to the time domain, the first approach was used in a finite difference time domain wave propagation method, denominated LOD TD-WPM. Next, the LOD technique was applied to the FDTD method, resulting in an implicit formalism, denominated LOD-FDTD, which presents a better computational efficiency than the traditional ADI-FDTD. These approaches present an excellent computational efficiency, due to the possibility of using greater time steps than those permitted by the Courant-Friedrich-Levy (CFL) stability condition, being unconditionally stable as a consequence of applying the Crank-Nicolson (CN) scheme as well. The LOD-FDTD method restriction, referring to its first order accuracy in time, was circumvented by using the operator division scheme known as Strang splitting (SS), resulting in a second order time method LOD-FDTD-SS. The FDTD, ADI-FDTD, LOD-FDTD and LOD-FDTD-SS methods were also implemented with a lossy Drude model, making, this way, possible an adequate metamaterial media modeling.

Another important contribution of this work was the implementation of the split PML contour condition in the LOD-FDTD formalism for the simulation of open electromagnetic problems.

Keywords: LOD TD-WPM, LOD FD-BPM, LOD-FDTD and metamaterial

# 1 INTRODUÇÃO

No ano de 1968 o cientista russo Veselago [1] apresentou à comunidade científica um interessante estudo em que investigava, teoricamente, as conseqüências eletrodinâmicas de um meio no qual tanto a permissividade  $\epsilon$  quanto a permeabilidade  $\mu$  fossem negativas. Com este estudo ele concluiu que tal meio teria características de propagação dramaticamente diferentes dos meios ditos convencionais, tais como: mudança do sinal da velocidade de fase, inversão do deslocamento Doppler, e refração anômala, para citar alguns. Na época da publicação destes resultados, o próprio autor assinalou que tais materiais não estavam disponíveis, o que fez com que suas observações ficassem apenas no terreno das curiosidades. Até então, meios com permissividade negativa podiam ser obtidos através de um arranjo tri-dimensional de fios condutores retos que se interceptam mutuamente como descrito por Rotman [2] em 1962, e mostrado na FIGURA 1. Por se caracterizarem pela combinação de fios condutores e materiais dielétricos dispostos de tal forma a imitarem um meio efetivo, estes novos materiais foram denominados “*metamateriais*”. Em meios como o de [2], a permissividade é negativa abaixo da frequência do plasma. Agora, para se checar as previsões de Veselago faltava, portanto, descobrir uma maneira de se obter permeabilidade negativa.

Esta façanha só foi realizada 37 anos mais tarde, por Pendry *et al.* [3], em 1999. Neste trabalho, os autores introduziram um arranjo periódico de tal modo a produzir uma permeabilidade magnética efetiva. Foram utilizados neste caso vários ressoadores em anel divididos (SRR-*Split Ring Resonator*) de modo a formar um arranjo periódico de elementos. Cada ressoador consistia na verdade de dois anéis concêntricos em forma de “C”, sendo que o anel interno tem a forma de um “C” espelhado, conforme mostra a FIGURA 2. Quando um campo magnético externo penetra através dos anéis, são induzidas correntes que produzem um campo magnético que pode se opor ou intensificar o

campo incidente. O pequeno *gap* no fim de cada anel evita que correntes circulem ao redor do anel dando origem a capacitâncias que causa ressonância em uma dada frequência. Portanto a permeabilidade efetiva é associada com a indutância correspondente aos anéis e a capacitância correspondente aos *gaps* dentro e entre os anéis. A resposta do SSR depende diretamente do fluxo magnético que atravessa os anéis. Para que um arranjo periódico de elementos se comporte efetivamente como um meio homogêneo, é preciso que o comprimento de onda a ser utilizado seja maior que os elementos e o espaçamento da rede compreendida pelos mesmos.

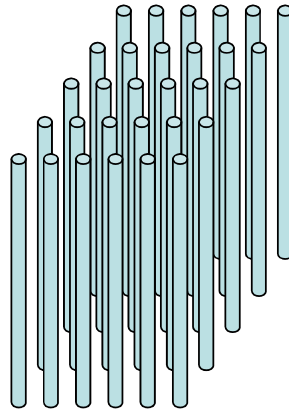


FIGURA 1: Arranjo de fios condutores para produzir um meio efetivo com permissividade negativa. Rotman [2].

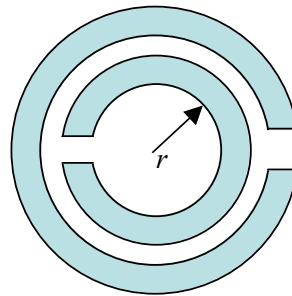


FIGURA 2: Ressonador em anel dividido (SRR) para produzir um meio efetivo com permeabilidade negativa. Pendry *et al.* [3].

Sabendo como “construir” um meio que apresenta individualmente  $\epsilon$  ou  $\mu$  negativos, o próximo passo foi combinar estes dois meios de modo a produzir um terceiro que reproduzisse estes efeitos, porém, simultaneamente. Isto foi feito por Smith *et al.* [4], em maio de 2000, conforme ilustra a FIGURA 3. Em seguida, Smith *et al.* também propuseram métodos mais confiáveis de se calcular os valores de  $\epsilon$  e  $\mu$  utilizando métodos baseados em diferenças finitas [5]. A demonstração da refração negativa em frequências de microondas foi realizada experimentalmente por Shelby *et al.* [6].



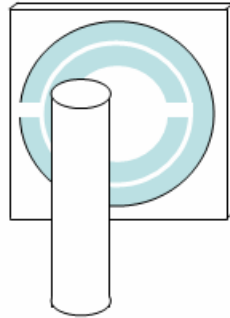


FIGURA 3: Combinação de fios metálicos e ressoadores em anel divididos criando um meio efetivo com  $\epsilon$  e  $\mu$  negativos. Smith *et al.* [4].

Shelby *et al.* [7] por sua vez, investigaram a transmissão de microondas através destes materiais na faixa de 8GHz a 12GHz (banda-X). Sua estrutura era também baseada no conceito SRR, mas com geometria retangular. Neste estudo foi demonstrado teoricamente e experimentalmente que tal meio poderia ser simulado com sucesso se fosse assumido como um meio homogêneo. A consequência notável deste estudo foi que as propriedades não usuais dos meios metamateriais poderiam agora ser simuladas com técnicas numéricas no domínio do tempo, tais como o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) [8]-[11].

As propriedades fundamentais de metamateriais em guias de ondas foram investigadas por Caloz *et al.* [12], em 2001. Os guias de ondas neste caso eram preenchidos por metamaterial, também denominado como material LHM (LHM-*left handed material*), o qual era suposto se comportar como um meio efetivo. Com isso foi possível investigar propriedades tais como: velocidade de fase negativa, impedância intrínseca positiva, e refração em ângulo negativo. Esta última sendo realizada por meio de uma junção guia de onda em T. Ressonadores SRR, isolados e acoplados, foram investigados em profundidade, tanto numérica quanto experimentalmente, por Balmain *et al.* [13]. Neste estudo foi demonstrado que o acoplamento entre os anéis é bem complexo e altamente dependente do arranjo geométrico utilizado.

Uma abordagem alternativa e elegante na construção de meios *metamateriais* é a utilização de linhas de transmissão para a obtenção das características inerentes a estes meios [14]-[15]. Neste caso, ao contrário do proposto em [4], o meio periódico não é composto por ressoadores em anel divididos e fios metálicos, mas sim por um conjunto periódico de linhas de transmissão compostas por indutores e capacitores. Uma investi-

gação numérica das propriedades de transmissão dos meios *metamateriais* em frequências ópticas foi posteriormente realizada por Panoiu *et al.* [16]. Em 2004 Starr *et al.* [17] fabricaram e caracterizaram um meio metamaterial com índice de refração negativo na faixa de 8,4 e 9,2 GHz. Greigor *et al.* [18] em 2005 projetaram e testaram uma lente com variação gradual do índice de refração negativo de  $n=-1$  a  $n=-2,6$ . Em 2006 Dolling *et al.* [19] constataram que a velocidade de grupo e de fase podem ser simultaneamente negativas em meios metamateriais. Liu *et al.* [20] em 2007 obtiveram um meio metamaterial com índice de refração negativo construído a partir de estruturas SSR e ressoadores elétricos, de tal forma ajustados que a ressonância ocorresse na mesma frequência.

Dentre os diversos estudos apresentados, um muito interessante, foi proposto por Pendry [21], no qual o uso de um meio *metamaterial* possibilitaria a construção de lentes perfeitas. No entanto, este efeito só seria possível de ser observado para um caso sem perdas, onde  $\varepsilon(\omega) = \mu(\omega) = -1$ , ou seja, para um índice de refração  $n=-1$ . Nesta situação as ondas evanescentes seriam amplificadas dentro do meio metamaterial permitindo a reconstrução da imagem com alta resolução, o que não ocorre no caso de lentes convencionais cuja resolução é limitada a metade do comprimento de onda utilizado. Este estudo gerou controvérsia, sendo que alguns trabalhos contestaram tal possibilidade [22]-[23]. Entretanto, os trabalhos de Smith [24]-[25] mostraram ser factível a obtenção de imagens com resolução abaixo do limite de difração, desde que os parâmetros do material *slab* (lente plana) estejam muito próximos da condição ideal, implicando com isso em um intervalo bastante restrito para variação destes parâmetros. O estudo teórico realizado por Fang [26] utilizou como lente uma fina película de prata, e mostrou ser possível obter uma resolução de até  $\lambda/6$ , entretanto este estudo também destacou que fatores como o descasamento das propriedades dielétricas e perdas prejudicam significativamente a resolução. Em 2005 foram apresentados trabalhos experimentais [27]-[29] que confirmaram o estudo teórico de Pendry [21] onde foram obtidas “superlentes” com resolução abaixo do limite de difração.

Vários outros trabalhos têm surgido na literatura procurando explorar novos efeitos, e descobrir novas aplicações para este inusitado material. Isso pode ser constatado pela atenção especial dada ao tema em seções especiais em periódicos de grande conceito [30]-[32]. A título de ilustração, a revista *Science* em 2006 considerou o desenvolvimento dos meios *metamateriais*, entre os 10 maiores avanços da ciência no referido ano [33].

Dentro deste contexto, o método FDTD [38] foi utilizado pela primeira vez na análise de meios que apresentam  $\epsilon$  e  $\mu$  negativos em um trabalho apresentado por Ziolkowski *et al.* [8], onde foi realizado um estudo minucioso da propagação de ondas em tais meios. O mérito deste trabalho foi o de proporcionar a visualização do comportamento eletrodinâmico da onda dentro do meio metamaterial, além de alertar para o fato que a presença de perdas em tais meios comprometeria a realização de lentes perfeitas [21]. Pode-se ainda citar outros trabalhos que utilizaram o método FDTD na análise de meios metamateriais [9], [10]-[11].

É importante destacar que o enorme interesse da comunidade científica por ferramentas numéricas capazes de modelar eficientemente os fenômenos inerentes aos meios *metamateriais* tem levado ao aprimoramento dos formalismos específicos para o estudo destes meios, em especial o método FDTD. Como melhorias do método FDTD pode-se citar o estudo realizado por Cummer [34] onde este propôs a modificação da condição de contorno PML (*PML-perfectly matched layer*) para análise de meios metamateriais. Recentemente, melhorias na precisão do método FDTD para a análise de meios *metamateriais* foram propostas [35]-[36], sendo isto obtido por meio de um melhor tratamento na representação da interface entre um meio convencional e um meio *metamaterial*. Adicionalmente, M. Okoniewski *et al.* [37] propuseram uma modificação na solução do modelo Drude utilizando ADE (*auxiliary differential equation*), sendo que neste caso foi obtida uma ADE de segunda ordem no tempo o que a difere da convencional de primeira ordem.

Embora a suposição do meio *metamaterial* como homogêneo tenha provado ser um grande passo em direção à completa compreensão deste meio, o custo computacional requerido para a simulação utilizando o método FDTD pode ainda ser proibitivo em alguns casos. Esta limitação vem da condição de estabilidade de Courant-Friedrich-Levy (CFL), a qual impõe uma limitação ao passo máximo de tempo a ser utilizado [44].

Uma alternativa para o limite imposto pela CFL é o uso de técnicas de divisão do operador, tal como a técnica ADI (*ADI-alternating direction implicit*) [59]. Neste caso, a expansão do formalismo em diferenças finitas resultará em um sistema tridiagonal de equações cuja solução não é limitada pelo critério CFL e foi denominado por ADI-FDTD [59]. Recentemente, uma nova abordagem incondicionalmente estável no domínio do tempo baseada na técnica de divisão de operador LOD (*LOD-locally one-dimensional*), denominado por método LOD-FDTD, vem obtendo grande destaque [96]-

[102]. O método LOD-FDTD também não é limitado pela condição CFL. Outro aspecto que tornam os métodos baseados na técnica LOD extremamente atrativos para a simulação de problemas eletromagnéticos é sua simplicidade matemática. Diferentemente do ADI-FDTD, o LOD-FDTD é um método de primeira ordem no tempo, o que reduz a sua precisão. Esta limitação de precisão do LOD-FDTD foi contornada pela adoção do esquema de Strang *splitting* sugerido por Fornberg *et al.* [93]. O preço a ser pago neste caso é o aumento do custo computacional em relação ao LOD-FDTD original. Esta abordagem foi denominada por LOD-FDTD-SS neste trabalho.

Portanto, o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes, capazes de avaliar os efeitos da propagação eletromagnética tanto em meios convencionais quanto em meios complexos (tais como os meios *metamateriais*), torna-se de importância crucial. Neste contexto, os métodos numéricos escolhidos para simulação dos dispositivos a serem investigados neste trabalho são, respectivamente, o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), o qual também será utilizado como *benchmark* para os outros métodos implementados, o método da propagação de onda no domínio do tempo (TD-WPM), assim como os métodos implícitos ADI-FDTD, LOD-FDTD e LOD-FDTD-SS. Estes métodos serão brevemente discutidos a seguir.

## 1.1 MÉTODO FDTD

O método FDTD vem se tornando uma das técnicas numéricas de propagação de feixe mais utilizadas em virtude de sua facilidade de implementação e de interpretação dos resultados. Por ser uma técnica no domínio do tempo, ela é capaz de abranger uma extensa faixa de frequências numa única execução pela utilização de um pulso de excitação no domínio do tempo (como um pulso gaussiano). Isto é extremamente útil em aplicações onde as frequências de ressonância não são exatamente conhecidas, ou toda vez que um resultado em banda larga é desejado.

O método FDTD, originalmente proposto por Yee em 1966 [38], possibilita a caracterização de fenômenos físicos envolvendo a propagação de ondas eletromagnéticas através da discretização da distribuição dos campos (elétrico e magnético) em um domínio espacial que abrange a configuração do problema. Possibilita, ainda, a evolução deste campo a cada passo de tempo em função de seu estado no instante anterior, atuando diretamente nas equações de Maxwell. O domínio espacial é dividido em células,

sendo que cada célula apresenta uma única informação dos vetores campo elétrico e magnético num determinado instante de tempo. As componentes dos campos elétrico e magnético são discretizadas de forma intercalada no tempo e no espaço para o melhor balanceamento da representação numérica das equações de Maxwell na resolução dos problemas mais gerais.

O método FDTD apresenta relativa simplicidade em seu formalismo se comparado a outros métodos disponíveis na literatura, como por exemplo, elementos finitos, variacional, domínio espectral e outros, o que vem estimulando o seu emprego na solução de problemas de eletromagnetismo [39]. A partir dele pode ser obtida uma variada gama de resultados, tais como distribuições espaciais dos campos, registros temporais, comportamento espectral e características de propagação.

## **1.2 MÉTODO TD-WPM**

Métodos de propagação de feixe no domínio da frequência têm sido utilizados com grande sucesso na modelagem de uma grande variedade de estruturas eletromagnéticas [40]-[41]. Embora os métodos BPM sejam muito versáteis na análise de um grande número de efeitos ópticos, tais como efeitos não lineares e não-recíprocos [42], eles são restritos à análises estacionárias. O método de propagação de onda no domínio do tempo (TD-WPM), por sua vez, é mais conveniente para este propósito pelo fato de ser capaz de simular a propagação de pulsos de banda larga em diferentes meios dielétricos. Assim como o FDTD, o TD-WPM também é capaz de avaliar facilmente reflexões em interfaces dielétricas.

O método TD-WPM foi inicialmente proposto por Huang [43], e desde então vem encontrando cada vez mais aplicação na análise de dispositivos eletromagnéticos, principalmente por permitir a simulação de estruturas mais longas que as normalmente simuladas com o FDTD. A limitação do método FDTD decorre da condição de estabilidade de Courant-Friederich-Levy [44], que impõe a utilização de passos de tempo extremamente pequenos. O TD-WPM por sua vez faz uso da aproximação de envoltória de variação lenta (SVEA), que permite a utilização de passos de tempo significativamente maiores, aliviando a carga computacional. Desde então diferentes formalismos para o TD-WPM têm sido propostos na literatura, tais como: abordagem em banda estreita, onde a derivada segunda no tempo é desprezada [45]; abordagem em banda larga,

onde a derivada segunda no tempo é expandida em termos de aproximantes de Padé [46]; abordagem em banda completa, onde a derivada segunda no tempo é resolvida sem empregar aproximações [47]; abordagem explícita [48]; e, mais recentemente, abordagem baseada na técnica de divisão do operador, denominada técnica implícita das direções alternadas (ADI) [49]. Para citar apenas alguns exemplos de aplicação do método TD-BPM, temos: amplificadores ópticos semicondutores [50], dispositivos baseados em cristais fotônicos [46], e guias de onda planares e circularmente simétricos [49].

É importante ressaltar que os sistemas resultantes da aplicação do método FDTD e TD-WPM, apresentam um grande custo computacional para sua solução, como por exemplo, problemas que apresentam duas dimensões espaciais e uma dimensão de tempo. Uma das alternativas mais viáveis e eficientes para contornar este problema é a utilização de técnicas de divisão do operador nas equações que correspondem aos métodos FDTD e TD-WPM. Dentre as técnicas de divisão de operador destacam-se a (ADI) e a localmente unidimensional (LOD) [55], que são discutidas detalhadamente no Apêndice A. Neste contexto, o principal foco do trabalho consiste em aplicar a técnica (LOD) em métodos de propagação nos domínios do tempo e da frequência baseados no esquema de diferenças finitas. Para uma maior clareza, a FIGURA 4 contextualiza o emprego da técnica LOD para métodos de propagação de feixe no domínio da frequência e no domínio do tempo.

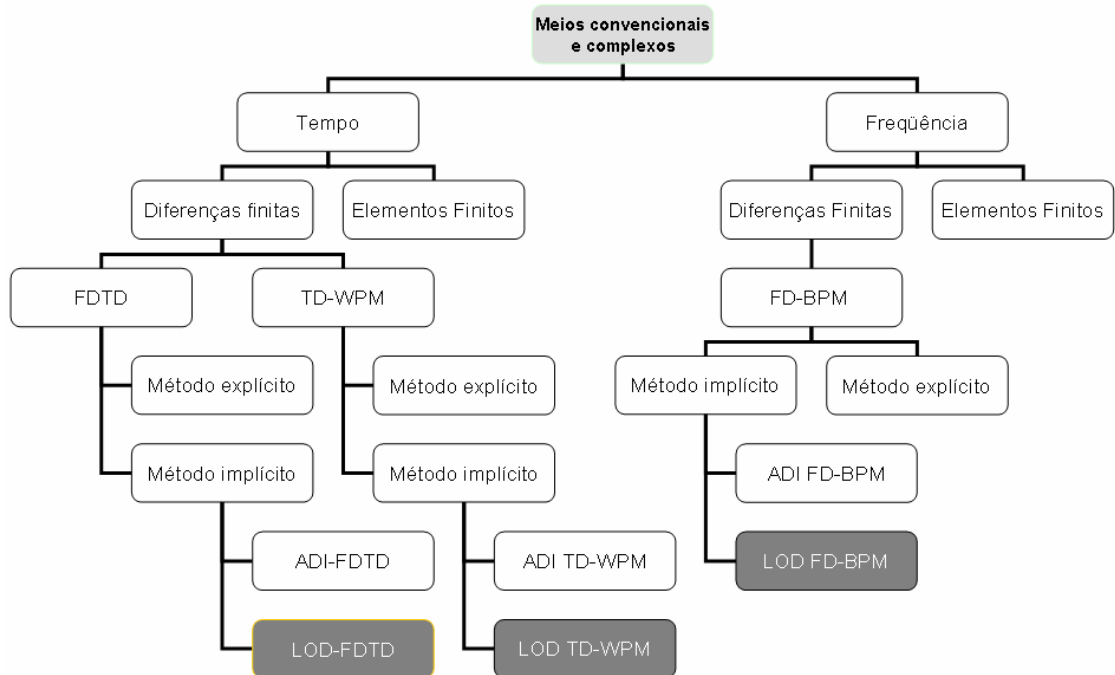


FIGURA 4: Contextualização do emprego da técnica LOD para métodos de propagação no domínio do tempo e frequência, destacado na cor cinza.

Como se pode ver na FIGURA 4, o estudo da propagação eletromagnética em meios convencionais e complexos pode ser realizado com sucesso em dois domínios distintos, ou seja, no domínio do tempo ou domínio da frequência. A escolha de um ou outro domínio irá depender basicamente do problema a ser resolvido. Duas abordagens clássicas para a solução de problemas tanto no tempo quanto na frequência consistem na utilização do método das diferenças finitas ou no método dos elementos finitos. Neste trabalho, a aplicação de técnicas de divisão do operador (ou seja, ADI e LOD) foi realizada mediante o uso do esquema de diferenças finitas, que resultam em métodos implícitos. Vale ressaltar que o desenvolvimento para o esquema de elementos finitos foi omitido na FIGURA 4, apenas com finalidade de maior objetividade. Contudo, a adoção deste método pode ser realizada de maneira análoga ao que foi realizado para o esquema de diferenças finitas.

### **1.3 MÉTODO ADI-FDTD**

O método FDTD provou ser ao longo dos anos uma ferramenta numérica muito eficiente e precisa na análise de fenômenos eletromagnéticos, além do que a sua implementação é extremamente simples visto esta ser realizada de forma explícita. Por ser explícita não existe a necessidade de nenhuma inversão matricial para a obtenção da solução em um instante de tempo futuro ( $n+1$ ) sendo esta obtida diretamente da solução anterior no instante ( $n$ ), o que torna a sua execução extremamente rápida.

Embora o método FDTD apresente inúmeras qualidades, ele possui uma limitação crítica quanto ao passo máximo de tempo temporal que pode ser utilizado, delimitado pela condição de estabilidade CFL [44]. Esta limitação imposta pela técnica explícita pode ser eficientemente contornada pela adoção de técnicas implícitas [55]. No caso de métodos implícitos, a solução no instante futuro é obtida mediante a solução de um sistema linear de equações do tipo  $AX=B$  como demonstrado no Apêndice A. Neste caso, a inversão matricial representa um custo computacional elevado. Como alternativa a este problema, Peaceman *et al.* [54] propuseram uma técnica de divisão de operadores denominada ADI, a qual é abordada em detalhes no Apêndice A. A mecânica da técnica ADI pode ser descrita como a quebra da solução do problema em passos intermediários, onde em cada passo é obtida uma solução implícita em uma direção do problema. A técnica ADI foi estendida com sucesso para a análise de fenômenos eletromagnéticos no domínio da frequência por Yu *et al.* [61].

A aplicação da técnica ADI no domínio do tempo foi realizada por Namiki [59] em um caso 2D e o método resultante foi denominado por ADI-FDTD, sendo que a sua extensão para uma análise 3D foi realizada por Zheng [60]. O método ADI-FDTD apresenta precisão de segunda ordem no tempo e é desenvolvido mediante a solução de uma equação implícita e duas equações explícitas [59]. Tendo em vista sua grande eficiência numérica, o ADI-FDTD vem sendo amplamente utilizado. Podem-se destacar o desenvolvimento de formas de excitação eficientes aplicadas ao ADI-FDTD [66]-[70], o emprego da eficiente condição de contorno PML ao ADI-FDTD [71]-[72], a extensão do método ADI-FDTD para análise de meios dispersivos [73]-[75], além de novas abordagens que resultaram na diminuição do erro numérico do ADI-FDTD [76]-[78]. Adicionalmente, é importante destacar o recente uso do método ADI-FDTD na análise de meios metamateriais introduzido por Kantartzis *et al.* [79]-[80]. O método ADI-FDTD será abordado em detalhes neste trabalho.

#### **1.4 MÉTODO LOD-FDTD**

O interesse pela técnica LOD, a qual foi originalmente proposta por Yanenko [56], se deve ao fato desta também possibilitar a obtenção de um formalismo implícito, não limitado pela condição de estabilidade de CFL. Assim como no caso do ADI, métodos baseados no LOD possuem passos intermediários de solução de acordo com a dimensão do problema. Entretanto, neste caso ele trabalha com apenas uma única direção por passo o que não ocorre com o ADI (mais detalhes no Apêndice A).

A utilização da técnica LOD em métodos de propagação de feixe no domínio da frequência foi realizada por Nascimento *et al* [84]. A primeira extensão da técnica LOD para a solução das equações de Maxwell no domínio do tempo foi realizada por Fornberg *et al.* [93] a qual foi denominada por *split-step*. Desde então o interesse pela técnica LOD aplicada ao método FDTD, agora conhecido como LOD-FDTD, vem obtendo destaque. O estudo do método LOD-FDTD baseado em uma análise bidimensional foi realizado em [94]-[95]. A expansão para um caso 3D com segunda ordem de precisão no tempo foi realizada por Tan [101], sendo que o mesmo autor também propôs um esquema de alta ordem de precisão espacial mantendo a segunda ordem de precisão no tempo [100]. A extensão do LOD-FDTD para análise de meios dispersivos foi realizada por Shibayama *et al.* [98], e o emprego do método LOD-FDTD no estudo de meios me-



meta-materiais foi realizado por Nascimento *et al.* [97]. Pode-se também destacar o uso eficiente de fonte explícita aplicada ao LOD-FDTD proposto por Nascimento *et al.* [96].

Pelo fato do método LOD-FDTD trabalhar com uma única direção a cada passo de tempo, a sua solução é mais simples do que a obtida com o ADI-FDTD, pois apresenta apenas uma equação implícita e uma equação explícita. Esta característica proporciona uma melhor eficiência computacional quando comparado ao ADI-FDTD. Entretanto, a maior simplicidade do método LOD-FDTD é penalizada pelo fato deste ser um método cuja precisão é de primeira ordem no tempo, enquanto o método ADI-FDTD representa um formalismo de segunda ordem no tempo.

No estudo realizado por Fornberg [93] foi apresentado uma modificação para o método *split-step* de primeira ordem, a qual se baseava no esquema de divisão de operadores de Strang resultando em um método de segunda ordem no tempo. Esta melhoria na precisão foi obtida mediante um aumento do custo computacional, pelo fato do *split-step* de segunda ordem necessitar da solução de um passo adicional de tempo. Esta abordagem recebeu o nome LOD-FDTD-SS neste trabalho.

## 1.5 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

A técnica ADI tem sido empregada com grande sucesso em métodos para o estudo da propagação eletromagnética, tanto no domínio da frequência quanto do tempo. Neste contexto, existe uma lacuna a ser explorada, que é a utilização da técnica LOD na análise da propagação eletromagnética com métodos em ambos os domínios, tempo e frequência. O uso da técnica LOD é plenamente justificado tendo em vista a sua simplicidade, que resulta em métodos eficientes e com uma baixa carga computacional. Adicionalmente, os métodos resultantes do emprego da técnica LOD permitem a análise de meios convencionais e também meios complexos, como por exemplo, os meios *meta-materiais*.

A primeira contribuição do trabalho consiste na aplicação da técnica LOD em um método de propagação de feixe (BPM) em diferenças finitas no domínio da frequência, o qual foi denominado LOD FD-BPM. Este foi empregado com amplo êxito na análise de fibras microestruturadas [84]. Logo em seguida, a técnica LOD foi aplicada em um método WPM no domínio do tempo, sendo denominado LOD TD-WPM [91]. A eficácia do método neste caso foi comprovada por meio da análise de um acoplador direcio-

nal. Em seguida a técnica LOD foi aplicada em um método FDTD de forma a realizar uma abrangência completa dos mais representativos métodos no domínio do tempo para o estudo da propagação eletromagnética. Primeiramente, o método foi utilizado na análise de meios convencionais [94] e em seguida estendido para os meios *metamateriais* [97]. Outra importante contribuição do trabalho foi o desenvolvimento de novos esquemas eficazes para implementação da condição de contorno *split* PML aplicados ao método LOD-FDTD [99]. Adicionalmente, também foi desenvolvido um esquema eficiente para implementação de fonte explícita aplicado ao método LOD-FDTD [96]. Outra contribuição importante deste trabalho foi à extensão do método LOD-FDTD com a incorporação do esquema de divisão de operadores proposto por Strang, denominado *Strang splitting*. Isto ocorreu tendo em vista que o método LOD-FDTD apresenta precisão apenas de primeira ordem no tempo. Com a inclusão do esquema de Strang, o método, que passou a ser denominado LOD-FDTD-SS, apresentou precisão de segunda ordem no tempo, assim como o ADI-FDTD. Vale salientar que o método ADI-FDTD para a modelagem de meios metamateriais foi também implementado neste trabalho com o objetivo de efetuar um estudo de desempenho das diversas técnicas de divisões de operadores mencionadas acima. Este estudo comparativo das técnicas de divisão de operadores também é uma contribuição deste trabalho.

## **1.6 PUBLICAÇÕES**

- [1] D. H. Spadoti, C. A. de Francisco, V. E. Nascimento, B.-H. V. Borges e M. A. Romero, “Full-vectorial to scalar FD-SOR formulations for optical waveguide modelling: A comparative study”, *International Journal of Numerical Modelling.* , v.19, pp. 507 - 520, 2006.
- [2] V. E do Nascimento, B.-H. V. Borges. e F. L. Teixeira, “Split-Field PML Implementations for the Unconditionally Stable LOD-FDTD Method”, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters* , v.16, no. 7 pp. 398 - 400, 2006.
- [3] V. E. Nascimento, C. A. de Francisco, D. H. Spadoti, M. A. Romero e B. V. Borges, “Use of a Novel Wide Angle FD-BPM for Loss-Performance Assessment in Randomly Perturbed Photonic Crystal Fibers”, *Microwave and Optical Technology Letters* , v.45, no. 6, p.568 - 573, 2005.

[4] V. E. Nascimento e B.-H. V. Borges, “Aplicação do Método LOD-FDTD para Análise e Modelagem de Meios Metamateriais”, *MOMAG 2006*, Belo-Horizonte.

[5] V. E. Nascimento e B.-H. V. Borges, “Esquema Eficiente para Implementação de Fonte Explícita Aplicado aos Métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD”, *MOMAG 2006*, Belo-Horizonte.

[6] V.E Nascimento e B.-H. V. Borges, “A New Time Domain BPM Based on Locally One Dimensional Method”, *International Microwave and Optoelectronics Conference*, 2005, Brasília.

[7] V. E. Nascimento, J. A. Cuminato, F. L. Teixeira e B.-H. V. Borges, “Unconditionally Stable Finite-Difference Time-Domain Method Based on the Locally-One-Dimensional Technique” *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBrT*, 2005, Campinas.

## **1.7 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO**

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O capítulo 2 descreve os principais métodos de modelagem numéricas utilizadas neste trabalho, ou seja, os métodos FDTD, LOD-TD-WPM, LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS, e ADI-FDTD. Primeiramente, os métodos LOD-FDTD e ADI-FDTD são desenvolvidos sem condições de contorno, e em seguida com a implementação da condição de contorno de Camada Perfeitamente Casada (PML). São ainda discutidas formas eficientes de implementação de fontes explícitas para o método LOD-FDTD. O capítulo 3 apresenta os resultados numéricos obtidos com o emprego da técnica LOD, tanto no domínio do tempo quanto da frequência. Estes resultados abrangem meios convencionais e meios complexos. No capítulo 4 são apresentadas as conclusões finais do trabalho. Nos Apêndices A, B e C são descritos, respectivamente, os seguintes tópicos: técnicas de divisão do operador; método LOD FD-BPM; e análise de estabilidade e dispersão do método LOD-FDTD.

## 2 TÉCNICAS DE MODELAGEM NUMÉRICA

### 2.1 MÉTODOS EXPLÍCITOS

#### 2.1.1 Método FDTD

##### 2.1.1.1 Aspectos do método FDTD

A complexidade de certos meios é o principal fator que impõe a necessidade de desenvolver versões cada vez mais avançadas para o método FDTD, visando superar as limitações inerentes de modelos anteriores e ampliar a gama de dispositivos passíveis de serem analisados. O objetivo de Yee [38] em seu modelo original foi o de demonstrar que as equações de Maxwell no domínio do tempo poderiam ser solucionadas numericamente a partir de aproximações por diferenças finitas, levando em consideração um meio isotrópico sem perdas. Neste caso, as equações de Maxwell são escritas como:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -[\mu]^{-1} (\nabla \times \vec{E}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = [\varepsilon]^{-1} (\nabla \times \vec{H}) \quad (2.2)$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são, respectivamente, os campos elétrico e magnético. Com base nestas equações, duas formas de discretizações podem ser elaboradas tendo em vista a complexidade da estrutura a ser investigada: 1) Discretização temporal, 2) Discretização espacial. A discretização temporal é feita a partir de aproximações das derivadas no tempo das equações de Maxwell, aplicadas aos meios envolvidos como, por exemplo,

(2.1) e (2.2). No caso de meios anisotrópicos, a permissividade  $\epsilon$  e a permeabilidade  $\mu$ , apresentam a forma tensorial. O esquema de evolução temporal das componentes de campo é baseado no esquema *leapfrog* conforme mostrado na FIGURA 5. Neste caso, todas as componentes de campo elétrico são obtidas a partir das componentes de campo magnético, previamente armazenadas, para logo em seguida se obter as componentes de campo magnético por meio das componentes de campo elétrico calculadas.

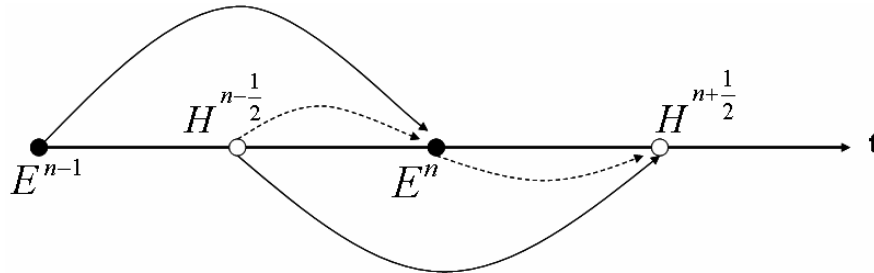


FIGURA 5: Esquema de evolução temporal do método FDTD baseado no esquema *leapfrog*.

No processo de discretização espacial, apresentado a seguir, são realizadas aproximações sobre as derivadas espaciais presentes nos rotacionais dos campos. O procedimento de discretização espacial é baseado em uma célula tridimensional proposta por Yee, que é composta pelas componentes de campo elétrico e campo magnético, como mostrado na FIGURA 6.

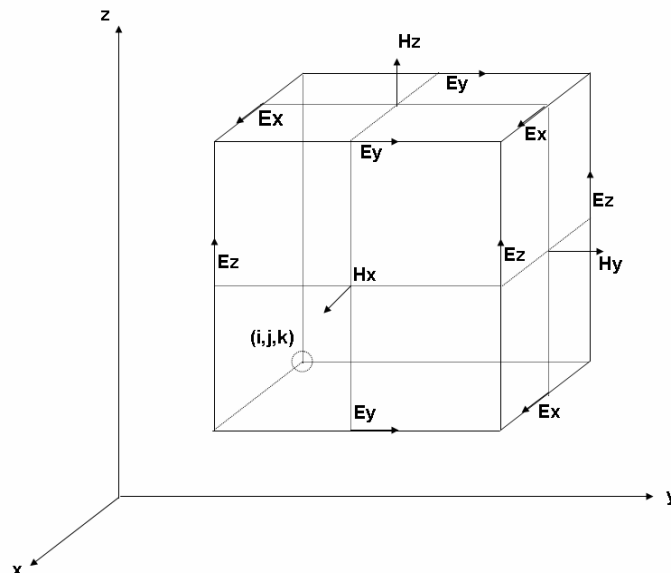


FIGURA 6: Célula de Yee composta pelo arranjo espacial das componentes de campo elétrico e magnético.

### 2.1.1.2 Discretização espacial unidimensional (1D-FDTD)

Na análise de estruturas que apresentam uniformidade em relação a dois eixos cartesianos, ou seja, uniformidade ao longo de um plano, como no caso de guias de placas paralelas infinitas, pode-se reduzir a discretização espacial a uma única dimensão, pois as derivadas espaciais ao longo dos dois outros eixos ortogonais podem ser resolvidas analiticamente. O esquema unidimensional é uma extensão da idéia do esquema bidimensional, a ser descrito a seguir. O esquema unidimensional pode ser empregado em testes para a validação de formulações FDTD em virtude de sua discretização espacial proporcionar um tempo de processamento bastante reduzido. A célula ilustrada na FIGURA 7 é aplicada em estruturas com uniformidade no plano  $xz$ , onde cada passo na direção  $y$  é representado por um incremento  $\delta y$ .

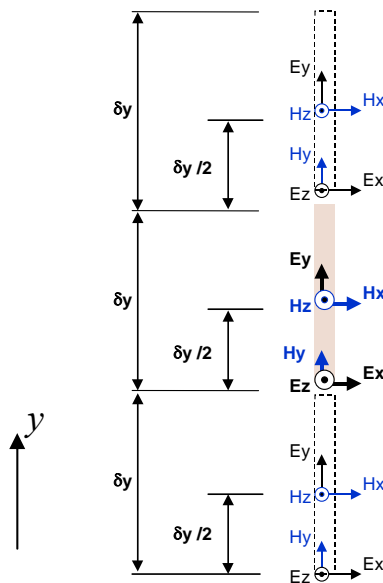


FIGURA 7: Célula para discretização espacial unidimensional.  $\delta y$  é o tamanho do passo de discretização no eixo  $y$ .

### 2.1.1.3 Discretização espacial bidimensional (2D-FDTD)

A versão bidimensional teve sua primeira versão estabelecida por Brankovic *et al.* [57], os quais analisaram diversos tipos de guias metálicos e dielétricos com recursos de graduação de malha, para melhorar ainda mais a eficiência do método. A versão com-

pacta bidimensional foi mais adequadamente estabelecida por Cangellaris [58], de onde foi também obtida a condição de estabilidade para o 2D-FDTD. A célula ilustrada na FIGURA 8 aplica-se a estruturas com uniformidade ao longo do eixo  $z$ .

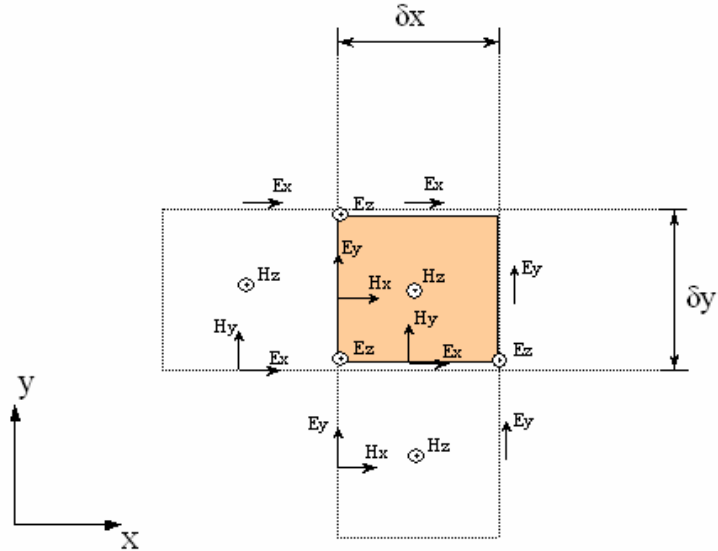


FIGURA 8: Célula para discretização bidimensional.  $\delta_x$  e  $\delta_y$  representam o tamanho do passo da discretização nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

## 2.2 MÉTODOS IMPLÍCITOS

### 2.2.1 Método LOD TD-WPM

O método FDTD tem como grande limitação o fato de utilizar passos de discretização espacial menores que  $\lambda/10$ , e passos de tempo também muito reduzidos, de modo a garantir que o critério de estabilidade CFL seja satisfeito. Esta limitação torna-se proeminente na simulação de dispositivos longos, na faixa de frequências ópticas, e/ou que apresentem geometria complexa. Uma alternativa computacionalmente eficiente é o método TD-WPM, ou seja, o método de propagação de onda no domínio do tempo, proposto por Huang [43], o qual é desenvolvido a seguir.

Partindo da seguinte equação de Maxwell para meios isotrópicos, tem-se:

$$-\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} \quad (2.3)$$

Aplicando o operador rotacional em ambos os lados de (2.3), resulta:

$$-\nabla \times \left( \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \nabla \times \nabla \times \vec{E} \quad (2.4)$$

Para  $\mu$  homogêneo resulta:

$$-\mu \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \right) = \nabla \times \nabla \times \vec{E} \quad (2.5)$$



$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \right] = \nabla \times \nabla \times \vec{E}$$

$$-\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \times \nabla \times \vec{E} \quad (2.6)$$

Sabendo que  $n^2 = \varepsilon_r \mu_r$  e  $c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ , e aplicando em (2.6) resulta:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{n(r)^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

onde  $n(r)$  é o perfil de índice de refração sendo  $\varepsilon$  não homogêneo e  $c_0$  a velocidade da luz no vácuo.

O formalismo TD-WPM faz uso da aproximação de envoltória de variação lenta no tempo (SVEA - *Slowly Varying Envelope Approximation*), o que permite passos de discretização significativamente maiores, aliviando a carga computacional. O SVEA é incorporado ao formalismo partindo da equação de onda (2.7). O campo  $\vec{E}(r, t)$  pode ser convenientemente representado em termos de uma componente de variação lenta,  $\bar{\Psi}(r, t)$ , e outra de variação rápida,  $e^{-j\omega_0 t}$ . Assim temos que  $\vec{E}(r, t) = \bar{\Psi}(r, t) e^{-j\omega_0 t}$ , onde  $\omega_0$  representa a frequência angular. Substituindo esta expressão em (2.7) e fazendo uso do SVEA, ou seja

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{\Psi} e^{-j\omega_0 t}}{\partial t^2} \right| \ll \left| -2j\omega_0 \frac{\partial \bar{\Psi} e^{-j\omega_0 t}}{\partial t} \right|,$$

obtem-se a seguinte equação de propagação no domínio do tempo:

$$-2j\omega_0 \frac{n(r)^2}{c_0^2} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \bar{\Psi} + \omega_0^2 \frac{n(r)^2}{c_0^2} \bar{\Psi} \quad (2.8)$$

Desprezando-se as variações rápidas do campo, passos de tempo sensivelmente maiores podem agora ser utilizados. Outro grande atrativo deste método está no fato de que reflexões em interfaces podem ser analisadas, já que a derivada segunda com respeito à direção de propagação,  $z$ , não foi desprezada [51]-[53]. Expandindo (2.8) e considerando o formalismo possuindo apenas duas dimensões espaciais e uma dimensão temporal, resulta em:

$$-2j\omega_0 \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{E}_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{E}_y + \omega_0^2 \frac{n^2}{c_0^2} \bar{E}_y \quad (2.9)$$

A equação acima representa o formalismo TD-WPM escalar para a componente de campo  $\bar{E}_y$ . Como pode ser observado, (2.9) possui três dimensões o que torna a sua solução intensiva do ponto de vista computacional.

A aplicação da técnica LOD na solução de (2.9) representa uma alternativa eficaz na solução de problemas multidimensionais, visto que apenas uma dimensão espacial é considerada em cada passo de propagação. Analisando-se a expressão (2.9) verifica-se que a aplicação do método LOD ocasiona a quebra da solução em dois passos de propagação distintos como discutido no Apêndice A. Em cada passo de propagação, uma única direção espacial é considerada, resultando em duas equações diferentes para as direções  $x$  e  $z$ , respectivamente. Para o desenvolvimento do método (2.9) é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{E}_y = aL_x \bar{E}_y + aL_z \bar{E}_z + aL_0 \bar{E}_y \quad (2.10)$$

onde,

$$a = \frac{jc_0^2}{2\omega_0 n^2}, \quad L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{e} \quad L_0 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}, \quad \text{sendo o termo } L_0 \text{ considerado análogo}$$

ao termo de fase presente em BPMs no domínio da frequência. Aplicando o esquema de Crank-Nicolson aos operadores  $L_x$  e  $L_z$  resulta:

$$\left( 1 - \frac{\Delta ta}{2} L_x - \frac{\Delta ta}{2} L_z \right) E_y^{t+1} = \left( 1 + \frac{\Delta ta}{2} L_x + \frac{\Delta ta}{2} L_z \right) E_y^t + \Delta ta L_0 E_y \quad (2.11)$$

A equação (2.11) é fatorada da seguinte forma:

$$\left(1 - \frac{\Delta ta}{2} L_x\right) \left(1 - \frac{\Delta ta}{2} L_z\right) E_y^{t+1} = \left(1 + \frac{\Delta ta}{2} L_x\right) \left(1 + \frac{\Delta ta}{2} L_z\right) E_y^t + \Delta ta L_0 E_y \quad (2.11)$$

A técnica LOD aplicada em (2.11) resulta nos dois passos de propagação do método LOD TD-WPM.

$$\left(1 - \frac{\Delta ta}{2} L_x\right) E_y^{t+(1/2)} = \left(1 + \frac{\Delta ta}{2} L_x\right) E_y^t + \Delta ta \frac{L_0}{2} E_y \quad (2.12)$$

e

$$\left(1 - \frac{\Delta ta}{2} L_z\right) E_y^{t+1} = \left(1 + \frac{\Delta ta}{2} L_z\right) E_y^{t+(1/2)} + \Delta ta \frac{L_0}{2} E_y \quad (2.13)$$

Aplicando o esquema de Crank-Nicolson na componente  $E_y$  referente ao termo de fase  $L_0$  resulta:

$$\left(1 - \frac{\Delta ta}{2} L_x\right) E_y^{t+(1/2)} = \left(1 + \frac{\Delta ta}{2} L_x\right) E_y^t + \Delta ta \frac{L_0}{4} (E_y^{t+(1/2)} + E_y^t) \quad (2.14)$$

e

$$\left(1 - \frac{\Delta ta}{2} L_z\right) E_y^{t+1} = \left(1 + \frac{\Delta ta}{2} L_z\right) E_y^{t+(1/2)} + \Delta ta \frac{L_0}{4} (E_y^{t+1} + E_y^{t+(1/2)}) \quad (2.15)$$

Esta abordagem resulta em duas equações acopladas, cuja solução é mais simples do que a solução resultante com o ADI. Isto se deve ao fato que, embora a técnica ADI também resulte em dois passos de propagação, para cada um desses passos o método trabalha com ambas as direções. No caso do LOD, apenas uma única direção é considerada em cada passo de propagação. A aplicação do esquema de Crank-Nicolson garante a estabilidade incondicional do método.

A expansão em diferenças finitas do operador  $L_x$  em (2.14) resulta no primeiro passo do LOD TD-WPM.

$$\theta E_{i-1,k}^{t+\frac{1}{2}} + \sigma E_{i,k}^{t+\frac{1}{2}} + \theta E_{i+1,k}^{t+\frac{1}{2}} = \gamma E_{i-1,k}^t + \nu E_{i,k}^t + \gamma E_{i+1,k}^t \quad (2.15)$$

onde:

$$\theta = -\frac{jc_0^2 \Delta t}{4\omega_0 n^2 \Delta x^2}, \quad \sigma = 1 + \frac{jc_0^2 \Delta t}{2\omega_0 n^2 \Delta x^2} - \frac{jc_0^2 \Delta t L_0}{8\omega_0 n^2}, \quad \gamma = \frac{jc_0^2 \Delta t}{4\omega_0 n^2 \Delta x^2} \quad e$$

$$\nu = 1 - \frac{jc_0^2 \Delta t}{2\omega_0 n^2 \Delta x^2} + \frac{jc_0^2 \Delta t L_0}{8\omega_0 n^2}$$

Para a obtenção do segundo passo, o procedimento é análogo ao realizado no passo anterior. Neste caso,  $L_z$  (2.15) é expandido em diferenças finitas, resultando na seguinte expressão.

$$\alpha E_{i,k-1}^{t+1} + \eta E_{i,k}^{t+1} + \alpha E_{i,k+1}^{t+1} = \beta E_{i,k-1}^{t+\frac{1}{2}} + \gamma E_{i,k}^{t+\frac{1}{2}} + \beta E_{i,k+1}^{t+\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

onde:

$$\alpha = -\frac{jc_0^2 \Delta t}{4\omega_0 n^2 \Delta z^2}, \quad \eta = 1 + \frac{jc_0^2 \Delta t}{2\omega_0 n^2 \Delta z^2} - \frac{jc_0^2 \Delta t L_0}{8\omega_0 n^2}, \quad \beta = \frac{jc_0^2 \Delta t}{4\omega_0 n^2 \Delta z^2} \quad e$$

$$\gamma = 1 - \frac{jc_0^2 \Delta t}{2\omega_0 n^2 \Delta z^2} + \frac{jc_0^2 \Delta t L_0}{8\omega_0 n^2}$$

Sendo assim, a aplicação da técnica LOD no método TD-WPM resulta em duas equações implícitas, (2.14) e (2.15), cuja solução é obtida por meio de um sistema tridiagonal.

### 2.2.2 Métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD

O método FDTD, apesar de sua eficiência e simplicidade na análise da propagação de ondas eletromagnéticas, apresenta como principal desvantagem um grande esforço computacional. Esta característica torna-se ainda mais evidente quando utilizado para análise de meios com características complexas ou em análises tridimensionais. Sua limitação computacional deve-se à restrição imposta pela condição de estabilidade CFL, que implica na utilização de passos de tempo extremamente pequenos. Uma maneira eficaz de contornar a limitação imposta pela condição CFL na solução de problemas multidimensionais é a utilização de técnicas de divisão de operadores, tais como o ADI e o LOD. As técnicas ADI e LOD são desenvolvidas em detalhes no Apêndice A. Neste capítulo são apresentados os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD. Primeiramente, os métodos são desenvolvidos sem condição de contorno e, posteriormente, a eficiente condição de contorno denominada condição de camada perfeitamente casada (PML) é incorporada nestes formalismos. Por fim é apresentada uma implementação eficiente de fonte explícita que pode ser aplicada no método LOD-FDTD.

### 2.2.3 Desenvolvimento do Método ADI-FDTD

Uma forma de minimizar as restrições computacionais impostas pelo método FDTD foi proposta por Namiki [59]. Em sua formulação, Namiki propôs uma variante do método FDTD, utilizando a técnica ADI. Esta nova abordagem resultou em um método implícito, ao contrário do método FDTD que é puramente explícito. Com isso, passos de tempo significativamente maiores podem ser utilizados pelo método ADI-FDTD, pelo fato deste não ser mais restrito à condição de estabilidade CFL. A inclusão do formalismo ADI-FDTD neste trabalho visa apenas pontuar as principais diferenças entre

este método e o método LOD-FDTD [94]-[95], ambos baseados na divisão, ou *splitting*, das equações originais.

A derivação do método ADI-FDTD segue os mesmos moldes propostos por Namiki em [59]. Assim, partindo das equações de Maxwell para modos TE, tem-se:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = [A]\vec{u} + [B]\vec{u} \quad (2.17)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\varepsilon \partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\mu \partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\varepsilon \partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\mu \partial x} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{u} = [E_x, E_y, H_z]^T$$

Aplicando o esquema de Crank-Nicolson em (2.17), resulta:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[A] - \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] + \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^n \quad (2.18)$$

A equação (5) é aproximada pela seguinte fatorização:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^n \quad (2.19)$$

com um erro dado por

$$\frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n)$$

A partir de (2.19) obtém-se o primeiro e segundo passos do método dados por:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \vec{u}^{n+(1/2)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^n \quad (2.20)$$

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \vec{u}^{n+(1/2)} \quad (2.21)$$

É importante ressaltar que o método ADI lida com apenas uma direção implicitamente a cada passo de tempo, enquanto a outra direção é tratada de maneira explícita. Sendo assim, a aplicação da técnica ADI em um método FDTD para modos TE resulta em uma solução de dois passos. Para o primeiro passo, (2.20) é expandida em diferenças finitas e discretizadas da seguinte forma:

$$E_x^{n+(1/2)} = E_x^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y} \left( H_z^{n+(1/2)} - H_z^{n+(1/2)} \right) \quad (2.22)$$

$$E_y^{n+(1/2)} = E_y^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left( H_z^n - H_z^n \right) \quad (2.23)$$

$$H_z^{n+(1/2)} = H_z^n - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left( E_y^n - E_y^n \right) + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left( E_x^{n+(1/2)} - E_x^{n+(1/2)} \right) \quad (2.24)$$

Neste primeiro passo a direção  $y$  é adotada como implícita. Desta forma, a componente  $H_z$  em (2.22) deve ser reescrita de acordo com (2.24) para a obtenção da componente  $E_x$ , resultando na seguinte equação após manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1} - (\beta^2 + 2)E_x^{n+1} + E_x^{n+1} = \\ -\beta^2 E_x^{n+1/2} - \frac{2\mu\Delta y}{\Delta t} \left[ H_z^{n+1/2} - H_z^{n+1/2} \right] + \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[ E_y^{n+1/2} - E_y^{n+1/2} + E_y^{n+1/2} - E_y^{n+1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{onde: } \beta = \frac{2\sqrt{\varepsilon\mu\Delta y}}{\Delta t}$$

Para obtenção do segundo passo no instante de tempo  $(n+1)$ , o procedimento é análogo ao descrito acima, com a expansão de (2.21) resultando nas seguintes equações discretizadas:

$$E_x^{n+1} = E_x^{n+(1/2)} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y} \left( H_z^{n+(1/2)} - H_z^{n+(1/2)} \right) \quad (2.27)$$

$$E_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = E_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+(1/2)} - \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta x} \left( H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - H_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} \right) \quad (2.28)$$

$$H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+(1/2)} - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left( E_{y_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - E_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} \right) + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left( E_{x_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{n+(1/2)} - E_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+(1/2)} \right) \quad (2.29)$$

Neste passo, ao contrário do passo anterior, a direção x é adotada como implícita. Desta forma, a componente  $H_z$  em (2.28) deve ser reescrita de acordo com (2.29) para a obtenção da componente  $E_x$ , resultando na seguinte equação após manipulação algébrica:

$$E_{y_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - (\alpha^2 + 2)E_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} + E_{y_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = -\alpha^2 E_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+(1/2)} - \frac{2\mu\Delta x}{\Delta t} \left[ H_{z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+(1/2)} - H_{z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+(1/2)} \right] + \frac{\Delta x}{\Delta y} \left[ E_{x_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{n+(1/2)} - E_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+(1/2)} + E_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^{n+(1/2)} - E_{x_{i-\frac{1}{2},j+1}}^{n+(1/2)} \right] \quad (2.30)$$

$$\text{onde: } \alpha = \frac{2\sqrt{\epsilon\mu\Delta x}}{\Delta t}.$$

Como pode ser observado, o método ADI-FDTD possui três equações em cada passo de tempo, uma implícita e duas explícitas. Uma diferença significativa do método LOD-FDTD em relação ao método ADI-FDTD é o fato que o primeiro resulta em apenas duas equações por passo como será demonstrado a seguir.

## 2.2.4 Desenvolvimento do Método LOD-FDTD

Como exposto anteriormente, para se contornar a limitação imposta pela CFL, diversos métodos numéricos no domínio do tempo foram propostos, dentre os quais se destacam: o TD-WPM proposto por Huang [43] e o ADI-FDTD proposto por Namiki [59]. O formalismo TD-WPM faz uso da aproximação de envoltória de variação lenta no tempo (SVEA - *Slowly Varying Envelope Approximation*), o que permite passos de discretização significativamente maiores, aliviando a carga computacional. No caso do método ADI-FDTD, o método FDTD, que é um método explícito, é reformulado de



forma a torná-lo um método implícito, removendo a condição de estabilidade CFL, permitindo, assim, o uso de passos de tempo significativamente maiores.

A utilização da técnica LOD na solução das equações de Maxwell no domínio do tempo foi inicialmente sugerida por Fornberg [93] recebendo a denominação de *split-step* e posteriormente utilizada por [94]-[95], tendo então sido denominada por LOD-FDTD. A distinção é que o trabalho de Fornberg utilizava duas células de discretização espacial para os operadores transversais,  $2\Delta\alpha$ , enquanto que em [94]-[95] apenas uma célula é utilizada, ou seja,  $\Delta\alpha$ . Onde  $\alpha = x, y, z$ .

De maneira análoga ao método ADI-FDTD, este método torna o método FDTD implícito, removendo a restrição imposta pela CFL. O método LOD-FDTD é extremamente atrativo do ponto de vista computacional em virtude de sua maior velocidade de execução quando comparado ao método FDTD. O seu desempenho computacional é superior ao do ADI-FDTD pelo fato de trabalhar com duas equações por passo, enquanto o ADI-FDTD trabalha com três equações por passo. Adicionalmente, o seu desempenho ao empregar a eficiente condição de contorno PML torna-se significativamente superior ao ADI-FDTD, como será demonstrado nas seções de resultados numéricos 3.3 a 3.6.

O desenvolvimento do método LOD-FDTD é feito de forma análoga ao ADI-FDTD considerando as equações para modos TE conforme Namiki [59], dadas por (2.17).

O método LOD-FDTD parte do princípio de que uma equação multidimensional pode ser quebrada em sucessivos passos, sendo que em cada passo apenas uma dimensão é considerada. Pela análise das equação (2.17), verifica-se que esta representa uma abordagem bidimensional. Sendo assim, o método LOD-FDTD aplicado em (2.19) resulta em dois passos de propagação, cada qual composto por duas equações. No método LOD-FDTD, apenas uma direção espacial em cada passo é considerada. O primeiro e segundo passos do LOD-FDTD podem ser representados pelas seguintes equações:

$$1^\circ \text{ Passo LOD-FDTD } \left( [I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \vec{u}^{n+(1/2)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \vec{u}^n \quad (2.31)$$

$$2^\circ \text{ Passo LOD-FDTD} \left( [I] - \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \bar{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \bar{u}^{n+(1/2)} \quad (2.32)$$

Considerando o primeiro passo do LOD-FDTD, a equação (2.31) deve ser expandida em diferenças finitas resultando nas seguintes equações discretizadas.

$$E_x^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j} = E_x^n_{i+\frac{1}{2},j} + \beta_1 \left( H_z^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + H_z^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H_z^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - H_z^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.33)$$

$$H_z^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = H_z^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \beta_2 \left( E_x^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j+1} + E_x^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - E_x^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j} - E_x^n_{i+\frac{1}{2},j} \right) \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.33), resulta:

$$\begin{aligned} & -\beta_1 \beta_2 E_x^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j+1} + (1+2\beta_1 \beta_2) E_x^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j} - \beta_1 \beta_2 E_x^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j-1} = \\ & (1-2\beta_1 \beta_2) E_x^n_{i+\frac{1}{2},j} + \beta_1 \beta_2 \left( E_x^n_{i+\frac{1}{2},j+1} + E_x^n_{i+\frac{1}{2},j-1} \right) + 2\beta_1 \left\{ H_z^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H_z^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\text{onde, } \beta_1 = \frac{\Delta t}{2\epsilon \Delta y} \text{ e } \beta_2 = \frac{\Delta t}{2\mu \Delta y}.$$

Para o segundo passo o desenvolvimento é análogo, sendo realizada a expansão em diferenças finitas de (2.32) resulta:

$$E_y^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = E_y^{n+(1/2)}_{i,j+\frac{1}{2}} - \alpha_1 \left( H_z^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + H_z^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H_z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H_z^{n+(1/2)}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.36)$$

$$H_z^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = H_z^{n+(1/2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \alpha_2 \left( E_y^{n+1}_{i+1,j+\frac{1}{2}} + E_y^{n+(1/2)}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - E_y^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} - E_y^{n+(1/2)}_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.36), resulta:

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_1\alpha_2 E_{y, i+1, j+\frac{1}{2}}^{n+1} + (1+2\alpha_1\alpha_2) E_{y, i, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \alpha_1\alpha_2 E_{y, i-1, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \\
 & (1-2\alpha_1\alpha_2) E_{y, i, j+\frac{1}{2}}^n + \alpha_1\alpha_2 \left( E_{y, i+1, j+\frac{1}{2}}^n + E_{y, i-1, j+\frac{1}{2}}^n \right) - 2\alpha_1 \left( H_{z, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - H_{z, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

onde,  $\alpha_1 = \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}$  e  $\alpha_2 = \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}$ .

Embora as seções 2.2.3 e 2.2.4 mostrem o emprego simples e eficiente das técnicas ADI e LOD em um método FDTD, o uso amplo e eficaz destes métodos está condicionado à aplicação de condições de contorno eficientes. Neste trabalho, a condição de contorno utilizada nos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD é a eficiente condição de camada perfeitamente casada (PML), já consagrada na literatura, a qual é apresentada a seguir. O estudo de estabilidade e dispersão numéricas do método LOD-FDTD é apresentado no Apêndice C.

### 2.2.5 Condição de Contorno de Camada Perfeitamente Casada (PML)

A grande importância da aplicação de condições de contorno em métodos destinados ao estudo da propagação eletromagnética em problemas abertos se deve ao fato de que os requisitos computacionais para simulação de tais casos são extremamente dispendiosos em termos de tempo. Portanto, o truncamento da janela computacional por meio de condições de contorno é primordial. A idéia principal é que a onda propagante, ao atingir a fronteira do domínio computacional, não sofra reflexão. Isto corresponde a uma situação na qual a fronteira do domínio computacional é “transparente” à onda incidente. Entre as principais condições de contorno utilizadas no estudo de propagação eletromagnética estão a condição de contorno transparente proposta por Hadley [62] e as condições de contorno absorventes ABCs [44]. As ABCs podem ser distinguidas em duas abordagens distintas [39]. A primeira é baseada na resolução de operadores em equações diferenciais, e a segunda é baseada no emprego de material absorvente que circunda a fronteira computacional. Uma breve descrição de ambas as abordagens é realizada a seguir:

A explanação sobre a primeira abordagem para ABCs é realizada considerando uma equação de onda bi-dimensional em coordenadas cartesianas, da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.39)$$

onde  $\Psi$  é uma componente de campo escalar e  $c$  é a velocidade de fase da onda. O procedimento é realizado de forma que (2.39) é considerada na forma de operador como:

$$G = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

permitindo que (2.39) seja rescrita de maneira compacta como:

$$G\Psi = 0 \quad (2.40)$$

O operador  $G$  em (2.40) pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$G\Psi = G^+ G^- \Psi \quad (2.41)$$

sendo  $G^+$  e  $G^-$  definidos como:

$$G^+ = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1 - S^2} \quad (2.42)$$

e

$$G^- = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1 - S^2} \quad (2.43)$$

$$\text{onde } S^2 = \frac{c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2}{\partial t^2}}.$$

Desta forma, o esquema é realizado da seguinte maneira: do lado esquerdo da janela computacional,  $x = x_{\text{mínimo}}$ , a aplicação de  $G^-$  à função de onda  $\Psi$  ocasiona a absorção das ondas que incidem naquela posição da fronteira computacional em ângulos arbitrários. De forma similar, a aplicação de  $G^+$  em  $\Psi$  ocasiona absorção da onda no lado oposto da fronteira computacional, ou seja,  $x = x_{\text{máximo}}$  como pode ser observado na FIGURA 9.

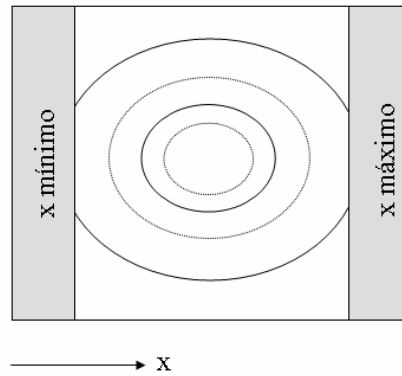


FIGURA 9: Ilustração do esquema de absorção utilizando ABC.

Como pode ser visto em (2.42) e (2.43), o termo  $\sqrt{1-S^2}$  não pode ser resolvido de forma direta, sendo necessário o uso de aproximações para sua solução. Formas elegantes para se contornar este problema são baseadas no uso de séries de Taylor e aproximantes de Padé. Portanto, o uso de diferentes aproximações para a solução do problema resulta nas diferenças entre os vários esquemas de ABCs para a referida primeira abordagem. Vale salientar que esta abordagem baseada em operadores foi proposta por Engquist-Majda [63], e a partir deste trabalho novos esquemas mais eficientes de ABCs foram propostos, como por exemplo, o esquema de Mur [64] de primeira e segunda ordens.

A segunda abordagem para a implementação das ABCs é baseada na utilização de material absorvente ao redor do domínio computacional de forma a evitar que as ondas incidentes reflitam e comprometam a acurácia da solução do problema.

Dentre estas ABCs, destaca-se o formalismo proposto por Berenger [65], o qual representa o estado da arte no que diz respeito ao estudo de propagação eletromagnética. O grande mérito do trabalho de Berenger está no fato de que seu formalismo representou um avanço extraordinário, com desempenho ordens de magnitude superior aos esquemas anteriores. O principal fator que degradava os resultados dos esquemas anteriores relacionava-se à necessidade de incidência de uma onda plana praticamente perpendicular à interface, uma vez que desta forma a reflexão seria mínima. Em contrapartida, o trabalho de Berenger mostrou ser eficaz para incidência da onda em qualquer ângulo e frequência, o que justifica o seu excelente desempenho. Uma breve descrição do trabalho de Berenger é apresentada a seguir:

A abordagem proposta por Berenger pode ser compreendida como um casamento perfeito de impedâncias entre diferentes meios, daí sua denominação como condição de contorno de camada perfeitamente casada, ou seja, (PML). A abordagem apresentada

em seu trabalho considerou um tratamento bidimensional das equações de Maxwell para um caso de polarização TE, envolvendo as componentes  $E_x$ ,  $E_y$  e  $H_z$  dadas pelas seguintes equações:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{H_z}{\partial y} \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.45)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.46)$$

onde  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  representam a permissividade elétrica e permeabilidade magnética no espaço livre, e  $\sigma$  e  $\sigma^*$  correspondem à condutividade elétrica e perda magnética, respectivamente. Para que haja um casamento de impedâncias entre diferentes meios, é necessário que a seguinte relação seja respeitada:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (2.47)$$

A substituição direta de (2.47) em (2.44)-(2.46) origina uma condição de contorno ABC baseada em material absorvente. Entretanto, os resultados em termos de reflexão sofrem os mesmos problemas dos esquemas precedentes quando a incidência da onda não é perpendicular à interface [44].

A PML proposta por Berenger introduziu o conceito de divisão da componente  $H_z$  em sub-componentes que são denotadas como  $H_{zx}$  e  $H_{zy}$ , sendo por isso denominada na literatura como *split* PML. Com isso, a condutividade elétrica e a perda magnética são divididas nas direções x e y, sendo denominadas  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x^*$  e  $\sigma_y^*$ , respectivos às duas direções. A aplicação deste conceito em (2.44)-(2.46) gera um conjunto de quatro equações acopladas dadas por:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.50)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.51)$$

A compreensão do esquema *split* PML pode ser realizada com o auxílio da FIGURA 10 que representa o domínio computacional de interesse circundado por quatro regiões de camadas absorventes, no plano  $xy$ . Na direção  $x$  temos duas regiões, representando  $x = x_{\text{mínimo}}$  e  $x = x_{\text{máximo}}$ , denominadas por A, e na direção  $y$  temos duas regiões, representando  $y = y_{\text{mínimo}}$  e  $y = y_{\text{máximo}}$ , denominadas por B. Os pares de condutividade  $(\sigma_x, \sigma_x^*)$  e  $(\sigma_y, \sigma_y^*)$  devem satisfazer a condição de casamento de impedâncias entre os meios dada por (2.47), de forma a garantir a perfeita aplicação da PML. Para propagação na direção  $x$ , sem reflexão na interface entre a PML e o domínio de interesse,  $\sigma_x$  e  $\sigma_x^*$  devem obedecer à condição (2.47) e  $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$ . Para a propagação na direção  $y$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_y^*$  obedecem à condição (2.47) e  $\sigma_x = \sigma_x^* = 0$ . Nas quinas do domínio computacional representado pela região AB, todas as condutividades  $(\sigma_x, \sigma_x^*, \sigma_y, \sigma_y^*)$  estão presentes. O resumo das características da PML, representada pelas regiões A, B e AB é apresentado na TABELA 1.

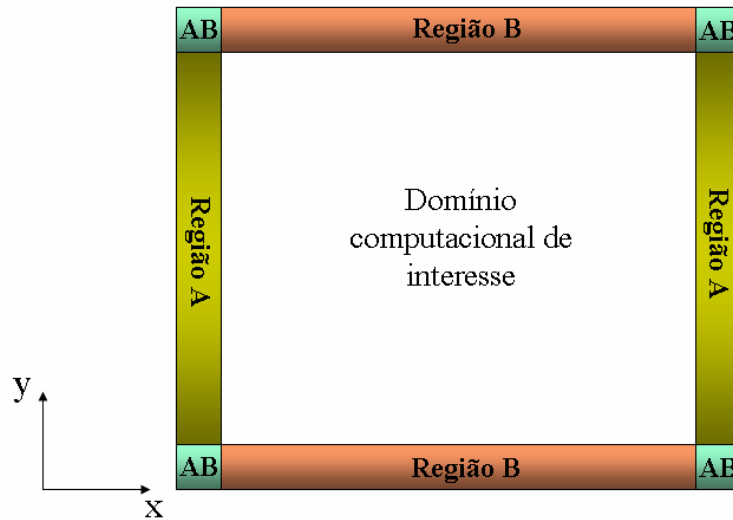


FIGURA 10: Regiões de camadas absorventes (PML) no caso de um problema bidimensional.

TABELA 1: Propriedade das regiões PML.

Região	Características
A	$(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0)$
B	$(0, 0, \sigma_y, \sigma_y^*)$
AB	$(\sigma_x, \sigma_x^*, \sigma_y, \sigma_y^*)$
Domínio computacional de interesse	$(0, 0, 0, 0)$

Berenger propôs em seu trabalho que o cálculo da condutividade fosse realizado de acordo com:

$$\sigma(\rho) = \sigma_{\max} \left( \frac{\rho}{\delta} \right)^n \quad (2.52)$$

onde  $\delta$  representa a espessura da camada PML que é definida pelo *número de células*  $\times$  *tamanho de cada célula*, e  $n$  representa o grau do polinômio. O parâmetro  $\rho$  se refere a uma distância que varia desde um valor mínimo estabelecido na interface entre os meios até um valor máximo no final da camada PML. Portanto,  $\sigma(\rho)$  representa uma função que varia desde o valor zero na interface entre os meios até um valor máximo ( $\sigma_m$ ) no final da camada PML.

Tendo em vista o que foi exposto sobre a condição de contorno PML, esta será agora incorporada aos métodos LOD-FDTD e ADI-FDTD apresentados anteriormente.



O desenvolvimento será realizado para ambos os métodos de forma a ressaltar as diferenças na sua aplicação, e também para uma melhor compreensão dos resultados que serão apresentados posteriormente. De agora em diante, com a finalidade de simplificar a notação utilizada, o esquema *split* PML será denominado apenas por PML.

### 2.2.6 Desenvolvimento do Método ADI-FDTD com PML

O formalismo empregado para a implementação da PML na derivação do método ADI-FDTD segue o proposto por Wang em [72]. Adicionalmente, a expansão do formalismo é realizada com o emprego de fonte simétrica [66]-[68], ou seja, a excitação é realizada dentro da matriz de atualização dos campos e não fora como na maneira tradicional. Este tipo de abordagem garante uma maior precisão dos resultados.

Partindo das equações de Maxwell para o modo TE, tem-se:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.54)$$

$$\mu_0 \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial t} + \sigma^* (H_{zx} + H_{zy}) = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - M_z \quad (2.55)$$

sendo  $M_z$  a fonte de corrente magnética.

Aplicando o esquema ADI em (2.53), (2.54) e (2.55), juntamente com o esquema de PML proposto em [72] para o primeiro passo no instante de tempo  $(n+(1/2))$ , têm-se as seguintes equações:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x^n = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.56)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.57)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_x H_{zx}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{2} M_z \quad (2.58)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_y H_{zy}^n = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{2} M_z \quad (2.59)$$

Para o segundo passo, no instante de tempo (n+1), as equações são as seguintes:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x^{n+1} = + \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y^{n+\frac{1}{2}} = - \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.61)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_x H_{zx}^{n+\frac{1}{2}} = - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{2} M_z \quad (2.62)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_y H_{zy}^{n+1} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{2} M_z \quad (2.63)$$

O desenvolvimento do primeiro passo é realizado com a aplicação do esquema de diferenças finitas em (2.56)-(2.59), resultando nas seguintes equações:

$$E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)} E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n + \beta^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)} \left( H_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zx\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} + H_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zy\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.64)$$

onde:

$$\alpha^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)} = \frac{2\varepsilon_0}{\left(2\varepsilon_0 + \sigma_y^e \Delta t\right)}$$

e

$$\beta^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)} = \frac{\Delta t}{\left(2\varepsilon_0 + \sigma_y^e \Delta t\right) \Delta y}.$$

$$\begin{aligned}
E_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha^{e1} E_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^n - \\
\beta^{e1} &\left( H_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n - H_{zx\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n + H_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n - H_{zy\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n \right)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\text{onde: } \alpha^{e1} = \frac{2\varepsilon_0 - \sigma_x^e \Delta t}{2\varepsilon_0} \text{ e } \beta^{e1} = \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0 \Delta x}.$$

$$\begin{aligned}
H_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha^{h1} H_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n - \\
\beta^{h1} &\left( E_{y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)}^n - E_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^n \right) - \gamma^{h1} M_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\alpha^{h1} &= \frac{2\varepsilon_0 - \sigma_x^h \Delta t}{2\varepsilon_0}, \\
\beta^{h1} &= \frac{\Delta t}{2\mu_0 \Delta x},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma^{h1} &= \frac{\Delta t}{4\mu_0} \\
H_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha^{h1} H_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n + \\
\beta^{h1} &\left( E_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^{n+\frac{1}{2}} - E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \gamma^{h1} M_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

onde:

$$\alpha^{h1} = \frac{2\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \sigma_y^h \Delta t},$$

$$\beta^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Delta t}{\left(2\mu_0 + \eta^2 \sigma_y^h \Delta t\right) \Delta y},$$

$$\gamma^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\left(2\mu_0 + \eta^2 \sigma_y^h \Delta t\right)},$$

e

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

A substituição de (2.66) e (2.67) em (2.64) resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_x$  no primeiro passo do método ADI-FDTD:

$$\begin{aligned} & \beta^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} E^{n+\frac{1}{2}}_{x\left(i+\frac{1}{2},j-1\right)} - c_1^1 E^{n+\frac{1}{2}}_{y\left(i+\frac{1}{2},j\right)} + \beta^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j-1\right)} E^{n+\frac{1}{2}}_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} = c_2^1 E^n_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)} - \\ & \left[ \alpha^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} H^n_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} - \alpha^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} H^n_{zx\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} + \right. \\ & \left. \alpha^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} H^n_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} - \alpha^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} H^n_{zy\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} \right] + \\ & \beta^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} \left[ E^n_{y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)} - E^n_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)} \right] - \beta^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} \left[ E^n_{y\left(i+1,j-\frac{1}{2}\right)} - E^n_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} \right] + \\ & \left[ \gamma^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} M^{n+\frac{1}{2}}_{zx\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} - \gamma^{hl}_{x\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} M^{n+\frac{1}{2}}_{zx\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} + \right. \\ & \left. \gamma^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} M^{n+\frac{1}{2}}_{zy\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} - \gamma^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} M^{n+\frac{1}{2}}_{zy\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\text{onde: } c_1^1 = \left( \frac{1}{\beta^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}} + \beta^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)} + \beta^{hl}_{y\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)} \right) \quad \text{e} \quad c_2^1 = \left( \frac{\alpha^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}}{\beta^{el}_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}} \right)$$

A obtenção do segundo passo do ADI-FDTD é feita de maneira análoga ao realizado no primeiro passo. Sendo assim, aplicando-se o esquema de diferenças finitas em (2.60)-(2.63), resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_y$ :

$$\begin{aligned}
& \beta^{h2} x\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) E^{n+1}_{y(i, j+1)} - c_1^2 E^{n+1}_{y\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} + \beta^{h2} x\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) E^{n+1}_{y\left(i-1, j+\frac{1}{2}\right)} = c_2^2 E^{n+\frac{1}{2}}_{y\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} + \\
& \left[ \alpha^{h2} x\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) H^{n+\frac{1}{2}}_{zx\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} - \alpha^{h2} x\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) H^n_{zx\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} + \right. \\
& \left. \alpha^{h2} y\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) H^{n+\frac{1}{2}}_{zy\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} - \alpha^{h2} y\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) H^n_{zy\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} \right] + \\
& \beta^{h2} y\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \left[ E^{n+\frac{1}{2}}_{x\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right)} - E^{n+\frac{1}{2}}_{x\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} \right] - \beta^{h2} y\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \left[ E^{n+\frac{1}{2}}_{x\left(i-\frac{1}{2}, j+1\right)} - E^{n+\frac{1}{2}}_{x\left(i-\frac{1}{2}, j\right)} \right] - \\
& \left[ \gamma^{h2} x\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) M^{n+\frac{1}{2}}_{zx\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} - \gamma^{h2} x\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) M^{n+\frac{1}{2}}_{zx\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} + \right. \\
& \left. \gamma^{h2} y\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) M^{n+\frac{1}{2}}_{zy\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} - \gamma^{h2} y\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) M^{n+\frac{1}{2}}_{zy\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} \right]
\end{aligned} \tag{2.69}$$

onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
\alpha^{e2}_{x\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} &= \frac{(2\varepsilon_0 - \sigma_y^e \Delta t)}{2\varepsilon_0}, \\
\beta^{e2}_{x\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} &= \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0 \Delta y}, \\
\alpha^{e2}_{y\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{2\varepsilon_0}{(2\varepsilon_0 + \sigma_x^e \Delta t)}, \\
\beta^{e2}_{y\left(i, j+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Delta t}{(2\varepsilon_0 + \sigma_x^e \Delta t) \Delta x}, \\
\alpha^{h2}_{x\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{2\varepsilon_0}{(2\varepsilon_0 + \sigma_x^h \Delta t)}, \\
\beta^{h2}_{x\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{\Delta t}{(2\mu_0 + \eta^2 \sigma_x \Delta t) \Delta x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{h2} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\left(2\mu_0 + \eta^2 \sigma_x \Delta t\right) \Delta x} \\ \alpha_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{h2} &= \frac{\left(2\varepsilon_0 - \sigma_y^h \Delta t\right)}{2\varepsilon_0}, \\ \beta_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{h2} &= \frac{\Delta t}{2\mu_0 \Delta y}, \\ \gamma_{y\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{h2} &= \frac{\Delta t}{4\mu_0}, \\ c_1^2 &= \left( \frac{1}{\beta_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{e2}} + \beta_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{h2} + \beta_{x\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{h2} \right), \end{aligned}$$

e

$$c_2^2 = \left( \frac{\alpha_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{e2}}{\beta_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{e2}} \right)$$

### 2.2.7 Desenvolvimento do Método LOD-FDTD com PML

Como discutido anteriormente, os métodos empregados no estudo da propagação eletromagnética necessitam de condições eficientes de truncamento da janela computacional. Esta necessidade visa compatibilizar os requisitos de precisão referentes ao estudo em questão, com os recursos computacionais disponíveis. No contexto deste trabalho, que envolve técnicas de divisão de operador, a PML proposta por Berenger [65] foi aplicada pela primeira vez ao método ADI-FDTD por Gedney [71]. Entretanto, neste estudo ficou demonstrado que o desempenho da PML convencional aplicada ao ADI-FDTD somente é eficiente para valores de passo de tempo pouco superiores ao da condição de estabilidade CFL [44]. Este problema foi suplantado por Wang [72], que propôs a modificação dos coeficientes da PML de [71]. Com isso, a eficiência da PML aplicada ao ADI-FDTD apresentou uma melhoria significativa quando da utilização de valores elevados de passo de tempo. Tendo como base a evolução do emprego da PML

ao ADI-FDTD, este trabalho apresenta duas abordagens eficientes para aplicação da PML utilizando a técnica LOD [99]. Estas abordagens empregando a PML no formalismo LOD-FDTD seguem o proposto em [71] e [72], sendo neste trabalho denominados como primeiro e segundo esquemas, respectivamente. Adicionalmente, a inserção de fonte simétrica é incorporada ao formalismo LOD-FDTD da mesma forma como realizado para o ADI-FDTD.

O emprego do formalismo PML [65] no método LOD-FDTD é realizado partindo-se das seguintes equações de Maxwell para modos TE:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.70)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_x H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{2} M_z \quad (2.71)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.72)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_y H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{2} M_z \quad (2.73)$$

onde  $M_z$  é a fonte de corrente magnética. O primeiro passo LOD-FDTD é obtido pela expansão em diferenças finitas de (2.70) e (2.71), enquanto o segundo passo é obtido de maneira análoga pela expansão de (2.72) e (2.73). Portanto, a expansão do primeiro passo no instante de tempo  $(n+(1/2))$  é dada por:

$$\begin{aligned} E_y^{n+(1/2)}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) &= \alpha_y^e\left(i, j+\frac{1}{2}\right) E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \beta_y^e\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \\ &\cdot \frac{1}{2} \left[ 2H_{zy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - 2H_{zy}^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + H_{zx}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_{zx}^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \beta_y^e\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \left[ H_{zx}^{n+(1/2)}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_{zx}^{n+(1/2)}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} H_{zx}^{n+(1/2)}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) &= \alpha_x^h\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) H_{zx}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \beta_x^h\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \\ &\cdot \left[ E_y^{n+(1/2)}\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^{n+(1/2)}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \right] \\ &- \gamma_x^h\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) M_z^{n+(1/2)}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde  $\alpha_y^e$ ,  $\beta_y^e$ ,  $\alpha_x^h$ ,  $\beta_x^h$ ,  $\gamma_x^h$  são coeficientes da PML que dependem da condutividade  $\sigma_x$  que serão definidos mais adiante. A fim de garantir a estabilidade incondicional do método, o esquema de Crank-Nicolson é aplicado em (2.70) e (2.71) nas derivadas espaciais das componentes  $E_y$  e  $H_{zx}$ . O primeiro passo é obtido com a substituição de (2.75) em (2.74), o que resulta na seguinte equação implícita para a componente  $E_y$ .

$$\begin{aligned}
& \beta_x^h \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) E_y^{n+\frac{1}{2}} \left( i-1, j+\frac{1}{2} \right) - c_1^l E_y^{n+\frac{1}{2}} \left( i, j+\frac{1}{2} \right) + \beta_x^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) E_y^{n+\frac{1}{2}} \left( i+1, j+\frac{1}{2} \right) = \\
& c_2^l E_y^n \left( i, j+\frac{1}{2} \right) + 2 \left[ 2H_{zy}^n \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - 2H_{zy}^n \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) + H_{zx}^n \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - H_{zx}^n \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \right] \\
& + 2 \left[ \alpha_x^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) H_{zx}^n \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - \alpha_x^h \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) H_{zx}^n \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \right] \\
& - \beta_x^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \left[ E_y^n \left( i+1, j+\frac{1}{2} \right) - E_y^n \left( i, j+\frac{1}{2} \right) \right] + \beta_x^h \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \left[ E_y^n \left( i, j+\frac{1}{2} \right) - E_y^n \left( i-1, j+\frac{1}{2} \right) \right] \\
& - 2 \left[ \gamma_x^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) M_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - \gamma_x^h \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) M_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\text{onde: } c_1^l = \left\{ \left[ 4/\beta_y^e \left( i, j+\frac{1}{2} \right) \right] + \beta_x^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) + \beta_x^h \left( i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \right\} \quad \text{e} \quad c_2^l = \left[ -4\alpha_y^e \left( i, j+\frac{1}{2} \right) / \beta_y^e \left( i, j+\frac{1}{2} \right) \right].$$

O segundo passo é obtido de maneira similar no instante de tempo  $(n+1)$ , com a expansão de (2.72) e (2.73). Desta forma, é obtida a seguinte equação implícita para a componente  $E_x$ :

$$\begin{aligned}
& \beta_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) E_x^{n+1} \left( i+\frac{1}{2}, j-1 \right) - c_1^2 E_x^{n+1} \left( i+\frac{1}{2}, j \right) + \beta_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) E_x^{n+1} \left( i+\frac{1}{2}, j+1 \right) = \\
& c_2^2 E_x^n \left( i, j+\frac{1}{2} \right) - 2 \left[ 2H_{zx}^n \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - 2H_{zx}^n \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) + H_{zy}^n \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - H_{zy}^n \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \right] \\
& - 2 \left[ \alpha_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) H_{zy}^n \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - \alpha_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) H_{zy}^n \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \right] \\
& - \beta_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) \left[ E_x^n \left( i+\frac{1}{2}, j+1 \right) - E_x^n \left( i+\frac{1}{2}, j \right) \right] + \beta_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \left[ E_x^n \left( i+\frac{1}{2}, j \right) - E_x^n \left( i+\frac{1}{2}, j-1 \right) \right] \\
& + 2 \left[ \gamma_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) M_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) - \gamma_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) M_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\text{onde: } c_1^2 = \left\{ \left[ 4/\beta_x^e \left( i+\frac{1}{2}, j \right) \right] + \beta_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2} \right) + \beta_y^h \left( i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2} \right) \right\} \quad \text{e} \quad c_2^2 = \left[ -4\alpha_x^e \left( i+\frac{1}{2}, j \right) / \beta_x^e \left( i+\frac{1}{2}, j \right) \right].$$



Os coeficientes da PML são  $\alpha_x^e$ ,  $\beta_x^e$ ,  $\alpha_y^h$ ,  $\beta_y^h$ ,  $\gamma_y^h$ , e dependem da condutividade  $\sigma_y$ .

É importante salientar que o método LOD-FDTD resultante possui apenas duas equações por passo. Entretanto, para as mesmas condições, o método ADI-FDTD trabalha com quatro equações por passo. Portanto, é esperada uma redução do custo computacional favorável ao LOD-FDTD quando comparado ao ADI-FDTD e, conseqüentemente, ao FDTD. A próxima seção mostra como obter os coeficientes da PML para duas implementações diferentes.

### 2.2.8 Esquemas para Implementação da PML no LOD-FDTD

O desenvolvimento do primeiro esquema é realizado de acordo com [71] para a PML aplicada ao ADI-FDTD. Neste caso, no lado esquerdo de (2.70)-(2.73) é realizada uma aproximação centrada no tempo para os termos que envolvem condução. Após a expansão resultam os seguintes coeficientes para o primeiro passo:

$$\alpha_y^e = (2\varepsilon_0 - \sigma_x^e \Delta t) / (2\varepsilon_0 + \sigma_x^e \Delta t), \quad \beta_y^e = 2\Delta t / \left[ (2\varepsilon_0 + \sigma_x^e \Delta t) \Delta x \right]$$

$$\alpha_x^h = (2\varepsilon_0 - \sigma_x^h \Delta t) / (2\varepsilon_0 + \sigma_x^h \Delta t), \quad \beta_x^h = 2\Delta t / \left[ (2\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_x^h \Delta t) \Delta x \right] \text{ e}$$

$$\gamma_x^h = \Delta t / (2\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_x^h \Delta t)$$

Os coeficientes do segundo passo são obtidos de maneira similar e são dados por:

$$\alpha_x^e = \frac{(2\varepsilon_0 - \sigma_y^e \Delta t)}{(2\varepsilon_0 + \sigma_y^e \Delta t)}, \quad \beta_x^e = \frac{2\Delta t}{\left[ (2\varepsilon_0 + \sigma_y^e \Delta t) \Delta y \right]}, \quad \alpha_y^h = \frac{(2\varepsilon_0 - \sigma_y^h \Delta t)}{(2\varepsilon_0 + \sigma_y^h \Delta t)}, \quad \beta_y^h = 2\Delta t / \left[ (2\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_y^h \Delta t) \Delta y \right] \text{ e}$$

$$\gamma_y^h = \Delta t / (2\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_y^h \Delta t)$$

onde  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ ,  $\Delta t$  representa o passo temporal,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , são os comprimentos da célula nas direções x e y, respectivamente.

O desenvolvimento do segundo esquema é realizado de acordo com o proposto em [72]. Neste caso, um esquema avançado de diferenças finitas no tempo foi utilizado para os termos que envolvem condução do lado esquerdo de (2.70)-(2.73). Os seguintes coeficientes são obtidos para o primeiro passo:

$$\alpha_y^e = \varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \sigma_x^e \Delta t), \quad \beta_y^e = \Delta t / [(\varepsilon_0 + \sigma_x^e \Delta t) \Delta x]$$

$$\alpha_x^h = \varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \sigma_x^h \Delta t), \quad \beta_x^h = \Delta t / [(\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_x^h \Delta t) \Delta x] \text{ e}$$

$$\gamma_x^h = \Delta t / [2(\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_x^h \Delta t)]$$

Similarmente, os coeficientes do segundo passo são:

$$\alpha_x^e = \varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \sigma_y^e \Delta t), \quad \beta_x^e = \Delta t / [(\varepsilon_0 + \sigma_y^e \Delta t) \Delta y]$$

$$\alpha_y^h = \varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \sigma_y^h \Delta t), \quad \beta_y^h = \Delta t / [(\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_y^h \Delta t) \Delta y] \text{ e}$$

$$\gamma_y^h = \Delta t / [2(\mu_0 + \eta_0^2 \sigma_y^h \Delta t)]$$

A seguir é apresentado um esquema eficiente de implementação de fonte explícita para os métodos ADI e LOD.

### 2.2.9 Esquema Eficiente para Implementação de Fonte Explícita Aplicado aos Métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD

Apesar do excelente desempenho computacional obtido com a utilização dos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD, a completa eficácia e precisão destes métodos está diretamente relacionada a dois fatores: 1) utilização de condições de contorno eficientes na solução de problemas abertos [65] e, 2) aplicação correta de fontes de excitação que reproduzam de forma fidedigna situações reais referentes à propagação eletromagnética [44].

Esta seção está focada no segundo fator, e trata mais especificamente da utilização de forma correta de fontes de excitação explícitas aplicadas aos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD desenvolvidos na seção 2.2.3 e 2.2.4, respectivamente. Vale ressaltar que o estado da arte no que se refere à aplicação de fontes de excitação para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD, diz respeito à abordagem de forma implícita [67]-[68]. A grande eficiência de fontes implícitas decorre do fato de que os efeitos causados por assimetrias em virtude da aplicação das técnicas de divisão de operadores, seja ADI ou LOD, no método FDTD são minimizadas substancialmente de forma automática no formalismo, resultando em excelente precisão.

A aplicação de fontes explícitas nos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD é plenamente justificada, pois além de apresentar uma excelente precisão, apresenta ainda

grande facilidade de implementação, desde que certas precauções sejam tomadas, como será mostrado neste trabalho. O trabalho apresentado em [69] mostrou que, para obtenção de uma boa precisão das componentes de campo, o esquema de fonte explícita empregado no ADI-FDTD deve ser aplicado simultaneamente nas duas sub-iterações do método. Entretanto, a forma apresentada em [69] é válida somente para um único valor de CFLN, onde  $CFLN = \Delta t / \Delta t_{max}^{FDTD}$ , sendo que  $\Delta t$  representa o passo de tempo utilizado e  $\Delta t_{max}^{FDTD}$  representa o passo máximo de tempo permitido pela condição de estabilidade CFL. Em [70] foi mostrado que a fonte de excitação apresenta uma correspondência direta com o valor da CFLN, sendo a excitação aplicada de forma implícita dentro da matriz tridiagonal.

Neste trabalho será apresentado um procedimento sistemático e preciso de aplicação do esquema de fonte explícita aos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD, mostrando que o proposto em [69] trata-se apenas de um caso particular do procedimento aqui exposto. Vale ressaltar que este tipo de abordagem está sendo ampliada pela primeira vez para o método LOD-FDTD.

### 2.2.9.1 Primeiro esquema

O primeiro esquema é definido aqui como o formalismo apresentado em [69], onde foi demonstrado que a excitação utilizando fonte explícita apresenta resultados precisos na obtenção das componentes de campo desde que a excitação seja aplicada simultaneamente a ambas as sub-iterações do método ADI-FDTD. Assim, para a primeira sub-iteração, a componente  $H_z$  deve ser excitada da seguinte maneira:

$$H_z^n = H_z^n + f_1 \times F_{exc} \quad (2.78)$$

e para a segunda a sub-iteração:

$$H_z^{n+(1/2)} = H_z^{n+(1/2)} + f_2 \times F_{exc} \quad (2.79)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são valores constantes, e a função de excitação é representada por  $F_{exc}$ . Em [69] foram consideradas duas situações: na primeira é considerado o caso tradicio-

nal onde  $f_1 = 1,0$  e  $f_2 = 0,0$ . Na segunda situação  $f_1 = 0,5$  e  $f_2 = 0,5$  (tendo em vista que o método ADI-FDTD é subdividido em dois passos, a excitação também deve ser aplicada nos dois passos de modo que a função de excitação seja ponderada por 0,5 em cada passo). Foi demonstrado que a aplicação do segundo caso proporcionou resultados precisos na obtenção das componentes de campo. Nas simulações realizadas em [69] foi utilizado o valor CFLN=1.

### 2.2.9.2 Segundo esquema

No segundo esquema, que representa o foco desta seção do trabalho, é demonstrado um esquema geral utilizado para excitação dos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD baseado em fonte explícita. Neste caso, quando comparado ao primeiro esquema, não somente a excitação em ambos os passos é considerada, mas também se verifica que ela é dependente do valor CFLN utilizado. Sendo assim, na primeira e na segunda sub-iterações, a componente  $H_z$  deve ser excitada de forma análoga ao realizado no primeiro esquema da seguinte maneira:

$$H_z^n = H_z^n + f_1 \times F_{exc} \quad (2.80)$$

e

$$H_z^{n+(1/2)} = H_z^{n+(1/2)} + f_2 \times F_{exc} \quad (2.81)$$

No segundo esquema, os valores das constantes  $f_1$  e  $f_2$  para obtenção de resultados precisos das componentes de campo são definidos como sendo:  $f_1 = CFLN/2,0$  e  $f_2 = CFLN/2,0$ . Portanto, o aumento do passo de tempo é considerado de acordo com o número  $CFLN$ , onde a função de excitação pode ser interpretada como uma expressão integral dada por  $\int_0^t F_{exc}(t)dt$ , onde  $F_{exc}$  é função apenas do tempo. Com o emprego deste esquema, a excitação de fonte explícita pode ser realizada de maneira eficiente para qualquer valor de CFLN, ao passo que o primeiro esquema representa um caso particular do esquema aqui proposto. Adicionalmente, o primeiro esquema apresenta boa pre-

cisão somente para o caso de CFLN=1, como será demonstrado na próxima seção de resultados numéricos.

Na próxima seção, os formalismos LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD são expandidos através da incorporação dos modelos de Drude com perdas para a obtenção da permissividade e da permeabilidade de forma a permitir a correta simulação de meios metamateriais.

## 2.3 ANÁLISES DE MEIOS METAMATERIAIS UTILIZANDO MÉTODOS EXPLÍCITOS E IMPLÍCITOS

Nesta seção, a gama de aplicações do método LOD-FDTD para a modelagem de problemas eletromagnéticos é estendida para a análise de meios *metamateriais*. Para isso, é necessário que os meios analisados sejam inseridos no formalismo por meio de modelos dispersivos, destacando-se o modelo de Drude. A inserção do modelo de Drude é realizada para os formalismos FDTD e LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD.

### 2.3.1 Modelo de DRUDE

Como postulado por Veselago [1], meios *metamateriais* somente poderiam existir caso  $\varepsilon$  e  $\mu$  fossem simultaneamente negativos. Entretanto, naquele trabalho ele já alertava para o fato de tais meios não ocorrerem naturalmente. Estudos teóricos comprovando a existência de meios com  $\varepsilon$  e  $\mu$  separadamente negativos foram realizados por [2] e [3], com a posterior verificação experimental sendo obtida por [4]. Nestes estudos comprovou-se que meios *metamateriais* apresentam um comportamento dispersivo, ou seja, variam  $\varepsilon$  e  $\mu$  em função da frequência. Sendo assim, é necessário conhecermos para quais faixas de frequências os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\mu$  do meio tornam-se efetivamente negativos. Tal estudo pode ser realizado utilizando modelos para a permissividade e permeabilidade. Os modelos mais empregados para este fim são os modelos de Drude e Lorentz, mas apenas o primeiro será utilizado neste trabalho como discutido a seguir.

As equações (2.82) e (2.83) representam a análise de  $\varepsilon$  e  $\mu$  por meio do modelo de Drude [8]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_{ep}^2}{\omega(\omega - i\Gamma_e)} \right) \quad (2.82)$$

e

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_{mp}^2}{\omega(\omega - i\Gamma_m)} \right) \quad (2.83)$$

onde  $\omega_{ep}$  e  $\omega_{mp}$  representam a frequência do plasma,  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_m$  representam as perdas do sistema. As equações (2.84) e (2.85) representam a análise de  $\varepsilon$  e  $\mu$  por meio do modelo de Lorentz :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_{ep}^2}{\omega(\omega + i\Gamma_e) + \omega_{e0}^2} \right) \quad (2.84)$$

e

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_{mp}^2}{\omega(\omega + i\Gamma_m) + \omega_{m0}^2} \right) \quad (2.85)$$

Neste caso  $\omega_{e0}$  e  $\omega_{m0}$  são as frequências de ressonância. O modelo de Drude tem sido freqüentemente utilizado pelo fato deste propiciar uma maior largura de faixa na análise de  $\varepsilon$  e  $\mu$  negativos quando comparado ao modelo de Lorentz [81]. Adicionalmente, é importante ressaltar que no caso de simulações numéricas a simples imposição de valores negativos para  $\varepsilon$  e  $\mu$  de forma direta podem ocasionar instabilidade do campo na interface entre os meios. Portanto, é necessário a adoção de modelos para meios dispersivos para contornar este problema obtendo  $\varepsilon$  e  $\mu$  negativos de forma indireta. Neste trabalho o modelo de Drude foi adotado da mesma forma que em [8].

Por meio da aplicação do modelo de Drude procuramos demonstrar que para determinadas frequências um meio pode se comportar como possuindo um índice de refração negativo, o que representa a característica básica de um meio *metamaterial*. A maneira pela qual isto é realizado ocorre de forma indireta através da atribuição de valores negativos para a permissividade  $\varepsilon$  e para a permeabilidade  $\mu$ , de tal forma a evitar instabilidades, principalmente quando da utilização do método FDTD. Exemplificando, a forma indireta para se obter  $\varepsilon$  e  $\mu$  negativos consiste em simplesmente substituir  $\omega_{ep}$  e  $\omega_{mp}$  por  $\sqrt{2}\omega$  em (2.82) e (2.83), considerando um sistema sem perdas, por exemplo,

para obter-se  $\varepsilon_r = \mu_r = -1$ . Para demonstrar o conceito de índice de refração negativo consideramos que  $\varepsilon$  e  $\mu$  sejam negativos da seguinte forma:

sabemos que  $n^2 = \varepsilon_r \mu_r$ , logo  $n = \pm \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  e considerando apenas a solução negativa para  $n$  temos portanto  $n = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ .

Neste caso,  $\varepsilon_r$  e  $\mu_r$  são obtidos por meio de (2.82) e (2.83). A título de exemplo, a resposta em frequência da parte real do índice de refração associado com o modelo de Drude com perdas é ilustrado na FIGURA 11 para dois casos,  $n=-1$  (curva superior, azul) e  $n=-6$  (curva inferior, verde), respectivamente. Na simulação foram utilizados os mesmos parâmetros definidos em [45], onde em ambos os casos, a frequência central de interesse para definir o índice de refração foi suposta como  $f_p=30\text{GHz}$ , correspondendo a um comprimento de onda  $\lambda=1\text{cm}$ . Os demais parâmetros físicos utilizados estão listados na TABELA 2.

TABELA 2: Parâmetros físicos inseridos no modelo de Drude com perdas.

	$\omega_{ep} = \omega_{mp} = \omega_p$	$\Gamma_e = \Gamma_m = \Gamma$
$n = -1$	$2\pi\sqrt{2}f_p = 2,66573 \times 10^{11} \text{ rad/s}$	$3,75 \times 10^{-4} \omega_p$
$n = -6$	$2\pi\sqrt{7}f_p = 4,98712 \times 10^{11} \text{ rad/s}$	$2,01 \times 10^{-4} \omega_p$

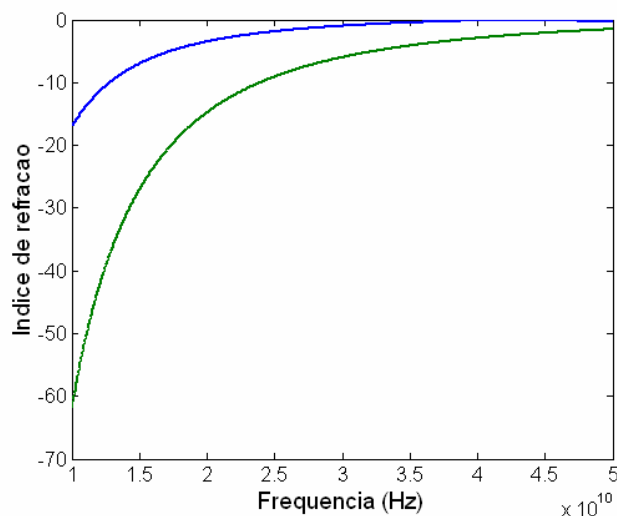


FIGURA 11: Resposta em frequência da parte real do índice de refração associado ao modelo de Drude com perdas. Curva em azul (superior) para  $n = -1$  curva em verde (inferior)  $n = -6$ .



É importante ressaltar que o estudo apresentado na FIGURA 11 pode ser realizado de forma similar em qualquer faixa de frequência desejada (microondas, milimétrica ou óptica) com a utilização de valores adequados de frequência, que são inseridos no modelo de Drude. Tendo em vista que as características dos meios *metamateriais* são realizadas mediante o uso de modelos dispersivos, o trabalho de Shelby *et al.* [7] baseado em medidas experimentais e simulação numérica, mostrou que tais meios podem ser considerados como um material homogêneo. Com isso, a inclusão destes materiais em formalismos numéricos, tais como o FDTD, pôde ser realizada. A utilização do método FDTD possibilitou uma impressionante visualização e avaliação dos efeitos referentes aos meios *metamateriais*. Os formalismos que empregam o meio *metamaterial* para os métodos FDTD, LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD são apresentados nas seções seguintes.

### 2.3.2 Método FDTD para Análise de Metamateriais

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios que apresentam a permissividade  $\varepsilon$  e permeabilidade  $\mu$  negativos utilizando o método FDTD, foi inicialmente proposto por Ziolkowisk [8]. O desenvolvimento do método compreende a formulação TM, analogamente ao desenvolvido em [8], e é apresentado a seguir. É importante ressaltar que o desenvolvimento para formulação TE ocorre de maneira análoga.

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.86)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.87)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.88)$$

A implementação numérica desenvolvida de forma convencional para o método FDTD para análise de *metamateriais* pode causar instabilidade. Isto se deve ao fato de que na interface, o valor médio de  $\varepsilon$  e  $\mu$  tomado a partir de um lado e do outro da in-

terface é igual à zero para meios que apresentam casamento, ou seja,  $(\mu_1 = -\mu_2, \varepsilon_1 = -\varepsilon_2)$ . Isto pode ser verificado, por exemplo, pela discretização de (2.87).

$$H_{z_{i-\frac{1}{2},j}}^{n+1} = H_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{\text{médio}} \Delta x} \left[ E_{y_{i+1,j}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{y_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.89)$$

A forma eficiente de se contornar este problema de instabilidade consiste na inserção de maneira indireta dos valores negativos de  $\varepsilon$  e  $\mu$  por meio do modelo de Drude. O modelo de Drude para  $\varepsilon$  e  $\mu$  em um caso sem perdas pode ser escrito como:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (2.90)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (2.91)$$

sendo que  $\omega_p$  representa a frequência de ressonância do material. Então, para se contornar o problema citado anteriormente e utilizar  $\varepsilon_r = \mu_r = -1$ , basta considerar  $\omega_p = \sqrt{2}\omega$  dentro do formalismo. Sendo assim, as equações (2.90) e (2.91) devem ser inseridas dentro das equações para modos TM. A inserção do modelo de Drude no formalismo é realizada mediante a aplicação da seguinte transformação  $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ . Depois de manipulação algébrica, as equações para modos TM no domínio da frequência são representadas da seguinte forma:

$$\varepsilon_0 j\omega E_y + J_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.92)$$

$$\mu_0 j\omega H_z + K_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.93)$$

$$\mu_0 j\omega H_x + K_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.94)$$

onde:

$$J_y = -j\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} E_y, \quad K_x = -j\mu_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} H_x \quad \text{e} \quad K_z = -j\mu_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} H_z$$

Para a aplicação do método FDTD, as equações devem retornar para o domínio do tempo, resultando em:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + J_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.95)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + K_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.96)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + K_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.97)$$

As componentes  $J_y$ ,  $J_x$  e  $K_z$  são mantidas alinhadas com as respectivas componentes de campo da célula de Yee, e devem ser atualizados a cada passo como ocorre para os campos  $E$  e  $H$ , da seguinte forma:

$$\frac{\partial J_y}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_y, \quad \frac{\partial K_x}{\partial t} = \mu_0 \omega_p^2 H_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial K_z}{\partial t} = \mu_0 \omega_p^2 H_z$$

As seções a seguir apresentam a expansão das equações de Maxwell para utilização com os métodos LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD. É importante destacar que a extensão da técnica LOD-FDTD para análise de meios dispersivos foi realizada em [97]-[98].

### 2.3.3 Método LOD-FDTD para Análise de Metamateriais

O desenvolvimento do formalismo LOD-FDTD de forma a incorporar a informação sobre o meio metamaterial é realizado para modos TE em 2-D, sendo a sua extensão

para modos TM análoga. Neste caso as equações de Maxwell para um caso bidimensional são escritas como:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = [A]\vec{u} + [B]\vec{u} + \vec{m} \quad (2.98)$$

onde  $\vec{u} = [E_x, E_y, H_z]^T$ ,  $\vec{m} = [0, 0, -M_z / \mu]^T$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\varepsilon \partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\mu \partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\varepsilon \partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\mu \partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $M_z$  é a fonte de corrente magnética.

A expansão é realizada mediante a inclusão do modelo de Drude para  $\varepsilon$  e  $\mu$  considerando perdas, de forma a evitar instabilidade numérica da mesma forma como ocorre para o método FDTD [8], [9]. Sendo assim, considera-se:

$$\mu = \mu_0 \left( I - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\Gamma)} \right) \quad (2.99)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( I - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\Gamma)} \right) \quad (2.100)$$

onde  $\omega_p$  e  $\Gamma$  representam a frequência de ressonância e a perda do sistema, respectivamente. Introduzindo correntes auxiliares de polarização

$$J_x = -\frac{i\varepsilon_0\omega_p^2 E_x}{(\omega - i\Gamma)}, J_y = -\frac{i\varepsilon_0\omega_p^2 E_y}{(\omega - i\Gamma)} \text{ e } K_z = -\frac{i\mu_0\omega_p^2 H_z}{(\omega - i\Gamma)}$$

em decorrência da substituição de (2.99) e (2.100) em (2.98) resulta no seguinte conjunto de equações representadas por

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = [A]\vec{u} + [B]\vec{u} + \vec{m} + \vec{p} \quad (2.101)$$

onde  $\vec{p} = [-J_x/\epsilon_0, -J_y/\epsilon_0, -K_z/\mu_0]^T$ . Agora, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética nos operadores transversais [A] e [B] são dadas por seus valores no vácuo  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , respectivamente. Aplicando o esquema de Crank-Nicolson em (4), resulta

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[A] - \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] + \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^n + \Delta t \vec{m} + \Delta t \vec{p} \quad (2.102)$$

A equação (2.102) é aproximada pela seguinte fatorização:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^n + \Delta t \vec{m} + \Delta t \vec{p} \quad (2.103)$$

Com o termo de erro dado por

$$\frac{\Delta t^2}{4} [A][B] (\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n) \quad (2.104)$$

No método LOD-FDTD a solução de (2.103) é obtida em dois passos da seguinte forma:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \vec{u}^{n+(1/2)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] \right) \vec{u}^n + \Delta t \vec{m}_1 + \Delta t \vec{p}_1 \quad (2.105)$$

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^{n+(1/2)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2}[B] \right) \vec{u}^n + \Delta t \vec{m}_2 + \Delta t \vec{p}_2 \quad (2.106)$$

onde  $\vec{m}_{1,2} = [0, 0, -M_z/2\mu_0]^T$ ,  $\vec{p}_1 = [-J_x/\epsilon_0, 0, -K_z/2\mu_0]^T$  e  $\vec{p}_2 = [0, -J_y/\epsilon_0, -K_z/2\mu_0]^T$

O primeiro primeiro passo do LOD-FDTD é obtido pela aproximação das derivadas espaciais em (2.105) por diferenças finitas. O esquema de Crank-Nicolson garante a estabilidade incondicional do método. A fim de evitar efeitos de descasamento numérico em interfaces que possuem materiais com permissividade elétrica e permeabilidade magnética simultaneamente negativos, neste trabalho é utilizado a média da corrente de polarização elétrica na interface. A discretização de (2.105) resulta:

$$E_x^{n+(1/2)} = E_x^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} \left( J_x^n + J_x^n \right) + \alpha_1 \cdot \left( H_z^{n+(1/2)} - H_z^{n+(1/2)} + H_z^n - H_z^n \right) \quad (2.107)$$

e

$$H_z^{n+(1/2)} = H_z^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\mu_0} K_z^n + \alpha_2 \cdot \left( E_x^{n+(1/2)} - E_x^{n+(1/2)} + E_x^n - E_x^n \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\mu_0} M_z^n \quad (2.108)$$

A substituição de (2.08) em (2.107) resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_x$  no instante de tempo  $(n+(1/2))$ :

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 \alpha_2 E_x^{n+(1/2)} + (1 + 2\alpha_1 \alpha_2) E_x^{n+(1/2)} - \alpha_1 \alpha_2 E_x^{n+(1/2)} = \\ & (1 - 2\alpha_1 \alpha_2) E_x^n + \alpha_1 \alpha_2 \left( E_x^n + E_x^n \right) + \\ & 2\alpha_1 \left\{ H_z^n - H_z^n \right\} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} \left( J_x^n + J_x^n \right) - \\ & \alpha_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( K_z^n - K_z^n \right) - \\ & \alpha_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( M_z^n - M_z^n \right) \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\text{onde, } \alpha_1 = \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0 \Delta y} \text{ e } \alpha_2 = \frac{\Delta t}{2\mu_0 \Delta y}.$$

A obtenção do segundo passo do LOD-FDTD é feita de maneira análoga ao realizado anteriormente. Portanto, aplicando o esquema de diferenças finitas em (2.106) resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_y$  no instante de tempo  $(n+1)$ :

$$\begin{aligned}
& -\beta_1\beta_2 E_{y_{i+1,j+(1/2)}}^{n+1} + (1+2\beta_1\beta_2) E_{y_{i,j+(1/2)}}^{n+1} - \beta_1\beta_2 E_{y_{i-1,j+(1/2)}}^{n+1} = \\
& (1-2\beta_1\beta_2) E_{y_{i,j+(1/2)}}^{n+(1/2)} + \beta_1\beta_2 \left( E_{y_{i+1,j+(1/2)}}^{n+(1/2)} + E_{y_{i-1,j+(1/2)}}^{n+(1/2)} \right) - \\
& 2\beta_1 \left( H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} - H_{z_{i-(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} \right) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} \left( J_{y_{i,j+(1/2)}}^{n+(1/2)} + J_{y_{i-1,j+(1/2)}}^{n+(1/2)} \right) + \\
& \beta_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( K_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} - K_{z_{i-(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} \right) - \\
& \beta_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( M_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} - M_{z_{i-(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} \right)
\end{aligned} \tag{2.110}$$

onde,  $\beta_1 = \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0\Delta x}$  e  $\beta_2 = \frac{\Delta t}{2\mu_0\Delta x}$ .

As componentes  $J_y$ ,  $J_x$  e  $K_z$  são mantidas alinhadas com as respectivas componentes de campo da célula de Yee, e devem ser atualizados a cada passo como ocorre para os campos  $E$  e  $H$ , da seguinte forma:

$$\frac{\partial J_y}{\partial t} + J_y \Gamma = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_y, \tag{2.111}$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial t} + J_x \Gamma = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_x \tag{2.112}$$

e

$$\frac{\partial K_z}{\partial t} + K_z \Gamma = \mu_0 \omega_p^2 H_z \tag{2.113}$$

A discretização temporal de (2.111)-(2.113) deve ser  $\Delta t$  para  $J_y$  e  $J_x$ , e  $\Delta t/2$  para  $K_z$ .

É importante salientar que o método LOD-FDTD descrito acima apresenta precisão apenas de primeira ordem no tempo em virtude do erro resultante apresentar um termo adicional em relação ao ADI-FDTD. Este termo adicional está relacionado à não comutatividade dos operadores transversais, como discutido no Apêndice A. Assim, sua aplicação pode ser limitada quando situações onde a precisão torna-se um problema crítico. Sendo assim, a extensão deste método para precisões da mesma ordem do ADI-FDTD torna-se imperativo. Isso pode ser feito com relativa tranquilidade com a adoção do esquema de divisão de operadores proposto por Strang, como pode ser visto na próxima seção.

### 2.3.4 Método LOD-FDTD-SS para Análise de Metamateriais

Originalmente, o esquema de divisão de operadores LOD inicialmente sugerido por Yanenko [56] foi posteriormente aplicado às equações de Maxwell no domínio do tempo por Fornberg [92]-[93], tendo sido então denominado como esquema de *passo dividido* (*split-step*). Para exemplificar esse esquema, considera-se as equações de Maxwell representadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + Bu$$

Em [92]-[93] foram também apresentados esquemas de alta ordem no tempo para as equações de Maxwell. A distinção entre estes esquemas se deve basicamente às diferentes seqüências de incrementos no tempo adotadas para cada um deles.

No caso do LOD-FDTD, os incrementos de tempo são representados pelos coeficientes  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ . Este esquema foi dito ser de primeira ordem no tempo e denominado por SS1em [92]-[93]. A utilização do esquema de divisão de operadores proposto por Strang (Strang *splitting*) originou um esquema de segunda ordem no tempo e espaço. Mais especificamente, o esquema de Strang faz uma alternância de operadores na forma A, B, A, apresentando incrementos de tempo representados pelos coeficientes  $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ . Este esquema foi denominado SS2 em [92]-[93]. Assim, esquemas de mais alta ordem são obtidos por meio de novas seqüências de coeficientes pela alternância dos operadores A, B, A, B, sucessivamente.

Em 2004, um esquema *split-step* aplicado ao método FDTD com quarta ordem de precisão espacial foi proposto por Fu [100] por meio da modificação dos operadores transversais A e B. Este esquema mantinha a precisão de segunda ordem no tempo ao utilizar o esquema de Strang com incrementos de tempo de  $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ .

O esquema *split-step* inicialmente proposto por Fornberg [92] foi também adotado na expansão do método FDTD por [95]. Neste caso, foi aplicado o esquema de Crank-Nicolson com incremento de tempo igual a  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ . Desde então o método resultante vem sendo denominado por LOD-FDTD. Contudo, vale salientar que tanto o



*split-step* de primeira ordem quanto o LOD-FDTD são essencialmente o mesmo método.

Neste trabalho, o esquema SS2 passa a ser denominado LOD-FDTD-SS (Strang *splitting*), e trata-se de um método de segunda ordem no tempo [93], [101], ao contrário do que acontece com o LOD-FDTD que é um método de primeira ordem. A expansão do formalismo LOD-FDTD-SS é feita de forma similar ao realizado para o LOD-FDTD a partir de (2.103). Porém, é importante ressaltar que agora são considerados três passos para atualização dos campos, sendo o primeiro e terceiro passos formados pelo mesmo conjunto de equações. Após a inclusão do modelo de Drude resultam as seguintes equações para o primeiro, segundo e terceiro passos:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{4} [A] \right) \bar{u}^{n+(1/4)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{4} [A] \right) \bar{u}^n + \Delta t \bar{m}_1 + \Delta t \bar{p}_1 \quad (2.114)$$

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \bar{u}^{n+(3/4)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \bar{u}^{n+(1/4)} + \Delta t \bar{m}_2 + \Delta t \bar{p}_2 \quad (2.115)$$

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{4} [A] \right) \bar{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{4} [A] \right) \bar{u}^{n+(3/4)} + \Delta t \bar{m}_3 + \Delta t \bar{p}_3 \quad (2.116)$$

onde  $\bar{m}_{1,3} = [0, 0, -M_z/4\mu_0]^T$ ,  $\bar{p}_{1,3} = [-J_x/2\varepsilon_0, 0, -K_z/4\mu_0]^T$ ,  $\bar{m}_2 = [0, 0, -M_z/2\mu_0]^T$  e  $\bar{p}_2 = [0, -J_y/\varepsilon_0, -K_z/2\mu_0]^T$

Para o desenvolvimento do primeiro passo, (2.114) é expandida em diferenças finitas, resultando:

$$E_{x_{i+(1/2),j}}^{n+(1/4)} = E_{x_{i+(1/2),j}}^n - \frac{\Delta t}{4\varepsilon_0} \left( J_{x_{i+(1/2),j}}^n + J_{x_{i+(1/2),j-1}}^n \right) + \gamma_1 \cdot \left( H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/4)} - H_{z_{i+(1/2),j-(1/2)}}^{n+(1/4)} + H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^n - H_{z_{i+(1/2),j-(1/2)}}^n \right) \quad (2.117)$$

e

$$\begin{aligned}
H_z^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} &= H_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\mu_0} K_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} + \\
&\gamma_2 \cdot \left( E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+1} - E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j} + E_x^n_{i+(1/2),j+1} - E_x^n_{i+(1/2),j} \right) \\
&- \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\mu_0} M_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)}
\end{aligned} \tag{2.118}$$

A substituição de (2.118) em (2.117) resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_x$  no instante de tempo  $(n+(1/4))$ :

$$\begin{aligned}
&-\gamma_1 \gamma_2 E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+1} + (1 + 2\gamma_1 \gamma_2) E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j} - \gamma_1 \gamma_2 E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j-1} = \\
&(1 - 2\gamma_1 \gamma_2) E_x^n_{i+(1/2),j} + \gamma_1 \gamma_2 \left( E_x^n_{i+(1/2),j+1} + E_x^n_{i+(1/2),j-1} \right) + \\
&2\gamma_1 \left\{ H_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - H_z^n_{i+(1/2),j-(1/2)} \right\} - \frac{\Delta t}{4\epsilon_0} \left( J_x^n_{i+(1/2),j} + J_x^n_{i+(1/2),j-1} \right) - \\
&\gamma_1 \frac{\Delta t}{4\mu_0} \left( K_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - K_z^n_{i+(1/2),j-(1/2)} \right) - \\
&\gamma_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( M_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - M_z^n_{i+(1/2),j-(1/2)} \right)
\end{aligned} \tag{2.119}$$

onde,  $\gamma_1 = \frac{\Delta t}{4\epsilon_0 \Delta y}$  e  $\gamma_2 = \frac{\Delta t}{4\mu_0 \Delta y}$ .

O desenvolvimento do segundo passo é feito da mesma forma ao realizado anteriormente para o primeiro passo. Aplicando o esquema de diferenças finitas em (2.115), resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_y$  no instante de tempo  $(n+(3/4))$ :

$$\begin{aligned}
& -\eta_1\eta_2 E_y^{n+(3/4)}_{i+1,j+(1/2)} + (I + 2\eta_1\eta_2) E_y^{n+(3/4)}_{i,j+(1/2)} - \eta_1\eta_2 E_y^{n+(3/4)}_{i-1,j+(1/2)} = \\
& (1 - 2\eta_1\eta_2) E_y^{n+(1/4)}_{i,j+(1/2)} + \eta_1\eta_2 \left( E_y^{n+(1/4)}_{i+1,j+(1/2)} + E_y^{n+(1/4)}_{i-1,j+(1/2)} \right) - \\
& 2\eta_1 \left( H_z^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - H_z^{n+(1/4)}_{i-(1/2),j+(1/2)} \right) - \frac{\Delta t}{4\epsilon_0} \left( J_y^{n+(1/4)}_{i,j+(1/2)} + J_y^{n+(1/4)}_{i-1,j+(1/2)} \right) + \\
& \eta_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( K_z^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - K_z^{n+(1/4)}_{i-(1/2),j+(1/2)} \right) - \\
& \eta_1 \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left( M_z^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - M_z^{n+(1/4)}_{i-(1/2),j+(1/2)} \right)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\text{onde, } \eta_1 = \frac{\Delta t}{2\epsilon_0\Delta x} \text{ e } \eta_2 = \frac{\Delta t}{2\mu_0\Delta x}.$$

Para o terceiro passo o sistema tridiagonal resultante é o mesmo que (2.119), entretanto a atualização da componente  $E_x$  ocorre no instante de tempo  $(n+1)$ . Portanto

$$\begin{aligned}
& -\gamma_1\gamma_2 E_x^{n+1}_{i+(1/2),j+1} + (I + 2\gamma_1\gamma_2) E_x^{n+1}_{i+(1/2),j} - \gamma_1\gamma_2 E_x^{n+1}_{i+(1/2),j-1} = \\
& (1 - 2\gamma_1\gamma_2) E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j} + \gamma_1\gamma_2 \left( E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j+1} + E_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j-1} \right) + \\
& 2\gamma_1 \left\{ H_z^{n+(3/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - H_z^{n+(3/4)}_{i+(1/2),j-(1/2)} \right\} - \frac{\Delta t}{4\epsilon_0} \left( J_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j} + J_x^{n+(1/4)}_{i+(1/2),j-1} \right) - \\
& \gamma_1 \frac{\Delta t}{4\mu_0} \left( K_z^{n+(3/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - K_z^{n+(3/4)}_{i+(1/2),j-(1/2)} \right) - \\
& \gamma_1 \frac{\Delta t}{4\mu_0} \left( M_z^{n+(3/4)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - M_z^{n+(3/4)}_{i+(1/2),j-(1/2)} \right)
\end{aligned}$$

A atualização temporal de  $J_y$ ,  $J_x$  e  $K_z$  é feita de maneira similar ao exposto no caso do LOD-FDTD (2.211)-(2.113). A discretização temporal de (2.111)-(2.113) para o primeiro e terceiro passos deve ser  $\Delta t/2$  para  $J_x$  e  $\Delta t/4$  para  $K_z$ . Para o segundo passo deve ser  $\Delta t$  para  $J_y$  e  $\Delta t/2$  para  $K_z$ .

A próxima seção apresenta o formalismo para o método ADI-FDTD com a inclusão do modelo de Drude para a simulação de meios metamateriais.

### 2.3.5 Método ADI-FDTD para Análise de Meios Metamateriais

Para completar o estudo das técnicas de divisão de operadores aplicadas na análise de meios metamateriais, esta seção apresenta a expansão do método ADI-FDTD tendo como base o formalismo proposto em [59], o qual apresenta precisão de segunda

ordem no tempo. O uso do método ADI-FDTD na análise de meios metamateriais foi também realizado por Kantartzis *et al.* [79]-[80]. O desenvolvimento é feito de maneira semelhante ao realizado para o LOD-FDTD e LOD-FDTD-SS partindo de (2.103). O primeiro e segundo passos, respectivamente, são dados por:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \bar{u}^{n+(1/2)} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \bar{u}^n + \Delta t \bar{m}_1 + \Delta t \bar{p}_1 \quad (2.121)$$

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \bar{u}^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \bar{u}^{n+(1/2)} + \Delta t \bar{m}_2 + \Delta t \bar{p}_2 \quad (2.122)$$

$$\text{onde } \bar{m}_{1,2} = [0, 0, -M_z/2\mu_0]^T, \bar{p}_{1,2} = [-J_x/2\varepsilon_0, -J_y/2\varepsilon_0, -K_z/2\mu_0]^T$$

Entretanto, é importante ressaltar que o método ADI-FDTD trabalha com três equações por passo enquanto que as técnicas LOD trabalham com duas equações por passo. O desenvolvimento do primeiro passo é realizado a partir de (2.121) resultando nas seguintes equações discretizadas em finitas:

$$\begin{aligned} E_{x_{i+(1/2),j}}^{n+(1/2)} &= E_{x_{i+(1/2),j}}^n - \frac{\Delta t}{4\varepsilon_0} \left( J_{x_{i+(1/2),j}}^n + J_{x_{i+(1/2),j-1}}^n \right) + \theta_1 \\ &\cdot \begin{pmatrix} H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} & -H_{z_{i+(1/2),j-(1/2)}}^{n+(1/2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} E_{y_{i,j+(1/2)}}^{n+(1/2)} &= E_{y_{i,j+(1/2)}}^n - \frac{\Delta t}{4\varepsilon_0} \left( J_{y_{i,j+(1/2)}}^n + J_{y_{i-1,j+(1/2)}}^n \right) + \theta_2 \\ &\cdot \begin{pmatrix} H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^n & -H_{z_{i-(1/2),j+(1/2)}}^n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.124)$$

e

$$\begin{aligned} H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^{n+(1/2)} &= H_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\mu_0} K_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^n + \\ &\theta_3 \cdot \begin{pmatrix} E_{x_{i+(1/2),j+1}}^{n+(1/2)} & -E_{x_{i+(1/2),j}}^{n+(1/2)} \end{pmatrix} - \theta_4 \cdot \begin{pmatrix} E_{y_{i+1,j+1/2}}^n & -E_{y_{i,j+1/2}}^n \end{pmatrix} \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\mu_0} M_{z_{i+(1/2),j+(1/2)}}^n \end{aligned} \quad (2.125)$$

A substituição de (2.125) em (2.123) resulta no seguinte sistema tridiagonal para o cálculo da componente  $E_x$  no instante de tempo  $(n+(1/2))$ :

$$\begin{aligned}
& -\theta_1\theta_3E_x^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j+1} + (1+2\theta_1\theta_3)E_x^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j} - \theta_1\theta_3E_x^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j-1} = \\
& E_x^n_{i+(1/2),j} - \theta_1\theta_4\left(E_y^n_{i+1,j+(1/2)} - E_y^n_{i,j+(1/2)}\right) + \\
& \theta_1\theta_4\left(E_y^n_{i+1,j-(1/2)} - E_y^n_{i,j-(1/2)}\right) + \theta_1\left(H_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - H_z^n_{i+(1/2),j-(1/2)}\right) \\
& - \frac{\Delta t}{4\epsilon_0}\left(J_x^n_{i+(1/2),j} + J_x^n_{i+(1/2),j-1}\right) - \frac{\theta_1\Delta t}{2\mu_0}\left(K_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - K_z^n_{i+(1/2),j-(1/2)}\right) \\
& - \frac{\theta_1\Delta t}{2\mu_0}\left(M_z^n_{i+(1/2),j+(1/2)} - M_z^n_{i+(1/2),j-(1/2)}\right)
\end{aligned} \tag{2.126}$$

$$\text{onde, } \theta_1 = \frac{\Delta t}{2\epsilon_0\Delta y}, \theta_2 = \frac{\Delta t}{2\epsilon_0\Delta x}, \theta_3 = \frac{\Delta t}{2\mu_0\Delta y} \text{ e } \theta_4 = \frac{\Delta t}{2\mu_0\Delta x}$$

A obtenção do segundo passo é feita de maneira análoga ao primeiro passo. Entretanto, a componente  $E_y$  deve ser obtida de forma implícita na direção x no instante de tempo (n+1), resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& -\theta_2\theta_4E_y^{n+1}_{i+1,j+(1/2)} + (1+2\theta_2\theta_4)E_y^{n+1}_{i,j+(1/2)} - \theta_2\theta_4E_y^{n+1}_{i-1,j+(1/2)} = \\
& E_y^{n+(1/2)}_{i,j+(1/2)} - \theta_2\theta_3\left(E_x^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j+1} - E_x^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j}\right) + \\
& \theta_2\theta_3\left(E_x^{n+(1/2)}_{i-(1/2),j+1} - E_x^{n+(1/2)}_{i-(1/2),j}\right) - \theta_2\left(H_z^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - H_z^{n+(1/2)}_{i-(1/2),j+(1/2)}\right) \\
& - \frac{\Delta t}{4\epsilon_0}\left(J_y^{n+(1/2)}_{i,j+(1/2)} + J_y^{n+(1/2)}_{i-1,j}\right) + \frac{\theta_2\Delta t}{2\mu_0}\left(K_z^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - K_z^{n+(1/2)}_{i-(1/2),j+(1/2)}\right) \\
& + \frac{\theta_2\Delta t}{2\mu_0}\left(M_z^{n+(1/2)}_{i+(1/2),j+(1/2)} - M_z^{n+(1/2)}_{i-(1/2),j+(1/2)}\right)
\end{aligned} \tag{2.127}$$

No caso do método ADI-FDTD, a atualização temporal de  $J_y$ ,  $J_x$  e  $K_z$  é feita de maneira similar ao exposto no caso das técnicas LOD-FDTD. A discretização temporal de (2.111)-(2.113) para o primeiro e segundo passos deve ser  $\Delta t/2$  para  $J_x$ ,  $J_y$  e  $K_z$ .

Tendo concluído as expansões dos diversos métodos numéricos descritos ao longo deste capítulo, torna-se necessário proceder com a validação dos mesmos. Sendo assim, o próximo capítulo se dedicará não só à validação dos referidos métodos, mas também à apresentação de novos resultados referentes à aplicação destes métodos na simulação dos mais variados tipos de problemas eletromagnéticos. Uma atenção especial será dada ao desempenho da condição de contorno SPML, proposta neste trabalho especialmente para implementação nos métodos LOD.

## 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 3.1 MÉTODO LOD FD-BPM

Esta seção apresenta alguns exemplos de aplicação do método LOD-FD-BPM de ângulo largo (cuja expansão encontra-se no Apêndice B) para a análise de dispositivos fotônicos [84], os quais são discutidos a seguir.

No primeiro exemplo, o método LOD FD-BPM é validado por meio da simulação de uma estrutura tipo rib com variação longitudinal, a qual frequentemente é utilizada como *benchmark* para métodos de propagação de feixe tridimensionais [82]. Todos os parâmetros físicos e geométricos estão listados na TABELA 3, assim como na inserção na FIGURA 12.

TABELA 3: Parâmetros físicos geométricos de uma estrutura tipo rib variando longitudinalmente.  $L_x$  e  $L_y$  representam o tamanho da janela computacional,  $N_x$  e  $N_y$  representam o número de pontos de discretização transversal,  $\lambda$  o comprimento de onda,  $n_c$  e  $n_{sub}$ , o índice de refração do núcleo e do substrato, respectivamente, e  $\Delta z$  o passo de propagação longitudinal.

$\lambda$ ( $\mu m$ )	$L_x$ ( $\mu m$ )	$L_y$ ( $\mu m$ )	$N_x \cdot N_y$	$n_c$	$n_{sub}$	$\Delta z$ ( $\mu m$ )
1,55	8,0	4,0	80x80	3,44	3,34	0,1

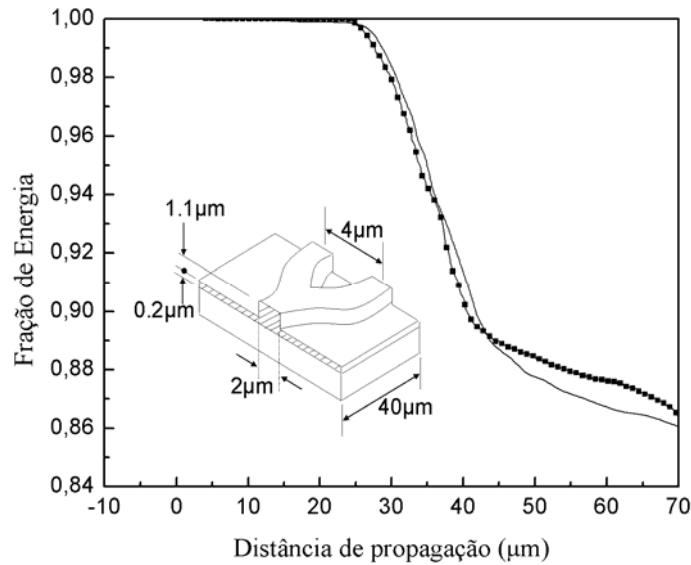


FIGURA 12: Fração de energia remanescente no núcleo do guia de onda em função da distância de propagação do modo dentro da estrutura. A linha sólida representa os resultados obtidos com o LOD FD-BPM de ângulo largo, e os símbolos os resultados obtidos de [82].

A simulação consiste em avaliar a fração de energia remanescente no núcleo do guia de onda em função da distância de propagação. Qualquer balanço irregular na divisão do operador em (B.4), Apêndice B, causaria uma dissipação de energia que poderia ser facilmente observada por meio da FIGURA 12. O LOD FD-BPM é comparado com [82] o qual é suposto aqui como exato para fins de comparação. A queda acentuada na fração de energia deve-se ao fato da divisão do guia de onda que ocorre em  $z = 20\mu\text{m}$ . Como pode ser observado na nesta figura, os resultados apresentam uma excelente concordância entre si. É importante destacar que a boa concordância do formalismo escalar com o *benchmark* de comparação se deve ao fato do contraste de índice de refração não ser muito elevado, para casos onde a estrutura apresente alto contraste formalismos semivetoriais e vetoriais são indicados. A FIGURA 13 apresenta a distribuição de campo obtida após uma distância de propagação de  $40\mu\text{m}$ .

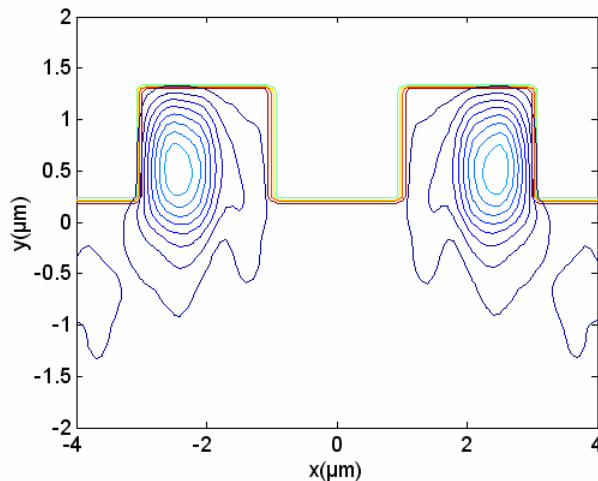


FIGURA 13: Distribuição de campo em uma estrutura tipo *rib* variando longitudinalmente após propagação de  $40\mu\text{m}$ .

O formalismo de ângulo largo LOD FD-BPM, detalhado no Apêndice B, foi utilizado em [84] para o cálculo das perdas de confinamento em fibras de cristal fotônico (PCFs). Formalismos paraxiais seriam uma escolha apropriada para realizar esta tarefa contanto que estas estruturas pudessem ser consideradas invariantes ao longo do eixo longitudinal. Por outro lado, as perdas por radiação calculadas via método BPM paraxial necessitam de distâncias de propagação suficientemente grandes [85]. Isto pode resultar em um esforço computacional proibitivo se um grande número de simulações se fizer necessário. Felizmente, os formalismos de ângulo largo apresentam uma taxa de convergência mais rápida que formalismos paraxiais e, conseqüentemente, são mais eficientes para longas distâncias de propagação por serem mais realísticos fisicamente. Uma alternativa eficiente para este problema é o método LOD FD-BPM de ângulo largo, o qual apresenta ainda um menor custo computacional em relação ao ADI FD-BPM (desde que os operadores  $P_x$  e  $P_y$  são considerados em uma única direção a cada passo de tempo).

No próximo exemplo, uma PCF é utilizada para comparar a velocidade de convergência entre o formalismo de ângulo largo e o paraxial. Todos os parâmetros físicos e geométricos são listados na TABELA 4. A convergência é definida aqui em termos do número de iterações requeridas para estabilizar a parte imaginária do índice efetivo. Os resultados da simulação são mostrados na FIGURA 14, onde a linha tracejada representa o formalismo paraxial e a sólida o formalismo de ângulo largo. A distribuição de campo para o modo fundamental é mostrada também na FIGURA 14. Tendo em vista que ambas as curvas se referem à mesma estrutura PCF, torna-se claro que o formalis-



mo de ângulo largo converge a uma velocidade muito maior do que o formalismo paraxial. O máximo número de iterações para o formalismo paraxial é de 6000, enquanto para o de ângulo largo é de aproximadamente 3000. É importante notar que, embora o número de passos de propagação requeridos para convergência ainda pareça ser alto, o tempo computacional foi de apenas 14 minutos em uma máquina Athlon XP 2600 e 1,5 GB de memória. Portanto, especificamente para esta estrutura PCF, o LOD FD-BPM de ângulo largo converge 50% mais rápido do que o formalismo paraxial, o que representa uma diferença significativa. É importante salientar que a convergência da parte real é também significativamente mais rápida do que a da parte imaginária, assim como em [86].

TABELA 4: Parâmetros físicos e geométricos para uma PCF.

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$d/\Lambda$	$N_x \cdot N_y$	Anéis	$\Delta z$ ( $\mu\text{m}$ )
1,55	1,2	0,8	400x400	2	0,05

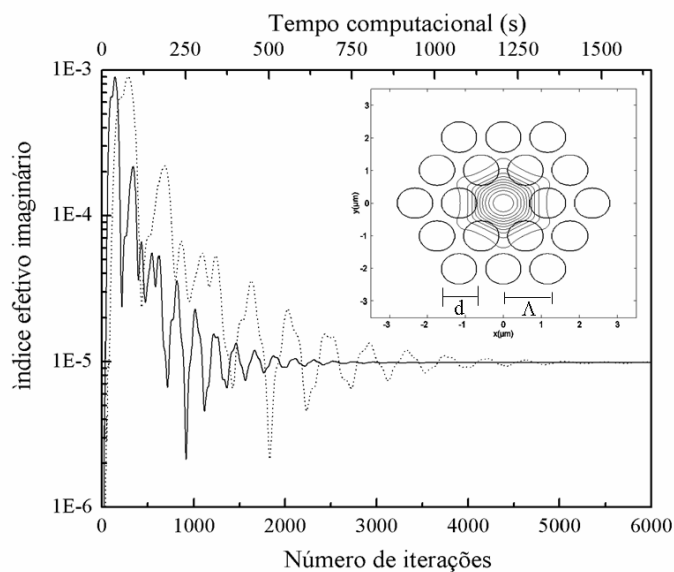


FIGURA 14: Velocidade de convergência em função do número de iterações para o formalismo paraxial (linha tracejada) e de ângulo largo (linha sólida). A figura inserida mostra a seção transversal da PCF com o perfil do modo fundamental.

A validação do formalismo LOD FD-BPM de ângulo largo é também realizada através do cálculo das perdas de confinamento aplicado às PCFs em função do passo ( $\Lambda$ ) que representa distância entre os furos da fibra, com o número de anéis sendo tomado

como parâmetro. A fibra é composta por furos de ar circundados por sílica, cujo índice de refração é dado pela equação de Sellmeier a qual inclui a dependência do índice de refração em função do comprimento de onda. Como *benchmark* neste caso foi utilizado o Método Multipolo Full Vetorial [83], suposto aqui como exato. Todos os parâmetros físicos e geométricos encontram-se listados na TABELA 5. É importante notar que a razão entre  $d$ , que representa o diâmetro do furo, e  $\Lambda$ , é mantida constante para o caso de dois e três anéis. A influência destes parâmetros sobre as perdas pode ser entendida da seguinte maneira: quando  $d$  aumenta ocorre uma redução no índice de refração médio da casca que é percebido pelo campo, ocorrendo, portanto, um aumento do contraste de índice de refração entre o núcleo e a casca. Este alto contraste proporciona uma melhoria do confinamento na PCF reduzindo as perdas por confinamento. O mesmo pode ser afirmado para o número de anéis, sendo que o seu aumento também acarreta uma diminuição das perdas por confinamento como mostra a FIGURA 15. Como pode ser observado, os resultados obtidos com o formalismo de ângulo largo apresentam uma excelente concordância com os resultados obtidos em [83].

TABELA 5: parâmetros utilizados na simulação dos resultados mostrados na FIGURA 15.

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$(d / \Lambda)$ 2 anéis	$(d / \Lambda)$ 3 anéis	$N_x \cdot N_y$
1,55	0,8	0,8	250x250

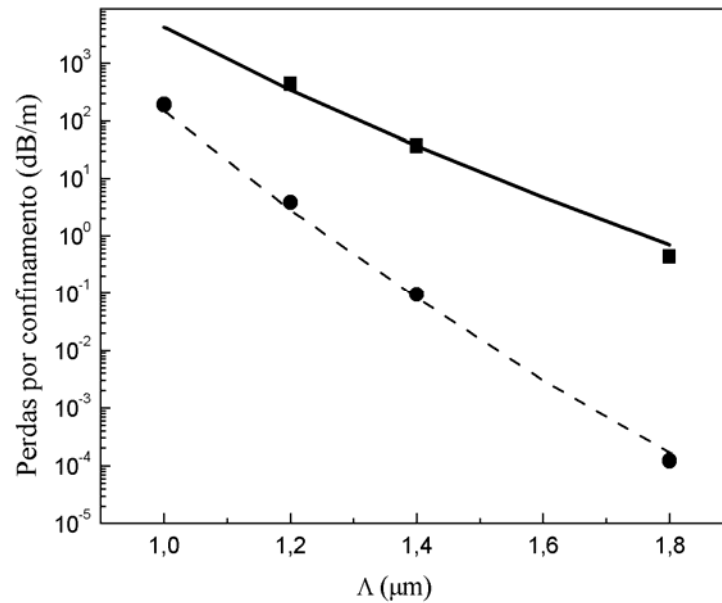


FIGURA 15: Perdas por confinamento como função do pitch ( $\Lambda$ ) tendo o número de anéis como parâmetro. A linha sólida (2 anéis) e a linha tracejada (três anéis) foram obtidas utilizando o LOD FD-BPM, os símbolos foram obtidos pelo método multipólo [83].

Após a aferição do método este foi utilizado para analisar as variações aleatórias presentes no processo de fabricação de PCFs, tendo em vista que estas variações ocorrem principalmente em parâmetros críticos, tais como o pitch e o raio do furo [87]. Estas variações aleatórias representam um obstáculo para a reprodução de dispositivos baseados em PCF. Portanto, os próximos resultados de simulações almejam prover um suporte físico para as penalidades de perda de confinamentos impostas por estas variações aleatórias baseadas em dois casos: 1) variações aleatórias de raio e pitch para uma PCF de três anéis e, 2) idem para uma PCF de quatro anéis. Em [87] somente o primeiro anel de furos foi considerado ser perturbado, em virtude deste ser o que tem mais influência sobre a birrefringência. A magnitude das perdas de confinamento, por outro lado, é afetada até por furos de ar distantes, como mostrado na FIGURA 15. Os parâmetros físicos e geométricos utilizados nestas simulações são listados na TABELA 6.

TABELA 6: parâmetros pertinentes utilizados na simulação dos resultados mostrados na FIGURA 16 e FIGURA 17.

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$(d/\Lambda)$ 3 anéis	$(d/\Lambda)$ 4 anéis	$\Lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$N_x \cdot N_y$
1,55	0,8	0,8	1,4	250x250

Os resultados obtidos para o primeiro caso são mostrados na FIGURA 16, onde os símbolos representam valores rms obtidos de um conjunto de 70 simulações cada. A magnitude da perda é maior para qualquer situação em virtude do pequeno número de anéis, acarretando uma redução no confinamento de campo.

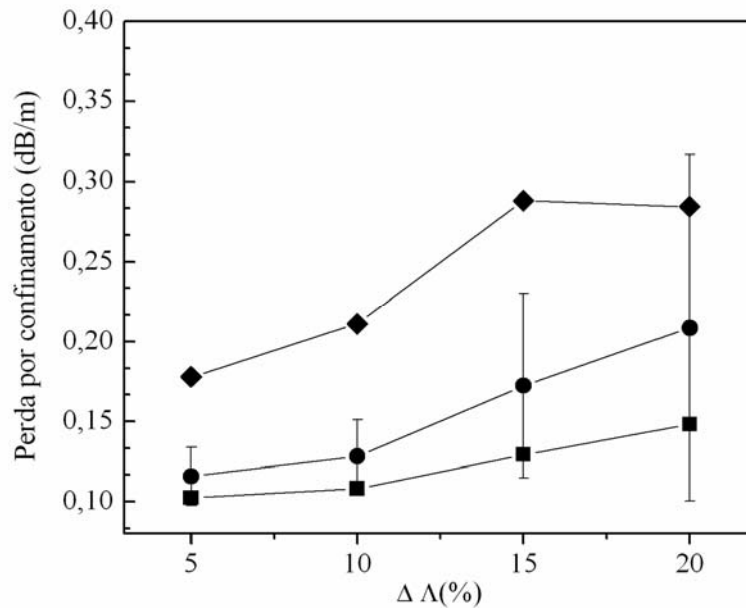


FIGURA 16: Perda por confinamento vs. variação percentual do raio para uma PCF com três anéis. São consideradas três variações percentuais do raio:  $\pm 5\%$  (quadrados),  $\pm 10\%$  (círculos) e  $\pm 15\%$  (diamantes).

O aumento da perda por confinamento com o aumento na variação do raio pode ser explicado da seguinte forma: uma dada variação no raio, digamos  $\pm 10\%$ , introduz um limite inferior ( $+10\%$ ) e um limite superior ( $-10\%$ ) para as perdas por confinamento. Uma variação positiva na média implica em grandes raios dos furos e, conseqüentemente, menor perda por confinamento devido ao melhor confinamento do campo. O oposto é verdadeiro para uma variação média negativa. É importante observar o quão substancialmente as perdas podem variar (ver barra de erros) de um dispositivo para outro em um caso real. A barra de erro é mostrada somente para o caso  $\pm 10\%$  para não sobrecarregar as figuras. Sobre a média, como visto nas simulações, as variações aleatórias sempre impõem uma penalidade adicional sobre as perdas de confinamento. Como um exemplo, considere uma PCF onde  $\Lambda = 1,4 \mu\text{m}$  e  $d/\Lambda = 0,8$  (ver FIGURA 15). A perda por confinamento neste caso é  $\approx 0,08$  dB/m sem variação sobre o pitch e raio. Supondo 10% de variação sobre o pitch e raio, a perda por confinamento resultante se torna

$\approx 0,13$  dB/m, um aumento de 62%, como mostrado na FIGURA 16. Portanto, o uso de poucos anéis somente é aconselhável se um controle preciso dos parâmetros estruturais pode ser obtido.

Os resultados para o segundo caso são mostrados na FIGURA 17 onde, mais uma vez, os símbolos representam os valores rms obtidos de um conjunto de 70 simulações cada.

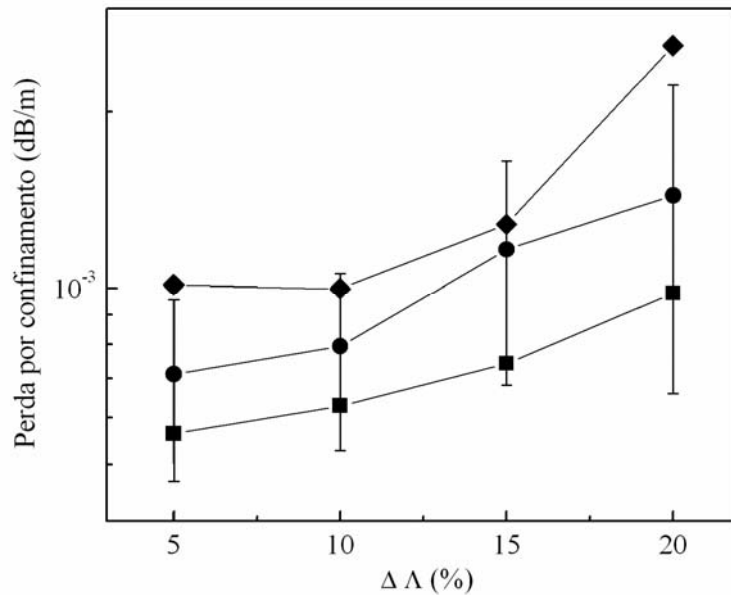


FIGURA 17: Perda por confinamento vs. variação percentual do raio para uma PCF com três anéis. São consideradas três variações percentuais do raio:  $\pm 5\%$  (quadrados),  $\pm 10\%$  (círculos) e  $\pm 15\%$  (diamantes).

O número de anéis considerados agora são quatro, o que melhorou consideravelmente o confinamento do campo se comparado ao caso anterior. Novamente, as barras de erro são mostradas apenas o caso de  $\pm 10\%$  a fim de não sobrecarregar a figura. O comportamento das simulações é ainda bastante similar ao exemplo anterior. Entretanto, com o uso de um anel extra, o efeito da variação aleatória estrutural foi fortemente atenuado.

### 3.2 MÉTODO LOD TD-WPM

A seção anterior tratou da validação do método de propagação de feixe baseado na técnica LOD no domínio da frequência. Esta seção, por sua vez, apresentará os resultados da validação para o caso no domínio do tempo, ou seja, o LOD TD-WPM. A fim de demonstrar a aplicabilidade deste método na simulação de dispositivos guias de onda, primeiramente utilizaremos como exemplo a propagação de um pulso gaussiano em um

guia de onda simétrico de três camadas como ilustrado na FIGURA 18. A principal intenção neste caso é avaliar efeitos por meio do TD-WPM os quais não poderiam ser realizados pelo uso de BPMs convencionais no domínio da frequência, como por exemplo em análise de reflexões. Os parâmetros físicos e geométricos utilizados nesta simulação são listados na TABELA 7.

TABELA 7: Parâmetros físicos e geométricos de uma guia de onda de três camadas simétrico.

$\lambda$ ( $\mu m$ )	$Lz$ ( $\mu m$ )	$Lx$ ( $\mu m$ )	$W$ ( $\mu m$ )	$N_x \cdot N_y$	$n_1$	$n_2$
1,55	10,0	20,0	1,458	200x1000	3,6	3,564

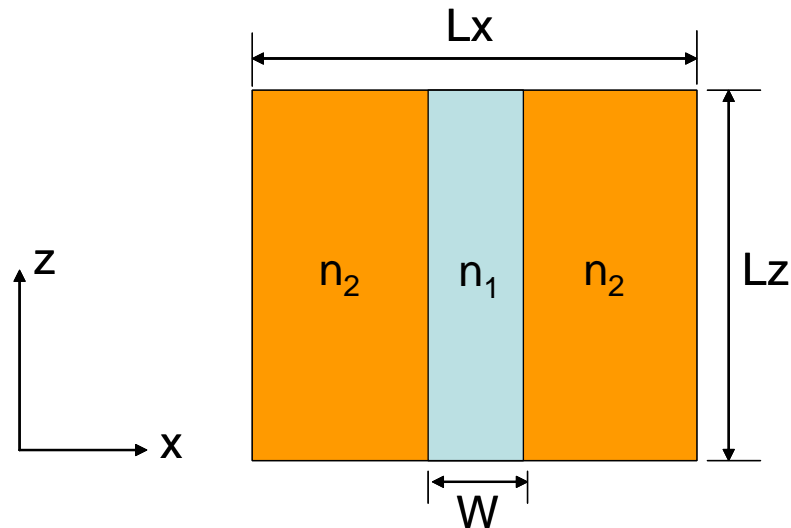


FIGURA 18: Guia de onda de três camadas simétrico, sendo  $z$  a direção de propagação do pulso gaussiano.

A evolução de um pulso gaussiano pode ser acompanhada por meio da FIGURA 19, FIGURA 20 e FIGURA 21 para os seguintes tempos de propagação:  $t=0fs$ ,  $t=70fs$  e  $t=123 fs$ , respectivamente. Em  $t=70fs$  é possível verificar nitidamente o efeito de reflexão acontecendo na fronteira da janela computacional em virtude da condição de parede metálica imposta. Já em  $t=123fs$ , pode-se ver que o pulso foi totalmente refletido pela parede metálica retornando à sua configuração modal original. Em todas as simulações foi utilizado um passo de tempo  $\Delta t = 1fs$  e um pulso inicial com um perfil transversal  $E_0$  (correspondendo ao modo fundamental de um guia de onda planar) e um perfil gaussiano na direção longitudinal em  $t = 0$  o qual é dado por:

$$E(x, z, t = 0) = E_0 \cdot \exp\left[-\left(\frac{z - z_0}{w_0}\right)^2\right] \cdot \exp[-j\beta(z - z_0)] \quad (3.1)$$

Onde,

$\beta$  é a constante de propagação do modo fundamental;

$z_0$  é a posição central do pulso de entrada;

$w_0$  é a largura do pulso gaussiano.

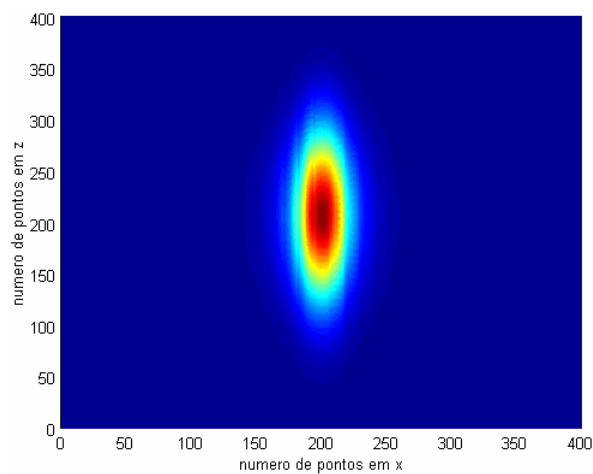


FIGURA 19: Evolução temporal de um pulso gaussiano para o campo elétrico em  $t=0$  fs.

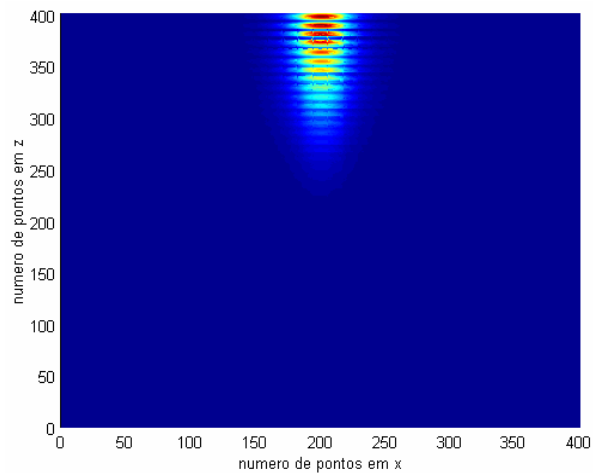


FIGURA 20: Evolução temporal de um pulso gaussiano para o campo elétrico em  $t=70$  fs chocando-se com uma parede metálica. Neste caso observa-se o efeito de reflexão do pulso ao incidir na parede metálica.

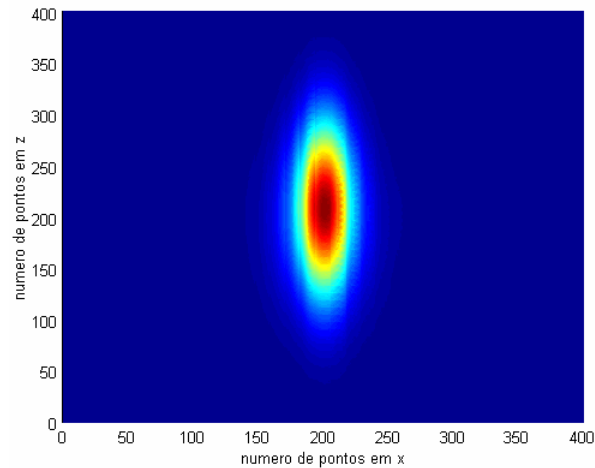


FIGURA 21: Evolução temporal de um pulso gaussiano para o campo elétrico em  $t=123$  fs. Neste caso observa-se que o pulso foi totalmente refletido.

O próximo exemplo consiste de um acoplador direcional o qual pode ser visto na FIGURA 22. Esta estrutura foi analisada por Valtemir *et. al* [91] a fim de demonstrar a eficiência do LOD TD-WPM para a simulação de guias de onda na faixa de frequências ópticas. O propósito deste exemplo é verificar se o LOD TD-WPM é capaz de simular precisamente a dinâmica da transferência de energia entre dois guias de ondas acoplados. O parâmetro de avaliação relevante neste caso é o comprimento de acoplamento  $L_\pi = \pi/(\beta_a - \beta_b)$ , onde  $\beta_a$  e  $\beta_b$  são as constantes de propagação dos modos simétricos e anti-simétricos, respectivamente.

Para este propósito, um pulso óptico gaussiano é lançado no braço de entrada do acoplador para que o seu mecanismo de transferência de energia possa ser investigado [88]-[89]. Os parâmetros relativos à janela computacional são listados na TABELA 8, e os parâmetros físicos e geométricos relativos ao acoplador direcional são listados na TABELA 9. O perfil transversal do pulso inicial,  $E_0$ , foi escolhido para estar de acordo com a solução do modo fundamental de um guia de onda planar de três camadas com índice efetivo  $n_0$ , multiplicado por um perfil gaussiano na direção longitudinal em  $t=0$ , o qual é dado por:

$$E(x, z, t=0) = E_0(x) \exp\left[-\left(\frac{z-z_0}{w_0}\right)^2\right] \exp[-jn_0(z-z_0)] \quad (3.2)$$

onde  $n_0 = 2,0596$  é o índice efetivo modal,  $z_0 = 10 \mu m$  é a posição do campo de entrada, e  $w_0 = 2 \mu m$  é a largura da gaussiana adotada. É importante mencionar que neste



ponto do trabalho nenhuma condição de contorno na fronteira da janela computacional foi utilizada. Portanto, todas as simulações foram realizadas em uma janela computacional grande o suficiente de forma a evitar reflexões indesejadas.

TABELA 8: Parâmetros da janela computacional

$N_x \times N_z$	$Lx(\mu m)$	$Lz(\mu m)$
$300 \times 600$	8,0	30,0

TABELA 9: Parâmetros físicos e geométricos relativos ao acoplador direcional. Comprimento de onda  $\lambda = 1,5 \mu m$ .

$s(\mu m)$	$d(\mu m)$	$p(\mu m)$	$n_1$	$n_2$
0,45	0,35	3,425	2,0	2,2

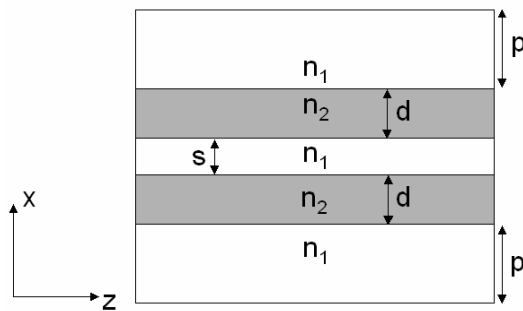


FIGURA 22: Vista longitudinal do acoplador direcional.

A evolução do pulso gaussiano pode ser vista nas FIGURAS 23 e 24 para  $t=0fs$  e  $t=90fs$ , respectivamente. A FIGURA 24 mostra que em  $t=90 fs$  toda energia foi transferida para o guia de onda inferior, como esperado. O comprimento de acoplamento neste caso é  $L_\pi=12,9\mu m$ . Os valores de coeficiente de acoplamento obtidos com o LOD TD-WPM foram também comparados com os obtidos em [88] e [89], supostas aqui como exatas, a fim de que a precisão do método proposto pudesse ser obtida. O erro no comprimento de acoplamento foi então definido da seguinte forma:

$$Error = \frac{L_\pi(literature) - L_\pi(LOD TD-BPM)}{L_\pi(literature)} \times 100$$

O erro obtido entre o formalismo proposto e [88] é 3,7%. Quando os resultados obtidos com o formalismo apresentado são comparados com [89], o erro é de 1,5%. Em ambos os casos, a concordância é bastante satisfatória.

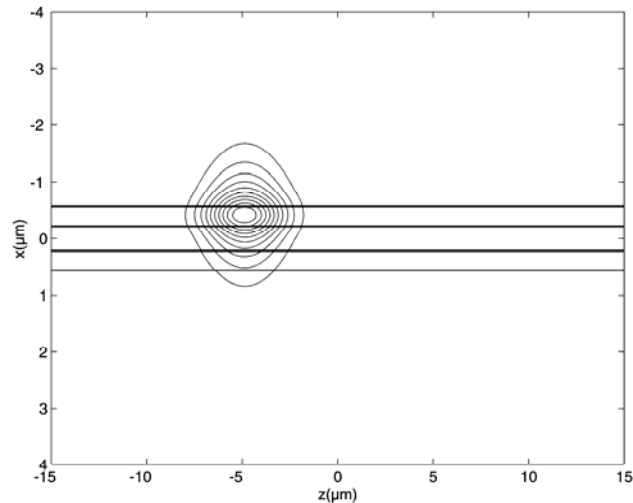


FIGURA 23: Pulso gaussiano em um acoplador direcional em  $t=0\text{fs}$ .

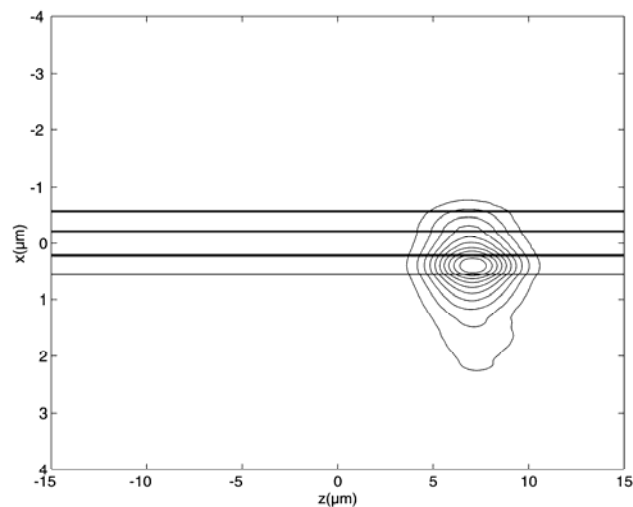


FIGURA 24: Pulso gaussiano em  $t=90\text{fs}$ . O comprimento de acoplamento neste caso é  $L_{\pi}=12,9\mu\text{m}$ .

### 3.3 MÉTODO LOD-FDTD E ADI-FDTD

Esta seção apresenta um estudo comparativo de desempenho entre os formalismos LOD-FDTD, FDTD convencional e ADI-FDTD, que também pode ser encontrado em [94]. Para este propósito foi utilizado o parâmetro CFLN (número de Courant-Friedrich-Levy) para denotar a razão entre o passo de tempo utilizado pelo formalismo implícito e o máximo passo de tempo permitido para a condição de estabilidade CFL no FDTD convencional, ou seja

$$CFLN = \frac{\Delta t}{\Delta t_{\max}^{FDTD}} \quad (3.3)$$

com

$$\Delta t_{\max}^{FDTD} = \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (3.4)$$

para um caso 2-D, onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. As simulações foram realizadas inicialmente no espaço livre, com os parâmetros de discretização pertinentes listados na TABELA 10.

TABELA 10: Parâmetros de simulação para o espaço livre.

$L_x$	$L_y$	Número de pontos em $x$	Número de pontos em $y$
687 cm	687 cm	100 a 400 *	100 a 400 *

\* O número de pontos nas simulações variam de 100 até 400.

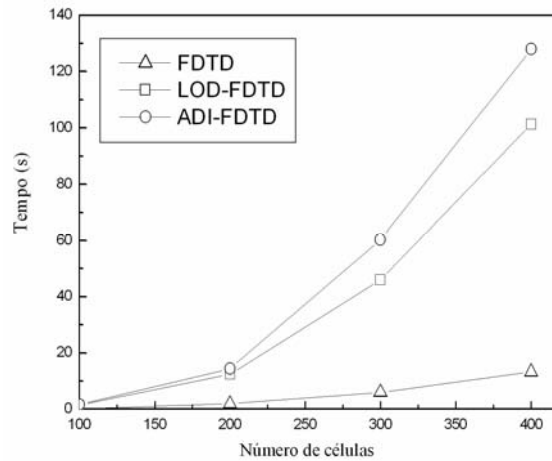
Uma fonte de excitação é localizada no centro do domínio computacional como segue:

$$H_z = H_z + \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (3.5)$$

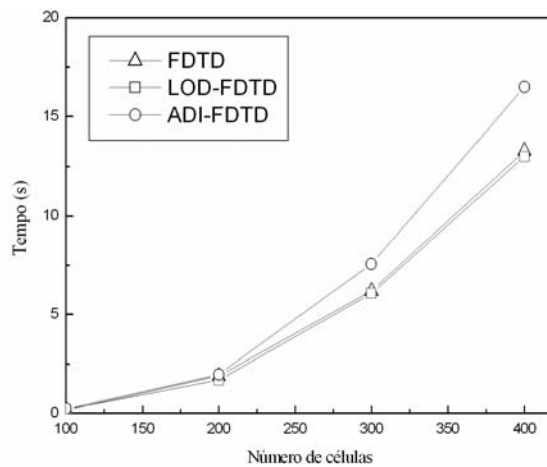
onde  $T=9,4$  ns.

Resultados numéricos de custo computacional requerido para o FDTD convencional, ADI-FDTD [59], e o LOD-FDTD proposto são mostrados na FIGURA 25 (a)-(c). Estes resultados mostram o tempo geral de CPU necessário para simular a mesma estrutura para diferentes números de células de discretização do domínio computacional. Os resultados mostram que, neste caso, o custo de tempo de CPU do LOD-FDTD com  $CFLN=8$  é praticamente equivalente ao FDTD convencional utilizando os mesmos parâmetros de discretização. Para uma  $CFLN=12$ , o LOD-FDTD já apresenta um custo computacional muito menor do que o FDTD convencional. Quando comparado ao ADI-FDTD, o LOD-FDTD apresenta também um menor custo computacional como pode ser observado na FIGURA 25 a-c. É importante salientar que métodos baseados em divisão

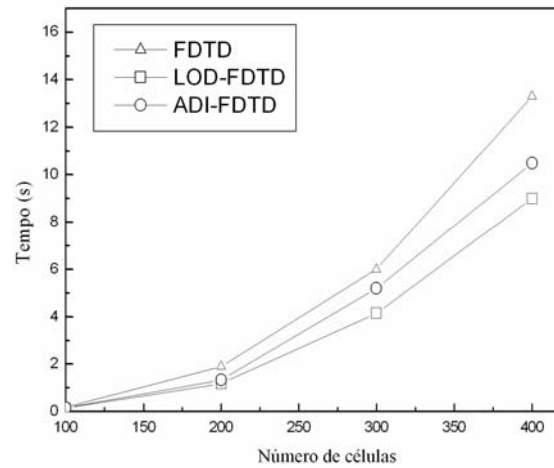
de operadores, tais como o ADI e LOD, quando agregados ao formalismo numérico tornam o método implícito. Com isso, a solução do sistema linear nestes casos ocorre por meio de um processo de inversão matricial [90]. Métodos explícitos, como é o caso do FDTD, não realizam o processo de inversão matricial, resultando em um menor custo computacional, como pode ser nitidamente observado na FIGURA 25 (a) para o caso de CFLN unitária.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 25: Comparação do esforço computacional dos métodos FDTD convencional e ADI-FDTD com o presente LOD-FDTD. (a) CFLN=1, (b) CFLN=8, e (c) CFLN=12.

A propagação da onda ao longo de um guia de onda óptico integrado de três camadas ilustrado na FIGURA 26 é simulada de forma a demonstrar a eficiência e versatilidade do LOD-FDTD proposto, bem como a sua estabilidade incondicional. Os parâmetros pertinentes relativos ao domínio computacional e à estrutura guia de onda são listados na TABELA 11 e TABELA 12, respectivamente. Foram comparados os resultados das simulações obtidas com o LOD-FDTD em relação ao ADI-FDTD e ao FDTD tradicional.

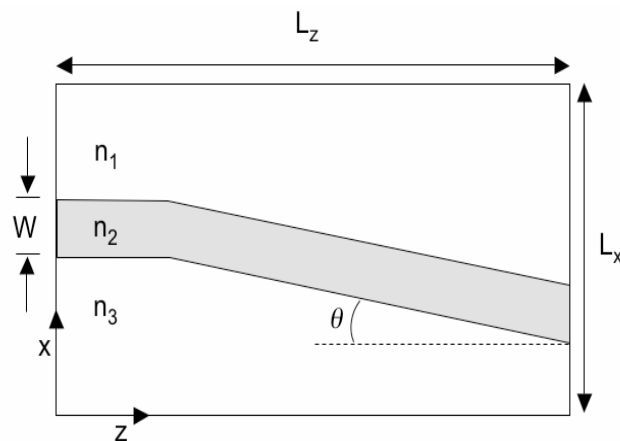


FIGURA 26: Guia de onda de três camadas com variação longitudinal.

TABELA 11: Parâmetros do domínio computacional.

$N_x \times N_z$	$\Delta x (\mu m)$	$\Delta z (\mu m)$
400 × 4000	0,01	0,01

TABELA 12: Parâmetros físicos e geométricos relativos a estrutura guia de onda planar. ( $\lambda = 1,55 \mu m$ ).

$\lambda (\mu m)$	$W (\mu m)$	$n_1$	$n_2$
1,55	0,5	3,4	31

Os resultados de simulação obtidos para um ângulo de inclinação  $\theta=16^\circ$  são mostrados na FIGURA 27 (a), (b), (c) para o ADI-FDTD, LOD-FDTD, e o FDTD tradicional, respectivamente. O perfil inicial do pulso  $E_0$  é suposto como o modo fundamental de um guia de onda planar multiplicado por uma onda senoidal dada por:  $H_z = E_0 \cdot \sin(\omega T)$ , onde  $\omega=2\pi c/\lambda$ , com  $\lambda = 1,55 \mu m$ . Pode-se observar que o método LOD-FDTD, mesmo para uma CFLN=7, não mostra qualquer tipo de dissipação numérica, apresentando ótima concordância com os métodos ADI-FDTD (CFLN=5) e FDTD. No apêndice C é realizado um estudo sobre a estabilidade numérica do LOD-FDTD e é verificado que ele é incondicionalmente estável apresentando valor unitário para o módulo dos autovalores, o que também caracteriza o método ser não dissipativo. Como resultado, o esquema LOD-FDTD parece ser uma boa alternativa para a simulação de estruturas eletromagnéticas, onde obedecer ao critério de estabilidade CFL tornaria a simulação muito custosa.

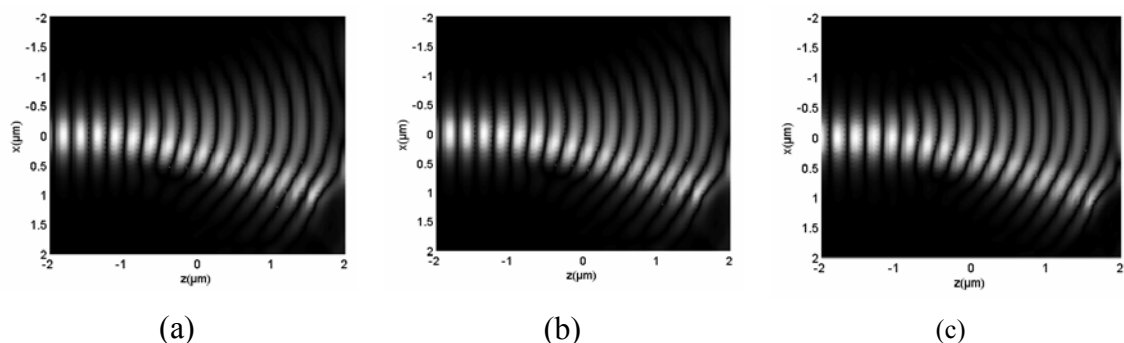


FIGURA 27: Evolução do modo fundamental ao longo de um guia de onda de três camadas variando longitudinalmente. O ângulo de inclinação é  $\theta=16^\circ$ . (a) ADI-FDTD com CFLN=5, (b) LOD-FDTD com CFLN=7, (c) FDTD tradicional com CFLN=1. A inclinação ocorre em  $Lz/8$ .

### 3.4 MÉTODOS ADI-FDT E LOD-FDTD COM PML

Esta seção apresenta os resultados de simulações numéricas para o método LOD-FDTD com a inclusão da condição de camadas perfeitamente casadas (PML) apresentadas na seção 2.2.7. Será apresentada uma análise de desempenho para os dois esquemas propostos, ou seja, PML LOD-FDTD (primeiro esquema, centrado no tempo) e o PML LOD-FDTD (segundo esquema, avançado no tempo). Esta análise será efetuada em termos de três figuras de mérito diferentes, ou seja: 1) o número de Courant-Friedrich-Levy (CFLN), o qual é definido como a razão entre o tamanho do passo de tempo adotado para o LOD-FDTD e o passo de tempo máximo permitido pelo FDTD convencional, 2) o erro causado por dispersão numérica, e 3) o custo computacional. Nas simulações para ambos os esquemas, uma fonte pontual no espaço livre foi utilizada. O domínio computacional, incluindo a região da PML, é formado por 170x170 células igualmente espaçadas, com comprimento de 0,33 mm cada uma. Foram utilizadas 8 camadas de PML nas direções x e y com o perfil de condutividade definido em [72], e dado por:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max} |l - l_0|^4}{\delta^4} \quad (3.6)$$

onde  $\delta$  é a espessura da PML e  $l_0$  representa a interface entre a camada absorvente e o espaço livre. O valor de condutividade  $\sigma_{\max}$  é determinado de acordo com [71]. A excitação está localizada no centro da janela computacional, e o ponto de observação está localizado a 41 células de distância da fonte e a uma célula da PML. Um pulso Gaussiano diferenciado é utilizado como excitação e é aplicado à componente  $H_z$ . A frequência central e a meia largura de banda são supostas como sendo 3,175 GHz, respectivamente. A eficiência da PML pode ser medida por meio do erro de reflexão, o qual é definido como:

$$R = 20 * \log_{10} \left( \frac{|H^t - H_{ref}^t|}{\max |H_{ref}^t|} \right) \quad (3.7)$$

onde  $H_{ref}^t$  representa um valor de referência calculado em uma janela computacional suficientemente grande de tal forma que qualquer reflexão da fronteira computacional possa ser isolada. O cálculo do erro de reflexão para o LOD-FDTD é realizado em ter-

mos do número CFLN, o qual é dado por  $\Delta t = CFLN \Delta h / (\sqrt{2}c)$ , sendo  $\Delta x = \Delta y = \Delta h$  e  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

Os resultados a seguir dizem respeito a uma análise bi-dimensional de reflexão numérica do LOD-FDTD. Neste estudo foram utilizadas as equações de Maxwell para modos TE, o qual possui as componentes  $H_z$ ,  $E_x$  e  $E_y$ . Primeiramente, considere o efeito da escolha da CFLN sobre o desempenho da PML. Como parâmetros de análise foram utilizadas amostras da componente  $H_z$ , sendo os resultados obtidos a partir de (3.7). No caso do estudo de reflexão numérica o valor para  $H_{ref}^t$  é obtido a partir do método LOD-FDTD. Os resultados destas simulações para o primeiro esquema são mostrados na FIGURA 28. O valor da reflexão utilizando o esquema proposto em [71] para o método ADI-FDTD com PML para uma CFLN=6 foi -35dB. O valor da reflexão para o método LOD-FDTD com PML foi, por sua vez, substancialmente menor (em torno de -80 dB) para CFLN=6 utilizando o primeiro esquema.

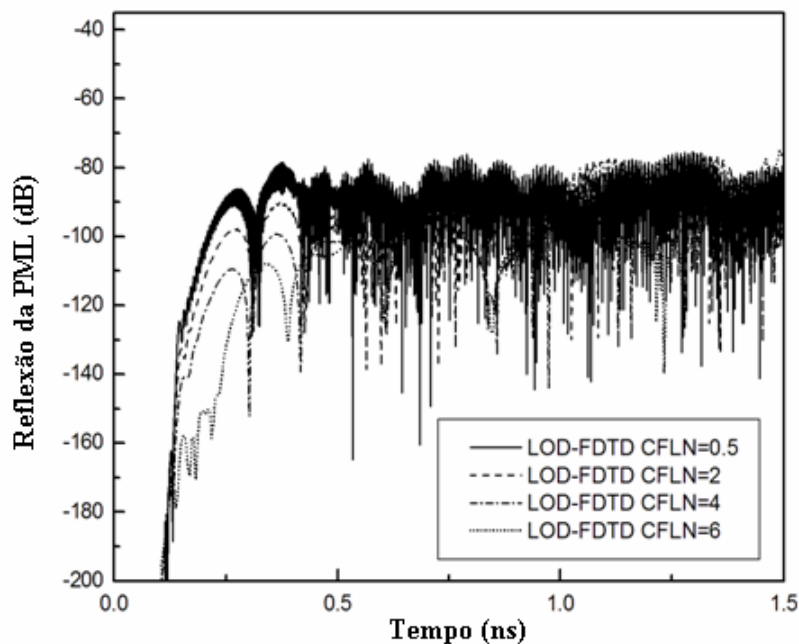


FIGURA 28: Erro de reflexão da PML para o método LOD-FDTD, primeiro esquema.

Os resultados para o segundo esquema, por sua vez, são mostrados na FIGURA 29. Esta figura claramente demonstra que a reflexão para o LOD-FDTD se comporta bem, mesmo para valores elevados de CFLN. O erro de reflexão obtido para o LOD-



FDTD foi por volta de -75 dB para CFLN=6. Dessa forma, estes resultados provam que o erro de reflexão para o PML LOD-FDTD, baseado seja no primeiro ou no segundo esquema, é menos sensível à variação do CFLN se comparado ao ADI-FDTD baseado em [71]. Esta é uma característica intrínseca da abordagem LOD, uma vez que ela considera as condutividades elétrica e magnética em apenas uma única direção por passo, sem sobreposição das direções. Isto naturalmente favorece a utilização do *split* PML.

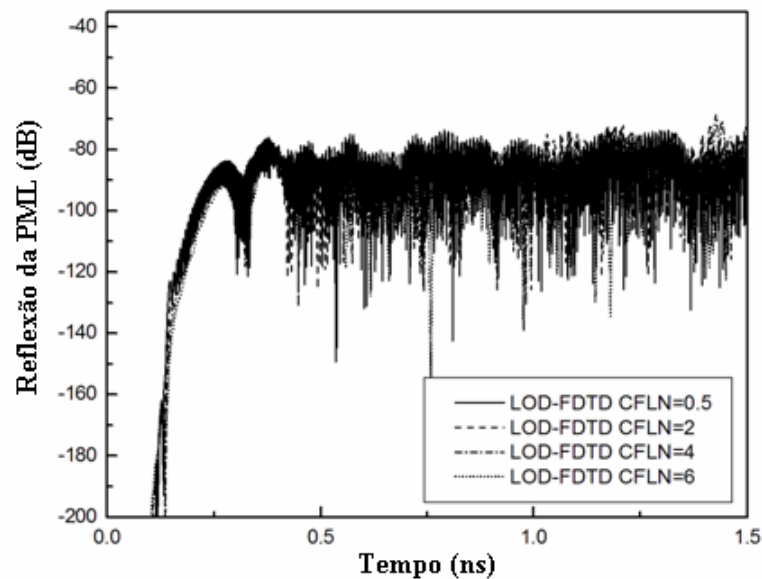


FIGURA 29: Erro de reflexão da PML para o método LOD-FDTD, segundo esquema.

O próximo passo consiste no estudo da dispersão numérica para diversos valores de CFLN, já considerando a aplicação da condição de contorno PML no formalismo LOD-FDTD. O valor para  $H_{ref}^t$  é obtido a partir do método FDTD e não do método LOD-FDTD como no caso anterior. Isto é feito de modo a garantir que erros numéricos que surgem naturalmente em virtude do aumento do número CFLN possam ser corretamente avaliados.

Os resultados obtidos para o erro numérico do método LOD-FDTD são mostrados nas FIGURA 30 e FIGURA 31 para o primeiro e segundo esquemas, respectivamente. Em ambos os casos foram utilizados  $\Delta x = \Delta y = 0.33\text{mm}$  e 8 células de PML.

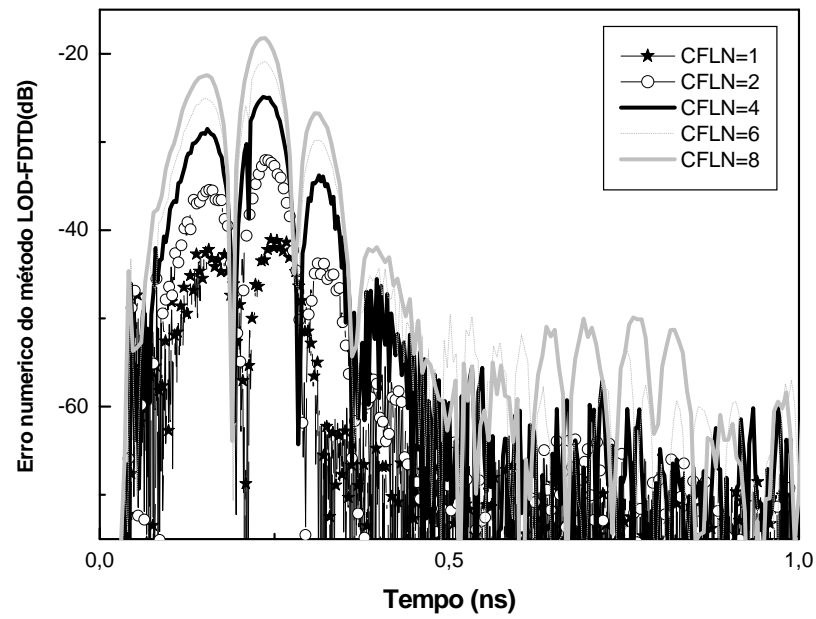


FIGURA 30: Primeiro esquema LOD-FDTD.

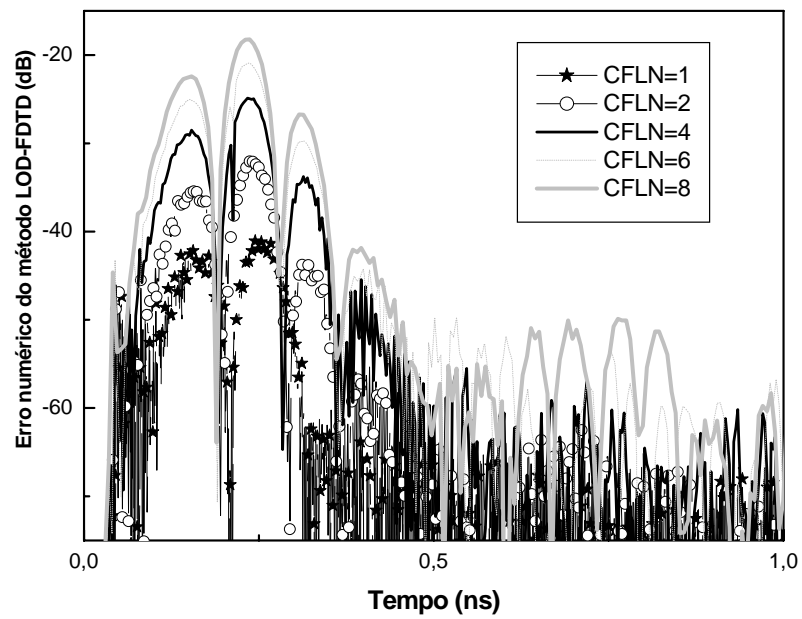


FIGURA 31: Segundo esquema LOD-FDTD.

Para a análise de dispersão numérica do método ADI-FDTD foram utilizados os mesmos parâmetros referentes ao método LOD-FDTD. O resultado obtido utilizando o segundo esquema é mostrado na FIGURA 32. O segundo esquema foi utilizado pelo fato do ADI-FDTD apresentar resultados precisos somente neste caso [72].

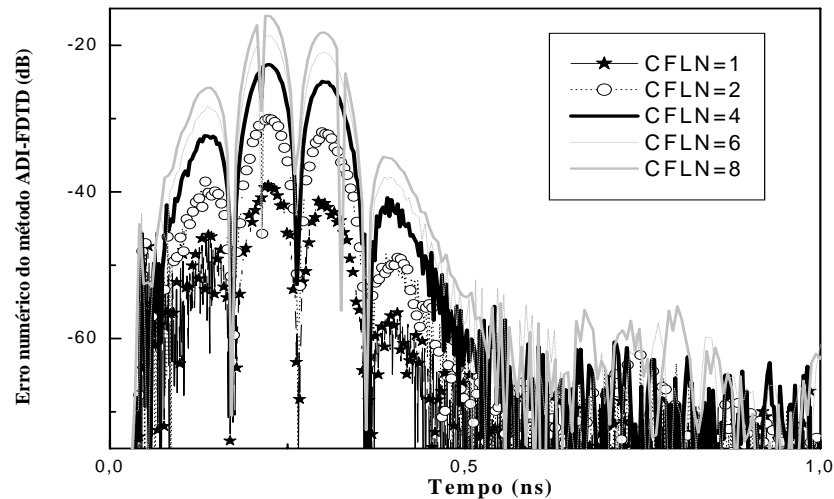


FIGURA 32: Erro numérico do ADI-FDTD para o segundo esquema.

Como pode ser observado por meio da FIGURA 30 e FIGURA 31 para o método LOD-FDTD, e FIGURA 32 para o método ADI-FDTD, a ordem de grandeza do erro de dispersão numérica para ambos os formalismos é muito semelhante. Apesar dos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD serem de segunda e primeira ordens no tempo, respectivamente. Isto se deve ao fato da simulação ter sido realizada no espaço livre, ou seja, sem nenhuma interface. Na próxima seção será demonstrado o distanciamento do erro entre o ADI-FDTD e LOD-FDTD por meio da análise de meios metamateriais.

Por último, um comparativo de custo computacional entre o LOD-FDTD e o ADI-FDTD, referente ao segundo esquema, são mostrados na FIGURA 33. Pode se verificar que para o mesmo número de Courant, neste caso CFLN=4, o tempo computacional do LOD-FDTD é significativamente menor do que o do ADI-FDTD. A diferença relativa percentual, por exemplo, para o caso de 600 pontos é de 52%. Esta vantagem adicional se deve ao fato do método PML LOD-FDTD trabalhar com apenas duas equações por passo, sendo que o PML ADI-FDTD trabalha com quatro equações por passo.

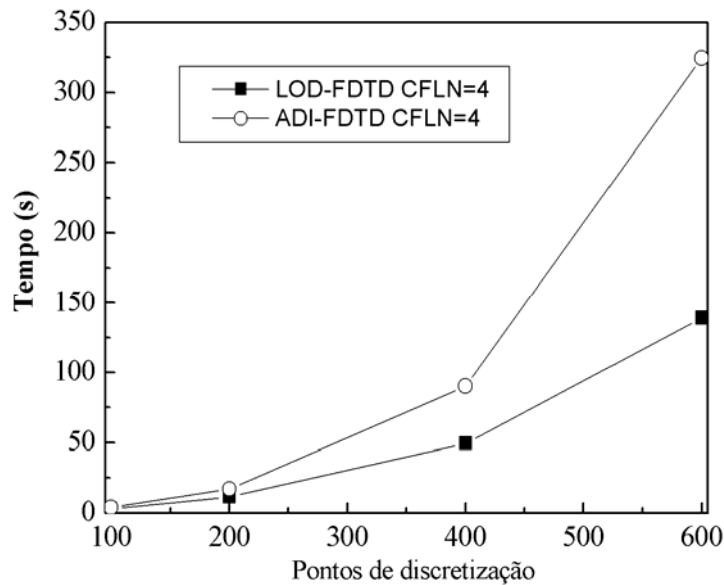


FIGURA 33: Custo computacional para os métodos LOD-FDTD e ADI-FDTD.

### 3.5 ESQUEMA EFICIENTE PARA IMPLEMENTAÇÃO DE FONTE EXPLÍCITA APLICADO AOS MÉTODOS ADI-FDTD E LOD-FDTD

Esta seção apresenta uma comparação de desempenho entre o esquema apresentado em [69] e o esquema proposto neste trabalho. Este estudo é efetuado mediante a variação do valor CFLN para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD, sendo os resultados obtidos com estes formalismos comparados aos resultados obtidos com o FDTD convencional, suposto aqui como exato.

As simulações descritas a seguir foram realizadas considerando o caso de propagação no espaço livre. Os parâmetros de discretização estão listados na TABELA 13.

TABELA 13: PARÂMETROS PARA SIMULAÇÃO NO ESPAÇO LIVRE.

$\lambda$ (m)	$\Delta x = \Delta y$ (m)	Número de pontos em x	Número de pontos em y
2,82	$\lambda/300$	900	900

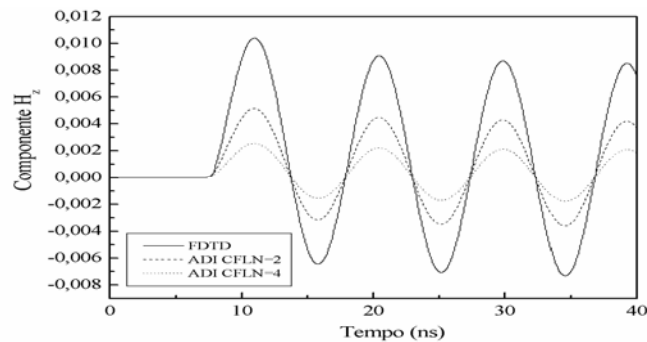
A função de excitação utilizada em ambos os esquemas é dada por:

$$F_{exc} = \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

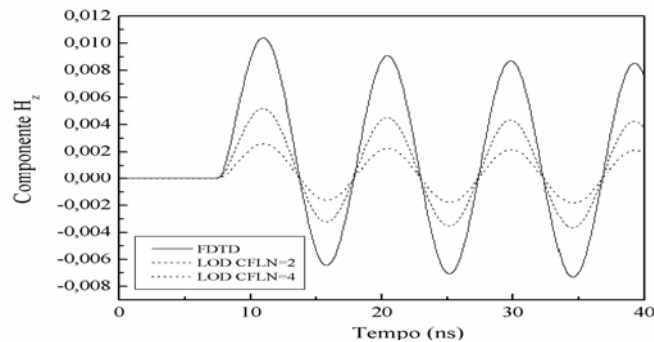
onde  $T=9,4\text{ns}$  e o tempo total de simulação para cada caso é de  $t=40\text{ns}$ .

Os resultados das simulações são mostrados na FIGURA 34 (a)-(d). A avaliação do primeiro esquema para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD são apresentadas na FIGURA 34 (a) e (b), respectivamente. Os resultados obtidos em [69], embora precisos, têm valor limitado, pois naquele caso foi considerado apenas o valor de CFLN=1. Em [69] os valores das constantes utilizados foram  $f_1 = 0,5$  e  $f_2 = 0,5$ . Com base nos resultados da FIGURA 34 (a) e (b) pode-se notar claramente que os mesmos são altamente discrepantes se comparados ao método FDTD para valores de CFLN=2 e CFLN=4.

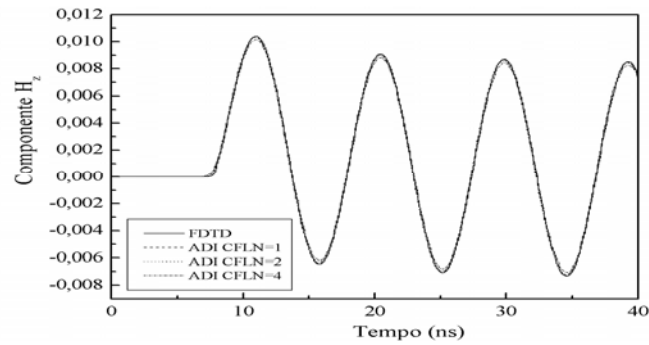
Os resultados para o segundo esquema são mostrados na FIGURA 34 (c) e (d) para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD, respectivamente. Os valores das constantes utilizadas no esquema de excitação de fonte explícita são  $f_1 = CFLN/2,0$  e  $f_2 = CFLN/2,0$ . Os resultados obtidos para ambos os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD são absolutamente precisos para valores utilizados de CFLN=1, 2 e 4 [96]. Portanto, torna-se evidente que o esquema de fonte explícita pode ser aplicado de forma eficiente aos métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD, desde que o valor CFLN seja considerado na excitação conforme demonstrado neste trabalho.



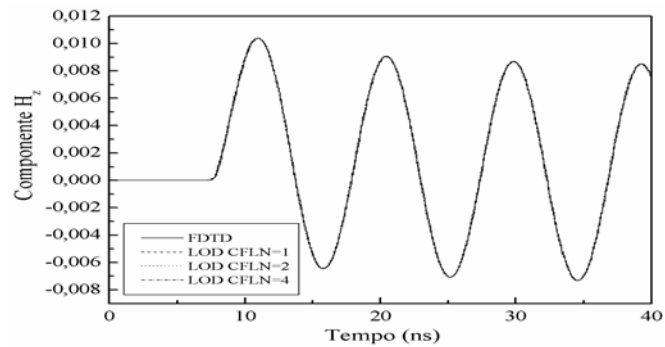
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 34: Comparação entre o primeiro e o segundo esquemas para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD para diferentes valores de CFLN: (a) e (b) representam o primeiro esquema, (c) e (d) o segundo esquema.

### 3.6 ANÁLISE DE MEIOS METAMATERIAIS EMPREGANDO O LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD

A utilização de técnicas LOD-FDTD vem se popularizando em virtude do seu potencial computacional, bem como a sua grande versatilidade, simplicidade e precisão na análise de fenômenos eletromagnéticos. Sendo assim, o método LOD-FDTD e a sua variante LOD-FDTD-SS de segunda ordem no tempo são empregados na análise de meios *metamateriais*. Para efeitos de validação, foram também implementados os métodos FDTD, cujos resultados na análise de meios *metamateriais* já são amplamente divulgados na literatura [8], [9], e o método ADI-FDTD, também estendido para análise de meios *metamateriais* [79]-[80]. Esta análise foi realizada para uma estrutura do tipo planar composta por meio *metamaterial* circundado por ar, conforme ilustrado na FIGURA 35. Os parâmetros físicos e geométricos desta estrutura estão listados na TABELA 14.

TABELA 14: Parâmetros físicos e geométricos de uma estrutura do tipo planar composta por meio *metamaterial*, para simulação utilizando o método FDTD, LOD-FDTD, LOD-FDTD SS e ADI-FDTD.

$f_0$ (GHz)	$\Delta x = \lambda_0/100$ (m)	$\Delta z = \lambda_0/100$ (m)	$W$	$N_x \cdot N_z$
30	0,0001	0,0001	$100 \times \Delta z$	2000x2000

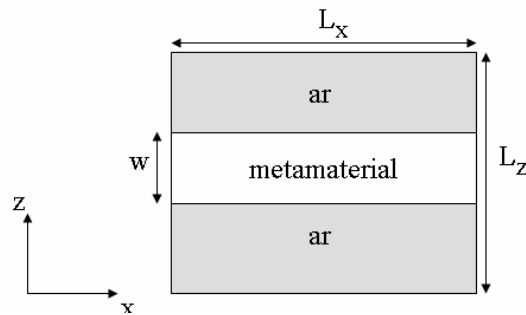


FIGURA 35: Diagrama esquemático de uma estrutura planar de três camadas composta por meio *metamaterial*, circundada por ar.

O desenvolvimento dos formalismos apresentados não considerou nenhuma condição de contorno, pois a idéia deste trabalho consiste em validar a utilização de técnicas LOD-FDTD para análise de meios metamateriais, bem como demonstrar a sua eficácia em tais análises. Sendo assim, uma janela computacional suficientemente grande foi adotada de forma a evitar reflexões indesejadas no domínio de análise, conforme TABELA 14.

A simulação da estrutura mostrada na FIGURA 35 tem por objetivo demonstrar a completa aplicação de técnicas LOD-FDTD na análise de meios metamateriais. Para isso, é considerada a estrutura ilustrada na FIGURA 36 a qual foi proposta por Pendry [21]. O conceito de formação de imagem perfeita sugerido por esta figura já havia sido postulado por Veselago [1], onde a formação do foco ocorre no interior do meio metamaterial. Este conceito de lentes perfeitas é muito interessante, visto que a resolução da imagem formada por lentes convencionais é limitada à metade do comprimento de onda utilizado. Esta limitação decorre do fato que a amplitude das componentes evanescentes provenientes da fonte são atenuadas conforme a propagação ocorre. O estudo realizado em [21] mostrou que por meio da utilização de um meio metamaterial, conforme ilustrado na FIGURA 36, a amplitude das componentes evanescentes são amplificadas, reconstruindo de forma perfeita a imagem do objeto. Entretanto, o trabalho apresentado

em [22] mostrou que o estudo realizado em [21] apresentava inconsistências teóricas, visto que a atenuação presente em meios dispersivos como os metamateriais causam atenuação e não amplificação das ondas evanescentes.

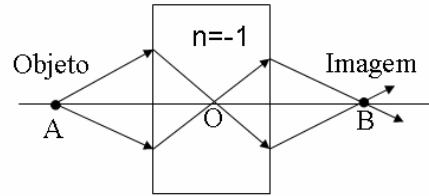


FIGURA 36: Trajetória do feixe em uma estrutura planar paralela com  $n=-1$ .

Outros estudos baseados na utilização do método FDTD também mostraram a impossibilidade de obtenção de imagens perfeitas a partir do uso de meios metamateriais. Isso foi feito mediante a constatação de que o foco dentro do meio metamaterial apresenta uma movimentação constante [8], [9], chegando a desaparecer em alguns instantes, o que caracteriza um meio dispersivo, impossibilitando a reconstrução da imagem perfeita do objeto. Posteriormente, estudos experimentais [27]-[29] mostraram que a obtenção de lentes com resolução abaixo do limite de difração seria possível conforme previsto por Pendry [21], desde que se fossem adotados parâmetros bastante específicos tais como, a distância entre o objeto e a imagem, a espessura do meio metamaterial, além do controle preciso sobre as perdas. As simulações utilizando o método FDTD foram realizadas com o objetivo de verificar o efeito de lentes perfeitas sugerido por Pendry [21], onde o foco ocorre no centro do meio *metamaterial*. Para que isto ocorra é necessário que o meio *metamaterial* apresente o índice de refração  $n=-1$ . Isto pode ser obtido utilizando-se  $\omega_p = 2,655 \times 10^{11} \text{ rad/s}$  no modelo de Drude em (2.104) e (2.105), resultando em  $\epsilon_r = \mu_r = -1$ . Este conceito será abordado nas simulações a seguir.

Tendo isto em mente, foi realizado um estudo sobre a performance dos métodos FDTD apresentados neste trabalho de tal forma a se avaliar a precisão, estabilidade e custo computacional. Em todos os casos analisados o meio *metamaterial* foi considerado no centro do domínio computacional, em  $0,095 \text{ (m)} \leq z \leq 0,105 \text{ (m)}$  e  $0 \leq x \leq 0,2 \text{ (m)}$ . A fonte está localizada em  $(z,x)=(1000,1100)$ , 50 células acima do meio *metamaterial*. Os casos avaliados envolvem diferentes valores do número de Courant-Friedrich-Levy (CFLN). A expressão para o sinal de entrada é dada por:



$$f(t) \begin{cases} g_{on}(t)\sin(\omega_0 t) & \text{for } 0 \leq t < mT_p \\ \sin(\omega_0 t) & \text{for } mT_p \leq t \leq (m+n)T_p \\ g_{off}(t)\sin(\omega_0 t) & \text{for } (m+n)T_p \leq t \leq (m+n+m)T_p \\ 0 & \text{for } t > (m+n+m)T_p \end{cases}$$

onde  $T_p = 1/f_0$  representa o período de um ciclo .

$$g_{on}(t) = 10x_{on}^3 - 15x_{on}^4 + 6x_{on}^5$$

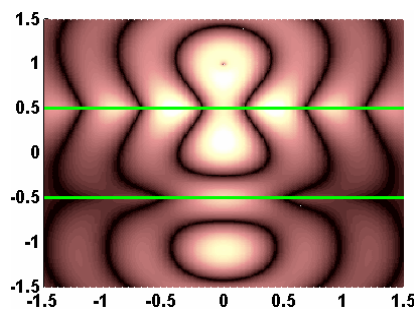
$$g_{off}(t) = 1 - [10x_{off}^3 - 15x_{off}^4 + 6x_{off}^5]$$

e

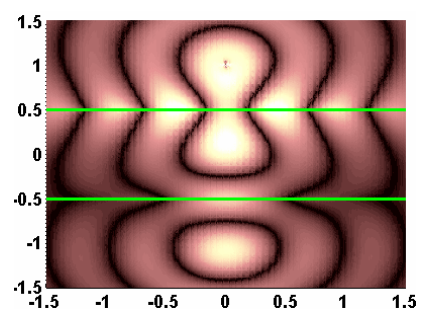
$$x_{on} = 1 - \frac{(mT_p - t)}{mT_p} \text{ e } x_{off} = \frac{[t - (m+n)]}{mT_p}$$

$$m=5, n=20 \text{ e } \omega_0 = 2\pi \times 30 \times 10^9 \text{ rad/s}$$

As distribuições de campo magnético para a componente  $H_z$  com os três formalismos FDTD implícitos descritos neste trabalho que são mostrados na FIGURA 37 (b)-(d). Os resultados foram obtidos para um caso sem perdas com  $\omega_p = 2,655 \times 10^{11} \text{ rad/s}$  e com CFLN=1 para todos os formalismos. O número de passos de tempo é de 2500  $\Delta t$ , o qual é limitado somente pelo tamanho da janela computacional desde que nenhuma condição de contorno foi implementada para este caso. Os resultados concordam plenamente com aquele obtido com o FDTD (FIGURA 37 (a)), assumido aqui como exato.



(a)



(b)

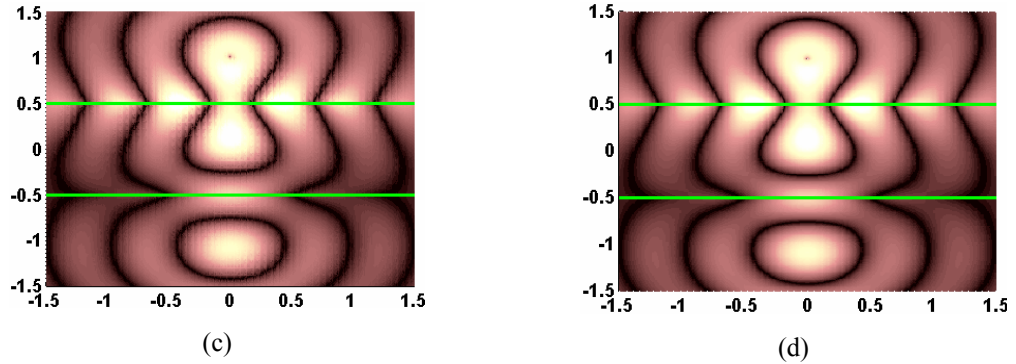


FIGURA 37: Distribuições do campo magnético para a componente  $H_z$ , obtidas por meio dos métodos FDTD (a), LOD-FDTD (b) e LOD-FDTD SS (c) e ADI-FDTD (d), para  $t=2500 \Delta t$  em um meio *metamaterial* sem perdas e  $CFLN=1$ . A unidade dos eixos está em cm.

A estabilidade dos formalismos LOD e ADI são também investigadas para  $CFLN=5$ , o que significa que o passo de tempo é 5 vezes maior do que o previsto pelo critério CFL [44], ver FIGURA 38. Como pode ser visto, as FIGURAS 38 (b)-(d) não mostram nenhuma diferença visível entre os formalismos, mesmo para o LOD-FDTD, o qual possui precisão de primeira ordem no tempo.

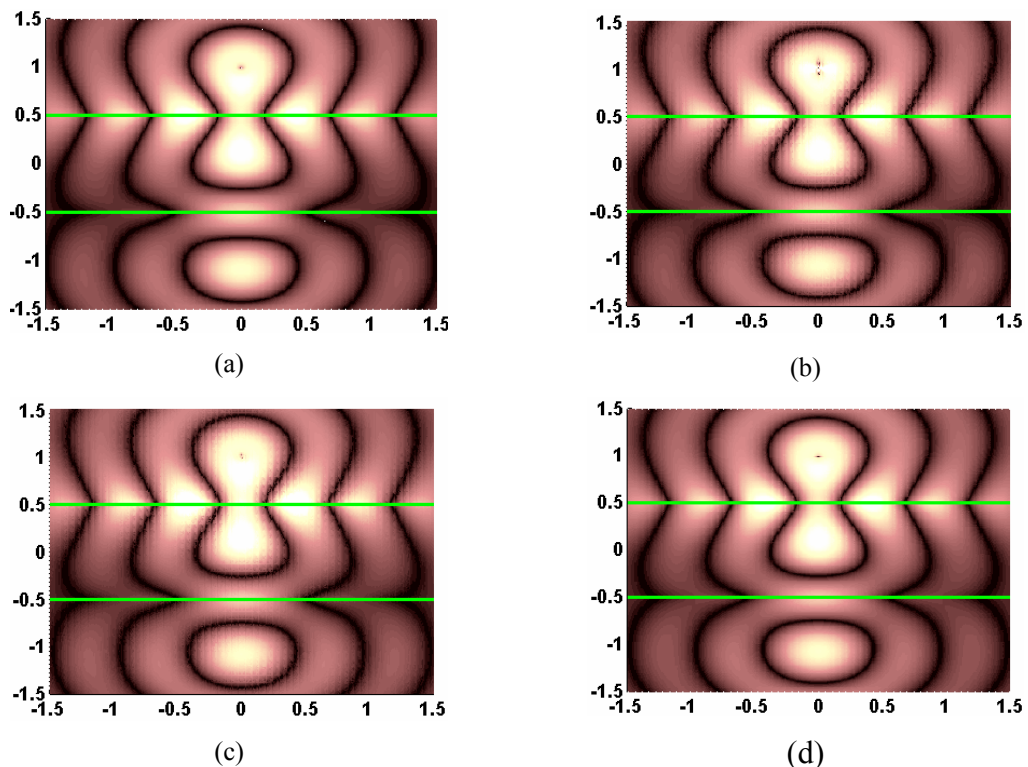


FIGURA 38: Distribuições do campo magnético para a componente  $H_z$ , obtidas por meio dos métodos FDTD (a), LOD-FDTD (b) e LOD-FDTD SS (c) e ADI-FDTD (d), para  $t=2500 \Delta t$  em um meio *metamaterial* sem perdas e  $CFLN=5$  para os formalismos LOD e ADI. A unidade dos eixos está em cm.

Uma situação com perdas pode ser vista na FIGURA 39, onde foi adotado  $\Gamma = 10^8 \text{ rad/s}$  e  $\omega_p = 377 \times 10^9 \text{ rad/s}$ . Os valores para CFLN são, respectivamente, 1 para o FDTD e 5 para os métodos LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD. É interessante notar neste caso que o fluxo de energia é canalizado em um feixe ao invés de ser focalizado, exatamente como previsto em [8].

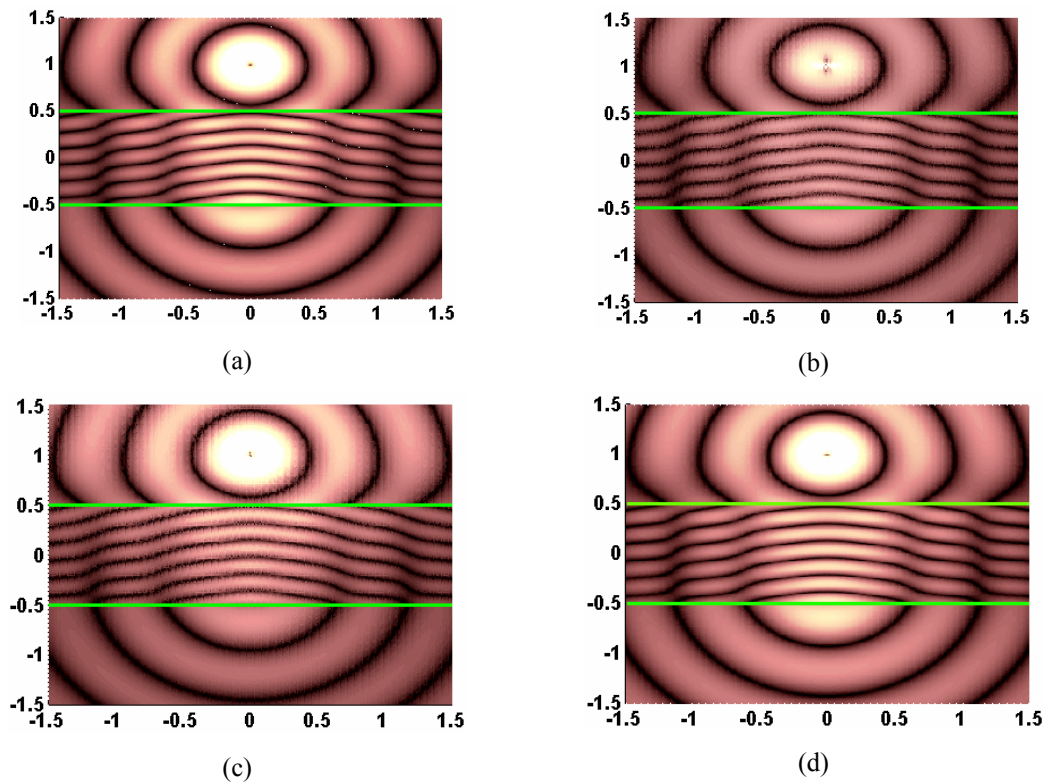


FIGURA 39: Distribuições de campo magnético para a componente  $H_z$ , para  $\Gamma = 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_p = 377 \times 10^9 \text{ rad/s}$  e  $t=2500 \Delta t$ . (a) método FDTD, com CFLN=1, (b) LOD-FDTD, (c) LOD-FDTD-SS e (d) ADI-FDTD tendo sido adotado CFLN=5 para os três últimos. A unidade dos eixos em cm.

Portanto, os resultados nas FIGURAS 37-39, demonstram que o meio metamaterial pode ser investigado com sucesso por qualquer formalismo implícito apresentado neste trabalho. A concordância dos formalismos baseados na técnica LOD e ADI com o FDTD (suposto aqui como exato) é excelente mesmo para grandes valores utilizados de CFLN. Isto é verdade mesmo para o LOD-FDTD convencional, o qual apresentou bons resultados, embora sua precisão seja apenas de primeira ordem no tempo. Este resultado é particularmente relevante já que o LOD-FDTD é o formalismo que apresenta o menor

custo computacional entre todos os formalismos implícitos apresentados, o que sugere que ele seja considerado como um candidato interessante para simulação de estruturas eletricamente longas. Obviamente, se uma grande precisão é imprescindível, formalismos de ordem mais alta tais como o LOD-FDTD-SS e o ADI-FDTD devem ser utilizados.

Agora, é realizado um estudo do custo computacional para todos os três formalismos implícitos considerando a propagação de uma onda em espaço livre e em meios *metamateriais*. É importante mencionar que a split PML (SPML) foi implementada com sucesso na análise de meios convencionais com o método LOD-FDTD por Nascimento *et al.* [99]. Ressaltando que a PML não foi implementada na simulação dos meios metamateriais, como mencionado previamente.

Primeiro, vamos considerar a propagação em espaço livre. O custo computacional obtido para os formalismos SPML-LODs e SPML-ADI para esta situação é listado na TABELA 15, para 600x600 células de discretização e 10 passos propagação. Como esperado, a SPML-LOD-FDTD demonstrou ser o formalismo computacionalmente mais eficiente em virtude do reduzido número de termos em suas equações. Infelizmente, este menor número de termos resulta em um formalismo que possui apenas precisão de primeira ordem no tempo. Por outro lado, o formalismo SPML-LOD-FDTD-SS, que possui precisão de segunda ordem no tempo, emprega um passo extra de propagação em seu formalismo (o ADI-FDTD requer apenas dois passos). Conseqüentemente ele demanda 26% mais esforço computacional quando comparado ao SPML-LOD-FDTD. Surpreendentemente, este método demonstra ser 33% mais eficiente que o SPML-ADI-FDTD, mesmo com um passo adicional de propagação. A razão para isto está no fato do SPML-LOD-FDTD-SS apresentar somente uma equação explícita e uma equação implícita por passo. O formalismo ADI, por outro lado, trabalha com uma equação implícita e três explícitas por passo. Adicionalmente, a implementação da SPML introduz diversos termos nos formalismos, o que é particularmente desfavorável para o ADI em virtude deste possuir um maior número de equações. A relativa simplicidade dos formalismos LOD é também bastante atrativa para a implementação de condições de contorno absorventes tais como a SPML [99], particularmente se comparado ao caso do ADI-FDTD.

TABELA 15: Comparação do custo computacional para o LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD com a implementação da split PML (SPML)

SPML-LOD-FDTD	SPML-LOD-FDTD-SS	SPML-ADI-FDTD
15,29 s	19,31 s	25,68 s

TABELA 16: Comparação do custo computacional para o LOD-FDTD, LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD para análise de meios metamateriais sem PML

LOD-FDTD	LOD-FDTD-SS	ADI-FDTD
9,016 s	14,5 s	14,06 s

No próximo exemplo consideramos a propagação em uma estrutura planar de três camadas composta por meio *metamaterial* circundada por ar, como mostrado na FIGURA 35. O custo computacional para os três formalismos implícitos está listado na TABELA 16, para 600x600 células de discretização e 10 passos de propagação. Como mencionado anteriormente, o LOD-FDTD-SS trabalha com uma equação implícita e uma explícita por passo. Para considerar o meio metamaterial, duas equações explícitas extras são necessárias em cada passo. O ADI, por sua vez, além de precisar de uma equação implícita e duas explícitas, necessita também de outras três equações explícitas em cada passo para considerar o meio metamaterial. O custo computacional entre o LOD-FDTD-SS e o ADI-FDTD torna-se comparável neste caso. Se por um lado o LOD com SS tem mais passos de propagação, por outro lado o ADI necessita de mais equações por passo. No entanto, se o interesse for implementar uma SPML em qualquer dos formalismos implícitos para a simulação de meios metamateriais como descrito neste trabalho, o custo computacional será certamente menor para os formalismos LOD. A razão para esta conclusão vem do fato que a SPML introduz muito mais termos extras na formulação ADI que na formulação LOD.

Outra importante característica referente aos formalismos implícitos diz respeito à precisão temporal. Uma maneira de avaliar este problema é feita por meio da norma do erro normalizado, definida em termos do FDTD como sugerido em [101]. Em todos os casos avaliados aqui a propagação foi realizada até  $t=200\Delta t_{CFL}$ . O passo de tempo utilizado é  $\Delta t=\Delta t_{CFL}/2^p$ , onde  $p$  é subdivisão geométrica do tempo. O meio é suposto sem perdas.

Primeiro, considera-se o efeito de somente uma componente de campo para a norma do erro normalizada, isto é, definido em termos somente da componente  $H_z$ .

$$Erro = \frac{\|H_z^n - H_z^e\|}{\|H_z^n\|},$$

O sobrescrito  $n$  e  $e$  designam as componentes de campo obtidas com o FDTD e os métodos implícitos, respectivamente. Os resultados das simulações para os formalismos LOD, LOD com SS, e ADI são mostrados na FIGURA 40. Como era esperado o LOD-FDTD apresenta o maior erro entre todos os formalismos, o que é consequência de sua precisão de primeira ordem no tempo. Um comportamento similar foi encontrado em [101]. Portanto, se soluções mais precisas forem necessárias para análise dos meios metamateriais, será necessário o uso de formalismo de ordem mais alta no tempo. Este é exatamente o caso dos métodos LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD, como pode ser verificado a seguir.

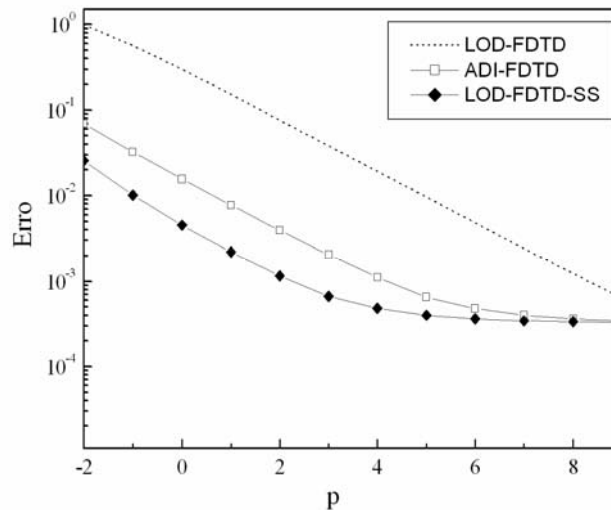


FIGURA 40: Norma do erro normalizado versus  $p$  ( $\Delta t = \frac{\Delta t_{CFL}}{2^p}$ ) para os métodos LOD-FDTD, ADI-FDTD e LOD-FDTD-SS considerando a componente  $H_z$ .

Observa-se que em adição ao aumento da ordem de precisão no tempo, o esquema Strang *splitting* também contribui significativamente na redução do erro com respeito ao formalismo ADI-FDTD, particularmente para  $p < 5$ . Visto ser  $H_z$  a componente que proporciona a melhor visualização da onda eletromagnética dentro do meio metamaterial, este erro torna-se uma indicação de que a abordagem LOD-FDTD-SS é menos sensível ao erro provocado pela existência da interface em função do aumento do incremento de tempo. Isto seria explicado pelo fato do formalismo LOD SS trabalhar com uma única direção em cada passo, ao contrário do ADI que trabalha com as duas direções em cada passo.

Finalmente, foi calculada a norma do erro normalizado global para todos os formalismos implícitos, a qual é definida em termos das componentes  $H_z$ ,  $E_x$  e  $E_y$  como segue:

$$Erro = \frac{\|H_z^n - H_z^e\|}{\|H_z^n\|} + \frac{\|E_x^n - E_x^e\|}{\|E_x^n\|} + \frac{\|E_y^n - E_y^e\|}{\|E_y^n\|},$$

Como esperado, o desempenho do LOD-FDTD é significativamente prejudicada em virtude da sua reduzida precisão temporal. Por outro lado, o LOD-FDTD-SS tem mostrado uma performance notável com o erro total muito próximo daquele obtido com o ADI-FDTD, como mostra a FIGURA 41. Isto é uma informação importante já que confirma que o formalismo LOD-FDTD-SS é computacionalmente eficiente e preciso para a simulação de meios metamateriais, assim como o ADI-FDTD. Entretanto, é esperado que, uma vez que a PML seja implementada nestes formalismos, o custo computacional seja certamente mais favorável ao LOD-FDTD-SS já que o ADI-FDTD naturalmente terá muito mais termos adicionados ao formalismo.

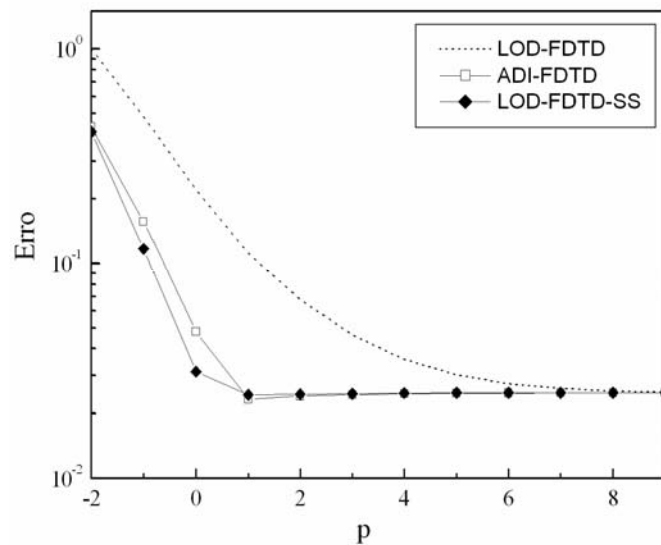


FIGURA 41: Norma do erro normalizada total versus  $p$  ( $\Delta t = \frac{\Delta t_{CFL}}{2^p}$ ) para os métodos LOD-FDTD, ADI-FDTD e LOD-FDTD-SS considerando as componentes  $H_z$ ,  $E_x$  e  $E_y$  simultaneamente.

## 4 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou diferentes formas de aplicação da técnica LOD em métodos numéricos no domínio da frequência (FD-BPM) e do tempo (FDTD e TD-WPM). Estes métodos têm sido amplamente utilizados na modelagem da propagação de ondas eletromagnéticas em meios complexos e metamateriais, particularmente os metamateriais onde tanto a permissividade quanto a permeabilidade são negativos.

Inicialmente, a técnica LOD foi aplicada ao formalismo de propagação de feixe no domínio da frequência, tendo resultado em um formalismo escalar de ângulo largo. Este novo formalismo foi aplicado com grande sucesso na análise das perdas por confinamento em fibras de cristais fotônicos (PCFs). Este formalismo de ângulo largo não somente proporcionou uma abordagem elegante para este problema como também se mostrou mais eficiente computacionalmente do que o ADI, uma vez que apenas uma única direção é considerada em cada passo de propagação. Adicionalmente, a abordagem de ângulo largo proporcionou uma redução de 50% no tempo computacional necessário para a convergência das perdas por confinamento quando comparado ao formalismo paraxial.

Após o êxito da aplicação da técnica LOD no domínio da frequência, esta foi estendida para o domínio do tempo, primeiramente com o desenvolvimento do método TD-WPM. Esta abordagem inédita proporcionou um desempenho computacional eficiente quando comparado a formalismos similares, fundamentalmente por não estar restrito ao uso de passos de tempo que são limitados pela condição de estabilidade de Courant (CFL). Este método também apresentou estabilidade incondicional em virtude da aplicação do esquema de Crank-Nicolson. O LOD TD-WPM foi validado por meio do



estudo da transferência de energia em um acoplador direcional, tendo demonstrado excelente concordância com os resultados existentes na literatura.

Em seguida, a técnica LOD foi estendida para o método FDTD, resultando no método LOD-FDTD implícito. Assim como no método TD-WPM, o esquema de Crank-Nicolson foi também aplicado a fim de garantir a estabilidade incondicional. O método LOD-FDTD resultante se mostrou uma boa alternativa ao método FDTD tradicional já que, assim como no ADI-FDTD, ele não apresenta a restrição quanto ao passo de tempo imposta pela condição de Courant. Esta característica se torna ainda mais atraente quando análises de estruturas eletromagnéticas longas são necessárias. Com o objetivo de validar este novo formalismo, os resultados obtidos com o LOD-FDTD foram então comparados com os do ADI-FDTD e do FDTD convencional. Foi observado que o LOD-FDTD apresenta um desempenho computacional superior ao do FDTD e do ADI-FDTD, além de ser incondicionalmente estável. Um inconveniente apresentado pelo LOD-FDTD diz respeito à sua precisão de primeira ordem no tempo, que pode vir a prejudicar a análise de determinados problemas.

Esta limitação foi contornada com a adoção do esquema de divisão de operadores proposto por Strang, também conhecido como *Strang splitting* (SS). O formalismo resultante apresentou precisão de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço, tendo sido necessário para isso a adoção de um passo adicional em relação ao ADI-FDTD e ao LOD-FDTD. Este novo esquema foi denominado LOD-FDTD-SS também apresentou estabilidade incondicional tendo em vista a adoção do esquema Crank-Nicolson. Esta condição foi minuciosamente estudada para o formalismo LOD-FDTD através do método de von Neumann, juntamente com um estudo detalhado de sua dispersão numérica.

Outra contribuição importante deste trabalho foi à implementação da condição de contorno *split* PML no formalismo LOD-FDTD para a simulação de problemas eletromagnéticos abertos. A escolha da *split* PML ocorreu pelo fato da sua estrutura se assemelhar à natureza intrínseca do LOD, ou seja, ela considera apenas uma direção por passo para as condutividades elétrica e magnética. Foram desenvolvidos dois esquemas de implementação baseados em uma aproximação centrada e outra avançada no tempo para os termos de condutividade. Foi observado que o LOD-FDTD apresentou excelentes resultados para o erro de reflexão da PML em ambos os esquemas quando da utilização de valores elevados de CFLN, o que não corre no caso do ADI-FDTD que apresenta bons resultados somente no caso da utilização do segundo esquema. Isto evidenciou uma menor sensibilidade de aplicação do método LOD-FDTD a diferentes esquemas

*split* PML em virtude da natural correspondência de abordagem entre ambos. Adicionalmente, o esquema *split* PML para o LOD-FDTD apresentou um desempenho computacional aproximadamente 50% superior ao *split* PML ADI-FDTD.

Este trabalho também propôs um esquema eficiente para implementação de fonte explícita que pode ser eficientemente aplicada tanto no método ADI-FDTD quanto no LOD-FDTD.

Os métodos FDTD, ADI-FDTD, LOD-FDTD, e LOD-FDTD-SS foram também implementados com base no modelo de Drude com perdas, possibilitando, assim, uma modelagem adequada de meios *metamateriais*. Isso permitiu que o desempenho dos métodos LOD propostos neste trabalho pudessem ser adequadamente comparados com métodos de modelagem já consagrados na literatura, como é o caso do FDTD e do ADI-FDTD. O cálculo do erro para os métodos mostrou claramente que o LOD-FDTD é um método de primeira ordem e que os métodos LOD-FDTD-SS e ADI-FDTD são de segunda ordem. Adicionalmente, o LOD-FDTD-SS apresentou melhores resultados que o ADI-FDTD. Além da maior precisão observada para o método LOD-FDTD-SS, este método apresenta, ainda, uma demanda computacional comparável ao ADI-FDTD mesmo possuindo três passos de propagação.

Como proposta de trabalhos futuros, sugere-se a ampliação do estudo do erro entre o LOD-FDTD e o ADI-FDTD na faixa de frequências ópticas. Outra sugestão importante seria a implementação de condições de contorno eficientes e adequadas para os métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD para a análise de meios *metamateriais*.

## APÊNDICE A - Técnicas de divisão do operador

Uma maneira eficaz de contornar problemas de esforço computacional na solução de problemas multidimensionais é a utilização de técnicas de divisão do operador. Dentre estas técnicas destacam-se a ADI, proposta por Peaceman [54], e a localmente unidimensional (LOD), proposta por Yanenko [55]. Para uma melhor compreensão das principais diferenças entre os métodos ADI e LOD, considere a equação do calor:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad (\text{A.1})$$

A solução de (A.1) requer a solução de um sistema do tipo  $AX=B$ , onde  $A$  é uma matriz esparsa acoplada completamente nas direções  $x$  e  $y$  em único passo de tempo. A idéia, tanto do LOD quanto do ADI, é desacoplar esta equação em dois passos de tempo resultando em um sistema tridiagonal que pode ser resolvido de maneira mais simples. Tanto o ADI quanto o LOD representam métodos implícitos para a solução de sistemas lineares.

O método LOD consiste em aproximar a solução de um problema em duas dimensões, dados por (A.1), resolvendo dois problemas unidimensionais que localmente representam o problema original.

O desenvolvimento dos métodos de divisão do operador é realizado aplicando-se o esquema de Crank-Nicolson em (A1) que resulta em:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 - \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 + \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^n \quad (\text{A2})$$

A equação (A4) pode ser aproximada pela seguinte fatorização:

$$\left( [I] - \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 \right) \left( [I] - \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^{n+1} = \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 \right) \left( [I] + \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^n \quad (\text{A3})$$

Com um termo de erro adicional dado por  $\frac{\Delta t^2}{4} \delta_x^2 \delta_y^2 (U^{n+1} - U^n)$ .

O método LOD aplicado em (A3) resulta em dois passos dados por:

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 \right) U^{n+\frac{1}{2}} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 \right) U^n \quad (\text{A.4})$$

e

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^{n+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

onde,  $\delta_x^2 U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2}$  e  $\delta_y^2 U_{i,j} = \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2}$ .

As equações (A.4) e (A.5) podem ser entendidas fisicamente como um processo de difusão de calor nas direções x e y, respectivamente. Estas duas equações representam um processo desacoplado, onde U é permitido se difundir primeiramente na direção x, (A.4), e depois na direção y, (A.5).

No caso do método ADI, (A.3) também é dividida em duas novas equações representando passos de propagação. Entretanto, a diferença básica entre o ADI e o LOD consiste no fato que cada passo do ADI consiste em uma discretização do campo futuro em uma única direção x ou y. Este desacoplamento resulta em um sistema tridiagonal, embora exista um acoplamento com o campo passado na direção oposta, como pode ser visto nas equações abaixo.

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 \right) U^{n+\frac{1}{2}} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^n \quad (\text{A.6})$$

e

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} \delta_y^2 \right) U^{n+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} \delta_x^2 \right) U^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

onde,  $\delta_x^2$  e  $\delta_y^2$  representam derivadas parciais espaciais de segunda ordem que são expandidas em diferenças finitas centradas da seguinte forma:

$$\delta_x^2 U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad \text{e} \quad \delta_y^2 U_{i,j} = \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2}.$$

Neste caso, os dois passos envolvem o processo de difusão simultaneamente nas direções x e y. No primeiro passo a difusão em x é tratada implicitamente enquanto que a difusão em y é tratada explicitamente. No segundo passo o processo se inverte, e a difusão em y é tratada implicitamente enquanto que a difusão em x é tratada explicitamente.

A aplicação das técnicas LOD e ADI neste trabalho pode ser exemplificada considerando as equações de Maxwell representadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + Bu \quad (\text{A.8})$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial / \varepsilon \partial y \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial / \mu \partial y & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial / \varepsilon \partial x \\ 0 & -\partial / \mu \partial x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

Aplicando o esquema de Crank-Nicolson em (A.8), resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} A (u^{n+1} + u^n) + \frac{1}{2} B (u^{n+1} + u^n) \quad (\text{A.9})$$

Discretizando (A.9) em diferenças finitas:

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} A - \frac{\Delta t}{2} B \right) u^{n+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t}{2} B \right) u^n \quad (\text{A.10})$$

A equação (A.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} A \right) \left( I - \frac{\Delta t}{2} B \right) u^{n+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} A \right) \left( I + \frac{\Delta t}{2} B \right) u^n \quad (\text{A.11})$$

com um erro adicional dado por  $\frac{\Delta t^2}{4} AB (u^{n+1} - u^n)$

Aplicando a técnica ADI em (A.11) resulta nas equações para o ADI-FDTD [59]:

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} A \right) u^{n+(1/2)} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} B \right) u^n \quad (\text{A.12})$$

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} B \right) u^{n+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} A \right) u^{n+(1/2)} \quad (\text{A.13})$$

O erro de truncamento associado ao método ADI-FDTD é dado por:

$$\frac{\Delta t^2}{4} AB(u^{n+1} - u^n) \quad (\text{A.14})$$

Agora, aplicando a técnica LOD em (A.11) resulta nas seguintes equações para o método LOD-FDTD:

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A\right) u^{n+(1/2)} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A\right) u^n \quad (\text{A.15})$$

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} B\right) u^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} B\right) u^{n+(1/2)} \quad (\text{A.16})$$

O erro de truncamento associado ao LOD-FDTD é dado por:

$$\frac{\Delta t^2}{4} (AB - BA)(u^{n+(1/2)} + u^n) \quad (\text{A.17})$$

Essa diferença entre o erro de truncamento do ADI-FDTD e LOD-FDTD se deve ao fato dos operadores A e B presentes nas equações de Maxwell (A.17) não comutarem. No caso da aplicação das técnicas ADI e LOD em equações nas quais os operadores A e B comutam, o erro de truncamento associado para ambos os casos será o mesmo e será dado por:

$$\frac{\Delta t^2}{4} AB(u^{n+1} - u^n) \quad (\text{A.18})$$

## APÊNDICE B - Método LOD FD-BPM

A propagação de ondas em estruturas tridimensionais pode ser convenientemente descrita em termos da equação de onda escalar de Helmholtz como segue:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H + k^2 n^2 H = 0 \quad (\text{B.1})$$

onde  $H$  representa a componente de campo magnético,  $n$  é a distribuição de índice de refração,  $k$  é o número de onda no vácuo. A solução de (B.1) pode ser aproximada por uma onda plana descrita como  $H = \Psi(x, y, z)e^{-jk_0 n_0 z}$ , onde  $\Psi(x, y, z)$  representa a aproximação por envoltória de variação lenta,  $e^{-jk_0 n_0 z}$  representa a variação rápida, e  $n_0$  é o índice de refração de referência. O parâmetro  $n_0$  é atualizado a cada passo de propagação por meio de uma abordagem variacional escalar [105]. A parte imaginária do índice efetivo  $n_{imag}$  fornece a magnitude das perdas de confinamento de acordo com [106]. Substituindo a aproximação por envoltória em (B.1), resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi - 2j\zeta \frac{\partial}{\partial z} \psi + P\psi = 0 \quad (\text{B.2})$$

onde:

$$\zeta = k_0 n_0 \text{ e } k_0 = 2\pi / \lambda$$

e

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 [n(x, y)]^2 - n_0^2$$

A equação (B.2) pode ser decomposta em duas equações independentes, uma para cada direção de propagação, como segue:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + j(\sqrt{P + \zeta^2} - \zeta) \right] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial z} - j(\sqrt{P + \zeta^2} + \zeta) \right] \psi = 0 \quad (\text{B.3})$$

Considerando apenas a propagação ao longo da direção +z, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi = -j(\sqrt{P + \zeta^2} - \zeta) \psi \quad (\text{B.4})$$

A equação (B.4) é equivalente à equação escalar de Helmholtz. A raiz quadrada presente em (B.4), entretanto, representa um problema para a expansão desta expressão em diferenças finitas. Felizmente, este problema pode ser contornado de maneira elegante se o termo que contém a raiz quadrada for expandido em termos dos aproximantes de Padé [107], como segue:

$$\sqrt{P + \zeta^2} - \zeta = \frac{N_m(P)}{D_n(P)}$$

onde  $N_m(P)$  e  $D_n(P)$  são polinômios em  $P$  de ordem  $m$  e  $n$  para o numerador e o denominador, respectivamente. Ao escolhermos a ordem (1,0), a expansão de (B.4) resultará na convencional aproximação paraxial escalar. Por sua vez, os aproximantes de ordem (1,1) conduzem a um formalismo de ângulo largo. É importante mencionar que aproximantes de Padé de ordens mais elevadas podem ser empregados, onde o preço a ser pago é um aumento no custo computacional.

Considerando o fato que ao lidarmos com a análise de estruturas tridimensionais o impacto computacional se torna um fator preponderante, métodos que aliviem esta restrição devem ser empregados, como por exemplo, técnicas de divisão do operador. Dentre estas técnicas destacam-se o ADI e o LOD. Neste trabalho, a expansão de (B.4) em diferenças finitas foi realizada por meio do emprego da técnica LOD juntamente ao FD-BPM (Método de propagação de feixe no domínio da frequência). A escolha por tal método deve-se ao fato que o sistema tridiagonal resultante é consideravelmente mais



simples de resolver quando comparado ao ADI, pelo fato que a cada passo de propagação apenas uma direção de propagação é considerada.

O método desenvolvido consiste em aplicar a técnica LOD em (B.4), fazendo uso dos aproximantes de Padé de ordem (1,1), resultando em dois passos de propagação da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \psi = -j \frac{\frac{P_x}{2\zeta}}{1 + \frac{P_x}{4\zeta^2}} \psi \quad (\text{B.5})$$

para o primeiro passo, e

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \psi = -j \frac{\frac{P_y}{2\zeta}}{1 + \frac{P_y}{4\zeta^2}} \psi \quad (\text{B.6})$$

para o segundo passo, onde:

$$P_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k_0^2 \left[ n(x,y)^2 - n_0^2 \right] \quad (\text{B.7})$$

Representa um operador transversal na direção x e

$$P_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} k_0^2 \left[ n(x,y)^2 - n_0^2 \right] \quad (\text{B.8})$$

representa um operador transversal na direção y.

Reescrevendo (B.5) e (B.6) em diferenças finitas resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{\psi_{x,y}^{t+(1/2)} - \psi_{x,y}^t}{\frac{\Delta z}{2}} = -j \frac{\frac{P_x}{2\zeta}}{1 + \frac{P_x}{4\zeta^2}} \cdot \left( \frac{\psi_{x,y}^{t+(1/2)} + \psi_{x,y}^t}{2} \right) \quad (\text{B.9})$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{\psi_{x,y}^{t+1} - \psi_{x,y}^{t+(1/2)}}{\frac{\Delta z}{2}} = -j \frac{\frac{P_y}{2\zeta}}{1 + \frac{P_y}{4\zeta^2}} \cdot \left( \frac{\psi_{x,y}^{t+1} + \psi_{x,y}^{t+(1/2)}}{2} \right) \quad (\text{B.10})$$

onde  $\psi_{x,y}^t$  representa a discretização da componente de campo com índices temporal, t, e índices espaciais, x e y. Os termos  $\psi_{x,y}$  são isolados nas equações (B.9) e (B.10), resultando em:

$$\psi_{x,y}^{t+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{j\Delta z}{4\zeta} \right] P_x \psi_{x,y}^{t+\frac{1}{2}} = \psi_{x,y}^t + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{j\Delta z}{4\zeta} \right] P_x \psi_{x,y}^t \quad (\text{B.11})$$

e

$$\psi_{x,y}^{t+1} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{j\Delta z}{4\zeta} \right] P_y \psi_{x,y}^{t+1} = \psi_{x,y}^{t+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{j\Delta z}{4\zeta} \right] P_y \psi_{x,y}^{t+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.12})$$

O esquema de Crank-Nicolson é agora aplicado aos operadores transversais em (B.7) (B.8) para tornar o formalismo incondicionalmente estável. Resultando em:

$$P_x = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{t+\frac{1}{2}} + L_x \Psi^t + \frac{1}{2} L_0 \Psi^{t+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} L_0 \Psi^t \right] \quad (\text{B.13})$$

e

$$P_y = \frac{1}{2} \left[ L_y \Psi^{t+1} + L_y \Psi^{t+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} L_0 \Psi^{t+1} + \frac{1}{2} L_0 \Psi^{t+\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.14})$$

onde,  $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  and  $L_0 = k_0^2 \left[ n(x,y)^2 - n_0^2 \right]$ .

O primeiro passo do LOD pode ser construído substituindo (B.13) em (B.11), resultando:

$$\theta \psi_{x-l,y}^{t+\frac{1}{2}} + \sigma \psi_{x,y}^{t+\frac{1}{2}} + \theta \psi_{x+l,y}^{t+\frac{1}{2}} = \gamma \psi_{x-l,y}^t + \nu \psi_{x-l,y}^t + \gamma \psi_{x+l,y}^{t+1} \quad (\text{B.15})$$

onde os coeficientes  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  e  $\nu$  são dados por:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\Delta x^2}(a^+ - a^-) \\ \sigma &= 1 - \frac{1}{\Delta x^2}(a^+ - a^-) + \frac{L_0}{4}(a^+ - a^-) \\ \gamma &= \frac{1}{2\Delta x^2}(a^- - a^+) \\ \nu &= 1 - \frac{1}{\Delta x^2}(a^- - a^+) + \frac{L_0}{4}(a^- - a^+)\end{aligned}$$

O segundo passo é obtido de forma similar pela substituição de (B.14) em (B.12), de onde resulta:

$$\alpha\psi_{x,y-1}^{t+1} + \eta\psi_{x,y}^{t+1} + \alpha\psi_{x,y+1}^{t+1} = \beta\psi_{x,y-1}^{t+\frac{1}{2}} + \gamma\psi_{x,y}^{t+\frac{1}{2}} + \beta\psi_{x,y+1}^{t+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.16})$$

onde os coeficientes  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  em (B.16) são dados por:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\Delta y^2}(a^+ - a^-) \\ \eta &= 1 - \frac{1}{\Delta y^2}(a^+ - a^-) + \frac{L_0}{4}(a^+ - a^-) \\ \beta &= \frac{1}{2\Delta y^2}(a^- - a^+) \\ \gamma &= 1 - \frac{1}{\Delta y^2}(a^- - a^+) + \frac{L_0}{4}(a^- - a^+)\end{aligned}$$

com

$$a^\pm = \left( \frac{1}{4\zeta^2} \pm \frac{j\Delta z}{4\zeta} \right)$$

A condição de contorno implementada na fronteira da janela computacional, a fim de evitar reflexões indesejadas, foi definida em termos da PML aplicada ao método de propagação de feixe BPM conforme proposto em [108]. A PML é inserida no formalis-

mo mediante uma transformação complexa das derivadas espaciais transversais representadas por  $L_x$  e  $L_y$  da seguinte forma:

$$L_x = \delta \frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$L_y = \delta \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\delta = \left( \frac{1}{1 - \frac{j\sigma}{\omega\mu_0}} \right)$$

onde:

Desta forma é possível truncar a janela computacional com uma camada absorvente de forma que esta apresente a mesma impedância característica do material de interesse

mediante a seguinte relação  $\frac{\sigma_{elétrica}}{\epsilon} = \frac{\sigma_{magnética}}{\mu}$ . Com isso esta camada PML permite que a energia incidente seja dissipada evitando que reflexões indesejadas retornem para o domínio computacional de interesse.

## APÊNDICE C – Análise de estabilidade e dispersão do método LOD-FDTD

### C.1 Estudo de estabilidade do Método LOD-FDTD

A estabilidade do método LOD-FDTD neste trabalho é investigada por meio do método de von Neumann baseado na análise de Fourier [90]. Neste tipo de análise, os valores instantâneos dos campos elétrico e magnético são transformados em ondas espaciais no domínio espectral. O esquema numérico do método LOD-FDTD pode ser representado de forma geral como sendo:

$$X^{n+1} = \Delta \cdot X^n$$

Por meio da análise dos autovalores de  $\Delta$  no domínio espectral é possível tirar conclusões sobre a estabilidade do método. Quando estes são menores ou iguais à unidade, o método é dito incondicionalmente estável. Sendo assim, este tipo de análise é imprescindível para averiguar se a ferramenta numérica utilizada no estudo de fenômenos de propagação eletromagnética causa amplificação numérica indesejada.

A análise de estabilidade parte das equações discretizadas que são utilizadas na implementação do LOD-FDTD. Para o primeiro passo do LOD-FDTD, temos as seguintes equações:

$$H_{z\left(i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}\right)}^{n+\frac{l}{2}} = H_{z\left(i+\frac{l}{2},j+\frac{l}{2}\right)}^n - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left( E_{y\left(i+l,j+\frac{l}{2}\right)}^{n+l} + E_{y\left(i+l,j+\frac{l}{2}\right)}^n - E_{y\left(i,j+\frac{l}{2}\right)}^{n+l} - E_{y\left(i,j+\frac{l}{2}\right)}^n \right) \quad (C.1)$$

e

$$\begin{aligned}
& -a_1 a_2 E_{y(i-1, j+\frac{1}{2})}^{n+1} + (1+2a_1 a_2) E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^{n+1} - a_1 a_2 E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^{n+1} = \\
& (1-2a_1 a_2) E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^n - 2a_1 \left( H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) + a_1 a_2 \left( E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^n + E_{y(i-1, j+\frac{1}{2})}^n \right)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

sendo que:

$$E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^{n+1} = E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^n - a_1 \left( H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) \tag{C.3}$$

$$E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^{n+1} = E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^n - a_1 \left( H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) \tag{C.4}$$

$$\text{onde: } a_1 = \frac{\Delta t}{2\varepsilon \Delta x} \text{ e } a_2 = \frac{\Delta t}{2\mu \Delta x}.$$

Substituindo (C.3) e (C.4) em (C.1), resulta:

$$\begin{aligned}
& H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} = H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \\
& -a_2 \left\{ \left[ E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^n - a_1 \left( H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) \right] + E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^n \right. \\
& \quad \left. - \left[ E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^n - a_1 \left( H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) \right] - E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^n \right\} \\
& H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - a_1 a_2 \left( H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} \right) + a_1 a_2 \left( H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} \right) = H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \\
& + a_1 a_2 \left( H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n + H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) - 2a_2 \left( E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^n - E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^n \right) \\
& -a_1 a_2 H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2a_1 a_2) H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - a_1 a_2 H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} = (1-2a_1 a_2) H_{z(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \\
& + a_1 a_2 \left( H_{z(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^n + H_{z(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n \right) - 2a_2 \left( E_{y(i+1, j+\frac{1}{2})}^n - E_{y(i, j+\frac{1}{2})}^n \right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Aplicando o método de Fourier  $\psi = \psi e^{ik_x j \Delta x} e^{ik_y j \Delta y}$  em (C.5) e expandindo, tem-se:

$$\begin{aligned}
& -a_1 a_2 \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}} e^{ik_x \left(j_1 - \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] + (1+2a_1 a_2) \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] \\
& -a_1 a_2 \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{3}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] = (1-2a_1 a_2) H_z^n e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \\
& + a_1 a_2 \left[ H_z^n e^{ik_x \left(j_1 + \frac{3}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} + H_z^n e^{ik_x \left(j_1 - \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] \\
& - 2a_2 \left[ E_y^n e^{ik_x (j_1 + 1) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} - E_y^n e^{ik_x (j_1) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] \\
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ -a_1 a_2 e^{-\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} H_z^{n+\frac{1}{2}} + [1+2a_1 a_2] H_z^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} - a_1 a_2 e^{\frac{3k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} H_z^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \\
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ [1-2a_1 a_2] H_z^n e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} \right. \\
& \left. + a_1 a_2 \left[ H_z^n e^{\frac{3k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} + H_z^n e^{-\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} \right] - 2a_2 \left[ E_y^n e^{ik_x \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} + E_y^n e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} \right] \right\} \\
& e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} \left\{ -a_1 a_2 e^{-ik_x \Delta x} H_z^{n+\frac{1}{2}} + [1+2a_1 a_2] H_z^{n+\frac{1}{2}} - a_1 a_2 e^{ik_x \Delta x} H_z^{n+\frac{1}{2}} \right\} = \\
& e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{\frac{k_y}{2} \Delta y} \left\{ [1-2a_1 a_2] H_z^n + a_1 a_2 H_z^n \left[ e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x} \right] - 2a_2 E_y^n \left[ e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} - e^{-\frac{k_x}{2} \Delta x} \right] \right\} \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ -a_1 a_2 e^{-ik_x \Delta x} + [1+2a_1 a_2] - a_1 a_2 e^{ik_x \Delta x} \right\} = \\
& H_z^n \left\{ [1-2a_1 a_2] + a_1 a_2 \left[ e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x} \right] \right\} - E_y^n \left[ 2a_2 \left( e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} - e^{-\frac{k_x}{2} \Delta x} \right) \right] \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ -a_1 a_2 \left( e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x} \right) + [1+2a_1 a_2] \right\} = \\
& H_z^n \left\{ [1-2a_1 a_2] + a_1 a_2 \left[ e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x} \right] \right\} - E_y^n \left[ 2a_2 \left( e^{\frac{k_x}{2} \Delta x} - e^{-\frac{k_x}{2} \Delta x} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ -a_1 a_2 \left[ 2 \cos(k_x \Delta x) \right] + [1 + 2a_1 a_2] \right\} = \\
& H_z^n \left\{ [1 - 2a_1 a_2] + a_1 a_2 \left[ 2 \cos(k_x \Delta x) \right] \right\} - E_y^n \left[ 2a_2 \left( 2j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) \right] \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ -2a_1 a_2 \left[ 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] + [1 + 2a_1 a_2] \right\} = \\
& H_z^n \left\{ [1 - 2a_1 a_2] + 2a_1 a_2 \left[ 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] \right\} - E_y^n \left( 4a_2 j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ \left[ 1 + 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] \right\} = \\
& H_z^n \left\{ \left[ 1 - 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] \right\} - E_y^n \left( 4a_2 j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} H_z^n - \frac{\left( 4a_2 j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right)}{\alpha_1} E_y^n
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\text{onde } \alpha_1 = \left[ 1 + 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] \text{ e } \alpha_2 = \left[ 1 - 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right].$$

Agora o método de Fourier  $\psi = \psi e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y}$  é aplicado em (C.2) que é expandida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ -a_1 a_2 e^{-ik_x \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} E_y^{n+1} + [1 + 2a_1 a_2] e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} E_y^{n+1} - a_1 a_2 e^{ik_x \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} E_y^{n+1} \right\} = \\
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ [1 - 2a_1 a_2] E_y^n e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} + a_1 a_2 E_y^n \left[ e^{ik_x \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} + e^{-ik_x \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} \right] \right. \\
& \left. - 2a_1 H_z^n \left[ e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} - e^{-i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} \right] \right\} \\
& e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} \left\{ -a_1 a_2 e^{-ik_x \Delta x} E_y^{n+1} + [1 + 2a_1 a_2] E_y^{n+1} - a_1 a_2 e^{ik_x \Delta x} E_y^{n+1} \right\} = \\
& e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} \left\{ [1 - 2a_1 a_2] E_y^n + a_1 a_2 E_y^n \left[ e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x} \right] \right. \\
& \left. - 2a_1 H_z^n \left[ e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} - e^{-i\frac{k_x}{2} \Delta x} \right] \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& E_y^{n+1} \left\{ -a_1 a_2 e^{-ik_x \Delta x} + [1 + 2a_1 a_2] - a_1 a_2 e^{ik_x \Delta x} \right\} = \\
& [1 - 2a_1 a_2] E_y^n + a_1 a_2 E_y^n [2 \cos(k_x \Delta x)] - 2a_1 H_z^n \left[ 2j \sin\left(\frac{k_x}{2} \Delta x\right) \right] \\
& E_y^{n+1} \left\{ -a_1 a_2 e^{-ik_x \Delta x} + [1 + 2a_1 a_2] - a_1 a_2 e^{ik_x \Delta x} \right\} = \\
& [1 - 2a_1 a_2 (1 - \cos(k_x \Delta x))] E_y^n - 4a_1 j \sin\left(\frac{k_x}{2} \Delta x\right) H_z^n \\
& E_y^{n+1} [-a_1 a_2 (2 \cos(k_x \Delta x)) + (1 + 2a_1 a_2)] = [1 - 2a_1 a_2 (1 - \cos(k_x \Delta x))] E_y^n - 4a_1 j \sin\left(\frac{k_x}{2} \Delta x\right) H_z^n \\
& E_y^{n+1} \left[ 1 + 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] = \left[ 1 - 2a_1 a_2 \left( 1 - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) \right] E_y^n - 4a_1 j \sin\left(\frac{k_x}{2} \Delta x\right) H_z^n \\
& E_y^{n+1} \left[ 1 + 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] = \left[ 1 - 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] E_y^n - 4a_1 j \sin\left(\frac{k_x}{2} \Delta x\right) H_z^n \\
& E_y^{n+1} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} E_y^n - \frac{\left( 4a_1 j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right)}{\alpha_3} H_z^n \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \alpha_3 = \left[ 1 + 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right] \text{ e } \alpha_4 = \left[ 1 - 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right].$$

O desenvolvimento para o segundo passo do LOD-FDTD é análogo ao realizado para o primeiro passo. Portanto, temos as seguintes equações:

$$H_z^{n+1} \left( z\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right) = H_z^{n+\frac{1}{2}} \left( z\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right) + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left( E_x^{n+1} \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) \right) + E_x^n \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) \right) - E_x^{n+1} \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right) - E_x^n \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right) \right) \tag{C.8}$$

e

$$\begin{aligned}
& -b_1 b_2 E_x^{n+1} \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j-1\right) \right) + (1 + 2b_1 b_2) E_x^{n+1} \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right) - b_1 b_2 E_x^{n+1} \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) \right) = \\
& (1 - 2b_1 b_2) E_x^n \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right) + b_1 b_2 \left( E_x^n \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) \right) + E_x^n \left( x\left(i+\frac{1}{2}, j-1\right) \right) \right) + 2b_2 \left( H_z^{n+\frac{1}{2}} \left( z\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left( z\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \right) \right) \tag{C.9}
\end{aligned}$$

sendo que:

$$E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{n+1} = E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y} \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} + H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{C.10})$$

$$E_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^{n+1} = E_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y} \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+1} + H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{C.11})$$

onde:  $b_1 = \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}$  e  $b_2 = \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}$ .

Substituindo (C.10) e (C.11) em (C.8), resulta:

$$\begin{aligned} & H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} = H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \\ & + b_1 \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} & E_{x\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^n + \\ & b_2 \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+1} + H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] + E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n \\ & - \left[ \begin{aligned} & E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n \\ & + b_2 \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} + H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] - E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n \end{aligned} \right\} \\ & H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - b_1 b_2 \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+1} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} \right) + b_1 b_2 \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+1} \right) = H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \\ & + b_1 b_2 \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} + H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) + 2b_1 \left( E_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^n - E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n \right) \\ & - b_1 b_2 H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+1} + (1 + 2b_1 b_2) H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}^{n+1} - b_1 b_2 H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+1} = (1 - 2b_1 b_2) I \\ & + b_1 b_2 \left( H_{z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} + H_{z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}^{n+\frac{1}{2}} \right) + 2b_1 \left( E_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^n - E_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^n \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aplicando o método de Fourier  $\psi = \psi e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y}$  em (C.9) e expandindo:

$$\begin{aligned}
& -b_1 b_2 \left[ H_z^{n+1} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 - \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] + (1 + 2b_1 b_2) \left[ H_z^{n+1} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] \\
& -b_1 b_2 \left[ H_z^{n+1} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{3}{2}\right) \Delta y} \right] = (1 - 2b_1 b_2) H_z^{n + \frac{1}{2}} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{1}{2}\right) \Delta y} \\
& + b_1 b_2 \left[ H_z^{n + \frac{1}{2}} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 + \frac{3}{2}\right) \Delta y} + H_z^{n + \frac{1}{2}} e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y \left(j_2 - \frac{1}{2}\right) \Delta y} \right] \\
& + 2b_1 E_x^n \left[ e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y (j_2 + 1) \Delta y} - e^{ik_x \left(j_1 + \frac{1}{2}\right) \Delta x} e^{ik_y (j_2) \Delta y} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ -b_1 b_2 e^{+i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{-i \frac{k_y}{2} \Delta y} H_z^{n+1} + \right. \\
& \left. (1 + 2b_1 b_2) H_z^{n+1} e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i \frac{k_y}{2} \Delta y} - b_1 b_2 e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i \frac{3k_y}{2} \Delta y} H_z^{n+1} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] H_z^{n + \frac{1}{2}} e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i \frac{k_y}{2} \Delta y} \right. \\
& \left. + b_1 b_2 H_z^{n + \frac{1}{2}} \left[ e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i \frac{3k_y}{2} \Delta y} + e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{-i \frac{k_y}{2} \Delta y} \right] + 2b_1 E_x^n \left[ e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{ik_y \Delta y} - e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i \frac{k_y}{2} \Delta y} \left\{ -b_1 b_2 e^{-ik_y \Delta y} H_z^{n+1} + [1 + 2b_1 b_2] H_z^{n+1} - b_1 b_2 e^{ik_y \Delta y} H_z^{n+1} \right\} =$$

$$e^{i \frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i \frac{k_y}{2} \Delta y} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] H_z^{n + \frac{1}{2}} + b_1 b_2 H_z^{n + \frac{1}{2}} \left[ e^{ik_y \Delta y} + e^{-ik_y \Delta y} \right] + 2b_1 E_x^n \left[ e^{i \frac{k_y}{2} \Delta y} - e^{-i \frac{k_y}{2} \Delta y} \right] \right\}$$

$$H_z^{n+1} \left\{ -b_1 b_2 \left( e^{ik_y \Delta y} + e^{-ik_y \Delta y} \right) + [1 + 2b_1 b_2] \right\} =$$

$$H_z^{n + \frac{1}{2}} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] + b_1 b_2 \left[ e^{ik_y \Delta y} + e^{-ik_y \Delta y} \right] \right\} + E_x^n \left[ 2b_1 \left( e^{i \frac{k_y}{2} \Delta y} - e^{-i \frac{k_y}{2} \Delta y} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& H_z^{n+1} \left\{ -b_1 b_2 \left[ 2 \cos(k_y \Delta y) \right] + [1 + 2b_1 b_2] \right\} = \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] + b_1 b_2 \left[ 2 \cos(k_y \Delta y) \right] \right\} + E_x^n \left[ 2b_1 \left( 2j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) \right] \\
& H_z^{n+1} \left\{ -2b_1 b_2 \left[ 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right] + [1 + 2b_1 b_2] \right\} = \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] + 2b_1 b_2 \left[ 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right] \right\} - E_x^n \left( 4b_1 j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) \\
& H_z^{n+1} \left\{ \left[ 1 + 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right] \right\} = \\
& H_z^{n+\frac{1}{2}} \left\{ \left[ 1 - 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right] \right\} - E_x^n \left( 4b_1 j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) \\
& H_z^{n+1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} H_z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\left( 4b_1 j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right)}{\beta_1} E_x^n \tag{C.10}
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \beta_1 = \left[ 1 + 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right] \text{ e } \beta_2 = \left[ 1 - 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right].$$

Agora o método de Fourier  $\psi = \psi e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y}$  é aplicado em (C.9), resultando na seguinte expansão:

$$\begin{aligned}
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ -b_1 b_2 e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{-ik_y \Delta y} E_x^{n+1} \right. \\
& \left. + (1 + 2b_1 b_2) e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} E_x^{n+1} - b_1 b_2 e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{ik_y \Delta y} E_x^{n+1} \right\} = \\
& e^{ik_x j_1 \Delta x} e^{ik_y j_2 \Delta y} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} E_x^n + \right. \\
& \left. b_1 b_2 E_x^n \left[ e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{ik_y \Delta y} + e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{-ik_y \Delta y} \right] + 2b_2 H_z^n \left[ e^{i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{i\frac{k_y}{2} \Delta y} - e^{+i\frac{k_x}{2} \Delta x} e^{-i\frac{k_y}{2} \Delta y} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{i k_x \Delta x}{2}} \left\{ -b_1 b_2 e^{-i k_y \Delta y} E_x^{n+1} + [1 + 2b_1 b_2] E_x^{n+1} - b_1 b_2 e^{i k_y \Delta y} E_x^{n+1} \right\} = \\
& e^{\frac{i k_x \Delta x}{2}} \left\{ [1 - 2b_1 b_2] E_x^n + b_1 b_2 E_x^n \left[ e^{i k_y \Delta y} + e^{-i k_y \Delta y} \right] + 2b_2 H_z^n \left[ e^{\frac{i k_y \Delta y}{2}} - e^{-\frac{i k_y \Delta y}{2}} \right] \right\} \\
& E_x^{n+1} \left\{ -b_1 b_2 e^{-i k_y \Delta y} + [1 + 2b_1 b_2] - b_1 b_2 e^{i k_y \Delta y} \right\} = \\
& [1 - 2b_1 b_2] E_x^n + b_1 b_2 E_x^n \left[ 2 \cos(k_y \Delta y) \right] + 2b_2 H_z^n \left[ 2j \sin\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) \right] \\
& E_x^{n+1} \left\{ -b_1 b_2 e^{-i k_y \Delta y} + [1 + 2b_1 b_2] - b_1 b_2 e^{i k_y \Delta y} \right\} = \\
& \left[ (1 - 2b_1 b_2) + 2b_1 b_2 \left( 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) \right) \right] E_x^n + 4b_2 j \sin\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) H_z^n \\
& E_x^{n+1} \left[ -2b_1 b_2 \left( 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) \right) + (1 + 2b_1 b_2) \right] = \left( 1 - 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) \right) E_x^n + 4b_2 j \sin\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) H_z^n \\
& E_x^{n+1} \left( 1 + 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) \right) = \left( 1 - 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) \right) E_x^n + 4b_2 j \sin\left(\frac{k_y}{2} \Delta y\right) H_z^n \\
& E_x^{n+1} = \frac{\beta_4}{\beta_3} E_x^n + \frac{\left( 4b_2 j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right)}{\beta_3} H_z^n \tag{C.11}
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \beta_3 = \left[ 1 + 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right] \text{ e } \beta_4 = \left[ 1 - 4b_1 b_2 \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right].$$

Escrevendo as equações (C.6)-(C.7) e (C.10)-(C.11) em forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} E_y^{n+1} \\ H_z^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_4}{\alpha_3} & -\frac{4ja_1}{\alpha_3} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \\ -\frac{4ja_2}{\alpha_3} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^n \\ H_z^n \end{bmatrix} \tag{C.12}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ H_z^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_4}{\beta_3} & \frac{4jb_2}{\beta_3} \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \\ \frac{4jb_1}{\beta_1} \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) & \frac{\beta_2}{\beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^n \\ H_z^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{C.13}$$

Os termos das matrizes são expandidos e reescritos da seguinte forma:

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{1 - 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{1 + 4a_1 a_2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)} = \frac{1 - 4 \frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{1 + 4 \frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{1 + \frac{\Delta t^2}{\mu\epsilon\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}$$

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{1 - \frac{W_\alpha^2}{\mu\epsilon}}{1 + \frac{W_\alpha^2}{\mu\epsilon}}, \text{ chamando } Q_1 = 1 + \frac{W_\alpha^2}{\mu\epsilon} \text{ e } Q_2 = 1 - \frac{W_\alpha^2}{\mu\epsilon},$$

$$\text{onde } W_\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \text{ e } \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

Como os autovalores são calculados a partir do determinante de  $\Delta$ , é interessante que essa matriz não tenha dimensão, de forma a torná-la melhor condicionada. Isso evita que  $|\Delta| = 0$ , ou seja, que  $\Delta$  não seja uma matriz singular. Por exemplo, analisando os termos  $a_{12}$  e  $a_{21}$  das matrizes anteriores (C.12)-(C.13), pode-se verificar que estes possuem dimensão de (V/A) como é demonstrado a seguir:

$$a_{12} = -\frac{4ja_1 \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{\alpha_3} = -\frac{4\Delta t}{2\epsilon\Delta x} j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \quad (\text{C.14})$$

Aplicando a análise dimensional em (C.14), resulta:

$$a_{12} = -\frac{s}{\frac{F}{m} \cdot m} = -\frac{s}{F} = -\frac{s}{\frac{C}{V}} = -s \frac{V}{C} = -\frac{sV}{As} = -\frac{V}{A}$$

Para contornar este problema, as matrizes (C.12)-(C.13) são reescritas utilizando a relação de impedância intrínseca do meio  $\eta_0$ , onde  $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{E}{H}$ , o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} E_y^{n+1} \\ \left(\eta_0 H_z^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{2x}}{Q_{1x}} & -\frac{2jW_x}{Q_{1x}\mu\eta_0} \\ -\frac{2jW_x\eta_0}{Q_{1x}\mu} & \frac{Q_{2x}}{Q_{1x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^n \\ \left(\eta_0 H_z^n\right) \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

e

$$\begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ (\eta_0 H_z^{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{2y}}{Q_{1y}} & \frac{2jW_y}{Q_{1y}\mu\eta_0} \\ \frac{2jW_y\eta_0}{Q_{1y}\mu} & \frac{Q_{2y}}{Q_{1y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ (\eta_0 H_z^{n+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

com este artifício matemático, os termos  $a_{12}$  e  $a_{21}$  presentes em (C.15)-(C.16) tornam-se adimensionais, como é demonstrado a seguir:

$$a_{12} = -\frac{2jW_x}{Q_{1x}\varepsilon\eta_0} = -\frac{2j}{Q_{1x}\varepsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = -\frac{2j}{Q_{1x}\varepsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}}$$

$$a_{12} = -\frac{2j}{Q_{1x}\varepsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = -\frac{2j}{Q_{1x}} \frac{\Delta t}{\Delta x} c \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)$$

$$a_{21} = -\frac{2jW_x\eta_0}{Q_{1x}\mu_0} = -\frac{2j}{Q_{1x}\mu_0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = -\frac{2j}{Q_{1x}\mu_0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_0}}$$

$$a_{21} = -\frac{2j}{Q_{1x}\mu_0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = -\frac{2j}{Q_{1x}} \frac{\Delta t}{\Delta x} c \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)$$

Com a finalidade de simplificar a notação utilizada no formalismo, (C.15)-(C.16) podem igualmente ser representadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E_y^{n+1} \\ (\eta_0 H_z^{n+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{2x}}{Q_{1x}} & -\frac{2jcW_x}{Q_{1x}} \\ -\frac{2jcW_x}{Q_{1x}} & \frac{Q_{2x}}{Q_{1x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^n \\ (\eta_0 H_z^n) \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

e

$$\begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ (\eta_0 H_z^{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{2y}}{Q_{1y}} & \frac{2jcW_y}{Q_{1y}} \\ \frac{2jW_y}{Q_{1y}} & \frac{Q_{2y}}{Q_{1y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^n \\ (\eta_0 H_z^{n+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

onde  $W_\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} c \sin\left(\frac{k_\alpha\Delta\alpha}{2}\right)$ ,  $Q_\alpha = 1 + \frac{W_\alpha^2}{\mu_0\varepsilon_0}$  e  $\alpha = x, y$ .

Para a realização da análise de estabilidade do método LOD-FDTD é necessário se obter o módulo dos autovalores de  $\Delta$  do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} E_y \\ E_x \\ (\eta_0 H_z) \end{bmatrix}^{n+1} = [\Delta] \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \\ (\eta_0 H_z) \end{bmatrix}^n$$

Para isso, (C.17)-(C.18) são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E_y^{n+1} \\ (\eta_0 H_z)^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^n \\ (\eta_0 H_z)^n \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ (\eta_0 H_z)^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^n \\ (\eta_0 H_z)^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Então, o termo  $(\eta_0 H_z)^{n+\frac{1}{2}} = a_{21}E_y^n + a_{22}(\eta_0 H_z)^n$  é substituído em (C.20), o que resulta em:

$$\begin{aligned} (\eta_0 H_z)^{n+1} &= b_{21}E_x^n + b_{22} \left( a_{21}E_y^n + a_{22}(\eta_0 H_z)^n \right) \\ (\eta_0 H_z)^{n+1} &= b_{21}E_x^n + b_{22}a_{21}E_y^n + b_{22}a_{22}(\eta_0 H_z)^n \end{aligned}$$

O sistema de equações resultantes para as componentes em análise é dado por:

$$E_y^{n+1} = a_{11}E_y^n + a_{12}(\eta_0 H_z)^n$$

$$E_x^{n+1} = b_{11}E_x^n + b_{12}a_{21}E_y^n + b_{12}a_{22}(\eta_0 H_z)^n$$

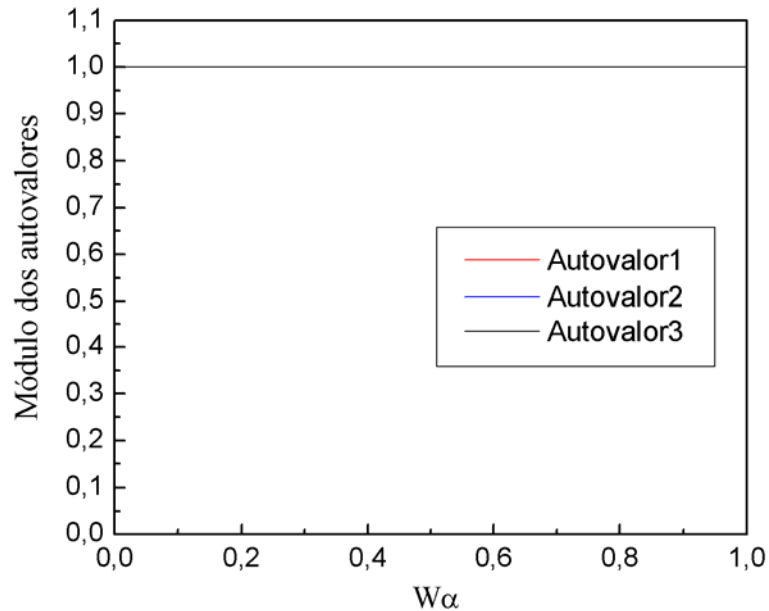
$$(\eta_0 H_z)^{n+1} = b_{21}E_x^n + b_{22}a_{21}E_y^n + b_{22}a_{22}(\eta_0 H_z)^n$$

Escrevendo em forma matricial resulta:



$$\begin{bmatrix} E_y^{n+1} \\ E_x^{n+1} \\ (\eta_0 H_z^{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{2x}}{Q_{1x}} & 0 & -2jc \frac{W_x}{Q_{1x}} \\ \frac{4c^2 W_y W_x}{Q_{1y} Q_x} & \frac{Q_{2y}}{Q_{1y}} & 2jc \frac{W_y Q_{2x}}{Q_{1y} Q_{1x}} \\ -2jc \frac{W_x Q_{2y}}{Q_{1x} Q_{1y}} & 2jc \frac{W_y}{Q_{1y}} & \frac{Q_{2y} Q_{2x}}{Q_{1y} Q_{1x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^n \\ E_x^n \\ (\eta_0 H_z^n) \end{bmatrix} \quad (C.21)$$

A análise de estabilidade do método LOD-FDTD é realizada conforme o proposto por Zheng [60] para o caso ADI-FDTD. A FIGURA C1 mostra o módulo dos autovalores obtidos a partir da matriz  $\Delta$  em função do valor  $W_\alpha$ .



**FIGURA C1:** Módulos dos autovalores resultantes da matriz  $\Delta$  em função do parâmetro  $W_\alpha$ .

Como pode ser visto por esta figura, o módulo dos autovalores da matriz  $\Delta$  apresentam valor unitário. Portanto, o método LOD-FDTD é incondicionalmente estável e também não dissipativo.

## C.2 Estudo de dispersão numérica do método LOD-FDTD

O estudo de dispersão numérica do método LOD-FDTD é muito importante, visto que algoritmos baseados nas equações de Maxwell apresentam dispersão dos modos simulados na janela computacional [44]. Esta dispersão se caracteriza pelo fato da velocidade de fase dos modos diferirem da velocidade da luz no vácuo,  $c$ . Os fatores que

influenciam para que ocorram velocidades de fase diferentes para os modos são: variação do comprimento de onda, direção de propagação na malha e resolução espacial da malha.

A análise de dispersão numérica realizada para o método LOD-FDTD segue procedimento análogo ao realizado por Zheng [103] para análise dispersão numérica do ADI-FDTD. A derivação do procedimento para o cálculo de dispersão numérica é realizada considerando (C.21) da seguinte forma:

$$X^{n+1} = \Delta X^n \quad (C.22)$$

$$\text{onde } X^n = \begin{bmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ H_z^n \end{bmatrix} \text{ e } X^n = X e^{j\omega\Delta t n}.$$

Então, (C.22) é escrita da seguinte forma:

$$\left( e^{j\omega\Delta t} I - \Delta \right) X = 0 \quad (C.23)$$

onde I representa uma matriz identidade de dimensão 3x3. Para a solução não trivial de (C.23), o determinante da matriz de coeficientes deve ser igualado a zero como segue:

$$\text{determinante} \left( e^{j\omega\Delta t} I - \Delta \right) = 0 \quad (C.23)$$

A expressão resultante obtida de (C.23) é utilizada na análise de dispersão numérica do método LOD-FDTD. Para a análise de dispersão numérica do método LOD-FDTD os parâmetros considerados nas simulações foram os mesmos utilizados em [104] para a análise do método ADI-FDTD. Este estudo foi realizado considerando um caso bidimensional para polarização TE (Hz, Ex, Ey),  $\Delta x = \Delta y = \lambda / 50$ , sendo utilizado os valores de CFLN=2, 4, 6 e 8 em função da variação do ângulo de propagação. A FIGURA C2 mostra os resultados de dispersão numérica obtidas para o método LOD-FDTD, onde fica claro que o aumento do valor CFLN implica em uma diminuição da precisão.

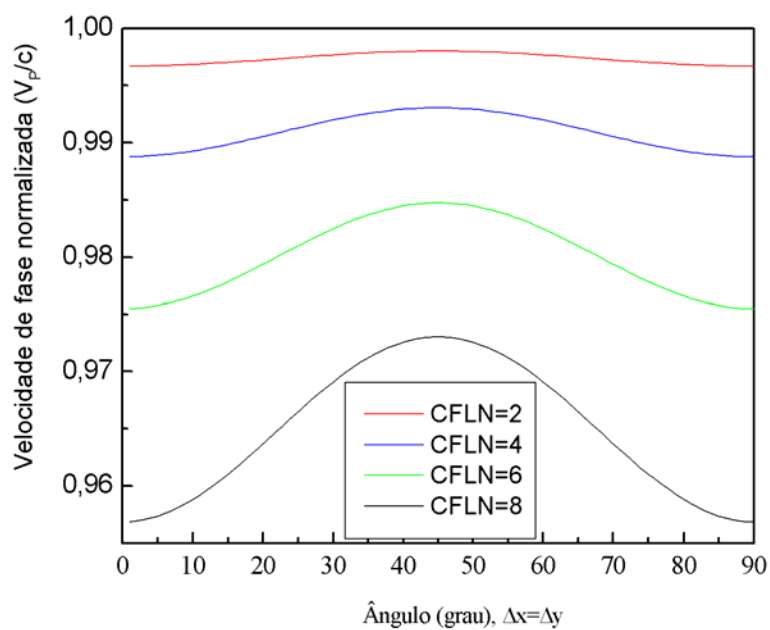


FIGURA C2: Dispersão numérica em função do ângulo de propagação para valores de CFLN=2,4,6 e 8.

Os resultados mostrados na FIGURA C2 apresentam uma excelente concordância com aqueles obtidos em [104] para o método ADI-FDTD. Portanto, a eficácia do método LOD-FDTD foi demonstrada, o que permite a sua ampla utilização em estudos de propagação eletromagnética.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] V.G. Veselago, “Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of Sigma and Mu”, *Sov. Phys. USPEKHI*, no. 10, pp. 509, 1968.
- [2] W. Rotman, “Plasma Simulation by Artificial Dielectrics and Parallel-Plate Media”, *IRE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP10, no. 82, pp. 82-95, Janeiro de 1962.
- [3] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, e W. J. Stewart, “Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena”, *IEEE Trans. Microwave Theory Technol.* 47, 2075-2084, Novembro de 1999.
- [4] D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, e S. Schultz, “Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity”, *Physical Rev. Lett.*, vol 84, no. 18, pp. 4184-4187, Maio de 2000.
- [5] D. R. Smith, D. C. Vier, N. Kroll, e S. Schultz, “Direct Calculation of Permeability and Permittivity for a Left-Handed Metamaterial”, *Applied Physics Letters*, vol. 77, no. 14, pp. 2246-2248, 2 Outubro de 2000.
- [6] R. Shelby, D. R. Smith, S. Schultz, “Experimental verification of a negative index of refraction”, *Science*, vol. 292, 2001.

- [7] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, "Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial", *Applied Physics Letters*, vol. 78, no. 4, pp. 489-491, Janeiro 2001.
- [8] Richard W. Ziolkowski e Ehud Heyman, "Wave Propagation in Media Having Negative Permittivity and Permeability", *Physical Review E*, vol. 64, pp. 1-15, 2001.
- [9] D. Correia, e J. M. Jin, "Theoretical Analysis of Left-Handed Metamaterials Using FDTD-PML Method", *International Microwave and Optoelectronics Conference*, vol. 2, pp. 1033-1036, 2003.
- [10] R. Ziolkowski, "Pulsed and CW Gaussian beam interactions with double negative metamaterial slabs", *Optics Express*, vol. 11, no. 7, pp. 662-681, Abril de 2003.
- [11] R. Ziolkowski, "Propagation in and scattering from a matched metamaterial having a zero index of refraction", *Physical Review E*, vol. 70, Outubro de 2004.
- [12] C. Caloz, C.-C. Chang, e T. Itoh, "Full-wave verification of the fundamental properties of left-handed materials in waveguide configurations", *J. Appl. Phys.*, vol. 90, no. 11, pp. 5483-5486, 1 Dezembro de 2001.
- [13] Philippe Gay-Balmaz and Olivier J. F. Martina, J., "Electromagnetic Resonances in Individual e Coupled Split-Ring Resonators", *Applied Physics Letters*, vol. 92, no. 5, 1 Setembro de 2002.
- [14] G. V. Eleftheriades, A. K. Iyer, and P. C. Kremer, "Planar Negative Refractive Index Media Using Periodically L-C Loaded Transmission Lines," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 50, no. 12, pp. 2702-2712, Dezembro de 2002.
- [15] C. Caloz e T. Itho, "Transmission Line Approach of Left-Handed (LH) Materials and Microstrip Implementation of an Artificial LH Transmission Line," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 5, pp. 1159-1166, Maio de 2004.

- [16] N. C. Panoiu e R. M. Osgood Jr, "Numerical investigation of negative refractive index metamaterials at infrared and optical frequencies," *Opt. Commun.*, vol. 223, pp. 331-337, 2003.
- [17] A. F. Starr, P. M. Rye, D. R. Smith e S. Nemat-Nasser, "Fabrication and characterization of a negative-refractive-index composite metamaterial", *Physical Review B*, vol. 70, 2004.
- [18] R. B. Gregor, C. G. Parallozy, J. A. Nielsen, M. A. Thompson, M. H. Tanielian e D. R. Smith, "Simulation and Testing of a Graded Negative Index of Refraction lens", *Applied Physics Letters*, vol. 87, 2005.
- [19] G. Dooling, C. Enkrich, M. Wegener, C. M. Soukolis e Stefan Linden, "Simultaneous Negative Phase and Group Velocity of Light in a Metamaterial", *Science*, vol. 312, Maio de 2006.
- [20] R. Liu, A. Degiron, J. J. Mock e D. R. Smith, "Negative index material composed of electric and magnetic resonators", *Applied Physics Letters*, vol 90, 2007.
- [21] J. B. Pendry, "Negative Refraction Makes a Perfect Lens," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, Outubro de 2000.
- [22] N. Garcia and M. N. Vesperinas, "Left-Handed materials do not make perfect lens," *Physical Rev. Lett.*, vol. 88 no. 20, pp. 207402-1-207403-4, 2001.
- [23] P. M. Valanju, R. M. Walser e A. P. Valanju, "Wave Refraction in Negative-Index Media: Always Positive and Very Inhomogeneous", *Physical Rev. Lett.*, vol. 88, no. 18, Maio de 2002.
- [24] P. Kolinko e D. R. Smith, "Numerical study of electromagnetic waves interacting with negative index materials", *Optics Express*, vol. 11, no. 7, pp. 640-648, Abril de 2003.

- [25] D. R. Smith, D. Shurig, M. Rosenbluth, S. Shultz, S. Anantha e J. B. Pendry, “Limitations on sub-diffraction imaging with a negative index slab”, *Appl. Phys. Lett.* in press, 2003.
- [26] N. Fang e X. Zhang, “Imaging Properties of a Metamaterial Superlens”, *IEEE-NANO*, Agosto de 2002.
- [27] F. Mesa, M. J. Freire, R. Marqués e J. D. Baena, “Three-dimensional superresolution in metamaterial slab lenses: Experiment and Theory”, *Physical Review B*, 2005.
- [28] K. Aydin e I. Bulu, “Focusing of Electromagnetic waves by a left-handed metamaterial flat lens”, *Optics Express*, vol. 13, no. 22, pp. 8753-8759, Outubro de 2005.
- [29] D. R. Smith, “How to build a superlens”, *Science*, vol. 308, Abril de 2005.
- [30] Metamaterial Special Issue, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 51, no. 10, Outubro de 2003.
- [31] Especial Issue, *Opt. Express*, vol 11. no. 7, Abril de 2003.
- [32] Especial Issue, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 19, Março de 2006.
- [33] “Breakthrough of the year: The runners-up”, *Science*, vol. 314, no. 5807, pp. 1850-1855, Dezembro de 2006.
- [34] S. A. Cummer, “Perfectly Matched Layer Behavior in Negative Refractive Index Materials”, *IEEE Antennas and Wireless Propagat. Lett.*, vol 3. pp. 172-175, 2004.

- [35] J. J. Chen, T. M. Grzegorzczuk, B. I. Wu and J. A. Kong, "Limitation of FDTD in simulation of a perfect lens imaging system", *Optics Express*, vol. 13, no. 26, pp. 10840-10845, Dec. 2005.
- [36] Y. Zhao, P. Belov e Y. Hao, "Improvement of numerical accuracy in FDTD modelling of left-handed materials", *IEE Conference Proceedings: Metamaterials for Microwave and (Sub) Millimetrewave Applications: Electromagnetic Bandgap and Double Negative Design, Structures, Devices and Experimental Validation*, pp. 153-157, Setembro de 2006.
- [37] M. Okoniewski e E. Okoniewska, "Drude dispersion in ADE FDTD revisited", *Electronics Letters on line*, Fevereiro de 2006.
- [38] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302-307, Maio de 1966.
- [39] K. L. Shlager e J. B. Schneider, "A Selective Survey of the Finite-Difference Time-Domain Literature", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 4, pp. 39-56, 1995.
- [40] M. D. Feit, e J. A. Fleck, Jr, "Light propagation in graded-index optical fibers," *Appl. Optics*, vol. 17, no. 24, pp. 3990-3998 Dezembro 1978.
- [41] D. Yevick, "New formulations of the matrix beam propagation method: application to rib waveguides," *IEEE J. Quantum Electron*, vol. 25, no. 2, pp. 221-229, Fevereiro de 1989.
- [42] L. D. S. Alcantara, F. L. Teixeira, A. C. César, e B.H. V. Borges, "An improved wide-angle FD-BPM for nonlinear and nonreciprocal waveguides" *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 3, pp. 1223-1226, Maio de 2003.



- [43] W. P. Huang, C. L. Xu, e J.Chrostowski, “ A time-domain propagation scheme for simulation of dynamics of optical guided-wave devices”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 5, no. 9, pp. 1071-1073, Setembro, 1993.
- [44] A. Taflove, *Computational Electrodynamics*. Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [45] R. Y. Chan, and J. M. Liu, “Time-domain wave propagation in optical structures,” *Photon. Technol. Lett.*, vol. 6, no. 8, pp. 1001-1003, August 1994.
- [46] M. Koshiba, Y. Tsuji, e Masafumi Hikari, “Time-domain Beam propagation method and its application to photonic crystal circuits,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 18, no.1, pp. 102-110, Janeiro de 2000.
- [47] V. F. Rodríguez-Esquerre, e H. E. Hernández-Figueroa, “Novel time-domain step-by-step scheme for integrated optical applications,” *Photon. Technol. Lett.*, vol. 13, no. 4, pp. 311-313, Abril de 2001.
- [48] H. M. Masoudi, M. A. Alsunaidi, e J. M. Arnold, “Time-domain finite-difference beam propagation,” *Photon. Technol. Lett.*, vol. 11, no. 10, pp. 1274-1276, Outubro de 1999.
- [49] J. Shibayama, T. Takahashi, J. Yamauchi, e H. Nakano, “Efficient time-domain finite-difference beam propagation method for the analysis of slab and circularly symmetric waveguides”, *Journal of Lightwave Technology*, vol.18, no. 3, pp. 437-442, Março de 2000.
- [50] S. Balsamo, F. Sartori, e I. Montrosset, “Dynamic beam propagation method for flared semiconductor power amplifiers”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 2, no. 2, pp. 378-384, Junho de 1996.
- [51] P. L. Liu, Q. Zhao, e F. S. Choa, “Slow-wave finite-difference beam method”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 7, no. 8, pp. 890-892, Agosto de 1995.

- [52] G. H. Jin, J. Hanari, J. P. Vilcot, e D. Decoster, “An improved time-domain beam propagation method for integrated optics components”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 9, no. 3, pp. 348-350, Março de 1997.
- [53] V. F. Rodríguez-Esquerre e H. E. Hernández-Figueroa, “Novel wave propagation scheme for the time domain simulation of photonic devices”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 13, pp. 311-313, Abril de 2001.
- [54] Peaceman, D. W., and Hatchford, H. H. Jr, “The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic differential equations,” *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 3, (1), pp. 28-41, 1955.
- [55] A. R. Mitchell, “Computational Methods in Partial Differential Equations”, *John Wiley & Sons*, 1969.
- [56] N. N. Yanenko, “On the difference method for the calculation of multidimensional heat conduction equations (Russian)”, *Dokl. Akad. Match. Soc.*, vol. 82, pp. 1207-1210, 1959.
- [57] V. J. Brankovic, D. V. Krupezevic, e F. Arndt, “An efficient two-dimensional graded mesh finite-difference time-domain algorithm for shielded or open waveguide structures,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, pp. 2272–2277, Dezembro de 1992.
- [58] A. C. Cangellaris, “Numerical stability and numerical dispersion of a compact 2D-FDTD method used for the dispersion analysis of waveguides,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 3, pp. 3-5, Janeiro de 1993.
- [59] T. Namiki, “A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method,” *IEEE Trans. Microwave Theory Technol.*, vol. 47, no. 10, pp. 2003-2007, Outubro de 1999.

- [60] F. Zheng, Z. Chen e J. Zhang, "Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain method" *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 48, no. 9, Setembro de 2000.
- [61] Y. L. Hsueh, M. C. Yang e H. C. Chang, "Tree-Dimensional Noniterative Full-Vectorial Beam Propagation Method based on the Alternating Direction Implicit Method", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, no. 11, pp. 2389-2397, Novembro de 1999.
- [62] G.R. Hadley, "Transparent boundary condition for the beam propagation method," *Optics Letters*, vol. 16, no. 9, pp. 624-626, Maio de 1991.
- [63] B. Engquist e A. Majda, " Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves," *Mathematics of computation*, vol. 31, pp. 629-651, 1997.
- [64] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 23, pp. 377-382, Novembro de 1981.
- [65] J. P Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. of comput. Phys.*, vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [66] S. Wang, "On the current source implementation for the ADI-FDTD Method," *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, vol.14, no. 11, pp. 513-515, Novembro de 2004.
- [67] S. Gonzalez-Garcia, T. W. Lee, and S. C. Hagness, "On the accuracy of the ADI-FDTD method," *IEEE Antennas Wireless Lett.*, vol. 1, pp. 31-34, 2002.
- [68] B. Donderici e F. L. Teixeira, " Symmetric source implementation for the ADI-FDTD method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 53. no. 4, Abril de 2005.

- [69] A. P. Zhao, "Two special notes on the implementation of the unconditionally stable ADI-FDTD method," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 33, no.4, pp. 273-277, Maio 2002.
- [70] Y. Yang, R. S. Chen, W. C. Tang, K. Sha, and E. K. N. Yung, "Analysis of Planar Circuits Using an Unconditionally Stable 3D ADIFDTD Method," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 46, no. 2, Julho de 2005.
- [71] G. Liu e S. D. Gedney, "Perfectly matched layer media for an unconditionally stable three-dimensional ADI-FDTD method," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 10, pp. 261-263, Julho de 2000.
- [72] S. Wang e F. L. Teixeira, "An efficient PML implementation for the ADI-FDTD method," *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, vol. 13, pp. 72-74, Fevereiro de 2003.
- [73] S. G. Garcia, R. G. Rubio, A. R. Bretones e R. G. Martín, "Extension of the ADI-FDTD Method to Debye Media", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 11, Novembro de 2003.
- [74] X. T. Dong, N. V. Venkatarayalu, B. Guo, W. Y. Yin, e Y. B. Gan, "General Formulation of Unconditionally Stable ADI-FDTD Method in Linear Dispersive Media", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 52, no. 1, pp. 170- 174, Janeiro de 2004.
- [75] O. Ramadan, "Unconditionally Stable ADI-FDTD Implementation of PML for frequency dispersive Debye Media", *Electronics Letters*, vol. 40, no. 4, Fevereiro de 2004.
- [76] H. Rao, R. Scarmozzino e R. M. Osgood, "An improved ADI-FDTD Method and Its Application to Photonic Simulations", *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 14, no. 4, pp. 477-479, Abril de 2002.

- [77] Shumin Wang e. Fernando L. Teixeira e Ji Chen, "An Iterative ADI-FDTD With Reduced Splitting Error", *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 15, no. 2, pp. 92-94, Fevereiro de 2005.
- [78] I. Ahmed e Z. Chen, "Dispersion-error optimized ADI-FDTD", *Proc. IEEE Microw. Theory, Technol. Symp.*, pp. 173-176, 2006.
- [79] N. V. Kantartzis e T. D Tsiboukis, "Rigorous ADI-FDTD Analysis of Left-Handed Materials in Optimally-Designed EMC Applications", XII International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Baiona, Spain, Setembro de 2005.
- [80] N. V. Kantartzis, D. L. Sounas, C. S. Antonopoulos e T. D Tsiboukis, "A Wide-Band ADI-FDTD Algorithm for the Design of Double Negative Metamaterial-Based Waveguides and Antenna Substrates", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 43, no. 4, pp. 1329-1332, Abril de 2007.
- [81] R. W. Ziolkowisk, "Pulsed and CW gaussian beam interactions with double negative metamaterial slabs," *Opt. Express*, vol. 11, no. 7, pp. 449-454, Abril de 2003.
- [82] Y. Tsuji, M. Koshiba, e T. Shiraishi, "Finite element beam propagation method for three-dimensional optical waveguide structures," *J. Lightwave Technol.*, vol. 15, no. 9, pp. 1728-1734, Setembro de 1997.
- [83] V. Finazzi, T. M. Monro, e D. J. Richardson, "The role of confinement loss in highly nonlinear silica holey fibers," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 15, no. 9, pp. 1246-1248, Sept. 2003.
- [84] V. E. Nascimento, C. A. de Francisco, D. H. Spadoti, M. A. Romero e B. V. Borges, "Use of a novel wide-angle FD-BPM for loss performance assessment in randomly perturbed photonic crystal fibers," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 45, no. 6, pp. 568-573, Junho de 2005.

- [85] T. P. White, R. C. McPhedran, e C. M. de Sterke, “Confinement losses in microstructured optical fibers,” *Opt. Lett.*, vol. 26, no. 21, pp. 1660-1662, Novembro de 2001.
- [86] S. Guo, F. Wu, S. Albin, H. Tai e R. S. Rogowski, “Loss and dispersion analysis of microstructured fibers by finite-difference method,” *Optics Express*, vol. 12, no. 15, pp. 3341-3352, Julho de 2004.
- [87] I. K Hwang, Y. J. Lee, e Y. H. Lee, “Birefringence induced by irregular structure in photonic crystal fiber,” *Opt. Express*, vol. 11, no. 22, pp. 2799-2806, Novembro de 2003.
- [88] W. P. Huang, S. T. Chu, e S. K. Chaudhuri, “A scalar finite-difference time-domain approach to guided-wave optics,” *Photon. Technol. Lett.*, vol. 3, no. 6, pp. 524-526, June 1991.
- [89] V. F. Rodríguez-Esquerre, “2D finite elements time domain modeling of photonic structures”, Ph.D. Thesis, FEEC, Unicamp, Março de 2000 (in Portuguese).
- [90] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford, U.K.: Oxford Univ. Press, 1965.
- [91] V. E. Nascimento e B. H. V. Borges, “A new time domain BPM based on locally one dimensional method,” *International Microwave & Optoelectronics Conference*, Julho de 2005, Brasília, DF, Brasil.
- [92] J. Lee and B. Fornberg, “ A split step approach for the 3-D Maxwell’s equations,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 158., pp. 484-505, 2003.
- [93] J. Lee and B. Fornberg, “ Some unconditionally stable time stepping methods for the 3D Maxwell,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 158., pp. 484-505, 2004.
- [94] V. E. Nascimento, F. L. Teixeira, B.-H. V. Borges “Unconditionally Stable Finite-Difference Time-Domain Method Based on the Locally-One-Dimensional

Technique,” *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pp. 288-291, Setembro de 2005, Campinas, SP, Brasil .

- [95] J. Shibayama, M. Muraki, J. Yamauchi and H. Nakano, “Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme,” *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 19, Setembro de 2005.
- [96] V. E. Nascimento e B.-H. V. Borges, “Esquema Eficiente para Implementação de Fonte Explícita Aplicado aos Métodos ADI-FDTD e LOD-FDTD”, *MOMAG 2006*, Belo-Horizonte.
- [97] V. E. Nascimento e B.-H. V. Borges, “Aplicação do Método LOD-FDTD para Análise e Modelagem de Meios Metamateriais”, *MOMAG 2006*, Belo-Horizonte.
- [98] J. Shibayama, R. Takahashi, J. Yamauchi and H. Nakano, “Frequency-dependent LOD-FDTD implementations for dispersive media,” *Electron. Lett.*, vol. 42, no. 19, pp. 1084-1086, Setembro de 2006.
- [99] V. E do Nascimento, B.-H. V. Borges. e F. L. Teixeira, “Split-Field PML Implementations for the Unconditionally Stable LOD-FDTD Method”, *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, v.16, no. 7 pp. 398 - 400, 2006.
- [100] W. Fu e E. L. Tan “ Development of split-step FDTD method with higher-order spatial accuracy,” *Electronics Letters*, vol. 40, no. 20, Setembro de 2004.
- [101] E. L. Tan, “Unconditionally stable LOD-FDTD method for 3-D Maxwell’s Equations,” *IEEE Microw. Wireless Comp. Lett.* Vol. 17, no. 2, pp. 85-87, Fevereiro de 2007.
- [102] E. Li, I. Ahmed e R. Vahldieck, “Numerical Dispersion Analysis with an Improved LOD-FDTD Method”, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 17, no. 15, pp. 319-321, Maio de 2007.

- [103] F. Zheng e Z. Chen, "Numerical Dispersion Analysis for the Unconditionally Stable 3-D ADI-FDTD Method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 5, Maio de 2001.
- [104] S. Ju, H. Kim e H. H Kim, "A Study of the Numerical Dispersion Relation for the 2-D ADI-FDTD Method" *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 13, no. 9, Setembro de 2003.
- [105] W. Huang e H. Haus, "A simple variational approach to optical rib waveguides," *J. Lightwave Technol.*, vol. 9, no. 1, pp. 642-648, Janeiro de 1991.
- [106] L. Poladian e N. A. Issa, "Fourier decomposition algorithm for leaky modes of fibres with arbitrary geometry," *Optics Express*, vol. 10, no. 10, pp. 449-454.
- [107] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators," *Opt. Lett.*, vol. 17, no. 20, pp. 1426-1428, Outubro de 1992.
- [108] D. Jiménez, C. Ramirez, F. P Murano e A. Gusmán, "Implementation of Berenger Layers as boundary conditions for the beam propagation method: applications to integrated waveguides," *Optics Communications*, vol. 59, pp. 43-48, Janeiro de 1999.



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)