UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

EVILÁSIO JOSÉ DE ARRUDA

O NÚMERO DE EULER

E OS FUNDAMENTOS DOS NÚMEROS REAIS

CUIABÁ/MT

2007

EVILÁSIO JOSÉ DE ARRUDA

O NÚMERO DE EULER
E OS FUNDAMENTOS DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação – Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação (Área de concentração: Educação Matemática).

Orientador: **Prof. Dr. Michael Friederich Otte**

CUIABÁ/MT

2007

A779n Arruda, Evilásio José de
O número de Euler e os fundamentos dos números reais / Evilásio José de Arruda._ _ Cuiabá: UFMT/IE 2007
xii,148 p.: il.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação – Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos para obtenção do titulo de mestre em Educação (Área de concentração Educação Matemática)
Orientador: Michael Friederich Otte
Bibliografia: p. 144-148
Index anexos

CDU – 372.47

Índice para Catálogo Sistemático

1. Educação Matemática
2. Número Irracional
3. Número **e**.

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

EVILÁSIO JOSÉ DE ARRUDA

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva
Examinador Externo (PUC/SP)

Profa. Dra. Gladys Denise Wielewski

Examinadora Interna (UFMT)

Prof. Dr. Michael Friedrich Otte

Orientador (UFMT)

Profa. Dra. Marta Maria Pontin Darsie
Suplente (UFMT)

DEDICATÓRIA

A minha eterna *esposa/namorada* DEBORAH que compartilha, me abriga e me acalenta, pois suas opiniões são sensatas e pertinentes. Por seu carinho e sua boa-vontade, e por ter lido, relido e consequentemente me ajudado a revisar cada linha desta Dissertação. Pela sua paciência, pela sua beleza, pela sua compreensão, pelo seu amor, amo e amarei você eternamente, EVILÁSIO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me oferecido a oportunidade de conhecer pessoas como o professor Dr. Michael Otte, pois é sincero, coerente e sábio, pelo qual sinto apreço e amizade. Agradeço também pelos momentos agradáveis de orientações necessárias para o desenvolvimento desta Dissertação de Mestrado, pela paciência, disponibilidade e principalmente pela oportunidade de me fazer enxergar um novo mundo na construção de conceitos matemáticos.

Agradeço aos membros da Banca examinadora desta Dissertação de Mestrado Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva e a Profa. Dra. Gladys Denise Wielewski, que de uma forma muito competente indicaram caminhos que possibilitaram o aprimoramento qualitativo da mesma. Em especial a professora Dra. Gladys Denise Wielewski que esteve o tempo todo ao nosso lado nos incentivando e particularmente apontando caminhos que engrandeceram o meu conhecimento.

Agradeço à professora Dr. Luzia A. Palaro que gentilmente se disponibilizou a me ajudar na fase inicial desta Dissertação, sugerindo alterações significativas.

Agradeço à todos os professores do Instituto de Educação pelos momentos de socialização de saberes, pois, isto favoreceu a construção mais sólida do meu conhecimento.

Agradeço aos meus colegas de Mestrado pelos momentos de troca de experiências e principalmente ao Humberto que por várias vezes leu parte desta dissertação sugerindo alterações importantes.

Agradeço ao professor Josué Rosa de Araújo pelos momentos intermináveis de discussões sobre o sentido do ensino deste ou daquele tópico nos momentos de planejamento na unidade escolar.

Agradeço a minha saudosa mãe Maria da Guia de Arruda e ao meu pai Manoel Egídio de Arruda, que mesmo não tendo uma formação escolar, sempre me incentivaram e não permitiram que eu abandonasse os estudos, apesar das dificuldades.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ANEXOS

RESUMO

Reflexões sobre o conceito de número estão presentes na Educação Matemática que nos direciona a uma questão essencial do ensino da Matemática, que é a questão do como ensinar idéias, porque para aprender alguma coisa temos que saber que coisa é essa. Os conceitos matemáticos são instrumentos complicados, por isso, nós não podemos usá-los sem saber nada sobre a sua natureza em geral. Este “conhecimento sobre conhecimento” é fornecido por meio da pesquisa histórica e epistemológica. O presente texto trata dos números irracionais e analisa a problemática da construção desse conceito. O número de Euler **e** que é um exemplo importante de número irracional é tratado superficialmente na escola, quando comparado com o π, por exemplo. Neste trabalho investigamos várias definições e aplicações do número **e**, bem como analisamos sua natureza no contexto da teoria dos números reais para o qual nós apresentamos vários fundamentos. Normalmente, na escola assim como na universidade, se fala dos números irracionais como números não racionais e na realidade não há outra possibilidade no contexto do mundo discreto da Matemática. As considerações geométricas, em contraste com o mundo discreto, oferecem a possibilidade de indicar algumas caracterizações positivas dos números irracionais. Finalmente observando que o número de Euler **e** é computável, embora seja irracional, nós usamos este fato para considerá-lo sob o aspecto da teoria computacional. A partir do ponto de vista prático e imediato nem todas as definições do número **e** são equivalentes. Isto nos dá oportunidade para indicar a relevância da noção de complementaridade no que diz respeito aos conceitos matemáticos, levando em conta seus lados operativos e descritivos e esta noção possibilita o enfrentamento dos métodos de ensino.

Palavras – Chave: Educação Matemática; Número Irracional; Número **e**.

ABSTRACT

Reflections about the number concept are present in mathematic education, driving us to an essential question of mathematic teaching, that is, to the question of how to teach ideas, because in order to learn something we have to know what it is. And mathematical concepts are complicated instruments, but we cannot use them without knowing nothing about their nature in general. This “knowledge about knowledge” is given by epistemology and by historical research. The present text deals with the irrational numbers and analyses the problematic behind them. Euler’s number **e** is an important example of a number, which is dealt with superficially only at school, when compared to π, for example. By the present work we investigate various definitions and applications of **e** and analyze its nature in the context of the theory of real numbers, for which we present various foundations. The irrational numbers are normally characterized negatively only, by calling them not-rational in school and at the university also and there is no other possibility within the context of discrete mathematics. Geometrical considerations offer in contrast the possibility of indicating some positive characterizations of irrational numbers. Finally observing that the Euler number **e** is computable although irrational, we use this fact to consider it from the point of view of computational theory. Not all definitions of **e** are equivalent from such a point of view. This gives us opportunities to indicate the relevance of a complementaristic perspective with respect to mathematical concepts, taking into account their operative and descriptive sides and using this complementarity to envisage better teaching methods.

Key words: Mathematical Education; Irrational Number; Number **e**.

INTRODUÇÃO

O professor de Matemática que lida com questões relacionadas à aprendizagem precisa conhecer o contexto em que determinado conceito foi elaborado, bem como os motivos principais que o fazem estar presente no currículo escolar. Nesse sentido, os conhecimentos históricos e epistemológicos dos conceitos matemáticos são essenciais para melhorar a prática do professor em sala de aula.

Para que o conhecimento de um determinado conceito possa contribuir para a compreensão da natureza dos objetos matemáticos, e com isso proporcionar mais significados, tendo clareza que esses significados podem ser temporais, culturais, ou seja, dentro de uma situação problemática que evidencia a consolidação da validade desse conhecimento, torna-se necessário concebê-los, também como atividades construtivas.

Estamos passando por um momento de mudança de atitude em relação ao tratamento do ensino da Matemática no tocante aos seus discursos "científicos" e "pedagógicos". O que normalmente se vê nos livros didáticos são usos excessivos da gramática própria da Matemática que é a lógica e os símbolos artificiais desprovidos da semântica.

Conciliar a linguagem Matemática com os aspectos pedagógicos sem perder a qualidade do conteúdo é uma tarefa árdua que depende da compreensão das questões históricas e epistemológicas do conhecimento matemático.

As reflexões sobre o ensino-aprendizagem da Matemática passam obrigatoriamente pelos números, que são instrumentos matemáticos que permitem a visão de padrões que estão a princípio "escondidos" e isso faz com que procuremos conhecer suas características em todas as suas perspectivas. Historicamente os números foram sendo ampliados, seguido pelo avanço científico e tecnológico devido à necessidade e a curiosidade inerente do homem. Diante desta situação surgiram números que se transformaram em elos importantes (como por exemplo, na extensão do conjunto dos números racionais) no tratamento de questões internas da própria Matemática e que interferiram e interferem na vida cotidiana do homem neste cosmo.

Nesse sentido, o objeto de pesquisa deste trabalho trata de um número que está diretamente ligado aos aspectos teóricos da Matemática e aos fenômenos sociais, culturais e naturais que é o número de Euler **e**, bem como a função exponencial de base **e**. Temos clareza que esse número é importante, mas a função é muito mais, devido às conexões que ela estabelece com as diversas áreas do conhecimento, pois propicia melhorar nossa compreensão, ou seja, permite uma aproximação da realidade por meio das relações e probabilidades.

Desde minha formação inicial e continuada na área da Educação Matemática, que começou em 1986, o número de Euler **e**, era tratado por mim apenas como um número irracional que tem o valor aproximado de 2,718 e que podia ser usado como base dos logaritmos. A partir daí, usando o fato de a função exponencial de base **e** ser igual a sua derivada, aplica-se este argumento na resolução de vários problemas referentes ao crescimento ou decrescimento exponencial.

No que diz respeito ao contexto histórico, o meu conhecimento registrava que esse número surgiu no início do século XVII em homenagem ao criador dos logaritmos John Napier, em que a letra **e** foi escolhida por Leonhard Euler no século XVIII. Fazendo uma reflexão sobre a necessidade de trazer os números irracionais do campo teórico para o aspecto prático e pedagógico, constatei que na Matemática existem números irracionais conhecidos como o π(3,14...), a raiz quadrada de dois (1,41...) e o número de ouro (1,618...) que são muito bem relatados nos livros didáticos do ensino fundamental, médio e superior.

Nesse processo de reflexão o que me deixou intrigado é como um número de valor numérico aparentemente simples como o número de Euler **e** aparece na Matemática aplicada e na Matemática pura, ou seja, estabelece conexões com os ramos internos desta ciência e com outras áreas do conhecimento. Atualmente fico imaginando e tentando entender o porquê de o número de Euler **e** ser trabalhado superficialmente no ensino médio, e somente no ensino superior lhe é dado um tratamento mais sistemático, ou seja, no ensino médio valorizam-se de maneira excessiva o logaritmo na base 10, e o número **e** como base é tratado, às vezes, como nota de rodapé.

Este trabalho tem como foco discutir os aspectos históricos e epistemológicos do processo de construção do conceito desse número e da função que tenha esse número como base tendo como perspectiva a noção de complementaridade publicada no livro O Formal, O Social e o Subjetivo (1993) e no artigo, Complementarity, Sets and Numbers (2003) de Michael Otte. Esses textos destacam que esta noção é indispensável para o estudo das questões que envolvem a Educação Matemática no que diz respeito aos aspectos contínuo/discreto, intensão/extensão[1], conceito/objeto e os axiomas/aplicações na interpretação dos significados dos objetos de estudo da Matemática. Nesse contexto, o estudo do conceito de número irracional, da construção do conceito do número "**e**" e da função exponencial de base **e** segue essa perspectiva. Considerando este fato, partimos da duplicidade que há no conceito de função em relação a modelos algorítmicos operativos (discreto) e a questão da continuidade da lei estrutural.

Temos clareza que o princípio de complementaridade é inerente a conceitualização do número de forma geral e consequentemente do número de Euler **e**, pois, a abordagem dessa conceitualização deverá ser de maneiras diferentes. Diante disso, tratamos da construção do conceito do número **e** por meio do processo algorítmico, ou seja, dos modelos operatórios que o determinam como um método de computação. Todavia, a complementaridade surgirá de forma inevitável no momento em que nos relacionarmos com o aspecto estrutural, ou seja, relação, lei ou regra que o faz ser obtido como um ponto de uma curva ou o valor de uma função. Contudo, tanto no interior do processo algorítmico como na questão relacional, a compreensão epistemológica do número de Euler **e** apresenta caráter de complementaridade.

A construção complementar do conceito do número **e** pelo processo algorítmico e pela relação (lei) desencadeia atividades cognitivas entre o sujeito, meios e objeto. E isso possibilitará compreender que o número **e** não está no objeto e nem no sujeito e sim na sua relação por meio da atividade, pois, "os conceitos teóricos agora não são nomes de objetos ou de qualidades dos objetos, mas denotam relações entre objetos" (OTTE, 1994, p. 71).

O conceito de complementaridade foi introduzido na física quântica por Niels Henrik David Bohr (1885-1962). Bohr pretendia mostrar a "impossibilidade de qualquer separação nítida entre o comportamento dos objetos atômicos e a interação com os instrumentos de medida que servem para definir as condições em que os fenômenos aparecem" (BOHR, 1995, p. 51).

O que de fato Bohr percebeu é a importância que tem a atividade humana na elaboração do conhecimento, ou seja, é impossível separar o sujeito de seu objeto. De forma que os aspectos entre o sujeito, atividades e o objeto não devem ser considerados separadamente e sim como um todo prevalecendo o aspecto relacional. Essa característica do princípio físico da complementaridade ocupa um papel central na questão cognitiva e

[1] A intensão é o sentido e a extensão é o objeto.

epistemológica do conhecimento humano. É inevitável, portanto, estendê-lo aos fundamentos da Educação Matemática.

Na busca da compreensão das formas em que se processa a elaboração do conhecimento, tornam-se relevantes os objetos e os conceitos desses objetos. Para construção desses conceitos há necessidade de atividades cognitivas, pois, estes são as essências da relação sujeito-objeto. Todavia, o conceito de complementaridade fundamenta-se exatamente entre as atividades, os meios e os objetos do conhecimento, ou seja, nenhum dos elementos (meio, objeto e atividade) pode ser determinado sem o outro. Mas, o conceito não é idêntico à sua definição. O conceito representa uma complementaridade entre objeto e meio, ou entre conhecimento e método (OTTE, 1993, p. 227). Dessa forma, o saber é construído por um processo real e dinâmico.

Compreender os meandros da História da Matemática torna-se útil para entendermos a estrutura da atividade Matemática e com isso enfrentarmos com mais consistência os obstáculos epistemológicos desse desenvolvimento. Este estudo, entretanto, não dá receitas para composição de currículos, mas poderá sensibilizar os agentes do ambiente educacional, propiciando uma reflexão sobre os métodos variados de ensino e aprendizagem. O fato de compreender o processo histórico da construção do conceito de número possibilitará perceber que a atividade cognitiva não é linear, e sim muito complexa, porém, se melhorarmos nosso entendimento da estrutura do pensamento matemático e a lógica de seu desenvolvimento ao longo da história evidenciam-se o sentido do ensino deste tópico.

Encontrar uma alternativa de explicação que melhore o conhecimento sobre o tema e que possa auxiliar outros professores de Matemática na busca de um conhecimento mais sólido no que diz respeito a um tratamento mais pedagógico de assuntos considerados “científicos” da Matemática é o foco deste trabalho. Tivemos a pretensão de apresentar um tratamento pedagógico deste número, mas a sedução pelos aspectos formais da linguagem Matemática no que diz respeito à questão pragmática dispensada aos objetos matemáticos está presente, porém, tentamos introduzi-los dentro de um contexto.

No aspecto do desenvolvimento do potencial crítico e pedagógico, o número de Euler **e**, assim como a função exponencial de base **e**, possibilita a construção de modelos operacionais que melhora o relacionamento do homem com a natureza favorecendo a possível descrição da realidade, propiciando contextualizar de forma mais coerente envolvendo as questões da cientificidade da Matemática. Acreditamos que o número **e** não está nos fenômenos e sim no aspecto relacional da atividade mental que o ser humano estabelece no próprio intelecto.

No decorrer de nossa pesquisa surgiram várias questões que estão interligadas referentes a esse número. A seguir explicitamos cada uma delas:

- É comum nos livros didáticos do 1º ano do ensino médio, como por exemplo, o livro de Luiz Roberto Dante "Matemática Contexto & Aplicações" (2003, p. 226) apresentarem a noção de logaritmo da seguinte forma: "dados os números reais positivos **a** e **b**, com $a \neq 1$, se $b=a^c$, então o expoente **c** chama-se logaritmo de **b** na base **a**. Os números frequentemente usados como base são o 10, que é a base do nosso sistema de numeração, e o número de Euler (**e** $\approx$ **2,71828**) que não pode ser escrito na forma de fração. A questão é que os logaritmos que têm esse número como base são denominadas de naturais, então, como é possível ser natural um número dessa forma. Por que o logaritmo na base cinco, por exemplo, não é utilizado com tanta intensidade na resolução de problemas práticos?

- Por que a letra **e** representa o número 2,718...? E por que motivo o número **e** é tratado, profundamente, somente após o estudo de séries e funções? Este número é irracional e computável, então como podem ser calculados os valores de suas casas decimais?

- Como encontrar o elo entre o número **e**, a função exponencial de base "**e**" e os fenômenos naturais? A função exponencial de base **e** é a única função que é igual a sua própria derivada? Porque isso ocorre?

- A raiz quadrada de dois está relacionada com a diagonal do quadrado de lado unitário, o número π (pi) é a área de um círculo de raio unitário. Diante disso, qual é o significado geométrico do número **e**?

- Nos livros de Cálculo Diferencial e Integral é apresentada a definição do número **e** por meio da Integral e depois determinam sua derivada, por que isso ocorre?

- Nos livros didáticos de Matemática, os números irracionais são caracterizados por números não racionais e são normalmente introduzidos pela raiz quadrada de dois. Como enfrentar o problema da caracterização positiva do conceito de número irracional? O que de fato queremos é explicar a necessidade da construção dos números reais por meio do conceito do número de Euler **e** objetivando com isso a percepção/mentalização do contínuo numérico.

- Em que contexto histórico surgiu esse número? Quais foram às situações reais que motivaram o estudo desse número?

- Como construir uma explicação do número de Euler **e** considerando seus aspectos históricos e epistemológicos, bem como sua utilidade na Matemática pura e aplicada? Afinal, porque o número **e** é importante?

Considerando que o conceito de número é relevante para o entendimento de vários assuntos da Matemática e das ciências em geral torna-se necessário compreender suas características essenciais. No caso deste número irracional fica claro que o sentido do seu estudo surge quando este conceito é tratado complementarmente entre a sua construção operacional dígito a dígito e a sua formulação num processo contínuo, ou seja, por meio da lei estrutural de sua construção.

Acreditamos que com este trabalho, estamos introduzindo uma nova perspectiva no tratamento dado ao número de Euler **e**, propiciando uma abordagem coerente desse tema que por sua vez favoreça ao professor mais um elemento teórico para sustentar sua prática na sala de aula.

O que pretendemos é discutir estes questionamentos no aspecto relacional que há entre o sujeito, os meios (representações) e as atividades mentais do sujeito, mostrando que o tratamento isolado, ou seja, por um lado, o aspecto operacional algorítmico (discreto) e, por outro lado, o aspecto da lei (contínuo), não consolida o entendimento da construção desse conceito.

Para apresentar os resultados desta reflexão histórica e epistemológica do número de Euler **e**, bem como da função exponencial de base **e**, separamos este trabalho em quatro capítulos, os quais serão apresentados sucintamente a seguir.

No primeiro capítulo tratamos inicialmente do mundo contínuo e do mundo discreto, enfatizando o fato de que no mundo contínuo construímos explicações da incomensurabilidade da diagonal do quadrado e no mundo discreto mostramos a irracionalidade da raiz quadrada de dois. Neste capítulo abordamos também a construção do número de Euler **e** por meio de intervalos encaixados. Com isso, discutimos as idéias centrais da definição de continuidade da reta na perspectiva de Dedekind, intervalos encaixados e seqüências convergentes de Cauchy-Cantor. O que pretendemos deixar claro é que nessas formas de interpretar a continuidade da reta estão presentes as relações entre o discreto e o contínuo na construção do conceito de qualquer número irracional e como conseqüência do número de Euler **e**.

A definição dos números reais por intervalos encaixados é uma conseqüência da propriedade do supremo, que é na verdade um postulado fundamental da geometria. Por isso, nós usamos a construção do número de Euler por intervalos para discutir se existe ou não um único ponto para o qual todos os intervalos que contenham o valor do número de Euler **e** convirjam. Essa discussão mostrou a necessidade de se postular a "possível existência" do número **e**, bem como de todos os números irracionais.

Dedekind no século XIX tratou da construção do conjunto dos números reais tendo se inspirado no trabalho de Eudoxo. Devido a isso, fizemos uma discussão sobre a forma como Dedekind utilizou o conceito de corte para interpretar a correspondência que há entre os pontos da reta e os números. Cantor também tratou dos números reais utilizando para isso as seqüências convergentes de Cauchy. Mostramos que o valor do número irracional **e** pode ser determinado por no mínimo duas seqüências equivalentes em que a diferença entre elas tenda a zero.

Tratamos também da construção dos números reais pela axiomatização, pois, este processo sintetiza parte significativa do método científico. Todavia, temos o propósito de apresentar os axiomas dos números reais que são formas diretas de se introduzir os números irracionais.

Neste capítulo observamos que a construção dos números irracionais, particularmente o número de Euler **e** pode ser discutido pela complementaridade que há entre o contínuo (cortes de Dedekind) e pelo discreto (construção de Cauchy e Cantor) e também por uma "mistura" entre o discreto e o contínuo, que ocorre com os intervalos encaixados. Porém, o aspecto relacional está presente na axiomatixação desde que aplicada num contexto teórico e/ou prático.

Temos, entretanto, a intenção de possibilitar uma discussão sobre a biunivocidade entre os pontos da reta e os números, estabelecendo com isso um elo entre a construção dos números reais pela via da incomensurabilidade da diagonal do quadrado, da raiz quadrada de dois e pela construção do número de Euler **e** por intervalos. Na realidade, refletimos sobre essas maneiras de interpretar a questão da continuidade da reta e dos números, pois, quanto mais formas diferentes de abordar o mesmo objeto, maior é a possibilidade de percebê-lo e, é isso que vai proporcionar a compreensão da necessidade de se estabelecer os fundamentos da Matemática e como conseqüência aplicá-lo nas diversas áreas do conhecimento.

No segundo capítulo, tratamos das definições, conexões e aplicações do número **e**, bem como da função que tenha esse número como base, procurando entender o que é o número "**e**" e como determiná-lo de forma "exata". Se é que é possível responder essas perguntas, objetivando com isso compreender que existem várias maneiras práticas e teóricas para obter esse valor. Neste momento faremos uma discussão sobre as equivalências das principais definições do número **e**, estabelecendo o contexto de suas equivalências.

Apresentamos situações em que esse número surge com naturalidade, justificando o motivo pelo qual o logaritmo na base **e** é chamado natural. Uma situação importante do surgimento do número **e** é a interpretação dos juros compostos, que pode ser feito de duas maneiras: calculando os juros compostos no final de cada período (discreto) ou capitalizando os juros continuamente. No caso de capitalização contínua, temos a presença inevitável do número de Euler **e**.

O cálculo das casas decimais do número **e** pode ser obtido por meio de séries de potências, que determinam suas casas decimais de forma extremamente eficiente. No entanto, no final do século XX e no início do século XXI foram publicadas por Brothers e Knox formas alternativas que obtém o valor do número **e** mais rápido que os modelos tradicionais. Mostramos como esses modelos foram obtidos e tentamos sugerir atividades pedagógicas para serem usadas na sala de aula por meio de uma calculadora ou de um computador.

Temos o propósito de discutir a relação que existe entre o número **e**, e a quadratura da hipérbole, propiciando também uma alternativa de explicação do motivo pelo qual a derivada da função exponencial de base **e** é igual à própria função. Com isto explicaremos de uma forma diferente dos livros didáticos o porquê o logaritmo natural (ln) ser definido por meio da integral. Esta discussão irá fornecer uma maneira de evidenciar o significado geométrico desse número.

Consideramos o número de Euler **e** obtido pela via da dupla raiz que há no conceito de função (operação e lei), pois, esse número será determinado pelo algorítmico operacional e também será considerado como sendo um ponto da curva de uma função. Dessa forma, esse número tem na essência de seu conceito, a noção de complementaridade, pois, é esta relação que permite melhorar a compreensão do seu significado.

No que diz respeito às conexões que o número **e** faz com ramos da própria Matemática, discutimos o fato desse número estar presente na análise, na álgebra e na geometria, ou seja, perpassa a Matemática pura e aplicada. Neste sentido, faremos uma discussão referente ao número **e** relacionado com a unidade imaginária i, o número π, números primos, funções trigonométricas seno, cosseno e a espiral logarítmica.

Temos o interesse de evidenciar que o estudo do número **e** provocou a ampliação de áreas tradicionais da Matemática que é o caso das variáveis complexas por meio de uma fórmula que envolve o número **e**, i, seno e cosseno que pode ser também considerada a mais importante de todas as fórmulas da Matemática, pois, relaciona números com personalidades diferentes.

O estudo das conexões do número **e** propiciou o imaginário tornar-se real do ponto de vista teórico-numérico. Esta análise não são necessidades práticas, mas necessidades teóricas, pois só a teoria Matemática tem essa capacidade de conectar áreas e assuntos tão distintos das ciências.

Diante disso, discutimos esses aspectos partindo da própria Matemática, fazendo experiências com fórmulas, ou seja, substituindo uma na outra e analisando os resultados. As aplicações e as conexões nos mostram que a teoria Matemática estabelece relações tanto com o mundo cotidiano como com as questões internas da própria Matemática e por isso a noção de complementaridade é inevitável.

Na necessidade de escrever relações entre fenômenos para melhor compreendê-lo, surgem equações diferenciais e na pesquisa de soluções destas, o número de Euler **e** pode estar presente. Apresentamos fenômenos naturais que aparentemente não tem nada a ver com o número **e**, mas durante a análise dessas situações por meio do seu equacionamento, surge o número de Euler **e**.

Com este objetivo mostramos o caso do crescimento de população de bactérias, desintegração radioativa e um fenômeno físico. Como encontrar o elo entre o número "**e**" e estes fenômenos? Acreditamos que esse elo está na atividade relacional, pois é essa atividade que é o objeto do pensamento.

No terceiro capítulo, abordamos a questão da irracionalidade do número de Euler **e** no qual apresentamos duas provas ou demonstrações, pelo método da contradição ou por redução ao absurdo dessa irracionalidade, as quais foram chamadas de provas analíticas e geométricas.

Começamos analisando situações de somas infinitas de números racionais que convergem para um número racional e somas infinitas de números racionais que convergem para um número que não é racional. A definição do número **e** por meio de limites, que é transformada numa série provoca uma reflexão sobre a questão do infinito no tratamento e na compreensão da natureza do número **e**. A possibilidade de se definir um objeto matemático - o número **e** - de maneiras diferentes ajudará a investigar melhor sua natureza.

O número de Euler **e** definido por meio de séries pode ser usado para construir intervalos fechados genéricos (analiticamente), aritméticos e geométricos em que o número **e** esteja contido em cada um deles. A partir dos intervalos construídos apresentamos as demonstrações da irracionalidade do número **e**.

A prova analítica é comum nos livros didáticos de Matemática do nível superior, por isso, além dessa prova apresentamos uma demonstração geométrica da irracionalidade do número **e** por meio de uma construção de intervalos encaixados, pois, a própria construção já vai nos direcionar para o cálculo de seu valor e também para o entendimento da impossibilidade de sua racionalidade.

A construção do número **e** por intervalos possibilita uma discussão sobre a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais, ou seja, despertará a necessidade teórica da construção dos números reais. Esta construção permite discutir por meio da visualização e percepção geométrica a continuidade dos números reais, pois, possibilita refletir complementarmente entre os intervalos construídos aritmeticamente e a parte da reta que é contínua, e isso pode nos convencer da inviabilidade da existência de uma fração que representa o número de Euler **e**.

Portanto, temos mais uma alternativa de introdução dos números reais pela construção geométrica do número **e**, ao invés da raiz quadrada de dois, que é comum nos livros didáticos atualmente. Esta construção pode muito bem ser usada no ensino médio e no ensino superior.

No quarto capítulo abordamos a evolução histórica do conceito do número **e**, observando que os números irracionais que se tornaram mais conhecidos como a raiz quadrada de dois e o número π (em relação a sua história) são bem discutidos nos livros didáticos de Matemática do ensino fundamental e médio. Entretanto, a historicidade do número **e** é pouco discutida e traz muitas dúvidas sobre a questão real de seu aparecimento e uso na Matemática.

O número **e** surgiu no cenário da Matemática num período de intensos desenvolvimentos no qual o conhecimento matemático estava inserido. De forma, que apresentamos momentos e situações que marcaram o seu surgimento e consolidaram o seu uso na Matemática. Nesse contexto, mostramos que o número **e** teve sua origem nos juros compostos calculados continuamente, nos logaritmos e na quadratura da hipérbole. Para discutir estas questões começamos com a relação que o número **e** estabelece com os logaritmos criados por John Napier, publicado no início do século XVII.

Referimos-nos também a Leonhard Euler que usou efetivamente esse número em seus trabalhos. Com isso, apresentamos o processo usado por Euler para determinar o valor do número **e**, obviamente que não foi apenas Euler que fez uso desse número, mas foi o que consolidou a sua "possível existência".

O aspecto histórico nos mostra que o tratamento complementar entre o discreto e o contínuo sempre esteve presente na conceitualização desse número, mesmo sabendo que, às vezes, se privilegiou um desses aspectos. Entretanto, é notório considerar que esse tratamento dicotômico não ajuda o estabelecimento de relações na construção desse conceito.

Uma discussão que propomos foi a questão da natureza do número **e**, pois, isso abriu caminhos para que Lindemann provasse a transcendência de π e como conseqüência disso ocorreu esclarecimento da quadratura do círculo com régua e compasso, assunto que não havia sido resolvido desde a Antiguidade. É importante ressaltar que o número **e** está intimamente ligado a questões geométricas e comerciais.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS NÚMEROS

O mundo que o nosso cérebro fisiologicamente interpreta, são captados por órgãos receptores que nos trazem impressões ou sensações sobre os objetos externos. Esse mundo que chega à nossa consciência é um mundo contínuo, no qual tudo é relacional e relativo, ou seja, não existe coisa pesada, amarga, doce ou quente, isso só existe relativamente. Não existe grande distância, depende do contexto. Um sabor, uma cor ou mesmo uma distância são contínuos. Todos os quadrados têm a mesma forma e são semelhantes, se distinguindo um do outro, só gradualmente.

A percepção ou mentalização do contínuo se dá por meio de relações. E para acessar essas relações precisamos de atividades e instrumentos (números) que as expressam quantitativamente. O mundo de nossas atividades que é formado basicamente pelas ações de: medir, construir, contar, comparar e distinguir é um mundo discreto, ou seja, a realidade é concebida como um conjunto de objetos distintos. Esta pulverização aconteceu por meio dos números e as diferenças entre os objetos existentes são captadas pela medição e/ou contagem, ou seja, o aspecto discreto dos números prevalece, pois, o aspecto quantitativo discreto exerce um "poder" sobre a ação do homem dificultando a percepção do contínuo. Agora, como Kant (1997, B 74-75) disse:

> O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objecto mediante estas representações (espontaneidade de conceitos); pela primeira é-nos *dado* um objecto; pela segunda é *pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento. Ambos estes elementos são puros ou empíricos. *Empíricos*, quando a sensação (que pressupõe a presença real do objecto) está neles contida; *puros*, quando nenhuma sensação se mistura à representação. A sensação pode chamar-se matéria do conhecimento sensível. Daí que a intuição pura contenha unicamente a forma sob a qual algo é intuído e o conceito puro somente a forma do pensamento de um objecto em geral. Apenas as intuições ou os conceitos puros são possíveis *a priori*, os empíricos só *a posteriori*. Se chamarmos *sensibilidade à receptividade* do nosso espírito em receber representações na medida em que de algum modo é afectado, o *entendimento* é, em contrapartida, a capacidade de produzir representações ou a *espontaneidade* do conhecimento. Pelas condições de nossa natureza a intuição nunca pode ser senão *sensível*, isto é, contém apenas a maneira pela qual somos afectados pelos objetos, ao passo que o entendimento é a capacidade de *pensar* o objecto da intuição sensível. Nenhuma dessas qualidades

> tem primazia sobre a outra. Sem a sensibilidade, nenhum objecto nos seria dado; sem o entendimento, nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas.

A Matemática, como qualquer outra área do conhecimento, é influenciada pela complementaridade de reação (receptividade das impressões) e ação (espontaneidade dos conceitos) e consequentemente do contínuo e do discreto.

Se nos concentrarmos somente no mundo discreto dos símbolos numéricos podemos facilmente esquecer o pensamento relacional, pois a contagem de objetos utiliza uma unidade "natural". Por exemplo, se queremos saber quantas laranjas há numa cesta, uma laranja representa a unidade natural de "medir" (ou seja, contar) esta quantidade, pois, a contagem é um caso especial de medição. Neste caso, não faz sentido, por exemplo, contar essa quantidade usando a metade da laranja como unidade.

Mas, para dar sentido a equações como $\frac{2}{4}$ de homens $= \frac{1}{2}$ homens, os filósofos usaram o contínuo e a variação para transformar essa equação em uma que tenha significado. Bolzano (1781-1848) fez isso, por exemplo, e foi o primeiro a apresentar uma explicação coerente e geral da noção de igualdade. Gauss (1777-1885) usou o contínuo para provar a existência de uma raiz de um polinômio de grau ímpar. Na Antiguidade também foi usado o aspecto intuitivo de continuidade, por exemplo, no problema da duplicação do cubo, que não pode ser resolvido com régua e compasso, sabia-se que uma solução existe só não se sabia as características dessa solução. Então podemos dizer que o princípio de continuidade sempre foi usado para mostrar a existência de um objeto.

É necessário conhecer como também compreender os mecanismos de funcionamento, bem como as interações intrínsecas e extrínsecas do fenômeno[2] chamado número. Desvendar o véu de suas relações com as coisas cósmicas torna-se necessário e cada vez mais obrigatório para conviver com as eventualidades da natureza. Fato que foi desejado pelos pensadores antigos e que fervilha na mente dos pesquisadores atuais.

No processo de relacionamento entre a mente humana e os fenômenos ocorrem duas possibilidades de pensar e discutir a existência dos números que pode ser por meio da geometria e pela teoria dos conjuntos. Contar e medir faz parte de todas as atividades

---

[2] Fenômeno (Kant) 1. O objeto da percepção. Aquilo que é percebido. 2. O objeto, tal qual como aparece à consciência. 3. O objeto da experiência sensível. Aquilo que aparece aos sentidos. 4. Qualquer fato ou evento observável (GILES, 1993, p. 61).

referente a números, por isso, o aspecto discreto (contar) e o contínuo (medir) precisam ser tratados concomitantemente.

Segundo Brolezzi (1996, p. 6) a idéia de medida está associada à idéia de ordem. O cerne da idéia de ordem está na comparação entre duas quantidades ou medidas diferentes, de modo a estabelecer uma ordem entre elas: maior ou menor tamanho, primeiro, segundo e terceiro lugar etc. De forma que comparar quantidades e estabelecer ordem, faz parte da construção da idéia de número. Por isso, o aspecto ordinal e cardinal está presente tanto na contagem como na medida. De modo que deve haver um tratamento complementar entre o discreto e o contínuo na compreensão do conceito de número.

A discussão de que os números racionais não são suficientes para estabelecer a biunivocidade entre os números e os pontos da reta, é comumente desencadeada pela medida da diagonal de um quadrado de lado unitário. Isso ocorre quando procuramos uma unidade comum entre o lado e a diagonal. Sendo assim, mostramos explicações que nos possibilite perceber/mentalizar no mundo das grandezas (semelhanças) a incomensurabilidade da diagonal do quadrado e no mundo dos números a não racionalidade da raiz quadrada de dois, pois este é o ponto de partida que aparece nos livros didáticos para introduzir os números reais. Porém, tratamos também do contínuo por meio da construção do número de Euler ***e*** por intervalos encaixados, que a nosso ver pode ser usado para introduzir o conceito de número irracional.

O tratamento dado à medida foi e ainda é um assunto que desperta interesse e provoca muitos questionamentos, pois, está relacionado à correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números. Nesse contexto, veremos como funciona o processo de medição de uma grandeza a partir de outra grandeza da mesma espécie. Por isso, vamos representar essa grandeza por um segmento de reta. Diante disso, podemos verificar quantas vezes essa unidade cabe no segmento maior. Nesse procedimento de comparação pode ocorrer que a unidade caiba um número inteiro de vezes no segmento que queremos medir, ou não. No caso de sobrar um "pedaço", escolhemos uma outra unidade (como por exemplo, um décimo da unidade anterior) para medir a parte que sobrou. Podemos repetir esse processo até encontrar uma unidade que se encaixa totalmente nos "pedaços" que irão sobrando durante esse processo. Dessa forma, o instrumento usado para expressar a medida do segmento que queremos medir pode ser um número decimal exato, ou seja, temos aqui comparações entre segmentos comensuráveis. Só que nem sempre esse processo vai terminar num processo finito de passos.

O número representa relações entre grandezas e não representa grandezas. Nesse sentido, se $A=x.U$ em que A é uma grandeza e U é a unidade da mesma espécie e x um número que representa a relação entre A e U. Entretanto, os objetos representados pelos números são relações processadas na mente do sujeito cognoscente, e não nos objetos, e os números são signos[3] que representam essas relações. No caso de segmentos comensuráveis, o valor da relação x pode ser determinado de forma exata, ou seja, U ou uma parte de U cabe um número determinado de vezes na grandeza A.

Agora no caso, por exemplo, da diagonal do quadrado, quando se considera o lado dele como unidade de medição mesmo repetindo continuamente o processo de medição (veja em 1.2) não se consegue encontrar uma unidade "exata" que expressa a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado, ou seja, temos dois segmentos incomensuráveis.

Antes de provar esse fato queremos representá-lo de maneiras diferentes, ou seja, em termos de conceitos aritméticos. Para isso precisamos construir uma correspondência entre o mundo das grandezas e o mundo dos números. Nesse sentido, um segmento A colocado na reta determina dois pontos O e Q. Dessa forma, temos uma biunivocidade entre grandezas e pontos. Escolhendo uma unidade U de medição chegamos a um número que representa a relação entre A e U, como já foi dito.

Se $A=U$ temos o número 1 como relação. Como já observamos poderia acontecer que A e U fossem incomensuráveis e que o nosso instrumento (número) usado para representar essa relação não é racional. Diante disso, podemos escolher a unidade U como quisermos, pois, sempre teremos segmentos A que não são comensuráveis com a unidade U, ou seja, sempre temos pontos P na reta que não representam números racionais.

Para entender a correspondência entre números e pontos da reta, precisamos compreender como é feita a construção dos números reais, e isso passa obrigatoriamente pelo contexto histórico e epistemológico da compreensão de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de variável real e também pela correspondência entre números e pontos da reta, que é essencial para compreensão da fundamentação teórica da Matemática, bem como para a resolução de problemas práticos.

Imagine um alfinete com a ponta extremamente fina e que essa ponta incida num sistema de coordenadas. Como garantir a "possível existência" de um número que representa

[3] Signo: Aquilo que representa, indica ou significa outra realidade. Todavia, retém a sua própria identidade (GILES, 1993, p. 142).

esse lugar geométrico? Quais são e como compreender suas principais características? Até que ponto há necessidade do estudo da “possível existência” desse número?

O processo de encadeamento lógico que objetiva a compreensão da relação número/grandeza nos leva à Grécia antiga. O que deve ter passado na mente de Pitágoras (580–504 a.C.) que acreditava na comensurabilidade, e de seus discípulos, quando perceberam que havia relações entre “coisas” (como, por exemplo, a relação entre o lado e a diagonal do pentágono regular) no mundo que não podiam ser expressas por uma fração? Filolao, que foi um dos mais destacados alunos de Pitágoras afirma: “todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem o número” (CARAÇA, 1984, p. 69).

A compreensão da construção dos números reais pode passar pela relação entre comensurável e incomensurável e isto mostra que o ato de medir e contar estão presentes na discussão da necessidade de ampliação do conjunto dos números racionais.

A incomensurabilidade abriu caminhos para conceber a “possível existência” dos números reais, pois, propiciou uma “separação harmoniosa” entre contagem e medida, ou seja, entre o discreto e o contínuo na elaboração e/ou construção do conceito de número. Todavia, essa construção torna-se mais acessível se considerarmos a complementaridade que há entre o discreto e o contínuo. Pois, se a realidade é contínua precisamos de modelos operacionais ou algoritmos que possibilitem o acesso a essa realidade e, por sua vez, o estudo pontual desses acontecimentos. Dessa forma, há a predominância do discreto, porém, a lei ou a função está implícita no discreto e vice-versa.

Diante do exposto até o momento estabelecemos os seguintes objetivos:

1º) mostrar que A/U define um corte nos números racionais;

2º) mostrar diretamente que há grandezas (segmentos) incomensuráveis, ou seja, A/U não representa um número racional;

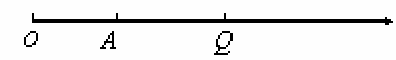
3º) mostrar que há números bem definidos em termos algébricos que não são racionais.

1.1 A Biunivocidade entre Pontos da Reta e os Números

Em relação ao *1º* objetivo começamos tratando da natureza da correspondência que há entre os pontos da reta e os números, e isso pode passar pela expressão numérica da medição.

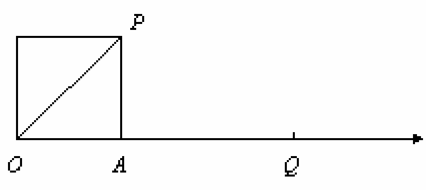
Com esse objetivo começamos analisando os mecanismos que nos faz estabelecer a correspondência de números racionais com os pontos da reta, bem como a reciprocidade dessa correspondência (veja também o texto de Dedekind do anexo 02). Na figura 1 a seguir consideramos uma semi-reta e tomamos sobre ela um ponto *O* arbitrário denominado origem.

Figura 1



Sobre essa semi-reta, a partir do ponto *O* convencionamos, arbitrariamente, um segmento *OA* como unidade. Diante disso, podemos associar um número racional[4] $s = \frac{x}{y}$ a um ponto *P* da reta da seguinte maneira: dividimos o segmento *OA* em y partes iguais e marcamos x dessas partes a partir de *O*. O ponto *P* assim construído chama imagem do número s. Portanto, esse ponto *P* corresponde ao número racional s. Podemos dizer também que nessa representação o número s é a medida do segmento *OP* com o segmento *OA* como unidade, ou seja, *OP*=s.*OA*. No caso da correspondência recíproca teremos que ter um ponto *Q* qualquer na reta para o qual fazemos corresponder um número racional *r* que mede o segmento *OQ* com a unidade *OA* (*OQ*=*r*.*OA*). Será que esse número *r* sempre existe? No caso da diagonal do quadrado, por exemplo, precisamos conceber processos contínuos para perceber a inexistência do número racional *r*. Observa a figura 2 a seguir.

Figura 2



[4] Um número é racional quando for possível escrevê-lo na forma $\frac{x}{y}$ com x, y inteiros positivos e y não-nulo.

Na figura 2 podemos escrever a igualdade $\frac{OQ}{OA} = x$, de forma que o valor da medida x não é totalmente determinado para x racional, pois, o número x representa uma relação entre medidas de segmentos ou uma relação entre grandezas. Nessa situação percebe-se que estamos comparando, ou seja, determinando quantas vezes o segmento OA cabe no segmento OQ. Entretanto, se considerarmos OA como unidade de medida e se partirmos do quadrado de lado OA, temos o segmento OP (diagonal do quadrado) que pode ser transladado sobre o segmento OQ que não é bem determinado.

Na interpretação da relação que há entre a diagonal e o lado do quadrado estão presentes processos infinitos. E a interpretação desses fenômenos contínuos só é possível por meio de semelhanças, e nesse caso não há tamanhos e sim processos que permitem perceber essa semelhança.

O único lugar na geometria de Euclides (360 a.C — 295 a.C) que se pensou na semelhança é no livro V sobre proporções, pois, no restante da geometria euclidiana há predominância de figuras distintas e da construção. Entretanto, se os números são concebidos como representantes de relações, isso nos remete a seguinte pergunta, como identificar essas relações?

Precisamos saber então quando duas relações $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ são iguais e por isso, usamos o instrumento (número) natural, dizendo que estas proporções são iguais se para quaisquer par de números naturais temos xB é maior, menor ou igual a yA se somente se xD é maior, menor ou igual a yC. Foi Eudoxo (sec. IV a.C) que apresentou essa definição de proporção (livro V de Euclides). Em sua definição as grandezas A, B, C e D são da mesma espécie (segmentos, áreas, volumes etc.), mas, os instrumentos usados para expressar a razão entre grandezas não eram tratados como números reais.

Nessa maneira de interpretação, as relações entre A e B (de mesma espécie), por exemplo, são bem determinadas, pois na Matemática precisamos saber se duas representações designam a mesma relação entre "coisas" ou não. Se essas relações são bem determinadas, então deveria ser possível expressar essa "medida", ou seja, representá-lo por "números". A questão é como fazer isso. Por isso, a criação de número deve ser generalizada.

Agora a razão entre dois segmentos A e B define um corte no sentido de Dedekind (1831-1916), pois se S é o conjunto dos números racionais que formam a parte inferior do corte, então esse corte é definido da seguinte maneira: um número racional $\frac{x}{y}$ pertence a S se xB é menor ou igual a yA.

A questão é que para Eudoxo as razões ou relações entre grandezas são "coisas" reais e essenciais para a interpretação dessas comparações, ou seja, ele assumiu a existência das proporções. Além disso, Eudoxo não usou frações e sim aproximações de inteiros para expressar essas razões. Já Dedekind se libertou dessa necessidade e tratou abstratamente a noção de números irracionais por meio de construção.

Para Dedekind a razão entre grandezas do mesmo tipo só pode ser claramente desenvolvida depois da introdução de números irracionais. Diante disso, Dedekind definiu o conceito de corte diretamente em termos de conjuntos de números racionais, sem usar o desvio da teoria das proporções.

Fica claro que o que Eudoxo elaborou foi uma forma de explicar o significado de relações entre segmentos em termos gerais, pois, hoje temos clareza de que o instrumento, "número irracional" (mundo dos números) usado para representar segmentos incomensuráveis (mundo das grandezas) não possui uma definição objetiva, porém, estudar uma forma alternativa de sua construção torna-se necessária para perceber sensorialmente o significado dessa irracionalidade.

De fato, o conjunto dos números racionais se distribuem infinitamente ao longo da reta e, embora seja denso,[5] deixam lacunas na reta orientada, ou seja, não cobre toda a reta numérica.

Existem infinitos números que representam a incomensurabilidade tais como; as raízes não exatas (diagonal do quadrado e do cubo), a área de um círculo de raio unitário (π), assim como alguns números obtidos pela formação de limites de seqüências infinitas como, por exemplo, o número de Euler **e** obtido pela definição $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1.2 Incomensurabilidade da Diagonal do Quadrado

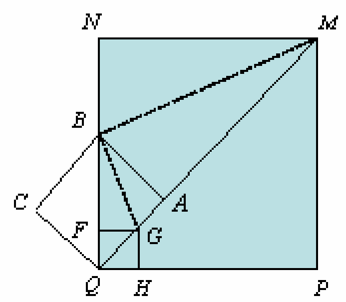
Em relação ao *2º* objetivo vamos mostrar argumentos geométricos (contínuo e discreto) que comprovam a incomensurabilidade do lado e a da diagonal do quadrado, pois,

[5] Na Língua Portuguesa a palavra densa e compacto são considerados como sinônimos, mas na Matemática isso não ocorre. Na matemática compacto está relacionado com conjunto fechado e limitado.

quanto mais formas diferentes de apresentar um mesmo argumento maior é a possibilidade de "enxergar" as peculiaridades e características desse objeto, tornando mais suscetível de aplicação nas ciências em geral, bem como de entender a sua necessidade na fundamentação teórica da Matemática.

Para explicar o argumento geométrico apresentamos o processo de semelhanças (contínuo) e o procedimento discreto de comparação de segmentos para interpretar a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. Com esse objetivo descrevemos a seguir na figura 3 um processo que nos permite construir uma seqüência infinita de quadrados semelhantes.

Figura 3



Conforme a figura 3 temos o *quadrado QPMN* com diagonal MQ e lado MN. Com centro em M e raio MN traçamos um arco de circunferência NA, o qual intercepta a diagonal MQ no ponto A. No ponto A traçamos a tangente ao arco NA que corta o lado NQ em B. Esta construção nos mostra que os triângulos MBA e MBN são congruentes, pois tem dois lados correspondentes congruentes (MN=MA) e os ângulos $M\hat{N}B$ e $M\hat{A}B$ retos. Então os lados AB é igual a NB. Podemos afirmar também que *ABCQ é um quadrado*, pois, o ângulo $A\hat{B}Q$=45°=$A\hat{Q}B$.

Vamos repetir esse processo de construção utilizando o quadrado construído *ABCQ*. Portanto, com centro em B e raio BA traçamos um arco de circunferência AF, o qual intercepta a diagonal BQ do *quadrado ABCQ* no ponto F. No ponto F traçamos uma tangente ao arco AF que corta o lado do *quadrado ABCQ* em G. Os triângulos ABG e BGF são congruentes (AG=FG) e *QHGF é um quadrado*, pois, $H\hat{Q}G$=45°=$H\hat{G}Q$.

Observe que este processo de construção nos permitiu construir dois quadrados (*ABCQ* e *QHGF*) a partir do quadrado *QPMN*, ou seja, temos três quadrados semelhantes. Se quisermos podemos repetir esse processo para construir tantos quadrados que se queira a partir do quadrado *QHGF*.

Portanto, essa construção mostra que se o lado e a diagonal do primeiro quadrado (*QPMN*) tenham uma medida x em comum, então todos os quadrados construídos terão a mesma medida x comum em relação a seus lados e diagonais. Então podemos afirmar que do ponto de vista do discreto, que utiliza conceitos quantitativos, esta medida x teria um tamanho "*zero*", pois será menor do que qualquer grandeza (basta continuar a construção até os quadrados construídos serem menores do que x)

Agora, do ponto de vista do contínuo não se fala de tamanho e por isso, basta observar que no curso da construção, nossa relação vai permanecer a mesma, pois, todos os quadrados são semelhantes e por isso, a relação entre o lado e a diagonal permanece sempre a mesma, ou seja, no que diz respeito ao contínuo temos só um quadrado nos indicando que as figuras geométricas são universais no sentido de Platão.

Diante do exposto vamos usar o diagrama da figura 3 para interpretar a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado tanto do ponto vista do contínuo como do ponto de vista do discreto.

1.2.1 O Algoritmo de Euclides e o Contínuo na Interpretação da Incomensurabilidade da Diagonal do Quadrado

A incomensurabilidade entre a diagonal (A) e lado (B) do quadrado MNPQ da figura 3 pode ser evidenciado se nós aplicarmos a idéia do algoritmo de Euclides. Este algoritmo pode ser interpretado em dois mundos; no mundo discreto da aritmética e no mundo contínuo das grandezas. No mundo discreto esse algoritmo determina o maior divisor comum entre dois números por meio de divisões sucessivas. Se A e B fossem números inteiros, o maior divisor comum é obtido da forma A=B.t+m; B=w.m+p etc. Nesse caso, o maior divisor comum de A e B é o último resto diferente de zero. Neste processo o resto diminui a cada passo, e no caso de números inteiros o processo não pode continuar indefinidamente, pois, em um determinado momento o resto será igual à zero, nos indicando seu maior divisor comum.

Vamos aplicar o algoritmo de Euclides para analisar o aspecto relacional (contínuo) entre a diagonal do quadrado (A=MQ) e o lado (B=NQ). Este procedimento pode nos ajudar a constatar a incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado.

Na tabela 01 (tendo como referência a figura 3) a seguir temos os registros dessas medições sucessivas.

Tabela 1

	Q_1=AM	Q_2=NF=2QA	Q_3=2GH=2GA	...	...	Q_n	...
A=MQ	B=NQ	QA=R_1	FQ=R_2	...	R_{n-2}	R_{n-1}	...
QA=$R_1 \neq 0$	FQ=$R_2 \neq 0$	$R_3 \neq 0$	...	...	$R_n \neq 0$		

Onde:

$A = Q_1 B + R_1$; $B = Q_2 R_1 + R_2$; $R_1 = Q_3 R_2 + R_3$; ...; $R_{n-2} = Q_n R_{n-1} + R_n$. Como as características das grandezas A e B não são totalmente definidas e os restos $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n \ldots$ nunca serão exatos, pois, este processo pode ser continuado infinitamente. Portanto, podemos dizer que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado nunca serão exatos.

O que fizemos até agora (observe a figura 3) foi medir a diagonal MQ usando como unidade MN=NQ e depois medir NQ=MN pelo resto (MQ-MN=QA), então NF=2NB=2QA e o resto dessa operação é FQ, ou seja, podemos perceber nesse processo as regras do algoritmo Euclidiano. Podemos dizer então que se MN e QA são comensuráveis, então MQ (MQ=MN+QA) e MN são também comensuráveis.

Podemos realizar várias medidas como, por exemplo, BQ pela unidade BA e QG pela unidade FQ. Diante disso, verificamos que as relações $\frac{QG}{FQ} = \frac{BQ}{BA} = \frac{QM}{MN}$, ou seja, todas representam a mesma relação entre a diagonal e o lado de um quadrado. Como todos os quadrados são semelhantes, e esse processo de construção dos quadrados pode continuar indefinidamente, podemos dizer que o resto nunca vai desaparecer. Esse processo de medição que permitiu passar do quadrado QPMN por meio do quadrado ABCQ até o quadrado QHGF nos mostra os restos QA e FQ respectivamente, ou seja, esse processo reproduz a mesma relação. Portanto, esse processo pode ser estendido infinitamente, designando a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado.

O procedimento usado na construção dos quadrados semelhantes (igualdades de forma e não de grandezas) da figura 03 nos permite perceber/mentalizar um diagrama que aliado com o modelo algorítmico Euclidiano nos indica a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado de uma forma direta, ou seja, não utilizamos o método da contradição, pois, no que diz respeito ao contínuo, tratado como semelhanças, não faz sentido a contradição. Porém, nesse processo de semelhança é necessário compreender como esse processo é construído, pois, esse processo não pode terminar, chegando sempre na mesma forma. Todavia, acreditamos que nesse procedimento geométrico/diagrama há a possibilidade de percepção/mentalização do contínuo.

1.2.2 O Argumento Discreto Geométrico na Interpretação da Incomensurabilidade da Diagonal do Quadrado

Suponhamos por absurdo que MQ e NQ, diagonal e lado, respectivamente, do quadrado MPQN sejam comensuráveis. Então podemos assumir que existirá um terceiro segmento x, que é submúltiplo comum de MQ e NQ. De forma que x será também submúltiplo comum de BQ e QA, segmentos esses que são, respectivamente, a diagonal e o lado do quadrado QCBA.

O processo pode ser estendido indefinidamente até se encontrar uma construção tal que a diagonal do quadrado seja menor que o segmento x que é um submúltiplo dela e do lado do quadrado, o que é uma contradição, ou seja, o segmento x deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejarmos. Portanto, a diagonal e o lado do quadrado não são comensuráveis. Diante disso, podemos concluir que a diagonal e o lado de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis, ou seja, não há como encontrar um número racional $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ tal que $MQ = \frac{a}{b} QP$.

Esta explicação faz comparações entre uma unidade escolhida e os segmentos que representam a diagonal e o lado. Nesse sentido usamos um processo algorítmico, ou seja, um modelo discreto que nos indica a contradição, bem como a impossibilidade da comensurabilidade.

Verificamos que neste processo há complementaridade entre o processo algorítmico de construção (discreto), que é a comparação das magnitudes da diagonal e o lado dos quadrados, e a questão da estrutura infinita que é a continuidade do processo de construção geométrica. Lembrando que do ponto de vista do infinito não faz sentido estabelecer diferenças entre essas magnitudes, pois as razões terão o mesmo "valor numérico".

Na justificativa da incomensurabilidade entre a diagonal do quadrado e o seu lado usamos o processo de semelhanças de quadrados (contínuo) e o processo operativo discreto. No processo de semelhança não tem sentido o uso do tamanho de grandezas e sim uma maneira de perceber que a construção dos quadrados pode ser continuada indefinidamente. Já no processo operativo discreto consideramos o tamanho das grandezas nos indicando uma contradição.

Temos, portanto, dois processos cognitivos que pode agir em nossa mente, ou seja, o procedimento operativo que calcula e compara e o procedimento de semelhança que é intuitivo, que capta a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado por meio da sensibilidade. Esses processos cognitivos atuam simultaneamente em nossa mente, provocando ações complementares entre o contínuo (intuição) e o discreto (algoritmo) na compreensão da incomensurabilidade que por sua vez propicia compreender o conceito de número irracional.

1.2.3 Argumento Analítico

Em relação ao *3º* objetivo que faz parte do mundo dos números vamos mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ por meio do conhecido processo analítico que utiliza o teorema de Pitágoras, descrito na literatura por vários autores, como por exemplo, em Bongiovanni; Vissoto e Laureano (1993, p. 385). Esse teorema nos diz que o ponto que representa a diagonal do quadrado na nossa reta corresponde a $\sqrt{2}$ se o ponto que representa o lado do mesmo quadrado equivale à unidade 1, ou seja, se t é a medida da diagonal desse quadrado, por isso, obtemos $t^2=2$ que implica em $t^2-2=0$. Nesse sentido, $t=\sqrt{2}$ é um número algébrico[6] que representa a raiz dessa equação. Supondo $t=\sqrt{2}$ racional. Logo existem inteiros x e y ($y \neq 0$) e uma fração irredutível $\frac{x}{y}$, tal que $\sqrt{2}=\frac{x}{y}$.

Neste caso, $\frac{x^2}{y^2}=2$. Portanto $x^2=2y^2$. Daí, x^2 é par e, assim x é par. Então podemos substituir x por 2k, $k \in Z$ em $x^2=2y^2$, obtemos $4k^2=2y^2$, de modo que $y^2=2k^2$,e, assim, y^2 é par então y é par e, daí, y=2b, $b \in Z$. De forma que podemos escrever $\frac{x}{y}=\frac{2k}{2b}$, o que é um absurdo, pois, $\frac{x}{y}$ não é irredutível. Portanto, a suposição de que $\sqrt{2}$ é racional é falsa. Logo $\sqrt{2}$ é irracional.

---

[6] Um número algébrico é qualquer número que satisfaz alguma equação algébrica de coeficientes inteiros não nulos.

Neste argumento aparentemente aritmético está subentendido à idéia de número como relação entre grandezas, ou seja, o conceito de número pode passar pelo conceito de medida, mas essa medida está de certa forma relacionada à noção de números, então para compreender o conceito da raiz quadrada de dois devemos estabelecer o aspecto complementar entre o discreto e o contínuo.

1.2.3.1 O Número Primo Três e a Irracionalidade da Raiz Quadrada de Dois

Ainda em relação ao *3º* objetivo apresentamos uma alternativa para demonstrar a irracionalidade da raiz quadrada de dois. Para esse fim usamos uma propriedade do número primo três, que é a seguinte: se o número 3 é divisor de dois números inteiros distintos (x e y), então o número 3 será divisor de $(x^2 + y^2)$ e se $(x^2 + y^2)$ é divisível por 3, então 3 divide x e 3 divide y.

Considerando $\sqrt{2} = \dfrac{x}{y}$ com x e y inteiros e primos entre si, então $x^2 = 2y^2$ o que implica em $x^2 + y^2 = 3y^2$ ou $\dfrac{x^2 + y^2}{3} = y^2$. O que significa que $(x^2 + y^2)$ dividido por 3 é um inteiro (y^2) e, portanto, 3 é divisor de x e y, que é uma contradição, pois, x e y são primos entre si. Justificando a irracionalidade da raiz quadrada de dois pela propriedade do número primo 3.

Estas explicações mostram que a raiz quadrada de dois não é racional. Para afirmar que esse número é irracional devemos estar de posse do conjunto dos números reais. Mas, o que tem que ficar claro é que a raiz quadrada de dois é resultado de uma relação entre medidas, ou seja, esse número não existe independente de um contexto.

Compreender que o processo algorítmico propicia o cálculo de seus dígitos e que esses dígitos são infinitos e não periódicos, nos direciona a perceber que a raiz quadrada de dois está no aspecto relacional e não no objeto (quadrado). Contudo, a explicação geométrica (contínuo) da incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o lado, nos propicia perceber a noção da continuidade por meio de semelhanças, pois, só a explicação numérica ou analítica não permite essa percepção/mentalização.

Acreditamos que os objetos matemáticos, como é o caso dos números irracionais, precisam de atividades que tenham possibilidades de acessar essas relações. Nesse sentido, precisamos elaborar alternativas de apresentação dos conceitos matemáticos, dessa forma os objetos de estudo da Matemática ganham mais significados.

Na busca de procedimentos algorítmicos ou modelos discretos que nos permitem perceber/mentalizar a caracterização dos números irracionais apresentamos a seguir o número de Euler **e** obtido por construções de intervalos encaixados.

1.3 A Definição do Contínuo: O Exemplo do Número de Euler

Nosso propósito aqui é trabalhar com o número de Leonhard Euler (1707–1783), que é definido usando limite $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e que pode ser transformado por meio de manipulações analíticas (como veremos no capítulo 02) na expressão **e** = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Temos a intenção neste momento de elaborar uma justificativa para compreender que o número de Euler **e** não é racional. Dessa forma, o valor do número **e** será computado por um processo operacional algorítmico discreto na forma de intervalos encaixados, ou seja, tratamos a relação entre continuidade (parte da reta) e operação na construção desse número por meio da comparação de intervalos da reta.

Este processo de construção nos permitirá não só perceber, como também provocar uma discussão no sentido de apreender, para aprendermos e melhorarmos o nosso entendimento sobre o contínuo numérico, pois, além de propiciar uma possibilidade do cálculo de seus dígitos, nos remeterá a um ponto que caracterizará uma possível visualização/mentalização do lugar geométrico no qual provavelmente se localiza o número de Euler **e**.

A definição do número **e** nos permite escrevê-lo por meio de uma série representada por:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots \text{ ou}$$

$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t!}$. Podemos fazer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

A expressão $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ representa uma série infinita ($n \to \infty$) que generaliza o conceito de soma infinita. Determinando seus primeiros termos, temos os valores, conforme resultados na tabela (2) a seguir:

Tabela 2

n	$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
1	$S_1 = 2$
2	$S_2 = 2 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
3	$S_3 = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{16}{6} \cong 2{,}66...$
4	$S_4 = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} \cong \mathbf{2{,}7}0833...$
5	$S_5 = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{326}{120} \cong \mathbf{2{,}7}166...$
6	$S_6 = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \cong \mathbf{2{,}718}0555....$
7	$S_7 = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{13700}{5040} \cong \mathbf{2{,}718}2539....$
8	$S_8 = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \frac{109601}{40320} \cong \mathbf{2{,}718}278....$

Esse procedimento pode ser continuado indefinidamente. Diante disso, podemos perceber que os termos da série a partir de S_6 ficam cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja, o seu valor estaciona próximo de 2,718....(o valor do número de Euler **e** com três casas decimais.

O que faremos agora é mostrar também que a série S=**e**=$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ nos permite construir infinitos intervalos fechados da forma I_n=[a,b], com extremidades racionais, de modo que o valor aproximado do número de Euler **e**, ou seja, o número 2,71828182845... esteja contido em cada um desses intervalos[7].

Os primeiros intervalos a serem construídos são $I_1=[2,3]$ e $I_2=[\frac{5}{2!},\frac{6}{2!}]$. O fato de S ser maior que 2 (S>2) e maior que $\frac{5}{2}$ ($S>\frac{5}{2}$) é óbvio, pois S_1 já é igual a 2 e S_2 é $\frac{5}{2}$. Para mostrar que S é menor que 3 faremos:

$$S= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$$

$$S= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3.2!}+\frac{1}{4.3.2!}+\frac{1}{5.4.3.2!}...$$

$$S = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4.3}+\frac{1}{5.4.3}+...\right] < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...\right]$$

$S< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\right]$. A série $\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\right]$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e sua soma pode ser calculada por $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$. Então podemos dizer que:

$$S<\frac{5}{2}+\frac{1}{2!}.\frac{1}{2} \Rightarrow S<3.$$

Por isso, afirmamos que $2<$ **e** <3, assim como $\frac{5}{2}<$ **e** <3.

Agora vamos construir mais dois intervalos $I_3=[\frac{16}{3!},\frac{17}{3!}]$ e $I_4=[\frac{65}{4!},\frac{66}{4!}]$.

$$S= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...$$

---

[7] No capítulo 03 não só apresentamos provas da não racionalidade do número de Euler **e** como também veremos que esse processo pode ser generalizado de forma que o intervalo $I_n=[a,b]$ possa ser escrito como $I_n=\left[S_n;S_n+\frac{1}{n!}\right]$, ou seja, $a=S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ e $b=S_n+\frac{1}{n!}$.

$$S= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{5.4}+\frac{1}{6.5.4}+...\right]$$

$$S< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+...\right]$$

$$S < \frac{16}{3!}+\frac{1}{3!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{16}{3!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{3}$$

$$S < \frac{16}{3!}+\frac{1}{3!}=\frac{17}{3!}, \text{ então } \frac{16}{3!}< e< \frac{17}{3!}.$$

O quarto intervalo será:

$$S= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+ ...$$

$$S = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6.5}+\frac{1}{7.6.5}+...\right]$$

$$S < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+...\right]$$

$$S < \frac{65}{4!}+\frac{1}{4!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{65}{4!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{4}$$

$$S < \frac{65}{4!}+\frac{1}{4!}=\frac{66}{4!}, \text{ então } \frac{65}{4!}< e <\frac{66}{4!}.$$

Observamos que o valor aproximado do número de Euler **e** (2,71828) está presente no interior de cada um dos intervalos: [2,3], $[\frac{5}{2!},\frac{6}{2!}]$, $[\frac{16}{3!},\frac{17}{3!}]$ e $[\frac{65}{4!},\frac{66}{4!}]$. De maneira semelhante podemos construir tantos intervalos quanto quisermos como, por exemplo: $I_5=\left[\frac{326}{5!},\frac{327}{5!}\right]$ e $I_6=\left[\frac{1957}{6!},\frac{1958}{6!}\right]$.

Como esse processo operacional tende para o infinito, podemos definir esse número como uma construção contínua. Entretanto, o processo contínuo tratado por meio do conceito de limite nos permitirá entender que o número de Euler **e** está no processo relacional entre o algoritmo operacional e a continuidade, pois, para conceber a idéia do número de Euler **e** precisamos da noção do contínuo.

Podemos proceder de forma análoga, e indefinidamente construir tantos intervalos quanto se queira. Estes intervalos (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, ...) podem ser representados numa reta numerada de forma que possamos visualizar seu comportamento graficamente (veja figura 06 do capítulo 03).

Este processo nos permite perceber que o comprimento de cada intervalo fica cada vez menor para n suficientemente grande. Diante disso, perguntamos: será que conseguimos encontrar um único número, e por sua vez um único ponto para o qual a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge? Se conseguirmos, como garantir a "unicidade" e "existência" desse número?

Então, podemos mostrar que a igualdade $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t!}$ nos permite construir uma explicação que o número de Euler **e** não é racional. De fato:

Fazendo $e = \frac{p}{q}$ e multiplicando por n! (n>q) temos:

$n!\left[\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right] = n!\left[\sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t!}\right]$. A Expressão $n!\left[\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right]$ é um inteiro que chamamos de **N** (no capítulo 03 faremos uma discussão detalhada sobre este fato). Portanto:

$$0<\mathbf{N}=n!\left[\sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t!}\right] = n!\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \ldots\right]$$

$0<\mathbf{N}=n!\left[\sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t!}\right] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^i} = \frac{1}{n}$ (aplicamos aqui a fórmula da soma de uma progressão geométrica infinita) que é um número menor do que 1. Então, temos o número inteiro **N** compreendido entre 0 e 1 (0<N<1) que é um absurdo. Por isso, podemos afirmar que o número de Euler **e** não é racional.

Observe que usamos assuntos relativamente simples como frações, desigualdades e somas de progressões geométricas infinitas para provocar uma discussão e mostrar que os números racionais não são suficientes para representar todos os pontos da reta. De posse deste conhecimento e desta explicação podemos introduzir o estudo dos números irracionais por meio desta construção ao invés da raiz quadrada de dois, fato que é comum nos livros didáticos atualmente.

Acreditamos que podemos fazer esta atividade a partir do ensino médio, fornecendo uma alternativa para o professor trabalhar este assunto, evidenciando a necessidade de ampliar o conjunto dos números racionais. Contudo, quanto mais formas diferenciadas de se apresentar um objeto matemático, mais possibilidade haverá de tornar o conhecimento com sentido e significado[8], pois, essas formas diferentes de apresentar o mesmo objeto matemático possuem características complementares.

Os números irracionais podem também ser obtidos pela criação de uma regra de formação não-periódica, por exemplo: usando apenas os algarismos zero e 4 podemos formar um número irracional, colocando o 4 seguido de um zero, depois o 4 seguido de dois zeros e assim sucessivamente, formando o número x=0,40400400040000....

Quais são as diferenças de natureza quanto à irracionalidade de: x=0,40400400040000..., diagonal do quadrado de lado unitário ($\sqrt{2}$), π e o número de Euler **e**? O que significa compreender as características dos números irracionais? Como garantir de fato, o sentido da "possível existência" dos números irracionais? Estamos cientes de que na reta existem pontos que representam números, e que estes não podem ser expressos na forma de fração. Então como estudar esse fato?

Para tentar estabelecer uma correspondência mútua entre números por um lado, e pontos na reta por outro, é necessário construir números que tenham características que preencham as lacunas deixadas pelos números racionais. Em relação a essa correspondência Dedekind (1969, p. 9) declara:

> Pode-se mostrar facilmente que há um número infinito de comprimentos que são incomensuráveis com a unidade de comprimento, portanto podemos afirmar que: a reta *L* é infinitamente mais rica em pontos do que o domínio *R* dos números racionais é em números. Se agora, como é nosso desejo, nós tentamos seguir aritmeticamente todos os fenômenos da reta, o domínio dos números racionais é insuficiente e torna-se absolutamente necessário que o instrumento *R* construído pela criação dos números racionais seja essencialmente aperfeiçoado pela criação de novos números tais que o domínio dos números ganhará a mesma completude, ou como nós podemos dizer imediatamente, a mesma *continuidade* da reta.

De acordo com Dedekind os números racionais não são suficientes para descrever matematicamente o mundo, bem como as figuras geométricas, por isso, precisamos construir

[8] Significado (do lat. *significare*) **1**. A teoria do significado, em filosofia da linguagem, examina os vários aspectos de nossa compreensão das palavras e expressões lingüísticas e dos signos em geral. Um desses aspectos centrais é a relação de *referência*, que é um dos elementos constitutivos do significado. A referência é precisamente a relação entre o signo lingüístico e o real, o objeto designado pelo signo. Outro aspecto, indicado na distinção proposta por Frege, é o sentido, ou seja, o modo pelo qual a referência é feita (JAPIASSÚ & MARCONDES, 1996, p. 247).

os números reais que objetivam conectar com os fenômenos que envolvem o processo de compreensão das "coisas" naturais e dos fundamentos da Matemática.

Durante um longo período de tempo os números reais foram tratados como decimais finitas ou infinitas, sendo que as decimais infinitas que não representavam números racionais eram consideradas números irracionais.

> Até meados do século XIX, estas considerações eram aceitas como uma explicação satisfatória para o sistema de números racionais e irracionais, o contínuo numérico. O enorme avanço da Matemática desde o século XVII, em particular o da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral, se desenvolvia com segurança utilizando este conceito do sistema numérico como base. Porém, durante o período de reexame crítico de princípios e consolidação de resultados, percebeu-se cada vez mais que o conceito de número irracional exigia uma análise mais precisa (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 75).

O que temos aqui é um processo operacional que nos remete a uma percepção geométrica que além de determinar o valor do número de Euler **e**, possibilita uma discussão sobre a não racionalidade desse número. Nessa discussão está presente a idéia do número **e** numa perspectiva complementar entre o algoritmo e o tratamento contínuo do comprimento de cada intervalo, pois, esse processo algorítmico permite perceber que o número **e** representa uma relação, ou seja, não está no sujeito e nem no objeto, por isso, precisamos das representações por meio de símbolos, para entrar em contato com essas relações.

A concepção finitista dos gregos não permitiu avanço na compreensão dos conceitos de números irracionais (CARAÇA, 1956, p. 87), porém, Eudoxo com sua teoria das proporções tratou "superficialmente" dessa questão. Segundo Boubarki (apud BROLEZZI, 1996. p. 18-19) bastou os gregos terem colocado a questão da incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado para que concluamos que possuíam uma distinção muita clara entre uma razão e seus valores aproximados. Entretanto, os gregos não fizeram uma extensão do universo numérico. Isto provavelmente ocorreu devido à ausência de uma linguagem que facilitasse o trabalho com o infinito, pois, não podemos tratar o infinito num sentido puramente numérico e intuitivo.

A Matemática dos gregos surgiu das relações com as formas de maneira contemplativa da natureza. Enquanto na Matemática Moderna está implícito o aspecto relacional com o mundo e com o próprio ser. Somente a partir do século XVI foram retomadas as discussões a respeito do processo de funcionamento do infinito e da continuidade, assuntos que necessitam de uma melhor compreensão do conceito de limite, o que, por sua vez, exige domínio da linguagem algébrica.

Pensadores dessa época como Galileu (1564–1642) e Leibniz (1646–1716) usaram os instrumentos matemáticos como números e funções, trabalhando com a continuidade do movimento, pois, mesmo sabendo da problemática da incomensurabilidade trataram da continuidade dos pontos sobre a reta como conseqüência da densidade dos racionais, ou seja, não se preocuparam em discutir e ampliar o conjunto dos números racionais.

Até o início do século XVIII não havia um tratamento rigoroso que permitisse matematizar o contínuo. De fato essa compreensão nos coloca no "interior" do infinito, bem como nos pontos de um sistema de coordenadas. Com a introdução do infinito nossas explicações nos conduzem a descobertas imprevisíveis e tudo pode tornar-se complicado. De forma que a criação dos números reais pelo processo de limite propiciou o começo do entendimento do contínuo numérico.

Considerando que os números expressam relações e essas relações não podem ser acessadas diretamente, precisamos dos meios para nos indicar a característica de um objeto matemático. Este fato aliado com a questão de que nem todos os números são computáveis nos "obriga" a construir os fundamentos da Matemática não só pela construção, mas também pela via da axiomatização.

No âmago da fundamentação da Matemática e, consequentemente, a compreensão da continuidade da reta, está presente a teoria dos números, que foi axiomatizada no final do século XIX. O matemático Giuseppe Peano (1858-1932) foi o primeiro a organizar os números naturais na forma de axiomas[9]. Peano partiu de três conceitos primitivos: *unidade*, *número*, *sucessor*, e de cinco proposições que os relacionam, são elas:

1. A unidade é um número;
2. Todo o número tem um e um só sucessor que é um número;
3. Se dois números têm o mesmo sucessor, são iguais;
4. A unidade não é sucessor de nenhum número;
5. Se uma classe S de números contém a unidade e se a classe formada pelos sucessores dos números de S está contida em S, então todo o número pertence a S. "Esta proposição é habitualmente designada pelo nome de princípio de indução completa ou

[9] Segundo Caraça (1956, p. 20) durante muito tempo estabeleceu-se uma distinção, de certo modo forte, entre postulado e axioma; nos Elementos de Euclides vêm em grupos separados os postulados e os axiomas ou noções comuns. Modernamente tende a dar-se cada vez menos importância à diferença de designações e está-se generalizando o uso do termo axioma para as proposições fundamentais que relacionam os conceitos primitivos.

princípio de indução finita e serve de base ao método de raciocínio por recorrência ou por indução" (CARAÇA, 1956, p. 21).

Os números racionais podem ser introduzidos por meio da extensão dos números inteiros, porém, apresentamos processos de construções de números que estão na reta, mas que não são racionais, ou seja, os irracionais que são também números reais.

A construção teórica dos números reais não parte necessariamente de questões "práticas imediatas"[10], pois, estas situações não exigem quantidades infinitas de casas decimais. De modo que o trabalho com os irracionais são exigências teóricas de coerência e consistência da Matemática, pois, esta é o suporte de outras ciências.

Entretanto, a pergunta ainda continua, existe ou não um ponto P para o qual todos os intervalos da construção do número de Euler **e** $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!})$ convirjam? A resposta tradicional do ponto de vista de Eudoxo: é óbvio que existe, pois, em sua teoria das proporções ele contornou essa questão por meio de aproximações de inteiros. Mas, Dedekind questiona: como se sabe? Ele mesmo responde: porque a reta é contínua. E se a reta é contínua esse ponto P deve existir, ou seja, a reta é contínua e por isso o ponto P existe e se o ponto P existe então a reta é contínua.

Dedekind com sua genialidade propiciou uma das interpretações mais importantes dessa "possível" biunivocidade entre os números e os pontos da reta. O estudo dos números reais feito por Dedekind apóia-se nos racionais, e estes são definidos por meio de pares de números inteiros, que por sua vez utiliza os axiomas de Peano.

A idéia central na construção dos números reais feita por Dedekind (1969, p.10-11) é a forma que ele usou para interpretar a continuidade. Sobre isso ele diz:

> A comparação do domínio *R* dos números racionais com a reta conduziu ao reconhecimento da existência de lacunas, de certa incompletude ou descontinuidade, enquanto nós designamos a completude da reta, ou seja, ausência de lacunas, ou continuidade. Então, a continuidade em que consiste? Tudo deve depender da resposta para esta questão, e só por meio desta que nós obtemos uma base científica para a investigação de *todos* os domínios contínuos. Obviamente nada se ganha com observações vagas na conexão ininterrupta das partes menores; o problema é indicar uma característica precisa da continuidade que pode servir como base para validar deduções. Por muito tempo eu considerei isto em vão, mas finalmente eu achei o que estava buscando. Esta descoberta, talvez, seja julgada diferentemente por diferentes pessoas; a maioria pode achar isto muito trivial. Consiste no seguinte. No conceito de corte foi chamado atenção para o fato de que todo ponto *p* da reta produz uma

[10] Contudo, acreditamos que o estudo teórico dos números irracionais possibilita tratar com mais precisão os dados físicos, por exemplo, e os modelos operacionais que tratam esses dados são construídos por meio do tratamento complementar entre o discreto e contínuo.

> separação da mesma em duas partes tal que todo ponto de uma parte estão do lado esquerdo de todos os outros pontos. Vejo a essência da continuidade na inversão dessa idéia, isto é, no seguinte princípio: "Se todos os pontos da reta caem em duas classes de forma que todo ponto da primeira classe estão à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e só um ponto que produz esta separação de todos os pontos em duas classes, isto corta a reta em duas porções (semi-retas)." Como já disse penso que não errarei assumindo que todas as pessoas assumirão a verdade desta declaração imediatamente; a maioria de meus leitores ficará muito desapontada em aprender que nessa observação comum, o segredo da continuidade será revelado. Posso dizer que eu estou contente se todas as pessoas acharem o princípio acima tão óbvio e, portanto em harmonia com as próprias idéias de uma reta; Porque eu sou totalmente incapaz de apresentar qualquer prova exata disto, e ninguém tem o poder para isto. A suposição desta propriedade não é nada mais do que um axioma pelo qual nós atribuímos à reta sua continuidade.

O que fica claro nessa forma de interpretar a continuidade, entretanto, é a dificuldade de provar, seja por construção[11] ou por contradição, a "verdadeira existência" dos números irracionais. Dessa forma, um ponto irracional qualquer, como por exemplo, o número de Euler **e**, foi postulado por Dedekind e com isso ele definiu o contínuo exatamente por meio dessas características. Já que não sabemos se a reta ou o espaço são realmente contínuos, sobre essa questão Dedekind (1969. p.11) afirma que:

> Mesmo se o espaço tem uma existência real, *não* é necessário que seja contínuo, pois, muitas de suas propriedades permaneceriam idênticas, se ele ficasse descontínuo. E se nós soubéssemos com certeza que aquele espaço era descontínuo, não haveria nada que nos impedisse caso desejássemos, de preencher suas lacunas, em pensamento, e dessa forma construir a continuidade; este preenchimento consistiria numa criação de novos pontos-individuais e isto teria que ser efetuado conforme o princípio anterior.

Então esta concepção de correspondência entre números e pontos da reta sugere que a construção do número de Euler **e**, ou um ponto irracional P qualquer nos remeta a considerar que a existência desse número pode ser encarada somente do ponto de vista de um axioma ou postulado, pois, não temos como provar a verdadeira existência, assim como localizar o lugar geométrico do número de Euler **e**.

Este fato tem como objetivo atribuir à reta a qualidade de ser completa, ou seja, contínua e que estabeleça uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e todos os números. Os números que juntamente com os racionais dá a reta à característica de continuidade são os números irracionais, de forma que a união dos números racionais com os números irracionais forma o conjunto dos números reais, que estabelece o contínuo numérico.

---

[11] Se bem que esse contínuo não pode ser construído, sem dificuldades lógicas, a partir dos números inteiros, uma vez que, por exemplo, no conceito, ocorrem definições não predicativas, surgindo novamente a complementaridade do conceito de função ou do sistema dos números reais, como interação entre concepções holísticas e contínuas e conceitos discretos operativos (OTTE, 1993, p. 233).

Considerando que os processos de percepção do contínuo, ou seja, da irracionalidade promovida pela construção do número de Euler **e** por intervalos encaixados, e também pela diagonal do quadrado por meio de semelhanças, são atividades diferentes, porém, representam perspectivas de complementaridade entre o discreto e o contínuo, pois, a complementaridade está no interior das atividades exercidas pela mente humana e pelo objeto.

Nosso propósito, também é ensaiar a possibilidade de construção dos números reais motivado pela irracionalidade do número de Euler **e**, ou seja, torná-lo como "símbolo" de construção dos números reais.

Nesse sentido, a construção do número de Euler **e** por intervalos, bem como da diagonal do quadrado nos propiciará a necessidade de se discutir, mesmo que superficialmente, como as principais idéias de construção do conjunto dos números reais foram desenvolvidas. Isto na verdade são maneiras "diferentes" de estabelecer os fundamentos da Matemática por meio do contínuo numérico.

Nesta perspectiva partimos do pressuposto que já conhecemos os números racionais, bem como suas propriedades de modo que abordamos as idéias centrais da construção dos números reais por intervalos encaixados; os métodos de Dedekind e Cantor[12] e, por fim a axiomatização dos números reais.

1.3.1 Intervalos Encaixados

A definição dos números reais por intervalos encaixados é uma importante conseqüência da propriedade do supremo.

Chama-se supremo de um conjunto A ao número T que satisfaz as duas condições seguintes (ÁVILA, 2005, p. 63):

1. $a \leq T$ para todo $a \in A$;

2. dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $a \in A$ à direita de $T - \varepsilon$, isto é, tal que $T - \varepsilon < a$.

Esta definição nos permite dizer que todo conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo.

[12] Nos métodos de Dedekind e Cantor foi necessário usar algum conjunto infinito de números racionais, a fim de definir ou construir um número real. Assim, no esforço de reduzir a análise e a geometria à aritmética, introduziram-se conjuntos infinitos nos fundamentos da matemática (DAVIS & HERSH, 1989. p. 372).

Os intervalos encaixados podem ser expressos por meio de uma seqüência de intervalos $I_n = [x_n, y_n]$ com $(x_n) \neq (y_n)$ e n=1,2,3,4,5,6,...; que podem ser marcados numa reta numérica, de forma que os extremos dos intervalos obtidos sejam números racionais, em que o comprimento $|I_n| = y_n - x_n$ do n-ésimo intervalo tenda a zero quando n crescer infinitamente.

Estas seqüências (x_n) e (y_n) são respectivamente não decrescentes e não crescentes, ou seja, os valores de (x_n) vão aumentando e aproximando de um número real **a**, enquanto os valores de (y_n) vão diminuindo e ficando próximos de **a**.

Considerando que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, de modo que existe $\{\mathbf{a}\} \in I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap \ldots \cap I_n \cap \ldots$, podemos dizer que **a** é único, isto é, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap \ldots \cap I_n \cap \ldots = \{\mathbf{a}\}$ (ÁVILA, 2005, p. 95).

Esta definição nos diz que $x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1$, então a seqüencia (x_n) é limitada à direita por y_1 e (y_n) é limitada à esquerda por x_1. Logo essas duas seqüências possuem limites. Consideramos X o limite de (x_n) e Y o limite de (y_n).

Como $x_n < y_n$ podemos escrever $x_n \leq X \leq Y \leq y_n$. Isto quer dizer que o intervalo $[X,Y] \subset I_n$ para todo n. De modo que, se X<Y, a intersecção dos intervalos I_n é o próprio intervalo [X,Y] e se Y_n-X_n tende a zero podemos dizer que X=Y=**a**, ou seja, o valor de **a** é único.

> Vê-se diretamente que não pode haver mais que um ponto comum a todos os intervalos, porque os comprimentos dos intervalos tendem a zero, e dois pontos diferentes não poderiam estar ambos contidos em qualquer intervalo menor do que a distância entre eles (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 82).

Para estabelecer reciprocidade entre os pontos da reta e os números define-se **a** como sendo número real. Se **a** não for racional, será um número real, ou seja, o número irracional estabelece o contínuo numérico. Aceitar que o número **a**, caso não seja racional, pertença a todos os intervalos construídos é plausível, pois, aparentemente é intuitivo e lógico, mas podemos dizer também que, com os instrumentos que temos, não é possível "enxergar" todas as suas peculiaridades, bem como a sua natureza.

Diante disso, como construir um argumento que questiona o fato da unicidade desse número **a** caso seja irracional? Em função da impossibilidade de explicar essa possível unicidade[13], pois, nem tudo que é definido pode ser explicado empiricamente ou logicamente.

---

[13] Essa questão pode ser enfrentada dizendo que não tem como saber se esse número é único, pois, o processo é infinito e por isso, nunca sabemos se é único ou não. Nesse caso, podemos tratar este tópico de outra forma, que é o caso da análise não-standard, que não é o nosso foco neste momento.

Qual é a característica desse número que pertence a todos os intervalos caso não seja racional? "A existência sobre a reta numérica (considerada como uma reta) de um ponto contido em cada seqüência de intervalos encaixados com pontos extremos racionais é um *postulado fundamental da geometria*" (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 82). Este fato está de acordo com a forma que Dedekind interpretou a continuidade.

Um número irracional definido a partir de uma seqüência de intervalos racionais encaixados é na verdade um símbolo, mas o aspecto matemático importante é que estes números irracionais são capazes de preservar todas as leis básicas do corpo dos números racionais.

Do ponto de vista teórico a construção dos números reais por intervalos encaixados propicia fundamentar a base da Matemática e por outro lado, do ponto de vista físico, possibilita determinar a magnitude de alguma quantidade observável por meio de uma seqüência de exatidão cada vez maior. Por isso, a discussão da irracionalidade se torna necessária, pois tanto ajuda a fundamentar a Matemática, bem como tratar os fenômenos com mais precisão.

Portanto, a construção dos números irracionais por intervalos encaixados, trata-se de um postulado, e o número de Euler $\mathbf{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ definido e construído anteriormente é um exemplo dessa construção, ou seja, o número irracional existe num contexto de postulado e a construção do número **e** por intervalos pode nos ajudar a visualizar e perceber a necessidade dessa definição.

Agora para realmente entender que este número é conseqüência de um postulado é necessário perceber que nessa construção está presente uma comparação entre partes da reta, ou seja, elaboramos atividades por meio de processos operacionais, que caminham para o infinito, e com isso percebemos que a continuidade da reta ocorre no interior do aspecto contínuo dos intervalos considerados. Comprovando com isto que esta construção é na verdade uma "mistura" que se complementa com o discreto e contínuo.

1.3.2 Cortes de Dedekind

Dedekind tratou do contínuo numérico por meio do contínuo geométrico. Para isso utilizou a definição de corte, provavelmente inspirado na teoria das proporções de Eudoxo, na qual percebeu a separação dos números racionais em duas partes (ÁVILA, 1993, p. 13). Sua preocupação em compreender o contínuo numérico se tornou latente no momento em que trabalhava com Cálculo Diferencial por volta de 1858 e teve a necessidade de provar que uma função monótona e limitada, definida num intervalo, tem limite.

Nesse momento ele percebeu a falta de uma fundamentação adequada para os números reais (DEDEKIND, 1963, p. 1). O pensamento de Dedekind sobre a definição de número real por meio do conceito de corte pode ser resumido da seguinte forma:

Suponhamos que conseguimos separar o conjunto dos números racionais em duas classes, P e M de maneira que cada elemento m da classe M seja maior do que cada elemento p da classe P. Dedekind denominou essa classificação/separação de corte no conjunto de números racionais. Segundo Courant e Robbins (2000, p. 85) num corte existem três possibilidades, sendo que uma e somente uma deve ser válida: 1) existe um maior elemento p' em P. Este é o caso em que P é o conjunto de todos os números racionais menores ou iguais a dois e M de todos os números racionais maiores do que dois. 2) existe um menor elemento m' em M. Este é o caso em que P é o conjunto de todos os números racionais menores que dois e M de todos os números racionais maiores ou iguais a dois. 3) não existe nem um maior elemento em P e nem um menor elemento em M. Com isso define-se número real como sendo o elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais: se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional, se não for racional se chamará irracional.

Segundo Courant & Robbins (2000, p. 86) filosoficamente, a definição de Dedekind de números irracionais envolve um grau bastante elevado de abstração, uma vez que ela não coloca quaisquer restrições quanto a natureza da lei Matemática que define as duas classes P e M.

Portanto, a descontinuidade pode ser caracterizada pela existência de cortes sem elementos de separação no conjunto dos números racionais. Com a união dos novos números produzidos pelos cortes não-racionais, obtemos o conjunto dos números reais. Dessa forma, os números irracionais vêm preencher as "lacunas" deixadas pelos números racionais (ÁVILA, 2005, p. 58). Podemos explicar a propriedade do supremo que garante a construção dos números reais por intervalos encaixados usando a definição de corte. Então:

Considere um conjunto não vazio qualquer A e o conjunto M de todos os números reais que são menores que algum elemento de A, e seja B o conjunto dos números reais restantes. Isto nos permite dizer que (M,B) é um corte no conjunto dos números reais. Como todo corte de números reais possui um número real como elemento separador[14]. Portanto, chamando esse número separador de **a**, vemos que é o maior elemento de M ou o menor elemento de B, mas **a** não pode pertencer a M, senão ele seria menor que um elemento de $x \in B$, de forma que **a** não seria elemento de separação. Portanto, **a** é o supremo do conjunto M e o mínimo do conjunto B (ÁVILA, 2005, p. 63).

Para ilustrar esta construção citaremos dois exemplos:

1- O conjunto P formado pelos números racionais negativos, zero e pelos racionais positivos x tais que $x^2 < 2$ determina um corte que define o número irracional $\sqrt{2}$ como número separador. Este é o caso 3 anterior em que o conjunto P não tem maior elemento. E se nós considerarmos como M os números racionais restantes, não terá menor elemento.

2- Os conjuntos C={x $\in$ Q tal que x<**e** = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ } e D={x$\in$Q tal que x>**e**=$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$} também determina um corte, que é definido pelo número irracional **e**= 2,718281828....

> Vê-se facilmente que esta definição está de acordo com a definição por intervalos encaixados; qualquer seqüência I_1, I_2, I_3, ... de intervalos encaixados define um corte se colocarmos na classe M todos aqueles números racionais que são excedidos pela extremidade do lado esquerdo de pelo menos um dos intervalos I_n, e em B, todos os outros números racionais (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 86).

Portanto, o tratamento do número de Euler **e** por intervalos nos propicia perceber na reta, o aspecto visual do conceito de corte, pois, só a definição em si de corte é muito abstrato e esta construção pode nos fazer perceber o quanto esse conceito foi importante para o estabelecimento da biunivocidade entre os números e os pontos da reta.

Esta construção dos números reais considera a reta contínua e depois faz os cortes. De forma que cada corte está associado a um número, ou seja, pode separar os números racionais dos irracionais. Isto mostra que os números reais são construídos por meio da noção de complementaridade, partindo do contínuo para o discreto.

Na verdade o conceito de corte proposto por Dedekind trata de um postulado que incorpora os números irracionais ao conjunto dos números racionais formando os números reais.

[14] Esta afirmação pode ser considerada um teorema de Dedekind, que estamos usando sem demonstração.

1.3.3 O Contínuo Numérico de Cantor

George Cantor (1845–1918) tratou da teoria dos números reais considerando as seqüências de Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), provavelmente motivado pelo estudo de representações das funções reais por meio de séries trigonométricas. O método usado por Cantor, que é mais concreto, segundo Courant e Robbins (2000, p. 86) é pelo fato de que: 1) os números reais podem ser considerados como decimais infinitas, e 2) decimais infinitas são limites de frações decimais finitas. Se nós não considerarmos a dependência do sistema decimal, podemos afirmar com Cantor que qualquer seqüência monótona de números racionais define um número real se essa seqüência "convergir", por isso, podemos dizer que todo número irracional pode ser definido como, no mínimo, um par de seqüências convergentes de números racionais.

As seqüências monótonas de Cauchy satisfazem as seguintes condições:

1. Diz-se que uma seqüência (x_n) é crescente se $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...$; e decrescente se $x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > ...$

2. Diz-se que a seqüência (x_n) é não decrescente se $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq ...$; e não crescente se $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq ...$ (ÁVILA, 2005, p. 85).

Uma condição necessária e suficiente, para que uma seqüência monótona (a_n) no conjunto dos números reais seja convergente é que, dado o número racional $\varepsilon > 0$, existe N tal que n,m >N $\Rightarrow$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que, para todo inteiro positivo k, n>N $\Rightarrow$ $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$ (ÁVILA. 2005, p. 97). Seqüências dessa natureza foram chamadas por Cantor de "seqüências fundamentais" (KLINE, 1972, p. 984).

Esta definição de convergência nos remete a uma intuição gráfica, pois, por menor que seja ε, sempre existirão membros da seqüência tal que a distância entre dois termos consecutivos quaisquer, será sempre menor que ε.

Esta linguagem de seqüências convergentes está fundamentada na teoria de limites que é a linguagem Matemática que estrutura e desenvolve de forma flexível e complementar as noções de discreto e contínuo na conceitualização de número real.

Tratamos das seqüências de Cauchy que convergem para números que não são racionais. Diante disso, podemos criar maneiras diferentes, ou seja, seqüências formadas por números racionais, para se aproximar cada vez mais de um número, o qual é chamado de número irracional. O interessante é que um determinado número irracional, como por exemplo, o número de Euler **e** é definido por seqüências convergentes de números racionais, ou seja, o que temos é uma aproximação e não um número de valor exato. E nessas aproximações por modelos discretos se percebe a continuidade. Isto nos garante que para tratar de fenômenos contínuos, precisamos considerar, em algum momento, de modelos discretos que representam esses fatos.

Podemos dizer então que duas seqüências convergentes de números racionais (x_1 ,x_2, x_3, ... x_n ...) e (y_1, y_2, y_3, ... y_n ...) tendem para o mesmo número real se $|x_n - y_n|$ tende a zero para n infinito.

Para ilustrar este fato citaremos as seqüências $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$ (a seqüência (y_n) será explicada com mais detalhes na seção 2.5 do capítulo II) que definem pelo processo algorítmico o mesmo número real (**e**$\cong 2{,}718281828$), em que $|x_n - y_n|$ é tão próximo de zero quanto se queira. Isto nos faz perceber que esse processo nos direciona para o entendimento de que qualquer número irracional pode ser aproximado por uma seqüência de números racionais, permitindo compreender que o conceito de número necessita do aspecto relacional entre o contínuo (neste caso, o infinitamente pequeno) e o discreto (operações aritméticas).

Na tabela (03) a seguir apresentamos uma simulação desse fato objetivando perceber numericamente a convergência para o valor do número de Euler **e**:

Tabela 3

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$y_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$	$\|x_n - y_n\|$
x_{10}=2,593742460	y_{10}=2,720551414...	0,126808954
x_{20}=2,653297705...	y_{20}=2,718848408...	0,065550703
x_{40}=2,685063838...	y_{40}=2,718423422...	0,033359584
x_{100}=2,70481382...	y_{100}=2,71830448...	0,01349066

x_{1000}=2,7169239...	y_{1000}=2,71828205...	0,00135815
$x_{100.000}$=2,7182682...	$y_{100.000}$=2,7182818...	0,0000136
$x_{1000.000}$=2,7182804...	$y_{1000.000}$=2,71828182...	0,0000014

A construção de Cantor dos números reais começa com o tratamento operacional discreto dos números racionais, a seguir caminha para a consolidação da continuidade por meio do conjunto de seqüências convergentes. Isto garante a questão complementar entre o discreto e o contínuo para o entendimento do conceito de número real.

As definições de números reais por corte e por meio de pares de sucessões convergentes podem ser relacionadas, pois, de todo corte se pode extrair no mínimo um par de sucessões convergentes e todo par de sucessões convergentes determina no conjunto dos números racionais um corte.

Isto se verifica, pois, de um corte aleatório é sempre possível a partir de um índice n – qualquer que seja o número real positivo ε – determinar dois números, um na classe menor (x_n) e outro na classe maior (y_n) cuja diferença seja, em valor absoluto, menor que ε (CARAÇA, 1956, p. 91).

Segundo Ávila (1993, p. 44), Cantor definiu números irracionais por meio de uma sucessão convergente que é aceito por um postulado que diz: “toda seqüência de Cauchy de números racionais converge”. Os números reais são obtidos “juntando” em uma mesma classe todas as seqüências que têm o mesmo limite. A noção de continuidade está no fato de conseguirmos “todas” as seqüências, mas como é possível imaginar a totalidade dessas seqüências convergentes que possuem o mesmo limite. Acreditamos, entretanto, que a construção do número de Euler **e** por intervalos encaixados pode possibilitar essa percepção.

Considerando a totalidade de seqüências de números racionais que convergem para um número real podemos definir no conjunto dessas seqüências de Cauchy, uma “relação de equivalência” (ÁVILA, 2005, p. 102). Diante disso, dizemos que duas seqüências de Cauchy (x_n) e (y_n) são equivalentes se (x_n-y_n) tende a zero para n infinitamente grande.

“Essa relação distribui as seqüências de Cauchy em classes de seqüências equivalentes de tal maneira que duas seqüências pertencem a uma mesma classe, se e somente se, elas são equivalentes” (ÁVILA, 2005, p. 102).

Os números reais para os quais as classes de seqüências de números racionais convergem, bem como as operações e suas propriedades, mantém a ordem e o isomorfismo com o conjunto dos números racionais. De forma que os números reais assim construídos é o mesmo feito pelo processo de Dedekind.

Portanto, nas construções dos números reais construídos por seqüências de Cauchy-Cantor e por cortes de Dedekind, pode-se definir uma estrutura de corpo[15]. Podemos dizer também que os intervalos encaixados (em que a intersecção deles é um número) e que toda seqüência de Cauchy converge, são equivalentes à propriedade do supremo, que por sua vez garante a completude dos números reais.

Tratamos das idéias centrais da construção dos números reais por intervalos encaixados, partição de Dedekind e seqüência de Cauchy-Cantor que são formas equivalentes de postular os números reais, pois, todos objetivam obter as mesmas propriedades dos números reais.

A obtenção do número de Euler **e** por construção de intervalos possibilita o estudo da continuidade da reta pela via tanto do discreto como por processos infinitos, ou seja, o ponto irracional que representa o número de Euler **e** é simplesmente um símbolo que pode ser determinado por uma seqüência de intervalos encaixados. Agora como cada número irracional pode ser obtido por vários pares de seqüências que convergem para esse número, podemos dizer que todas as seqüências, se é que possível determinar esse montante, que convergem para o número **e** são na verdade possibilidades discretas de se relacionar com o contínuo. Pois, o que é o contínuo? O que ficamos fazendo são tentativas discretas de perceber o sentido da continuidade. E essas tentativas se tornam ao todo contínuas, ou seja, o contínuo, se existe, é o ideal que iremos sempre perseguir e os modelos discretos são os meios ou representações de conceber essa idéia de continuidade.

Tendo como objetivo a compreensão da continuidade da reta, bem como o estabelecimento de uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números, surge o questionamento: será que agora podemos dizer que ao incidir numa reta numérica a ponta de um alfinete temos certeza que "existirá" um número racional ou irracional correspondente a essa incidência?

---

[15] Um corpo é um conjunto, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação que satisfazem os axiomas da adição (associatividade, comutatividade, elemento neutro e simétrico) e da multiplicação (associatividade, comutatividade, elemento neutro e inverso multiplicativo), bem como a distributividade.

1.4 Construção Axiomática dos Números Reais

O processo de axiomatização pretende sintetizar parte significativa do método científico, partindo de um número mínimo de pressupostos e a seguir deduzindo o máximo de conseqüências lógicas propiciando economia de pensamento.

A teoria Matemática precisa estar fundamentada em modelos abstratos, pois, são esses modelos que possibilitam a descrição das propriedades e das relações de um sistema. Todavia, sob o ponto de vista epistemológico e cognitivo há necessidade de interpretações desses sistemas abstratos por meio das aplicações. Dessa forma, temos uma complementaridade entre o modelo abstrato e o modelo prático de uma determinada teoria.

Na Matemática, temos que tratar com certo cuidado aquilo que nos apresenta como óbvio. Pois, a construção dos números reais nos apresenta situações simples, mas ao mesmo tempo, precisamos dialogar com o infinitamente grande[16] e infinitamente pequeno, dessa forma, o tratamento unicamente intuitivo[17] pode nos levar as conclusões falsas ou contraditórias, pois, nossos aparatos sensoriais não são suficientes para lidar com as questões do infinito.

Não podemos abandonar o intuitivo e sim conciliá-lo com o aspecto lógico. O foco agora não é dizer que os números reais têm certas propriedade e sim dizer "se os números reais têm essa propriedade então seguem certas conseqüências" (WHITE, 1993, p. 18).

O padrão do desenvolvimento da teoria axiomática consta de termos primitivos que não são definidos, pois, tratam do senso comum, que por sua vez decorre da impossibilidade de se definir tudo e dos axiomas ou proposições primitivas que são as afirmações aceitas como verdades iniciais básicas (a questão é como decidir sobre o que são verdades iniciais básicas), que devem obviamente se apoiar na experiência empírica ou intuitiva. "Nesse sentido os axiomas se referem essencialmente a princípios fundamentais a partir dos quais podemos deduzir outros princípios derivados" (SANTA'ANNA, 2003, p. 2).

No método axiomático é apresentado um conjunto munido de duas operações satisfazendo determinadas propriedades com isso definimos um corpo, depois se define a

[16] Acredito que nosso cérebro, ao que parece, não tem instrumentos para tratar de números extremamente altos e extremamente pequenos, por isso, precisamos do instrumento matemático (limite) para lidar com o infinito.
[17] Para Kant (1724-1804), a intuição é todo conhecimento que se relaciona imediatamente com o objeto (CYRINO, 2006, p. 60). Agora, como se relacionar imediatamente com o infinito? Por isso, precisamos das atividades que são na verdade os meios que proporcionam essas relações.

relação de ordem compatível com as propriedades do corpo e por fim, o axioma da continuidade que torna o corpo ordenado e também completo.

Os símbolos primitivos que iremos considerar na teoria axiomática são:

- R será o conjunto de elementos chamados de números reais.
- + é uma função ou aplicação chamada adição de RXR em R, ou seja, associa o par $(x,y) \in RXR$ a um único número real z designado por z = x + y que é a soma de x com y.
- $\cdot$ é uma função ou aplicação chamada multiplicação de RXR em R que associa o par $(x,y) \in$ RXR a um único número real z designado por z = x.y (z é o produto de x por y).
- Além das duas operações + (adição) e $\cdot$ (multiplicação), vamos considerar a existência de uma relação sobre os elementos de R que será indicada por < (relação menor). Dados dois números reais x e y, dizemos que x é menor que y, e escrevemos x<y se y – x for estritamente positivo.

A construção axiomática dos números reais apresenta a intensão daquilo que queremos construir, ou seja, assumimos a existência dos números reais, no qual os axiomas representam as características dos números, ou seja, estamos pressupondo a sua "possível existência". Esta construção intensional descreve relações entre classes de objetos matemáticos não se preocupando com a descrição do objeto matemático em si. Abaixo apresentamos os axiomas que fundamentam os números reais.

1.4.1 Axiomas da Adição

1- A adição é comutativa

Para quaisquer x e $y \in R \Rightarrow x + y = y + x$.

2 Associatividade da Adição

Para quaisquer x, y e $z \in R \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$.

3- Há um elemento 0 em R, ou seja, o elemento neutro da adição. Vamos propor este axioma de duas formas:

3.1- $x \in R$ então $x + 0 = x$.

3.2- Existe $x \in R$ de modo que para qualquer $y \in R$ temos $y + x = y$ $(x=0)$.

4- Para cada x em R há um elemento –x (oposto ou simétrico) em R tal que

–x + x = 0.

"Estes axiomas nos remetem às regras usuais relativas à adição e subtração e, portanto, são válidas em qualquer corpo" (LIMA, 1976, p. 49). De forma que um conjunto onde está definida apenas uma operação satisfazendo a estes axiomas é o que se chama um grupo abeliano.

1.4.2 Axiomas da Multiplicação

1- A multiplicação é comutativa.

Para quaisquer x e y em R $\Rightarrow$ x.y = y.x.

2- Associatividade da multiplicação.

Para quaisquer x, y e z em R $\Rightarrow$ (x.y).z = x.(y.z).

3- Elemento neutro na multiplicação. Vamos propor este axioma assim:

3.1- Há um elemento 1 em R, $1 \neq 0$ [18] tal que para todo x em R, temos 1.x = x.

3.2- Existem x em R de modo que para qualquer y em R têm-se x.y = y (x=1).

4- Elemento inverso da multiplicação

Se $x \in R$ e $x \neq 0$, há um elemento $x^{-1}.x = 1$, ou para qualquer $x \in R$ $(x \neq 0)$ existe $y \in R$ $(y \neq 0)$ tal que x.y = 1 $(y=x^{-1})$.

Com este axioma podemos definir a divisão de x por y da forma $\left(\frac{x}{y} = x\frac{1}{y}\right)$.

1.4.3 Axioma da Distributividade

Este axioma faz uma ligação entre a adição e a multiplicação, que por sua vez possibilita operar conjuntamente com essas operações. Para quaisquer x, y e z em R$\Rightarrow$x.(y + z) = x.y + x.z. Em linguagem algébrica os axiomas da adição, multiplicação e da distribuição caracteriza o conjunto dos números reais (R, +, $\cdot$) como um corpo comutativo.

---

[18] O número 1 é o elemento neutro na multiplicação e o 0 é o elemento neutro na adição, por isso $1 \neq 0$.

1.4.4 Axiomas de Ordem

Um corpo ordenado C, no qual se destacou um subconjunto $A \subset C$, chamado o conjunto dos elementos positivos de C, tal que as seguintes condições são satisfeitas (LIMA,1976. p. 52):

1- A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja, $x,y \in A$ implica $x+y \in A$ e $xy \in A$.

2 – Dados $x \in A$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: $x=0$, $x \in A$ ou $-x \in A$.

A relação de ordem $x<y$ num corpo ordenado C admite as seguintes propriedades:

1-Tricotomia – se x e y são dois números do conjunto C, então apenas uma das relações $x=y$; $x<y$ e $x<y$ ocorre.

2- Transitividade – se $x > y$ e $y > z$ então $x > z$

3- Monotonicidade da Adição ou Lei da Compatibilidade da Relação de Ordem com a Adição – se $x > y$ então é sempre verdadeiro que $x + a > y + a$.

4- Monotonicidade da Multiplicação ou Lei da Compatibilidade da Relação de Ordem com a Multiplicação – se $x > y$ e $z > 0$ então $x.z > y.z$.

Todo o corpo que satisfaz as propriedades (1), (2), (3) e (4) acima relativa a uma relação de ordem definida sobre o mesmo, denomina-se corpo ordenado pela relação considerada.

1.4.5 Axiomas da Continuidade

Existem várias maneiras de formular axiomaticamente a continuidade da reta numérica; destacaremos as principais.

1.4.5.1 Axioma de Arquimedes

Um corpo ordenado C é arquimediano se nele é válida qualquer uma das três condições[19]:

---

[19] As demonstrações dessas equivalências podem ser encontradas no livro Curso de Análise de Elon Lages Lima, 1976, p. 59-60.

1- O conjunto $N \subset C$ é ilimitado superiormente;

2- Se x>0 e y>0 com $x,y \in C$ são dois números arbitrários, então é sempre possível acrescentar x a ele mesmo um número suficiente de vezes de modo que:

x + x + x + x +x + ...+ x > y ou n.x > y com n inteiro positivo.

3- Para qualquer x>0 em C, existe $n \in N$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$

Este axioma, de forma geral, pode ser explicado considerando $nx \leq y$ para todo n natural. A seguir temos $n \leq \frac{y}{x}$ para todos os números naturais e isso nos diz que o conjunto dos números naturais é limitado superiormente, que não é verdadeiro, com isso fica justificado esse axioma.

1.4.5.2 Axioma da Completividade

Este axioma trata das definições de majorante e do supremo. Se $A \subset R$, e $x \in R$ tal que $y \leq x$ para todo y em A, então x é chamado de um majorante de A. Se $A \subset R$ tem um majorante, diz-se que A é majorado ou limitado superiormente. Um número real k é chamado supremo de $A \subset R$ se k é um majorante de A, e não existe qualquer majorante de A que seja menor que k. Desta forma se $A \subset R$ é não-vazio e majorado, então A tem supremo (WHITE, 1993, p. 32 e 33).

> Portanto, um corpo ordenado C chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, $A \subset C$, possui supremo em C. De forma que existe um corpo ordenado completo R, chamado o corpo dos números reais, que é considerado o axioma fundamental da análise Matemática (LIMA, 1976, p. 64).

Em vez de usarmos o axioma da completude, podemos substituí-lo pelo arquimediano (que é equivalente e, essencialmente afirma que para cada número real r, existe um número natural n, tal que n.r>1, ou seja, "os números naturais dentro do corpo dos números reais são arbitrariamente grandes", e que pode ser explicitado da seguinte forma: um corpo ordenado e completo é necessariamente arquimediano (LIMA, 1976, p. 64).

> O método axiomático veio ao mundo para mostrar sua beleza para aqueles que desejam vê-la. Para os demais, que o deixem passar. Toda essa aventura faz parte do processo criativo da atividade científica que, assim como a vida, é repleta de facetas e surpresas (SANT'ANNA, 2003, p. 135).

A fundamentação teórica dos números reais objetiva aprofundarmos na compreensão da natureza do número, tentando estabelecer consistência entre os fenômenos naturais, intuitivos e racionais. O ser humano é ao mesmo tempo físico, biológico, social, cultural, psíquico e espiritual e isto quer dizer que há uma insatisfação inerente do ser como agente ativo neste planeta.

Conceber o número real como intervalos encaixados, cortes, seqüências e axiomas que de forma geral são impostos como postulados nos confortam, mas não esclarecem definitivamente a verdadeira natureza dos números reais no seu aspecto relacional com o contínuo da reta e com fenômenos naturais e sociais.

Entretanto, o conceito de números reais está baseado na referência tanto do discreto quanto do contínuo, por isso, devemos introduzir este conceito por meio de atividades que considerem estas abordagens.

Sobre números, contagens e medidas (Barker, 1969, p. 137) declara:

> Suponhamos que alguém pergunte: "É irracional o número que mede em centímetros, o comprimento de uma mesa?" Estaria esse alguém lançando algum tipo de pergunta acerca do resultado que obteríamos contando as vezes que uma régua precisaria ser colocada ao longo da mesa? Não parece possível interpretar desse modo à pergunta. A questão é destituída de significação empírica: não há diferença entre um "Sim" e um "Não", naquilo que diz respeito ao que essas propostas nos levariam a esperar quanto a resultados de procedimentos humanos de contagem. Por mais curta que fosse a nossa régua, o seu emprego deve envolver certa margem de erro, de modo que contar o número de vezes que precisaria ser colocada ao longo da mesa não decidiria a questão de saber se o comprimento é racional ou irracional. Para decidir essa questão seria preciso dispor de uma régua infinitamente curta ou uma régua não-sujeita a erro. Réguas desse gênero não existem – são impossíveis – e não tem sentido falar a propósito de fazer algo que é necessariamente impossível. Isto ilustra de que modo a teoria dos números reais, distinguindo entre números racionais e irracionais, introduz uma sutileza que escapa aos processos de contagem.

Portanto, a compreensão da natureza dos números irracionais é uma questão de grande importância intelectual, pois, vai possibilitar o tratamento formalizado dos fundamentos da Matemática. Este fato, bem compreendido, propicia ao professor o entendimento e a necessidade da fundamentação da Matemática, tendo como conseqüência uma contextualização mais eficiente nos aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos matemáticos.

Temos clareza que a conceitualização de número e como conseqüência o número de Euler **e** não é de forma alguma absoluta. Portanto, não podemos tratar os números reais e por sua vez o número **e** por uma única faceta, pois nenhuma das construções aqui discutidas propicia uma compreensão convincente desse objeto. Porém, tanto o processo de axiomatização como a construção dos racionais aos reais é necessária para melhorar nosso entendimento. Temos convicção que no estudo do conjunto dos números reais deve haver a estrutura axiomática assim como processos de construções que possibilitam criar modelos diferentes que possam ser aplicado em várias situações. Como não existe possibilidade absoluta de determinar os significados dos objetos matemáticos precisamos da noção de complementaridade para dialogar por meio das atividades com os objetos a serem compreendidos. De uma forma geral o estudo da continuidade tanto do ponto de vista filosófico como matemático possibilita a compreensão dos fenômenos mais diversos, pois ela está no cerne desses fenômenos. Numa teoria temos conceitos e definições enquanto num modelo concreto temos objetos. Nesse contexto os intervalos construídos para perceber a irracionalidade do número de Euler **e** são modelos concretos e não objetos da teoria. O estudo dos números reais por meio da construção por intervalos do número **e** propicia a conceitualização desse número tanto pela via dos modelos abstratos de uma teoria como pela via de modelos concretos, consolidando com isso a complementaridade entre o aspecto operacional e o aspecto estrutural do conceito de número e como conseqüência o conceito do número de Euler **e**. O que veremos no próximo capítulo são as maneiras diferentes para obter o valor desse número, bem como perceber que esse número e a função exponencial de base **e** estão presentes praticamente em todas as áreas da própria Matemática e também em outras ciências.

CAPÍTULO II

DEFINIÇÕES, CONEXÕES E APLICAÇÕES DO NÚMERO DE EULER

> No que se referem à realidade, as leis da Matemática não são precisas, e no que elas são precisas não se referem à realidade. (Albert Einstein)

Os números irracionais, além de propiciar uma discussão dos fundamentos da Matemática, nos possibilitam compreender melhor vários fenômenos. Nesse sentido, o número de Euler **e**, que é um número irracional importante, assim como a função exponencial que tem esse número como base está no interior do processo de interpretação de como determinado fenômeno funciona.

No que diz respeito ao tratamento dado ao conceito do número **e**, assim como da função exponencial de base **e**, percebemos dificuldades na apresentação dos enfoques funcional e estrutural, ou seja, falta conexão entre operação e lei, pois, muitas vezes constata-se a tendência de se optar, ora para o aspecto funcional, ora para o aspecto estrutural. Esses tratamentos disjuntos podem trazer conseqüências negativas para o ensino deste tópico e, com isso perde-se um pouco da beleza dos conceitos matemáticos.

No que diz respeito ao enfoque operativo funcional são apresentados modelos na forma de algoritmos que determinam o valor do número **e** com rapidez de convergência ou não. "Um algoritmo resolve problemas, mas não descreve realidade alguma" (OTTE, 1993, p. 229). Diante disso podemos acrescentar na computação dos dígitos do número **e** uma reflexão crítica, pois, temos várias maneiras, ou seja, representações (intensões) diferentes que façam esse cálculo.

De posse dessas representações discutimos as equivalências dessas definições e isso possibilita perceber a complementaridade (operativo e concreto) entre essas representações e as formas diferentes de obter esse número e com isso estabelecer conexões com atividades práticas que melhorem o processo do conhecimento humano em relação ao como o saber é elaborado na mente humana.

Compreender os modelos operativos que façam o cálculo do valor do número **e** é necessário, mas não é suficiente para estabelecer o entendimento dos motivos que tornam este tema importante.

Acreditamos que a compreensão deste assunto, torna-se completa quando introduzimos o enfoque estrutural (lei) associado complementarmente à questão do processo operativo. Desta forma, o estudo da lei por meio da função é inevitável.

> O novo conceito matemático das funções, que entrou em jogo pela problemática da lei natural consistia em ver a função como um objeto matemático único e unitário, ao invés de considerar exclusivamente a correspondência entre os valores do domínio e os valores da imagem. Essa nova forma de encarar uma função, como objeto unitário, só se expandiu no início do século XIX, ao longo da chamada segunda crise dos fundamentos da Matemática (OTTE, 1993, p. 230).

A concepção atual de função está ligada diretamente ao princípio de continuidade[20] e isso tem como conseqüência a conexão entre função contínua e lei natural. A construção do conceito de função contínua não pode ser feita sem o uso do enfoque funcional operacional. “Dessa forma, surge uma circularidade que revela que significados conceituais são processos que se desdobram na atividade epistemológica. Isto é particularmente indicado no conceito de complementaridade” (OTTE, 1993, p. 232-233).

A continuidade das funções, entretanto, está associada ao contínuo numérico dos números reais e isso possibilita definir uma função de base **e**, tendo o valor do número **e** obtido como um ponto dessa curva. Nesse sentido a análise do conceito funcional (operativo) discreto e do princípio de continuidade (lei), são complementares, pois, não é possível estudá-los separadamente. Contudo, o aspecto essencial da questão estrutural (contínuo) e do processo discreto operativo é tratar relações como objetos conceituais do pensamento.

O processo aritmético operacional discreto se caracteriza pelas relações entre grandezas isoladas, pois, o número **e** será obtido numa situação determinada. A partir daí criam-se vários modelos concretos que computam seus dígitos. A seguir finaliza-se generalizando na via do particular para o geral.

Enquanto no processo contínuo elabora-se uma lei geral por meio de séries que define a função de base **e**, a seguir determina seu valor como sendo um caso particular da função $f(x)=\mathbf{e}^x$ para $x=1$, de forma que o valor do número **e** nesse caso será tratado do aspecto geral para o particular e a noção de complementaridade surge nesse momento, ou seja, procura-se compreender a construção na relação que há entre o particular (discreto) e o geral (contínuo) sem polarizar e sim focando essencialmente na relação.

[20] A continuidade neste caso está se referindo ao contínuo numérico da matemática que lida com a idéia de função.

Isso deixa claro a concepção de dupla raiz do conceito de função como afirmou Otte (1993, p. 228).

> Considerado historicamente, o conceito de função tem uma dupla raiz. Primeiro, ele se desenvolve ao lado do conceito de lei, particularmente junto com o conceito de lei natural. Ele surge também do conceito operação aritmética-algébrica, do conceito de algoritmo e das concepções gerais de máquina.

Analisamos situações que determinam o valor do número de Euler **e** numa perspectiva de apresentar explicações sobre esse número, bem como da função que tenha o número **e** como base.

Na Matemática existem números que desencadearam discussões importantes no aspecto teórico de sua fundamentação, bem como na aplicação de resoluções de problemas do cotidiano. A raiz quadrada de dois ($\sqrt{2} \approx 1{,}41$), que é irracional provocou uma extensão dos números racionais e o número π (pi $\approx 3{,}14$) que é outro exemplo importante de número irracional está diretamente ligado a formas circulares.

A construção da raiz quadrada de dois e do número π, assim como o número de ouro $\Phi(Fi) \approx 1{,}618$ tem sido muito relatado em livros do ensino fundamental, médio e até no ensino superior, pois, são números que recuam à antiguidade e não dependem de um conhecimento "avançado" de Matemática.

Em relação ao número **e** isso não ocorreu, provavelmente devido ao fato dele ser mais jovem, pois, sua história está muito ligada ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral (séries e funções), assunto tradicionalmente considerado como a entrada para a Matemática "superior".

O número **e** representa um valor como 5, 10 ou π, só que no caso do valor do número $\mathbf{e} \approx 2{,}71828$ (assim como o valor de π), suas casas decimais apesar de serem infinitas, são computáveis, mas não têm nenhuma regularidade (não-periódico), ou seja, não podemos saber quais são, antes de calculá-los. E isso nos remete à seguinte pergunta: Como elaborar modelos operacionais que determinam as casas decimais do número de Euler **e**? Pois, o processo de elaboração desses modelos provoca uma reflexão entre o algoritmo e a velocidade de convergência, ou seja, do ponto de vista teórico os modelos são idênticos, mas do ponto de vista operacional não, e isso reflete uma complementaridade entre os modelos operacionais e as leis teóricas que definem esse número.

Atualmente, no cenário do ensino da Matemática, o número **e** surge, no momento em que é apresentada a insuficiência do conjunto dos números racionais, ou seja, mostramos situações em que existem medidas que não podem ser representadas na forma de fração. Situações como essas são chamadas de segmentos incomensuráveis. A partir daí, em alguns livros didáticos de Matemática do ensino fundamental, o número **e** é citado como exemplo de número não-racional (irracional).

No ensino médio, geralmente ele é apresentado como um valor ou definindo-o por meio das expressões $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. A seguir o número **e** é utilizado como base de uma função exponencial e na base do sistema de logaritmos, chamado logaritmo neperiano ou logaritmo natural. A conseqüência disto é que o logaritmo neperiano terá todas as propriedades do logaritmo "comum" (base 10). Este fato é usado na resolução de problemas da realidade relativos a crescimento de populações, juros compostos calculados continuamente, decaimento radioativo etc. "Realidade" significa não mais algo estaticamente dado, nem "lá fora" ou num "céu" Platônico, mas a realidade em questão consiste agora de um sistema de atividade (cognitiva) humana e prática em si (OTTE, 2006, p. 87) [21].

Portanto, podemos dizer que o número **e**, bem como a função exponencial de base **e** que é um objeto matemático, nada mais é que uma representação estabelecida pela relação que se complementam por meio do trinômio: do objeto, da mente do sujeito e dos fenômenos.

Nos livros de Cálculo do ensino superior, o número **e**, bem como a função exponencial de base **e** geralmente é definido após o estudo da Integral ou por meio das Séries de Potências, em que o número **e** é definido como o valor numérico da função $f(x)=\mathbf{e}^x$ para $x=1$, ou seja, primeiro se define lnx por meio do Cálculo Integral e a seguir determina sua derivada.

O fato de a função exponencial de base **e** ser a única função que é igual a sua derivada (exceto situações do tipo $y=e^{ax}$ com **a** diferente de zero e um) o tornam propício para utilizá-lo como ferramenta na resolução de modelos matemáticos[22] que resultam numa equação diferencial de variáveis separáveis simples $(\frac{dy}{dx}=ay)$ obtida na interpretação de fenômenos físicos, químicos, biológicos, sociais etc.

[21] "Reality" means no more something statically given either "out there" or in Platonic 'heaven', but the reality in question consista now of the system of human (cognitive) activity and practice itself.

[22] Um modelo matemático é qualquer conjunto de equações matemáticas, completo e consistente, que é elaborado para corresponder a alguma outra entidade, seu protótipo. O protótipo pode ser uma entidade física, biológica, social, psicológica ou conceitual, talvez outro modelo Matemático (DAVIS &.HERSH, 1989. p. 107).

O que fizemos foi discutir e propor possibilidades que existem para se definir, bem como obter o valor do número de Euler **e**, assim como mostrar alternativas de explicação para determinar a integral de $\frac{1}{x}$ $\left(\int \frac{1}{x}dx\right)$, constatando que a função $y = \frac{1}{x}$ está intimamente relacionada com a função exponencial de base **e**, e o logaritmo (natural). O que normalmente se vê é começar com a função logarítmica natural (ln) e chegar à função exponencial de base **e** pela definição direta. O nosso propósito é começar com a função exponencial de base **e** movendo para a função logarítmica (ln), construindo com isso uma explicação para sua derivada e sua relação com a integral $\left(\int \frac{1}{x}dx\right)$.

A compreensão do conceito do número de Euler **e** bem como da função de base **e**, passa obrigatoriamente pela dualidade (sem polarizar) que há no processo do entendimento das atividades elaboradas para propiciar o desenvolvimento cognitivo. E isso só é possível se tratarmos essas atividades de forma conjunta entre o discreto (modelo operacional) e contínuo (lei), ou seja, não dissociar o aspecto algorítmico da função. Por isso, tratamos por um lado o processo operacional, a funcionalidade, os processos de computação, seguindo a via do discreto para o contínuo. E por outro lado, a abordagem será por meio da lei ou relação enquanto estrutura, seguindo a via do contínuo para o discreto.

Desta forma, a noção de complementaridade propiciará estabelecer a compreensão de que conceito de função tem uma dupla raiz (lei e operação). E isto possibilitará esclarecer, enquanto objeto matemático, que a construção do conceito do número **e**, bem como da função de base **e**, estão intrinsecamente ligados.

2.1 Definições do Número de Euler

Na Ciência moderna não é conveniente considerar os significados dos conceitos dos objetos matemáticos, como o número "**e**" e a função exponencial de base **e**, de forma absoluta. Para melhorar nossa compreensão sobre estes conceitos devemos buscar novas maneiras de representá-los. Considerando que essas novas maneiras se complementam, pois, ajudam a perceber que o importante é compreender o aspecto relacional estabelecido nas atividades e os meios.

Destacamos as principais situações em que o número **e** se faz presente de maneira praticamente inevitável, ou seja, vamos apresentar formas de determiná-los, discutindo seus atributos ou propriedades específicas, apreendendo seus elementos significativos que propiciem o desencadeamento das atividades mentais que melhorem e interiorizem o sentido do ensino e aprendizagem desse número, bem como compreender suas principais características.

Um objeto matemático pode ter várias formas de se definir e isto estimula o processo de construção de definições mais simples e eficientes. Diante disso, o que podemos de fato definir são conceitos, de forma que esses conceitos referem-se a determinados objetos dentro de uma estrutura de linguagem temporal, ou seja, dependem do contexto.

Tendo o maior número de definições do mesmo objeto matemático, propiciará uma escolha adequada para a interpretação, cálculos e aplicações. “É preciso considerar o assunto de diferentes pontos de vistas, movimentar-se nele. Para isso, como no teatro, são necessárias personagens distintos. São necessárias, portanto, a comunicação e a aplicação em diferentes contextos” (OTTE, 1993, p. 15).

Com este propósito apresentamos situações (personagens) em que esse número de valor extremamente simples surge com certa naturalidade. Contudo, o mesmo está presente em situações “reais” e isso pode nos causar espanto, ou seja, como é possível esse número estar presente em situações tão antagônicas.

2.1.1 Os Juros Compostos Calculados Continuamente e o Número e

O tipo de juros em que as capitalizações são acumuladas em relação ao capital anterior é chamado juros compostos. Os juros como capitalizações aplicadas num valor inicial remontam desde a Antiguidade.

> Desde épocas imemoriais as questões financeiras têm-se encontrado no centro das preocupações humanas. Nenhum outro aspecto da vida tem uma característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Assim, não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo – ou talvez um mercador, ou um prestamista - , no início do século XVII, tenha notado uma ligação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de uma expressão Matemática no infinito (MAOR, 2004, p. 41).

Podemos encontrar uma expressão Matemática que nos permite calcular diretamente o Montante (M), calculado a juros compostos, a partir de uma taxa constante (i) e um capital (C).

Considerando que M=C+juros (J). Como J=C.i, cada montante poderá ser calculado da seguinte forma:

1º período: $M_1= C+C.i=C(1+i)$

2º período: $M_2=M_1+ M_1.i=M_1(1+i)$

3º período: $M_3=M_2+M_2.i=M_2(1+i)$

4º período: $M_4=M_3+M_3.i=M_3(1+i)$

Genericamente podemos escrever:

$M_n=M_{n-1} + (M_{n-1}).i = M_{n-1}(1+i)$

Como $M_1= C(1+i)$, podemos substituir M_1 por esse valor em M_2. O valor obtido para M_2 deve ser agora substituído em M_3 e assim sucessivamente:

$M_2=C(1+i)(1+i)=C(1+i)^2$

$M_3= C(1+i)^2(1+i)=C(1+i)^3$

$M_4=C(1+i)^3(1+i)=C(1+i)^4$

Podemos concluir, então, que para um período t de tempo, o montante M será dado pela expressão:

$M=C(1+i)^t$

Certa ocasião, provavelmente, o matemático Jakob Bernoulli (1654–1705) propôs o seguinte problema:

“Qual é a lei que estabelece a forma como cresce um capital, depositado em um banco a juros compostos, quando os juros são acrescidos ao capital a cada instante, isto é, quando o número de capitalizações tende a ser contínuo”? (MAOR, 2004, p. 156). Texto na linguagem moderna, pois, a verdadeira prova do surgimento do número “**e**” é obscura. Interessante observar que nessa época os fundamentos do tratamento matemático do infinito ainda não tinham sido consolidados, mas o aspecto contínuo dos números já era tratado, mesmo que de forma intuitiva. Para compreender este fato analisaremos a seguinte situação.

Considere hipoteticamente um capital de R$1,00 aplicado a juros compostos no prazo de um ano, com uma taxa fictícia de 100% ao ano da seguinte forma – o banco calcula o montante acumulado não uma vez, mas várias vezes por ano. Observe o que ocorre se as capitalizações forem feitas por dia, por hora e por minuto.

1º) Capitalizações por dia;

Montante (M)=1(1 + $\frac{100\%}{365}$)^{365}

M=(1+$\frac{1}{365}$)^{365}

M=2,71456... .

O valor correto do número **e** com duas casas decimais (**e**=2,71...)

2º) Capitalizações a cada hora;

M= 1(1+ $\frac{100\%}{24.365}$)$^{24.365}$ = (1 + $\frac{1}{8760}$)^{8760}

M= 2,71812... .

O número **e** com três casas decimais (**e**=2,718....)

3º) capitalizações a cada minuto;

M=1(1+$\frac{100\%}{24.365.60}$)$^{24.365.60}$

M= (1 +$\frac{1}{525600}$)^{525600}

M = 2,7182... .

O número **e** com 4 casas decimais.

O valor do número **e** fica mais evidente quando as capitalizações são efetuadas continuamente. Podemos fazer uma generalização (discreto para o contínuo) desse fato considerando a taxa de 100% aplicados num período de tempo (um ano) em que o montante é determinado **n** vezes nesse período.

Montante no final do primeiro período:

Montante= $C+\frac{100\%}{n}.C = C\left(1+\frac{1}{n}\right)$

M=$C\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Isto nos mostra que:

O montante no final do primeiro período é igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ vezes o valor no começo do primeiro período.

Montante no final do segundo período:

Montante= $C\left(1+\frac{1}{n}\right)+C\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{100\%}{n}$

$=C\left(1+\frac{1}{n}\right)+C\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n}$

$=C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}$

Portanto o montante no final do 2º período será igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ vezes o montante no começo do segundo período.

Se fizermos o cálculo do montante no final do 3º período temos:

Montante= $C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}$

De forma que o montante obtido quando se subdivide o período em n-vezes será:

Montante= $C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

Então os juros compostos n vezes durante um período nos dá um montante de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ vezes o valor inicial.

Fazendo n tender para o infinito (capitalizados continuamente), a expressão $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ propicia o cálculo do montante momentaneamente.

Observamos intuitivamente que os próximos resultados quando **n** tende para o infinito estacionam próximo de 2,7182. Diante disso, definimos o valor do número **e** por meio do limite, que é o instrumento mais adequado para tratar da continuidade e do infinito.

e = $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{n}$

Podemos expandir o binômio $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, atribuindo a n valores discretos aplicando o desenvolvimento binomial de Newton (1643–1727) e a seguir usamos a propriedade de limite que afirma:

$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} f(x) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x)$ (desde que existam os dois limites). Então temos:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = \lim_{n\to\infty}[\binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}1^{n-2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}1^{n-3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+..+\frac{n(n-1)(n-2)...1}{n!}\frac{1}{n^n}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right).\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right).\frac{1}{3!}+...\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\frac{1}{n!}]$$

Nesta expressão vê-se que as frações com denominador n que estão no interior de todos os parênteses são do tipo: $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\frac{4}{n},...$ e assim sucessivamente. Podemos dizer que cada uma dessas frações tende a zero para n infinitamente grande. Isto pode ser feito devido ao aspecto intuitivo algébrico, pois, não vamos ficar calculando com todas essas frações.

Portanto, o valor numérico de cada um dos parênteses é aproximadamente 1, por isso, escrevemos:

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}+....$ Então:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \mathbf{e}.$$

Será que esta igualdade assume o mesmo valor para o mesmo valor de n? O valor do número **e** com 5 casas decimais é 2,71828. Para termos esse valor aproximado deve:

1. Atribuir a n o valor de 1.000.000 na expressão $(1+\frac{1}{n})^{n}$:

$$\left(1+\frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000} \approx 2{,}71828...$$

2. Atribuir a n o valor 9 na expressão $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

$$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}$$

$$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!} \approx 2{,}71828...$$

O cálculo 1 e 2 acima nos permitem dizer que as expressões $A = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ e $B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ a partir de um valor de n suficientemente grande, representam o mesmo objeto matemático com um número determinado de casas decimais, ou seja, convergem para o mesmo valor, que é conhecido como o número de Euler "**e**" cujo valor é aproximadamente ($e \approx 2{,}718281828$) desde que n assuma valores infinitamente grandes, ou seja, na prática não são idênticos para nenhum n finito, mas a teoria Matemática torna-os idênticos, pois, para n tendendo ao infinito são idênticos.

Este cálculo sugere que há um aspecto complementar entre o modelo algorítmico e a lei estrutural, pois, esse número fica mais bem caracterizado quando tratado sob esses dois enfoques. Em relação à Matemática teórica Otte (1993, p. 287) declara:

> A Matemática teórica tenta relacionar-se às "coisas mesmas", pois uma idéia teórica pode servir na solução de muitos e diferentes tipos de problemas e, por essa razão, estará ligada a muitos tipos diferentes de representações. Nenhum conceito teórico existe como uma idéia platônica, separada de sua representação. Mas tal conceito teórico nunca pode estar identificado com qualquer um de seus nomes ou representações e, além disso, qualquer representação particular de um conceito teórico é derivada de uma compreensão relacional abstrata de suas propriedades e não de outro modo. O pensamento teórico pressupõe uma *variabilidade* na distância entre o nível de conhecimento e a realidade objetiva sobre a qual o conhecimento fala.

Portanto, o conhecimento teórico nos permite analisar com mais critério e com isso perceber as diferenças sutis que possa haver numa afirmação. Neste caso, podemos dizer que existe um número inteiro positivo N tal que para n>N para o qual $|A - B|$ ficará tão próximo de zero quanto queiramos.

Na tabela (04) a seguir faremos uma simulação para o valor de $(1+\frac{1}{n})^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ para alguns valores de n para verificar o comportamento dessas definições:

Tabela 4

n	$(1+\frac{1}{n})^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$
1	2	2
2	2,25	2,5
3	2,370370370...	2,666667
4	2,44140625	2,708333
5	2,48832	2,716667
6	2,52162637...	2,718056
7	2,54649969...	2,718254
8	2,56578451...	2,718279
9	2,58117479...	2,718282

Então as definições de $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ são aproximadamente iguais para o mesmo valor de n.

A passagem do limite para a série, por meio da teoria Matemática que substitui as manipulações materiais por manipulações simbólicas (algébricas), possibilitou a aplicabilidade do número **e** em várias áreas do conhecimento. Podemos dizer então, que o surgimento e a utilização do conceito de limite permitiram avanços significativos na Matemática pura e aplicada.

No que diz respeito aos juros compostos capitalizados continuamente, podemos obter outra fórmula que determinam seu montante. Para isso faremos uso do desenvolvimento analítico. Vejamos: considerando o capital inicial C aplicado y vezes ao ano, ou seja, para cada período de conversão a taxa de juros anual é dividida por y e em t anos existem (yt) períodos de conversão, por isso, temos:

$M=C(1+\frac{i}{100y})^{yt}$, colocando $\frac{i}{100y}=\frac{1}{n}$, podemos escrever:.

$M=C[(1+\frac{1}{n})^{n}]^{\frac{it}{100}}$. Considerando o fato de que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}$ = **e** temos:

$M= C\, e^{\frac{it}{100}}$

Nesta fórmula se a taxa de juros for 100% num período de tempo (1 mês, 1 ano etc), o montante será **e** vezes a quantia inicial, veja:

Se a taxa ($i=100\%=\frac{100}{100}=1$) e o período de tempo t é igual a 1. Então o montante poderá ser calculado pela fórmula:

M=C.e

Isto mostra que se nós emprestarmos a alguém 1 real durante 1 ano a uma taxa anual de 100% deverá receber no final desse ano **e** reais (R$2,71).

Qual poderia ser um dos significados de e^2? Seguindo este raciocínio constatamos que se a taxa de juros for 200% num período de tempo, o montante calculado continuamente terá o valor inicial vezes e^2, pois:

$M=C.\, e^{\frac{it}{100}}$

$M=C.e^2$

Podemos dizer que o número **e** tem um efeito real, pois, é um fator pelo qual um banco pode calcular continuamente os juros compostos.

Este fato é uma das razões pela qual a forma e^x ocorre com mais freqüência do que outras bases, tal como 10^x. Portanto, temos duas fórmulas para calcular juros compostos, na prática, qual a diferença entre elas? Vejamos essa diferença com um exemplo.

Podemos dizer então que a fórmula $M=C(1+i)^t$ determina o montante no final de cada período (segundo, minuto, hora, dia, mês, ano etc.). Enquanto a fórmula $M= C\, e^{\frac{it}{100}}$ calcula o montante continuamente. Com o objetivo de fazer uma comparação faremos a seguinte simulação. Um capital de \$5000,00 foi aplicado a juros compostos durante 12 anos a uma taxa de 8% ao ano.

Primeiro vamos calcular usando a fórmula $M=C(1+i)^t$. Neste caso temos:

$M=5000(1+0{,}08)^{12}$

$M=12590{,}85$

Se nós aplicarmos a fórmula:

$M= C\,e^{\frac{it}{100}}$, chegaremos ao seguinte resultado:

$M=5000.\,e^{\frac{8.12}{100}}=5000.\,e^{0{,}96}$

$M=13058{,}48$

Observe que temos uma diferença de \$467,63 provocada pelo fato do cálculo contínuo.

A fórmula $M= C\,e^{\frac{it}{100}}$ determina juros um pouco maior que o nosso senso comum suspeita, devido ao tratamento do contínuo, e isso nos remetem a refletir melhor quando nos enveredamos na compreensão do infinito, por isso, precisamos estar munido da razão por meio dos cálculos analíticos/algébricos e da intuição que é a imaginação.

O modelo matemático usado para descrever o processo de crescimento dos juros compostos permitiu observar que há modelos operatórios diferentes que determinam o montante obtido num período de tempo. Constatamos que o modelo $M=C(1+i)^t$ calcula o montante no aspecto funcional operativo discreto e que $M=Ce^{it}$ computa o mesmo montante no mesmo período de tempo por um processo contínuo. Portanto, o tratamento entre o discreto e o contínuo nos mostra que o modelo matemático de juros compostos permite interpretações e uso de acordo com a situação problema estudada, ou seja, depende do contexto.

Diante disso, percebemos que a compreensão do conceito de juros compostos na perspectiva da complementaridade ocorre tanto do discreto para o contínuo e vice-versa e por isso, ajuda e muito a melhorar o entendimento desse objeto matemático, possibilitando com isso uma melhor compreensão deste conceito, ou seja, temos mais instrumentos para analisar e consequentemente tomar decisões com prudência e coerência.

2.2 A Função f(x)=e^x: A Única que é Igual a sua Derivada

Neste momento tratamos do motivo pelo qual a função exponencial de base **e** é igual a sua derivada. Com esse intento consideramos a função exponencial definida por $y=b^x$, com $b>1$, $0<b<1$. Determinamos sua taxa de variação:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{x+\Delta x} - b^x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^x (b^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = b^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} .$$

A derivada da função exponencial $y=b^x$ é um produto de uma constante pelo valor da função dependendo do valor da base b, ou seja, sua derivada é proporcional à própria função. Para que a derivada de uma função exponencial ($y=b^x$) seja igual à própria função temos que fazer:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

A questão é saber: para qual valor de b esta igualdade será verdadeira? (MAOR, 2004, p.134). No livro de Paiva (1993, p. 520) há demonstração do seguinte fato:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \log_e b$, por isso, podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = b^x \log_e b .$$

No caso de considerarmos o número **e** como a base b temos: $\frac{dy}{dx} = e^x \log_e e = e^x \to \frac{dy}{dx} = y$, ou seja, sua derivada é igual à própria função. Portanto, temos uma explicação que pode garantir o sentido da frase; “a única função exponencial que é igual a própria derivada é a de base **e**”. Se a função for do tipo $y = Me^{Kx}$ sua derivada $\frac{dy}{dx} = kMe^{Kx}$.

Vamos analisar graficamente a relação entre a função exponencial de base **e**, e a inclinação da reta tangente à curva. Para isso, definimos f : R$\to$ R em R tal que y=**e**^{x}.

Construímos a seguir duas tabelas com os seguintes valores para x: -2, -1, 0, 1 e 2, identificando os coeficientes angulares das tangentes à curva nos pontos x_1=-1, x_2=-2, x_3=0, x_4=1 e x_5=2.

Na tabela (05) abaixo temos o cálculo da função y=$\mathbf{e}^x$ e na tabela (06) temos os coeficientes angulares.

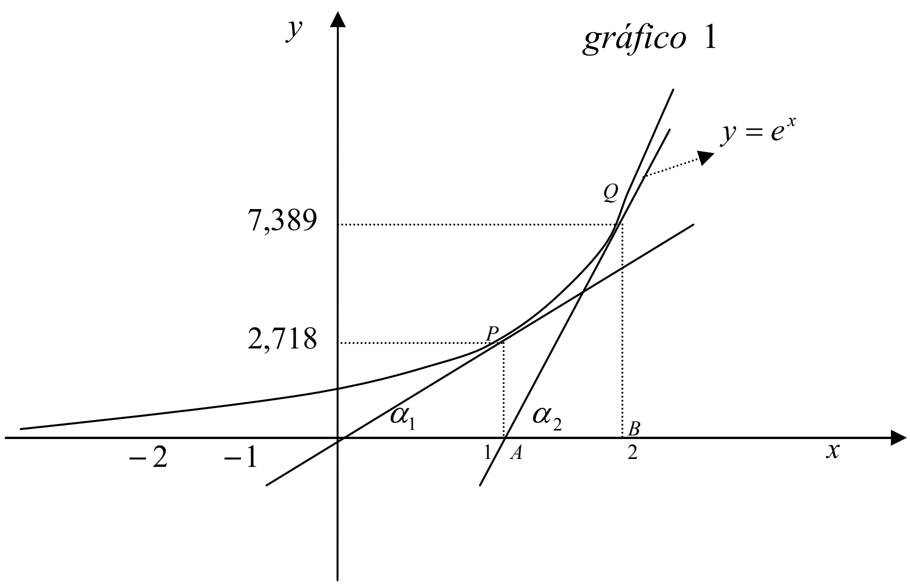
Tabela 05

x	$y=e^x$
-2	e^{-2}=0,135...
-1	e^{-1}=0,368...
0	e^0=1
1	e^1=2,71828...
2	e^2=7,389...

Tabela 06

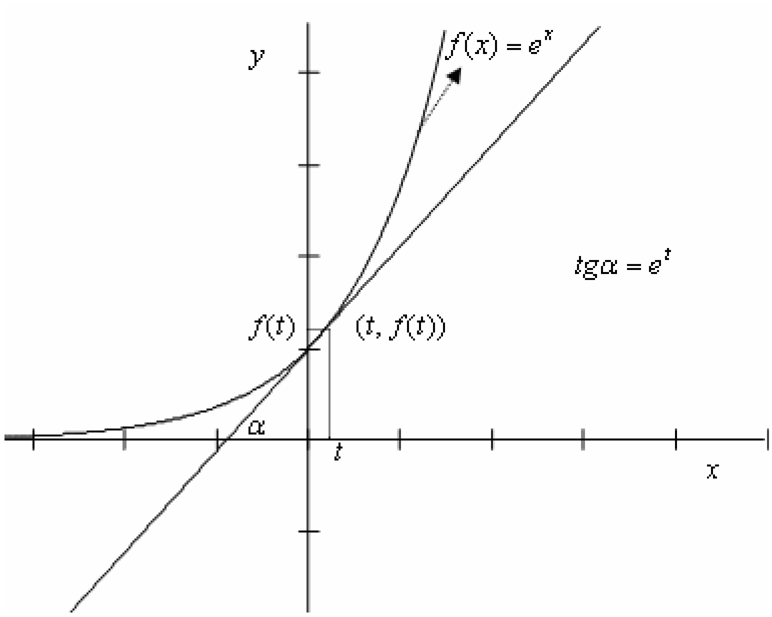
α	α_1	α_2
tgα	tg$\alpha_1 = \dfrac{AP}{1} = 2{,}718...$	tg$\alpha_2 = \dfrac{BQ}{1} = 7{,}389...$

Observe o gráfico (1):



Na curva do gráfico 1 de f(x)=**e**^{x} ocorre um fato notável, ou seja, é a única vez na Matemática que a ordenada de qualquer ponto da curva é igual á inclinação da reta tangente à curva nesse ponto, ou seja, em qualquer ponto P(t,f(t)), o valor de f(t) é, também sempre igual à inclinação ou coeficiente angular da reta no ponto de abscissa t (NETTO & FILHO, 1999. p. 49). Generalizando (veja o gráfico 2):

Gráfico 2



O ângulo α é formado pela reta tangente à curva de f(x)=**e**^{x} em (t,f(t)) e o semi-eixo positivo da abscissa.

Podemos mostrar que o valor do número de Euler **e** pode ser obtido como um ponto da curva f(x)=**e**^{x}, pois, esta função pode ser escrita como uma série, garantindo o aspecto complementar entre a operação e a lei.

Isto significa que devemos conceber o sentido deste objeto no que diz respeito ao seu aspecto relacional, ou seja, a essência do número de Euler **e** em si não é tão importante, mas o que esse número pode representar por meio de relações em contextos diferentes que é necessário e importante para ampliação do nosso conhecimento.

2.3 As Séries de Potências e o Número de Euler

As séries infinitas são conhecidas desde a Antiguidade. A primeira série que se tem notícia é uma série geométrica de razão $\frac{1}{4}$, obtida por Arquimedes (cerca de 287-212 a.C.) na quadratura da parábola (ÁVILA, 2005, p. 128). Mas, as séries infinitas desempenharam um papel importante no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral a partir do século XVII e, finalmente no século XIX com as idéias de convergência desenvolvida por Cauchy, que as somas infinitas atingiram maturidade (ÁVILA, 2005, p. 131).

Com o advento dos computadores e calculadoras científicas, as tabelas ou tábuas numéricas de logaritmos e de relações trigonométricas entraram em desuso, mas há necessidade de efetuar a programação dessas máquinas assim como estabelecer os fundamentos da Matemática, e é nesse momento que o estudo de séries infinitas torna-se relevante. As séries de potências de x são definidas da seguinte forma:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$. Nessa igualdade consideramos a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... números reais. Esta série determina uma função f(x) cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Se uma função f(x) pode ser expressa da forma:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, dizemos que f(x) está representada por meio de uma série de potência (SWOKOWSKI, 1994, p. 73).

Nosso objetivo aqui é mostrar que o número **e** pode ser obtido por uma série[23]. Para isso, começamos com:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \ .$$

Para esse fim partimos da definição f(x)=$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. O domínio de f(x) é o conjunto de todos os números reais. Derivando f(x) temos:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n(n-1)!}$$

[23] Esta explicação está no livro Cálculo com Geometria Analítica de Earl W. Swokowski, volume 2, 1994, p.78.

f'(x)=$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ = $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ ...\ +\frac{x^n}{n!}+\ \cdots$. Isto nos permite dizer que:

f(x) = f'(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

Assim a função f(x) definida aqui é igual a sua própria derivada, de forma que satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dx}=y$. Resolvendo esta equação diferencial:

$$\frac{dy}{y}=dx \Leftrightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int dx$$

$$\ln|y|=x+a \ \Leftrightarrow\ y=e^a e^x$$

Fazendo $e^a = C$ temos $y=Ce^x$, de forma que f(x)= Ce^x.

Considerando que f(x)=$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ tem-se f(0)=1 então f(0)=Ce^0 $\Leftrightarrow$ C=1.

Concluímos que:

f(x)= $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2.3.1 Uma Conjectura[24] que Permite Interpretar a Função $y=e^x$ como uma Série Infinita

Temos o propósito de conhecer formas diferentes de se definir por meio de séries a função exponencial de base **e**. Uma maneira de conjecturar a igualdade:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

Considerando a equação diferencial $\frac{dy}{dx}=y$ e a função que representa a sua solução, que é $y=ce^x$. A partir daí supomos que não conhecemos nenhuma solução dessa equação

[24] A palavra conjectura é usada aqui no sentido de uma simples suposição que pode ser verificada.

diferencial. Dessa forma, tentamos descobrir uma solução. Para isso consideramos y como um polinômio da forma:

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots \quad (1)$$

Derivando ambos os membros a igualdade (1) têm:

$\frac{dy}{dx} = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 4b_4x^3 + \ldots$. Substituindo esses valores na equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y$ obtemos:

$$b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 4b_4x^3 + \ldots + \ldots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots$$

Dessa igualdade estabelecemos:

$$b_1 = b_0\,,\quad 2b_2 = b_1\,,\quad 3b_3 = b_2\,,\quad 4b_4 = b_3\,,\ldots$$

Podemos dizer também que:

$$b_1 = b_0\,,\quad b_2 = \frac{b_1}{2} = \frac{b_0}{2},\quad b_3 = \frac{b_2}{3} = \frac{b_0}{3.2},\quad b_4 = \frac{b_3}{4} = \frac{b_0}{4.3.2},\ldots$$

Considerando n!=n(n-1)(n-2) ... 3.2.1, podemos escrever:

$$b_1 = b_0\,,\quad b_2 = \frac{b_0}{2!},\quad b_3 = \frac{b_0}{3!},\quad b_4 = \frac{b_0}{4!},\ldots$$

Voltando no polinômio:

$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots$, e substituindo os valores b_1, b_2, b_3, b_4, ... acima temos:

$y = b_0 + b_0x + \frac{b_0}{2!}x^2 + \frac{b_0}{3!}x^3 + \frac{b_0}{4!}x^4 + \ldots$. Colocando b_0 em evidência obtemos:

$$y = b_0(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots).$$

Comparando este polinômio com a solução conhecida de $\frac{dy}{dx} = y$ que é $y = ce^x$, somos levados a considerar sugestivo e plausível a igualdade:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

2.3.2 O Número “e” e a Série de Colin Maclaurin[25]

Se uma função admite uma representação em série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência r>0, então $f^{(k)}(0)$ existe para todo inteiro positivo **k** e $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Então a função f(x) pode ser expressa da forma:

$$f(x)= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Se $f(x)=\mathbf{e}^x$, e a derivada de ordem **n** de f(x) é igual a $f^{(n)}(x)=e^x$ e $f^{(n)}(0)=\mathbf{e}^0=1$ para n=0,1,2,3,... .

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$, que é o valor de:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots .$$

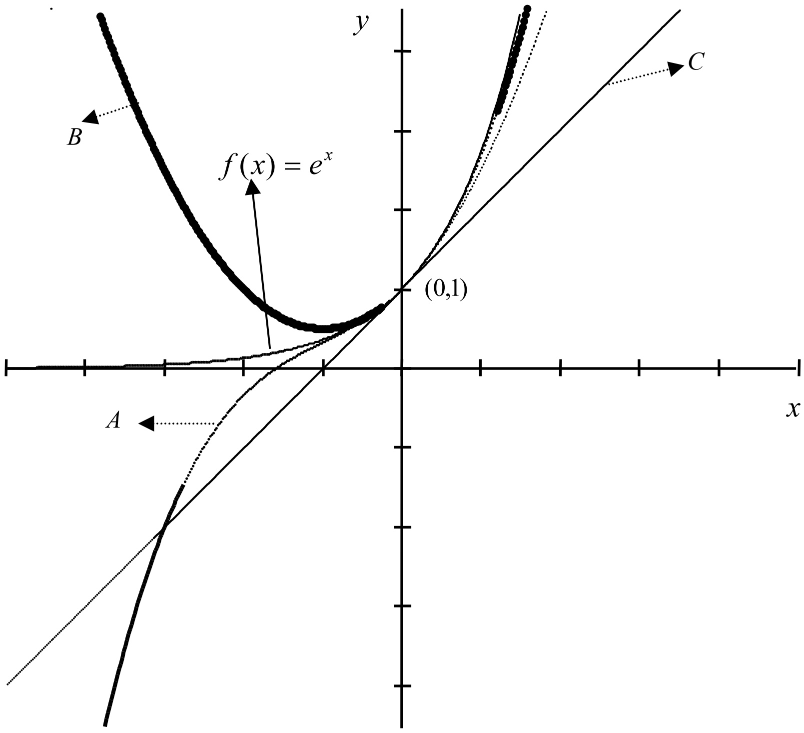
A expressão $f(x)= 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!}x^n + \ldots$ é uma função polinomial que representa a função $f(x)=\mathbf{e}^x$.

Devido a isso, imaginamos que o gráfico de $f(x)=\mathbf{e}^x$ pode ser obtida por aproximações de polinômios do 1ºgrau, 2ºgraus, 3ºgraus, ...etc, chamados polinômios de Taylor (THOMAS & FINNEY, 1984, p. 1618).

No gráfico (3) a seguir fizemos o esboço dessa situação.

[25] Esta explicação está no livro Cálculo com Geometria Analítica de Earl W. Swokowski, volume 2, 1994, p. 82-84. Colin Maclaurin (1698-1746).

Gráfico 3



A representação gráfica da função polinomial A é uma curva do 3º grau ($y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$), B é uma parábola ($y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$) e C uma reta ($y_3 = 1 + x$).

Como a função $f(x)=e^x$ é equivalente a uma função polinomial, podemos determinar o seu valor numérico para x=1.

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots.$$

$$f(1) = e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

$$f(1) = \mathbf{e} \cong 2{,}718281828$$

Diante disso, temos o número de Euler **e** caracterizado como um ponto da curva. Isto nos mostra que esse valor pode ser determinado tanto pelo ponto de vista operacional (modelo dos juros compostos) como pela relação estrutural ou lei. Neste momento podemos dizer que o tratamento unilateral (discreto ou contínuo) propicia um encadeamento incompleto da compreensão do sentido e do significado deste conceito no processo de ensino-aprendizagem.

2.4 A Derivada da Função Logarítmica e o Número de Euler

Tratamos agora da função $f(x) = \log_a x$ para a>0, a$\neq$1 e x>0 que é chamada função logarítmica. Discutimos a seguir que o número de Euler **e** está presente no cálculo da derivada de uma função logarítmica, ou seja, está diretamente ligado aos logaritmos de outras bases. Com efeito:

$f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$, então temos:

$a^y = x$. Aplicando logaritmo natural (base **e**) em ambos os membros

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ (derivando esta desigualdade)

$D_x(\log_a x) = \dfrac{1}{\ln a}.D_x(\ln x)$. Sendo $f(x) = \log_a x$ sua derivada será $f'(x) = \dfrac{1}{\ln a}.\dfrac{1}{x}$

Na tabela (07) abaixo temos a inclinação da reta tangente no ponto (1,0) de algumas funções logarítmicas:

Tabela 7

Função	Sua derivada	Inclinação no ponto (1,0)
$f(x) = \log_2 x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}.\frac{1}{x}$	$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} = 1{,}4426...$
$f(x) = \log_3 x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln 3}.\frac{1}{x}$	$f'(1) = \frac{1}{\ln 3} = 0{,}9102...$
$f(x) = \log_{10} x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln 10}.\frac{1}{x}$	$f'(1) = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342...$
$f(x) = \log_e x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln e}.\frac{1}{x}$	$f'(1) = \frac{1}{\ln e} = 1$

Podemos perguntar, existe um valor entre 2 e 3 para o qual a base do logaritmo, tal que a inclinação da tangente no ponto (1,0) seja exatamente igual a 1? A resposta é sim, e o seu valor é exatamente o número de Euler **e** $\cong$ 2,718281828, ou seja, queremos mostrar com essa tabela que no intervalo da reta [2,3], que é contínuo, “existe” um lugar geométrico que nos indica o fato de: se $f(x) = \log_a x$, então $f'(1) = 1$ se somente se **a=e**. Agora, para determinarmos esse lugar geométrico da base **a** precisamos de uma série de intervalos, e essa série é obtida por meio de modelos discretos.

Neste momento partimos da continuidade do intervalo [2,3] e obtemos o provável “lugar geométrico” que se localiza o número de Euler **e**. Todavia, podemos perceber que esse número real foi determinado seguindo a via do contínuo (função) para o discreto, deixando claro que na construção do conceito da derivada da função logarítmica há complementaridade dos aspectos relacional entre operação e lei, que é à base da compreensão do conceito de número **e**, bem como da função exponencial de base **e**.

2.5 Modelos que Determinam mais Rapidamente o Valor do Número de Euler

O número **e** pode ser calculado dígito por dígito com alta precisão utilizando para isso programas de computador. Esse processo pode ser mais ou menos rápido dependendo do modelo operatório que será utilizado.

O modelo $\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{1}{n!}$ que foi utilizado desde o século XVII permite determinar o valor do número **e** muito rapidamente, e de forma eficiente, devido à presença de n! no denominador, mas já existem outros modelos que calculam as casas decimais do número de Euler **e** com uma excelente precisão e muito mais rápido que este modelo.

Como o número **e** está presente em situações de interpretações de fenômenos nas diversas áreas do conhecimento e isso, por sua vez, facilita a contextualização, descrevendo determinada realidade, predizendo sua evolução, bem como possibilitando o favorecimento na tomada de decisões. Diante disso, é conveniente elaborar alternativas que o determina mais rapidamente, pois, é o contexto que fornece sentido aos símbolos. De posse desse conhecimento temos possibilidade de nos transformarmos em indagadores e investigadores críticos.

Apresentamos modelos que determinam rapidamente o valor do número de Euler **e**. Para esse fim usamos as expressões mais conhecidas que determinam o valor do número **e**, são elas: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que pode ser transformada pelo desenvolvimento binomial em $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Observamos que a expressão $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n!}$ aproxima do valor de **e** mais rápido que o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para o mesmo valor de n, por isso, podemos dizer que para n suficientemente grande, os valores das expressões se referem ao mesmo objeto, que é o número de Euler **e**.

Enquanto para o número π, houve inúmeras tentativas para determinar o máximo de casas decimais, em relação ao número **e**, isso não ocorreu. Para esse fim usamos o desenvolvimento da série de ln(1+x). Esta série foi escrita por Newton em torno de 1665 e por Nicolaus Mercator (1620-1687) em 1668. O seu desenvolvimento é obtido da forma.

Vamos determinar uma função que representa a série de potências:

$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ...$

Se $-1 < x < 1$, então esta série tem soma $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1+x}$, e isto nos permite escrever:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - .... + (-1)^n (x)^n + ...$$

Considerando $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$. Podemos dizer que:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... \text{com } 1 < x \leq 1.$$

Harlan J. Brothers e John A. Knox publicaram artigos em 1998[26] e 1999[27] sendo o mais recente de Brothers publicado em 2004[28] onde buscam maneiras diferentes de obtenção do valor para o número **e** de forma mais rápida. Para esse fim eles utilizaram a definição tradicional[29] do número **e** que é a série ($\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n!}$) e o desenvolvimento da série de ln(1+x).

---

[26] New Closed-Form Approximations to the logarithmic Constant e de Harlan J. Brothers e John A. Knox.
[27] Novel Series-based Approximations to e de Harlan J. Brothers e John A. Knox.
[28] Improving the Convergence of Newton's Series Approximations for e de Harlan J. Brothers.

[29] Brothers usou a frase "definição tradicional do número **e**" se referindo a série $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Primeiramente apresentamos formas que são derivadas da série ln(1+x). Para isso, começamos com:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$. Trocando x por $\frac{1}{x}$ e multiplicando a igualdade por x.

$\ln(1+\frac{1}{x})^x = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{5x^4} - \frac{1}{6x^5} + \ldots$. Agora vamos trocar x por 2x e depois x por -2x.

$$\ln(1+\frac{1}{2x})^{2x} = 1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{32x^3} + \frac{1}{80x^4} - \frac{1}{192x^5} + \ldots \qquad (2)$$

$$\ln(1-\frac{1}{2x})^{-2x} = 1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{32x^3} + \frac{1}{80x^4} + \frac{1}{192x^5} + \ldots . \qquad (3)$$

Somando as igualdades (2) e (3) temos:

$$\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x}}\right] = 2 + \frac{2}{12x^2} + \frac{2}{80x^4} + \frac{2}{448x^6} + \ldots$$

$\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x = 1 + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{80x^4} + \frac{1}{448x^6} + \ldots$. Fazendo x assumir valor extremamente grande pode dizer que:

$1 + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{80x^4} + \frac{1}{448x^6} + \ldots \cong 1$. Então $\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x \cong 1$.

Portanto, $\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x \cong$ **e** para x infinitamente grande, ou seja, podemos considerar a igualdade $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$ =**e**.

Nesta aproximação podemos fazer a troca de x por a^x desde que a assuma valores inteiros positivos. Objetivando acelerar a convergência para que encontre o valor do número **e** mais rapidamente. De forma que podemos escrever:

$\left(\dfrac{2a^x+1}{2a^x-1}\right)^{a^x} \cong$ **e**. Dividindo o numerador e o denominador da fração que está no interior do parênteses por a^x. Temos:

$\left(\dfrac{2+a^{-x}}{2-a^{-x}}\right)^{a^x} \cong$ **e**. Se deixarmos x tender para o infinito, ou seja, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+a^{-x}}{2-a^{-x}}\right)^{a^x} \cong$ **e** para qualquer valor de a. Fazendo a=2 podemos escrever:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+2^{-x}}{2-2^{-x}}\right)^{2^x} \cong$ **e**.

Na tabela (08) a seguir faremos cálculos dos valores de **e** considerando as definições:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+2^{-x}}{2-2^{-x}}\right)^{2^x}$

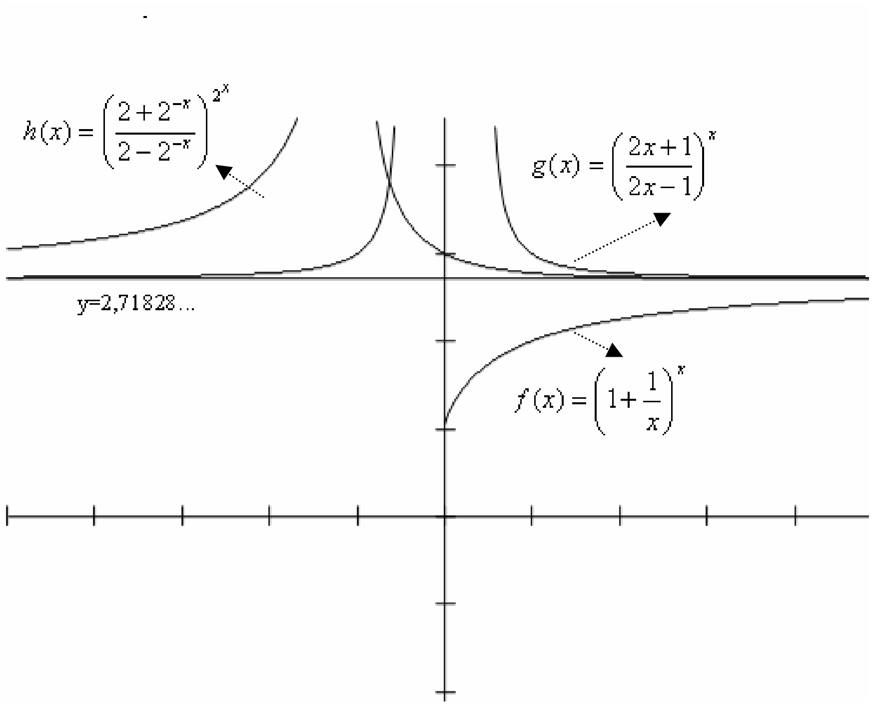
Tabela 8

x	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+2^{-x}}{2-2^{-x}}\right)^{2^x}$
5	2,48832	2,72741282663...	2,71850308421...
10	2,5937424601	2,72055141419...	2,71828204448...
20	2,65329770514...	2,71884840867...	2,71828182845...

Dentre as definições aqui apresentadas podemos dizer que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+2^{-x}}{2-2^{-x}}\right)^{2^x}$ converge mais rapidamente para o valor de do número **e**. Graficamente podemos verificar essa convergência. A seguir construímos no mesmo plano cartesiano o gráfico das funções abaixo (veja o gráfico 4):

$$y=\mathbf{e}\approx 2{,}71828,\ f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\ g(x)=\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}\ \text{e}\ h(x)=\left(\frac{2+2^{-x}}{2-2^{-x}}\right)^{2^{x}}$$

Gráfico 4



Portanto, verificamos por meio dos cálculos e do gráfico a rapidez de convergência da função $h(x)=\left(\frac{2+2^{-x}}{2-2^{-x}}\right)^{2^{x}}$. Qual será dentre todas as funções aquela que converge mais rapidamente para o número de Euler **e**?

Com o advento dos computadores torna-se necessário obter métodos que calculam o máximo de casas decimais para o número **e** com o mínimo de operações no menor tempo possível minimizando a fadiga dos componentes das máquinas.

Com esse objetivo Brothers (2004) continuou estudando séries que convergem rapidamente, partindo da definição clássica usada desde o século XVII que é a série ($\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n!}$).

Para determinar novas séries começamos fazendo combinação e comprimindo os termos consecutivos da série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+... \qquad (04)$$

Combinando termos consecutivos dessa série podemos obter novas séries que determinam o valor do número **e** bem mais rápido que a definição (04). Veja:

1º) Utilizando os termos consecutivos decrescentes $\frac{1}{n!}\ e\ \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!+n!}{n!(n+1)!}=\frac{(n+1)n!+n!}{n!(n+1)!}$$

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n+2}{(n+1)!}$$

Trocando n por 2k e tomando a soma em relação a k obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2}{(2k+1)!}=\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\frac{10}{9!}+\frac{12}{11!}+...$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2}{(2k+1)!}=\mathbf{e}$$

2º) Utilizando os termos crescentes $\frac{1}{n!}\ e\ \frac{1}{(n-1)!}$.

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n-1)!+n!}{n!(n-1)!}=\frac{(n-1)!+n(n-1)!}{n(n-1)!}$$

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{n+1}{n!}$$

Colocando no lugar de n=2k, o resultado da expressão torna-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k)!}=\frac{1}{0!}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\frac{9}{8!}+\frac{11}{10!}+...$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k)!}=\mathbf{e}$$

Podemos fazer outras combinações, como por exemplo, comprimindo três termos crescentes da forma:

$\frac{1}{n!}, \frac{1}{(n-1)!}$ e $\frac{1}{(n-2)!}$. Então:

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}=\frac{(n-1)!(n-2)!+n!(n-2)!+n!(n-1)!}{n!(n-1)!(n-2)!}$$

$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}=\frac{n^2+1}{n!}$, trocando n por 3k podemos escrever na forma de somatório:

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)^2+1}{(3k)!}=\frac{1}{0!}+\frac{3^2+1}{3!}+\frac{6^2+1}{6!}+\frac{9^2+1}{9!}+\frac{12^2+1}{12!}+\frac{15^2+1}{15!}+\ldots$$

Podemos "brincar" fazendo essas compressões, e com isso podemos fazer grandes descobertas, mas o importante é perceber que as séries podem ou não determinar mais rapidamente o valor do número **e**.

Na tabela (09) abaixo faremos uma comparação entre as séries: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2}{(2k+1)!}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k)!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)^2+1}{(3k)!}$. Considerando o mesmo valor de k=5.

Tabela 9

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2}{(2k+1)!}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k)!}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)^2+1}{(3k)!}$.
2,71666...	2,71828182619...	2,71828180114...	2,71828182845...

O valor do número **e** com 20 casas decimais é 2,71828182845904523536 (MAOR, 2004, p. 278). Destas quatro séries, observamos que a série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)^2+1}{(3k)!}$ converge mais rapidamente. Como descobrir a melhor de todas as séries que converge mais rapidamente para o valor do número **e**?[30]

[30] No anexo 3 apresentamos outras séries que determinam o valor do número de Euler **e**.

O número **e** neste trabalho foi obtido por limites e séries infinitas e o seu uso depende de saber em que situação será utilizada, pois, a apreensão desse objeto matemático será facilitada a partir da articulação de no mínimo duas formas diferentes de representação desse objeto.

Compreender as alternativas de cálculo desse número nos ajuda a "penetrar" no seu significado, bem como compartilhar seus sentidos e isso pode propiciar o entendimento de sua utilidade, de modo que possibilita uma reflexão sobre a estrutura desse mundo matemático em que estamos inseridos.

A construção do conhecimento matemático é mais eficiente se tiver como ponto de partida a realidade. A exploração de acontecimentos reais podem nos colocar em situações no qual o aumento e diminuição de uma grandeza se torna proporcional ao valor da grandeza num determinado instante e, nesse momento, o conhecimento do número **e** nos ajuda analisar com criticidade o fenômeno observado.

As possibilidades de determinar o valor do número de Euler **e** por séries ou por limites discutidas aqui são perfeitamente possíveis de serem apresentadas no ensino médio, desde que criamos um contexto adequado para sua introdução (a questão é como e quando criar essa situação). Acreditamos que os juros compostos é uma boa forma de atingir esse objetivo. Na graduação o estudo deste conceito pode ser feito na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Na tabela (10) a seguir temos uma simulação dessas possibilidades com aproximações de 5 casas decimais.

Tabela 10

Tipos de representações	Definições (representações ou intensões) para obter o valor do número de Euler **e**	k=5
A	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$	2,71666...
B	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+2}{(2k+1)!}$	2,71828...

C	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k)!}$	2,71828...
D	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)^2+1}{(3k)!}.$	2,71828...
E	$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$	2,48832...
F	$\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^k$	2,72741...
G	$\left(\frac{2+2^{-k}}{2-2^{-k}}\right)^{2^k}$	2,71850...

Nosso propósito é compreender como se dá o processo de construção epistemológica cognitiva do número de Euler **e**, assim como da função exponencial de base **e**. Dessa forma, verificamos que esse número está presente na ação recíproca entre os conceitos matemáticos e as representações deles, ou seja, devemos desenvolver atividades em que esse conceito denota relações entre objetos já construídos ou não.

Como as relações não podem ser acessadas de forma direta usamos as representações ou intensões que por sua vez utilizam símbolos para indicar determinada representação. Segundo Frege (apud OTTE, 1994, p. 74-75) uma igualdade do tipo a=b não significa uma relação entre objetos, mas entre dois nomes diferentes do mesmo objeto, ou seja, a e b são representações ou designações diferentes do mesmo objeto.

Então a e b têm um sentido diferente, mas têm a mesma denotação. Por isso, a e b são duas maneiras em que um objeto é representado ou é dado. Frege achou que uma diferença entre a=a e a=b só pode existir quando a diferença dos símbolos a e b são interpretadas como uma diferença de maneira em que uma coisa denotada é dada (OTTE, 1994, p. 75). De forma que ambos os termos a e b se referem ao mesmo objeto, mas o sentido ou o modo de apresentação é diferente. Frege (apud OTTE, 2003, p. 206. Minha tradução) escreveu:

> Sejam a, b e c retas que ligam os vértices com os pontos médios dos lados opostos de um triângulo. O ponto de interseção de a e b é, então o mesmo ponto de interseção de b e c. Assim nós temos designações diferentes para o mesmo ponto, e estes nomes (‘ponto de interseção de a e b'; ‘ponto de interseção de b e c'),

> igualmente indicam o modo de apresentação, e conseqüentemente a declaração contém conhecimento atual [31].

Na tabela (10) temos alguns tipos de representações (intensões) do número de Euler **e**. Todas designam o mesmo valor no aspecto teórico, mas cada uma das representações apresenta forma diferente de computar seus dígitos. Entretanto, o conhecimento a ser almejado é o mesmo. Podemos escrever na forma de igualdade (A=B=C=D=E=F=G=**e**). Os meios do conhecimento neste trabalho são essas representações (operação e/ou lei) que determinam o valor do número **e**, mas esses meios "são de fato para serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso" (OTTE, 1993, p. 224).

Isto possibilita estabelecer diferentes tipos de relacionamentos deste conceito matemático, que por sua vez influencia o seu desenvolvimento. Estas representações (A, B, C, D, E, F e G) têm sentidos diferentes que propiciarão sua aplicação em contextos diferentes, como por exemplo, num programa de computador, em que se deseja saber qual é o melhor modelo (operatório ou lei) que computa os dígitos do número **e** para a aplicação na modelagem numérica.

A construção do conceito do número **e** assim como da função exponencial de base **e** obtido por meio da relação complementar entre o processo algorítmico operacional e a lei ou função conduz para o fortalecimento da intuição e da razão de que o conteúdo a ser compreendido está na relação e não na dualidade polarizada entre o discreto e o contínuo.

Compreender que existem várias maneiras para obter o número **e** são necessidades práticas para proporcionar alternativas de aplicações. Podemos dizer também que são necessidades teóricas da fundamentação que possibilita: mais coerência, mais clareza, mais conexões, mais flexibilidade no uso tanto na Matemática pura como na aplicada, pois este objeto matemático assume vários personagens no universo da relação homem natureza.

---

[31] Let a, b, c be the lines connecting the vertices of a triangle with the midpoints of the opposite sides. The point of intersection of a and b is then the same as the point of intersection of b and c. So we have different designations for the same point, and these names ('point of intersection of a and b'; 'point of intersection of b and c') likewise indicate the mode of presentation, and hence the statement contains actual knowledge.

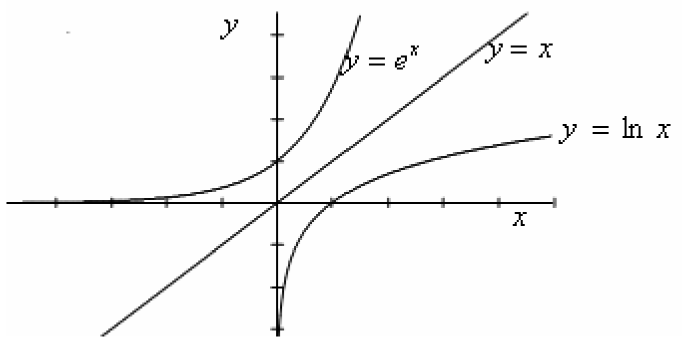
2.6 A Inversa da Função y=e^x e a Quadratura da Hipérbole y=$\frac{1}{x}$

Aqui fizemos um estudo da relação que há entre o número **e**, a função exponencial de base **e** com a quadratura da hipérbole. Com esse objetivo vamos encontrar a inversa da função exponencial y=**e**^{x}. O logaritmo briggsiano (base 10) de um número y>o é o número x para o qual 10^x=y.

Do mesmo modo, o logaritmo natural[32] de um número y>0 é o número x tal que **e**^{x}=y $\Leftrightarrow$ **x=log$_e$y**=lny (MAOR, 2004, p.140).

A inversa da função exponencial de base **e** é então a função logarítmica natural e sua equação, depois de trocar **x** e **y**, é **y=lnx**. Observem no gráfico (5) que seus esboços são reflexos um do outro sobre a reta y=x:

Gráfico 5



Temos, portanto, duas funções importantes na Matemática que são definidas por $y = e^x$ *e* $y = \ln x$.

A função exponencial de base "**e**" e sua inversa, bem como suas derivadas e antiderivadas propiciarão compreender o processo feito para quadrar, ou seja, determinar a área sob a hipérbole. Isto é importante, pois, é um assunto que remonta a Antiguidade e somente com o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral (séries e funções) e da função exponencial de base **e** que a quadratura da hipérbole foi totalmente esclarecida. Diante disso, apresentamos uma explicação que justifica esse fato.

[32] O logaritmo natural considera o número **e** como base

A taxa de variação de uma função inversa é a recíproca (um dividido por) da taxa de mudança da função original; em símbolos $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ (MAOR, 2004, p. 142).

Temos y = $\mathbf{e}^x$ e $\frac{dy}{dx} = y$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, mas x como função de y é precisamente x=lny, pois, y = $\mathbf{e}^x \Leftrightarrow$ x=lny

Trocando a letra x por y (y=lnx) temos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, por isso, podemos escrever:

$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$. Integrando esta igualdade temos:

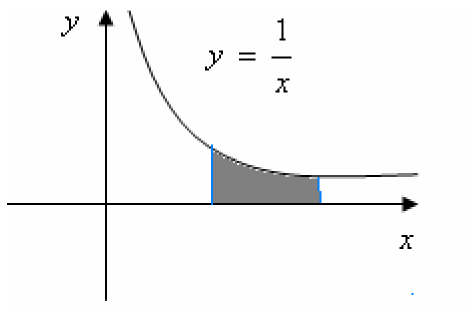
$\int \frac{d(\ln x)}{dx} = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln x = \int \frac{1}{x} dx$.

Chegamos a dois resultados importantes:

$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ e $\ln x = \int \frac{1}{x} dx$

Podemos verificar graficamente (veja o gráfico 6) que:

Gráfico 6



A fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$, diz que a área sob a hipérbole (A(x)) segue uma lei logarítmica. Observando a figura acima constatamos que A(x)=lnx + c.

Fazendo x=1 como ponto inicial a partir do qual a área será medida, temos 0=A(1)=ln1 + c=0, isso implica que c=0, pois $\ln 1 = \log_e 1 = 0$ ($e^0=1$).

Diante disso, podemos concluir que a área sob a hipérbole $y=\frac{1}{x}$ de x=1 a qualquer t>1 é igual à lnt (logaritmo natural de t na base **e**). Isto nos mostra que o número **e**, e a função exponencial de base **e** estão diretamente conectados com área sob a hipérbole.

Para que essa área seja igual 1 (lnt=1), temos t=**e**, pois:

ln**t=1** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{e^1= t}$ $\Leftrightarrow$ **t= e.**

Este resultado mostra um significado geométrico para o número **e**, pois, o relaciona com a hipérbole da mesma forma como π está diretamente ligado à elipse e ao círculo. Considerando A(x) como área de um círculo podemos escrever:

Círculo

A(x)= πx^2

A(1)= π para x=1, ou seja, π representa a área de um círculo de raio unitário. O número π, neste caso, expressa uma relação entre grandezas que por sua vez representa a área do círculo.

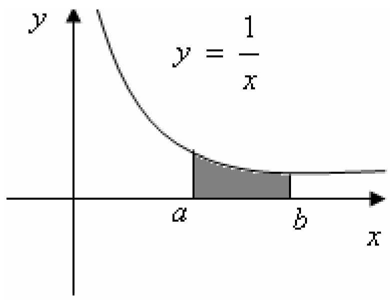
Hipérbole

A(x)=lnx (neste caso A(x) é a área sob um ramo da hipérbole, veja o gráfico 06.

Quando A(x)=1 temos x=**e**, ou seja, o número **e** é a extensão linear (abscissa) que torna a área sob a hipérbole igual a 1[33].

No gráfico (7) a seguir mostramos uma generalização:

Gráfico 7



[33] Esta explicação encontra-se no livro – e: a História de um Número de Eli Maor, 2004, p. 142.

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$

Neste momento elaboramos uma explicação que pode justificar o fato de que a função exponencial de base "**e**" está relacionada com a área sob a hipérbole, ou seja, temos uma função logarítmica de base **e** que expressa essa área.

> A antiderivada de x^n é $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, onde c é uma constante da integração. Esta fórmula é válida para todos os valores de n, exceto -1, por que então o denominador n+1 é igual a zero. Mas quando n=-1, a função cuja antiderivada estamos buscando é a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ - a mesma função cuja quadratura Fermat (1601-1665) não conseguiu obter. A fórmula $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$ nos fornece agora o "caso perdido". Ela explica imediatamente a descoberta de Sain-Vincent (1584-1667) de que a área sob a hipérbole segue uma lei logarítmica (MAOR, 2004, p. 142).

Esta explicação é importante, pois, possibilita interpretar de uma forma alternativa mostrando que $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$ ao invés de defini-lo diretamente, fato que é comum nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral atualmente. Temos clareza da importância do número **e**, no que diz respeito a interpretação de fenômenos, além disso, esse número pode ser usado para explicar assuntos fundamentais da teoria Matemática.

O que temos aqui, portanto, é o uso de uma lei que expressa a relação entre a área sob a hipérbole e o valor do número **e**, mas o que fica evidente é a necessidade do tratamento complementar entre o fato dessa área ser obtida por um processo contínuo aliada ao processo operacional. Por exemplo, se no gráfico (7) o valor de a=2 e b=8, então para saber qual será a medida da área temos que usar a lei (contínuo) e as operações (discreto), ou seja, a noção da complementaridade nos ajuda a entender melhor o processo usado para determinarmos o valor aproximado dessa área que é 1,3862 unidades de área.

2.7 O Aspecto Relacional que Existe Entre a Definição de y=e^x por Séries Infinitas e pela Integral de y=x^{-1}.

A definição para a expressão $\mathbf{e}^x$ por meio de séries nos permite elaborar alternativa de explicação para $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$. Com efeito, diferenciamos a igualdade.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots.$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$. Se $y = e^x$ então $\frac{dy}{dx} = y$. Por isso podemos escrever:

$\frac{dy}{y} = dx$. Integrando os membros da igualdade temos $\int \frac{dy}{y} = x + constante$.

Como $y = e^x$(tomando **ln** em ambos os lados), escrevemos x=lny. Voltando na integral temos:

$\int \frac{dy}{y} = \ln y + constante$, trocando a letra y por x concluímos que:

$\int \frac{dx}{x} = \ln x + constante$. Derivando os membros desta igualdade podemos escrever:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Nesta explicação necessitamos do conhecimento de séries de potências infinitas, de qualquer modo, pode ser usada em situações para mostrar formas diferentes de atingir o mesmo resultado por caminhos diferentes, e deixar claro que isso só é possível graças aos aspectos teóricos da Matemática.

A transformação da função f(x)=$\mathbf{e}^x$ numa série de potência infinita e o fato dessa função poder ser expressa na forma de um binômio desencadeou o processo de computação dos dígitos do número **e.** Isso mostra que esse conceito foi inicialmente desenvolvido no século XVII e XVIII num contexto de área sob a hipérbole e de juros compostos, ou seja, por um lado, o aspecto da continuidade geométrica (área sob a hipérbole) e, por outro lado, o aspecto operacional discreto dos juros compostos.

Nesse período não havia um tratamento fundamentado da teoria dos números reais e por isso, houve essa polarização. O fato é que essa dualidade provoca dificuldades de perceber a "essência" desse conceito, que é na verdade a interação presente nas atividades cognitivas que estabelece o conteúdo a ser estudado e não os modelos operacionais em si e nem as leis independente de contextos bem localizados, pois, para que servem os algoritmos? Para que servem as leis estruturais?

A relação entre o objeto e o sujeito por meio das representações (intensões) e também pelas denotações simbólicas nunca é absoluta, por isso o caráter complementar entre as intensões e as denotações (extensões) desse conceito sugere o estudo das atividades presentes na análise de determinados fenômenos. Pois são elas que nos direcionam para o entendimento de que o número de Euler **e** está no aspecto relacional e não no objeto ou no sujeito.

Agora, como determinar a essência dessa relação? Estamos cientes de que a essência "verdadeira" nunca será alcançada, mas o que de fato importa é a procura dessa essência, pois é isso que vai propiciar uma melhora do sentido e do significado desse objeto.

Temos o número de Euler **e** tratado por meio do duplo sentido do conceito de função. Todavia, essas explicações não podem ser discutidas isoladamente, pois apenas o processo operacional não possibilita a compreensão de que esse número propicia um estudo sobre a continuidade dos números. Enquanto o aspecto da lei apenas não nos oferece condições de perceber que o conceito de número fica mais evidente se for construído.

Portanto, a perspectiva da noção de complementaridade desperta na mente do sujeito a idéia de que o número é um objeto relacional, pois mostra a cumplicidade que há entre o discreto e o contínuo na conceitualização do número. Devido ao fato de associar este objeto matemático por meio da duplicidade intermediada pela relação da operação e lei para o entendimento do mesmo.

2.8 Conexões que o Número de Euler Estabelece com outras Áreas da Matemática

A função exponencial de base **e**, bem como o número **e** nos propicia o estudo dos fundamentos da Matemática, mas este assunto está presente também em vários ramos da própria Matemática, pois esta função além de ajudar a interpretar e resolver situações reais nos encaminhou à descoberta de novas áreas do conhecimento.

Para compreender as principais conexões que envolvem número **e** acabamos nos relacionando com signos e os signos dependem de objetos. Então a compreensão, ou seja, a aproximação da realidade da idéia do número **e**, bem como suas relações são intuitivas e expressas por meio da linguagem e intermediadas pela razão. O verdadeiro elo entre o signo e o objeto está na atividade relacional estabelecida entre ambos. Todavia, sabemos que as causas podem ser infinitas e nem por isso, devemos parar de procurar conhecê-las, pois é essa busca que vai nos direcionar para compreensão aproximativa da realidade objetiva[34].

O número **e**, bem como a função exponencial por meio da teoria Matemática estabelece conexões entre assuntos que aparentemente não têm nada em comum. A questão é trabalhar com a idéia de que as conexões representam intensões diferentes do mesmo objeto matemático. Analisamos situações que expressam esse fato. Em 1748 foi publicado um dos mais importantes trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783) intitulada *Introductio in Analysin Infinitorum* (introdução à análise de infinitos). Nesse trabalho Euler chamou atenção para a importância do número "**e**" e da função exponencial ($y=\mathbf{e}^x$) na análise Matemática (MAOR, 2004, p. 203). Neste trabalho apresentamos a conexão que o número **e** estabelece com: a unidade imaginária **i**, o número π, os números primos e a espiral logarítmica.

2.8.1 A Unidade Imaginária i e o Número de Euler

No começo do século XVIII não havia uma preocupação com o rigor no tratamento do infinito, pois, o instrumento que se usava para este estudo não havia sido ainda fundamentado, mesmo assim Euler desenvolveu muitas fórmulas, dentre elas, as composições envolvendo o número imaginário **i**, **e**, senx, cosx e π (MAOR, 2004, p. 206). Mostramos a seguir como construir algumas dessas fórmulas

Para isso usamos a definição $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e a representação por séries de potências de Maclaurin como podemos ver em (2.3.2). Usamos também os dados da tabela (11):

[34] Não sei exatamente o que é realidade objetiva, mas creio que jamais o desvendaremos. Entretanto, o processo de busca nunca deve ser abandonado.

Tabela 11

g(x)=cosx	f(x)=senx
g'(x)=senx	f'(x)= cosx
g''(x)= -cosx	f''(x)= -senx
g'''(x)=senx	f'''(x)=-cosx
$g^{(4)}$(x)=cosx	$f^{(4)}$(x)=senx
$g^{(5)}$(x)=-senx	$f^{(5)}$(x)=cosx
$g^{(6)}$(x)=-cosx	$f^{(6)}$(x)=-senx

Então usando o conhecimento de séries podemos transformar as funções f(x)=senx e g(x)=cosx em séries a saber:

$g(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - + \ldots$ e $f(x) = senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$

Considerando a definição $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e trocando x por ix temos uma das mais importantes conexões que envolvem o número de Euler **e**:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$$

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots)$$

No interior dos parênteses temos expressões equivalentes a cosx e senx respectivamente. De forma que podemos concluir:

e^{ix}=cosx + isenx

Outra maneira de demonstrar esta equação é partir do número complexo z=1 que tem módulo 1 e escrevendo o número complexo z=1 na forma trigonométrica temos z=ρ(cosx +isenx), onde x representa um número real. Então ficamos com z=cosx+isenx.

Note que se x=0, o valor de z=1. Diferenciando ambos os membros dessa igualdade e substituindo -1 por i², podemos escrever:

$\frac{dz}{dx} = i(isenx + \cos x)$, como z=cosx + isenx, temos:

$\frac{dz}{dx} = iz \Leftrightarrow \int \frac{1}{z}dz = \int idx \Leftrightarrow$ lnz=ix + c

Usando o fato que se x=0 então z=1 podemos determinar o valor da constante c.

ln1=0 + c $\Rightarrow$ c=0. Portanto, lnz=ix e por isso, e^{ix}=z

e^{ix}=cosx + isenx (05)

De maneira análoga, considerando também cos(-x)=cosx e sen(-x)=-senx, temos:

e^{-ix}=cosx – isenx (06)

Somando e subtraindo as igualdades (05) e (06) temos:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (07) \;\; e \;\; senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (08)$$

As igualdades 05, 06, 07 (esta igualdade será usada em 2.9.3 na interpretação de um fenômeno físico) e 08 estabelecem conexões entre a função exponencial, trigonometria e a unidade imaginária, que foram determinadas de forma experimental[35], não tendo a preocupação do sentido e do significado dos resultados obtidos.

Uma outra fórmula que nos impressiona pela sua aparente simplicidade é $e^{i\pi} + 1 = 0$ que relaciona os "cinco números mais importantes da Matemática": **e**, π, 1, 0 e i, bem como as operações de adição, multiplicação e exponenciação. E tendo como elo o conceito mais importante que permeia toda a Matemática que é a igualdade. "O conceito de igualdade é, portanto, para começar, sempre relativo, relacionado a um determinado contexto" (OTTE, 1993, p. 54). Neste caso a igualdade está relacionando os números **e**, π e **i** que têm personalidades tão diferentes. Para obter esta fórmula substituímos x=π na equação:

e^{ix}=cosx + isenx:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + isen\pi$$
$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (09)$$

Na igualdade (09) temos representantes das diversas áreas da Matemática: 0 e 1 (aritmética); i (álgebra); π (geometria) e o número **e** (análise). Isto é importante porque conecta as várias áreas do conhecimento teórico matemático, deixando claro que a questão relacional está presente também no interior da Matemática, ou seja, a complementaridade entre conceitos e objetos possibilita criar novas teorias.

---

[35] Experimental é no sentido de substituir uma fórmula na outra.

> Para Benjamin Peirce (1809-1880), um dos principais matemáticos de Harward no século XIX, a fórmula $e^{i\pi}+1=0$ veio como uma relação. Ao descobri-la, um dia, ele se voltou para seus alunos e disse: "Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal; não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa. Mas conseguimos prová-la e, portanto sabemos que deve ser verdade" (MAOR, 2004, p. 208).

Os números $\mathbf{e}, \pi, e\ i$ juntamente com a fórmula e^{ix}=cosx + isenx nos permite deduzir situações que não tem um sentido "claro e imediato". Para isso analisamos o caso de i^i que nos mostra resultados interessantes:

1- Fazendo x assumir $\frac{\pi}{2}$ na fórmula e^{ix}=cosx + isenx:

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i \text{. Mas, } i^i = \left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^i = e^{\frac{-\pi}{2}} \Leftrightarrow i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$$

2- Se colocarmos no lugar de x o valor de $\frac{5\pi}{2}$ na mesma fórmula e^{ix}=cosx + isenx, ficamos com:

$$e^{\frac{5\pi i}{2}} = \cos\frac{5\pi}{2} + i sen\frac{5\pi}{2}$$

$$e^{\frac{5\pi i}{2}} = i \text{. Portanto, } i^i = \left(e^{\frac{5\pi i}{2}}\right)^i = e^{\frac{-5\pi}{2}} \Leftrightarrow i^i = e^{\frac{-5\pi}{2}}$$

O número imaginário i elevado a ele mesmo torna-se números reais quando $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi.k$, onde k é um número inteiro. Qual é a dimensão do sentido da expressão i^i?

Podemos observar que o cálculo de Euler para a expressão e^{ix}=cosx + isenx, que é considerada a fórmula "mais famosa de todas as fórmulas", propiciou uma construção de uma nova área da Matemática, as Funções de Variáveis Complexas, pois Euler fez o imaginário tornar-se real, além disso, encaminhou a interpretação de logaritmos de números negativos. Nesse sentido, a equação $e^{i\pi} = -1$, que pode ser estendido para $e^{i3\pi}$ = -1, ..., $e^{i(2k+1)\pi}$ = -1, k $\in$ Z, desde que substituímos x por π, 3 π, 5 π, ... na fórmula e^{ix}=cosx + isenx.

Diante disso, temos ln(-1)= i(2k+1)π, K $\in$ Z ou seja, o logaritmo de um número negativo nos dá uma infinidade de respostas quando consideramos os números complexos. A representação ln(-1) e iπ possuem intensões diferentes, mas denotam qual objeto matemático? Qual a importância dessa fórmula num contexto prático? Será que podemos dizer que essa fórmula não tem nenhuma necessidade de ser estudada? Particularmente, acredito que mesmo não tendo uma aplicação prática imediata é necessário estudá-la, pois pode abrir caminhos para outras áreas do conhecimento.

Entretanto, se uma teoria apresenta aplicações práticas imediatas seja no aspecto científico ou no senso comum, isto o torna mais evidente e talvez mais interessante. De forma geral podemos dizer, como é possível um número aparentemente simples estabelecer tantas conexões?

2.8.2 Os Números Primos e o Número de Euler

Um número inteiro maior que 1 é primo se for apenas divisível por si mesmo e por um. Os primeiros números primos são: 2,3,5,7,11,13,17, ... O que nos deixa intrigado é o fato que os números primos se espalham ao acaso entre os inteiros sem nenhum padrão que governa essa distribuição. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1792, aos 15 anos de idade examinou uma tabela de números primos elaborada por Johann Heinrich Lambert (1728-1777) na tentativa de encontrar uma lei de formação que determinasse a quantidade de números primos que são menores de um número inteiro n.

Atualmente a função que representa a quantidade de números primos menores ou iguais a um inteiro n é denotada por π(n), onde a letra π não tem nenhuma ligação com o valor 3,14.... Dessa forma, π(10)=4 e π(17)=7. Depois de examinar a tabela de números primos, Gauss conjecturou:

$\pi(n) \approx \dfrac{n}{\ln n}$ ou de forma equivalente $\dfrac{\pi(n)}{n} \approx \dfrac{1}{\ln n}$, onde $\ln n$ é o logaritmo natural cuja a base é o número de Euler **e**. A tabela (12) a seguir mostra as comparações de $\dfrac{\pi(n)}{n}$ com $\dfrac{1}{\ln n}$.

Tabela 12

n	π (n)	$\frac{\pi(n)}{n}$	$\frac{1}{\ln n}$
10	4	0,4000	0,4343
100	25	0,2500	0,2171
1.000	168	0,1680	0,1448
10.000	1.229	0,1229	0,1084
100.000	9.592	0,0959	0,0869
1.000.000	78.498	0,0785	0,0724
10.000.000	664.579	0,0665	0,0620
100.000.000	5.761.455	0,0576	0,0543

Fonte (MAOR, 2004, p. 239).

Observe que $\frac{\pi(n)}{n}$ dividido por $\frac{1}{\ln n}$ fica cada vez mais próximo de 1 para n infinitamente grande.

Atualmente, essa conjectura é conhecida como o Teorema dos Números Primos[36] e foi demonstrada em 1896 por Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), da França, e Charles de La Vallée-Poussin (1866-1962) da Bélgica (MAOR, 2004, p. 239).

A presença do logaritmo natural na teoria dos números primos mostra que o número **e** está ligado, mesmo que indiretamente, aos números primos, nos mostrando que são as relações que tornam mais belos os conceitos matemáticos. Sobre este assunto (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 35) relata:

“O fato de que o comportamento médio da distribuição dos números primos pode ser descrito pela função logarítmica é uma descoberta muito importante, porque é surpreendente que dois conceitos matemáticos que parecem tão desvinculados estejam na realidade tão intimamente ligados”.

[36] A demonstração desse Teorema pode ser encontrada no Livro “The Theory of Numbers de Anthony A. Gioia no capítulo 8, página 129.

2.8.3 A Espiral Logarítmica e o Número de Euler

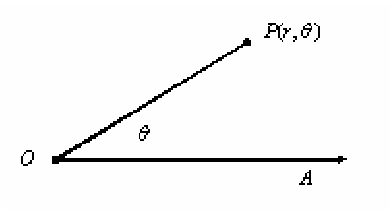
A partir do momento em que Descartes (1596–1650) apresentou a geometria analítica, muitas curvas intrigaram os matemáticos, dentre elas a espiral logarítmica, que foi a curva preferida de Jakob Bernoulli (1654–1705).

A representação de curvas no plano pode ser feita por meio de vários sistemas de coordenadas, como por exemplo, as coordenadas polares. Neste sistema é considerado um ponto fixo chamado pólo ou origem representada pela letra "O". O raio fixo é chamado eixo polar ou reta polar, que é normalmente traçada na horizontal e para a direita.

Segundo (LEITHOLD, 1982, p. 448), as coordenadas polares são definidas da seguinte forma:

Seja P um ponto qualquer no plano distinto de O. Seja θ a medida em radianos do ângulo orientado AOP, positivo quando medido no sentido anti-horário e negativo quando medido no sentido horário, tendo como seu lado inicial o raio OA e, como seu lado terminal, o raio OP. Então, se r é à distância de O a P (isto é, $r = \left|\overline{OP}\right|$), um conjunto de coordenadas polares de P é dado por r e θ, e escrevemos estas coordenadas como (r, θ). Na figura 04 abaixo temos o esboço dessa situação:

Figura 04

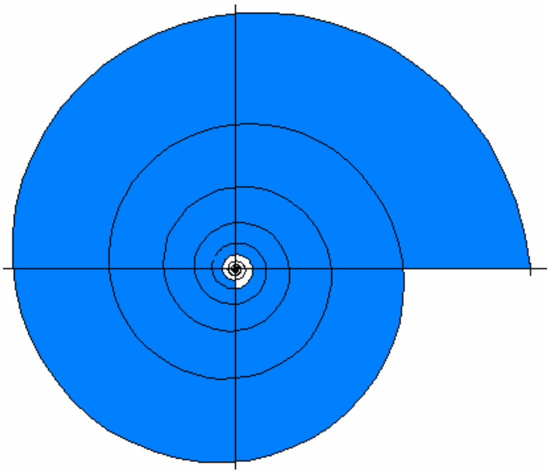


Jakob Bernoulli usou extensivamente as coordenadas polares para encontrar as propriedades das curvas. A espiral logarítmica que na época era definida pela equação lnr=aθ, onde **a** é uma constante e ln é o logaritmo natural na base **e**, hoje essa equação é escrita na forma inversa, $r = e^{a\theta}$.

A espiral logarítmica ou espiral eqüiângular apresenta característica de auto-similaridade, ou seja, não altera sua forma quando o tamanho aumenta. A espiral recebeu o nome eqüiângular em 1638 por Descartes, pois reflete uma propriedade única da espiral logarítmica. Se desenharmos uma linha reta do pólo até qualquer ponto da curva, ela interceptará a curva formando exatamente o mesmo ângulo. O gráfico (08) a seguir mostra um exemplo dessa curva:

Gráfico 8

$$Espiral\ \log arítmica\ (r = e^{-0.09\theta})$$



O fato interessante dessa curva é a possível semelhança em relação a sua forma com fenômenos de crescimento da natureza e isso pode ser verificado no redemoinho de uma galáxia ou na concha do náutilo. Veja as fotos:

Figura 05

Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/logarithmic_spiral

O que temos é o número **e**, que é obtido pelo processo de limite, relacionado com formas naturais, e isso nos remete a indagar e aceitar a conexão desse número com fenômenos naturais, ou seja, a compreensão das características do infinito propicia aprofundamento no entendimento dessas conexões.

Por isso, acreditamos que a questão intuitiva está presente complementarmente no desencadeamento da estrutura lógica da Matemática. Neste momento cabe uma pergunta: por que será que existem fenômenos que crescem aritmeticamente ou exponencialmente? Neste sentido é interessante tentar desvendar o porquê, com o intuito de compreender como os conceitos e objetos se relacionam na mente humana.

O número de Euler **e** bem como a função exponencial de base **e** tem a mais coerente explicação de sua possível existência e utilidade se for entendido sob o aspecto complementar que há nessas conexões, assim como na interpretação relacional de fenômenos naturais ou não. Isso reforça o fato de que o número de Euler **e** não está no objeto e nem no sujeito e sim na essência relacional entre o objeto e o sujeito, ou seja, número é relação entre grandezas e não entidades com qualidades próprias e ontológicas. O que vamos mostrar a seguir são situações em que a função exponencial de base **e** torna-se necessário para a compreensão dos fenômenos das ciências.

2.9 Aplicações da Função Exponencial de Base e

A curiosidade natural do ser humano em conhecer o próprio ser e o meio em que vive o transformou num questionador dos fenômenos. Nesse caminho de indagação e na busca de compreensão das coisas surgiu à teoria Matemática que é um instrumento que pode ser usado para representar, não de maneira exata, parte significativa das complexidades existentes na natureza.

Entretanto, a teoria Matemática não busca a interpretação ontológica dos objetos e sim estabelecer relações próximas daquelas observadas na realidade. De forma que a realidade nos apresenta o objeto, e o sujeito cria os meios (representações) de relacionar com esse objeto, mas o objeto e meio não apenas se conectam como também mantêm entre si uma oposição, pois os problemas (objeto) não produzem por si só maneiras de representações que determina sua solução.

Como a construção do saber passa pela relação que há entre o sujeito, meios e o objeto não podemos considerar o saber identificado com experiências e intuições individuais, nem pode ser completamente reduzido a significados conteudísticos isolados, isto é, ser concebido como reflexo direto do objeto (OTTE, 1993, p.225). Por isso, o número de Euler **e** assim como a função que tenha esse número como base precisa de meios e intensões diferentes para propiciar a consolidação de sua utilidade na análise de fenômenos, pois, o seu tratamento por meio do algoritmo operacional e a lei possibilitam adentrar mais profundamente no como a função exponencial relaciona fenômenos tão dicotômicos.

Durante o processo de conhecimento dos fatores que movem um determinado fenômeno torna evidente a necessidade de escrever as relações obtidas por meio de igualdades. E é nessas igualdades que, também está presente a idéia de complementaridade. Entretanto, essas igualdades podem representar taxas de variações de quantidades instantâneas que se traduzem por equações diferenciais, que é a descrição quantitativa de um fenômeno. É válido ressaltar que essa descrição quantitativa não está dissociada das questões qualitativas e sim se entrelaçam complementarmente na busca do esclarecimento temporal das causas e conseqüências de um determinado fenômeno.

O conhecimento do aspecto teórico da Matemática, bem como das equações diferenciais possibilitará buscar soluções para alguns tipos de equações que representam determinadas situações. Não temos o propósito de fazer um estudo detalhado das equações diferenciais, mas como uma boa parte dos fenômenos pode ser representada por equações diferenciais faz-se necessário buscar suas respectivas soluções e nesse momento, em suas soluções, estão presentes o número de Euler "**e**" e a função exponencial de base **e**.

A questão é como pode um número, aparentemente simples, estar presente na compreensão de tantos fenômenos de naturezas tão diferentes? Aí está a grande importância dos aspectos teóricos da Matemática na sociedade, pois, uma mesma teoria pode ser utilizada em várias áreas do conhecimento, bem como em contextos diferentes.

Mostramos algumas situações envolvendo a função exponencial de base **e**, para que tenhamos uma visão ampla da sua importância na resolução de problemas. A curva do gráfico da função $y=\mathbf{e}^x$ e a sua derivada $\frac{dy}{dx} = y$ são os principais motivos pelos quais este assunto aparece em áreas tão diferentes.

O número de Euler - **e** – e principalmente a função exponencial de base **e**, que pode ser chamada de função exponencial natural ou simplesmente a função exponencial, surge naturalmente quando o aumento ou diminuição de uma grandeza se torna proporcional ao valor da grandeza num determinado instante (MAOR, 2004, p.136).

Fenômenos dessa natureza podem ser traduzidos pela equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ay$, onde **a** é a taxa de variação em cada situação. Essa equação pode ser resolvida por meio da integração e tem como solução $y = e^{ax+c} = e^{ax}.e^{c}$.

Chamando $e^c = y_0$ temos a solução geral dada por $y=y_0e^{ax}$. O valor de y_0 pode ser determinado por meio da condição inicial da situação problemática proposta, uma vez que, se x=0, o valor de y poderá ser positivo ou negativo e isso permite interpretar as situações em fenômenos de crescimento ou decrescimento (decaimento) exponencial. Numa boa parte dos fenômenos da natureza, o número **e**, e a função exponencial de base **e** aparece de modo inevitável e insubstituível e o instrumento chamado Cálculo Diferencial e Integral propicia a compreensão desses fenômenos. Inicialmente citaremos dois casos com o propósito de mostrar a aplicação dessa equação diferencial.

2.9.1 O Crescimento de População de Bactérias

"O número de bactérias em uma cultura aumenta de 6000 para 18000 em duas horas. Supondo que a taxa de aumento seja diretamente proporcional ao número de bactérias presentes" (SWOKOWSKI, 1994, p. 528). A partir daí vamos determinar uma fórmula que relaciona o número de bactérias em qualquer instante. Para isso denotamos y=f(x), o número de bactérias após x horas e y_0, valor inicial, então:

$y_0=f(0)=6000$ e f(2) sendo o número de bactérias após duas horas. Usando a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ay$ cuja solução geral é $y=y_0.\ e^{ax}$. Fazendo x=0 temos $y=y_0$ que é a quantidade de bactéria no instante inicial e isso nos permite escrever $y=6000e^{ax}$.

Como y=18000 após duas horas (x=2), chegamos à equação:

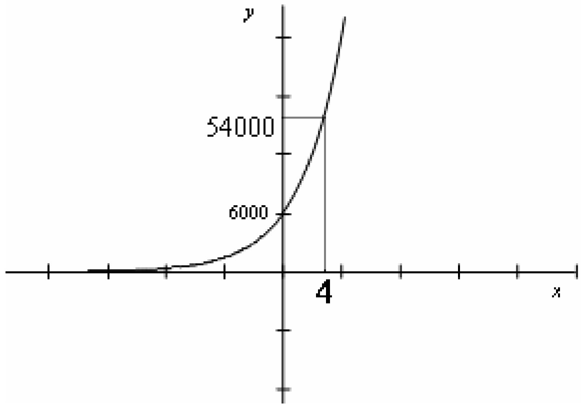
$f(2) = 6000e^{2a}$

$18000= 6000\ e^{2a} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}} = e^{a}$.

Substituindo $3^{\frac{1}{2}} = e^{a}$ em $y=6000e^{ax}$ temos:

$y = 6000(3^{\frac{1}{2}})^{x}$, que é a lei geral que "governa" este fenômeno. Plotando essa lei no plano cartesiano (veja o gráfico 09) temos:

Gráfico 9



Será que o número de bactérias aumenta de fato infinitamente? Não podemos saber se acontecerá um fato não evidente que modificará o rumo dessa interpretação, mas percebemos que para tratar desse problema é conveniente utilizarmos o aspecto operacional de computação dessa população de bactérias e o aspecto estrutural (lei) que permite olhar esse fenômeno de forma ampla, ou seja, do geral para o particular.

2.9.2 Desintegração Radioativa

Analisamos a desintegração radioativa que é a razão segundo a qual a quantidade total de substância radioativa diminui, em cada instante, é proporcional à quantidade remanescente no instante considerado.

Esta afirmação é plausível, a priori, visto que cada partícula da substância decresce tão rapidamente como qualquer outra (COURANT, 1965, p. 180).

O rádio (Ra^{226}) decai exponencialmente e tem meia-vida de aproximadamente 1600 anos, isto é, dada uma quantidade qualquer desse produto, metade irá desintegrar-se em 1600 anos (MAOR, 2004, p. 137).

Deduzimos uma fórmula que determina a quantidade remanescente M desse produto após um período de x anos. Considerando y=f(x) a quantidade desse produto após x anos e y_0=f(0)=M como sendo a massa inicial. Temos:

f(1600)=$\frac{M}{2}$ quando x=1600.

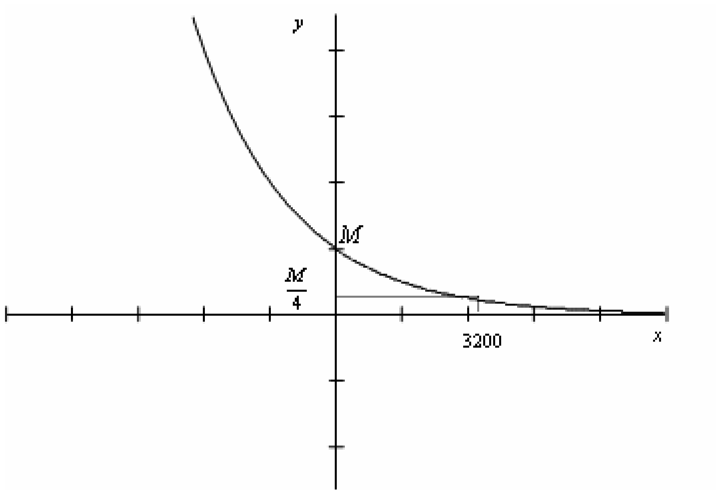
Aplicando a equação $\frac{dy}{dx} = ay \Leftrightarrow$ y=Me^{ax} então, $f(1600) = Me^{ax}$.

$\frac{M}{2}$ = Me^{ax} $\Leftrightarrow e^{ax} = \frac{1}{2}$, substituindo x por 1600 temos:

$e^{1600a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{a} = 2^{\frac{-1}{1600}}$. Substituindo $e^{a} = 2^{\frac{-1}{1600}}$ em y=Me^{ax} ficamos com a função $y = M2^{\frac{-x}{1600}}$.

Esta fórmula pode ser usada para determinar o tempo de decaimento do rádio, desde que, conhecemos sua massa inicial (M) e final y. No gráfico (10) a seguir representamos essa função.

Gráfico 10



Este gráfico mostra que a massa inicial M vai diminuindo, ficando cada vez mais próximo de zero, mas nunca igual à zero, ou seja, a desintegração nunca será completa. Neste caso, o processo algorítmico é necessário para descobrir em quanto tempo essa substância radioativa ficará em níveis aceitáveis para a saúde humana ou de qualquer ser vivo. Entretanto, este caso particular não está dissociado da lei geral, de forma que é inevitável estudar este fenômeno com a via dupla do contínuo e discreto simultaneamente.

2.9.3 Unificação de Conceitos: Um fenômeno Físico e a Função Exponencial de Base e

Na Física, uma grande variedade de fenômenos pode ser representada por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. A mecânica clássica nos apresenta um sistema mecânico simples cujo movimento é provocado por uma massa (M) e uma mola da seguinte forma: numa das extremidades da mola está fixa e na outra colocamos a massa (M) e isso faz com que a mola estique e depois estabilize, provocando um deslocamento[37].

Representando por uma equação esse movimento vertical (y) para cima a partir da posição de equilíbrio e considerando que a mola é perfeitamente linear, bem como o fato de que a força restauradora quando a mola está esticada é proporcional a distensão, isto é, a força é –ky (onde k é um número real da constante da mola e o sinal negativo nos lembra que ela puxa de volta). Portanto, a massa (M) vezes a aceleração $\left(a = \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ deve ser igual a –ky. Então:

Ma=-ky

M$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$= -ky, isso implica que M$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$+ ky=0 ou My''+ky=0. Por uma questão de simplicidade faremos M=k=1 e consideramos também a posição da massa 1 para o tempo inicial zero, por isso, temos:

y''+y=0 (10) (temos aqui uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem)

A questão agora é determinar por meio da pesquisa de uma função y(t)[38] que torna a equação (10) verdadeira, pois, ela descreve a posição da massa no tempo (t) relativo a posição de equilíbrio. Na pesquisa da função y(t) que seja solução da equação (10) fica evidente tentar a função $y=e^{mt}$, pelo fato dela ser proporcional a sua derivada, visto que $y'=me^{mt}$ e $y''=m^2e^{mt}$. Substituindo na equação (10) ficamos com:

y''+y=0

$m^2e^{mt} + e^{mt}=0 \Rightarrow e^{mt}(m^2+1)=0.$

---

[37] Se a mola for comprimida até que seus elos se toquem, então ela se comporta como se fosse um cilindro rígido do material que é feita. Se ela for muito esticada, perde a capacidade de retornar à forma original e permanece esticada. Este caso, chamado de deformação plástica, diferencia da deformação elástica, em que a mola é pouco deformada. Se a mola for demasiadamente esticada, ela pode até se romper (MACHADO, 2004, p. 140).

[38] A função y(t) representa posição da massa no tempo t relativo a sua posição de equilíbrio.

Mas, e^{mt} sempre será diferente de zero, então $m^2+1=0$, e esta é a chamada equação característica ou auxiliar da equação diferencial (10). Se as raízes m_1 e m_2 dessa equação são reais e distintas, então a solução de y''+y=0 pode ser escrita da forma $y = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$. Como $m=\pm i$, podemos escrever $y = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$. Nesta situação temos as condições iniciais y(0)=1, que é a posição inicial da massa M e a velocidade inicial será y'(0)=0, por isso temos as equações $c_1+c_2=1$ e $ic_1-ic_2=0$, que nos dá $c_1=c_2=\frac{1}{2}$. De forma que ficamos com $y = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, que pode ser transformado em y=cost. Isto pode ser verificado no item (2.8.1).

Temos, portanto, uma solução que envolve apenas números reais para este problema físico. O que podemos observar que uma simples situação de vibração de mola provocou um modelo matemático que passou pelos números reais, complexos e por fim chegou-se a uma solução real, ou seja, neste fenômeno fica evidenciado o caráter complementar na compreensão de conceitos matemáticos. Como pode a função exponencial de base **e** estar relacionada com esse fenômeno físico? Acreditamos que por um lado a mente humana cria representações para explicar coisas que nos aflige e por outro lado fica o tempo todo tentando verificar se as explicações estão a contento. Dessa forma, surgem os conceitos de objetos matemáticos e o número de Euler **e** é um desses conceitos que nos ajuda a compreender o mundo.

Os casos analisados referentes ao crescimento de bactérias e desintegração radioativa podem também nos indicar o que poderá acontecer num período infinito de anos. Mas, como podemos impor características ao infinito, se não conhecemos sua natureza? Que tipo de grandeza é o infinito? "A introdução do infinito complica tudo no estudo da Matemática" (OTTE apud AMADEI, 2004, p. 13).

É óbvio que não podemos abandonar o equacionamento dos problemas, mas devemos analisá-los com mais critério, principalmente quando se trata do infinito, pois neste caso a intuição pode nos levar às conclusões equivocadas.

A interpretação Matemática de uma situação problema qualquer nos direciona a procurar na mente relações por meio de conceitos de objetos matemáticos já estabelecidos (modelos já consolidados), ou seja, analisar esse objeto sob a ótica de um instrumento conhecido. Diante disso, se não tivéssemos conhecimento da função de base **e** bem como da sua derivada, como resolveríamos esses problemas?

O que queremos dizer é que o conhecimento teórico está atrelado de uma forma ou de outra a questões práticas. Neste caso, o comportamento contínuo desses fenômenos possibilita fazer indagações discretas num determinado momento da análise, pois só o tratamento contínuo ou só o tratamento discreto é insuficiente para analisar essas situações e prever resultados, portanto, isso só pode ser feito quando no estudo desses fenômenos tiver no seu âmago explicitamente o aspecto relacional.

Percebemos que os modelos matemáticos aqui utilizados foram obtidos pela ação recíproca entre os meios (representações) que são as equações diferenciais e o sujeito cognoscente, bem como os problemas aqui relatados não podem ser estudados separadamente e sim de maneira complementar entre o processo de compreensão dos enunciados dos problemas e a modelagem Matemática. Portanto, na construção de modelos e na sua resolução está presente a complementaridade por meio da atividade mental exercida nesse processo.

Na interpretação desses fenômenos biológicos, químicos e por último, o físico; deparamos-nos com o número **e**. Afinal, onde está o elo entre a função exponencial de base "**e**" e os fenômenos analisados? Acreditamos que a análise desses fenômenos desencadeou uma atividade mental que provocou a criação desses instrumentos objetivando uma melhor compreensão qualitativa e quantitativa desses fenômenos. Temos aqui exemplos da importância da teoria Matemática, pois a mesma teoria pode nos ajudar a melhorar nosso entendimento de várias realidades.

No estudo de funções há a concepção de lei e a funcionalidade ou operacionalidade. De forma que para compreendermos este conceito devemos destacar o caráter complementar entre essas concepções, pois os problemas aqui estudados geralmente são tratados como lei deixando de lado o aspecto operacional. No momento em que concluímos, por exemplo, que daqui a tantos anos a radioatividade está controlada, esse número discreto é uma conseqüência de um tratamento contínuo.

O fato da função $f(x)=\mathbf{e}^x$ ser igual a sua derivada, bem como os fenômenos de crescimento ou decrescimento serem modelados por meio desta função mostram que estes objetos isoladamente não tem sentido prático, pois, os seus significados surgem obrigatoriamente quando estudados complementarmente. Entretanto, devemos buscar o entendimento da "essência" desse elo relacional, mesmo tendo clareza que essa "essência", possivelmente, nunca poderá ser alcançada, pois, podemos apenas analisar as obras de Deus e não criá-los. Como o número de Euler **e** é irracional, no próximo capítulo discutimos esse fato procurando evidenciar a mentalização e a percepção de sua irracionalidade.

CAPÍTULO III

PROVAS DA IRRACIONALIDADE DO NÚMERO DE EULER

> “Os padrões de um matemático, assim como os de um pintor ou de um poeta, devem ser belos”. (Godfrey Harold Hardy)

Neste capítulo fizemos uma discussão referente às provas formais ou demonstrações “rigorosas” sobre a veracidade ou autenticidade da seguinte proposição: o número de Euler **e** é irracional, na perspectiva da construção desse número sob a ótica do discreto (operação) e contínuo.

Será que o algoritmo operacional de computação dos dígitos do número de Euler **e** nos possibilita perceber pela intuição e razão que na reta orientada poderá ter um ponto que representa esse número? Como esse processo operacional tende para o infinito, temos esse número definido como uma construção contínua. Entretanto, o processo contínuo tratado por meio do conceito de limite nos permitirá entender que o número de Euler **e** está no processo relacional (atividade) entre o algoritmo operacional e a continuidade da reta.

Com este intento apresentamos razões ou argumentos convincentes e resistentes que tenham poder de persuasão e que justificam ou validam essa proposição por meio da dedução apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras.

Em Matemática, “prova” ou “demonstrações” sempre vêm, implícita ou explicitamente, adjetivadas: são rigorosas (BICUDO & GARNICA, 2003, p. 67), ou seja, tem a preocupação de expor as relações lógicas fundamentais entre as proposições, que objetiva não a certificação de sua verdade em termos de sua essência, mas, é na verdade uma questão de explicação do como ao invés do por quê. Segundo Newman (apud COLE, 2006, p. 236) o que há de mais certo no nosso atual conhecimento é o conhecimento do que desconhecemos.

Segundo Morris Kline (apud BICUDO & GARNICA, 2003, p. 61-62) sobre a abordagem dedutiva e formal na Matemática:

> A Matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa, e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e confusões. Mesmo quando um matemático está convencido de que seu resultado é correto, há muito para ser criado até encontrar a prova disso. Como Gauss afirmou: ‘Tenho meu

> resultado, mas ainda não sei como obtê-lo'. Todo matemático sabe que trabalho árduo é necessário e o sentido da realização deriva do esforço criativo. Construir a forma dedutiva final é uma tarefa entediante. A lógica não descobre nada, nem o enunciado de um teorema nem sua prova, nem mesmo a construção de formulações axiomáticas de resultados já conhecidos. Há um outro motivo pelo qual a versão lógica é uma distorção. Os conceitos, teoremas e provas emergem do mundo real. A organização lógica é posterior. De fato, se for pedido a um aluno realmente inteligente que cite a lei comutativa para justificar, digamos 3.4=4.3, ele muito bem pode perguntar: 'Por que a lei comutativa é correta?'. De fato, nós aceitamos a lei comutativa porque nossa experiência com grupos de objetos nos diz que 3.4=4.3 e não o contrário. A insistência na abordagem dedutiva engana o aluno ainda de outro modo. Ele é levado a acreditar que a Matemática é criada por gênios que começaram pelos axiomas e raciocinaram diretamente desses axiomas para os teoremas. O aluno sente-se humilhado e desconcertado, mas o professor, prestativo, está totalmente preparado para demonstrar-se como um gênio em ação. Talvez a maioria de nós não necessite ouvir como a Matemática é criada, mas parece ser útil atentar para as palavras de Félix Klein: 'Você pode ouvir de não-matemáticos, especialmente dos filósofos, que a Matemática consiste exclusivamente em traçar conclusões a partir de premissas claramente enunciadas; e que, nesse processo, não faz diferença o que essas premissas significam, se são verdadeiras ou falsas, desde que elas não se contradigam. Mas alguém que tenha produzido Matemática falará algo bem diferente. De fato, aquelas pessoas estão pensando somente na forma cristalizada na qual as teorias Matemáticas são apresentadas ao final de um processo. O investigador em Matemática ou em outra ciência, entretanto, não trabalha nesse rigoroso esquema dedutivo. Ao contrário, ele faz uso essencial de sua imaginação e procede indutivamente, apoiado por expedientes heurísticos. Podem-se dar numerosos exemplos de matemáticos que descobriram teoremas da maior importância que eles mesmos não puderam provar. Poderíamos, então, nos recusarmos a reconhecer isso como uma enorme realização e, em referência ao que foi dito acima, insistir que isso não é Matemática? Nenhum julgamento de valor pode negar o trabalho indutivo da pessoa que primeiro anuncia um teorema é, ao menos, tão valoroso quanto o trabalho dedutivo daquele que primeiro provou. Pois ambos são igualmente necessários, e a descoberta é a pressuposição de sua conclusão posterior'.

Nosso propósito não é realizar um estudo completo e profundo do sistema formal, mas se considerarmos do ponto de vista da Matemática pura, uma demonstração ou prova só existe no interior de um sistema formal determinado.

Portanto, queremos proporcionar uma explicação que possibilite a compreensão e a percepção da irracionalidade do número de Euler **e**, pois, uma demonstração bem entendida num contexto relevante nos ajuda a consolidar o processo de generalização que é extremamente importante na compreensão dos aspectos teóricos e práticos das Ciências.

Todavia, a demonstração ajuda a estabelecer e solidificar os fundamentos da Educação Matemática, propiciando esclarecimentos de assuntos fundamentais. Promovendo dessa forma, não só um processo de ensino-aprendizagem de Matemática mais coerente como também a possibilidade de ampliar os conhecimentos atuais.

Para provar a irracionalidade do Número de Euler **e**, começamos analisando situações de somas infinitas. Sabemos que existem números racionais que são obtidos pela soma, onde o número de parcelas tende para o infinito, como, por exemplo:

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...$, é infinita e converge para o número 1, pois, representa uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$ e sua soma será $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ por isso, podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, ou seja, estamos concluindo que $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...$, onde temos, à direita, uma *série infinita*. Esta "igualdade" não significa que tenhamos efetivamente de adicionar infinitos termos; trata-se apenas de uma expressão abreviada para o fato de que 1 é o limite da soma infinita $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}+...$ à medida que n tende para o infinito. Assim essa igualdade com seu símbolo "incompleto" "+..." é meramente uma escrita Matemática simplificada para elaborar uma afirmação "precisa", ou seja, $S_n \to 1$ *quando* $n \to \infty$ (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 76).

Este processo operacional algorítmico de soma infinita nos possibilita perceber intuitivamente e racionalmente que essa soma vai se aproximar cada vez mais do número 1 que é perfeitamente conhecido e identificado. Mas, aceitar esse resultado implica considerar simultaneamente os aspectos contínuos e discretos na conceitualização do número, pois, o discreto possibilita aproximar passo a passo cada vez mais do número 1, já o contínuo tratado por meio do limite nos dirá que essa soma tende para 1.

Consideremos agora a situação de soma de frações que tendem para o infinito, e que convergem para um número irracional. Para mostrar isso apresentamos a expressão $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que é uma das definições para o número de Euler **e**. Este caso conduz para uma indeterminação[39], pois, à medida que n cresce, infinitamente, $\frac{1}{n}$ fica próximo de zero, então

[39] Indeterminação são expressões que não possuem um valor predeterminado, ou seja, elas só podem ser avaliadas mediante ao processo do limite (MAOR, 2004, p. 50).

$1+\dfrac{1}{n}$ se aproxima de 1. Portanto, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pode ser interpretado pela indeterminação 1^∞ .

> Em uma indeterminação, somente a manipulação algébrica pode não ser suficiente para determinar o resultado final do processo de limite. É claro que poderíamos usar um computador ou uma calculadora para avaliar as expressões para valores muito grandes de n, digamos um milhão ou um bilhão. Mas tais cálculos só poderiam sugerir o valor do limite. Não teremos nenhuma garantia de que tal valor iria se manter para n ainda maior (MAOR, 2004, p. 50).

Esta situação desperta a necessidade de compreender o conceito de limite.

> Quando dizemos que uma seqüência de números a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n , ... tende para um limite L à medida que n tende para o infinito, queremos dizer que, enquanto n se torna cada vez maior, os termos da seqüência ficam cada vez mais próximos do número L (MAOR, 2004, p. 48).

Para termos uma idéia gráfica do valor da expressão $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ vamos considerar uma função exponencial do tipo $f : R \to R$ tal que $f(x)=b^x$, com $b>0$ e $b \neq 1$. Esta função é contínua[40].

Fazendo $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, com $b=1+\dfrac{1}{x}>0$ e $1+\dfrac{1}{x}\neq 1$. Isso nos dá os valores para os quais a função f(x) é definida (domínio), que são $x<-1$ ou $x>0$.

Observando intuitivamente e considerando a "possível existência" de:

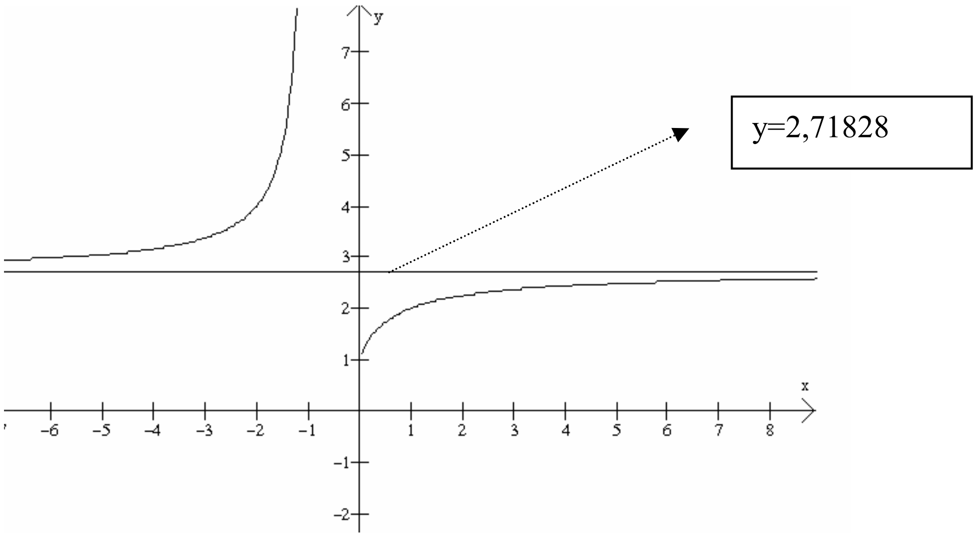
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = e \approx 2{,}71828$. Podemos esboçar o gráfico dessa função.

O gráfico 11 a seguir ilustra esse fato.

---

[40] Do ponto de vista axiomático a demonstração dessa continuidade pode ser encontrada no livro de Manoel Paiva, volume 3, 1995, p. 501-502.

Gráfico 11



Enquanto a expressão $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ caracteriza, no infinito, o bem determinado e conhecido número racional um, a expressão $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, no infinito, representa um número que não está bem determinado, ou seja, não é racional.

O processo de computação permite perceber a natureza da expressão $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, já a definição $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ não teve sua natureza facilmente desvendada. Por isso, é necessário tratar o infinito com mais cuidado. Dessa forma, o processo algorítmico resolve vários problemas, mas se aliarmos com a continuidade (vice-versa), consegue-se fundamentar num contexto teórico os números irracionais.

3.1 A Construção Geométrica do Número de Euler por Intervalos Encaixados

O valor do $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é para n infinitamente grande, aproximadamente igual a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ devido ao desenvolvimento binomial de Newton. A letra **e** que é denotada por $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, que nesse caso representa um número que tem casas decimais infinitas e não previsíveis. Se considerarmos a igualdade $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$=**e** como um postulado podemos designar qualquer símbolo para representar essa série.

Qual será o significado do fato de termos frações que quando somadas infinitamente, podem tender ou não para um número racional? Como podemos efetuar somas com parcelas infinitas? Como não conhecemos de fato a verdadeira natureza do infinito, temos que considerá-lo e tentar compreendê-lo, pois, o infinito não são números, e o valor do número de Euler **e** também não é exato, devido ao comportamento do infinito.

Diante dessa dificuldade de tratar do infinito precisamos do conceito de limite, que é uma linguagem algébrica, e por sua vez o instrumento que nos faz "acessar" o infinito. E esse acesso só fica evidenciado no aspecto relacional.

Dentre essas maneiras que definem o número de Euler **e** – acreditamos – que a expressão $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ é mais fácil de manipulação e facilita a demonstração de sua irracionalidade, pois, trata de uma série de termos positivos em que cada termo da soma diminui rapidamente devido ao crescimento rápido de (n!) no denominador de cada termo.

Segundo (CARAÇA, 1984, p. 263): "Uma série de termos positivos nunca é indeterminada – ou converge ou diverge – e a condição necessária e suficiente para que convirja é que a sua sucessão definidora seja limitada superiormente".

Nesta série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, a sucessão definidora é limitada superiormente. Na seção (1.3 do capítulo 01) justificamos o fato de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} < 3$. De maneira óbvia $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} > 2$.

Nosso objetivo neste momento é mostrar que esta definição $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ está contida no intervalo $I_n = \left[S_n ; S_n + \frac{1}{n!}\right]$. Para isso denotamos a soma dos n primeiros termos por:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

No caso da definição do número de Euler **e** a expressão (S_n) que o define parcialmente pode ser ampliado para:

$$S=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+...$$

Podemos escrever o somatório S da seguinte maneira:

$$S=e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{1}{t!}$$

$$S=S_n+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}+...\right]$$

$$S<S_n+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+...\right].$$

No interior dos colchetes, aplicamos a fórmula para a soma de uma série geométrica infinita $a+ar+ar^2+ar^3+...=\frac{a}{1-r}$, para -1< r <1. Logo:

$$S<S_n+\frac{1}{n!}\left[\frac{\frac{1}{(n+1)}}{1-\frac{1}{(n+1)}}\right]$$. Isto nos permite concluir que:

$$S<S_n+\frac{1}{n!}\frac{1}{n} \Rightarrow S<S_n+\frac{1}{n!}.$$

Portanto, podemos dizer que o número **e**=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ está no interior do intervalo $I_n=\left[S_n;S_n+\frac{1}{n!}\right]$, pois o número **e** é maior que S_n e menor que $S_n+\frac{1}{n!}$

Considerando esse fato podemos dizer que o número de Euler **e** está compreendido no intervalo:

$$S_n<e<S_n+\frac{1}{n!}. \qquad (11)$$

A desigualdade (11) pode ser usada para construir explicações para mostrar a irracionalidade do número de Euler **e**.

Considerando que uma prova ou demonstração está no "cerne" da estrutura Matemática, apresentaremos dois argumentos (analítico e geométrico) que mostram a irracionalidade do número **e**. Presumindo que esse número seja racional, ou seja, pode ser escrito na forma de fração de inteiros, e então mostramos que esta suposição leva a uma contradição.

Este procedimento é conhecido como prova indireta ou por contradição[41] que são métodos usados e aceitos para justificar a veracidade de uma proposição. Diante disso, baseado no "princípio lógico fundamental do terceiro excluído" [42], o absurdo A' (ao contrário de A é verdadeiro) pode demonstrar a verdade de A.

A idéia central desta demonstração da irracionalidade do número de Euler **e** segue este processo, pois, não temos instrumentos matemáticos adequados que validam esta afirmação de outra maneira, como por exemplo, por um método construtivo. O que fica claro é que a mente humana, historicamente vêm "criando" mecanismos para justificar, perante um sistema teórico, a validade ou falsidade de uma proposição.

3.2 Demonstração Analítica

A idéia principal desta demonstração é encontrada em vários livros didáticos, como por exemplo, no livro de Análise Matemática para Licenciaturas de Geraldo Ávila publicada em 2005.

1- Esta demonstração irá provar a impossibilidade de escrever o número de Euler **e** como fração. Então:

Se o número de Euler **e** for racional, pode ser escrito na forma de $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e o denominador q pelo menos 2.

Multiplicando a desigualdade (11) ($S_n < e < S_n + \frac{1}{n!}$) por n! (n>q) e, substituindo **e** por $\frac{p}{q}$ temos:

$$n!S_n < \frac{n!\,p}{q} < n!S_n + 1.$$

Esta desigualdade nos mostra que:

---

[41] Para se demonstrar a verdade de uma proposição A, parte-se da hipótese provisória de que A', o contrário de A, é verdadeiro. Então, por meio de alguma cadeia de raciocínio, produz-se uma contradição a A', demonstrando assim o absurdo de A' (COURANT & ROBBINS, 2000. p. 103).

[42] Um dos princípios da lógica aristotélica é o princípio do terceiro excluído que diz: toda proposição é verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

1.1- O produto de (n!) por S_n (n!S_n) é um número inteiro, pois:

n!$[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+ ... +\frac{1}{n!}]$ = n! + n! + 3.4.5...n + 4.5...n + 5.6...n + ... +1 é uma soma de números inteiros positivos.

1.2- A fração $\frac{n!\,p}{q}$, também é um inteiro, pois, q divide (n!) (Sendo q<n, um dos fatores de n! = 1.2.3 ... (n-1).n será igual a q).

Portanto, os números n!S_n e n!S_n+1 são inteiros e consecutivos e nesse instante surge à contradição, pois, temos um número inteiro compreendido entre dois números inteiros consecutivos. Isto nos permite concluir que o número de Euler **e** não é racional. Esta prova é interessante, criativa e surpreendente, mas não possibilita uma percepção geométrica dessa explicação, não que esta percepção seja obrigatória e necessária. Entretanto, se tivermos um processo que possibilita visualizar geometricamente essa irracionalidade, podemos facilitar o desenvolvimento da imaginação bem como a compreensão dos procedimentos usados. Pois, aceitar essa irracionalidade significa dialogar com infinito e a noção do infinito está presente no conceito de contínuo.

3.3 Demonstração Geométrica

Esta demonstração, até o momento, ainda não aparece nos livros didáticos, pois, foi publicada recentemente por Jonathan Sondow.

2- Esta prova tem como ponto de partida a expressão $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+ ... +\frac{1}{n!}+ ...$, que define o número de Euler **e**.

Usamos esta expressão para construir tantos intervalos quanto se queira de forma que o "valor" do número de Euler **e** pertença a cada um deles. Para esse fim usamos a desigualdade ($S_n < e < S_n + \frac{1}{n!}$). Temos o propósito de construir intervalos da forma $I_n = \left[S_n, S_n + \frac{1}{n!}\right]$. Diante disso temos:

$$I_1 = \left[S_1, S_1 + \frac{1}{1!}\right] = [2,3] \Rightarrow 2 < \mathbf{e} < 3$$

$$I_2 = \left[S_2, S_2 + \frac{1}{2!} \right] = [\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \frac{1}{2!}] = [2,5;3] \Rightarrow 2,5 < \mathbf{e} < 3$$

$$I_3 = \left[S_3, S_3 + \frac{1}{3!} \right] = [\frac{16}{3!}, \frac{16}{3!} + \frac{1}{3!}] = [2,66...\ ;\ 2,8333...] \Rightarrow 2,66... < \mathbf{e} < 2,833...$$

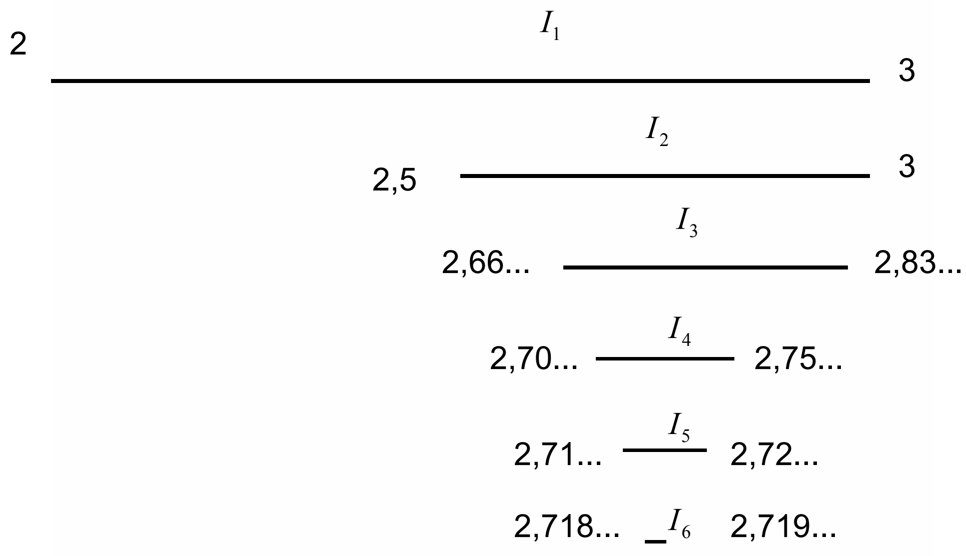
$$I_4 = \left[S_4, S_4 + \frac{1}{4!} \right] = [\frac{65}{4!}, \frac{65}{4!} + \frac{1}{4!}] = [2,70833...\ ;\ 2,75] \Rightarrow 2,70833... < \mathbf{e} < 2,75$$

$$I_5 = \left[S_5, S_5 + \frac{1}{5!} \right] = [\frac{326}{5!}, \frac{326}{5!} + \frac{1}{5!}] = [2,7166...\ ;\ 2,725] \Rightarrow 2,7166... < \mathbf{e} < 2,725$$

$$I_6 = \left[S_6, S_6 + \frac{1}{6!} \right] = [\frac{1957}{6!}, \frac{1957}{6!} + \frac{1}{6!}] = [2,718...;2,719...] \Rightarrow 2,718055... < \mathbf{e} < 2,71944...$$

Podemos proceder de forma análoga indefinidamente construindo tantos intervalos quanto se achar necessário. Também, podemos representar cada um desses intervalos I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 etc. numa reta numerada para visualizar geometricamente seu comportamento graficamente (veja figura 06 a seguir).

Figura 6



Será que podemos afirmar que intersecção de todos os intervalos $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ I_n é equivalente a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ = **e**? Para qualquer valor de n>1, as extremidades dos intervalos são frações que apresentam a característica $\frac{a_n}{n!}$ e $\frac{a_n+1}{n!}$ (com $n \geq 2$ e $\frac{a_n}{n!} = S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!}$ e a_n diferente do termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$). E o valor de $\frac{a_n+1}{n!}$ coincide com $S_n + \frac{1}{n!}$ que tem fatorial no denominador, e se nós considerarmos que existe pelo menos um número no interior de cada um desses intervalos, então esse número não é uma fração com denominador (n!), pois, toda fração do tipo $\frac{m}{n}$ (n>0) pode ser escrita com fatorial no denominador:

$\frac{m}{n} = \frac{m(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{m(n-1)!}{n!}$. Fazendo m(n-1)!=P (onde P é um número inteiro), pois, (m e (n-1)!) são inteiros, então P também será. De forma que $\frac{m}{n} = \frac{P}{n!}$, ou seja, qualquer fração pode ser escrita com fatorial no denominador.

Observamos que os intervalos assim construídos possuem comprimentos que tendem a zero $\left(\frac{a_n+1}{n!} - \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!} \right)$ devido ao fato de (n!) estar no denominador e isso nos permite levantar as questões. Será que pode haver mais de um ponto comum a todos os intervalos, se os comprimentos dos intervalos tendem a zero? Será que dois pontos diferentes podem estar ambos contidos em qualquer intervalo menor que a distância entre eles?

Uma outra discussão pode ser levantada em relação a esta construção, pois, se as extremidades são números racionais, e entre dois números racionais é sempre possível introduzir um outro número racional entre eles, então como pode a intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ser única e irracional. A questão aqui é que o processo é infinito e o comprimento do intervalo tende a zero e neste caso somente a intuição não é suficiente para compreender este fato.

Será que esta construção nos permite concluir que não é possível ter mais de um ponto comum a todos os intervalos? Se nós aceitarmos esta afirmação como verdadeira podemos dizer que o número de Euler **e**, assim construído é irracional.

Isto fica claro se considerarmos que há um número racional entre $\frac{a_n}{n!}$ e $\frac{a_n+1}{n!}$. Como todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0\ e\ q\ divide\ n!)$, então temos $\frac{a_n}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{a_n+1}{n!}$. Se multiplicarmos esta desigualdade por (n!) temos $a_n < \frac{n!\,p}{q!} < a_n + 1$. Sabemos que $\frac{n!\,p}{q!}$ é um número inteiro. Surge então a contradição que é a presença de um número inteiro entre dois números inteiros e consecutivos. Portanto, temos uma construção geométrica que nos ajuda explicar a irracionalidade do número **e**, fato que é muito interessante, pois até então tínhamos apenas a explicação analítica.

A Matemática segundo (OTTE, 2006, p.75) ou é muito hipotética e abstrata ou muito instrumental e técnica. Neste sentido, esta prova geométrica da irracionalidade do número de Euler **e** nos traz uma possibilidade de tornar mais visível[43], não só a obtenção do número **e**, mas a prova de sua irracionalidade, pois, a própria construção geométrica já nos direciona para melhorar a compreensão da irracionalidade desse número. E este processo transforma a irracionalidade do número **e** num objeto menos abstrato e menos instrumental, ou seja, nos remete ao "interior" do conceito do número de Euler **e**, bem como possibilita melhorar a percepção numérica do contínuo.

Esta construção geométrica por intervalos encaixados, entretanto, propicia um alargamento de nossa percepção e nos mostra uma alternativa para o estudo desse número não porque é geométrico, mas porque é uma outra forma de abordar esse tema. Temos convicção que a construção geométrica ajuda a produzir mais sentidos e significados desse conceito. Contudo, estas provas são na verdade signos que representam relações entre idéias, de maneira que quanto mais formas diferentes de definir ou construir um objeto matemático, mais útil se tornará para aplicação na própria Matemática, bem como nas outras ciências.

Estas duas explicações para a irracionalidade do número de Euler **e**, nos mostra que a intuição geométrica permeia o processo mental, desencadeando uma construção convincente

[43] O termo visível utilizado aqui é no sentido de manipulação das operações, ou seja, fazendo experiências com as definições para "entrarmos" na questão da sua irracionalidade.

que possibilite aceitar que os números racionais não são suficientes para estabelecer o contínuo numérico.

Neste sentido, a compreensão da irracionalidade do número de Euler **e** é obtida necessariamente pelo aspecto complementar que há nos processos operacionais algorítmicos, que são as seqüências que determinam o valor desse número e a idéia do contínuo que é a noção de reta ou o espaço.

Podemos constatar que estas demonstrações de irracionalidade do número **e**, principalmente a geométrica, são econômicas, apresentam surpresas e inevitabilidade, que são considerados ingredientes básicos numa demonstração segundo Godfrey Harold Hardy (1877-1947), pois, são elegantes, simples e de fácil compreensão.

As provas de irracionalidade, só foram possíveis, devido ao trato com o conceito de limite que é o instrumento matemático para lhe dar com o infinito. E isto, só foi obtido por meio da generalização, que é conseqüência de uma discussão sobre explicação. Segundo (OTTE, 2006, p. 75) o conceito de explicação ocupa um papel central em nossas práticas, pois, a Ciência Moderna e a Matemática não provém explicações no sentido desejado. Por isso, essas demonstrações são explicações que nos ajudam a aceitar que o número **e** é irracional, pois, na verdade qual é de fato o objetivo principal de uma demonstração se não nos confortar sobre a veracidade temporal ou não de uma determinada proposição?

> A Matemática nunca fornece a "essência" das substâncias. Mas, os fundamentos de uma teoria científica não devem ser enxergados naquilo que ela descreve ou explica, ou seja, em sua conformidade com fenômenos observados e fatos conhecidos, mas ao contrário deve ser vista em sua fertilidade e poder de fazer predições e descobrir novos fatos. Este ponto de vista ganhou força por fim do século XIX apenas (OTTE, 2006, p. 85)[44].

Não temos, contudo, a pretensão de conhecer a "essência verdadeira" da natureza do número de Euler **e**, mas a busca pela compreensão de seus aspectos teóricos e práticos nos direciona para o entendimento, que por sua vez propicia melhoramento nas relações do homem com o próprio homem e do homem com os fenômenos naturais. Tentar compreender os fenômenos naturais é inerente ao ser e o número de Euler **e**, bem como a função exponencial que tem esse número como base faz parte desse processo de compreensão.

[44] Mathematics never gives the "essences" substances. But the foundation of a scientific theory is not to be seen in what it describes or explains, that is, in its conformity with observed phenomena and known facts, but is rather to be seen in its fertility and power to make predictions and to discover new facts. This point of view gained force towards the end of the 19th century only.

No último capítulo tratamos do aspecto histórico, onde evidenciaremos os momentos históricos relevantes em que esse número surgiu no cenário da Matemática e das ciências em geral.

CAPÍTULO IV

EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DO NÚMERO DE EULER

Na Matemática existem números "importantes" que fazem parte de sua fundamentação e que caminha paralelamente com a história da humanidade. No início dos tempos e até hoje, os números inteiros positivos foram e são usados pelos seres humanos tanto para enumerar quantidades que possuímos como para efetuar medidas, ou seja, na conceitualização de número está presente o tratamento complementar entre o processo algoritmo de contagem e o processo contínuo de medida.

O surgimento da necessidade de efetuar medidas é inerente ao processo de construção do conhecimento humano, devido ao estabelecimento de relações com a natureza e consequentemente com o próprio homem também. As frações num contexto prático e imediato resolvem a maioria das situações problemáticas enfrentadas pelos povos.

A curiosidade, inerente do ser humano, de compreender com profundidade as questões referentes à nossa existência nos leva a observar detalhadamente a natureza, procurando desvendar os mistérios da composição do universo, procurando compreender os fenômenos que apresentam ou não determinadas regularidades. Nesse caminho encontramos os números irracionais que surgiram inicialmente de problemas de medidas (segmento áureo, diagonal do pentágono regular e diagonal do quadrado, por exemplo) provocando mudança de atitude no tratamento dos números.

Dentre os números que despertaram e ainda despertam interesse, citamos a raiz quadrada de dois que é muito usado atualmente para mostrar a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais pela extensão do conceito de número.

Nesse universo temos o número π que recua à Antiguidade e está intimamente ligado a formas circulares como o círculo, já o número de Euler **e** que surgiu a partir do século XVI[45], provavelmente motivado não só pelas relações comerciais promovidas pelo homem, mas pelo desejo natural do ser humano em expandir seus horizontes e, também, pela necessidade e curiosidade de conhecer as peculiaridades da relação número/natureza.

[45] Na verdade há indícios que no cálculo financeiro dos babilônios já havia a noção do valor aproximado do número **e**. Porém, a história desse número confunde-se com a história do Cálculo Diferencial e Integral.

Podemos considerar que o número de Euler **e** necessita de uma Matemática mais "sofisticada", obrigando um tratamento analítico-algébrico da geometria, assim como o reconhecimento de que para compreender melhor a natureza dos números: **e**, $\sqrt{2}$ e π é necessário lidar com processos infinitos, mesmo assim, temos clareza de que a geometria ocupou e ainda ocupa um papel importante na Matemática moderna.

Quando falamos do número π nos remetemos ao comprimento ou área de um círculo e o número **e** têm sua origem, aparentemente ligado a logaritmos, juros compostos e a área sob um ramo da hipérbole. O grande mistério que envolve o número **e**, é o fato de a função exponencial de base **e** ser igual a sua própria derivada bem como as conexões que essa função faz com os números π e i (unidade imaginária), que são números com personalidades tão diferentes.

Atualmente o número π e a raiz quadrada de dois são muito mais conhecidos do que o número **e**, pois, é ensinado desde o ensino fundamental. Enquanto o número de Euler **e** é tratado superficialmente no ensino médio e somente no ensino superior que lhe é dado uma abordagem mais "profunda", por meio do Cálculo Diferencial e Integral, mesmo assim, o conhecimento histórico da construção desse conceito é confuso e pouco discutido.

Apresentamos momentos que marcaram historicamente o surgimento e a consolidação do uso do número de Euler **e**, tentando evidenciar situações que desencadearam a presença desse número na Matemática pura e aplicada. Entretanto, o que podemos dizer é que o conceito histórico desse número foi construído tanto pela via do contínuo como pela via do discreto. Mesmo sabendo que no início do século XVI não se tinha desenvolvido um corpo de conhecimento fundamentado para o tratamento da continuidade, porém, o aspecto complementar entre o intuitivo e o racional ajudou a construir conhecimentos que mais tarde foram fundamentados. Dessa forma, o número de Euler **e** foi obtido num contexto relacional entre o prático e o abstrato[46].

4.1 As Primeiras Aproximações do Número de Euler

A primeira idéia do número **e** surgiu com o estudo de logaritmos feito por John Napier (1550–1617) que tem seu nome gravado na história devido a uma idéia Matemática abstrata que ele levou aproximadamente 20 anos para desenvolver (MAOR, 2004, p. 17). Esse período

[46] O aspecto prático se refere a questão dos juros compostos e a área sob a hipérbole, já o aspecto teórico se refere a noção de continuidade que está ligado a idéia do infinito.

foi marcado por um enorme crescimento do comércio internacional e as transações financeiras de todos os tipos proliferaram. Provavelmente, em conseqüência disso, foram dadas mais atenção ao processo de crescimento dos juros compostos.

A linha de pensamento de Napier era o seguinte: se pudermos escrever qualquer número positivo como potência de um dado número fixo (hoje conhecido como base), então a multiplicação, a divisão e a radiciação de números seriam equivalentes à adição ou à subtração de seus expoentes (MAOR, 2004, p. 19).

Esta preocupação fez com que Napier *quase* tivesse descoberto o valor aproximado da expressão $\lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$, conhecido hoje como o número de Euler **e**.

Entretanto, o que Napier de fato fez foi chegar perto do valor de $(1-\frac{1}{n})^n$ para $n=10^7$ que é para n infinito, próximo de $\frac{1}{e}$ (MAOR, 2004, 23). Portanto, os logaritmos de Napier não são de base **e**, por isso não podemos afirmar que o valor número de Euler **e** foi descoberto por Napier. Sendo assim, é mais apropriado chamar de logaritmos naturais ou logaritmos de base "**e**" e não como logaritmo de Napier ou número de Napier. Depois da estruturação do conceito de limite podemos usar essa linguagem para justificar o fato de $\lim_{n \to \infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ por meio da seguinte explicação:

Considere $y = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, aplicando o logaritmo natural (ln) em ambos os lados:

$\ln y = n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$, podemos escrever esta expressão como $\ln y = \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

Quando n tender para o infinito tem-se $\lim_{n \to \infty} \ln(y) = \frac{0}{0}$ que é um tipo de indeterminação. Para levantar essa indeterminação aplicaremos a regra de Guillaume de **l**'Hôpital (1661-1704) [47] que diz:

[47] A demonstração desta regra pode ser encontrada nos livros de cálculo, como por exemplo, no livro "Cálculo com Geometria Analítica volume 01" (Swokowski, 1994, p. 621-622).

Sejam f(x) e g(x) funções deriváveis em um intervalo aberto $]a,b[$ contendo c, exceto possivelmente o próprio c. Se $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ em x=c e se g'(x) é diferente de zero para x diferente de c, então $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ desde que $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *exista ou* $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Portanto, neste caso temos:

$$\lim_{n \to \infty} \ln(y) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \ln(y) = \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Este desenvolvimento nos permite escrever ln(y)=-1 para n tendendo para o infinito. Então $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

No trabalho de Napier para o cálculo de logaritmos está implícito o tratamento pela via do processo algorítmico e o valor do número **e** que ele indiretamente determinou surge de aproximações infinitas, nos conduzindo a construir o valor desse número a partir da relação do discreto para o contínuo[48].

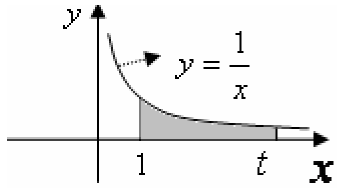
Numa versão traduzida do trabalho de logaritmos de Napier feita por Edward Wright (1560-1615) publicada em Londres em 1618 havia um apêndice, provavelmente escrito por William Oughtred (1574–1660) no qual aparece uma declaração que é equivalente a igualdade $\log_{\mathbf{e}}10=2{,}302585$, e que este parece ser a primeira aparição do número **e** na Matemática (MAOR, 2004, p. 32).

Outro momento em que a presença do número **e** apareceu foi na quadratura da hipérbole. Quadrar um ramo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ significa encontrar a área entre seu gráfico, o eixo x e as linhas verticais x=1 e x=t. Sendo que o valor da área vai depender do valor de t.

Observe o gráfico 12 a seguir:

[48] A questão que podemos colocar neste momento é: será que é possível determinar o valor do número de Euler **e** unicamente pela via do contínuo? Acreditamos que o contínuo nos permite elaborar a lei e o discreto trata de valores pontuais por meio dos algoritmos.

Gráfico 12



Inúmeras tentativas de quadrar a área sob a curva y=$\frac{1}{x}$, foram feitas ao longo dos anos por grandes estudiosos como, por exemplo, Arquimedes.

No início do século XVII com a retomada do cálculo dos indivisíveis, retornaram as tentativas de efetuar a quadratura da hipérbole, Fermat (1601–1665) e Descartes (1596–1650) tentaram, mas não obtiveram sucesso.

Coube a Grégorius de Saint-Vincent (1584–1667) um jesuíta belga que passou a maior parte de sua vida fazendo quadraturas, foi ele que percebeu uma proporcionalidade entre a área sob a hipérbole e o logaritmo da distância horizontal (MAOR, 2004, p. 93). Ele encontrou uma propriedade da área da hipérbole que fez com que os logaritmos de Napier passarem a se chamarem hiperbólicos (MAOR, 2004, p. 83).

O aluno de Grégorius, Alfonso Anton de Sarasa (1618–1667) registrou pela primeira vez o uso de uma função logarítmica, em que A(t)=logt representa a área sob a hipérbole. Hoje usamos A(t)=lnt, que é o logaritmo na base **e** (lnt) (MAOR, 2004, p. 94).

O método usado por Grégorius foi por exaustão, reduzindo o problema a series infinitas (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 481). Em 1667 o matemático escocês James Gregory mostrou como calcular logaritmos por aproximação das assíntotas dos espaços hiperbólico por meio da inscrição e circunscrição de polígonos.

Assim, a quadratura da hipérbole torna-se parecida com o cálculo de logaritmos, por isso há uma relação do logaritmo e a hipérbole. Será que a questão da quadratura e no caso específico quadrar a hipérbole surgiu em função de alguma situação prática ou apenas exercício intelectual (intuitivo)? Acreditamos que aí está presente o desejo do homem de “dominar” as “coisas”. Nessa busca, o valor do número de Euler **e** está relacionada com extensão linear t (abscissa do plano cartesiano) e a área sob a hipérbole e isso mostra que esse número não está nessa extensão linear, nem na hipérbole e muito menos na área e sim nas suas relações, ou seja, o número de Euler **e** estabelece relação estrutural no pensamento humano e por isso não representa um objeto bem determinado.

O cálculo de áreas, volumes e de retas tangentes às curvas pode ter dado início ao Cálculo Diferencial e Integral, então o processo de quadratura abriu caminhos para o desenvolvimento de assuntos relevantes para a nossa sociedade bem como o desenvolvimento das séries exponenciais que foram estimulados pelo surgimento do Cálculo.

Quando se percebeu por meio do cálculo que a função $y=\mathbf{e}^x$ é igual a sua própria derivada, o número **e** bem como a função $y=\mathbf{e}^x$ passou a ocupar um papel central na análise. O teorema binomial corroborou com a expansão de séries infinitas (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 484).

Em 1695 Dr. Edmund Halley publicou um ensaio de construção de logaritmos e antilogaritmos, exemplificou e demonstrou a natureza desses números sem qualquer consideração com a hipérbole (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 487).

Willian Jones (1675-1749) foi o primeiro a ter um entendimento claro da natureza dos logaritmos como expoente e constatou que qualquer número pode ser base de um sistema de logaritmos. É bem possível que Jones foi o primeiro a ter um conceito do número **e** como a "existência" de um número "exato", usando-o como base de um sistema de logaritmos.

A construção do conceito da idéia do número **e** foi condicionado aos aspectos sociais e econômicos dos séculos XVI, XVII e XVIII, pois, nesse período a Europa passou por um processo de desenvolvimento na indústria, navegação, astronomia e no comércio.

A unificação da expressão analítica algébrica com a lei geométrica (álgebra geométrica) do estudo das funções propiciou uma melhor compreensão da expressão $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathbf{e}$. Assim, este número foi um dos primeiros a ser definido como um processo de limite. Constatamos que a construção histórica deste número passou pela complementaridade entre os aspectos de operação e lei.

4.2 Reconhecimento da Possível Existência do Número e

Durante os séculos XVII e XVIII vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do número **e**. A figura central desse período foi Leonhard Euler.

Euler nasceu na Basiléia, ao norte da Suíça quase na fronteira da França, em 15 de abril de 1707. Aos treze anos de idade matricula-se na Universidade de Basiléia e tornou-se de imediato o discípulo favorito de Jean Bernoulli (1667-1748).

Assim Euler, além de magnificamente bem dotado para a Matemática, iniciava seu aprendizado sob a tutela excepcional de um grande mestre, o exigente Jean Bernoulli que posteriormente, o chamou de “incomparável príncipe da Matemática”.

Euler, o mais fecundo de todos os cientistas do século XVIII, publicou cerca de 800 artigos e 50 livros ou panfletos em todos os ramos das Ciências, emprestando seu nome a uma série de assuntos. Abaixo relatamos superficialmente suas principais contribuições para as ciências.

> Em geometria, círculo, reta e pontos de Euler relativo aos triângulos, relação de Euler relativa ao círculo circunscrito num triângulo. Em teoria dos números, critério de Euler, indicador de Euler, identidade de Euler, conjetura de Euler – “ele também!”. Em mecânica, ângulos de Euler. Em análise, constante de Euler. Em lógica, diagrama de Euler. Em teoria dos grafos, de novo a relação de Euler. Em álgebra, método de Euler, acerca da resolução da equação do quarto grau. Em cálculo diferencial, método de Euler para as equações diferenciais. Chegava a dar vertigem. Iria até o fim. Equação de Euler de uma reta sob forma normal e a equação, que ele compartilha com Lagrange, sobre cálculo das variações. Característica de Euler, que ele compartilha com Poincaré, acerca dos poliedros, dos grafos, das superfícies das variedades diferenciais. Relação de Euler, mais uma vez, para os grafos, e relação para os triângulos. Transformação de Euler acerca das derivadas parciais e a relativa às séries. Mas, o problema dos 36 oficiais de Euler. E uma porção de teoremas sobre números perfeitos, a generalização da fórmula do binômio, os grafos conexos. Depois o teorema sobre os poliedros, que funda a topologia. Sem falar num mote de fórmulas (GUEDJ, 1999, p. 377).

A intenção desta citação é simplesmente mostrar que Euler deixou muitas contribuições para a Matemática, não temos o propósito de detalhar os conceitos de suas obras. Nesse aspecto, o número **e**, foi mais um assunto estudado por Euler.

A morte lhe sobreveio em setembro de 1783, quando em sua prancheta se encontravam cálculos acerca da força ascensional de balões aerostáticos.

Na época existia um conceito intuitivo do número **e**. O estudo de Euler deu consistência, propiciando a utilização em várias áreas do conhecimento de forma que consolidou a “possível existência” do número **e**. Ele determinou o valor do número **e** a partir do desenvolvimento binomial de Newton, constatando que:

$$\mathbf{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

> Este número é chamado também, o número cujo logaritmo hiperbólico é um. Esta frase bem como a letra **e** foi divulgada em 25 de novembro de 1731, mas em 1862 apareceu um manuscrito em que Euler, já havia usado a letra **e** por volta de 1727 ou 1728 para designar “**e** denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus =1” (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 489).

A primeira aparição de **e** em um trabalho publicado foi na Mechanica de Euler (1736), em que ele estabelece as fundamentações da mecânica analítica. Por que teria escolhido a letra **e**? Não existe um consenso geral. De acordo com um ponto de vista, Euler a escolheu porque **e** é a primeira letra da palavra exponencial. Mas provavelmente a escolha ocorreu-lhe naturalmente, como a primeira letra "não usada" do alfabeto, já que as letras a, b, c e d aparecem freqüentemente em outras partes da Matemática. Parece improvável que Euler tenha escolhido a letra **e** por ser a inicial de seu próprio nome. Ele era um homem muito modesto e amiúde, atrasava a publicação de seu trabalho para que um colega ou estudante pudesse receber o devido crédito. De qualquer forma sua escolha do símbolo **e**, como vários de seus símbolos, foram aceitos universalmente (MAOR, 2004, p. 203-204).

Euler reconheceu que a soma da série ($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$=**e**) é também a base do sistema de logaritmos hiperbólicos. De forma que o valor número de Euler **e** foi usado por um longo período sem uma explicação coerente, pois a autoridade de Euler era tanta que as pessoas da época usavam sem questionamentos.

O número de Euler **e** com suas aproximações estavam identificados e a sua natureza transcendental não era conhecida até a metade do século XVIII, porém, suas aplicações estavam sendo utilizadas na trigonometria, no cálculo, logaritmos etc., com isso, várias aproximações envolvendo o número **e** surgiram.

Newton também, deduziu e^x, e^{-x} e "**e**", usando o teorema binomial (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 485).

Leibniz obteve as séries de e^x e e^{-x} por integração (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 486). Usando frações contínuas, Euler obteve também as aproximações das seguintes relações: $\frac{1}{e-1}$, $\frac{e-1}{2}$, $\frac{e+1}{e-1}$, $\frac{e^2-1}{2}$, e $\sqrt{e}$ (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 491).

Euler usou a expressão e^x= $(1+\frac{x}{n})^n$ com **n** tendendo para o infinito para escrever o valor do número **e** com 23 casas decimais. Este processo usado por Euler é um exemplo da noção de complementaridade, pois, utiliza o aspecto discreto operacional numa perspectiva contínua para determinar esses dígitos. Nessa expressão Euler foi mais longe ao substituir x por valores imaginários i e até mesmo números complexos da forma z=a+bi, abrindo caminho para a teoria de Funções de Variáveis Complexas.

Em 1849 F.J. Studnicke em seu trabalho Fortschitte apresentou 113 casas decimais para o número **e**. No ano de 1884 J.W Boorman publicou numa revista Matemática 346 casas decimais para o número **e** (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 493).

4.2.1 O Método Usado por Euler para o Cálculo do Valor do Número e

No livro de José J. M. Sousa Pinto Intitulado "Métodos Infinitesimais de Análise Matemática" publicada em 2000 nas páginas 23 e 24 há uma explicação do processo que Euler utilizou para chegar à expressão **e**=1 + 1 + $\frac{1}{2!}$ + $\frac{1}{3!}$ + $\frac{1}{4!}$ + ... + $\frac{1}{n!}$+ .... Este procedimento foi publicado em 1748 em introdução à análise de infinitos para justificar o cálculo do valor do valor número **e**.

O Método consiste em considerar $a^0=1$ (a>1) então, para um valor ε infinitamente pequeno, vale a igualdade:

$a^{\varepsilon} = 1+k\varepsilon$ com k inteiro positivo.

Se x designar um número real positivo, então $\frac{x}{\varepsilon}$ será, na própria linguagem de Euler, um número infinitamente grande que identifica a um número **v** que caminha para o infinito. Então, podemos escrever $\frac{x}{\varepsilon}=v$ e isso implica $x = v\varepsilon$, por isso podemos escrever:

$$a^x = a^{v\varepsilon} = (a^{\varepsilon})^v$$

$a^x = (1+k\varepsilon)^v$, como $\varepsilon = \frac{x}{v}$ podemos escrever:

$a^x = (1+\frac{kx}{v})^v$, daqui para frente Euler aplicou o desenvolvimento binomial ficando com:

$$a^x = (1+\frac{kx}{v})^v = 1+v\left(\frac{kx}{v}\right)+\frac{v)v-1)}{2!}\left(\frac{kx}{v}\right)^2+\ldots+\frac{v(v-1)\ldots(v-n+1)}{n!}\left(\frac{kx}{v}\right)^n+\ldots$$

$$=1+\left(\frac{k}{1!}\right)x+\frac{v-1}{v}\left(\frac{k^2}{2!}\right)x^2+\ldots+\frac{v-1}{v}\frac{v-2}{v}\ldots\frac{v-n+1}{v}\left(\frac{k^n}{n!}\right)x^n+\ldots \qquad (12)$$

Euler considerou o fato de que v é infinitamente grande, sem nenhuma preocupação ele escreveu:

$1 = \frac{v-1}{v} = \frac{v-2}{v} = \frac{v-3}{v} = ... = \frac{v-j}{v} = ...$. Por isso a expressão (12) tem o seguinte desenvolvimento:

$a^x = (1+\frac{kx}{v})^v = 1 + \frac{x}{1!}k + \frac{x^2}{2!}k^2 + ... + \frac{x^n}{n!}k^n + ...$. Fazendo k=1 temos:

$a^x = (1+\frac{x}{v})^v = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$. Se chamarmos **a** de **e** esta igualdade pode ser escrita como:

$e^x = \left(1+\frac{x}{v}\right)^v = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$. Portanto, o valor de **e** para x =1(um ponto na curva) que será definido por:

$e = \left(1+\frac{1}{v}\right)^v = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$. Claro que o valor de **v** representa um valor que tende para o infinito.

Neste cálculo está claro o uso dos infinitesimais, mesmo não tendo, na época um tratamento rigoroso do infinito. Euler trabalhava "normalmente" sem se preocupar com os possíveis erros que isso poderia ocorrer.

Nesta computação dos dígitos para o número **e** está presente o processo operacional em que esses dígitos são calculados um a um, ao mesmo tempo precisamos nos relacionar intuitivamente e logicamente com o infinito para aceitar esse procedimento, ou seja, como determinaríamos o valor desse número sem nos defrontarmos com o infinito? Diante disso, a noção de complementaridade se faz presente exatamente na necessidade de enfrentarmos o caráter contínuo dos números reais.

Que bom que houve nessa época uma procura por conhecimentos sem se estar "interessado" nos seus fundamentos, pois, se primeiro imaginarmos um fato e depois tentarmos fundamentá-lo, também faz parte do processo de "criação" do conhecimento matemático, e se não conseguirmos fundamentá-lo deixamos para próxima geração verificar a validade ou não desses fatos. Pois, o aspecto racional ou lógico aliado com nossa imaginação transcendental[49] nos remete ao estudo e possivelmente a compreensão dos fenômenos inerentes a nossa existência.

4.3 A Natureza do Número e

Devido à estreita conexão entre os números **e**, i e π por meio de várias fórmulas, como por exemplo, $e^{\pi i}+1=0$, as investigações da natureza desses números foram alcançadas praticamente ao mesmo tempo.

Euler trabalhou com frações contínuas e observou que:

1º) se o número é racional, a fração contínua é finita, por exemplo:

$$\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}=3+\frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{15}{4}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

2º) o número **e** produz uma fração contínua infinita, portanto é irracional.

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{5+\ldots}}}}}$$

A primeira pessoa que apresentou uma prova "legítima" da irracionalidade do número **e** foi Johann Heinrich Lambert que usou o trabalho de Euler de frações contínuas. Lambert desenvolveu o valor da fração contínua $\frac{e^x-1}{e^x+1}$, usando o desenvolvimento de Euler da fração $\frac{e-1}{2}$. A partir destas frações contínuas Lambert provou duas proposições fundamentais, a saber:

1. Se x é um número racional diferente de zero então $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ não pode ser racional.

[49] A palavra transcendental usada aqui não tem nada de místico e sim objetiva retratar a busca incessante de formas diferentes de interpretar e/ou criar novos conceitos.

2. Se $\mathbf{e}^x$ é um número racional diferente de zero então x não pode ser racional. De 1 e 2 segue que **e** é irracional. (STRAIN & MITCHELL, 1936, p. 494).

Em 1815 Jean Baptiste Joseph Fourier (1769-1830) deu uma prova simples da irracionalidade do número **e** por meio de séries[50]. Esta é uma prova tradicional encontrada atualmente na maioria dos livros desse assunto.

Até o início do século XIX, era sabido que os números racionais juntamente com os números irracionais formam o conjunto dos números reais. Por volta de 1850 foi "descoberto ou criado" um novo tipo de número.

"A maioria dos números que encontramos na álgebra elementar podem ser imaginados como soluções para equações simples; mais especificamente eles são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros" (MAOR, 2004, p. 246).

Por exemplo, os números -2, $\frac{3}{4}$ e $\sqrt{3}$ são raízes das equações polinomiais x+2=0, 4x - 3=0 e x^2-3=0 respectivamente. Lembrando que o número $i = \sqrt{-1}$ pertence a esse grupo, pois, i é raiz da equação $x^2+1=0$, porém, neste momento estamos tratando somente dos números reais.

Até número com aparência complicada como $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})}$ é uma raiz da equação $x^6-2x^3-1=0$, como se pode verificar facilmente:

Seja x = $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})}$, elevando ao cubo ambos os membros dessa igualdade temos o seguinte resultado: $x^3 = 1 - \sqrt{2}$. Agora se elevarmos ao quadrado a igualdade $x^3-1=\sqrt{2}$, ficaremos coma seguinte equação $x^6-2x^3-1=0$.

"Um número que satisfaz (é uma solução de) uma equação polinomial com coeficientes inteiros é chamado número algébrico" (MAOR, 2004, 246). A questão que se discutia no início do século XIX era o seguinte. Existirão números irracionais não algébricos?

Em 1844 o matemático francês Joseph Liouville (1809-1882) apresentou números irracionais não algébricos, citando como exemplo o número $\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \dots$.

[50] A prova analítica da irracionalidade do número de Euler **e**, apresentada no capítulo três segue a idéia de Fourier.

“Um número real não algébrico é chamado de transcendental. Não há nada de misterioso nessa palavra, ela indica meramente que esses números transcendem (vão além) do reino dos números algébricos” (MAOR, 2004, p. 247).

Os números irracionais surgiram de um problema comum da geometria (medida), enquanto os números transcendentes foram criados para depois provar sua “possível existência”. Portanto, o número **e** não satisfaz nenhum polinômio p(x) com coeficientes inteiros, por isso, ele é transcendente.

A partir desse momento começou o esforço para provar a transcendência de alguns números irracionais, como por exemplo o número **e**, e π. Charles Hermite (1822-1901) em 1873 provou a transcendência de **e**. O próprio Hermite deu a seguinte aproximação racional para **e** e **e**^{2}:

$$(13) \quad e \cong \frac{58{,}291}{21{,}444} \quad e \quad (14) \quad e^2 \cong \frac{158{,}452}{21{,}444}$$

A aproximação (13) tem um valor decimal de 2,7182894 que está muito próximo do valor ”verdadeiro” (MAOR, 2004, p. 249).

A prova da transcendência do número **e** de Hermite abriu caminho para Carl Louis Ferdinand Lindeman (1852-1939) em 1882 provar que o número π é transcendente.

> Com essas descobertas, a longa busca sobre a natureza das proporções do círculo chegou ao fim. A transcendência de π acabou de uma vez com velho problema de construir, usando compasso e esquadro, um quadrado com uma área igual à do círculo. Este problema tinha obcecado matemáticos desde que Platão, no século III a.C, determinara que todas as construções geométricas deveriam ser feitas apenas com um compasso e um esquadro (uma régua sem escala marcada). Sabe-se muito bem que esse tipo de construção só pode ser realizado se os comprimentos de todos os segmentos de reta envolvidos satisfizerem certo tipo de equação polinomial com coeficientes inteiros. A área do círculo de raio unitário é π; assim, se esta área for igual à área de um quadrado de lado x, teremos $x^2 = \pi$ e daí $x = \sqrt{\pi}$. Mas, para construir um segmento com esse comprimento, $\sqrt{\pi}$ - e, portanto, π -, devem satisfazer uma equação polinomial de coeficientes inteiros, tornando-o um número algébrico. E como π não é algébrico, tal construção é impossível (MAOR, 2004, p. 249).

Neste trabalho não temos como objetivo provar que um número específico é ou não transcendente, pois, esse procedimento é muito complicado e não está no alcance deste trabalho. Nossa preocupação é simplesmente navegar na história, procurando compreender os momentos em que o número **e** tornou-se importante para a compreensão de questões fundamentais da Matemática.

> A descoberta dos números transcendentes não provocou o mesmo choque intelectual que os números irracionais tinham causado dois mil e quinhentos anos antes, mas suas conseqüências foram igualmente significativas. Ela mostrou que, por trás da aparente simplicidade do sistema de números reais, ocultam-se muitas sutilezas, sutilezas que não podem ser notadas simplesmente olhando-se a expansão decimal de um número. Mas a maior surpresa ainda estava por vir. Em 1874 o matemático alemão George Cantor fez a espantosa descoberta de que existem mais números irracionais do que racionais, e mais números transcendentes do que algébricos. Em outras palavras, longe de serem excentricidades, a maioria dos números reais é irracional e, entre os números irracionais, a maioria é transcendental (MAOR, 2004, p. 251).

Atualmente, o valor 2,718281828[51] que é o valor aproximado do número **e**, recebe vários nomes, tais como: constante logarítmica, número de Napier, constante de Euler, base do sistema de logaritmos naturais, entre outras, ou seja, não existe consenso quanto ao tratamento de seu nome. Acreditamos que a base do sistema de logaritmos naturais é mais conveniente, pois esse número e a função que tem esse número como base surge de forma inevitável no estudo de fenômenos naturais. Mas, qual é a verdadeira essência do número **e**?

O que nos deixa intrigado é o mistério que envolve a natureza dos números. Como é possível a "existência" dos números irracionais? Até que ponto essa compreensão nos remete a melhorar nosso conhecimento sobre o universo? Está claro, que para preencher as lacunas deixadas na reta, pelos números racionais, e para estabelecer o contínuo numérico, os números irracionais são necessários, e com isso propicia a consolidação dos fundamentos da Matemática, mas como fica a relação dos fenômenos naturais e os números irracionais?

O processo de obtenção do número de Euler **e** ao longo da História da Matemática passou pela dupla raiz que há na idéia de função, pois, foi obtido tanto do ponto de vista computacional operativo como pela lei (um ponto de uma curva), por isso o estudo desse número deve ser histórico na perspectiva complementar entre os aspectos discreto e contínuo.

Podemos dizer que o número π, o número de ouro e a raiz quadrada de dois surgiram de problemas geométricos que envolvem a imaginação humana e das formas da natureza, enquanto o número de Euler **e** pode ter surgido de questões geométricas e também de questões comerciais motivado pela relação com o próprio homem. O que nos deixa intrigado é a proximidade de seus valores: 1,41...para $\sqrt{2}$; 1,618... para o número de ouro; 2,71828... para o número **e**; e 3,14...para π. Será que existe outro número com magnitudes próximas destes valores e com qualidades tão importantes? Isto é obra de Deus? Do homem? Ou de Ambos?

---

[51] No anexo 4 apresentamos 795 casas decimais para o número **e**.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A consolidação da Educação Matemática passa obrigatoriamente pela reflexão histórica e epistemológica. Nesse sentido, está relacionada com o aspecto prático e filosófico do conhecimento humano propiciando um estudo científico e pedagógico que possibilita o entendimento da necessidade de se estudar este ou aquele tópico.

Este trabalho nos possibilita perceber que não existe uma maneira única ou um único estilo de estudar e ensinar um determinado objeto matemático, pois, esta ciência se desenvolveu ao longo de sua história por meio das variedades de suas aplicações, bem como nas formas diferentes de abordar a mesma situação problema. Entretanto, o tratamento de um assunto por linguagens Matemáticas diferentes propicia aumento das possibilidades de entendimento e de aplicações.

O conhecimento matemático produz uma expansão positivamente literal da consciência nos permitindo observar com mais clareza as relações que se estabelece entre o homem e a natureza, pois, só o aparato sensorial pode nos levar a conclusão equivocada de um acontecimento devido ao fato de que nosso cérebro, ao que parece, não dispõe da engenharia Matemática necessária para lidar com o infinito. Porém, o aspecto sensorial aliado com a razão possibilita o entendimento do processo de construção do conhecimento.

Para o estudo e compreensão de como determinado fenômeno acontece desta e não de outra maneira, busca-se por meio dos números e formas geométricas a transformação de parte do mundo real em modelos que expressam essa realidade por meio de padrões ou sinais, ou seja, de relações que são formuladas em nossa mente a partir de atividades não lineares pré-estabelecidas.

No estudo histórico e epistemológico da Educação Matemática está presente à noção de complementaridade, pois, o sujeito e o objeto estão conectados pelos meios e pelas atividades cognitivas que se relacionam e se complementam na explicação de um determinado conhecimento, seja ele matemático ou não.

Diante disso, está claro que o número representa uma relação entre grandezas e por isso, não pode se dissociar da noção de complementaridade. Todavia, esta noção não fornece uma explicação definitiva sobre o conceito dos números irracionais e nem do número de Euler **e**. Entretanto, não tivemos a pretensão de apresentar explicações definitivas, apenas discutir possibilidades de apresentação e compreensão deste tema, pois, quando conseguirmos por fim explicativo num determinado conceito perde-se o sentido de entender suas possibilidades relacionais. Portanto, a caracterização dos números irracionais pela via geométrica e por meio de semelhanças nos ajuda a perceber a relação que há entre o mundo discreto e o mundo contínuo.

Neste trabalho fizemos um estudo da construção do conceito do número de Euler **e** bem como da função exponencial de base **e** para evidenciar sua importância tanto na fundamentação teórica da Matemática como na resolução de modelos que se aproximam da realidade, buscando na noção de complementaridade o sentido dessa importância.

Isto foi necessário porque consideramos que este número desde o seu surgimento até os dias de hoje se apresenta de maneira superficial tanto no ensino médio como no ensino superior.

O que de fato procuramos fazer foi fornecer um tratamento operativo algorítmico (discreto) associado à exposição do aspecto contínuo da lei, buscando sua compreensão no duplo sentido do conceito de função. Este empreendimento possibilitou perceber que a questão da continuidade assim como o processo algorítmico operativo está presente na instabilidade exponencial em que os fenômenos atuais estão inseridos.

Durante todo o nosso estudo estivemos preocupados em mostrar o elo que existe entre esse número e as questões internas da Matemática e com os modelos que trata as demais ciências. Podemos considerar que o aspecto relacional complementar entre o discreto e o contínuo na conceitualização do número e consequentemente o número **e**, é essencial para compreender os motivos que torna este número importante.

A obtenção do número de Euler **e** por várias maneiras diferentes possibilitou analisar que este objeto tem representações ou intensões que o determina, porém, cada uma dessas representações apresenta características próprias que na prática imediata tem sentidos diferentes, ou seja, uma determinada representação desse objeto pode convergir mais rapidamente que a outra e isso num contexto prático pode ter conseqüências importantes.

Devemos, portanto, compreender que essas equivalências ocorrem apenas no campo teórico, pois, é neste campo que lidamos com o infinito, e isto por sua vez é necessário para estabelecer o sentido do estudo da fundamentação teórica da Matemática. É nesse aspecto que a noção de complementaridade torna relevante, porque conecta o aspecto operacional do cálculo dos dígitos desse número com a questão da continuidade.

As representações ou as intensões que propiciam a determinação do número de Euler **e** foram obtidas por um algoritmo operativo elaborado a partir dos juros compostos e isso propiciou representar o número **e** por um binômio que aliado com a propriedade de "passagem ao limite" permitiu escrever o valor desse número por meio de uma série. Este fato possibilitou determinar o seu valor com uma boa aproximação.

O estudo de séries e o fato de a função (y=$\mathbf{e}^x$) ser igual a sua derivada facilitou a representação dessa função como uma série. E isso possibilitou a construção de um gráfico contínuo dessa função de forma que esse número pode ser obtido como um ponto de uma curva. Isto nos mostra que esse objeto matemático se apresenta de formas diferentes, porém, complementares.

Todavia, para determinar esse valor precisamos de um algoritmo, em que o valor do número **e** será obtido quando x=1, ou seja, por um lado temos a função tratada como processos operacionais e por outro esta função é tratada como uma lei contínua.

Entretanto, para computarmos os dígitos desse número, precisamos tanto do aspecto operativo como do aspecto da lei, por isso podemos dizer que esse número está na atividade relacional, ou seja, não existe fora de um contexto prático ou teórico.

Se nós tratarmos esse número apenas sob um desses pontos de vista acarretará dificuldades de aprendizagem, pois, só o processo operativo não permite discutir a continuidade e só o processo da lei não desencadeará o entendimento da necessidade do uso de métodos computacionais. Isto reforça a idéia da construção do conceito desse número pela complementaridade entre o discreto e contínuo.

O número de Euler **e** assim como a função exponencial de base **e** está presente também em questões históricas que levaram séculos para serem resolvidas. Estamos nos referindo à quadratura da hipérbole que só foi desvendada a partir da compreensão desse número. Este estudo permitiu resgatar esse aspecto histórico para propiciar uma alternativa de explicação tanto da derivada da função (y=lnx) como da integral de ($y = \frac{1}{x}$), bem como elaborar um sentido geométrico para o número de Euler **e**. Isto é importante porque mostra que esse número ajudou a construir conceitos importantes da Matemática. E somente por meio de um estudo histórico e epistemológico é que podemos suscitar as idéias centrais dos assuntos presentes atualmente na Matemática, ou seja, indo além de um formalismo imediato que apenas define e demonstra.

Embora o termo complementaridade, no início do século XVII ainda não tinha sido usado, fica claro que nos processos usados para quadrar figuras, como por exemplo, na hipérbole está presente o aspecto relacional entre os processos operacionais e a questão do contínuo, porém, esse contínuo, nessa época ainda não era tratado com uma linguagem formal e sim intuitivo.

A Matemática tem uma característica própria que faz com que seu corpo de conhecimento na forma axiomatizada ou construída seja utilizada na interpretação dos mais diversos tipos de fenômenos. A questão é como pode uma determinada teoria criada aparentemente sem nenhuma pretensão prática ser utiliza posteriormente na resolução de problemas tão dicotômicos? Acreditamos que intuitivamente qualquer teoria de uma forma ou de outra esteja ligada a uma questão em particular, pois, por mais abstrato que seja um tópico, o mesmo pode resolver uma situação específica interna ou externa da Matemática.

A função exponencial de base **e** só é utilizada na resolução de problemas de crescimento ou decrescimento porque é igual a sua própria derivada. Agora este fato teórico ajuda a fazer previsões seja na questão populacional, radioatividade ou uma situação física pré-estabelecida etc. O que podemos observar é que na natureza há fenômenos que de uma forma ou de outra cresce ou diminui rapidamente ou não. Então a função de base **e** foi "criada" depois da observação e do estudo desses acontecimentos, ou seja, o homem procura entender para "dominar" e para isso cria instrumentos para esse fim.

Esta função, portanto, se tornou uma ferramenta para o homem estabelecer relações com os fenômenos de seu interesse. Nesse processo relacional a função exponencial de base **e** tratada sob os aspectos complementares entre a operação e a lei possibilitam melhorar nosso conhecimento sobre a continuidade da reta, do espaço e dos números.

A imaginação humana pode criar relações, mesmo sabendo que essas relações apresentam características intrigantes. O que Euler fez com as manipulações das fórmulas, como por exemplo: (e^{ix}=cosx + isenx) e $e^{i\pi}+1=0$, a princípio apenas como exercício mental possibilitou ampliar nosso campo do conhecimento, criando as Variáveis Complexas.

O que tem em comum o número **e** com os números primos, a espiral logarítmica, a unidade imaginária e o número π? Estas conexões podem não resolver problemas do cotidiano imediato, mas provocam em nossa mente indagações importantes desencadeando atividades cognitivas que podem levar ou não a ampliação de nossas perspectivas atuais sobre um determinado objeto matemático. O que tem de mais importante nesses fatos matemáticos é que eles só surgiram devido ao tratamento complementar que há entre o discreto e contínuo na conceitualização de qualquer objeto matemático. Por isso, que a noção de complementaridade está presente na construção de conceitos.

As demonstrações estão no âmago da teoria Matemática e por isso as afirmações devem ser conseqüências de definições precisas, o que inclui premissas bem estabelecidas, os axiomas e por fim um sistema axiomático que sustenta determinada teoria. Porém, se conseguirmos perceber determinada demonstração isso poderá facilitar na concepção de um determinado conceito.

Neste trabalho apresentamos uma explicação para a irracionalidade do número de Euler **e** com o objetivo de melhorar a compreensão desse fato. Esta explicação construtiva por intervalos encaixados é na verdade uma atividade cognitiva relacional que utiliza uma das representações do número **e** para possibilitar o entendimento dessa irracionalidade.

O que queremos de fato mostrar com as explicações da irracionalidade do número de Euler **e**, seja pela via geométrica, aritmética ou analítica é que a percepção/mentalização da irracionalidade não pode ficar simplesmente caracterizada pelo fato do não racional, pois essa percepção depende dos sentidos. E é nesse aspecto que a variedade na forma de abordar essa irracionalidade ganha consistência, coerência e possibilidades de definições, conexões e aplicações tanto na Matemática como em outras ciências. No entanto, creio que o aspecto geométrico da explicação da irracionalidade propicia uma percepçãp/mentalização do contínuo. Já em outras explicações essa mentalização fica mais complicada. Pois, para o conhecimento chegar ao nosso cérebro há necessidade dos sentidos e esses sentidos são relacionais.

Contudo, só cremos nessa irracionalidade porque não conhecemos as verdadeiras características do contínuo, mas a construção algorítmica facilita o tratamento desse conceito. O que tínhamos até então nos livros didáticos era uma explicação analítica desse fato, que não proporciona desenvolvimento de atividades visuais (mentalização) para compreensão de que a irracionalidade está diretamente ligada à continuidade.

A construção do conceito de número irracional depende de noções do infinito e limite, ou seja, este conceito não pode ser apenas definido, tem que ser construído, porém, terá dificuldades lógicas nessa construção. Mas, essas dificuldades nos ajudam a perceber que as conexões entre a continuidade dos números, do tempo e do espaço são complexas, mas muito interessante de serem discutidas na sala de aula.

O que permitiu examinar a irracionalidade do número **e** foi o tratamento complementar entre o aspecto operativo algorítmico na construção dos intervalos, por um lado, e, por outro, a questão do conceito intuitivo do contínuo. Considerando que este processo foi mediado pela reflexão na comparação de intervalos cada vez menores, ou seja, o valor desse número está compreendido entre dois números racionais. Entretanto, no infinito, o comprimento do intervalo tende a zero e por isso podemos discutir que esse número, que não pode ser escrito na forma de fração é único no interior desse intervalo. Esta conclusão bem entendida nos encaminha para a compreensão da noção de continuidade via aspecto relacional.

Os números racionais são necessários, mas não suficientes para representar todos os números, diante disso, a compreensão de como os números reais foram construídos ao longo da história é importante, e isso nos mostra o processo usado para lidar com o infinito por meio do conceito de limite.

As estratégias utilizadas para explicar a continuidade dos números discutidos aqui possibilitaram a fundamentação teórica da Matemática, pois, esta fundamentação era necessária porque a Matemática é o instrumento utilizado por outras ciências. Todavia, estas construções surgiram no final do século XIX e o termo complementaridade como vimos foi introduzida na física no início do século XX.

Na Educação Matemática esse termo surgiu na década de setenta, mas podemos perceber que nessas construções dos números reais estão presentes os aspectos relacionais, pois nelas ora se trabalha no aspecto contínuo ora se trabalha no aspecto discreto. Entretanto, o conceito de número irracional será concebido no elo entre esses dois aspectos.

O que normalmente se vê nos livros didáticos de Matemática é a introdução dos números irracionais por meio da diagonal do quadrado de lado unitário, ou seja, a raiz quadrada de dois que é uma relação entre as grandezas que representa a medida de seus lados (uma comparação relacional entre grandezas). Pretendemos que este trabalho possa também, propiciar ao professor de Matemática, mais uma possibilidade de introdução dos números irracionais por meio do processo algorítmico de construção do número de Euler **e**.

Podemos dizer também, que se nós introduzirmos a questão da irracionalidade por meio do número **e**, evidenciaremos a construção desse conceito e isso pode fazer com que nós o utilizamos, seja como base de funções exponenciais ou como base dos logaritmos, ou seja, utilizaremos esse conceito com mais freqüência no ensino médio, mostrando com isso a sua importância não só na fundamentação da Matemática como também na interpretação de fenômenos naturais. Acreditamos que isso é “mais importante” que os estudos dos logaritmos na base cinco, por exemplo.

Se considerarmos que números são instrumentos usados para calcular, então o número **e**, que é um postulado (a letra **e** é apenas um símbolo que representa uma construção infinita) pode ser tratado como um número, pois como vimos podemos elaborar seqüências que o determinam na precisão que desejarmos. A questão é que a obtenção do número **e** por intervalos encaixados nos convida a “entrarmos” na noção do infinito, bem como na questão do contínuo. Isso significa que não ficamos apenas num mundo discreto, fato que é comum no ensino da Matemática atualmente.

O caráter histórico da construção do conceito do número de Euler **e** é interessante porque enquanto os números π, a raiz quadrada de dois e o número de ouro estão ligados historicamente ao aspecto de formas geométricas, o número **e** teve seu estudo motivado tanto pela questão geométrica (quadratura da hipérbole) como pela questão comercial (juros compostos).

Uma questão importante é o porquê que esse número surgiu de forma clara somente a partir do início do século XVII? Como este número foi o primeiro a ser definido como limite, creio que o conceito desse número está diretamente ligado a compreensão da continuidade dos números. Outra questão interessante é como eram tratados os fenômenos de crescimento ou decrescimento exponencial antes do século XVII, ou seja, sem o conceito do número **e**? Acreditamos que uma provável resposta é o fato de que no auge da idade média com as incursões da navegação, havia necessidade de fazer previsões e isso possivelmente estimulou e ainda estimula o desenvolvimento de modelos que representa a natureza de forma mais fiel possível.

O conhecimento histórico deste número possibilita perceber que a construção do conhecimento não é linear, e nesse contexto nota-se que este conceito pode ser tratado de forma construtiva evidenciando suas dificuldades no aspecto de consolidação de sua “possível existência”.

O processo de ensino-aprendizagem tem a forma de uma espiral logarítmica, ou seja, nunca se fecha e sim aumenta suas características e peculiaridades, por isso, este trabalho não se encerra aqui e sim abre caminhos para o estabelecimento e aplicações destas reflexões. Lembrando que a todo o momento surgem novas tecnologias e a forma de abordar os problemas pode mudar, mas a análise complementar de tratar os conceitos, os objetos por meio de suas representações ou intensões continuarão evidentes e necessárias, pois, será sempre no aspecto relacional que os objetos ganham sentidos e significados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. 5.ed. Tradução de Alfredo Bosi. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. p. 1210.

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito: Um Obstáculo no Estudo da Matemática**. São Paulo: PUC, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005. Disponível em; <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_flavio_luiz_amadei.pdf> Acesso em: 20 de março de 2007.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática Para Licenciatura**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005. p. 244.

______ . **Introdução À Análise Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1993. p. 254.

BARKER, Stephen F. **Curso Moderno de Filosofia da Matemática**. Traduzido por Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969. p. 139.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. **Filosofia da Educação Matemática**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. p. 92.

BONGIOVANNI, Vincenzo; VISSOTO, Olímpio Rudinin Leite; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e Vida**. Volume 1. 2.ed. São Paulo: Editora Ática, 1993. p. 392.

BOHR, Niels. **Física Atômica e Conhecimento Humano**. Traduzido por Vera Ribeiro. 2ª impressão. Rio de Janeiro: Contraponto. 1995. p. 51.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher. 1998. p. 496.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. São Paulo: USP, 1996. Tese (Doutor em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1996. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~brolezzi/textos/teses/brolezzidr.pdf> acesso em: 26 de fevereiro de 2007.

BROTHERS, Harlan J.; KNOX, John A. **New Closed-Form Approximations to the Logarithmic Constant e**. Disponível em: <http://www.brotherstechnology.com/docs/mi_paper1.pdf> Acesso em: 03 de agosto de 2006.

______ . **Novel Series-based Approximations to e**. Disponível em: <http://www.brotherstechnology.com/docs/cmj_paper1.pdf> Acesso em: 03 de agosto de 2006.

BROTHERS, Harlan J. **Improving The convergence of Newton's Series Approximations for e**. Disponível em: <http://www.brotherstechnology.com/docs/icnsae_(cmj0104-300dpi).pdf> Acesso em: 03 de agosto de 2006.

______ . **Fast New Series For e**. Disponível em: < http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil > Acesso em: 24 de setembro de 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Lições de Álgebra e Análise**. Volume 1. 3.ed. Lisboa: Tipográfica Matemática, LTDA,1956. p. 399.

______ . **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora,1984. p. 318.

COLE, K. C. **O Universo e a Xícara de Chá: a Matemática da verdade e da beleza**. Traduzido por Beth Leal. Rio de Janeiro – São Paulo: Record, 2006. p. 291.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral V.1**. Traduzido por Alberto Nunes Serrão e Ruy Honório Bacelar. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1965. p. 616.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O Que é Matemática?** Traduzido por Adalberto da Silva Brito e Revisão Técnica pelo Professor João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000. p. 621.

CYRINO, Hélio. **Matemática & Gregos**. Campinas: Editora Átomo, 2006. p. 120.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações. V.1**. São Paulo: Edditora Ática, 2003. p. 416.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. 4ª ed. Traduzido por João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1989. p. 482.

DEDEKIND, Richard. **Essays on the theory of Numbers**. New York: Dover Publications, Inc, 1963. p. 115.

______ . **Stetighkeit und Irrationale Zahlen**. 7ª ed. Germany: E. Hunnold, Braunschweig, 1969. p. 22.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Traduzido por Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004. p. 844.

FIGUEIREDO, Djairo G. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. p. 60.

FINNEY, Ross L.; THOMAS, George B. Jr. **Cálculo e Geometria Analítica**. Traduzido por Denise Paravato. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos LTDA, 1988. p. 1763.

FONSECA, Rogério Ferreira. **Número: o conceito a partir de jogos**. São Paulo: PUC, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005. Disponível em; <http://.pucsp.br/po/edmat/ma/dissertação_rogerio_ferreira_fonseca.pdf>. Acesso em: 18 de janeiro de 2007.

FURASTÉ, Pedro Augusto. **Normas Técnicas para o Trabalho Científico: Elaboração e Formatação**. 14ª ed. Porto Alegre: Gráfica e Editora Brasul, 2006, p. 307.

GILES, Thomas Ransom. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1993. p. 269.

GIOIA, Anthony A. **The Theory of Numbers**. Chicago: Dover Publications, 2001. p. 207.

GUEDJ, Denis. **O Teorema do Papagaio**. Traduzido por Eduardo Brandão. 5ª impressão. São Paulo: Cia da Letras, 2006. p. 504.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. Dicionário Básico de Filosofia. 3ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1996. p. 296.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura**. Traduzido por Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 4ª ed. Lisboa: Serviço de Educação Fundação Calouste Gulbenkian, 1997. p. 680.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought From Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972. p. 1211.

KÖRNER, Stephan. **Uma Introdução à Filosofia da Matemática**. Traduzido por Alberto Oliva. Rio de Janeiro: Zahar Editores S.A, 1985. p. 201.

KÖCHE, José Carlos. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 17ª ed. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2000. p. 180.

LEITHOLD, Louis. O **Cálculo com Geometria Analítica.** Traduzido por Antônio Paques; Otilia Teresinha W. Paques e Sebastião Antônio José Filho. 2ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda, 1982. p. 846.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Volume 1. 8ª ed. São Paulo: Impa, 1976. p. 344.

LÍVIO, Mário. **A História de Fi, um número surpreendente**. Traduzido por Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro – São Paulo: Record, 2006. p. 333.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade**. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 1989. p. 103.

______ . **Matemática e Língua Materna**. 5ª ed. São Paulo: Cortez, 2001. p. 167.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações Diferenciais Aplicadas à Física**. 3ª ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2004. p. 600.

MAOR, Eli. **E: A História de Um Número**. 2.ed. Traduzido por Jorge Calife e Revisão Técnica feita por Michelle Dysman. Rio de Janeiro e São Paulo: Record, 2004. p. 291.

NEMIROFF, Robert; BONNELL, Jerry. **The Number e to 1 Million** Digits. Disponível em: < http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil>. Acesso em: 12 de outubro de 2007.

STRAIN Mary; MITCHELL, U. G. **The Number e**. Osíris, Vol. 1 (jan., 1936), 476-496. Disponível em: < http://www.jstor.org/>. Acesso em: 12 de jan.de 2006.

MORIN, Edgar. **Ciência com Consciência**. 8ª ed. Traduzido por Maria D. Alexandre e Maria Alice. Rio de Janeiro: Bertrand, 2005. p. 350.

NASCIMENTO, Demilson Benedito. Representações e Processos Cognitivos na Área de Cálculo. Mato Grosso: UFMT, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação na Área de Concentração Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso, 2000.

NETTO, Scipione Di: FILHO, Sérgio Orsi. **Quanta: Matemática para o Ensino Médio V1 Fascículo 2**. São Paulo: Editora Saraiva, 1999. p. 61.

OTTE, Michael. **O Formal, O Social e o Subjetivo**. Tradução de Raul Fernando Neto. et al., São Paulo: Editora UNESP, 1993. p. 323.

OTTE, M. **Learning Difficulties resulting from the Nature of modern Mathematics: the Problem of Explanation**. In: MAASZ, J. SCHLOEGLMANN,W. New Mathematics Education Research and Practice. Sense Publishers, 2006. p. 75-94.

______ . **Complemtarity, Sets And Numbers**. Educational Studies in Mathematics. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, n.53, p.203-228, 2003.

______ . **O Pensamento Relacional: Equações**. Bolema, São Paulo, Ano 9, especial 3, p.71-79. 1994.

PAIVA, Manoel. **Matemática V.3**. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p.656.

PINTO, José J. M. Sousa. Métodos Infinitesimais de Análise Matemática. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenhian, 2000. p. 371.

RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. 2ª ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964. p. 270.

SANT'ANNA, Adonai S. **O Que é um Axioma**. São Paulo: Manole, 2003. p. 157.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica V. 2**. Tradução de Seiji Hariki. São Paulo: Editora McGrawhill, 1987. p.807.

SONDOW, Jonathan. **A Geometric proof that e is irrational, and a measure of its irrationality**. Disponível em: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0704/0704.1282.pdf>. Acesso em: 10 de maio. 2006.

SOWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica V. 1**. 2ªed. Traduzido por Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1994. p.744.

______. **Cálculo com Geometria Analítica V. 2**. 2ªed. Traduzido por Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1994. p.744.

WHITE, A. J. **Análise Real: Uma introdução**. Traduzida por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1993. p. 258.

ANEXO 01

§3 do texto "Stetigkeit und Irrationale Zahlen" de Richard Dedekind publicado em 1872

§ 3

Stetigkeit der geraden Linie

Von der größten Wichtigkeit ist nun aber die Tatsache, daß es in der Geraden L unendlich viele Punkte gibt, welche keiner rationalen Zahl entsprechen. Entspricht nämlich der Punkt p der rationalen Zahl a, so ist bekanntlich die Länge op kommensurabel mit der bei der Konstruktion benutzten unabänderlichen Längeneinheit, d. h. es gibt eine dritte Länge, ein sogenanntes gemeinschaftliches Maß, von welcher diese beiden Längen ganze Vielfache sind. Aber schon die alten Griechen haben gewußt und bewiesen, daß es Längen gibt, welche mit einer gegebenen Längeneinheit inkommensurabel sind, z. B. die Diagonale des Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist. Trägt man eine solche Länge von dem Punkt o aus auf der Geraden ab, so erhält man einen Endpunkt, welcher keiner rationalen Zahl entspricht. Da sich ferner leicht beweisen läßt, daß es unendlich viele Längen gibt, welche mit der Längeneinheit inkommensurabel sind, so können wir behaupten: Die Gerade L ist unendlich viel reicher an Punktindividuen, als das Gebiet R der rationalen Zahlen an Zahlindividuen.

Will man nun, was doch der Wunsch ist, alle Erscheinungen in der Geraden auch arithmetisch verfolgen, so reichen dazu die rationalen Zahlen nicht aus, und es wird daher unumgänglich notwendig, das Instrument R, welches durch die Schöpfung der rationalen Zahlen konstruiert war, wesentlich zu verfeinern durch eine Schöpfung von neuen Zahlen der Art, daß das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe Stetigkeit gewinnt, wie die gerade Linie.

Die bisherigen Betrachtungen sind allen so bekannt und geläufig, daß viele ihre Wiederholung für sehr überflüssig erachten werden. Dennoch hielt ich diese Rekapitulation für notwendig, um die Hauptfrage gehörig vorzubereiten. Die bisher übliche Einführung der irrationalen Zahlen knüpft nämlich geradezu an den Begriff der extensiven Größen an — welcher aber selbst nirgends streng definiert wird — und erklärt die Zahl als das Resultat der Messung einer solchen Größe durch eine zweite gleichartige*). Statt dessen fordere ich, daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. Daß solche Anknüpfungen an nicht arithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffes gegeben haben, mag im allgemeinen zugegeben werden (doch ist dies bei der Einführung der komplexen Zahlen entschieden nicht der Fall gewesen); aber hierin liegt ganz gewiß kein Grund, diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen. So wie die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, daß auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allein vollständig definiert werden. Nur das Wie? bleibt die Frage.

Die obige Vergleichung des Gebietes R der rationalen Zahlen mit einer Geraden hat zu der Erkenntnis der Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des ersteren geführt, während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben. Worin besteht denn nun eigentlich diese Stetigkeit? In der Beantwortung dieser Frage muß alles enthalten sein, und nur durch sie wird man eine wissenschaftliche Grundlage für die Untersuchung a l l e r stetigen Gebiete gewinnen. Mit vagen Reden über den ununterbrochenen Zusammenhang in den kleinsten Teilen ist natürlich nichts erreicht; es kommt darauf an, ein präzises Merkmal der Stetigkeit anzugeben, welches als Basis für wirkliche Deduktionen gebraucht werden kann. Lange Zeit habe ich vergeblich darüber nachgedacht, aber endlich fand ich, was ich suchte. Dieser Fund wird von verschiedenen Personen vielleicht verschieden beurteilt werden, doch glaube ich, daß die meisten seinen Inhalt sehr trivial finden werden. Er besteht im folgenden. Im vorigen Paragraphen ist darauf auf-

*) Der scheinbare Vorzug der Allgemeinheit dieser Definition der Zahl schwindet sofort dahin, wenn man an die komplexen Zahlen denkt. Nach meiner Auffassung kann umgekehrt der Begriff des Verhältnisses zwischen zwei gleichartigen Größen erst dann klar entwickelt werden, wenn die irrationalen Zahlen schon eingeführt sind.

merksam gemacht, daß jeder Punkt p der Geraden eine Zerlegung derselben in zwei Stücke von der Art hervorbringt, daß jeder Punkt des einen Stückes links von jedem Punkte des anderen liegt. Ich finde nun das Wesen der Stetigkeit in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip:

„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt."

Wie schon gesagt, glaube ich nicht zu irren, wenn ich annehme, daß jedermann die Wahrheit dieser Behauptung sofort zugeben wird; die meisten meiner Leser werden sehr enttäuscht sein, zu vernehmen, daß

ANEXO 02

Tradução do Texto "Stetigkeit der geraden Linie" do § 3[52]

Continuidade da Reta

Da maior importância, porém, é o fato que na reta *L* existe um conjunto infinito pontos que não correspondem a números racionais. Se o ponto *p* corresponde ao número racional *a* (diferente de zero), então, como é bem conhecido, o comprimento *op* (o número racional zero corresponde ao ponto *o*) é comensurável com a unidade de medida invariável usado na construção, isto é, existe um terceiro comprimento, ou seja, uma medida comum, de forma que esses dois comprimentos são múltiplos inteiros. Mas os gregos antigos já sabiam e tinham demonstrado que há comprimentos incomensuráveis com uma determinada unidade de comprimento, por exemplo, a diagonal do quadrado cujo lado é a unidade de comprimento. Se nós transladarmos um comprimento sobre a reta, de forma que o ponto *o* seja a origem desse comprimento, então o ponto final desse comprimento na reta, corresponde a um número não racional. Diante disso pode-se mostrar facilmente que há um número infinito de comprimentos que são incomensuráveis com a unidade de comprimento, portanto podemos afirmar que: a reta *L* é infinitamente mais rica em pontos do que o domínio *R* dos números racionais é em números.

Se agora, como é nosso desejo, nós tentamos seguir aritmeticamente todos os fenômenos da reta, o domínio dos números racionais é insuficiente e torna-se absolutamente necessário que o instrumento *R* construído pela criação dos números racionais seja essencialmente aperfeiçoado pela criação de novos números tais que o domínio dos números ganhará a mesma completude, ou como nós podemos dizer imediatamente, a mesma *continuidade* da reta.

Tais considerações estão tão familiarizadas e são bem conhecidas de todos de forma que muitos considerarão sua repetição bastante supérflua. Eu ainda considero esta recapitulação necessária que prepara adequadamente a pergunta principal. Pois, a maneira pelos quais os números irracionais normalmente são introduzidos é diretamente baseada na

[52] Esta tradução foi feita inicialmente da Língua Inglesa para a Língua Portuguesa e depois o professor Michael Otte conferiu a tradução com a versão original de Dedekind. Portanto, temos uma tradução do texto alemão para o português.

concepção da grandeza extensiva – o qual em nenhum momento é rigorosamente definido – e o número é explicado como resultado de medida de uma magnitude por outra magnitude do mesmo tipo [53]. Em vez disto eu exijo que a aritmética seja desenvolvida dentro de si mesmo.

Temos de conceder que essas comparações com noções não-aritméticas foram, de uma maneira geral, concebidas, como uma oportunidade de fornecer a extensão imediata do conceito de número (embora este não foi certamente o caso na introdução dos números complexos); mas isto seguramente não é suficiente para justificar a introdução destas noções estranhas na ciência dos números, na aritmética. Da mesma maneira que números negativos e racionais fracionários são formados por uma nova criação livre e como as leis de operar com estes novos números devem e podem ser reduzidos às leis de operar com inteiros positivos, assim nós temos que empenhar em definir completamente os números irracionais apenas por meio dos números racionais. A questão permanece como fazer isso.

A comparação acima do domínio R dos números racionais com a reta conduziu ao reconhecimento da existência de lacunas, de certa incompletude ou descontinuidade, enquanto nós designamos a completude da reta, ou seja, ausência de lacunas, ou continuidade. Então, a continuidade em que consiste? Tudo deve depender da resposta para esta questão, e só por meio desta que nós obtemos uma base científica para a investigação de *todos* os domínios contínuos. Obviamente nada se ganha com observações vagas na conexão ininterrupta das partes menores; o problema é indicar uma característica precisa da continuidade que pode servir como base para validar deduções.

Por muito tempo eu considerei isto em vão, mas finalmente eu achei o que estava buscando. Esta descoberta, talvez, seja julgada diferentemente por diferentes pessoas; a maioria pode achar isto muito trivial. Consiste no seguinte. No conceito de corte foi chamado atenção para o fato de que todo ponto p da reta produz uma separação da mesma em duas partes tal que todo ponto de uma parte estão do lado esquerdo de todos os outros pontos. Vejo a essência da continuidade na inversão dessa idéia, isto é, no seguinte princípio:

"Se todos os pontos da reta caem em duas classes de forma que todo ponto da primeira classe estão à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e só um ponto que produz esta separação de todos os pontos em duas classes, isto corta a reta em duas porções (semi-retas)."

---

[53] A vantagem aparente da generalidade desta definição de número desaparece assim que nós consideramos os números complexos. No meu ponto de vista, por outro lado, a noção de razão entre duas grandezas do mesmo tipo pode ser claramente desenvolvida somente depois da introdução dos números irracionais.

Como já disse penso que não errarei assumindo que todas as pessoas assumirão a verdade desta declaração imediatamente; a maioria de meus leitores ficará muito desapontada em aprender que nessa observação comum, o segredo da continuidade será revelado. Posso dizer que eu estou contente se todas as pessoas acharem o princípio acima tão óbvio e, portanto em harmonia com as próprias idéias de uma reta; Porque eu sou totalmente incapaz de apresentar qualquer prova exata disto, e ninguém tem o poder para isto. A suposição desta propriedade não é nada mais do que um axioma pelo qual nós atribuímos à reta sua continuidade. Mesmo se o espaço tem uma existência real, *não* é necessário que seja contínuo, pois, muitas de suas propriedades permaneceriam idênticas, se ele ficasse descontínuo. E se nós soubéssemos com certeza que aquele espaço era descontínuo, não haveria nada que nos impedisse caso desejássemos, de preencher suas lacunas, em pensamento, e dessa forma construir a continuidade; este preenchimento consistiria numa criação de novos pontos-individuais e isto teria que ser efetuado conforme o princípio anterior.

ANEXO 03

Séries derivadas da definição tradicional do número de Euler[54]

Definições do Número de Euler e

$$1)\ e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3-4k^2}{(2k+1)!}=\frac{3}{1!}-\frac{1}{3!}-\frac{13}{5!}-\frac{33}{7!}-\frac{61}{9!}-\frac{97}{11!}-\frac{141}{13!}-\frac{193}{15!}-\ldots$$

$$2)\ e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k+1)^2+1}{(3k+1)!}=\frac{1^2+1}{1!}+\frac{4^2+1}{4!}+\frac{7^2+1}{7!}+\frac{10^2+1}{10!}+\frac{13^2+1}{13!}+\frac{16^2+1}{16!}+\ldots$$

$$3)\ e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k+2)^2+1}{(3k+2)!}=\frac{2^2+1}{2!}+\frac{5^2+1}{5!}+\frac{8^2+1}{8!}+\frac{11^2+1}{11!}+\frac{14^2+1}{14!}+\frac{17^2+1}{17!}+\ldots$$

$$4)\ e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(8k^2+1)(8k-4)+5}{(4k)!}=\frac{1}{0!}+\frac{41}{4!}+\frac{401}{8!}+\frac{1465}{12!}+\frac{3617}{16!}+\frac{7241}{20!}+\ldots$$

Definições que envolvem o produto do número e por uma constante

$$1)\ 2e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{6}{5!}+\frac{7}{6!}+\frac{8}{7!}+\ldots$$

$$2)\ \frac{e}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{(2k+1)!}=\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\frac{4}{7!}+\frac{5}{9!}+\frac{6}{11!}+\frac{7}{13!}+\frac{8}{15!}+\ldots$$

$$3)\ \frac{e}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)(2-k)-3}{(2k)!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{2!}-\frac{3}{4!}-\frac{11}{6!}-\frac{23}{8!}-\frac{39}{10!}-\frac{59}{12!}-\frac{83}{14!}-\ \ldots$$

$$4)\ xe=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x-1+k}{k!}=\frac{x-1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x+1}{2!}+\frac{x+2}{3!}+\frac{x+3}{4!}+\frac{x+4}{5!}+\ldots,\ x\in R$$

[54] Fonte: http://www.brotherstechnology.com/docs/eseries.pdf

Definições que envolvem o inverso do número e

1) $\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-2k}{(2k)!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} - \frac{7}{8!} - \frac{9}{10!} - \frac{11}{12!} - \frac{13}{14!} - \ ...$

2) $\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(2k+1)!} = \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + \frac{10}{11!} + \frac{12}{13!} + \frac{14}{15!} + \frac{16}{17!} + ...$

3) $\frac{1}{2e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \frac{4}{9!} + \frac{5}{11!} + \frac{6}{13!} + \frac{7}{15!} + \frac{8}{17!} + ...$

4) $1 - \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k+2)!} = \frac{1}{2!} + \frac{3}{4!} + \frac{5}{6!} + \frac{7}{8!} + \frac{9}{10!} + \frac{11}{12!} + \frac{13}{14!} + ...$

Definições que envolvem e^x

1) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(2k-1)}(x+2k)}{(2k)!} = \frac{1}{0!} + \frac{x(x+2)}{2!} + \frac{x^3(x+4)}{4!} + \frac{x^5(x+6)}{6!} + \frac{x^7(x+8)}{8!} + \ ..., x \in R \ e \ x \neq 0$

2) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(2k)}(x+2k+1)}{(2k+1)!} = \frac{x+1}{1!} + \frac{x^3+3x^2}{3!} + \frac{x^5+5x^4}{5!} + \frac{x^7+7x^6}{7!} + \frac{x^9+9x^8}{8!} + ..., x \in R$

3) $\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{2^{(2k+1)}(2k+1)!} = \frac{3}{2.1!} + \frac{7}{2^3.3!} + \frac{11}{2^5.5!} + \frac{15}{2^7.7!} + \frac{19}{2^9.9!} + \frac{23}{2^{11}.11!} + \ ...$

4) $e^{\frac{1}{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(2k+1)+1}{x^{(2k+1)}(2k+1)!} = \frac{x+1}{x^1.1!} + \frac{3x+1}{x^3.3!} + \frac{5x+1}{x^5.5!} + \frac{7x+1}{x^7.7!} + \frac{9x+1}{x^9.9!} + \ ..., x \in R \ \ e \ x \neq 0$

ANEXO 04

O Valor aproximado do Número de Euler com 795 casas decimais[55]

e=2,71828 18284 59045 23536
02874 71352 66249 77572
47093 69995 95749 66967
62772 40766 30353 54759
45713 82178 52516 64274
27466 39193 20030 59921
81741 35966 29043 57290
03342 95260 59563 07381
32328 62794 34907 63233
82988 07531 95251 01901
15738 34187 93070 21540
89149 93488 41675 09244
76146 06680 82264 80016
84774 11853 74234 54424
37107 53907 77449 92069
55170 27618 38606 26133
13845 83000 75204 49338
26560 29760 67371 13200
70932 87091 27443 74704
72306 96977 20930 14169
28368 19025 51510 86574
63772 11125 23897 84425
05695 36967 70785 44996
99679 46864 45490 59879
31636 88923 00987 93127
73617 82154 24999 22957
63514 82208 26989 51936
68033 18252 88693 98496
46510 58209 39239 82948
87933 20362 50944 31173
01238 19706 84161 40397
01983 76793 20683 28237
64648 04295 31180 23287
82509 81945 58153 01756
71736 13320 69811 25099
61818 81593 04169 03515
98888 51934 58072 73866
73858 94228 79228 49989
20868 05825 74927 96104
84198 44436 34632 ...

[55] Fonte: http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil