

Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Hierarquia NLS: Aspectos Algébricos,
funções-Tau e Soluções Sólitons

MAX JOSÉ BOTELHO FERREIRA DA SILVA

Orientador:

PROF. DR. HAROLD SÓCRATES BLAS ACHIC

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Mato Grosso, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

UFMT - Cuiabá, Março 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Aos meus pais
Terezinha e Lousite,
e aos meus irmãos
Marden e Marlon
e aos meus filhos e sobrinha
Klayre, Ian e Maria Eduarda.
Pelo amor recebido. . .

Agradecimentos

A Deus pela vida

A minha Família pelo apoio e convivência

Ao meu Orientador Prof. Dr. Harold Sócrates Blas Achic, pela amizade e dedicação

Ao Prof. Dr. Orizon Pereira Ferreira IME/UFG pelo encorajamento

Aos membros da banca, Prof. Dr. Hector Leny Carrion Salazar, Prof. Dr. Jones Colombo e Prof. Dra. Iraida Cabrero Carnero pela contribuição na melhoria do trabalho

Aos meus amigos Prof. Msc. Eduardo Delmondes, Prof. Msc. Davi Eugênio Taira, Prof. Dr. Jorge Faria(Hulk), Prof. Dr. Luis Alejandro e Luis Fernando pelo apoio nos momentos necessários

A Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Nós discutimos alguns aspectos algébricos da hierarquia integrável da Equação não linear de Schrödinger(NLS). A hierarquia da equação é expressa através da equação de curvatura nula construída usando álgebra de Lie $sl(2)$ e a álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{sl}(2)$. Usando o método de transformação “dressing” e o formalismo da função-tau, construímos as soluções N-sóliton do sistema NLS. Os elementos da matriz no caso NLS são calculados usando representações de operadores de vértice de homogêneos

Abstract

We discuss some algebraic aspects of the integrable non linear Schrödinger hierarchy. The zero curvatura equation defining this hierarchy is constructed using the Lie algebra $sl(2)$ and the affine Kac-Moody algebra $\widehat{sl}(2)$. Using the dressing transformation method and the tau-function formalism, we construct the N-solitons of the NLS systems. The matrix elements in the case NLS are computed using vertex operator representations of homogeneous type

Sumário

Introdução	2
0.1 Ondas Solitárias	3
0.2 Sóliton	4
1 Noções básicas de Integrabilidade, Par de Lax e Condição de Curvatura Nula	11
1.1 Integrabilidade de um sistema	11
1.2 Par de Lax	14
1.3 Equação de Curvatura Nula	17
2 Formulação algébrica da equação não Linear de Schrödinger(NLS)	19
2.1 Formulação algébrica tomando relações em termos de uma Álgebra de Lie . .	20
2.2 Formulação algébrica da equação NLS em termos da Álgebra de Kac-Moody	22
3 Transformações “dressing”	25
3.1 Relações entre Soluções de Vácuo e Transformações “dressing”	26
3.2 Transformações “dressing”, funções tau	29
3.2.1 Funções tau	30
4 Soluções Sóliton	33
4.1 Funções tau	38
4.2 Primeira solução não trivial	40
4.3 Solução 1-sóliton	43

4.4	Solução 2-sólitons	46
4.5	Soluções N-sóliton	51
5	Conclusão	57
	Apêndice	59
A	Grupos, Grupos de Lie, Álgebras de Lie e subálgebras de Lie e Álgebras de Lie semi-simples	59
A.0.1	Grupos, Grupos de Lie	59
A.0.2	Álgebras de Lie e subálgebras	60
A.0.3	Álgebras de Lie semi-simples	61
B	Álgebras de Kac-Moody afim	64
C	Construção dos “operadores de vértice”	70
C.1	Cálculo usando “operadores de vértice” homogêneos	74
D	Elementos de matriz usando “operadores de vértice” homogêneos de $\widehat{sl}(2)$	77
D.1	Cálculo de componentes matriciais usados na construção de 1-sóliton, 2-sóliton do sistema NLS	79
	Bibliografia	81

Lista de Figuras

1	Colisão entre dois sólitons de <i>Sine-Gordon</i>	5
2	Pororoca do Rio Amazonas	6
4.1	Bright sólito (envelope), $u(x, t) = \psi^\pm(x, it) $	46
4.2	Colisão de dois sólitons.	51

Introdução

O objetivo central deste trabalho é encontrar as soluções de classes **1-sóliton**, **2-sóliton**, e conseqüentemente as de **N-sóliton** para a hierarquia de uma equação diferencial parcial não linear, especificamente a **Equação Não Linear de Schrödinger (NLS)**. A equação **NLS** recebeu o nome em homenagem a *Erwin Schrödinger*, porque quando re-interpretamos o termo não linear, a equação volta ser a *Equação de Schrödinger* da teoria quântica, mas com o potencial sendo uma função do módulo da função de onda. Neste trabalho como o centro dos debates, está baseado em ondas, será de bastante importância definirmos estas, apenas para não nos perdemos na contextualização porém sem nos aprofundarmos.

Definição 0.1. *Um distúrbio que se propaga através de um determinado meio, definimos como pulso de onda ou simplesmente onda.*

Quanto à natureza, como exemplo de ondas podemos ter as ondas mecânicas ou eletromagnéticas. Ondas mecânicas, precisam do meio material para se propagar, não se propagam no vácuo, como exemplos podemos citar ondas sonoras, ondas que se propagam numa corda, etc. Onda eletromagnética, não precisa de um meio natural para se propagar, isto é, ondas de rádio e todos os tipos de luz.

Quanto às direções de propagação e vibração, estas podem ser longitudinais (caso das ondas sonoras), e transversais (caso da luz, pois os campos elétricos e magnéticos são perpendiculares à direção de propagação).

Quanto à dimensão espacial podemos ter ondas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

A equação de onda mais simples que existe é dada por $\varphi_t + v\varphi_x = 0$, onde v é uma

constante (identificada como a velocidade). Ela descreve a propagação de uma perturbação $u(x, t)$ após um tempo t em um ponto x da reta.

Com um breve comentário feito sobre ondas, falaremos a respeito das **ondas viajantes**, ondas estas que no campo das equações diferenciais parciais em $1 + 1$ dimensões dependem somente da expressão $(x - vt)$, isto é, a solução é dada por.

$$\varphi(x - vt),$$

sendo que φ é uma função que descreve a perturbação em $t = 0$ e a presença $x - vt$ indica uma translação para a direita do perfil descrito por φ com velocidade v .

0.1 Ondas Solitárias

“Este é um fenômeno belíssimo e extraordinário: Quando o vi pela primeira vez foi o dia mais feliz de minha vida. Nunca tinha tido a sorte de observá-lo antes, ou, pelo menos, entender seu significado. Hoje em dia é conhecido como *onda solitária de translação*. Ninguém até então tinha imaginado uma **onda solitária** como algo possível. (...) É isto que uma elevação de água faz: ela permanece onde está, mais viaja a grande distância”. Estas foram as palavras do engenheiro naval britânico **John Scott Russel**, ao descobrir a *onda solitária* em 1834, *Russel* observava uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal de *Eddinburgh-Glasgow* quando de repente, a embarcação parou. A massa d’água arrastada, no entanto, continuou. *Russel* perseguiu-a à galope com velocidade constante de cerca de quinze quilômetros por hora, por mais de três quilômetros. Seu interesse nesta estranha onda que não mudava forma por uma razoável distância não se esgotou no dia da descoberta, ele fez uma série de experimentos, descobrindo como as produzir “em série”, estes não iremos citá-los aqui, para um maior aprofundamento no assunto consulte a referência [21]. Com as tentativas de investigações junto a *onda solitária* apareceram os *sólitons*.

0.2 Sóliton

A palavra *sóliton* foi escrita por **M. Kruskal** ao estudar soluções periódicas da equação de *Korteweg-de Vries* (*Kdv*). Com este termo fundiu-se o conceito de **onda solitária**, com a terminação *on*, radical designando partícula (tais como elétron, fóton, etc). *Sóliton* se define como a solução de uma equação diferencial não-linear parcial que apresenta as seguintes características, isto é, representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $\varphi(x - vt)$ onde v é uma constante real, é localizada, isto é, $\varphi(\xi) \rightarrow 0$ assim com todas suas derivadas, quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, mantém sua identidade mesmo após interação com outros sólitons, sendo que neste caso tem um comportamento de *partícula*, como sugere seu nome. Antes da colisão, cada onda move-se com velocidades diferentes. Aparenta que na colisão, elas repelem-se ou atraem-se, entretanto, elas passam uma através da outra, sem variar sua velocidade e forma, como mostrado na Figura (1)[5].

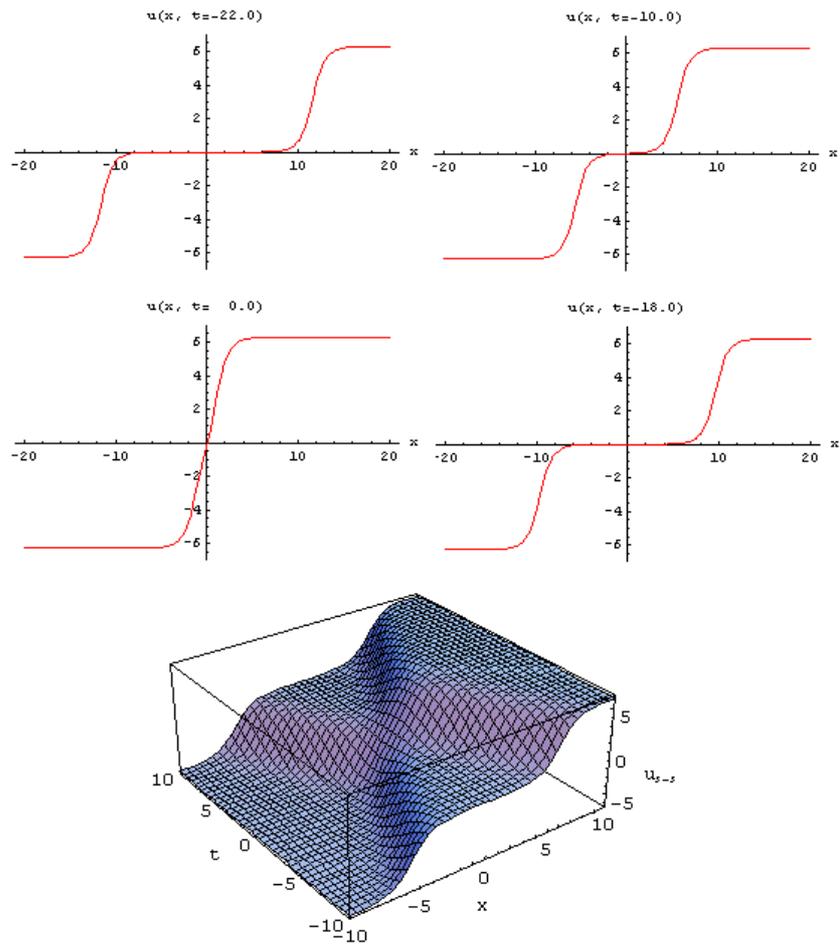


Figura 1: Colisão entre dois sólitons de *Sine-Gordon*.

Como exemplo de sólitons podemos citar aqueles observados na natureza, isto é, o da pororoca no rio Amazonas, Figura (2)[4], que ocorre quando, devido a peculiaridades com a maré, a água do mar invade o rio, se propagando por alguns quilômetros do mar foz à dentro. Na dinâmica os sólitons podem aparecer em propagação de ondas em águas



Figura 2: Pororoca do Rio Amazonas

profundas, outro exemplo seria produzir sólitons mecânicos em laboratório, estes são aqueles modelos que podem acoplar pêndulos de torção por molas, temos também os aplicados na biofísica, onde estes serão dados pela propagação do pulso, isto é, no punho ou no pescoço, a batida do coração se propaga podendo ser sentida a distância. Historicamente a primeira equação descoberta com solução sóliton, foi a equação de Kortweg-de Vries(KdV), no ano de 1895, isto é

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

As soluções desta equação foram expressas em termos de funções elípticas. Notemos que tanto KdV como outros sistemas integráveis têm se manifestado sobre várias áreas, entre elas da matemática pura, física teórica e áreas afins. Notamos que as equações ordinárias, geometria algébrica, teoria de grupos de Lie e geometria diferencial têm sofrido influências dos diferentes métodos em resolver KdV. Foram também encontradas relações em teoria quântica de campos, teoria de cordas e de campos conforme e relatividade geral. Como este temos também, outros sistemas não lineares já conhecidos, ou seja, sistemas não lineares de **Schrödinger (NLS)** e de **sine-Gordon(SG)**.

Note que é importante mencionarmos aqui, o fato que se identifica como grandeza conservada. Por exemplo, na equação de KdV temos a grandeza onde a massa não se altera, ou seja

temos uma expressão para a conservação da massa. Podemos procurar por outras grandezas, em particular associadas a outras entidades físicas, tais como a associada ao *momentum* e também a *energia*.

Em 1968 com bastante esforço, *Miura, Gardner e Kruskal* [21] encontraram mais oito leis de conservação independentes totalizando onze, isto é, somado com *massa, momentum* e *energia*, estes anunciados anteriormente. Mas com o passar do tempo, mostrou-se que existem muito mais leis de conservações para a KdV, possuindo até um infinito número de leis de conservação, além disto, esta característica é compartilhada com número bem grande de equações diferenciais (estas recebem o nome de sistemas integráveis). Podemos escrever uma equação diferencial parcial não linear de formas completamente diferentes. Então uma equação integrável nunca vem só, mas sim acompanhadas de **parentes**. Estes formam um conjunto infinito de equações diferenciais parciais que são genericamente chamados de **hierarquia**, ou se preferir **família**. No nosso caso construiremos a hierarquia da **NLS**, mostrando em seguida que uma série de propriedade desta pode ser obtida de uma única vez. Em 1970, **Zakharov e Shabat (ZS)** mostraram que a **Equação Não Linear de Schrödinger (NLS)**

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + 2g|\Psi|^2\Psi,$$

admitia o método de encontrar soluções, conhecido como o método inverso à dispersão (IST)² [16] com o operador L dado pelo sistema de primeira ordem.

$$L = i\frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{d}{dx} - \sqrt{g} \begin{bmatrix} 0 & \Psi^* \\ \Psi & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação **NLS** pode ser obtida da equação de Lax,

$$\partial_t L = [B_2, L],$$

onde B_1 e B_2 são definidas por:

$$B_1 = i\frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot -\sqrt{g} \begin{bmatrix} 0 & \Psi^* \\ \Psi & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \partial_x + B_1,$$

e

$$B_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\Psi^+\Psi^- & \lambda\Psi^+ + \partial_x\Psi^+ \\ \lambda\Psi^- - \partial_x\Psi^- & -\lambda^2 + 2\Psi^+\Psi^- \end{bmatrix}.$$

²(descoberto durante o estudo do sistema KdV por Gardner, Green, Kruskal e Miura

Esta equação exibe no caso unidimensional, uma propriedade matemática importante, ela tem no seu contexto uma simetria algébrica, resultado pelo qual esta equação pode ser integrável.

O modelo **NLS** é também conhecido por descrever transições lentas não lineares de trem de ondas em ondas de água ou ótica não linear [8]. A equação **NLS** é mais simples que a equação de KdV. Note que o problema linear auxiliar para **NLS** (problema de valores próprios para o operador Lax L) é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem de classe geral, o formalismo hamiltoniano para a equação de **NLS** é mais simples e direto.

Após os trabalhos de **ZS** e **Ablowitz, Kaup, Newell e Segier (AKNS)**, foram revelados um grande conjunto de sistemas integráveis. Logo se estabeleceu uma urgência quase natural em estabelecer um esquema de unificação para agrupar sistemas integráveis da mesma classe. Isto é realizado através da equivalência de “gauge”.

No trabalho de **Drinfel’d** e **Sokolov** [18] surgiu uma classificação geral dos sistemas integráveis conhecidas. Esta se baseia na condição de **Curvatura Nula** ou **método de Lax**, como consequência a integrabilidade se manifesta, onde a construção se baseia nos campos de “gauge”, na álgebra de “Loop”³ de uma álgebra de Lie finita. Notemos em particular que a construção envolve a subálgebra de Heisenberg.

Entretanto, há maneiras diferentes da condição de **curvatura nula** para se descobrir hierarquias integráveis. Uma das formas mais extraordinária se manifesta com o trabalho de **R. Hirota** que, descobriu um método para se construir diretamente vários tipos das hierarquias, em particular a de classe múltiplos-sólitons. Este recebe o nome de método das “**funções-tau**” ou método de **Hirota**, onde estes estudos foram liderados pela escola japonesa.

O processo se baseia em encontrar um novo conjunto de variáveis chamadas “funções-tau”, onde estas satisfazem a um novo tipo de equações bilineares conhecidas como equações de **Hirota**.

Citemos por exemplo a função tau da equação KdV, esta tem a fórmula,

³Esta álgebra é definida no apêndice B

$$u = 2\partial_{xx} \ln \tau,$$

a correspondente para a equação modificada $v_t = v_{xxx} - 6v^2v_x$, tem a relação,

$$v = \partial_x \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \right),$$

neste caso havendo duas funções tau. As soluções de classe multi-sóliton são encontradas considerando a expansão em séries truncadas de τ em algum parâmetro qualquer ϵ , isto é,

$$\tau = 1 + \epsilon\tau^{(1)} + \dots + \epsilon\tau^{(n)}.$$

Logo este método não apenas se solidificou como método em obter soluções mas propôs uma descoberta profunda nas estruturas das hierarquias integráveis.

Kac e Wakimoto [19] construíram hierarquias integráveis diretamente na forma de Hirota associadas as representações do tipo geradores de vértice das álgebras de Kac-Moody, então estas funções-tau descrevem a órbita do vetor de peso mais alto de uma representação sob o grupo correspondente de Kac-Moody.

A dissertação foi organizada da uma maneira geral para se motivar o estudo em resoluções implicando em encontrar soluções de classe sóliton: No *capítulo 1* estão enfatizadas definições e conceitos básicos de integrabilidade, Par de Lax e Equação de Curvatura Nula. Por conseguinte explicitando exemplos de alguns temas com os quais nos levam a uma rápida interação com os pontos citados.

No *capítulo 2* usamos as álgebras, tanto de Lie como a de Kac-Moody para deduzirmos a hierarquia da **Equação não linear de Schrödinger (NLS)**, ou seja a formulação algébrica desta equação. Apresentamos neste a Álgebra de Lie em particular o caso $sl(2)$, e a Álgebra de Kac-Moody em específico a $\widehat{sl}(2)$ e como conseqüência as equações que fazem parte da hierarquia correspondente. Na formulação de Kac-Moody foram introduzidos dois campos auxiliares ν_1 e ν_2 na direção do termo central de $\widehat{sl}(2)$

No *capítulo 3* discutiremos as transformações “dressing”, com o objetivo de definir as funções-tau, de muita importância neste trabalho, pois determinarão as soluções por nós procuradas. Esta transformação fornece uma relação entre os campos do modelo e as chamadas

funções-tau. Em seguida estabelecemos as relações entre as *soluções de vácuo* e os *potenciais* correspondentes do par de Lax. Usando a *solução de vácuo* efetuamos a transformação “ *dressing* ” para obter novas soluções. Expressamos as funções-tau em termos dos elementos de matriz nos pesos mais altos da representação homogênea da álgebra $\widehat{sl}(2)$.

No *capítulo 4* com as aplicações dos três temas anteriores, encontramos a soluções de classe sóliton, $1, 2, \dots, N$ para o caso da álgebra $\widehat{sl}(2)$. Na última seção temos a conclusão onde comentamos os pontos mais importantes do trabalho.

Também foram incluídos neste trabalho alguns Apêndices de conteúdo matemático nos quais são enfatizados os temas que interagem nas determinações dos resultados aqui estabelecidos:

Apêndice A: Grupos, Álgebras de Lie semi-simples

Apêndice B: Álgebras de Kac-Moody

Apêndice C: Construção de “Operadores de vértice” levando em consideração a subálgebra de **Heisenberg** homogênea. Através dos cálculos com “operadores de vértice” homogêneos deduziremos uma fórmula para se calcular os elementos de matriz.

Apêndice D: Cálculo de elementos de Matriz usando “operadores de vértice” homogêneos. Usando o (Apêndice C) será feita o cálculo das componentes matriciais para a construção das soluções *1-sóliton*, *2-sóliton* e *N-sóliton* da equação **NLS**

Capítulo 1

Noções básicas de Integrabilidade, Par de Lax e Condição de Curvatura Nula

Neste capítulo definiremos certos conceitos básicos, de Integrabilidade, Par de Lax e a Condição de Curvatura Nula. Observamos que apesar das diferenças explícitas destes, há uma forte correspondência entre eles no objetivo de se resolver, isto é encontrar soluções para qualquer sistemas de equações não lineares integráveis.

1.1 Integrabilidade de um sistema

A integrabilidade de um sistema mecânico nos proporciona à possibilidade de encontrarmos soluções para suas equações de movimento, ou hierarquias do sistema dado.

Exemplo 1.1. *Se tomarmos o caso de um sistema conservativo unidimensional, o fato da energia ser constante nos permite escrever as soluções de uma equação de movimento na forma:*

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\delta}{\sqrt{E - V(\delta)}} \quad (1.1)$$

Podemos encontrar $x(t)$ por uma inversão, note que se caso tomarmos o problema de uma partícula em movimento unidimensional sob a ação de uma força conservativa, logo o resultado deste será dado por uma quadratura. O significado de se resolver um problema

usando quadraturas está em exprimir a solução deste em termos de integrais das funções já conhecidas. Antes de continuarmos definiremos um importante argumento. Note que podemos dar uma definição para uma operação entre funções que satisfaz bilinearidade, antisimetria e a identidade de jacobí, isto é, prover de uma estrutura da álgebra de Lie o conjunto das funções hamiltonianas. Seja então o Colchete de Poisson definido da seguinte maneira.

Definição 1.2. *No contexto da dissertação definiremos colchetes de Poisson em uma variedade M como uma aplicação bilinear,*

$$\{.,.\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M).$$

onde $C^\infty(M)$ é o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis em M , que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\{g,f\} = -\{f,g\}$ ou seja a aplicação é antisimétrica
- $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$ onde $\{.h\}$ é uma derivação, isto é, obedece à regra de Leibniz,
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ a qual é conhecida como identidade de Jacobi.

Podemos também exibir em coordenadas canônicas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, o qual é equivalente a,

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

salientando que na mecânica clássica e por conseguinte na mecânica quântica a noção de Poisson foi fundamental nos seu desenvolvimentos

Definição 1.3. *As variáveis $F_i(q,p), \dots, F_m(q,p)$ estão em involução se o parentes de Poisson de qualquer um deles é zero, isto é,*

$$\{F_k, F_l\} = 0, \quad k, l = 1, \dots, m.$$

Logo a integrabilidade de um sistema com n graus de liberdade estará claramente associada à existência de constantes de movimento em involução. *Poisson* em 1837 e *Liouville* em 1840 demonstraram que se um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade possui duas constantes de movimento independentes em involução, então suas equações de movimento serão resolvidas por quadraturas.

Lema 1.4. *Se um sistema hamiltoniano conservativo com n graus de liberdade admite n constantes de movimento em involução $F_1(q, p), \dots, F_m(q, p)$ e a matriz com elementos $A_{kl} = \frac{\partial F_k}{\partial p_l}$ é não singular, então existem variáveis canônicas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, J_1, \dots, J_n)$ tais que $H = H(J_1, \dots, j_n)$.*

Demonstração. Ver [12]. □

A definição a seguir é dada segundo Liouville-Arnold.

Definição 1.5. *Um sistema hamiltoniano conservativo com n graus de liberdade e a hamiltoniana $H(q, p)$ é dito completamente integrável ou, simplesmente integrável se existem n constantes de movimento independente em involução, isto é,*

- a) $\{F_i, H\} = 0$
- b) $\{F_i, F_j\} = 0$
- c) *Os vetores $(\frac{\partial}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n})F_i$ são linearmente independentes LI em cada ponto do espaço de fase.*

Então com isso podemos enunciar o teorema que foi generalizado por Liouville em 1855 e no século XX enriquecido pela contribuição de Arnold.

Teorema 1.6. *Teorema de Liouville-Arnold.*

Considere um sistema hamiltoniano integrável com n graus de liberdade então,

a) *Existem variáveis canônicas $(x_1, x_2, \dots, x_n, j_1, \dots, j_n)$ tais que $H = H(j_1, \dots, j_n)$ de modo que a solução de equações de movimento nas suas variáveis é.*

$$j_k = \text{Cte}, \quad x_k = x_k(0) + w_k t, \quad k = 1, \dots, n \text{ onde cada } w_k = \frac{\partial H}{\partial j_k} \text{ é constante.}$$

b) As equações de Hamilton nas variáveis (q, p) podem ser resolvidas por quadraturas.

c) Se o conjunto das hipersuperfícies de nível das constantes de movimento F_k definido por

$$Mc = \{(q, p) : F_k(q, p) = c_k, \quad k = 1, \dots, n\}$$

é compacto e conexo, as variáveis canônicas (j, x) podem ser escolhidas como variáveis de ação-ângulo e o movimento é multiperíodico com frequência $w_k = \frac{\partial H}{\partial j_k}$

Demonstração. Ver [12]

□

1.2 Par de Lax

Existem uma grande quantidade de estudos na literatura abordando os Pares de Lax.

Definição 1.7. Um par de Lax para um campo vetorial $\dot{x} = f(x)$ é um par ordenado não constante de matrizes (L, M) tal que,

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] \quad (1.2)$$

Note que a equação de Lax descreve transformações de matrizes semelhantes de $L(t)$, isto é,

$$L(t) \mapsto U(t)L_0U(t)^{-1}. \quad (1.3)$$

Seja a solução da equação de Lax $F(t) = U(t)L_0U(t)^{-1}$, então,

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \dot{U}(t)L_0U(t)^{-1} + U(t)L_0(-U(t)^{-1}\dot{U}(t)U(t)^{-1}) \\ &= \dot{U}(t)L_0U(t)^{-1} - U(t)L_0U(t)^{-1}\dot{U}(t)U(t)^{-1} \\ &= \dot{U}(t)U(t)^{-1}(U(t)L_0U(t)^{-1}) - (U(t)L_0U(t)^{-1})\dot{U}(t)U(t)^{-1} \\ &= \dot{U}(t)U(t)^{-1}L(t) - L(t)\dot{U}(t)U(t)^{-1} \\ &= [L(t), -\dot{U}(t)U(t)^{-1}] \end{aligned}$$

Observação 1.8. Na expressão que operamos anteriormente temos $M = -\dot{U}(t)U(t)^{-1}$.

Podemos compreender melhor, tomando a análise de uma questão correspondente para o caso linear, então, tome uma equação de evolução linear descrito por uma hamiltoniana H independente do tempo, logo em seguida construímos operadores na expectativa de transformar termos com o tempo. Tome L como operador respeitando esta propriedade, então a forma de Heisenberg, $L(t)$ unitária é semelhante a L_0 , isto é:

$$L(t) = U(t)L_0U(t)^{-1} \iff L_0 = U(t)^{-1}L(t)U(t)$$

onde $U(t)$ é a evolução do tempo com forma $U(t) = \exp(-iHt)$.

Exemplo 1.9. Note que a equação do Oscilador harmônico simples é:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \text{tais que} \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y'_0,$$

A solução deste problema é:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (1.4)$$

Em seguida tomando o sistema de equações de primeira ordem $\dot{q} = p$, $\dot{p} = -\omega^2 q$ teremos então o Par de Lax procurado L e M onde

$$L = \begin{bmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

onde vale a identidade

$$\frac{dL}{dt} - [M, L] = 0$$

esta equação diferencial é equivalente a,

$$\begin{bmatrix} \dot{p} & \omega \dot{q} \\ \omega \dot{q} & -\dot{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 q & \omega p \\ \omega p & \omega^2 p \end{bmatrix} = 0$$

e ainda,

$$H(q, p) = \frac{1}{4} \text{tr}(L^2).$$

Sendo este sistema integrável então,

$$L(t) = U(t)L_0U(t)^{-1} \quad (1.5)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = MU(t) \quad U(0) = I$$

Logo a solução particular do Par de Lax desta é,

$$U(t) = e^{Mt}U(0)$$

$$L(t) = e^{Mt}L_0e^{-Mt}$$

e a matriz exponencial é dada por

$$e^{Mt} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\omega t}{2} & -\text{sen}\frac{\omega t}{2} \\ \text{sen}\frac{\omega t}{2} & \cos\frac{\omega t}{2} \end{bmatrix}.$$

então por 1.5 temos a seguinte matriz,

$$L = \begin{bmatrix} p_0 \cos \omega t - \omega q_0 \sin \omega t & p_0 \sin \omega t + \omega q_0 \cos \omega t \\ p_0 \sin \omega t + \omega q_0 \cos \omega t & -p_0 \cos \omega t + \omega q_0 \sin \omega t \end{bmatrix},$$

por (1.3) temos a solução (1.4).

Observação 1.10. *O exemplo 1.9 tem um grau elevado da importância que o descreve, este se baseia no ato de oscilar de um lado para o outro. A natureza apresenta inúmeros exemplos de movimentos periódicos, entre eles o movimento da terra e de outros planetas em torno do sol, o movimento de um pêndulo, com característica bem marcante, pois não depende da amplitude, o período permanece o mesmo tanto para grande amplitudes como para pequenas, então essa independência do período para com a amplitude torna o oscilador harmônico ideal para servir na construção de relógios, entre estas temos várias outras aplicações.*

Exemplo 1.11.

$$\dot{u}_1 = u_1(u_2 - u_3)$$

$$\dot{u}_2 = u_2(u_3 - u_1)$$

$$\dot{u}_3 = u_3(u_1 - u_2)$$

na tentativa de se determinar um Par de Lax compatível com o sistema, logo se encontrou as seguintes matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & u_1 \\ u_2 & 0 & 1 \\ 1 & u_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & 0 & 1 \\ 1 & u_2 + u_3 & 0 \\ 0 & 1 & u_3 + u_1 \end{bmatrix}.$$

Estes exemplos nos apresentam o fato de se apresentarem como Par de Lax, eles possibilitam determinar as primeiras integrais, nos proporcionando uma noção de integrabilidade. Combinando representações Lax com sistemas integráveis, nós podemos apresentar um resultado importante. Suponha que encontramos de qualquer maneira uma equação de Lax, onde esta vem ser equivalente para o seu sistema, então com isso teremos um Par de Lax completo, construindo um sistema integrável. Note que, para estas equações serem satisfeitas, os operadores associados no caso L e M devem ter um raio espectral α que tem o papel de valor próprio, este satisfazendo a relação $\partial_t \alpha = 0$. Por conseguinte enunciamos a proposição.

Proposição 1.12. *Os autovalores de L são constantes de movimento.*

Demonstração. Tome o sistema

$$L\Psi = \alpha\Psi \tag{1.6}$$

$$M\Psi = \Psi_t \tag{1.7}$$

onde pela relação de Lax $\dot{L} = [M, L]$ temos,

$$\begin{aligned} \dot{L}\Psi + L\dot{\Psi} &= \dot{\alpha}\Psi + \alpha\dot{\Psi} \\ [M, L]\Psi + LM\Psi &= \dot{\alpha}\Psi + \alpha\dot{\Psi} \\ ML\Psi - LM\Psi + LM\Psi &= \dot{\alpha}\Psi + \alpha M\Psi \\ \alpha M\Psi &= \dot{\alpha}\Psi + \alpha M\Psi \\ \alpha &= cte \end{aligned}$$

□

1.3 Equação de Curvatura Nula

No entanto para usar as definições [1.2, 1.3, 1.5], o lema [1.4] e o teorema [1.6] dos sistemas integráveis de um número finito de graus de liberdade, apresentados acima, nos sistemas de infinitos graus de liberdade devemos reformular a apresentação do par de Lax e a equação

de Lax (1.2). No caso de sistemas com infinitos graus de liberdade estamos diante de um problema de teoria de campos. Portanto a introdução de coordenadas espaciais além da coordenada temporal é necessária e a reformulação da equação de Lax deve levar em conta este fato.

Na busca de uma alternativa, *Ablowitz, Kaup, Newell e Segier*(AKNS)(1974) propuseram uma técnica, a qual relatamos a seguir na sua formulação geral. Tome duas equações lineares,

$$\Psi_x = U\Psi \quad (1.8)$$

$$\Psi_t = V\Psi \quad (1.9)$$

estas equações (1.8) e (1.9) formam um sistema compreendido de Ψ que é um vetor n -dimensional e $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ contendo os campos do modelo. Então a condição de compatibilidade deste sistema, determina a seguinte equação:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \quad (1.10)$$

A qual chamamos de representação de **Curvatura Nula**, ou **Equação de Curvatura Nula** de um sistema não linear de equações, a qual pode ser aplicada a teoria de campos.

Comentamos que muitas das propriedades de sistemas integráveis finitos apresentados acima: equação de Lax, número de quantidades conservadas igual ao número de graus de liberdade, involução destas quantidades conservadas, etc, têm a sua versão em sistemas de infinitos graus de liberdade. Por exemplo, no caso de sistemas de infinitos graus de liberdade, a teoria de campos como o sistema de Schrödinger não-linear, esperamos infinitas quantidades conservadas. Na seguinte seção apresentaremos a formulação de Lax deste sistema.

Capítulo 2

Formulação algébrica da equação não Linear de Schrödinger(NLS)

Neste capítulo trataremos de discutir a obtenção da **Equação não linear de Schrödinger (NLS)**, ou seja, uma formulação algébrica, no que diz respeito a uma álgebra finita e outra infinita, para isso definiremos uma álgebra de Lie, e por conseguinte uma álgebra de Kac-Moody na base de Weyl-Cartan. Usaremos o caráter de integrabilidade e condição de curvatura nula debatido no capítulo anterior, para a construção da hierarquia da **NLS**. No caso da álgebra finita $sl(2)$, a equação de curvatura nula correspondente fornece o sistema **NLS** usual, (2.1). Estendemos a formulação usando a álgebra infinita $\widehat{sl}(2)$ (Kac-Moody), nesta formulação introduzimos dois campos auxiliares ν_1 e ν_2 , os quais definem-se na direção do termo central C da álgebra. Além disso observamos o aparecimento de infinitas equações de hierarquias **NLS**. Para uma parametrização, as equações **NLS** são,

$$i\partial_t\Psi + \partial_{xx}\Psi \mp 2|\Psi|^2\Psi = 0, \quad (2.1)$$

a quais têm importantes aplicações em áreas como a **Física do Plasma** e a **Ótica não linear**.

2.1 Formulação algébrica tomando relações em termos de uma Álgebra de Lie

Considere o espaço vetorial V de todas as matrizes $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, auto-adjuntas com traço zero e produto interno de Cartan definido como $\langle AB \rangle = \text{tr}(AB)$. Tomemos duas matrizes da forma

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_{(x,t)} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi^+ \\ \Psi^- & 0 \end{bmatrix}.$$

Definimos o seguinte sistema de equações

$$\partial_x \Phi + i\alpha A_3 \Phi = Q\Phi, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.2)$$

$$\partial_t \Phi + 2i\alpha^2 A_3 \Phi = (2\alpha Q - i\partial_x Q A_3 - i|\Psi|^2 A_3)\Phi \quad (2.3)$$

Percebemos pela equação (2.2) a relação a seguir.

$$\partial_x \Phi = \left(\begin{bmatrix} 0 & \Psi^+ \\ \Psi^- & 0 \end{bmatrix} - i\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \Phi. \quad (2.4)$$

Logo apartir da equação (2.3) encontramos a expressão seguinte:

$$\partial_t \Phi = \left(2\alpha \begin{bmatrix} 0 & \Psi^+ \\ \Psi^- & 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 & -\Psi_x^+(x,t) \\ \Psi_x^-(x,t) & 0 \end{bmatrix} - i|\Psi|^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2i\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Phi. \quad (2.5)$$

Definindo as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} -i\alpha & \Psi_{(x,t)}^+ \\ \Psi_{(x,t)}^- & i\alpha \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} -i|\Psi(x,t)|^2 - 2i\alpha^2 & 2\alpha\Psi + i\Psi_x(x,t) \\ 2\Psi^-(x,t) - i\Psi_x^-(x,t) & i|\Psi(x,t)|^2 + 2i\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

as equações (2.4) e (2.5) podem ser escritos na forma compacta

$$\begin{cases} \partial_x \Phi = M\Phi \\ \partial_t \Phi = N\Phi \end{cases} \quad (2.7)$$

Então como Φ são funções diferenciáveis, logo por conseguinte temos que a identidade posterior se torna verdadeira.

$$\partial_t M\Phi + M\partial_t \Phi = \partial_x N\Phi + N\partial_x \Phi \quad (2.8)$$

e portanto se transforma em:

$$\partial_t M \Phi + MN \Phi = \partial_x N \Phi + NM \Phi \quad (2.9)$$

$$(\partial_t M + MN - \partial_x N - NM) \Phi = 0 \quad (2.10)$$

$$\partial_t M - \partial_x N + [M, N] = 0. \quad (2.11)$$

A expressão (2.11) recebe o nome de **Equação de Curvatura Nula** ou **Equação de Lax**.
A nossa proposta é escrever as matrizes M e N em termos da álgebra $sl(2)$

$$[A_3, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = 2A_3. \quad (2.12)$$

Sendo que E_{\pm} está definido no *Apêndice D*.

Então escrevendo a matriz M como combinação linear dos geradores temos,

$$M = \Psi^+(x, t)E_+ + \Psi^-(x, t)E_- - i\alpha A_3 \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned} N = & -i|\Psi(x, t)|^2 A_3 - 2i\alpha^2 A_3 + 2\alpha\Psi^-(x, t)E_- \\ & + 2\alpha\Psi^+(x, t)E_+ - i\Psi_x^-(x, t)E_- + i\Psi_x^+(x, t)E_+. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo M e N em (2.11) temos

$$\begin{aligned} & \Psi_t^+(x, t)E_+ + \Psi_t^-(x, t)E_- - (-i|\Psi(x, t)|_x^2 A_3 + 2\alpha\Psi^-(x, t)E_- \\ & + 2\alpha\Psi_x^+(x, t)E_+ - i\Psi_{xx}^-(x, t)E_- + i\Psi_x^+(x, t)E_+) \\ & + 2i\Psi^+(x, t)\Psi_x^-(x, t)A_3 - 2i\Psi^-(x, t)|\Psi(x, t)|^2 E_- \\ & - i\Psi^-(x, t)\Psi_x^+(x, t)A_3 + 2\alpha\Psi_x^-(x, t)E_- + 2\alpha\Psi_x^+(x, t)E_+ = 0 \quad , \end{aligned}$$

logo agrupando termos

$$\begin{aligned} & (\Psi_t^+(x, t) - 2\alpha\Psi_x^-(x, t) - i\Psi_{xx}^+(x, t) + 2i\Psi^+(x, t)|\Psi(x, t)|^2 + 2\alpha\Psi_x^-(x, t))E_+ \\ & + (\Psi_t^-(x, t) - 2\alpha\Psi_x^+(x, t) + i\Psi_{xx}^- - 2i\Psi^-(x, t)|\Psi(x, t)|^2 + 2\alpha\Psi_x^+(x, t))E_- \\ & + (i\Psi_x^+(x, t)\Psi^-(x, t) + i\Psi^+(x, t)\Psi_x^-(x, t) - i\Psi^+(x, t)\Psi_x^-(x, t) - i\Psi^-(x, t)\Psi_x^+(x, t))A_3 = 0. \end{aligned}$$

Enfim concluímos que as equações do sistema **NLS** tornam-se

$$\Psi_t^+(x, t) - i\Psi_{xx}^+(x, t) + 2i\Psi^+(x, t)|\Psi(x, t)|^2 = 0 \quad (2.15)$$

$$\Psi_t^-(x, t) - i\Psi_{xx}^-(x, t) - 2i\Psi^-(x, t)|\Psi(x, t)|^2 = 0. \quad (2.16)$$

Estas equações formam parte na hierarquia integrável **NLS**. As equações desenvolvidas acima tiveram como objetivo a familiarização com a formulação algébrica que será desenvolvida na seção (2.2). Na seguinte subseção introduziremos a formulação do sistema de equações **NLS** usando a álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$. A motivação para estender esta formulação usando uma álgebra de Kac-Moody é que nesta álgebra temos um desenvolvimento bem sofisticado das representações de peso mais alto, como se encontra na literatura científica [10, 15, 17]. Como esta álgebra inclui um termo central devemos associar a este gerador alguns campos auxiliares nas respectivas conexões de LAX. Este termo central é crucial para se ter uma representação integrável de peso mais alto [15]

2.2 Formulação algébrica da equação NLS em termos da Álgebra de Kac-Moody

Antes de discutirmos esta formulação em questão, por rigor e esclarecimento lembramos que uma álgebra $sl(2)$, é uma álgebra de Lie finita e gerada por $\{H, E_{\pm}\}$, o gerador H é definido no *Apêndice D*. Agora a Álgebra de Kac-Moody, isto é, $\widehat{sl}(2)$ terá um conjunto gerador $\{H^{(m)}, E_{\pm}^{(n)}, C, D\}$ com m e $n \in \mathbb{Z}$. Tomemos então a base de **Weyl-Cartan**, a qual se escreve da seguinte maneira,

$$[H^{(m)}, H^{(n)}] = \frac{n}{2}C\delta_{m+n,0}$$

$$[H^{(n)}, E_{\pm}^{(m)}] = \pm E_{\pm}^{m+n}$$

$$[E_+^{(m)}, E_-^{(n)}] = 2H^{m+n} + mC\delta_{m+n,0} \quad (2.17)$$

A graduação homogênea define-se:

$$[D, T^n] = nT^n, T^n \in \widehat{sl}(2) \quad (2.18)$$

onde D é um operador de graduação. Apresentamos os primeiros potenciais que são:

$$B_1 = H^{(1)} + \Psi^+ E_+^{(0)} + \Psi^- E_-^{(0)} + \nu_1 C \quad (2.19)$$

$$B_2 = H^{(2)} + \Psi^+ E_+^{(1)} + \Psi^- E_-^{(1)} - 2\Psi^+ \Psi^- H^{(0)} + \partial_x \Psi^+ E^{(0)} - \partial_x \Psi^- E_- + \nu_2 C. \quad (2.20)$$

Nestes potenciais são introduzidos dois campos auxiliares ν_1 e ν_2 , sendo estes definidos na direção do termo central C da álgebra, com o objetivo de encontrarmos o resultado procurado. E por conseguinte efetuando operações algébricas se baseando na seguinte notação, ou seja, $t_1 = x$ e $t_2 = t$, com os potenciais B_1 e B_2 denotado por M e N respectivamente, logo em seguida escrevemos a **condição de curvatura nula** para estes potenciais,

$$[\partial_{t_N} - B_N, \partial_x - B_1] = 0 \quad \text{com } N = 1, 2 \quad (2.21)$$

observe que para $N = 1$ nos teremos como resultado a situação trivial, ou seja,

$$[\partial_x - M, \partial_x - M] = 0 \quad (2.22)$$

agora para $N = 2$, encontraremos a seguinte expressão,

$$[\partial_t - N, \partial_x - M] = 0 \quad (2.23)$$

em seguida desenvolvendo (2.23) implica no resultado que se configura como a equação,

$$-\partial_t M + \partial_x N + [N, M] = 0 \quad (2.24)$$

então tomando os potenciais (2.19) e (2.20), com isso aplicando estes em (2.24), teremos

como resultado a relação expressada por,

$$\begin{aligned}
& -\partial_t \Psi^+ E_+^{(0)} - \partial_t \Psi^- E_-^{(0)} - \partial_x \nu_1 C + \partial_x \Psi^+ E_+^{(1)} + \partial_x \Psi^- E_-^{(1)} - 2\partial_x \Psi^+ \Psi^- H^{(0)} + \partial_{xx} \Psi^+ E_+^{(0)} \\
& - \partial_{xx} \Psi^- E_-^{(0)} + \partial_x \nu_2 C + [H^{(2)}, E_+^{(0)}] \Psi^+ + [H^{(2)}, E_-^{(0)}] \Psi^- + \Psi^+ [E_+^{(1)}, H^{(1)}] + \Psi^- [E_+^{(1)}, E_-^{(0)}] \Psi^- \\
& + \Psi^- [E_-^{(1)}, H^{(1)}] + \Psi^- [E_-^{(1)}, E_+^{(0)}] \Psi^+ - 2\Psi^+ \Psi^- [H^{(0)}, E_+^{(0)}] \Psi^+ - 2\Psi^+ \Psi^- [H^{(0)}, E_-^{(0)}] \Psi^- \\
& + \partial_x \Psi^+ [E^{(0)}, H^{(1)}] + \partial_x \Psi^+ [E_+^{(0)}, E_-^{(0)}] \Psi^- - \partial_x \Psi^- [E_-^{(0)}, H^{(1)}] - \partial_x \Psi^- [E_-^{(0)}, E_+^{(0)}] \Psi^+ = 0.
\end{aligned}$$

Note que alguns colchetes e certas diferenciações se anulam na expressão anterior, logo não havendo a necessidade de exibi-los, estes não influenciam nos resultados posteriores. Escrevendo as combinações lineares nas direções dos geradores, e conseqüentemente as expressões que se anulam portanto temos,

$$\begin{aligned}
& (-\partial_t \Psi^+ + \partial_{xx} \Psi^+ - 2(\Psi^+)^2 \Psi^-) E_+^{(0)} + \\
& (-\partial_t \Psi^- - \partial_{xx} \Psi^- + 2\Psi^+ (\Psi^-)^2) E_-^{(0)} \\
& + (-\partial_t \nu_1 + \partial_x \nu_2) C = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

com o fato da equação (2.25) ser linearmente independente, então a formulação algébrica para a **Equação não linear de Schrödinger** em termos de uma Álgebra de Kac-Moody, a qual é representada pelo sistema a seguir:

$$-\partial_t \Psi^+ + \partial_{xx} \Psi^+ - 2(\Psi^+)^2 \Psi^- = 0 \tag{2.26}$$

$$-\partial_t \Psi^- - \partial_{xx} \Psi^- + 2\Psi^+ (\Psi^-)^2 = 0 \tag{2.27}$$

$$-\partial_t \nu_1 + \partial_x \nu_2 = 0 \tag{2.28}$$

Este é o primeiro sistema de equações da hierarquia **NLS**, as outras equações aparecem de,

$$[\partial_{t_N} - B_N, \partial_x - B_1] = 0 \quad N = 3, 4, \dots$$

Capítulo 3

Transformações “dressing”

Tomamos um sistema de equações diferenciais não lineares, onde este admite uma formulação compacta em termos da condição de curvatura nula e definido como.

$$[\partial_\mu - A_\mu, \partial_\nu - A_\nu] = 0 \quad (3.1)$$

Nesta formulação, nota-se que os potenciais de “gauge” A_μ estão definidos sobre uma álgebra de Lie \hat{g} e estes são funcionais dos campos do modelo.

As transformações de “gauge” não locais agem sobre os potenciais A_μ mantendo suas formas e estrutura de gradações. Note que cada uma destas transformações será realizada de dois modos distintos, isto é, realizando operações com dois subgrupos do grupo \hat{G} de \hat{g} , este denotaremos como Φ_+ e Φ_- então,

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^g := \Phi_\pm A_\mu \Phi_\pm^{-1} + \partial_\mu \Phi_\pm \Phi_\pm^{-1} \quad (3.2)$$

onde é fácil de se ver que A_μ satisfaz (3.1), logo este deve ser da forma de “gauge” puro:

$$A_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi \iff A_\mu = \partial_\mu \Psi \Psi^{-1}, \quad (3.3)$$

com a definição (3.2), e usando a igualdade (3.3), isto é,

$$\begin{aligned} A_\mu^g &:= \Phi_\pm (\partial_\mu \Psi \Psi^{-1}) \Phi_\pm^{-1} + \partial_\mu \Phi_\pm \Psi \Psi^{-1} \Phi_\pm^{-1} \\ &= \Phi_\pm (\partial_\mu \Psi) (\Phi_\pm \Psi)^{-1} + \partial_\mu \Phi_\pm \Psi (\Phi_\pm \Psi)^{-1} \\ &= [\partial_\mu \Phi_\pm \Psi + \Phi_\pm \partial_\mu \Psi] (\Phi_\pm \Psi)^{-1}, \end{aligned}$$

o qual implica na equação definida por:

$$A_\mu^g := \partial_\mu(\Phi_\pm \Psi)(\Phi_\pm \Psi)^{-1} \quad (3.4)$$

Então existe um subgrupo constante h de G tal que,

$$\Phi_+ \Psi := \Phi_- \Psi h \iff \Phi_-^{-1} \Phi_+ = \Psi h \Psi^{-1} \quad (3.5)$$

além disso (3.1) mostra-se invariante, pois se $A \longrightarrow A_\mu^g$, onde $\Theta = \Phi_\pm \Psi$ então $[\partial_\mu + A_\mu^g, \partial_\nu + A_\nu^g] = 0$ com $A_\mu^g = \partial_\mu \Theta \Theta^{-1}$ implica em

$$A_\mu^g = \partial_\mu \Phi_\pm \Phi_\pm + \Phi_\pm A_\mu \Phi_\pm^{-1} \quad (3.6)$$

No sentido de se manter invariante tanto o potencial A_μ com a transformação “dressing” se faz necessário que Φ_\pm pertença a dois subgrupos de \widehat{G} , sendo este definido pela forma particular em \widehat{g} , então (3.5) corresponde a relação conjugada $\Psi h \Psi^{-1}$ dentro de tais subgrupos especificados. Portanto observa-se que com uma solução do exemplo definido por $\Psi \subseteq G$ vem a ser um grupo constante $h \subseteq \widehat{G}$, a transformação “dressing” é utilizada para construção de uma nova solução definida por:

$$\Psi^h = \Phi_+ \Psi \quad (3.7)$$

$$= \Phi_- \Psi h \quad (3.8)$$

3.1 Relações entre Soluções de Vácuo e Transformações “dressing”

Notemos que as hierarquias integráveis que podem ser escritas sobre a forma das equações de curvatura nula, estão geralmente representadas em termos das álgebras de Kac-Moody. Tomemos uma álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{g} = \tilde{g} \oplus C \oplus D$ e uma graduação inteira de sua álgebra derivada de g , particularizada pelo vetor $v = (v_0, v_1, \dots, v_s)$ de $s + 1$ primos inteiros relativos e não negativos, esta álgebra de lie g é simples com dimensão s então,

$$\widehat{g} = \oplus \widehat{g}(v), \quad [\widehat{g}_i(v), \widehat{g}_j(v)] \subseteq \widehat{g}_{i+j}(v) \quad \text{com} \quad i, j \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

e por conseguinte tomando uma base graduada $\{e_k\}$ para \widehat{g} , onde $e_k \quad k = 0, 1, \dots, s$ $\in \widehat{g}_k(v)$. As equações destas hierarquias definiremos em termos dos operadores Lax com a seguinte forma,

$$L_{\pm i} = \frac{\partial}{\partial t_i^{\pm}} - A_{\pm}(i) \quad E = \{i \in \mathbb{Z} \geq 0\} \quad (3.10)$$

$$A_{\pm}(i) = \sum_{k=0}^i A_{\pm}^k(i) e_{\pm k} \quad (3.11)$$

no contexto os $A_+(i)$ e $A_-(i)$ estão em funções dos tempos t_j^{\pm} assumindo valores sobre os subespaços.

$$M_+(i) = \widehat{g}_{\geq 0} \cap \widehat{g}_{\leq i(v)} \quad e \quad M_- = \widehat{g}_{\leq 0} \cap \widehat{g}_{\geq -i(v)} \quad (3.12)$$

respectivamente. Então, a hierarquia das equações em questão são definidas pelas condições de curvatura nula, isto é,

$$[L_i, L_j] = 0 \quad E = \{i, j \in \mathbb{Z} \geq 0\} \quad (3.13)$$

Note que estes sistemas por nós exibidos acima mostram-se em uma invariância de “gauge” na forma.

$$L_i \longrightarrow UL_iU^{-1} \quad (3.14)$$

Então segue que uma preservação dos $A_{\pm}(i) \in M_{\pm}(i)$ com U uma função do grupo \widehat{G}_0 formada pela exponenciação da subálgebra de $\dim < \infty \widehat{g}_0(v)$. Estas equações de hierarquias se definem como equações sobre classes de equivalência M_{\pm} sob a transformação de “gauge”.

Paralelo com estas hierarquias integráveis generalizadas, há um problema linear associado ao mesmo, veja,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - A_{\pm}(i) \right] \Psi = 0 \quad E = \{i \in \mathbb{Z} \geq 0\} \quad (3.15)$$

Note que Ψ vem a ser uma função em t_j^{\pm} , e que assume valores no grupo de Kac-Moody $G(v)$ formado pela exponenciação de \widehat{g} . As equações de curvatura nula (3.13) são condições de integrabilidade de (3.15). Portanto,

$$A_{\pm}(i) = \frac{\partial \Psi}{\partial t_i^{\pm}} \Psi^{-1} \quad (3.16)$$

No contexto do problema linear associado, vamos definir um importante conjunto de transformações, estas são identificadas como transformações “dressing”. O objetivo destas é partindo das velhas soluções que satisfazem as hierarquias das equações para as novas soluções das mesmas. Deste passo em diante, trabalharemos com a notação que se segue.

$$\widehat{g}_{<k(v)} = \oplus_{i<k} \widehat{g}_{i(v)} \quad \text{e} \quad \widehat{g}_{>k(v)} = \oplus_{i>k} \widehat{g}_{i(v)}. \quad (3.17)$$

Usando a seguinte notação, isto é, $\widehat{G}_-(v)$, $\widehat{G}_+(v)$ e $\widehat{G}_0(v)$ os subgrupos de \widehat{G} gerados pela exponenciação das subálgebras $\widehat{g} < 0(v)$, $\widehat{g} > 0(v)$ e $\widehat{g}_0(v)$ respectivamente. Estas transformações “dressing” podem ser representadas como segue.

Tome uma solução Ψ do problema linear (3.15), junto com ela um elemento constante h de G , sendo este independente de t^\pm e além disso,

$$\Psi h \Psi^{-1} = (\Psi h \Psi^{-1})_- (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+ \quad (3.18)$$

logo com este podemos salientar a seguinte afirmação, $\Psi h \Psi^{-1}$ admite uma decomposição de Gauss generalizada com relação a graduação v , então Ψ^h se define como:

$$\Psi^h = [(\Psi h \Psi^{-1})_-]^{-1} \Psi \quad (3.19)$$

onde tomando (3.18), temos

$$[(\Psi h \Psi^{-1})_-]^{-1} \Psi h \Psi^{-1} = [(\Psi h \Psi^{-1})_-]^{-1} (\Psi h \Psi^{-1})_- (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+$$

$$[(\Psi h \Psi^{-1})_-]^{-1} \Psi h = (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+ \Psi,$$

o que implica em:

$$\Psi^h = (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+ \Psi^h \quad (3.20)$$

Note que (3.20) vem a ser uma solução do problema linear asociado em questão. Este pode ser fácilmente verificado, mostrando que:

$$A_\pm^h(i) = \frac{\partial \Psi^h}{\partial t_i^\pm} (\Psi^h)^{-1} \in M_\pm \quad (3.21)$$

isso acontece, desde que Ψ seja uma solução de (3.15). Assim temos a transformação, descrita por,

$$\Psi \implies \Psi^h \quad \text{ou} \quad A_{\pm}(i) \implies A_{\pm}^h(i) \quad (3.22)$$

esta recebe o nome de transformação “dressing”. As soluções pertencente as órbitas de algumas soluções triviais sob o grupo de transformações “dressing”, se identificam como soluções no vácuo, e claro para aquelas hierarquias integráveis já conhecidas. A órbita da solução de vácuo sob o grupo de transformação “dressing” pode ser moldada usando as equações (3.20) e (3.21). Como consequência define-se,

$$\Theta^{-1} = (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_- \quad \text{e} \quad B^{-1} = (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_0 \quad (3.23)$$

$$N = (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_+ \quad \text{e} \quad \Omega = B^{-1} N. \quad (3.24)$$

Portanto sob essas transformações “dressing” geradas por h

$$\Psi^{(vac)} \implies \Psi^h = \Theta \Psi^{(vac)} = \Omega \Psi^{(vac)} h^{-1} \quad (3.25)$$

onde estes podemos equivamente, expressar os potenciais $A_{\pm}^{(vac)}$ da seguinte forma:

$$A_+^h(i) = \Theta A_+^{(vac)}(i) \Theta^{-1} + \partial_i^+ \Theta \Theta^{-1} \in \widehat{g}_{<i(v)} \quad (3.26)$$

$$= \Omega A_+^{(vac)}(i) \Omega^{-1} + \partial_i^+ \Omega \Omega^{-1} \in g_{\geq 0(v)} \quad (3.27)$$

$$A_-^h(i) = \Theta A_-^{(vac)}(i) \Theta^{-1} + \partial_i^- \Theta \Theta^{-1} \in \widehat{g}_{<0(v)} \quad (3.28)$$

$$= \Omega A_-^{(vac)}(i) \Omega^{-1} + \partial_i^- \Omega \Omega^{-1} \in \widehat{g}_{\geq -i(v)} \quad (3.29)$$

3.2 Transformações “dressing”, funções tau

Na seção anterior discutimos as órbitas das soluções de vácuo sob o grupo das transformações “dressing”, estas nos fornecem um conjunto de soluções para hierarquias específicas de equações integráveis. Note que observando o método de Hirota, as “funções tau” constituirão um novo conjunto de variáveis para descrever estas soluções, entretanto é suficiente e necessário afirmar que a principal característica destas novas variáveis será servir como argumento de simplificação na construção das soluções multi-sóliton.

3.2.1 Funções tau

Para uma álgebra graduada de Kac-Moody $\{\widehat{g}, v\}$ dada, tomemos uma solução de vácuo e h de G , gerador de uma transformação “dressing”. Logo haverá uma função tau para cada $v_i \neq 0$. Considere o estado de peso mais alto da representação $L(i)$ (ver apêndice A) e define-se o vetor função tau. Note que por (3.18) teremos,

$$\begin{aligned}\tau_i(t^\pm) &= (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_- (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_0 (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_+ |\lambda_i\rangle \\ \tau_i(t^\pm) &= \Theta^{-1} B^{-1} |\lambda_i\rangle \quad , i = 0, \dots, r, \quad v_i \neq 0.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Por conseguinte notamos que $\tau_i(t^\pm)$ se torna um elemento de $L(i)$ (estado de peso mais alto), o papel das funções tau de Hirota são desempenhados por algumas componentes dos $\tau_i(t^\pm)$.

Observação 3.1. *A derivação d_v pode ser diagonalizada agindo sobre $L(v)$, então as funções tau poderão sofrer uma decomposição, como soma de subespaços.*

$$\tau_i(t^\pm) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{(-j)}(t^\pm) \implies d_i \tau_i^{(-j)}(t^\pm) = -j \tau^{(-j)}(t^\pm). \quad (3.31)$$

Então podemos usar o fato que $\Theta^{-1} \in G_{<0}(v)$ e $B^{-1} \in G_0(v)$. Além disso, o estado de peso mais alto é um auto-estado da subálgebra $g_0(v)$ e por conseguinte de B^{-1} , portanto,

$$\tau_i^{(0)}(t^\pm) = B^{-1} |\lambda_i\rangle \tau_i^{(0)}(t^\pm) \quad (3.32)$$

mas observemos que,

$$B^{-1} |\lambda_i\rangle = \exp(aH^{(n)}) |\lambda_i\rangle \quad (3.33)$$

$$= (1 + Ha\xi^a + \dots) |\lambda_i\rangle$$

$$= (1 + \xi^a \delta_a + \dots) |\lambda_i\rangle$$

$$= |\lambda_i\rangle \widehat{\tau}^{(0)}(t^\pm) \quad (3.34)$$

entretanto voltando em (3.32) teremos as relações seguintes:

$$\begin{aligned} B^{-1}|\lambda_i\rangle &= |\lambda_i\rangle\widehat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm) \\ \langle\lambda_i|B^{-1}|\lambda_i\rangle &= \langle\lambda_i|\lambda_i\rangle\widehat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm) \\ \widehat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm) &= \langle\lambda_0|(\Psi^{(vac)}h\Psi^{(vac)^{-1}})_0|\lambda_0\rangle, \end{aligned} \quad (3.35)$$

note que é fácil de se ver $\widehat{\tau}_i^{(0)}$ é uma função, não um auto-estado, logo por (3.30) implica-se que,

$$\tau_i(t^\pm) = \Theta^{-1}|\lambda_i\rangle\widehat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm).$$

Logo concluímos que,

$$\Theta^{-1}|\lambda_i\rangle = \frac{\tau_i(t^\pm)}{\widehat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm)} \quad (3.36)$$

Dado $\tau_i(t^\pm)$ para qualquer que seja $i = 0, 1, \dots, r$ com $v_i \neq 0$ (3.36) determina que Θ^{-1} pertença a $\widehat{G}_{<0}(v)$ (por exemplo usando a forma hermitiana positiva definida em $L(i)$). Então pelas equações (3.26), (3.29) e (3.36) os $\tau_i(t^\pm)$ nos dá uma solução das hierarquias descritas.

De acordo com o método Hirota a equação (3.36) pode ser usada de dois modos diferentes. Primeiro proporcionando uma mudança de variáveis entre as quantidades que aparecerem nas equações de curvatura nula e alguns componentes das funções $\tau_i(t^\pm)$. Estas componentes são funções do tempos t_i^\pm e desempenharão o mesmo papel que as funções tau de Hirota. O segundo fato é o mais importante das funções tau, isto é, a construção explícita das soluções multi-sóliton.

Mostrando como se procede, tomemos as hierarquias integráveis cujas soluções pertencem as órbitas de algumas soluções triviais sob o grupo de transformações “dressing”. Estas soluções elementares serão chamadas de soluções de vácuo.

Seja $\widehat{s} \subseteq \widehat{g}$ da forma:

$$\widehat{s} = \{b_i \in \widehat{g}_i(v), \quad \in E \subseteq \mathbb{Z} : [b_i, b_j] = iC\delta_{i+j}, 0\}, \quad (3.37)$$

onde C é o elemento central de \widehat{g} . Por conseguinte a solução de vácuo associada a \widehat{v} será:

$$A_+^{(vac)}(i) = b_i, \quad \text{e} \quad A_-^{(vac)}(i) = b_i + iCt_i^\pm,$$

ou equivalente a,

$$\Psi^{(vac)} = \exp\left(\sum_{i \in E \geq 0} t_i^\pm b_i\right) \exp\left(\sum_{-j \in E < 0} t_j^- b_{-j}\right). \quad (3.38)$$

Tomando F como um auto-vetor sob a ação adjunta dos elementos de \widehat{s} ,

$$[b_{\pm i}, F] = \alpha_i^\pm F \quad \text{tal que} \quad \pm i \in E \subseteq \mathbb{Z}, \quad (3.39)$$

logo,

$$\begin{aligned} \tau_i(t^\pm) &= (\Psi^{(vac)} e^F \Psi^{(vac)^{-1}}) |\lambda_i\rangle \\ &= \exp\left[\exp\left(\sum_{j \in E \geq 0} \alpha_j^+ t_j^\pm + \sum_{-j \in E < 0} \alpha_j^- t_j^- \right) F\right] |\lambda_i\rangle. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Observação 3.2. Para $v_i \neq 0$, são as funções-tau de uma solução elementar. Quando F é nilpotente aplicando sobre $|\lambda_i\rangle$, isto é, quando existe n inteiro tal que $F^{n+1}|\lambda_i\rangle = 0$ e $F^{n+1}|\lambda_i\rangle \neq 0$ teremos a expressão:

$$\tau_i(t^\pm) = \left(1 + \sum_{j=1}^n f_j(t^\pm) F^j\right) |\lambda_i\rangle, \quad (3.41)$$

onde estes f_j são funções dos tempos t_k^\pm . Enfim para cada autovetor adjunto simultâneo F de todos os elementos de \widehat{v} , teremos as primeiras soluções não triviais, cujas “funções tau” são dadas por (3.40). Logo as soluções de classe multi-sóliton devem corresponder aos elementos de grupo h , que são os produtos das exponenciais dos autovetores F_i , isto é,

$$h = e^{F_1} e^{F_2}, \dots, \quad (3.42)$$

mostrando assim que a construção das soluções multi-sóliton, se tornam triviais, usando o fato de se trabalhar com funções-tau propostas.

Capítulo 4

Soluções Sóliton

Neste capítulo com a particularização para uma álgebra $\widehat{sl}(2)$, a aplicação da transformação “dressing”, onde nos fornecerá funções-tau para encontrar as soluções. Vamos definir as respectivas funções tau e por conseguinte usando as propriedades algébricas estabelecidas nos apêndices, obteremos as soluções de classe 1-sóliton, 2-sóliton e no caso geral n-sóliton. Podemos aqui citar, para nos familiarizarmos e criar uma motivação com o contexto mostrar de maneira sucinta, como se dá a interação de dois sólitons. Sóliton é um fenômeno localizado que podemos produzir um, e em seguida esperar um certo tempo para que ele se distancie e logo produzir o outro, maior em amplitude e portanto mais rápido, após uma pequena espera o segundo irá alcançar o primeiro e eles irão interagir, então se dará uma interação de dois sólitons. Como a **NLS** é uma equação não-linear, não é trivial prever como será esta interação, logo suas soluções não obedecem o princípio de superposição, valendo apenas um princípio de “superposição aproximado”. Então de maneira precisa os dois sólitons se interagem e posteriormente se separam sem alterar a forma. A única mudança será uma ligeira alteração da posição que cada um deles teria após o mesmo tempo caso não houvesse interação. Este recebe o nome de “mudança de fase”.

A equação **NLS** admite o seguinte operador de Lax.

$$L = \partial_x - E^{(1)} - \Psi^+ E_+^{(0)} - \Psi^- E_-^{(0)} - \nu_1 C, \quad (4.1)$$

onde os Ψ^\pm e ν_i são os campos do modelo em questão. Estamos considerando um campo na direção do termo central C , onde a graduação aqui usada é a homogênea, isto é, o vetor

das graduação é $S_{hom} = (1, 0)$ para a álgebra $\widehat{sl}(2)$. Tomamos esta álgebra na base **Weyl-Cartan**, a qual se escreve como,

$$\begin{aligned} [H^{(m)}, H^{(n)}] &= \frac{n}{2} C \delta_{m+n, 0} \\ [H^{(n)}, E_{\pm}^{(m)}] &= \pm E_{\pm}^{(m+n)} \\ [E_+^{(m)}, E_-^{(n)}] &= 2H^{(m+n)} + mC \delta_{m+n, 0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note que as equações da hierarquia são obtidas pelo sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t_n} &= [B_N, L], \quad N > 0 \quad \text{onde} \\ B_N &= (UH^N U^{-1})_{\geq 0} \in C^\infty(R, \widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0(s)}), \end{aligned}$$

além disso os potenciais B_n pertence ao seguinte subespaço

$$B_N \subseteq \oplus_{i=0}^N \widehat{\mathfrak{g}}_i, \quad , i = 1, \dots, N,$$

com U sendo um elemento de grupo, este obtido da exponenciação dos geradores de grau negativo,

$$U = \exp\left(\sum \sigma_{-n}\right), \quad [D, T^{(n)}] = nT^{(n)}.$$

Assim surgem os primeiros B_N , que são:

$$B_1 = H^{(1)} + \Psi^+ E_+^{(0)} + \Psi^- E_-^{(0)} + \nu_1 C \quad (4.3)$$

$$B_2 = H^{(2)} + \Psi^+ E_+^{(1)} + \Psi^- E_-^{(1)} - 2\Psi^+ \Psi^- H^{(0)} + \partial_x \Psi^+ E_+^{(0)} - \partial_x \Psi^- E_-^{(0)} + \nu_2 C, \quad (4.4)$$

e como conseqüência as primeiras equações da hierarquia são:

$$\begin{aligned}\partial_{t_1} L &= [B_1, L] \\ \partial_{t_1} \Psi^\pm &= \partial_x \Psi^\pm\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\partial_{t_1} \nu_1 = \partial_x \nu_1,\tag{4.6}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\partial_{t_2} L &= [B_2, L] \\ \partial_{t_2} \Psi^\pm &= \pm \partial_{xx} \Psi^\pm \mp 2(\Psi^+ \Psi^-) \Psi^\pm\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$\partial_{t_2} \nu_1 = \partial_x \nu_2.\tag{4.8}$$

A equação de curvatura nula para os potenciais B_1 e B_N podem ser escrita da seguinte forma,

$$[\partial_{t_N} - B_N, \partial_x - B_1] = 0 \quad N = 1, 2, \dots,\tag{4.9}$$

onde denotamos $x = t_1$ e $t = t_2$ e estes B_N possuem a forma geral que se apresenta como,

$$B_N = H^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} B_N^{(n)} \quad \text{com} \quad B_N^{(n)} \in C^\infty(R, \hat{g}_n(S_{hom})).\tag{4.10}$$

Já que $\Psi^\pm = 0$ e $\nu = 0$ vem a ser a solução de cada sistema de equações da hierarquia então,

$$B_1^{(vac)} = H^1 \quad B_N^{(vac)} = H^N,\tag{4.11}$$

e estas relações podem ser obtidas por:

$$B_N = \partial_{t_N} \Psi \Psi^{-1},$$

do elemento de grupo seguinte,

$$\Psi^{(vac)} = \exp \left(xH^{(1)} + tH^{(2)} + \sum_{n=3,4,\dots} t_n H^{(n)} \right) = \exp \sum_{n=1,2} t_n H^{(n)}\tag{4.12}$$

Por conseguinte as conexões na órbita são dadas por:

$$\begin{aligned} B_1 &= \Theta H^{(1)} \Theta^{-1} + \partial_x \Theta \Theta^{-1} \\ &= M^{-1} (NH^{(1)} N^{-1} - \partial_x M M^{-1} + \partial N N^{-1}) M \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} B_N &= \Theta H^{(N)} \Theta^{-1} + \partial_{t_N} \Theta \Theta^{-1} \\ &= M^{-1} (NH^{(N)} N^{-1} - \partial_{t_N} M M^{-1} + \partial_{t_N} N N^{-1}) M, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde denota-se,

$$\Theta = \exp\left(\sum_{n>0} \sigma_{-n}\right) \quad M = \exp(\sigma_0) \quad e \quad N = \exp\left(\sum_{n>0} \sigma_n\right) \quad (4.15)$$

$$[D, \sigma_n] = n\sigma_n.$$

Com isso note que podemos relacionar os campos Ψ^\pm a alguns dos σ_n . Por exemplo para $N = 2$ e tomando t_2 e $t_1 = x$, teremos então:

$$\begin{aligned} B_1 &= H^1 + [\sigma_{-1}, H^{(1)}] + \text{termos negativos} \\ &= M^{-1} (H^{(1)} - \partial_x M M^{-1} + \partial_x \sigma_1) M + \text{termos de grau } > 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$B_2 = H^2 + [\sigma_{-1}, H^2] + [\sigma_{-2}, H^2] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, H^2]] + \quad (4.17)$$

termos de grau negativo

$$= M^{-1} (H^{(2)} - \partial_t M M^{-1} + \partial_t \sigma_1 + \partial_t \sigma_2 + [\sigma_1, \partial_t \sigma_1]) M + (4.18)$$

termos de grau > 2 .

Então observamos que o termo de grau (-1) em (4.16) se anula e por conseguinte temos:

$$\partial_x \sigma_{-1} + [\sigma_{-2}, H^{(1)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, H^{(1)}]] = 0, \quad (4.19)$$

e denotando,

$$\sigma_{-1} = -\Psi^+ E_+^{(-1)} + \Psi^- E_-^{(-1)} + \sigma_{-1}^0 H^{(-1)} \quad (4.20)$$

$$\sigma_{-2} = -\sigma_{-2}^+ E_+^{(-2)} + \sigma_{-2}^- E_-^{(-2)} + \sigma_{-2}^0 H^{(-2)} \quad (4.21)$$

da relação (4.19) podemos obter,

$$\partial_x \sigma_{-1}^0 = 2\Psi^+ \Psi^- \quad (4.22)$$

$$\sigma_{-2}^+ = -\partial_x \Psi^+ + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^0 \Psi^+ \quad (4.23)$$

$$\sigma_{-2}^- = -\partial_x \Psi^- + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^0 \Psi^-. \quad (4.24)$$

Aplicando estas expressões para σ_{-1} e σ_{-2} nas equações (4.16) e (4.17), nós obteremos a equação (4.8), com as seguintes identidades:

$$\nu_1 = -\frac{\sigma_{-1}^0}{2}, \quad \nu_2 = -\sigma_{-2}^0 \quad (4.25)$$

As σ_n de maior grau são usadas para cancelar as componentes não requeridas. O termo de grau (-2) aplicada em (4.16) encontramos conseqüentemente a equação,

$$\partial_x \sigma_{-2} + [\sigma_{-3}, H^{(1)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-2}, [\sigma_{-1}, H^{(1)}]] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-2}, H^{(1)}]] = 0 \quad (4.26)$$

Observação 4.1. *No fato anterior foi utilizada a seguinte relação:*

$$\partial e^\sigma e^{-\sigma} = \partial \sigma + \frac{1}{2!} [\sigma, \partial \sigma] + \frac{1}{3!} [\sigma, [\sigma, \partial \sigma]] + \dots, \quad (4.27)$$

onde concluímos que,

$$\sigma_{-3} = \sigma_{-3}^+ E_+^{(-3)} + \sigma_{-3}^- E_-^{(-3)} + \sigma_{-3}^0 H^{(-3)}. \quad (4.28)$$

Note que da equação (4.26), efetuando algebricamente as partes necessárias, nós temos o resultado,

$$\partial_x \sigma_{-2}^0 = \Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-, \quad (4.29)$$

do mesmo modo, igualando a zero os termos de grau (-1) e (-2) na equação (4.17), encontramos o resultado seguinte:

$$\partial_t \sigma_{-1}^0 = 2(\Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-) \quad (4.30)$$

e

$$\partial_t \sigma_{-2}^0 = \frac{2}{3} \Psi^+ \Psi^- (\sigma_{-1}^0)^2 - 2 \partial_x \Psi^+ \partial_x \Psi^- - \frac{2}{3} (\Psi^+ \Psi^-)^2 + \Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-. \quad (4.31)$$

No contexto da transformação “dressing” existe um procedimento para se obter infinitas quantidades conservadas. Por exemplo as primeiras quantidades são ‘modulo’² = $[2\Psi^+\Psi^-]$ e momento = $[\Psi^-\partial_x\Psi^+ - \Psi^+\partial_x\Psi^-]$, que correspondem as simetrias $\Psi^\pm \rightarrow e^{\pm\alpha}\Psi^\pm$ ($\alpha = const.$) e de deslocamento espacial do sistema, respectivamente. Outras quantidades conservadas podem ser construidas. Este assunto não será tratado aqui (veja [2]).

4.1 Funções tau

Definimos as funções tau como em (3.30)

$$\tau(x, t_1, t_2, \dots) = \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)} |\lambda_0\rangle \quad (4.32)$$

$$= \Theta^{-1} B^{-1} |\lambda_0\rangle, \quad (4.33)$$

onde o h é um elemento particular do grupo $\widehat{SL}(2)$ que gera as transformações “dressing”. Então temos que:

$$\exp(-\sum \sigma_{-n}) \exp(-\sigma_0) |\lambda_0\rangle = \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}} |\lambda_0\rangle. \quad (4.34)$$

O nosso objetivo pra termos consistência no desenvolvimento que está sendo efetuado é, expressar os campos Ψ^\pm em termos de algumas funções tau, onde estas são elementos de matriz em uma representação apropriada do grupo de Kac-Moody, então com este fato podemos escrever a combinação linear seguinte.

$$\sigma_0 = \sigma^0 H + \sigma_0^+ E_+^{(0)} + \sigma_0^- E_-^{(0)} + \nu C, \quad (4.35)$$

e além disso $\{h_1, e_1, h_1\}$ são geradores de Chervalley e $\{h, D\}$ a subálgebra da Cartan $\widehat{sl}(2)$ então se confecciona a seguinte combinação,

$$\sigma_0 = \sigma_0^0 h_1 + \sigma_0^+ e_1 + \sigma_0^- f_1 + \nu C. \quad (4.36)$$

Pelo fato de estarmos trabalhando certos cálculos com elementos de peso mais alto, podemos propor a seguinte afirmação.

$$h_1|\lambda_0\rangle = 0 \quad f_1|\lambda_0\rangle = 0 \quad e \quad C|\lambda_0\rangle = |\lambda_0\rangle, \quad (4.37)$$

com esta afirmação o grau zero da expressão (4.34) implica em:

$$\exp(-\sigma_0)|\lambda_0\rangle = |\lambda_0\rangle\hat{\tau}^0(x, t), \quad (4.38)$$

onde nota-se que $\hat{\tau}^0(x, t_1, t_2, \dots)$ se efetiva como uma função de x e dos tempos t_n determinada pelo elemento de matriz que enunciaremos posteriormente.

$$\hat{\tau}^0 = \langle \lambda_0 | (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_0 | \lambda_0 \rangle. \quad (4.39)$$

No desenvolvimento que segue o termo de grau (-1) por (4.33) e (4.39) se torna,

$$|(-\sigma_{-1})|\lambda_0\rangle = \frac{|(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_{(-1)}|\lambda_{-1}\rangle}{\hat{\tau}^0(x, t)}, \quad (4.40)$$

no entanto a expressão σ_{-1} se apresenta como:

$$\sigma_{-1} = -\Psi^+ E_+^{(-1)} + \Psi^- E_-^{(-1)} + \sigma_{-1}^0 H^{(-1)}, \quad (4.41)$$

podemos fazer as operações seguinte,

$$\langle \lambda_0 | E_-^{(1)} (-\Psi^+ E_+^{(-1)} + \Psi^- E_-^{(-1)} + \sigma_{-1}^0 H^{(-1)}) | \lambda_0 \rangle = \frac{-\langle \lambda_0 | E_-^{(1)} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_{(-1)} | \lambda_0 \rangle}{\hat{\tau}^0(x, t)} \quad (4.42)$$

$$\langle \lambda_0 | E_+^{(1)} (-\Psi^+ E_+^{(-1)} + \Psi^- E_-^{(-1)} + \sigma_{-1}^0 H^{(-1)}) | \lambda_0 \rangle = \frac{-\langle \lambda_0 | E_+^{(1)} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}})_{(-1)} | \lambda_0 \rangle}{\hat{\tau}^0(x, t)}. \quad (4.43)$$

Definimos,

$$\tau^+ := \langle \lambda_0 | E_-^{(1)} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) | \lambda_0 \rangle \quad (4.44)$$

$$\tau^- := \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) | \lambda_0 \rangle, \quad (4.45)$$

por conseguinte usando o fato que $H^{(0)}|\lambda_0\rangle = h_1|\lambda_0\rangle = 0$ e também o argumento de peso mais alto $E_{\pm}^{(1)}|\lambda_0\rangle = 0$ ou $\langle \lambda_0 | E_{\pm}^{(-1)} = 0$ e além disso tomando a base de Weyl-Cartan, progredindo com a argumentação por (4.42),(4.43) e (4.45) encontraremos os resultados procurados

$$\psi^+ = \frac{\tau^+}{\widehat{\tau}(0)} \quad e \quad \psi^- = -\frac{\tau^-}{\widehat{\tau}(0)}. \quad (4.46)$$

4.2 Primeira solução não trivial

Tomemos um elemento de grupo $\widehat{SL}(2)$ no objetivo de obter uma solução, seja:

$$h = e^F \quad \text{com} \quad F = \sum_{-\infty}^{+\infty} \nu_1^n E^{(-n)}, \quad (4.47)$$

pelo qual podemos observar que F é o autovetor comum sob a ação adjunta do gerador H como se segue,

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^n, F \right] = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu_1^n \right) F, \quad \text{com} \quad \nu_i \in \mathbb{R}. \quad (4.48)$$

Observação 4.2. *Note que nas próximos resultados deduzidos, utilizamos a expressão abaixo:*

$$e^T B e^{-T} = B + [T, B] + \frac{1}{2!} [T, [T, B]] + \dots \quad (4.49)$$

Então segue que,

$$\begin{aligned}
(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) &= \exp(e^{-\varphi} F) \\
&= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^{(n)}\right) (1 + F) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^{(n)}\right) \\
&= 1 + F + \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu_1^n\right) F + \frac{1}{2!} \left[\sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)}, \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu_1^n\right) F\right] \\
&= 1 + \left(1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu_1\right) + \dots\right) F \\
&= 1 + e^{-\varphi_1} F \quad \text{com} \quad \varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu_1^n,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato $F^n = 0$ para $n \geq 2$, isto é, nilpotente. As funções-tau encontrada se expressam da seguinte forma:

$$\tau^{(0)} = \langle \lambda_0 | (1 + e^{-\varphi_1} E_-^{(0)}) | \lambda_0 \rangle = 1$$

$$\tau^+ = \langle \lambda_0 | E_-^{(1)} e^{-\varphi_1} \nu_1 E_-^1 | \lambda_0 \rangle = 0$$

$$\tau^- = \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} e^{-\varphi_1} \nu_1 E_-^{(-1)} | \lambda_0 \rangle$$

$$\tau^- = \nu_1 e^{-\varphi_1},$$

então tomando as argumentações e informações adquiridas com (4.46) obtemos as soluções seguintes, isto é,

$$\psi^+ = 0 \quad e \quad \psi^- = -\nu_1 e^{-\varphi_1}. \quad (4.50)$$

Fazendo de modo semelhante, ou seja, tomando

$$h = e^G \quad \text{com} \quad G = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_1^n E_+^{(-n)} \quad \rho_1 \in \mathbb{R} \quad (4.51)$$

onde,

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} t_n H^{(n)}, G \right] = \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \rho_1^n \right) G, \quad (4.52)$$

note que G é um autovetor sob a ação adjunta do gerador H então como feito para $h = e^F$ é fácil de se ver que

$$\begin{aligned} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)})^{-1} &= \exp(e^{\eta_1} G) \\ &= 1 + e^{\eta_1} G \quad \text{com} \quad \eta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \rho_1^n, \end{aligned}$$

usamos como já é do nosso conhecimento $G^n = 0$ para $n \geq 2$, isto é, G é nilpotente. Logo segue que as funções-tau são:

$$\tau^{(0)} = \langle \lambda_0 | (1 + e^{\eta_1} E_+^{(0)})_{(0)} | \lambda_0 \rangle = 1$$

$$\tau^- = \langle \lambda_0 | (E_+^{(1)} e^{\eta_1} \rho_1 E_+^{(-1)})_{(0)} | \lambda_0 \rangle = 0$$

$$\tau^+ = \langle \lambda_0 | (E_-^{(1)} e^{\eta_1} \rho_1 E^{(-1)+}) | \lambda_0 \rangle = \rho_1 e^{\eta_1}.$$

Portanto encontramos uma nova solução, que é

$$\psi^- = 0 \quad e \quad \psi^+ = \rho_1 e^{\eta_1} \quad (4.53)$$

As soluções (4.50) e (4.53) aparecem em [22] onde o método de transformações de Backlund(TB) é usada para resolver o sistema **NLS**. Estas soluções são chamadas de “soluções de vácuo”.

4.3 Solução 1-sóliton

Para se obter uma solução 1-sóliton, tomamos o produto das exponenciais e conseqüentemente escolhemos:

$$h = e^{aF} e^{bG}, \quad a, b \in R \quad (4.54)$$

Observação 4.3. Note que F e G são dadas em (4.47) e (4.51).

Deste modo temos,

$$\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}} = \exp(e^{-\varphi} aF) \exp(e^{\eta} bG) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} &= (1 + e^{-\varphi} aF)(1 + e^{\eta} bG) \\ &= 1 + e^{-\varphi} aF + e^{\eta} bG + e^{-\varphi} e^{\eta} aF bG \end{aligned} \quad (4.56)$$

e além disso $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \nu^n$ e $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \rho^n$ e em seguida calculamos as funções-tau correspondentes, note que para τ^0 temos:

$$\begin{aligned} \tau^{(0)} &= \langle \lambda_0 | (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) | \lambda_0 \rangle \\ \tau^{(0)} &= \langle \lambda_0 | 1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi} e^{\eta} ab \langle \lambda_0 | (FG)_{(0)} | \lambda_0 \rangle \\ \tau^{(0)} &= 1 + abce^{-\varphi} e^{\eta} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Observação 4.4. Note que nas operações que foram feitas em (4.57) foram omitidos os fatores que se anulam, por não fazerem efeito algum

O fator c é um elemento de matriz do tipo $\langle \lambda_0 | (FG)_{(0)} | \lambda_0 \rangle$, então podemos deduzi-lo usando a teoria geral das representações das álgebras de Kac-Moody, isto é,

$$\begin{aligned}
c &= \langle \lambda_0 | (FG)_{(0)} | \lambda_0 \rangle \\
&= \langle 0 | \left(\sum_{m,n>0}^{\infty} \nu_1^{-n} \rho_1^m E_-^{(n)} E^{(-m)} \right)_{(0)} | \lambda_0 \rangle \\
&= \langle \lambda_0 | \sum_{m,n>0}^{\infty} (-2H^{(n-m)} + m\delta_{n-m,o}C)_{(0)} | \lambda_0 \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\rho_1}{\nu_1} \right)^n
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Observação 4.5. Note que na expressão (4.58) podemos usar,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_1}{\nu_1} \right)^n \\
&= \frac{\nu_1}{\nu_1 - \rho_1}, \quad \text{com } \left| \frac{\rho_1}{\nu_1} \right| < 1.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Portanto o elemento de matriz procurado em (4.58) é:

$$c = \frac{\rho_1 \nu_1}{(\rho_1 - \nu_1)^2}. \tag{4.60}$$

Efetuada as funções-tau são deduzidas as seguintes conclusões.

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= \langle \lambda_0 | E_-^{(1)} (be^\eta \rho_1 E^{(-1)+}) | \lambda_0 \rangle \\
&= be^\eta \rho_1 \langle \lambda_0 | (-2H^{(0)} + C) | \lambda_0 \rangle \\
&= b\rho_1 e^\eta
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
\tau^- &= \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} (ae^{-\varphi} \nu_1 E_-^{(-1)}) | \lambda_0 \rangle \\
&= a\nu_1 e^{-\varphi}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

por (4.46), utilizando (4.60), e os resultados (4.61) e (4.62), apresentamos por conseguinte a solução 1-sóliton,

$$\psi^+ = \frac{b\rho_1 e^\eta}{1 + abce^{-\varphi} e^\eta} \quad (4.63)$$

$$\psi^- = -\frac{a\nu_1 e^{-\varphi}}{1 + abce^{-\varphi} e^\eta}. \quad (4.64)$$

Com as soluções (4.63) e (4.64), usando as definições de φ e η , assumindo $x = t_1$ e $t_2 = t$ para $n = 2$, então

$$\varphi = x\nu_1 + t\nu_1^2 \quad e \quad \eta = x\rho_1 + t\rho_1^2 \quad (4.65)$$

Especificamos neste contexto uma solução particular para a equação abaixo,

$$\partial_t \Psi^{(\pm)} = \pm \partial_{xx} \Psi^\pm \mp 2(\Psi^+ \Psi^-) \Psi^\pm. \quad (4.66)$$

Para esta solução particular tomemos $\rho_1 = -\nu_1$, $b = -a = -2$ com $t_{2n+1} = 0$ $n \geq 1$, então,

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \frac{2\nu_1 e^{-x\nu_1 + t\nu_1^2}}{e^{x\nu_1 + t\nu_1^2} + e^{-x\nu_1 + t\nu_1^2}} e^{x\nu_1 + t\nu_1^2} \\ &= \frac{2\nu_1 e^{2t\nu_1^2}}{(e^{x\nu_1 + e^{-x\nu_1}}) e^{t\nu_1^2}} \\ &= \operatorname{sech}(\nu_1 x) \nu_1 e^{t\nu_1^2}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Fazendo o mesmo para ψ^- temos:

$$\begin{aligned} \psi^- &= -\frac{2\nu_1}{(e^{x\nu_1 + e^{-x\nu_1}}) e^{t\nu_1^2}} \\ &= -\operatorname{sech}(\nu_1 x) \nu_1 e^{-t\nu_1^2}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

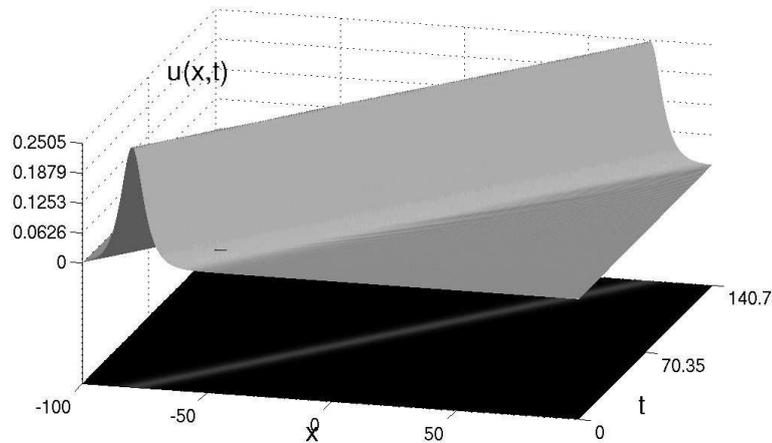


Figura 4.1: Bright s3liton (envelope), $u(x, t) = |\psi^\pm(x, it)|$.

Enfim note que se tomarmos, $\bar{\nu}_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \nu_1^{2n} t_{2n}$ um parâmetro de fase, então as equações (4.67),(4.68) podemos escrever como:

$$\psi^+ = \nu_1 \exp(\nu_1^2 t + \bar{\nu}_1) \operatorname{sech}(\nu_1 x) \quad (4.69)$$

$$\psi^- = -\nu_1 \exp(-\nu_1^2 t - \bar{\nu}_1) \operatorname{sech}(\nu_1 x) \quad (4.70)$$

A solução (4.69),(4.70) é conhecida na literatura como “envelope s3liton” ou “bright s3liton”, Figura (4.1)[14].

4.4 Solu33o 2-s3litions

Para deduzirmos a solu33o 2-s3liton, tomemos como elemento constante h , isto 33,

$$h = e^{a_1 F_1} e^{b G_1} e^{a_2 F_2} e^{b_2 G_2},$$

onde

$$F_i = \sum_{-\infty}^{\infty} \nu_i^n E_-^{(-n)}, \quad G_i = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_i^n E_+^{(-n)}, \quad i = 1, 2.$$

com a_i, b_i, ν_i, ρ_i constantes. Então,

$$\begin{aligned} \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}} &= (1 + e^{-\varphi_1} a_1 F_1)(1 + e^{-\varphi_2} a_2 F_2)(1 + e^{\eta_1} b_1 G_1)(1 + e^{\eta_2} b_2 G_2) = \\ &= (1 + e^{-\varphi_1} a_1 F_1 + e^{-\varphi_2} a_2 F_2 + e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} a_1 F_1 a_2 F_2 + \\ &+ e^{\eta_1} b_1 G_1 + e^{-\varphi_1 \eta_1} a_1 F_1 b_1 G_1 + e^{-\varphi_2} e^{\varphi_1} a_2 F_2 b_2 G_2 + \\ &+ e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} e^{-\varphi_2} a_1 F_1 a_2 F_2 b_1 G_2)(1 + e^{\eta_2} b_2 G_2) \end{aligned}$$

o qual implica em:

$$\begin{aligned} \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}} &= 1 + e^{-\varphi_1} a_1 F_1 + e^{-\varphi_2} a_2 F_2 + e^{\eta_1} b_1 G_1 + e^{\eta_2} b_2 G_2 + \\ &+ e^{\eta_1} e^{\eta_2} b_1 G_1 b_2 G_2 + e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} a_1 F_1 a_2 F_2 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} a_1 F_1 b_1 G_1 + \\ &+ e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} a_1 F_1 b_2 G_2 + e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_2 F_2 b_2 G_2 + e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} b_1 G_1 a_2 F_2 + \\ &+ e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} b_1 G_1 a_2 F_2 b_2 G_2 + e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 F_1 a_2 F_2 b_2 G_2 + \\ &+ e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_1} a_1 F_1 b_1 G_1 a_2 F_2 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} e^{\eta_1} a_1 F_1 b_1 G_1 b_2 G_2 + \end{aligned} \tag{4.71}$$

note que,

$$\varphi_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \nu^n t_n \quad e \quad \eta_i = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_i^n t_i, \quad \text{com } i = 1, 2.$$

Então fazendo,

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau}^{(0)} &= \langle \lambda_0 | (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) | \lambda_0 \rangle \\
\widehat{\tau}^{(0)} &= \langle \lambda_0 | 1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_1} a_1 \langle \lambda_0 | F_1 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta_1} b_1 \langle \lambda_0 | G_1 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta_2} b_2 \langle \lambda_0 | G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_2} \langle \lambda_0 | F_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&+ e^{\eta_1} e^{\eta_2} b_1 b_2 \langle \lambda_0 | G_1 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} a_1 a_2 \langle \lambda_0 | F_1 F_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} a_1 b_1 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 | \lambda_0 \rangle + \\
&+ e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} a_1 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_2 b_2 \langle \lambda_0 | F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} b_1 a_2 \langle \lambda_0 | G_1 F_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&+ e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} b_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_1} e^{\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&+ e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} a_1 b_1 a_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 F_2 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{\eta_2} a_1 b_1 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 G_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&+ e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} a_1 b_1 a_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle.
\end{aligned}$$

este é equivalente a,

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau}^{(0)} &= 1 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} a_1 b_1 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} a_1 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_2 b_2 \langle \lambda_0 | F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} b_1 a_2 \langle \lambda_0 | G_1 F_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 b_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | F_1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Tomando, $\tau^+ = \langle \lambda_0 | E_-^{(1)} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) | \lambda_0 \rangle$, teremos então,

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= e^{\eta_1} b_1 \langle \lambda_0 | E^{(1)} G_1 | \lambda_0 \rangle + e^{\eta_2} b_2 \langle \lambda_0 | E^{(1)} G_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{\eta_2} a_1 b_1 b_2 \langle \lambda_0 | E^{(1)} F_1 G_1 G_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} b_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | E^{(1)} G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Tomemos agora, $\tau^- = \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}}) | \lambda_0 \rangle$, este implica que,

$$\begin{aligned}
\tau^- &= e^{-\varphi_1} a_1 \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} F_1 | \lambda_0 \rangle + e^{-\varphi_2} a_2 \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} F_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 a_2 b_2 \langle \lambda_0 | E^{(1)} F_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle + \\
&e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} a_1 b_1 a_2 \langle \lambda_0 | E_+^{(1)} F_1 G_1 F_2 | \lambda_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Observação 4.6. Em (4.72), (4.73), (4.74), alguns termos se anulam, não oferecendo efeito para o resultado, conseqüentemente estes são omitidos por nós. Para os cálculos e demonstração destes elementos de matriz, ver (ApêndiceD).

Com este desenvolvimento, uma solução da hierarquia **NLS**, vem a ser:

$$\psi^+ = \frac{\tau^+}{\widehat{\tau}(0)} \quad e \quad \psi^- = \frac{\tau^-}{\widehat{\tau}(0)}. \quad (4.75)$$

Então como foi feito anteriormente, tomemos $N = 2$, $t_2 := t$, em (4.9), para obtermos uma solução do sistema (4.66). Particularizando tomemos $\rho_i = -\nu_i$, $b_i = -a_i = -2$ e $t_{2n+1} = 0$ com $n \geq 1$, logo como conseqüência teremos as funções-tau como segue:

$$\psi^+ = a_1 \nu_1 e^{\widehat{\varphi}_2} + a_2 \nu_2 e^{\widehat{\varphi}_2} a_1 a_2^2 \mathfrak{S}_2 e^{\widehat{\varphi}_1} e^{-\varphi_2} e^{\widehat{\varphi}_2} + a_1^2 a_2 \mathfrak{S}_1 e^{-\varphi_1} e^{\widehat{\varphi}_1} e^{\widehat{\varphi}_2} \quad (4.76)$$

$$\tau^- = a_1 \nu_1 e^{-\varphi_1} + a_2 \nu_2 e^{-\varphi_2} + a_1 a_2^2 \mathfrak{S}_1 e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\widehat{\varphi}_2} + a_1^2 a_2 \mathfrak{S}_2 e^{-\varphi_1} e^{\widehat{\varphi}_1} e^{-\varphi_2}. \quad (4.77)$$

tal que,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_i &= -\nu_i(x - \nu_i t) + \bar{\nu}_i, \\ \varphi_i &= \nu_i(x + \nu_i t) + \bar{\nu}_i, \\ \mathfrak{S}_i &= \frac{\nu_i}{4} \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

por conseguinte tomemos a_1 e a_2 tais que

$$\nu_i = a_j^2 \mathfrak{S}_i, \quad i \neq j$$

logo,

$$a_1 = a_2 = a = 2 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right).$$

Note que os $\bar{\nu}_i$ são parâmetros de fase, se somente se, a equação (4.66) da hierarquia for considerada. Então sendo tomado esses parâmetros, temos:

$$\hat{\tau}^{(0)} = e^{-(\nu_1+\nu_2)} \left[\frac{4}{a^2} (e^{(\nu_1-\nu_2)x} + e^{-(\nu_1-\nu_2)x} + e^{(\nu_1+\nu_2)x} + e^{-(\nu_1+\nu_2)x} + \right. \\ \left. 4 \frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)^2} (e^{(\nu_1^2-\nu_2^2)t+(\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2)} + e^{-(\nu_1^2-\nu_2^2)t-(\nu_1-\nu_2)}) \right]. \quad (4.78)$$

Enfim, os campos ψ^+ e ψ^- por (4.75) usando (4.78), (4.76) e (4.77), se tornam:

$$\psi^\pm = \pm a e^{\pm[(\nu_1^2+\nu_2^2)t+(\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2)]} \times \\ \times \left[\frac{e^{\mp(\nu_1^2t+\bar{\nu}_1)} \nu_2 \cosh(\nu_1 x) + e^{\mp(\nu_2^2t+\bar{\nu}_2)} \nu_1 \cosh(\nu_2 x)}{\frac{4}{a^2} \cosh[(\nu_1-\nu_2)x] + \cosh[(\nu_1+\nu_2)x] + 4 \frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)^2} \cosh[(\nu_1^2-\nu_2^2)t+(\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2)]} \right]. \quad (4.79)$$

Onde estas são as soluções 2-sóliton da equação (4.66), estas podem ser obtidas usando outros métodos de solução.

Estes resultados podem ser verificados, usando programas tipo *MAPLE* ou *MATHEMATICA*, os quais estes permitem o trabalho de forma mais comôda, nos que diz respeito às efetuções algébricas.

Observação 4.7. *As equações de ordem superior, da hierarquia por nós trabalhado, são satisfeita pelas soluções 1-sóliton e 2-sóliton. Este resultado é observado no estudo da hierarquia de KdV, usando método da redução perturbativa e múltiplos dos tempos.*

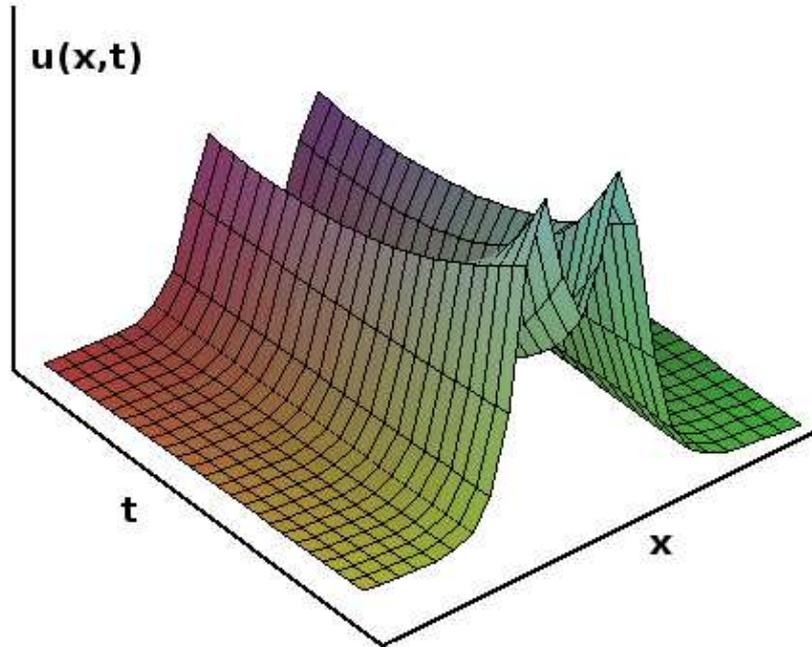


Figura 4.2: Colisão de dois sólitons.

4.5 Soluções N-sóliton

Agora iremos generalizar para uma solução N-sóliton. Escolhemos um h constante e em seguida calcularmos as funções tau correspondentes.

$$h = e^{a_1 F_1 + b_1 G_1 + a_2 F_2 + b_2 G_2 + \dots + a_N F_N + b_N G_N} \quad (4.80)$$

além disso,

$$F_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_i^n E_-^{(-n)} \quad , \quad G_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_i^n E_+^{-n}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

a_i, b_i, ν_i e ρ_i são parâmetros reais.

Note a expressão a seguir é de grande importância na construção das funções-tau,

$$\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}} = (1 + a_1 e^{-\varphi_1} F_1) (1 + b_1 e^{\eta_1} G_1) \cdots (1 + a_N e^{-\varphi_N} F_N) (1 + b_N e^{-\varphi_N} G_N) \quad (4.81)$$

na qual,

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_i^n t_n, \quad \eta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_i^n t_n, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Observe que os ν_i e ρ_i são parâmetros reais. Estes caracterizam cada sóliton. Então para se tornar de melhor esclarecimento para o leitor, tomamos os operadores F_i e G_i em termos de operadores de vértice os quais introduzimos no (ApêndiceC), isto é,

$$F_i \longmapsto \nu_i \Gamma_-(\nu_i), \quad G_i \longmapsto \rho_i \Gamma_+(\rho_i), \quad (4.82)$$

com isso escrevemos (4.81) da maneira seguinte,

$$\begin{aligned} \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)^{-1}} &= (1 + a_1 \nu_1 e^{-\varphi_1} \Gamma_-(\nu_1)) (1 + b_1 \rho_1 e^{\eta_1} \Gamma_+(\rho_1)) \cdots \\ &\quad (1 + a_N \nu_N e^{-\varphi_N} \Gamma_-(\nu_N)) (1 + b_N \rho_N e^{\eta_N} \Gamma_+(\rho_N)) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Tomando as notações seguintes,

$$U_n = a_n \nu_n e^{-\varphi_n}, \quad V_n = b_n \rho_n e^{\eta_n}$$

por conseguinte calculemos as funções-tau, ou seja,

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}^{(0)} &= 1 + \langle \lambda_0 | \sum_{n=1}^N \\ &\quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N} U_{i_1} \dots U_{i_n} \Gamma_-(\nu_{i_1}) \cdots \Gamma_-(\nu_{i_n}) \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N} V_{j_1} \cdots V_{j_n} \Gamma_+(\rho_{j_1}) \cdots \Gamma_+(\rho_{j_n}) | \lambda_0 \rangle. \end{aligned}$$

Note então, que nestas argumentações estamos usando propriedades de operadores de vértice agindo sobre $|\lambda_0\rangle$ e seu dual $\langle\lambda_0|$ ver (ApêndiceC). Logo em seguida temos,

$$\widehat{\tau}^{(0)} = 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N}} U_{i_1} \cdots U_{i_n} V_{j_1} \cdots V_{j_n} \cdot \left[\prod_{1 \leq l < m \leq n} (\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 (\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) \right] \cdot \left[\prod_{1 \leq l < m < n} (\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \right]^{-1}.$$

Então denotemos,

$$\begin{aligned} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) &= \epsilon(-\alpha, -\alpha) \equiv \epsilon(-, -), \\ \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) &= \epsilon(\alpha, \alpha) \equiv \epsilon(+, +), \\ \epsilon(\alpha_{i_j}, \alpha_{j_m}) &= \epsilon(-\alpha, \alpha) \equiv \epsilon(-, +). \end{aligned}$$

além disso, temos o fato para o caso $\widehat{sl}(2)$, que

$$\begin{aligned} \epsilon(+, +) &= \epsilon(-, -) = -1 \\ \epsilon(+, -) &= \epsilon(-, +) = 1. \end{aligned}$$

Por conseguinte, escrevemos

$$\widehat{\tau}^{(0)} = 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N}} U_{i_1} \cdots U_{i_n} V_{j_1} \cdots V_{j_n} \cdot \left[\prod_{1 \leq l < m \leq n} (\nu_{i_j} - \nu_{i_m})^2 (\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \right] \left[\prod_{1 \leq l < m \leq n} (\nu_{i_j} - \rho_{j_m})^2 \right]^{-1}$$

do mesmo modo, fazemos,

$$\tau^\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint dz.z \langle \lambda_0 | \Gamma_\mp (1 + a_1 \nu_1 e^{-\varphi_1} \Gamma_-(\nu_1)) (1 + b_1 \rho_1 e^{\eta_1} \Gamma_+(\rho_1)) \cdots \\ (1 + a_N \nu_N e^{-\varphi_N} \Gamma_-(\nu_N)) (1 + a_N \rho_N e^{\eta_N} \Gamma_+(\rho_N)) | \lambda_0 \rangle.$$

Assim de acordo com a equação, e no objetivo de se ter termos nulos, deve-se ter número igual de operadores Γ_+ e Γ_- , no interior dos estados $\langle \lambda_0 |$ e $| \lambda_0 \rangle$, logo,

$$\tau^\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint dz.z \sum_{n=1}^N U_1^{m_1} \cdots U_N^{m_N} V_1^{n_1} \cdots V_N^{n_N} \langle \lambda_0 | \Gamma_\mp (z) \Gamma_-^{m_1}(\nu_1) \cdots \Gamma_-^{m_N}(\nu_N). \\ \Gamma_+^{n_1}(\rho_1) \cdots \Gamma_+^{n_N}(\rho_N) | \lambda_0 \rangle$$

na qual os expoentes satisfazem as seguintes relações:

$$\sum_{i=1}^N m_i \pm 1 = \sum_{i=1}^N n_i = n, \quad m_i, n_i = 0, 1.$$

Colocando em ordem os operadores, conseqüentemente podemos escrever τ^+ como:

$$\tau^+ = \frac{1}{2\pi i} \oint d\nu.\nu \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_{n+1} \leq N}} U_{i_1} \cdots U_{i_n} V_{j_1} \cdots V_{j_{n+1}}. \\ \langle \lambda_0 | \Gamma_-(\nu_{i_1}) \cdots \Gamma_-(\nu_{i_n}) \Gamma_+(\rho_{j_1}) \cdots \Gamma_+(\rho_{j_{n+1}}) | \lambda_0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 \dots < j_{n+1} \leq N}} \left[\oint d\nu \cdot \nu \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(-\alpha, \alpha_{i_l})(\nu - \nu_{i_l})^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(-\alpha, \alpha_{j_m})(\nu - \rho_{j_m})^2 \right)^{-1} \right] V_{i_1} \dots V_{i_n} U_{j_1} \dots V_{j_{n+1}} \cdot \\
&\quad \left(\prod_{0 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m})(\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 \right) \cdot \left(\prod_{0 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m})(\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \right) \cdot \\
&\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq l < m < n+1 \\ l \neq n+1}} \epsilon(\alpha_{i_j}, \alpha_{j_m})(\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

Note que a integração na variável ν é igual a $2\pi i$ para qualquer valor de n , ver [2], então:

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n+1} \leq N}} U_{i_1} \dots U_{i_n} V_{j_1} \dots V_{j_{n+1}} \cdot \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m})(\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 \right) \cdot \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m})(\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \right) \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(-\alpha, \alpha_{i_l}) \right) \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l \leq m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m})(\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \right)^{-1} \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(-\alpha, \alpha_{j_m}) \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

Fazendo de maneira semelhante para τ^- , por conseguinte temos:

$$\begin{aligned}
\tau^- &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\rho \cdot \rho \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n+1} \leq N}} U_{i_1} \cdots U_{i_n} V_{j_1} \cdots V_{j_{n+1}} \cdot \\
&\quad \langle \lambda_0 | \Gamma_+(\rho) \Gamma_+(\rho_{i_1}) \cdots \Gamma_+(\rho_{i_n}) \Gamma_-(\nu_{j_1}) \cdots \Gamma_-(\nu_{j_{n+1}}) | \lambda_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n+1} \leq N}} \left[\oint d\rho \cdot \rho \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(\alpha, \alpha_{i_l}) (\rho - \rho_{i_l})^2 \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(\alpha, \alpha_{j_m}) (\rho - \nu_{j_m})^2 \right)^{-1} \right] V_{i_1} \cdots V_{i_n} U_{j_1} \cdots V_{j_{n+1}} \cdot \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) (\rho_{i_l} - \rho_{i_m})^2 \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) (\nu_{j_l} - \nu_{j_m})^2 \right) \cdot \\
&\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq l < m < n+1 \\ l \neq n+1}} \epsilon(\alpha_{i_j}, \alpha_{j_m}) (\rho_{i_l} - \nu_{j_m})^2 \right)^{-1} \cdot
\end{aligned}$$

Além disso a integração em ρ é igual a $2\pi i$ (ver [2]) para qualquer que seja o valor de n , logo concluímos que:

$$\begin{aligned}
\tau^- &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n+1} \leq N}} U_{i_1} \cdots U_{i_n} V_{j_1} \cdots V_{j_{n+1}} \cdot \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) (\rho_{i_l} - \rho_{i_m})^2 \right) \cdot \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) (\nu_{j_l} - \nu_{j_m})^2 \right) \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(\alpha, \alpha_{i_l}) \right) \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l \leq m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) (\rho_{i_l} - \nu_{j_m})^2 \right)^{-1} \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(\alpha, \alpha_{j_m}) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Observação 4.8. *No uso do formalismo das transformações “dressing”, pode ser mostrado que uma solução do tipo sóliton satisfaz as equações da hierarquia NLS.*

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação foram discutidos aspectos de integrabilidade para um modelo específico de equação diferencial parcial não linear, a qual é conhecida como a **Equação não Linear de Schrödinger (NLS)**, por esta possuir uma propriedade de simetria algébrica, foram estabelecidas associações às álgebras de **Lie** e de **Kac-Moody**, onde com uso destas, confeccionou-se o par de Lax e a equação relacionada a cada álgebra. No caso mais geral, classificando as hierarquias integráveis desenvolvidas em [2], o autor considerou as hierarquias **NLS** associadas a graduação homogênea da álgebra $\widehat{sl}(n)$. Em [19] Kac e Wakimoto estabeleceram a hierarquia **NLS** usando a forma bilinear de **Hirota** associada a representação homogênea na forma de operadores de vértice de nível 1 da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(2)$, estes obtiveram como resultados as soluções da hierarquia **NLS** na órbita do vácuo. Seguindo os procedimentos da literatura mencionada acima, na presente dissertação abordamos o problema de encontrar soluções sólton da seguinte maneira. A definição das funções-tau, na qual o papel principal é desempenhado pela transformação “dressing”, nos proporcionou a forma de relacionar os campos em termos das funções-tau. Estas funções foram identificadas como elementos de matrizes na representação integrável de peso mais alto da álgebra $\widehat{sl}(2)$ obtendo soluções do modelo **NLS**, em particular as soluções de classe N-sólton. No caso das soluções de classe ‘configurações de vácuo’ e soluções de classe 1-sólton, os elementos de matriz são os mais simples de se encontrar e que podemos calculá-los por dois métodos: usando a teoria geral das representações ou as representações de operador de vértice da álgebra $\widehat{sl}(2)$. Os elementos de matriz no caso dos N-sólton são mais complexos de se calcular, estes foram

encontrados utilizando a construção homogênea de operadores de vértice.

Note que nesta dissertação abordamos uma área de pesquisa de mais de 150 anos de história onde tudo começou pela observação de um engenheiro naval. Foi mostrado com isso que houve um desenvolvimento considerável da matemática levando em consideração a de primeira linha, além disso, extremamente atual e produtiva. Em se tratando de sólitons muito se desenvolveu, e muito foi feito com a interação entre físicos, matemáticos e engenheiros, e atualmente biólogos, a cada dia que passa essa interação mostra-se mais intensa, incluindo as indústrias de ponta. Há vários métodos e resultados envolvendo o modelo (**NLS**). Existem também modelos de mesma classe de equações tais como: equação não linear de Schrödinger derivativa (**DNLS**),

$$q_t - iq_{xx} \mp \alpha \partial_x(|q|^2 q) = 0.$$

Este modelo e extensão do tipo:

$$q_t - iq_{xx} + \alpha \partial_x(|q|q) + \beta |q|^2 q = 0$$

estão sendo estudados por nós com o intuito de esclarecer sólitons com estrutura interna [23].

Apêndice A

Grupos, Grupos de Lie, Álgebras de Lie e subálgebras de Lie e Álgebras de Lie semi-simples

Começaremos este Apêndice fazendo uma breve introdução a respeito grupo de Lie e da teoria da álgebra de Lie com a sua definição e um exemplo no caso uma subálgebra, para assim falarmos das algebras de Lie semi-simples.

A.0.1 Grupos, Grupos de Lie

Primeiramente definiremos grupo.

Definição A.1. *Um grupo é um conjunto G munido de uma operação ,*

$$\bullet \begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (a, b) \quad \longmapsto \quad ab \end{array} \tag{A.1}$$

- 1) $(ab)c = a(bc)$, para qualquer $a, b, c \in G$.
- 2) existência do elemento neutro $e \in G$, tal que $ea = ae$, para qualquer $a \in G$
- 3) existência do elemento inverso $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

caso a operação for comutativa, então o grupo é chamado Comutativo ou Abelianano.

Definição A.2. Dado G um grupo, um sub-grupo de G , é um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ tal que:

para qualquer que seja $a, b \in H$; $ab^{-1} \in H$

Exemplo A.3. O subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ das transformações lineares cuja matriz de transformação possui $\det = 1$, note que $SL(n, \mathbb{C})$ é subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$.

Então,

Definição A.4. Um grupo de Lie G é um grupo com a seguintes propriedades:

- 1) O grupo G é uma variedade analítica. Uma variedade diferenciável cujas mudanças de cartas são aplicações infinitamente diferenciáveis e que podem ser expandidas em séries de potências.
- 2) A operação de grupo e a inversão são aplicações analíticas em G .

A.0.2 Álgebras de Lie e subálgebras

Definição A.5. Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial g munido de um produto colchete ou comutador,

$$[,] : g \times g \longrightarrow g$$

- 1) Bilinearidade,
- 2) a aplicação $[,]$ é anti-simétrica, ou seja, $[X, Y] = -[Y, X]$ para $X, Y \in g$
- 3) satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja, para qualquer que seja $X, Y, Z \in g$.

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

Exemplo A.6. Como um exemplo básico, temos a álgebra de Matrizes $M_n \mathbb{R}$.

Definição A.7. Uma subálgebra de g é um subespaço vetorial h de g tal que $[X, Y] \in h$ com $X, Y \in h$

Exemplo A.8.

$$sl(n, \mathbb{K}) = \{X \in gl(n, \mathbb{K}) : tr X = 0\} \tag{A.2}$$

A.0.3 Álgebras de Lie semi-simples

Uma álgebra de Lie g de um grupo de Lie G possui uma base X_a com $a = 1, 2, \dots, \dim(g)$ onde constitui uma base do plano tangente a G em algum ponto específico, satisfazendo a relação.

$$[X_m, X_n] = i f_{mn}^l X_l. \quad (\text{A.3})$$

Onde os coeficientes f_{mn}^l são denominados de constantes de estrutura da álgebra. Uma escolha usual da base para as álgebras semi-simples, é realizada da seguinte forma.

Um: Tomamos um conjunto maximal de geradores hermitianos tal que:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad \text{com} \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad r = \dim deg, \quad (\text{A.4})$$

a subálgebra de g gerada por H_i com $i = 1, \dots, r$ é chamada de subálgebra de Cartan(CSA).

Dois: com a escolha de (CSA), os demais geradores constituirão autoestados adjunta de H_i :

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad (\text{A.5})$$

α é uma raiz ou seja o vetor não nulo de dimensão r e E_α o operador “step” correspondente a α . No caso das álgebras semi-simples, os únicos múltiplos de uma raiz α são $\pm\alpha$, os outros comutadores são da forma:

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}, & \text{se} \quad \alpha + \beta = \text{raiz} \\ 2\alpha \cdot \frac{H}{\alpha^2}, & \text{se} \quad \alpha + \beta = 0 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

As constantes $\epsilon(\alpha, \beta)$, são claramente anti-simétricas em α e β , poderão ser colocadas a ± 1 , pela escolha das fases dos E_α se todas raízes tem comprimento $\alpha^2 = \alpha_i \cdot \alpha_i$, então g é simplesmente laçado. A base $\{H_i, E_\alpha\}$ é denominada base de Cartan-Weyl e os geradores estão normalizados da seguinte forma,

$$\text{tr}(H_i H_j) \delta_{ij}, \quad \text{tr}(H_i E_\alpha) = 0, \quad \text{tr}(E_\alpha E_\beta) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta, 0} \quad (\text{A.6})$$

onde tr é a forma bilinear. Note que é conveniente fazer uma escolha de um conjunto de raízes que forme uma base com dimensão r , pois o número de pares $\pm\alpha$ excede a dimensão de g . Uma base $\{\alpha_i\}$ pode-se escrever uma combinação linear da seguinte forma:

$$\alpha = \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i, \quad (\text{A.7})$$

onde os coeficientes são inteiros de mesmo sinal. Se $m_i \geq 0$ ($m_i \leq 0$), α é denominada raiz positiva (negativa). Então define-se altura de uma raiz com:

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^r m_i, \quad (\text{A.8})$$

e a raiz mais alta de uma álgebra de Lie, ou seja, de maior altura escrevemos como:

$$\psi = \sum_{i=1}^r m_i^\psi \alpha_i, \quad m_i^\psi > 0. \quad (\text{A.9})$$

A matriz de Cartan $r \times r$ de g é formada pelos elementos do produto escalar,

$$K_{ij} = 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} \quad \text{com } 1 \leq i, j \leq r. \quad (\text{A.10})$$

Note que se pode introduzir uma outra base, denominada base de Chevalley, definindo:

$$H_a \equiv 2 \frac{\alpha_a H}{\alpha_a^2}, \quad (\text{A.11})$$

onde α_a é uma raiz simples de comutação dadas por,

$$[H_a, H_b] = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$[H_a, E_\alpha] = 2 \frac{\alpha \cdot \alpha_a}{\alpha_a^2} E_\alpha = \left(\sum_{b=i}^r m_b^a K_{ba} \right) E_\beta \quad (\text{A.13})$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} (q+1)\epsilon(\alpha, \beta)E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha + \beta = \text{raiz} \\ H_\alpha 2 \frac{\alpha}{\alpha^2} H, & \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

com q sendo o maior inteiro positivo tal que $\beta - q\alpha$ é uma raiz.

Então neste caso,

$$\text{tr}(H_a, H_b) = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab}. \quad (\text{A.14})$$

Seja uma representação finita de g . Pode-se tomar uma base $|\lambda_0\rangle$ na qual a subálgebra de Cartan(CSA), H_i , é diagonal.

$$H_i|\lambda\rangle = \lambda_i|\lambda\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (\text{A.15})$$

Onde o vetor r -dimensional, formado por autovalores λ_i (pesos) é denominado vetor peso. Para cada raiz α , $2\frac{\alpha}{\alpha^2} \cdot H$ agindo sobre $|\lambda\rangle$, deve tomar valores inteiros, assim

$$2\frac{\alpha \cdot \lambda}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{sendo } \alpha \text{ uma raiz} \quad (\text{A.16})$$

A condição (C.15) define uma rede $\Lambda_w(g)$ chamada rede de pesos de g . Existe uma base de $\Lambda_w(g)$ formada de pesos fundamentais, definidos por:

$$2\frac{\lambda_j \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \delta_{ij}, \text{ com } i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (\text{A.17})$$

Logo, qualquer peso $\lambda \in \Lambda_w(g)$ é da forma

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)}, \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.18})$$

Então numa dada representação finita de g , pode-se encontrar um estado de peso mais alto $|\lambda_0\rangle$ tal que

$$E_\alpha|\lambda_0\rangle = 0, \quad \alpha > 0, \quad (\text{A.19})$$

note que por outro lado o estado $E_\alpha|\lambda_0\rangle$ terá o peso $\lambda_0 + \alpha$ que será maior que λ_0 . Evidentemente, o subespaço gerado pela ação de g sobre λ_0 é dado pelos estados da forma

$$E_{-\beta_1} E_{-\beta_2} \cdots E_{-\beta_m} |\lambda_0\rangle, \quad (\text{A.20})$$

onde os $\beta_i > 0$ e cada um deles tem um peso menor. Este deve ser o espaço total se a representação for irredutível. Na base de Chevarlley obtém-se então:

$$H_\alpha|\lambda\rangle = 2\frac{\lambda \cdot \alpha}{\alpha^2} |\lambda\rangle = \chi|\lambda\rangle \quad \text{com } \chi \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.21})$$

Apêndice B

Álgebras de Kac-Moody afim

Serão apresentados alguns formalismos das álgebras de Kac-Moody afim \widehat{g} , mas somente a parte aplicada nos nossos desenvolvimentos ao logo do trabalho. Uma álgebra de Kac-Moody \widehat{g} afim à álgebra finita g se realiza como uma extensão da álgebra de “loop” de uma álgebra de Lie finita.

$$\widehat{g} = (g \otimes \mathbf{C}[z, z^{-1}]) \oplus \mathbf{C}C \oplus \mathbf{C}D. \quad (\text{B.1})$$

Onde $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$ é a álgebra dos polinômios de Laurent em z e $\mathbf{C}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} = \mathbf{C}, \mathbf{D}$) é um subespaço de dimensão 1. Se escrevermos um elemento de \widehat{g} como sendo $a_n \equiv (a \otimes z^n)$, onde $a \in g$ e $n \in \mathbb{Z}$ então álgebra se escreve da seguinte maneira

$$[a_n, b_m] = [a, b]_{n+m} + \delta_{m+n,0}(a, b)mC,$$

$$[D, a_n] = na_n,$$

$$[D, D] = [C, D] = [C, C] = [C, a_n] = 0,$$

como (a, b) é a forma de Killing de g e $[a, b]$ é o parenteses de Lie em g . C é o elemento central de \widehat{g} , e D é a derivação que induz naturalmente uma “graduação inteira” de \widehat{g} .

$$\widehat{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_i,$$

onde $[D, \widehat{g}_i] = i\widehat{g}_i$. O operador D define a chamada “graduação homogênea”. Neste , pode-se ressaltar a existência de uma subálgebra de Heisenberg natural de \widehat{g} . Introduzindo a

decomposição triangular da álgebra finita $g = n_- \oplus h \oplus n_+$, é definido a álgebra de Heisenberg homogênea como álgebra composta dos elementos $\{h \otimes z^n, C\}$:

$$[a_n, b_m] = \delta_{m+n,0}(a, b)mC.$$

Na base de Cartan-Weyl as relações de comutação serão dadas por:

$$[H_i^m, H_j^n] = mC\delta_{ij}\delta_{m,-n}, \quad (\text{B.2})$$

$$[H_i^m, E_\alpha^n] = \alpha_i E_\alpha^{m+n} \quad (\text{B.3})$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta)E_{\alpha+\beta}^{m+n}, & \text{se } \alpha + \beta = \text{raiz} \\ \frac{2}{\alpha^2}\alpha.H^{m+n} + Cm\delta_{m+n,0}, & \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$[C, E_\alpha^m] = [C, H_\alpha^m] = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$[D, E_\alpha^n] = nE_\alpha^n, \quad [D, H_i^n] = nH_i^n. \quad (\text{B.5})$$

Neste caso, a subálgebra de Cartan é gerada por $\{H_i^{(0)}, C, D\}$ e os operadores “step” serão: E_α^n associados às raízes $a = (\alpha, 0, n)$, com α pertencente ao conjunto de raízes de g e n são inteiros e H_i^n associados às raízes $n\delta = (0, 0, n)$ com $n \neq 0$. As raízes positivas serão $\alpha, 0, n$ para $n > 0$ ou $n = 0$ e $\alpha > 0$ sendo que as simples destas são $a_i = (\alpha_i, 0, 0)$, com $i = 1, \dots, r$ e $\alpha_0 = (-\psi, 0, 1)$. A razão pela qual introduzimos a álgebra de Kac-Moody na base de Cartan-Weyl é que a construção de uma representação em termos de operadores de vértice é usualmente efetuada nesta base. Na base de Chevalley, as relações de comutação para uma álgebra de Kac-Moody afim \hat{g} são:

$$[H_a^m, H_b^m] = mC\eta_{ab}\delta_{m+n,0} \quad (\text{B.6})$$

$$[H_a^m, E_\alpha^n] = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{ba} E_\alpha^{m+n} \quad (\text{B.7})$$

$$[E_\alpha^m, E_{-\alpha}^n] = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha H_a^{m+n} + \frac{2}{\alpha^2} mC\delta_{m+n,0} \quad (\text{B.8})$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = (q+1)\epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n}, \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ é uma raiz} \quad (\text{B.9})$$

$$[C, E_\alpha^m] = [C, H_\alpha^m] = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$[D, E_\alpha^n] = nE_\alpha^n, \quad [D, H_\alpha^n] = nH_\alpha^n \quad (\text{B.11})$$

onde $K_{ab} = 2\alpha_a \cdot \frac{\alpha_a}{\alpha_b^2}$ é a matriz de Cartan da álgebra de Lie finita simples g associada a \hat{g} gerada por: $\{H_a^0, E_\alpha^0\}$. $\eta_{ab} = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} = \eta_{ba}$, q é o maior inteiro positivo tal que $\beta - q\alpha$ é uma raiz, $\epsilon(\alpha, \beta)$ s]ao sinais determinadas pelas indentidade de Jacobi, l_a^α e m_a^α são os inteiros na expansão, $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2}$ e $\alpha = \sum_{a=1}^r m_a^\alpha \alpha_a$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são raízes simples de g , \hat{g} tem uma forma bilinear simétrica, que pode ser normalizada como,

$$\begin{aligned} Tr(H_a^m H_b^n) &= \eta_{ab} \delta_{m+n,0} \\ Tr(E_\alpha^m E_\beta^n) &= \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0} \\ Tr(CD) &= 1. \end{aligned}$$

As graduações inteiras de \hat{g}

$$\hat{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n,$$

são citadas em [15]. O operador de gradação d_s satisfaz,

$$[d_s, \hat{g}_n] = n\hat{g}_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.12})$$

é definida por

$$d_s = H_s + N_s D + \sigma C, \quad H_s = \sum_{a=1}^r s_a \lambda_a \cdot H^0, \quad H^0 = (H_1^0, \dots, H_r^0) \quad (\text{B.13})$$

onde (s_a) com $a = 1, \dots, r$ é um vetor de inteiros (primos relativos) não negativos, e $\lambda_a \equiv 2 \frac{\lambda_a}{\alpha_a^2}$ com λ_a e α_a sendo os pesos fundamentais e as raízes de g respectivamente. Além disso,

$$N_s = \sum_{i=0}^r s_i m_i^\psi, \quad \psi = \sum_{a=1}^r m_a^\psi \alpha_a, \quad m_0^\psi \equiv 1 \quad (\text{B.14})$$

com ψ sendo a raiz mais alta de g . O valor de σ é arbitrário. Portanto,

$$\begin{aligned} [d_s, H_a^n] &= n N_s H_a^n \\ [d_s, E_\alpha^n] &= \left(\sum_{a=1}^r m_a^\alpha s_a + n N_s \right) E_\alpha^n \end{aligned}$$

Os operadores “step” positivos e negativos de \hat{g} associadas às raízes simples são:

$$e_a \equiv E_{\alpha_a}^0, \quad e_0 \equiv E_{-\psi}^1, \quad f_a \equiv E_{-\alpha_a}^0 \quad \text{e} \quad f_0 \equiv E_{\psi}^{-1} \quad (\text{B.15})$$

e a sua subálgebra de Cartan gerada por:

$$h_a \equiv H_a^0, \quad h_0 \equiv - \sum_{a=1}^r l_a^\psi H_a^0 + \frac{2}{\psi^2} C \quad \text{e} \quad D. \quad (\text{B.16})$$

Com l_a^ψ dado em (C.32), então eles satisfazem:

$$[d_s, h_i] = [d_s, D] = 0, \quad [d_s, e_i] = s_i e_i, \quad [d_s, f_i] = -s_i f_i \quad \text{com} \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (\text{B.17})$$

Uma classe importante das representações das álgebras de Kac-Moody são chamadas “representações integráveis de peso mais alto” [15], $L(s)$ onde os geradores de Chevalley são localmente nilpotentes. Elas são definidas em termos de um estado de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$

rotulado pela graduação de \mathbf{s} de \widehat{g} . Pode-se ser mostrado que $L(s)$ é irredutível e que $|\lambda_s\rangle$ é o único vetor de peso mais alto de $L(s)$. Este estado é aniquilado pelos geradores de grau positivo,

$$\widehat{g}_+ |\lambda_s\rangle = 0, \quad (\text{B.18})$$

onde este é um autoestado dos geradores da subálgebra, \widehat{g}_0

$$h_i |\lambda_s\rangle = s_i |\lambda_s\rangle \quad (\text{B.19})$$

$$f_i |\lambda_s\rangle = 0, \quad \text{para qualquer } i \text{ com } s_i = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$d_s |\lambda_s\rangle = \eta_s |\lambda_s\rangle \quad (\text{B.21})$$

$$C |\lambda_s\rangle = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\psi s_i \right) |\lambda_s\rangle \quad (\text{B.22})$$

onde l_i^ψ é dado por:

$$\frac{\psi}{\psi} = \sum_{a=1}^r l_a^\psi \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2}, \quad l_0^\psi = 1. \quad (\text{B.23})$$

Notamos que os autovalor de d_s é arbitrário, e d_s pode ser diagonalizado agindo sobre $L(s)$. O autovalor do elemento central C na representação $|\lambda_s\rangle$, é conhecido como nível da representação,

$$c = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\psi s_i \right), \quad (\text{B.24})$$

em particular, as “representações integráveis de peso mais alto” com $c = 1$ são conhecidas como “representações básicas”. Os estados de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ podem-se realizar como,

$$|\lambda_s\rangle \bigoplus_{i=0}^r |\widehat{\lambda}_i\rangle^{\otimes s_i}, \quad (\text{B.25})$$

onde $|\widehat{\lambda}_i\rangle$ são os estados de peso mais alto das representações fundamentais de \widehat{g} denotados por $L(i)$, onde $s_j = \delta_{ji}$ (denotemos por d_i a sua correspondente derivação) e $\widehat{\lambda}_i$ os pesos fundamentais correspondentes de \widehat{g} .

Além disso,

$$\widehat{\lambda}_0 = \left(0, \frac{\psi^2}{2}, 0 \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\widehat{\lambda}_a = \left(\lambda_a, \frac{l_a^\psi \psi^2}{2}, 0 \right), \quad (\text{B.27})$$

onde λ_a com $a = 1, 2, \dots, r$ são pesos fundamentais da álgebra de Lie finita g associada a \widehat{g} , l_a^ψ é definido em (C.32), e as componentes são autovalores de H_a^0 , C e D respectivamente assim

$$H_a^0 |\widehat{\lambda}_0\rangle = 0, \quad C |\widehat{\lambda}_0\rangle = \frac{\psi^2}{2} |\widehat{\lambda}_0\rangle \quad (\text{B.28})$$

$$H_b^0 |\widehat{\lambda}_a\rangle = \delta_{a,b} |\widehat{\lambda}_a\rangle, \quad C |\widehat{\lambda}_a\rangle = \frac{\psi^2}{2} l_a^\psi |\widehat{\lambda}_0\rangle \quad (\text{B.29})$$

e

$$D |\widehat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (\text{B.30})$$

E note que, cada uma das representações das $r + 1$ representações fundamentais de \widehat{g} , os (únicos) estados de peso mais alto satisfazem,

$$h_j |\widehat{\lambda}_i\rangle = \delta_{ij} |\widehat{\lambda}_i\rangle \quad (\text{B.31})$$

$$e_j |\widehat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad \text{qualquer que seja } j \quad (\text{B.32})$$

$$f_j |\widehat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad \text{para } j \neq i \quad (\text{B.33})$$

$$f_j^2 |\widehat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (\text{B.34})$$

Assim, os geradores e_i e f_i são nilpotentes sobre $|\lambda_s\rangle$, e estas representações são ditas integráveis.

Apêndice C

Construção dos “operadores de vértice”

A construção dos “operadores de vértice” homogêneos é constituída levando em consideração a subálgebra de Heisenberg homogênea. Tomemos,

$$g = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} E_{\alpha} \right) \quad (\text{C.1})$$

g uma álgebra de Lie finita simples de classe A_l, D_l ou E_l , os quais suas relações de comutação são dadas por:

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0 & \text{se } h \text{ e } h' \in \mathfrak{h} \\ [h, E_{\alpha}] &= (h|\alpha) E_{\alpha}, & \text{se } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta \\ [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] &= -\alpha, & \text{se } \alpha \in \Delta \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &= 0, & \text{se } \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\} \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &= \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha, \beta \in \Delta. \end{aligned}$$

Note que $\Delta = \{\alpha \in Q : (\alpha|\alpha) = 2\}$ e Q é a rede das raízes e além disso $(|)$ é a forma simétrica invariante de g , normalizada da seguinte maneira:

$$(h|E_{\alpha}) = 0 \quad \text{se } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta, \quad (\mathbf{E}_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}) = -\delta_{\alpha, -\beta} \quad \text{se } \alpha, \beta \in \Delta.$$

Tome,

$$\widehat{g} = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbf{c}g + \mathbf{C}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{D}, \quad (\text{C.2})$$

a álgebra afim de classe $A_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ ou $E_n^{(1)}$. Consideremos a álgebra associativa comutativa (complexa)

$$V = S \left(\bigoplus_{j < 0} (t^j \otimes h) \right) \otimes \mathbf{c}\mathbf{C}[\mathbf{Q}]. \quad (\text{C.3})$$

Note que S representa a álgebra simétrica e $C[Q]$ a álgebra de grupo da rede formada por raízes $Q \subseteq h$ de g . Tome $\alpha \mapsto e^\alpha$ denotando a inclusão de $Q \subseteq C[Q]$ (uma base $C[Q]$ -espaço vetorial formado por e^α , tal que $\alpha \in Q$ e defina o produto na álgebra do grupo, $e^\alpha e^\beta = \epsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}$).

Note que $u^{(n)}$ representa $t^n \otimes u$ ($n \in \mathbb{Z}$, $u \in g$). Para $n > 0$ e $u \in h$, tomemos por $u(-n)$ o operador multiplicativo por u^{-n} sobre V . Para $n \geq 0$ e $u \in h$, denotemos por $u(n)$ a derivação da álgebra V definida por .

$$u(n)(v^{(-m)} \otimes e^\alpha) = n\delta_{n,-m}(u|v) \otimes e^\alpha + \delta_{n,0}(\alpha|u)v^{(-m)} \otimes e^\alpha. \quad (\text{C.4})$$

Escolhemos com base dual u_i, u^i de h e defina o operador D_0 sobre V pela fórmula.

$$D_0 = \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} u_i(0) u^i + \sum_{n \geq 1} u_i(-n) u^i(n) \right). \quad (\text{C.5})$$

Por conseguinte, para $\alpha \in Q$, defina o operador sinal c_α , isto é,

$$c_\alpha(f \otimes e^\beta) = \epsilon(\alpha, \beta) f \otimes e^\beta. \quad (\text{C.6})$$

Enfim, para $\alpha \in \Delta \subseteq Q$ introduzimos o operador vértice,

$$\Gamma_\alpha(z) = \exp \left(\sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j} \alpha(-j) \right) (\exp) \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \alpha(j) \right) e^\alpha z^{\alpha(0)} c_\alpha \quad (\text{C.7})$$

o elemento z é um parâmetro, e conseqüentemente expandimos em potências de z (C.7), o qual se torna,

$$\Gamma_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Gamma_\alpha^j z^{-j-1} \quad (\text{C.8})$$

Teorema C.1. *O mapeamento $\sigma : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \text{End}(V)$ definido por:*

$$\begin{aligned} C &\longmapsto 1 \\ u^n &\longmapsto u(n), \quad \text{para } u \in \mathfrak{h}, n \in \mathbb{Z} \\ E^{(n)} &\longmapsto \Gamma^{(n)}, \quad \text{para } \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z} \\ D &\longmapsto -D_0. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Defina a representação básica da álgebra agem $\widehat{\mathfrak{g}}$ sobre V , onde $\text{End}(V)$ denota o espaço do mapeamento de um V -espaço vetorial sobre ele, mesmo.

Demonstração. ver [15]. □

Tome agora $H[1]$ a subálgebra de Heisenberg de $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ (associada à graduação homogênea) com a base $\{u^{(n)}, n \in \mathbb{Z}; C\}$ os quais obedecem a leis de comutação:

$$[C, u^{(n)}] = 0 \quad \text{tal que } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.10})$$

$$[u^{(m)}, u^{(n)}] = m\delta_{m,-n}C \quad \text{tal que } m, n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.11})$$

Tomemos agora o espaço de Fock $B = C[x_1, x_2, \dots]$, o espaço dos polinômios com infinitas variáveis x_1, x_2, \dots .

Dados $u, c \in \mathbf{R}$ defina a seguinte representação de $H[1]$ em B com $n \in \mathbf{N}$, isto é,

$$u^{(n)} = \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (\text{C.12})$$

$$u^{(-n)} = c\epsilon_n^{-1} n x_n, \quad (\text{C.13})$$

$$u^{(0)} = \mu I, \quad (\text{C.14})$$

$$C = cI. \quad (\text{C.15})$$

Note que estes operadores satisfazem (C.10) e (C.11) e ainda os ϵ_n são reais arbitrários.

Lema C.2. *Se $C \neq 0$ então (C.12), (C.15), é irredutível. O polinômio $\nu = 1$, o qual é chamado de vetor no vácuo do espaço vetorial B , tem as seguintes propriedades:*

$$u^{(n)}(\nu) = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$u^{(0)}(\nu) = \mu\nu \quad (\text{C.17})$$

$$C(\nu) = c\nu \quad (\text{C.18})$$

Demonstração. ver [15]. □

Proposição C.3. *Seja V_0 uma representação de $H[1]$ que admite um vetor não nulo ν satisfazendo (C.16) e (C.18) com $c \neq 0$ então os monômios*

$$[u^{-1}]^{k_1} \dots [u^{(-n)}]^{k_n}(\nu), \quad k_i \in \mathbf{Z}_+$$

são linearmente independentes (LI). Se estes monômios expandem V_0 , então este é equivalente a representação de $H[1]$ em B dada por (C.12) e (C.15) em particular se V_0 for irredutível.

Demonstração. Ver [15]. □

Defina um operador antilinear w agindo sobre H , tal que,

$$w(u^{(n)}) = u^{(-n)} = [u^{(n)}]^\dagger, \quad w(C) = C.$$

Proposição C.4. *Seja V_0 como na (C.3), então V_0 tem uma única forma Hermitiana $\langle \cdot | \cdot \rangle$ que é contravariante em relação a w , e tal que $\langle \nu | \nu \rangle = 1$ para o vetor de vácuo ν . Os diferentes $[u^{(-1)}]^{k_1}, \dots, [u^{(-n)}]^{k_n}(\nu)$ com $k_i \in \mathbf{Z}_+$ formam uma base ortogonal em relação a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e as normas destes monômios são dadas por.*

$$\langle [u^{-1}]^{k_1} [u^{(-n)}]^{k_n} \nu | [u^{-1}]^{k_1} [u^{(-n)}]^{k_n} \nu \rangle = \prod_{j=1}^n k_j! (c_j)^{k_j}$$

Demonstração. Ver [15]. □

Observação C.5. *Note que σ é a representação básica de \hat{g} com o estado de peso mais alto dado por $1 \otimes 1$*

C.1 Cálculo usando “operadores de vértice” homogêneos

Definindo:

$$\Gamma_{\alpha}^{\pm}(z) = \exp \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(\pm j)}{\mp j} z^{\mp j}, \quad e \quad \Gamma_{\alpha}^0 = e^{\alpha} z^{\alpha(0)} c_{\alpha}. \quad (\text{C.19})$$

Obteremos,

$$\Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) = \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) \Gamma^{-}(z_1) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)}. \quad (\text{C.20})$$

Posteriormente iremos mostrar a veracidade de (C.20). Tomemos então,

$$\Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) = e^{\sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(-j)}{j} z_1^j}, \quad \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) = e^{\sum_{j \geq 1} \frac{\beta(-j)}{j} z_2^j} \quad (\text{C.21})$$

$$\left[\sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(-j)}{j} z_1^j, \sum_{k \geq 1} \frac{\beta(k)}{-k} z_2^{-k} \right] = \sum_{j,k} \frac{z_1^j}{z_2^k} \frac{1}{\delta_k} [\delta(-j), \beta(k)] \quad (\text{C.22})$$

além disso,

$$\left[j x_j, 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = -2j \delta_{j,k} \quad (\text{C.23})$$

então por (C.21), (C.22) e (C.23) temos

$$2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \frac{1}{k^2} \right) \quad (\text{C.24})$$

isto implica em,

$$e^{\ln \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{(\alpha|\beta)}} = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{(\alpha|\beta)} \quad (\text{C.25})$$

Logo então concluímos que (C.20) é verdadeira. Além disso, temos

$$\Gamma_{\alpha}^0(z) = e^{\alpha} z^{\alpha(0)} c_{\alpha}$$

então

$$\Gamma_{\alpha}^{(0)}(z_1) \Gamma_{\beta}^{(0)}(z_2) = e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} z^{\alpha|\beta} c_{\alpha} c_{\beta} \epsilon(\alpha|\beta) \quad (\text{C.26})$$

onde

$$\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^m, \quad m \in Z \text{ com } \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \leq 1. \quad (\text{C.27})$$

Então por (C.20) e (C.27) teremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha(z_1)\Gamma_\beta(z_2) &= \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)} z_1^{(\alpha|\beta)} \epsilon(\alpha|\beta) \exp \left[\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} (z_1^j \alpha(-j) + z_2^j \beta(-j)) \right] \\ &\quad \exp \left[- \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} (z_1^{-j} \alpha(j) + z_2^{-j} \beta(j)) \right] e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} c_\alpha c_\beta \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Se $z \equiv z_1 = z_2$ e $\alpha = \beta$ de (C.28), logo obteremos o resultado bastante importante a seguir.

$$\Gamma_\alpha(z)\Gamma_\alpha(z) = 0$$

ou seja,

$$[\Gamma_\alpha(z)]^n = 0, \quad \text{quando } n \geq 2 \quad (\text{C.29})$$

Uma fórmula bastante útil é:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\alpha_N}(z_N)\Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \cdots \Gamma_{\alpha_1}(z_1)(1 \otimes 1) = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \epsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} \left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \otimes \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Demonstração. Ver [2]. □

Fazendo a correspondência abaixo,

$$|\lambda_0\rangle \iff 1 \otimes 1$$

onde $|\lambda_0\rangle$ denota o estado de peso mais alto da representação, então escreve-se:

$$\begin{aligned} &\langle \lambda_0 | \Gamma_{\alpha_N}(z_N)\Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \cdots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_0 \rangle = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^M \alpha_i \neq 0 \\ \prod_{i \leq i < j \leq N} \epsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

no argumento anterior foi usado o fato de que:

$$\begin{aligned}\langle \lambda_0 | \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) &= \langle \lambda_0 | \left(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) + \dots \right) \\ &= \langle \lambda_0 |,\end{aligned}$$

e,

$$\langle \lambda_0 | \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 0 \\ \langle \lambda_0 |, & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Apêndice D

Elementos de matriz usando “operadores de vértice” homogêneos de $\widehat{sl}(2)$

Na álgebra afim $\widehat{sl}(2)$ tomemos a base,

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Observação D.1. *Uma base dual na álgebra de Kac-Moody implica em traço do produto de dois a dois elementos da desta base tem que ser igual a um, isto é, $\text{tr}(AB) = 1$.*

Então tomamos a seguinte base dual de $\widehat{sl}(2)$,

$$\{t^n h, t^n e, t^n f, C, D\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{1}{2} t^{-n} h, t^{-n} f, t^{-n} e, D, C \right\},$$

e usando o “gauge fixing” de [17] para $\epsilon(\alpha, \beta)$, então,
 $Q = Z\alpha$, $(\alpha|\alpha) = 2$, $\epsilon(\alpha, \alpha) = \epsilon(-\alpha, -\alpha) = -1$ e $\epsilon(-\alpha, \alpha) = \epsilon(\alpha, -\alpha) = 1$

Seja $q = e^\alpha$, identificando $\mathbb{C}[Q]$ com $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Logo, a construção de vértice homogêneos será feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
L(\lambda_0) &= [x_1, x_2, \dots, q, q^{-1}] \\
\alpha^{(n)} &\mapsto 2\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \text{e} \quad \alpha^{(-n)} \mapsto nx_n \quad \text{para} \quad n > 0, \quad \alpha^{(0)} \mapsto 2q\frac{\partial}{\partial q} \\
C &\mapsto 1, D \mapsto -\left(q\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 - \sum_{n \geq 1} nx_n \frac{\partial}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Define-se:

$$E(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{\pm}^{(n)} z^{-n-1} \mapsto \Gamma_{\pm}(z)$$

note que,

$$\begin{aligned}
\oint Z^m E(z) dz &= \oint \sum_{-\infty}^{\infty} Z^{m-n} Z dz \\
\oint Z^m E(z) dz &= 2\pi i E_{\pm}^{(m)} \\
\frac{1}{2\pi i} \oint Z^m E(z) &= E_{\pm}^{(m)} \tag{D.2}
\end{aligned}$$

onde,

$$\Gamma_{\pm}(z) = \exp\left(\pm \sum_{j \geq 1} z^j x_j\right) \exp\left(\mp 2 \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) q^{\pm 1} z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}} c \pm \alpha$$

Observação D.2.

$$z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}}(q^n) = z^{\pm 2n} q^n.$$

Então por coseguinte, como,

$$G_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_i^n E_+^{(-n)}, \quad F_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^n E_-^{(-n)}.$$

Logo podemos fazer a correspondência seguinte:

$$F_i \mapsto \nu_i \Gamma_-(\nu_i), \quad G_i \mapsto \rho_i \Gamma_+(\rho_i).$$

Então operando a equação (C.31) com o objetivo de calcular os elementos de matriz usados no capítulo 4, teremos:

$$\langle \lambda_0 | \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}} \cdots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_0 \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^M \alpha_i \neq 0 \\ \prod_{i \leq i < j \leq N} \epsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)} & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Este determina que usaremos dois operadores distintos, ou seja, $\Gamma_{\pm}(z)$, associados a α e $-\alpha$ respectivamente. Então temos um número par de Γ 's nesta equação, para se ter uma quantidade diferente de zero de elementos de matriz, isto é, escolhendo $2N$ operadores, os quais N operadores correspondem a α e os outros N operadores correspondem a $-\alpha$.

D.1 Cálculo de componentes matriciais usados na construção de 1-sóliton, 2-sóliton do sistema NLS

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | F_i G_j | \lambda_0 \rangle &= \langle \lambda_0 | G_j F_i | \lambda_0 \rangle = \nu_i \rho_j \langle \lambda_0 | \Gamma_-(\nu_i) \Gamma_+(\rho_j) | \lambda_0 \rangle \\ &= \nu_i \rho_j \frac{\epsilon(+, -)}{(\nu_i - \rho_j)^2} \\ &= \frac{\nu_i \rho_j}{(\nu_i - \rho_j)^2}. \end{aligned}$$

No caso particular temos:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | E^1 G_j | \lambda_0 \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \cdot z \rho_j \langle \lambda_0 | \Gamma_-(z) \Gamma_+(z) | \lambda_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \rho_j \oint dz \cdot \frac{z}{(z - \rho_j)^2} \\ &= \rho_j. \end{aligned}$$

Observação D.3. Note que na operação anterior usamos o fato (D.2) cujo contorno é um círculo em torno da origem.

Do mesmo modo, calculamos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_0 | E_-^1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_0 \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z. \rho_1 \nu_2 \rho_2 \langle \lambda_0 | \Gamma_-(z) \Gamma_+(\rho_1) \Gamma_-(\nu_2) \Gamma_+(\rho_2) | \lambda_0 \rangle \\
&= \frac{(z_1 - \nu_2)^2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{(z - \rho_1)^2 (z - \rho_2)^2 (\rho_1 - \nu_2)^2 (\nu_2 - \rho_2)^2} \\
&= \rho_1 \nu_2 \rho_2 \frac{(\rho_1 - \nu_2)^2}{(\rho_1 - \nu_2)^2 (\nu_2 - \rho_2)^2} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz. z. (\nu_2 - z)^2}{(\rho_1 - z)^2 (\rho_2 - z)^2} \quad (D.3) \\
&= \frac{\rho_1 \nu_2 \rho_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{(\rho_1 - \nu_2)^2 (\nu_2 - \rho_2)^2}
\end{aligned}$$

Observação D.4. A integral em relação a z da expressão (D.3) é igual a 1 (um), neste foi aplicado o **Teorema de Pólos e Resíduos**, ou simplesmente poderíamos integrar por frações parciais.

Logo os elementos de matriz podem ser calculados de forma semelhante aos anteriores, então:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_0 | E_-^1 G_j | \lambda_0 \rangle &= \rho_j \\
\langle \lambda_0 | F_i G_i F_j G_j | \lambda_0 \rangle &= \frac{\rho_i \nu_j \rho_i \rho_j (\rho_j - \rho_i)^2 (\nu_j - \nu_i)^2}{(\rho_j - \nu_j)^2 (\rho_j - \nu_i)^2 (\rho_i - \nu_i)^2 (\rho_i - \nu_j)^2} \\
\langle \lambda_0 | E_-^1 G_i F_j G_j | \lambda_0 \rangle &= \frac{\rho_i \nu_j \rho_i (\nu_j - \nu_i)^2}{(\rho_j - \nu_j)^2 (\nu_j - \rho_i)^2} \\
\langle \lambda_0 | E_+^1 F_i G_i F_j | \lambda_0 \rangle &= \frac{\nu_i \nu_j \rho_i (\nu_j - \nu_i)^2}{(\rho_j - \nu_j)^2 (\nu_j - \rho_i)^2} \\
\langle \lambda_0 | E_+^1 F_i | \lambda_0 \rangle &= \nu_i.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] V. Pierce, “*Painlevé Analyses and Integrability*”, *The Nonlinear Journal*, 11(1999), 41–49.
- [2] H. Blas, “*Some Algebraic Aspects of the Generalized Non-Linear Schrödinger Equations Unified*”,(in Portuguese),MSc. Thesis,IFT-UNESP, São Paulo(1996); Brazil 1,[arxiv:solv-int/99 12015].
- [3] *Notice of the American Mathematical Society*, 10(2006), 1180.
- [4] <http://smart.tin.it/schietti/1/4/news-fotos-pictures/2005-04-01-archives.html>
- [5] <http://bojan.info/seminarski/solitoni/5-1-2-soliton-soliton.html>
- [6] A. Das, *Integrable Models*, Word Scientific, Singapore (1989).
- [7] H.Blas, L.A.Ferreira, J. F. Gomes, and A.H. Zimerman “*Some comments on the bi(tri)-Hamiltonian structure of generalized AKNS and DNLS hierarchies*”,*Physics Letters A*(1998),225–233.
- [8] P. G. Drazin and R. S. Johnson, “*Solitons: an introduction*”,Cambridge University Press.
- [9] L.A. Ferreira, J.L. Miramontes, J. S. Guillén “*Solitons, τ -functions and hamiltonian reduction for non-Abelian conformal affine Toda theories*”, *Nuclear Physics B*,(1995),631–679.
- [10] J. Lepowsky, and R. L. Wilson, *Commun. Math. Phys* 62 “*Construction of Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$* ”, Springer-Verlag,(1978), 43–53.

-
- [11] R. Gilmore, “*Lie Groups Lie Algebras and Some of Their Applications*”, Dover Publications, INC. Mineola, New York (2005).
- [12] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física, Primeira Edição,(2004).
- [13] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, and V.E. Zakharov, Contemporary Soviet Mathematics, *THEORY OF SOLITONS: The inverse Scattering Method*, Revaz Gamkrelidze, Stklov Institute, Moscow, USSR,(1984).
- [14] <http://nlds.sdsu.edu/masters/waves/nonlinear-waves.html>
- [15] V.G, Kac, “*Infinite dimensional Lie Algebras*”, Third (Eds), Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [16] C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal and R.M.Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries type*, Physics rev. Lett. 19,(1967) 1095.
- [17] I.B. Frenkel and V.G. Kac, “*Basic Representations of Affine Lie Algebras and Dual Resonance Models*’, Invent. Math. 62(1980)28.
- [18] V.G Drinfeld and V.V. Sokolov,J. Sov. Math. 30 “ *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries Equations*” , (1985)1975..
- [19] V. G. Kac and M. Wakimoto, “*Exceptional hierarchies of soliton equations*”, Proc. of Symp. in Pure Mathematic,49(1989)191.
- [20] G. Howard, “*Lie algebras in particle physics*”, The Benjamin/Cumming Publishing Company, Harvard University(1982).
- [21] F. Chaulub, J. Zubelli, “*Sólitos: Na Crista da Onda por Mais de 100 anos*”, IMPA,1–20(2000).
- [22] B. G. Konopelchenko, C. Rogers, “*Nonlinear Equations in Applied Scientific*”,W.F Ames and Rogers(Eds) Ac. Press INC. San Diego(1992).
- [23] SILVA, M.J.B.F. , H. Blas “*Generalization of NLS equations and soliton solutions*”,(in progress).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)