

Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Física

***Energia e Momento Angular do Universo de
Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker na
Gravidade Teleparalela***

Josiel Silva Moura

Orientador: Prof. Dr. Adellane Araujo Sousa

Cuiabá, Março de 2007.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Josiel Silva Moura

***Energia e Momento Angular do Universo de
Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker na
Gravidade Teleparalela***

Orientador: Prof. Dr. Adellane Araujo Sousa

Dissertação apresentada ao Departamento de Física do ICET da Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em física.

Agradecimentos

Ao prof. Dr. Adellane A. Sousa, pela confiança que teve em mim desde o início e por sua paciência e esforço na orientação desta dissertação.

Ao Amigo Aglezio, que esteve ao meu lado neste caminho árduo.

A todos os amigos que este Mestrado me propiciou, e aos inimigos que possa ter feito também.

A CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual a conclusão deste trabalho não teria sido possível.

Em especial a minha família pelo incentivo e também pela compreensão nos momentos de ausência.

Resumo

A energia-momento e o momento angular gravitacional são tratados na literatura por meio de diferentes aproximações. A abordagem mais comum é baseada no uso de pseudo-tensores. Por outro lado, o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG) é uma reformulação da Relatividade Geral (RG) de Einstein nos termos dos campos de tétradas e do tensor de torção. Na estrutura Hamiltoniana do TERG é possível estabelecer que os tensores de energia-momento e momento angular gravitacional surgem de uma conveniente interpretação das formas integrais das equações de vínculos $C^a = 0$ e $\Gamma^{ab} = 0$, respectivamente.

Neste trabalho, fixando o calibre de Schwinger e uma apropriada simetria espacial, calculamos as tétradas correspondentes à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Considerando as equações de campo do TERG e o tensor de energia-momento para um fluido perfeito, encontramos equações equivalentes às equações de Friedmann da RG. Utilizando o quadri-vetor de energia-momento total implementado por Maluf, encontramos que a energia total do universo fechado de FLRW, o qual inclui a energia da matéria e a do campo gravitacional, é zero.

Comparamos este resultado com aqueles obtidos a partir dos pseudo-tensores de Einstein, Bergmann-Thonson e Landau-Lifshitz. Finalmente, encontramos que o momento angular gravitacional para o universo de FLRW é zero, como esperado.

Palavras Chaves:Teleparalelismo; Energia e Momento Angular Gravitacional

Abstract

The energy-moment and the gravitational angular moment are treated in literature by means of different approaches. The most common is based on the use of pseudotensors. On the other hand, the Teleparallel Equivalent of General Relativity (TEGR) is a reformulation of Einstein's General Relativity (GR) in terms of the tetrad fields and the torsion tensor. In the Hamiltonian structure of the TERG it is possible to establish that the tensors of energy-moment and gravitational angular moment appear from a convenient interpretation of the integral forms of the equations of constraints $C^a = 0$ and $\Gamma^{ab} = 0$, respectively.

In this work, fixing the gauge of Schwinger and an appropriate space symmetry, we calculate the tetrad corresponding to the metric of Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Considering the field equations of the TERG and the energy-moment tensor for a perfect fluid, we find equations equivalent to Friedman's of the GR. Using the 4-vector of total energy-moment implemented by Maluf, we find that the total energy of the closed universe of FLRW, which includes the energy of the matter and of the gravitational field, is zero.

We compare this result with those obtained from pseudo-tensors of Einstein, Bergmann-Thonson and Landau-Lifshitz. Finally, we find that the gravitational angular moment for the FLRW universe is zero, as expected.

Sumário

Introdução	p. 1
1 O Modelo Cosmológico Padrão	p. 6
1.1 Homogeneidade e Isotropia: A Métrica de Robertson-Walker	p. 6
1.2 Tensor de Energia-Momento da Matéria	p. 9
1.3 Equações de Campo de Einstein	p. 10
2 O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral	p. 12
2.1 Conceitos Básicos	p. 12
2.2 Formulação Lagrangeana e Hamiltoniana do TERG	p. 17
3 O Equivalente Teleparalelo da Solução de Friedmann	p. 21
3.1 Cálculo das Tétradas	p. 21
3.2 Equações de Campo	p. 25
4 A Energia-Momento na Gravidade Teleparalela	p. 34
4.1 Pseudo-tensores de Energia-Momento do Campo Gravitacional	p. 34
4.1.1 Pseudo-tensor de Einstein	p. 34
4.1.2 Pseudo-tensor de Landau e Lifshitz	p. 36
4.1.3 Pseudo-tensor de Bergmann-Thomson	p. 36

4.2	Tensor de Energia-Momento Gravitacional	p. 37
4.3	A Energia Total do Universo de FLRW	p. 41
4.4	O Momento Total do Universo de FLRW	p. 43
4.5	Resultados da Literatura	p. 46
5	Momento Angular do Campo Gravitacional no TERG	p. 47
5.1	Expressão do Momento Angular Gravitacional	p. 47
5.2	Cálculo do Momento Angular Gravitacional	p. 48
	Conclusão	p. 51
	Referências Bibliográficas	p. 52
	Apêndice A – Cálculo das Componentes do Tensor de Torção	p. 55
	Apêndice B – Cálculo das Componentes de Σ^{abc}	p. 57

Introdução

A teoria da Relatividade Geral (RG), estabelecida por Albert Einstein em 1916, obteve sucessos consideráveis ao explicar a precessão da órbita do planeta Mercúrio, e ao prever corretamente os fenômenos de deflexão e desvio das frequências das ondas eletromagnéticas no campo gravitacional, bem como a expansão do universo, dentre outros. No entanto, podemos destacar duas dificuldades com a teoria de Einstein. A primeira seria a sua incompatibilidade com a teoria quântica, assunto que foge ao escopo deste trabalho devido a sua imensa complexidade. A segunda dificuldade é o chamado *problema da localidade da energia do campo gravitacional*.

De um modo geral, acredita-se que a energia do campo gravitacional não pode ser localizada, isto é, definida numa região finita do espaço. Esta interpretação é oriunda dos trabalhos de Landau e Lifshitz, onde eles apresentam um pseudo-tensor do campo gravitacional, dependente da derivada segunda do tensor métrico. Esta quantidade pode ser anulada por uma transformação de coordenadas adequada. Eles justificam os resultados como sendo consistentes com o Princípio de Equivalência de Einstein. Neste princípio pode-se sempre encontrar uma região pequena do espaço-tempo, onde prevalece o espaço-tempo de Minkowski. Em tal espaço-tempo, a energia do campo gravitacional é nula. Assim, só podemos definir a energia do campo gravitacional na RG em toda região do espaço-tempo e não apenas em uma região localizada. Para contornar essa dificuldade, modelos geométricos alternativos à RG foram construídos utilizando-se do tensor de torção.

O conceito de torção é tão antigo quanto o da própria teoria da gravitação de Einstein, ou seja, da RG. A noção de torção de uma variedade, além da de curvatura, foi introduzida por Cartan (CARTAN, 1922b, 1922a), que também deu uma interpretação geométrica para os dois

tensores. Considere um vetor em algum ponto da variedade e transporte-o paralelamente ao longo de uma curva infinitesimal fechada, projetada no espaço tangente. Se a conexão utilizada para realizar o transporte paralelo tiver torção, obteremos uma diferença entre as extremidades da curva no espaço tangente. Em outras palavras, paralelogramos geodésicos infinitesimais não fecham na presença de torção (PEREIRA; VARGAS, 2002). Já o efeito da curvatura produz uma mudança na direção do vetor quando o mesmo volta ao ponto de partida. Assim, enquanto a torção aparece diretamente relacionada à translações, a curvatura aparece diretamente relacionada à rotações na variedade. Uma variedade generalizada que apresenta torção e curvatura não nula ao mesmo tempo é chamada de variedade de Riemann-Cartan.

É importante mencionar que, de forma independente, Weitzenböck (WEITZENBÖCK, 1923) introduziu, também na década de 20, uma variedade que apresenta apenas torção, com curvatura nula. Esta variedade possui uma métrica do tipo Riemanniana, mas com base nas tétradas. Ela é conhecida como variedade de Weitzenböck. A condição de que temos curvatura nula no espaço-tempo de Weitzenböck conduz a um *paralelismo absoluto* ou *teleparalelismo* de um campo de 4 vetores linearmente independentes, chamado de *campo de tétradas* ou, simplesmente, *tétradas*, sendo então a gravitação nesse espaço-tempo descrita por essas variáveis.

A primeira proposta de utilizar tétradas para a descrição do campo gravitacional foi feita por Einstein (EINSTEIN, 1928) em 1928 na tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Como Einstein não obteve sucesso na geometrização gravitação-eletromagnetismo, uma vez que não encontrou a solução de Schwarzschild para a forma simplificada de sua equação de campo, as descrições em termos da geometria teleparalela e dos campos de tétradas ficaram esquecidas por algum tempo. Mais tarde, Møller (MØLLER, 1961) resgatou a idéia de Einstein mostrando que só em termos de tétradas podemos obter uma densidade Lagrangeana que nos leve a um tensor de energia-momento gravitacional. Este tensor de energia-momento construído a partir da derivada primeira das tétradas não se anula por qualquer transformação de coordenadas. A partir dos trabalhos de Møller, Pellegrine e Plebanski (PELLEGRINI; PLEBANSKI, 1962) uma formulação Lagrangeana para a gravitação em termos das tétradas foi obtida. Em 1963, Schwinger (SCHWINGER, 1963), utilizando o formalismo das tétradas obteve uma ex-

pressão para a energia total do campo gravitacional.

No final da década de 1960, Hayashi e Nakano (HAYASHI; NAKANO, 1967) começaram a formular a teoria de calibre do grupo de translações do espaço-tempo. Hayashi e Shirafuji (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979) uniram esta teoria com a estrutura do paralelismo absoluto e desenvolveram uma teoria denominada por eles de “nova relatividade geral”. Entre 1976 e 1980, Schweizer e Straumann (SCHWEIZER; STRAUMANN, 1979), Nitsch e Hehl (NITSCH; HEHL, 1980), e Schweizer et. al (SCHWEIZER; STRAUMANN; WIPF, 1980) demonstraram a equivalência, do ponto de vista observacional, entre o teleparalelismo e a RG.

Em 1994, Maluf (MALUF, 1994) apresentou a formulação Hamiltoniana no contexto do teleparalelismo equivalente, no calibre de Schwinger (SCHWINGER, 1963). A partir deste trabalho é mostrado que é possível definir a energia do campo gravitacional por meio de uma adequada interpretação do chamado vínculo Hamiltoniano. Diversas configurações de energias gravitacionais foram investigadas com êxito, tais como nas configurações do espaço-tempo de de Sitter (MALUF, 1996), buraco negro de Kerr (MALUF et al., 2002), defeitos canônicos (MALUF; GOYA, 2001), dentre outros. Para Andrade e Pereira (ANDRADE; PEREIRA, 1997), no espaço-tempo de curvatura nula a gravitação é descrita completamente pela torção e manifesta-se como um *força* análoga à de Lorentz da interação eletromagnética.

Em 2000, Sousa e Maluf (SOUSA; MALUF, 2000b, 2000a) estabeleceram o formalismo Hamiltoniano de teorias arbitrárias do teleparalelismo usando o “gauge” de Schwinger. A partir deste trabalho é mostrado que a única teoria de teleparalelismo gravitacional consistente para campos gravitacionais fracos é o TERG.

Em 2001, Maluf e Rocha-Neto (MALUF; ROCHA-NETO, 2001) estabeleceram uma teoria em que o calibre de Schwinger não é mais incorporado na estrutura geométrica. Com isso percebeu-se o surgimento de um outro vínculo que foi interpretado como o momento angular do campo gravitacional. Esta expressão foi aplicada satisfatoriamente à métrica de uma casca esférica em rotação (MALUF et al., 2002, 2006b) e para a métrica do buraco negro tridimensional de Banãdos, Teitelboim e Zanelli (BTZ) (SOUSA; PEREIRA; ROCHA-NETO, 2005).

O complexo (pseudo-tensor) de energia-momento é formado pela soma do pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional mais o tensor de energia-momento da matéria. Na literatura (AGUIRREGABIRIA et al., 1995; SALTÍ, 2006) estes complexos aparecem com diversos nomes, como Landau-Lifshitz, Bergmann-Thompson, Einstein, entre outros. Eles diferem entre si na maneira em que são construídos. Estes complexos tem sido aplicados à diversas configurações do campo gravitacional, como o universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Waker (FLRW). Nos trabalhos de Rosen (ROSEN, 1994), Cooperstock (COOPERSTOCK, 1994) e Vargas (VARGAS, 2004) dentre outros, mostram que para o universo fechado, a energia total é zero, resultados compatíveis com os argumentos físicos contidos no trabalho de Tryon (TRYON, 1973).

Nesta dissertação estudaremos o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), que é uma descrição geométrica alternativa à formulação usual de Einstein da RG, sendo que agora a variável fundamental para a descrição do campo gravitacional é a tetrada e não a métrica. Na primeira parte deste trabalho, analisaremos a equivalência entre a RG e o TERG. Mais especificamente, consideraremos o caso da solução do universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de Robertson-Walker em coordenadas cartesianas. O motivo de se usar o sistema de coordenadas cartesiano é para posterior comparação dos resultados do nosso trabalho com outros resultados da literatura. Na segunda parte, iremos aplicar a formulação Hamiltoniana e as equações de campo do TERG implementadas por Maluf (MALUF, 1994, 1995, 2005) para encontrar os valores da energia-momento (campo gravitacional mais matéria) e momento angular gravitacional no universo de FLRW. As aplicações das expressões de energia-momento e momento angular gravitacional, ao universo de FLRW, são inéditos na literatura até onde verificamos.

Esta dissertação é organizada como se segue. No primeiro capítulo será apresentada a estrutura do modelo cosmológico padrão, ou seja, o universo de FLRW e a solução para as equações de campo de Einstein na estrutura da RG, para posteriormente fazermos a comparação com a solução do TERG. No segundo capítulo faremos uma revisão da parte formal da teoria teleparalela e no terceiro capítulo encontraremos as soluções das equações de campo do TERG. No

quarto capítulo consideraremos a formulação Hamiltoniana do TERG, verificando a expressão para a energia-momento do campo gravitacional mais a matéria que surge naturalmente nessa formulação ao tomarmos a forma integral do vínculo Hamiltoniano. No quinto e último capítulo definiremos o momento angular do campo gravitacional na estrutura do TERG, interpretando adequadamente a equação de vínculo, que surge na formulação Hamiltoniana. Finalmente, apresentaremos as conclusões do trabalho.

Notações e Convenções: Usaremos o alfabeto Grego ($\mu, \nu, \rho \dots = 0, 1, 2, 3$) para denotar os índices do espaço-tempo, e o alfabeto Latino ($a, b, c, \dots = (0), (1), (2), (3)$) para denotar os índices relacionados ao espaço tangente, o qual é um espaço de Minkowski com métrica $\eta_{ab} = \eta^{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Os índices de espaço e tempo serão indicados de acordo com $\mu = 0, i$ e $a = (0)(i)$, onde $i = 1, 2, 3$.

As grandezas relacionadas ao espaço-tempo de Riemann da RG serão denotados com um círculo em sua parte superior, enquanto as grandezas relacionadas ao espaço-tempo de Weitzenböck serão denotados sem nenhum indicativo. Por exemplo, o tensor de curvatura é escrito como $R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ para o espaço-tempo de Weitzenböck, e ${}^\circ R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ para o espaço-tempo de Riemann. Ressaltamos que usaremos unidades em que $c = 1$, onde c é a velocidade da luz.

1 O Modelo Cosmológico Padrão

Com a finalidade de se estudar a possível equivalência do TERG com a relatividade geral, bem como as definições da energia-momento total e o momento angular do universo de FLRW, necessitamos de uma métrica que represente o universo observável. Esta métrica pode ser encontrada ao se fazer suposições apropriadas sobre a geometria do universo em escala cosmológica. Duas observações básicas sobre a estrutura do universo em grande escala são a expansão do universo (a lei de Hubble) e a radiação cósmica de fundo. Essas observações indicam que o universo em grandes escalas é homogêneo, ou seja, não há qualquer ponto privilegiado e isotrópico, ou seja, não há qualquer direção privilegiada. Portanto, necessitamos de uma métrica não estática, homogênea e isotrópica para descrever este universo.

1.1 Homogeneidade e Isotropia: A Métrica de Robertson-Walker

Vamos iniciar esta seção introduzindo a expansão do universo na métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas. Posteriormente o resultado será estendido para a métrica em coordenadas esféricas. A métrica de Minkowski¹ é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2, \quad (1.1)$$

onde $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Se consideramos que o universo se expande segundo um fator de escala $R(t)$, teremos que

¹A dedução desta métrica de Minkowski é mostrada em Hartle (HARTLE, 2003, seção 4.3).

o universo haverá crescido ao fim de um intervalo de tempo dt , de acordo com

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)dl^2. \quad (1.2)$$

Vamos considerar que nosso espaço de três dimensões é na realidade uma “projeção” em três dimensões de uma hipersuperfície de quatro dimensões. Como passo inicial, consideremos que só existimos em duas dimensões e que nosso universo é a projeção de uma esfera tridimensional.

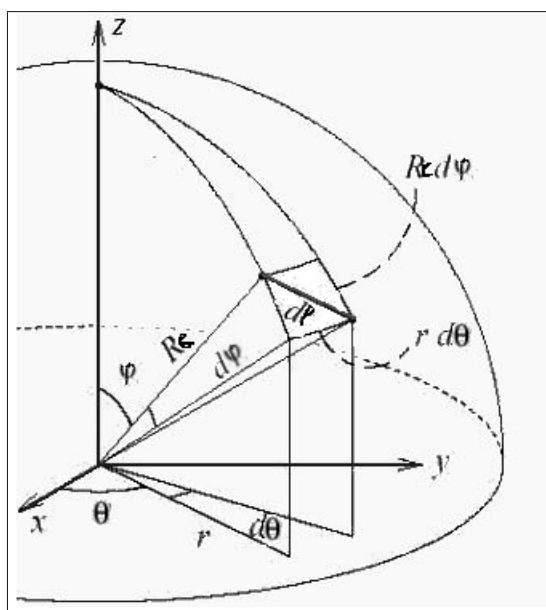


Figura 1.1: Esquema mostrando a diferencial de comprimento dl na superfície de uma esfera.

Conforme a figura (1.1), vemos que dl é um diferencial de comprimento na superfície de uma esfera, R_c é o raio da esfera e $r = R_c \sin \varphi$, ou seja, a projeção de R_c sobre o plano xy .

Podemos usar o teorema de Pitágoras para calcular dl

$$dl^2 = (R_c d\varphi)^2 + (r d\theta)^2, \quad (1.3)$$

e analisando a figura (1.1) temos que

$$R_c d\varphi = \frac{dr}{\cos \varphi} = \frac{R_c dr}{\sqrt{R_c^2 - r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_c^2}}}. \quad (1.4)$$

Usando (1.4), podemos expressar a equação (1.3) em função de r como

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_c^2}}} \right)^2 + (rd\theta)^2, \quad (1.5)$$

onde usamos até então apenas uma coordenada angular e r . Se acrescentarmos outra dimensão para representar um dl de três dimensões de uma “projeção” em três dimensões de uma hipersfera de quatro dimensões, temos

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_c^2}}} \right)^2 + (rd\theta)^2 + (rsen\theta d\phi)^2, \quad (1.6)$$

que substituindo em (1.1), leva a

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R_c^2}}} \right)^2 + (rd\theta)^2 + (rsen\theta d\phi)^2 \right]. \quad (1.7)$$

Esta métrica corresponde a uma “projeção tridimensional” em coordenadas esféricas de uma hipersfera projetada sobre o “plano equatorial”. Aqui R_c é o raio de nosso universo em uma quarta dimensão, o que não tem um sentido claro para nós, e $r = R_c sen\phi$ coincide com R_c no equador do sistema de coordenadas utilizado.

Substituindo o fator $1/R_c^2$ por uma constante k , obtemos:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\left(\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right)^2 + (rd\theta)^2 + (rsen\theta d\phi)^2 \right], \quad (1.8)$$

o fator k no contexto da relatividade geral é definido como o parâmetro de curvatura do espaço. Uma dedução mais formal desta métrica pode ser verificada em (DALARSSON; DALARSSON, 2005, cap. 21).

Pode-se analisar três possibilidades distintas para o raio do universo. Para um raio real teremos que a curvatura k será positiva e o espaço é uma hipersfera fechada. Para um raio infinito teremos que a curvatura k é zero e teremos assim um espaço plano. Para um raio do tipo complexo resulta que a curvatura será negativa e sua representação se assemelha a um parabolóide hiperbólico.

A expressão (1.8) é a métrica de Robertson-Walker, em homenagem a H. P. Robertson e A. G. Walker que a apresentaram nos anos 30. Esta é a métrica mais geral em coordenadas esféricas que descreve um universo isotrópico e homogêneo. Na realidade esta métrica é a mesma que Alexander Friedmann havia usado em 1922, porém herdou-se os nomes daqueles que a fizeram famosa posteriormente.

1.2 Tensor de Energia-Momento da Matéria

Para que possamos utilizar os resultados obtidos até agora no estudo da evolução temporal da expansão do universo, precisamos fazer algumas considerações sobre seu conteúdo material.

Primeiramente, para descrever a fase atual de evolução do universo, é uma boa aproximação considerarmos esse conteúdo material como formado por um fluido de partículas não interagentes (poeira). Esse fluido é completamente caracterizado se definirmos a 4-velocidade $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ (neste caso temos que $u^\alpha u_\alpha = 1$) e a densidade em cada ponto $\rho = \rho(x)$ no referencial de um observador que se move junto com o fluido, ou seja, $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. O tensor de energia-momento da matéria neste caso será:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (1.9)$$

Se considerarmos um quadro mais realista, o conteúdo do universo pode ser aproximado por um fluido perfeito, onde existe interação entre as partículas mas não há troca de calor nem viscosidade. Neste caso, devemos acrescentar a pressão ao conjunto de parâmetros necessários para a caracterização do sistema. A forma mais simples do tensor energia-momento para um fluido com essas características deve levar em consideração o limite $p \rightarrow 0$, quando devemos recuperar o caso de poeira. Sendo assim, temos:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p S^{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

onde

$$S^{\mu\nu} = a u^\mu u^\nu + b g^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

aqui, a e b são constantes. Impondo que as leis de conservação de energia e momento $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ sejam respeitadas, o tensor energia-momento para um fluido perfeito é dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

ou seja,

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

1.3 Equações de Campo de Einstein

A observação de que o Universo é homogêneo e isotrópico, e que está em expansão segundo a lei de Hubble, produz condições suficientes para que a Teoria da Relatividade Geral prediga concretamente a geometria e a evolução do Universo. O objetivo nessa seção é apresentar a dinâmica envolvida na evolução temporal do universo. Isso será feito a partir da aplicação da métrica de Robertson-Walker e do tensor energia-momento apropriado às equações de Einstein dadas por:

$${}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}({}^\circ R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, G é a constante gravitacional de Newton e Λ a constante cosmológica.

Utilizando a métrica (1.8), as componentes do tensor de Ricci são dadas por

$${}^\circ R_{00} = 3\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)}, \quad (1.15)$$

$${}^\circ R_{0i} = 0, \quad (1.16)$$

$${}^\circ R_{ij} = -\frac{g_{ij}}{R^2(t)} [2k + (R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}^2(t))]. \quad (1.17)$$

Utilizando estas expressões e a expressão (1.12) na equação (1.14), temos:

$$3\frac{\dot{R}(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = 8\pi\rho, \quad (1.18)$$

$$\frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = -8\pi p. \quad (1.19)$$

As equações (1.18) e (1.19) são chamadas de *equações de Friedmann*² e sua solução descreve a dinâmica do Universo. Nessas expressões, a densidade ρ e a pressão p correspondem a todo o conteúdo material do universo. Caso este possua mais de uma componente, ρ e p devem ser substituídos por suas respectivas somatórias sobre os constituintes em questão.

²Para maiores detalhes sobre a dedução destas equações no contexto da relatividade geral consultar (DALARSSON; DALARSSON, 2005, cap. 22).

2 *O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral*

No espaço-tempo de Weitzenböck é possível a formulação de uma teoria equivalente à RG denominada de Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG). O TERG (MALUF, 1994) é uma reformulação da RG de Einstein em termos dos campos de tetradas e do tensor de torção. Ele não é uma nova teoria para o campo gravitacional, pois as equações de campo para o campo de tetrada são equivalentes às equações de Einstein (como mostra a equação (2.41)). O TERG é uma formulação geométrica alternativa, porém equivalente, da relatividade geral. Vale ressaltar que para Andrade e Pereira (ANDRADE; PEREIRA, 1997), no TERG, a interação gravitacional é descrita completamente pela torção, que manifesta-se como uma *força* análoga à de Lorentz da interação eletromagnética.

2.1 Conceitos Básicos

Damos o nome de tetrada ao conjunto de quatro vetores linearmente independentes $\{e^a{}_{\mu}(x^{\alpha})\}$, onde $a = (0), (1), (2), (3)$ indica cada um dos vetores, que satisfazem (LANDAU; LIFSHITZ, 1980, seção 98) :

$$e^a{}_{\mu}e^{b\mu} = \eta^{ab}, \quad (2.1)$$

onde η^{ab} é a métrica de Minkowski, cuja assinatura iremos adotar $(-, +, +, +)$. Temos que $e^{(0)}{}_{\mu}$ é um vetor tipo-tempo e $e^{(k)}{}_{\mu}$, com $k = 1, 2, 3$, são vetores do tipo-espaço. Os índices latinos a, b, c, \dots são chamados **índices locais de Lorentz** e os índices μ, ν, λ, \dots são chamados **índices globais** ou **índices de espaço-tempo**.

A figura (2.1) ilustra um conjunto $e_a{}^\mu$ de tétradas adaptadas a um ponto do espaço-tempo x^μ . Na figura (2.1) Γ é a trajetória do observador.

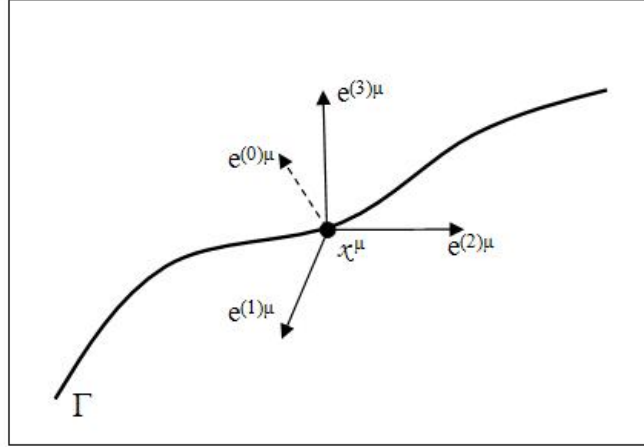


Figura 2.1: Tétrada $e^{a\mu}$ definida no ponto x^μ do espaço-tempo.

Designamos a matriz inversa de η_{ab} por η^{ab} :

$$\eta^{ac} \eta_{cb} = \delta_b^a, \quad (2.2)$$

sendo que a elevação e o abaixamento dos índices locais dos campos de tétradas são efetuados de acordo com

$$e^a{}_\mu = \eta^{ab} e_{b\mu}, \quad (2.3)$$

$$e_{a\nu} = \eta_{ab} e^b{}_\nu. \quad (2.4)$$

A tétrada inversa de $e^a{}_\mu$ será dado por $e_a{}^\mu$, portanto:

$$e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta_b^a. \quad (2.5)$$

Agora, introduziremos a estrutura métrica na nossa variedade, pois é necessário introduzir o conceito de distância invariante ds entre dois pontos infinitesimalmente vizinhos x^ν e $x^\nu + dx^\nu$. A distância invariante no espaço tangente é

$$d\sigma^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.6)$$

Por outro lado, a distância invariante no espaço W^4 é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico sobre a variedade Weitzenböck (W^4). As métricas $g_{\mu\nu}$ e η_{ab} estão relacionadas por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \quad (2.8)$$

ou, equivalentemente,

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu. \quad (2.9)$$

Como as tétradas são definidas à menos de transformações locais de Lorentz, as quais compreendem 6 graus de liberdade, o número de componentes independentes da tetrada é reduzida de 16 para 10, que é o número de componentes independentes da métrica. Desta forma, obtendo o campo das tétradas corresponde a obter todas as informações sobre a métrica do espaço-tempo W^4 .

Quaisquer vetores ou tensores podem ser projetados ao longo dos vetores que compõem uma base de tétradas. Assim, as componentes de tétradas A^a de um vetor A^μ , podem ser dadas por:

$$A^a = e^a{}_\mu A^\mu. \quad (2.10)$$

Também podemos converter índices locais em índices globais através das tétradas inversas

$$A^\mu = e_a{}^\mu A^a, \quad (2.11)$$

portanto, através das bases de tétradas podemos converter índices locais em globais e vice-versa.

Vamos agora transportar paralelamente a tetrada entre dois pontos infinitesimalmente vizinhos na variedade W^4 . Consideremos para isso a tetrada $e^a{}_\mu$ num ponto x^ν , e $e^a{}_\mu + de^a{}_\mu$ no ponto vizinho $x^\nu + dx^\nu$. Fazendo o transporte paralelo da tetrada $e^a{}_\mu$ e denotando por $\delta e^a{}_\mu$ seu acréscimo. Então, a diferença $De^a{}_\mu$ entre as tétradas é

$$De^a{}_\mu = de^a{}_\mu - \delta e^a{}_\mu. \quad (2.12)$$

O acréscimo $\delta e^a{}_\mu$ das componentes da tetrada no transporte paralelo, depende das próprias componentes, e essa dependência deve ser linear em $e^a{}_\mu$ (VARGAS, 2002). O acréscimo $\delta e^a{}_\mu$ deve também ser linear em dx^ν , de maneira que devemos ter

$$\delta e^a{}_\mu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} e^a{}_\alpha dx^\nu, \quad (2.13)$$

onde $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ é a conexão de Weitzenböck ou Cartan. Substituindo a equação (2.13) na equação (2.12), e usando que

$$de^a{}_\mu = \partial_\nu e^a{}_\mu dx^\nu, \quad (2.14)$$

obtemos:

$$De^a{}_\mu = (\partial_\nu e^a{}_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} e^a{}_\alpha) dx^\nu, \quad (2.15)$$

onde $De^a{}_\mu$ é um vetor, e a derivada covariante da tetrada, dada por

$$\nabla_\nu e^a{}_\mu = \partial_\nu e^a{}_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} e^a{}_\alpha, \quad (2.16)$$

é um tensor. Assim a derivada covariante de Weitzenböck atuando, por exemplo, num vetor covariante A_μ , é

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} A_\alpha. \quad (2.17)$$

Vejamos agora como um campo de tetradas está relacionado ao espaço-tempo de Weitzenböck. No espaço-tempo mais geral, conhecido por espaço-tempo de Riemann-Cartan, que é dotado de uma métrica $g_{\mu\nu}$ e uma conexão afim (Cartan) $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979), temos:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0. \quad (2.18)$$

Desta equação obtemos a conexão de Cartan

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = {}^o\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde o primeiro termo denota a conexão de Christoffel, representada em algumas literaturas por $\{\lambda{}_{\mu\nu}\}$, definida como

$${}^o\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.20)$$

O segundo termo é o tensor de contorção,

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} - T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} - T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} \right), \quad (2.21)$$

definido em termos do tensor de torção:

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \quad (2.22)$$

O tensor de curvatura em termos da conexão afim é dado por

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}. \quad (2.23)$$

O espaço-tempo de Riemann-Cartan possui o tensor de curvatura e o tensor de torção. Deste espaço-tempo segue dois modelos de espaço-tempo. Um é o bem conhecido espaço-tempo de Riemann, que é obtido a partir de Riemann-Cartan estabelecendo o tensor de torção como nulo. Outro modelo é o espaço-tempo de Weitzenböck, o qual é obtido a partir de Riemann-Cartan estabelecendo que o tensor de curvatura é identicamente nulo,

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) = 0. \quad (2.24)$$

A condição de curvatura identicamente nula no espaço tempo de Weitzenböck equivalente à existência de um campo de tetradas sujeito a um paralelismo absoluto (teleparalelismo).

A equação (2.16) é resultado do transporte paralelo da tetrada entre dois pontos infinitesimalmente vizinhos, com a condição de que as componentes da tetrada sejam paralelas. Portanto, a derivada covariante de Weitzenböck da tetrada é zero (PEREIRA; VARGAS, 2002)

$$\nabla_{\nu}e^a{}_{\mu} = \partial_{\nu}e^a{}_{\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}e^a{}_{\alpha} \equiv 0. \quad (2.25)$$

Resolvendo esta equação, obtemos a conexão de Cartan em função das tetradas

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = e_a{}^{\alpha}\partial_{\nu}e^a{}_{\mu}, \quad (2.26)$$

e o tensor de torção (2.22) é escrito como

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e_a{}^{\lambda} (\partial_{\nu} e^a{}_{\mu} - \partial_{\mu} e^a{}_{\nu}) . \quad (2.27)$$

No entanto, como $e^b{}_{\lambda} T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = T^b{}_{\mu\nu}$, então a equação acima pode ser escrita como:

$$T^b{}_{\mu\nu} = \partial_{\nu} e^b{}_{\mu} - \partial_{\mu} e^b{}_{\nu} , \quad (2.28)$$

que é o tensor de torção usado no TERG.

2.2 Formulação Lagrangeana e Hamiltoniana do TERG

Nesta seção será feita uma breve apresentação da formulação Lagrangeana e Hamiltoniana do TERG. Contudo detalhes adicionais podem ser encontrados em (MALUF, 1994) e (MALUF; ROCHA-NETO, 2001).

A teoria teleparalela da gravitação com constante cosmológica é descrita pela densidade Lagrangeana (BLAGOJEVIĆ; VASSILIĆ, 2002)

$$L = L_g - L_M - 2ek'\Lambda, \quad (2.29)$$

aqui, $e = \det(e^a{}_{\mu})$ é o determinante da tétrada, $k' = 1/(16\pi G)$, Λ é a constante cosmológica, L_M representa a densidade Lagrangeana do campo de matéria e L_g é a densidade Lagrangeana do campo gravitacional dada por (MALUF, 1994)

$$L_g = -k'e \left(\frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right), \quad (2.30)$$

onde $T^a = T^b{}_{b}{}^a$.

Ou, a equação (2.30), pode ser escrita na forma

$$L_g = -k'e \Sigma^{abc} T_{abc}, \quad (2.31)$$

sendo Σ^{abc} definido por

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} (T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2} (\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c), \quad (2.32)$$

Para encontrar as equações de campo para o TERG partiremos do princípio de **ação mínima**. Este princípio estipula, como sabemos, que para todo sistema mecânico existe uma integral S , chamada **ação**, que tem um mínimo para o movimento efetivo e cuja variação δS é, conseqüentemente, nula¹.

Assim, podemos representar a ação sob a forma da integral da equação (2.29)

$$S = \int L d^4x, \quad (2.33)$$

de acordo com o princípio de ação mínima, variando a ação (2.29) em relação a $e^{a\mu}$ temos

$$\frac{\delta S}{\delta e^{a\mu}} = \int \frac{\delta L}{\delta e^{a\mu}} d^4x = 0, \quad (2.34)$$

ou seja,

$$\frac{\delta L}{\delta e^{a\mu}} = \frac{\delta L_g}{\delta e^{a\mu}} - \frac{\delta L_M}{\delta e^{a\mu}} - 2k'\Lambda \frac{\delta e}{\delta e^{a\mu}} = 0. \quad (2.35)$$

Temos que

$$\frac{\delta L_M}{\delta e^{a\mu}} = eT_{a\mu}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\delta e}{\delta e^{a\mu}} = -ee_{a\mu}. \quad (2.37)$$

A fim de obter as equações de campo em uma forma compacta, faremos uso da seguinte identidade (MALUF, 1994)

$$\frac{\delta}{\delta \phi} (\Sigma^{abc} T_{abc}) = 2\Sigma^{abc} \frac{\delta T_{abc}}{\delta \phi}, \quad (2.38)$$

com ϕ sendo $e^{a\mu}$ e usando (2.36) e (2.37), a equação (2.35) será

$$\frac{\delta L}{\delta e^{a\mu}} = 4k'e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu \left(e\Sigma^{b\lambda\nu} \right) - 4k'e \left(\Sigma^{bv} {}_a T_{bv\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd} \right) + 2k'\Lambda ee_{a\mu} - eT_{a\mu}. \quad (2.39)$$

Portanto as equações de campo calculadas a partir da variação da densidade Lagrangeana (2.29) em relação a $e^{a\mu}$ são dadas por

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu \left(e\Sigma^{b\lambda\nu} \right) - e \left(\Sigma^{bv} {}_a T_{bv\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd} \right) + \frac{1}{2}ee_{a\mu}\Lambda = \frac{1}{4k'}eT_{a\mu}. \quad (2.40)$$

¹Estritamente falando, o princípio de ação mínima afirma que a integral S deve ser mínima somente sobre pequenos arcos da linha de integração. Para linhas de comprimento arbitrário podemos afirmar somente que S tem um extremo, podendo não ser um mínimo.

Através de cálculos laboriosos e explícitos (MALUF, 1994) verifica-se que o lado esquerdo desta equação é equivalente à equação de Einstein na forma de tétradas

$$\frac{\delta L}{\delta e^{a\mu}} = \frac{1}{2} e \left[R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) + e_{a\mu} \Lambda \right]. \quad (2.41)$$

A formulação Hamiltoniana do TERG é obtida primeiro estabelecendo as variáveis do espaço de fase. A densidade Lagrangeana não contém a derivada temporal da componente e_{a0} da tétrada. Portanto esta quantidade surge como um multiplicador de Lagrange. O momento canonicamente conjugado a e_{ai} é dado por

$$\Pi^{ai} = \frac{\delta L}{\delta \dot{e}_{ai}}. \quad (2.42)$$

A formulação Hamiltoniana é obtida reescrevendo a densidade Lagrangeana na forma canônica

$$L = p\dot{q} - H, \quad (2.43)$$

em termos de e_{ai} , Π^{ai} e multiplicadores de Lagrange. Desta forma, a transformada de Legendre pode ser implementada e a forma final da densidade Hamiltoniana será (MALUF; ROCHA-NETO, 2001)

$$H = e_{a0} C^a + \alpha_{ik} \Gamma^{ik} + \beta_k \Gamma^k, \quad (2.44)$$

mais um termo de superfície que é desprezado. α_{ik} e β_k são multiplicadores de Lagrange que (após ter resolvido as equações de campo) são identificados como

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2} (T_{i0k} + T_{k0i}), \quad \beta_k = T_{00k}. \quad (2.45)$$

C^a , Γ^{ik} e Γ^k são os vínculos de primeira classe.

O vínculo C^a é escrito como

$$C^a = -\partial_i \Pi^{ai} + h^a, \quad (2.46)$$

onde h^a é uma complexa expressão das variáveis de campo². A forma integral da equação de vínculo $C^a = 0$ leva a definição do quadri-vetor energia-momento gravitacional P^a (MALUF et

²Para maiores detalhes sobre h^a , veja (MALUF; ROCHA-NETO, 2001, seção IV).

al., 2002)

$$P^a = - \int_V dx^3 \partial_i \Pi^{ai}, \quad (2.47)$$

onde V é um volume arbitrário do espaço tridimensional. Em particular, temos que

$$\Pi^{ai} = -4k' e \Sigma^{a0i}. \quad (2.48)$$

Na seção 4.3 e 4.4, apresentaremos uma aplicação de (2.47) juntamente com (2.48) para um campo gravitacional descrito pela métrica de FLRW.

3 *O Equivalente Teleparalelo da Solução de Friedmann*

Neste capítulo, vamos mostrar de uma forma explícita que as equações de campo do TERG apresentam soluções que são idênticas as equações de Friedmann encontradas a partir da relatividade geral.

3.1 Cálculo das Tétradas

Para que possamos resolver a equação de campo (2.40) do TERG precisaremos inicialmente de um campo de tétradas. Determinaremos um dos campos de tétradas relacionados com a métrica (3.1).

No sistema de coordenadas Cartesianas, o elemento de linha (1.8) se torna

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.1)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Usando a equação (2.7) encontramos que os $g_{\mu\nu}$ não nulos são:

$$g_{00} = -1 \quad (3.2)$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}. \quad (3.3)$$

Usando a relação (2.8) escrita na forma

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e_{av}, \quad (3.4)$$

obtemos o sistema de equações abaixo:

$$g_{00} = e^{(0)}{}_{0e(0)0} + e^{(1)}{}_{0e(1)0} + e^{(2)}{}_{0e(2)0} + e^{(3)}{}_{0e(3)0} = -1, \quad (3.5)$$

$$g_{01} = e^{(0)}{}_{0e(0)1} + e^{(1)}{}_{0e(1)1} + e^{(2)}{}_{0e(2)1} + e^{(3)}{}_{0e(3)1} = 0, \quad (3.6)$$

$$g_{02} = e^{(0)}{}_{0e(0)2} + e^{(1)}{}_{0e(1)2} + e^{(2)}{}_{0e(2)2} + e^{(3)}{}_{0e(3)2} = 0, \quad (3.7)$$

$$g_{03} = e^{(0)}{}_{0e(0)3} + e^{(1)}{}_{0e(1)3} + e^{(2)}{}_{0e(2)3} + e^{(3)}{}_{0e(3)3} = 0, \quad (3.8)$$

$$g_{11} = e^{(0)}{}_{1e(0)1} + e^{(1)}{}_{1e(1)1} + e^{(2)}{}_{1e(2)1} + e^{(3)}{}_{1e(3)1} = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2}, \quad (3.9)$$

$$g_{12} = e^{(0)}{}_{1e(0)2} + e^{(1)}{}_{1e(1)2} + e^{(2)}{}_{1e(2)2} + e^{(3)}{}_{1e(3)2} = 0, \quad (3.10)$$

$$g_{13} = e^{(0)}{}_{1e(0)3} + e^{(1)}{}_{1e(1)3} + e^{(2)}{}_{1e(2)3} + e^{(3)}{}_{1e(3)3} = 0, \quad (3.11)$$

$$g_{22} = e^{(0)}{}_{2e(0)2} + e^{(1)}{}_{2e(1)2} + e^{(2)}{}_{2e(2)2} + e^{(3)}{}_{2e(3)2} = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2}, \quad (3.12)$$

$$g_{23} = e^{(0)}{}_{2e(0)3} + e^{(1)}{}_{2e(1)3} + e^{(2)}{}_{2e(2)3} + e^{(3)}{}_{2e(3)3} = 0, \quad (3.13)$$

$$g_{33} = e^{(0)}{}_{3e(0)3} + e^{(1)}{}_{3e(1)3} + e^{(2)}{}_{3e(2)3} + e^{(3)}{}_{3e(3)3} = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2}. \quad (3.14)$$

Na tentativa de simplificar este sistema de equações, substituímos a matriz das tétradas por uma matriz de letras da seguinte forma:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} e_{(0)0} & e_{(0)1} & e_{(0)2} & e_{(0)3} \\ e_{(1)0} & e_{(1)1} & e_{(1)2} & e_{(1)3} \\ e_{(2)0} & e_{(2)1} & e_{(2)2} & e_{(2)3} \\ e_{(3)0} & e_{(3)1} & e_{(3)2} & e_{(3)3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}.$$

Usaremos duas simplificações para resolver este conjunto de equações. A primeira simplificação é o chamado calibre de Schwinger (SCHWINGER, 1963)

$$e^{(0)}{}_k = 0. \quad (3.15)$$

A segunda simplificação é a simetria espacial válida em coordenadas cartesianas para as componentes espaciais da tétrada

$$e_{(i)j} = e_{(j)i}. \quad (3.16)$$

Esta simetria seria uma das condições para se estabelecer a menor energia do espaço-tempo dentre um conjunto infinito de tétradas (MALUF et al., 2002), não relacionadas nem por transformações de “boost” de Lorentz nem por rotações.

Pelo calibre de Schwinger, temos que $B = C = D = 0$, e pela simetria espacial, temos que $G = J$, $H = N$ e $L = O$.

Assim, sabendo que $e_{a\mu} = \eta_{ab}e^b{}_{\mu}$, onde $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$, podemos escrever o sistema de equações anterior como:

$$-A^2 + E^2 + I^2 + M^2 = -1, \quad (3.17)$$

$$EF + IJ + MN = 0, \quad (3.18)$$

$$EJ + IK + MO = 0, \quad (3.19)$$

$$EN + IO + MP = 0, \quad (3.20)$$

$$F^2 + J^2 + N^2 = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (3.21)$$

$$FJ + JK + NO = 0, \quad (3.22)$$

$$FN + JO + PN = 0, \quad (3.23)$$

$$J^2 + K^2 + O^2 = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (3.24)$$

$$JN + KO + OP = 0, \quad (3.25)$$

$$N^2 + O^2 + P^2 = \frac{R(t)^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}. \quad (3.26)$$

Uma das possíveis soluções para esse sistema de equações é:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Vamos agora encontrar as matrizes das demais tétradas. Usando a relação:

$$e_a{}^\mu = g^{\mu\nu} e_{a\nu}, \quad (3.28)$$

temos

$$e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

As demais matrizes são dadas por

$$e^{a\mu} = \eta^{ab} e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$e^a{}_\mu = \eta^{ab} e_{b\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

O determinante da tétrada será dado por $e = \det(e^a{}_\mu)$:

$$e = [1] \begin{bmatrix} \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} \end{bmatrix},$$

$$e = \frac{R^3(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})^3}. \quad (3.32)$$

É fácil ver que as tétradas (3.31) e (3.29) satisfazem a identidade (2.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R(t)}{(1+\frac{kr^2}{4})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\frac{kr^2}{4})}{R(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

3.2 Equações de Campo

As equações de campo são dadas em (2.40) por

$$e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu \left(e \Sigma^{b\lambda\nu} \right) - e \left(\Sigma^{b\nu} {}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) + \frac{1}{2} e e_{a\mu} \Lambda = \frac{1}{4k} e T_{a\mu},$$

onde Σ^{abc} é dada pela equação (2.32) por

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} \left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c \right).$$

Como pode-se notar, Σ na equação (2.32) é definido apenas em função de índices locais de Lorentz, enquanto os Σ na equação (2.40) são dados de forma mista, ou seja, em função de índices de espaço-tempo e de Lorentz. Vemos também que os tensores de torção nestas duas equações são dados de diversas formas e na equação (2.28), estes tensores são definidos apenas na forma $T_{a\mu\nu}$. Sendo assim, as equações (2.40) e (2.32) serão escritas apenas em função de $T_{a\mu\nu}$ e Σ^{abc} , como vemos abaixo

$$\begin{aligned} e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu \left(e e_d{}^\lambda e_c{}^\nu \Sigma^{bdc} \right) - e \left(\eta_{ad} e_c{}^\nu \Sigma^{bcd} T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} e_c{}^\nu e_d{}^\nu T_{b\gamma\nu} \Sigma^{bcd} \right) \\ + \frac{1}{2} e e_{a\mu} \Lambda = \frac{1}{4k'} e e_a{}^\gamma T_{\gamma\mu}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Sigma^{abc} = \frac{1}{4} \left(\eta^{ad} e^{b\mu} e^{c\nu} T_{d\mu\nu} + \eta^{bd} e^{a\mu} e^{c\nu} T_{d\mu\nu} - \eta^{cd} e^{a\mu} e^{b\nu} T_{d\mu\nu} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\eta^{ac} e^{b\nu} e^{d\mu} T_{d\mu\nu} - \eta^{ab} e^{c\nu} e^{d\mu} T_{d\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Estas equações foram obtidas usando as seguintes transformações

$$T^{abc} = T_{d\mu\nu} e^{b\mu} e^{c\nu} \eta^{ad}, \quad (3.36)$$

$$T_{abc} = T_{a\mu\nu} e_b{}^\mu e_c{}^\nu, \quad (3.37)$$

$$T^b = T_{d\mu\nu} e^{b\nu} e^{d\mu}, \quad (3.38)$$

$$\Sigma^{a\nu}{}_c = \Sigma^{abd} e_b{}^\nu \eta_{dc}, \quad (3.39)$$

$$\Sigma^{a\mu\nu} = \Sigma^{abc} e_b{}^\mu e_c{}^\nu, \quad (3.40)$$

$$T_{a\mu} = T_{\nu\mu} e_a{}^\nu. \quad (3.41)$$

Antes de resolver as equações de campo (3.34), precisamos encontrar as componentes não nulas de $T_{a\mu\nu}$. Estas são dadas por (para maiores detalhes ver Apêndice A)

$$T_{(1)01} = T_{(2)02} = T_{(3)03} = \frac{\dot{R}(t)}{1 + \frac{kr^2}{4}}, \quad (3.42)$$

$$T_{(1)12} = T_{(3)32} = \frac{R(t)ky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (3.43)$$

$$T_{(1)13} = T_{(2)23} = \frac{R(t)kz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (3.44)$$

$$T_{(2)21} = T_{(3)31} = \frac{R(t)kx}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}. \quad (3.45)$$

Lembrando que as componentes da torção são antissimétricas em relação aos dois últimos índices, e após um longo, mas simples cálculo, obtemos as seguintes componentes não nulas para os Σ^{abc} (para maiores detalhes destes cálculos ver apêndice B)

$$\Sigma^{(0)(0)(1)} = \frac{kx}{2R(t)}, \quad (3.46)$$

$$\Sigma^{(0)(0)(2)} = \frac{ky}{2R(t)}, \quad (3.47)$$

$$\Sigma^{(0)(0)(3)} = \frac{kz}{2R(t)}, \quad (3.48)$$

$$\Sigma^{(1)(0)(1)} = \Sigma^{(2)(0)(2)} = \Sigma^{(3)(0)(3)} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (3.49)$$

$$\Sigma^{(1)(1)(2)} = \Sigma^{(3)(3)(2)} = -\frac{ky}{4R(t)}, \quad (3.50)$$

$$\Sigma^{(1)(1)(3)} = \Sigma^{(2)(2)(3)} = -\frac{kz}{4R(t)}, \quad (3.51)$$

$$\Sigma^{(2)(1)(2)} = \Sigma^{(3)(1)(3)} = \frac{kx}{4R(t)}. \quad (3.52)$$

Calculando a componente $\{(0)0\}$ da equação de campo temos:

$$\begin{aligned} & e_{(0)0}e_{(0)0}\partial_\nu \left(ee_{(0)}{}^0 e_c{}^\nu \Sigma^{(0)(0)c} \right) - e \left(\eta_{(0)(0)} e_c{}^\nu \Sigma^{bc(0)} T_{b\nu 0} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} e_{(0)0} e_c{}^\nu e_d{}^\nu T_{b\nu\gamma} \Sigma^{bcd} \right) + \frac{1}{2} ee_{(0)0} \Lambda = \frac{1}{4k'} ee_{(0)}{}^0 T_{00}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

e expandindo para os termos com índices mudos e eliminando os termos nulos, encontramos

$$\begin{aligned} & e_{(0)0}e_{(0)0} \left[\partial_1 \left(ee_{(0)}{}^0 e_{(1)}{}^1 \Sigma^{(0)(0)(1)} \right) + \partial_2 \left(ee_{(0)}{}^0 e_{(2)}{}^2 \Sigma^{(0)(0)(2)} \right) \right. \\ & \left. + \partial_3 \left(ee_{(0)}{}^0 e_{(3)}{}^3 \Sigma^{(0)(0)(3)} \right) \right] - e \left(3\eta_{(0)(0)} e_{(1)}{}^1 \Sigma^{(1)(1)(0)} T_{(1)10} \right. \\ & - \frac{3}{2} e_{(0)0} e_{(0)}{}^0 e_{(1)}{}^1 T_{(1)01} \Sigma^{(1)(0)(1)} - e_{(0)0} e_{(1)}{}^1 e_{(2)}{}^2 T_{(1)12} \Sigma^{(1)(1)(2)} \\ & - e_{(0)0} e_{(1)}{}^1 e_{(2)}{}^2 T_{(2)12} \Sigma^{(2)(1)(2)} - e_{(0)0} e_{(1)}{}^1 e_{(3)}{}^3 T_{(1)13} \Sigma^{(1)(1)(3)} \left. \right) \\ & + \frac{1}{2} ee_{(0)0} \Lambda = \frac{1}{4k'} ee_{(0)}{}^0 T_{00}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Substituindo (3.27), (3.32), (3.29), (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.42), (3.43), (3.50), (3.45), (3.49), (3.44), (3.51) e (1.13), ficamos com

$$\begin{aligned} & \partial_x \left[\frac{R(t)kx}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^2} \right] + \partial_y \left[\frac{R(t)ky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^2} \right] + \partial_z \left[\frac{R(t)kz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^2} \right] \\ & - \left[-\frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^3} \right] \left[3\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} - \frac{3\dot{R}^2(t)}{2R^2(t)} + \frac{k^2 y^2}{8R(t)^2} + \frac{k^2 x^2}{8R(t)^2} + \frac{k^2 z^2}{8R(t)^2} \right] \\ & - \frac{1}{2} \Lambda \frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^3} = 4\pi G\rho \frac{R(t)^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^3}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Resolvendo as derivadas parciais, podemos reescrever (3.55) como

$$\frac{R(t)k}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^2} - \frac{R(t)k^2 x^2}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^3} + \frac{R(t)k}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^2} - \frac{R(t)k^2 y^2}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4} \right)^3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R(t)k}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} - \frac{R(t)k^2z^2}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} - \left[-\frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right] \left[\frac{3\dot{R}^2(t)}{2R^2(t)} + \frac{k^2r^2}{8R^2(t)} \right] \\
& - \frac{1}{2}\Lambda \frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} = 4\pi G\rho \frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}, \tag{3.56}
\end{aligned}$$

e agrupando os termos semelhantes,

$$\frac{3k\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{2R^2(t)} - \frac{k^2r^2}{2R^2(t)} + \frac{3\dot{R}^2(t)}{2R^2(t)} + \frac{k^2r^2}{8R^2(t)} - \frac{1}{2}\Lambda = 4\pi G\rho, \tag{3.57}$$

encontramos que

$$3\frac{\dot{R}^2(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = 8\pi G\rho. \tag{3.58}$$

Calculando a componente $\{(1)1\}$ da equação de campo temos

$$\begin{aligned}
& e_{(1)1}e_{(1)1}\partial_\nu \left(ee_{(1)}{}^1e_c{}^\nu \Sigma^{(1)(1)c} \right) - e \left(\eta_{(1)(1)}e_c{}^\nu \Sigma^{bc(1)} T_{b\nu 1} \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}e_{(1)1}e_c{}^\gamma e_d{}^\nu T_{b\gamma\nu} \Sigma^{bcd} \right) + \frac{1}{2}ee_{(1)1}\Lambda = \frac{1}{4k'}ee_{(1)}{}^1T_{11}, \tag{3.59}
\end{aligned}$$

expandindo para os termos com índices mudos e eliminando os termos nulos, encontramos

$$\begin{aligned}
& e_{(1)1}e_{(1)1} \left[\partial_0 \left(ee_{(1)}{}^1e_{(0)}{}^0 \Sigma^{(1)(1)(0)} \right) + \partial_2 \left(ee_{(1)}{}^1e_{(2)}{}^2 \Sigma^{(1)(1)(2)} \right) \right. \\
& \left. + \partial_3 \left(ee_{(1)}{}^1e_{(3)}{}^3 \Sigma^{(1)(1)(3)} \right) \right] - e \left(\eta_{(1)(1)}e_{(0)}{}^0 \Sigma^{(1)(0)(1)} T_{(1)01} \right. \\
& \left. + \eta_{(1)(1)}e_{(2)}{}^2 \Sigma^{(1)(2)(1)} T_{(1)21} + 2\eta_{(1)(1)}e_{(2)}{}^2 \Sigma^{(2)(2)(1)} T_{(2)21} \right. \\
& \left. + \eta_{(1)(1)}e_{(3)}{}^3 \Sigma^{(1)(3)(1)} T_{(1)31} - \frac{3}{2}e_{(1)1}e_{(0)}{}^0e_{(1)}{}^1 T_{(1)01} \Sigma^{(1)(0)(1)} \right. \\
& \left. - e_{(1)1}e_{(1)}{}^1e_{(2)}{}^2 T_{(1)12} \Sigma^{(1)(1)(2)} - e_{(1)1}e_{(1)}{}^1e_{(2)}{}^2 T_{(2)12} \Sigma^{(2)(1)(2)} \right. \\
& \left. - e_{(1)1}e_{(1)}{}^1e_{(3)}{}^3 T_{(1)13} \Sigma^{(1)(1)(3)} \right) + \frac{1}{2}ee_{(1)1}\Lambda = \frac{1}{4k'}ee_{(1)}{}^1T_{11}. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.27), (3.32), (3.29), (3.49), (3.50), (3.51), (3.49), (3.42), (3.43), (3.45), (3.52),

(3.44) e (1.13), ficamos com

$$\left\{ \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right\} \left\{ \partial_t \left[\frac{R(t)\dot{R}(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] + \partial_y \left[\frac{ky}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \partial_z \left[\frac{kz}{4 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] \left. \right\} - \left\{ \frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right. \\
& - \frac{k^2 y^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 x^2}{4R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 z^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2 y^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2 x^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \\
& \left. + \frac{k^2 z^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{R^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \right) \Lambda = -4\pi Gp \left(\frac{R^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \right). \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais e multiplicando a expressão por $\left(\frac{R^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \right)^{-1}$, encontramos

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}{R^2(t)} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} + \frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} + \frac{k}{4 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 y^2}{8 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right. \\
& + \frac{k}{4 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 z^2}{8 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \left. \right\} + \left\{ \frac{1 + \frac{kr^2}{4}}{R(t)} \right\} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right. \\
& - \frac{k^2 y^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 x^2}{4R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 z^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2 r^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \left. \right\} \\
& - \frac{1}{2} \Lambda = -4\pi Gp, \quad (3.62)
\end{aligned}$$

simplificando a equação, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\dot{R}^2(t)}{2R^2(t)} + \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{k}{2R^2(t)} + \frac{k^2 r^2}{4R^2(t)} - \frac{k^2 y^2}{4R^2(t)} - \frac{k^2 z^2}{4R^2(t)} \\
& - \frac{k^2 x^2}{4R^2(t)} + \frac{k^2 r^2}{8R^2(t)} - \frac{1}{2} \Lambda = -4\pi Gp. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

A equação acima se reduz a

$$\frac{2\ddot{R}(t)R(t) + \dot{R}^2(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = -8\pi Gp. \quad (3.64)$$

Vamos agora calcular a componente $\{(2)2\}$

$$e_{(2)2} e_{(2)2} \partial_v \left(e e_{(2)}{}^2 e_c{}^v \Sigma^{(2)(2)c} \right) - e \left(\eta_{(2)(2)} e_c{}^v \Sigma^{bc(2)} T_{bv2} \right)$$

$$-\frac{1}{4}e_{(2)2}e_c{}^\gamma e_d{}^\nu T_{b\gamma\nu}\Sigma^{bcd} \Big) + \frac{1}{2}ee_{(2)2}\Lambda = \frac{1}{4k'}ee_{(2)}{}^2T_{22}, \quad (3.65)$$

expandindo para os termos com índices mudos e eliminando os termos nulos, temos

$$\begin{aligned} & e_{(2)2}e_{(2)2} \left[\partial_0 \left(ee_{(2)}{}^2e_{(0)}{}^0\Sigma^{(2)(2)(0)} \right) + \partial_1 \left(ee_{(2)}{}^2e_{(1)}{}^1\Sigma^{(2)(2)(1)} \right) \right. \\ & \left. + \partial_3 \left(ee_{(2)}{}^2e_{(3)}{}^3\Sigma^{(2)(2)(3)} \right) \right] - e \left[\eta_{(2)(2)}e_{(0)}{}^0\Sigma^{(2)(0)(2)}T_{(2)02} \right. \\ & \left. + 2\eta_{(2)(2)}e_{(1)}{}^1\Sigma^{(1)(1)(2)}T_{(1)12} + \eta_{(2)(2)}e_{(1)}{}^1\Sigma^{(2)(1)(2)}T_{(2)12} \right. \\ & \left. + \eta_{(2)(2)}e_{(3)}{}^3\Sigma^{(2)(3)(2)}T_{(2)32} - \frac{3}{2}e_{(2)2}e_{(0)}{}^0e_{(1)}{}^1T_{(1)01}\Sigma^{(1)(0)(1)} \right. \\ & \left. - e_{(2)2}e_{(1)}{}^1e_{(2)}{}^2T_{(1)12}\Sigma^{(1)(1)(2)} - e_{(2)2}e_{(1)}{}^1e_{(3)}{}^3T_{(1)13}\Sigma^{(1)(1)(3)} \right. \\ & \left. - e_{(2)2}e_{(1)}{}^1e_{(2)}{}^2T_{(2)12}\Sigma^{(2)(1)(2)} \right] + \frac{1}{2}ee_{(1)1}\Lambda = \frac{1}{4k'}ee_{(2)}{}^2T_{22}, \quad (3.66) \end{aligned}$$

substituindo (3.27), (3.29), (3.49), (2.26), (3.51), (3.42), (3.50), (3.45), (3.44), (3.43), (3.32) e (1.13), ficamos com

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right\} \left\{ \partial_t \left[\frac{R(t)\dot{R}(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] + \partial_x \left[\frac{kx}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] + \partial_z \left[\frac{kz}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] \right\} \\ & + \left\{ \frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t)1 + \frac{kr^2}{4}} - \frac{k^2y^2}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2x^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2z^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t)\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2y^2}{8R(t)\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2z^2}{8R(t)\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2x^2}{8R(t)\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right\} \quad (3.67) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{R^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \right) \Lambda = -4\pi Gp \left(\frac{R^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \right), \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais e multiplicando por $\left(\frac{R^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4}\right)^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}{R^2(t)} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} + \frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} + \frac{k}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2x^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right. \\ & \left. + \frac{k}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2z^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right\} + \left\{ \frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R(t)} \right\} \left\{ -\frac{k^2y^2}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2x^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{k^2 z^2}{8\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t)\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)} + \frac{k^2 r^2}{8R(t)\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)} \right\} - \frac{1}{2} \Lambda = -4\pi G\rho, \quad (3.68)$$

simplicando esta equação encontramos:

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} + \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{k\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)}{2R^2(t)} - \frac{k^2 x^2}{8R^2(t)} - \frac{k^2 z^2}{8R^2(t)} \\ & - \frac{k^2 y^2}{4R^2(t)} - \frac{k^2 x^2}{8R^2(t)} - \frac{k^2 z^2}{8R^2(t)} - \frac{\dot{R}^2(t)}{2R^2(t)} + \frac{k^2 r^2}{8R^2(t)} - \frac{1}{2} \Lambda = -4\pi G\rho, \end{aligned} \quad (3.69)$$

finalmente encontramos:

$$\frac{2\ddot{R}(t)R(t) + \dot{R}^2(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = -8\pi G\rho. \quad (3.70)$$

Por último, vamos calcular a componente $\{(3)3\}$:

$$\begin{aligned} & e_{(3)3} e_{(3)3} \partial_\nu \left(e e_{(3)}^3 e_c^{\nu \Sigma^{(3)(3)c}} \right) - e \left(\eta_{(3)(3)} e_c^{\nu \Sigma^{bc(3)}} T_{b\nu 3} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} e_{(3)3} e_c^\gamma e_d^\nu T_{b\gamma\nu} \Sigma^{bcd} \right) + \frac{1}{2} e e_{(3)3} \Lambda = \frac{1}{4k'} e e_{(3)}^3 T_{33}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

expandindo para os termos com índices mudos e eliminando os termos nulos, temos

$$\begin{aligned} & e_{(3)3} e_{(3)3} \left[\partial_0 \left(e e_{(3)}^3 e_{(0)}^0 \Sigma^{(3)(3)(0)} \right) + \partial_1 \left(e e_{(3)}^3 e_{(1)}^1 \Sigma^{(3)(3)(1)} \right) \right. \\ & \left. + \partial_2 \left(e e_{(3)}^3 e_{(2)}^2 \Sigma^{(3)(3)(2)} \right) \right] - e \left[\eta_{(3)(3)} \left(e_{(0)}^0 \Sigma^{(3)(0)(3)} T_{(3)03} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2e_{(1)}^1 \Sigma^{(1)(1)(3)} T_{(1)13} + e_{(1)}^1 \Sigma^{(3)(1)(3)} T_{(3)13} + e_{(2)}^2 \Sigma^{(2)(2)(3)} T_{(3)23} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} e_{(3)3} \left(6e_{(0)}^0 e_{(1)}^1 T_{(1)01} \Sigma^{(1)(0)(1)} + 4e_{(1)}^1 e_{(2)}^2 T_{(1)12} \Sigma^{(1)(1)(2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + 4e_{(1)}^1 e_{(3)}^3 T_{(1)13} \Sigma^{(1)(1)(3)} + 4e_{(1)}^1 e_{(2)}^2 T_{(2)12} \Sigma^{(2)(1)(2)} \right) \right] \\ & \left. + \frac{1}{2} e e_{(3)3} \Lambda = \frac{1}{4k'} e e_{(3)}^3 T_{33}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

substituindo (3.27), (3.32), (3.29), (3.49), (3.52), (3.50), (3.42), (3.51), (3.45), (3.44) e (1.13),

ficamos com

$$\left\{ \frac{R^2(t)}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2} \right\} \left\{ \partial_t \left[\frac{R(t)\dot{R}(t)}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] + \partial_x \left[\frac{kx}{4\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)} \right] + \partial_y \left[\frac{ky}{4\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{R^3(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 z^2}{4R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 x^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right. \\
& - \frac{k^2 y^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{1}{4} \left[6 \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 y^2}{2R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 z^2}{2R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{k^2 x^2}{2R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] \right\} - \frac{1}{2} \frac{R^4(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \Lambda = -4\pi G p \left(\frac{R^4(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^4} \right). \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Resolvendo as derivadas parciais temos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}{R^2(t)} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} + \frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} + \frac{k}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 x^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right. \\
& \left. + \frac{k}{4\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 y^2}{8\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right\} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R(t)} \right\} \left\{ \frac{\dot{R}(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 z^2}{4R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right. \\
& \left. - \frac{k^2 x^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 y^2}{8R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{3}{2} \frac{\dot{R}^2(t)}{R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} - \frac{k^2 r^2}{2R(t) \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \Lambda = -4\pi G p, \quad (3.74)
\end{aligned}$$

simplicando esta equação encontramos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\dot{R}^2(t)}{2R^2(t)} + \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{k}{2R^2(t)} + \frac{k^2 r^2}{8R^2(t)} - \frac{k^2 x^2}{4R^2(t)} - \frac{k^2 y^2}{4R^2(t)} - \frac{k^2 z^2}{4R^2(t)} \\
& - \frac{k^2 r^2}{8R^2(t)} - \frac{1}{2} \Lambda = -4\pi G p, \quad (3.75)
\end{aligned}$$

finalmente temos:

$$\frac{\dot{R}^2(t) + 2\ddot{R}(t)R(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = -8\pi G p. \quad (3.76)$$

As demais componentes das equações de campo se anulam idênticamente.

Observando que as equações (3.64), (3.70) e (3.76) são iguais, temos que as soluções das equações de campo do TERG para o universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker se

reduzem ao sistema:

$$3 \frac{\dot{R}^2(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (3.77)$$

$$\frac{\dot{R}^2(t) + 2\ddot{R}(t)R(t) + k}{R^2(t)} - \Lambda = -8\pi Gp, \quad (3.78)$$

o qual coincide com as equações de Friedmann para a Relatividade Geral. Estes resultados eram esperados devido a equivalência do TERG com as equações de Einstein conforme a equação (2.41).

Apesar do TERG possuir curvatura nula, a adoção do campo de tétradas (3.27) contendo o parâmetro de curvatura seria justificada no sentido em que sempre podemos associar a cada ponto do espaço-tempo, um campo de tétradas adaptado no espaço tangente plano.

Considere agora, as equações de campo aplicadas a um campo de tétradas onde substituíssemos o fator contendo o parâmetro de curvatura $\frac{1}{1-\frac{kr^2}{4}}$ por uma função $f(r)$. Esperaríamos encontrar, tendo em vista as equações (3.77) e (3.78), condições apropriadas que estabelecessem que $f(r)$ fosse igual a $\frac{1}{1-\frac{kr^2}{4}}$.

4 *A Energia-Momento na Gravidade Teleparalela*

A dificuldade em se chegar a uma definição consistente para o tensor energia-momento gravitacional levou a investigações sobre pseudo-tensores. Devemos ressaltar que esta dificuldade não está na natureza da gravitação, mas sim na descrição tradicional do campo gravitacional. Em (BABAK; GRISHCHUK, 1999) desenvolve-se uma interessante análise, na tentativa de definir a energia-momento gravitacional por meio da formulação da relatividade geral. Entretanto, Maluf (MALUF, 1995) mostrou que a descrição métrica da gravidade não é apropriada para tal finalidade. Segundo Maluf et. al (MALUF; VEIGA; ROCHA-NETO, 2006a) a formulação geométrica do TERG tem mostrado ser a mais adequada para dirigir-se à dificuldade acima mencionada.

4.1 **Pseudo-tensores de Energia-Momento do Campo Gravitacional**

Nesta seção apresentaremos diversas abordagens, encontradas na literatura, de pseudo-tensores de energia-momento do campo gravitacional, com o intuito de poder compará-los com os resultados estabelecidos pelo TERG.

4.1.1 **Pseudo-tensor de Einstein**

No caso geral, a equação de campo de Einstein tem a forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de densidade energia-momento da matéria e satisfaz a equação de conservação

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0. \quad (4.2)$$

Segundo Rosen e Virbhadra (ROSEN; VIRBHADRA, 1993), Einstein mostrou que podemos escrever a derivada parcial do tensor de energia-momento da matéria como

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} T_\mu^\nu + A_\mu^\nu \right), \quad (4.3)$$

onde o pseudo-tensor de energia-momento gravitacional é dado por

$$A_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi} \left(L \delta_\nu^\mu - \partial_\mu g_{\lambda\sigma} \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu g_{\lambda\sigma}} \right), \quad (4.4)$$

com

$$L = \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} \left(\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\sigma\tau}^\beta \right), \quad (4.5)$$

sendo a densidade Lagrangeana de Einstein-Hilbert e g o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$.

Da equação (4.2) temos a lei de conservação:

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g} T_\mu^\nu + A_\mu^\nu \right) = 0, \quad (4.6)$$

Moller (MÖLLER, 1958) mostrou que pode-se escrever

$$\sqrt{-g} T_\mu^\nu + A_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi} \partial_\sigma H_\mu^{\nu\sigma}, \quad (4.7)$$

onde

$$H_\mu^{\nu\sigma} = -H_\mu^{\sigma\nu} = \frac{g_{\mu\lambda}}{\sqrt{-g}} \partial_\tau \left[-g \left(g^{\nu\lambda} g^{\sigma\tau} - g^{\sigma\lambda} g^{\nu\tau} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Em um espaço vazio, onde $T_\mu^\nu = 0$, a equação (4.7) torna-se

$$A_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi} \partial_\sigma H_\mu^{\nu\sigma}. \quad (4.9)$$

A energia-momento do campo gravitacional é dada por (AGUIRREGABIRIA et al., 1995)

$$P_\mu = \int \int \int A_\mu^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.10)$$

Usando o teorema de Gauss podemos escrever

$$P_\mu = \frac{1}{16\pi} \int \int H_\mu^{0a} n_a dS, \quad (4.11)$$

onde n_i é o vetor unitário normal externo e dS é o elemento infinitesimal de superfície.

4.1.2 Pseudo-tensor de Landau e Lifshitz

O pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional simétrico de Landau e Lifshitz é dado por (LANDAU; LIFSHITZ, 1980)

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \partial_\rho (\partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (4.12)$$

onde

$$\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = -g(g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}). \quad (4.13)$$

L^{00} e L^{i0} são os componentes da densidade de energia e momento. $L^{\mu\nu}$ satisfaz a lei de conservação local:

$$\partial_\nu L^{\mu\nu} = 0. \quad (4.14)$$

A energia e momento são dados por

$$P^\mu = \int \int \int L^{\mu 0} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.15)$$

Usando o teorema de Gauss's, a energia e momento tornam-se

$$P^\mu = \frac{1}{16\pi} \int \int (\partial_\sigma \lambda^{\mu 0 a \sigma}) n_a dS. \quad (4.16)$$

4.1.3 Pseudo-tensor de Bergmann-Thomson

O pseudo-tensor de Bergmann-Thomson (BERGMANN; THOMSON, 1953) é dado por:

$$B^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \partial_\alpha \Pi^{\mu\nu\alpha}, \quad (4.17)$$

onde

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = g^{\mu\beta} V_\beta^{\nu\alpha}, \quad (4.18)$$

com

$$V_{\beta}{}^{\nu\alpha} = \frac{g_{\beta\xi}}{\sqrt{-g}} \partial_{\rho} \left[-g \left(g^{\nu\xi} g^{\alpha\rho} - g^{\alpha\xi} g^{\nu\rho} \right) \right]. \quad (4.19)$$

Na equação (4.19), está claro que

$$V_{\beta}{}^{\nu\alpha} = -V_{\beta}{}^{\alpha\nu}. \quad (4.20)$$

As componentes de densidade de energia e de momento são respectivamente representadas por B^{00} e B^{i0} . A prescrição da energia-momento de Bergmann-Thomson satisfazem a lei de conservação local:

$$\partial_{\nu} B^{\mu\nu} = 0. \quad (4.21)$$

As componentes da energia-momento são dadas por

$$P^{\mu} = \int \int \int B^{\mu 0} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.22)$$

Para métricas independentes do tempo, temos

$$P^{\mu} = \frac{1}{16\pi} \int \int \Pi^{\mu 0i} n_i dS. \quad (4.23)$$

Onde n_i é o vetor unitário normal ao elemento infinitesimal de superfície dS . P^i são as componentes do momento e P^0 é a energia.

As expressões que definem esses pseudo-tensores possuem derivadas segundas do tensor métrico que podem ser anulados por uma escolha de um sistema de coordenadas localmente geodésico. Assim estas quantidades não seriam válidas numa região localizada do espaço-tempo, mas apenas podem ser definidos no espaço-tempo todo, onde não é possível anular a derivada segunda de $g_{\mu\nu}$.

4.2 Tensor de Energia-Momento Gravitacional

A definição para a energia-momento gravitacional foi obtida primeiramente na formulação Hamiltoniana do TERG (MALUF, 1994), (MALUF; ROCHA-NETO, 1999), (MALUF; ROCHA-NETO, 2001).

Maluf, em (MALUF, 2005), reescreve a equação de campo (2.40) na forma

$$\partial_\nu \left(e^{\Sigma^{a\lambda\nu}} \right) = \frac{1}{4k'} e e^a{}_\mu \left(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu} \right), \quad (4.24)$$

onde

$$t^{\lambda\mu} = k' \left(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right), \quad (4.25)$$

é interpretado como o tensor de energia-momento do campo gravitacional.

Vamos abrir um parêntese aqui para mostrar que a expressão para a energia-momento do TERG é verdadeiramente um tensor, o que não ocorre com as expressões dadas pela RG.

De acordo com Bassalo (BASSALO, 1973, cap. 2), um conjunto de N^{p+q} funções $A_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_p}$ das N coordenadas x^i , constitui as componentes de um **tensor** se eles se transformam de acordo com a equação

$$\bar{A}_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^\omega \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \bar{x}^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial \bar{x}^{\rho_q}} A_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}, \quad (4.26)$$

quando há uma mudança de coordenadas definida por $\bar{x} = \bar{x}(x)$.

Em (4.26), $\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}$ é o Jacobiano da transformação $\bar{x} = \bar{x}(x)$ dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \quad (4.27)$$

Quando $\omega = 0$, o tensor é chamado **puro**. Se $\omega = 1$, o tensor chama-se **densidade tensorial** e se $\omega = -1$, ele chama-se **capacidade tensorial**.

Provaremos agora que a equação (4.25) é invariante por uma transformação de coordenadas. Aplicando (4.26) em (4.25) temos

$$t^{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{t}^{\alpha\mu}, \quad (4.28)$$

onde

$$\tilde{t}^{\lambda\mu} = k' \left(4\bar{\Sigma}^{bc\lambda} \bar{T}_{bc}{}^{\mu} - \bar{g}^{\lambda\mu} \bar{\Sigma}^{bcd} \bar{T}_{bcd} \right), \quad (4.29)$$

sendo

$$\bar{T}_{a\mu\nu} = \frac{\partial \bar{e}_{a\mu}}{\partial \bar{x}^\nu} - \frac{\partial \bar{e}_{a\nu}}{\partial \bar{x}^\mu}. \quad (4.30)$$

De acordo com (4.26) temos

$$\bar{e}_{a\mu} = \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} e_{b\sigma}. \quad (4.31)$$

As derivadas parciais da t etra da s ao

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_{a\mu}}{\partial \bar{x}^\nu} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \left(\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} e_{b\sigma} \right), \\ \frac{\partial \bar{e}_{a\mu}}{\partial \bar{x}^\nu} &= \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} e_{b\sigma} + \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu} e_{b\sigma} + \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial e_{b\sigma}}{\partial x^n}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_{a\nu}}{\partial \bar{x}^\mu} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} \left(\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} e_{b\sigma} \right), \\ \frac{\partial \bar{e}_{a\nu}}{\partial \bar{x}^\mu} &= \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} e_{b\sigma} + \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\mu} e_{b\sigma} + \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial e_{b\sigma}}{\partial x^n}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Portanto, trocando apropriadamente os índices somados teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{e}_{a\mu}}{\partial \bar{x}^\nu} - \frac{\partial \bar{e}_{a\nu}}{\partial \bar{x}^\mu} \right) &= \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} e_{b\sigma} - \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\mu} e_{b\rho}, \\ \bar{T}_{a\mu\nu} &= \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \left(\frac{\partial e_{b\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial e_{b\rho}}{\partial x^\sigma} \right), \\ \bar{T}_{a\mu\nu} &= \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{T}_{b\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O que mostra que o tensor de torc o   realmente um tensor. De acordo com Spiegel (SPIEGEL, 1972), temos que o produto de dois tensores   um tensor cuja ordem   a soma das ordens dos tensores dados, e também que a soma ou diferença de dois tensores de mesma ordem e tipo   um tensor de mesma ordem e tipo. Como o tensor de energia-momento do campo gravitacional do TERG   construído a partir de produtos e diferenças de tensores, podemos concluir

que o mesmo também é um tensor.

Em (MALUF et al., 2002) a forma integral das equações de vínculo $C^a = 0$ é interpretada como uma equação que define o quadri-vetor de energia-momento no vácuo, e assim temos a expressão

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_j \Pi^{aj}, \quad (4.35)$$

onde

$$\Pi^{aj} = -4ke\Sigma^{a0j}, \quad (4.36)$$

esta definição tem sido aplicada satisfatoriamente para várias configurações do campo gravitacional (MALUF; FARIA, 2003).

Vamos considerar as equações de campo (2.40) na forma

$$\partial_\nu \left(-4k' e \Sigma^{a\lambda\nu} \right) = -k' e e^{a\mu} \left(4\Sigma^{b\nu\lambda} T_{b\nu\mu} - \delta_\mu^\lambda \Sigma^{bdc} T_{bcd} \right) - e e^a{}_\mu T^{\lambda\mu} + 2k' e e^a{}_\mu g^{\mu\lambda} \Lambda. \quad (4.37)$$

A componente $\lambda = 0$ desta equação pode ser escrita em termos de Π^{ak} ,

$$\partial_k \left(\Pi^{ak} \right) = -k' e e^{a\mu} \left(4\Sigma^{bj0} T_{bj\mu} - \delta_\mu^0 \Sigma^{bdc} T_{bcd} \right) - e e^a{}_\mu T^{0\mu} + 2k' e e^a{}_\mu g^{\mu\lambda} \Lambda. \quad (4.38)$$

Definindo a quantidade $\phi^{a\lambda}$,

$$\phi^{a\lambda} = k' e e^{a\mu} \left(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc\mu} - \delta_\mu^\lambda \Sigma^{bdc} T_{bcd} \right), \quad (4.39)$$

podemos reescrever a equação (4.38) como

$$-\partial_k \Pi^{ak} = \phi^{a0} + e e^a{}_\mu T^{0\mu} - 2k' e e^a{}_\mu g^{\mu 0} \Lambda. \quad (4.40)$$

Da equação (4.35) temos,

$$P^a = \int_V d^3x \left(\phi^{a0} + e e^a{}_\mu T^{0\mu} - 2k' e e^a{}_\mu g^{\mu 0} \Lambda \right). \quad (4.41)$$

Esta equação sugere que P^a representa a energia-momento *total*, do campo gravitacional e da matéria. Tendo em vista a expressão (4.25), podemos ver que as equações (4.37), que são

equivalentes às equações de Einstein, podem ser escritas na forma mais simples

$$\partial_\nu (e \Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4k'} e e^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu} - 2k' g^{\mu\lambda} \Lambda). \quad (4.42)$$

Assim, a equação (4.41) pode ser dada alternativamente por

$$P^a = \int_V d^3x e e^a{}_\mu (t^{0\mu} + T^{0\mu} - 2k' g^{\mu 0} \Lambda). \quad (4.43)$$

As componentes espaciais $P^{(i)}$ formam o vetor *momento* total tridimensional do campo gravitacional mais a matéria, enquanto que a componente temporal $P^{(0)}$ é igual à *energia* total do sistema (LANDAU; LIFSHITZ, 1980, seção 32). Observe que na equação (4.25) aparece a derivada primeira da tetrada, que não se anula por nenhuma transformação de coordenadas.

4.3 A Energia Total do Universo de FLRW

Agora iremos calcular a energia total do universo de FLRW usando as equações mostradas na seção anterior. Substituindo a equação (4.42) em (4.43) e usando que

$$\Sigma^{a\lambda\nu} = \Sigma^{abc} e_b{}^\lambda e_c{}^\nu, \quad (4.44)$$

temos,

$$P^a = \int_V d^3x 4k' \partial_\nu (e \Sigma^{a(0)c} e_{(0)}{}^0 e_c{}^\nu). \quad (4.45)$$

Como já foi dito anteriormente, a componente temporal representa a energia do sistema, logo a energia será dada pela equação

$$P^{(0)} = \int_V d^3x 4k' \partial_\nu (e \Sigma^{(0)(0)c} e_0{}^0 e_c{}^\nu). \quad (4.46)$$

Expandindo os termos que contém os índices mudos ν e c na equação anterior, temos

$$P^{(0)} = \int_V d^3x 4k' \left[\partial_1 (e \Sigma^{(0)(0)(1)} e_0{}^0 e_{(1)}{}^1) + \partial_2 (e \Sigma^{(0)(0)(2)} e_0{}^0 e_{(2)}{}^2) + \partial_3 (e \Sigma^{(0)(0)(3)} e_0{}^0 e_{(3)}{}^3) \right]. \quad (4.47)$$

Substituindo (3.32), (3.29), (3.46), (3.47), (3.48) em (4.47), temos

$$P^{(0)} = \int_V d^3x \frac{1}{4\pi G} \left\{ \partial_x \left[\frac{Rkx}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] + \partial_y \left[\frac{Rky}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] + \partial_z \left[\frac{Rkz}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] \right\} \quad (4.48)$$

após calcularmos as derivadas parciais desta equação, encontramos,

$$P^{(0)} = \int_V d^3x \frac{1}{8\pi G} \left[\frac{Rk}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} - \frac{Rk^2x^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} + \frac{Rk}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} - \frac{Rk^2y^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} + \frac{Rk}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} - \frac{Rk^2z^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right], \quad (4.49)$$

ou

$$P^{(0)} = \frac{3R}{8\pi G} \int_V d^3x \frac{k}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} - \frac{R}{8\pi G} \int_V d^3x \frac{k^2r^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}. \quad (4.50)$$

É conveniente realizar a integração em coordenadas esféricas (ROSEN, 1994; VARGAS, 2004), lembrando que $r = x^2 + y^2 + z^2$. O elemento de volume em coordenadas esféricas é dado por $dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, assim podemos escrever a equação (4.50) como

$$P^{(0)} = \frac{3R}{8\pi G} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{kr^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \sin\theta dr d\theta d\phi - \frac{R}{8\pi G} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k^2r^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \sin\theta dr d\theta d\phi. \quad (4.51)$$

Resolvendo as integrais em θ e ϕ , temos

$$P^{(0)} = \frac{R}{2G} \int_0^\infty \frac{k^2r^4}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr - \frac{3R}{2G} \int_0^\infty \frac{kr^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} dr. \quad (4.52)$$

Vamos calcular a energia total do universo de FLRW *esférico*, ou seja, com $k=1$. Assim, $P^{(0)}$ resulta em

$$P^{(0)} = \frac{R}{2G} \left[\int_0^\infty \frac{r^4}{\left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^3} dr - 3 \int_0^\infty \frac{r^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2} dr \right], \quad (4.53)$$

onde após a integração, encontramos

$$P^{(0)} = \frac{R}{2G} [6\pi - 3(2\pi)] = 0. \quad (4.54)$$

Este resultado era esperado, pois de acordo com os argumentos apresentados por Tryon (TRYON, 1973) em um universo inicial fechado, a energia gravitacional cancela-se com a energia da matéria criada.

A integração foi realizada de zero a infinito, para posterior comparação com os resultados dos métodos de pseudo-tensores.

Vamos agora calcular a energia total do universo de FLRW *hiperbólico*, ou seja, com $k=-1$. Assim, $P^{(0)}$ resulta em

$$P^{(0)} = \frac{R}{2G} \left[\int_0^\infty \frac{r^4}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^3} dr + 3 \int_0^\infty \frac{r^2}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2} dr \right], \quad (4.55)$$

essa integral resulta em

$$P^{(0)} = \frac{R}{2G} [indefinido + \infty]. \quad (4.56)$$

Devemos observar que chegamos a um valor indefinido para o primeiro termo da expressão (4.55). Entretanto, de acordo com Vargas (VARGAS, 2004), apenas no intervalo de integração $[0, 2]$ seria possível obter uma energia infinita para $P^{(0)}$ no universo hiperbólico.

É fácil ver que a energia total para o universo de FLRW *plano* é zero, mesmo antes da resolução da integral.

4.4 O Momento Total do Universo de FLRW

Vamos agora calcular o momento total (matéria mais gravitação) para o universo de FLRW. Como visto na seção anterior, o momento será dado pelas componentes espaciais do quadri-vetor energia-momento.

Calculando a componente {1} do vetor energia-momento:

$$P^{(1)} = \int_V d^3x 4k' \partial_\nu \left(e \Sigma^{(1)(0)c} e_{(0)}^0 e_c{}^\nu \right), \quad (4.57)$$

e expandindo os termos que contém os índices mudos μ e c na equação anterior, temos

$$P^{(1)} = \int_V d^3x 4k' \left[\partial_1 \left(e \Sigma^{(1)(0)(1)} e_{(0)}^0 e_{(1)}^1 \right) + \partial_2 \left(e \Sigma^{(1)(0)(2)} e_{(0)}^0 e_{(2)}^2 \right) + \partial_3 \left(e \Sigma^{(1)(0)(3)} e_{(0)}^0 e_{(3)}^3 \right) \right]. \quad (4.58)$$

Substituindo (3.32), (3.29) e (3.49) na equação anterior,

$$P^{(1)} = \int_V d^3x \frac{1}{4\pi G} \left\{ \partial_x \left[\frac{R\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] \right\}, \quad (4.59)$$

e resolvendo a derivada parcial em x , obtemos

$$P^{(1)} = -\frac{R\dot{R}}{4\pi G} \int_V d^3x \left[\frac{kx}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} \right]. \quad (4.60)$$

Para calcular essa integral, vamos calculá-la em coordenadas esféricas. Com isso a equação (4.60) fica

$$P^{(1)} = -\frac{R\dot{R}}{4\pi G} \left[\int_0^\infty \frac{kr^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \right], \quad (4.61)$$

e a integral de $\cos \phi$ no intervalo de $[0, 2\pi]$ é nula, assim a equação (4.61) resulta em

$$P^{(1)} = 0. \quad (4.62)$$

Passemos agora ao cálculo da componente {2} do vetor energia-momento

$$P^{(2)} = \int_V d^3x 4k' \partial_\nu \left(e \Sigma^{(2)(0)c} e_{(0)}^0 e_c{}^\nu \right), \quad (4.63)$$

expandindo os índices μ e c , temos

$$P^{(2)} = \int_V d^3x 4k' \left[\partial_1 \left(e \Sigma^{(2)(0)(1)} e_{(0)}^0 e_{(1)}^1 \right) + \partial_2 \left(e \Sigma^{(2)(0)(2)} e_{(0)}^0 e_{(2)}^2 \right) \right]$$

$$+\partial_3 \left(e \Sigma^{(2)(0)(3)} e_{(0)}^0 e_{(3)}^3 \right) \Big], \quad (4.64)$$

e substituindo (3.32), (3.29) e (3.49):

$$P^{(2)} = \int_V d^3x \frac{1}{4\pi G} \left\{ \partial_y \left[\frac{R\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] \right\}, \quad (4.65)$$

resolvendo a deriva parcial em y, temos

$$P^{(2)} = -\frac{R\dot{R}}{4\pi G} \int_V d^3x \frac{ky}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}, \quad (4.66)$$

escrevendo a equação anterior em coordenadas esféricas

$$P^{(2)} = -\frac{R\dot{R}}{4\pi G} \int_0^\infty \frac{kr^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi, \quad (4.67)$$

analogamente à equação (4.61), a integral de $\sin\phi$ no intervalo de $[0, 2\pi]$ é nula, assim a equação (4.67) resulta em

$$P^{(2)} = 0. \quad (4.68)$$

Finalmente, calculando a componente {3} do vetor momento:

$$P^{(3)} = \int_V d^3x 4k' \partial_\nu \left(e \Sigma^{(3)(0)c} e_{(0)}^0 e_c^\nu \right), \quad (4.69)$$

e expandindo os índices mudos μ e c na equação anterior, temos

$$P^{(3)} = \int_V d^3x 4k' \left[\partial_1 \left(e \Sigma^{(3)(0)(1)} e_{(0)}^0 e_{(1)}^1 \right) + \partial_2 \left(e \Sigma^{(3)(0)(2)} e_{(0)}^0 e_{(2)}^2 \right) + \partial_3 \left(e \Sigma^{(3)(0)(3)} e_{(0)}^0 e_{(3)}^3 \right) \right]. \quad (4.70)$$

Substituindo (3.32), (3.29) e (3.49) na equação (4.70)

$$P^{(3)} = \int_V d^3x \frac{1}{4\pi G} \left\{ \partial_z \left[\frac{R\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right] \right\}, \quad (4.71)$$

resolvendo a deriva parcial em z , temos

$$P^{(3)} = -\frac{R\dot{R}}{4\pi G} \int_V d^3x \frac{kz}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}, \quad (4.72)$$

escrevendo a equação (4.72) em coordenadas esféricas

$$P^{(3)} = -\frac{R\dot{R}}{4\pi G} \int_0^\infty \frac{kr^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (4.73)$$

Novamente temos que na equação (4.73) analogamente à equação (4.61), a integral de $\sin\theta \cos\theta$ no intervalo de $[0, \pi]$ é nula, assim a equação (4.73) também será nula

$$P^{(3)} = 0. \quad (4.74)$$

Portanto, todas as três componentes do *momento total* são nulas independentemente do modelo do universo adotado.

4.5 Resultados da Literatura

Recentemente, muitos pesquisadores mostraram interesse em estudar a energia total ou complexo de energia do universo. Rosen (ROSEN, 1994) e Cooperstock (COOPERSTOCK, 1994) calcularam a energia do universo, incluindo a energia da matéria e do campo gravitacional, usando o pseudo-tensor de energia-momento de Einstein para representar a energia gravitacional. O resultado revelou que a energia total de um universo de FLRW fechado é zero. Garecki (GARECKI, 1995) e Johri et. al (JOHRI et al., 1995) utilizam o complexo de energia de Landau-Lifshitz e encontraram o mesmo resultado. Convém resaltar que Vargas (VARGAS, 2004) encontrou energia zero utilizando um pseudo-tensor no contexto de teleparalelismo desenvolvido por Andrade, Guillen e Pereira (ANDRADE; GUILLEN; PEREIRA, 2000). Estes resultados são compatíveis com a nossa abordagem.

5 *Momento Angular do Campo Gravitacional no TERG*

O momento angular do campo gravitacional tem sido discutido na literatura por meio de diferentes aproximações. A aproximação mais antiga é baseada em pseudotensores (BERGMANN; THOMSON, 1953). Veremos abaixo, que no TERG, a definição de momento angular é possível através de uma adequada interpretação dos vínculos oriundos do formalismo Hamiltoniano.

5.1 Expressão do Momento Angular Gravitacional

Como vimos no capítulo 2, a densidade Hamiltoniana (2.44) é

$$H = e_{a0}C^a + \alpha_{ik}\Gamma^{ik} + \beta_k\Gamma^k.$$

Os vínculos Γ^{ik} e Γ^k podem ser simplificados, podendo ser reescritos como um único vínculo Γ^{ab} . Assim, a densidade Hamiltoniana (2.44) pode ser escrita como (MALUF et al., 2006b):

$$H = e_{a0}C^a + \frac{1}{2}\lambda_{ab}\Gamma^{ab}, \quad (5.1)$$

onde $\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$ são multiplicadores de Lagrange que são identificados como $\lambda_{ik} = \alpha_{ik}$ e $\lambda_{0k} = -\lambda_{k0} = \beta_k$. Os vínculos $\Gamma^{ab} = -\Gamma^{ba}$ incorporam-se aos vínculos Γ^{ik} e Γ^k por meio das relações:

$$\Gamma^{ik} = e_a^i e_b^k \Gamma^{ab}, \quad \Gamma^{0k} = e_a^0 e_b^k \Gamma^{ab}. \quad (5.2)$$

O vínculo Γ^{ab} é dado por

$$\Gamma^{ab} = M^{ab} + 4k'e \left(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right). \quad (5.3)$$

Da mesma forma como P^a foi definido, a forma integral da equação de vínculo $\Gamma^{ab} = 0$ leva a uma nova definição do momento angular no espaço-tempo de Weitzenböck. A equação $\Gamma^{ab} = 0$ implica em:

$$M^{ab} = -4k'e \left(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right). \quad (5.4)$$

Em Maluf (MALUF et al., 2006b) o momento angular do campo gravitacional é definido por

$$L^{ab} = \int_V d^3x e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} M^{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

onde:

$$M^{ab} = e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} M^{\mu\nu} = -M^{ba}. \quad (5.6)$$

A expressão (5.5) é invariante sob transformações de coordenadas no espaço tridimensional, o que não acontece com a definição apresentada em (MALUF et al., 2002) e portanto aquela definição não será utilizada aqui.

5.2 Cálculo do Momento Angular Gravitacional

Vamos agora encontrar o momento angular gravitacional do universo de FLRW, para isso vamos escrever a equação (5.5) usando as equações (5.6) e (5.4) na forma

$$L^{ab} = - \int_V d^3x 4k'e \left(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right). \quad (5.7)$$

Vimos que Σ foi definido em (2.40) apenas com índices locais de Lorentz. Sendo $\Sigma^{a0b} = e_c{}^0 \Sigma^{acb}$ e lembrando que nosso campo de tétradas é diagonal, então a equação (5.7) pode ser reescrita como

$$L^{ab} = - \int_V d^3x 4k' e e_{(0)}{}^0 \left(\Sigma^{a(0)b} - \Sigma^{b(0)a} \right). \quad (5.8)$$

As componentes do momento angular gravitacional em sua maioria se anulam logo de início, ou seja, antes de fazer a substituição do valor em seus termos. Abaixo apresentaremos a resolução apenas das componentes $L^{(0)(i)}$, que não apresentaram esse comportamento.

A componente $\{(0)(1)\}$ será dada por:

$$L^{(0)(1)} = - \int_V d^3x 4k' e e_{(0)}{}^0 \left(\Sigma^{(0)(0)(1)} - \Sigma^{(1)(0)(0)} \right). \quad (5.9)$$

Substituindo (3.32), (3.29) e (3.46), temos

$$L^{(0)(1)} = - \frac{R^2}{8\pi G} \int_V d^3x \frac{kx}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}, \quad (5.10)$$

passando a integral para coordenadas esféricas, obtemos:

$$L^{(0)(1)} = - \frac{R^2}{8\pi G} \int_0^\infty \frac{kr^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi, \quad (5.11)$$

cujo o resultado, independente do parâmetro k é

$$L^{(0)(1)} = 0. \quad (5.12)$$

Analogamente, a componente $\{(0)(2)\}$ será

$$L^{(0)(2)} = - \int_V d^3x 4k' e e_{(0)}{}^0 \left(\Sigma^{(0)(0)(2)} - \Sigma^{(2)(0)(0)} \right). \quad (5.13)$$

Substituindo (3.32), (3.29) e (3.47) na equação anterior e passando para coordenadas esféricas

$$L^{(0)(2)} = - \frac{R^2}{8\pi G} \int_V d^3x \frac{ky}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}, \quad (5.14)$$

escrevendo a integral para coordenadas esféricas, obtemos

$$L^{(0)(2)} = - \frac{R^2}{8\pi G} \int_0^\infty \frac{kr^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi, \quad (5.15)$$

que resultará em

$$L^{(0)(2)} = 0. \quad (5.16)$$

Por último, temos a componente $\{(0)(3)\}$

$$L^{(0)(3)} = - \int_V d^3x 4k' e e_{(0)}{}^0 \left(\Sigma^{(0)(0)(3)} - \Sigma^{(3)(0)(0)} \right). \quad (5.17)$$

Substituindo (3.32), (3.29) e (3.48) na equação anterior e passando para coordenadas esféricas

$$L^{(0)(3)} = \frac{R^2}{8\pi G} \int_V d^3x \frac{kz}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3}, \quad (5.18)$$

passando a integral para coordenadas esféricas

$$L^{(0)(3)} = - \frac{R^2}{8\pi G} \int_0^\infty \frac{kr^3}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^3} dr \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (5.19)$$

resultará em

$$L^{(0)(3)} = 0. \quad (5.20)$$

Vimos então que o universo de FLRW possui momento angular gravitacional nulo, independente do parâmetro k . Este resultado era esperado, pois o universo de FLRW é isotrópico e não possui rotação, portanto, não existe um ponto preferencial ou eixo de rotação no qual podemos definir o momento angular.

Conclusão

No intuito de ilustrar a equivalência entre a Relatividade Geral e o TERG, determinamos um dos campos de tetradas relacionado com a métrica de Robertson-Walker que descreve o modelo cosmológico padrão (homogêneo e isotrópico), e chegamos a um resultado equivalente ao encontrado a partir das equações de campo de Einstein, ou seja, nas equações de Friedmann. No entanto, fica em aberto a possibilidade de se investigar um espaço-tempo mais geral do que o de FLRW onde não aparece explicitamente o parâmetro de curvatura.

Na segunda parte do trabalho, no contexto do TERG desenvolvido por Maluf, calculamos pela primeira vez a energia total do Universo de FLRW, o qual inclui a energia da matéria mais a energia do campo gravitacional. Encontramos o valor zero para essa energia. Este resultado está de acordo com cálculos usando-se os complexos de energia-momento (ROSEN, 1994; GARECKI, 1995; JOHRI et al., 1995; COOPERSTOCK, 1994; VARGAS, 2004) tanto para o universo plano como fechado.

De acordo com esses resultados, para um universo fechado a energia gravitacional cancela-se com a energia da matéria. Finalmente, mostramos que as componentes do momento angular de FLRW são zero, resultado esperado, pois não existem direções privilegiadas neste espaço-tempo em expansão.

Como perspectiva deste trabalho, pode-se calcular a energia total para um universo fechado na métrica de Bianchi do tipo I, II, dentre outros.

Referências Bibliográficas

- AGUIRREGABIRIA, J. M. et al. Energy and angular momentum of charged rotating black holes. *Gen. Rel. Grav.*, v. 28, p. 1393–1400, 1995.
- ANDRADE, V. C. de; GUILLEN, L. C. T.; PEREIRA, J. G. Gravitational energy-momentum density in teleparallel gravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 4533–4536, 2000.
- ANDRADE, V. C. de; PEREIRA, J. G. Gravitational lorentz force and the description of the gravitational interaction. *Phys. Rev. D*, v. 56, p. 4689–4695, 1997.
- BABAK, S. V.; GRISHCHUK, L. P. Energy-momentum tensor for the gravitational field. *Phys. Rev. D*, v. 61, p. 024038, 1999.
- BASSALO, J. M. *Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos*. [S.l.]: Universidade Federal do Pará, 1973.
- BERGMANN, P. G.; THOMSON, R. Spin and angular momentum in general relativity. *Phys. Rev.*, v. 89, p. 400–407, 1953.
- BLAGOJEVIĆ, M.; VASSILIĆ, M. Conservation laws in the teleparallel theory with a positive cosmological constant. *Class. Quantum Grav.*, v. 19, p. 3723–3744, 2002.
- CARTAN, E. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité. *C. R. Acad. Sci.*, v. 174, p. 734–737, 1922.
- CARTAN, E. Sur les variétés à connexion affine courbure de riemann et les espaces à torsion. *C. R. Acad. Sci.*, v. 174, p. 593–595, 1922.
- COOPERSTOCK, F. I. Perspectives on the energy of the universe. *Gen. Rel. Grav.*, v. 26, p. 323–327, 1994.
- DALARSSON, M.; DALARSSON, N. *Tensors, Relativity and Cosmology*. [S.l.]: ELSEVIER Academic Press, 2005.
- EINSTEIN, A. Neue möglichkeit für eine einheitliche feldtheorie von gravitation und elektrizitat. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, v. 217, p. 224–227, 1928.
- GARECKI, J. An interesting property of the isotropic and homogeneous cosmological models. *Gen. Rel. Grav.*, v. 27, p. 55–64, 1995.
- HARTLE, J. B. *Gravity: an introduction to Eintein's general relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2003.
- HAYASHI, K.; NAKANO, T. Extended translation invariance and associated gauge fields. *Prog. Theor. Phys.*, v. 38, n. 2, p. 491–507, 1967.

- HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. *Phys. Rev. D*, v. 19, p. 3524–3553, 1979.
- JOHRI, V. B. et al. Gravitational energy in the expanding universe. *Gen. Rel. Grav.*, v. 27, p. 313–318, 1995.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Teoria do Campo*. Moscou: Editora Mir, 1980.
- MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *J. Math. Phys.*, v. 35, p. 335–343, 1994.
- MALUF, J. W. Localization of energy in general relativity. *J. Math. Phys.*, v. 36, p. 4242–4247, 1995.
- MALUF, J. W. On the distribution of gravitational energy in the de sitter space. *J. Math. Phys.*, v. 37, p. 6293–6301, 1996.
- MALUF, J. W. The gravitational energy-momentum tensor and the gravitational pressure. *Ann. Phys. Lpz.*, v. 14, p. 723–732, 2005. e-print:gr-qc/0504077 v2.
- MALUF, J. W.; FARIA, F. F. The gravitational energy-momentum flux. *Class. Quantum Grav.*, v. 20, p. 4683–4694, 2003.
- MALUF, J. W.; GOYA, A. Space-time defects and teleparallelism. *Class. Quantum Grav.*, v. 18, p. 5143–5154, 2001.
- MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry. *Gen. Rel. Grav.*, v. 31, p. 173–185, 1999.
- MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geomtry. *Phys. Rev. D*, v. 64, p. 084014, 2001.
- MALUF, J. W. et al. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 124001, 2002.
- MALUF, J. W. et al. The angular momentum of the gravitational field and poicaré group. *Class. Quantum Grav.*, v. 23, p. 6245–6256, 2006b.
- MALUF, J. W.; VEIGA, M. V. O.; ROCHA-NETO, J. F. da. Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence. e-print gr-qc/0507122 v3, p. 1–17, 2006a.
- MÖLLER, C. On the localization of the energy of a physical system in the general theory of relativity. *Ann. Phys.*, v. 4, p. 347–371, 1958.
- MØLLER, C. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Ann. Phys.*, v. 12, p. 118–133, 1961.
- NITSCH, J.; HEHL, F. W. Translational gauge theory of gravity: Post-newtonian approximation and spin precession. *Phys. Lett. B*, v. 90, n. 1,2, p. 98–102, 1980.
- PELLEGRINI, C.; PLEBANSKI, J. Tetrad fields and gravitational fields. *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, v. 2, 1962.

PEREIRA, J. G.; VARGAS, T. Regge calculus in teleparallel gravity. *Class. Quantum Grav.*, v. 19, p. 4807–4815, 2002.

ROSEN, N. The energy of the universe. *Gen. Rel. Grav.*, v. 26, p. 319–321, 1994.

ROSEN, N.; VIRBHADRA, K. S. Energy and momentum of cylindrical gravitational waves. *Gen. Rel. Grav.*, v. 25, p. 429–433, 1993.

SALTI, M. On the energy-momentum in close universes. *Czechoslovak Journal of Physics*, v. 56, p. 177–189, 2006.

SCHWEIZER, M.; STRAUMANN, N. Poincaré gauge theory of gravitation and the binary pulsar. *Phys. Lett. A*, v. 71, n. 5,6, p. 493–495, 1979.

SCHWEIZER, M.; STRAUMANN, N.; WIPF, A. Post-newtonian generation of gravitational waves on a theory of gravity with torsion. *Gen. Rel. Grav.*, v. 12, n. 11, p. 951–961, 1980.

SCHWINGER, J. Quantized gravitational field. *Phys. Rev.*, v. 130, n. 3, p. 1253–1258, may 1963.

SOUSA, A. A.; MALUF, J. W. Canonical formulation of gravitational teleparallelism in 2+1 dimensions in schwinger's time gauge. *e-print:gr-qc/0003002*, p. 1–17, 2000.

SOUSA, A. A.; MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of teleparallel theories of gravity in the time gauge. *e-print:gr-qc/0002060*, p. 1–22, 2000.

SOUSA, A. A.; PEREIRA, R. B.; ROCHA-NETO, J. F. da. Angular momentum of the btz black hole in the teleparallel geometry. *Prog. Theor. Phys.*, v. 114, p. 1179–1190, 2005. *e-print:gr-qc/0504077 v2*.

SPIEGEL, M. R. *Análise Vetorial*. [S.l.]: McGRAW-HILL, 1972.

TRYON, E. P. Is the universe a vacuum fluctuation? *Nature*, v. 246, p. 396–397, 1973.

VARGAS, T. *Equivalente Teleparalelo de Algumas Soluções da Relatividade Geral*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, São Paulo, 2002.

VARGAS, T. The energy of the universe in teleparallel gravity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 36, p. 1255–1264, 2004.

WEITZENBÖCK, R. *Invarianten Theorie*. [S.l.]: Nordhoff: Groningen, 1923.

APÊNDICE A – Cálculo das Componentes do Tensor de Torção

O tensor de torção é dado por $T_{\mu\nu} = \partial_\mu e_{\nu\alpha} - \partial_\nu e_{\alpha\mu}$, e suas componentes em coordenadas cartesianas são:

$$T_{(0)01} = \partial_0 e_{(0)1} - \partial_1 e_{(0)0} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$T_{(0)02} = \partial_0 e_{(0)2} - \partial_2 e_{(0)0} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$T_{(0)03} = \partial_0 e_{(0)3} - \partial_3 e_{(0)0} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$T_{(0)12} = \partial_1 e_{(0)2} - \partial_2 e_{(0)1} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$T_{(0)13} = \partial_1 e_{(0)3} - \partial_3 e_{(0)1} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$T_{(0)23} = \partial_2 e_{(0)3} - \partial_3 e_{(0)2} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$T_{(1)01} = \partial_0 e_{(1)1} - \partial_1 e_{(1)0} = \partial_t \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = \frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}, \quad (\text{A.7})$$

$$T_{(1)02} = \partial_0 e_{(1)2} - \partial_2 e_{(1)0} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$T_{(1)03} = \partial_0 e_{(1)3} - \partial_3 e_{(1)0} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$T_{(1)12} = \partial_1 e_{(1)2} - \partial_2 e_{(1)1} = -\partial_y \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = \frac{Rky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$T_{(1)13} = \partial_1 e_{(1)3} - \partial_3 e_{(1)1} = -\partial_z \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = \frac{Rkz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$T_{(1)23} = \partial_2 e_{(1)3} - \partial_3 e_{(1)2} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$T_{(2)01} = \partial_0 e_{(2)1} - \partial_1 e_{(2)0} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$T_{(2)02} = \partial_0 e_{(2)2} - \partial_2 e_{(2)0} = \partial_t \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = \frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}, \quad (\text{A.14})$$

$$T_{(2)03} = \partial_0 e_{(2)3} - \partial_3 e_{(2)0} = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$T_{(2)12} = \partial_1 e_{(2)2} - \partial_2 e_{(2)1} = \partial_x \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = -\frac{Rkx}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (\text{A.16})$$

$$T_{(2)13} = \partial_1 e_{(2)3} - \partial_3 e_{(2)1} = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$T_{(2)23} = \partial_2 e_{(2)3} - \partial_3 e_{(2)2} = -\partial_z \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = \frac{Rkz}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (\text{A.18})$$

$$T_{(3)01} = \partial_0 e_{(3)1} - \partial_1 e_{(3)0} = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$T_{(3)02} = \partial_0 e_{(3)2} - \partial_2 e_{(3)0} = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$T_{(3)03} = \partial_0 e_{(3)3} - \partial_3 e_{(3)0} = \partial_t \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = \frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}, \quad (\text{A.21})$$

$$T_{(3)12} = \partial_1 e_{(3)2} - \partial_2 e_{(3)1} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$T_{(3)13} = \partial_1 e_{(3)3} - \partial_3 e_{(3)1} = \partial_x \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = -\frac{Rkx}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}, \quad (\text{A.23})$$

$$T_{(3)23} = \partial_2 e_{(3)3} - \partial_3 e_{(3)2} = \partial_y \left[\frac{R}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right] = -\frac{Rky}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}. \quad (\text{A.24})$$

APÊNDICE B – Cálculo das Componentes de Σ^{abc}

As componentes não nulas de Σ^{abc} dadas pela equação (3.35):

$$\begin{aligned}\Sigma^{abc} = & \frac{1}{4} \left(\eta^{ad} e^{b\mu} e^{c\nu} T_{d\mu\nu} + \eta^{bd} e^{a\mu} e^{c\nu} T_{d\mu\nu} - \eta^{cd} e^{a\mu} e^{b\nu} T_{d\mu\nu} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\eta^{ac} e^{b\nu} e^{d\mu} T_{d\mu\nu} - \eta^{ab} e^{c\nu} e^{d\mu} T_{d\mu\nu} \right),\end{aligned}\tag{B.1}$$

calculadas em coordenadas cartesianas resultam em

$$\begin{aligned}\Sigma^{(0)(0)(1)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(0)(0)} e^{(0)0} e^{(1)1} T_{(0)01} + \eta^{(0)(0)} e^{(0)0} e^{(1)1} T_{(0)01} - \eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(0)0} T_{(1)00} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(0)(0)} e^{(1)1} e^{d\mu} T_{d\mu 1} \right), \\ \Sigma^{(0)(0)(1)} &= -\frac{1}{2} \eta^{(0)(0)} e^{(1)1} \left(e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 1} + e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 1} + e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 1} + e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 1} \right), \\ \Sigma^{(0)(0)(1)} &= -\frac{1}{2} \eta^{(0)(0)} e^{(1)1} \left(e^{(1)1} T_{(1)11} + e^{(2)2} T_{(2)21} + e^{(3)3} T_{(3)31} \right), \\ \Sigma^{(0)(0)(1)} &= -\frac{1}{2} [-1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkx}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkx}{2\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\ \Sigma^{(0)(0)(1)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\frac{kx}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right], \\ \Sigma^{(0)(0)(1)} &= \frac{kx}{2R}.\end{aligned}\tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(0)(0)(2)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(0)(0)} e^{(0)0} e^{(2)2} T_{(0)02} + \eta^{(0)(0)} e^{(0)0} e^{(2)2} T_{(0)02} - \eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(0)0} T_{(2)00} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(0)(0)} e^{(2)2} e^{d\mu} T_{d\mu 2} \right), \\
 \Sigma^{(0)(0)(2)} &= -\frac{1}{2} \eta^{(0)(0)} e^{(2)2} \left(e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 2} + e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 2} + e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 2} + e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 2} \right), \\
 \Sigma^{(0)(0)(2)} &= -\frac{1}{2} \eta^{(0)(0)} e^{(2)2} \left(e^{(1)1} T_{(1)12} + e^{(2)2} T_{(2)22} + e^{(3)3} T_{(3)32} \right), \\
 \Sigma^{(0)(0)(2)} &= -\frac{1}{2} [-1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\
 \Sigma^{(0)(0)(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\frac{ky}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right], \\
 \Sigma^{(0)(0)(2)} &= \frac{ky}{2R}. \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(0)(0)(3)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(0)(0)} e^{(0)0} e^{(3)3} T_{(0)03} + \eta^{(0)(0)} e^{(0)0} e^{(3)3} T_{(0)03} - \eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(0)0} T_{(3)00} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(0)(0)} e^{(3)3} e^{d\mu} T_{d\mu 3} \right), \\
 \Sigma^{(0)(0)(3)} &= -\frac{1}{2} \eta^{(0)(0)} e^{(3)3} \left(e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 3} + e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 3} + e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 3} + e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 3} \right), \\
 \Sigma^{(0)(0)(3)} &= -\frac{1}{2} \eta^{(0)(0)} e^{(3)3} \left(e^{(1)1} T_{(1)13} + e^{(2)2} T_{(2)23} + e^{(3)3} T_{(3)33} \right), \\
 \Sigma^{(0)(0)(3)} &= -\frac{1}{2} [-1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\
 \Sigma^{(0)(0)(3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\frac{kz}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right], \\
 \Sigma^{(0)(0)(3)} &= \frac{kz}{2R}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(1)(0)(1)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(1)1} T_{(1)01} + \eta^{(0)(0)} e^{(1)1} e^{(1)1} T_{(0)11} - \eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(0)0} T_{(1)10} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{d\mu} T_{d\mu 0} \right), \\
 \Sigma^{(1)(0)(1)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(1)1} T_{(1)01} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 0} + \eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 0} \right. \\
 &\quad \left. + \eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 0} + \eta^{(1)(1)} e^{(0)0} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 0} \right), \\
 \Sigma^{(1)(0)(1)} &= \frac{1}{2} \eta^{(1)(1)} e^{(0)0} \left(e^{(1)1} T_{(1)01} + e^{(1)1} T_{(1)10} + e^{(2)2} T_{(2)20} + e^{(3)3} T_{(3)30} \right), \\
 \Sigma^{(1)(0)(1)} &= \frac{1}{2} \left[-2 \frac{\dot{R}}{R} \right], \\
 \Sigma^{(1)(0)(1)} &= -\frac{\dot{R}}{R}. \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(1)(1)(2)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(2)2} T_{(1)12} + \eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(2)2} T_{(1)12} - \eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(1)1} T_{(2)11} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(1)(1)} e^{(2)2} e^{d\mu} T_{d\mu 2} \right), \\
 \Sigma^{(1)(1)(2)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(2)2} T_{(1)12} \right) + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(1)(1)} e^{(2)2} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 2} - \eta^{(1)(1)} e^{(2)2} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 2} \right. \\
 &\quad \left. - \eta^{(1)(1)} e^{(2)2} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 2} - \eta^{(1)(1)} e^{(2)2} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 2} \right), \\
 \Sigma^{(1)(1)(2)} &= \frac{1}{2} \eta^{(1)(1)} e^{(2)2} \left(e^{(1)1} T_{(1)12} - e^{(1)1} T_{(1)12} - e^{(2)2} T_{(2)22} - e^{(3)3} T_{(3)32} \right), \\
 \Sigma^{(1)(1)(2)} &= \frac{1}{2} [1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[- \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\
 \Sigma^{(1)(1)(2)} &= -\frac{ky}{4R}. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(1)(1)(3)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(3)3} T_{(1)13} + \eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(3)3} T_{(1)13} - \eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(1)1} T_{(3)11} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(1)(1)} e^{(3)3} e^{d\mu} T_{d\mu 3} \right), \\
 \Sigma^{(1)(1)(3)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(1)(1)} e^{(1)1} e^{(3)3} T_{(1)13} \right) + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(1)(1)} e^{(3)3} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 3} - \eta^{(1)(1)} e^{(3)3} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 3} \right. \\
 &\quad \left. - \eta^{(1)(1)} e^{(3)3} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 3} - \eta^{(1)(1)} e^{(3)3} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 3} \right), \\
 \Sigma^{(1)(1)(3)} &= \frac{1}{2} \eta^{(1)(1)} e^{(3)3} \left(e^{(1)1} T_{(1)13} - e^{(1)1} T_{(1)13} - e^{(2)2} T_{(2)23} - e^{(3)3} T_{(3)33} \right),
 \end{aligned}$$

$$\Sigma^{(1)(1)(3)} = \frac{1}{2}[1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[- \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right],$$

$$\Sigma^{(1)(1)(3)} = -\frac{kz}{4R}. \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)(0)(2)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(2)2} T_{(2)02} + \eta^{(0)(0)} e^{(2)2} e^{(2)2} T_{(0)22} - \eta^{(2)(2)} e^{(2)2} e^{(0)0} T_{(2)20} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{d\mu} T_{d\mu 0} \right), \\ \Sigma^{(2)(0)(2)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(2)2} T_{(2)02} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 0} + \eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 0} \right. \\ &\quad \left. + \eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 0} + \eta^{(2)(2)} e^{(0)0} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 0} \right), \\ \Sigma^{(2)(0)(2)} &= \frac{1}{2} \eta^{(2)(2)} e^{(0)0} \left(e^{(2)2} T_{(2)02} + e^{(1)1} T_{(1)10} + e^{(2)2} T_{(2)20} + e^{(3)3} T_{(3)30} \right), \\ \Sigma^{(2)(0)(2)} &= \frac{1}{2}[1][1] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(-\frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right) + \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(-\frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right) \right], \\ \Sigma^{(2)(0)(2)} &= \frac{1}{2} \left[-2 \frac{\dot{R}}{R} \right], \\ \Sigma^{(2)(0)(2)} &= -\frac{\dot{R}}{R}. \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)(1)(2)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(2)2} T_{(2)12} + \eta^{(1)(1)} e^{(2)2} e^{(2)2} T_{(1)22} - \eta^{(2)(2)} e^{(2)2} e^{(1)1} T_{(2)21} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{d\mu} T_{d\mu 1} \right), \\ \Sigma^{(2)(1)(2)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(2)2} T_{(2)12} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 1} + \eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 1} \right. \\ &\quad \left. + \eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 1} + \eta^{(2)(2)} e^{(1)1} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 1} \right), \\ \Sigma^{(2)(1)(2)} &= \frac{1}{2} \eta^{(2)(2)} e^{(1)1} \left(e^{(2)2} T_{(2)12} + e^{(1)1} T_{(1)11} e^{(2)2} T_{(2)21} + e^{(3)3} T_{(3)31} \right), \\ \Sigma^{(2)(1)(2)} &= \frac{1}{2}[1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkx}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\ \Sigma^{(2)(1)(2)} &= \frac{kx}{4R}. \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(2)2} e^{(3)3} T_{(2)23} + \eta^{(2)(2)} e^{(2)2} e^{(3)3} T_{(2)23} - \eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(2)2} T_{(3)22} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(2)(2)} e^{(3)3} e^{d\mu} T_{d\mu 3} \right), \\
 \Sigma^{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(2)(2)} e^{(2)2} e^{(3)3} T_{(2)23} \right) + \frac{1}{2} \left(-\eta^{(2)(2)} e^{(3)3} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 3} - \eta^{(2)(2)} e^{(3)3} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 3} \right. \\
 &\quad \left. - \eta^{(2)(2)} e^{(3)3} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 3} - \eta^{(2)(2)} e^{(3)3} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 3} \right), \\
 \Sigma^{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{2} \eta^{(2)(2)} e^{(3)3} \left(e^{(2)2} T_{(2)23} - e^{(1)1} T_{(1)13} - e^{(2)2} T_{(2)23} - e^{(3)3} T_{(3)33} \right), \\
 \Sigma^{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{2} [1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[- \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkz}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\
 \Sigma^{(2)(2)(3)} &= -\frac{kz}{4R}. \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(3)(0)(3)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(3)3} T_{(3)03} + \eta^{(0)(0)} e^{(3)3} e^{(3)3} T_{(0)33} - \eta^{(3)(3)} e^{(3)3} e^{(0)0} T_{(3)30} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{d\mu} T_{d\mu 0} \right), \\
 \Sigma^{(3)(0)(3)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(3)3} T_{(3)03} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 0} + \eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 0} \right. \\
 &\quad \left. + \eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 0} + \eta^{(3)(3)} e^{(0)0} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 0} \right), \\
 \Sigma^{(3)(0)(3)} &= \frac{1}{2} \eta^{(3)(3)} e^{(0)0} \left(e^{(3)3} T_{(3)03} + e^{(1)1} T_{(1)10} + e^{(2)2} T_{(2)20} + e^{(3)3} T_{(3)30} \right), \\
 \Sigma^{(3)(0)(3)} &= \frac{1}{2} [1][1] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(-\frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right) + \left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(-\frac{\dot{R}}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)} \right) \right], \\
 \Sigma^{(3)(0)(3)} &= \frac{1}{2} \left[-2 \frac{\dot{R}}{R} \right], \\
 \Sigma^{(3)(0)(3)} &= -\frac{\dot{R}}{R}. \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(3)(1)(3)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(3)3} T_{(3)13} + \eta^{(1)(1)} e^{(3)3} e^{(3)3} T_{(1)33} - \eta^{(3)(3)} e^{(3)3} e^{(1)1} T_{(3)31} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{d\mu} T_{d\mu 1} \right), \\
 \Sigma^{(3)(1)(3)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(3)3} T_{(3)13} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 1} + \eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 1} \right. \\
 &\quad \left. + \eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 1} + \eta^{(3)(3)} e^{(1)1} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 1} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(3)(1)(3)} &= \frac{1}{2} \eta^{(3)(3)} e^{(1)1} \left(e^{(3)3} T_{(3)13} + e^{(1)1} T_{(1)11} + e^{(2)2} T_{(2)21} + e^{(3)3} T_{(3)31} \right), \\
 \Sigma^{(3)(1)(3)} &= \frac{1}{2} [1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rkx}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\
 \Sigma^{(3)(1)(3)} &= \frac{kx}{4R}. \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(3)(2)(3)} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(3)3} T_{(3)23} + \eta^{(2)(2)} e^{(3)3} e^{(3)3} T_{(2)33} - \eta^{(3)(3)} e^{(3)3} e^{(2)2} T_{(3)32} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{d\mu} T_{d\mu 2} \right), \\
 \Sigma^{(3)(2)(3)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(3)3} T_{(3)23} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(0)\mu} T_{(0)\mu 2} + \eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(1)\mu} T_{(1)\mu 2} \right. \\
 &\quad \left. + \eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(2)\mu} T_{(2)\mu 2} + \eta^{(3)(3)} e^{(2)2} e^{(3)\mu} T_{(3)\mu 2} \right), \\
 \Sigma^{(3)(2)(3)} &= \frac{1}{2} \eta^{(3)(3)} e^{(2)2} \left(e^{(3)3} T_{(3)23} + e^{(1)1} T_{(1)12} + e^{(2)2} T_{(2)22} + e^{(3)3} T_{(3)32} \right), \\
 \Sigma^{(3)(2)(3)} &= \frac{1}{2} [1] \left[\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right] \left[\left(\frac{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)}{R} \right) \left(\frac{Rky}{2 \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} \right) \right], \\
 \Sigma^{(3)(2)(3)} &= \frac{ky}{4R}. \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)