UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

MARIA SUELI FONSÊCA FERREIRA

UMA ANÁLISE DOS QUESTIONAMENTOS DOS ALUNOS NAS AULAS DE NÚMEROS COMPLEXOS

NATAL
2006

MARIA SUELI FONSÊCA FERREIRA

UMA ANÁLISE DOS QUESTIONAMENTOS DOS ALUNOS NAS AULAS DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bernadete Barbosa Morey.

NATAL

2006

MARIA SUELI FONSÊCA FERREIRA

UMA ANÁLISE DOS QUESTIONAMENTOS DOS ALUNOS NAS AULAS DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bernadete Barbosa Morey.

Aprovada em: _______/_______/_______.

Banca Examinadora

Profª. Drª. Bernadete Barbosa Morey - Orientadora

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Ph.D. John A. Fossa – Examinador

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Profª. Drª. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes – Examinadora

Universidade Estadual do Ceará

Ao meu marido, Getúlio, e aos meus filhos, Thiago e Glenda, pelo apoio, compreensão e tolerância, base e esteio da nossa existência e do nosso amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter iluminado minha trajetória.

Ao meu marido Getúlio pelo compreensivo acompanhamento em todas as fases deste trabalho e pela presença constante em todos os momentos de dificuldade e de felicidade vividos.

Aos meus filhos Thiago e Glenda pelo auxílio necessário para a finalização deste trabalho e pela união e amor que nos equilibram.

Aos meus pais, José Maria da Fonseca e Maria da Luz Ferreira (in memorian), pelo amor e sacrifício, sem o qual eu não chegaria até aqui.

À professora Drª Bernadete Morey, pela orientação objetiva, pelas sugestões de melhoria ao trabalho, pelo apoio e paciência durante todo o processo de elaboração desta pesquisa.

Aos meus familiares, pelo apoio e compreensão nos momentos em que precisei me ausentar de seu convívio, para dedicar-me a este trabalho.

Aos amigos, pela força, em especial à Maria da Guia pela disponibilidade e ajuda na formatação deste trabalho.

À amiga professora Leonor Oliveira, pelas sugestões e pela competente revisão do texto deste estudo.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte, pelo incentivo e apoio incondicionais.

Ao PPGECNM/UFRN pela oportunidade pessoal e pelo caminho aberto para os colegas professores do nosso Estado.

RESUMO

Este trabalho busca apresentar uma contribuição para os estudos referentes ao uso da História da Matemática visando à melhoria do processo ensino-aprendizagem. Propõe que a História da Matemática seja articulada ao Ensino da Matemática, como forma de dar significado à disciplina e melhorar a qualidade do processo de ensino-aprendizagem. Nesta investigação, o foco está nas indagações dos alunos, classificadas em três categorias de porquês: o cronológico, o lógico e o pedagógico. Para tanto, investiga-se o ensino dos números complexos, a partir das questões levantadas pelos alunos do Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte, em Natal. O trabalho tem como objetivos: classificar e analisar os questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos, da segunda série do Ensino Médio, e confrontá-los com as categorias apontadas por Jones; discutir quais os possíveis encaminhamentos que o professor de Matemática pode dar a estas questões; apresentar os recursos de apoio ao professor no que se refere à História da Matemática. Em seguida, apresenta uma pesquisa bibliográfica, buscando revelar material de apoio ao professor, com conteúdos que articulassem o Ensino da Matemática com a História da Matemática. Descobrimos que os questionamentos dos alunos referem-se mais aos porquês pedagógicos e que os livros didáticos pouco contemplam outros aspectos da história e pouco dizem sobre o surgimento e a evolução dos métodos de cálculos utilizados por nós.

PALAVRAS-CHAVE: NÚMEROS COMPLEXOS. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. ENSINO-APRENDIZAGEM. PORQUÊS CRONOLÓGICOS. PORQUÊS LÓGICOS. PORQUÊS PEDAGÓGICOS.

ABSTRACT

This work presents a contribution for the studies reffering to the use of the History of Mathematics focusing on the improvement of the Teaching and Learning Process. It considers that the History of Matematics, as a way of giving meaning to the discipline and improve the quality of the Teaching and Learning Process. This research focuses on the questions of the students, classified in three categories of whys: the chronological, the logical and the pedagogical ones. Therefore, it is investigated the teaching of the Complex Numbers, from the questions of the students of the Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte (Educational Institution of Professional and Technology Education from Rio Grande do Norte). The work has the following goals: To classify and to analyse the questions of the students about the Complex Numbers in the classes of second grade of the High School, and to collate with the pointed categories used by Jones; To disccus what are the possible guidings that teachers of Mathematics can give to these questions; To present the resources needed to give support to the teacher in all things involving the History of Mathematics. Finally, to present a bibliographic research, trying to reveal supporting material to the teacher, with contents that articulate the Teaching of Mathematics with the History of Mathematics. It was found that the questionings of the pupils reffers more to the pedagogical whys, and the didatic books little contemplate other aspects of the history and little say about the sprouting and the evolution of methods of calculations used by us as well.

KEY WORDS: COMPLEX NUMBERS, HISTORY OF THE MATHEMATICS, TEACHING/LEARNING, CHRONOLOGICAL WHYS, LOGICAL WHYS, PEDAGOGICAL WHYS.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A experiência de dezenove anos como professora de Matemática, treze dos quais ensinando trigonometria e números complexos aos alunos do ensino médio em uma instituição pública federal de educação profissional, não foi, por si só, o requisito capaz de nos oferecer as condições de responder a alguns questionamentos dos alunos que nos incomodavam por fugirem dos conteúdos próprios do ensino da Matemática, mas, que demonstravam um certo interesse em descobrir algo acima e além daquilo que estávamos discutindo no decorrer das nossas aulas. Nas perguntas dos alunos, percebemos uma certa curiosidade que nos embaraçava, pois alguns "porquês" fugiam totalmente dos limites do nosso conhecimento. A formação acadêmica como professora de Matemática, em nenhum instante deu-nos oportunidade de apreender essa matéria focada ou apoiada naquilo que a curiosidade dos alunos exigia.

Os professores de Matemática freqüentemente ouvem em sala de aula questionamentos como: "Como surgiu, para que serve ou onde é aplicado esse assunto que estamos estudando"? Como nem sempre o professor está preparado para responder a esse tipo de pergunta, geralmente é dada ao aluno uma resposta que não satisfaz. Em nossas aulas de números complexos, eram comuns perguntas como: "Existe raiz quadrada de números negativos?"; "Onde vamos utilizar os números complexos?"; "Por que a raiz quadrada de -1 é igual a i?"; "Onde vamos utilizar esse i?"; "Podemos multiplicar e dividir números complexos?"; "Por que os números complexos são chamados de imaginários?". Percebíamos então que, quando respondíamos de forma mais segura aos questionamentos, parecia-nos que os alunos sentiam-se mais motivados a participar da aula. Ao contrário, quando não tínhamos as respostas aos porquês dos alunos, naquele momento, nossa percepção era de que o aluno que fazia a indagação demonstrava um certo descontentamento e ficava na expectativa de que o professor trouxesse a resposta aos seus questionamentos nas aulas seguintes.

Atualmente, lecionamos a disciplina de Matemática aos alunos da segunda série do ensino médio do Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte. Essa experiência atual, ensinando trigonometria e números complexos, aumentou em nós o desejo e a vontade de aprofundarmo-nos na busca da resposta aos questionamentos dos alunos, por percebermos o grande interesse deles em querer sempre algo mais que a simples resposta aos conteúdos matemáticos apresentados em sala de aula.

Muitas publicações defendem a idéia de que o ensino da Matemática tem sido historicamente bastante enfadonho, causando nos alunos um elevado grau de apatia e até a aversão por esta disciplina.

Nessa perspectiva, visando reverter a apatia e o desinteresse dos alunos na sala de aula, os professores são desafiados pelo seguinte dilema: não basta dominar os conteúdos da Matemática para ensinar. É preciso criar uma metodologia em sala de aula que desperte o interesse e a curiosidade dos alunos.

Muitos autores têm se debruçado sobre a questão de como fazer das aulas de Matemática uma atividade significativa e gratificante para o aluno. A Educação Matemática tem apresentado estudos e pesquisas de variadas tendências, buscando contribuir com a melhoria do processo ensino-aprendizagem. Entre essas tendências, a História da Matemática tem sido defendida por estudiosos como D'Ambrosio, Fossa, Mendes e Barbosa, dentre outros.

D'Ambrosio (1996) entende que há uma grande dificuldade de motivar alunos para uma ciência cristalizada e, assim sendo, a História aparece como elemento motivador e de grande importância para o envolvimento e a aprendizagem. Na mesma linha, Fossa (1998) defende o uso da História como instrumento de ensino-aprendizagem da Matemática, a partir de sua utilização como método de pesquisa, capaz de contribuir para o desenvolvimento de estratégias que subsidiem o trabalho do professor, com a finalidade de conduzir o aluno a uma aprendizagem significativa da Matemática.

Reafirmando suas idéias, Fossa (1998) acredita que a História da Matemática pode funcionar como fator motivador, na medida em que sua utilização tende a motivar e aumentar o interesse do aluno em sala de aula. Ele afirma ainda que as atividades estruturadas com a presença da História da Matemática deverão ser utilizadas não só como mecanismo de motivação, mas também como um instrumento compreensivo de instrução (FOSSA, 2001).

Descrevendo uma experiência apoiada em uma base teórica que sustentava sua concepção de História como alternativa metodológica, realizada com professores que atuam no ensino fundamental e médio do Rio Grande do Norte e do Pará, Mendes (2001, p. 12-13) procura em seu trabalho discutir:

> [...] o uso da História da Matemática como um elemento norteador de uma atitude pedagógica que dê ao professor as condições de conduzir seus alunos a uma construção efetiva das noções matemáticas em sala de aula.

Já, para Barbosa (2001), os pesquisadores poderiam dar maior atenção a trabalhos de História da Matemática, dirigindo-os para o seu uso em sala de aula, o que permitiria outras possibilidades educacionais no processo ensino-aprendizagem.

D'Ambrosio (2000, p.241) pergunta porque a História da Matemática é importante para o professor de Matemática e ele mesmo responde dizendo que:

> Ninguém contestará que o professor de matemática deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática.

E, adiante, assegura que a História da Matemática no ensino deve ser encarada, sobretudo, pelo seu valor de motivação para a Matemática. Sugere em seguida que se deve dar curiosidades, coisas interessantes e que poderão motivar alguns alunos. Diz que outros alunos não se interessarão. Mas isso é natural. E finaliza: "Alguns gostam de esporte, outros não gostam. Alguns gostam de música, outros não gostam. Alguns gostam de camarões outros não gostam. Com Matemática não é diferente" (D'AMBROSIO, 2000, p. 255-256).

Movida por essas preocupações apontadas por estes estudiosos, encontramos em Jones (1969), uma abordagem que nos dá um ponto de partida para discutir esta questão. Ele propõe o uso da História da Matemática articulada com o ensino da Matemática, como forma de dar significado e melhorar a qualidade do processo ensino-aprendizagem. Para ele, o professor de Matemática deve focar sua atenção nas indagações dos alunos que podem ser classificadas em três categorias: a cronológica, a lógica e a pedagógica.

De modo breve, estas três categorias de porquês podem ser assim descritas: o porquê cronológico é caracterizado por aqueles questionamentos cuja resposta não está atrelada a uma justificativa que usa a lógica interna da Matemática. Por exemplo a resposta à pergunta “porque uma hora tem sessenta minutos?” será dada por meio de uma explanação do contexto da civilização babilônica na qual o sistema de numeração utilizado era de base sessenta. A resposta não está atrelada a uma necessidade lógica interna da Matemática, pois, se a hora tivesse cem minutos, a natureza da Matemática não mudaria. Existem ainda vários questionamentos cuja resposta é de natureza histórica, cultural, casual ou convencional, como, por exemplo, “porque *pi* se representa por uma letra do alfabeto grego e o número *e*, base dos logaritmos naturais, não?”

Já o porquê lógico, responde a uma lógica interna da Matemática. São questões do tipo: “Porque –1 multiplicado por –1 dá +1?”. A resposta a tais perguntas se baseia na estrutura lógica da própria Matemática.

E por último, o porquê pedagógico, está atrelado aos métodos que se estabeleceram pedagogicamente no decorrer do tempo. Os alunos quando resolvem uma expressão aritmética, muitas vezes perguntam por que se abrem primeiro os parênteses, depois, os colchetes e depois, as chaves. Na verdade, não é que este modo de agir seja “errado”. O que acontece, na verdade, é que, seguindo esta ordem aconselhada pelos professores e contida nos livros didáticos, a probabilidade de erro é menor. Se o aluno começar abrindo primeiro as chaves ele terá de levar em consideração os efeitos dos números e sinais exteriores em todos os valores numéricos e operações que se acham dentro dos colchetes e parênteses.

Sabemos, no entanto, que a maioria dos professores de Matemática que estão agora em sala de aula não tiveram, em sua formação acadêmica, a História da Matemática seja como disciplina, seja como atividade do currículo. “Por isso recomenda-se que todos os cursos de Licenciatura de Matemática ofereçam História da Matemática. Lamentavelmente, essa recomendação é pouco seguida”, afirma D’Ambrosio (2000, p. 258). A História da Matemática como disciplina no currículo das licenciaturas em Matemática tem se feito presente há apenas alguns anos. Aqui em nossa Universidade Federal do Rio Grande do Norte esta disciplina faz parte obrigatória do currículo do curso de licenciatura em Matemática desde o ano de 1988.

Sendo assim, como pode um professor de Matemática atentar para as perguntas de seus alunos e dar-lhes um tratamento que tem como parte integrante a História da Matemática? Quais os recursos que tem o professor para resolver tais dificuldades? O professor poderia procurar bibliografia pertinente? Existe tal bibliografia? Ela é acessível ao professor?

Nessa perspectiva do ensinar com significado e entendimento, procuraremos investigar quais os questionamentos que os alunos comumente levantam numa aula de Matemática, qual o papel da História da Matemática na tarefa de responder a tais questionamentos e de quais recursos dispõe o professor nesta tarefa. Fizemos isto tomando como ambiente de pesquisa as aulas da disciplina Números Complexos numa escola de ensino médio de uma Instituição Federal de Ensino em Natal.

Com base nesse contexto, nosso **objeto de estudo** é, então, o ensino de números complexos na perspectiva das questões levantadas pelos alunos.

Temos como **objetivos gerais** de nossa investigação os seguintes:

a) analisar e classificar as perguntas dos alunos nas aulas de números complexos, segundo as categorias de Jones;

b) apresentar alguns recursos bibliográficos de apoio ao professor no que se refere a estes questionamentos.

A partir destes objetivos gerais, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

a) fazer levantamento sistemático das perguntas dos alunos nas aulas de números complexos;
b) discutir a categorização de Jones e propor mudanças, se necessário;
c) pesquisar a disponibilidade de bibliografia de História da Matemática (para o aluno e professor), necessária para apoiar as respostas aos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos.

A proposta apresentada neste trabalho utiliza como **metodologia de pesquisa** a engenharia didática, a qual permite que se recolham e analisem os elementos necessários à investigação durante o próprio processo de ensino (PAIS, 2001). Caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula: na concepção, na realização, na observação e na análise seqüencial de ensino.

Nossa opção pela utilização da engenharia didática como metodologia de pesquisa é coerente com os nossos objetivos de estudo, para os quais apresentaremos uma seqüência didática fundamentada nas quatro fases da engenharia didática que permitem a concepção de uma sequência de ensino, cujas definições, características e aplicações definiremos na seção 2. Essas quatro fases estão apresentadas a seguir:

a) análise preliminar;
b) análise *a priori*;
c) experimentação ou aplicação da seqüência didática;
d) análise *a posteriori*.

Nosso trabalho, voltado para os questionamentos feitos pelos alunos em sala de aula, foi realizado durante as aulas de números complexos aplicadas aos alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola pública federal.

No período anterior ao início das aulas, definimos a estratégia a ser aplicada em sala de aula, tomando como referência a engenharia didática, cujas etapas descreveremos com detalhes no decorrer deste trabalho.

A partir da definição desta estratégia, preparamos o material a ser apresentado aos alunos e decidimos aplicá-lo e coletar os dados provenientes das perguntas dos alunos.

Durante as aulas, nossa intervenção foi caracterizada pela exposição dos conteúdos, mediação do processo ensino-aprendizagem e interação com os alunos por meio dos seus questionamentos.

Foi a partir destes questionamentos que se deu o processo de intervenção proposto para este trabalho. As perguntas dos alunos foram gravadas e, num segundo momento, transcritas, analisadas e comparadas ao referencial de Jones (1969), que utiliza as categorias de porquês cronológicos, lógicos e pedagógicos, já descritos brevemente nesta introdução.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: seções 1, 2, 3, 4 e 5, referências, apêndices e anexos. Na seção 1 é apresentada a introdução do trabalho.

Na seção 2, discorremos sobre a fundamentação teórica e revisão bibliográfica, em que apresentamos a caracterização, o detalhamento e a exemplificação de cada uma das categorias de “porquês” definidas por Jones (1969) e a discussão conceitual da engenharia didática vista como metodologia ou técnica de pesquisa.

Na seção 3, apresentamos a metodologia da pesquisa em que descrevemos: o ambiente da pesquisa (a escola); a turma pesquisada e os alunos; a disciplina e seu programa; as etapas da pesquisa, como foi feita a análise do resultado da investigação e, finalmente, a apresentação de um fluxograma das suas etapas.

Na seção 4, serão apresentadas a intervenção pedagógica e a análise dos resultados obtidos, a partir dos questionamentos, indagações e curiosidades dos alunos, a sua conseqüente classificação, análise e possíveis encaminhamentos às respostas dos alunos. A seguir, uma discussão da disponibilidade e acessibilidade dos recursos de apoio ao professor no que se refere à história de números complexos.

Em seguida, na seção 5, apresentamos as considerações finais sobre os avanços e limitações do estudo aqui desenvolvido e recomendações para a busca de um ensino da Matemática que tenha significado para o aluno.

Finalmente, são apresentados as referências, os apêndices e o anexo que deram suporte a este trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção, apresentaremos, inicialmente, uma abordagem na classificação dos questionamentos dos alunos, discorrendo sobre a caracterização, o detalhamento e a exemplificação de cada uma das categorias de "porquês" definidas por Jones (1969) e, em seguida, a discussão conceitual da engenharia didática como referência para uma seqüência de ensino, vista como metodologia ou técnica de pesquisa.

2.1 Uma abordagem na classificação dos questionamentos dos alunos

Jones (1969), em seu artigo "The history of mathematics as a teaching tool" propõe o uso da História da Matemática articulada com o ensino da Matemática, como forma de dar significado e melhorar a qualidade do processo ensino-aprendizagem. Seu texto se inicia com uma citação de Jaqcques Barzun, professor na América:

> Eu tenho mais do que a impressão – chega a ser uma certeza – de que a álgebra é tornada repulsiva pela falta de vontade ou incapacidade de professores explicarem os porquês... Não existe um sentido de história por trás do ensino o que deixa a impressão de que todo o sistema caiu do céu pronto e acabado para ser usado somente por aqueles que nasceram com habilidades especiais. (TRADUÇÃO NOSSA).

Para Jones, existem três categorias de porquês no ensino da Matemática: o cronológico, o lógico e o pedagógico. O autor defende que os porquês cronológicos referem-se a questionamentos tais como:

> Por que há 60 minutos em um grau ou em uma hora e por que há 60 segundos em um minuto? Qual a origem da palavra zero? Qual a origem da palavra seno? Qual a origem da palavra minuto? Qual a origem da palavra segundo? (p. 1)

Para poder discutir e entender um pouco melhor a natureza de tais questionamentos, vejamos o que diz a História da Matemática em relação às perguntas formuladas:

Por que há 60 minutos em um grau ou em uma hora e por que há 60 segundos em um minuto? Em outras palavras, por que não se dividiu o grau em dez minutos (dez partes), mas em sessenta?

Segundo Boyer (1996), a civilização babilônica utilizava a base sexagesimal para utilizar suas operações. Os gregos, de quem herdamos grande parte de nosso conhecimento matemático, já possuíam a base dez para seus cálculos aritméticos. No entanto, tomaram dos babilônios a base sexagesimal para uso na Astronomia e na Trigonometria, em medidas de tempo e de ângulos e, deste modo, perdura até hoje o uso da base sessenta para estes casos.

Qual a origem da palavra zero?

Eves (2004) indica um provável caminho para a origem da palavra zero: os hindus usaram para indicar o zero, a palavra *sunya*, que significa vácuo ou vazio. Na tradução para o árabe, a palavra ficou *sifr*. Mais tarde, houve a latinização da palavra e ela virou *zephirum*, que deu o nosso *zero*.

Quanto à pergunta seguinte, sobre a origem da palavra seno, nos apoiaremos novamente em Eves (2004, p.267), que diz:

> A origem da palavra seno é curiosa. Aryabhata usava ardha-*jya* ("semi-corda") e também *jya-ardha* ("corda metade") e por brevidade *jya* ("corda"). Partindo de *jya,* os árabes foneticamente derivaram *jiba* que, devido à prática entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *jb*. Afora seu significado técnico, hoje *jiba* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com jb como abreviação da palavra sem sentido *jiba* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa "enseada" ou "baía". Mais tarde ainda, ao fazer a tradução de *jaib* para o latim, Gerardo de Cremona empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem nossa palavra atual seno.

De acordo com a afirmação de Eves houve uma tradução errônea para a palavra original *jya*, inicialmente traduzida de forma correta para o árabe como *jib*a, que significava a corda de um arco de caça ou de guerra. O fato de se omitirem as vogais no idioma árabe transformou *jiba* em *jb* e, mais tarde, com a inclusão das vogais, em *jaib*, surgindo aqui o grande equívoco, já que *jaib* significava enseada ou baía, que traduzida para o latim como *sinu*s deu origem a palavra seno. Não fosse o erro casual dessa tradução, hoje a palavra correta a ser utilizada poderia ser outra, traduzida para o latim a partir da palavra original *jya*, utilizada por Aryabhata, que significava corda.

Trataremos a seguir das duas últimas perguntas, ou seja: *Qual a origem da palavra minuto e qual a origem da palavra segundo?*

Para respondê-las, recorreremos mais uma vez a Boyer (1996, p.113),

> [...] como o sistema babilônico posicional para frações era evidentemente superior às frações unitárias egípcias e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em sessenta partes *minutae primae*, cada uma das quais era dividida em sessenta partes *minutae secundae*, e assim por diante. É das frases latinas, que os tradutores usaram, que provêem nossas palavras "minutos" e "segundos".

Pelo que entendemos da citação acima, o grau foi dividido duas vezes: Dividiu-se, a primeira vez, em sessenta partes e cada parte foi chamada de *minuta e primae* (primeiras partes menores), de onde veio a palavra minuto. Dividiu-se, outra vez, cada parte em sessenta partes, e cada parte foi chamada de *minutae secundae* (segundas partes menores), de onde veio a palavra segundo.

Analisando as perguntas formuladas acima e suas respectivas respostas, podemos dizer que os *porquês cronológicos* caracterizam-se por perguntas, cujas respostas têm de ser buscadas em fontes da História. Mas os questionamentos acima, todos classificados como *porquês cronológicos*, caracterizam-se pelas respostas dadas, pelo fato de que a História das Civilizações, da Ciência e da Matemática é que pode responder a tal tipo de questionamento. Percebemos assim que a resposta dada a esses questionamentos não está atrelada a explicações relacionadas à lógica interna da Matemática, mas as razões aqui apontadas são de natureza histórica, cultural, casual ou convencional.

No nosso entendimento, ao responder a pergunta de um aluno sobre onde e como surgiram os números complexos, estaremos respondendo uma pergunta que é um exemplo de um porquê cronológico, pois, sua resposta tem de ser buscada por fontes que tratam da história no sentido mais costumeiro da palavra. Ao tentar responder a esta pergunta especificamente, encontramos em Silveira (2001) informações segundo as quais os números complexos não foram inventados para resolvermos as equações do segundo grau (como muita gente pensa). Acrescenta ainda que, além de historicamente errada, essa “explicação” para o surgimento dos números complexos é um absurdo na sua visão. Apesar dessa afirmação, o mesmo autor se contradiz quando, na continuidade do texto, apresenta o problema a ser resolvido com raízes quadradas de números negativos pela utilização da equação do segundo grau a partir da cúbica.

Até cerca de 1.650 d.C, as únicas raízes consideradas verdadeiras eram as que podiam ser interpretadas como correspondentes a grandezas físicas ou geométricas: comprimentos, áreas, volumes, massa entre outras. Essas grandezas correspondiam hoje aos nossos números reais positivos. As raízes que correspondiam aos reais negativos não eram consideradas legítimas e eram chamadas de falsas.

Segundo Silveira (2001), os números complexos surgiram quando Cardano, em 1545, tentava resolver a equação cúbica $x^3 = 4 + 15x$, que ele dizia ter raiz verdadeira x = 4. Usando a regra de dal Ferro-Tartaglia, deparou-se com o termo $\sqrt{-121}$, que ele não conseguiu *destravar* para encontrar a solução x = 4, por ele conhecida e já esperada. Mais de 25 anos depois, em 1572, Rafael Bombelli, matemático italiano, teve a idéia de operar com as quantidades da forma $a + b\sqrt{-1}$, sob as mesmas regras dos números reais e usou a propriedade $(\sqrt{-1})^2 = -1$, para *destravar* a regra, produzindo o desejado x = 4.

Bombelli utilizou 74 páginas de sua *L' Álgebra* para estudar as leis algébricas que permitiam o cálculo com as quantidades $a + b\sqrt{-1}$.

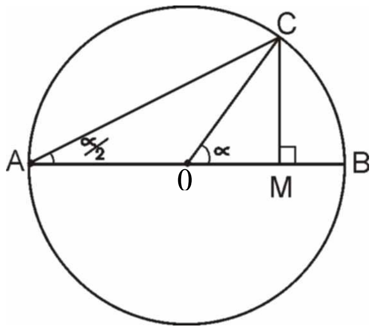
Com a ajuda destes exemplos, entendemos então que o porquê cronológico trata de definições constituídas historicamente. É um conceito surgido naquele dado momento, numa dada civilização de forma casual, pois a ciência poderia ter sido criada por outra civilização diferente daquela que aparece como originária do fato estudado.

Os *porquês lógicos* são evidenciados, quando se demonstra um teorema, por exemplo, em que se incluem itens como a natureza do sistema axiomático e do raciocínio lógico. Aqui vemos que as provas e demonstrações têm um jeito, uma forma de como foram construídos e aí se pode verificar se a lógica está correta, encadeada na ordem esperada para provar ou demonstrar algum axioma ou teorema. Os *porquês lógicos* também se apresentam, quando um determinado problema mais complexo pode ser resolvido de uma forma diferente, mais criativa, ou seja, quando encontramos "uma saída" inédita para solucioná-los.

Como poderemos apresentar um exemplo de um *porquê lógico*?

Embora não tenhamos encontrado em Jones (1969) uma ilustração clara para os porquês lógicos, tentaremos demonstrar esses porquês através da seguinte situação: imaginemos uma sala de aula, na qual, como professores, estamos empenhados em demonstrar um dado teorema ou resolver um problema. Imaginemos ainda que o teorema ou problema em questão é um daqueles, cuja demonstração ou resolução exige algum artifício que aparentemente não tem relação direta com nosso objetivo. Ao empregarmos tal artifício, os alunos têm reações diversificadas. Alguns poucos conseguem entender o porquê do tal artifício e, às vezes, até consideram-no, muito espirituoso e interessante. A maioria, no entanto, ou permanece alheia ou fica literalmente indignada, por estarmos usando um artifício completamente arbitrário. Este é o caso, por exemplo, da demonstração da relação do co-seno do arco-metade usando os recursos da Geometria Euclidiana.

De fato, para se demonstrar a fórmula $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ (considerando apenas a solução positiva) inicialmente, traçamos o seguinte esquema para podermos raciocinar através dele:



"Por que justamente este esquema e não outro?" é um mistério para muitos alunos. Jones (1969) considera então que, mesmo em situações semelhantes, a História da Matemática pode contribuir para esclarecer dúvidas dos alunos. No nosso entender, a História da Matemática de que aqui se fala já tem características um tanto distintas daquelas do porquê cronológico.

Para John Kemeny (*apud* JONES, 1969), uma parte da História da Matemática pode mostrar alguma coisa acima e além do simples desenvolvimento de axiomas e pode ajudar na resposta aos porquês lógicos. Nesse trabalho, não se busca na História a origem de definições constituídas, como nos *porquês cronológicos*, mas sim o desenvolvimento da Matemática e seu crescimento através de generalizações e abstrações, mostrando historicamente que grandes homens tiveram dificuldades, em seu tempo, com conceitos que hoje são bem esclarecidos.

Usar essa parte da história pode contribuir com respostas mais interessantes aos questionamentos dos alunos, quando se tratar de *porquês lógicos*.

Outro questionamento do tipo lógico seria: por que (-1) x (-1) = 1? Ou, quando estudamos números complexos e perguntamos: por que i^3 = i x i x i é igual a -i? As respostas a estas questões estão relacionadas com a lógica interna da Matemática construída historicamente.

No *porquê pedagógico*, o método deve prevalecer sobre outros elementos, cronológicos ou lógicos na solução dos problemas, não se descartando, no entanto, o uso dos fatos históricos relacionados com aquele assunto nas atividades em sala de aula. Para fins de clareza, daremos, a seguir, o mesmo exemplo citado por Jones (1969): na resolução de expressões aritméticas, efetuam-se as operações, ou sejam, abrem-se os parênteses, colchetes e chaves de dentro para fora.

É possível se chegar à resposta correta, mesmo sem utilizar esta regra, no entanto sua utilização garantirá encontrarmos o resultado correto com mais segurança.

Podemos adicionar ainda outro exemplo bastante simples: ao se efetuar a operação adição fazemo-la da direita para a esquerda, ou seja, no sentido contrário da nossa escrita. Alunos na fase de aprendizado das operações nem sempre aceitam tal regra com naturalidade e alguns chegam a questionar o porque de tal regra. Se fôssemos seguir a regra natural, semelhante à leitura, da direita para a esquerda, para somar, por exemplo, 72 + 45, teríamos como resultado 7 + 4 = 11, o que na verdade corresponde a 70 + 40 = 110, e 2 + 5 = 7, o que somando dá 117. Podemos observar que, mesmo tratando-se de dois algoritmos válidos, a escola só valoriza a operação matemática que começa pela direita.

Podemos ainda dar outro exemplo: numa situação na qual se pede que seja construído o gráfico de uma função trigonométrica (no Ensino Médio) o professor dá orientações para serem seguidas, ou seja: obter o valor da função para cada ponto conhecido previamente (zero grau, os ângulos notáveis: trinta graus, quarenta e cinco graus e sessenta graus, entre outros), colocá-los nos eixos cartesianos e traçar o gráfico.

Um aluno pode perguntar: "Por que devo fazer exatamente assim e não de outro jeito?".

A nossa resposta deverá deixar claro que é possível, construir o mesmo gráfico marcando outros pontos, ou mesmo seguindo uma ordem diferente para a escolha dos pontos a serem alocados, seja na tabela, seja no gráfico. No entanto, a probabilidade de sucesso será maior, se a regra acima for observada e seguida. Isto quer dizer que nossa resposta aponta os caminhos pedagogicamente mais viáveis, para que o aluno tenha sucesso.

É o caso, por exemplo, de quando estudamos a divisão de dois números complexos. O caminho pedagógico mais claro aponta para a multiplicação do numerador e do denominador pelo conjugado do denominador como a melhor forma de efetuarmos a divisão com maior segurança, mesmo que existam outras formas de resolução.

As idéias discutidas anteriormente, baseadas na abordagem de Jones (1969), nos apoiarão na direção de continuarmos nossa investigação a respeito dos questionamentos dos alunos.

A seguir, apresentaremos a *Engenharia Didática* como o instrumento que nos auxiliará nesta investigação.

2.2 A engenharia didática como referência para uma seqüência de ensino

Na obra de Pais (2001), a engenharia didática é caracterizada como uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da Matemática. Essa questão metodológica, por se tratar de uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática, tem despertado o interesse pelo seu estudo.

Segundo Pais (2001), na engenharia didática, há quatro fases que permitem a concepção de uma seqüência de ensino:

a) análise preliminar: consiste na análise epistemológica dos conteúdos que se pretende trabalhar no desenvolvimento dos materiais junto ao aluno. Nesse contexto, são importantes os estudos sobre os processos educacionais desenvolvidos em classe (o meio, os instrumentos, a mediação do professor). Em suma, pretende-se dar subsídios ao desenvolvimento da análise *a priori*;

b) concepção e análise *a priori*: consiste na preparação de seqüências didáticas e do esquema experimental para a ação em classe, em que serão delimitadas variáveis de controle que possibilitem conhecer o que se pretende experimentar. No caso do projeto de pesquisa, trata-se do processo de construção e elaboração de material e atividades;

c) experimentação ou aplicação da seqüência didática: é a execução dos processos desenvolvidos na análise *a priori* e preliminar, ou seja, a realização de cursos pilotos em que se recorre à pesquisa-ação experimental em educação, ou, à realização das sessões previstas da seqüência didática, formada pelas aulas planejadas e analisadas previamente. Em alguns casos, deve-se observar o envolvimento dos professores e alunos através de filmagens ou gravações em áudio, desenvolvidas no decorrer do curso. Segundo Pais (2001), para se fazer o registro nesta fase, se o discurso do aluno for suficiente para se constituir na fonte primária da análise, o registro em fita cassete é suficiente. Neste caso, o material produzido na análise preliminar e *a priori* é testado e analisado mediante uma seqüência didática e, após o curso, é feita análise *a posteriori*;

d) análise *a posteriori*: é a compreensão e a interpretação dos resultados da experimentação. Seu objetivo é oferecer um *feedback* para o desenvolvimento de uma nova análise *a priori* para uma nova experimentação, concebendo o desenvolvimento das atividades como uma atualização dos processos em questão.

Ao tomar a engenharia didática, como instrumento auxiliar de nossa pesquisa, realizamos os seguintes encaminhamentos:

- Na etapa da análise preliminar, definimos que as aulas seriam ministradas de forma tradicional. Isto quer dizer que decidimos não introduzir nenhuma inovação que viesse diferenciar de modo significativo as aulas que pretendíamos dar, daquelas que normalmente são dadas no CEFET. Os conteúdos apresentados foram selecionados de acordo com o plano de aulas já existente, construído pelos professores e pedagogos da escola. Isto porque nosso objetivo era observar e registrar as intervenções dos alunos numa aula de Matemática rotineira.

Assumimos, daí, que abordaríamos os conteúdos por meio de sua exposição oral, de resoluções de exercícios, atividades e avaliações feitas em grupo e individualmente, e que faríamos nossa interação com os alunos, atuando como mediador na resposta aos questionamentos existentes.

- Na análise *a priori*, a partir das decisões tomadas na etapa anterior, organizamos previamente uma seqüência de ensino baseada em dezesseis encontros, com um total de vinte e nove horas–aula, cumpridas rigorosamente durante o terceiro bimestre referente ao ano de 2005.

Decidimos que durante as nossas exposições, aplicações de exercícios e avaliações, qualquer questionamento por parte dos alunos seria gravado em áudio para posterior transcrição e análise. As gravações seriam realizadas por um aluno, previamente escolhido, que acionaria o gravador no momento em que os colegas fizessem alguma intervenção. As nossas variáveis de controle giravam em torno das perguntas que os alunos fizessem no decorrer da aula.

Operacionalmente, tivemos a gravação de algumas perguntas prejudicada (inaudível), visto que, em alguns momentos, o aluno que questionava estava distante do gravador, ou a gravação era cortada no início ou final do questionamento em virtude da falta de sincronia entre o aluno que perguntava e aquele que fazia a gravação.

Com base em nossa experiência de ensino e nos pressupostos apontados por Jones (1969), elaboramos as seguintes hipóteses preliminares:

a) H1: no decorrer das aulas, alguns alunos (quase sempre os mesmos) farão perguntas;

b) H2: algumas destas perguntas serão de natureza tal que, para o professor respondê-las, será necessário um conhecimento da História da Matemática;

c) H3: a maior parte das perguntas surgirão, ou quando a professora estiver fazendo sua exposição, ou logo após esta.

d) H4: das perguntas que remetem à História da Matemática, haverá algumas que poderão ser enquadras como *porquês cronológicos*, outras como *lógicos* e outras como *porquês pedagógicos*.

- Na fase de aplicação da seqüência didática, aplicamos na sala de aula os procedimentos previstos nas etapas de análise preliminar e análise *a priori*. Cada unidade de ensino proposta foi desenvolvida a partir da nossa exposição, seguida por aplicação de exercícios, ora resolvidos por nós, ora resolvidos pelos alunos, focados nos conteúdos a serem apreendidos, ao mesmo tempo em que se interagia com os alunos da turma por meio dos seus questionamentos. Entregamos, no início de cada aula, o material com os conteúdos a serem discutidos em cada sessão. Utilizamos como textos complementares, Caraça (1998) e Milies (1993), em apoio aos conteúdos existentes nos livros textos utilizados.

As perguntas formuladas no decorrer das aulas (Apêndice A) foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas e preparadas para:

a) classificação e análise à luz das categorias de Jones (1969);

b) teste da veracidade das hipóteses formuladas na fase de análise *a priori*.

- Já na etapa da análise *a posteriori*, teremos de enumerar, classificar e analisar as perguntas que os alunos fizeram. Nesta análise, iremos confrontar os resultados obtidos com as hipóteses formuladas anteriormente. Também pesquisaremos a existência de alguns recursos bibliográficos ou de referências, que possam ser utilizados para apoio ao professor em suas respostas aos questionamentos dos alunos.

Na seção 4, aprofundaremos nossa análise dos questionamentos dos alunos e das hipóteses preliminares.

Na próxima seção, passaremos a descrever mais um aspecto relacionado à nossa pesquisa, que é o da metodologia, do ambiente, e das condições em que ela se desenvolveu.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção, trataremos de estabelecer os caminhos de nosso estudo. Iniciaremos por descrever o ambiente da pesquisa, nele compreendido a escola e a turma, passaremos depois a apresentar o programa da disciplina Matemática no que tange a Números Complexos, seguido do cronograma, planejamento das aulas, coleta de informações e, na seqüência, uma descrição das etapas da pesquisa realizada no âmbito deste trabalho.

3.1 O ambiente da pesquisa: a escola e a turma

Nossa pesquisa foi realizada no Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET-RN - Unidade de Natal, escola pública mantida pelo Governo Federal, em que atuamos como professora do quadro permanente, desde 1987.

O Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte (CEFET-RN) foi criado no ano de 1909, através do Decreto nº 7.566, de 23 de setembro assinado pelo então Presidente da República Nilo Peçanha. Inicialmente, foi denominada Escola de Aprendizes Artífices para atender profissionalmente os “desfavorecidos da sorte”, com o objetivo de lhes oferecer uma oportunidade para se inserirem no mercado de trabalho.

Durante os 97 anos de sua existência, teve sua denominação alterada várias vezes, sendo chamada, em 1937, de Liceu Industrial, em 1942, de Escola Industrial de Natal, em 1965, de Escola Industrial Federal do Rio Grande do Norte, em 1968, de Escola Técnica Federal do Rio Grande do Norte – ETFRN. Atualmente, desde janeiro de 1999, sua denominação oficial é Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET-RN, contando hoje com uma unidade Sede em Natal e outra em Mossoró. Agora, em 2006, estão sendo criadas as unidades de Currais Novos, do Vale do Açu e da Zona Norte em Natal.

Na Unidade Sede de Natal, local da nossa pesquisa, O CEFET-RN conta com 293 docentes e 196 técnico-administrativos lotados no seu quadro efetivo. Esse conjunto de servidores atende a cerca de 4.747 alunos sendo: 772 alunos no ensino médio, 1648 alunos nos cursos técnicos de nível médio, 1161 alunos nos cursos superiores de tecnologia e de formação de professores e, atualmente, 1166 alunos em cursos de formação inicial e continuada de trabalhadores.

Sua infra-estrutura física conta com laboratórios, microcomputadores, salas de aulas com ponto de internet, biblioteca com amplo acervo bibliográfico, computadores para acesso a bibliotecas virtuais. Seu projeto político-pedagógico garante o funcionamento de centros de aprendizagem para reforço aos alunos com dificuldade escolar além de conselhos de classe com a participação de professores, pedagogos, alunos e pais para cada turma do CEFET-RN. Para estudar no CEFET-RN, os alunos passam por concorrida e rigorosa seleção. Para o ingresso no ensino médio, no ano de 2004, houve uma demanda de 4200 concorrentes para 432 vagas[1], das quais 50% foram reservadas para alunos de escolas públicas. Essa

---

[1]. Informações fornecidas pela Diretoria de Ensino- Coordenadoria de Registros Escolares- DE/CRE- do CEFET-RN.

grande concorrência assegura uma qualidade superior para os alunos dessa instituição pública.

A turma na qual realizamos nossa pesquisa, Turma 2.00.1V, do turno vespertino, foi composta de 29 alunos entre os quais 17 são do sexo masculino, equivalente a 58,6% do total de alunos. A predominância de alunos do sexo masculino é histórica, no entanto, a cada ano, um maior número de alunas têm conseguido ser selecionadas para estudar no CEFET-RN. Considerando o tipo de escola em que estes alunos concluíram o ensino fundamental, constatamos que 15 alunos vieram de escola pública ou escola filantrópica[2], sendo 13 de escola pública estadual, 1 de escola pública municipal e outro de escola filantrópica, o que corresponde a 51,7% dos alunos. A minoria, 48,3% dos alunos, é proveniente de escola particular.

No que se refere à faixa etária, 28 (96,6%) alunos têm menos que 17 anos, quase que a totalidade da turma, o que significa que estão dentro da faixa de escolaridade regular. Apenas um aluno situa-se na faixa etária entre 18 e 20 anos. Quando coletamos as informações a respeito da renda familiar desses alunos, verificamos que 13 (44,8%) alunos têm renda familiar inferior ou igual a cinco salários mínimos. Com renda familiar entre cinco e oito salários mínimos, encontram-se 10 (34,5%) alunos. Os demais, 6 (20,7%) alunos, declararam renda familiar superior a dez salários mínimos. Estes dados expressam que mais da metade da turma é de classe média.

---

[2]. Enquadrada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e definida na Lei como instituições de direito privado sem fins lucrativos que presta serviços sem qualquer cobrança de taxas, mensalidades ou contraprestação.

3.2 A disciplina e o seu programa, cronograma, planejamento das aulas e coleta de informações.

O assunto Números Complexos é dado no segundo semestre de cada ano, fazendo parte da disciplina de Matemática, ofertada para alunos do segundo ano do Ensino Médio e seu conteúdo programático é dividido em oito tópicos, com previsão de três aulas semanais, conforme a seguinte programação:

- Introdução:
  - ✓ Origem;
  - ✓ Aplicações.
- O Conjunto dos Números Complexos: a Unidade Imaginária.
- A Forma Algébrica dos Números Complexos.
- Igualdade de Números Complexos.
- Conjugado de um Número Complexo.
- Operações com Números Complexos:
  - ✓ Adição e subtração;
  - ✓ Multiplicação;
  - ✓ Divisão;
  - ✓ Potências de i.
- Forma Trigonométrica ou Polar.
  - ✓ Plano de Argand-Gauss;
  - ✓ Módulo e Argumento de um Número Complexo.

- Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica:
  - ✓ Multiplicação;
  - ✓ Divisão;
  - ✓ Potenciação – Fórmula de Moivre.

Foi com base neste programa que ministramos as aulas que serviram de suporte para a nossa pesquisa, a partir de um cronograma que indicava as atividades, de acordo com o planejamento das aulas, e os momentos previstos para a coleta de informações.

A coleta de informações foi realizada durante essas aulas. Foi programado um conjunto de aulas sobre números complexos, num total de três por semana (ver Anexo A), as quais aconteceram durante dezesseis encontros totalizando vinte e nove aulas.

À medida em que fizemos nossas exposições sobre o conteúdo dos números complexos, ou mesmo durante as aulas de aplicações de exercícios e avaliações, foram coletadas as informações necessárias ao andamento de nossa pesquisa. Essas informações surgiram a partir dos questionamentos dos alunos e foram gravadas e transcritas, transformando-se, aí, na base de dados para nosso trabalho.

3.3 Etapas da pesquisa

Para melhor situar o leitor, tracemos o percurso metodológico e uma breve descrição das etapas seguintes:

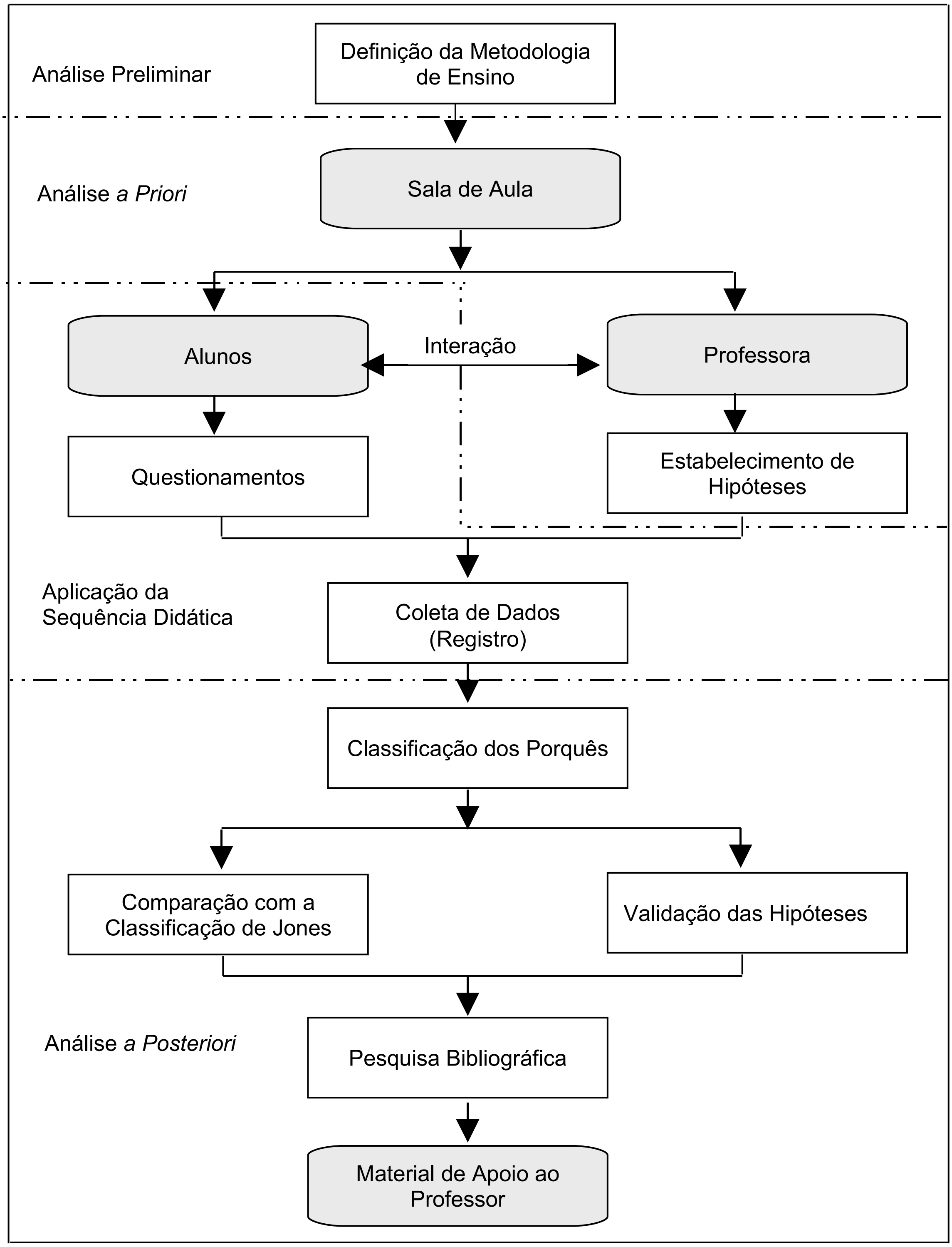
- Num primeiro momento, os dados coletados, conforme já descrevemos anteriormente, foram organizados em um quadro em que apresentamos as seguintes informações: número da aula, data da aula, assunto ministrado e questionamentos feitos pelos alunos.

- Em seguida, fizemos a classificação nas categorias de *porquês cronológico*, *lógico* ou *pedagógico*. No momento desta análise, verificamos se existia alguma pergunta que não estivesse classificada dentre essas três categorias e se é ou não pertinente introduzir uma nova categoria.

- Na etapa seguinte fizemos a análise das questões com respeito às categorias estabelecidas até então, confrontando os dados obtidos com as hipóteses preliminares estabelecidas.

- Com base na análise das perguntas dos alunos, fizemos uma pesquisa bibliográfica em busca de material de apoio ao professor, visando ajudá-lo a articular os conteúdos da Matemática com a História da Matemática.

A seguir, apresentamos um fluxograma que resume o que será apresentado nas seções seguintes.



Fluxograma 1 – Etapas da pesquisa

4 CLASSIFICAÇÃO E ANÁLISE DAS PERGUNTAS DOS ALUNOS

Considerando que, durante o período de aulas, coletamos os dados referentes aos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos, nesta etapa do nosso estudo, buscamos classificar e analisar as perguntas dos alunos, utilizando o referencial apresentado por Jones (1969).

4.1 Classificação e análise das perguntas dos alunos

Durante os dezesseis encontros que tivemos, com um total de vinte e nove horas-aula, os alunos fizeram cinqüenta e nove questionamentos, sendo que alguns destes continham mais de uma pergunta. Estes questionamentos estão apresentados em forma de tabela com número da aula, data, assunto estudado, perguntas levantadas e respectiva classificação, no Apêndice A.

Inicialmente, fizemos a classificação, usando as categorias sugeridas por Jones (1969): (C) cronológico, (L) lógico e (P) pedagógico. Verificamos, a partir da nossa análise pessoal, que apenas uma determinada pergunta não se encaixava em nenhuma destas categorias e a classificamos na categoria (O) outra, não justificando a introdução de uma nova categoria de porquê bem definida, por falta de elementos para tal. No entanto, algumas perguntas, no nosso entendimento, foram classificadas em mais de uma categoria ao mesmo tempo, considerando a presença de fortes características de mais de *um porquê* ao mesmo tempo, apoiado na própria análise de Jones que admite, especialmente, a presença da História da Matemática como elemento relevante em qualquer porquê.

Apresentamos, a seguir, o retrato do primeiro encontro em que tivemos as primeiras perguntas dos alunos, a aula de nº 2:

"Você multiplicou a raiz de trinta e seis por menos um. Você não multiplicou? Por que você botou dentro, multiplicando? Ele não some não, quando você multiplica?".

"Existe uma explicação para esse *i*?".

"Não é complicado depois da morte do cara você obter a informação...?".

Após efetuarmos a classificação dos questionamentos presentes no quadro (Anexo A), obtivemos os seguintes resultados:

Considerando que das 59 perguntas, duas delas estavam inaudíveis ou incompletas e não foi possível efetuar a transcrição, estando descritas como incompreensível (I), vamos considerar o universo de 57 perguntas, para efeito desta análise:

- somente uma das perguntas, "Não é complicado depois da morte do cara você obter a informação?", não conseguimos relacionar a nenhuma das categorias propostas por Jones (1969), e foi classificada como (O), outras, o que corresponde a 1,8% dos questionamentos;

- apenas uma dessas perguntas referia-se ao aspecto puramente cronológico, o que corresponde, também, a 1,8% do total das perguntas feitas. Foi ela: "Existe uma explicação para esse i?".;

- 17 perguntas, 29,8% do total, relacionavam-se especificamente com a categoria dos *porquês lógicos*. Entre elas podemos exemplificar: "Professora esse (cos n ϑ + i sen n ϑ) é a mesma coisa que (cos ϑ + i sen n $\vartheta)^{n}$"; ou, " Professora, o co-seno negativo, ele se localiza no 3º ou 4º quadrante? ou nos outros dois?".

- 29 dos questionamentos, o maior percentual obtido no estudo, referiam-se aos *porquês pedagógicos*, chegando a 50,8% do total de perguntas. Vejamos alguns: "Professora, mas se eu fizesse através do mínimo múltiplo comum? Como é que eu faria isso ai? Como é que ficaria esse mínimo múltiplo comum?"; "O melhor é fazer primeiro, digamos assim, a radiciação: primeiro passar o denominador para um denominador real puro fazendo a multiplicação do conjugado?".; "Para isso ter que ser real, **b** tem que ser igual a zero, então, portanto, tem que eliminar a parte imaginária, logo 2a + 3b tem que ser igual a zero?".

- dois questionamentos, 3,5%, foram classificados como *porquês lógico* e *pedagógico* ao mesmo tempo. São eles: "Professora, pode elevar um número complexo a um expoente negativo, ou a um expoente fracionário?"; e, "Não entendi porque... pronto, ali no **a**, porque que ele ficou assim . Mas, teria como **b** não ser igual a zero? E se tivesse como é que esse **a** ficaria? Seria desse mesmo jeito essa parte inicial?".

- 5 perguntas, correspondentes a 8,8% do total relacionavam-se com *os porquês cronológico* e *lógico* ao mesmo tempo. Por exemplo: "Professora, o eixo da cotangente tem 90^0 de diferença com o eixo da tangente, não é?"; e, "O que o logaritmo de base enésima tem a ver com a forma de Moivre?".

- duas questões apenas, 3,6% das perguntas, foram classificadas como *porquê cronológico*, *lógico* e *pedagógico* ao mesmo tempo. Foram as seguintes: "A gente pode utilizar o plano de Gauss mesmo p'ra, no sentido de módulo do real, por exemplo, já que o plano de Gauss pode encontrar o módulo do complexo? O plano de Gauss sempre pode ser utilizado pra o módulo do real, visto que o real pode estar

> na coordenada **x,** reais, e a distância do módulo vai ser justamente o ponto da coordenada até a origem? O zero?", e, "Esse módulo aí, ele sempre está no primeiro quadrante?".

Com base nestes questionamentos, constantes em seu conjunto no Anexo A, faremos, na seqüência, uma reflexão sobre as hipóteses preliminares, verificando a sua validade, uma breve explanação conclusiva em relação aos porquês de Jones e apresentaremos um diagrama como representação das categorias definidas por ele.

4.2 Refletindo sobre as hipóteses preliminares

Analisando todo o quadro (Anexo A) e confrontando os dados obtidos com as hipóteses elaboradas anteriormente, podemos fazer as seguintes reflexões:

Com relação à H1: Esta hipótese supunha que alguns fariam perguntas e que estas perguntas seriam feitas geralmente pelos mesmos alunos. Ao analisarmos o conjunto dos questionamentos verificamos que H1 é confirmada. Dentre os 29 alunos da turma, alguns fizeram perguntas, não todos, e destes podemos dizer que cerca de 5 deles foram os responsáveis por aproximadamente 60% dos questionamentos.

Com relação à H2: A hipótese de que algumas destas perguntas seriam de natureza tal que, para o professor respondê-las, seria necessário um conhecimento da História da Matemática, também foi confirmada, apesar de serem poucas as que apresentaram esta exigência direta. Foram apenas 8 (14,1%) de 57 perguntas, classificadas na categoria de *porquê cronológico* que, em nossa análise, exigiam do professor conhecimento da história para respondê-las. No entanto, naquelas em que prevaleciam as características de *porquês lógicos* e *pedagógicos*, entendemos que respondidas com o apoio da História da Matemática dariam maior significado à resposta.

Com relação à H3: A hipótese de que a maior parte das perguntas iria surgir quando a professora estivesse fazendo a sua exposição ou logo após esta, não foi confirmada, pois, analisando as perguntas dos alunos aula a aula, verificamos que surgiram mais perguntas no momento em que os alunos, por si só, estavam tentando resolver as questões dos testes e listas de exercícios. Esses questionamentos com índice superior a 60%, em sua maior parte classificados na categoria de *porquê pedagógico*, relacionavam-se com suas dúvidas sobre qual a melhor forma de resolver certas questões, ou seja, quais os caminhos mais objetivos para a resolução dos problemas apresentados.

É importante registrar, o grande número de perguntas que foram feitas em aulas de resoluções de exercícios e testes que precediam momentos de avaliações. Para se ter idéia nas aulas de número 8, 10 e 13, em que resolvemos uma boa quantidade de exercícios (Apêndice A) tivemos 18, 10 e 7 perguntas respectivamente, o que corresponde a mais de 50% do total de perguntas feitas nas 16 aulas.

Com relação à H4: De fato, as perguntas dos alunos podem ser classificadas como *porquês cronológicos*, *lógicos* e *pedagógicos*. No entanto, vemos aqui um desequilíbrio entre estas categorias. A maioria dos alunos quer saber “como se resolve isto” e “por que se resolve assim e não de outro modo” o que caracteriza o *porquê pedagógico*. Poucos estão interessados em “de onde surgiu isto” nas origens remotas, “históricas” de um conceito, que é o que caracteriza o *porquê cronológico*.

Inicialmente, isto nos causou estranheza, mas depois tratamos de dar uma interpretação para o fato: a grande maioria dos alunos tem uma preocupação evidente com os conteúdos a serem aprendidos. Normalmente o que lhes é cobrado na prática, seja em concursos vestibulares ou nas próprias avaliações realizadas na escola, é o conhecimento de conteúdos e fórmulas, algoritmos e processos mentais característicos dos *porquês pedagógicos* de Jones (1969).

Mas há aí um fato digno de toda nossa atenção. Na verdade, as perguntas dos alunos "Por que temos de somar da direita para a esquerda, se nossa escrita é no sentido contrário?" e tantas outras deste tipo que se relacionam com os *porquês pedagógicos*, podem ser mais bem respondidas por um professor que tenha tido formação em História da Matemática no que se refere à história dos métodos matemáticos pedagogicamente construídos. Em outras palavras, faz-se necessário uma História da Matemática que dê conta da evolução dos métodos de cálculo. Por exemplo, nos casos da questão formulada anteriormente, o que o professor precisa conhecer são os vários algoritmos de adição e demais operações que foram empregadas desde que os algarismos foram criados e usados pelos indianos até nossos dias. Olhando desse ponto de vista, torna-se claro porque Jones afirma que os *porquês pedagógicos* estão relacionados à História da Matemática.

Veremos mais tarde se esta informação tão pertinente sobre a evolução dos algoritmos de cálculo ou outras questões que ganhariam maior significado caso sua resposta contasse com o apoio da História da Matemática, estão disponíveis ou mesmo acessíveis ao professor de Matemática da escola básica. Será que os livros utilizados por professores e alunos trazem essa contribuição?

Considerando os elementos obtidos após a classificação e análise das perguntas dos alunos, tiramos as seguintes conclusões:

- o aluno só faz questionamentos do tipo cronológico quando incentivado ou, em alguns casos, quando o professor oferece conteúdos que se referem a fatos históricos, sua origem e suas aplicações;
- na maioria das vezes, seus questionamentos são do tipo lógico e mais ainda, pedagógico, visto que, historicamente, há toda uma cobrança ao aprendizado dos conteúdos ligados à pedagogia da disciplina: resolução de problemas; dedução e comprovação de fórmulas e entendimento da teoria básica que suporta esses conteúdos;
- a forte presença de características de mais de uma categoria de porquês, em alguns dos questionamentos dos alunos, induziu-nos a classificá-los como interseções entre essas categorias. Nessa perspectiva, como já vimos, consideramos alguns questionamentos simultaneamente como *porquês cronológicos* e *lógicos*, outros como *lógicos* e *pedagógicos* e até como porquês *cronológicos*, *lógicos* e *pedagógicos* .

Com este nosso entendimento de que os porquês de Jones podem ser classificados com essas possíveis intersecções e, mesmo não encontrando, entre os questionamentos do nosso estudo um porquê cronológico e pedagógico ao mesmo tempo, ousamos apresentar o diagrama seguinte como representação das categorias definidas por ele:

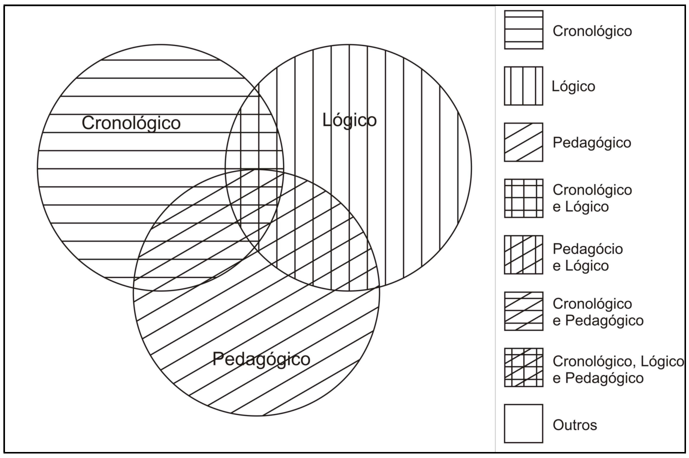


Diagrama 1: categorias de "porquês" baseado em Jones (1969)

Por outro lado, nossa idéia costumeira da História da Matemática é vinculada às perguntas características dos *porquês cronológicos*. Do artigo de Jones (1969), entendemos que a História da Matemática articulada com o seu ensino pode melhorar a qualidade do processo ensino-aprendizagem. Ele considera que os porquês lógicos e pedagógicos, quando respondidos com a contribuição da História, dão maior significado ao ensino.

Percebemos, daí, que os encaminhamentos a serem tomados pelo professor, a partir dos questionamentos dos alunos, serão mais consistentes quando suas respostas tiverem o apoio da História, mesmo que as perguntas se enquadrem nos *porquês pedagógicos* e *lógicos*.

Será que os recursos bibliográficos existentes atendem a essa necessidade?

Veremos, na seção seguinte, o que existe de disponível para o professor, em apoio aos questionamentos dos alunos de ensino médio nas aulas de números complexos.

4.3 Os recursos de apoio ao professor no que se refere à História dos Números Complexos.

Tomaremos como referência os questionamentos mais característicos de porquê pedagógico sobre números complexos feitos pelos alunos. Alguns desses questionamentos, foram:

- "Se não dá para determinar o termo da soma e o termo do produto sem ser por essa fórmula da equação. Por exemplo, através da raiz de Bháskara agente sabe que x' ele é igual a tal valor e o x" ele é igual a outro valor. Daí não dá para determinar o **b** e o **c** não?";
- "Professora, mas se eu fizesse através do mínimo múltiplo comum? Como é que eu faria isso ai? Como é que ficaria esse mínimo múltiplo comum?";
- "Professora, essa equação é biquadrada. Eu coloquei $b^2 = x$, encontrei $x = -25$, então $b^2 = \pm\sqrt{-25}$... já que trabalhamos no conjunto dos complexos eu coloquei que $b = \pm 5i$, isso é possível numa equação?".

É em relação às informações necessárias para lidar com estas perguntas que faremos nossa análise bibliográfica. No momento, passaremos a discutir a escolha de aquelas que serão analisadas.

Achamos razoável supor que o professor de Matemática do Ensino Básico possa ter acesso aos dois livros de História da Matemática mais conhecidos no país: Boyer (1996) e Eves (2004), assim como aos livros didáticos indicados e utilizados pela escola em que leciona. A partir desta suposição, podemos perguntar: quais subsídios estas publicações fornecerão ao professor? Além destas, existem outras publicações que possam oferecer apoio ao professor, no que se refere à história dos números complexos e sua relação com as categorias de porquês definidas por Jones (1969)? Quais os critérios utilizados para a escolha dessas obras?

Com base nestas perguntas, fizemos uma pesquisa bibliográfica em alguns livros didáticos e pára-didáticos, artigos publicados em revistas e em *sites* na Internet (Apêndice B) e, a partir de uma pré-seleção, escolhemos este conjunto de publicações para serem analisadas neste trabalho, conforme critérios que apresentaremos mais adiante:

- Boyer (1996); Eves (2004); Caraça (1998); Wussing (1998), entre as publicações utilizadas no Nível Superior; e
- Dante (1999), Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr.(2002), Iezzi et al. (1993, 1999); Bezerra (2001) e Paiva (1995), livros didáticos de nível médio.

Aqui, registramos que além destas, outras obras pré-selecionadas, constantes no Apêndice B, trazem alguma contribuição. Algumas outras foram pesquisadas, e embora estejam indicadas, não trouxeram nenhuma contribuição para este estudo.

Para a escolha dos livros de Nível Superior, utilizamos como principais critérios o fácil acesso às obras e o conhecimento prévio da bibliografia, por termos estudado através deles durante o nosso curso e, principalmente, pela reconhecida qualidade dos seus conteúdos.

Em relação aos livros didáticos para o Nível Médio, o único critério utilizado foi o de selecionar, dentre os pré-analisados, aqueles que estavam relacionados na bibliografia da escola escolhida como ambiente do nosso trabalho de pesquisa.

4.3.1 A análise dos livros selecionados

Entre os livros utilizados nos cursos de nível superior podemos destacar, dentre aqueles pré-selecionados, os seguintes:

- Boyer (1996):

Esta obra é, no Brasil, talvez o livro mais difundido em História da Matemática. Considerando as três categorias de Jones (1969), em seu conteúdo predominam informações referentes aos *porquês cronológicos* e *lógicos*. Por exemplo, podemos ler que, em 1945, Cardano, em sua obra *Ars Magna,* diz : "Sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos" (BOYER, 1996, p. 197).

Percebemos, nesta afirmação, uma regra de definição nas proposições apresentadas, que leva a uma dedução lógica, característica de situações que expressam a existência de um *porquê lógico*.

Ou ainda quando fala da origem do símbolo i:

Euler, considerado o construtor de notações mais bem sucedido de todos os tempos, foi o primeiro matemático a usar a notação do símbolo i para $\sqrt{-1}$, num manuscrito datado de 1777, só publicado em 1794. Gauss adotou esse símbolo em seu clássico *Disquisitiones arithmeticae* de 1801, assegurando-a entre as notações matemáticas.

Neste caso, notamos que estas informações estão apoiadas na origem de fatos históricos, característica predominante do porquê cronológico. Dificilmente, Boyer (1996), toca em aspectos dos *porquês pedagógicos*. Por exemplo, raramente aparecem informações do tipo em que descreve metodologias explícitas e algoritmos de resolução de problemas, base dos questionamentos que caracterizam os porquês pedagógicos.

- Eves (2004):

Este livro, bastante utilizado no ensino superior do País para abordar a História da Matemática, traz além de informações relacionadas com os porquês cronológicos e lógicos, diversas situações categorizadas nos porquês pedagógicos.

Encontramos em Eves (2004, p. 302) a seguinte afirmação:

> Resumidamente, eis como os fatos podem ter acontecido. Há controvérsias quanto a solução das cúbicas. Por volta de 1515 Scipione Del Ferro resolveu a cúbica $x^3 + mx = n$, baseado provavelmente em fontes árabes e revelou seu segredo a Antonio Fior, seu discípulo. Nicolo Fontana de Brescia, conhecido como Tartaglia, em torno de 1535, anunciou ter descoberto a solução para a cúbica $x^3 + px^2 = n$. Em disputa com Fior, Tartaglia resolveu dois tipos de cúbicas e Fior apenas um tipo.
> Ao que parece Cardano arrancou de Tartaglia a solução da cúbica e publicou em sua *Ars Magna* em 1545.

Notamos aqui, por exemplo, que estas informações tratam da origem dos fatos históricos, as primeiras discussões que originaram os números complexos, que categorizam um *porquê cronológico*.

Em outro trecho, aparece, que também se deve a Euler a fórmula $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Ele conseguiu estabelecer que todo número real não-nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos imaginários, exceto um, se $r > 0$ (Eves, 2004). Essa informação caracteriza a existência de um *porquê lógico* pois está matematicamente apoiada em um raciocínio lógico dedutivo.

Um exemplo de *porquê pedagógico* surge na resolução da cúbica $x^3 + mx = n$ dada por Cardano em sua *Ars Magna*, como veremos a seguir:

> Considere a identidade $(a – b)^3 + 3ab(a – b) = a^3 – b^3$.
>
> Se escolhermos a e b de modo que $3ab = m$, $a^3 – b^3 = n$, então x é dado por a – b. Resolvendo para a e b o sistema formado pelas duas equações obtemos $a = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}$ e $b = \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}$.
>
> Vemos que assim o *x* fica determinado (EVES, 2004, p.303).

Neste exemplo, existe um algoritmo para a resolução da equação, característica de um porquê pedagógico. Ao mesmo tempo, entendemos que os artifícios utilizados nesta solução que envolve um raciocínio lógico bem encadeado, caracterizam, também, a existência de um *porquê lógico*.

- Caraça (1998):

Esta obra é considerada, em Portugal, como um dos melhores livros de Matemática para o ensino secundário escrito em língua portuguesa e foi utilizado na leitura e discussão para apresentação de uma oficina de estudos em nosso curso de mestrado. Nele encontramos as três categorias de *porquês* definidas por Jones (1969), quando discorre sobre a evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, por meio de discussões, reflexões, notas históricas e teoremas, algumas vezes, com demonstrações pouco comuns.

Em Caraça (1998, p. 166), por exemplo, encontramos um *porquê cronológico* ao informar sobre a origem de fatos históricos:

> Já no declinar do séc. XVIII, em 1707, um topógrafo norueguês, Caspar Wessel, entregou à Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras uma Memória, publicada em 1779, *Sobre a representação analítica da Direção* onde, pela primeira vez, foi apresentada uma representação geométrica dos números complexos.

Mais adiante, ao finalizar a resolução de uma equação:

> Generalizando o raciocínio que fizemos sobre esta equação, prova-se facilmente que, dada uma equação algébrica de coeficientes inteiros e com coeficiente do 1.º termo unidade: $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$, as suas raízes racionais, se existirem, são necessariamente inteiras (CARAÇA, 1998, p.174).

Assim, percebemos a existência de um encadeamento lógico com uma premissa axiomática, nesta sentença, uma das características do *porquê lógico*.

Quando encontramos a resolução da adição dos complexos (2 + 3i) + (1 – 5i) = 2 + 3i + 1 – 5i = 2 + 1 + 3i – 5i = 3 + (3 – 5)i = 3 – 2i, notamos uma seqüência metodológica, um algoritmo, um processo pedagógico para a solução da adição de números complexos, o que caracteriza a presença de um *porquê pedagógico*.

- Wussing (1988):

Este livro, apresenta, sob a ótica dos *porquês* de Jones (1969), situações em que prevalecem os *porquês cronológicos* e *lógicos*.

Vemos em Wussing (1988, p. 207), um exemplo, tal qual em Boyer (1996) que mostra a origem de um fato histórico, a origem do símbolo *i*, característica de um *porquê cronológico*: “Euler introdujo em 1777 el símbolo i y opero com él como si

$i^2 = -1$; el símbolo i y la denominación número complejo lograram imponerse definitivamente solo después de su uso por Gauss.”

Quando Euler define o número imaginário, percebemos a existência de um porquê lógico baseado no encadeamento do raciocínio lógico utilizado na seguinte afirmação: “Uma magnitud se dice imaginaria cuando ni es mayor que cero, ni es menor que cero, ni igual a cero. Es algo imposible, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ ó en general $a + b\sqrt{-1}$” (WUSSING, 1998, p. 208).

Quando tratamos de analisar a contribuição aos *porquês* de Jones (1969) nos livros didáticos utilizados pelas escolas de nível médio, em especial naqueles adotados pela escola foco do nosso trabalho, percebemos a insignificante presença da História da Matemática no apoio aos questionamentos dos alunos relacionados aos *porquês cronológicos*, *lógicos* e *pedagógicos*, objetivo maior de nossa análise. Em todos os questionamentos, predominam, como já era de se esperar, os *porquês pedagógicos* caracterizados por conteúdos que são explicados por meio de processos pedagógicos e de algoritmos e os *porquês lógicos* que envolvem demonstrações, deduções, axiomas e teoremas que são característicos. Vejamos a análise a seguir, apenas em consideração aos *porquês cronológicos*, visto que, como já dissemos, todos apresentam os *porquês lógicos* e *pedagógicos* ao longo dos seus textos.

- Dante (2001):

Este autor pode ser analisado em suas duas formas de apresentar seus livros:

a) no volume único, mais denso e compactado, não há referências aos fatos de origem histórica;

b) no seu volume 3, no capítulo destinado aos números complexos, há uma breve abordagem histórica que tenta explicar sua origem com Cardano, seu significado, e sua representação em pares ordenados a partir de Gauss.

- Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr (2002):

Esta obra também é apresentada em duas formas: em volume único e em três volumes, um para cada série. Em ambos os casos, é mínima a contribuição aos porquês cronológicos. Há uma pequena biografia de Euler e Gauss e um breve resumo sobre a origem dos números complexos sem nenhuma citação aos matemáticos ou aos anos ou aos lugares em que os fatos aconteceram.

- Iezzi et al. (1993, 1999)

Este autor aparece na bibliografia utilizada na escola pesquisada com suas obras em dois formatos: em nove volumes divididos por assunto, referência para o Ensino Médio; em volume único. Este conjunto pode ser considerado um dos mais completos em assuntos referentes ao Ensino Médio. Por sua reconhecida qualidade na apresentação dos conteúdos, que classificamos, na ótica de Jones (1969) entre os porquês lógicos e pedagógicos, essa obra é a que apresenta, entre as aqui analisadas, a melhor contribuição qualitativa no aspecto dos porquês cronológicos, como apoio ao professor e ao aluno.

Em Iezzi et al. (1993), por exemplo, aparece esta pequena contribuição: Girolamo Cardano (1501-1576), foi responsável por um primeiro avanço importante ao considerar o problema prático: "dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40". A solução $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ não tinha solução no conjunto $\Re$. Cardano deu um passo adiante, trabalhando com os radicandos negativos " como se fossem números", em que as duas partes do segmento teriam comprimento $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, cujo produto é 40.

- Bezerra (2001):

Esse livro, apresentado em volume único, traz como contribuição aos *porquês cronológicos*, para os números complexos, uma curta explicação assim resumida: foi o italiano Rafael Bombelli (1526-1573) quem começou a operar com o símbolo $\sqrt{-1}$. No século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) passou a representar $\sqrt{-1}$ por i. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1768-1722), no início do século XIX, criaram a representação geométrica para os números complexos.

- Paiva (1995):

A obra de Paiva, publicada em três volumes, traz, no volume 3, o conteúdo de números complexos. Não há referência a nenhum fato histórico. Portanto, nenhuma contribuição aos *porquês cronológicos* aparece neste livro.

Após a análise que fizemos sobre a literatura existente para apoio do professor, especificamente no que se refere à história dos números complexos, apresentaremos, na próxima seção, as considerações finais e reflexões sobre este estudo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta última seção, faremos nossas considerações finais a respeito do trabalho de pesquisa realizado numa instituição pública federal de ensino, tendo como foco os questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos. Trataremos, aqui, de apresentar os avanços obtidos no alcance dos objetivos gerais e específicos propostos no início da pesquisa e, as limitações que, de alguma forma, dificultaram o seu aprofundamento.

Quando resolvemos realizar esta investigação, um dos pontos que nos motivava era saber que poderíamos oferecer uma pequena contribuição para as discussões existentes, que buscam a melhoria do processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Em nossa prática cotidiana, convivemos com o dilema de dominarmos os conteúdos da Matemática e não termos uma metodologia que se aplique em sala de aula capaz de despertar o interesse e entusiasmo do aluno por essas aulas. Ao nos debruçarmos sobre o artigo de Jones (1969), entendemos que, analisar os questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos, à luz das categorias de porquês definidas por ele, poderia ser um bom caminho para justificar a aplicação, em sala de aula, de uma seqüência de ensino que, pudesse fazer dessas aulas uma atividade significativa e gratificante para os alunos, com a contribuição da História da Matemática.

Em nossa proposta metodológica, utilizando a Engenharia Didática, algumas hipóteses foram apresentadas, sendo a mais relevante para o nosso estudo a proposição H4: das perguntas que remetem à História da Matemática, haverá algumas que poderão ser enquadradas como porquês cronológicos, outras como lógicos e outras como porquês pedagógicos. Esta hipótese foi confirmada e estes questionamentos foram o objeto principal de nossa pesquisa.

Ao analisarmos os objetivos gerais e específicos propostos nesta investigação, podemos concluir que avançamos no conhecimento dos tipos de perguntas feitas pelos alunos e nas possibilidades de apresentarmos referências para os professores capazes de apoiar suas respostas no domínio da História da Matemática. Nossa conclusão sobre esses objetivos é que eles foram alcançados de maneira satisfatória no decorrer do trabalho. Senão vejamos o que pretendíamos como objetivos gerais e específicos:

- fizemos o levantamento sistemático das perguntas dos alunos nas aulas de números complexos, registrando aí 59 perguntas; classificamos e analisamos estas perguntas e confrontamo-las com as categorias de porquês apontadas por Jones (1969): cronológico, lógico e pedagógico; e, discutimos essa categorização e a necessidade de propor mudanças, o que não foi o caso, na nossa opinião, pois apenas uma das perguntas não se enquadrava na classificação de Jones.

  Neste aspecto da pesquisa, atendemos o objetivo geral **a** e os objetivos específicos **a** e **b**, ao mesmo tempo em que apuramos uma pequena presença de questionamentos relacionados com o porquê cronológico e uma grande incidência de porquês relacionados com os lógicos e, principalmente, com os pedagógicos.

- atendidos os objetivos anteriores, também avançamos na busca do atendimento ao objetivo geral **b** e do objetivo específico **c**, a partir de uma pesquisa bibliográfica em livros e revistas e na internet. Entendemos que a pergunta classificada como cronológica poderia ser respondida, buscando-se a resposta na origem historicamente determinada; recomendamos, tal qual Jones (1969) que as perguntas definidas nas categorias de porquês lógicos e pedagógicos podem ser respondidas com o apoio da história que lhes darão maior significado; percebemos que, o que existe escrito em Português e acessível aos professores de Ensino Médio que tratam com números complexos, é pobre e restrito. Nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, praticamente inexistem referências à História da Matemática, e o melhor apoio a esses questionamentos encontra-se nos livros de Ensino Superior em que destacamos: Eves (2004) e Boyer (1996), e em menor escala em Wussing (1998) e Caraça (1998).

Mesmo considerando que eventuais falhas não comprometeram o desenvolvimento e os resultados da nossa pesquisa, entendemos que alguns fatores contribuíram para que sua aplicação apresentasse algumas limitações:

- as condições da Instituição em que o estudo se ambientou, logo após um período de greve;

- a ausência da fase de experimentação, que nos ajudaria a redefinir nossa estratégia e a consolidar as definições de Jones, o que nos impôs à aplicação da seqüência didática de forma direta na sala de aula;

- o fato de os alunos saberem que estavam sendo registrados seus questionamentos funcionou como fator inibidor para uns e motivador para outros o que, no nosso entendimento, limitou, em parte, a estratégia da pesquisa, que buscava analisar as perguntas a partir do comportamento natural em sala de aula, sem nenhuma alteração prévia da metodologia em relação às aulas costumeiras;

- a pobreza recorrente nos livros de Matemática do nível médio, no que se refere à existência de informações sobre a História da Matemática, seja da história isolada como motivadora, seja da História como método ou como significação, foi um grande limitador para o encaminhamento do professor na busca das respostas que apontem para o ensinar com significado.

É importante destacar como contribuição deste estudo os pontos a seguir:

- os questionamentos dos alunos referem-se mais aos porquês pedagógicos;

- existe mais de um aspecto da História da Matemática que poderia ser contemplado pelos livros didáticos;

- os livros didáticos (assim como os de História da Matemática) pouco dizem sobre o surgimento e a evolução dos métodos de cálculos utilizados por nós.

Finalmente, considerando o que expusemos como avanços e limitações do estudo, entendemos que esta pesquisa, tendo como apoio a História da Matemática, não é definitiva, pode ser aprofundada e servir como mais um elemento de contribuição aos futuros estudos e reflexões para a melhoria do processo ensino-aprendizagem dos alunos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

ANTAR NETO, Aref. **Matemática básica.** São Paulo: Atual, 1992.

ASIMOV, Isaac. **No mundo da álgebra**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1987.

BARBOSA, R. M. História da Matemática e educação matemática. In: **Seminário Nacional de História da Matemática**, 4., 2001, Natal. **Anais...** Rio Claro: Editora da SBHMat, 2001, p. 241-243.

BEKKEN, Otto B. **Equações de Ahmes até Abel.** Rio de janeiro: Universidade Santa Úrsula – GEPEM, 1994.

BEZERRA, Manoel J. **Matemática para o ensino médio**. São Paulo: Scipione, 2001.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução:Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais de matemática.** Lisboa: Ciência Aberta, 1998.

D'AMBROSIO U. História da Matemática e Educação. **Caderno CEDES.** São Paulo: Papirus, v. 8, n.40, 1997, p. 07-17.

______. A interface entre história e matemática: uma visão histórico-pedagógica. In: FOSSA, J. A. (Org.). **Facetas do diamante:** ensaios sobre educação matemática e História da Matemática. Rio Claro: SBHMat, 2000, p. 241-271.

DANTE, Luiz R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo, Ática, 1999. v.3.

______. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo, Ática, 2001.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática***.* Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FAUVEL, John; MAANEN, Jan V. **History in mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.

FERNANDEZ, Vicente P.; YOUSSEF, Antônio N. **Matemática para o segundo grau**. São Paulo: Scipione, 1991.

FOSSA, J. A. Uma proposta metodológica para pesquisa em educação matemática. In: FOSSA, J. A. (Org). **Educação Matemática.** Natal, EDUFRN, 1998. p. 127-133. (Coleção EPEN – v. 19).

______. **Ensaios sobre educação matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. (Série Educação, n. 2).

GIOVANNI, José R.;BONJORNO, José R.; GIOVANNI Jr., José R. **Matemática completa.** São Paulo: FTD, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar**: trigonometria. São Paulo: Atual, 1993. v.3.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática.** São Paulo: Atual, v.u, 1999.

JONES, Phillip S. The history of mathematics as a teaching tool. In: **Historical Topics of the Mathematics classroom.** New York- USA, NCTM 1969, pp 1-17.

LIMA, Elon L. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, IMPA, VITAE,1991.

MENDES, Iran A. **O uso da história no ensino da matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

MILIES, César P. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: RPM, n. 24, p. 5 – 15, jul./dez. 1993.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIVA, Manoel R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

SANTOS, Carlos A. M.; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio E. **Matemática**: novo ensino médio. São Paulo: Ática, 2000.

SILVEIRA, J.F. Porto da. **Os números complexos foram inventados para resolvermos as equações do segundo grau?** 2001. Disponível em: <**http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/compla.html**>. Acesso em: 23 maio 2006.

WUSSING, H. **Lecciones de historia de las matemáticas**. Madrid: Siglo XXI de España editores, sa,1998.

YOUSSEF, Antônio N.; FERNANDEZ, Vicente P.; SOARES, Elizabeth. **Matemática**: ensino médio. São Paulo: Scipione, 2000.

ZÖLD, Harold H. N.; CÔRREA, Sérgio. **Novo manual nova cultural**: matemática. São Paulo: Nova Cultural, 1993.

APÊNDICES

Apêndice A - Classificação das perguntas dos alunos à luz das categorias definidas por Phillip Jones.

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
1	08/12/05	Aula introdutória: apresentação mútua do professor e dos alunos; apresentação do programa da disciplina.	Não houve.	-
2	09/12/05	Pequena introdução de números complexos; definição de números complexos; exemplo de números reais puros; números imaginários e nulos	"Você multiplicou a raiz de trinta e seis por menos um. Você não multiplicou? Porque você botou dentro multiplicando? Ele não some não, quando você multiplica?"	L
			"Existe uma explicação para esse *i*?"	C
			"Não é complicado depois da morte do cara você obter a informação?"	O
3	15/12/05	Igualdade, a adição e a subtração, a multiplicação, o conjugado de números complexos e potências de i.	" $i^3 = -i$, ai você coloca errado ou agente tem que colocar $i^3 = i^2 \cdot i$?"	P
			"O real puro é aquele, por exemplo: falando um pouco por alto, $y = x + 3$?"	L
4	16/12/05	Propriedades do conjugado de um número complexo, divisão de números complexos e potência de i, exercícios utilizando o livro-texto.	"Por que é elevado o expoente ao quadrado?"	L
			"Eu posso muito bem pegar então, digamos, se o coeficiente do x^2 for maior que um, eu posso muito bem, dividir a equação pelo coeficiente?"	P
5	22/12/05	Resolução de uma lista de exercícios constando de dez questões subjetivas.	"Se não dá para determinar o termo da soma e o termo do produto sem ser por essa fórmula da equação. Por exemplo, através da raiz de Bháskara agente sabe que x' ele é igual a tal valor e o x" ele é igual a outro valor. Daí não dá para determinar o b e o c não?"	P

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
6	05/01/06	Resolução de exercícios do livro-texto.	“Professora, mas se eu fizesse através do mínimo múltiplo comum? Como é que eu faria isso ai? Como é que ficaria esse mínimo múltiplo comum?”	P
			“O melhor é fazer primeiro, digamos assim, a radiciação: primeiro passar o denominador para um denominador real puro fazendo a multiplicação do conjugado?”	P
			“Professora porque demorou tanto tempo...”	I
7	12/01/06	Revisão preparatória para o teste em duplas a ser aplicado na aula seguinte.	Não houve questionamentos dos alunos.	-
8	13/01/06	Teste em dupla	“Professora, essa equação é biquadrada. Eu coloquei $b^2 = x$, encontrei $x = -25$, então $b^2 = \pm\sqrt{-25}$ ... já que trabalhamos no conjunto dos complexos eu coloquei que $b = \pm 5i$, isso é possível numa equação?”	P
			“Agente vai fazer o produto, aí depois pega a parte imaginária que é igual a zero né? Para ele ser real?”	P
			“É que quando agente achou esses valores aqui, aí agente foi conferir. Quando achou esse daqui não dava 21-20i. Não dava isso aqui.”	P
			“Desenvolvi a questão, ai achei aquele valor. Agora esse m aqui que eu achei, vale pra toda a questão ou só pra parte real?”	P
		(continua...)	“É pra dizer o valor de z não é? Mas não tem que ser imaginário puro? Aí isso aqui é zero, certo? Aí o resultado pode ser 4 – mi? Aí sendo m diferente de 4?”	P

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
8	13/01/06	(...continuação) Teste em dupla	“Eu fiz essa multiplicação, e deu esse resultado aqui. Aí eu posso dizer que só isso aqui porque isso aqui seria um número real. Aí eu posso dizer que sendo 2a + 3b = 0, aí dá esse resultado aqui com certeza.”	P
			“Para isso ter que ser real, b tem que ser igual a zero, então, portanto, tem que eliminar a parte imaginária, logo 2a + 3b tem que ser igual a zero?”	P
			“É porque, aqui, por exemplo. Porque a 1, b^2 agente já viu elevado aqui, aí agente vai elevar os dois termos ao quadrado. Aí isso aqui tem que elevar ao quadrado de novo é? aí também?”	P
			“É pra elevar os dois termos ao quadrado?”	P
			“Eu já fiz essa um aqui, de três maneiras possíveis. Será que nenhuma dessas aqui. Paro aqui e não tem como ir.”	P
			“Pode elevar isso aqui ao quadrado? Esses dois termos?”	P
			“Ele pede o conjugado desses números, certo? Aí eu... O conjugado de $3i^5$ é $-3i^5$?”	P
			“Considerando que a potência de um número complexo é igual a outro número complexo, não é?”	L
			“Professora, pode elevar um número complexo a um expoente negativo, ou a um expoente fracionário?”	P e L
			“Elevar por exemplo 2 elevado a $\sqrt{2}$?”	L
			“Dá pra fazer por Bháskara também?”	P
			“Professora, qual é a fórmula pra dar ... é ..., $x^2 + sx + p$?”	P
			“Professora esse a e esse b, eles são os mesmos termos daquele z ali da equação?”	P

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
9	19/01/06	Representação gráfica de um número complexo (plano de Argand-Gauss); módulo e argumento de um número complexo; e, exercícios.	"Esse módulo aí, ele sempre está no primeiro quadrante?"	C
			"Há como determinar o estudo de sinal de um número complexo? Isso é, se mesmo com o fator imaginário aí, eu posso determinar se ele é positivo ou negativo? O que eu tô querendo dizer, é mais ou menos o seguinte:você não tem assim um valor definido pra i, você sabe que ele é um número imaginário, mas você não tem um valor definido, você de repente poderia ser ou positivo ou negativo ou nulo, não é verdade? Então o que é que estou perguntando: se não daria pra estudar o sinal certo, do número complexo z. Ao meu ver como você não tem o valor de i isso só seria possível se o z fosse nulo ou se ele fosse real puro?"	L
10	20/01/06	Forma trigonométrica ou polar dos números complexos e resolução de exercícios envolvendo a forma algébrica, a forma trigonométrica, a divisão, o argumento, o módulo, potências de i e a representação gráfica dos números complexos. (continua...)	"Mas, qual a importância a nível disso aqui ser o módulo de z e não poder ser apenas um número. Tem que ser o módulo?"	L e C
			"Amarilys colocou que esse módulo aí seria uma entidade própria, possível de ser medida, ou seja, é uma definição que é encontrada no Aurélio pra grandezas. Nesse caso o módulo é uma grandeza mesmo?"	L e C
			"Com base no módulo, na verdade, você não pode determinar a parte, assim: se o número, ele é real ou se ele é imaginário puro ou os dois? Se ele tem as duas partes? A única coisa que você pode determinar tendo com base o módulo seria o raio de uma circunferência que tivesse o centro no zero"	P

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
10	20/01/06	(...continuação) Forma trigonométrica ou polar dos números complexos e resolução de exercícios envolvendo a forma algébrica, a forma trigonométrica, a divisão, o argumento, o módulo, potências de i e a representação gráfica dos números complexos.	"Agente pode utilizar o plano de Gauss mesmo pra, no sentido de módulo do real, por exemplo, já que o plano de Gauss pode encontrar o módulo do complexo? O plano de Gauss sempre pode ser utilizado pra o módulo do real, visto que o real pode estar na coordenada x, reais, e a distância do módulo vai ser justamente o ponto da coordenada até a origem? O zero?"	P, L e C
			"Para achar o módulo pode usar aquele ... a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados do cateto?"	P
			"Professora, mas nesse z = – 3i, não vai ter um módulo de z, não?"	P
			"O real puro, o ângulo só varia de 0 a 180?"	L
			"E se for imaginário puro? Vai de 90 a 270?"	L
			"O afixo é a mesma coisa que módulo?"	L
			"A diferença de um pra outro é de 90^0 , não é? Então se esse aí é 30, é 60, né?"	L
			"Pra representar o módulo, assim o número ou..."	I
11	21/01/06	Resolução de questões envolvendo igualdade de módulos de números complexos e potências de i e sua forma trigonométrica. (continua...)	"No caso como eu não tenho nenhuma implicação que defina o valor de a, eu posso atribuir digamos qualquer valor a ele?"	L
			"Não entendi porque... pronto, ali no a, porque que ele ficou assim . Mas, teria como b não ser igual a zero? E se tivesse como é que esse a ficaria? Seria desse mesmo jeito essa parte inicial?"	P e L
			"Não entendi uma coisa, porque a senhora colocou a = -1, é porque b é igual a zero?"	L

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
11	21/01/06	(...continuação) Resolução de questões envolvendo igualdade de módulos de números complexos e potências de i e sua forma trigonométrica.	“Porque você colocou 1 – a ?”	L
			“De novo eu vou só fazer uma observação: Podiam querer o módulo apenas de z quando ele vai querer o do outro número complexo z - i ou o de z + i no caso.”	L
12	26/01/06	Resolução de algumas questões de vestibulares sobre números complexos, a partir do nosso livro texto.	“Professora, o eixo da cotangente tem 90^0 de diferença com o eixo da tangente, não é?”	C e L
13	27/01/06	Apresentação da potenciação de Números complexos, por meio da fórmula de Moivre. Resolvemos alguns exercícios para fixação da aprendizagem.	“Professora, porque que é que só pode ser um número natural? Não pode ser um número inteiro ou racional? Não pode ser –1 ou $\frac{1}{2}$ por exemplo?”	P
			“Tem que ser natural? Ou é só pela facilidade de trabalhar com ele?”	P
			“Agente não pode saber o valor de ϑ pelo número z aí, que esta na forma trigonométrica ?”	P
			“Para você achar o valor de ϑ você não tem que vê a outra fórmula de z?”	P
			“Professora esse (cos n ϑ + i sen n ϑ) é a mesma coisa que (cos ϑ + i sen n ϑ)”	L
			“Se estiver em radianos, eu posso trabalhar em graus?”	P
			“Diga ai porque ficou 3 quando a senhora reduziu?”	L
14	28/01/06	Resolução de uma lista de exercícios em grupos de três alunos, envolvendo: um pouco da história e a evolução dos números complexos, com resolução de questões sobre todo o conteúdo ministrado em sala de aula, em preparação para avaliação individual.	Não houve perguntas dos alunos	-

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
15	02/02/06	Resolução de lista de exercícios da aula anterior e demos orientação para a avaliação individual a ser realizada no dia seguinte.	"Ou professora, o co-seno negativo, ele se localiza no 3º ou 4º quadrante? ou nos outros dois?"	L
			"O que o logaritmo de base enésima tem a ver com a forma de Moivre?"	C e L
			"Minha dúvida é justamente essa: Não tem como você saber da própria representação do ângulo, na forma em radianos, não tem como você saber em que quadrante ele se encontra? Não tem como você intuir meio em que quadrante ele se encontra?"	P
			"Professora, a forma de Moivre, ela diz que só posso trabalhar com os números naturais, né? E maiores que dois. Pra digamos assim: o efeito ser perceptível, por que com 1 não se perceberia nada. Mas,... com um número elevado nem a um nem a zero o efeito seria perceptível, mas digamos, se eu colocasse essa expressão né? Em uma calculadora científica, e essa expressão, se ela estivesse elevada a um número não necessariamente natural, por exemplo: um número decimal? A calculadora, ela poderia resolver. Então, é uma questão muito mais assim de que é trabalhoso pra um ser humano, resolver mas para uma máquina por exemplo, não?"	C e L

Aula	Datas	Assuntos desenvolvidos nas aulas	Perguntas dos alunos	Categoria segundo Jones
16	03/02/06	Avaliação individual com todos os conteúdos ministrados na sala de aula sobre números complexos. Esclarecemos as possíveis dúvidas sobre as questões.	Não houve questionamentos dos alunos	-

Quadro 1 - Classificação das perguntas dos alunos à luz das categorias definidas por Phillip Jones.

C – cronológico
L – lógico
P – pedagógico
O – outra categoria, que não as anteriores
I – pergunta incompreensível

Apêndice B - Análise Resumida de Referências sobre História da Matemática – Números Complexos

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
BOYER, 1974 /DS	**Soluções Imaginárias** Em 1484, Chuquet em sua obra *Triparty*, exprimiu, pela primeira vez, um número negativo isolado numa equação algébrica. Ele descobriu que algumas equações traziam soluções imaginárias; nesses casos ele dizia, "*Tel nombre est ineperible"*. /203.	O Triparty é um livro em que não se pode avaliar o grau de originalidade do autor. /203.
BOYER, 1974 /DS	**Resolução de equações cúbicas e a raiz quadrada de números negativos** Em 1945, Cardano em sua obra *Ars Magna,* diz que sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. /210.	Era importante levar em conta os números imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais. /210.
BOYER, 1974 /DS	**Números imaginários conjugados** Rafael Bombelli em sua *Álgebra*, escrita em 1560 e impressa em 1572, verifica que os dois radicais das raízes cúbicas diferem apenas por um sinal. É o aparecimento dos números imaginários conjugados que conhecemos hoje. /211.	Na época, a observação não ajudou na resolução das equações cúbicas, pois Bombelli precisava saber antecipadamente o valor de uma das raízes. /211.
BOYER, 1974 /DS	**Reconhecimento de raízes negativas e imaginárias** Coube a Girard em 1629, em *Invention nouvelle em l'algèbre,* admitir raízes negativas e imaginárias. Girard conservou as raízes imaginárias das equações porque elas exibem os princípios gerais na formação de uma equação a partir de suas raízes. /224.	As relações entre raízes e coeficientes de Viète e de Harriot não reconheciam raízes negativas e imaginárias. /224.
BOYER, 1974 /DS	**Decomposição imaginária de um número real positivo** Leibniz, um dos maiores formadores de notação, apresentou contribuições relativamente secundárias em seus comentários sobre números complexos, numa ocasião em que estavam quase esquecidos.	Leibniz era um teólogo eminente, e exemplificava a posição ambivalente dos números complexos, observando que os números imaginários eram uma espécie de anfíbio, a meio caminho entre (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
BOYER, 1974 /DS	Ele fatorou $x^4 + a^4$ e mostrou $\sqrt{6}$, numa decomposição imaginária de um número real que surpreendeu seus contemporâneos. /297-298.	(...continuação) existência e não-existência, assemelhando-se nisso ao Espírito Santo na teologia Cristã. /298.
BOYER, 1974 /DS	**Origem do Símbolo i** Euler, considerado o construtor de notações mais bem sucedido de todos os tempos, foi o primeiro matemático a usar a notação do símbolo **i** para $\sqrt{-1}$, num manuscrito datado de 1777, só publicado em 1794. Gauss adotou esse símbolo em seu clássico *Disquisitiones arithmeticae* de 1801, assegurando-a entre as notações matemáticas. /326.	Em suas primeiras obras Euler usou o símbolo **i** para representar um *"número infinito"*, mais ou menos como Wallis usara **∞**. /326.
BOYER, 1974 /DS	**Logaritmos e potências** Euler escreve a d'Alembert, explicando que os logaritmos dos números negativos são números imaginários puros e não reais, como Bernoulli e d'Alembert tinham acreditado. Em 1746, numa carta a Christian Goldbach, Euler mostrou também que uma potência imaginária de um número pode ser um número real. /330-331.	Da identidade de Euler, vê-se que os logaritmos de números complexos, reais ou imaginários, também são números complexos. Já d'Alembert queria provar que o resultado de qualquer operação algébrica efetuada sobre um número complexo é um número complexo. /330-331.
BOYER, 1974 /DS	**Representação gráfica** Em 1797 Caspar Wessel descobriu a representação gráfica de números complexos, publicada na revista da Academia Dinamarquesa de 1798. A obra de Wessel ficou quase desconhecida. Cerca de trinta anos depois, Gauss publicou suas idéias e o plano de números complexos é hoje chamado plano de Gauss. / 370. Jean Robert Argand, de Genebra, publicou uma exposição da representação gráfica dos números complexos em 1806. /379.	Wessel e Gauss foram os primeiros a pensar nas partes real e imaginária de um número complexo a+bi como coordenadas retangulares de pontos de um plano. /370. A obra de Argand passou tão desapercebida quanto o trabalho de Wessel. No fim da segunda década do século dezenove, a maior parte da Europa conhecia, através de Cauchy, não só o diagrama de Wessel-Argand-Gauss para um número complexo, mas também as propriedades fundamentais das funções complexas. /379.

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
BOYER, 1974 /DS	**Teorema de de Moivre** De Moivre tinha um interesse particular por desenvolver, para a teoria das probabilidades, processos gerais e notações que ele considerava como uma nova "álgebra". Sua obra *A Miscellanea analytica* foi muito importante, não só para probabilidades como também para o lado analítico da trigonometria. /312.	O conhecido teorema de de Moivre, $(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta$, não é dado explicitamente em sua obra, mas de seu trabalho sobre ciclometria e outros contextos resulta claramente que de Moivre conhecia bem essa relação, provavelmente desde 1707. /312.
EVES, 1995 /DS	**Números irracionais** Nicolas Chuquet, parisiense que viveu e se dedicou á medicina em Lyon, escreveu, em 1484 uma aritmética intitulada *Triparty em la science des nombres,* publicada apenas no século XIX. A segunda parte dessa obra trata de números irracionais. /297.	Chuquet admitia expoentes inteiros positivos e negativos, e parte de sua obra é sincopada. Seu trabalho era considerado muito avançado para a época, não exercendo influência sobre seus contemporâneos. /298.
EVES, 1995 /DS	**Equações cúbicas e números imaginários** Há controvérsias quanto à solução das cúbicas. Por volta de 1515, Scipione Del Ferro resolveu a cúbica $x^3 + mx = n,$ baseado provavelmente em fontes árabes e revelou seu segredo a Antonio Fior, seu discípulo. Nicolo Fontana de Brescia, conhecido como Tartaglia, em torno de 1535, anunciou ter descoberto a solução para a cúbica $x^3 + px^2 = n.$ Em disputa com Fior, Tartaglia resolveu dois tipos de cúbicas e Fior apenas um tipo. Ao que parece, Cardano arrancou de Tartaglia a solução da cúbica e publicou em sua *Ars Magna* em 1545. /302-303. Nessa obra, Cardano dá alguma atenção às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários. /307.	Ludovic Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano, na discussão entre este e Tartaglia sobre a resolução de cúbicas, argumentou que Cardano teria recebido informações de Del Ferro através de um terceiro e acusou Tartaglia de ter plagiado Del Ferro. /303.

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
EVES, 1995 /DS	**O caso irredutível das equações cúbicas** Em 1572 Rafael Bombelli publicou uma álgebra sobre a resolução das equações cúbicas. Os textos da teoria das equações mostram que pela fórmula de Cardano-Tartaglia a equação cúbica $x^3 + mx = n$ tem raízes que se expressam como diferença de *números complexos imaginários*. Essa aparente anomalia caracteriza o chamado *caso irredutível* das equações cúbicas. /308.	Bombelli explica que só aparentemente as raízes são imaginárias no caso irredutível. Bommbelli deu grande colaboração para o aprimoramento da notação algébrica corrente. /308.
EVES, 1995 /DS	**A unidade imaginária e logaritmos** Leonhardo Euler, suíço nascido na Basiléia, contribuiu, entre seus 530 trabalhos que publicou durante a vida, com a implantação de importantes notações da matemática. É de Euler a notação i para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ e também se deve a Euler a fórmula e^{ix} = *cós x + i sen x.* Euler conseguiu estabelecer que todo número real não-nulo *r* tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos imaginários, exceto um se $r > 0$. /472-473.	Euler deixou, ao morrer, uma série de manuscritos para a Academia de São Petersburgo. A Sociedade Suíça de Ciências Naturais, iniciou, em 1909, uma obra completa de Euler com 866 trabalhos, entre livros e artigos, que deverá atingir cem volumes. /472.
EVES, 1995 /DS	**Associação entre números complexos e pontos reais no plano** Casper Wessel, em 1797, apresentou à Real Academia Dinamarquesa de Ciências a idéia de associar números complexos a pontos reais no plano, pulicada nas atas dessa Academia em 1799. Num artigo publicado em 1806 e mais tarde, em 1814, nos *Annales de Mathématiques* de Gergonne, Argand deu a sua contribuição.	O artigo de Wessel permaneceu excluído do mundo matemático em geral e foi descoberto por um antiquário cerca de noventa e oito anos após ter sido escrito. Esse atraso explica por que o plano complexo veio a ser chamado plano de Argand e não plano de Wessel. Já a afirmação de ter assinalado que a idéia básica da representação encontra-se em sua tese de doutorado de 1799, explica por que o plano complexo é freqüentemente conhecido como plano de Gauss. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
EVES, 1995 /DS	Em 1831, Gauss apresentou à Sociedade Real de Göttingen uma memória sobre o assunto reproduzida nas suas *Obras Reunidas*, em que assinalou que a idéia básica dac representação gráfica dos números complexos está em sua tese de doutorado de 1799. /522.	(...continuação) A idéia de considerar as partes real e imaginária como coordenadas de um ponto do plano, deixou os matemáticos mais à vontade com os números imaginários. /522-524.
EVES, 1995 /DS	**Fórmula de De Moivre** Abraham De Moivre (1667-1754), francês de Hugue, deu importantes contribuições à teoria das probabilidades. Sua obra *Miscellanea analytica*, há contribuições a séries recorrentes, probabilidad e trigonometria analítica. Em 1707, De Moivre apresentou a fórmula conhecida pelo seu nome, $(\cos x + i\,\mathrm{sen} x)^n = \cos nx + i\,\mathrm{sen}\,nx$, para $i = \sqrt{-1}$, para *n* inteiro positivo (embora não explicitamente. /467-468.	De Moivre viveu na Inglaterra como professor particular e tornou-se amigo de Isaac Newton. De Moivre também é conhecido por seu papel importante na História da Matemática atuarial com sua obra *Annuities upon Lives*. /467-468.
BEZERRA, 2001, v.u /DM	**Breve Resumo** Foi o italiano Rafael Bombelli (1526-1573) quem começou a operar com o símbolo $\sqrt{-1}$. No século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) passou a representar $\sqrt{-1}$ por i. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1768-1722), no início do século XIX criaram a representação geométrica para os números complexos. /393.	“ ... Por exemplo, não estão definidos em $\Re$ os símbolos $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-20}$, $\sqrt{-9}$, etc. O conjunto dos números complexos, que passaremos a estudar, surgiu da necessidade de realizar operações com símbolos desse tipo. Tal objetivo foi atingido com a criação de um ‘novo’ número, representado pela letra i e munido da seguinte propriedade: **i^2 = -1. ...**” /393.
GIOVANNI, BONJORNO e GIOVANNI Jr., 2002, v.u /DM	**Breve Resumo** A existência da equação $x^2 + 1 = 0$, preocupou muito os matemáticos do século XV, pois essa equação não tem solução no campo dos números reais. Houve necessidade de ampliar o universo dos números, para que essas equações fossem sempre possíveis.	Resumida biografia de Euler (1707-1783), sem nenhuma alusão aos números complexos. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
GIOVANNI, BONJORNO e GIOVANNI Jr., 2002, v.u /DM	Criou-se, então, um número cujo quadrado é –1, representado pela letra i, denominado unidade imaginária, definido por $i^2 = -1$. /249.	(...continuação) Resumida bibliografia de Gauss (1777-1855), em que, entre outras coisas, aponta que Gauss inventou também a representação gráfica dos números complexos, pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano. /6.
SANTOS, GENTIL e GRECO, 2000, v.u /DM	**Breve introdução** No conjunto $\Re$ não podemos resolver equação do segundo grau em que $\Delta < 0$, como $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4 = 0$, $x^2 + 5x + 7 = 0$, isto é, não há solução em $\Re$ para essas equações. " Durante muitos séculos essas equações ficaram sem solução até que Raffaeli Bombeli, em 1572 publicou seu tratado de Álgebra falando sobre raízes quadradas de números negativos." Começava a surgir um novo conjunto, chamado de conjunto dos números complexos representado por C. Criou-se também o símbolo i para ser usado no lugar de $\sqrt{-1}$. /362.	-
IEZZI et al, 1999, v.u /DM	**Breve introdução histórica** Quando resolvemos uma equação do segundo grau, utilizando a fórmula de Bháskara e encontramos a raiz quadrada de um número negativo, dizemos que é impossível determinar o valor de x. "A necessidade de obter uma solução para esse tipo de problema levou os matemáticos a procurar novos conjuntos em que 'o quadrado de certo elemento pudesse ser negativo'." Historicamente, os matemáticos concluíam que o problema não tinha solução prática, pois uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto.	Girolamo Cardano (1501-1576), foi responsável por um primeiro avanço importante ao considerar o problema prático: "dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40". A solução $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ não tinha solução no conjunto $\Re$. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
IEZZI et al., 1999, v.u /DM	Girolamo Cardano (1501-1576), foi responsável por um primeiro avanço importante ao trabalhar com os radicandos negativos “como se fossem números”. Anos depois, Raphael Bombelli (1526-1573) teve contato com a obra Ars Magna, de Cardano – um importante documento sobre a resolução de equações do terceiro grau, e admitiu pela primeira vez a possibilidade da existência de um número da forma a + $\sqrt{-b}$. “O reconhecimento de números dessa natureza na matemática só ganhou impulso e legitimação com uma poderosa interpretação geométrica, proposta por Gauss (1777-1855).” /584-585.	(...continuação) Cardano deu um passo adiante trabalhando com os radicandos negativos “ como se fossem números”, em que as duas partes do segmento teriam comprimento 5+ $\sqrt{-15}$ e 5 - $\sqrt{-15}$, cujo produto é 40. /584.
IEZZI, 1993, v.6 /DM	**Números complexos de Cardano a Hamilton** G. Cardano foi o primeiro matemático a operar com os números complexos em vez de rejeitá-los. Provou que radicais negativos podem fazer parte da solução de uma equação, mas não soube encontrar uma solução real já por ele conhecida. O bolonhês R. Bombelli, tirou esse impasse. Em sua Álgebra (1572), pela primeira vez, aparece uma teoria dos números complexos razoavelmente bem estruturada. Só na virada do século XVIII, no entanto, os números complexos foram reconhecidos a partir dos trabalhos de Caspar Wessel (1745-1818), K.F. Gauss (1777-1855) e Jean-Robert Argand (1786-1822). Eles que descobriram, de maneira independente uma representação geométrica para esses números. Wessel foi o primeiro a publicar seu trabalho, mas, modernamente, os números complexos são representados no plano cartesiano, conhecido como Plano de Argand-Gauss. Mais tarde, o irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) introduziu a álgebra formal dos números complexos, num artigo apresentado em 1833 à Academia Irlandesa. / 51-53.	Hamilton encarava os números complexos como pares ordenados (a, b), e operavam segundo as leis: (a, b) + (c,d) = (a+c, b+d); (a,b) (c,d) = (ac-bd, ad+bc). Para Hamilton um par (a, 0) equivale ao número real a; (-1, 0) + -1. Fazendo i = (0, -1), i2 = (0, -1) . (0, -1) = - 1. Ou seja, obteve-se, enfim, uma explicação lógica para o símbolo $\sqrt{-1}$. / 53.

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
DANTE, 1999, v.3 /DM	**Breve abordagem histórica** A equação $x^2 + 1 = 0$, não tem solução em $\Re$, pois $x = \pm \sqrt{-1}$, e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte em –1. O conjunto dos números reais deve ser estendido para se obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos. Gerônimo Cardano (1501-1576), eminente matemático do século XVI, encontrou uma raiz quadrada de número negativo para o seu problema de dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40, e chamou essas raízes de "sofísticas". Outros matemáticos, nos séculos XVI, XVII e XVIII, também chamaram essas raízes de números "sem sentido", "impossíveis", "místicos", "fictícios" e "imaginários", e operavam com esses números sem saber qual era o significado disso tudo, pois $\sqrt{-1}$ não é um número real. Trezentos anos depois, Gauss (1777-1855), em 1832, passou a usar o símbolo (a, b), um par ordenado de números reais, e definiu a adição e multiplicação desses pares de modo compatível com a adição e multiplicação dos antigos símbolos. /126	Gauss escreveu os números complexos em pares ordenados de números reais, definindo sua adição e multiplicação compatíveis com os antigos símbolos da seguinte forma: . Adição com os antigos símbolos: $(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-1}$; . Adição com os pares ordenados de números reais: $(a, b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; . Multiplicação com os antigos símbolos: $(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac-bd) + (ad+bc)\sqrt{-1}$; . Multiplicação com os pares ordenados de números reais: $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$. /126-127.
DANTE, 2001, v.u /DM	Nenhuma contribuição	-
FERNANDEZ, 1991, v.u /DM	Nenhuma contribuição	-
YOUSSEF, 2000, v.u /DM	Nenhuma contribuição	-
PAIVA, 1995, v.3 /DM	Nenhuma contribuição	-
ANTAR NETO, 1992, v.u/DM	Nenhuma contribuição	-

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
ZÖLD e CÔRREA, 1993, v.u /PM	**Breve resumo** Quando na resolução da equação do segundo grau, o Delta (b^2 – 4ac) é negativo, a equação é impossível no campo dos números reais. “Os números complexos foram criados para sanar esta insuficiência do conjunto $\Re$”. Um trecho da matemática sobre a origem dos números complexos diz que no século XVI, o matemático Cardano obteve a fórmula de resolução para equação do terceiro grau $x^3 + ax + b = 0$. Em 1572, o matemático Bombelli aplicou a fórmula de Cardano para a equação $x^3 – 15x – 4 = 0$ e viu que a solução trazia a $\sqrt{-121}$, que não existe em $\Re$. Bombelli percebeu, no entanto que x = 4 é solução da equação e a equação proposta é possível em $\Re$, apesar de, na sua resolução “sairmos” de $\Re$. “Foi nesse momento que os matemáticos sentiram a necessidade de criar o número imaginário, que posteriormente foi chamado de numero complexo”. /117.	-
ASIMOV, 1987 /PS	**Equação do terceiro grau e números imaginários** Em 1637, René Descartes, o homem que inventou os expoentes, disse que o número de soluções de qualquer equação é exatamente igual ao grau da equação. Gauss em 1799, provou isso. Se é assim, então a mais simples das equações cúbicas $x^3 = +1$ deveria ter três soluções para x. De imediato, +1 é uma solução, já que (+1) (+1) (+1) = 1. As outras soluções apresentam números com partes reais e imaginárias do tipo a + bi em que a é um número real e bi é um número imaginário, que Gauss em 1832 deu o nome de “números complexos”. /117-124.	Na equação cúbica $x^3 = +1$, são soluções: . 1 + 0i que chamamos de +1; . as outras duas soluções são: $-1/2 + 1/2\sqrt{3i}$ e $-1/2 - 1/2\sqrt{3i}$, em que qualquer delas elevada ao cubo dá +1. “É através do sistema de números complexos que é possível demonstrar que, em qualquer equação, x tem um número de soluções exatamente igual ao grau da equação”. /124.
ASIMOV, 1987 /PS	**A origem do i** Como resolver a equação $x^2 = -1$? Temos que achar um número que multiplicado por si mesmo, seja igual a –1.	O símbolo i, criado por Euler, é definido como número que multiplicado por si mesmo dá –1. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
ASIMOV, 1987 /PS	Em 1545, Cardano que introduziu os números negativos, inventou um número que multiplicado por si mesmo, dava como produto –1, e o chamou de “número imaginário”, pois parecia não existir no mundo real. Em 1777, o matemático suíço Leonhard Euler representou esse número, $\sqrt{-1}$, pelo símbolo i (de imaginário). “A verdade é que i nada tem de imaginário. Pode-se lidar com ele com tanta segurança como com 1.” “Portanto, a raiz quadrada de –1 tem, em vez de solução nenhuma, duas soluções: +i e –i”. /118-119.	(...continuação) Podemos escrever: (i) (i) = -1, ou i^2 = -1, ou i = $\sqrt{-1}$. /119
BEKKEN, 1994 /PS	**Equações cúbicas e números imaginários: a “ Ars Magna”** Cardano, na sua “Ars Magna”, diz que: Scipione del Ferro, de Bologna, resolveu a equação $x^3 + px = q$, assim como Niccoló Tartaglia, resolveu essa e outras equações. Cardano reconhece, tanto números positivos como números negativos e estabelece uma regra, conhecida como fórmula de Cardano-Tartaglia, para resolver $x^3 + px = q$. Cardano não comenta na “Ars Magna” sobre os casos irredutíveis, no entanto, menciona números complexos ao resolver o problema: “Divida 10 em duas partes de modo que o produto seja 40”. Na “Ars Magna”, diversos problemas resultam em números complexos. Rafael Bombelli (1572) e François Viète (1591), contribuíram para o estudo de equações de terceiro e quarto grau, envolvendo os números complexos. /71-80.	São apresentados trechos da “Ars Magna” com resoluções de alguns problemas. Cardano, por exemplo, ao explicar a solução do problema: “Divida 10 em duas partes de modo que o produto seja 40”, diz, entre outras coisas: “ ... Esqueça a tortura mental que significa o seguinte, e multiplique $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, dando 25 – (-15) = 40 ... Deste modo, desenvolvemos uma aritmética que é tão refinada que se torna inútil. /75–76.
BEKKEN, 1994 /PS	**Os números complexos** Cardano foi o primeiro que tentou calcular com expressões como $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, e utilizou $(a + bi) . (a - bi) = a^2 + b^2$. Leibniz, em 1676, usou como exemplo as mesmas expressões cujos resultados dão números reais. Tanto Bombelli (1572) como Stevin (1572) fizeram o mesmo. Stevin observava: “Este território ainda não é bem conhecido”.	Vale a pena ler a seguinte discussão de John Wallis (1673): “Estas quantidades imaginárias, como freqüentemente são chamadas, provêm de tomar a raiz quadrada de números negativos, algo que se diz ser impossível. Assim é também se nos limitarmos rigidamente ao que se propõe... (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
BEKKEN, 1994 /PS	Alguns conceitos importantes mencionados: . René Descartes (1637): parte real e imaginária; . Leonhard Euler (1748): i = $\sqrt{-1}$; . Caspar Wessel (1796): Ε = $\sqrt{-1}$; . Aug-Louis Cauchy (1821): conjugados a ± bi, o módulo │ a ± bi│ = $\sqrt{a^2 + b^2}$; . Carl-Fr. Gauss (1832): números complexos. /97.	(...continuação) Mas também é impossível que algum número possa ser negativo... No entanto, números negativos não são nem absurdos nem inúteis, quando os entendemos bem ... ". /97.
BEKKEN, 1994 /PS	**Caspar Wessel e os números complexos** Em 1796, o norueguês Caspar Wessel, apresentou à Academia Dinamarquesa de Ciências o tratado "sobre a denominação analítica das direções", contendo uma representação geométrica simples e completa dos números complexos. Wessel mostra que conhece bem a relação entre os números complexos. Sua obra só foi publicada em 1897, em francês, e seu trabalho permaneceu desconhecido, sendo descoberto novamente por muitos matemáticos, entre eles, Argand (1806) e Gauss (1831). /99-102.	O agrimensor Wessel, fala sobre seus motivos para publicar seu tratado na introdução: " ... trata-se da pergunta sobre como segmentos devem ser expressos de tal modo que ... a denominação fornece tanto o comprimento como a direção do segmento ..." /99
MILIES, 2003 / AR	**O surgimento dos números complexos** Cerca de 1700 anos antes de Cristo, nas tabuletas de argila da Suméria, apareceram as equações de segundo grau com radicais de números negativos. Porém, não foram elas que sugeriram o uso de números complexos. Foram as equações de terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com esses números. Na Arithmetica de Diophanto, 275 d.C., aparece um problema com a expressão $\sqrt{-167}$. Antes disso, em 75 d.C., na Estereometria de Herón, surge a necessidade de avaliar $\sqrt{81-144}$.	Diophanto considera o seguinte problema: "Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados." As soluções desse problema dão as raízes x = (43 ± $\sqrt{-167}$)/12. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
MILIES, 2003 / AR	O matemático indiano Mahavira, aproximadamente 850 d.C., afirma: "... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada."Já Bhaskara, no século XII, escreve: "... Não há raiz quadrada de um número negativo; pois ele não é um quadrado." Na matemática européia, Luca Paccioli, na sua Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita, publicada em 1494, fala sobre a solução para equações do segundo grau e Nicolas Chuquet faz observações semelhantes sobre "soluções impossíveis", num manuscrito de 1484. Cardano, no capítulo 37 do Ars Magna, considera o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40, e avança um passo a mais do que seus contemporâneos, trabalhando com as expressões com radicais negativos, as chama de raízes sofísticas e diz que "são tão sutis quanto inúteis." /5-7.	(...continuação) Luca Paccioli, na sua Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita, escreve que a equação $x^2 + c = bx$ é solúvel se $(¼)\ b^2 \geq c$. /4-7.
MILIES, 2003 / AR	**A necessidade dos números complexos** Raphael Bombelli (1526-1573), admirador da Ars Magna de Cardano, decidiu escrever um livro expondo os mesmos asssuntos e publicou l'Algebra, em três volumes, em 1572, em Veneza. Nessa obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro. Ao aplicar a fórmula de Cardano, para encontrar a solução da equação $x^3 = 15x + 4$, encontrou uma expressão que chamou de sofística. "Por outro lado ele percebe que x = 4, é, de fato uma raiz da equação proposta". Ele utilizou a expressão più di meno para denotar o +i. /7-9	Ao encontrar x = 4, como raiz da equação $x^3 = 15x + 4$, Bombelli percebeu, claramente, a importância desse achado: "Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mais eu procurei até que achei uma prova ..." /8-9
MILIES, 2003 / AR	**Evolução do números complexos** Albert Girard, em 1629, introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$. Leonhard Euler em 1777, usou o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$, que apareceu impresso pela primeira vez em 1794, tornando-se amplamente aceito após seu uso por Gauss, em 1801.	Para John Wallis em seu tratado intitulado Álgebra: " Estas quantidades imaginárias (como são freqüentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando aparecem) (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
MILIES, 2003 / AR	René Descartes, em 1637, empregou pela primeira vez os termos real e imaginário. Carl Friederich Gauss, em 1832, introduziu a expressão número complexo. John Wallis (1616-1703), contemporâneo de Newton, fez a primeira tentativa para legitimar os números complexos, por meio de uma “interpretação geométrica”,em seu tratado intitulado Álgebra, de 1673. Jean Lê Rond dÁlembert (1717- 783), publicou em 1747 Refléxions sur la cause générale dês vents, e afirmou que toda a expressão construída algebricamente a partir de um número complexo é da forma a + b $\sqrt{-1}$. Roger Cotes (1682 - 1716), professor no Trinity College de Cambridge, em 1714 obteve um importante resultado relacionado com a obtenção de raízes n-ésimas da unidade. Foi Abraham De Moivre (1667 – 1754), em seu trabalho sobre trigonometria, probabilidade e cálculo de anuidades, em 1722, que obteve uma fórmula para obtenção de raízes e-nésimas, para casos particulares, que leva seu nome. Coube a Leonhard Euler (1707 – 1754), enunciar a fórmula no caso geral, numa carta endereçada a Jean Bernoulli, em 18 de outubro de 1740, afirma que: y = 2 cos ϕ e y = eix + e –ix , eram ambas soluções da mesma equação diferencial, e deviam ser iguais. /9-13.	(...continuação) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível” “…Porém, não é esta suposição (das quantidades negativas) nem inútil nem absurda, quando corretamente compreendida ...” /10. Euller, em 1748, “... redescobriu o resultado de Cotes, demonstrou a fórmula de De Moivre e estendeu sua validade para todo expoente n real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida.” /13.
MILIES, 2003 / AR	**Representação gráfica dos números complexos** Cotes, De Moivre, Euler e Vandermonde, todos tentaram resolver a equação $x^n - 1 = 0$, pensando em suas soluções como vértice de um polígono regular de n lados. Nenhum deles achou uma interpretação geométrica para as operações com complexos. Caspar Wessel (1745 – 1818), agrimensor norueguês em seu artigo intitulado *Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa*, publicada em 1799 nas memórias da Real Academia da Dinamarca, foi o primeiro a formular uma interpretação geométrica para os números complexos.	Caspar Wessel, tal como fazemos hoje em dia, representa o complexo a + bi pelo vetor do plano com origem O – origem do sistema de eixos coordenados – e com a extremidade no ponto P, de coordenadas (a, b). (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
MILIES, 2003 / AR	Jean-Robert Argand (1769 – 1822), bibliotecário suíço, publicou um pequeno livro com representação semelhante a de Wessel. No entanto, quem, verdadeiramente, tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi Carl Friederich Gauss (1777 – 1855). /13-15.	(...continuação) "... a memória de Wessel, só foi notada quando publicada em tradução francesa em 1897, e o livro de Argand, embora causasse uma certa controvérsia, teve pouco impacto, talvez por ser a única contribuição de seu autor à matemática." /14.
FAUVEL e MAANEN, 2000 /PS-TN	**Fontes originais na sala de aula de matemática** A solução de Wessel, apresentada em 1796, é uma boa introdução para ensinar números complexos. Nesta fonte, Wessel dá a representação geométrica dos números complexos tal como ela é usada hoje. /304.	Em Wessel (1797) (segundo Nordgaard (1959)), nós encontramos:..."§9. A representação geral de uma linha de comprimento r e direção do ângulo v para a unidade positiva é: r(cos v + E sen v)". /304.
FAUVEL e MAANEN, 2000 /PS-TN	**Quantidades impossíveis em álgebra** Os números imaginários foram utilizados na álgebra, primeiro nos trabalhos de Cardano (1545) e Bombelli (1572), mais tarde em Viéte (1591), Descartes e Wallis. A passagem mais importante na Ars Magna de Cardano está no capítulo 37 "sobre a regra para operar com negativos." O problema "dividir 10 em duas partes cujo produto é 40" é a primeira aparição conhecida da raiz quadrada de números negativos. Estes imaginários estão na Ars Magna, não conectado ao tema principal de Cardano: equações quárticas e cúbicas, mais é interessante notar seu ponto de vista sobre os negativos, eles podem ser necessários para intermediar cálculos buscando um número verdadeiro, isto é, positivo. Rafael Bombelli (1572), encontrou que em casos irredutíveis, como o exemplo dado por Clairaut (1746), que quer resolver a equação cúbica $x^3 = 63x + 162$, existem sempre três raízes reais /305-307.	Ao resolver o problema "dividir 10 em duas partes cujo produto é 40", Cardano disse:" isto é verdadeiramente um sofisma que não pode ser levado para operações no caso de um negativo puro ... desenvolvemos uma aritmética que é tão refinada que se torna inútil. /305.

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
WUSSING, 1998 /PS-TN	**O caminho para os números complexos** Os matemáticos do renascimento tiveram um primeiro contato bastante intenso com os números complexos. Nos séculos XVII e XVIII por exemplo, Girard era perfeitamente consciente que só recorrendo aos números complexos se poderia anunciar com toda generalidade o teorema fundamental da álgebra. Leibniz, em 1675 publicou a relação $\sqrt{1}$ + $\sqrt{3}$ + $\sqrt{1}$ - $\sqrt{3}$ = 6 que de uma maneira chamativa relaciona os complexos com os reais e acentua as particularidades no trato com os números figurados. Euler introduziu em 1777 o símbolo i e operou com ele como se $i^2 = -1$. No entanto, o símbolo i e a denominação número complexo, só se impuseram definitivamente depois do seu uso por Gauss. /207-208**.**	Os números imaginários tiveram uma grande valorização mística e foram chamados de: prodígio da análises; o monstro do mundo ideal; um diferente e magnífico refúgio do espírito divino; quase um híbrido entre o ser e o não ser. Devido a virtuosidade de Euler em cálculo com fórmulas, o uso dos números complexos chegou a ser natural; somente ao final do século XVIII começou a classificação das dificuldades conceituais no trato com os complexos. /207-208.
WUSSING, 1998 /PS-TN	**A interpretação geométrica dos números complexos** Em 1685 Wallis fez reflexões sobre a interpretação geométrica do números complexos. O primeiro a sinalizar nessa direção, no entanto, foi o norueguês Wessel, que utilizou segmentos orientados a partir das operações aritméticas, segundo uma espécie de cálculo vetorial em duas e três dimensões. Foi preciso a autoridade de Gauss para eliminar o último sopro de misticismo dos números complexos e dotar-lhes da transparência desejada. Em 1831 baseou suas pesquisas sobre a teoria dos restos biquadrados, nos números complexos, conduzindo ao que hoje denominamos plano de Gauss. /208-209.	Gauss chama a toda quantidade a+bi, onde a e b representa os números reais e i é a abreviatura de $\sqrt{-1}$, um número inteiro complexo, se a e b são por sua vez números inteiros. As quantidades complexas não se contrapõem às reais, mas sim elas contêm os reais, como um caso especial para b = 0. /208-209.
WUSSING, 1998 /PS-TN	**A interpretação aritmética dos números complexos** Cauchy, teve a idéia de conceber os números complexos como pares de números reais. O matemático irlandês Hamilton, deu este passo explicitamente ao criar toda uma teoria dos números complexos mediante operações aritméticas estabelecidas por definições.	Hamilton define a adição e a multiplicação dos números complexos através da lei: $(a, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
WUSSING, 1998 /PS-TN	Hamilton se refere aos números complexos como pares (a_1, a_2), (b_1, b_2). /208-209.	(...continuação) (a, a_2) . (b_1, b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, , a_1b_2 + a_2b_1). /209.
CARAÇA, (1998) /DS	**Um pequeno embaraço** Pergunta-se, ao estudar a equação do segundo grau, m = $b^2 – 4ac$: e se o discriminante for negativo? Nesse caso a radiciação não é possível e por conseqüência, a expressão das raízes não tem significado. Para os algebristas antigos, gregos, indus e árabes isso queria dizer, que o problema não tinha solução, o que era um caso embaraçoso. /158-159.	Ao dizer que o problema com discriminante negativo, não tinha solução, o algebrista dormia sossegado, porque essa interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades práticas daquela época. /158-159.
CARAÇA, (1998) /DS	**Equações do terceiro grau** Foi em pleno Renascimento, no século XVI, que os algebristas italianos, obtiveram, com êxito, a resolução das equações do terceiro grau. /159-160.	-
CARAÇA, (1998) /DS	**Resistência aos números negativos e irracionais** Os algebristas do século XVI, consideravam os números com raízes negativas como mero expediente de cálculo, sem lhes conferir dignidade numérica. Já no século XVII, Descartes designou esses números de imaginários. Na sua Geometria, livro publicado em 1637, Descartes chama as raízes negativas das equações de raízes falsas, e aos números irracionais números surdos. /165-166.	É surpreendente na História da Matemática, que: “antes de os números negativos serem considerados como verdadeiros números, já eram conhecidas e praticadas quase todas as regras operatórias sobre os números complexos, coisa que parece simplesmente absurda, uma vez que os números complexos resultam de raízes quadradas de números negativos”. /166.
CARAÇA, (1998) /DS	**Representação geométrica dos complexos** No século XVIII, em 1797, Caspar Wessel, topógrafo norueguês, entregou uma Memória à Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras, publicada em 1799, em que, pela primeira vez, foi apresentada uma representação geométrica dos números complexos. Essa representação, foi feita com base no sistema cartesiano.	O trabalho de Wessel, foi esquecido durante um século. (continua...)

Referência bibliográfica ou fonte/ tipo	Informações relevantes/pagina	Informações complementares/página
CARAÇA, (1998) /DS	A novidade era que, todos os imaginários puros tiveram representação sobre o eixo Oy. /166-167.	(...continuação) "Em 1806, Jean Robert Argand criava, por si, a mesma representação, cuja glória, indevida, ficou ligada ao seu nome durante muitas dezenas de anos". /167.
CARAÇA, (1998) /DS	**Uma relação inesperada** Na representação geométrica de Wessel, todo número complexo se pode escrever sob a forma $a + bi = r (\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$. Esta relação mostra que o complexo $a + bi$ pode ser definido pelo número r, chamado módulo e pelo ângulo θ, chamado argumento. /167-168.	"Em particular, todo o número real é representado sobre o eixo Ox.... ; todo o número imaginário puro bi é representado sobre o eixo Oy". /168.
CARAÇA, (1998) /DS	**O teorema fundamental da álgebra** Os números complexos saíram da teoria das equações algébricas. Ao resolver a equação $x^3 = 3x + 1$, um algebrista do século XVII, diria à Descartes : a equação tem uma raiz verdadeira e duas falsas. Um algebrista moderno que adquiriu o conceito geral de número diz: a equação tem três raízes reais, uma positiva e duas negativas. /171.	" ... - os complexos foram criados para se conseguir obter uma raiz que se sabia que existia; eles não só permitiram determiná-la, como revelaram a existência de mais duas". /171.

Quadro 2 - Análise Resumida de Referências sobre História da Matemática – Números Complexos

TIPOS: AR (Artigo de Revista)

DM (Livro didático de nível médio)

DS (Livro didático de nível superior)

PM (Livro paradidático de nível médio)

PS (Livro paradidático de nível superior)

TN (Tradução Nossa)

ANEXO

Anexo A - Planejamento do curso de números complexos

1. Dados de identificação

Escola: **Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET/RN**

Localidade: **Natal - RN**

Professor(a) **Maria Sueli Fonseca Ferreira**

Curso: **Ensino Médio**

Disciplina: **Matemática** Tema Central: **Números Complexos**

Série:**2ª** Ano: **2005** Semestre: **2º** Turno: **Vespertino** Carga horária: **23 h/aula**

Turma: **2.00.1V;** Sala: **B 09**

2. Objetivo Geral da Disciplina

Utilizar adequadamente os códigos e conhecimentos matemáticos para análise e compreensão dos fenômenos sócio-econômicos e para o desenvolvimento da capacidade de investigação de fatos matemáticos, necessários para a distinção e aplicação de conceitos e de raciocínios dedutivos e indutivos na resolução de situações-problema possibilitando a construção de atitudes cidadãs.

3. Objetivos Específicos do Tema Central

- Conhecer a origem e as possibilidades de aplicação dos números complexos.
- Utilizar corretamente as operações com os números complexos.
- Representar graficamente os números complexos no plano de Argand-Gauss.
- Utilizar os conhecimentos adquiridos na resolução de equações algébricas e situações-problema que envolvam números complexos nas formas algébrica e trigonométrica.

4. Ementa

A origem e aplicação dos números complexos. O conjunto dos números complexos e a unidade imaginária. As operações com os números complexos. O plano de Argand-Gaus. As formas algébrica e trigonométrica dos números complexos..A Fórmula de Moivre.

5. Conteúdo Programático

- Introdução
    - ✓ Origem
    - ✓ Aplicações
- O Conjunto dos Números Complexos
    - ✓ A unidade imaginária
- A Forma Algébrica dos Números Complexos
- Igualdade de Números Complexos
- Conjugado de um Número Complexo
- Operações com Números Complexos
    - ✓ Adição e subtração
    - ✓ Multiplicação
    - ✓ Divisão
    - ✓ Potências de i
- Plano de Argand-Gauss
- Módulo e Argumento de um Número Complexo
- Forma Trigonométrica ou Polar
- Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica
    - ✓ Multiplicação
    - ✓ Divisão
    - ✓ Potenciação – Fórmula de Moivre

<table>
<tr><th colspan="5">6. Planejamento das Aulas</th></tr>
<tr><th>Objetivos</th><th>Conteúdos</th><th>Cronograma</th><th>Estratégias</th><th>Avaliação</th></tr>
<tr><td>1. Conhecer a origem e o conjunto dos números complexos, e compreender o seu conceito e suas aplicações.</td><td>❑ Introdução:
✓ Origem
✓ Aplicações
❑ O Conjunto dos Números Complexos
✓ A unidade imaginária
❑ A forma Algébrica dos Números Complexos</td><td>3 horas aula</td><td>Aulas expositivas; Resolução de exercícios.</td><td rowspan="5">❑ Processo de avaliação contínuo e diversificado;

❑ Utilização de instrumentos avaliativos como:

✓ Fichas de acompanhamento;

✓ Trabalho em grupo: teste escrito realizado em sala de aula;

✓ Trabalho individual: pesquisa e lista de exercícios resolvidos fora de sala de aula;

✓ Avaliação individual: teste escrito realizado em sala de aula.</td></tr>
<tr><td>2. Definir igualdade entre números complexos e número complexo conjugado.</td><td>❑ Igualdade de Números Complexos
❑ Conjugado de um Número Complexo</td><td>3 horas aula</td><td>Aulas expositivas; Resolução de exercícios.</td></tr>
<tr><td>3. Operar com os números complexos na sua forma algébrica.</td><td>❑ Operações com Números Complexos:
✓ Adição e Subtração
✓ Multiplicação
✓ Divisão
✓ Potencias de i</td><td>3 horas aula</td><td>Aulas expositivas; Resolução de exercícios.</td></tr>
<tr><td></td><td>Avaliação em grupo</td><td>2 horas aula</td><td>Avaliação escrita</td></tr>
<tr><td>4. Identificar um número complexo em sua forma algébrica e representa-lo no Plano de Argand-Gauss;

Definir e compreender os conceitos de módulo e argumento de um número complexo, suas propriedades e seus cálculos a partir da forma algébrica;

Apresentar a forma trigonométrica de um número complexo.</td><td>❑ Plano de Argand –Gauss;
❑ Módulo e Argumento de um Número Complexo;
❑ Forma Trigonométrica ou Polar.</td><td>4 horas aula</td><td>Aulas expositivas; Resolução de exercícios.</td></tr>
</table>

6. Planejamento das Aulas				
Objetivos	**Conteúdos**	**Cronograma**	**Estratégias**	**Avaliação**
5. Operar com os números complexos na forma trigonométrica ou polar e interpretar geometricamente os resultados dessas operações; Calcular as potências dos números complexos e aplicar a fórmula de Moivre.	❑ Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica: ❑ Multiplicação; ❑ Divisão; ❑ Potenciação – Fórmula de Moivre.	4 horas aula	Aulas expositivas; Resolução de exercícios.	
	Avaliação Individual	2 horas aula	Avaliação escrita	

7. Referências

BEZERRA, Manoel J. **Matemática para o ensino médio**. São Paulo, Scipione, v.u, 2001.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. Brasília, 1997.

DANTE, Luiz R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo, Ática, v. 3, 1999.

GIOVANNI, José R.; BONJORNO, José R.; GIOVANNI Jr, José R**.: Matemática completa: ensino médio.** São Paulo, FTD, v.u, 2002.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios e equações**. São Paulo, Atual, V.6, 1993.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática.** São Paulo, Atual, v.u, 1999.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo, Moderna, v. 3, 1995.

Quadro 3 - Planejamento do curso de números complexos