

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies
em Formas Espaciais**

por

Leonardo Antônio Souto

Orientador: Dr. Max Valério Lemes

**Dissertação de Mestrado em Matemática
Goiânia, Goiás
2008**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies
em Formas Espaciais**

por

Leonardo Antônio Souto

Área de Concentração : **Geometria e Topologia**

Orientador: **Dr. Max Valério Lemes**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2008

*Dedico este trabalho a minha esposa e minha mãe;
Valmira e Maria Virgínia*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo.

Em primeiro lugar, agradeço à minha esposa Valmira, pelo amor, paciência, incentivo e pela pessoa fantástica que é.

Agradeço de coração a minha mãe, Maria Virgínia, e a minha irmã Luciana, pelo amor, carinho, compreensão e incentivo.

Sou grato ao orientador Prof. Dr. Max Valério Lemes, pelo profissionalismo e incentivo a mim dedicado, através de sua grande experiência e conhecimento matemático.

Aos professores do Departamento de Matemática, em especial, Romildo, Maurílio, Ticiane, Mário, Armando e Rogério.

A todos meus amigos, que me acompanharam e muito ajudaram a tornar esse sonho realidade em minha vida; em especial ao Haroldo, Erivelton, Wesley e a toda à equipe da escola Elias Rocha.

Sumário

Introdução	1
1 Método do Referencial móvel	4
1.1 Formas diferenciais	4
1.2 Equações de Estrutura	9
1.3 Superfícies CMC-1 no Espaço Hiperbólico	15
2 Transformações de Ribaucour	20
2.1 Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies	20
2.2 Transformações de Ribaucour para Superfícies Linear Weingarten	32
3 Aplicações da Transformação de Ribaucour	41
3.1 Aplicações da Transformação de Ribaucour no Espaço Euclidiano	41
3.2 Aplicações da Transformação de Ribaucour na Esfera	52
3.3 Aplicações da Transformações de Ribaucour no Espaço Hiperbólico	70
Referências Bibliográficas	85

Resumo

A Teoria da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies em formas espaciais é apresentada. É mostrado um método para obter superfícies linear Weingarten em formas espaciais tridimensionais. Aplicando a teoria da transformações de Ribaucour ao cilindro, obtemos uma família à dois parâmetros de superfícies linear Weingarten. Uma nova família à um parâmetro de superfícies com curvatura média constante completas na esfera unitária, localmente associada ao toro plano é obtida. Construimos uma família de superfícies com curvatura média constante igual a 1 no espaço hiperbólico tridimensional que são localmente associadas a prima da superfície de Enneper.

Abstract

The theory of Ribaucour transformations for hypersurfaces in space forms is presented. A method to obtaining linear Weingarten surfaces in a three-dimensional space form is showed. By applying the theory to the cylinder, we obtain a two-parameter family of linear Weingarten surfaces. A new one-parameter family of complete constant mean curvature surfaces in the unit sphere, locally associated to the flat torus, is obtained. We construct new families of constant mean curvature 1 (cmc-1) surfaces which are locally associated to Enneper cousin.

Introdução

O estudo das superfícies com curvatura média constante em formas espaciais tem sido bem desenvolvido nos últimos anos, principalmente em duas direções: teoria e construção de superfícies com curvatura média constante. Os métodos usados na construção de superfícies com curvatura média constante são: o método da perturbação [K1, K2]; sistemas integráveis [Bo, PS]; superfícies prima conjugadas [Ka, La]; e um tipo de representação de Weierstrass [DH, KMS]. Recentemente, superfícies com curvatura média constante completas foram construídas aplicando outro método, baseado nas transformações de Ribaucour. Estas transformações para hipersuperfícies nas formas espaciais foram estudadas por Bianchi em 1918-1919 [Bi]. A teoria clássica mostra que as transformações de Ribaucour podem ser usadas para construir superfícies com curvatura Gaussiana constante e superfícies com curvatura média constante a partir de uma dada superfície do mesmo tipo. Entretanto, a primeira aplicação deste método para superfícies mínimas e superfícies com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 foi obtida recentemente por Corro, Ferreira e Tenenblat em [CFT1, CFT3]. Eles construíram novas famílias de superfícies mínimas completas associadas à superfície de Enneper e ao catenóide. Além disso, superfícies com curvatura média constante completas foram obtidas aplicando a teoria ao cilindro e a superfície de Delaunay.

Em [CFT1], a teoria clássica da transformação de Ribaucour foi estendida para superfícies linear Weingarten em \mathbb{R}^3 , fornecendo uma versão unificada dos resultados clássicos. Aplicando a transformação de Ribaucour ao cilindro, foi provado a existência de superfícies linear Weingarten hiperbólica completas imersas em \mathbb{R}^3 , em contraste com o teorema de Hilbert's que afirma a não existência de superfícies completas de curvatura constante negativa imersa em \mathbb{R}^3 .

A teoria clássica das transformações de Ribaucour considera hipersuperfícies parametrizadas

por linhas de curvaturas, cujas curvaturas principais tem multiplicidade um. Embora, isto não seja afirmado explicitamente. Em [CFT4], a definição de uma transformação de Ribaucour no espaço Euclidiano é revisado, extendendo o conceito para subvariedades com ambiente normal plano, cujas curvaturas principais tem multiplicidade maior que um.

A teoria das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies M^n em uma forma espacial $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, \pm 1$, foi estabelecida por Wang e Tenenblat em [WT1]. Além disso, as autoras mostraram que para qualquer hipersuperfície $M^n \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ que admite campo de vetores principais ortonormais, existe uma hipersuperfície totalmente úmbilica de \overline{M} localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour. Um método para obter superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ a partir de uma dada superfície linear Weingarten também é apresentado, bem como um método para construir superfícies com curvatura média constante completas a um parâmetro na esfera unitária S^3 , associada ao toro plano por uma transformação de Ribaucour. Em [WT2], as autoras aplicaram a teoria obtida em [WT1] para as superfícies com curvatura média constante igual a 1 no espaço hiperbólico tridimensional, em particular para a prima da superfície de Enneper.

Este trabalho foi baseado nos artigos [CFT1], [WT1] e [WT2] tendo como objetivo apresentar a teoria geral das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies em formas espaciais, bem como a teoria das transformações de Ribaucour para superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ (cf, [WT1]). Além disso, apresentar, num mesmo trabalho, aplicações das transformações de Ribaucour nas formas espaciais; aplicando a transformação de Ribaucour ao cilindro em \mathbb{R}^3 (cf, [CFT1]), ao toro plano em S^3 (cf, [WT1]) e à prima da superfície de Enneper em \mathbb{H}^3 (cf, [WT2]).

Descrevemos a seguir o conteúdo de cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 1, introduzimos a teoria local das hipersuperfícies M^n em uma forma espacial $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, \pm 1$ através de formas diferenciais e equações de estrutura, aplicando a teoria em particular, às superfícies em $\overline{M}^3(\overline{k})$. Descrevemos ainda as superfícies no espaço hiperbólico com curvatura média igual a 1 usando um tipo de representação de Weierstrass obtendo, em particular, a prima da superfície de Enneper.

Iniciamos o Capítulo 2 com a definição da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies nas formas espaciais. Esta definição tem também uma forma local. O primeiro teorema no estudo das transformações de Ribaucour é caracterizá-la em termos de equações diferenciais. Estas equações se reduzem em um sistema de equações diferenciais lineares.

Mostramos também que para hipersuperfícies M de \mathbb{S}^{n+1} ou \mathbb{H}^{n+1} , que admite um campo de vetores principais ortonormais, a existência de hipersuperfícies totalmente úmbilicas, localmente associadas a M por uma transformação de Ribaucour. Na seção seguinte estudamos as transformações de Ribaucour para superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$. Lembrando que uma superfície linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ é uma superfície cuja curvatura Gaussiana e curvatura média K e H satisfazem a relação $\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0$ onde α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, $H = -\frac{(\lambda^1 + \lambda^2)}{2}$ e $K = \lambda^1\lambda^2 + \overline{k}$, $\lambda^i, i = 1, 2$ são as curvaturas principais de M . Provamos uma condição suficiente para que a transformação de Ribaucour transforme uma superfície linear Weingarten em outra superfície linear Weingarten do mesmo tipo. Esta condição fornece um sistema integrável de equações diferenciais cujas soluções permite-nos obter superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$. a partir de outra superfície linear Weingarten. Como um caso particular, estudamos transformações de Ribaucour entre superfícies com curvatura média constante imersas em $\overline{M}^3(\overline{k})$.

No Capítulo 3, aplicamos a teoria da transformação de Ribaucour para superfícies linear Weingarten no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , na esfera unitária \mathbb{S}^3 e no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Na primeira seção consideramos o cilindro como uma superfície linear Weingarten satisfazendo $-\frac{1}{2} + H + \gamma K = 0$, obtemos uma família à dois parâmetros $\tilde{X}_{c\gamma}$ em \mathbb{R}^3 associados ao cilindro por uma transformação de Ribaucour que são superfícies linear Weingarten. Em seguida construímos uma família à um parâmetro de superfícies de curvatura média constante completas na esfera unitária \mathbb{S}^3 , associada ao toro plano. Como um caso particular, conseguimos uma família de superfícies mínimas completas localmente associado ao toro de Clifford por uma transformação de Ribaucour. Finalmente, construímos uma família de superfícies imersas em \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante igual a 1. Estas superfícies são localmente associadas, por uma transformação de Ribaucour, a prima da superfície de Enneper.

Capítulo 1

Método do Referencial móvel

1.1 Formas diferenciais

Nesta seção vamos desenvolver a teoria das superfícies utilizando o método do referencial móvel. Este método consiste essencialmente em escolher adequadamente, para cada ponto da superfície, uma base ortonormal e_1, e_2, e_3 de \mathbb{R}^3 de tal forma, que os vetores e_1, e_2 são tangentes à superfície. As demonstrações das propriedades e teorema desta seção podem ser encontrados em [dC2, dC3]. Vamos introduzir a noção de formas diferenciais em \mathbb{R}^n .

Consideremos o espaço vetorial \mathbb{R}^n e denotamos por \mathbb{R}^{n*} o espaço dual de \mathbb{R}^n , isto é, o conjunto das aplicações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . O espaço dual, munido com as operações usuais de funções é um espaço vetorial.

Definição 1.1. *Uma forma de grau 1 ou uma 1-forma em um aberto U de \mathbb{R}^n é uma aplicação ω que para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ associa $\omega_x \in \mathbb{R}^{n*}$. Isto é, ω_x é uma função linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} e portanto ω_x é da forma*

$$\omega_x = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n,$$

onde $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, é a base dual da base canônica de \mathbb{R}^n . ω é dita diferencial em U se $a_i, i = 1, \dots, n$, são funções diferenciáveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} .

Exemplo 1.2. *Com a notação anterior, temos que $dx_i, i = 1, \dots, n$, são 1-formas diferenciais em \mathbb{R}^n .*

Exemplo 1.3. *Seja f uma função diferenciável de um aberto U de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Então, a aplicação $df : U \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$, que para cada $x \in U$ associa df_x , a diferencial de f em x , é uma*

1-forma diferencial, pois temos

$$df(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(v).$$

A soma de 1-formas diferenciais ω e $\bar{\omega}$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ é definida como a soma de funções, isto é, $\omega + \bar{\omega}$ é uma 1-forma diferencial que para cada $x \in U$ associa

$$(\omega + \bar{\omega})_x = \omega_x + \bar{\omega}_x.$$

Se ω é uma 1-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, definimos o produto $f\omega$ como sendo a 1-forma diferencial tal que para cada $x \in U$ associa

$$(f\omega)_x = f(x)\omega_x.$$

A seguir vamos definir duas operações de produto para 1-formas diferenciais. Para isto, lembramos que uma aplicação $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita bilinear se for linear em cada componente, isto é, para quaisquer vetores v_1, v_2, v_3 em \mathbb{R}^n e números reais a e b

$$\begin{aligned} B(av_1 + bv_2, v_3) &= aB(v_1, v_3) + bB(v_2, v_3), \\ B(v_1, av_2 + bv_3) &= aB(v_1, v_2) + bB(v_1, v_3). \end{aligned}$$

Uma aplicação $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita alternada ou anti-simétrica se

$$B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1).$$

Definição 1.4. *Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. O produto tensorial de ω e $\bar{\omega}$, denotado por $\omega \otimes \bar{\omega}$ ou $\omega\bar{\omega}$, é uma aplicação que para cada $x \in U$, associa uma transformação bilinear $(\omega\bar{\omega})_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(\omega\bar{\omega})_x(v_1, v_2) = \omega_x(v_1)\bar{\omega}_x(v_2)$$

onde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

Na definição acima, a ordem dos fatores ω e $\bar{\omega}$ deve ser observada, já que, em geral $\omega\bar{\omega} \neq \bar{\omega}\omega$. O produto tensorial $\omega\omega$ será denotado por ω^2 . A operação produto tensorial satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 1.5. *Sejam $\omega, \bar{\omega}, \overline{\bar{\omega}}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

- (a) $(\omega + \bar{\omega})\overline{\bar{\omega}} = \omega\overline{\bar{\omega}} + \bar{\omega}\overline{\bar{\omega}},$
- (b) $\omega(\bar{\omega} + \overline{\bar{\omega}}) = \omega\bar{\omega} + \omega\overline{\bar{\omega}},$
- (c) $(f\omega)\bar{\omega} = \omega(f\bar{\omega}) = f\omega\bar{\omega},$
- d) *se $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ e $\bar{\omega} = \sum_{j=1}^n b_j dx_j$, então $\omega\bar{\omega} = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j dx_i dx_j$,*

onde $f\omega\bar{\omega}$ é a aplicação que para cada $x \in U$ associa $f(x)(\omega\bar{\omega})_x$.

A partir do produto tensorial de duas 1-formas, podemos definir uma outra operação chamada produto exterior.

Definição 1.6. *Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. O produto exterior de ω e $\bar{\omega}$, denotado por $\omega \wedge \bar{\omega}$, é uma aplicação que para cada $x \in U$ associa uma transformação bilinear e alternada $(\omega \wedge \bar{\omega})_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(\omega \wedge \bar{\omega})_x = (\omega\bar{\omega})_x - (\bar{\omega}\omega)_x.$$

Observação 1.7. *Segue-se desta definição, que para quaisquer vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ que*

$$(\omega \wedge \bar{\omega})_x(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_x(v_1) & \omega_x(v_2) \\ \bar{\omega}_x(v_1) & \bar{\omega}_x(v_2) \end{vmatrix}.$$

Portanto, $(du \wedge dv)_x(e_1, e_2) = 1$, $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$, $du \wedge dv = -dv \wedge du$.

O produto exterior satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.8. *Sejam $\omega, \bar{\omega}, \overline{\bar{\omega}}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

- (a) $\omega \wedge (\bar{\omega} + \overline{\bar{\omega}}) = \omega \wedge \bar{\omega} + \omega \wedge \overline{\bar{\omega}},$
- (b) $(\omega + \bar{\omega}) \wedge \overline{\bar{\omega}} = \omega \wedge \overline{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \overline{\bar{\omega}},$
- (c) $(f\omega) \wedge \bar{\omega} = \omega \wedge (f\bar{\omega}) = f\omega \wedge \bar{\omega},$
- d) *se $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ e $\bar{\omega} = \sum_{j=1}^n b_j dx_j$, então $\omega \wedge \bar{\omega} = \sum_{i,j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j$,*
- (e) $\omega \wedge \bar{\omega} = -\bar{\omega} \wedge \omega,$
- (f) ω e $\bar{\omega}$ são linearmente independentes, se e somente se para todo $x \in U$, $(\omega \wedge \bar{\omega})_x \neq 0$.

Definição 1.9. Uma forma diferencial de grau r ou uma r -forma diferencial em um aberto U de \mathbb{R}^n é uma aplicação ϕ que, para cada $x \in U$, associa uma transformação r -linear alternada $\phi_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\phi_x = \sum_{i_1 < \dots < i_r < n} A_{i_1 \dots i_r}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} = \sum_I A_I dx_I,$$

onde $I = i_1, \dots, i_r$. As funções A_I são funções diferenciáveis de U em \mathbb{R} .

Temos que o produto exterior de r 1-formas diferenciais é uma r -forma diferencial. Uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita 0-forma diferencial. A seguir vamos introduzir o conceito da diferencial exterior de uma r -forma obtendo uma $r + 1$ -forma diferencial.

Definição 1.10. Seja $\omega = \sum_I A_I dx_I$ uma r -forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^n$, onde $I = i_1, \dots, i_r$. A diferencial exterior de ω , denotada por $d\omega$, é a $r + 1$ -forma diferencial em U definida por

$$d\omega = \sum_I dA_I \wedge dx_I = \sum_{i,I} \frac{\partial A_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I.$$

A diferencial exterior satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.11. Sejam $\omega, \bar{\omega}$ r -formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então

- (a) $d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega}$,
- (b) $d(d\omega) = 0$,
- (c) $d(\omega \wedge \bar{\omega}) = d\omega \wedge \bar{\omega} + (-1)^r \omega \wedge d\bar{\omega}$,
- (d) $d(f\omega) = df \wedge \omega + (-1)^r f d\omega$.

Definição 1.12. Seja ω , uma r -forma diferencial em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que ω é fechada se $d\omega = 0$. Dizemos que ω é exata se existe uma $(r - 1)$ -forma diferencial θ tal que $d\theta = \omega$.

Proposição 1.13. Toda forma diferencial exata é fechada.

De fato, seja ω uma r -forma exata, logo existe uma $(r - 1)$ -forma θ tal que $d\theta = \omega$. Mas $d(d\theta) = d\omega$ que implica $d\omega = 0$ pela propriedade (c) da proposição anterior. Portanto ω é fechada.

Observação 1.14. *A recíproca geral da proposição é falsa. Basta considerar*

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \quad U = \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Temos que ω é fechada, mas não é exata em U . Entretanto, num domínio adequado vale a recíproca.

Definição 1.15. *Uma região $U \subset \mathbb{R}^n$ é dita estrelada em relação a um ponto $p \in U$ se todo segmento de $q \in U$ a p está contido em U .*

Lema 1.16. Lema de Poincaré: *Se ω é uma r -forma fechada em uma região $U \subset \mathbb{R}^n$ estrelada em relação a um ponto, então ω é exata.*

Definição 1.17. *Uma p -uplas de 1-formas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação Ω que, para cada $x \in U$, associa uma transformação linear $\Omega_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, isto é*

$$\Omega_x(v) = (\Omega_x^1(v), \dots, \Omega_x^p(v)),$$

onde $\Omega^i, i = 1, \dots, p$ são 1-formas diferenciais e $v \in \mathbb{R}^n$.

Se Ω, Λ são duas p -uplas de 1-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^n$ e f é uma função diferenciável em U , definimos a soma $\Omega + \Lambda$ e o produto $f\Omega$ como soma e produto de funções, isto é, se

$$\begin{aligned} \Omega &= (\Omega^1, \dots, \Omega^p), \\ \Lambda &= (\Lambda^1, \dots, \Lambda^p), \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \Omega + \Lambda &= (\Omega^1 + \Lambda^1, \dots, \Omega^p + \Lambda^p), \\ f\Omega &= (f\Omega^1, \dots, f\Omega^p). \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo definimos uma p -uplas de 2-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^n$ como sendo uma aplicação Φ que, para cada $x \in U$, associa uma transformação bilinear $\Phi_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ cujas funções coordenadas $(\Phi^1)_x, \dots, (\Phi^p)_x$ são 2-formas diferenciais.

Definição 1.18. Dizemos que as 1-formas $\omega_1 = 0, \dots, \omega_k = 0$ linearmente independentes é integrável se para todo $x \in \mathbb{R}^{n+k}$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in U$ e uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ diferenciável tal que $X(0) = x$, $dX_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ injetiva onde $dX_x(\mathbb{R}^n) = D_x = \{v \in \mathbb{R}^{n+k}; (\omega_1)_x(v) = \dots = (\omega_k)_x(v) = 0\}$.

Definição 1.19. Uma r -forma Λ se anula em D se $\Lambda(v_1, \dots, v_r) = 0$, para todo $(v_1, \dots, v_r) \in D$.

Definição 1.20. O conjunto das 1-formas que se anulam em D é o ideal gerado por $\omega_1, \dots, \omega_k$, denotado por J .

Definição 1.21. O ideal J é fechado se $dJ \subset J$, isto é, para toda 1-forma ω em J , $d\omega \in J$.

Temos a seguinte proposição.

Proposição 1.22. Sejam $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-formas que geram o ideal J . Então o ideal J é fechado se e somente se,

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^k \omega_j \wedge \theta_{ji}$$

onde θ_{ji} são 1-formas.

Concluimos esta seção, enunciando o Teorema de Frobenius que será de grande utilidade no desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 1.23. Teorema de Frobenius: O ideal J é integrável se e somente se o ideal J é fechado.

1.2 Equações de Estrutura

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do \mathbb{R}^n e sejam e_1, \dots, e_n n campos diferenciáveis de vetores em U de tal modo que, para todo $p \in U$, se tenha $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $i, j = 1, \dots, n$. Um tal conjunto de vetores é chamado um referencial ortonormal móvel em U . De agora em diante, omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel.

A partir do referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares $\omega_1, \dots, \omega_n$ pela

condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$; em outras palavras, em cada ponto $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual da base $\{(e_i)\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$ é chamado coreferencial associado ao referencial $\{e_i\}$.

Cada campo $\{e_i\}$ pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_{j=1}^n (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

Portanto temos $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear em \mathbb{R}^n . Como e_i é um campo diferenciável, ω_{ij} é uma forma diferencial linear. Com estes significados, escreveremos

$$de_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j, \quad (1.1)$$

como definição das formas ω_{ij} , que são chamadas formas de conexão do \mathbb{R}^n no referencial $\{e_i\}$. Pela equação (1.1) temos

$$\omega_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle.$$

Derivando a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obteremos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

isto é, as formas de conexão $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ são anti-simétricas nos índices i, j .

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas ω_i, ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan, cuja demonstração pode ser encontrada em [dC3].

Teorema 1.24. (*Equações de estrutura do \mathbb{R}^n*) - Seja $\{e_i\}$ um referencial móvel ortonormal em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$, e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então:

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \quad (1.2)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad (1.3)$$

onde, $k = 1, \dots, n$.

Agora enunciaremos o Lema de Cartan, cuja demonstração pode ser encontrada em [dC3].

Lema 1.25. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Sejam $\omega_1, \dots, \omega_r : V \rightarrow \mathbb{R}$, $r < n$, formas lineares em V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Aplicaremos agora as equações de estrutura para hipersuperfícies nas formas espaciais.

Seja $M^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$ a forma espacial simplesmente conexa de curvatura seccional \bar{k} . Seja \mathbb{L}^{n+2} o conjunto com $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ dotado com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i.$$

Considere o espaço hiperbólico como a subvariedade:

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}.$$

Considere uma hipersuperfície orientável M em $\overline{M}^{n+1}(\bar{k})$, onde $\overline{M}^{n+1}(\bar{k}) = \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ quando $\bar{k} = 1$, $\overline{M}^{n+1}(\bar{k}) = \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ quando $\bar{k} = -1$ e $\overline{M}^{n+1}(\bar{k}) = \mathbb{R}^{n+1}$ quando $\bar{k} = 0$

Seja $e_i, i = 1, \dots, n$ um referencial ortonormal tangente a M e N um campo de vetores normais unitários definido sobre M . Denote por ω_i a 1-forma dual a e_i e $\omega_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, as formas de conexão definidas por

$$d\omega_i = \sum_{j \neq i}^n \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \text{onde } \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (1.4)$$

As equações de Gauss são dadas por:

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} - \bar{k} \omega_i \wedge \omega_j, \quad (1.5)$$

onde $\omega_{in+1} = -\omega_{n+1i} = \langle de_i, N \rangle$.

As equações de Codazzi são:

$$d\omega_{in+1} = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} \quad (1.6)$$

Se o campo de vetores e_i , definido acima são direções principais correspondendo as curvaturas principais $-\lambda^i$, $1 \leq i \leq n$, então

$$\omega_{in+1} = -\lambda^i \omega_i, \quad dN(e_i) = \lambda^i e_i. \quad (1.7)$$

Vamos considerar uma hipersuperfície M em \mathbb{R}^{n+1} , \mathbb{H}^{n+1} ou \mathbb{S}^{n+1} parametrizada por linhas de curvaturas ortogonais, $X(u_1, \dots, u_n)$ onde X denota o vetor posição em \mathbb{R}^{n+1} , \mathbb{R}^{n+2} e \mathbb{R}^{n+2} . A primeira forma fundamental de M é determinada por $I = \sum_i^n \omega_i^2$ onde $\omega_i = a_i du_i$ e $a_i = |X_{u_i}|$ são funções diferenciáveis. As direções principais são $e_i = \frac{X_{,i}}{a_i}$, onde $X_{,i}$ denota a derivada parcial com respeito a u_i . Segue de (1.4) que

$$\omega_{ij} = \frac{1}{a_i a_j} \left(-\frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j \right) \quad (1.8)$$

onde $1 \leq i, j \leq n$.

De fato, temos que $\omega_i = a_i du_i$ e logo

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial u_j} du_j \wedge du_i \\ &= -\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} a_i du_i \wedge a_j du_j \\ &= -\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Segue de (1.4) que

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{1}{a_i a_j} \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j = \frac{1}{a_i a_j} \left(-\frac{\partial a_i}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \omega_j \right).$$

Em particular, vamos aplicar a teoria vista anteriormente às superfícies em $M^3(\bar{k})$. Portanto, seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e considere $X : U \subset S \rightarrow M^3(\bar{k})$ uma imersão, isto é X é

diferenciável e $dX_p : T_p S \rightarrow T_p S$ injetiva. Seja V uma vizinhança de $X(p)$ em $M^3(\bar{k})$ tal que $X(U) \subset V$. Então V tem um referencial ortonormal móvel adaptado e_1, e_2, e_3 , onde e_1 e e_2 sejam tangentes a $X(U)$ e e_3 seja normal a $X(U)$.

Em V estão definidas as formas ω_i do coreferencial de $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3$ e as formas de conexão $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{32} = -\omega_{23}$, $\omega_{13} = -\omega_{31}$. Tais formas satisfazem as equações de estrutura dadas por (1.4) e (1.5).

A imersão $X : U \subset S \rightarrow V \subset M^3(\bar{k})$ induz em U formas $X^*(\omega_i)$ e $X^*(\omega_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$. Como X^* comuta com a diferencial exterior e o produto exterior, tais formas satisfazem as equações (1.4) e (1.5). Observe que $X^*(\omega_3) = 0$, pois para todo $q \in U$ e todo $v \in T_q S$, teremos $dX(v) = a_1 e_1 + a_2 e_2$ e portanto $X^*(\omega_3) = \omega_3 dX(v) = \omega_3(a_1 e_1 + a_2 e_2) = 0$.

Vamos identificar U com $X(U)$, assim também convencionaremos $X^*(\omega_i) = \omega_i$ e $X^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}$. Como $\omega_3 = 0$ quando restrito a $X(U)$, temos que $d\omega_3 = 0$ que implica que $\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$. Pelo Lema de Cartan, temos

$$\begin{cases} \omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 \\ \omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 \end{cases}$$

onde $h_{12} = h_{21}$. A matriz (h_{ij}) dada por

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & -h_{22} \end{pmatrix}$$

é a matriz da diferencial da aplicação $e_3 : U \rightarrow M^3(\bar{k})$ na base $\{e_1, e_2\}$. Como $|e_3| = 1$, esta última aplicação toma valores na esfera unitária. Fixemos uma orientação em U e escolhemos o referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$ de tal modo que, para todo $q \in U$, $(e_1)_q, (e_2)_q$ formam uma base de $T_q S$ na orientação escolhida e $(e_1)_q, (e_2)_q, (e_3)_q$ sejam uma base positiva de $M^3(\bar{k})$. Neste caso, a aplicação $e_3 : U \rightarrow S^2 \subset M^3(\bar{k})$ está completamente definida e é chamada a aplicação normal de Gauss em U .

Como (h_{ij}) é simétrica concluímos que de_3 é uma aplicação auto-adjunta. Logo, tal aplicação pode ser diagonalizada, com valores próprios $-\lambda^1, -\lambda^2$ reais, e vetores próprios ortogonais. É usual definir a curvatura Gaussiana K de S em p por

$$K - \bar{k} = \det(de_3)_p = \lambda^1 \lambda^2 = h_{11} h_{22} - h_{12}^2.$$

A curvatura média H é dada por $H = -\frac{1}{2} \text{tr}(de_3)_p = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}$.

Proposição 1.26. *Sejam e_1, e_2, e_3 um triedro móvel associado a uma superfície S . Então as formas diferenciais ω_1, ω_2 e ω_{ij} satisfazem as seguintes equações*

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (1.9)$$

$$2H\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2. \quad (1.10)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} - \bar{k}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) - \bar{k}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= [-(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) - \bar{k}]\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2 &= \omega_1 \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) + (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge \omega_2 \\ &= h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{11}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (h_{11} + h_{22})\omega_1 \wedge \omega_2 = 2H\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\omega_i \wedge \omega_i = 0$. □

A equação (1.9) é denominada equação de Gauss. A primeira forma fundamental em $T_p S$ é dada por

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = (\omega_1^2 + \omega_2^2)_p(v). \quad (1.11)$$

De fato, seja $v = ae_1 + be_2$, logo $\langle v, v \rangle = a^2 + b^2$. Portanto

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \omega_2^2)(v) &= \omega_1(v)\omega_1(v) + \omega_2(v)\omega_2(v) \\ &= \omega_1(ae_1 + be_2)\omega_1(ae_1 + be_2) + \omega_2(ae_1 + be_2)\omega_2(ae_1 + be_2) \\ &= a^2 + b^2 = \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, como e_3 é normal à superfície segue que a segunda forma fundamental é dada por

$$II_p(v) = - \langle de_3(v), (v) \rangle = (\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23})(v). \quad (1.12)$$

1.3 Superfícies CMC-1 no Espaço Hiperbólico

O assunto desta seção é dar uma representação de Weierstrass para superfícies de curvatura média igual a 1 no espaço hiperbólico. Alguns resultados nesta seção serão apresentados sem demonstração as quais podem ser encontrados em [GG]. Tal representação depende da aplicação de Gauss hiperbólica e daremos um exemplo construindo a superfície prima da superfície de Enneper.

Considere o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^4 = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4\}$ com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

O modelo de Minkowsky para o espaço Hiperbólico é a subvariedade

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}.$$

Em \mathbb{H}^3 consideramos a orientação induzida a partir de \mathbb{L}^4 para que os vetores ν_1, ν_2, ν_3 em $T_p\mathbb{H}^3$ formem uma base orientada se $\{p, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ é uma base orientada positiva de \mathbb{L}^4 .

Seja $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície Riemanniana orientável M no espaço hiperbólico e $N(p)$ o vetor normal unitário em $p \in M$. Nas coordenadas isotérmicas locais $z = u + iv$, temos $\|X_u\| = \|X_v\| = \lambda$, $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ e N é tal que $\{X(p), \frac{1}{\lambda}X_u, \frac{1}{\lambda}X_v, N(p)\}$ é uma base positiva ortogonal de $T_p\mathbb{L}^4$.

Considere a aplicação $\Phi : \mathbb{H}^3 \rightarrow D$ dada por

$$\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right)$$

e o vetor $d\Phi(N(p))$ onde $D = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_0 = 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$.

Definição 1.27. A aplicação de Gauss hiperbólica de uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ é $n : M \rightarrow \partial D$ dada por $n(p) = \Phi(X(p)) + td\Phi(N(p))$ onde $t > 0$ e $n(p) \in \partial D$.

Segue imediatamente que:

Lema 1.28. A aplicação de Gauss hiperbólica n de uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$n = \frac{1}{x_0 + N_0}(X + N).$$

Demonstração. Para $X(p) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $N = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ temos que

$$d\Phi(N(p)) = -\frac{N_0}{x_0^2}X + \frac{1}{x_0}N.$$

Como $n(p) = \Phi(X(p)) + td\Phi(N(p))$ está no cone $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ temos

$$\langle n(p), n(p) \rangle = -\frac{(x_0 - tN_0)^2}{x_0^4} + \frac{t^2}{x_0^2} = 0.$$

A solução t com $t > 0$ é $t = \frac{x_0}{x_0 + N_0}$. Portanto

$$\begin{aligned} n(p) &= \Phi(X(p)) + td\Phi(N(p)) \\ &= \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) + \frac{x_0}{x_0 + N_0} \left(-\frac{N_0}{x_0^2}X + \frac{1}{x_0}N\right) \\ &= \frac{1}{x_0}X \left(1 - \frac{N_0}{x_0 + N_0}\right) + \frac{1}{x_0 + N_0}N \\ &= \frac{1}{x_0 + N_0}(X + N). \end{aligned}$$

□

Observação 1.29. *Visto que o vetor $X+N$ também está no cone, então existe $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\psi(p) = -\frac{1}{\langle n, X \rangle} = x_0 + N_0 = -\langle X + N, e_0 \rangle, \quad e_0 = (1, 0, 0, 0)$$

tal que $\psi(p)n(p) = X(p) + N(p)$, $\forall p \in U$ e

$$N = -\frac{1}{\langle n, X \rangle}n - X.$$

Trabalhando com a aplicação de Gauss hiperbólica, para superfícies com curvatura média constante igual a 1, temos um teorema de representação local similar à representação de Weierstrass para superfícies mínimas no espaço euclidiano.

Teorema 1.30. *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão não-umbílica em \mathbb{H}^3 com curvatura média 1 e*

$$n(z) = \left(1, \frac{2\operatorname{Re}h}{1 + |h|^2}, \frac{2\operatorname{Im}h}{1 + |h|^2}, \frac{1 - |h|^2}{1 + |h|^2}\right) \quad (1.13)$$

a sua aplicação de Gauss hiperbólica. Denotando $X(z) = (x_0(z), x_1(z), x_2(z), x_3(z))$, as funções reais $\phi_1(z) = x_0(z) + x_3(z)$ e $\phi_2(z) = x_0(z) - x_3(z)$ e as funções complexas $\phi_3(z) = x_1(z) + ix_2(z)$ satisfazem

$$\begin{cases} \phi_1\phi_2 = 1 + |\phi_3|^2 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = h \frac{\partial\bar{\phi}_3}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial\phi_3}{\partial z} \end{cases} \quad (1.14)$$

Reciprocamente, dada uma função holomorfa não-constante $h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, duas funções reais ϕ_1 e ϕ_2 ($\phi_2 > 0$) e uma função complexa ϕ_3 satisfazendo (1.14) no domínio simplesmente conexo U , então

$$X(z) = \left(\frac{\phi_1(z) + \phi_2(z)}{2}, \operatorname{Re}\phi_3(z), \operatorname{Im}\phi_3(z), \frac{\phi_1(z) - \phi_2(z)}{2} \right) \quad (1.15)$$

define uma imersão conforme em \mathbb{H}^3 com curvatura média constante igual a 1 e a sua aplicação de Gauss hiperbólica n é dada por h como acima.

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [GG].

Observação 1.31. A condição de compatibilidade para as duas equações diferenciais parciais em (1.14) é a mesma e escreve

$$\operatorname{Im}\{\bar{h}\Delta\phi_3\} = 0. \quad (1.16)$$

Portanto cada equação do sistema (1.14) tem as condições de integrabilidade dada por (1.16).

Exemplo 1.32. O sistema (1.14) também admite soluções como $\phi_3(z) = F(z)\bar{G}(z)$ com F e G funções holomorfas. Neste caso se

$$F'(z) = h(z)G'(z) \quad (1.17)$$

a condição de integrabilidade (1.17) é verificada.

As duas últimas equações em (1.14) pode ser integrada e as soluções são

$$\phi_1(z) = |F(z)|^2 \quad e \quad \phi_2(z) = |G(z)|^2.$$

Modificaremos estas soluções para ter a primeira equação satisfeita; neste caso, tomaremos F_1, F_2, G_1 e G_2 como em (1.17), A e B constantes reais tais que

$$\begin{cases} \phi_1 &= A|F_1|^2 + B|F_2|^2 \\ \phi_2 &= A|G_1|^2 + B|G_2|^2 \\ \phi_3 &= AF_1\bar{G}_1 + BF_2\bar{G}_2 \end{cases}$$

com

$$AB(\bar{F}_1\bar{G}_2 - \bar{F}_2\bar{G}_1)(F_1G_2 - F_2G_1) = 1. \quad (1.18)$$

Escolhendo

$$h(z) = \tanh \lambda z, \quad G_1'(z) = \cosh \lambda z, \quad G_2'(z) = z \cosh \lambda z,$$

obtemos as superfícies chamadas a prima da superfície de Enneper. Consequentemente por (1.17) e (1.18),

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda z, \\ F_2(z) &= \frac{1}{\lambda} \left(z \cosh \lambda z - \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z \right), \\ G_1(z) &= \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z, \\ G_2(z) &= \frac{1}{\lambda} \left(z \sinh \lambda z - \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda z \right) \end{aligned}$$

e $AB = |\lambda|^6, \lambda \in \mathbb{C}$. A primeira forma fundamental da prima da superfície de Enneper é

$$ds^2 = \left[\frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda} |z|^2 \right]^2 |dz|^2.$$

Tomando os valores $\lambda = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{8\sqrt{2}}$ iremos obter a superfície prima da superfície de Enneper que será trabalhada no Capítulo 3, que é

$$\begin{aligned} X(x, y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{|z|^2 + 6}{4} \cosh(x) - x \sinh(x), \frac{|z|^2 + 6}{4} \sinh(x) \right) \\ &\quad \left(-x \cosh(x), \frac{2 - |z|^2}{4} \sin(y) - y \cos(y), \frac{|z|^2 - 2}{4} \cos(y) - y \sin(y) \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde $z = x + iy$. Calculando a aplicação de Gauss hiperbólica de X dada por (1.13) onde $h(z) = \tanh \frac{1}{2}z$, obtemos

$$n(z) = \frac{1}{\cosh x} (\cosh x, \sinh x, \sin y, -\cos y).$$

Um cálculo fácil mostra que

$$\langle n, X \rangle = -\frac{\sqrt{2}|z|^2 + 2}{4 \cosh x}.$$

Portanto, pela Observação 1.29 temos que o vetor normal N de X é

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{\langle n, X \rangle} n - X \\ &= \frac{4 \cosh x}{\sqrt{2}|z|^2 + 2} \cdot \frac{1}{\cosh x} (\cosh x, \sinh x, \sin y, -\cos y) - X \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{|z|^2 + 2} (\cosh x, \sinh x, \sin y, -\cos y) - X. \end{aligned} \tag{1.20}$$

A primeira forma fundamental de X dada por (1.19) é

$$ds^2 = \frac{|z|^2 + 2}{32} (dx^2 + dy^2).$$

Capítulo 2

Transformações de Ribaucour

Neste capítulo apresentamos a teoria geral das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies em formas espaciais e o estudo das transformações de Ribaucour para construção de superfícies linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [WT1].

2.1 Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies

Esta seção contém a definição e a teoria básica da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies na forma espacial.

Motivado pelas definições clássica e moderna da transformação de Ribaucour para hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} , introduzimos uma definição similar para hipersuperfícies sobre uma forma espacial.

Definição 2.1. (i) *Uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ é uma família a n -parâmetros de esferas geodésicas em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ tal que o conjunto dos centros das esferas é uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ e o raio das esferas são dados por uma função diferenciável sobre a hipersuperfície.*

(ii) *Uma envoltória da congruência de esferas geodésicas é uma subvariedade n -dimensional M de $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, tal que cada ponto de M é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.*

(iii) Sejam M e \widetilde{M} hipersuperfícies em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$. Dizemos que M e \widetilde{M} são associadas por uma congruência de esferas geodésicas se existe um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow \widetilde{M}$ tal que, para os pontos correspondentes p e $\psi(p)$, M e \widetilde{M} são tangentes a uma mesma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

Um caso especial importante do item (iii) é quando $d\psi$ aplica n campos de vetores principais de M a n campos de vetores principais de \widetilde{M} .

Definição 2.2. Seja M uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$. Suponha que existe n campos de vetores principais ortonormais e_1, \dots, e_n definidos sobre M . Uma hipersuperfície orientável $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ está associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, \dots, e_n , se existe uma função diferenciável $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow \widetilde{M}$ e um campo de vetores normais unitários N e \widetilde{N} de M e \widetilde{M} respectivamente, tais que:

- (i) $\exp_p h(p)N(p) = \exp_{\psi(p)} h(p)\widetilde{N}(\psi(p))$, $\forall p \in M$, onde \exp é a exponencial da aplicação de \overline{M} ;
- (ii) O subconjunto $S = \{\exp_p h(p)N(p) | p \in M\}$ é uma subvariedade de dimensão n de \overline{M} ;
- (iii) $d\psi(e_i), i = 1, \dots, n$, são direções principais ortogonais de \widetilde{M} .

Observação 2.3. Sejam M e \widetilde{M} hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ como na Definição 2.2. Considerando \overline{M} como $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, ou $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ podemos reescrever a condição (i) acima como

$$p + h(p)N(p) = \psi(p) + h(p)\widetilde{N}(\psi(p)) \quad p \in M,$$

onde

$$h(p) = \begin{cases} \tan(\phi(p)), & \phi : M \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}), \quad \text{se } \overline{k} = 1, \\ \tanh(\phi(p)), & \phi : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{se } \overline{k} = -1. \end{cases}$$

Podemos formular uma definição local.

Definição 2.4. Seja M uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, 1-1$. Suponha que existe n campos de vetores principais ortonormais e_1, \dots, e_n definidos sobre M . Dizemos que uma hipersuperfície $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\overline{k})$ está localmente associada a M por uma

transformação de Ribaucour com respeito a e_1, \dots, e_n se, para qualquer $\tilde{q} \in \tilde{M}$, existe uma vizinhança \tilde{V} de \tilde{q} em \tilde{M} e um subconjunto aberto $V \subset M$ tal que \tilde{V} é associado a V por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, \dots, e_n .

O seguinte teorema é uma caracterização da transformação de Ribaucour em termos de equações diferenciais, quando o espaço ambiente é a forma espacial $\overline{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, 1, -1$.

Teorema 2.5. *Seja M uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, 1, -1$. Suponha que existem n campos de vetores principais ortonormais e_1, \dots, e_n definidos sobre M . Uma hipersuperfície $\tilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\bar{k})$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, \dots, e_n se, e somente, para todo $p \in \tilde{M}$, existe parametrização $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\bar{k})$ de uma vizinhança de p e uma função diferenciável não-nula h*

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ quando } \bar{k} = 0, 1,$$

$$h : U \rightarrow (-1, 1) \text{ quando } \bar{k} = -1,$$

tal que

$$\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N}),$$

onde X é uma parametrização de um subconjunto aberto de M , N é um campo de vetores normais unitários de M e o campo de vetores normais unitários \tilde{N} de \tilde{M} é dado por

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Delta + \bar{k}h^2 + 1} \left(\sum_{i=1}^n 2Z^i e_i + (\Delta + \bar{k}h^2 - 1)N + 2\bar{k}hX \right), \quad (2.1)$$

com

$$Z^i = \frac{dh(e_i)}{1 + h\lambda^i}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n (Z^i)^2. \quad (2.2)$$

e h satisfaz as equações diferenciais

$$dZ^j(e_i) + \sum_{i=1}^n Z^i \omega_{ij}(e_i) - Z^i Z^j \lambda^i = 0 \quad (2.3)$$

onde $1 \leq i \neq j \leq n$.

O argumento da demonstração será omitida e pode ser encontrada em [WT1]

Observe que h satisfaz um sistema de equações não lineares de segunda ordem. O próximo resultado lineariza o problema da obtenção de h .

Proposição 2.6. *Se h é uma solução de (2.3) que não se anula num domínio simplesmente conexo, então $h = \frac{\Omega}{W}$, onde W é uma função não-nula e as funções Ω, Ω_i e W satisfazem*

$$d\Omega_i(e_j) = \sum_{k=1}^n \Omega_k \omega_{ik}(e_j), \quad i \neq j, \quad (2.4)$$

$$d\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i \quad (2.5)$$

$$dW = -\sum_{i=1}^n \Omega_i \lambda^i \omega_i. \quad (2.6)$$

Reciprocamente, suponha (2.4), (2.5) e (2.6) são satisfeitas então $h = \frac{\Omega}{W}$ é uma solução de (2.3).

Demonstração. Seja h uma solução não-nula de (2.3), então $\psi = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n Z^k \omega_k$ é uma 1-forma fechada. Logo sobre um domínio simplesmente conexo existe uma função diferenciável Ω tal que $d(\log \Omega) = \psi$. Definimos

$$\Omega_i = d\Omega(e_i), \quad W = \frac{\Omega}{h}.$$

Temos que (2.5) vale e

$$\begin{aligned} dh(e_i) &= \frac{d\Omega(e_i)W - dW(e_i)\Omega}{W^2} \\ &= \frac{\Omega_i}{W} - \frac{\Omega}{W} \left(\frac{dW(e_i)}{W} \right) \\ &= \frac{\Omega_i}{W} \left(1 - \frac{\Omega}{W} \left(\frac{dW(e_i)}{\Omega_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Seja $d(\log \Omega) = \psi$, logo temos

$$\frac{d\Omega(e_i)}{\Omega} = \frac{\Omega_i}{\Omega} = \sum_{k=1}^n \frac{Z^k \omega_k(e_i)}{h} = \frac{Z^i}{h}.$$

Obtendo $Z^i = \frac{\Omega_i}{W}$. Por (2.2)

$$Z^i = \frac{dh(e_i)}{1 + h\lambda^i} = \frac{\Omega_i}{W}. \quad (2.7)$$

Logo obtemos que $dh(e_i) = \frac{\Omega_i}{W}(1 + h\lambda^i)$. Igualando as duas expressões de $dh(e_i)$ encontradas acima, obtemos

$$\frac{\Omega_i}{W}(1 + h\lambda^i) = \frac{\Omega_i}{W} \left(1 - \frac{\Omega}{W} \left(\frac{dW(e_i)}{\Omega_i} \right) \right)$$

Portanto, como $\Omega_i \neq 0$ temos

$$dW(e_i) = -\lambda^i \Omega_i.$$

Donde segue (2.6). De (2.7) temos

$$\begin{aligned} dZ^i(e_j) &= \frac{d\Omega_i(e_j)}{W} - \frac{\Omega_i}{W} \frac{dW(e_j)}{W} \\ &= \frac{d\Omega_i(e_j)}{W} + \frac{\Omega_i}{W} \lambda^j \frac{\Omega_j}{W} \\ &= \frac{d\Omega_i(e_j)}{W} + \lambda^j Z^i Z^j. \end{aligned}$$

Concluindo que

$$dZ^i(e_j) - \lambda^j Z^i Z^j = \frac{d\Omega_i(e_j)}{W}.$$

De (2.3) temos

$$\sum_{k=1}^n Z^k \omega_{ik}(e_j) = \frac{1}{W} d\Omega_i(e_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\Omega_k}{W} \omega_{ik}(e_j).$$

Portanto concluímos que

$$d\Omega_i(e_j) = \sum_{k=1}^n \Omega_k \omega_{ik}(e_j).$$

Mostrando que a equação (2.4) é satisfeita.

Agora suponha que as equações (2.4), (2.5) e (2.6) são satisfeitas, de (2.7) concluímos que a equação (2.3) é satisfeita. Definimos $h = \frac{\Omega}{W}$, então segue que $dh(e_i) = Z^i(1 + h\lambda^i)$. \square

A partir de agora, consideraremos que uma hipersuperfície \widetilde{M} em $\overline{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, 1, -1$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito ao conjunto de direções principais e_1, \dots, e_n , sobre M , se existem funções Ω, Ω_i e W ,

localmente definidas satisfazendo o sistema (2.4), (2.5) e (2.6). Quando todas as curvaturas principais de M são distintas, apenas dizemos que \widetilde{M} está associado a M por uma transformação de Ribaucour.

O Teorema 2.5 pode ser reescrito da seguinte forma.

Teorema 2.7. *Seja $M \subset \overline{M}^{n+1}(\bar{k})$ uma hipersuperfície parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Suponha que $e_i, 1 \leq i \leq n$ são campos de vetores ortonormais de direções principais e N é um campo vetores normais unitários de M , $dN(e_i) = \lambda^i e_i, 1 \leq i \leq n$. Uma hipersuperfície $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\bar{k})$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, \dots, e_n se, e somente, para qualquer $p \in \widetilde{M}$, existe um subconjunto aberto $V \subset U$, funções não-nulas $W, \Omega, \Omega_i : V \subset U \rightarrow \mathbb{R}$, que são soluções do sistema (2.4), (2.5) e (2.6) satisfazendo $WS(W + \lambda^i \Omega)(S - \Omega T^i) \neq 0$, e $\widetilde{X} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \widetilde{M}$ uma parametrização de \widetilde{M} , dada por*

$$\widetilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^n \Omega_i e_i - WN\right), \quad (2.8)$$

onde

$$S = \sum_{k=1}^n (\Omega_k)^2 + \bar{k}\Omega^2 + W^2. \quad (2.9)$$

Demonstração. Vimos no Teorema 2.5 que o campo de vetores normais \widetilde{N} é dado por:

$$\begin{aligned} \widetilde{N} &= \frac{1}{\Delta + \bar{k}h^2 + 1} \left[\sum_{i=1}^n 2Z^i e_i + (\Delta + \bar{k}h^2 - 1)N + 2\bar{k}hX \right] \\ &= \frac{1}{\frac{1}{W^2}S} \left[\sum_{k=1}^n 2\frac{\Omega_k}{W} e_k + \left(\frac{\sum_{k=1}^n \Omega_k^2 + \bar{k}\Omega^2 - W^2}{W^2} \right) N + 2\bar{k}\frac{\Omega}{W} X \right] \\ &= \frac{W}{S} \left[2 \sum_{k=1}^n \Omega_k e_k + \left(\frac{S}{W} - 2W \right) N + 2\bar{k}\Omega X \right] \\ &= N + 2\frac{W}{S} \left(\sum_{i=1}^n \Omega_i e_i + \bar{k}\Omega X - WN \right). \end{aligned}$$

Na prova acima usamos as equações (2.2) e (2.7). Como $\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N})$ temos

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X - 2\frac{\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^n \Omega_i e_i + \bar{k}\Omega X - WN \right) \\ &= \left(1 - \frac{2\bar{k}\Omega^2}{S} \right) X - 2\frac{\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^n \Omega_i e_i - WN \right).\end{aligned}$$

A condição $WS(W + \lambda^i \Omega) \neq 0$, para todo i segue do fato de $h = \frac{\Omega}{W}$ e $1 + h\lambda^i$ serem não nulos. \square

Se M é parametrizada por linhas de curvaturas ortogonais, assumimos que e_i são campos de vetores unitários tangentes a curvas coordenadas, isto é, $e_i = \frac{X_{,i}}{a_i}$ onde $a_i = |X_{u_i}|$. Neste caso, usando (1.8), verificamos que o sistema (2.4), (2.5) e (2.6) é dado por

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = \Omega_j \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_j}{\partial u_i}, \quad j \neq i, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = a_i \Omega_i, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = -a_i \lambda^i \Omega_i. \quad (2.12)$$

De fato, de (1.8) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} &= d\Omega_i(a_j e_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \Omega_k \omega_{ik}(a_j e_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \Omega_k \frac{1}{a_i a_k} \left(-\frac{\partial a_i}{\partial u_k} \omega_i(a_j e_j) + \frac{\partial a_k}{\partial u_i} \omega_k(a_j e_j) \right) \\ &= \Omega_j \frac{1}{a_i a_j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial u_i} a_j \omega_j(e_j) \right) \\ &= \Omega_i \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_j}{\partial u_i}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = d\Omega(a_j e_j) = \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i(a_j e_j) = \sum_{i=1}^n \Omega_i a_j \omega_i(e_j) = a_i \Omega_i.$$

Para terminar, calculamos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u_i} &= dW(a_j e_j) \\ &= - \sum_{i=1}^n \Omega_i \lambda^i \omega_i(a_j e_j) \\ &= -a_i \lambda^i \Omega_i. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que o sistema de equações (2.4), (2.5) e (2.6) é integrável.

Proposição 2.8. *A equação (2.4) é a condição de integrabilidade do sistema (2.5) e (2.6) para Ω e W .*

Demonstração. Considere o ideal I gerado pelas 1-formas que se anulam

$$\begin{aligned} \alpha &= d\Omega - \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i, \\ \beta &= dW + \sum_{i=1}^n \Omega_i \lambda^i \omega_i = dW - \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_{in+1}. \end{aligned}$$

Usando a equação $d\omega_i = \sum_{j \neq i}^n \omega_{ij} \wedge \omega_j$, temos que:

$$d\alpha = - \sum_{i=1}^n d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^n \Omega_i d\omega_i = - \sum_{i=1}^n d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^n \Omega_i \sum_{j \neq i}^n \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$

Considere agora a 1-forma $\gamma_i = d\Omega_i - \sum_{j=1}^n \Omega_j \omega_{ij}$. Temos então que,

$$\begin{aligned} d\alpha &= - \sum_{i=1}^n \left(\gamma_i + \sum_{j=1}^n \Omega_j \omega_{ij} \right) \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \Omega_i \omega_{ij} \wedge \omega_j \\ &= - \sum_{i=1}^n \gamma_i \wedge \omega_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i + \sum_i \sum_{j \neq i}^n \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \gamma_i \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

Analogamente, calculando $d\beta$ usando a equação de Codazzi (1.6) obtemos:

$$\begin{aligned}
d\beta &= -\sum_{i=1}^n d\Omega_i \wedge \omega_{in+1} - \sum_{i=1}^n \Omega_i d\omega_{in+1} \\
&= -\sum_{i=1}^n d\Omega_i \wedge \omega_{in+1} - \sum_{i=1}^n \Omega_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} \\
&= -\sum_{i=1}^n (\gamma_i + \sum_{j=1}^n \Omega_j \omega_{ij}) \wedge \omega_{in+1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Omega_i \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} \\
&= -\sum_{i=1}^n \gamma_i \wedge \omega_{in+1}.
\end{aligned}$$

Mostramos que o ideal I é fechado sobre a diferencial exterior. Portanto pelo Teorema de Frobenius o sistema (2.5) e (2.6) é integrável. \square

Teorema 2.9. *Seja M uma hipersuperfície orientada em $\overline{M}^{n+1}(\bar{k})$, e_i campos de vetores ortonormais nas direções principais definida sobre M e N um campo de vetores normais unitários de M , $dN(e_i) = \lambda^i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Suponha que uma hipersuperfície $\widetilde{M} \subset \overline{M}^{n+1}(\bar{k})$ é localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, \dots, e_n . Então as curvaturas principais de \widetilde{M} para cada $1 \leq i \leq n$ são dadas por*

$$\widetilde{\lambda}^i = \frac{WT^i + \lambda^i S}{S - \Omega T^i}. \quad (2.13)$$

onde Ω_i , Ω e W satisfaz (2.4)-(2.6) e

$$T^i = 2 \left(d\Omega_i(e_i) + \sum_{k=1}^n \Omega_k \omega_{ki}(e_i) - W\lambda^i + \bar{k}\Omega \right). \quad (2.14)$$

onde S é dado por (2.9).

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [WT1]. Nesta mesma demonstração encontramos outra maneira de calcular as curvaturas $\widetilde{\lambda}^i$, que será bastante útil, a saber

$$\widetilde{\lambda}^i = \frac{dS(e_i)W + \Omega_i \lambda^i S}{\Omega_i S - \Omega dS(e_i)} \quad (2.15)$$

se $\Omega_i \neq 0$.

Para hipersuperfícies M do espaço Euclidiano que admite campos de vetores principais

ortonormais, e_1, \dots, e_n , consegue-se mostrar (ver [CFT3]) que um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n ou \mathbb{S}^n , está localmente associado a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_i . O seguinte teorema estende o resultado para hipersuperfícies em \mathbb{S}^{n+1} ou \mathbb{H}^{n+1} .

Teorema 2.10. *Seja M uma hipersuperfície em $\overline{M}^{n+1}(\bar{k})$ que admite n campos de vetores de direções principais ortonormais e_i , $i = 1, \dots, n$. Para quaisquer constantes reais $b_1 \neq 0$ e b_0 , o sistema de equações*

$$\begin{aligned} d\Omega_i &= \sum_k \Omega_k \omega_{ik} + (b_0 - \bar{k}\Omega)\omega_i + (b_1 - W)\omega_{in+1}, \\ d\Omega &= \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i, \\ dW &= \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_{in+1}. \end{aligned}$$

é integrável. A função $S - 2(b_0\Omega + b_1W) = c$ é uma constante determinada pelas condições iniciais. Considerando $c = 0$, a hipersuperfície associada é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície totalmente umbílica (respectivamente totalmente geodésica) se $b_0 \neq 0$ (respectivamente $b_0 = 0$).

Demonstração. A prova de que o sistema de equações é integrável é similar a demonstração

da Proposição 2.8. Segue de (2.9) que

$$\begin{aligned}
d(S - 2(b_0\Omega + b_1W)) &= dS - 2(b_0d\Omega + b_1dW) \tag{2.16} \\
&= \sum_{i=1}^n 2\Omega_i d\Omega_i + 2\bar{k}\Omega d\Omega + 2WdW - 2(b_0d\Omega + b_1dW) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \Omega_i \left(\sum_k \Omega_k \omega_{ik} + (b_0 - \bar{k}\Omega)\omega_i + (b_1 - W)\omega_{in+1} \right) \\
&+ 2\bar{k}\Omega \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i + 2W \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_{in+1} - 2 \left(b_0 \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_i + b_1 \sum_{i=1}^n \Omega_i \omega_{in+1} \right) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \Omega_i \sum_k (\Omega_k \omega_{ik} + b_0 \omega_i - \bar{k}\Omega \omega_i + b_1 \omega_{in+1} \\
&- W \omega_{in+1} + \bar{k}\Omega \omega_i + W \omega_{in+1} - b_0 \omega_i - b_1 \omega_{in+1} - W \omega_{in+1}) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \Omega_i \sum_k \Omega_k \omega_{ik} = 2 \sum_{i=1}^n \sum_k \Omega_i \Omega_k \omega_{ik} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escolher as condições iniciais de forma que $S - 2(b_0\Omega + b_1W) = 0$. Finalmente, segue de (2.13) que curvatura principal da hipersuperfície associada é dada por $\frac{b_0}{b_1}$. Com efeito, calcularemos primeiro T^i que é dado por (2.14).

$$\begin{aligned}
T^i &= 2 \left(d\Omega_i(e_i) + \sum_{k=1}^n \Omega_k \omega_{ki}(e_i) - W\lambda^i + \bar{k}\Omega \right) \\
&= 2 \left(\sum_k \Omega_k \omega_{ik}(e_i) + (b_0 - \bar{k}\Omega)\omega_i(e_i) - (b_1 - W)\lambda^i \omega_i(e_i) + \sum_{k=1}^n \Omega_k \omega_{ki}(e_i) - W\lambda^i + \bar{k}\Omega \right) \\
&= 2(b_0 - \bar{k}\Omega - b_1\lambda^i + W\lambda^i - W\lambda^i + \bar{k}\Omega) \\
&= 2b_0 - 2b_1\lambda^i.
\end{aligned}$$

Calculando $\tilde{\lambda}^i$ por (2.13), temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}^i &= \frac{WT^i + {}^iS}{S - \Omega T^i} = \frac{W(2b_0 - 2b_1\lambda^i) + \lambda^i(2(b_0\Omega + b_1W))}{2(b_0\Omega + b_1W) - \Omega(2b_0 - 2b_1\lambda^i)} \\
&= \frac{2b_0W - 2b_1W\lambda^i + 2b_0\Omega\lambda^i + 2b_1W\lambda^i}{2b_0\Omega + 2b_1W - 2b_0\Omega + 2b_1\Omega\lambda^i} \\
&= \frac{2b_0(W + \Omega\lambda^i)}{2b_1(W + \Omega\lambda^i)} = \frac{b_0}{b_1}.
\end{aligned}$$

Portanto, a hipersuperfície associada é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície totalmente umbilíca para $b_0 \neq 0$ e totalmente geodésica para $b_0 = 0$. \square

Observe que o sistema de equações do Teorema 2.10 contém (2.4)-(2.6).

2.2 Transformações de Ribaucour para Superfícies Linear Weingarten

Nesta seção, usaremos a teoria da seção anterior para estudar as transformações de Ribaucour para superfícies linear Weingarten nas formas espaciais tridimensionais.

Definição 2.11. *Uma superfície linear Weingarten em $\overline{M}^3(\overline{k})$ é uma superfície cuja curvatura Gaussiana, K , e curvatura média, H , satisfazem a relação*

$$\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0 \quad (2.17)$$

onde α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, $H = -\frac{(\lambda^1 + \lambda^2)}{2}$ e $K = \lambda^1\lambda^2 + \overline{k}$.

O resultado a seguir fornece uma condição suficiente para uma transformação de Ribaucour associar uma superfície linear Weingarten a outra superfície linear Weingarten do mesmo tipo, isto é, preservando as constantes α, β e γ .

Teorema 2.12. *Seja M uma superfície em $\overline{M}^3(\overline{k})$, $\overline{k} = 0, 1-1$ que admite um referencial ortonormal de direções principais e_1, e_2 . Seja \widetilde{M} uma superfície regular associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_i . Suponha que as funções $\Omega_i \neq 0, \Omega$ e W que satisfazem o sistema (2.4)-(2.6) satisfazem também a relação algébrica*

$$S = 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2), \quad (2.18)$$

onde S é dado por (2.9), $c \neq 0$ e α, β e γ são constantes reais tais que $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$. Então \widetilde{M} é uma superfície linear Weingarten satisfazendo $\alpha + \beta\widetilde{H} + \gamma(\widetilde{K} - \overline{k}) = 0$ se, e somente se, $\alpha + \beta H + \gamma(K - \overline{k}) = 0$ vale para a superfície M , onde K, \widetilde{K} e H, \widetilde{H} são as curvaturas Gaussianas e médias de M e \widetilde{M} respectivamente. Além disso, \widetilde{M} não tem pontos umbílicos se, e somente se, M não tem pontos umbílicos.

Demonstração. Introduza a seguinte notação para o lado esquerdo da equação algébrica

$$P = (\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2), \quad (2.19)$$

Assim S satisfaz $S = 2cP$, e segue a partir de (2.4) e (2.6) que

$$\begin{aligned} dS &= 2cdP = 2c(2\alpha\Omega d\Omega + \beta\Omega dW + \beta W d\Omega + 2\gamma W dW) \\ &= 2c \left[(2\alpha\Omega + \beta W) \sum_i^2 \Omega_i \omega_i + (\beta\Omega + 2\gamma W) \sum_i^2 \Omega_i \omega_{i3} \right]. \end{aligned}$$

Obtendo

$$dS = 2c \sum_i^2 [(2\alpha\Omega + \beta W)\omega_i + (2\gamma W + \beta\Omega)\omega_{i3}]\Omega_i \quad (2.20)$$

Portanto usando (2.19) e (2.20) temos

$$WdS(e_i) + S\Omega_i\lambda^i = 2c\Omega_i\{[(2\alpha\Omega + \beta W) - (2\gamma W + \beta\Omega)\lambda^i]W + \lambda^i P\}. \quad (2.21)$$

Analogamente

$$S\Omega_i - \Omega dS(e_i) = 2c\Omega_i\{P - \Omega[(2\alpha\Omega + \beta W) - (2\gamma W + \beta\Omega)\lambda^i]\}. \quad (2.22)$$

Por hipótese, $\Omega_i \neq 0$ para todo i , portanto a partir de (2.15), (2.21) e (2.22), conseguimos

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^i &= \frac{2\alpha\Omega W + \beta W^2 - 2\gamma W^2 - \beta\Omega\lambda^i W + \alpha\Omega^2\lambda^i + \lambda^i\beta\Omega W + \gamma\lambda^i W^2}{\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2 - 2\alpha\Omega^2 - \beta\Omega W + 2\gamma\Omega\lambda^i W + \beta\Omega^2\lambda^i} \\ &= \frac{(2\alpha\Omega W + \beta W^2) + \lambda^i(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}{(2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2)\lambda^i - (\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}. \end{aligned}$$

Na ordem para concluir a prova, introduziremos a seguinte notação:

$$L = 2\alpha\Omega W + \beta W^2, \quad T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2 \quad e \quad Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2.$$

Então,

$$\tilde{\lambda}^i = \frac{(L + \lambda^i T)}{(Q\lambda^i - T)}.$$

Considerando Γ o numerador da expressão

$$\alpha + \beta\tilde{H} + \gamma(\tilde{K} - \bar{k}) = \alpha - \frac{\beta}{2} \left(\frac{L + \lambda^1 T}{Q\lambda^1 - T} + \frac{L + \lambda^2 T}{Q\lambda^2 - T} \right) + \gamma \left[\frac{(L + \lambda^1 T)}{Q\lambda^1 - T} \cdot \frac{(L + \lambda^2 T)}{Q\lambda^2 - T} \right].$$

Substituindo $\frac{-(\lambda^1 + \lambda^2)}{2}$ por H e $\lambda^1\lambda^2$ por $(K - \bar{k})$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma &= T^2[\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k})] - 2\beta T^2 H + L(\beta T + \gamma L) - 2TH(-\alpha Q + \gamma L) \\ &\quad - Q(K - \bar{k})(-\alpha Q + \beta T) + \beta LQH \\ &= (T^2 + QL)[\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k})] + (\beta T + \gamma L - \alpha Q)[L - 2TH - Q(K - \bar{k})]. \end{aligned}$$

Temos que $(\beta T + \gamma L - \alpha Q) = 0$. De fato:

$$\beta(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2) + \gamma(2\alpha\Omega W + \beta W^2) - \alpha(2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2) = \alpha\beta\Omega^2 - \gamma\beta W^2 + 2\alpha\gamma\Omega W +$$

$$\gamma\beta W^2 - 2\alpha\gamma\Omega W - \alpha\beta\Omega^2 = 0.$$

Portanto,

$$\Gamma = (T^2 + QL)[\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k})].$$

Mas segue que

$$T^2 + QL = P^2 = \frac{S^2}{4c^2} \neq 0, \text{ pois por hipótese } \Omega_i \neq 0.$$

Portanto, concluímos que $\alpha - \beta\tilde{H} + \gamma(\tilde{K} - \bar{k}) = 0$ se, e somente se, $\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k}) = 0$, demonstrando a primeira parte.

Para concluir a desmonstração observe que

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda}^1 &= \frac{L + \lambda^1 T}{Q\lambda^1 - T} - \frac{L + \lambda^2 T}{Q\lambda^2 - T} \\ &= \frac{(T^2 + QL)}{(Q\lambda^1 - T)(Q\lambda^2 - T)}(\lambda^1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

□

O sistema (2.4), (2.5) e (2.6) com a condição adicional (2.18) é sempre integrável quando nós iniciamos a partir de uma superfície linear Weingarten, isto é, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.13. *Seja M uma superfície linear Weingarten em $\overline{M^3}(\bar{k})$, que admite campos de vetores principais ortonormais. Suponha que a curvatura Gaussiana e média de M satisfazem $\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k}) = 0$. Então para qualquer constante $c \neq 0$, o sistema de equações*

$$d\Omega = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \tag{2.23}$$

$$dW = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3}, \tag{2.24}$$

$$d\Omega_i = \sum_j \Omega_j \omega_{ij} + \{(2c\alpha - \bar{k})\Omega - \beta cW\}\omega_i + \{c\beta\Omega + (2c\gamma - 1)W\}\omega_{i3}, i \neq j. \tag{2.25}$$

é integrável. Qualquer solução satisfaz (2.18) sobre um domínio simplesmente conexo U sempre que as condições iniciais dadas satisfazem (2.18). Além disso, quando $\bar{k} = 0$, ou

$\bar{k} = 1$ com $\alpha \neq 0$, qualquer solução do sistema definido sobre U é identicamente nulo (assim $S \equiv 0$) ou S não se anula.

Demonstração. Vamos considerar o ideal I gerado pelas 1-formas

$$\begin{aligned}\theta &= d\Omega - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \\ \phi &= dW - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3}, \\ \theta_i &= d\Omega_i - \sum_j \Omega_j \omega_{ij} - \{(2c\alpha - \bar{k})\Omega - \beta cW\}\omega_i - \{c\beta\Omega + (2c\gamma - 1)W\}\omega_{i3}, i \neq j.\end{aligned}$$

Temos que

$$d\theta = - \sum_{i=1}^2 d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_i \Omega_i d\omega_i \quad (2.26)$$

Por outro lado,

$$\theta_i \wedge \omega_i = d\Omega_i \wedge \omega_i - \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i.$$

Logo

$$\begin{aligned}\sum_i d\Omega_i \wedge \omega_i &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_i + \sum_i \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_i \\ &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_i + \sum_j \Omega_j \sum_i \omega_{ij} \wedge \omega_i \\ &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_i - \sum_j \Omega_j d\omega_j.\end{aligned}$$

Substituindo $\sum_i d\Omega_i \wedge \omega_i$ em (2.26), obtemos

$$d\theta = - \sum_i \theta_i \wedge \omega_i + \sum_j \Omega_j d\omega_j - \sum_i \Omega_i d\omega_i = - \sum_i \theta_i \wedge \omega_i.$$

Agora calculando

$$d\phi = - \sum_{i=1}^2 d\Omega_i \wedge \omega_{i3} - \sum_i \Omega_i d\omega_{i3}. \quad (2.27)$$

Por outro lado,

$$\theta_i \wedge \omega_{i3} = d\Omega_i \wedge \omega_{i3} - \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_{i3}.$$

Logo pela equação de Codazzi temos

$$\begin{aligned} \sum_i d\Omega_i \wedge \omega_{i3} &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3} + \sum_i \sum_j \Omega_j \omega_{ij} \wedge \omega_{i3} \\ &= \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3} - \sum_j \Omega_j d\omega_{i3}. \end{aligned}$$

Substituindo $\sum_i d\Omega_i \wedge \omega_{i3}$ em (2.27), obtemos

$$d\phi = - \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3} + \sum_j \Omega_j d\omega_{j3} - \sum_i \Omega_i d\omega_{i3} = - \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i3}.$$

Agora calculando $d\theta_i$, obtemos

$$\begin{aligned} d\theta_i &= - \sum_j (d\Omega_j \wedge \omega_{ij} - \Omega_j d\omega_{ij}) - \{(2c\alpha - \bar{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge d\Omega \\ &\quad + \{\beta c\omega_i - (2\gamma c - 1)\omega_{i3}\} \wedge dW - [(2c\alpha - \bar{k})\Omega - c\beta W]d\omega_i - [c\beta\Omega + (2\gamma c - 1)W]d\omega_{i3}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned} \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ij} &= \sum_j d\Omega_j \wedge \omega_{ij} + \sum_k \Omega_k [d\omega_{ki} - \omega_{k3} \wedge \omega_{3i} + \bar{k}\omega_k \wedge \omega_i] \\ &\quad - \{(2c\alpha - \bar{k})\Omega - c\beta W\}\omega_j \wedge \omega_{ij} - \{c\beta\Omega + (2\gamma c - 1)W\}\omega_{j3} \wedge \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Substituindo $\sum_j d\Omega_j \wedge \omega_{ij}$ na equação (2.28) e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$d\theta_i = -\theta_j \wedge \omega_{ij} + \Omega_k [-\omega_{k3} \wedge \omega_{3i} + \bar{k}\omega_k \wedge \omega_i] - \{(2c\alpha - \bar{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge d\Omega + \{\beta c\omega_i - (2\gamma c - 1)\omega_{i3}\} \wedge dW.$$

Somando e subtraindo $\{(2c\alpha - \bar{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge \sum_i \Omega_i \omega_i$ e $\{\beta c\omega_i - (2\gamma c - 1)\omega_{i3}\} \wedge \sum_i \Omega_i \omega_{i3}$ na equação acima e calculando os termos semelhantes iremos obter

$$d\theta_i = -\theta_j \wedge \omega_{ij} + \{\beta c\omega_i + (2\gamma c - 1)\omega_{i3}\} \wedge \phi + \{(2c\alpha - \bar{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge \theta - 2c\Omega_i (\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k}))\omega_j \wedge \omega_i,$$

onde $i \neq j$. E visto que M é uma superfície Linear Weingarten temos que

$$d\theta_i = -\theta_j \wedge \omega_{ij} + \{\beta c\omega_i + (2c\gamma - 1)\omega_{i3}\} \wedge \phi + \{(2c\alpha - \bar{k})\omega_i + c\beta\omega_{i3}\} \wedge \theta.$$

E segue que I é fechado sobre a diferencial exterior, o que implica que o sistema (2.23), (2.24) e (2.25) é integrável pelo Teorema de Frobenius.

Observamos que para qualquer solução (2.23)- (2.25) do sistema, $d(S - 2cP) = 0$, onde P é dado por (2.19). De fato,

$$\begin{aligned} d(S - 2cP) &= \sum_{i=1}^2 2\Omega_i d\Omega_i + 2\bar{k}\Omega d\Omega + 2WdW - 4c\alpha\Omega d\Omega - 2c\beta\Omega dW - 2c\beta W d\Omega - 4c\gamma W dW \\ &= 2 \sum_i \Omega_i \{d\Omega_i + (W - c\beta\Omega - 2c\gamma W)\omega_{i3} - [(2c\alpha - \bar{k})\Omega + \beta cW]\omega_i\} \\ &= 2 \sum_i \Omega_i \sum_j \Omega_j \omega_{ij} = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_j \Omega_i \Omega_j \omega_{ij} = 0. \end{aligned}$$

para $i \neq j$. Portanto, quando consideramos a condição inicial para o ponto p_0 tal que $(S - 2cP)(p_0) = 0$, sabemos que $S = 2cP$ é válido sobre um domínio conexo.

Quando $\bar{k} = 1$ ou $\bar{k} = 0$, suponha que $S(p_0) = 0$ para algum $p_0 \in U$. Segue de (2.9) que $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ e W se anulam em p_0 . Visto que U é simplesmente conexo, a unicidade da solução para o sistema implica que $\Omega \equiv \Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv W \equiv 0$ sobre U e portanto $S \equiv 0$ sobre U . \square

Teorema 2.14. *Seja M uma superfície linear Weingarten em $\bar{M}^3(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1, 0$, satisfazendo $\alpha + \beta H + \gamma(K - \bar{k}) = 0$, que admite campos de vetores ortonormais e_1, e_2 . Suponha que M é localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \bar{M}^3(\bar{k})$. Então qualquer superfície linear Weingarten parametrizada em $\bar{M}^3(\bar{k})$ localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 , como no Teorema 2.12, é dada por*

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right), \quad (2.29)$$

onde $\Omega, \Omega_i, i = 1, 2$, e W são soluções de (2.23), (2.24) e (2.25) e \tilde{X} é definido sobre

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U : T^2 + 2TQH + Q^2(K - \bar{k}) \neq 0\}, \quad (2.30)$$

onde $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.7, somente precisamos mostrar que \tilde{X} definido por (2.29), sobre \tilde{U} , é uma superfície parametrizada em $\bar{M}^3(\bar{k})$. Visto que $S = 2cP$, onde P é dado por (2.19) e a diferencial de S é dado por (2.20). Segue de (2.5) e (2.6) que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\Omega}{S}\right) &= \frac{1}{S^2} \left[\sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i 2cP - 2c\Omega dP \right] \\ &= \frac{1}{S^2} \left[\sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i 2cP - 2c\Omega \sum_i^2 \{(2\alpha\Omega + \beta W)\omega_i + (2\gamma W + \beta\Omega)\omega_{i3}\} \Omega_i \right] \\ &= \frac{1}{2cP^2} \sum_{i=1}^2 \Omega_i [\omega_i(\gamma W^2 - \alpha\Omega^2) - \omega_{i3}(\beta\Omega^2 + 2\gamma W\Omega)]. \end{aligned}$$

Fazendo $\eta_i = \omega_i(\gamma W^2 - \alpha\Omega^2) - \omega_{i3}(\beta\Omega^2 + 2\gamma W\Omega)$, temos

$$d\left(\frac{\Omega}{S}\right) = \frac{1}{2cP^2} \sum_{i=1}^2 \Omega_i \eta_i.$$

Por um cálculo análogo, obtemos:

$$d\left(\frac{\Omega^2}{S}\right) = \frac{\Omega}{2cP^2} \sum_{i=1}^2 [(2\gamma W^2 + \beta\Omega W)\omega_i - (2\gamma W\Omega + \beta\Omega^2)\omega_{i3}] \Omega_i.$$

Usando (2.23), (2.24) e (2.25), concluimos que

$$d\tilde{X} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^2 \eta_i \tilde{e}_i,$$

onde

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{cP} (-\bar{k}\Omega_1\Omega X + (cP - \Omega_1^2)e_1 - \Omega_1\Omega_2e_2 + \Omega_1WN), \quad (2.31)$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{cP} (-\bar{k}\Omega_2\Omega X + (cP - \Omega_2^2)e_2 - \Omega_1\Omega_2e_1 + \Omega_2WN), \quad (2.32)$$

são vetores ortonormais. Portanto, \tilde{X} é uma imersão quando $\eta_1 \wedge \eta_2 \neq 0$, isto é, sobre o subconjunto \tilde{U} dado por (2.30). De fato, fazendo $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta_1 \wedge \eta_2 &= (-T\omega_1 - Q\omega_{13}) \wedge (-T\omega_2 - Q\omega_{23}) \\ &= T^2(\omega_1 \wedge \omega_2) + TQ(\omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2) + Q^2(\omega_{13} \wedge \omega_{23}) \\ &= T^2(\omega_1 \wedge \omega_2) + 2TQH(\omega_1 \wedge \omega_2) + Q^2(K - \bar{k})(\omega_1 \wedge \omega_2) \\ &= (T^2 + 2TQH + Q^2(K - \bar{k}))(\omega_1 \wedge \omega_2). \end{aligned}$$

Temos então que $\eta_1 \wedge \eta_2 \neq 0$ se, e somente se, $T^2 + 2TQH + Q^2(K - \bar{k}) \neq 0$. \square

Observação 2.15. *A partir da prova do Teorema 2.14 sabemos que as direções \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 de \tilde{X} são dadas por (2.31) e (2.32). Além disso, suas formas duais são*

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_i &= \frac{1}{P}\eta_i = \frac{1}{P}\omega_i(\gamma W^2 - \alpha\Omega^2) - \omega_{i3}(\beta\Omega^2 + 2\gamma W\Omega) \\ &= \frac{1}{P}[\gamma W^2 - \alpha\Omega^2 + (\beta\Omega + 2\gamma W)\Omega\lambda^i]\omega_i, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Considerando H constante, $\alpha = -H, \beta = 1$ e $\gamma = 0$ nos Teoremas 2.12, 2.13 e 2.14, temos os casos de curvatura média constante (cmc) H (se $H = 0$, é o caso de superfície mínimas). Observe que $\lambda^1 \neq \lambda^2$ é equivalente a $\lambda^1 \neq -H$ e $\lambda^2 \neq -H$.

Na demonstração do Teorema 2.12 vimos que

$$S\Omega_i - \Omega dS(e_i) = 2c\Omega_i\{P - \Omega[(2\alpha\Omega + \beta W) - (2\gamma W + \beta\Omega)\lambda^i]\}.$$

Para $\alpha = -H, \beta = 1$ e $\gamma = 0$, obtemos

$$S\Omega_i - \Omega dS(e_i) = 2c\Omega_i\Omega^2(\lambda^i + H).$$

Portanto, o fato de M não ter pontos umbílicos com $\Omega_i \neq 0$ implica que $S\Omega_i - \Omega dS(e_i) \neq 0$. Podemos afirmar os seguintes corolários, tendo em vista $\alpha = -H, \beta = 1$ e $\gamma = 0$, sobre os Teoremas 2.13 e 2.14.

Corolário 2.16. *Seja M uma superfície em $\overline{M}^3(\bar{k})$ que admite campos de vetores de direções principais ortonormais e_1, e_2 . Se M é uma superfície com curvatura média constante H , então para qualquer constante $c \neq 0$ o sistema de equações*

$$d\Omega = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \quad (2.33)$$

$$dW = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3}, \quad (2.34)$$

$$d\Omega_i = \sum_j \Omega_j \omega_{ij} - [(2cH + \bar{k})\Omega - cW]\omega_i + (c\Omega - W)\omega_{i3}, \quad i \neq j. \quad (2.35)$$

é integrável. Se

$$-\bar{k} + c^2 - 2cH > 0, \quad (2.36)$$

então qualquer solução sobre um domínio simplesmente conexo U satisfaz

$$S = 2c\Omega(-H\Omega + W), \quad (2.37)$$

sempre que as condições iniciais satisfaça (2.37). Além disso, quando $\bar{k} = 1$ ou $\bar{k} = 0$ com $H \neq 0$, para qualquer solução não-trivial a função S não se anula sobre U .

Demonstração. Necessitamos exigir que $c \neq 0$ também satisfaça (2.36), se nós queremos que (2.37) seja satisfeito por uma solução não trivial. De fato, visto que S é dado por (2.9), a condição algébrica (2.37) converte a:

$$\sum_{k=1}^2 (\Omega_i)^2 + \bar{k}\Omega^2 + W^2 = 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2) = -2cH\Omega^2 + 2c\Omega W.$$

Logo, temos que

$$\sum_{k=1}^2 (\Omega_i)^2 + (W - c\Omega)^2 + (\bar{k} - c^2 + 2cH)\Omega^2 = 0.$$

Portanto, $-\bar{k} + c^2 - 2cH > 0$. □

Corolário 2.17. *Seja M uma superfície com curvatura média constante H em $\bar{M}^3(\bar{k})$ parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \bar{M}^3(\bar{k})$, que admite campos de vetores de direções principais ortonormais e_1, e_2 . Então qualquer superfície com curvatura média constante H parametrizada em $\bar{M}^3(\bar{k})$, localmente associada a X por uma Transformação de Ribaucour como no Teorema (2.12) é dado por*

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{\bar{k}\Omega}{c(W - H\Omega)}\right) X - \frac{1}{c(W - H\Omega)} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right), \quad (2.38)$$

onde $\Omega, \Omega_i, i = 1, 2$, e W são soluções de (2.33), (2.34) e (2.35) com a constante $c \neq 0$ e $-\bar{k} + c^2 - 2cH > 0$.

A demonstração deste corolário é feita substituindo S dado por (2.37) na equação (2.29) obtida na prova do Teorema (2.14).

Capítulo 3

Aplicações da Transformação de Ribaucour

Neste capítulo apresentamos aplicações das transformações de Ribaucour nas formas espaciais. Aplicando os resultados do capítulo anterior ao cilindro em \mathbb{R}^3 (cf, [CFT1]), ao toro plano em \mathbb{S}^3 (cf, [WT1]) e à prima da superfície de Enneper em \mathbb{H}^3 (cf, [WT2]).

3.1 Aplicações da Transformação de Ribaucour no Espaço Euclidiano

Nesta seção, aplicando a transformação de Ribaucour ao cilindro, iremos obter uma família a dois parâmetros (c, γ) de superfícies linear Weingarten associadas.

Teorema 3.1. *Considere o cilindro parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = (\cos(u_2), \sin(u_2), u_1), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

como uma Superfície Linear Weingarten satisfazendo $-\frac{1}{2} + H + \gamma K = 0$. Uma superfície parametrizada, $\tilde{X}_{c\gamma}$, é uma superfície linear Weingarten localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour como no Teorema 2.14 se, e somente se, ele é dado por

$$\tilde{X}_{c\gamma} = X - \frac{2(f+g)}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2]}(f'X_{u_1} + g'X_{u_2} - gN) \quad (3.2)$$

onde N é o campo de vetores normais unitários interno ao cilindro, $c \neq 0$ e γ são

constantes reais tais que

$$\xi(c, \gamma) = 1 - c(2\gamma + 1) \quad (3.3)$$

e c não são simultaneamente positivos, e $f(u_1), g(u_2)$ são soluções das equações

$$f'' + cf = 0, \quad (3.4)$$

$$g'' + \xi g = 0 \quad (3.5)$$

com as condições iniciais satisfazendo

$$((f')^2 + (g')^2 + \xi g^2 + cf^2)(u_1^0, u_2^0) = 0. \quad (3.6)$$

Além disso, $\tilde{X}_{c\gamma}$ é uma superfície regular definida sobre o subconjunto de U onde

$$((f + g)^2 + 2\gamma g^2)(f^2 + 2(2\gamma + 1)fg + (2\gamma + 1)g^2) \neq 0. \quad (3.7)$$

Demonstração. Os coeficientes da primeira forma fundamental do cilindro são $E = G = 1$ e $F = 0$. Portanto a primeira forma fundamental do cilindro é $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$. Temos que $\lambda^1 = 0$ e $\lambda^2 = -1$. Na ordem para obter a transformação de Ribaucour, precisamos resolver o seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \Omega_i, \quad \frac{\partial W}{\partial u_i} = -\lambda^i \Omega_i, \quad 1 \leq j \neq i \leq 2. \quad (3.8)$$

que é obtida a partir de (2.10), (2.11) e (2.12).

A superfície associada será Linear Weingarten quando Ω_1, Ω_2, W e Ω satisfazem

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = c(W - \Omega) \text{ e } \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = (c - 1 + 2c\gamma)W.$$

De fato, derivando a condição algébrica (2.18) em relação a u_1 em ambos os lados e usando (3.8) obtemos:

$$\begin{aligned} 2\Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + 2W(-\lambda^1 \Omega_1) &= 2c(-\Omega \Omega^1 + \beta \Omega(-\lambda^1 \Omega_1) + \beta W \Omega_1 + 2\gamma(-\lambda^1 \Omega_1)); \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} &= c(-\Omega + W). \end{aligned}$$

O caso $\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = (c - 1 + 2c\gamma)W$ é análogo ao primeiro, só que deriva-se a condição algébrica (2.18) em relação a u_2 .

Temos também que $\frac{\partial \Omega}{\partial u_1 u_2} = 0$, que segue do fato de $\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = 0$ e $\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \Omega_1$. Portanto segue que $\Omega = f(u_1) + g(u_2)$, onde f e g são funções de u_1 e u_2 respectivamente. Portanto $\Omega_1 = f'$ e $\Omega_2 = g'$. A partir de $\frac{\partial W}{\partial u_i} = -\lambda^i \Omega_i$ temos que $\frac{\partial W}{\partial u_2} = \Omega_2 = g'$. Logo temos $W = g + a$, onde a é uma constante real. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} &= c(W - \Omega); \\ f''(u_1) &= c(g(u_2) + a - (f(u_1) + g(u_2))).\end{aligned}$$

Portanto $f''(u_1) + cf(u_1) - ac = 0$. Analogamente prova-se que $g'' + \xi(g + a) = 0$.

Segue a partir destas equações e das expressões de Ω e W que, sem perda de generalidade, podemos considerar $a = 0$. Portanto, f e g satisfazem as equações (3.4) e (3.5). Além disso, f e g devem satisfazer a condição algébrica (condição inicial) (2.18), que resulta em (3.6).

Visto que a condição (3.6) deve ser identicamente satisfeita pela solução não-trivial das funções f e g , concluímos que as constantes $c \neq 0$ e γ são de tal modo que c e ξ não podem ser simultaneamente positivos.

Além disso, a partir de (2.29) concluímos que a superfície linear Weingarten associada a X é dada por (3.2). Com efeito, vimos que

$$\begin{aligned}S &= 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2) \\ S &= 2c\left(-\frac{1}{2}(f+g)^2 + (f+g)g + \gamma g^2\right) \\ &= -cf^2 + cg^2 + 2c\gamma g^2 \\ &= c[(2\gamma + 1)g^2 - f^2].\end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\sum_i^2 e_i \Omega_i &= f' \left(\frac{X_{u_1}}{a_1} \right) + g' \left(\frac{X_{u_2}}{a_2} \right) \\ &= f' X_{u_1} + g' X_{u_2}.\end{aligned}$$

Portanto, substituindo as duas expressões obtidas acima na equação (2.29) e considerando $\bar{k} = 0$ por estarmos no espaço Euclidiano, obtemos a equação (3.2).

Agora, iremos obter o domínio onde \tilde{X} é uma superfície regular. Pelo Teorema 2.14

sabemos que \tilde{X} é uma superfície regular sobre um subconjunto U se $T^2 + 2TQH + Q^2(K - \bar{k}) \neq 0$, onde $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$. No nosso caso, como $K = 0$ e $H = \frac{1}{2}$ o domínio é dado por $T(T + Q) \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} T(T + Q) &= (-(f + g)^2 - 2\gamma g^2) (-(f + g)^2 - 2\gamma g^2 + 4\gamma fg + 4\gamma g^2 + 2(f + g)^2) \\ &= (-(f + g)^2 - 2\gamma g^2) (f^2 + g^2 + 2fg + 2\gamma g^2 + 4\gamma fg) \\ &= ((f + g)^2 + 2\gamma g^2) (f^2 + 2(2\gamma + 1)fg + (2\gamma + 1)g^2) \neq 0. \end{aligned}$$

□

A família da superfícies linear Weingarten dado por (3.2) inclui o cilindro. De fato, se escolhermos as condições iniciais tais que $f \equiv 0$, $g \neq 0$ para $\xi \leq 0$ ou $f \neq 0$, $g \equiv 0$ para $c \leq 0$, conseguimos uma reparametrização do cilindro.

Agora introduziremos uma notação, que será útil no resultado seguinte. Uma rotação de um ângulo θ no plano xy de \mathbb{R}^3 será denotada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Denotamos por T_δ a translação definida por

$$T_\delta(x, y, z) = (x, y, z + \delta). \quad (3.10)$$

Teorema 3.2. *Considere uma Superfície Linear Weingarten associada ao cilindro e parametrizada por (3.2). Excluindo o cilindro:*

- i) *Se $c\xi \geq 0$, então qualquer superfície $\tilde{X}_{c\gamma}$ tem curvas de singularidades.*
- ii) *Se $c\xi < 0$ então, por movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 , a superfície $\tilde{X}_{c\gamma}$ é determinada pelas funções*

$$f = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{|\xi|}{c}} \text{sen}(\sqrt{c}u_1) \quad g = \cosh(\sqrt{|\xi|}u_2) \quad \text{se } c > 0, \xi < 0 \quad (3.11)$$

$$f = \cosh(\sqrt{|c|}u_1) \quad g = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{|c|}{\xi}} \text{sen}(\sqrt{\xi}u_2) \quad \text{se } c < 0, \xi > 0 \quad (3.12)$$

onde $\varepsilon_1 = \pm 1$, $c \neq 0$ e γ são números reais e $\xi(c, \gamma)$ é definido por (3.3).

Demonstração. Pela resolução das equações diferenciais (3.4) e (3.5), observamos que as funções f e g da família de superfície descrita por (3.2) são dadas por

$$f = \begin{cases} a_1 \cos(\sqrt{c}u_1) + b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) & \text{se } c > 0, \\ a_1 \cosh(\sqrt{|c|}u_1) + b_1 \operatorname{senh}(\sqrt{|c|}u_1) & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} a_2 u_2 + b_2 & \text{se } \xi = 0, \\ a_2 \cosh(\sqrt{|\xi|}u_2) + b_2 \operatorname{senh}(\sqrt{|\xi|}u_2) & \text{se } \xi < 0, \\ a_2 \cos(\sqrt{\xi}u_2) + b_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\xi}u_2) & \text{se } \xi > 0, \end{cases}$$

onde as constantes satisfazem a relação algébrica dada por (3.6),

$$a_1 = b_1 = a_2 = 0 \quad \text{se } c > 0 \text{ e } \xi = 0,$$

$$c(b_1^2 - a_1^2) - a_2^2 = 0 \quad \text{se } c < 0 \text{ e } \xi = 0,$$

$$c(b_1^2 + a_1^2) + \xi(a_2^2 - b_2^2) = 0 \quad \text{se } c > 0 \text{ e } \xi < 0,$$

$$c(b_1^2 - a_1^2) - \xi(a_2^2 - b_2^2) = 0 \quad \text{se } c < 0 \text{ e } \xi < 0,$$

$$c(b_1^2 - a_1^2) - \xi(a_2^2 + b_2^2) = 0 \quad \text{se } c < 0 \text{ e } \xi > 0.$$

Demonstraremos a primeira relação sendo as outras análogas. Temos que

$$f' = \begin{cases} -a_1 \sqrt{c} \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) + b_1 \sqrt{c} \cos(\sqrt{c}u_1) & \text{se } c > 0, \\ a_1 \sqrt{|c|} \operatorname{senh}(\sqrt{|c|}u_1) + b_1 \sqrt{|c|} \cosh(\sqrt{|c|}u_1) & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

$$g' = \begin{cases} a_2 & \text{se } \xi = 0, \\ a_2 \sqrt{|\xi|} \operatorname{senh}(\sqrt{|\xi|}u_2) + b_2 \sqrt{|\xi|} \cosh(\sqrt{|\xi|}u_2) & \text{se } \xi < 0, \\ -a_2 \sqrt{\xi} \operatorname{sen}(\sqrt{\xi}u_2) + b_2 \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}u_2) & \text{se } \xi > 0. \end{cases}$$

Pela relação (3.6), obtemos:

$$[-a_1 \sqrt{c} \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) + b_1 \sqrt{c} \cos(\sqrt{c}u_1)]^2 + a_2^2 + c[a_1 \cos(\sqrt{c}u_1) + b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1)]^2 = 0,$$

$$a_1^2 c [\operatorname{sen}^2(\sqrt{c}u_1) + \cos^2(\sqrt{c}u_1)] + b_1^2 c [\operatorname{sen}^2(\sqrt{c}u_1) + \cos^2(\sqrt{c}u_1)] + a_2^2 = 0.$$

Portanto temos que $c(a_1^2 + b_1^2) + a_2^2 = 0$. Como $c > 0$, obtemos a relação algébrica dada por $a_1 = b_1 = a_2 = 0$ se $c > 0$ e $\xi = 0$.

Se $c > 0$ e $\xi = 0$, então a superfície \tilde{X} reduz ao cilindro. De fato, pois $f = 0$ e $g = b_2$ e teremos por (3.2) que

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{c\gamma} &= X - \frac{2(f+g)}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2]}(f'X_{u_1} + g'X_{u_2} - gN) \\ &= X + \frac{2}{c(2\gamma+1)}N \\ &= \left(\cos(u_2) - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\cos(u_2), \sin(u_2) - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\sin(u_2), u_1 \right) \\ &= \left(\left(1 - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\right)\cos(u_2), \left(1 - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\right)\sin(u_2), u_1 \right) \\ &= (\rho \cos(u_2), \rho \sin(u_2), u_1).\end{aligned}$$

Onde $\rho = \left(1 - \frac{2}{c(2\gamma+1)}\right)$. Logo, \tilde{X} é um cilindro.

Se $c < 0$ e $\xi = 0$, existem curvas em \mathbb{R}^2 onde (3.7) se anulam. Se $c\xi > 0$, pelo Teorema 3.1 c e $\xi(c, \gamma)$ não podem ser simultaneamente positivos, então $c < 0$ e $\xi < 0$. Neste caso, as funções f e g são dadas como acima, $\gamma < \frac{-1}{2}$ e existem quatro curvas sobre \mathbb{R}^2 determinadas por (3.7) onde \tilde{X} não é regular. De fato, por (3.7), as quatro curvas que se anulam são dadas por

$$f + g \pm \sqrt{2|\gamma|}g = 0, \quad f + (2\gamma + 1)g \pm \sqrt{2\gamma(2\gamma + 1)}g = 0.$$

Se $c > 0$ e $\xi < 0$, então escolhendo $a_1 = b_1 = 0$, temos $b_2 = \pm a_2$, $f = 0$ e $g = a_2 \exp(\pm\sqrt{|\xi|}u_2)$ e a superfície \tilde{X} se reduz a uma reparametrização do cilindro. De fato, por (3.2) temos

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{c\gamma} &= X - \frac{2}{c(2\gamma+1)g}(g'X_{u_2} - gN) \\ &= X - \frac{2(a_2\sqrt{|\xi|}\exp(\pm\sqrt{|\xi|}u_2))}{c(2\gamma+1)\exp(\pm\sqrt{|\xi|}u_2)}X_{u_2} + \frac{2}{c(2\gamma+1)}N \\ &= X - \frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|}X_{u_2} - N).\end{aligned}$$

onde na última equação usamos o fato de $\xi(c, \gamma) = 1 - c(2\gamma + 1)$. Substituindo X e N por suas respectivas coordenadas obtemos que \tilde{X} é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \left(\left(1 - \frac{2}{1-\xi}\right)\cos(u_2) - \frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|}\sin(u_2)), \left(1 - \frac{2}{1-\xi}\right)\sin(u_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|}\cos(u_2)), u_1 \right)\end{aligned}$$

bastando mostrar que a reparametrização acima é um cilindro. Com efeito, verifica-se facilmente que

$$\left(1 - \frac{2}{1-\xi}\right)^2 + \left(-\frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|})\right)^2 = 1.$$

Logo, fazendo

$$\cos(Y) = \left(1 - \frac{2}{1-\xi}\right), \quad \text{sen}(Y) = \left(-\frac{2}{1-\xi}(\pm\sqrt{|\xi|})\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= (\cos(Y) \cos(u_2) - \text{sen}(Y) \text{sen}(u_2), \cos(Y) \text{sen}(u_2) + \text{sen}(Y) \cos(u_2), u_1) \\ &= (\cos(Y + u_2), \text{sen}(Y + u_2), u_1). \end{aligned}$$

que implica que \tilde{X} é um cilindro.

Portanto, excluindo o cilindro, podemos assumir que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ e

$$f = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{|\xi|}{c}} \text{sen}(A + \sqrt{c}u_1), \quad g = \cosh(B + \sqrt{|\xi|}u_2).$$

De fato, temos que

$$f = a_1 \cos(\sqrt{c}u_1) + b_1 \text{sen}(\sqrt{c}u_1),$$

e dividindo e multiplicando a equação acima por $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, obtemos

$$f = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cos(\sqrt{c}u_1) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \text{sen}(\sqrt{c}u_1) \right).$$

E como

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right)^2 + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right)^2 = 1.$$

Fazendo

$$\text{sen}(A) = \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right), \quad \cos(A) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} (\text{sen}(A) \cos(\sqrt{c}u_1) + \cos(A) \text{sen}(\sqrt{c}u_1)) \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} (\text{sen}(A + \sqrt{c}u_1)). \end{aligned}$$

Como $a_2^2 - b_2^2 \neq 0$, analogamente obtemos que

$$g = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \cosh(B + \sqrt{|\xi|}u_2).$$

Como as constantes $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ e $\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$ não alteram as parametrizações de $\tilde{X}_{c\gamma}$, assumimos que $\sqrt{a_2^2 - b_2^2} = 1$ e calculando $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ na condição algébrica (3.6), temos que $(a_1^2 + b_1^2)c = -\xi$, obtendo portanto que $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{|\xi|}{c}}$. Logo obtemos

$$f = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{|\xi|}{c}} \operatorname{sen}(A + \sqrt{c}u_1), \quad g = \cosh(B + \sqrt{|\xi|}u_2).$$

Analogamente, se $c < 0$ e $\xi > 0$, então excluindo o cilindro, podemos assumir $\sqrt{a_2^2 - b_2^2} \neq 0$ e assim

$$f = \cosh(A + \sqrt{|c|}u_1), \quad g = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{|c|}{\xi}} \operatorname{sen}(B + \sqrt{\xi}u_2).$$

Agora concluimos a demonstração do teorema observando que as constantes A e B , sem perda de generalidade, podemos considera-las nulas. Podemos verificar que as superfícies com diferentes valores de A e B são congruentes por movimentos rígidos em \mathbb{R}^3 . De fato, usando a notação $\tilde{X}_{c\gamma AB}$ para superfícies $\tilde{X}_{c\gamma}$ com valores fixados A e B , temos

$$\tilde{X}_{c\gamma AB} = R_{-\frac{B}{\sqrt{\xi}}} \tilde{X}_{c\gamma 00} \circ h + T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}}$$

onde $h(u_1, u_2) = \left(u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}}, u_2 + \frac{B}{\sqrt{|\xi|}} \right)$ R, T são a rotação e translação dado por (3.9) e (3.10). Logo, visto que a rotação é uma transformação linear temos que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{c\gamma AB} &= R_{-\frac{B}{\sqrt{\xi}}} \circ X(h) - \frac{2}{c[(2\gamma + 1)g^2 - f^2]} \left(f' R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X_{u_1}(h) \right. \\ &\quad \left. + g' R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X_{u_2}(h) - g R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ N(h) \right) + T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}}. \end{aligned}$$

Vamos calcular $R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X(h)$.

$$\begin{aligned}
R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X(h) &= \left(\cos\left(-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right) \cos\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) \operatorname{sen}\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) \right. \\
&\quad \left. , \operatorname{sen}\left(-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right) \cos\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right) + \cos\left(-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right) \operatorname{sen}\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}}\right), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right) \\
&= \left(\cos\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}} - \frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right), \operatorname{sen}\left(u_2 + \frac{B}{\sqrt{\xi}} - \frac{B}{\sqrt{|\xi|}}\right), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right) \\
&= \left(\cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right).
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}
R \circ X_{u_1}(h) &= (0, 0, 1) = X_{u_1}, \\
R \circ X_{u_2}(h) &= (-\operatorname{sen}(u_2), \cos(u_2), 0) = X_{u_2}, \\
R \circ N(h) &= (-\cos(u_2), -\operatorname{sen}(u_2), 0) = N.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
R_{-\frac{B}{\sqrt{|\xi|}}} \circ X(h) &= \left(\cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2), u_1 + \frac{A}{\sqrt{|c|}} \right) \\
&\quad + \frac{2(f+g)}{c[(2\gamma+1)g^2 - f^2]} (f'X_{u_1} + g'X_{u_2} - gN).
\end{aligned}$$

Fazendo a translação $T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}}$ na última coordenda na equação acima, obtemos que

$$R_{-\frac{B}{\sqrt{\xi}}} \tilde{X}_{c\gamma 00} \circ h + T_{-\frac{A}{\sqrt{|c|}}} = \tilde{X}_{c\gamma},$$

mostrando que as superfícies com diferentes valores de A, B são congruentes por movimentos rígidos. \square

Pode-se mostrar que a superfície regular $\tilde{X}_{c\gamma}$, dada pelo teorema anterior é completa. Além disso, os parâmetros pertencem a uma região constituída por duas componentes conexas de \mathbb{R}^2 . Uma destas componentes contém curvas que fornecem superfícies com n -bolhas que são 1-periódicas, tendo gênero zero e dois fins de índice geométrico finito. Pode-se mostrar também que sua curvatura total é nula, enquanto a curvatura total

absoluta é $8\pi n$. A demonstranção destes fatos podem ser encontradas em [CFT1].

Agora, descreveremos uma família a um parâmetro de superfícies com curvatura média constante $H = \frac{1}{2}$ obtida a partir do cilindro por uma transformação de Ribaucour. A superfície está contida na classe de superfícies linear Weingarten descritas no Teorema 3.1, onde restringimos $\gamma = 0$. Estas superfícies podem ser obtidas diretamente a partir do cilindro pela aplicação da transformação de Ribaucour como nos Corolários 2.16 e 2.17.

Corolário 3.3. *Excluindo o cilindro, qualquer superfície parametrizada com curvatura média constante $H = \frac{1}{2}$ localmente associada ao cilindro por uma transformação de Ribaucour como no Teorema 3.1 é dada, a menos de um movimento rígido de \mathbb{R}^3 , por*

$$\tilde{X}_c = X + \frac{2}{c(f-g)}(f'X_{u_1} + g'X_{u_2} - gN) \quad (3.13)$$

onde N é o campo de vetores normais interno ao cilindro parametrizado por (3.1), c é uma constante real tal que $c < 0$ ou $c > 1$, e as funções $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são dadas por

$$f = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{c-1}{c}} \operatorname{sen}(\sqrt{c}u_1) \quad e \quad g = \cosh(\sqrt{c-1}u_2) \quad \text{se } c > 1, \quad (3.14)$$

$$f = \cosh(\sqrt{|c|}u_1) \quad e \quad g = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{|c|}{1-c}} \operatorname{sen}(\sqrt{1-c}u_2) \quad \text{se } c < 0, \quad (3.15)$$

onde $\varepsilon_i = \pm 1$.

Demonstração. Considerando $\gamma = 0$ em (3.2)-(3.6), conseguimos o lado direito de (3.13), onde f e g são soluções de

$$f'' + cf = 0, \quad g'' + (1-c)g = 0 \quad (3.16)$$

e as condições iniciais de f e g devem satisfazer

$$((f')^2 + (g')^2 + (1-c)g^2 + cf^2)(u_1^0, u_2^0) = 0. \quad (3.17)$$

Além disso, visto que esta última condição pode ser identicamente satisfeita por soluções não triviais das funções f e g , concluímos que a constante $c \neq 0$ é tal que $c(1-c) \leq 0$, pois c e $1-c$ não podem ser simultaneamente positivos, assim temos $c < 0$ ou $c \geq 1$. Portanto quando $c = 1$, segue de (3.17) que $g = b_2$ onde $b_2 \neq 0$ é uma constante real e $f \equiv 0$. Neste caso \tilde{X} reduz ao cilindro e portanto $c \neq 1$.

A partir de (3.3) temos que $\xi = 1 - c$. Portanto usando o Teorema 3.2, concluímos que se $c > 1$ então (3.11) se reduz a (3.14) e se $c < 0$ então (3.12) se reduz a (3.15), concluindo a demonstração do corolário. \square

3.2 Aplicações da Transformação de Ribaucour na Esfera

Nesta seção, construiremos uma família de superfícies com curvatura média constante localmente associadas ao toro plano \mathbb{S}^3 utilizando a transformação de Ribaucour como no Teorema 2.14. Como caso especial, obtemos uma nova família de superfícies mínimas em \mathbb{S}^3 .

Teorema 3.4. *Considere o toro \mathbb{T}^2 parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = (c_1 \cos(u_1), c_1 \sin(u_1), c_2 \cos(u_2), c_2 \sin(u_2)), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.18)$$

como uma superfície de curvatura média constante H , onde c_1, c_2 são constantes positivas satisfazendo

$$c_1^2 + c_2^2 = 1, \quad e \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right). \quad (3.19)$$

Uma superfície parametrizada \tilde{X}_c é uma superfície de curvatura média constante H localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour como no Corolário 2.17 se, e somente se, $c \in \left(-\infty, -\frac{c_1}{c_2}\right] \cup \left[\frac{c_2}{c_1}, \infty\right)$ e \tilde{X}_c é um toro se $c \in \left\{-\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_1}\right\}$ ou

$$\tilde{X}_c = \left(1 - \frac{2c_1c_2(c_1^2f - c_2^2g)}{c(c_1^2f - c_2^2g)}\right) X - \frac{2c_1^2c_2^2}{c(c_1^2f - c_2^2g)} \left(\frac{1}{c_1c_2}(f'X_{u_1} - g'X_{u_2}) - (f+g)N\right) \quad (3.20)$$

onde

$$N = (-c_2 \cos(u_1), -c_2 \sin(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \sin(u_2)), \quad (3.21)$$

e $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são soluções das equações

$$f'' + \left(1 - c\frac{c_1}{c_2}\right)f = 0, \quad g'' + \left(1 + c\frac{c_2}{c_1}\right)g = 0, \quad (3.22)$$

satisfazendo a condição inicial

$$\left[\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 + \left(\frac{1}{c_1}g'\right)^2 + \frac{1}{c_2^2} \left(1 - c\frac{c_1}{c_2}\right)f^2 + \frac{1}{c_1^2} \left(1 + c\frac{c_2}{c_1}\right)g^2 \right] (u_1^0, u_2^0) = 0. \quad (3.23)$$

Além disso, \tilde{X}_c é uma superfície regular definida sobre

$$\tilde{U} = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{c_1}{c_2}f(u_1) - \frac{c_2}{c_1}g(u_2) \neq 0 \right\}. \quad (3.24)$$

Demonstração. Como X é dado por (3.18), temos que

$$\begin{aligned} dX &= (-c_1 \operatorname{sen}(u_1) du_1, c_1 \cos(u_1) du_1, -c_2 \operatorname{sen}(u_2) du_2, c_2 \cos(u_2) du_2) \\ &= (-\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_1), 0, 0) c_1 du_1 + (0, 0, -\operatorname{sen}(u_2), \cos(u_2)) c_2 du_2. \end{aligned}$$

Fixando $e_1 = \frac{X_{u_1}}{|X_{u_1}|}$, $e_2 = \frac{X_{u_2}}{|X_{u_2}|}$, $e_4 = X$ e calculando

$$e_3 = (-c_2 \cos(u_1), -c_2 \operatorname{sen}(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \operatorname{sen}(u_2))$$

para que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ seja um referencial ortonormal de \mathbb{T}^2 , temos que o vetor unitário normal do Toro é dado por (3.21). A primeira forma fundamental é

$$ds^2 = \langle dX_p, dX_p \rangle = c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2, \quad (3.25)$$

implicando que $\omega_1 = c_1 du_1$ e $\omega_2 = c_2 du_2$.

A segunda forma fundamental é dada por

$$\text{III} = c_1 c_2 (du_1^2 - du_2^2). \quad (3.26)$$

De fato, pois $\text{III} = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}$, e

$$\begin{aligned} de_1 &= (-\cos(u_1), -\operatorname{sen}(u_1), 0, 0) du_1, \\ de_2 &= (0, 0, -\cos(u_2), -\operatorname{sen}(u_2)) du_2, \\ de_3 &= (-c_2 \operatorname{sen}(u_1) du_1, -c_2 \cos(u_1) du_1, c_1 \operatorname{sen}(u_2) du_2, c_1 \cos(u_2) du_2). \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \langle de_1, e_2 \rangle = 0. \\ \omega_{13} &= \langle de_1, e_3 \rangle = c_2 du_1. \\ \omega_{23} &= \langle de_2, e_3 \rangle = -c_1 du_2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos (3.26).

Segue que as curvas coordenadas de \mathbb{T}^2 são linhas de curvaturas e que

$$\lambda^1 = -\frac{c_2}{c_1}, \quad \lambda^2 = \frac{c_1}{c_2}.$$

Portanto, \mathbb{T}^2 tem curvatura Gaussiana nula e a curvatura média de \mathbb{T}^2 é dado por (3.19). Visto que $S = 2c\Omega(-H\Omega + W)$, temos pelo Corolário 2.16 que

$$\sum_{k=1}^2 (\Omega_k)^2 + (W - c\Omega)^2 + (\bar{k} - c^2 + 2cH)\Omega^2 = 0.$$

o que implica em $1 - c^2 + 2cH \leq 0$, isto é, $c \geq \frac{c_2}{c_1}$ ou $c \leq -\frac{c_1}{c_2}$. Assim se $c \in \left(-\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_1}\right)$, \tilde{X}_c não existe.

Suponha agora que $c \in \left(-\infty, -\frac{c_1}{c_2}\right) \cup \left(\frac{c_2}{c_1}, \infty\right)$. Na ordem para obter a transformação de Ribaucour, precisamos resolver o seguinte sistema de equações diferenciais obtidas a partir de (2.4), (2.5) e (2.6):

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = 0, \quad i \neq j. \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = c_i \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = -c_1 \lambda^1 \Omega_1 = -c_1 \left(-\frac{c_2}{c_1}\right) \Omega_1 = c_2 \Omega_1. \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_2} = -c_1 \Omega_2. \quad (3.30)$$

com a condição algébrica adicional

$$(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2 + \Omega^2 + W^2 = 2c\Omega(-H\Omega + W). \quad (3.31)$$

A partir de (3.27) e (3.29) sabemos que $\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 u_2} = 0$ que implica que

$$W = f(u_1) + g(u_2), \quad (3.32)$$

onde f e g são funções de u_1 e u_2 respectivamente.

Tomando a derivada de (3.31) em relação a u_1 e usando o sistema de equações acima, conseguimos

$$\begin{aligned} 2\Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + 2W \frac{\partial W}{\partial u_1} + 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} - 2c \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} (W - H\Omega) + 2c\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial u_1} - H \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} \right) &= 0; \\ \Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + Wc_2\Omega_1 + \Omega c_1\Omega_1 - cc_1\Omega_1 W + cc_1\Omega_1 H\Omega - c\Omega c_2\Omega_1 + cH\Omega c_1\Omega_1 &= 0; \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + c_2 W + (1 + 2cH)c_1\Omega - cc_1 W - cc_2\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Analogamente, só que derivando (3.31) em relação a u_2 conseguimos

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} - c_1 W + (1 + 2cH)c_2 \Omega - cc_2 W + cc_1 \Omega = 0. \quad (3.34)$$

As equações (3.29) e (3.30) implicam em

$$\Omega_1 = \frac{1}{c_2} \frac{\partial W}{\partial u_1} = \frac{1}{c_2} f', \quad \Omega_2 = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial W}{\partial u_2} = -\frac{1}{c_1} g' \quad (3.35)$$

e

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = \frac{1}{c_2} f'', \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{c_1} g''. \quad (3.36)$$

Por outro lado, multiplicando as equações (3.33) e (3.34) por c_1 e c_2 respectivamente, somando ambas as equações e usando o fato que $c_1^2 + c_2^2 = 1$ deduzimos que

$$c_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + (1 + 2cH)\Omega - cW = 0. \quad (3.37)$$

Por um cálculo análogo obtemos

$$c_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} - c\Omega + W = 0. \quad (3.38)$$

Isolando Ω em (3.37) e (3.38) temos

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(-c_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + cW \right) \frac{1}{(1 + 2cH)}. \\ \Omega &= \left(c_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + W \right) \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Eliminando Ω a partir das equações acima obtemos

$$\begin{aligned} cc_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + cc_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + (1 + 2cH - c^2)W \\ + (1 + 2cH) \left(c_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo $W = f + g$ e (3.36) na equação acima, temos

$$cc_1 \left(\frac{1}{c_2} f'' \right) + cc_2 \left(-\frac{1}{c_1} g'' \right) + (1 + 2cH - c^2)(f + g) + (1 + 2cH) \left(c_2 \frac{1}{c_2} f'' + c_1 - \frac{1}{c_1} g'' \right) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\left((1 + 2cH) + c \frac{c_1}{c_2} \right) f'' + ((1 + 2cH) - c^2) f \\ &= \left(c \frac{c_1}{c_2} - (1 + 2cH) \right) g'' + (c^2 - (1 + 2cH)) g = d. \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde d é constante.

A partir do Corolário 2.16 sabemos que $1 + 2cH - c^2 < 0$. Segue de (3.40) que

$$\tilde{f} = f - \frac{d}{1 + 2cH - c^2}, \quad \tilde{g} = g + \frac{d}{1 + 2cH - c^2}. \quad (3.41)$$

onde \tilde{f} e \tilde{g} são soluções de (3.22), respectivamente. De fato, vamos denotar $\alpha = \left((1 + 2cH) + c\frac{c_1}{c_2} \right)$ e $\beta = ((1 + 2cH) - c^2)$. Logo, por (3.40) temos $\alpha f'' + \beta f = d$ e como $\tilde{f} = f - \frac{d}{\beta}$ obtemos

$$\alpha \tilde{f}'' + \beta \tilde{f} = \alpha f'' + \beta f - d = 0.$$

Portanto $\alpha \tilde{f}'' + \beta \tilde{f} = 0$ que é equivalente a $\tilde{f}'' + \frac{\beta}{\alpha} \tilde{f} = 0$. Portanto para \tilde{f} ser solução de (3.22) basta mostrar que $\frac{\beta}{\alpha} = 1 - c\frac{c_1}{c_2}$. Com efeito, temos

$$\alpha = \left((1 + 2cH) + c\frac{c_1}{c_2} \right) = 1 + c \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right) + c\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 + cc_2}{c_1}.$$

Analogamente, temos

$$\beta = \frac{c_1c_2 + cc_2^2 - cc_1^2 - c^2c_1c_2}{c_1c_2}.$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= \left(\frac{c_1c_2 + cc_2^2 - cc_1^2 - c^2c_1c_2}{c_1c_2} \right) \frac{c_1 + cc_2}{c_1} \\ &= \frac{c_1c_2 + cc_2^2}{c_1c_2 + cc_2^2} - \frac{cc_1(c_1 + cc_2)}{c_2(c_1 + cc_2)} = 1 - c\frac{c_1}{c_2}. \end{aligned}$$

Analogamente, \tilde{g} é solução de (3.22).

Agora temos que

$$W = \tilde{f} + \tilde{g} = f + g, \quad \Omega_1 = \frac{1}{c_2} \tilde{f}', \quad \Omega_2 = -\frac{1}{c_1} \tilde{g}'. \quad (3.42)$$

A partir de (3.32), (3.36), (3.38) podemos calcular Ω .

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{c} \left(c_2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} - c_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + W \right) = \frac{1}{c} \left(c_2 \frac{1}{c_2} f'' + c_1 \frac{1}{c_1} g'' + f + g \right) \\ &= \frac{1}{c} (f'' + g'' + f + g) = \frac{1}{c} (\tilde{f}'' + \tilde{g}'' + \tilde{f} + \tilde{g}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Assim, a partir da expressão de \tilde{X}_c , podemos supor, sem perda de generalidade, que $d = 0$. Usando (3.22) encontramos

$$\Omega = \left(f \frac{c_1}{c_2} - g \frac{c_2}{c_1} \right). \quad (3.44)$$

Segue do Corolário 2.17 que \tilde{X}_c é dado por

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)} \right) X - \frac{1}{c(W - H\Omega)} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN \right).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)} &= \frac{f \frac{c_1}{c_2} - g \frac{c_2}{c_1}}{c \left(f + g - \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right) \left(\frac{c_1}{c_2} f - \frac{c_2}{c_1} g \right) \right)} = \frac{\frac{1}{c_1 c_2} (c_1^2 f - c_2^2 g)}{c \left(\frac{f}{2} + \frac{g}{2} + \frac{c_2^2 g}{2c_1^2} + \frac{c_1^2 f}{2c_2^2} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{c_1 c_2} (c_1^2 f - c_2^2 g)}{\frac{c}{2c_1^2 c_2^2} (fc_1^2 + gc_2^2)} = \frac{2c_1 c_2 (fc_1^2 - gc_2^2)}{c(fc_1^2 + gc_2^2)}. \end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$\frac{1}{(W - H\Omega)} = \frac{2c_1^2 c_2^2}{(fc_1^2 + gc_2^2)}. \quad (3.45)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i &= \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 = \frac{1}{c_2} f'(e_1) - \frac{1}{c_1} g'(e_2) \\ &= \frac{1}{c_1 c_2} (f' X_{u_1} - g' X_{u_2}). \end{aligned}$$

Portanto substituindo a equação obtida acima e usando (3.45) e (3.32) concluímos que \tilde{X}_c é dado por (3.20).

Substituindo (3.32), (3.35) e (3.44) em (3.31), obtemos (3.23). De fato, calculando o lado esquerdo da igualdade de (3.31) temos

$$\begin{aligned} (\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2 + \Omega^2 + W^2 &= \left(\frac{1}{c_2} f' \right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} g' \right)^2 + (f + g)^2 + \left(f \frac{c_1}{c_2} - g \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{c_2} f' \right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} g' \right)^2 + f^2 \left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) + g^2 \left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2c\Omega(-H\Omega + W) &= 2c \left[\left(f \frac{c_1}{c_2} - g \frac{c_2}{c_1} \right) (f + g) - \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right) \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} f^2 - 2fg + \frac{c_1^2}{c_2^2} g^2 \right) \right] \\ &= f^2 c \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) - g^2 c \frac{c_2}{c_1} \left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right). \end{aligned}$$

Igualando os dois lados obtidos acima conseguimos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c_2} f' \right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} g' \right)^2 + \left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) \left(f^2 - f^2 c \frac{c_1}{c_2} \right) + \left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \left(g^2 + g^2 c \frac{c_2}{c_1} \right) = \\ \left(\frac{1}{c_2} f' \right)^2 + \left(\frac{1}{c_1} g' \right)^2 + \frac{1}{c_2^2} \left(1 - c \frac{c_1}{c_2} \right) f^2 + \frac{1}{c_1^2} \left(1 + c \frac{c_2}{c_1} \right) g^2. \end{aligned}$$

que é a equação (3.23). A partir do Teorema 2.14, sabemos que \tilde{X}_c é definido sobre $\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U : T^2 + 2TQH + Q^2(K - 1) \neq 0\}$. Visto que $\alpha = -H$, $\beta = 1$ e $\gamma = 0$, temos que $T = -H\Omega^2$ e $Q = \Omega^2$. Logo

$$T^2 + 2TQH + Q^2(K - 1) = H^2\Omega^4 - 2\Omega^4H^2 - \Omega^2 = \Omega^2(-\Omega^2H^2 - 1) \neq 0,$$

que implica em $\Omega \neq 0$. Portanto temos que \tilde{U} é dado por (3.24).

Se $1 + 2cH - c^2 = 0$, isto é, $c = -\frac{c_1}{c_2}$ ou $c = \frac{c_2}{c_1}$, então \tilde{X}_c é um toro. De fato, vamos considerar primeiro o caso que $c = -\frac{c_1}{c_2}$. Segue de (3.40) que $g'' = 0$, pois verifica-se facilmente que $c^2 - (1 + 2cH) = 0$. Deste modo

$$g(u_2) = au_2 + b. \quad (3.46)$$

onde a e b são constantes. A partir de (3.35) temos

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = c_2 \Omega_2 = -\frac{c_2}{c_1} g' = -\frac{c_2}{c_1} a.$$

Sabemos que

$$\Omega = l(u_1) - \frac{c_2}{c_1} au_2 + \tilde{b}, \quad \tilde{b} \in \mathbb{R}. \quad (3.47)$$

Usando $\frac{c_1}{c_2} f' = \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = l'(u_1)$, temos $l(u_1) = \frac{c_1}{c_2} f(u_1) + \tilde{d}$, que fornece

$$\Omega = \frac{c_1}{c_2} f(u_1) - \frac{c_2}{c_1} au_2 + (\tilde{b} + \tilde{d}). \quad (3.48)$$

Assim, a partir de (3.36), (3.38) e (3.48), obtemos

$$f'' + f + g + \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{c_1}{c_2} f(u_1) - \frac{c_2}{c_1} au_2 + (\tilde{b} + \tilde{d}) \right) = 0, \quad (3.49)$$

que implica que

$$f'' + \frac{c_2^2}{c_2^2} f + au_2 + b + \frac{c_1^2}{c_2^2} f - au_2 + \frac{c_1}{c_2} (\tilde{b} + \tilde{d}) = 0.$$

Portanto,

$$f'' + \frac{f}{c_2^2} = -\frac{c_1}{c_2} (\tilde{b} + \tilde{d}) - b \equiv d_1. \quad (3.50)$$

Logo

$$f = b_1 \cos \left(\frac{u_1}{c_2} \right) + b_2 \operatorname{sen} \left(\frac{u_1}{c_2} \right) + c_2^2 d_1. \quad (3.51)$$

De (3.50) temos que $(\tilde{b} + \tilde{d}) = -\frac{c_2}{c_1} (b + d_1)$. Logo

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{c_1}{c_2} f(u_1) - \frac{c_2}{c_1} au_2 + (\tilde{b} + \tilde{d}) \\ &= \frac{c_1}{c_2} f - \frac{c_2}{c_1} (g + d_1). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Portanto, Ω satisfaz (3.27). Por outro lado, deduzimos a partir da condição algébrica (2.37) que $a = b_1 = b_2 = 0$. Com efeito, segue de (3.35) que $\Omega_2 = -\frac{1}{c_1} g' = -\frac{1}{c_1} a$, pois $g = au_2 + b$. Calculando S e usando a equação (3.52), temos

$$\begin{aligned} S &= (\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2 + \Omega^2 + W^2 \\ &= \left(\frac{1}{c_2} f' \right)^2 + \left(-\frac{1}{c_1} a \right)^2 + f^2 + 2fg + g^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} f - 2fg - 2fd_1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} (g^2 + 2gd_1 + d_1^2) \\ &= \left(\frac{1}{c_2} f' \right)^2 + \left(-\frac{a}{c_1} \right)^2 + f^2 \left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) + g^2 \left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) - 2fd_1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} (2gd_1 + d_1^2). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
2c\Omega(W - H\Omega) &= 2c\Omega\left(f + g - \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2}\right)\Omega\right) \\
&= 2c\Omega\left(\frac{f}{2} + \frac{g}{2} - \frac{d_1}{2} + \frac{c_2^2}{2c_1^2}(g + d_1) + \frac{c_1^2}{2c_2^2}f\right) \\
&= -\frac{c_1^2}{c_2^2}f^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}fg + \frac{c_1^2}{c_2^2}fd_1 - f(g + d_1) - \frac{c_1^4}{c_2^4}f^2 + f(g + d_1) \\
&\quad + g^2 + gd_1 - gd_1 - d_1^2 + \frac{c_2^2}{c_1^2}(g + d_1)^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2}f(g + d_1) \\
&= -\frac{c_1^2}{c_2^2}f^2\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) + 2\frac{c_1^2}{c_2^2}fd_1 + g^2 - d_1^2 + \frac{c_2^2}{c_1^2}(g + d_1)^2.
\end{aligned}$$

Igualando $S = 2c\Omega(W - H\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2 + f^2\left(\frac{1}{c_2^2}\right)\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) + g^2\left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - 2fd_1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}2gd_1 \\
&= 2\frac{c_1^2}{c_2^2}fd_1 + g^2\left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) + 2gd_1\frac{c_2^2}{c_1^2} - d_1^2; \\
\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2 + f^2\left(\frac{1}{c_2^4}\right) - 2fd_1\left(\frac{1}{c_2^2}\right) + d_1^2 = 0; \\
\left(\frac{1}{c_2}f'\right)^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2 + \left(f^2\frac{1}{c_2^2} - d_1^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo f dado por (3.51) na última equação conseguimos

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{c_2^2}\left(-b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right) + b_2 \cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right)\right)\right]^2 &+ \left(-\frac{a}{c_1}\right)^2 \\
&+ \left[\frac{1}{c_2^2}\left(b_1 \cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right)\right)\right]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, como c_1, c_2 são não nulos e o $\operatorname{sen}\left(\frac{u_1}{c_2}\right)$ e $\cos\left(\frac{u_1}{c_2}\right)$ não se anulam simultaneamente, só podemos ter $a = b_1 = b_2 = 0$. Este fato nos fornece que $f = c_2^2 d_1$ e $g = b$.

Assim, por (3.32) e (3.52) implica que

$$W = c_2^2 d_1 + b, \quad \Omega = -\frac{c_2^3}{c_1^2} d_1 - \frac{c_2}{c_1} b.$$

Portanto, obtemos

$$\tilde{X}_c = (r_1 \cos(u_1), r_1 \operatorname{sen}(u_1), r_2 \cos(u_2), r_2 \operatorname{sen}(u_2)), \quad (3.53)$$

onde

$$r_i = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right) c_i + (-1)^i \frac{Wc_j}{c(W - H\Omega)}, \quad i \neq j, \quad (3.54)$$

são constantes. De fato, calculando

$$\tilde{X}_c = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right) X - \frac{1}{c(W - H\Omega)} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right),$$

onde X e N são dados por (3.18) e (3.21) respectivamente. Como $f' = g' \equiv 0$, segue que $\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i = \frac{1}{c_1 c_2} (f' X_{u_1} - g' X_{u_2}) = 0$. Para facilitar os cálculos vamos denotar

$$\rho = \left(1 - \frac{\Omega}{c(W - H\Omega)}\right), \quad \tau = \frac{W}{c(W - H\Omega)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \tilde{X}_c &= \rho X - \tau N \\ &= \rho(c_1 \cos(u_1), c_1 \sin(u_1), c_2 \cos(u_2), c_2 \sin(u_2)) \\ &\quad + \tau(-c_2 \cos(u_1), -c_2 \sin(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \sin(u_2)) \\ &= ((\rho c_1 - \tau c_2) \cos(u_1), (\rho c_1 - \tau c_2) \sin(u_1), (\rho c_2 + \tau c_1) \cos(u_2), (\rho c_2 + \tau c_1) \sin(u_2)) \\ &= (r_1 \cos(u_1), r_1 \sin(u_1), r_2 \cos(u_2), r_2 \sin(u_2)). \end{aligned}$$

onde r_1, r_2 é dado por (3.54). Consequentemente, \tilde{X}_c é um toro. Do mesmo modo, podemos provar que quando $c = \frac{c_2}{c_1}$, \tilde{X}_c é também um toro. \square

Teorema 3.5. *As superfícies \tilde{X}_c obtida no Teorema anterior são superfícies de curvatura média constante H completas contidas na esfera unitária \mathbb{S}^3 . Excluindo o Toro e a menos de uma isometria de \mathbb{S}^3 , \tilde{X}_c é dada por (3.20) onde $c > \frac{c_2}{c_1}$,*

$$f = \delta \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{\nu}{-\eta}} \cosh(\sqrt{-\eta} u_1), \quad g = \text{sen}(\sqrt{\nu} u_2), \quad (3.55)$$

onde

$$\eta(c) = 1 - c \frac{c_1}{c_2}, \quad \nu(c) = 1 + c \frac{c_2}{c_1}, \quad \delta \pm 1, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}. \quad (3.56)$$

Demonstração. As funções f e g descritas por (3.20) são dadas por

$$\begin{aligned} f &= a_1 \cos(\sqrt{\eta}u_1) + b_1 \sin(\sqrt{\eta}u_1), \\ g &= a_2 \cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{-\nu}u_2), \quad \text{se } c < -\frac{c_1}{c_2}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} f &= a_1 \cosh(\sqrt{-\eta}u_1) + b_1 \sinh(\sqrt{-\eta}u_1), \\ g &= a_2 \cos(\sqrt{\nu}u_2) + b_2 \sin(\sqrt{\nu}u_2), \quad \text{se } c > \frac{c_2}{c_1}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde η e ν são funções de c definidas por (3.56), pois f e g são soluções das equações dadas por (3.22).

A partir de condição inicial dada por (3.23) segue que as constantes $a_i, b_i, i = 1, 2$ satisfazem as seguintes condições:

$$\frac{1}{c_2^2} \eta(a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{c_1^2} \nu(a_2^2 - b_2^2) = 0, \quad \text{se } c < -\frac{c_1}{c_2}, \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{c_2^2} \nu(b_1^2 - a_1^2) + \frac{1}{c_1^2} \eta(a_2^2 + b_2^2) = 0, \quad \text{se } c > \frac{c_2}{c_1} \quad (3.60)$$

Provaremos a equação (3.59), sendo (3.60) análoga. Seja

$$\begin{aligned} f' &= -a_1 \sqrt{\eta} \sin(\sqrt{\eta}u_1) + b_1 \sqrt{\eta} \cos(\sqrt{\eta}u_1), \\ g' &= a_2 \sqrt{-\nu} \sinh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2 \sqrt{-\nu} \cosh(\sqrt{-\nu}u_2). \end{aligned}$$

Substituindo f', g', f e g na condição (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{c_2}\right)^2 \eta(-a_1 \sin(\sqrt{\eta}u_1) + b_1 \cos(\sqrt{\eta}u_1))^2 + \left(\frac{1}{c_1}\right)^2 (-\nu)(a_2 \sinh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2 \cosh(\sqrt{-\nu}u_2))^2 \\ &+ \left(\frac{1}{c_2}\right)^2 \eta(a_1 \cos(\sqrt{\eta}u_1) + b_1 \sin(\sqrt{\eta}u_1))^2 + \left(\frac{1}{c_1}\right)^2 \nu(a_2 \cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{-\nu}u_2))^2 = 0 \end{aligned}$$

que implica que

$$\frac{1}{c_2^2} \eta(a_1^2 + b_1^2) + \frac{1}{c_1^2} \nu(a_2^2 - b_2^2).$$

Considere o caso $c < -\frac{c_1}{c_2}$. Se $a_1 = b_1 = 0$, então f e g são dados por

$$f = 0, \quad g = a_2(\cosh(\sqrt{-\nu}u_2) \pm \sinh(\sqrt{-\nu}u_2)). \quad (3.61)$$

A partir de (3.20) temos que

$$\tilde{X}_c = (c_1 \cos(u_1), c_1 \sin(u_1), c_2 \cos(u_2 \pm A), c_2 \sin(u_2 \pm A)),$$

que implica que \tilde{X}_c é um toro. De fato, por (3.61) a parametrização de \tilde{X}_c dada por (3.20) se reduz a

$$\begin{aligned} \tilde{X}_c &= \left(1 + \frac{2c_1c_2}{c}\right) X - \frac{2c_1^2}{cg} \left(-\frac{1}{c_1c_2} g' X_{u_2} - gN\right) \\ &= \left(1 + \frac{2c_1c_2}{c}\right) X + \frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu} X_{u_2} + \frac{2c_1^2}{c} N, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Substituindo X e N dados por (3.18) e (3.21) respectivamente na equação acima e sabendo que $X_{u_2} = (0, 0, -c_2 \sin(u_2), c_2 \cos(u_2))$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{X}_c &= \left(1 + \frac{2c_1c_2}{c}\right) (c_1 \cos(u_1), c_1 \sin(u_1), c_2 \cos(u_2), c_2 \sin(u_2)) \\ &\quad + \frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu} (0, 0, -c_2 \sin(u_2), c_2 \cos(u_2)) + \frac{2c_1^2}{c} (-c_2 \cos(u_1), -c_2 \sin(u_1), c_1 \cos(u_2), c_1 \sin(u_2)) \\ &= \left(c_1 \cos(u_1), c_1 \sin(u_1), c_2 \left(\cos(u_2) + \frac{2c_1c_2}{c} \cos(u_2) + \frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu} \sin(u_2)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \frac{2c_1^3}{cc_2} \cos(u_2)\right), c_2 \left(\frac{2c_1c_2}{c} \sin(u_2) + \sin(u_2) + \frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu} \cos(u_2) + \frac{2c_1^3}{cc_2} \sin(u_2)\right)\right). \end{aligned}$$

Desenvolvendo a terceira coordenada da equação acima, verificamos que ela é igual à

$$\begin{aligned} &= c_2 \left[\cos(u_2) \left(1 + \frac{2c_1c_2}{c} + \frac{2c_1^3}{cc_2}\right) + \frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu} \sin(u_2) \right] \\ &= c_2 \left[\cos(u_2) \left(\frac{cc_2 + 2c_1}{cc_2}\right) + \frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu} \sin(u_2) \right]. \end{aligned}$$

Agora calculando $\left(\frac{cc_2 + 2c_1}{cc_2}\right)^2 + \left(\frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu}\right)^2$, vemos que

$$\frac{c^2c_2^2 + 4cc_1c_2 + 4c_1^2}{c^2c_2^2} + \left[\frac{4c_1^2}{c^2c_2^2} \left(-1 - c\frac{c_2}{c_1}\right)\right] = 1.$$

Logo temos que

$$\left(\frac{cc_2 + 2c_1}{cc_2}\right) = \cos(A), \quad \left(\frac{2c_1}{cc_2} \epsilon \sqrt{-\nu}\right) = \sin(A).$$

Portanto a terceira coordenada obtida é dada por

$$c_2(\cos(u_2) \cos(A) \pm \sin(u_2) \sin(A)) = c_2 \cos(u_2 \pm A).$$

Analogamente a quarta coordenada é dada por $c_2 \sin(u_2 \pm A)$, mostrando que \tilde{X}_c é um toro. Portanto, excluindo o toro, podemos assumir que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Neste caso, usando (3.58) e (3.59) podemos ver que

$$f = \sin(\sqrt{\eta}u_1 + A_1), \quad g = \delta \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{\eta}{-\nu}} \cosh(\sqrt{-\nu}u_2 + B_1), \quad (3.62)$$

onde

$$\begin{aligned} \sin(A_1) &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, & \cos(A_1) &= \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\ \cosh(B_1) &= \frac{\delta a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}, & \sinh(B_1) &= \frac{\delta b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}, \end{aligned}$$

e $\delta = \pm 1$, de modo que $\delta a_2 > 0$. De fato, por (3.58) temos que

$$\begin{aligned} f &= a_1 \cos(\sqrt{\eta}u_1) + b_1 \sin(\sqrt{\eta}u_1) \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cos(\sqrt{\eta}u_1) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \sin(\sqrt{\eta}u_1) \right). \end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right)^2 + \left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right)^2 = 1,$$

temos

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left(\sin(A_1) \cos(\sqrt{\eta}u_1) + \cos(A_1) \sin(\sqrt{\eta}u_1) \right) \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\sqrt{\eta}u_1 + A_1). \end{aligned}$$

Como $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, temos por (3.59) que $a_2^2 - b_2^2 \neq 0$ e deste modo

$$\begin{aligned} g &= a_2 \cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{-\nu}u_2) \\ &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \left(\frac{\delta a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + \frac{\delta b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \sinh(\sqrt{-\nu}u_2) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{\delta a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \right)^2 - \left(\frac{\delta b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \right)^2 = 1.$$

Portanto

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \left(\cosh(B_1) \cosh(\sqrt{-\nu}u_2) + \sinh(B_1) \sinh(\sqrt{-\nu}u_2) \right) \\ &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \cosh(\sqrt{-\nu}u_2 + B_1). \end{aligned}$$

As constantes $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ e $\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$ não alteram a parametrização \tilde{X}_c e fazendo $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1$ e calculando $\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$ em (3.59), conseguimos

$$\frac{1}{c_1^2} \nu (a_2^2 - b_2^2) = -\frac{1}{c_2^2} \eta,$$

que implica que

$$\sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \delta \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{\eta}{-\nu}},$$

onde podemos concluir que f e g são dadas por (3.62).

Agora suponha que $c > \frac{c_2}{c_1}$. Pelo mesmo argumento usado anteriormente, sabemos que quando $a_2 = b_2 = 0$, \tilde{X}_c é um toro e quando $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, temos

$$f = \delta \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{\nu}{-\eta}} \cosh(\sqrt{-\eta}u_1 + A_2), \quad g = \text{sen}(\sqrt{\nu}u_2 + B_2), \quad (3.63)$$

e $\delta = \pm 1$, de modo que $\delta a_1 > 0$.

Segue de (3.44) e da expressão de f e g que, para qualquer $c \in \left(-\infty, -\frac{c_1}{c_2}\right) \cup \left(\frac{c_2}{c_1}, \infty\right)$, $\tilde{U} = \mathbb{R}^2$, onde \tilde{U} é dado por (3.24), isto é, \tilde{X}_c é definido sobre todo o plano.

Observe que quando $c < -\frac{c_1}{c_2}$, temos

$$\tilde{X}_{c,A_1,B_1}(u_1, u_2) = R_{\left(\frac{-A_1}{\sqrt{\eta}}, \frac{-B_1}{\sqrt{-\nu}}\right)} \circ \tilde{X}_{c,0,0} \circ h(u_1, u_2),$$

onde

$$h(u_1, u_2) = \left(u_1 + \frac{A_1}{\sqrt{\eta}}, u_2 + \frac{B_1}{\sqrt{-\nu}} \right),$$

e $R_{(\theta,\phi)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dado por

$$\begin{aligned} R_{(\theta,\phi)} : (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow (x_1 \cos(\theta) - x_2 \text{sen}(\theta), x_1 \text{sen}(\theta) + x_2 \cos(\theta), \\ &x_3 \cos(\phi) - x_4 \text{sen}(\phi), x_3 \text{sen}(\phi) + x_4 \cos(\phi)). \end{aligned}$$

A demonstração desse fato se faz analogamente como no Teorema 3.2.

Portanto, todas as superfícies de curvatura média constante \tilde{X}_{c,A_1,B_1} , $c \in \left(-\infty, -\frac{c_1}{c_2}\right)$

com diferentes valores de A_1, B_1 são congruentes. Analogamente, as superfícies com curvatura média constante \tilde{X}_{c, A_2, B_2} , $c \in \left(\frac{c_2}{c_1}, \infty\right)$ com diferentes valores de A_2, B_2 também são congruentes.

Portanto, sem perda de generalidade podemos considerar em (3.62) e (3.63)

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0. \quad (3.64)$$

Agora provaremos que as superfícies \tilde{X}_c e \tilde{X}_{2H-c} são congruentes. A partir da Observação 2.15, a métrica de \tilde{X}_c é dada por

$$ds_c^2 = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{P^2} [\gamma W^2 - \alpha \Omega^2 + (\beta \Omega + 2\gamma W) \Omega \lambda^i]^2 (|X_{u_i}| du_i)^2.$$

Onde

$$\alpha = -H = -\frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right), \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0,$$

$$P = \alpha \Omega^2 + \Omega W = -H \Omega^2 + \Omega W.$$

Portanto, deduzimos de $\lambda^1 = -\frac{c_2}{c_1}$, $\lambda^2 = \frac{c_1}{c_2}$, que

$$ds_c^2 = \frac{(c_1^2 f_c - c_2^2 g_c)^2}{(c_1^2 f_c + c_2^2 g_c)^2} (c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2) \equiv \psi_c^2 (c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2), \quad (3.65)$$

onde f_c e g_c são dado por (3.62), (3.63), com (3.64). De fato,

$$ds_c^2 = \frac{1}{(W - H\Omega)^2} \Omega^2 [(H + \lambda^1)^2 (|X_{u_1}| du_1)^2 + (H + \lambda^2)^2 (|X_{u_2}| du_2)^2].$$

Mas,

$$(H + \lambda^1)^2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_1^2 c_2^2} \right).$$

Analogamente $(H + \lambda^2)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_1^2 c_2^2} \right)$.

Segue de (3.45) que

$$\frac{1}{(W - H\Omega)} = \frac{2c_1^2 c_2^2}{(f c_1^2 + g c_2^2)}.$$

Como $|X_{u_i}| = c_i$ temos

$$\begin{aligned} ds_c^2 &= \left(\frac{2c_1^2 c_2^2}{fc_1^2 + gc_2^2} \right)^2 \left(\frac{c_1}{c_2} f - \frac{c_2}{c_1} g \right)^2 \frac{1}{4c_1^2 c_2^2} [c_1^2 du_2^2 + c_2^2 du_1^2] \\ &= \frac{(c_1^2 f_c - c_2^2 g_c)^2}{(c_1^2 f_c + c_2^2 g_c)^2} (c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2) \equiv \psi_c^2 (c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2). \end{aligned}$$

Observe que $c > \frac{c_2}{c_1}$ se, e somente se, $2H - c < -\frac{c_1}{c_2}$. De fato,

$$\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right) - c < -\frac{c_1}{c_2}$$

é equivalente a $c > \frac{c_2}{c_1}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \eta(2H - c) &= 1 - (2H - c) \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \\ &= 1 - \left(\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_2} \right) - c \right) \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \\ &= \frac{c_1^2}{c_2^2} \left(1 + c \frac{c_2}{c_1} \right) = \frac{c_1^2}{c_2^2} \nu(c). \end{aligned}$$

Analogamente $\nu(2H - c) = \frac{c_2^2}{c_1^2} \eta(c)$.

Portanto se $c > \frac{c_2}{c_1}$, temos

$$f_{2H-c}(u_1) = g_c(\tilde{u}_2), \quad g_{2H-c}(u_2) = \frac{c_1^4}{c_2^4} f_c(\tilde{u}_1),$$

onde $\tilde{u}_1 = \frac{c_2}{c_1} u_2$ e $\tilde{u}_2 = \frac{c_1}{c_2} u_1$. De fato, usando as equações (3.62), (3.63) e (3.64) temos

$$\begin{aligned} g_{2H-c}(u_2) &= \delta \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{\eta(2H - c)}{-\nu(2H - c)}} \cosh(\sqrt{-\nu(2H - c)} u_2) \\ &= \delta \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{\nu(c)}{-\eta(c)} \frac{c_1^4}{c_2^4}} \cosh\left(\frac{c_2}{c_1} \sqrt{-\eta(c)} u_2\right) \\ &= \delta \frac{c_1^4 c_2}{c_2^4 c_1} \sqrt{\frac{\nu(c)}{-\eta(c)}} \cosh\left(\frac{c_2}{c_1} \sqrt{-\eta(c)} u_2\right) \\ &= \delta \frac{c_1^4}{c_2^4} f_c(\tilde{u}_1), \end{aligned}$$

onde $\tilde{u}_1 = \frac{c_2}{c_1}u_2$. Analogamente $f_{2H-c}(u_1) = g_c(\tilde{u}_2)$, onde $\tilde{u}_2 = \frac{c_1}{c_2}u_1$. Portanto concluímos que $\tilde{X}_c(u_1, u_2)$ e $\tilde{X}_{2H-c}\left(\frac{c_2}{c_1}u_2, \frac{c_1}{c_2}u_1\right)$ têm as mesmas primeira e segunda forma fundamental. Portanto, \tilde{X}_c e \tilde{X}_{2H-c} são congruentes por uma isometria em S^3 .

Vamos mostrar agora que cada \tilde{X}_c é completa. Somente precisamos considerar $c > \frac{c_2}{c_1}$. neste caso, segue de (3.63) e (3.65) que

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_1^2 f_c - c_2^2 g_c}{c_1^2 f_c + c_2^2 g_c} \right| &\geq \frac{c_1^2 |f_c| - c_2^2 |g_c|}{c_1^2 |f_c| + c_2^2 |g_c|} \geq 1 - \frac{2c_2^2 |g_c|}{c_1^2 |f_c| + c_2^2 |g_c|} \\ &\geq 1 - \frac{2c_2^2}{c_2^2 + \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{\nu(c)}{-\eta(c)}}} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe um $r > 0$ tal que $\psi_c(u_1, u_2) \geq r, \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Precisamos mostrar que qualquer curva divergente na superfície \tilde{X}_c tem comprimento infinito. Tal curva é da forma $\alpha(t) = \tilde{X}_c(u_1(t), u_2(t))$, onde $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_1^2(t) + u_2^2(t)) = \infty$. Podemos supor que α é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é $(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1$. O comprimento da curva α é

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \psi(\alpha(t)) \sqrt{c_1^2 (u_1')^2 + c_2^2 (u_2')^2} dt \geq \int_0^\infty \min\{c_1, c_2\} \cdot r dr = \infty.$$

Isto mostra que \tilde{X}_c é completa. □

Se nos Teoremas 3.4 e 3.5 $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos uma família de superfícies mínimas em S^3 localmente associada ao toro de Clifford por uma Transformação de Ribaucour. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.6. *Considere o toro de Clifford \mathbb{T}^2 em S^3 parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(u_1), \sin(u_1), \cos(u_2), \sin(u_2)), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Excluindo o toro de Clifford e a menos de uma isometria de S^3 , uma superfície parametrizada \tilde{X}_c , onde $c \neq 0$, é uma superfície mínima localmente associada à X por uma Transformação de Ribaucour se, e somente se, $c > 1$ e \tilde{X}_c é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{X}_c &= \left(1 - \frac{f-g}{c(f+g)}\right) X - \frac{2}{c(f+g)}(f'X_{u_1} - g'X_{u_2}) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2c}}(-\cos(u_1), -\sin(u_1), \cos(u_2), \sin(u_2)), \end{aligned}$$

onde

$$f = \delta \sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \cosh(\sqrt{c-1}u_1), \quad g = \operatorname{sen}(\sqrt{c+1}u_2),$$

$\delta = \pm 1$, $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Cada superfície da família \tilde{X}_c é uma superfície mínima completa em \mathbb{S}^3 .

3.3 Aplicações da Transformações de Ribaucour no Espaço Hiperbólico

Nesta seção, aplicando a teoria da Seção 2 do Capítulo 2, construiremos uma família de superfícies completas em \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante $H = 1$ (cmc-1). As superfícies encontradas são localmente associada à prima da superfície de Enneper obtida na última seção do Capítulo 1.

Teorema 3.7. *Considere M a prima da superfície de Enneper em \mathbb{H}^3 parametrizada por*

$$X(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{|z|^2 + 6}{4} \cosh(u_1) - u_1 \sinh(u_1), \frac{|z|^2 + 6}{4} \sinh(u_1) \right. \\ \left. - u_1 \cosh(u_1), \frac{2 - |z|^2}{4} \sin(u_2) - u_2 \cos(u_2), \frac{|z|^2 - 2}{4} \cos(u_2) - u_2 \sin(u_2) \right), \quad (3.66)$$

onde $z = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Uma superfície parametrizada \tilde{X}_c com curvatura média constante 1 em \mathbb{H}^3 está localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour como no Corolário 2.17 se, e somente se, excluindo a superfície M ,

$$\tilde{X}_c = \left(1 - \frac{1}{c}\right)X + \frac{1}{c(W - \Omega)} \left(WY - \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i\right), \quad (3.67)$$

onde $e_i = \frac{X_{u_i}}{|X_{u_i}|}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\Omega = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{c-1} (R(u_1) - u_1 R'(u_1) - G(u_2) + u_2 G'(u_2)) \\ + \frac{\sqrt{2}}{16} \phi(R(u_1) + G(u_2)), \quad (3.68)$$

$$\Omega_1 = \frac{u_1(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} + \frac{R'(u_1)}{2}, \quad (3.69)$$

$$\Omega_2 = \frac{u_2(R(u_1) - G(u_2))}{\phi} + \frac{G'(u_2)}{2}, \quad (3.70)$$

$$W = \Omega + \frac{\sqrt{2}(G(u_2) - R(u_1))}{\phi}, \quad (3.71)$$

$$Y = \frac{2\sqrt{2}}{|z|^2 + 2} (\cosh(u_1), \sinh(u_1), \sin(u_2), -\cos(u_2)), \quad (3.72)$$

$$\phi = |z|^2 + 2. \quad (3.73)$$

$$R(u_1) = \sin(\sqrt{c-1}u_1 + A_1), \quad G(u_2) = \delta \cosh(\sqrt{c-1}u_2 + A_2), \quad (3.74)$$

quando $c > 1$,

$$R(u_1) = \delta \cosh(\sqrt{1-c}u_1 + B_1), \quad G(u_2) = \sin(\sqrt{1-c}u_2 + B_2), \quad (3.75)$$

quando $c < 1$, $c \neq 0$, onde $\delta = \pm 1$ e A_1, A_2, B_1 e B_2 são constantes, $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ e W satisfazem a condição inicial

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 - 2c\Omega W + (2c-1)\Omega^2 = 0. \quad (3.76)$$

Além disso, \tilde{X}_c é uma superfície regular definida sobre

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid [\Omega(\Omega - W)](u_1, u_2) \neq 0\}. \quad (3.77)$$

Demonstração. Segue de (1.20) que o campo de vetor unitário N de M é dado por

$$N = -X + Y, \quad (3.78)$$

onde X e Y são dados por (3.67) e (3.72), respectivamente e a primeira forma fundamental de M é dada por

$$ds^2 = \langle dX, dX \rangle = \frac{\phi^2}{32} (du_1^2 + du_2^2).$$

Agora calcularemos a segunda forma fundamental, que é obtida a partir de

$$\begin{aligned} II &= -\langle dX, dN \rangle = \langle dX, dX \rangle - \langle dX, dY \rangle \\ &= \frac{\phi^2}{32} (du_1^2 + du_2^2) - \langle dX, dY \rangle. \end{aligned}$$

Bastando calcular $\langle dX, dY \rangle$, logo

$$\langle dX, dY \rangle = \langle X_{u_1}, Y_{u_1} \rangle du_1^2 + (\langle X_{u_2}, Y_{u_1} \rangle + \langle X_{u_1}, Y_{u_2} \rangle) du_1 du_2 + \langle X_{u_2}, Y_{u_2} \rangle du_2^2,$$

onde

$$\begin{aligned}
X_{u_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{u_1}{2} \cosh(u_1) + \left(\frac{|z|^2 + 6}{4} - 1 \right) \sinh(u_1), -\frac{u_1}{2} \sinh(u_1) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{|z|^2 + 6}{4} - 1 \right) \cosh(u_1), -\frac{u_1}{2} \sen(u_2), \frac{u_1}{2} \cos(u_2) \right), \\
X_{u_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{u_2}{2} \cosh(u_1), \frac{u_2}{2} \sinh(u_1), \frac{u_2}{2} \sen(u_2) + \left(\frac{2 - |z|^2}{4} - 1 \right) \cos(u_2), \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_2}{2} \cos(u_2) + \left(\frac{2 - |z|^2}{4} - 1 \right) \sen(u_2) \right), \\
Y_{u_1} &= \left(-\frac{2u_1}{\phi^2} \cosh(u_1) + \frac{2\sqrt{2}}{\phi} \sinh(u_1), -\frac{2u_1}{\phi^2} \sinh(u_1) + \frac{2\sqrt{2}}{\phi} \cosh(u_1), \right. \\
&\quad \left. - \frac{2u_1}{\phi^2} \sen(u_2), \frac{2u_1}{\phi^2} \cos(u_2) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{u_2} &= \left(-\frac{2u_1}{\phi^2} \cosh(u_1), -\frac{2u_2}{\phi^2} \sinh(u_1), -\frac{2u_2}{\phi^2} \sen(u_2) + \frac{2\sqrt{2}}{\phi} \cos(u_2), \frac{2u_2}{\phi^2} \cos(u_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}}{\phi} \sen(u_2) \right).
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\langle X_{u_1}, Y_{u_1} \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\phi} + \frac{\sqrt{2}|z|^2}{2\phi} + \frac{6\sqrt{2}}{2\phi} \right) \\
&= \left(-\frac{2}{\phi} + \frac{|z|^2}{2\phi} + \frac{3}{\phi} \right) \\
&= \left(\frac{2 + |z|^2}{2\phi} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analogamente $\langle X_{u_2}, Y_{u_2} \rangle = -\frac{1}{2}$. Um cálculo fácil mostra que

$$\langle X_{u_2}, Y_{u_1} \rangle + \langle X_{u_1}, Y_{u_2} \rangle = 0.$$

Portanto, temos $-\langle dX, dY \rangle = -\frac{1}{2} du_1^2 + \frac{1}{2} du_2^2$. Logo

$$\begin{aligned}
II &= \frac{\phi^2}{32} (du_1^2 + du_2^2) - \langle dX, dY \rangle \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\phi^2}{32} \right) du_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi^2}{32} \right) du_2^2,
\end{aligned}$$

onde ϕ é dado por (3.73). As curvas coordenadas de M são linhas de curvaturas. Portanto,

$$e_i = \sqrt{\frac{32}{\phi^2}} X_{u_i} = \frac{4\sqrt{2}X_{u_i}}{\phi},$$

onde $i = 1, 2$. Logo $\{e_1 = \frac{4\sqrt{2}X_{u_1}}{\phi}, e_2 = \frac{4\sqrt{2}X_{u_2}}{\phi}\}$ é uma base ortonormal de direções principais. $\{\omega_1 = \frac{\phi}{4\sqrt{2}}du_1, \omega_2 = \frac{\phi}{4\sqrt{2}}du_2\}$ é a base dual de $\{e_1, e_2\}$. As formas de conexão de M são dadas por (1.8).

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{64}{2\phi^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} 2u_2 \frac{\phi}{4\sqrt{2}} du_1 + \frac{\sqrt{2}}{8} 2u_1 \frac{\phi}{4\sqrt{2}} du_2 \right) \\ &= \frac{2}{\phi} (-u_2 du_1 + u_1 du_2). \end{aligned}$$

Considere λ^1, λ^2 as curvaturas principais de M , então

$$-\lambda^1 = 1 - \frac{16}{\phi^2}, \quad -\lambda^2 = 1 + \frac{16}{\phi^2}. \quad (3.79)$$

Ou seja, M tem curvatura média constante igual a 1.

Para encontrar superfícies com curvatura média constantes 1 localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito às direções principais, precisamos resolver o seguinte sistema obtido a partir de (2.33), (2.34) e (2.35):

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \Omega_2 \frac{\phi_{u_1}}{\phi}, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \Omega_1 \frac{\phi_{u_2}}{\phi}, \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \frac{\sqrt{2}\phi\Omega_i}{8}, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{\sqrt{2}\lambda^i\phi\Omega_i}{8}, \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} = -\Omega_j \frac{\phi_{u_j}}{\phi} - \frac{\phi}{4\sqrt{2}} [(2c-1)\Omega - cW + (c\Omega - W)\lambda^i], \quad i \neq j, \quad (3.84)$$

com a condição inicial satisfazendo (3.76) onde, pelo Corolário 2.17 a constante c não se anula.

Considerando a derivada de (3.80) com respeito a u_1 e usando (3.81), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_2 \partial u_1} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} \frac{\phi_{u_1}}{\phi} + \Omega_2 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi} \right) \\
&= \Omega_1 \frac{\phi_{u_2}}{\phi} \frac{\phi_{u_1}}{\phi} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} \frac{\phi}{\phi_{u_1}} \left(\frac{2\phi - \phi_{u_1} 2u_1}{\phi^2} \right) \\
&= \Omega_1 \frac{\phi_{u_2} \phi_{u_1}}{\phi^2} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} \frac{1}{u_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} \frac{\phi_{u_1}}{\phi} \\
&= \Omega_1 \frac{\phi_{u_2} \phi_{u_1}}{\phi^2} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{\phi_{u_1}}{\phi} \right) \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_2 \partial u_1} + \left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi} - \frac{1}{u_1} \right) \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} - \Omega_1 \frac{\phi_{u_2} \phi_{u_1}}{\phi^2} = 0. \quad (3.85)$$

A equação (3.85) pode ser resolvida explicitamente. De fato, vamos reduzir a equação acima por

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_2 \partial u_1} + A \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} - B \Omega_1 = 0,$$

onde

$$A = \left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi} - \frac{1}{u_1} \right), \quad B = \frac{\phi_{u_2} \phi_{u_1}}{\phi^2}.$$

Temos que $\frac{\partial A}{\partial u_2} = B$. Logo

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u_2 \partial u_1} + A \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} - \frac{\partial A}{\partial u_2} \Omega_1 = 0,$$

que implica que

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A \Omega_1) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + A \Omega_1 \right) = 0.$$

Portanto temos $\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + A \Omega_1 = f(u_1)$. Se Ω_1 é do tipo $\Omega_1 = h \exp \left(- \int A du_1 \right)$ temos que

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = h_{u_1} \exp \left(- \int A du_1 \right) - A h \exp \left(- \int A du_1 \right) = h_{u_1} \exp \left(- \int A du_1 \right) - A \Omega_1,$$

isto é, $\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + A\Omega_1 = h_{u_1} \exp\left(-\int Adu_1\right)$, ou seja $h_{u_1} \exp\left(-\int Adu_1\right) = f(u_1)$. Mas $A = \left(\frac{\phi_{u_1}}{\phi} - \frac{1}{u_1}\right)$ e integrando A obtemos

$$\begin{aligned}\int Adu_1 &= \int \frac{\phi_{u_1}}{\phi} du_1 - \int \frac{1}{u_1} du_1 \\ &= \ln(\phi) - \ln(u_1) - \ln(g(u_2)) \\ &= \ln\left(\frac{\phi}{u_1}\right) + \ln(g(u_2)).\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$h_{u_1} \exp\left(-\int Adu_1\right) = h_{u_1} \exp\left(-\ln\left(\frac{\phi}{u_1}\right) - \ln(g(u_2))\right) = h_{u_1} \left(\frac{u_1}{\phi} \cdot \frac{1}{g(u_2)}\right).$$

Logo, conseguimos que $h_{u_1} \left(\frac{u_1}{\phi} \cdot \frac{1}{g(u_2)}\right) = f(u_1)$ ou seja $h_{u_1} = \frac{\phi}{u_1} g(u_2) f(u_1)$. Integrando a última equação obtemos

$$h = g(u_2) \int \phi F(u_1) du_1,$$

onde $F(u_1) = \frac{f(u_1)}{u_1}$. E como $\Omega_1 = h \exp\left(-\int Adu_1\right)$ conseguimos

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{u_1}{\phi} \cdot \frac{1}{g(u_2)} \cdot g(u_2) \int \phi F(u_1) du_1 \\ &= \frac{u_1}{\phi} \int \phi F(u_1) du_1.\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da (3.85) é dada por

$$\Omega_1 = \frac{u_1}{\phi} \left(G(u_2) + \int \phi F(u_1) du_1 \right), \quad (3.86)$$

onde $G(u_2) = \frac{1}{g(u_2)}$ e temos que $F(u_1)$ (respectivamente $G(u_2)$) é uma função arbitrária de u_1 (respectivamente u_2).

Analogamente, temos que

$$\Omega_2 = \frac{u_2}{\phi} \left(R(u_1) + \int \phi Q(u_2) du_2 \right), \quad (3.87)$$

onde $R(u_1)$ (respectivamente $Q(u_2)$) é uma função arbitrária de u_1 (respectivamente u_2).

A partir de (3.82) conseguimos

$$\frac{\partial(\phi\Omega_1)}{\partial u_2} = \frac{\partial(\phi\Omega_2)}{\partial u_1}. \quad (3.88)$$

Substituindo (3.86) e (3.87) em (3.88) temos

$$u_1 \left(G'(u_2) + 2u_2 \int F(u_1) du_1 \right) = u_2 \left(R'(u_1) + 2u_1 \int Q(u_2) du_2 \right). \quad (3.89)$$

Assim,

$$\frac{G'(u_2)}{u_2} - 2 \int Q(u_2) du_2 = \frac{R'(u_1)}{u_1} - 2 \int F(u_1) du_1 \equiv d, \quad (3.90)$$

onde d é uma constante. Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 0$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{G'(u_2)}{u_2} &= 2 \int Q(u_2) du_2 \\ G(u_2) &= 2 \int u_2 \left(\int Q(u_2) du_2 \right) du_2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Analogamente

$$R(u_1) = 2 \int u_1 \left(\int F(u_1) du_1 \right) du_1. \quad (3.92)$$

Usando integração por partes as equações (3.91) e (3.92) resultam em

$$\begin{aligned} \int \phi Q(u_2) du_2 &= \frac{\phi G'(u_2)}{2u_2} - G(u_2), \\ \int \phi F(u_1) du_1 &= \frac{\phi R'(u_1)}{2u_1} - R(u_1). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Segue de (3.86) e (3.87) que

$$\phi\Omega_1 = u_1(G(u_2) - R(u_1)) + \frac{\phi R'(u_1)}{2}, \quad (3.94)$$

$$\phi\Omega_2 = u_2(R(u_1) - G(u_2)) + \frac{\phi G'(u_2)}{2}. \quad (3.95)$$

Integrando os dois lados da igualdade a equação (3.94) temos

$$\int \phi\Omega_1 du_1 = \left(\frac{u_1^2}{2} + m \right) G(u_2) + \frac{\phi}{2} R(u_1) - 2 \int u_1 R(u_1) du_1,$$

onde m é uma constante. Derivando a equação anterior em relação a u_2 , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \int \phi \Omega_1 du_1 = \left(\frac{u_1^2}{2} + m \right) G'(u_2) + u_2 R(u_1),$$

subtraindo a equação (3.95) com a equação anterior, conseguimos

$$\phi \Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} \int \phi \Omega_1 du_1 = \left(1 + \frac{u_2^2}{2} - m \right) G'(u_2) - u_2 G(u_2). \quad (3.96)$$

Assim, deduzimos a partir de (3.82) que

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\sqrt{2}}{8} \int \phi \Omega_1 du_1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \int \left(\phi \Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} \int \phi \Omega_1 du_1 \right) du_2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \phi (R(u_1) + G(u_2)) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int u_1 R(u_1) du_1 + \int u_2 G(u_2) du_2 \right). \end{aligned} \quad (3.97)$$

De fato, temos que $\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \frac{\sqrt{2} \phi \Omega_1}{8}$ que implica que $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \phi \Omega_1 du_1 + f(u_2)$ e derivando Ω em relação a u_2 obtemos

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \int \phi \Omega_1 du_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} f(u_2),$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial u_2} f(u_2) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\phi \Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} \int \phi \Omega_1 du_1 \right).$$

Logo

$$f(u_2) = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \left(\phi \Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} \int \phi \Omega_1 du_1 \right) du_2,$$

Portanto,

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \phi \Omega_1 du_1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \int \left(\phi \Omega_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} \int \phi \Omega_1 du_1 \right) du_2.$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\left(\frac{u_1^2}{2} + m \right) G(u_2) + \frac{\phi}{2} R(u_1) - 2 \int u_1 R(u_1) du_1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\left(\frac{u_2^2}{2} + m \right) R(u_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi}{2} G(u_2) - 2 \int u_2 G(u_2) du_2 - \left(\frac{u_1^2}{2} + m \right) G(u_2) - \left(\frac{u_2^2}{2} + m \right) R(u_1) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \phi (R(u_1) + G(u_2)) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\int u_1 R(u_1) du_1 + \int u_2 G(u_2) du_2 \right). \end{aligned}$$

Vamos considerar a notação $A = -\lambda^1\Omega_1\phi$, $B = -\lambda^2\Omega_2\phi$, então

$$\begin{aligned}\int Adu_1 &= -\int \lambda^1\Omega_1\phi = \int \left(1 - \frac{16}{\phi^2}\right)\Omega_1\phi du_1 \\ &= \left(\frac{u_1^2}{2} + m\right)G(u_2) + \frac{8(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} \\ &\quad + \frac{\phi R(u_1)}{2} - 2\int u_1R(u_1)du_1,\end{aligned}$$

e obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 = \left(\frac{u_1^2}{2} + m\right)G'(u_2) + u_2R + \frac{8(\phi G' - 2u_2(G - R))}{\phi^2},$$

concluindo que

$$B - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 = \left(1 + \frac{u_2^2}{2} - m\right)G'(u_2) - u_2G(u_2). \quad (3.98)$$

De fato,

$$\begin{aligned}B - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 &= \left(1 + \frac{16}{\phi^2}\right)\Omega_2\phi - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 \\ &= \left(1 + \frac{16}{\phi^2}\right)\left(u_2(R(u_1) - G(u_2)) + \frac{\phi G'(u_2)}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 \\ &= \left(\frac{\phi - u_1^2}{2} - m\right)G'(u_2) - u_2G(u_2) \\ &= \left(1 + \frac{u_2^2}{2} - m\right)G'(u_2) - u_2G(u_2).\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos de (3.83) que $\frac{\partial W}{\partial u_1} = -\frac{\sqrt{2}\lambda^1\phi\Omega_1}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}A$. Logo $W = \frac{\sqrt{2}}{8} \int Adu_1 + f(u_2)$, portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u_2} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 + \frac{\partial}{\partial u} f(u_2); \\ \frac{\partial}{\partial u} f(u_2) &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(B - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1\right).\end{aligned}$$

que dará

$$f(u_2) = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \left(B - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1\right) du_2.$$

Logo,

$$W = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\int Adu_1 + \int \left(B - \frac{\partial}{\partial u_2} \int Adu_1 \right) du_2 \right].$$

Agora calculando W temos que

$$\begin{aligned} W &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left\{ \left(\frac{u_1^2}{2} + m \right) G(u_2) + \frac{8(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} + \frac{\phi R(u_1)}{2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int u_1 R(u_1) du_1 + \int \left[\left(1 + \frac{u_2^2}{2} - m \right) G'(u_2) - u_2 G(u_2) \right] du_2 \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left\{ \left(\frac{u_1^2}{2} + m \right) G(u_2) + \frac{8(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} + \frac{\phi R(u_1)}{2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int u_1 R(u_1) du_1 + G(u_2) - mG(u_2) + \frac{u_2^2}{2} G(u_2) - 2 \int u_2 G(u_2) du_2 \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} + \frac{\sqrt{2}}{8} \left\{ \frac{\phi}{2} G(u_2) + \frac{\phi R(u_1)}{2} - 2 \int u_1 R(u_1) du_1 - 2 \int u_2 G(u_2) du_2 \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} + \Omega. \end{aligned}$$

Verifica-se que as funções $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ e W dadas por (3.94), (3.95), (3.97) e (3.71) satisfazem o sistema de equações dados por (3.80)-(3.83). Vamos determinar R e G usando a condição (3.76).

A partir de (3.84) temos

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \Omega_2 \frac{2u_2}{\phi^2} - \frac{\sqrt{2}}{8} (\lambda^1 + c)W + \frac{\sqrt{2}}{8} (2c - 1 + c\lambda^1)\Omega = 0. \quad (3.99)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + \Omega_1 \frac{2u_1}{\phi^2} - \frac{\sqrt{2}}{8} (\lambda^2 + c)W + \frac{\sqrt{2}}{8} (2c - 1 + c\lambda^2)\Omega = 0. \quad (3.100)$$

Tomando a derivada de (3.94) com respeito a u_1 , conseguimos

$$\phi \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + 2u_1 \Omega_1 = (G(u_2) - R(u_1)) + \frac{\phi R''(u_1)}{2}. \quad (3.101)$$

De fato, por (3.94)

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = \frac{((G(u_2) - R(u_1)) - u_1 R'(u_1))\phi - 2u_1(u_1(G(u_2) - R(u_1)))}{\phi^2} + \frac{R''(u_1)}{2}.$$

que implica que

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} &= (G(u_2) - R(u_1)) - u_1 R'(u_1) - \frac{2u_1^2(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} + \frac{\phi R''(u_1)}{2} \\ &= (G(u_2) - R(u_1)) - 2u_1 \Omega_1 + \frac{\phi R''(u_1)}{2}. \end{aligned}$$

De modo análogo, só que derivando (3.95) com respeito a u_2 , obtemos

$$\phi \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + 2u_2 \Omega_2 = (R(u_1) - G(u_2)) + \frac{\phi G''(u_2)}{2}. \quad (3.102)$$

Somando as equações (3.99) e (3.100) temos que

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + \Omega_1 \frac{2u_1}{\phi^2} + \Omega_2 \frac{2u_2}{\phi^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(c-1)(W - \Omega).$$

Dividindo as equações (3.101) e (3.102) por ϕ^2 e depois somando ambas obtemos que

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} + \Omega_1 \frac{2u_1}{\phi^2} + \Omega_2 \frac{2u_2}{\phi^2} = \frac{R''}{2\phi} + \frac{G''}{2\phi}.$$

Portanto, a partir das duas equações obtidas anteriormente concluímos que

$$\frac{R'' + G''}{\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(c-1)(W - \Omega). \quad (3.103)$$

Substituindo (3.71) em (3.103), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{R'' + G''}{\phi} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(c-1)\left(\Omega + \frac{\sqrt{2}(G(u_2) - R(u_1))}{\phi} - \Omega\right) \\ &= (c-1) \frac{(G(u_2) - R(u_1))}{\phi}, \end{aligned}$$

que nos dá

$$R'' + (c-1)R = -G'' + (c-1)G = \nu, \quad (3.104)$$

onde ν é uma constante.

Observe que $R = \tilde{R} + \frac{\nu}{(c-1)}$, $G = \tilde{G} + \frac{\nu}{(c-1)}$, onde \tilde{R} e \tilde{G} são soluções das equações

$$\tilde{R}'' + (c-1)\tilde{R} = 0, \quad \tilde{G}'' - (c-1)\tilde{G} = 0.$$

De fato, pois

$$\tilde{R}'' + (c-1)\tilde{R} = R'' + (c-1)R - \nu = 0.$$

A partir das expressões de \tilde{X}_c, W, Ω_1 e Ω_2 , sem perda de generalidade, podemos supor que $\nu = 0$. Assim, temos a partir de (3.104) que

$$R(u_1) = -\frac{R''(u_1)}{c-1}, \quad G(u_2) = \frac{G''(u_2)}{c-1},$$

que implica em

$$\int u_1 R(u_1) du_1 + \int u_2 G(u_2) du_2 = \frac{1}{c-1} (R - u_1 R' - G + u_2 G') + m, \quad (3.105)$$

onde m é uma constante. De fato, como

$$u_1 R(u_1) = -\frac{u_1 R''(u_1)}{c-1} \quad e \quad \int u_1 R(u_1) du_1 = -\frac{1}{c-1} \int u_1 R''(u_1) du_1.$$

Temos

$$\begin{aligned} \int u_1 R''(u_1) du_1 &= u_1 R'(u_1) - \int R'(u_1) du_1 \\ &= u_1 R'(u_1) - R(u_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int u_1 R(u_1) du_1 = \frac{1}{c-1} (R(u_1) - u_1 R'(u_1)) + c_1.$$

Analogamente temos

$$\int u_2 G(u_2) du_2 = \frac{1}{c-1} (-G(u_2) + u_2 G'(u_2)) + c_2.$$

Adicionando as duas integrais obtidas acima, obtemos a expressão (3.105). Assim, obtemos a partir de (3.97) e (3.105) que

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{16} \phi (R(u_1) + G(u_2)) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{c-1} (R - u_1 R' - G + u_2 G') - \frac{\sqrt{2}}{4} m. \quad (3.106)$$

Substituindo (3.69), (3.70), (3.71) e (3.106) na condição algébrica (3.76), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 - 2c\Omega W + (2c-1)\Omega^2 \\ &= \frac{1}{\phi} (G-R)^2 + \frac{(R'^2 + G'^2)}{4} + \frac{(G-R)}{\phi} (u_1 R' - u_2 G') + \frac{2\sqrt{2}}{\phi} \Omega (G-R)(1-c) \\ &= \frac{1}{\phi} (G-R)^2 + \frac{(R'^2 + G'^2)}{4} + \frac{(G-R)}{\phi} (u_1 R' - u_2 G') + \frac{(G^2 - R^2)(1-c)}{4} \\ &\quad - \frac{(R-G)(R-G)}{\phi} - \frac{(R-G)}{\phi} (-u_1 R' + u_2 G') - (1-c) \frac{(G-R)}{\phi} m \\ &= \frac{G'^2 + R'^2 + (G^2 - R^2)(1-c)}{4} - \frac{(G-R)m(1-c)}{\phi}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{G'^2 + R'^2 + (G^2 - R^2)(1-c)}{4} - (1-c)m \frac{(G-R)}{\phi} = 0. \quad (3.107)$$

Vamos considerar o caso $c > 1$. Neste caso, as funções R e G na superfície \tilde{X}_c , descrita por (3.67), são dadas por

$$\begin{aligned} R(u_1) &= a_1 \cos(\sqrt{c-1}u_1) + b_1 \sin(\sqrt{c-1}u_1), \\ G(u_2) &= a_2 \cosh(\sqrt{c-1}u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{c-1}u_2), \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes.

Substituindo (3.108) em (3.107) e simplificando, obtemos que

$$\frac{(c-1)(a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 + b_2^2)}{4} - \frac{(1-c)m(G-R)}{\phi} = 0. \quad (3.109)$$

De fato, basta calcular $G'^2 + R'^2 + (G^2 - R^2)(1-c)$. Logo

$$\begin{aligned} &(c-1)[(-a_1 \sin(\sqrt{c-1}u_1) + b_1 \cos(\sqrt{c-1}u_1))^2 + (a_2 \sinh(\sqrt{c-1}u_2) + b_2 \cosh(\sqrt{c-1}u_2))^2] \\ &- (c-1)[(a_2 \cosh(\sqrt{c-1}u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{c-1}u_2))^2 - (a_1 \cos(\sqrt{c-1}u_1) + b_1 \sin(\sqrt{c-1}u_1))^2] \\ &= (c-1)(a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 + b_2^2). \end{aligned}$$

Portanto, temos a equação (3.109), que resulta em

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 - b_2^2 \text{ e } m = 0. \quad (3.110)$$

Assim, Ω é dado por (3.68).

Segue da Observação 2.15, que a métrica de \tilde{X}_c é dado por

$$\begin{aligned} d\tilde{s}_c^2 &= \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 = \frac{1}{P^2} \{ (\Omega^2(1+\lambda^1)\omega_1)^2 + (\Omega^2(1+\lambda^2)\omega_2)^2 \} \\ &= \frac{1}{(\Omega(W-\Omega))^2} \left\{ \left(\Omega^2 \left(1 - 1 + \frac{16}{\phi^2} \right) \frac{\phi}{4\sqrt{2}} du_1 \right)^2 + \left(\Omega^2 \left(1 - 1 - \frac{16}{\phi^2} \right) \frac{\phi}{4\sqrt{2}} du_2 \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(\Omega(W-\Omega))^2} \left\{ \left(\Omega^2 \frac{2\sqrt{2}}{\phi} du_1 \right)^2 + \left(-\Omega^2 \frac{2\sqrt{2}}{\phi} du_2 \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\Omega^2}{(W-\Omega)^2} \cdot \frac{8}{\phi^2} (du_1^2 + du_2^2). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Se $(a_1, b_1) = (0, 0)$, então R e G são dados por

$$R(u_1) = 0, \quad G(u_2) = a_2 (\cosh(\sqrt{c-1}u_2) \pm \sinh(\sqrt{c-1}u_2)).$$

A partir de (3.68), sabemos que

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\phi}{4} G - \frac{1}{c-1} (-G \pm u_2 \sqrt{c-1} G) \right).$$

Agora, de (3.71) temos

$$W - \Omega = \frac{\sqrt{2}G}{\phi},$$

que implica em

$$d\tilde{s}_c^2 = \frac{\iota_{\mp}^2}{32} (du_1^2 + du_2^2), \text{ onde } \iota_{\mp} = u_1^2 + \left(u_2 \pm \frac{2}{\sqrt{c-1}} \right)^2 + 2.$$

De fato, por (3.111), basta calcularmos $\frac{\Omega^2}{(W - \Omega)^2 \phi^2}$, onde $(W - \Omega)^2 = \frac{2G^2}{\phi^2}$ e

$$\Omega^2 = \frac{2}{16} \left(\frac{\phi}{4} G - \frac{1}{c-1} (-G \pm u_2 \sqrt{c-1} G) \right)^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{(W - \Omega)^2 \phi^2} &= \frac{8\Omega^2}{2G^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{4} + \frac{1}{c-1} \pm \frac{u_2}{\sqrt{c-1}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{32} \left(u_1^2 + u_2^2 + 2 + \frac{4}{c-1} \pm \frac{4u_2}{\sqrt{c-1}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{32} \left(u_1^2 + \left(u_2 \pm \frac{2}{\sqrt{c-1}} \right)^2 + 2 \right)^2. \end{aligned}$$

Sabemos que as curvaturas principais de \tilde{X}_c são dadas por

$$\tilde{\lambda}_c^i = \frac{(2\alpha\Omega W + \beta W^2) + \lambda^i(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}{(2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2)\lambda^i - (\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_c^1 &= \frac{-2\Omega W + W^2 - \lambda^1 \Omega^2}{\lambda^1 \Omega^2 + \Omega^2} = -1 + \frac{(W - \Omega)^2}{\Omega^2 \left(-1 + \frac{16}{\phi^2} + 1 \right)} \\ &= -1 + \frac{(W - \Omega)^2}{\Omega^2} \cdot \frac{\phi^2}{8} \cdot \frac{1}{2} = -1 + \frac{32}{\iota_{\mp}^2} \cdot \frac{1}{2} = -1 + \frac{16}{\iota_{\mp}^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\tilde{\lambda}_c^2 = -1 - \frac{16}{\iota_{\mp}^2}.$$

Combinando as curvaturas principais $\tilde{\lambda}_c^1$, $\tilde{\lambda}_c^2$ com o fato de que \tilde{X}_c é parametrizado por linhas de curvaturas, implica que a segunda forma fundamental de \tilde{X}_c é dado por

$$\begin{aligned} II &= -\tilde{\lambda}_c^1 E du_1 - \tilde{\lambda}_c^2 G du_2 \\ &= -\left(-1 + \frac{16}{\iota_{\mp}^2}\right) \frac{\iota_{\mp}^2}{32} du_1^2 - \left(-1 - \frac{16}{\iota_{\mp}^2}\right) \frac{\iota_{\mp}^2}{32} du_2^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\iota_{\mp}^2}{32}\right) du_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\iota_{\mp}^2}{32}\right) du_2^2. \end{aligned}$$

Visto que $X(u_1, u_2)$ e $\tilde{X}_c\left(u_1, u_2 \pm \frac{2}{\sqrt{c-1}}\right)$, possuem a mesma primeira e segunda formas fundamentais, concluímos que X e \tilde{X}_c são congruentes.

Portanto, excluindo a prima da superfície de Enneper, podemos supor que $(a_1, b_1) \neq 0$, e neste caso, temos

$$\begin{aligned} R(u_1) &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \operatorname{sen}(\sqrt{c-1}u_1 + A_1), \\ G(u_2) &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \delta \cosh(\sqrt{c-1}u_2 + A_2), \end{aligned}$$

e $\delta = 1$ ou -1 de modo que $\delta a_2 > 0$. A demonstração desse fato se faz analogamente como no Teorema 3.2 e 3.5.

Visto que (3.110) vale, podemos supor a partir da expressão \tilde{X}_c que

$$R(u_1) = \operatorname{sen}(\sqrt{c-1}u_1 + A_1), \quad G(u_2) = \delta \cosh(\sqrt{c-1}u_2 + A_2).$$

O caso $c < 1$ é análogo e será omitida.

Pelo Corolário 2.16, sabemos que $1 + c^2 - 2c > 0$, isto é, $c \neq 1$. A partir de (2.38) e (3.78), concluímos que \tilde{X}_c é dado por (3.67). De fato, temos que $S = 2c\Omega(W - \Omega)$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{X}_c &= \left(1 + \frac{\Omega}{c(W - \Omega)}\right) X - \frac{1}{c(W - \Omega)} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - W(-X + Y)\right) \\ &= \left(1 + \frac{\Omega}{c(W - \Omega)} - \frac{W}{c(W - \Omega)}\right) X + \frac{1}{c(W - \Omega)} \left(WY - \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{c}\right) X + \frac{1}{c(W - \Omega)} \left(WY - \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i\right). \end{aligned}$$

A partir de (3.67), \tilde{X}_c é bem definido sobre

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | (W - \Omega)(u_1, u_2) \neq 0\}. \quad (3.112)$$

A partir do Teorema 2.14, \tilde{X}_c é uma superfície regular em

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U | (T^2 + 2TQH + Q(K + 1))(u_1, u_2) \neq 0\}.$$

Visto que $\alpha = -H, \beta = 1, \gamma = 0$, temos $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2 = -\Omega^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2 = \Omega^2$.

Temos que $K = -\left[\frac{4}{\phi}\right]^4 \neq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} K &= \tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2 - \bar{k} = \left(-1 + \frac{16}{\phi^2}\right) \left(-1 - \frac{16}{\phi^2}\right) - 1 \\ &= -\frac{16^2}{\phi^4} = -\left[\frac{4}{\phi}\right]^4. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \{(u_1, u_2) \in U | [T^2 + 2TQH + Q(K + 1)](u_1, u_2) \neq 0\} \\ &= \{(u_1, u_2) \in U | [\Omega^4 - 2\Omega^4 + \Omega^4(K + 1)](u_1, u_2) \neq 0\} \\ &= \{(u_1, u_2) \in U | [\Omega^4 K](u_1, u_2) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, concluimos que

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U | [\Omega K](u_1, u_2) \neq 0\}.$$

E então segue a partir de $K = -\left[\frac{4}{\phi}\right]^4 \neq 0$ e (3.112) que

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | [\Omega(W - \Omega)](u_1, u_2) \neq 0\}.$$

Isto completa a demonstração de Teorema 3.7 □

As superfícies \tilde{X}_c obtidas no Teorema 3.7 para qualquer $c \neq 1, 0$ são superfícies regulares completas definidas sobre $\mathbb{R}^2 - \{p_k, k \in \mathbb{Z}\}$, onde

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{\sqrt{c-1}}(2k\pi + \delta\frac{\pi}{2} - A_1, A_2), \text{ quando } c > 1, \\ p_k &= \frac{1}{\sqrt{1-c}}(-B_1, 2k\pi + \delta\frac{\pi}{2} - B_2), \text{ quando } c < 1. \end{aligned}$$

Esta demonstração será omitida e pode ser encontrada em [WT2].

Referências Bibliográficas

- [Bi] L. Bianchi. *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali e il teorema generale di permutabilità*. Annali di Matematica (3), **27** (1918), 183-253 e (3), **28** (1919), 187-233.
- [Bo] A. I. Bobenko. *All constant mean curvature tori in $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$ em termos de theta functions*. Math. Ann. **290** (1991), 209-245.
- [CFT1] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *Ribaucour transformation for constant mean curvature and linear Weingarten surfaces*. Pacific Journal of Mathematics, vol. **212**(2003), 256–296.
- [CFT2] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *On Ribaucour transformation for hypersurfaces*. Mat. Contemp. **17** (1999), 209-245.
- [CFT3] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *Minimal surfaces obtained by Ribaucour transformation*. Geom. Dedicata **96** (2003), 117-150.
- [CFT4] A. V. Corro, W. Ferreira, and K. Tenenblat. *Ribaucour transformation revisited*. Comm. Anal. Geom **12** (2004), 1055-1082.
- [DH] J. Dorfmeister and G. Haak. *Investigation and application of the dressing action on surfaces of constant mean curvature*. Quart J Math. **51** (2000), 57-73.
- [dC1] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice Hall, 1976.
- [dC2] M. P. do Carmo. *Formas Diferenciais e Aplicações*. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1971.

-
- [dC3] M. P. do Carmo. *O Método do Referencial Móvel*. 3º Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, 1976.
- [dC4] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 3º edição, 2005.
- [GG] C. C. Góes and M. E. L. Galvão. *A Weierstrass type representation for surfaces in hyperbolic space with mean curvature one*. Note di Matemática Vol. **18**-nº 1, 43-61 (1998).
- [K1] N. Kapouleas. *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three spaces*. Ann. Math. **131** (1990), 239-330.
- [K2] N. Kapouleas. *Complete constant mean curvature surfaces constructed by using Went tori*. Invent. Math. **119** (1995), 443-518.
- [Ka] H. Karcher. *The triply periodic minimal surfaces of A. Sheon and their constant mean curvature companions*. Manuscripta Math. **64** (1989), 291-357.
- [KMS] M. Kilan, I. McIntosh, and N. Schmitt. *New constant mean curvature surfaces*. Experiment. Math. **9** (2000), 595-611.
- [La] B. Lawson. *Complete minimal surfaces em \mathbb{S}^3* . Ann. Math. **92**(1970), 335-374.
- [PS] U. Pinkal and I. Sterling. *On classification of constant mean curvature tori*. Ann. Math. **130**(1989), 407-451.
- [Te] K. Tenenblat. *Transformations of manifolds and applications to differential equations*. Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math. **93**, Longman, Harlow, (1998).
- [WT1] Q. Wang and K. Tenenblat. *Ribaucour transformation for linear Weingarten surfaces in space forms*. Pacific Journal of Mathematics, vol. **212** (2003), 256–296.
- [WT2] Q. Wang and K. Tenenblat. *Constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space obtained by Ribaucour transformation*. Preprint.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)