UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SOBRE O MOMENTO ANGULAR DO CAMPO GRAVITACIONAL

SÉRGIO COSTA ULHOA

ORIENTADOR:

JOSÉ WADIH MALUF

Brasília, 18 de maio de 2007

Resumo

O teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é uma descrição alternativa do campo gravitacional em termos de um campo de tétradas, que correspondem às variáveis dinâmicas do sistema. O TEGR permite-nos tratar de maneira adequada o problema de definição da energia, momento angular e momento do campo gravitacional. Construiremos uma expressão para o momento angular do campo gravitacional que seja independente de coordenadas. Verificaremos que o momento e momento angular formam uma representação do grupo de Poincaré, o que nos permite definir os invariantes de Casimir. Aplicaremos os resultados para algumas configurações simples de tétradas e investigaremos as consequências de tais resultados.

Abstract

The teleparallel equivalent of general relativity (TEGR) is a viable alternative geometrical description of General Relativity in terms of the tetrad field. In the framework of the TEGR it has been possible to address the longstanding problem of defining the energy, momentum and angular momentum of the gravitational field. We find that the gravitational energy-momentum and angular momentum correspond to a representation of the Poincaré group. This result allows us to define Casimir type invariants for the gravitational field. We shall apply this results in some simple configuration of tetrads.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Um entendimento mais completo e profundo da Relatividade Geral de Einstein requer o conhecimento da estrutura das equações de campo, soluções e suas consequências, bem como a compreensão de propriedades tais como: a energia, momento e momento angular do campo gravitacional [1]. Devido ao surgimento de problemas na interpretação, e mesmo na definição dessas propriedades, que são indispensáveis à completa compreensão da teoria, torna-se necessária uma nova abordagem, porém equivalente, para a descrição do campo gravitacional.

Na abordagem geométrica da gravitação surgem diversos problemas conceituais tais como a inexistência de uma densidade para energia gravitacional, e existem sérias dificuldades quando tentamos construir uma teoria de calibre na tentativa de se unificar as quatro interações fundamentais da natureza. Parte dessa dificuldade advém de extensões equivocadas do Princípio da Equivalência. Um outro problema é que a interação gravitacional é muito fraca caracterizando a chamada "hierarquia das interações".

A teoria de Yang-Mills [2] descreve com sucesso três das quatro interações fundamentais. A gravitação é uma interação que permanece alheia a essa unificação. Existem duas razões que explicam esse fato. A primeira é que a Lagrangeana, na visão geométrica, é linear na curvatura, sendo que no teorema de Noether [3] (embasamento Matemático da teoria de Yang-Mills) a Lagrangeana é quadrática. A segunda é que não se sabe qual é realmente a simetria de calibre da gravitação, logo não podemos construir nenhum observável da teoria, uma vez que a expressão de Noether para os observáveis define uma conexão dada em uma representação do grupo de calibre que nesse caso é desconhecido.

Logo, temos que abordar a gravitação sob um outro ponto de vista que nos permita resolver alguns dos problemas citados e que recupere os ganhos e conquistas da visão geométrica. Isso é feito através do chamado Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR). Antes, porém, temos que introduzir alguns conceitos fundamentais.

Um campo de tétradas é um conjunto de vetores linearmente independentes que obedecem uma relação de ortonormalidade. Esses vetores são usados para construir uma base capaz de descrever um espaço-tempo. As primeiras tentativas de se descrever o campo gravitacional por meio de tétradas são atribuídas a Einstein na tentativa de se unir a gravitação e o eletromagnetismo [4]. A característica mais importante das tétradas é que o Princípio da Equivalência surge de maneira natural. Isso se deve ao fato que a descrição usada divide o espaço-tempo físico em espaços-tempos tangentes planos, sendo o campo de tétradas responsável por essa conexão, estabelecendo assim uma classe de observadores. Eis aí o sentido físico do campo de tétradas que será explorado mais profundamente no Capítulo 4.

No espaço-tempo caracterizado por um campo de tétradas dois vetores são chamados paralelos se possuem componentes idênticos com respeito a um campo local de tétradas. Claro que se pudermos construir uma derivada covariante que, aplicada sobre um campo de tétradas, se anula identicamente, a característica anterior é preservada e podemos definir o conceito de paralelismo absoluto ou teleparalelismo, no espaço-tempo [5].

Se usarmos a conexão de Cartan, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\partial_{\mu}e_{a\nu}$, podemos construir a chamada geometria Teleparalela que é menos restritiva do que a geometria Riemanniana. Uma geometria Riemanniana corresponde a uma classe de geometrias Teleparalelas. Isso significa que dada uma geometria Riemanniana (caracterizada por um tensor métrico) existem diversas maneiras de se construir geometrias Teleparalelas (caracterizadas por campos de tétradas). Isso pode ser verificado através da relação entre o tensor métrico e um campo de tétradas $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$. Um escalar de curvatura construído a partir dessa conexão é identicamente nulo, o que permite escrever a densidade de Lagrangeana como combinação quadrática do tensor de torção (que é a parte anti-simétrica da conexão de Cartan).

Com essa característica tem sido possível modificar a visão de que é lícito zerar o campo gravitacional por uma simples transformação de coordenadas, uma vez que o tensor de torção não pode ser zerado em um ponto do espaço-tempo pela referida transformação [6]. É necessário observar a diferença patente que existe entre uma transformação passiva e outra ativa para que se possa compreender o engano de se atribuir à energia gravitacional a característica supracitada. Ou seja, um engano de interpretação tem gerado a idéia da não localizabilidade da energia gravitacional.

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é uma descrição alternativa do campo gravitacional em termos de um campo de tétradas [7], que correspondem às variáveis dinâmicas do sistema. Apesar de ainda ser objeto de estudo e investigação, o TEGR parece-nos ser uma alternativa mais viável. Entendemos ser assim, pois no contexto do TEGR tem sido possível tratar de maneira adequada o problema de definição da energia, momento angular e momento do campo gravitacional. Os objetos adequados a essa descrição são os campos de tétradas, uma vez que produzem o campo gravitacional e ao mesmo tempo estabelecem uma classe de observadores.

Assim, nesse contexto, no esforço de tentar caracterizar as simetrias do sistema, construímos a Lagrangeana [8] e através da execução de uma transformação de Legendre definimos o que é chamado de formulação Hamiltoniana da gravitação [9]. Entretanto sabemos que essa formulação nem sempre é bem definida. Para que isso ocorra é necessário que os vínculos satisfaçam uma álgebra e que, além disso, essa álgebra seja de primeira classe. Isso significa que cada vínculo deve comutar com todos os outros, ou seja, o "produto" entre os vínculos deve ser escrito apenas em termos dos próprios vínculos.

Quando consistente, a formulação Hamiltoniana não só garante que a evolução temporal das quantidades de campo sejam bem definidas, como também permite o entendimento da teoria física por uma perspectiva diferente. Nessa dissertação lidamos com o formalismo Hamiltoniano com vínculos, desenvolvido por Dirac e que tem se mostrado muito útil por mostrar explícitamente a forma do momento angular e energia-momento gravitacionais. Podemos ter uma idéia desse formalismo analisando as equações de Einstein no vácuo. Nem todas as equações são dinâmicas, existindo uma quantidade delas que são algebricamente satisfeitas, o que são chamadas de vínculos da teoria. Assim é possível entrever a necessidade de se utilizar um formalismo que leve naturalmente em consideração a existência desses vínculos, para um correto tratamento do sistema.

Nos capítulos 2 e 3, a partir de uma formulação Hamiltoniana bem definida, interpretamos as equações de vínculos como definições do momento angular e energia-momento gravitacionais e procuramos definir o momento angular para que seja independente de coordenadas. Isso se justifica pelo fato do conjunto de vínculos primários satisfazerem a álgebra de momento angular. Com isso, e considerando o colchete de Poisson definido no espaço de fase da teoria, como sendo o produto da álgebra, encontramos que a energia-momento e o momento angular gravitacionais correspondam a uma representação do grupo de Poincaré. Esse resultado permite escrever os operadores de Casimir do campo gravitacional. Essas quantidades são invariantes gerados pela teoria. Essas quantidades e por consequência os geradores do grupo serão definidos no espaço de fase da teoria.

Regge e Teitelboim [10] obtiveram um formalismo Hamiltoniano para Relatividade Geral que é manifestadamente invariante sob transformações do grupo de Poincaré no infinito, através da introdução de dez novos pares de variáveis canônicas. A análise subsequente feita por York [11] mostrou que uma definição própria do momento angular gravitacional requer um comportamento assintótico adequado das componentes do Tensor de Ricci. Beig e ó Murchada [12] analisaram a forma exata das condições de fronteira necessárias para definir-se energia, momento e momento angular do campo gravitacional. Szabados [13], além disso, encontrou as condições necessárias que produzem valores finitos para as quantidades mencionadas acima. Em todas essas análises as transformações de Poincaré são realizadas em regiões assintóticas do espaço-tempo.

A investigação dos auto-valores dos operadores de Casimir poderia ter aplicação a uma possível teoria quântica da gravitação, uma vez que essas quantidades têm íntima relação com a massa e o spin de partículas nas ondas gravitacionais. Além disso, vamos investigar a definição do momento angular mais profundamente, bem como explorar a forma da expressão regularizada para essa grandeza física, no sentido de se eliminarem possíveis infinitos quando as integrais são calculadas. Uma expressão regularizada para algum objeto significa, essencialmente, subtrair a quantidade desse objeto definida no espaço-tempo plano. Isso se torna necessário para afastar a existência de energia-momento ou momento angular na ausência de campo gravitacional.

Notação: índices de espaço-tempo $\mu, \nu, ...$ e índices SO(3,1) $a, b, ...$ variam de 0 a 3. Índices de espaço e tempo são indicados de acordo com $\mu = 0, i, \;\; a = (0), (i)$. O campo de tétradas é denotado por $e^a\,_\mu$, e o tensor de torção de acordo com $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$. O tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski levanta e abaixa índices e é fixado por $\eta_{ab} = e_{a\mu} e_{b\nu} g^{\mu\nu} = (-+++)$. O determinante do campo de tétradas é indicado por $e = \det(e^a\,_\mu)$.

Capítulo 2

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

2.1 Introdução

Procuraremos mostrar como estabelecer a formulação Lagrangeana e Hamiltoniana [9] do TEGR. As equações de campo serão obtidas a partir da formulação Lagrangeana, que é baseada no anulamento do escalar de curvatura quando escrito em termos da conexão de spin.

Tradicionalmente a densidade de Hamiltoniana é obtida quando decompomos o espaço-tempo em hipersuperfícies tridimensionais do tipo espaço e que são deformadas com o auxílio das funções lapso N e *shift* N^i, as quais agem na direção normal e tangencial dessas hipersuperfícies espaciais respectivamente, gerando o espaço-tempo físico. Entretanto neste capítulo construiremos a densidade de Hamiltoniana por meio de uma transformação de Legendre aplicada à densidade de Lagrangeana. A partir disso definiremos as expressões para o momento angular e energia-momento gravitacionais.

Construir uma formulação Hamiltoniana da gravitação é importante pois as equações se tornam menos complexas, uma vez que as equações diferenciais envolvem derivadas de primeira ordem. Algumas características do sistema são melhores observadas, permitindo-nos retirar informações que, muitas vezes, são obscuras no contexto do formalismo Lagrangeano. E, fundamentalmente, esse enfoque pode nos permitir a quantização do campo gravitacional.

2.2 A Formulação Lagrangeana

A densidade de Lagrangeana para o campo gravitacional no TEGR é dada por:

$$\begin{aligned} L(e_{a\mu}) &= -k\, e\, (\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a T_a) - L_M \\ &\equiv -k\, e\Sigma^{abc}T_{abc} - L_M \,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $k = 1/(16\pi)$, $G = c = 1$, e L_M é a densidade de Lagrangeana para os campos de matéria. No vácuo, notamos que a densidade de Lagrangeana é invariante por transformações gerais de coordenadas e por transformações de Lorentz globais SO(3,1) (se requerermos que a teoria exiba invariância local de Lorentz, deveríamos intoduzir uma conexão $\omega_{\mu ab}$ do grupo$SO(3,1)$ local, o que não será feitonesta dissertação). O tensor Σ^{abc} é definido por:

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c) \,, \tag{2.2}$$

e $T^a = T^b{}_b{}^a$. As equações de campo são obtidas a partir de (2.1), por meio de sua variação funcional em relação a $e^{a\mu}$ e são dadas por:

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}) \;= \frac{1}{4k}eT_{a\mu} \,. \tag{2.3}$$

Como $\Sigma^{abc}T_{abc}$ é proporcional ao escalar de curvatura a menos de uma divergência total, pode-se mostrar, por cálculos explícitos, que o lado esquerdo de

(2.3) é exatamente igual ao tensor de Einstein. Isso mostra a equivalência entre a teoria em questão e a Relatividade Geral,o que justifica o próprio nome da teoria. As tétradas, como sempre, convertem índices de espaço-tempo em índices de Lorentz.

As equações de campo (2.3) podem ser reescritas na forma:

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4k} e\, e^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}) \,, \tag{2.4}$$

onde

$$t^{\lambda\mu} = k(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}) \,, \tag{2.5}$$

é interpretado como o tensor de energia momento do campo gravitacional.

2.3 A Formulação Hamiltoniana

Para obtermos a formulação Hamiltoniana do TEGR [9] temos que, primeiramente, estabelecer o espaço de fase da teoria. Como a densidade de Lagrangeana não contém explicitamente e_{a0}, essa quantidade surge como um multiplicador de Lagrange. O momento canonicamente conjugado a e_{ai} é dado por $\Pi^{ai} = \delta L/\delta \dot{e}_{ai}$. A formulação Hamiltoniana (não explicitamente covariante) é obtida reescrevendo a densidade de Lagrangeana na forma $L = p\dot{q} - H$, em termos de e_{ai}, Π^{ai} e dos multiplicadores de Lagrange. Executando a transformação de Legendre, chegamos à densidade de Hamiltoniana [9] na forma:

$$H = e_{a0}C^a + \alpha_{ik}\Gamma^{ik} + \beta_k\Gamma^k \,, \tag{2.6}$$

mais termos de superfície. α_{ik} e β_k são multiplicadores de Lagrange.

Após resolvermos as equações de campo identificamos $\alpha_{ik} = 1/2(T_{i0k} + T_{k0i})$ e $\beta_k = T_{00k}$. C^a, Γ^{ik} e Γ^k são vínculos de primeira classe, garantindo que a teoria é bem definida.

O vínculo C^a é escrito como $C^a = -\partial_i \Pi^{ai} + h^a$, onde h^a é uma expressão muito complicada das variáveis de campo. A forma integral das equações de vínculo $C^a = 0$, nos permite definir o vetor de energia-momento gravitacional P^a [1], [15]:

$$P^a = -\int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai} \,. \tag{2.7}$$

V é um volume arbitrário do espaço tridimensional. Essa é uma definição consistente pois diversas aplicações indicam que (2.7) representa a energia-momento gravitacional contida em um volume V em espaços vazios. No espaço de configurações, temos:

$$\Pi^{ai} = -4ke\Sigma^{a0i} \,. \tag{2.8}$$

O surgimento de divergências totais na forma de densidades escalares ou vetoriais é possível no contexto de teorias contruídas a partir do tensor de torção, o que não é o caso de teorias métricas da gravitação.

O colchete de Poisson entre duas quantidades de campo F e G é dado por:

$$\{F, G\} = \int d^3x \Big(\frac{\delta F}{\delta e_{ai}(x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi^{ai}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi^{ai}(x)} \frac{\delta G}{\delta e_{ai}(x)} \Big) \,. \tag{2.9}$$

Calculando o colchete de Poisson entre os vínculos $\Gamma^{ij}(x), \Gamma^{kl}(y)$, vemos que eles satisfazem a álgebra de momento angular [9], isso justifica a interpretação de uma forma simplificada do vínculo como definição do momento angular, tal qual é feito para a energia-momento.

Em vista disso é importante reescrevermos a densidade de Hamiltoniana H de uma forma mais simples [16]. Para isso simplificamos os vínculos Γ^{ik} e Γ^k, reescrevendo-os como um único vínculo Γ^{ab}. Acreditamos que C^a tem uma simplificação análoga, porém ainda não a encontramos. Não é difícil verificar que a densidade de Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$H = e_{a0} C^a + \frac{1}{2} \lambda_{ab} \Gamma^{ab} \,, \tag{2.10}$$

onde $\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$ são multiplicadores de Lagrange e são identificados como $\lambda_{ik} = \alpha_{ik}$ e $\lambda_{0k} = -\lambda_{k0} = \beta_k$. $\Gamma^{ab} = -\Gamma^{ba}$ encerra ambos os vínculos Γ^{ik} e Γ^k através das relações $\Gamma^{ik} = e_a{}^i e_b{}^k \Gamma^{ab}$, $\Gamma^k \equiv \Gamma^{0k} = e_a{}^0 e_b{}^k \Gamma^{ab}$. Podemos mostrar que Γ^{ab} se escreve como:

$$\Gamma^{ab} = M^{ab} + 4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a})\,, \tag{2.11}$$

com $M^{ab} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu} = -M^{ba}$; $M^{\mu\nu}$ é definido por:

$$\begin{aligned} M^{ik} &= 2\Pi^{[ik]} = e_a{}^i \Pi^{ak} - e_a{}^k \Pi^{ai}\,, & (2.12)\\ M^{0k} &= \Pi^{0k} = e_a{}^0 \Pi^{ak}\,. & (2.13) \end{aligned}$$

De maneira análoga à definição de P^a [14], a forma integral da equação de vínculo $\Gamma^{ab} = 0$ motiva a definição do momento angular do espaço-tempo:

$$M^{ab} = -4ke(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a})\,. \tag{2.14}$$

e que, portanto, define

$$L^{ab} = \int_V d^3x\; e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu}\,, \tag{2.15}$$

como o quadri-momento angular do campo gravitacional [16]. Essa expressão é invariante sob transformações de coordenadas do espaço tridimensional.

Notamos que o lado direito da equação (2.14), bem como o lado direito da equação (2.8) existe o índice temporal 0, além de notarmos a presença do determinante do campo de tétradas e. Esse determinante sempre pode ser escrito como o produto da função lapso com o determinante das tétradas restritas ao espaço tridimensional. Por causa dessas características o lado direito das equações (2.8) e (2.14) são invariantes sob reparametrizações temporais.

É importante enfatizar que P^a e L^{ab} transformam covariantemente sob transformações globais SO(3,1). Essas quantidades são definidas no espaço de fase da teoria, logo, para calcularmos essas expressões, devemos usar uma configuração particular de campo, entendendo que os lados direitos de (2.8) e (2.14) devem ser considerados no espaço de configurações da teoria.

Capítulo 3

O Grupo de Poincaré

3.1 Introdução

A teoria de grupos originalmente se desenvolveu como um braço da Matemática pura, se mostrando uma extraordinária ferramenta para formalizar conceitos semi-intuitivos e explorar simetrias no contexto da Física. Ou seja, a teoria de grupos é fundamental para identificar e formalizar simetrias.

O instrumental produzido pela teoria de grupos encontrou um grande acolhimento em Física, produzindo aplicações e resultados significativos em diversas áreas, tais como Estado Sólido, Física Atômica e Molecular e Cristalografia.

O estudo do grupo de Poincaré é de vital importância para a compreensão da Física existente por trás dos inúmeros processos da natureza. É bem conhecida quão grande influência esse conhecimento exerce em Física de Partículas e Campos. Logo quando identificamos que uma simetria de um sistema físico pode ser descrita através do grupo de Poincaré pensamos, preferencialmente, nos invariantes que a teoria gera. A invariância apresentada é um conceito-chave no entendimento de novos fenômenos e desenvolvimento apropriado de teorias físicas

Compreender a gravidade do ponto de vista de uma teoria de calibre do grupo de Poincaré é um ponto de partida para tentarmos, de alguma forma, ligá-la as demais forças da natureza, de modo análogo à teoria de calibre de Yang-Mills.

Neste capítulo desenvolveremos a teoria de representações de grupos [17], abordando grupos de Lie e especificamente o grupo de Poincaré. Apresentaremos como construir os invariantes de Casimir do grupo, comparando-os com aqueles construídos para o campo gravitacional.

3.2 Representações do Grupo de Poincaré

Um grupo G é um conjunto de elementos $a, b, c...$ para os quais uma dada lei de composição ou "multiplicação"define um "produto"entre dois elementos do grupo, satisfazendo os seguintes postulados:

- Se a e b são dois elementos do grupo, então ab também é;
- Multiplicação é associativa, ou seja, $a(bc) = (ab)c$;
- O grupo contém um elemento e chamado elemento identidade, tal que para todo elemento do grupo temos $ea = ae = a$.
- Se a é um elemento do conjunto, existe um elemento b tal que $ab = ba = e$. O elemento b é chamado de inverso e denotado por $b = a^{-1}$.

Um conjunto de operadores $(A, B, C..)$ em um espaço vetorial L, forma um grupo se forem respeitados os postulados acima. O produto de dois operadores é construído segundo a forma pela qual eles agem nos vetores de L, ou seja:

$$C\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) , \tag{3.1}$$

para todo $\mathbf{x}$ pertencete a L. O operador identidade transforma os vetores neles mesmos. Todos os operadores do grupo possuem inversos.

Se fizermos um mapeamento do espaço L em outro L', usando um operador T, obtemos um grupo isomórfico (porque é inversível) de operadores em L' que se relacionam com os operadores do espaço L pela seguinte transformação:

$$A' = TAT^{-1}\,, \tag{3.2}$$

onde A é qualquer operador de L e A' representa qualquer um de L'.

Antes de continuar nossa análise temos que definir o que é homomorfismo, necessário para escrevermos, de maneira inequívoca, o conceito de representações de grupos.

Um homomorfismo de um grupo G em um grupo G' é uma correspondência entre os elementos de G e G' que preserva a lei de composição dos grupos. Segundo essa definição um elemento de G' pode ser imagem de vários elementos de G, uma vez que a correspondência não é uma associação "um-a-um"entre os elementos.

Se propusermos uma correspondência homomórfica entre elementos de um grupo G e elementos de um grupo de operadores D(G) em um espaço vetorial L, obedecendo as relações:

$$\begin{aligned} D(RS) &= D(R)D(S)\,, \\ D(R^{-1}) &= [D(R)]^{-1}\,, \\ D(E) &= 1\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

sendo R, S e E elementos do grupo G, com E representando o operador neutro, então dizemos que $D(G)$ é uma representação do grupo G no espaço de representação L.

Uma representação linear é aquela construída em termos de operadores lineares. Se escolhemos uma base num espaço n-dimensional L, os operadores lineares da representação podem ser descritos através de matrizes, assim obtemos um mapeamento homomórfico de um grupo G em um grupo de $n \times n$ matrizes $D(G)$. Ou seja, uma representação matricial do grupo G. Dito de outra forma, a condição de linearidade significa que podemos associar uma matriz a cada elemento $D(R)$ da representação em uma dada base do espaço vetorial L.

Assim, um grupo pode ter uma infinidade de representações em espaços de dimensões distintas. O grau do grupo é o número de dimensões do espaço vetorial

L. Se fizermos uma mudança de base em algum espaço vetorial, os elementos da representação transformam-se sob a ação de um operador C, da maneira seguinte:

$$D'(R) = CD(R)C^{-1}\,. \tag{3.4}$$

Os elementos $D'(R)$ também formam uma representação do grupo que é equivalente a $D(R)$. No caso de representações matriciais, entre duas representações equivalentes o traço das matrizes é invariante.

Quando o mapeamento homomórfico se reduz para um isomórfico (uma correspondência de um para um) dizemos que a representação é "fiel".

Ainda temos que tecer alguns comentários sobre grupos contínuos e especialmente sobre grupos de Lie, uma vez que o grupo de Poincaré também é um grupo de Lie.

Um grupo é dito ser contínuo se alguma relação de proximidade é imposta sobre os elementos do grupo-variedade. O termo usado anteriormente advém do fato que grupos contínuos finitos têm uma estreita relação com a definição de variedades, uma vez que o conceito de proximidade é dado por um conjunto de funções em um espaço e expresso em termos da distância nesse espaço de funções. Assim, imaginamos que variações infinitesimais de um dos fatores produza variações infinitesimais no produto de dois elementos do grupo.

Dado um grupo contínuo G, os elementos do grupo são associados a pontos em uma variedade e são descritos por funções contínuas de seus parâmetros. A lei de composição pode ser descrita simbolicamente por:

$$c = f(a, b)\,. \tag{3.5}$$

Quando f é uma função analítica, no sentido de que pode ser expandida em séries de potências convergentes no espaço de N parâmetros, o grupo G é chamado de grupo de Lie finito de N parâmetros.

Se os elementos do grupo de Lie são operadores em uma variedade V, então temos um grupo de transformação. Para o caso de grupos de transformação de coordenadas no espaço-tempo plano, um exemplo é o grupo de Poincaré. Quando a transformação induzida em V por G é linear, naturalmente, os elementos de G possuem uma representação matricial em alguma base escolhida em V.

Consideremos um grupo contínuo de transformação de coordenadas em uma variedade V com um parâmetro. A lei de composição pode ser escrita como:

$$x' = f(x; a)\,. \tag{3.6}$$

Uma variação infinitesimal de a para $a + \delta a$ resulta em uma mudança de x' para $x' + dx'$. Logo podemos expandir f em torno de $\delta a = 0$ (devido à hipótese de continudade) tal que:

$$dx' = \Big(\frac{\partial f(x, a + \delta a)}{\partial a}\Big|_{\delta a = 0}\Big)\delta a\,. \tag{3.7}$$

Imediatamente somos induzidos a escrever a variação de uma função F quando variamos o parâmetro do grupo:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x'}dx' \\ &= \delta a X F\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

com X dado por:

$$X = \Big(\frac{\partial f(x, a + \delta a)}{\partial a}\Big|_{\delta a = 0}\Big)\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{3.9}$$

X é chamado o gerador do grupo, uma vez que podemos escrever qualquer elemento do grupo com o auxílio do operador X, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F' &= F + dF \\ &= (1 + \delta a X)F\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Generalizando a expressão dos geradores para um grupo de Lie com r parâmetros temos:

$$X_b = \sum_{i=1}^{r} \Big(\frac{\partial f^i(x, a + \delta a)}{\partial a^b}\Big|_{\delta a=0} \Big) \frac{\partial}{\partial x^i} \,. \tag{3.11}$$

O Teorema de Lie nos diz que o comutador entre dois geradores do grupo pode ser escrito como combinação linear dos próprios operadores infinitesimais X_a. Ou seja,

$$[X_a, X_b] = C^d_{ab} X_d \,, \tag{3.12}$$

onde C^d_{ab} são as chamadas constates de estrutura. Provar que C^d_{ab} são realmente constantes é bem simples, porém um pouco longo. Não mostraremos a prova dessa afirmação pois isso seria estender muito o assunto, fugindo aos objetivos estabelecidos.

A relação acima define uma álgebra denominada álgebra de Lie. Os geradores do grupo formam um espaço vetorial e a representação construída nesse espaço é chamada de Representação Adjunta. Uma Representação Adjunta matricial é construída através das constantes de estrutura.

Além disso, os geradores infinitesimais do grupo satisfazem a identidade de Jacobi

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_c, X_a], X_b] + [[X_b, X_c], X_a] = 0 \,, \tag{3.13}$$

resultando em

$$C^d_{ab} C^e_{dc} + C^d_{ca} C^e_{db} + C^d_{bc} C^e_{da} = 0 \,. \tag{3.14}$$

Logo temos que resolver n equações quadráticas para determinarmos as constantes de estrutura. Essa é uma dificuldade que surge quando tentamos escrever uma representação linear do grupo de Lie. É bom enfatizar que as propriedades do grupo podem ser reproduzidas pela álgebra de Lie. Ou seja, é possível mostrar que existe uma relação entre o grupo de Lie e sua respectiva álgebra e que uma vez construída ela pode ser usada pera escrevermos uma representação do grupo.

Tendo em vista o que foi exposto, estamos aptos a prosseguir na construção de uma representação do grupo de Poincaré.

O grupo de Poincaré é outro nome para o grupo de Lorentz não-homogêneo, o qual engloba transformações lineares, "boosts", rotações e inversões que deixam $c^2\tau^2 = -x_0^2 + \mathbf{x}^2$ invariante. A transformação mais geral do grupo de Poincaré em um espaço-tempo plano é:

$$x'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu x_\nu + a_\mu \,, \tag{3.15}$$

onde a_μ é um quadrivetor constante e portanto é independente de x. Como as translações não podem ser representadas por meio de uma matriz 4×4 agindo em x não podemos obter uma representação do grupo em termos dessas matrizes.

Para conseguirmos isso, considere primeiramente uma transformação de Lorentz infinitesimal no espaço plano, da forma:

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} \,, \tag{3.16}$$

onde

$$\Lambda_{\gamma\mu}\Lambda^\gamma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \,. \tag{3.17}$$

Substituindo (3.16) em (3.17) vemos que $\varepsilon_{\mu\nu}$ deve ser obrigatoriamente antisimétrico. Aplicando (3.16) em x_μ obtemos $x'_\mu = x_\mu - \varepsilon_\mu{}^\nu x_\nu$. Alternativamente podemos obter o mesmo resultado através da aplicação do operador $\exp(-\frac{1}{2} i\varepsilon_{\mu\nu}L^{\mu\nu})$ sobre x_μ, onde $L_{\mu\nu}$ é o momento angular generalizado, sendo definido por:

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \,. \tag{3.18}$$

Uma vez definido $L_{\mu\nu}$ temos que calcular as relações de comutação entre esses operadores diferenciais. Fazendo isso e depois de algum esforço algébrico, chegamos a:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma})\,. \tag{3.19}$$

Essa relação de comutação adquire as feições tradicionais quando separamos os geradores em momentos angulares tridimensionais e "boosts"que são os L_{0i}.

Agora vamos considerar uma translação infinitesimal da seguinte maneira: $x'_\mu = x_\mu - \varepsilon_\mu$. De maneira análoga vamos assumir que essa transformação pode ser obtida através da aplicação do operador $\exp(i\varepsilon_\mu P^\mu)$ sobre x_μ, onde P_μ é o operador quadri-momento $P_\mu = i\partial_\mu$. Esses operadores claramente comutam entre si:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\,. \tag{3.20}$$

Agora resta-nos calcular as relações de comutação entre os momentos angulares generalizados e os quadri-momentos. Novamente, depois de cálculos simples, obtemos:

$$[P_\mu, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho)\,. \tag{3.21}$$

As relações (3.19), (3.20) e (3.21) formam a álgebra do grupo de Poincaré porque é construída em termos de operadores que são capazes de gerar as transformações que definem o referido grupo. Nesse sentido, pode-se dizer que essas relações são uma representação do grupo de Poincaré.

Voltando agora ao material discutido no capítulo anterior, calculamos o colchete de Poisson entre as quantidades definidas por (2.7) e (2.15), sendo que para isso temos que calcular suas derivadas funcionais:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L^{ab}}{\delta e_{ck}(z)} &= \int d^3x \frac{\delta}{\delta e_{ck}(z)}\left[e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu}\right] \\
&= \int d^3x \frac{\delta}{\delta e_{ck}(z)}\left[e^a{}_0 e^b{}_j\, M^{0j} + e^a{}_j e^b{}_0\, M^{j0} + e^a{}_i e^b{}_j\, M^{ij}\right] \\
&= (\eta^{bc}e^a{}_0(z) - \eta^{ac}e^b{}_0(z))M^{0k}(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\eta^{bc}e^a{}_j(z) - \eta^{ac}e^b{}_j(z))\Pi^{kj}(z) \\
& +(\eta^{ac}e^b{}_j(z) - \eta^{bc}e^a{}_j(z))M^{kj}(z) \\
= \;& -\eta^{ac}\Pi^{bk}(z) + \eta^{bc}\Pi^{ak}(z)\,. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Lembrando que $M^{0j} = e_a{}^0\Pi^{aj}$ e $M^{ij} = e_a{}^i\Pi^{aj} - e_a{}^j\Pi^{ai}$ podemos escrever

$$\frac{\delta L^{ab}}{\delta \Pi^{ck}(z)} = \delta^a_c e^b{}_k(z) - \delta^b_c e^a{}_k(z)\,. \qquad (3.23)$$

Analizando a expressão de P^a vemos que depende apenas de Π^{ai}; logo escrevemos imediatamente os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P^a}{\delta e_{ck}(z)} &= 0\,, \\
\frac{\delta P^a}{\delta \Pi^{ck}(z)} &= -\int d^3x \delta^a_c \frac{\partial}{\partial x^k}\delta^3(x-z)\,. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Com isso chegamos a uma forma similar às relações (3.19), (3.20) e (3.21) [16]:

$$\begin{aligned}
\{P^a, P^b\} &= 0\,, \\
\{P^a, L^{bc}\} &= -\eta^{ab}P^c + \eta^{ac}P^b\,, \\
\{L^{ab}, L^{cd}\} &= -\eta^{ac}L^{bd} - \eta^{bd}L^{ac} + \eta^{ad}L^{bc} + \eta^{bc}L^{ad}\,. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Aqui substituímos a relação de comutação como sendo o "produto" da álgebra pela relação dada pelo colchete de Poisson. O fator imaginário que aparece nas relações (3.19), (3.20) e (3.21) refere-se à unitariedade do grupo. Para as relações (3.25), exigimos apenas a ortogonalidade.

Assim, podemos afirmar que P^a e L^{ab}, definidos para o campo gravitacional no TEGR, formam uma representação do grupo de Poincaré, no sentido discutido anteriormente. E, além disso, notamos quão consistentes são essas definições quando chamamos P^a e L^{ab} de energia-momento e momento angular gravitacionais respectivamente.

3.3 Operadores de Casimir para o Campo Gravitacional

Partículas em geral são caracterizadas por duas propriedades básicas, o spin e a massa. Claro que existem outras propriedades tais como cor e sabor, por exemplo, mas que não serão tratadas nesse trabalho. A massa é um invariante associado ao operador momento, enquanto o spin é associado a uma rotação definida no espaço vetorial abstrato sobre o qual o grupo atua e que guarda relação com o mundo real, uma vez que o spin é observável. Em termos dos operadores da álgebra de Poincaré, massa e spin são dois auto-valores de dois operadores quadráticos de Casimir.

A vantagem dos operadores de Casimir é que eles podem ser usados para caracterizar representações irredutíveis do grupo em questão. A ordem de uma representação irredutível é igual ao número de operadores de Casimir. Portanto, para o grupo de Poincaré, temos apenas dois operadores, um ligado à massa e o outro ligado ao momento-angular (ou spin).

Em termos dos elementos de base da álgebra X_μ o operador de Casimir é definido como:

$$C = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma \, , \tag{3.26}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica que define o espaço da álgebra.

Definido dessa maneira o operador de Casimir é um invariante da teoria. Um invariante é um escalar sob a ação da lei de composição do grupo. Existem várias maneiras de se construir invariantes, no entanto vamos nos concentrar na maneira especificada por (3.26). Como as propriedades do grupo podem sempre ser recuperadas por meio da respectiva álgebra de Lie, vamos tomar a lei de composição como sendo o "produto" da álgebra.

Calculando o comutador entre C e os geradores do grupo, temos:

$$\begin{aligned} [C, X_\lambda] &= g^{\rho\sigma}[X_\rho X_\sigma, X_\lambda] \\ &= g^{\rho\sigma} X_\rho [X_\sigma, X_\lambda] + g^{\rho\sigma}[X_\rho, X_\lambda] X_\sigma \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{\rho\sigma} C^{\mu}_{\sigma\lambda} X_\rho X_\mu + g^{\rho\sigma} C^{\mu}_{\rho\lambda} X_\mu X_\sigma \\
&= g^{\rho\sigma} C^{\mu}_{\sigma\lambda} (X_\rho X_\mu + X_\mu X_\rho) \,. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Quando levamos em consideração o fato que $C_{\mu\nu\sigma}$ é totalmente anti-simétrico, imediatamente vemos que:

$$
[C, X_\lambda] = 0 \,. \qquad (3.28)
$$

Assim, C representa uma quantidade invariante.

Para a álgebra de Poincaré o primeiro desses operadores é $P^2 = P_\mu P^\mu$. Ele é invariante sob a ação do grupo de Lorentz e sob translações. Isso significa que:

$$
\begin{aligned}
[P^2, P_\mu] &= 0 \,, \\
[P^2, L_{\mu\nu}] &= 0 \,, \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

o que pode ser verificado diretamente com a ajuda da identidade de Jacobi.

O segundo operador de Casimir é $w^2 = w_\mu w^\mu$, onde w_μ representa o vetor de Pauli-Lubanski, definido por

$$
w_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^{\nu\rho} P^\sigma , \qquad (3.30)
$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é a densidade de Levi-Civita. Verificamos facilmente que w^2 comuta com os demais geradores do grupo,

$$
\begin{aligned}
&[w^2, P_\mu] = 0 \,, \\
&[w^2, L_{\mu\nu}] = 0. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Agindo sobre o auto-estado de P_μ, num sistema de referência em repouso, quando $P_\mu = (m, \mathbf{0})$, o operador w_μ se reduz a $w_i = mJ_i$ e $w^2 = -m^2\mathbf{J}^2$. Assim podemos definir um conjunto completo de auto-vetores e auto-valores para w^2 e P^2, tal que:

$$P^2\psi_{m,s} = m^2\psi_{m,s}\,,$$
$$w^2\psi_{m,s} = -m^2 s(s+1)\psi_{m,s}\,, \tag{3.32}$$

onde m é a massa e ψ representa o espaço vetorial sobre o qual o grupo de Poincaré age. Quando $m = 0$ a partícula passa a ser caracterizada pela componente do spin ao longo da direção do momento, $\mathbf{J}.\mathbf{P}$. Esse operador é chamado de helicidade e seus auto-valores são convenientemente chamados de λ. Nesse caso o auto-valor de w^2 é s em vez de $s(s+1)$.

Tendo em vista as definições anteriores podemos construir o vetor de Pauli-Lubanski gravitacional W_a:

$$W_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}P^b L^{cd}\,. \tag{3.33}$$

Onde ε_{abcd} é novamente a densidade de Levi-Civita. Verificamos facilmente que W_a comuta com P^a. Portanto definimos as quantidades de Casimir do campo gravitacional como:

$$\begin{aligned} P^2 &= \eta_{ab}P^a P^b\,, \\ W^2 &= \eta^{ab}W_a W_b. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Vemos claramente que essas quantidades obedecem as mesmas relações de comutação (3.29) e (3.31) construídas anteriormente, mas calculadas considerando o colchete de Poisson. Portanto podemos dizer que essas quantidades são invariantes da configuração gravitacional [16].

Essas quantidades têm um importante papel na caracterização do campo gravitacional. Elas podem ser usadas para procurar representações irredutíveis do grupo, uma vez que elas são operadores de Casimir. Devemos analisar como W_a e P_a produzem informações a respeito da helicidade das ondas gravitacionais planas.

Verificaremos também se o campo gravitacional admite ondas com helicidade $\lambda = 1$ [21].

Capítulo 4

Sistemas de Referência e o Momento Angular Gravitacional

4.1 Introdução

A idéia de um espaço e tempo absolutos criada por Newton nos induz a pensar que observadores em repouso ou que se movem com velocidade constante em relação a esse tal espaço absoluto são privilegiados em relação a todos os outros observadores. Essa é a idéia de sistemas de referência inerciais e a causa desse dogmatismo é um problema de difícil interpretação em Física.

A Relatividade Especial de Einstein veio mostrar que esse absolutismo era apenas aparente, ou seja, não há razão para se privilegiar um referencial em particular, dada a característica relativística exibida pela natureza. Isso se deve também ao princípio da isotropia do espaço aliada à relação existente entre coordenadas espaciais e o tempo, o que é expresso através da imposição de que a velocidade da luz é constante.

O conceito de sistemas de referência foi e continua a ser muito importante em Física, especialmente para a Relatividade Geral, para a qual o princípio da equivalência assume um papel fundamental. Na Relatividade Restrita afirmar que "todos os sistemas de referência inerciais são equivalentes"é possível devido à simetria local de Lorentz. Compreender a Relatividade Geral do ponto de vista de uma simetria local de Lorentz é justificável pelas consequências que advêm desse fato e tem sua motivação no impacto que a teoria de calibre de Yang-Mills teve em Física de Partículas e Teoria Quântica de Campos.

A simetria de um sistema físico é matematicamente levada em conta quando da construção da Lagrangeana que o descreve. Logo a análise de simetrias leva ao entendimento do funcionamento da Natureza. Procurar compreender sistemas de referência como consequência das simetrias de alguma transformação global ou local é um passo fundamental no entendimento de uma teoria.

Neste capítulo mostraremos a interpretação do campo de tétradas como sistemas de referência, além de abordar a construção de expressões regularizadas, aplicando a teoria a duas configurações de tétradas simples.

4.2 Campos de Tétradas como Sistemas de Referência e Expressões Regularizadas para o Momento Angular

As invariâncias exibidas pela Lagrangeana (2.1), as quais mencionadas anteriormente, são responsáveis pela interpretação do campo de tétradas como sistemas de referência. Ou seja, a invariância da teoria por transformações globais SO(3,1) estabelece que dois campos de tétradas que (i) são soluções das equações de campo, (ii) produzem o mesmo tensor métrico e (iii) não se relacionam por nenhuma transformação global de Lorentz, descrevem dois sistemas de referência diferentes. Assim podemos adotar o significado físico desses objetos como sendo sistemas de referência adaptados a observadores ideais no espaço-tempo.

Cada conjunto de tétradas define uma classe de sistemas de referência [18]. Se denotamos por $x^\mu(s)$ a linha mundo C de um observador no espaço-tempo, e por $u^\mu(s) = dx^\mu/ds$ sua velocidade ao longo de C, podemos fazer a identificação da velocidade do observador com a componente $a = (0)$ de $e_a{}^\mu$ [19]. A aceleração do observador é dado por $a^\mu = Du^\mu/ds = De_{(0)}{}^\mu/ds = u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu$, onde a derivada covariante é escrita em termos dos símbolos de Christoffel.

Vemos, então, que $e_a{}^\mu$ determina a velocidade e aceleração, ao longo de uma linha mundo, de um observador adaptado a um sistema de referência. Deste ponto de vista, concluímos que um conjunto de tétradas, para os quais $e_{(0)}{}^\mu$ descreve uma congruência de curvas do tipo tempo, é adaptado a uma classe de observadores em particular. A título de comparação, devemos lembrar que se $e^a{}_\mu \to \delta^a_\mu$ no limite $r \to \infty$, então $e^a{}_\mu$ é adaptado a observadores estáticos no infinito espacial.

No sentido de estimarmos a energia-momento e o momento angular gravitacionais para um sistema físico, temos que calcular o lado direito de (2.8) e (2.14), com isso podemos saber se as expressões definidas anteriormente para P^a e L^{ab} são bem definidas. Isso só será possível se considerarmos um conjunto de tétradas, tais que, no limite do espaço-tempo plano, tivermos $T_{a\mu\nu}(e) = 0$.

Entretanto, existem configurações de tétradas $E^a{}_\mu$, no espaço-tempo plano, para as quais temos $T_{a\mu\nu}(E) \neq 0$, consequentemente obtemos valores para P^a e L^{ab} que não se anulam quando consideramos o referido limite, ou seja,podemos encontrar energia e momento na ausência de campo gravitacional. Assim torna-se necessário o uso de expressões regularizadas para tais quantidades. A regularização da energia-momento gravitacional foi discutido em detalhes em [18]. O processo é conceitualmente o mesmo realizado em [11], consistindo o processo em basicamente subtrair a energia do espaço-tempo plano.

Se denotarmos $T^a{}_{\mu\nu}(E) = \partial_\mu E^a{}_\nu - \partial_\nu E^a{}_\mu$ e $\Pi^{aj}(E)$ como sendo a expressão de Π^{aj} construída usando-se as tétradas planas $E^a{}_\mu$, então podemos escrever a expressão regularizada para o tensor de energia-momento gravitacional como:

$$P^a = -\int_V d^3x \, \partial_k [\Pi^{ak}(e) - \Pi^{ak}(E)] \, . \tag{4.1}$$

Essa definição garante que a energia-momento do espaço-tempo plano será sempre nula. O espaço-tempo de referência é determinado pelo conjunto de tétradas $E^a{}_\mu$, obtido de $e^a{}_\mu$ requerendo que alguns parâmetros físicos tais como massa, momento angular e etc, se anulem.

Podemos estabelecer a expressão regularizada para o momento angular de forma análoga a 4.1 como se segue:

$$L^{ab} = \int_V d^3x \, [M^{ab}(e) - M^{ab}(E)] \, . \tag{4.2}$$

As expressões (4.1) e (4.2) podem ser usadas para calcularmos a energia-momento e o momento angular gravitacionais para uma configuração arbitrária de tétradas.

4.3 O Momento Angular da Casca Esférica em Rotação

Apresentaremos em detalhes uma aplicação da definição (4.2) para o espaço-tempo de uma casca esférica em rotação [20]. Consideraremos, na análise das expressões, um movimento de rotação lento. É uma configuração matematicamente simples e não-singular de campo gravitacional que exibe efeitos rotacionais e é sempre regular. No limite para momentos angulares pequenos a métrica para tal configuração corresponde à forma assintótica do tensor métrico de Kerr. A motivação principal para considerar essa métrica é a construção de uma fonte realística para uma região exterior do espaço-tempo de Kerr, e, portanto, para conectar a última região com um espaço-tempo livre de singularidades.

Para uma casca de raio r_0 e massa total $m = 2\alpha$, como visto por um observador no infinito, a métrica é dada por:

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \psi^4 [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi - \Omega dt)^2] \, , \tag{4.3}$$

onde

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{r_0 - \alpha}{r_0 + \alpha}\,, \\
\psi &= \psi_0 = 1 + \frac{\alpha}{r_0}\,, \\
\Omega &= \Omega_0\,,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

para $r < r_0$, e

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{r - \alpha}{r + \alpha}\,, \\
\psi &= 1 + \frac{\alpha}{r}\,, \\
\Omega &= \left(\frac{r_0 \psi_0^2}{r \psi^2}\right)^3 \Omega_0\,,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

para $r > r_0$.

O tensor métrico dado por (4.3) é solução das equações de Einstein até primeira ordem em Ω. A quantidade Ω_0 é constante e representa a velocidade angular de arrasto de observadores localmente inerciais no interior da casca esférica. É necessário calcularmos os componentes contra-variantes do tensor métrico, o que nos leva a:

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{V^2} & 0 & 0 & -\frac{\Omega}{V^2} \\
0 & \frac{1}{\psi^4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{r^2\psi^4} & 0 \\
-\frac{\Omega}{V^2} & 0 & 0 & \frac{V^2 - r^2\Omega^2\psi^4 \sin^2\theta}{V^2 r^2 \psi^4 \sin^2\theta}
\end{pmatrix}. \tag{4.6}
$$

Vamos considerar duas configurações de tétradas e discutir as suas interpretações físicas enquanto sistemas de referência. A primeira delas é dada por:

$$
e_{a\mu} = \begin{pmatrix}
-V & 0 & 0 & 0 \\
\Omega r \psi^2 \sin\theta \sin\phi & \psi^2 \sin\theta \cos\phi & r\psi^2 \cos\theta \cos\phi & -r\psi^2 \sin\theta \sin\phi \\
-\Omega r \psi^2 \sin\theta \cos\phi & \psi^2 \sin\theta \sin\phi & r\psi^2 \cos\theta \sin\phi & r\psi^2 \sin\theta \cos\phi \\
0 & \psi^2 \cos\theta & -r\psi^2 \sin\theta & 0
\end{pmatrix}. \tag{4.7}
$$

O determinante de $e^a{}_\mu$ pode ser imediatamente calculado, sendo o seu valor $e = Vr^2\psi^6 \sin\theta$. O campo de tétradas acima gera a seguinte quadri-velocidade:

$$e_{(0)}{}^\mu(t,r,\theta,\phi) = \frac{1}{V}(1,0,0,\Omega)\,, \tag{4.8}$$

sendo $1/V$ o fator de normalização. Assim concluímos que um observador na posição radial r se move ao longo de uma trajetória circular $\Omega(r)$ em torno da fonte.

Para encontararmos os componentes do momento angular gravitacional faz-se necessário o cálculo das componentes de $T_{\lambda\mu\nu} = e^a{}_\lambda T_{a\mu\nu}$, sendo aquelas não nulas iguais a:

$$\begin{aligned}
T_{001} &= V\partial_1 V - \frac{1}{2}\partial_1(\Omega r\psi^2)^2\sin^2\theta\,,\\
T_{301} &= r\psi^2\partial_1(\Omega r\psi^2)\sin^2\theta\,,\\
T_{002} &= -(\Omega r\psi^2)^2\sin\theta\,\cos\theta\,,\\
T_{302} &= \Omega r^2\psi^4\sin\theta\,\cos\theta\,,\\
T_{103} &= -\Omega r\psi^4\sin^2\theta\,,\\
T_{203} &= -\Omega r^2\psi^4\sin\theta\,\cos\theta\,,\\
T_{212} &= r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\,,\\
T_{013} &= -\Omega r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\sin^2\theta\,,\\
T_{313} &= r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\sin\theta\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Seguindo no mesmo esforço, depois de simples manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{001} &= \frac{1}{2}(T_{001} - g_{00}T_1)\,,\\
\Sigma_{301} &= \frac{1}{4}(T_{301} - T_{013} + T_{103}) - \frac{1}{2}g_{03}T_1\,,\\
\Sigma_{002} &= \frac{1}{2}T_{002}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{103} &= \frac{1}{4}(T_{103} + T_{013} + T_{301})\,, \\
\Sigma_{212} &= \frac{1}{2}(T_{212} + g_{22}T_1)\,, \\
\Sigma_{013} &= \frac{1}{4}(T_{013} + T_{103} - T_{301}) + \frac{1}{2}g_{03}T_1\,, \\
\Sigma_{313} &= \frac{1}{2}(T_{313} + g_{33}T_1)\,, \\
\Sigma_{023} &= \frac{1}{2}T_{203}\,. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Considerando as relações $e^{(1)}{}_\mu g^{\mu 0} = e^{(2)}{}_\mu g^{\mu 0} = 0$, a expressão para $M^{(1)(2)}$ pode ser simplificada para:

$$
\begin{aligned}
M^{(1)(2)} &= -4ke\, g^{11}\Big[(e^{(1)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(2)}{}_1 - (e^{(2)}{}_\mu g^{\mu 3})e^{(1)}{}_1\Big] \times \\
&\quad \times\Big[g^{00}\Sigma_{301} - g^{00}\Sigma_{103} - g^{03}\Sigma_{313}\Big] \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Em vista da relação $g^{00}\Sigma_{301} - g^{00}\Sigma_{103} - g^{03}\Sigma_{313} = 0$, chegamos à conclusão que

$$
M^{(1)(2)} = 0\,. \qquad (4.12)
$$

Os outros componentes espaciais também se anulam, ou seja, $M^{(1)(3)} = M^{(2)(3)} = 0$. Isso nos permite concluir que $L^{(i)(j)}$, a parte espacial do momento angular gravitacional de uma casca esférica em rotação, é zero. Esse é um resultado esperado, haja vista a própria interpretação do campo de tétradas (4.7). Ou seja, um observador que se move em torno de uma fonte com a mesma frequência com que esta descreve seu movimento não é capaz de sentir nenhum efeito referente ao momento angular.

Agora vamos utilizar uma outra configuração de tétradas cuja interpretação também é simples quando considerada do ponto de vista do sistema de referência. Vamos considerar

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & Z \\ 0 & \psi^2 \sin\theta\, \cos\phi & r\psi^2 \cos\theta\, \cos\phi & -Y\sin\theta\, \sin\phi \\ 0 & \psi^2 \sin\theta\, \sin\phi & r\psi^2 \cos\theta\, \sin\phi & Y\sin\theta\, \cos\phi \\ 0 & \psi^2 \cos\theta & -r\psi^2 \sin\theta & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{aligned} X &= (V^2 - r^2\Omega^2\psi^4 \sin^2\theta)^{1/2}\,, \\ Z &= -\frac{1}{X}\,\Omega r^2\psi^4 \sin^2\theta\,, \\ Y &= \frac{V}{X}\, r\psi^2\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

O campo de tétradas acima produz o campo de velocidades seguinte:

$$e_{(0)}{}^{\mu}(t,r,\theta,\phi) = \left(\frac{1}{X},0,0,0\right). \tag{4.15}$$

Com isso vemos que (4.13) é adaptado a observadores estáticos no espaço-tempo, de maneira similar ao que foi feito para (4.7).

As componentes de $T_{\lambda\mu\nu}$ diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} T_{001} &= X\partial_1 X\,, \\ T_{301} &= -Z\partial_1 X\,, \\ T_{202} &= X\partial_2 X\,, \\ T_{302} &= -Z\partial_2 X\,, \\ T_{212} &= r^2\psi^2(\partial_1\psi^2)\,, \\ T_{013} &= X\partial_1 Z\,, \\ T_{313} &= -Z\partial_1 Z + (\partial_1 Y - \psi^2)Y\sin^2\theta\,, \\ T_{023} &= X\partial_2 Z\,, \\ T_{323} &= -Z\partial_2 Z + Y(\partial_2 Y)\sin^2\theta - (r\psi^2 - Y)Y\sin\theta\, \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Os traços do tensor de torção são:

$$T_1 = g^{00}T_{001} + g^{03}(T_{301} - T_{013}) - g^{22}T_{212} - g^{33}T_{313}\,,$$

$$T_2 = g^{00}T_{002} + g^{03}(T_{302} - T_{023}) - g^{33}T_{323}\,,$$

sendo T_0 e T_3 componentes nulas.

As quantidades acima dão origem às seguintes componentes não-nulas de $\Sigma_{\lambda\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{001} &= \frac{1}{2}(T_{001} - g_{00}T_1)\,, \\
\Sigma_{301} &= \frac{1}{4}(T_{301} - T_{013}) - \frac{1}{2}g_{03}T_1\,, \\
\Sigma_{002} &= \frac{1}{2}(T_{002} - g_{00}T_2)\,, \\
\Sigma_{302} &= \frac{1}{4}(T_{302} - T_{023}) - \frac{1}{2}g_{03}T_2\,, \\
\Sigma_{103} &= \frac{1}{4}(T_{013} + T_{301})\,, \\
\Sigma_{112} &= -\frac{1}{2}g_{11}T_2\,, \\
\Sigma_{212} &= \frac{1}{2}(T_{212} + g_{22}T_1)\,, \\
\Sigma_{013} &= \frac{1}{4}(T_{013} - T_{301}) + \frac{1}{2}g_{03}T_1\,, \\
\Sigma_{313} &= \frac{1}{2}(T_{313} + g_{33}T_1)\,, \\
\Sigma_{023} &= \frac{1}{4}(T_{023} - T_{302}) + \frac{1}{2}g_{03}T_2\,, \\
\Sigma_{323} &= \frac{1}{2}(T_{323} + g_{33}T_2)\,.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Fazendo uso da definição (2.14), tomada para as componentes $a = (1)$ e $b = (2)$, chegamos à expressão exata de $M^{(1)(2)}$, que é dada por:

$$M^{(1)(2)} = -2ke(e^{(1)}{}_3 e^{(2)}{}_1 - e^{(1)}{}_1 e^{(2)}{}_3)\times\Big[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001} - g_{00}T_1)$$

$$
\begin{aligned}
&-g^{00}g^{11}g^{33}(T_{013}+g_{03}T_1)+g^{03}g^{03}g^{11}(T_{301}-g_{03}T_1)\\
&-g^{03}g^{11}g^{33}(T_{313}+g_{33}T_1)\Big]-2ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2-e^{(1)}{}_1e^{(2)}{}_3)\times\\
&\times\Big[g^{00}g^{03}g^{22}(T_{002}-g_{00}T_2)g^{00}g^{22}g^{33}\Big(\frac{1}{2}(T_{302}-T_{023})-g_{03}T_2\Big)\\
&-g^{03}g^{03}g^{22}\Big(\frac{1}{2}(T_{023}-T_{302})+g_{03}T_2\Big)\\
&-g^{03}g^{22}g^{33}(T_{323}+g_{33}T_2)\Big]\,. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Obviamente, a expressão acima é muito complicada. No sentido de simplificá-la, vamos adotar duas hipóteses. Assumiremos que:

$$
r^2\Omega^2 \quad << \quad 1\,, \qquad (4.19)
$$

$$
r_0 \quad >> \quad \alpha\,. \qquad (4.20)
$$

A condição (4.19) expressa a fato de que o tensor métrico dado por (4.3) é solução das equações de Einstein para o limite de rotações lentas, enquanto que a hipótese (4.20) simplifica sobremaneira os cálculos e é válida quando tomamos o limite Newtoniano da gravitação. Tanto a relação (4.19) quanto a (4.20) implicam $X=(V^2-r^2\Omega^2\psi^4\sin^2\theta)^{1/2}$ como sendo sempre real, permitindo-nos afastar algum inconveniente conceitual.

A relação (4.19) simplifica (4.18) para:

$$
\begin{aligned}
M^{(1)(2)} \;\cong\; & -2ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_1-e^{(1)}{}_1e^{(2)}{}_3)\times\\
\times\; & \Big[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001}-g_{00}T_1)-g^{00}g^{11}g^{33}T_{013}\Big]\\
+\; & ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2-e^{(1)}{}_2e^{(2)}{}_3)g^{00}g^{22}g^{33}T_{023}\,. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Com o auxílio da condição (4.20) e substituindo os valores das respectivas componentes de $T_{\alpha\mu\nu}$, obtemos uma forma bem mais simples e aproximada para $M^{(1)(2)}$:

$$
M^{(1)(2)}\cong -4k\Big[2\alpha\Omega r\sin^3\theta-\frac{1}{2}\Omega r^2\sin^3\theta+\frac{1}{2}\Omega r^2\sin\theta\,\cos^2\theta\;\Big]\,, \qquad (4.22)
$$

para $r > r_0$.

A integração dos dois últimos termos da expressão acima diverge. Esse comportamento pode ser entendido quando analisamos a relação existente entre o parâmetro α e as componentes do tensor de torção $T_{(a)\mu\nu}$.

Como $m = 2\alpha$, temos no espaço-tempo plano a condição que $\alpha = 0$. Entretanto, para essa condição, encontramos que $T_{(0)13} = \partial_1 Z$ e $T_{(0)23} = \partial_2 Z$, logo concluímos que $T_{013} \neq 0$ e $T_{123} \neq 0$ nesse limite. As duas últimas quantidades se comportam como $O(r^{-2}\sin^2\theta)$ e $O(r^{-1}\sin\theta\,\cos\theta)$, respectivamente. Consequentemente será necessário o uso da definição regularizada do momento angular gravitacional.

Na expressão (4.22) os dois últimos termos são gerados pelas componentes T_{013} e T_{023}, enquanto que o primeiro termo vem precisamente de $\partial_1\psi^2 = -(2\alpha)/r^2$ que aparece na combinação $T_{001} - g_{00}T_1$. Assim é fácil perceber que para $r < r_0$ o primeiro termo se anula, uma vez que ψ neste domínio é constante. Os outros dois termos permanecem inalterados.

A expressão regularizada para $M^{(1)(2)}$ é obtida quando subtraímos o valor de $M^{(1)(2)}$ no limite $\alpha = 0$, já que α é o único parâmetro físico associado à configuração, obtendo finalmente o seguinte:

$$M^{(1)(2)}(\alpha) - M^{(1)(2)}(\alpha = 0) \cong -\frac{1}{4\pi}2\alpha(\Omega r)\sin^3\theta\,, \tag{4.23}$$

para $r > r_0$ e

$$M^{(1)(2)}(\alpha) - M^{(1)(2)}(\alpha = 0) \cong 0\,, \tag{4.24}$$

para $r < r_0$. Na notação da definação (4.2) temos que $M^{(1)(2)}(\alpha) - M^{(1)(2)}(\alpha = 0) = M^{(1)(2)}(e) - M^{(1)(2)}(E)$, cuja veracidade se torna evidente quando pensamos que $\alpha = 0$ conduz ao espaço-tempo plano, descrito pelos campos de tétradas $E^a{}_\mu$.

Integrando $M^{(1)(2)}$ em todo o espaço obtemos:

$$L^{(1)(2)} \cong -\frac{8\alpha}{3r_0}J = -\frac{4m}{3r_0}J\,, \tag{4.25}$$

onde

$$J = \frac{1}{2}(r_o\psi_0^2)^3\Omega_0\,. \tag{4.26}$$

Os outros componentes de $M^{(i)(j)}$ de maneira análoga são escritos como:

$$\begin{aligned}
M^{(1)(3)} &\cong -2ke(e^{(1)}{}_3e^{(3)}{}_1 - e^{(1)}{}_1e^{(3)}{}_3)\times\\
&\times \Big[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001} - g_{00}T_1) - g^{00}g^{11}g^{33}T_{013}\Big]\\
&+ ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2e^{(2)}{}_3)g^{00}g^{22}g^{33}T_{023} \qquad (4.27)\\
M^{(2)(3)} &\cong -2ke(e^{(2)}{}_3e^{(3)}{}_1 - e^{(2)}{}_1e^{(3)}{}_3)\times\\
&\times \Big[g^{00}g^{03}g^{11}(T_{001} - g_{00}T_1) - g^{00}g^{11}g^{33}T_{013}\Big]\\
&+ ke(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2e^{(2)}{}_3)g^{00}g^{22}g^{33}T_{023}\,. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Quando integramos $M^{(1)(3)}$ e $M^{(2)(3)}$ devemos lembrar que $\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi = 0$ e $\int_0^{2\pi}\sin\phi d\phi = 0$, que aparecem nas combinações $(e^{(1)}{}_3e^{(3)}{}_1 - e^{(1)}{}_1e^{(3)}{}_3)$, $(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2e^{(2)}{}_3)$, $(e^{(2)}{}_3e^{(3)}{}_1 - e^{(2)}{}_1e^{(3)}{}_3)$ e $(e^{(1)}{}_3e^{(2)}{}_2 - e^{(1)}{}_2e^{(2)}{}_3)$, tornando-se simples concluir

$$L^{(1)(3)} = L^{(2)(3)} = 0\,. \tag{4.29}$$

Chegamos precisamente ao mesmo valor, em termos absolutos, encontrado em [1]. Cohen [20] identifica J dado pela equação (4.26) como sendo valor Newtoniano do momento angular de uma casca esférica em rotação. É possível escrever $L^{(1)(2)}$ como produto do momento de inércia da fonte por Ω_0, que representa a velocidade angular de sistemas de referência inerciais no interior da casca esférica. Ou seja, podemos escrever $L^{(1)(2)}$ [1] como:

$$L^{(1)(2)} = -\Big(\frac{2}{3}mr_0^2\Big)\Omega_0\,. \tag{4.30}$$

Levando-se em conta a discussão apresentada em [1] podemos afirmar que (4.30) representa o momento angular do campo gravitacional e não da fonte.

Para campos gravitacionais fracos esperamos que o momento angular tenha intensidade pequena. Para configurações típicas (no limite newtoniano) o campo gravitacional de uma casca esférica de massa m é desprezível, logo, o momento angular também o será. No entanto, alguns cálculos na literatura [22] mostram que o momento angular do espaço-tempo de uma casca esférica em rotação tem a mesma ordem de magnitude do momento angular da fonte, resultado que está em desacordo com a nossa análise.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação abordamos uma expressão para o momento angular gravitacional na formulação Teleparalela. As definições para o momento angular e energia-momento gravitacionais são invariantes por transformações de coordenadas no espaço tridimensional e por reparametrizações temporais. Apesar disso o momento angular se mostra dependente do sistema de referência (podemos observar essa característica no âmbito da Mecânica Clássica), o que não é inconsistente com a interpretação física de referencial e nem com o princípio da equivalência. Chegamos à conclusão que P^a e L^{ab}, tal qual foram definidos, formam uma representação do grupo de Poincaré. Analizamos a necessidade de se empregar expressões regularizadas para P^a e L^{ab}, aplicando esse conhecimento ao cálculo do momento angular de uma casca esférica em rotação.

Estabelecemos expressões que permitem o cálculo da energia-momento e do momento angular gravitacionais para uma configuração de tétradas arbitrária. Isso foi feito considerando a forma das expressões regularizadas, ou seja, temos que subtrair das expressões de P^a e L^{ab} o valor dessas quantidades no limite tendendo ao espaço plano. Devemos ainda investigar se esse procedimento elimina todos os infinitos quando as integrais são calculadas. Uma vez que isso é estabelecido, podemos adotar esse procedimento para eliminação de divergências. Este assunto será analisado mais detalhadamente no futuro.

Assim, os resultados obtidos para a casca esférica parecem ser corretos, haja vista a própria consistência das definições de energia-momento e momento angular gravitacionais, como exposto no2 Capítulos 2 e 4. Porém temos que investigar e entender melhor a escolha de referenciais, o que equivale a dizer, como escolher um campo de tétradas adaptado a um observador. Esse é um procedimento necessário pois lidamos com conceitos fundamentais em Física e um dos pilares da própria Relatividade que é a questão dos referenciais.

Investigaremos mais profundamente os valores para as quantidades de Casimir, definidas anteriormente, bem como as consequências que nascem da tentativa de se caracterizar o spin das ondas gravitacionais. É importante tentar compreender a teoria da gravitação, aqui considerada, como sendo uma teoria de calibre do grupo de Poincaré, levando-se em conta a relevância do grupo de Poincaré e suas representações para a teoria quântica de campos. Ou seja, podemos usar de alguma forma essa informação para construir uma teoria quântica da gravitação.

Aplicaremos as expressões do momento angular gravitacional para um buraco negro em rotação cuja solução é dada pela métrica de Kerr. Esse é um procedimento bem complicado, pois a solução parece ter uma indeterminação quando executamos a integração [1]. Assim, na tentativa de resolvermos esse problema vamos usar as expressões regularizadas e acreditamos que uma escolha mais adequada de coordenadas também se fará necessária para evitarmos singularidades.

Aplicaremos, também, essas expressões para uma esfera sólida em rotação, analizando os valores do momento e momento angular, bem como sua relação com as quantidades do tipo invariantes de Casimir. Estudaremos como esse comportamento se modifica com a aplicação de um "boost"à configuração da casca esférica.

No sentido de fornecer resultados que são passíveis de observação, podemos verificar se o momento angular do campo, para algumas das configurações citadas anteriormente, fornece uma medida do momento de inércia da fonte. Essa é uma característica desejável pois a Astrofísica, no campo prático, tem tido enormes avanços recentemente, o que abre espaço para o confronto entre teoria e experimento. Uma teoria física respeitável deve ser capaz de prever alguns aspectos da natureza aptos a serem corroborados pela experiência. Sem isso ficamos apenas no campo da especulação, fugindo, mesmo, do espírito do Método Científico desenvolvido ao longo da história da humanidade.

Referências Bibliográficas

[1] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toríbio and K. H. Castello-Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001 (2002).

[2] C. N. Yang e R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[3] E. Noether, Nachrichten Gesell. Wiss. Gottingen **79** (1972).

[4] A. Eistein, Riemansche Geometrie unter Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus (Riemannian Geometry with Maintaining the Notion of Distant Parallelism), Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wssenshcaften, Phys.-Math. Klasse, 1928, pp. 217-221; Auf die RiemannMetrik und den Fernparallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie (Unified Field Theory based Riemann Metrics and Distant Parallelism), Mathematische Annalen **102**, 685 (1930).

[5] J. A. Schouten, Ricci Calculus, 2nd ed. (Springer-Verlag, London, 1954), p. 142.

[6] C. Moller, Tetrad Fields and Conservation Laws in General Relativity, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"editado por C. Moller (Academic Press, London, 1962); Conservation Laws in the Tetrad Theory of Gravitation, Proceedings of the Conference on Theory of Gravitation, Warszawa and Jablonna, 1962, NORDITA Publications No. 136 (Gauthier-Villars, Paris and PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964).

[7] F. W. Hehl, in "Proceedings of the 6th School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation and Supergravity", Erice, 1979, edited by P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980).

[8] K. Hayashi, Phys. Lett. **69B**, 441 (1977); K. Hayashi and T. Shirafujii, Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979); bf 24, 3312 (1981).

[9] J. M. Maluf and J. F. da Rocha Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014 (2001).

[10] T. Regge and C. Teitelboim, Ann. Phys. (New York) **88**, 286 (1974).

[11] J. D. Brown and J. W. York, Jr., *Quasi-local energy in general relativity*, Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Mathematical Aspects of Classical Field Theory, edited by M. J. Gotay, J. E. Marsden and V. Moncrief (American Mathematical Society, 1991); Phys. Rev. D **47**, 1407 (1993).

[12] R. Beig and N. ó Murchadha, Ann. Phys. (New York) **174**, 463 (1987).

[13] L. B. Szabados, Class. Quantum Grav. **20**, 2627 (2003).

[14] J. W. Maluf, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, 723 (2005).

[15] J. M. Maluf, Gravitation and Cosmology **11**, 284 (2005).

[16] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, F. F. Faria and J. F. da Rocha Neto, Class. Quantum Grav. **23**, 6245 (2006).

[17] M. Hamermesh, *Group Theory and its Aplication to Physical Problems.* Dover Publications, Inc. New York.

[18] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga and J. F. da Rocha-Neto, *Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence* [gr-qc/0507122].

[19] F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, in "Geometry and Theoretical Physics", edited by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin Heidelberg, 1991).

[20] J. M. Cohen, J. Math. Phys. **8**, 1477 (1967).

[21] F. Canfora, L. Parisi and G. Vilasi, *Spin-1 gravitational waves. Theoretical and experimental aspects* [gr-qc/0512159].

[22] A. Komar, Phys. Rev. **113**, 934 (1959); J. Winicour, *Angular Momentum in General Relativity* in "General Relativity and Gravitation", edited by A. Held (Plenum, New York, 1980); A. Ashtekar, *Angular Momentum of Isolated Systems in General Relativity*, in "Cosmology and Gravitation", edited by P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980).