

DISPOSITIVO COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR NA INSTALAÇÃO DE MÓDULOS  
SUBMARINOS EM ÁGUAS PROFUNDAS

Rene Thiago Capelari Orlowski

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA OCEÂNICA.

Aprovada por:

---

Prof. Antonio Carlos Fernandes, Ph.D.

---

Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.

---

Dr. Ricardo Franciss, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
SETEMBRO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ORLOWSKI, RENE THIAGO CAPELARI

Dispositivo com Rigidez Não-Linear na  
Instalação de Módulos Submarinos em Águas  
Profundas [Rio de Janeiro] 2007

XIII, 152 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Oceânica, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Instalação de Módulos Submarinos
2. Instalação de Equipamentos Submarinos

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

À minha amada esposa Paola  
Ao meu querido filho Bruno  
Aos meus pais, Sérgio e Maria Vera  
À minha irmã Carin.

## AGRADECIMENTOS

À Paola, por sua paciência, amor e incentivo. Sua presença tornou-me mais forte na superação deste desafio.

Ao pequeno Bruno, por sua alegria, seus sorrisos espontâneos e sua compreensão durante minha ausência.

Aos meus familiares, pelo companheirismo e apoio.

Ao Prof. Antonio Carlos Fernandes, pela orientação e estímulo. Seus conselhos não me deixaram perder o foco, mostrando o caminho a seguir.

Ao colega Maxwell Cerqueira, pelo incentivo, disponibilidade e auxílio nos momentos de dificuldade.

Ao colega Gustavo Calazans de Cerqueira, pelo apoio durante as etapas iniciais deste estudo.

À Petrobras, na pessoa dos gerentes Cezar Paulo e Louise Ribeiro, que autorizaram o ingresso no curso de mestrado e apoiaram o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de empresa, em especial aos engenheiros Fernando Borja, Marcello Augustus, Fábio Alves, Antonio Britto, Cássio Kuchpil, Carlos Henrique Peixoto e Heitor Tsuha.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DISPOSITIVO COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR NA INSTALAÇÃO DE MÓDULOS  
SUBMARINOS EM ÁGUAS PROFUNDAS

Rene Thiago Capelari Orlowski

Setembro/2007

Orientador: Antonio Carlos Fernandes

Programa: Engenharia Oceânica

Este trabalho avalia um novo conceito de compensador passivo de *heave* para instalação de módulos submarinos. A alternativa proposta utiliza um componente com rigidez não-linear para alterar a frequência natural do sistema e assim proporcionar uma grande atenuação do movimento oscilatório do equipamento a ser instalado. Análises dinâmicas foram executadas com o objetivo de avaliar o desempenho do dispositivo e também de verificar a ocorrência de fenômenos não-lineares nas condições típicas de trabalho. Os resultados obtidos confirmam a aplicabilidade da análise às condições consideradas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

NONLINEAR STIFFNESS DEVICE IN DEEPWATER INSTALLATION OF  
SUBSEA MODULES

Rene Thiago Capelari Orłowski

September/2007

Advisor: Antonio Carlos Fernandes

Department: Ocean Engineering

This work assesses a new passive heave compensator concept for the installation of subsea modules. The proposed alternative uses a nonlinear stiffness device to change the system natural frequency in such a manner to provide an attenuation of the oscillatory motion of the equipment to be installed. Dynamic analyses were processed with the goal of evaluating the device effectiveness and also verify the occurrence of nonlinear phenomena under typically working conditions. The results confirm the analysis applicability to the conditions under consideration.

# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 O SISTEMA SUBMARINO DE PRODUÇÃO .....	2
1.2 INTRODUÇÃO AOS EQUIPAMENTOS SUBMARINOS .....	3
1.2.1 <i>Árvore de Natal Molhada (ANM)</i> .....	3
1.2.1.1 Sistema ANM Vertical ou Convencional .....	4
1.2.1.2 Sistema ANM Horizontal .....	9
1.2.2 <i>Manifold Submarino</i> .....	10
1.2.2.1 A primeira geração de manifolds diverless .....	13
1.2.2.2 A segunda geração de manifolds diverless .....	14
1.2.2.3 A terceira geração de manifolds diverless .....	14
1.2.2.4 A quarta geração de manifolds diverless .....	16
1.3 MÉTODOS DE CONEXÃO DE LINHAS .....	17
1.4 INSTALAÇÃO DE MÓDULOS SUBMARINOS .....	22
1.4.1 <i>Principais Módulos Submarinos</i> .....	22
1.4.2 <i>Métodos de Instalação</i> .....	23
1.5 A COMPENSAÇÃO DO HEAVE NA INSTALAÇÃO POR CABO .....	24
1.5.1 <i>Por Que Compensar?</i> .....	24
1.5.2 <i>Sistemas de Compensação</i> .....	24
1.5.2.1 Compensação Ativa .....	25
1.5.2.2 Compensação Passiva .....	25
1.5.2.3 Compensação Ativo-Passiva .....	30
<b>CAPÍTULO 2: INSTALAÇÃO POR CABO COM COMPENSADOR SUBMARINO COM RIGIDEZ NÃO LINEAR .....</b>	<b>32</b>
2.1 INSTALAÇÃO POR CABO SEM SISTEMA DE COMPENSAÇÃO .....	32
2.2 O USO DE MOLA COM BAIXA RIGIDEZ LINEAR .....	36
2.3 PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE COMPONENTE COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR .....	42
2.3.1 <i>Dispositivos com Comportamento Regressivo e suas Curvas Características</i> .....	44
2.3.1.1 Mola de disco cônico (Belleville) .....	44
2.3.1.2 Molas com elementos articulados .....	47



2.3.2	<i>Questões a Avaliar na Utilização de Compensadores com Rigidez Não-Linear</i> .....	50
<b>CAPÍTULO 3: OSCILAÇÕES NÃO-LINEARES: UMA ABORDAGEM INICIAL</b> .....		<b>51</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	51
3.2	FENÔMENOS INERENTES AOS SISTEMAS COM RIGIDEZ NÃO-LINEAR .....	52
3.2.1	<i>Bifurcações</i> .....	52
3.2.2	<i>O Fenômeno do Salto (Jump)</i> .....	53
3.2.3	<i>Ressonâncias Secundárias</i> .....	56
3.2.4	<i>Caos</i> .....	57
3.3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA ANÁLISE QUALITATIVA: ABORDAGEM GEOMÉTRICA .....	58
3.3.1	<i>Os Sistemas em Vibração Livre</i> .....	59
3.3.1.1	O Plano de Fase .....	59
3.3.1.2	Bacias de Atração .....	72
3.3.2	<i>Os Sistemas sob Excitação Externa</i> .....	73
3.3.2.1	Espaço de Fase .....	74
3.3.2.2	Seção de Poincaré.....	74
3.3.2.3	Diagrama de Bifurcação .....	75
3.4	FUNDAMENTOS DA ANÁLISE QUANTITATIVA.....	76
3.4.1	<i>Os Métodos Exatos</i> .....	77
3.4.2	<i>Os Métodos Analíticos Aproximados</i> .....	77
3.4.3	<i>Os Métodos Numéricos</i> .....	78
3.4.3.1	Métodos Numéricos para Resolução de EDO's de 1ª Ordem .....	79
3.4.3.2	Aplicação dos Métodos .....	80
<b>CAPÍTULO 4: MÉTODO PASSIVO DE COMPENSAÇÃO COM RIGIDEZ NÃO- LINEAR</b> .....		<b>84</b>
4.1	EQUACIONANDO O PROBLEMA.....	84
4.1.1	<i>Construção do Diagrama de Corpo Livre do Sistema</i> .....	85
4.1.2	<i>Determinação do Modelo Matemático</i> .....	86
4.1.3	<i>Escolha da Função de Amortecimento Hidrodinâmico</i> .....	87
4.1.4	<i>A Força de Restauração do Sistema</i> .....	88
4.1.4.1	Escolha da Função da Força de Restauração da Mola.....	88
4.1.4.2	A Força de Restauração do Cabo .....	89

4.1.4.3	A Força de Restauração do Sistema .....	90
4.1.5	<i>O Modelo do Sistema</i> .....	92
<b>CAPÍTULO 5: ESTUDO DE CASO: INSTALAÇÃO DE UM MÓDULO DE CHOKE .....</b>		<b>93</b>
5.1	INSTALAÇÃO DO MÓDULO POR CABO SEM O COMPENSADOR PASSIVO .....	94
5.1.1	<i>Análise no Domínio da Freqüência</i> .....	94
5.2	INSTALAÇÃO DO MÓDULO POR CABO COM COMPENSADOR PASSIVO .....	97
5.2.1	<i>Dimensionamento do Compensador Não-Linear</i> .....	98
5.2.1.1	Definição de Critérios .....	98
5.2.1.2	Resposta de um Sistema Não-linear Semelhante ao Estudado .....	99
5.2.2	<i>Dimensionamento das Curvas de Restauração para Várias Lâminas D'água</i> .....	103
5.2.3	<i>Avaliação do Sistema em Vibração Livre</i> .....	104
5.2.3.1	Sistema em Vibração Livre sem Amortecimento .....	104
5.2.3.2	Sistema em Vibração Livre com Amortecimento.....	110
5.2.4	<i>Avaliação do Sistema em Vibração Forçada</i> .....	112
5.2.4.1	Metodologia de Análise .....	112
5.2.4.2	Análise do Sistema em sua Envoltória de Projeto .....	114
5.2.4.3	Análise de Sensibilidade do Compensador Submarino às Condições de Projeto .....	125
5.3	DIMENSIONAMENTO DE UM COMPENSADOR TIPO RHOMBUS .....	129
<b>CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>		<b>133</b>
6.1	DISCUSSÃO .....	133
6.2	CONCLUSÕES .....	134
6.3	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	136
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>		<b>138</b>
<b>APÊNDICE A: A MOLA RHOMBUS.....</b>		<b>142</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$  – coeficientes dos termos lineares de uma expansão em série;

$A$  – área projetada da seção transversal do equipamento;

$[A]$  – matriz formada pelos coeficientes  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  e  $a_{14}$ ;

$A_{\text{cabo}}$  – área da seção transversal do cabo de aço;

$b$  – coeficiente de amortecimento;

$B$  – força de amortecimento;

$C_d$  – coeficiente de arrasto;

$d$  – diâmetro nominal do cabo de aço;

$E$  – módulo de elasticidade do cabo de aço;

$E_{\text{Ponto\_sela}}$  – energia na trajetória que passa pelo ponto de sela (separatriz);

$E_{\text{POTENCIAL}}$  – energia potencial;

$E_{\text{TOTAL}}$  – energia total;

$f$  – constante dependente da razão de atenuação;

$f_1, f_2$  – funções das variáveis independentes do sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) que representa uma EDO de segunda ordem;

$F$  – amplitude da força de excitação da equação de Duffing;

$F_c$  – fator construtivo do cabo de aço;

$F_{\text{cabo}}$  – força de restauração do cabo de aço;

$F(t)$  – força de excitação, função periódica no tempo;

$f(z)$  – força de restauração não-linear, função do deslocamento.

$\vec{h}$  – vetor composto por  $h_1$  e  $h_2$ ;

$h_1, h_2$  – funções que agrupam os termos não-lineares de uma expansão em série;

$k$  – rigidez linear;

$k_1, k_2$  e  $k_3$  – coeficientes da força de restauração resultante da associação de cabo de aço

com compensador não-linear;

$k_{\text{cabo}}$  – rigidez linear do cabo de aço;

$k_{\text{mola}}$  – rigidez da mola;

$k_{\text{sistema}}$  – rigidez linear do sistema de instalação;

$L$  – comprimento das barras de uma mola Rhombus;

$L_{\text{cabo}}$  – comprimento total do cabo de aço;

LDA – lâmina d'água;

$L_{\text{min}}$  – comprimento mínimo de cabo para proporcionar uma atenuação definida no movimento de resposta do corpo a ser instalado;

$M$  – massa;

$M_{\text{cabo}}$  – massa do cabo de aço;

$M_{\text{corpo}}$  – massa do corpo a ser instalado;

$M_e$  – massa efetiva;

$p$  – produto dos autovalores da equação característica;

$s$  – soma dos autovalores da equação característica;

$t$  – tempo;

$T$  – força de restauração do sistema;

$T_{\text{max}}$  – período superior da força de excitação do sistema;

$x$  – deslocamento, na equação de Duffing;

$\dot{x}$  – velocidade, na equação de Duffing;

$\ddot{x}$  – aceleração, na equação de Duffing;

$X$  – deslocamento do corpo a ser instalado;

$\dot{X}$  – velocidade do corpo a ser instalado;

$\ddot{X}$  – aceleração do corpo a ser instalado;

$X_{\text{Amp}}$  – amplitude do movimento de resposta;

$Y$  – deslocamento imposto pelo movimento da embarcação;

$y_0$  – amplitude de excitação;

$z$  – deslocamento;

$\dot{z}$  – velocidade;

$\ddot{z}$  – aceleração;

$\vec{z}$  – vetor composto pelas variáveis  $z_1$  e  $z_2$  ou  $z_1, z_2$  e  $z_3$ ;

$\dot{\vec{z}}$  – derivada temporal do vetor  $\vec{z}$ ;

$z_1, z_2, z_3$  – variáveis independentes do sistema de equações diferenciais ordinárias que representa uma EDO de ordem superior. Neste trabalho  $z_1$  é o deslocamento,  $z_2$  a velocidade e  $z_3$  o tempo;

$\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$  – derivadas temporais das variáveis independentes  $z_1, z_2$  e  $z_3$ ;

$\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$  – variáveis independentes que descrevem o estado do sistema em relação à localização de um ponto crítico;

$\alpha$  – parâmetro associado ao termo não-linear da equação de Duffing;

$\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  – coeficientes da função de restauração que representa o compensador não-linear;

$\Delta$  – discriminante da equação característica;

$\Delta L_{\text{cabo}}$  – deformação elástica do cabo de aço;

$\Delta L_{\text{comp}}$  – deslocamento da mola não-linear;

$\Delta M_{\text{corpo}}$  – massa adicional do corpo a ser instalado;

$\phi$  – fase da função de excitação;

$\Lambda$  – razão de frequência adimensional, relaciona a frequência de excitação com a frequência natural do sistema;

$\lambda$  – autovalor;

$\lambda_1, \lambda_2$  – autovalores provenientes da resolução da equação característica;

$\theta_0$  – ângulo de montagem da mola Rhombus;

$\rho$  – massa específica do fluido onde o corpo a ser instalado está imerso;

$\rho_{\text{cabo}}$  – massa linear do cabo de aço;

$\omega$  – frequência circular de excitação;

$\omega_0$  – frequência natural do sistema;

$\omega_n$  – frequência de oscilação de uma resposta sub-harmônica ou super-harmônica;

$\xi$  – razão de amortecimento adimensional;

$\Lambda_{\text{atenuação}}$  – razão de frequência que leva o sistema a uma determinada atenuação da resposta.

## CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

A descoberta de campos de petróleo em águas cada vez mais profundas trouxe para a indústria grandes desafios tecnológicos. Uma das áreas mais afetadas por esta realidade foi a engenharia submarina, que teve de se adaptar à nova realidade, mudando seus conceitos e quebrando paradigmas.

A concepção dos componentes dos sistemas submarinos teve de ser reformulada, o que incluiu mudanças de projeto e alteração de recursos e métodos utilizados para a instalação, intervenção e manutenção.

Uma das mudanças ocorridas se relaciona com o método de instalação dos equipamentos, que antes eram feitos em sua maioria por sondas via coluna de trabalho (*riser*) e atualmente tendem ao uso de embarcações de menor custo com a utilização de cabo.

Esta alteração traz enormes ganhos no custo de desenvolvimento do campo bem como aumenta a disponibilidade de recursos considerados críticos (p. ex. sondas), que não mais precisam participar das operações de instalação. Contudo, com o uso de cabos, novos problemas passaram a existir no processo de instalação, dentre os quais se destaca a possibilidade de amplificação do movimento dos equipamentos devido à dinâmica do sistema. Neste sentido, os métodos de compensação do movimento vertical (*heave*) passam a desempenhar importante papel, pois podem viabilizar a instalação nos casos em que a resposta do movimento não seja aceitável apenas com o cabo.

Este trabalho avalia a utilização de um novo conceito de sistema passivo de compensação, composto basicamente por um componente com rigidez não-linear.

De forma a facilitar o entendimento do estudo, o primeiro Capítulo faz uma introdução aos principais equipamentos. Aborda ainda os métodos de instalação dos

módulos existentes nestes equipamentos e os tipos de sistemas de compensação de *heave* disponíveis para a instalação por cabo. Após esta introdução, o Capítulo 2 discute a instalação a cabo de módulos submarinos e mostra por meio de um exemplo que a amplificação do movimento vertical pode trazer restrições à operação. Propõe-se então o uso do novo conceito de compensador passivo, com rigidez não-linear. Em função da característica do sistema proposto, faz-se no Capítulo 3 uma abordagem inicial aos problemas não-lineares. No Capítulo 4 constrói-se a equação que representa o modelo de instalação e, por fim, no Capítulo 5 conduz-se um estudo de caso, considerando a instalação de um módulo de *choke*.

## **1.1 O Sistema Submarino de Produção**

Um Sistema Submarino de Produção de Petróleo tem como principal objetivo viabilizar de forma técnica e econômica a produção de hidrocarbonetos localizados em campos *offshore*. Os sistemas submarinos são compostos por vários elementos, cujas funções são variadas e cuja associação viabiliza a produção.

Os principais elementos presentes nos sistemas submarinos de produção são [1]:

- Dutos e *risers*: Responsáveis por conduzir os fluidos produzidos ou injetados, interligam os equipamentos submarinos à facilidade de produção (plataforma ou em terra);
- Umbilicais: Componentes responsáveis pela interligação física entre os equipamentos submarinos e a fonte de energia (hidráulica ou elétrica) na estação de controle central na plataforma ou em terra;
- Sistema de controle e monitoramento: Sistema que possibilita o controle e a monitoração dos equipamentos submarinos remotamente a partir de uma estação central na superfície;



- Equipamentos submarinos: Componentes diversos que podem possuir, entre outras, as funções de segurança, controle e isolamento do fluxo produzido ou injetado, separação do fluido escoado em fases e injeção de energia ao escoamento.

Como o foco da dissertação recai sobre a instalação de módulos de equipamentos submarinos em águas profundas, nos itens seguintes aborda-se os principais equipamentos encontrados em sistemas submarinos nestas profundidades.

A Figura 1.1 ilustra um sistema submarino de produção, indicando seus principais componentes.

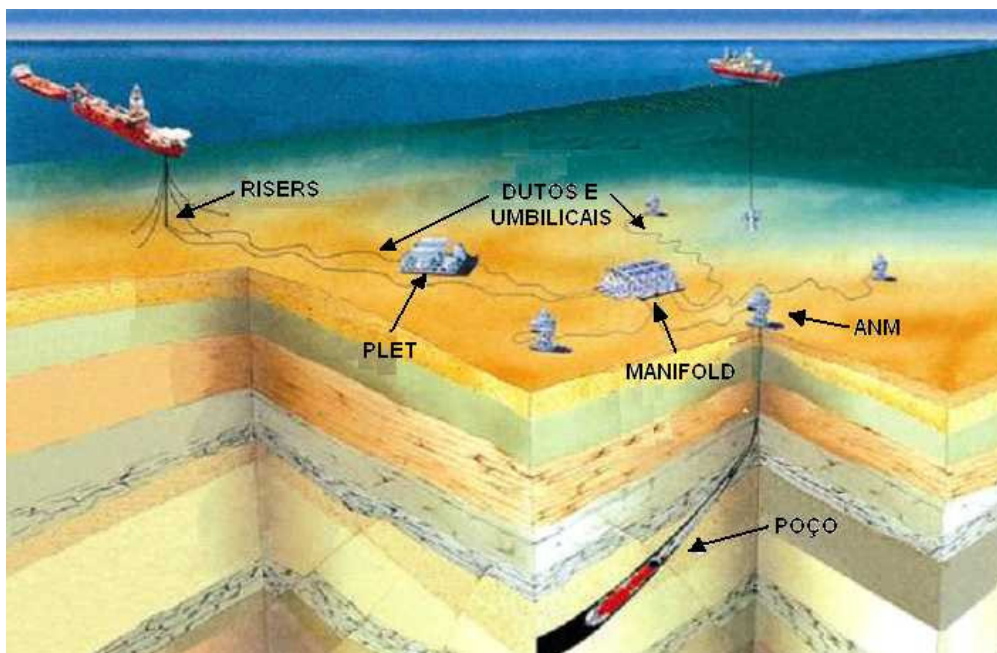


Figura 1.1 – Representação de um sistema submarino de produção

## **1.2 Introdução aos Equipamentos Submarinos**

### **1.2.1 Árvore de Natal Molhada (ANM)**

A árvore de natal molhada (ANM) é um equipamento de segurança que integra o sistema de completação com a função de isolar e controlar o fluxo de fluidos produzidos ou injetados no poço.

Há basicamente dois tipos de sistemas ANM [1], vertical e horizontal, cujas principais diferenças estão relacionadas a posições de válvulas, facilidade para intervenção e tipos de equipamentos pertencentes ao sistema.

A seguir será abordado de forma sucinta cada um dos sistemas.

#### 1.2.1.1 Sistema ANM Vertical ou Convencional

O Sistema ANM Convencional é composto por um conjunto de equipamentos para uso submerso que, na fase de produção, pode possuir os seguintes itens:

- Base Adaptadora de Produção (BAP);
- Suspensor de Coluna ou *Tubing Hanger* (TH);
- Árvore de Natal propriamente dita (ANM);
- Capa da Árvore (*Tree Cap*);
- Terminação das linhas de fluxo e umbilical de controle.

Na Figura 1.2 os principais equipamentos listados acima podem ser vistos.



Figura 1.2 – Equipamentos do conjunto ANM

#### a) BAP

A BAP (Figura 1.3) é um equipamento que pode ou não fazer parte do sistema ANM Convencional. Quando presente, tem as funções de suportar as linhas de fluxo e controle e servir de ponto de apoio e travamento para o suspensor de coluna.

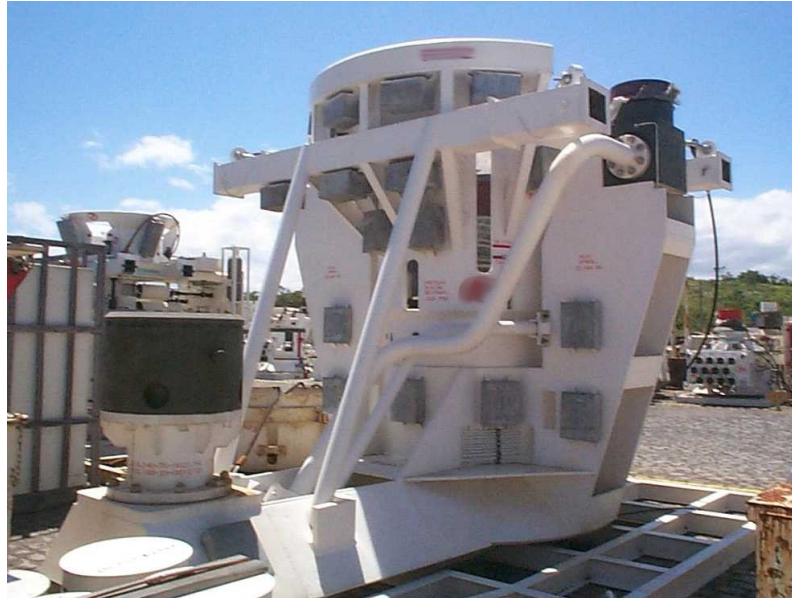


Figura 1.3 – Base adaptadora de produção

Atualmente a principal vantagem na utilização da base adaptadora está na sua característica de servir como ponto de conexão à terminação das linhas de fluxo e umbilical de controle. Esta característica permite que uma intervenção que necessite de recuperação da ANM possa ser realizada sem que as linhas tenham de ser recuperadas ou abandonadas no solo marinho [2].

#### b) Suspensor de coluna

O suspensor de coluna (Figura 1.4) é o equipamento que faz interface entre a ANM e a coluna de produção ou de injeção. Tem como funções principais suportar o peso da coluna, proporcionar seu travamento na BAP ou cabeça de poço, realizar a vedação do anular e servir de interface para a interligação hidráulica e elétrica de

componentes do poço (p. ex. válvulas de segurança de sub-superfície e sensores de fundo de poço).



Figura 1.4 – Suspensor de coluna

### c) Árvore de natal propriamente dita

O equipamento que dá nome ao sistema foi desenvolvido para uso submerso, é instalado na cabeça de poço ou na BAP e, basicamente, é formado por um conjunto de válvulas, que têm a função principal de controlar o fluxo produzido ou injetado no reservatório assim como servir como barreira de segurança do poço. As principais válvulas da ANM, mostradas na Figura 1.5, são:

- Válvula mestra de produção (*master 1*);
- Válvula lateral de produção (*wing 1*);
- Válvula mestra do anular (*master 2*);
- Válvula lateral do anular (*wing 2*);
- Válvula de interligação entre anular e a produção (*crossover*);
- Válvula de intervenção da produção (*swab 1*);
- Válvula de intervenção do anular (*swab 2*).

Das válvulas citadas, vale informar que as *swabs* têm como principal função permitir o acesso ao poço durante as intervenções com sonda e não são controladas pela unidade estacionária de produção (UEP). Por sua vez, as demais válvulas, controláveis pela UEP, permitem a produção de hidrocarbonetos e injeção de fluidos no poço.

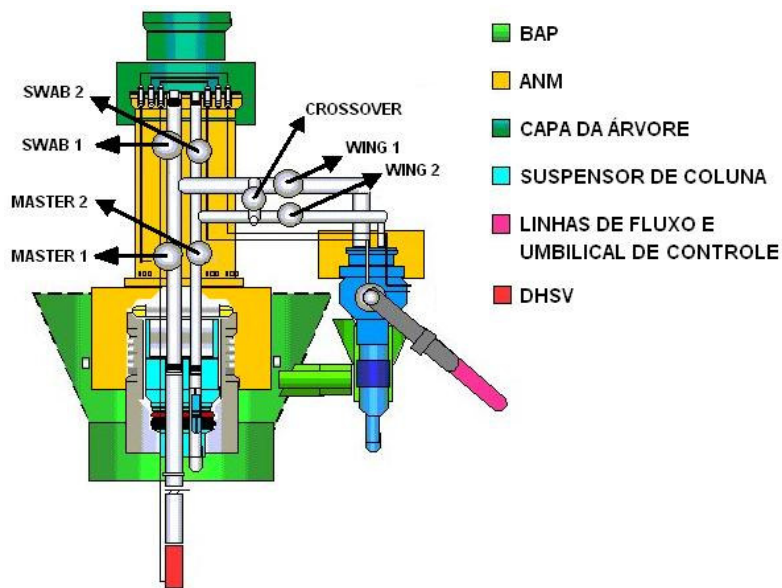


Figura 1.5 – Válvulas da ANM Convencional

d) Capa da Árvore (Tree Cap)

É um equipamento instalado no topo da ANM que possui como principal função fazer a interligação entre os controles da plataforma de produção e as funções da árvore. Além desta função a capa serve como segunda barreira de segurança quando o poço se encontra em produção; nesta situação as válvulas *swabs* estão fechadas e correspondem à primeira barreira.

A Figura 1.6 mostra uma capa de árvore para lâminas d'água superiores a 300 metros.



Figura 1.6 – Capa da árvore

#### d) Equipamentos para Terminação das Linhas e Umbilical

Estes equipamentos têm a função de conectar as linhas de fluxo e o umbilical de controle ao sistema ANM. Em função do método de conexão utilizado, vários tipos de terminação podem ser utilizados [2,3,4]. Os métodos de conexão serão abordados separadamente no Item 1.3.

A seguir estão listados os principais tipos de terminação empregados em ANM:

- Conexão das linhas de fluxo: flange, grampo bi-partido, Mandril das Linhas de Fluxo (MLF) e Módulo de Conexão Vertical (MCV);
- Conexão do umbilical de controle: placa hidráulica, MLF e MCV.

Na Figura 1.7 é possível observar os diversos tipos de terminações encontradas em sistemas ANM.

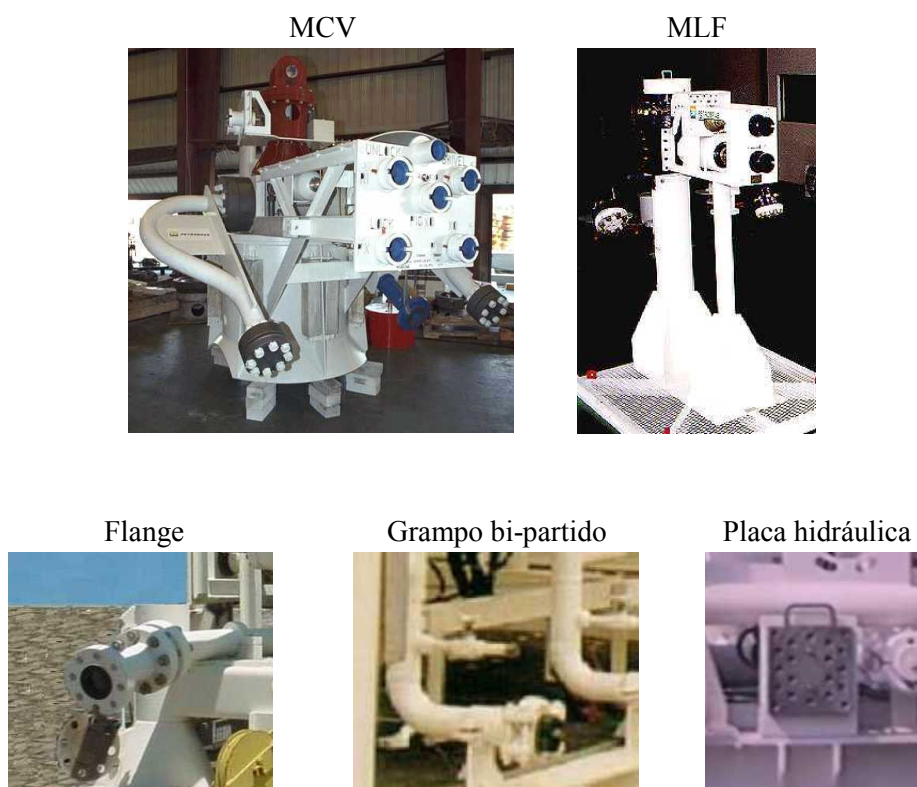


Figura 1.7 – Tipos de terminações de linhas de fluxo e umbilicais de controle

### 1.2.1.2 Sistema ANM Horizontal

O sistema ANM horizontal é composto basicamente pelos mesmos equipamentos do sistema convencional com exceção da BAP, que jamais estará presente.

A grande diferença entre os dois sistemas está na árvore e por este motivo ela será o único equipamento abordado aqui.

#### a) Árvore de natal horizontal

A Árvore de Natal Molhada Horizontal (ANM-H), como a Convencional, também executa o controle de fluxo do poço e do anular, mas a sua concepção de construção é totalmente diferente. A ANM-H pode ser descrita, de forma simplificada, como uma base adaptadora de produção (BAP) com válvulas montadas na sua lateral, permitindo a intervenção no poço e a substituição da coluna de produção sem a retirada da mesma [2].

Esta árvore é composta por sete válvulas operadas por atuadores hidráulicos (Figura 1.8):

- Válvula mestra de produção (*master 1*);
- Válvula lateral de produção (*wing 1*);
- Válvula mestra do anular (*master 2*);
- Válvula lateral do anular (*wing 2*);
- Válvula de interligação entre anular e a produção (*crossover*);
- Válvula de intervenção do anular (*annulus intervention - AI*);
- Válvula para passagem de pig (*pig crossover*).

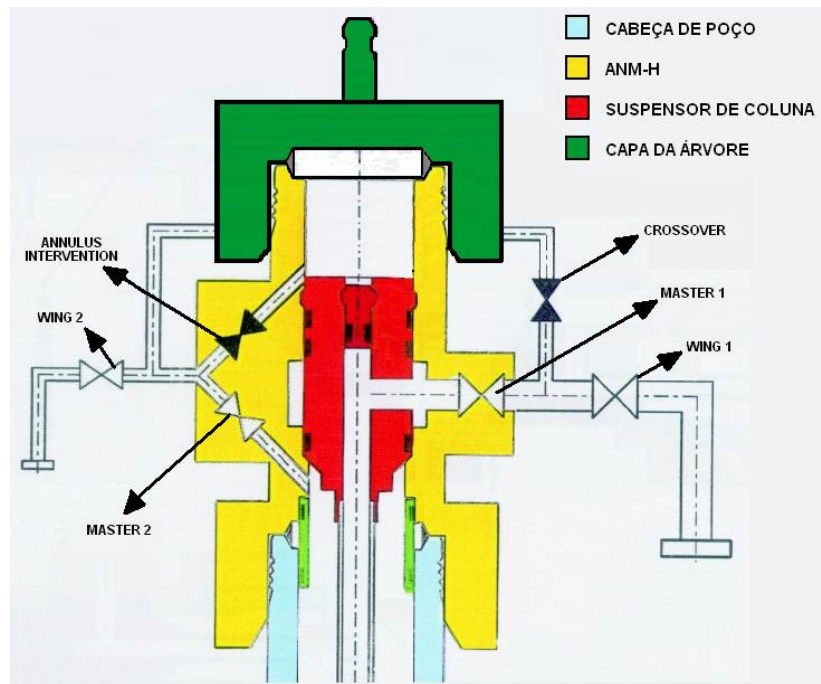


Figura 1.8 – Válvulas da ANM Horizontal

Em função do deslocamento das válvulas para a lateral da ANM, quem faz o direcionamento do fluxo para a saída das linhas de produção é o suspensor de coluna, que agora é assentado no alojador da árvore, e não mais na BAP ou na cabeça de poço. Com isso, o suspensor do sistema horizontal possui uma saída lateral, o que o diferencia do equipamento utilizado no sistema vertical.

A grande vantagem desta concepção é a possibilidade de retirada da coluna de produção e suspensor de coluna sem retirada da ANM-H. Por outro lado, qualquer anomalia que requeira a retirada da árvore, resultará também na necessidade de uma intervenção com retirada da coluna de produção.

### 1.2.2 *Manifold Submarino*

Destinados à coleta ou distribuição de fluidos, os manifolds submarinos são equipamentos utilizados no desenvolvimento de campos de petróleo com os objetivos de:



- Reduzir o número de *risers* que chegam à unidade estacionária de produção (UEP) minimizando a carga aplicada sobre ela e também seu espaço;
- Reduzir o custo de dutos;
- Antecipar a produção;
- Otimizar o arranjo submarino.

A redução de custo de dutos se deve ao fato de a vazão máxima admitida por um duto não ser linearmente proporcional ao seu diâmetro. Desta forma é possível, por exemplo, que oito dutos de 4” possam ser substituídos por um de 10”, tendo este duto um custo por metro menor do que oito dutos de 4”. A depender do arranjo submarino proposto para o campo este poderá ser o fator determinante para a utilização de manifolds [5].

Com relação à diminuição do número de *risers* que chegam às plataformas, a utilização de manifolds pode ser a alternativa que viabilize o desenvolvimento do campo. Isto se dá como consequência da limitação de espaço para conexão de dutos em unidades do tipo FPSO com *turret*, ou como resultado da capacidade de carga suportada por uma UEP do tipo semi-submersível ancorada em águas profundas ou ultraprofundas.

A vantagem de antecipação da produção é tida mais como uma consequência do emprego de manifolds do que como um fator decisivo para sua escolha. Esta vantagem está na possibilidade de interligação de todos os poços ao manifold antes da chegada da UEP à locação. Com isto, no momento em que a plataforma estiver disponível à produção basta fazer a interligação do manifold a ela que por consequência todos os poços estarão interligados. Caso não fosse utilizado o manifold, seriam necessárias interligações poço a poço com a UEP, o que consumiria tempo muito maior até que todos estivessem aptos à produção.

Com relação à funcionalidade, os manifolds podem ser basicamente de três tipos [5]:

- Manifolds de coleta: direcionam os fluxos provenientes de vários dutos para um único duto de saída. Como exemplo têm-se os manifolds de produção;
- Manifolds de distribuição: recebem o fluxo de um único duto e o redirecionam para vários dutos de saída. Os equipamentos típicos de distribuição são os de injeção de água e *gas lift*;
- Manifolds mistos: apresentam simultaneamente as funções dos equipamentos de coleta e distribuição. Como exemplo estão os equipamentos que apresentam as funções simultâneas de produção e injeção de água.

As configurações típicas dos manifolds podem variar quanto ao conceito de modularização adotado. A modularização visa permitir que sistemas e componentes considerados críticos possam ser recuperados. Com isto, podem passar por manutenção para retornarem à operação ou então serem substituídos por novos módulos.

Estudos de confiabilidade e de ciclo de vida do manifold e de seus componentes definem a necessidade ou não de modularização, bem como quais partes devem ser recuperáveis [6].

O uso de módulos recuperáveis aumenta o tamanho e peso do manifold, contudo apresenta a grande vantagem de permitir que a condição operacional de componentes críticos seja restaurada sem que seja necessário interromper a produção de todos os poços por um longo período de tempo.

A característica de modularização norteou o desenvolvimento dos manifolds submarinos *diverless* da Bacia de Campos no Brasil. Sob este ponto de vista a história do desenvolvimento dos equipamentos pode ser dividida em gerações [3], conforme explicado a seguir.

### 1.2.2.1 A primeira geração de manifolds diverless

Com a descoberta de campos de petróleo em águas profundas, a Petrobras necessitou rever o conceito de projeto de seus equipamentos, que até então consideravam a utilização de mergulho para várias operações.

O resultado materializou-se em dois manifolds de produção que possuíam capacidade para interligação a oito poços e pesavam 450 *tf* cada um. Ambos foram instalados em águas não acessíveis ao mergulho comercial no campo de Albacora. A Figura 1.9 mostra um destes equipamentos.

Devido à falta de dados de confiabilidade de componentes instalados em tais profundidades e também em função da pouca experiência com a operação deste novo tipo de conceito, o projeto considerou o agrupamento dos componentes mais críticos em módulos recuperáveis. Válvulas, *chokes* e sensores foram agrupados em quatro módulos recuperáveis (um para cada dois poços), chamados módulos de válvulas. O sistema de controle selecionado foi do tipo eletro-hidráulico multiplexado, que empregava quatro módulos de controle (SCM's). Por fim, devido à impossibilidade de acesso ao mergulho comercial, o sistema de conexão dos dutos flexíveis e umbilicais de controle contemplou a utilização de módulos de conexão vertical (MCV's).

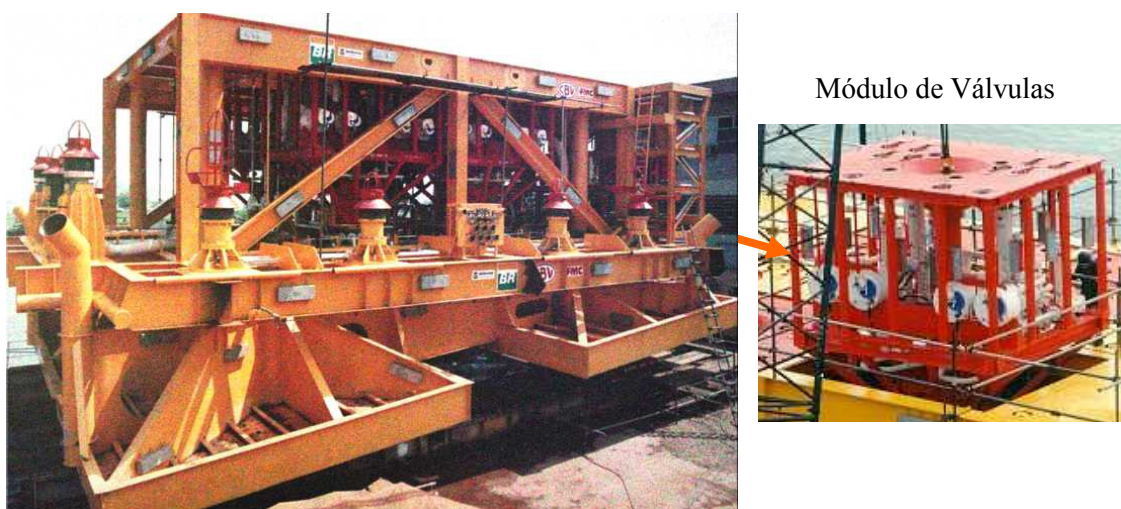


Figura 1.9 – Manifold da primeira geração

### 1.2.2.2 A segunda geração de manifolds diverless

A segunda geração de manifolds foi composta por cinco manifolds, sendo quatro para produção e um para injeção de água. O grande objetivo neste momento passou a ser a redução de peso, que foi alcançada com a construção de equipamentos que pesavam em torno de 160 *tf*. A Figura 1.10 mostra um destes manifolds.

As principais alterações em relação à primeira geração foram:

- Eliminação dos módulos de válvulas, tornando todos seus componentes residentes;
- Criação de um novo módulo recuperável em cada manifold. Posteriormente este módulo viria a abrigar um medidor multifásico com o objetivo de testar a tecnologia, emergente à época.



Módulo de Medição Multifásica



Figura 1.10 – Manifold de segunda geração

### 1.2.2.3 A terceira geração de manifolds diverless

Seis equipamentos iniciaram a terceira geração e foram instalados nos campos de Marlim e Marimbá. A maior alteração em relação à segunda geração foi a disposição dos *chokes* em módulos recuperáveis, de forma que cada módulo atendia a dois poços.

Quando se imaginou que este grupo de manifolds estava encerrado, um desafio

surgiu no campo de Roncador. Estudos identificaram que haveria grande otimização do arranjo submarino se fosse desenvolvido um manifold para distribuição de gás para elevação artificial. Este equipamento (Figura 1.11) foi então projetado para lâmina d'água de 2000 m incorporando, além dos módulos de *chokes*, as seguintes inovações:

- medidores monofásicos de vazão (incluídos nos módulos de *choke*);
- utilização de válvulas direcionadoras (*diverters*) para envio de *pigs* de limpeza aos poços a partir da superfície e através do manifold;
- emprego de detectores de *pig* recuperáveis.

Outro marco importante pertencente a este manifold de Roncador foi o método de instalação, inédito e baseado na utilização de sonda e barcos com posicionamento dinâmico [7]. No conceito desenvolvido a ferramenta de instalação do manifold foi conectada a uma polia por onde passava um cabo de aço. Uma extremidade deste cabo era sustentada pela sonda enquanto a outra estava ligada ao guincho de um barco de manuseio de âncoras. A liberação de cabo pelo guincho permitia a descida do equipamento; enquanto a configuração do sistema, aliada ao compensador de *heave* da sonda, evitava a ocorrência do fenômeno de ressonância.



Módulo de *Choke*



Figura 1.11 – Manifold da terceira geração

#### 1.2.2.4 A quarta geração de manifolds diverless

Após a terceira geração um novo equipamento foi projetado para o desenvolvimento da produção do campo de Marimbá Leste (Figura 1.12).

Devido ao aprendizado obtido com os equipamentos anteriores optou-se novamente pela modularização de todos os componentes considerados críticos.

Na quarta geração decidiu-se que apenas as válvulas manuais de bloqueio e os sensores de pressão e temperatura das tubulações de tronco (*headers*) seriam residentes; ainda assim estes sensores possuíam redundância em módulos recuperáveis.

Nesta concepção adotou-se como recuperáveis os seguintes módulos:

- Módulos de controle submarino (SCMs);
- Módulo do medidor multifásico;
- Módulo com as válvulas hidráulicas que permitem a passagem de *pig* de limpeza;
- Sensor de passagem de *pig*;
- Módulos de produção.

Os módulos denominados de Produção eram compostos por válvulas, sensores, *chokes*, medidores de vazão multifásica e monofásica. Sua função principal era controlar a produção de um único poço, o que minimizava os impactos em caso de falha de componente com necessidade de substituição do módulo.

Por fim, nesta geração procurou-se bloquear todas as dificuldades vivenciadas nas gerações anteriores objetivando o projeto de um equipamento mais confiável e com maior disponibilidade operacional.

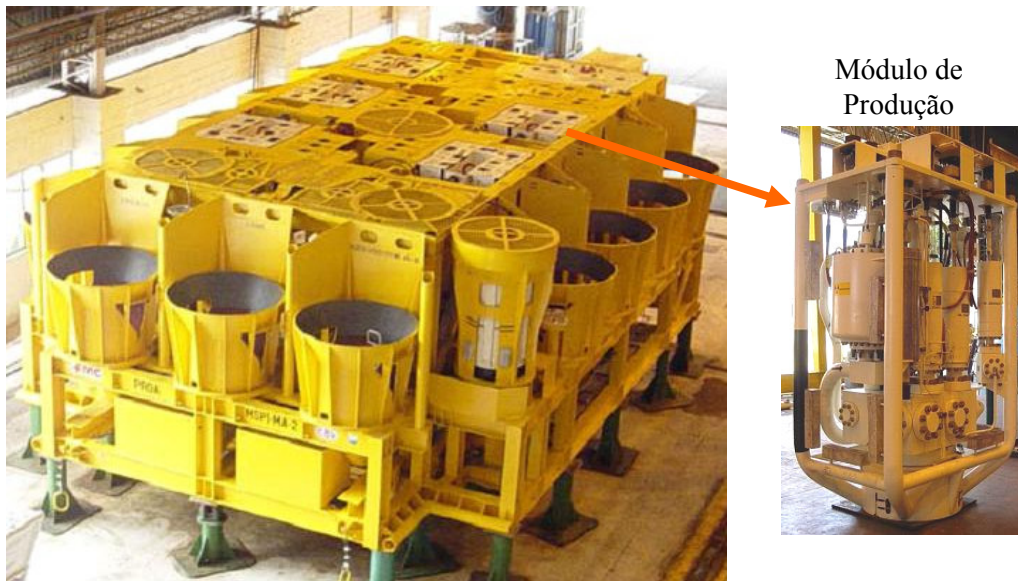


Figura 1.12 – Manifold da quarta geração

### **1.3 Métodos de Conexão de Linhas**

Ao longo da história de desenvolvimento dos campos de petróleo *offshore* foram utilizados diversos métodos para conexão dos dutos e umbilicais aos equipamentos submarinos.

Inicialmente, nos equipamentos projetados para lâmina d'água (LDA) inferior a 300 metros, as conexões de linhas e umbilical eram executadas por mergulhadores. Por este motivo o sistema de acoplamento e o método de conexão deviam ser simples. As linhas e umbilicais eram abandonados próximos ao equipamento submarino de forma que o mergulhador, com o uso de “para-quedas” e talhas, as aproximava e executava o acoplamento. A conexão em si era feita com a utilização de flanges, grampos bipartidos e placas hidráulicas. A Figura 1.13 mostra uma ANM onde alguns destes componentes estão presentes.

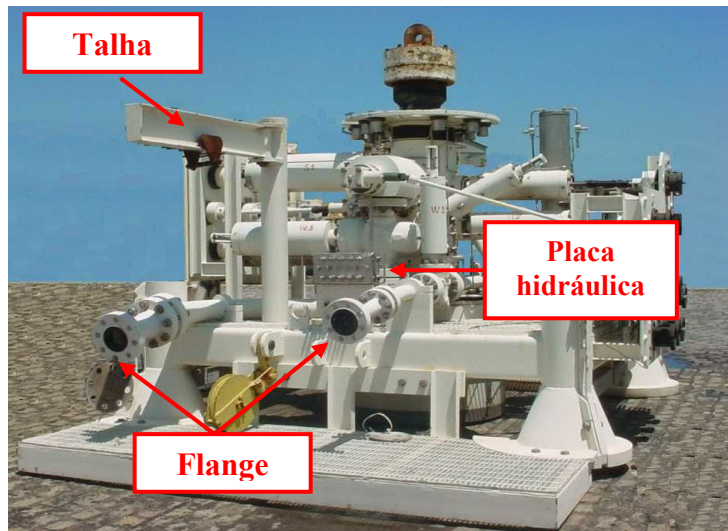


Figura 1.13 – Terminações de linhas dos tipos flange e placa hidráulica

Posteriormente, com a necessidade de se desenvolver campos em águas com profundidades cada vez maiores, começaram os esforços para se disponibilizar sistemas de conexão que não necessitassem de mergulho, os sistemas *diverless*.

A primeira iniciativa neste sentido foi o uso da conexão horizontal tipo *pull in*. Este sistema foi utilizado em uma árvore de natal e a terminação das linhas era puxada para a árvore por uma ferramenta denominada *pull in tool*. Devido à falta de confiabilidade este conceito foi abandonado. A Figura 1.14 mostra uma árvore dotada com este sistema.



Figura 1.14 – Terminação de linhas horizontal do tipo *pull in*



Após os problemas enfrentados com o primeiro tipo de conexão *diverless* partiu-se para o desenvolvimento de um método chamado *lay-away* [8]. Neste sistema a terminação das linhas e umbilical era feita em um equipamento denominado mandril das linhas de fluxo (MLF).

O método consistia em um trabalho conjunto entre navio lançador de linhas e a sonda de completação. O navio transferia o MLF conectado às linhas e umbilical para a sonda por meio de um cabo mensageiro. Na sonda o MLF era travado na ANM e após isto se iniciava a descida do conjunto, com o lançamento simultâneo das linhas de fluxo e controle pelo navio. A Figura 1.15 ilustra este processo.

Como a BAP para este caso possuía um berço para apoiar e travar o MLF, caso fosse necessário seria possível recuperar a ANM sem as linhas. Mesmo assim, o método *lay-away* apresentava uma grande desvantagem, necessitava a operação conjunta de dois recursos altamente críticos: navio de lançamento de linhas e sonda de completação. Neste momento era possível afirmar que já havia um método para conexão de linhas sem necessidade de mergulhador e o desafio passava a ser a realização desta operação sem a necessidade de utilização das duas embarcações simultaneamente.

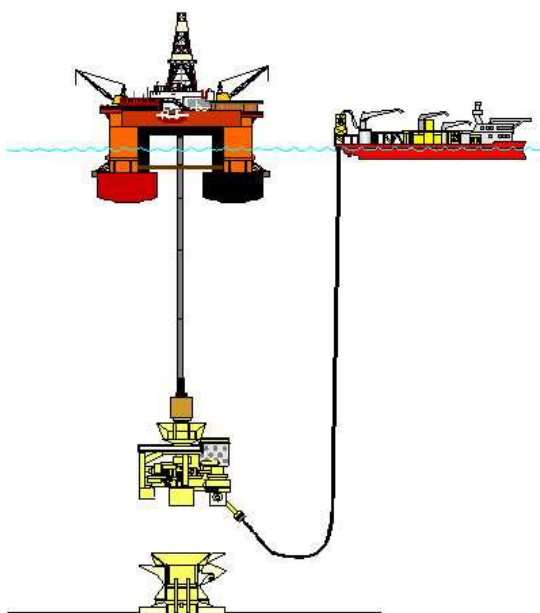


Figura 1.15 – Método *lay-away*

A primeira solução encontrada considerou o uso de uma estrutura submarina para abandono das linhas flexíveis [9]. O método ficou conhecido como Conexão Vertical Indireta (CVI) e compreendia as seguintes operações. O navio abandonava no solo marinho a estrutura (trenó) com uma das extremidades das linhas, em seguida concluiu o lançamento e entregava a segunda extremidade diretamente para a unidade estacionária de produção. A sonda de completação então “pescava” o MLF do trenó e instalava-o na BAP. Por fim, a árvore e a capa eram instaladas e a completação finalizada. A Figura 1.16 ilustra a seqüência de operações presentes no método de conexão vertical indireta.

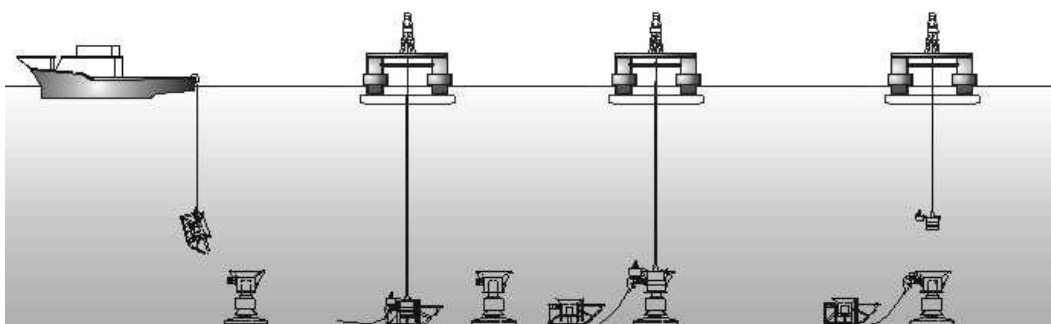


Figura 1.16 – Método de conexão vertical indireta

Com o objetivo de se eliminar a manobra de “pescaria” do MLF foi desenvolvido o método de Conexão Vertical Direta (CVD), ilustrado na Figura 1.17. Aqui o MLF é instalado diretamente na BAP. Para permitir isto o projeto do mandril apresentou várias modificações em relação aos utilizados na conexão *lay-away* e CVI. A mais importante delas foi a inclusão de um pino guia para orientação do MLF durante sua instalação na BAP, executada pelo barco de lançamento de linhas.

A CVD tem um grande inconveniente ao necessitar que a completação seja executada em dois estágios. Inicialmente instala-se a BAP e o suspensor de coluna, abandonando o poço temporariamente. Na seqüência o MLF é instalado pelo navio de lançamento de linhas. Por fim, a sonda retorna ao poço para finalizar a completação.



Figura 1.17 – Método de conexão vertical direta

Após este período a Petrobras tomou a decisão de produzir a área do campo de Albacora, localizada em águas profundas. Para o desenvolvimento deste empreendimento considerou a utilização de manifolds submarinos. Contudo não havia tecnologia completamente disponível para isto e um dos itens críticos era o método de conexão das linhas.

Da superação deste desafio nasceu o sistema de conexão vertical por módulos [10]. Este sistema de conexão é composto por um mandril (localizado no equipamento submarino) e por um Módulo de Conexão Vertical (MCV) interligado à linha. O sistema possui componentes que permitem o alinhamento e travamento do MCV em relação ao mandril.

Quando foi aplicado a sistemas ANM (Figura 1.18), o sistema de conexão vertical com MCV trouxe enormes ganhos. Primeiramente ele possibilitou uma completa desvinculação entre as operações de instalação das linhas e instalação da ANM. Por fim, caso ocorra a necessidade de se substituir um trecho qualquer de linha flexível ou de controle, não há mais a obrigação de se intervir no poço para retirar a ANM, o que torna esta operação muito mais barata.

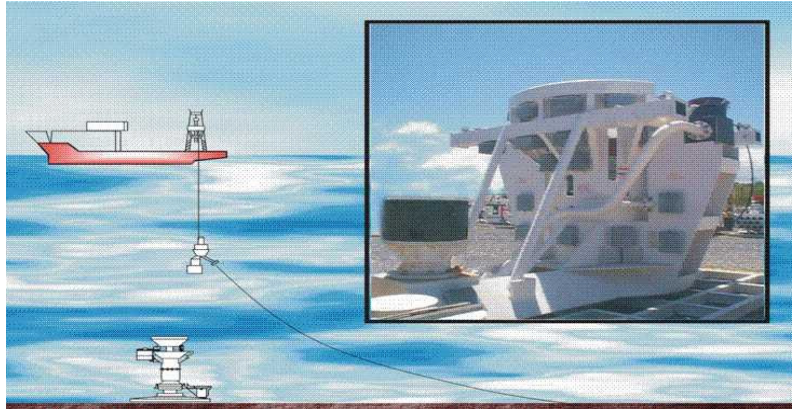


Figura 1.18 – Método de conexão vertical com MCV

## **1.4 Instalação de Módulos Submarinos**

### **1.4.1 Principais Módulos Submarinos**

Na introdução aos principais equipamentos submarinos citou-se que tanto as árvores quanto os manifolds podem possuir módulos cujas dimensões e pesos são variados. De modo a facilitar a abordagem destes componentes do ponto de vista de instalação, SILVA JUNIOR [4] propôs sua classificação em três grupos básicos, listados abaixo:

- Módulos de controle;
- Módulos de conexão de linhas flexíveis e umbilicais;
- Módulos com estrutura tipo gaiola. Estes módulos normalmente possuem interface com a tubulação do equipamento residente e são na maioria dos casos encontrados em manifolds submarinos. Este modelo inclui os módulos de *choke*, os módulos de medição multifásica, os módulos de produção e os módulos de válvulas.

Na Petrobras, considerando apenas os manifolds *diverless*, há uma grande quantidade de módulos submarinos na Bacia de Campos. A Tabela 1.1 lista a quantidade total de cada tipo de módulo instalada nestes equipamentos [4].

Tabela 1.1 – Módulos submarinos instalados nos diversos manifolds da Petrobras

<b>Tipo de Módulo</b>	<b>Quantidade Instalada</b>
MCV's de Interligação a UEP	53
MCV's de Interligação a poço	127
Módulos de Distribuição Elétrica e Hidráulica (EHDM's)	32
SCM's	60
Módulos de Medição Multifásica	9
Módulos de <i>Choke</i>	29
Módulos de Válvulas	8
Módulos de Produção	5

#### 1.4.2 Métodos de Instalação

Os módulos abordados acima possuem diferentes métodos de instalação em função do peso, das dimensões e das cargas externas atuantes.

Módulos com baixo peso (inferior a 7 *tf*) são normalmente instalados por cabos de aço. Nesta categoria estão os módulos de *choke*, os SCM's e os módulos de medição multifásica.

Os MCV's e EHDM's, cujos pesos são inferiores a 14 *tf* e cuja influência das cargas externas pela ação das linhas e umbilical é significativa podem ser instalados tanto por cabo de aço quanto por *pipe follower* (tipo de linha flexível com elevada resistência à tração que pode ser utilizada na instalação em substituição ao cabo de aço).

Por fim, os módulos com peso superior a 14 *tf*, normalmente os módulos de válvulas e módulos de produção, são instalados por coluna de *riser* a partir de uma sonda de completação.

## **1.5 A Compensação do Heave na Instalação por Cabo**

### **1.5.1 Por Que Compensar?**

O objetivo da compensação de *heave* durante a instalação a cabo é reduzir os movimentos de resposta dos equipamentos e módulos à excitação gerada pelo movimento da embarcação de lançamento. Somado a isto, a utilização de sistemas de compensação permite que as cargas dinâmicas geradas pela operação de instalação sejam reduzidas, evitando sobrecargas e ocorrência de afrouxamentos no cabo de lançamento.

### **1.5.2 Sistemas de Compensação**

Os compensadores de *heave* atuam para aumentar o controle sobre um equipamento ou módulo durante as operações de instalação e retirada. O sistema de compensação atinge seu objetivo na medida em que elimina ou reduz os movimentos verticais induzidos pelo barco de instalação sobre os componentes a serem instalados.

O uso de compensadores de movimento faz com que a janela de instalação do equipamento seja ampliada, o que pode vir a resultar em economia de tempo e redução de riscos durante a operação.

Existem diversos sistemas de compensação disponíveis no mercado, contudo conceitualmente é possível agrupá-los em três classes distintas:

- Sistemas completamente ativos;
- Sistemas completamente passivos;
- Sistemas mistos ativos e passivos.

### *1.5.2.1 Compensação Ativa*

O compensador ativo é um sistema que visa tornar nula a influência dos movimentos do barco sobre o cabo de instalação por meio da utilização de controle em malha fechada e atuadores com alimentação externa de energia [11].

É o tipo de sistema mais moderno e opera pela seguinte lógica. Sensores de movimentos pertencentes ao sistema lêem os movimentos da embarcação de lançamento e passam a informação a um sistema de controle. Este sistema de controle processa os dados e envia comandos a atuadores (normalmente cilindros a gás ou motores do sistema de guincho) que executam o recolhimento ou lançamento de cabo para a carga a ser instalada. Esta atitude de recolher ou lançar cabo objetiva compensar o movimento da embarcação, fazendo com que o movimento vertical do equipamento na extremidade inferior do cabo seja praticamente nulo.

Algumas limitações encontradas nos sistemas ativos estão listadas abaixo:

- São altamente dependentes dos sensores de movimento, assim sensores com baixa precisão ou erros nas leituras podem levar a baixo desempenho do compensador;
- Normalmente não consideram em sua lógica de processamento o valor da carga a ser instalada;
- Consideram como principal parâmetro de entrada apenas o movimento.

### *1.5.2.2 Compensação Passiva*

Estes sistemas de compensação reagem aos esforços atuantes durante a instalação de forma passiva. Neste contexto passividade traz a idéia de que a forma com que o sistema responde às excitações externas se dá apenas por características inerentes à sua construção (rigidez e amortecimento), não se fazendo presentes sistemas de

controle em malha fechada ou atuadores com suprimento externo de energia.

Os sistemas passivos podem estar posicionados na embarcação de lançamento ou no cabo de instalação. A Figura 1.19 mostra o esquema de um compensador passivo posicionado na embarcação.

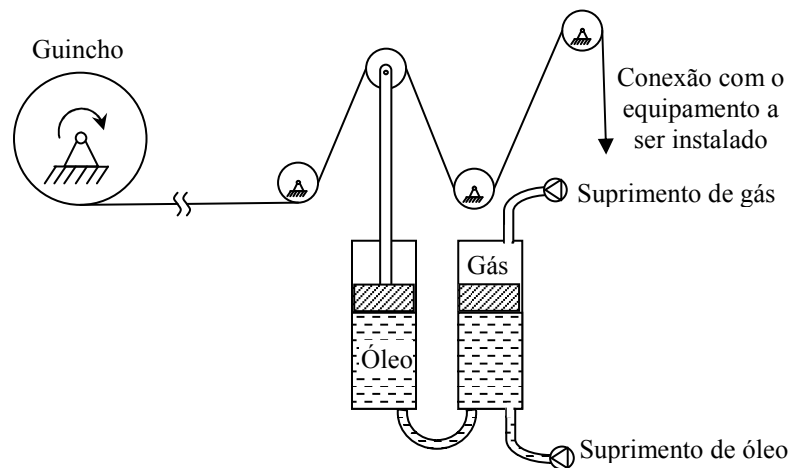


Figura 1.19 – Esquema de um compensador passivo de *heave*

O princípio de funcionamento é simples e pode ser resumido da seguinte forma. Quando a embarcação se move para cima a tração no cabo de lançamento tende a aumentar, desta forma o cilindro interligado a este cabo tende a se movimentar. Este movimento atua o pistão do cilindro de óleo (amortecedor) e comprime o cilindro de gás (mola pneumática). Como consequência o comprimento útil do cabo de lançamento aumenta e o movimento da embarcação é parcialmente compensado, mantendo a carga estável.

As limitações dos sistemas completamente passivos são:

- O sistema deve ser ajustado em função da carga a ser instalada. Este ajuste é feito por meio do valor de pressão a ser utilizada no cilindro a gás;
- O parâmetro de entrada principal que guia o funcionamento do sistema é a carga a ser instalada;
- A compensação do movimento é parcial, ou seja, mesmo com o sistema em



atuação o corpo a ser instalado apresenta um movimento oscilatório induzido pela movimentação da embarcação.

Mesmo sabendo que os sistemas passivos também podem estar posicionados na embarcação de lançamento, em função do foco deste trabalho, a abordagem se dará apenas nos compensadores inseridos no cabo de instalação.

Para este sistema atualmente dois tipos de conceito são utilizados pela indústria:

- Compensadores passivos em linha;
- Sistemas com dois graus de liberdade (bóia e corrente).

#### a) Os compensadores passivos em linha

Estes dispositivos são utilizados para reduzir as amplitudes de movimento e as cargas dinâmicas resultantes das operações de instalação de módulos e equipamentos submarinos. Como exemplo podemos citar o “*Cranemaster*”, um dispositivo utilizado pela indústria na instalação de estacas de sucção, ANM’s e atualmente considerado para instalação de outros equipamentos e módulos submarinos. O sistema é composto por um pistão a gás e dois absorvedores hidráulicos de choque com dupla ação, ver Figura 1.20. Este tipo de compensador atua como uma mola de baixa rigidez, aumentando o período natural do sistema (ver Item 2.3). Uma mudança bem projetada no período natural em conjunto com o amortecimento dos absorvedores hidráulicos tende a diminuir a amplitude de movimento do corpo e as cargas dinâmicas induzidas por ele durante a instalação.

Como o sistema se apresenta na forma de unidades “fechadas” e auto-suficientes, associações podem ser utilizadas com os objetivos de se diminuir a rigidez do sistema de compensação (associação em série) ou aumentar sua capacidade de carga (associação em paralelo).

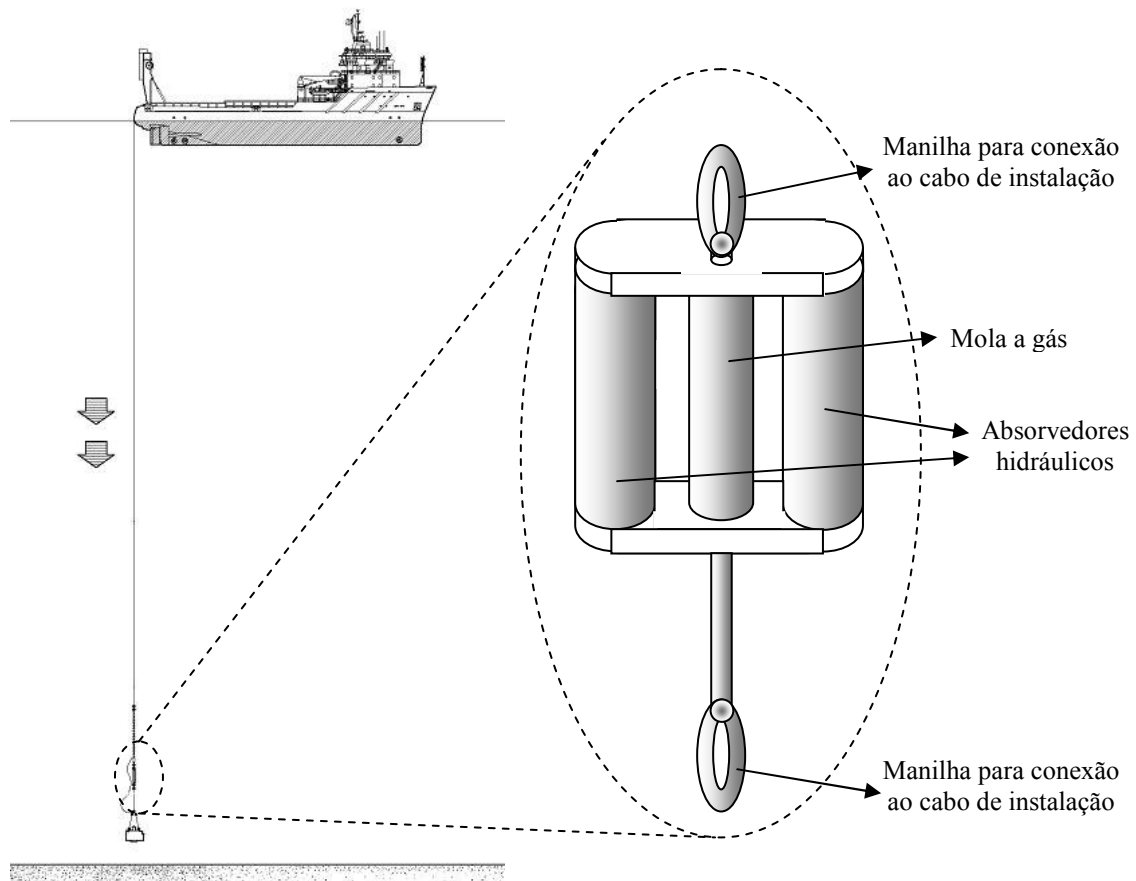


Figura 1.20 – Exemplo de compensador passivo em linha

#### b) Sistemas tipo bóia e corrente

Este sistema de compensação foi inicialmente proposto por MORRISON *et al.* [12] como novidade para uso em intervenções submarinas com o objetivo de permitir a utilização de embarcações mais baratas nas operações, em substituição às sondas. Neste trabalho o equacionamento do problema foi feito por modelo massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade.

Mais tarde CERQUEIRA *et al.* [13] analisaram o problema com dois graus de liberdade. Neste trabalho demonstrou-se a possibilidade de isolamento das frequências naturais do sistema da frequência de excitação. Com isto, operando entre as duas frequências naturais, trabalha-se numa região em que boa parte da amplitude de excitação é compensada. Como resultado reduz-se os movimentos verticais do módulo a ser instalado.

Algumas pequenas diferenças existem entre os sistemas analisados por MORRISON e CERQUEIRA, contudo, como o princípio básico de funcionamento de ambos os compensadores é idêntico, optou-se por descrever o sistema tipo bóia e corrente analisado por CERQUEIRA *et al.* [13].

O sistema bóia e corrente é composto por uma poita (peso morto) presa à extremidade de um cabo de aço que por sua vez é interligada a uma corrente. A segunda extremidade desta corrente é conectada a uma bóia que por sua vez está presa a um cabo que suporta o peso do módulo a ser instalado. A Figura 1.21 ilustra o sistema.

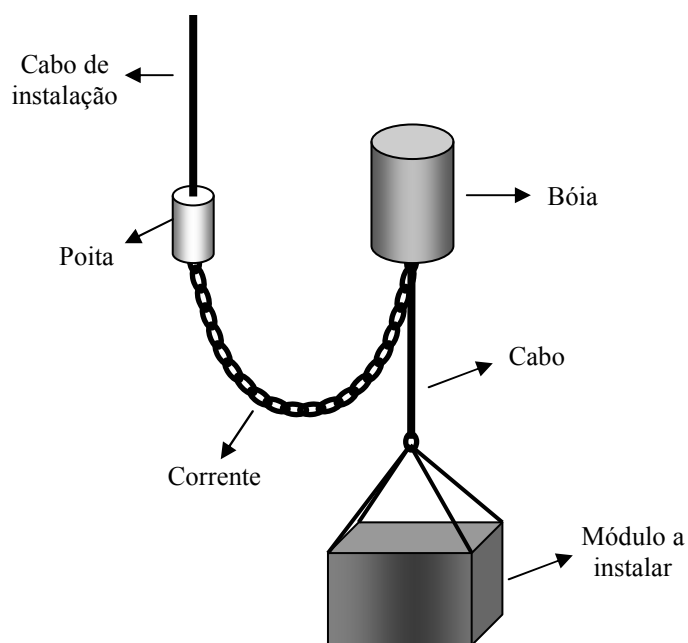


Figura 1.21 – Sistema tipo bóia e corrente

Com esta configuração e longe das frequências naturais do sistema o movimento da embarcação induz movimentos consideráveis na poita, mas na bóia apenas pequenas amplitudes são observadas. Como a bóia está ligada ao módulo a ser instalado, a excitação que ela aplica a este componente é reduzida e assim pequenos movimentos verticais são observados.

### c) Comparação entre os dois sistemas de compensação passiva

Comparando os dois conceitos de compensadores passivos mostrados acima se vê que o compensador em linha apresenta as seguintes vantagens:

- Não possui limitação com relação à carga a ser instalada;
- Necessita menor espaço no convés da embarcação de lançamento durante o transporte e as operações;
- Necessita menor quantidade de operações no convés durante a instalação.

Por sua vez o sistema de compensação tipo bóia e corrente tem a vantagem de possuir menor custo quando comparado ao compensador em linha e também pode proporcionar maior atenuação do movimento vertical.

Por estas características pode-se considerar que em aplicações reais os sistemas são utilizados nos seguintes casos:

- Sistema tipo bóia e corrente: aplicado a equipamentos e módulos de pequena carga (menor que 20 *t*) e com instalações não são freqüentes;
- Compensador em linha: aplicado a equipamentos e módulos cuja instalação é freqüente, não havendo limitação de carga.

#### *1.5.2.3 Compensação Ativo-Passiva*

Este tipo de sistema de compensação é uma associação dos métodos ativo e passivo. Procura aliar as boas características de ambos os sistemas e tende a solucionar algumas de suas limitações, sendo a principal delas o elevado consumo de energia, característica dos compensadores completamente ativos.

Os sistemas ativo-passivos oferecem grande flexibilidade na medida em que podem operar em diferentes modos. Com isto as diversas dificuldades enfrentadas durante o processo de instalação de equipamentos podem ser solucionadas por um

mesmo sistema. Exemplos de dificuldades são:

- movimentos exibidos durante a transferência do equipamento ao mar (*overboarding*) ou a outra embarcação;
- amplificação do movimento vertical durante a descida do equipamento para a instalação;
- existência de movimentos com elevada amplitude no momento da conexão e retirada dos módulos submarinos nos equipamento residentes.

Por estas vantagens, as embarcações de instalação tendem a empregar com maior freqüência os compensadores ativo-passivos ao invés dos completamente ativos.

## CAPÍTULO 2: INSTALAÇÃO POR CABO COM COMPENSADOR SUBMARINO COM RIGIDEZ NÃO LINEAR

### 2.1 Instalação por Cabo sem Sistema de Compensação

A instalação a cabo de módulos submarinos (Figura 2.1) pode ser modelada de forma aproximada por um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade (1 g.d.l.).

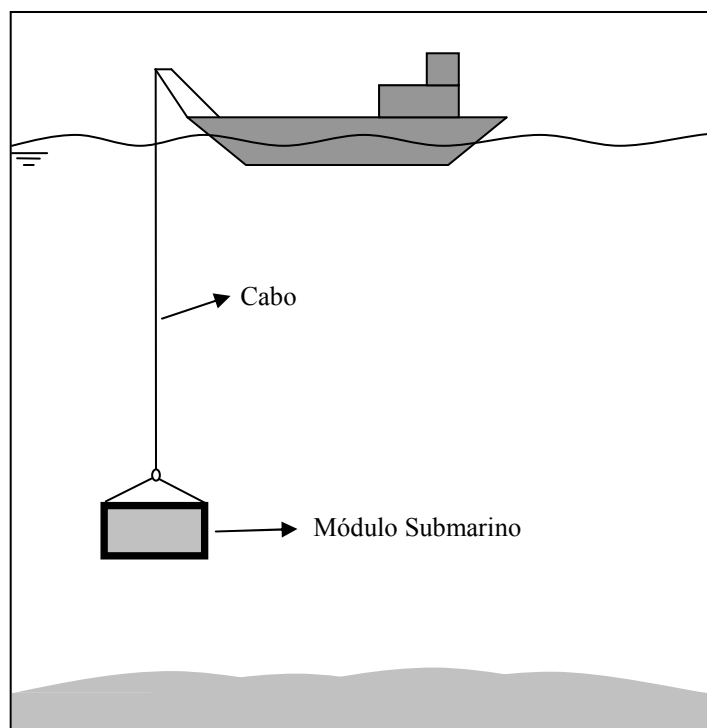


Figura 2.1 – Sistema de instalação a cabo de módulos submarinos

CERQUEIRA [14] e CERQUEIRA *et al.* [15] analisaram este tipo de sistema em seus trabalhos, onde a Figura 2.2 ilustra o modelo linearizado estudado e a Equação 2.1 descreve seu comportamento.

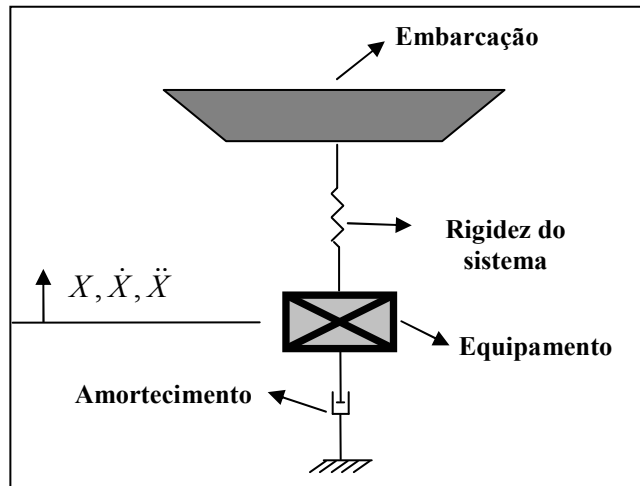


Figura 2.2 – Modelo de instalação de equipamentos; sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade

$$M_e \cdot \ddot{X} + \frac{4 \cdot \omega}{3 \cdot \pi} \cdot X_{Amp} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} + k \cdot X = k \cdot y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.1)$$

onde:

$M_e$  – Massa efetiva do sistema;

$\omega$  – Frequência circular de excitação;

$X_{Amp}$  – Amplitude do movimento de resposta do equipamento;

$X, \dot{X}, \ddot{X}$  – Deslocamento, velocidade e aceleração do equipamento;

$\rho$  – Massa específica do fluido onde o corpo está imerso;

$C_d$  – Coeficiente de arrasto do módulo;

$A$  – Área projetada da seção transversal do equipamento;

$k$  – rigidez do sistema, representada neste caso pelo cabo de instalação;

$y_0$  – amplitude de excitação;

$t$  – tempo.

Para este sistema, verifica-se que a resposta clássica em regime permanente é representada na Figura 2.3.

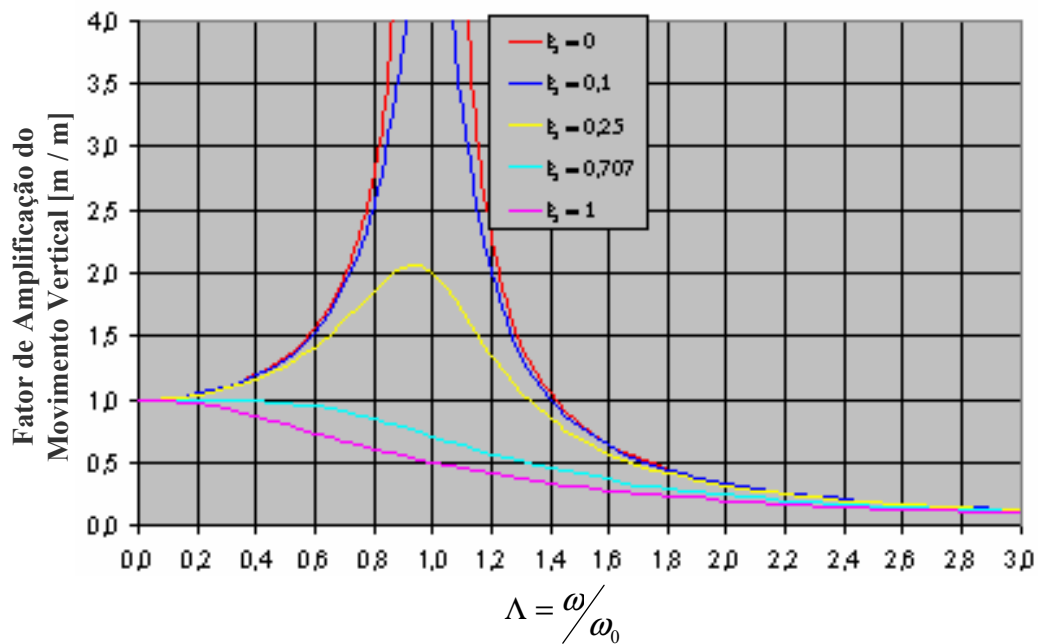


Figura 2.3 – Resposta do sistema linear massa-mola-amortecedor com 1 g.d.l.

onde:

$\omega_0$  – Frequência natural do sistema;

$\Lambda$  – Razão de frequência adimensional, relaciona a frequência de excitação com a frequência natural do sistema;

$\xi$  – Razão de amortecimento adimensional;

Fator de Amplificação do Movimento Vertical – razão entre a amplitude de resposta ( $X_{Amp}$ ) e a de excitação ( $y_0$ ).

Na Figura 2.3 vê-se que para razões de frequências maiores que aproximadamente 1.4 a amplitude de resposta tende a ser menor que a de excitação, ou seja, a resposta é atenuada. Este tipo de comportamento torna-se interessante ao se pensar na instalação de módulos submarinos.

Do estudo do sistema massa-mola-amortecedor linear com um grau de liberdade sabe-se que as seguintes equações são válidas:



$$\Lambda = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_e}} \quad (2.3)$$

Assim,

$$\Lambda = \omega \cdot \sqrt{\frac{M_e}{k}} \quad (2.4)$$

Analisando em detalhe a Equação 2.4 e a Figura 2.3 com o objetivo de se obter a atenuação da amplitude de resposta do sistema, pode-se concluir que:

1. Para valores de  $\Lambda > 1,4$  a resposta tende a ser atenuada em relação à excitação. Os parâmetros do sistema que influenciam a razão de frequência adimensional ( $\Lambda$ ) são  $\omega$ ,  $M_e$  e  $k$ ; assim é possível obter atenuação pela manipulação de uma ou mais dessas variáveis;
2. No caso de instalação de módulos submarinos o parâmetro  $\omega$  não pode ser controlado nem modificado, pois ele corresponde à frequência de excitação das ondas do mar que incidem sobre a embarcação;
3. O parâmetro  $M_e$ , por sua vez, não é normalmente alterado, pois a massa efetiva é uma característica do sistema de instalação (equipamento, cabo e profundidade). Lembrar que esta massa efetiva é composta pela massa adicional somada à massa do corpo e a uma parcela da massa do cabo de instalação;
4. O parâmetro  $k$  é o que se pode alterar mais facilmente para que a resposta do sistema seja atenuada. Como se busca maiores valores para  $\Lambda$ , o objetivo passa a ser uma baixa rigidez para o sistema.

## 2.2 O Uso de Mola com Baixa Rigidez Linear

A abordagem se inicia pela análise da utilização de molas lineares com baixa rigidez para a instalação de um módulo de *choke*, cujas características estão mostradas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Características básicas do módulo de *choke*

Característica do Conjunto Montado	Valor
Altura Total (H)	2,4 m
Dimensões da Base (b x w)	1,2 m x 1,2 m
Peso na Superfície (W)	4850 kgf
Peso submerso ( $W_{submerso}$ )	4220 kgf
Coefficiente de Massa Adicional ( $C_{ad}$ )	0,35
Massa Adicional ( $M_{ad}$ )	1240 kg
Coefficiente de Arrasto ( $C_d$ )	0,75

Admitindo que durante grande parte do ano o período das ondas na Baía de Campos se situa entre 6 e 9 segundos [4,14], pode-se empregar a Equação 2.4 para cálculo da rigidez mínima necessária ao sistema para que o movimento do módulo seja atenuado em relação à excitação.

Como o caso crítico ocorre para o maior período:

$$k < \left( \frac{2 \cdot \pi}{T_{\max} \cdot \Lambda_{\text{atenuação}}} \right)^2 \cdot M \quad (2.5)$$

onde:

$T_{\max}$  – período superior da excitação do sistema;

$\Lambda_{\text{atenuação}}$  – valor da razão de frequência que resulta na atenuação desejada (Figura 2.3).

Por conservadorismo este valor provém de análise sem amortecimento ( $\xi = 0$ ).

A Tabela 2.2 lista os valores de  $\Lambda_{\text{atenuação}}$  e da rigidez mínima necessária ao sistema para vários fatores de amplificação do movimento vertical (com período de 9s). Notar que na tabela uma amplificação de  $1/n$  significa amplitude de resposta igual à  $1/n$  da excitação. Normalmente, fatores de amplificação menores ou iguais a  $1/2$  permitem a instalação da grande maioria dos tipos de módulos submarinos.

Tabela 2.2 – Rigidez necessária ao sistema para várias atenuações

<b>Fator de amplificação do movimento vertical</b>	$\Lambda_{\text{atenuação}}$	<b>k [N/m]</b>
$1/5$	2.45	$0.081 \cdot M$
$1/4$	2.24	$0.097 \cdot M$
$1/3$	2	$0.122 \cdot M$
$1/2$	1.73	$0.162 \cdot M$
1	1.41	$0.244 \cdot M$

Obs.: M é a massa total em kg.

CERQUEIRA [14] mostrou que em sistemas de instalação a cabo a massa total ou efetiva do sistema é representada pela seguinte equação.

$$M_e = M_{\text{corpo}} + \Delta M_{\text{corpo}} + \frac{2}{5} \cdot M_{\text{cabo}} \quad (2.6)$$

Além disto, a rigidez do sistema é a do próprio cabo.

$$k_{\text{sistema}} = \frac{A_{\text{cabo}} \cdot E}{L_{\text{cabo}}} \quad (2.7)$$

onde:

$M_e$  – massa efetiva ou total do sistema;

$M_{\text{corpo}}$  – massa do corpo a ser instalado;

$\Delta M_{\text{corpo}}$  – massa adicional do corpo a ser instalado;

$M_{\text{cabo}}$  – massa do cabo, que pode ser representada por sua massa linear ( $\rho_{\text{cabo}}$ ) multiplicada por seu comprimento ( $L_{\text{cabo}}$ );

$A_{\text{cabo}}$  – área da seção transversal do cabo;

$E$  – módulo de elasticidade do cabo.

$L_{\text{cabo}}$  – comprimento total do cabo.

Ao substituir as Equações 2.6 e 2.7 na Equação 2.5 e fazer manipulações pode-se chegar à Equação 2.8, que determina o comprimento de cabo necessário à obtenção de um determinado fator de amplificação.

$$L_{\min} = \frac{-5 \cdot (M_{\text{corpo}} + \Delta M_{\text{corpo}}) + 5 \cdot \sqrt{(M_{\text{corpo}} + \Delta M_{\text{corpo}})^2 + \frac{8 \cdot \rho_{\text{cabo}} \cdot A_{\text{cabo}} \cdot E}{5 \cdot f}}}{4 \cdot \rho_{\text{cabo}}} \quad (2.8)$$

onde  $f$  é uma constante que depende da razão de atenuação pretendida e pode ser

$$\text{determinada por } \left( \frac{2 \cdot \pi}{T_{\max} \cdot \Lambda_{\text{atenuação}}} \right)^2.$$

De forma a permitir o cálculo do comprimento mínimo de cabo necessário para que a resposta seja atenuada disponibiliza-se na Tabela 2.3 as propriedades de alguns de cabos de aço.

Tabela 2.3 – Propriedades de cabos de aço

<b>Diâmetro do cabo</b>	<b>Massa linear [kg/m]</b>	<b>A·E [N]</b>	<b>Carga mínima de ruptura [tonf]</b>
1,5 in	6,19	$5,33 \cdot 10^7$	103
2 in	11,0	$1,02 \cdot 10^8$	180
3 in	24,7	$1,86 \cdot 10^8$	389
4 in	44,0	$3,33 \cdot 10^8$	665

Para as razões de atenuação mostradas na Tabela 2.2 e considerando que na instalação de um módulo de *choke* utiliza-se cabo de 1,5 in ou 2 in é possível determinar os comprimentos mínimos de cabo necessários para cada situação.

Tabela 2.4 – Comprimentos mínimos necessários para atenuação da resposta na instalação de um módulo de *choke*

Fator de amplificação do movimento vertical	Comprimento mínimo [m]	
	Cabo de 1,5 in	Cabo de 2 in
1	8243	9080
$\frac{1}{2}$	10363	11290
$\frac{1}{3}$	12110	13110
$\frac{1}{4}$	13718	14783
$\frac{1}{5}$	15119	16239

Na Tabela 2.4 vê-se que o comprimento de cabo necessário para que ocorra a atenuação é algumas vezes superior ao recorde atual de profundidade de instalação de ANM, aproximadamente 2750 m [16]. Vale ressaltar que os valores obtidos consideraram apenas questões de rigidez, ou seja, nenhuma avaliação de resistência mecânica foi executada. Ao se considerar a carga de ruptura do cabo, em todos os casos listados o fator de segurança deste componente seria inferior ao aconselhável, tomando apenas o carregamento estático de seu peso próprio.

Uma solução para se diminuir o comprimento de cabo necessário pode ser a inclusão de algum componente de baixa rigidez em série com o cabo. Este componente atuaria como um compensador passivo de *heave* e faria com que a rigidez equivalente do sistema diminuísse, possibilitando a atenuação do movimento em profundidades factíveis.

Partindo deste conceito considera-se o caso em que uma mola com rigidez linear é inserida no cabo de instalação como mostra a Figura 2.4.

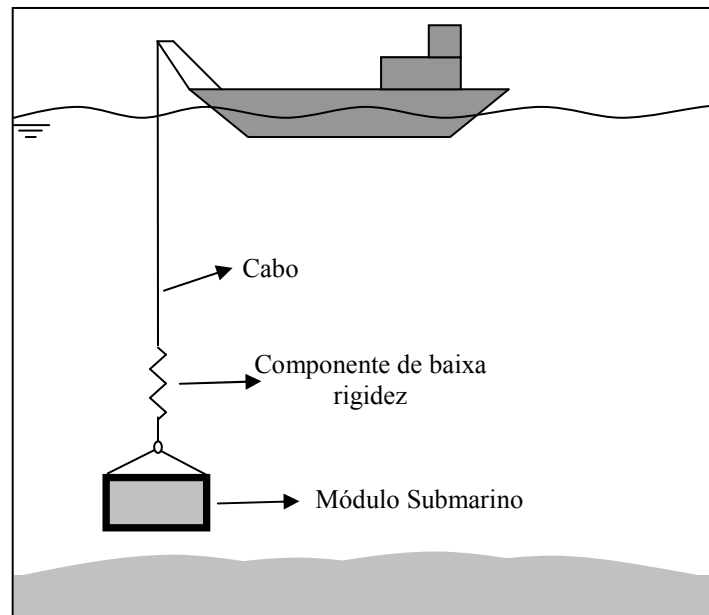


Figura 2.4 – Sistema de instalação com componente de baixa rigidez no cabo

Por ser linear, uma rigidez equivalente entre esta mola e o cabo de instalação pode ser facilmente calculada.

$$k = \frac{1}{\frac{L_{cabo}}{A_{cabo} \cdot E} + \frac{1}{k_{mola}}} \quad (2.9)$$

Substituindo as Equações 2.6 e 2.9 na Equação 2.5 e fazendo manipulações obtém-se uma expressão para o valor da rigidez da mola a ser inserida em função da profundidade em que se pretende instalar o módulo.

$$k_{mola} = \frac{1}{\frac{1}{f \cdot \left( M_{corpo} + \Delta M_{corpo} + \frac{2}{5} \cdot \rho_{cabo} \cdot LDA \right)} - \frac{LDA}{A_{cabo} \cdot E}} \quad (2.10)$$

onde os parâmetros são idênticos aos da Equação 2.8 com exceção da LDA que aqui significa a lâmina d'água de instalação.

Avaliando a instalação do módulo de *choke* com os cabos de 1,5 e 2 in pode-se chegar aos gráficos das Figuras 2.5 e 2.6, que mostram os valores máximos de rigidez para a mola inserida em série com o cabo.

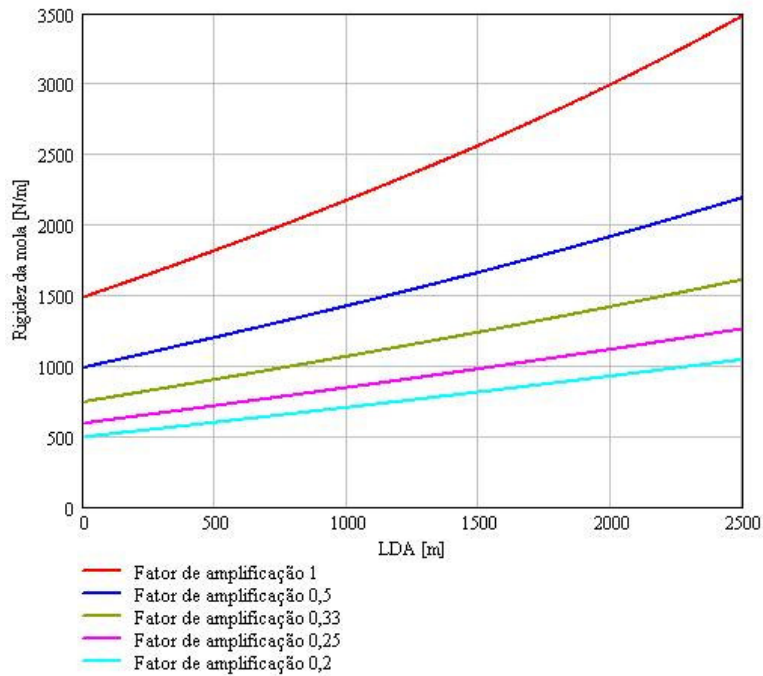


Figura 2.5 – Rigidez da mola para o caso da instalação do módulo de *choke* com cabo de 1,5 in

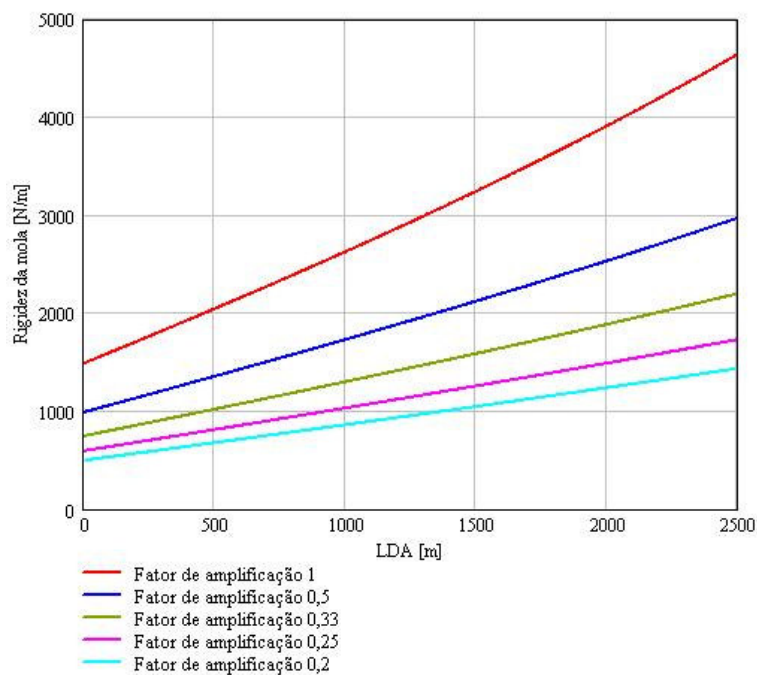


Figura 2.6 – Rigidez da mola para o caso da instalação do módulo de *choke* com cabo de 2 in

Dos resultados anteriores, para o cabo de 2 in vê-se que a situação que admite uma mola com maior rigidez corresponde ao caso de fator de amplificação igual a 1 e LDA de 2500 *m*. Neste caso o valor de rigidez da mola deve ser no máximo de 4650 *N/m*. Nota-se que mesmo para este caso o valor de rigidez é muito baixo quando comparada com as dimensões e esforços envolvidos no sistema. Para se ter uma idéia, esta mola sofreria uma deflexão estática aproximada de 8.9 *m* apenas para suportar o peso submerso do módulo de *choke*. Logo, uma mola capaz de suportar o componente e com rigidez linear tão baixa resultará em um elemento com comprimento muito elevado para manuseio no barco.

A mesma conclusão acima vale para o caso de instalação do módulo com cabo de 1,5 in; onde, para um fator de amplificação 1 e LDA de 2500 *m*, a deflexão estática da mola é de aproximadamente 11,9 *m*.

Qual alternativa poderia então ser utilizada para obtenção da atenuação?

### **2.3 Proposta de Utilização de Componente com Rigidez Não-Linear**

No item anterior vislumbrou-se a possibilidade de utilização de componente com baixa rigidez para atenuar o movimento de resposta de um módulo instalado por cabo. Contudo, ao mesmo tempo, mostrou-se a necessidade de que ele não possua grande deslocamento quando submetido ao carregamento estático do peso do componente, pois isto poderia impossibilitar seu manuseio na embarcação. Num sistema com rigidez linear estas duas características sempre coexistem, ou seja, baixa rigidez se traduz em grande deslocamento; por este motivo deve-se buscar novas alternativas.

Uma possível solução é a utilização de componentes que possuam rigidez variável de forma que para pequenos deslocamentos a rigidez seja elevada e para deslocamentos maiores a rigidez seja menor [17].



Molas e componentes que apresentam o comportamento descrito acima são ditos regressivos e aqueles que aumentam sua rigidez com a variação da deflexão progressivos. A Figura 2.7 mostra a curva de restauração de alguns sistemas com característica regressiva.

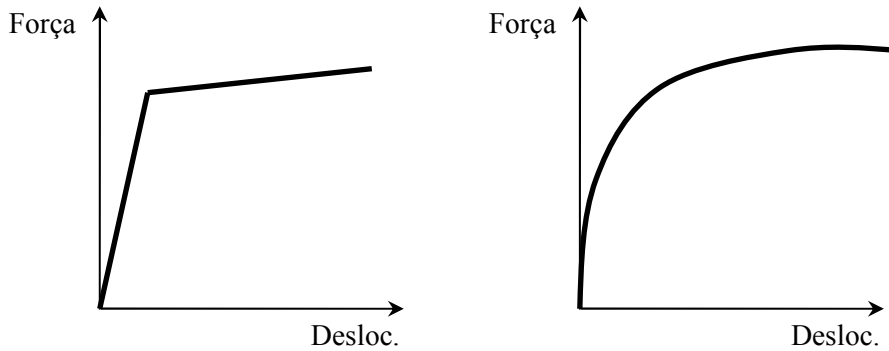


Figura 2.7 – Curvas de força de restauração para componentes com comportamento regressivo

Mas, qual a vantagem em se empregar componentes que dêem este tipo de resposta?

A vantagem está em utilizar a área de alta rigidez e parte da região de baixa rigidez para suportarem o carregamento estático equivalente ao peso do módulo. Com este artifício o deslocamento necessário para suportar a carga estática é reduzido. A Figura 2.8 ilustra o ganho obtido.

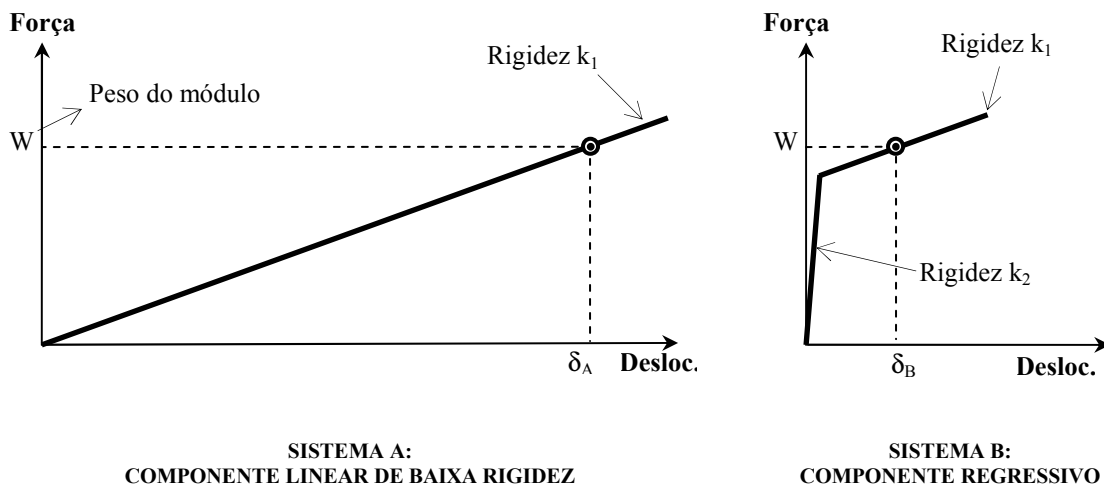


Figura 2.8 – Ganho obtido com utilização de componente com rigidez regressiva

Então, a partir da posição de equilíbrio, o sistema poderia oscilar movimentando-se sob uma região de baixa rigidez, característica almejada.

A seqüência deste capítulo trata de alguns componentes que apresentam a característica regressiva e poderiam ser empregados como compensadores passivos de *heave*.

### **2.3.1 Dispositivos com Comportamento Regressivo e suas Curvas Características**

SILVA JUNIOR [4] realizou extensa pesquisa em seu trabalho sobre os diversos tipos de molas e mostrou as curvas características de cada componente. Dentre todos os componentes abordados os que apresentam comportamento regressivo são:

- Molas de discos cônicos ou Belleville;
- Molas de borracha trabalhando sob tração;
- Molas a gás;
- Molas com elementos articulados.

No mesmo trabalho SILVA JUNIOR [4] comparou os diversos tipos de mola sob requisitos relacionados à sua utilização como compensador submarino de *heave*. Da comparação conclui-se que as molas mais apropriadas à instalação de equipamentos e módulos são as de discos cônicos e as compostas por elementos articulados.

No tópico a seguir se descreve resumidamente estes dois tipos de mola e suas curvas características de resposta.

#### *2.3.1.1 Mola de disco cônico (Belleville)*

Esta mola em essência é um disco circular com formato cônico que sob ação de carga axial tende a se tornar plano. A resistência elástica a esta deformação constitui o comportamento de mola do componente. A Figura 2.9 mostra uma mola Belleville.

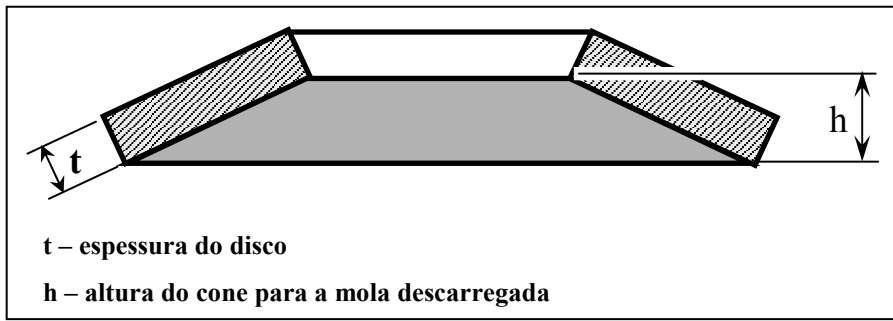


Figura 2.9 – Mola de disco cônico

Uma grande vantagem das molas Belleville é a grande variedade de curvas características que podem apresentar. Em função da razão altura do cone pela espessura do disco  $(h/t)$  inúmeras curvas podem ser obtidas, a Figura 2.10 ilustra algumas delas.

Vale ressaltar que para deflexões superiores a 75% a curva teórica de resposta da mola tende a se distanciar da curva real obtida em teste. Por este motivo costuma-se limitar a deflexão máxima admissível às molas Belleville entre 75 e 80% [18], ver Figura 2.11.

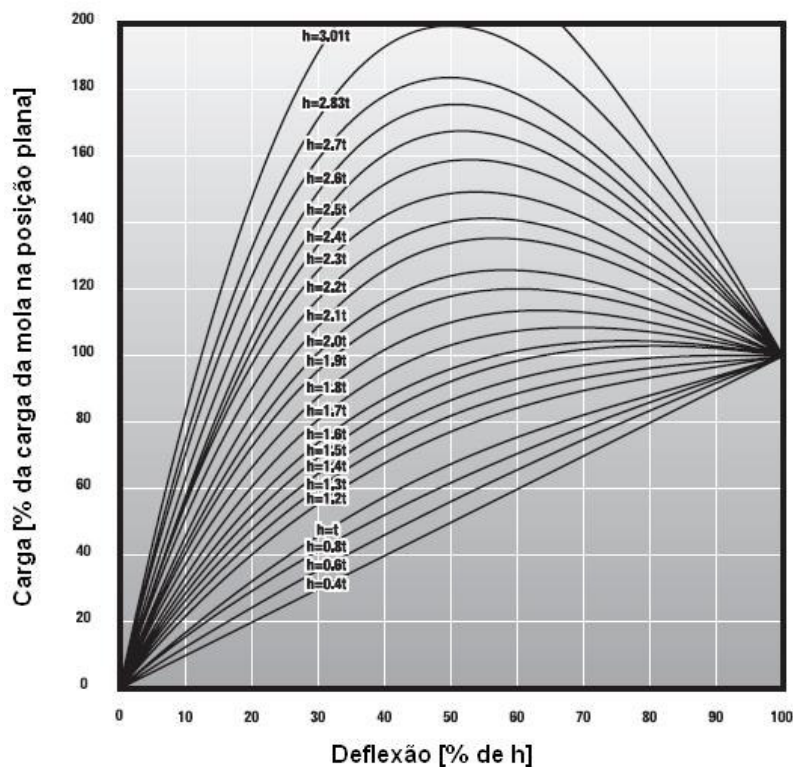


Figura 2.10 – Curvas de resposta para molas de discos cônicos

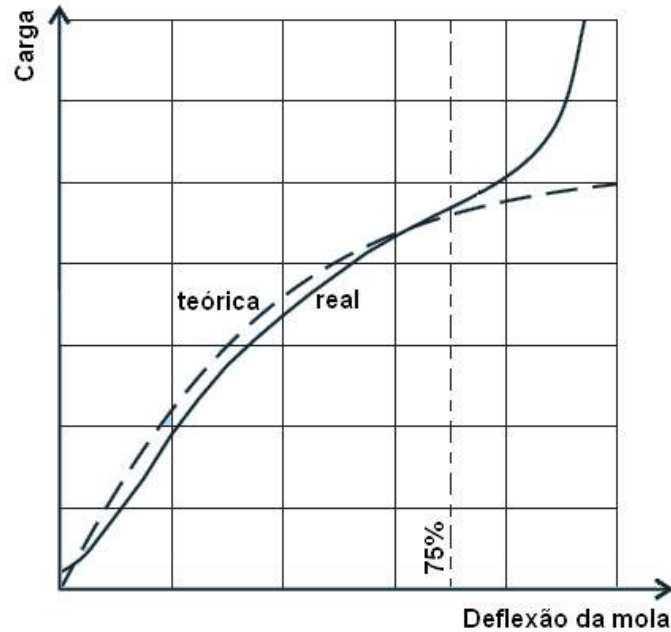
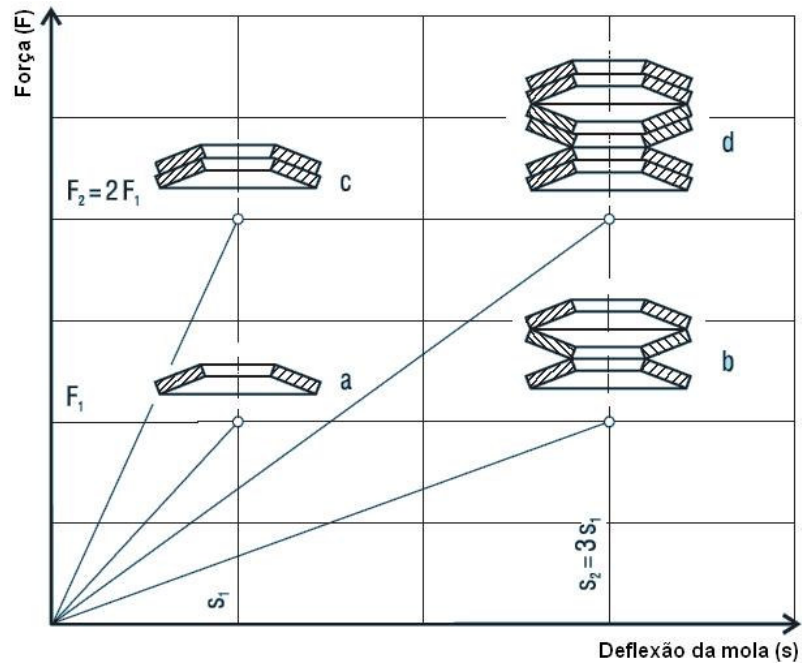


Figura 2.11 – Comparação das respostas teórica e real de uma mola de disco cônico

Devido à sua geometria simples, as molas Belleville podem ser utilizadas empilhadas. Em função do tipo de empilhamento as características de resposta do conjunto podem ser alteradas conforme listado abaixo e mostrado na Figura 2.12:

- Empilhamento em série: a deflexão total do conjunto é igual à soma das deflexões de cada mola;
- Empilhamento em paralelo: a força total necessária para comprimir o conjunto é igual à soma das forças necessárias para defletir cada mola separadamente;
- Empilhamento combinado paralelo/série: a característica do sistema dependerá da combinação utilizada.



- a - Mola simples
- b - Empilhamento em série
- c - Empilhamento em paralelo
- d - Empilhamento combinado

Figura 2.12 – Empilhamento de molas de discos cônicos

### 2.3.1.2 Molas com elementos articulados

Estas molas são construções que empregam elementos elásticos lineares em arranjos geométricos articulados. Inúmeras configurações são disponíveis, dentre os quais se sobressaem as molas Rhombus e “Y” invertido.

#### a) Mola Rhombus

Esta configuração é composta por um quadro articulado associado a uma mola linear, conforme mostra a Figura 2.13.

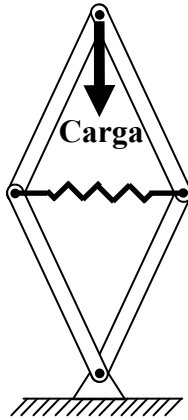


Figura 2.13 – Mola Rhombus

Analisando o arranjo vê-se que a característica regressiva se dá pela geometria do sistema. Ao se aumentar a deflexão da mola sua rigidez tende a diminuir até um ponto em que o quadro inverte sua posição. A partir deste momento, maiores deflexões se traduzem em maior rigidez, caracterizando um comportamento progressivo.

A Figura 2.14 mostra uma curva característica de força de restauração em função da deflexão para uma mola Rhombus.

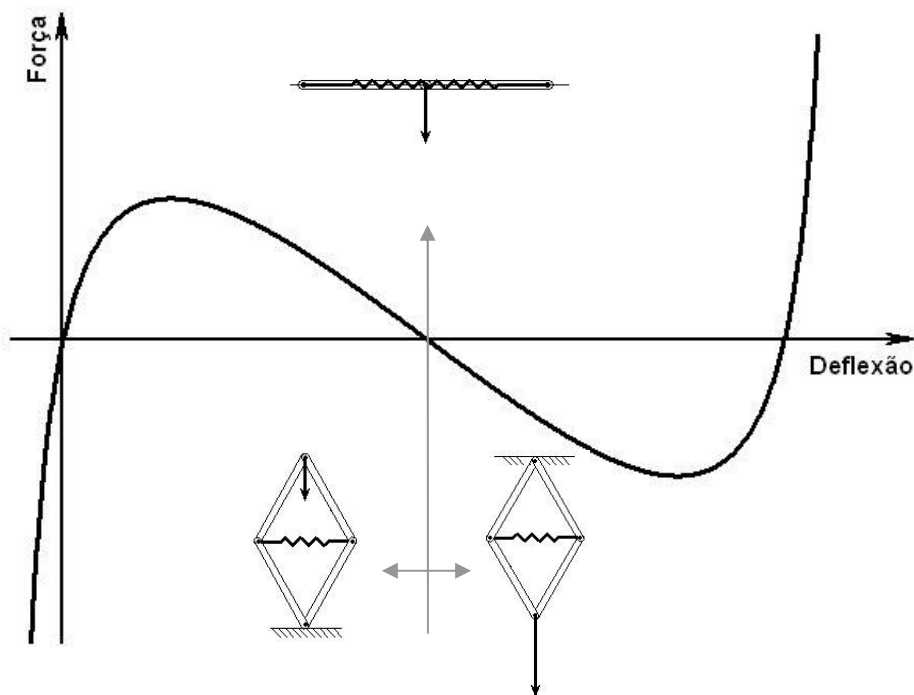


Figura 2.14 – Curvas característica da mola Rhombus

Notar que a Figura 2.14 serve apenas de exemplo e não representa todas as curvas características deste tipo de mola. Por exemplo, pode-se obter curvas características em que o ponto de mínimo do gráfico ocorre para um valor de força positivo. A característica final do sistema dependerá dos comprimentos e rigidezes das molas helicoidais além dos ângulos de montagem do arranjo.

No APÊNDICE A está disponível método de cálculo da função de restauração e da rigidez do sistema em função de sua deflexão.

#### b) Arranjo em “Y” invertido

Esta configuração permite que o comportamento regressivo seja atingido pelas características geométricas do sistema. Uma montagem com o arranjo em “Y” está ilustrada na Figura 2.15.

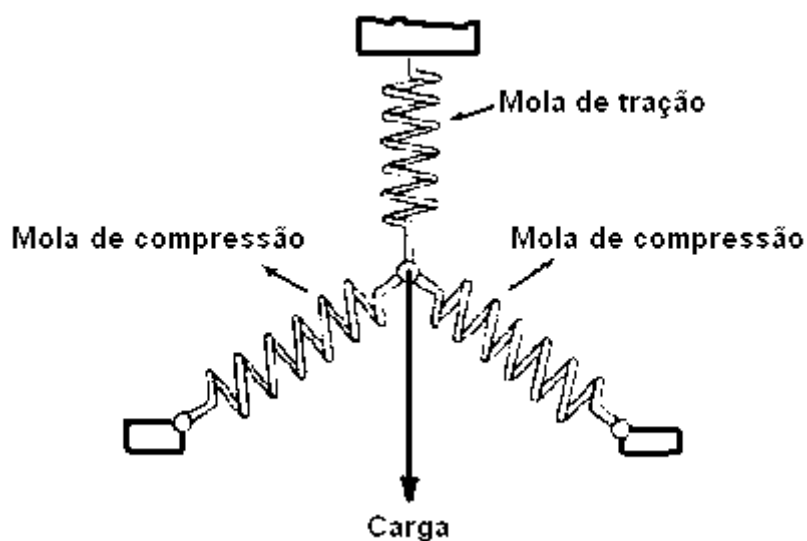


Figura 2.15 – Mola com arranjo em “Y”invertido

Na situação em que o sistema apresenta pequena deflexão, as molas de compressão possuem grande ângulo de inclinação em relação à horizontal. Isto permite que elas suportem boa parte da carga vertical imposta ao arranjo e juntamente com a mola vertical de tração confirmam boa rigidez ao sistema.

À medida que a deflexão aumenta, a inclinação das molas de compressão diminui, fazendo com que sua resistência ao carregamento vertical seja reduzida e por conseguinte a rigidez do sistema cai.

Ao aumentar a deflexão ainda mais, a geometria do sistema tenderá a se inverter e as molas que antes trabalhavam em compressão passam a ser tracionadas, permitindo uma recuperação da rigidez do conjunto.

### **2.3.2 Questões a Avaliar na Utilização de Compensadores com Rigidez Não-Linear**

Vê-se por meio de suas características que os componentes com rigidez não-linear apresentam grande potencial para uso como compensadores submarinos passivos. Contudo, por se tratar de uma inovação, deve ser feita uma investigação do comportamento dinâmico deste tipo sistema, focando nas conseqüências geradas pela sua não-linearidade.

Com este objetivo o próximo Capítulo inicia uma abordagem sobre oscilações não-lineares, definindo uma base teórica para a análise desta aplicação.



## **CAPÍTULO 3: OSCILAÇÕES NÃO-LINEARES: UMA ABORDAGEM INICIAL**

### **3.1 Introdução**

Nos sistemas lineares a relação entre causa e efeito é linear, por exemplo, ao se dobrar a carga a resposta também será dobrada. Já em sistemas não lineares esta relação perde sua proporcionalidade. Como consequência, o princípio da superposição, amplamente utilizado na engenharia, não prevalece para a solução da equação não-linear. Longe de ser a única dificuldade na análise não-linear, este é apenas um exemplo das características inerentes a estes sistemas.

Massa, amortecimento e rigidez (mola) são os componentes básicos utilizados na modelagem de sistemas oscilatórios; logo, a não-linearidade, quando presente na equação diferencial que governa o problema, pode se manifestar em qualquer um destes componentes. Como mostrado anteriormente, este trabalho considera apenas os casos em que ela está associada à rigidez do sistema.

Uma dúvida pode ainda persistir: Por que modelar o sistema com a não-linearidade ao invés de linearizar o sistema?

A resposta é simples, em sistemas não-lineares fenômenos totalmente inesperados podem ocorrer, ou seja, fenômenos não previstos ou sequer imaginados pela teoria linear podem se fazer presentes.

Inicia-se o capítulo discorrendo sobre os fenômenos normalmente observados em sistemas similares ao estudado aqui, com rigidez não-linear e amortecimento positivo (dissipador de energia). Por fim, aborda-se os métodos de análise destes sistemas, tratando das ferramentas qualitativas e quantitativas.

## **3.2 Fenômenos Inerentes aos Sistemas com Rigidez Não-Linear**

Inúmeros fenômenos podem ocorrer em sistemas não-lineares. Este item trata dos que se aplicam ao caso em que o termo não-linear corresponde à rigidez do sistema e em que o amortecimento é positivo, ou seja, independentemente do sentido da velocidade o amortecedor sempre retirará energia do sistema.

Vale ressaltar que os fenômenos abordados aqui não são exclusivos do tipo de sistema em estudo mas também podem estar presentes em outros tipos de problemas não-lineares.

### **3.2.1 Bifurcações**

A bifurcação pode ser entendida como uma mudança qualitativa na estrutura de uma solução em decorrência da variação dos parâmetros do sistema.

As bifurcações são cientificamente importantes por gerarem modelos de transição e instabilidade com relação à mudança de algum parâmetro de controle [19].

Um exemplo simples que ilustra esta mudança corresponde à análise de flambagem de uma coluna (ver Figura 3.1). Ao se colocar pequenos pesos sobre a coluna, vê-se que ela suporta a carga e permanece na posição vertical. Contudo, ao se aumentar muito a carga (acima de um valor crítico  $W_{crit}$ ) observa-se que a posição vertical torna-se instável e a coluna poderá flambar.

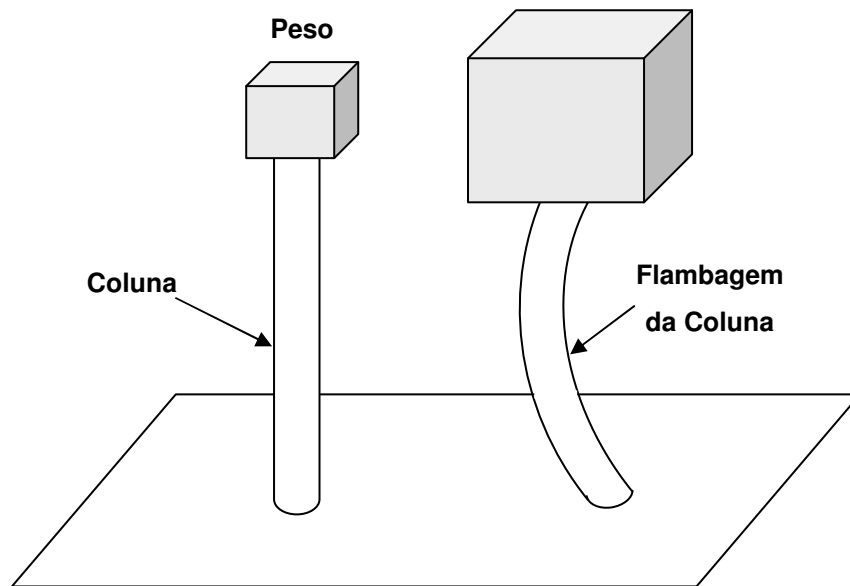


Figura 3.1 – Exemplo de bifurcação: flambagem de uma coluna

Neste exemplo o peso colocado sobre a coluna é o parâmetro de controle e a deflexão em relação à posição vertical é a variável dinâmica. Vale ressaltar que no momento em que o peso torna-se maior que  $W_{crit}$  o sistema presencia uma bifurcação, evidenciando a alteração qualitativa na estrutura de sua solução.

A ferramenta comumente utilizada para avaliar este tipo de fenômeno é o diagrama de bifurcação, que será abordado no Item 3.3.2.3.

### 3.2.2 O Fenômeno do Salto (*Jump*)

Este fenômeno é um tipo de bifurcação que ocorre em sistemas com não-linearidade na rigidez e excitados externamente.

O fenômeno do salto se caracteriza pelo aumento ou diminuição repentinos da amplitude de vibração de um sistema como resultado do acréscimo ou decréscimo de sua frequência de excitação [20,21].

Como exemplo considere a equação de Duffing, mostrada na Equação 3.1.

$$\ddot{z} + b \cdot \dot{z} + \omega_0^2 \cdot z + \alpha \cdot z^3 = F \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \quad (3.1)$$

onde:

$b$  – coeficiente de amortecimento;

$\omega_0$  – freqüência natural linear do sistema;

$\alpha$  – parâmetro associado ao termo não-linear da equação;

$F$  – força de excitação;

$\omega$  – freqüência de excitação;

$t$  – tempo;

$\phi$  – fase da função de excitação;

$z$ ,  $\dot{z}$  e  $\ddot{z}$  – deslocamento, velocidade e aceleração.

Investigando a amplitude de resposta nota-se que para uma força de excitação constante três tipos de resultados podem ocorrer quando se varia, de forma quase estática, a freqüência de excitação em torno de  $\omega_0$ . Os diferentes comportamentos são mostrados na Figura 3.2.

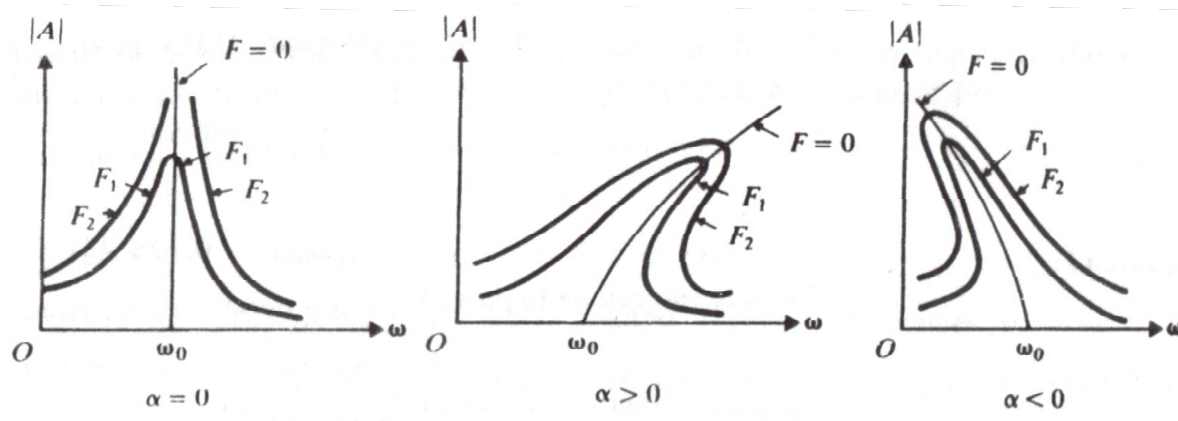


Figura 3.2 – Curvas de resposta para a equação de Duffing

Cada uma das situações está intimamente relacionada ao tipo de comportamento da função de restauração, ou seja, se ela é linear, regressiva ( $\alpha < 0$ ) ou progressiva ( $\alpha > 0$ ).

Vale informar que as linhas que indicam o valor de força nula correspondem aos casos de vibração livre, o que traz a tona outra característica dos sistemas com rigidez não-linear: a dependência da frequência natural em relação à amplitude do movimento.

A Figura 3.3 ilustra com maiores detalhes as curvas dos sistemas não-lineares, focando no fenômeno do salto.

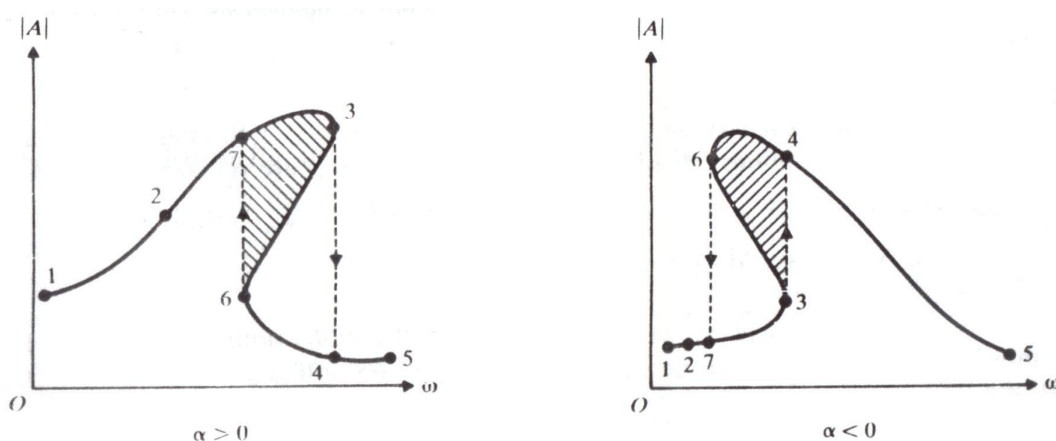


Figura 3.3 – O fenômeno do salto (*jump*)

Vê-se que a amplitude de oscilação aumenta ao longo dos pontos 1, 2 e 3 sobre a curva de resposta quando a frequência de oscilação é lentamente incrementada. Observa-se ainda que entre os pontos 3 e 4 ocorre um salto na amplitude de resposta; no caso em que a força de restauração é regressiva a amplitude é aumentada e no caso regressivo diminuída. Por fim ao continuar com o incremento na frequência de excitação a resposta tende a diminuir.

De forma similar, se a frequência de excitação é lentamente diminuída a amplitude na curva de resposta segue pelos pontos 5, 4, 6, 7, 2 e 1 e realiza um salto de 6 para 7.

É evidente que há regiões do gráfico em que duas amplitudes de vibração existem para uma mesma frequência de excitação, como mostrado nas regiões hachuradas da Figura 3.3. Na verdade nestas regiões o sistema possui três respostas, entretanto uma delas é instável.

### 3.2.3 Ressonâncias Secundárias

Um sistema linear excitado por uma força com frequência  $\omega$  apresenta a resposta em regime permanente com a mesma frequência de oscilação. Por sua vez os sistemas não-lineares podem exibir respostas sub ou super-harmônicas para esta mesma condição [20].

Na resposta sub-harmônica a frequência de oscilação da resposta ( $\omega_n$ ) está relacionada à de excitação pela seguinte expressão:

$$\omega_n = \frac{\omega}{n} \quad (3.2)$$

onde  $n$  é um inteiro ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

De forma similar, na resposta super-harmônica também há uma relação entre as frequências de excitação e resposta, sendo:

$$\omega_n = n \cdot \omega \quad (3.3)$$

com  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

Assim como podem apresentar respostas sub e super-harmônicas, os sistemas não-lineares podem torna-se ressonantes nestas frequências, amplificando suas respostas. Estes fenômenos são denominados ressonâncias secundárias e podem ocorrer em diversos tipos de problemas.

A equação de *Duffing* por exemplo pode apresentar, além da ressonância principal ( $\omega = \omega_0$ ), ressonâncias secundárias para  $\omega = \frac{\omega_0}{3}$  e  $\omega = 3 \cdot \omega_0$ , onde  $\omega_0$  é a frequência natural linear do sistema [21].

### 3.2.4 Caos

O caos é uma das inúmeras possibilidades de comportamento de um sistema não-linear e pode ser visto como a dinâmica libertada da previsibilidade [22].

Em uma definição formal caos é o comportamento aperiódico de longo prazo apresentado por um sistema determinístico que exhibe sensível dependência sobre as condições iniciais [19].

Apesar de não ser previsível, o caos não pode ser classificado como aleatório. Aqui cabe estabelecer a distinção entre os dois tipos de fenômenos. Os fenômenos aleatórios estão relacionados a sistemas não-determinísticos, ou seja, o sistema apresenta uma resposta aleatória como consequência de uma entrada aleatória. Por sua vez, os fenômenos caóticos são determinísticos, de tal forma que para uma entrada conhecida e determinada surge uma resposta aparentemente aleatória.

Para um sistema dinâmico não-linear poder exibir comportamento caótico ele necessita ter no mínimo três dimensões [19]. Aplicando esta constatação ao caso do modelo de instalação com 1 grau de liberdade, significa que o problema deve necessariamente possuir excitação externa. Esta força externa equivale a um aumento de dimensão no problema, conforme será mostrado no Item 3.3.2.

Uma das características dos sistemas caóticos está relacionada ao tipo de atrator para os quais eles convergem.

O atrator é o conjunto limite para o qual a resposta do sistema converge à medida que o tempo evolui. Na dinâmica não-linear existem atratores de diversas dimensões, como por exemplo os pontos fixos (dimensão zero), os ciclos limites (dimensão um) e os atratores estranhos. Os pontos fixos serão abordados adiante no Item 3.3.1.1 enquanto os ciclos limites não fazem parte do escopo deste trabalho por

não haver possibilidade de ocorrerem em sistemas com amortecimento exclusivamente positivo (dissipador de energia) [23]. Como último exemplo tem-se o atrator estranho, tipo associado ao regime caótico cujas principais características são a dimensão não inteira e a sensível dependência em relação às condições iniciais do sistema. A Figura 3.4 mostra um exemplo de atrator estranho.

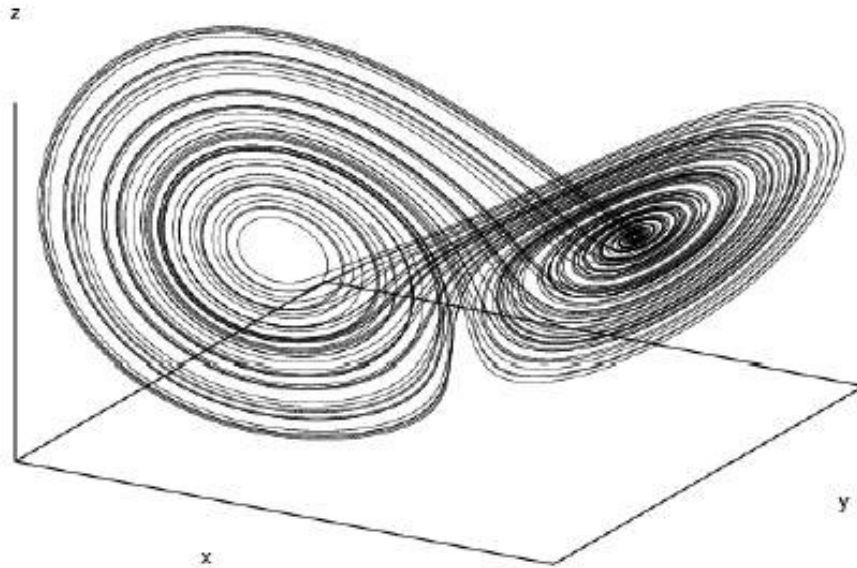


Figura 3.4 – Exemplo de atrator estranho: o Atrator de Lorenz

Caso seja de interesse obter maiores informações sobre os atratores recomenda-se a leitura das seguintes referências: [19], [21] e [24].

### ***3.3 Fundamentos Teóricos da Análise Qualitativa: Abordagem Geométrica***

A análise qualitativa utiliza métodos para o estudo de equações diferenciais sem necessariamente precisar resolvê-las.

Em casos não lineares o método mais aplicado é o da abordagem geométrica. Nesta abordagem, as características dinâmicas são dispostas graficamente, o que permite obter conclusões sobre os padrões de comportamento e tendências do sistema.



### 3.3.1 Os Sistemas em Vibração Livre

O caso da vibração livre de um sistema com um grau de liberdade e cuja não-linearidade está relacionada à rigidez pode ser representado pela Equação 3.4.

$$\ddot{z} + b \cdot \dot{z} + f(z) = 0 \quad (3.4)$$

onde:

$b$  – coeficiente de amortecimento;

$z$ ,  $\dot{z}$  e  $\ddot{z}$  – deslocamento, velocidade e aceleração;

$f(z)$  – força de restauração, função do deslocamento.

Analisando a formulação vê-se que não há termo de excitação externa. Por este motivo, este caso pode ser considerado como o mais simples, tornando-o ideal para início dos estudos sobre análise qualitativa de sistemas não-lineares.

#### 3.3.1.1 O Plano de Fase

##### a) Definição de plano de fase

A abordagem geométrica se inicia pela transformação da Equação 3.4 em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem [25]. Esta manipulação gera um sistema da forma  $\dot{\vec{z}} = \vec{f}(\vec{z})$ , onde a seta indica que a variável corresponde a um vetor, o que se traduz por  $\dot{\vec{z}} = (\dot{z}_1, \dot{z}_2)$  e  $\vec{f}(\vec{z}) = (f_1, f_2) = (z_2, -f(z_1))$ , resultando em:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.5)$$

$$\dot{z}_2 = -f(z_1) - b \cdot z_2 \quad (3.6)$$

Tomando as variáveis  $z_1$  e  $z_2$  como as coordenadas de um sistema cartesiano, o plano  $z_1z_2$  definido por elas é denominado plano de fase. Neste plano, cada ponto

corresponde a um estado do sistema e à medida que o estado se altera, o ponto se move no plano de fase, gerando uma curva chamada de trajetória.

#### b) O retrato de fase

Ao se analisar o sistema dinâmico de uma forma mais ampla vê-se que para uma condição inicial está associada uma determinada trajetória. Ao se desenhar no plano de fase inúmeras trajetórias, correspondentes a várias condições iniciais possíveis ao sistema, chega-se a uma figura conhecida como retrato de fase (do inglês *phase portrait*).

Esta representação apresenta grande utilidade na análise do sistema pois reduz em uma única representação gráfica o comportamento e a característica de sua resposta a várias condições iniciais. A Figura 3.5 mostra o exemplo do retrato de fase de um sistema dinâmico que possui rigidez não-linear.

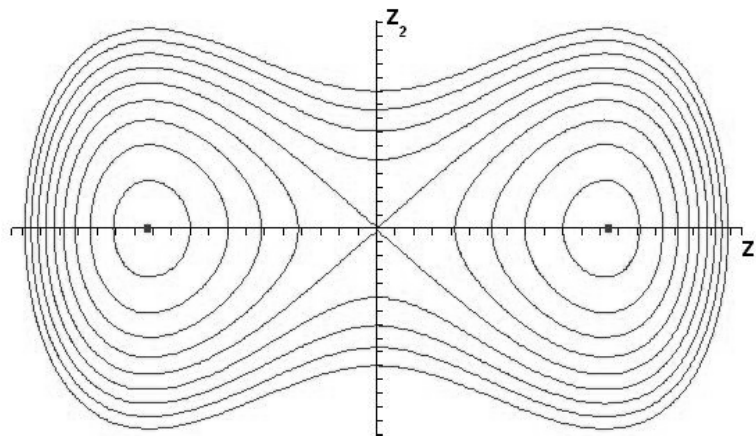


Figura 3.5 – Exemplo de um retrato de fase

#### c) Os pontos críticos

Voltando às trajetórias do plano de fase observa-se que para todo ponto está associada uma direção tangente definida por:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{dz_2/dt}{dz_1/dt} = \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} \quad (3.7)$$

Contudo, como ocorre com outras regras, esta também apresenta sua exceção. Em casos especiais podem ocorrer pontos cuja tangente é uma indeterminação da forma  $\frac{0}{0}$ . Estes casos especiais são denominados pontos fixos, críticos ou singulares do sistema.

Os pontos críticos são de extrema importância pois podem indicar a característica geral (comportamento) da família de trajetórias no entorno de sua localização.

#### d) Classificação dos tipos de pontos críticos

Com relação à característica, há vários tipos de pontos críticos. Seguindo a classificação proposta por KREYSZIG [25] define-se cinco tipos de pontos críticos: nós impróprios, nós próprios, pontos de sela, centros e pontos espirais. A Figura 3.6 ilustra cada um destes pontos singulares.

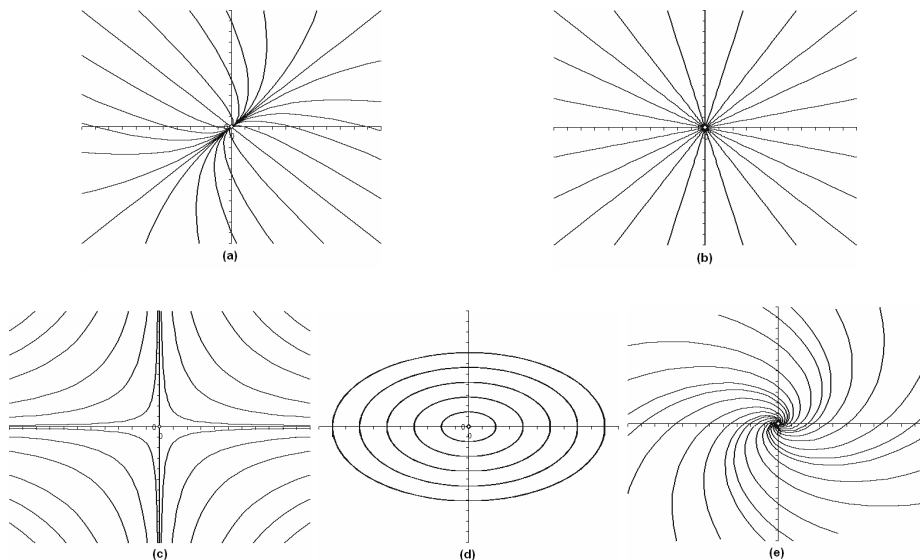


Figura 3.6 – Pontos críticos: (a) nó impróprio, (b) nó próprio, (c) ponto de sela, (d) centro e (e) ponto espiral

Notar que em nenhuma figura foi indicado o sentido das trajetórias. Esta omissão é proposital, pois neste primeiro momento o interesse recai apenas na forma das trajetórias próximas aos pontos singulares. O sentido será abordado adiante, ao se tratar de estabilidade.

Sabendo que existem diversos tipos de pontos fixos, a questão latente agora é: Como classificá-los?

O primeiro passo neste sentido consiste em considerar que cada ponto singular se localiza na origem do plano de fase. Para isto, admitindo que o ponto crítico  $P_0$  possui coordenadas  $(a, b)$ , faz-se sua translação para a origem por:

$$\tilde{z}_1 = z_1 - a \quad (3.8)$$

$$\tilde{z}_2 = z_2 - b \quad (3.9)$$

Com a translação as equações do sistema passam a ser:

$$\dot{\tilde{z}}_1 = f_1(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \quad (3.10)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = f_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \quad (3.11)$$

Agora, assume-se que  $P_0$  é isolado, isto é, ele é o único ponto fixo dentro de um disco circular (suficientemente pequeno) com centro na origem.

Sendo  $\tilde{z}_1$  e  $\tilde{z}_2$  funções contínuas e com derivadas parciais contínuas na vizinhança de  $P_0$  garante-se que o sistema formado pelas Equações 3.10 e 3.11 possui solução e ela é única [25]. Como consequência da solução ser única é possível afirmar que de um ponto parte uma única trajetória, ou seja, no plano de fase duas trajetórias não se interceptam. Além disso, como há solução para o sistema de equações, é válido expandir  $f_1$  e  $f_2$  em uma série de Taylor no entorno do ponto isolado  $P_0$ , tal que:

$$\dot{\tilde{z}}_1 = f_1(0,0) + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{z}_1} \cdot \tilde{z}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{z}_2} \cdot \tilde{z}_2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tilde{z}_1^2} \cdot \tilde{z}_1^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tilde{z}_1 \partial \tilde{z}_2} \cdot \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tilde{z}_2^2} \cdot \tilde{z}_2^2 \right) + \dots \quad (3.12)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = f_2(0,0) + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{z}_1} \cdot \tilde{z}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{z}_2} \cdot \tilde{z}_2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tilde{z}_1^2} \cdot \tilde{z}_1^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tilde{z}_1 \partial \tilde{z}_2} \cdot \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \tilde{z}_2^2} \cdot \tilde{z}_2^2 \right) + \dots \quad (3.13)$$

Todas as derivadas parciais das equações acima são tomadas no ponto singular, ou seja, nas coordenadas  $(0,0)$ .

Simplificando a representação:

$$\dot{\tilde{z}}_1 = a_{11} \cdot \tilde{z}_1 + a_{12} \cdot \tilde{z}_2 + h_1(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \quad (3.14)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = a_{21} \cdot \tilde{z}_1 + a_{22} \cdot \tilde{z}_2 + h_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \quad (3.15)$$

onde:

- $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{22}$  são os coeficientes da expansão em série referentes aos termos de primeiro grau. Estes coeficientes são constantes (números), visto que as derivadas parciais que eles representam são tomadas no ponto singular e o sistema é autônomo, ou seja, a variável tempo não ocorre explicitamente em suas equações;
- $h_1$  e  $h_2$  são funções que agrupam os termos não lineares.

Notar que as Equações 3.14 e 3.15 não possuem os termos constantes (grau zero). Isto se deve ao fato da expansão da função ser feita em torno do ponto crítico (neste caso a origem).

Analisando as Equações 3.14 e 3.15 observa-se a possibilidade de representação matricial do sistema, tal que:

$$\dot{\tilde{z}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h_1(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \\ h_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \end{Bmatrix} = [A] \cdot \tilde{z} + \vec{h}(\tilde{z}) \quad (3.16)$$

Para continuar o desenvolvimento a partir deste ponto despreza-se a contribuição

da parcela não-linear assumindo-a pequena e desprezível. No Item 3.3.1.1  $f$ , as conseqüências e a validade desta simplificação, conhecida como linearização, são avaliadas.

Seguindo com a análise do sistema linear, tem-se para os pontos críticos:

$$\vec{\tilde{z}} = [A] \cdot \vec{\tilde{z}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

Como os coeficientes da matriz  $A$  são constantes, é possível assumir uma solução do tipo  $\vec{\tilde{z}}(t) = \vec{x} \cdot e^{\lambda t}$ , tal que  $\dot{\vec{\tilde{z}}}(t) = \lambda \cdot \vec{x} \cdot e^{\lambda t} = [A] \cdot \vec{\tilde{z}} = [A] \cdot \vec{x} \cdot e^{\lambda t}$ .

Simplificando o termo  $e^{\lambda t}$ :

$$[A] \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \quad (3.18)$$

Mesmo simples, a Equação 3.18 traz em si muita informação. Ela mostra que a resolução do sistema da Equação 3.17 se reduz a um problema de autovalor.

Da Equação 3.18 sabe-se que os autovalores de  $A$  podem ser obtidos pela resolução da seguinte equação característica:

$$\det([A] - \lambda \cdot [I]) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + \det([A]) = 0 \quad (3.19)$$

Introduzindo as notações:

$$s = a_{11} + a_{22} \quad (3.20)$$

$$p = \det([A]) = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \quad (3.21)$$

$$\Delta = s^2 - 4 \cdot p \quad (3.22)$$

Supondo que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da Equação 3.19, ou seja, os autovalores de  $A$ , tem-se que:

$$\lambda^2 - s \cdot \lambda + p = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (3.23)$$

Logo,  $s$  é a soma dos autovalores,  $p$  o produto e  $\Delta$  o discriminante. Com estas variáveis faz-se a classificação dos pontos críticos conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Classificação dos Pontos Críticos

Ponto Crítico	Condição
Nó	$p > 0$ e $\Delta \geq 0$
Sela	$p < 0$
Centro	$s = 0$ e $p > 0$
Ponto Espiral	$s \neq 0$ e $\Delta < 0$

Na classificação a designação “Nó” engloba os nós próprios e os impróprios.

#### e) Estabilidade dos pontos críticos

A Tabela 3.1 permitiu classificar os tipos de pontos críticos ( $P_0$ ) em termos das trajetórias próximas a eles. Outra classificação possível está relacionada à sua estabilidade. De uma forma geral, um sistema é estável se uma pequena mudança (ou pequeno distúrbio) neste sistema em algum instante  $t$  não gera grande mudança em seu comportamento para todo o tempo futuro posterior a  $t$ .

Como esta definição é muito vaga, emprega-se para a análise de pontos críticos o conceito de estabilidade segundo Liapunov. Conforme KREYSZIG [25],  $P_0$  é chamado ponto crítico estável se todas as trajetórias das Equações 3.10 e 3.11 que em determinado instante estão próximas a  $P_0$  permanecem próximas a ele para todo o tempo futuro; mais precisamente: “se para todo disco  $D_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon > 0$  com centro  $P_0$  há um disco  $D_\delta$  de raio  $\delta > 0$  com centro  $P_0$  tal que toda trajetória das Equações 3.10 e 3.11 que possui um ponto  $P_1$  (correspondente a  $t = t_1$ ) em  $D_\delta$  tem todos seus pontos

correspondentes a  $t \geq t_1$  em  $D_\epsilon$ ". Ver Figura 3.7.

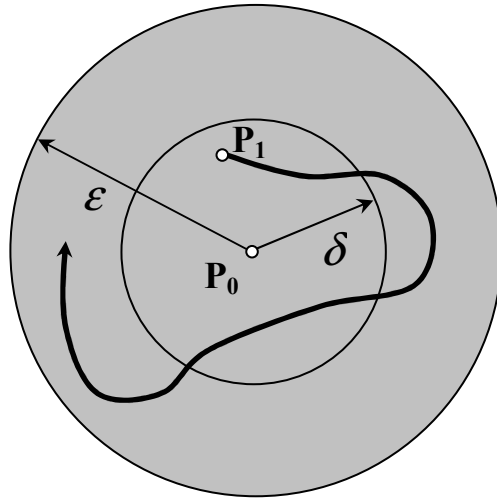


Figura 3.7 – Ponto crítico estável

Adicionalmente:

- $P_0$  é dito instável se ele é não estável;
- $P_0$  é dito assintoticamente estável se toda trajetória que tem um ponto em  $D_\delta$  se aproxima de  $P_0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Ver Figura 3.8.

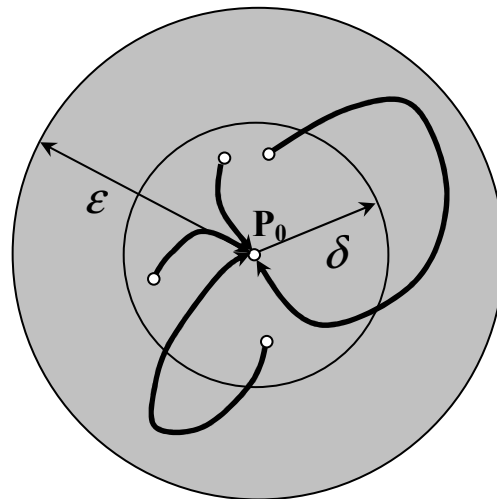


Figura 3.8 – Ponto crítico assintoticamente estável

Da mesma forma que se utilizam  $s$  (soma dos autovalores),  $p$  (produto dos autovalores) e  $\Delta$  (discriminante da Equação característica 3.19) para a classificação dos



pontos críticos, emprega-se estes mesmos parâmetros para a análise de sua estabilidade. Conforme mostrou KREYSZIG [25] o critério de estabilidade pode ser resumido na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Classificação da Estabilidade dos Pontos Críticos

Ponto Crítico	Condição
Assintoticamente Estável	$s < 0$ e $p > 0$
Estável	$s \leq 0$ e $p > 0$
Instável	$s > 0$ ou $p < 0$

De modo a facilitar a visualização dos critérios dispostos anteriormente criou-se a Figura 3.9.

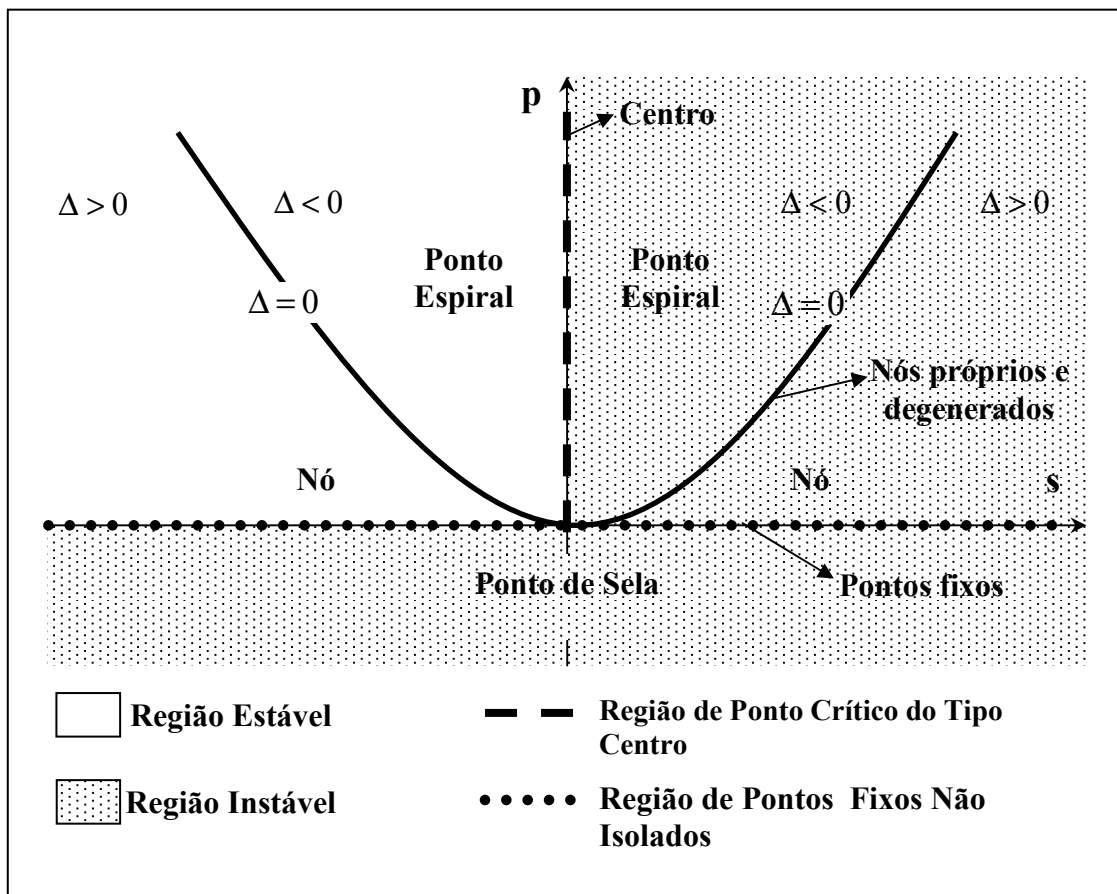


Figura 3.9– Diagrama de Estabilidade do Sistema

Deste diagrama várias conclusões podem ser tiradas.

- i) Se  $p < 0$ , os autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2)$  são reais e com sinais opostos. Para este caso o ponto fixo é um ponto de sela e seu comportamento é sempre instável;
- ii) Se  $p > 0$ , os autovalores ou são reais com mesmo sinal (nós), ou são conjugados complexos (pontos espirais e centros). Nós satisfazem  $\Delta > 0$ , enquanto espirais  $\Delta < 0$ . A parábola definida por  $\Delta = 0$  é a fronteira entre os nós e os pontos espirais e sobre este limite estão os nós próprios e degenerados. A estabilidade dos nós e pontos espirais é determinada pela soma dos autovalores ( $s$ ). Quando  $s < 0$ , os dois autovalores possuem partes reais negativas, então o ponto singular é assintoticamente estável; já para os casos em que  $s > 0$ , o ponto singular é instável. Os casos em que  $s = 0$  correspondem aos centros, cujos autovalores são puramente imaginários e cujo comportamento é estável;
- iii) Se  $p = 0$ , ao menos um dos autovalores é nulo. Então a origem é um ponto crítico não isolado, ou seja, é uma linha de pontos críticos (ver Figura 3.11) ou um plano de pontos críticos (caso a matriz  $[A]$  da Equação 3.18 seja nula).

Por fim, nota-se que os pontos de sela, os nós e os pontos espirais são os tipos de pontos fixos robustos, pois ocorrem nas grandes regiões abertas do plano  $(s, p)$  da Figura 3.9. Já os centros, nós próprios, nós degenerados e os pontos fixos não isolados são os casos de fronteira e ocorrem sobre linhas do plano  $(s, p)$ . De longe, os centros são os mais importantes entre os casos de fronteira, pois são muito comuns em sistemas mecânicos conservativos como a vibração livre não amortecida.

As Figuras 3.10 e 3.11 mostram os pontos fixos explicados acima e as setas indicam o sentido das trajetórias.

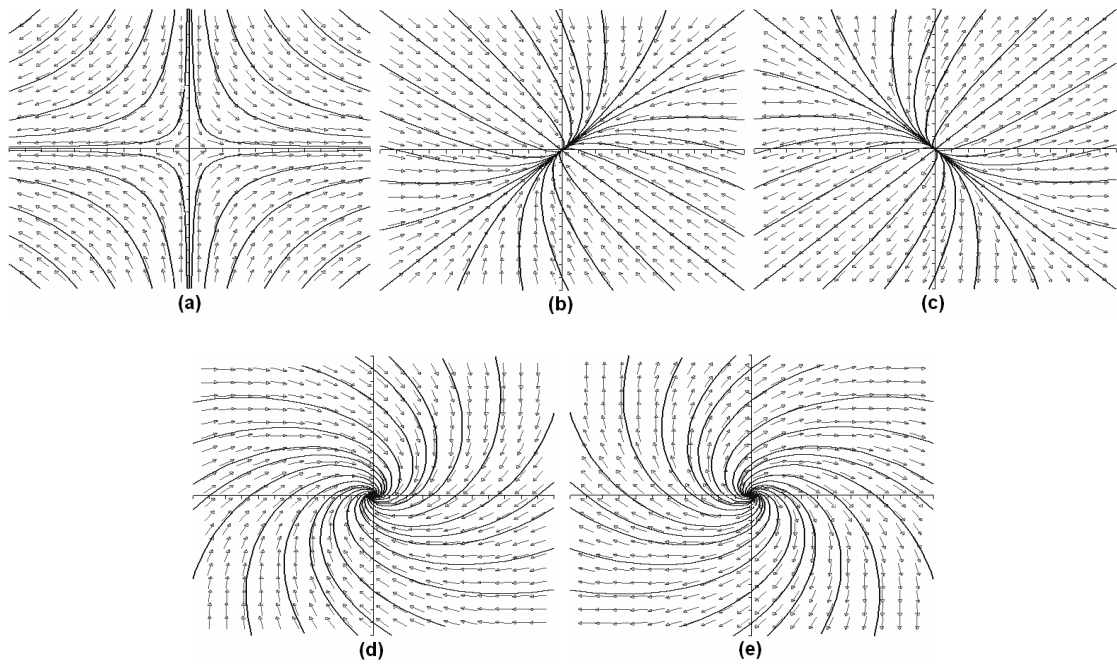


Figura 3.10 – Pontos críticos: (a) ponto de sela, (b) nó impróprio estável, (c) nó impróprio instável, (d) ponto espiral estável e (e) ponto espiral instável

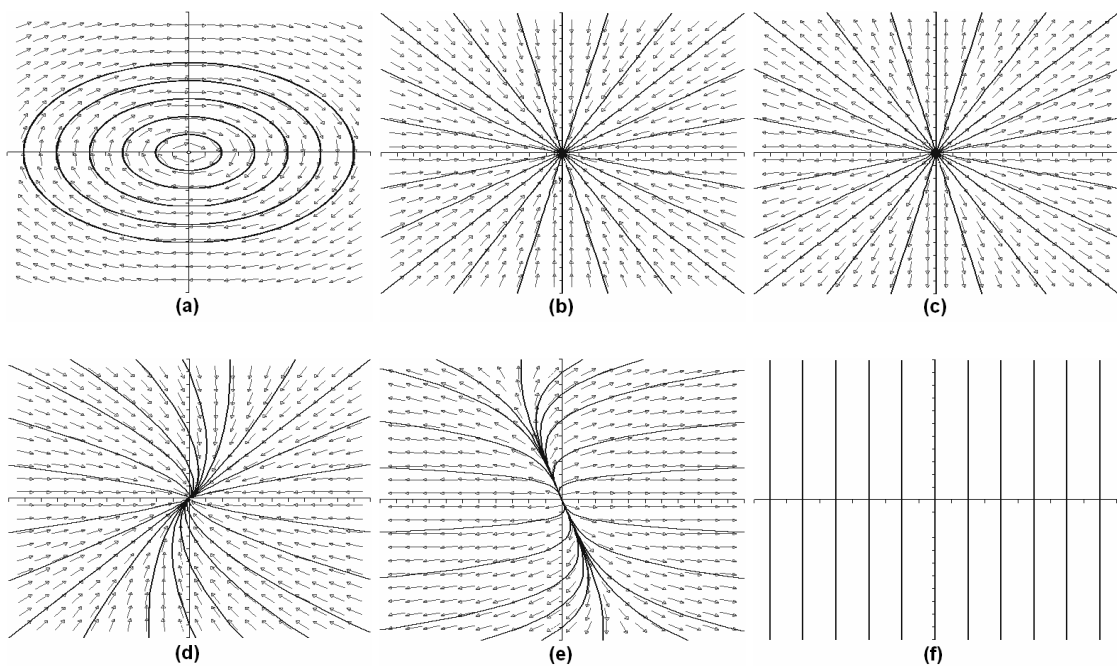


Figura 3.11 – Pontos críticos dos casos de fronteira: (a) centro, (b) nó próprio estável, (c) nó próprio instável, (d) nó degenerado estável, (e) nó degenerado instável e (f) linha de pontos críticos

f) Validade da linearização e efeito dos termos não-lineares

Ao estudar a classificação dos pontos fixos fez-se uma simplificação na Equação 3.16 linearizando-a de forma a se trabalhar com o sistema descrito pela Equação 3.17.

A dúvida que persiste é: ao desprezar os termos não-lineares tem-se uma aproximação correta para o plano de fase próximo ao ponto crítico? Como explicou STROGATZ [19], a resposta é sim desde que o ponto fixo do sistema linearizado não seja um dos casos de fronteira mostrados anteriormente. Em outras palavras, um ponto crítico no sistema não-linear será equivalente ao obtido pelo sistema linearizado se ele for de um dos seguintes tipos: nó impróprio, ponto de sela ou ponto espiral.

Para os casos de fronteira (centros, nós degenerados, nós próprios ou pontos fixos não-isolados) a análise de equivalência é muito mais delicada, pois os pontos fixos podem ser alterados pelos termos não-lineares, ou seja, a previsão obtida pelo sistema linearizado pode ser diferente da realmente existente no sistema não-linear.

Analisando os pontos críticos dos casos de fronteira, STROGATZ [19] mostrou que:

- Para os centros as trajetórias são muito delicadas, pois precisam formar uma órbita perfeitamente fechada após um ciclo. O menor distúrbio pode transformar este ponto crítico num ponto espiral, que poderá ser tanto instável como assintoticamente estável;
- Os nós próprios e degenerados também podem ser alterados por pequenos distúrbios, transformando-se em pontos espirais. Contudo, ao contrário dos centros, estes casos de fronteira mantêm sua estabilidade, ou seja, se são estáveis permanecerão assim.

Focando na estabilidade e não na geometria detalhada das trajetórias, pode-se classificar os pontos críticos de uma maneira simples conforme a Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Classificação dos Pontos Críticos em Casos Robustos e Não-Robustos

Classificação		Autovalores	Tipos de Pontos Críticos
CASOS ROBUSTOS	Fontes	Ambos autovalores possuem parte real positiva	Ponto espiral instável, nó impróprio instável, nó próprio instável e nó degenerado instável
	Atratores	Ambos autovalores possuem parte real negativa	Ponto espiral estável, nó impróprio estável, nó próprio estável e nó degenerado estável
	Selas	Um autovalor possui parte real positiva e o outro negativa	Ponto de sela
CASOS NÃO-ROBUSTOS	Centros	Ambos autovalores são puramente imaginários	Centro
	Pontos Fixos Não-isolados	Ao menos um autovalor é nulo	Pontos fixos não isolados

Então, do ponto de vista de estabilidade, os casos não-robustos são aqueles em que ao menos um dos autovalores possui a parte real nula.

Assim, uma característica importante dos casos robustos é a de que seus autovalores não possuem parte real nula. Pontos críticos com esta característica são chamados hiperbólicos e sua estabilidade não é afetada pelos pequenos termos não-lineares. Por sua vez os casos não-robustos são também chamados não-hiperbólicos e sua característica principal é a fragilidade com relação aos termos não-lineares.

Um importante teorema conhecido por Teorema de Hartman-Grobman postula que o retrato do plano de fase próximo a um ponto crítico hiperbólico (caso robusto) de um sistema não-linear é “topologicamente equivalente” ao retrato do plano de fase do sistema linearizado. Ou seja, o tipo de estabilidade do ponto crítico não-linear é completamente capturado pela linearização do sistema.

Este teorema é a base teórica que sustenta a resposta dada no início deste item,

validando a linearização para os nós impróprios, pontos de sela e pontos espirais e sinalizando um alerta para os demais pontos críticos.

### 3.3.1.2 *Bacias de Atração*

Imagine que um sistema dinâmico possua mais de um ponto crítico. De modo a facilitar a explicação, considere que são três pontos críticos, onde dois são assintoticamente estáveis e um é instável.

Ao se obter soluções para várias condições iniciais, muito provavelmente se verificará que algumas delas serão atraídas por um dos pontos estáveis enquanto outras tenderão ao outro. Ao se agrupar as trajetórias que tendem a cada um dos atratores pode-se claramente definir regiões no plano de fase que contém as respostas que são capturadas por um ponto fixo e pelo outro. Estas regiões são chamadas de bacias de atração e as trajetórias que definem seus limites são conhecidas por separatrizes.

De forma mais formal define-se bacia de atração como o conjunto de condições iniciais que levam a resposta de um sistema a um atrator quando o tempo tende para infinito.

No Item 3.2.4 mostrou-se que o conceito de atrator é mais amplo que o de ponto crítico estável e inclui geometrias de outras dimensões. Desta forma, o conceito de bacia de atração também se estende a sistemas mais complexos que o utilizado como exemplo nesta explicação.

A Figura 3.12 ilustra um exemplo com as bacias de atração de um problema que possui duas regiões estáveis. Notar que as bacias e suas fronteiras (separatrizes) têm importante papel na análise de sistemas não-lineares, pois dividem o espaço de fase em regiões com diferentes comportamentos de longo termo [19].

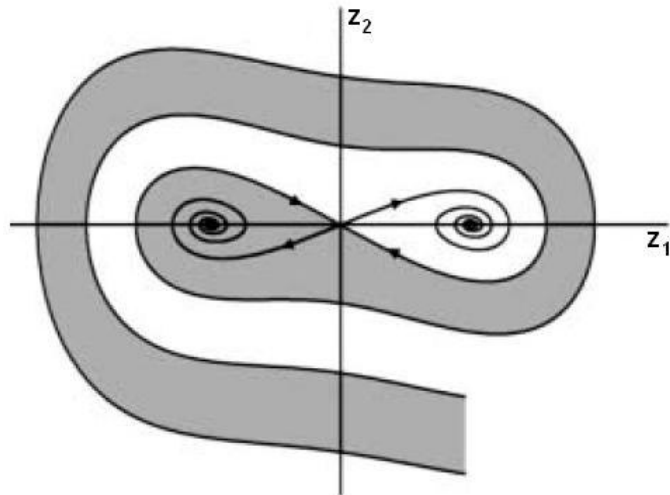


Figura 3.12 – Exemplo de bacias de atração

### 3.3.2 Os Sistemas sob Excitação Externa

O sistema em estudo quando sujeito à excitação externa pode ser representado pela Equação 3.24.

$$\ddot{z} + b \cdot \dot{z} + f(z) = F(t) \quad (3.24)$$

onde  $F(t)$  é a força de excitação, função periódica no tempo.

É possível transformar esta equação diferencial ordinária de segunda ordem (Equação 3.24) em um sistema autônomo por meio das Equações 3.25 a 3.27.

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.25)$$

$$\dot{z}_2 = -f(z_1) - b \cdot z_2 + F(z_3) \quad (3.26)$$

$$\dot{z}_3 = 1 \quad (3.27)$$

Como adiantado no Item 3.2.4 observa-se que para realizar a transformação foi necessário acrescentar uma terceira dimensão ao sistema.

Em função desta característica e principalmente pela possibilidade de exibirem comportamento caótico, adicionalmente às ferramentas expostas no Item 3.3.1 inúmeras

outras são necessárias e de fato estão disponíveis para estes problemas. A seguir algumas delas serão mostradas.

### 3.3.2.1 *Espaço de Fase*

Formalmente o espaço de fase de um sistema dinâmico é definido como o espaço formado pelas variáveis dependentes deste sistema e de um modo geral pode possuir qualquer dimensão ( $\mathfrak{R}^n$ ) [26].

É importante notar que por esta definição, um plano de fase é um espaço de fase para um sistema com duas dimensões.

Voltando ao problema não-linear com um grau de liberdade e excitado externamente observa-se que ao transformá-lo em um sistema autônomo três equações diferenciais ordinárias são criadas. Pela aplicação da definição exposta acima cria-se um espaço de fase tridimensional ( $\mathfrak{R}^3$ ), ou seja, o comportamento que anteriormente era completamente ilustrado pelo plano de fase (vibração livre) agora necessita ser visualizado num espaço “deslocamento vs. velocidade vs. tempo”.

Especialmente no caso em estudo, nota-se que para uma análise qualitativa a terceira dimensão do espaço de fase (tempo) não é crítica para a maioria das situações. Desta maneira é possível trabalhar sem grande perda de informações com a projeção do espaço de fase no plano definido pelo deslocamento e pela velocidade.

### 3.3.2.2 *Seção de Poincaré*

A seção de Poincaré é uma técnica utilizada com o objetivo de eliminar uma dimensão do sistema. Ela se baseia em uma transformação que altera o sistema contínuo no tempo para um mapeamento discreto.

No estudo da dinâmica não-linear existem basicamente dois tipos de modelos: as



equações diferenciais, contínuas no tempo e no espaço, e os mapas, que descrevem a evolução no tempo discretamente, ou seja, o estado do instante atual é uma função do estado anterior.

A principal aplicação dos mapas é auxiliar a análise de sistemas descritos por equações diferenciais e a seção de Poincaré é uma das principais técnicas que permitem que isto possa ser executado.

Do ponto de vista numérico, uma seção de Poincaré pode ser construída geometricamente, definindo uma superfície no espaço de fase e avaliando os pontos em que uma órbita intercepta esta superfície (ver Figura 3.13). Colocado de uma outra forma é como se uma dada órbita fosse observada no espaço de fase apenas em pontos discretos, estroboscopicamente selecionados [22,26].

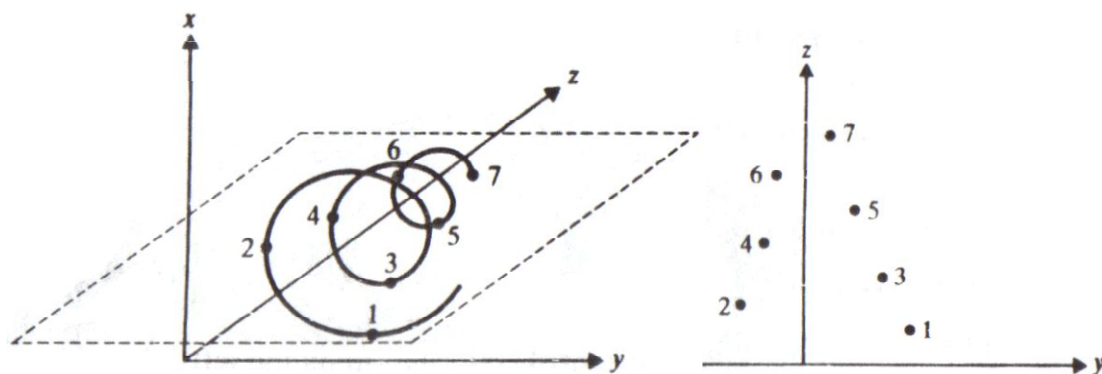


Figura 3.13 – Exemplo de seção de Poincaré

### 3.3.2.3 Diagrama de Bifurcação

O diagrama de bifurcação apresenta de forma gráfica a distribuição estroboscópica da resposta do sistema a partir de uma variação lenta (quase estática) de um dado parâmetro [22,26]. Como consequência esta ferramenta permite que se tenha uma visão global sobre os efeitos da variação deste parâmetro na resposta.

Esta ferramenta também pode ser aplicada a sistemas em vibração livre (duas dimensões) entretanto optou-se por abordá-la neste momento, junto aos sistemas com

excitação externa, em função de seu uso ser mais acentuado para estes casos.

A Figura 3.14 ilustra um exemplo de diagrama de bifurcação. Observa-se que para valores do parâmetro  $r$  entre 0 e 3 o sistema apresenta um tipo de resposta (por exemplo uma solução periódica). Para  $r = 3$  ocorre uma bifurcação e para  $3 < r < 3,45$  a solução apresenta outro comportamento (por exemplo um período de oscilação com valor igual ao dobro do anterior). Aumentando ainda mais o valor do parâmetro  $r$  nota-se que sucessivas bifurcações ocorrem e o sistema altera completamente a forma de sua resposta.

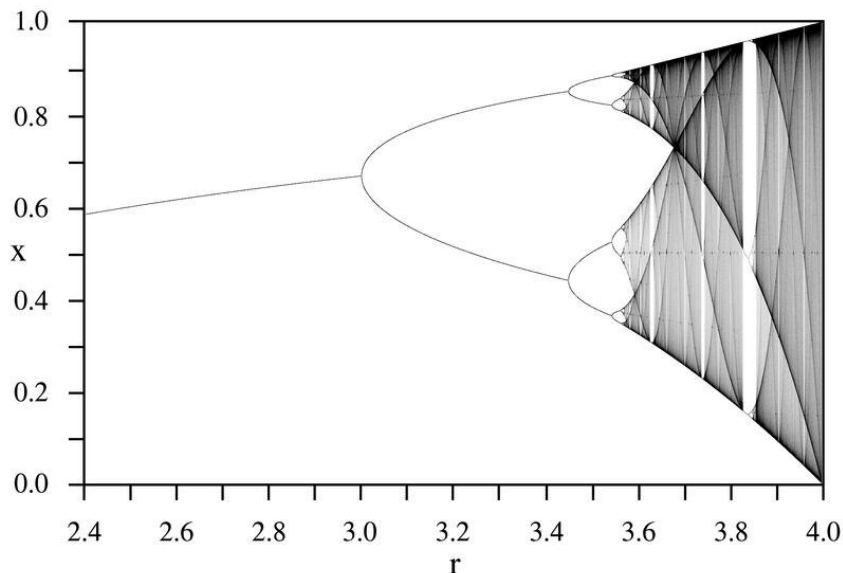


Figura 3.14 – Exemplo de diagrama de bifurcação

O exemplo ilustrado na Figura 3.14 corresponde ao diagrama de bifurcação de um Mapa Logístico e informações mais detalhadas podem ser obtidas em SEYDEL [27].

### **3.4 Fundamentos da Análise Quantitativa**

A grande maioria dos problemas de engenharia requer solução quantitativa; exigindo a utilização de alguma forma de aproximação, solução numérica ou uma combinação de ambos.

Este item faz uma abordagem destes métodos de solução, que permitem a obtenção de resultados quantitativos. Primeiramente vê-se os métodos exatos, cuja aplicação prática é inexpressível. Parte-se então para a explicação dos métodos analíticos aproximados, onde se destacam os métodos de perturbação. Por fim, se discute os métodos numéricos, que permitem a análise de ampla variedade de problemas, incluindo os mais complexos.

### **3.4.1 Os Métodos Exatos**

Estes métodos permitem a obtenção de uma solução exata para as equações diferenciais que representam o sistema. Solução exata neste contexto corresponde àquela obtida em forma fechada ou na forma de expressão que pode ser avaliada numericamente com a precisão desejada.

A solução exata pode ser obtida apenas para alguns poucos sistemas não-lineares cuja dinâmica é governada por tipos específicos de equações diferenciais ordinárias. Por este motivo os métodos exatos apresentam inexpressiva utilização na análise de sistemas não-lineares.

### **3.4.2 Os Métodos Analíticos Aproximados**

Dentre os métodos analíticos aproximados os métodos de perturbação são, na prática, os mais utilizados na solução de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Eles são aplicados às equações onde um pequeno parâmetro pode ser associado ao termo não-linear. A solução aproximada é obtida então como uma série de potências, em que os termos da série contêm o pequeno parâmetro elevado a potências sucessivas e crescentes. As potências dos parâmetros são associadas com funções da variável independente, normalmente o tempo.

Nos problemas dinâmicos os métodos de perturbação permitem que resultados sejam obtidos tanto no domínio do tempo quanto da frequência; contudo, por ser uma técnica de aproximação, seus resultados são mais precisos quanto maiores forem a quantidade de termos e a proximidade com relação ao ponto no qual a solução está sendo aproximada. Em função disto, em alguns casos, várias aproximações são necessárias de modo a cobrir ampla faixa de soluções possíveis ao problema. Como exemplo, pode-se citar o caso de análise no domínio da frequência, em que aproximações diferentes devem ser feitas próximas a cada frequência de ressonância e também distantes delas.

Como neste trabalho faz-se uma investigação ampla do espaço de soluções do problema, esta característica dos métodos de perturbação é uma limitação importante e faz com que se opte pelo uso de método numérico para a análise quantitativa do sistema em estudo.

Diversos métodos de perturbação estão disponíveis e, a depender do tipo de problema, podem ser aplicados.

Nenhuma técnica analítica será abordada no presente trabalho, contudo, àqueles que necessitarem de maiores informações, deixa-se como referências NAYFEH [28] e NAYFEH E MOOK [21], que estudaram vários métodos de perturbação e suas aplicações à oscilação de sistemas não-lineares.

### **3.4.3 Os Métodos Numéricos**

Os métodos analíticos aproximados podem prover grande conhecimento sobre a dinâmica de sistemas não-lineares contudo, como ferramenta de engenharia, apresentam grande limitação no que diz respeito aos tipos de modelo com os quais podem trabalhar [23]. Em outras palavras, é extremamente complicado o estudo de modelos mais

complexos com estas técnicas.

Felizmente os métodos numéricos cobrem esta lacuna e possibilitam a análise de inúmeros tipos de problemas, incluindo os complexos. Contudo, isto possui um custo. Primeiro, os resultados obtidos numericamente normalmente não permitem que conclusões e afirmações gerais sobre o sistema possam ser feitas. Além disto, estes resultados na grande maioria dos casos não constituem prova formal de fatos, ou seja, são usados apenas para sugerir ou reforçar argumentos.

Como visto anteriormente na Equação 2.1, o problema da instalação de módulos submarinos por cabo é bem modelado por uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem. Equações como esta e também as de ordem superior sempre podem ser reduzidas a um sistema de equações de primeira ordem.

Esta mudança permite a utilização dos métodos numéricos aplicáveis à resolução de EDO's de primeira ordem também às equações de ordem superior [25].

#### *3.4.3.1 Métodos Numéricos para Resolução de EDO's de 1ª Ordem*

Diversos métodos estão disponíveis para a resolução de uma EDO de primeira ordem. Para o caso dos problemas de valor inicial (onde se enquadra o sistema em estudo) os métodos podem ser agrupados em duas classes:

- Métodos de intervalo único;
- Métodos com controle adaptativo do tamanho do intervalo.

A primeira classe é composta quase em sua totalidade pelos métodos de Runge-Kutta (RK), que incluem os métodos de Euler (RK de 1ª ordem), Heun (RK de 2ª ordem) e métodos de Runge-Kutta de ordem superior [29].

Esta classe, como o próprio nome informa, possui intervalo de resolução da equação diferencial único e constante. Em contraste, há a classe de métodos com

controle adaptativo do tamanho do intervalo. Estes algoritmos automaticamente ajustam o intervalo de resolução em função do erro computacional. Isto é feito de duas formas. Primeiro, por meio da adaptação dos métodos de intervalo único, que passam a incluir estratégia para controle do intervalo. Segundo, pela utilização de métodos de multi-intervalos, que compreendem algoritmos que retêm informações sobre intervalos anteriores com o objetivo de capturar de forma mais eficiente a trajetória da solução. Assim como os métodos adaptativos, estes também consideram o erro computacional na determinação do melhor tamanho para o intervalo de solução da equação diferencial.

Por não ser escopo deste trabalho não será feita abordagem detalhada de cada método numérico, ao invés disto será discutido a que tipo de problema cada categoria de método pode ser melhor aplicada. Detalhes sobre os métodos podem ser obtidos em KREYSZIG [25] e CHAPRA E CANALE [29].

#### *3.4.3.2 Aplicação dos Métodos*

As técnicas mais simples, como os métodos de Euler e Heun, são normalmente usadas em problemas que requerem integração sobre um curto intervalo da variável independente. Neste caso a precisão pode ser obtida pelo uso de pequenos intervalos de integração de modo a evitar grandes erros de truncamento e obter erros de arredondamento aceitáveis. Outra aplicação destes métodos pode ser a problemas cujo modelo matemático apresente alto nível de incerteza ou erro inerente. Nestes casos a precisão dos resultados passa a não ser indispensável pois o próprio modelo do sistema não justifica esta característica. Por fim, os métodos de Euler e Heun podem ser a melhor alternativa aos casos em que o problema ou simulação precisam ser feitos poucas vezes. Nestas aplicações provavelmente justifica-se o uso de métodos simples que são mais fáceis de se programar e compreender, mesmo considerando os fatos de

serem computacionalmente ineficientes e consumirem maior tempo na resolução das equações.

Se o intervalo de integração do problema é grande o suficiente para resultar num número excessivo de passos (maior que 1000), torna-se necessário e recomendável o uso de métodos numéricos mais precisos. Os métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem e Adams de 4ª ordem são muito populares e confiáveis para a maioria dos problemas de engenharia [29].

Nestes casos pode também ser recomendável estimar o erro de truncamento em cada passo como um guia para seleccionar o melhor intervalo de integração. Isto pode ser executado com os métodos de Runge-Kutta adaptativo de 4ª ordem ou Adams de 4ª ordem. Se os erros de truncamento são extremamente pequenos pode ser prudente aumentar o intervalo de integração para poupar tempo computacional. De outra forma, se o erro de truncamento for grande, o intervalo deve ser reduzido para evitar acúmulo de erros. O método de Milne deve ser evitado em casos onde problemas de estabilidade são esperados. O método de Runge-Kutta é de fácil programação e pode ser usado em grande número de situações contudo sua eficiência tende a ser menor que a dos métodos de multi-intervalos.

Se respostas extremamente precisas forem necessárias ou se a equação possuir derivadas de ordem elevada, o método de Runge-Kutta Butcher de 5ª ordem é muitas vezes indicado.

Por fim, para os problemas em que o range de integração ou a precisão requerida são intermediárias recomenda-se que os métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem ou Heun sem auto inicialização sejam utilizados. Estes algoritmos são simples e possuem relativa precisão e eficiência.

A Tabela 3.4, baseada na análise feita por CHAPRA E CANALE [29], resume a

comparação entre os diversos métodos numéricos disponíveis para a solução de equações diferenciais ordinárias.

Tabela 3.4 – Comparação dos métodos aplicáveis à resolução de EDO's de 1ª ordem

Método	Tipo	Erro Global	Facilidade para alteração do interv. de integração	Esforço de programação	Observações
Euler	Intervalo único	$O(h)$	Fácil	Baixo	Bom para estimativas rápidas
Heun	Intervalo único	$O(h^2)$	Fácil	Moderado	Bom para estimativas rápidas
Polígonos Melhorados	Intervalo único	$O(h^2)$	Fácil	Moderado	Bom para estimativas rápidas
Ralston 2ª ordem	Intervalo único	$O(h^2)$	Fácil	Moderado	Método de RK de 2ª ordem que minimiza o erro de truncamento
Runge-Kutta 4ª ordem	Intervalo único	$O(h^4)$	Fácil	Moderado	Amplamente utilizado
Runge-Kutta adaptativo de 4ª ordem ou RK-Fehlberg	Intervalo único adaptativo	$O(h^5)^*$	Fácil	Moderado a difícil†	Estimativa do erro permite ajuste do intervalo de integração
Heun sem auto inicialização	Multi-intervalos	$O(h^3)^*$	Difícil	Moderado a difícil†	Método multi-intervalos simples
Milne	Multi-intervalos	$O(h^5)^*$	Difícil	Moderado a difícil†	Algumas vezes pode se tornar instável
Adams 4ª ordem	Multi-intervalos	$O(h^5)^*$	Difícil	Moderado a difícil†	

\* Métodos que utilizam a estimativa do erro computacional para modificar a solução

† Métodos com intervalo de solução variável

Neste trabalho o método empregado é o de Runge-Kutta Fehlberg (RKF45). Este método é do tipo adaptativo e possui rotina para determinar se o correto intervalo de integração está sendo usado. Em cada passo do cálculo duas aproximações diferentes para a solução são empregadas e comparadas. Fehlberg propôs como aproximações os



métodos de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordens. Se as respostas obtidas são suficientemente próximas a aproximação é aceita. De outra forma, se as respostas diferem de um valor superior à precisão requerida, o tamanho do intervalo de integração é reduzido. Por fim, caso as respostas sejam muito mais próximas que a precisão pretendida o algoritmo aumenta o intervalo de resolução da equação [30].

O método RKF45 tornou-se muito popular e seu algoritmo está implementado na maioria dos programas computacionais de análise matemática, tais como MAPLE® e Mathematica®.

## CAPÍTULO 4: MÉTODO PASSIVO DE COMPENSAÇÃO COM RIGIDEZ NÃO- LINEAR

### 4.1 Equacionando o Problema

A instalação de módulos submarinos com a utilização de compensador passivo posicionado no cabo de instalação pode ser representada de forma simplificada pela Figura 4.1.

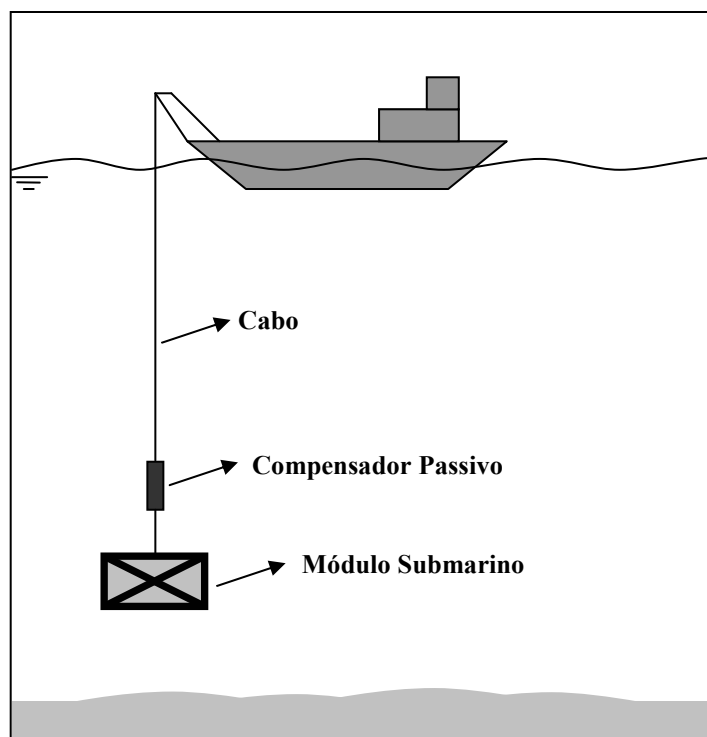


Figura 4.1 – Representação do sistema de instalação

Sabendo que a excitação do sistema se dá pela resposta da embarcação às ondas e atentando para o movimento vertical do módulo, pode-se modelar o sistema conforme a Figura 4.2.

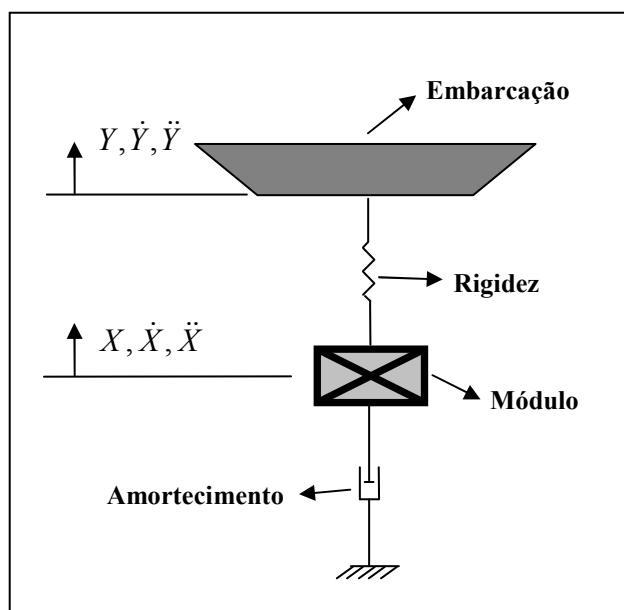


Figura 4.2 – Modelo do sistema de instalação; variáveis X e Y tomadas em relação a um referencial absoluto

As análises consideram apenas o movimento vertical do módulo, não avaliando os efeitos de corrente e movimentos horizontais da embarcação.

Este modelo é similar ao utilizado por CERQUEIRA [14] em seu trabalho, com destaque para o caráter absoluto do amortecimento. Em sistemas onde esta força representa exclusivamente o arrasto, sua localização no modelo deve ser feita como mostrado na Figura 4.2.

#### 4.1.1 Construção do Diagrama de Corpo Livre do Sistema

O diagrama de corpo livre (DCL) do módulo pode ser construído considerando como posição de referência o equilíbrio estático do sistema. Este diagrama assume que o módulo possui massa M e está sujeito ao deslocamento ( $X$ ), à velocidade ( $\dot{X}$ ) e à aceleração ( $\ddot{X}$ ).

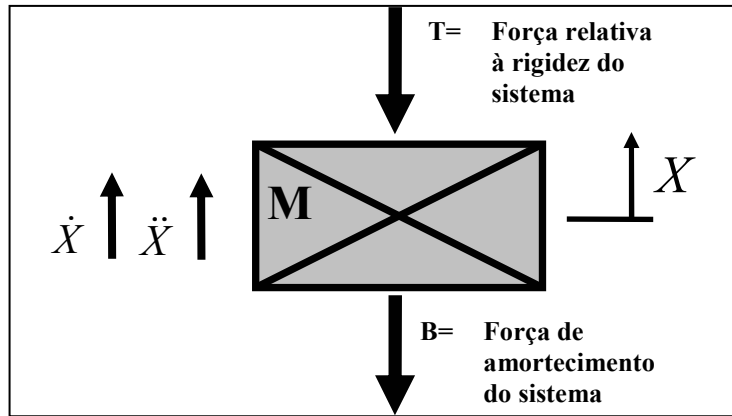


Figura 4.3 – Diagrama de corpo livre do módulo; X em relação a um sistema de referência absoluto

#### 4.1.2 Determinação do Modelo Matemático

Tomando o DCL da Figura 4.3 e fazendo o equilíbrio de forças na direção vertical,

$$\sum F_v = M_e \cdot \ddot{X} \quad (4.1)$$

ou

$$-T - B = M_e \cdot \ddot{X} \quad (4.2)$$

onde:

$\ddot{X}$  – Aceleração do módulo;

B – Força de amortecimento;

T – Força relativa à restauração do sistema;

$M_e$  – Massa efetiva do sistema (soma da massa submersa do módulo com sua massa adicional e  $\frac{2}{5}$  da massa do cabo). Em trabalhos clássicos o valor sugerido para a

influência da massa do cabo na frequência natural do sistema é  $\frac{1}{3}$ , em [14] se mostrou

que o valor  $\frac{2}{5}$  é mais aderente).

Analisando a Equação 4.2 verifica-se a necessidade de definição de uma formulação para as forças relativas à restauração e ao amortecimento do sistema. Esta definição provém das análises do amortecimento viscoso e das forças proporcionadas pelo cabo em associação ao compensador de *heave* não-linear.

#### 4.1.3 Escolha da Função de Amortecimento Hidrodinâmico

O amortecimento considerado para o sistema tem origem viscosa e pode ser definido pela parcela da equação de Morison relacionada ao arrasto do corpo.

$$B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} \cdot |\dot{X}| \quad (4.3)$$

onde:

$\rho$  – Massa específica do fluido onde o módulo está imerso;

$C_d$  – Coeficiente de arrasto do módulo;

$A$  – Área projetada da seção transversal do módulo;

Os métodos de análise que trabalham com o domínio da frequência se baseiam na linearização da força de arrasto [14]. A aproximação é normalmente feita ao se igualar a energia dissipada por força não-linear à energia dissipada por uma força linear equivalente em um ciclo de oscilação.

No presente trabalho, a linearização é empregada apenas no caso de avaliação da instalação de um módulo por cabo sem compensador de *heave* (Item 5.1), como consequência da utilização de método de resolução analítico baseado no domínio da frequência.

#### 4.1.4 A Força de Restauração do Sistema

Conforme informado anteriormente, a rigidez do sistema está relacionada à associação cabo-compensador submarino. De forma a se ter condições de avaliar o comportamento da força de restauração para esta situação estuda-se num primeiro momento as características de cada componente separadamente para então prosseguir com a definição da força de restauração do conjunto.

##### 4.1.4.1 Escolha da Função da Força de Restauração da Mola

Analisando os vários tipos de molas citados no Item 2.3.1 vê-se que todas apresentam a função de restauração com características semelhantes, notadamente o comportamento regressivo para deslocamentos positivos.

Tomando um gráfico que apresente estas características (Figura 4.4), considere a situação em que esta mola esteja suportando um corpo de massa “M”. Nesta nova condição, o equilíbrio pode ser descrito pelo ponto “P”. A partir do equilíbrio “P”, se o sistema iniciar um movimento oscilatório, observa-se que para valores negativos (até um limite construtivo da mola não-linear) o comportamento da rigidez será progressivo, enquanto no outro sentido regressivo.

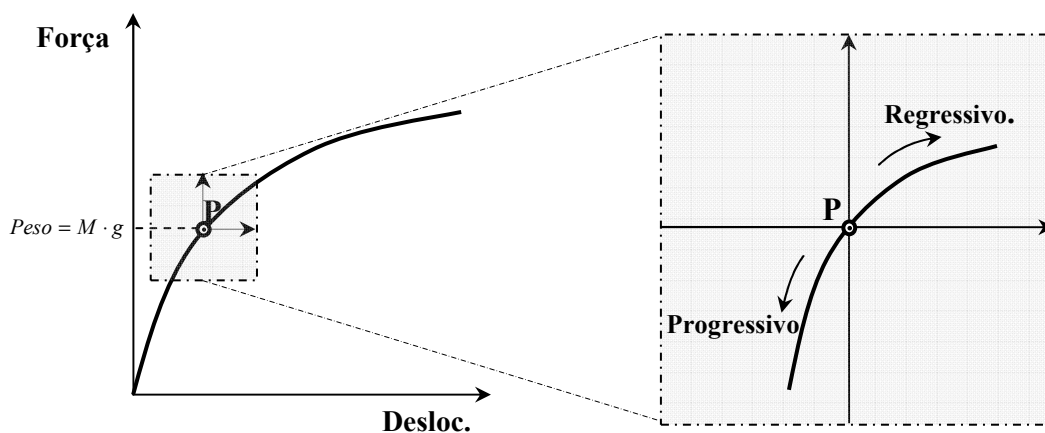


Figura 4.4 – Representação da força de restauração do sistema

Analisando com mais detalhes a geometria do gráfico que representa este comportamento, se pode admitir aproximá-lo por uma função cúbica (Equação 4.4).

$$T(\Delta L_{comp}) = \alpha_1 \cdot \Delta L_{comp} + \alpha_2 \cdot \Delta L_{comp}^2 + \alpha_3 \cdot \Delta L_{comp}^3 \quad (4.4)$$

onde  $\Delta L_{comp}$  corresponde ao deslocamento imposto à mola não-linear e os coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  devem ser determinados de forma a ajustar a curva a cada aplicação.

#### 4.1.4.2 A Força de Restauração do Cabo

O comportamento de um cabo de aço pode ser aproximado de forma linear pela Equação 4.5.

$$F_{cabo} = k_{cabo} \cdot \Delta L_{cabo} \quad (4.5)$$

onde  $F_{cabo}$  é a força de restauração do cabo,  $k_{cabo}$  sua rigidez e  $\Delta L_{cabo}$  a deformação elástica ao qual está submetido.

A rigidez, propriedade importante do cabo, é expressa como:

$$k_{cabo} = \frac{A_{cabo} \cdot E}{L_{cabo}} \quad (4.6)$$

sendo,  $A_{cabo}$  a área transversal estrutural do cabo,  $E$  seu módulo de elasticidade e  $L_{cabo}$  seu comprimento nominal.

A área da seção é definida pela Equação 4.7.

$$A_{cabo} = F_c \cdot d^2 \quad (4.7)$$

onde  $F_c$  é um fator que depende do tipo de construção do cabo e  $d$  seu diâmetro nominal.

Os valores do módulo de elasticidade e do fator  $F_c$  para seus diversos tipos de cabo encontram-se disponíveis em catálogos de fabricantes.

#### 4.1.4.3 A Força de Restauração do Sistema

Analisando a associação entre o cabo de instalação e o compensador submarino observa-se que estão em série. Nesta configuração as seguintes propriedades são verdadeiras:

- A força axial atuante em cada componente é a mesma;
- O deslocamento total do sistema é idêntico à soma dos deslocamentos de cada componente separadamente.

Pelas características inerentes ao modelo não se pode obter uma fórmula analítica exata para determinação da força de restauração do conjunto em função do deslocamento total exibido por ele. Isto deve então ser feito por meio de cálculo numérico ou aproximação.

Neste sentido propõe-se a seguinte solução para o cálculo desta característica do sistema:

**Passo 1:** Determinação da força de restauração do compensador submarino para vários valores de deslocamento;

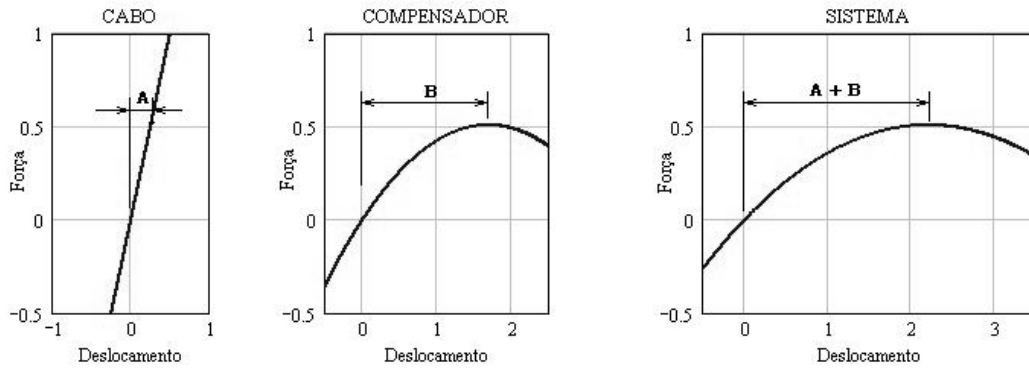
**Passo 2:** Determinação do deslocamento do cabo para as várias forças de restauração calculadas acima (lembrar que neste tipo de associação a força axial é igual entre os componentes);

**Passo 3:** O deslocamento total do sistema, para várias forças, pode ser obtido pela soma da deflexão do cabo à do compensador submarino; com isto determina-se a forma da curva de restauração;

**Passo 4:** Por fim, com a forma da curva definida, pode-se aproximá-la por um polinômio, como mostrado na Equação 4.8.



Com a execução dos passos 1 a 3 é possível obter um gráfico conforme mostrado na Figura 4.5, restando apenas a aproximação de uma função para descrever a curva de resposta.



A = deformação do cabo para uma determinada força

B = deformação do compensador para a mesma força

Figura 4.5 – Curva de restauração para o sistema: associação do compensador submarino ao cabo de instalação

Analisando Figura 4.5 e tendo como objetivo manter as principais características da resposta na região de interesse do gráfico, é nítida a proposta de utilização de um polinômio de terceiro grau para aproximação da curva de resposta do sistema. Os parâmetros deste polinômio são então determinados pelas seguintes condições:

- A rigidez da curva na origem deve ser igual àquela da associação em série da rigidez do cabo com a parcela linear da rigidez do compensador;
- O valor do pico de máximo da função de restauração do sistema deve ser idêntico ao do compensador submarino. Lembrar que, na associação em série, a força atuante sobre os componentes do sistema é a mesma; com isto, a força máxima do compensador é a força máxima que o conjunto poderá apresentar;
- O valor mínimo do vale da função de restauração do sistema deverá ser idêntico ao do compensador submarino.

Com as três restrições é possível definir uma função analítica aproximada para representar o sistema.

$$T(X - Y) = k_1 \cdot (X - Y) + k_2 \cdot (X - Y)^2 + k_3 \cdot (X - Y)^3 \quad (4.8)$$

onde  $(X - Y)$  corresponde ao deslocamento relativo imposto ao conjunto e os coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são os parâmetros que devem ser determinados pelas condições anteriores.

#### 4.1.5 O Modelo do Sistema

Com a definição das forças relativas ao amortecimento e à rigidez pode-se voltar à Equação 4.2 para consolidar o modelo do sistema.

$$M_e \cdot \ddot{X} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} \cdot |\dot{X}| + k_1 \cdot (X - Y) + k_2 \cdot (X - Y)^2 + k_3 \cdot (X - Y)^3 = 0 \quad (4.9)$$

Observa-se na Equação 4.9 que o deslocamento imposto pelo movimento da embarcação de instalação aparece explicitamente. Admitindo que ele pode ser representado por uma função harmônica do tipo seno como na Equação 4.10.

$$Y = y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (4.10)$$

onde  $y_0$  é a amplitude de excitação,  $\omega$  a frequência e  $t$  o tempo.

Desta forma, o modelo do sistema pode ser definido pela Equação 4.11.

$$\begin{aligned} M_e \cdot \ddot{X} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} \cdot |\dot{X}| + k_1 \cdot [X - y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] + \\ + k_2 \cdot [X - y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^2 + k_3 \cdot [X - y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esta equação será analisada na seqüência do trabalho.

## CAPÍTULO 5: ESTUDO DE CASO: INSTALAÇÃO DE UM MÓDULO DE CHOKE

Com o objetivo de testar o conceito de compensador de *heave* com rigidez não-linear realiza-se neste capítulo um estudo de caso com a instalação de um módulo de *choke*. A Figura 5.1 mostra um módulo pertencente a um dos manifolds da terceira geração (Item 1.2.2.3), cujas características são similares às consideradas no estudo de caso.

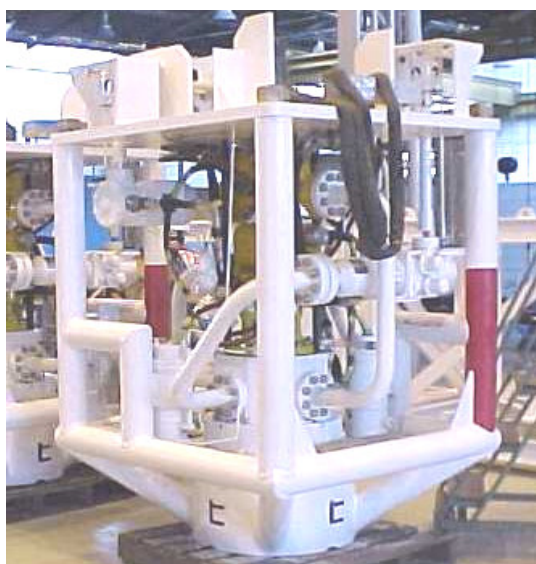


Figura 5.1 – Módulo de *choke*

De forma a verificar o desempenho do compensador passivo, realizam-se as análises em etapas, incrementando gradualmente a complexidade do sistema. Abaixo se resume a forma de organização considerada para as análises:

- i) Análise do sistema instalado a cabo sem compensador submarino;
- ii) Análise do sistema instalado a cabo com o compensador submarino;
  - a. Avaliação do sistema em vibração livre:
    - Sistema não amortecido;

- Sistema amortecido;
- b. Avaliação do sistema em vibração forçada.

## **5.1 Instalação do Módulo por Cabo sem o Compensador Passivo**

A instalação a cabo sem compensador submarino foi abordada anteriormente no Item 2.1. Neste momento retorna-se ao assunto para o estudo específico do caso de instalação de um módulo de *choke*.

Conforme CERQUEIRA [14] e CERQUEIRA *et al.* [15] mostraram em seus trabalhos, o modelo linearizado de instalação a cabo de equipamentos pode ser representado pela Equação 2.1, transcrita abaixo.

$$M_e \cdot \ddot{X} + \frac{4 \cdot \omega}{3 \cdot \pi} \cdot X_{Amp} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} + k \cdot X = k \cdot y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.1)$$

onde  $k$  (rigidez do sistema) representa a característica do cabo.

Para proceder com a análise devem ser definidas as características físicas do sistema. Neste sentido considera-se a instalação com cabo de diâmetro 1,5 *in* (ver Tabela 2.3), sendo as propriedades da Tabela 2.1 empregadas para o módulo de *choke*. As condições de mar selecionadas para a avaliação do sistema são idênticas às consideradas por CERQUEIRA [14] em seu trabalho, e correspondem a um período de excitação variando entre 6 e 9 *s* e uma amplitude de excitação máxima de 2,0 *m*. A lâmina d'água máxima de instalação é definida como 2500 *m*.

### **5.1.1 Análise no Domínio da Frequência**

Selecionou-se a análise baseada no domínio da frequência em virtude deste método permitir a solução analítica para o problema de instalação a cabo sem

compensador. Vale ressaltar que o método escolhido só é possível pela linearização da força de arrasto.

A resolução da Equação 2.1 no domínio da frequência permite obtenção de respostas para os seguintes parâmetros [14]:

- Fator de amplificação do movimento vertical do corpo;
- Trações no cabo para as posições de conexão com a embarcação (topo) e com o módulo submarino (fundo);
- Deformação axial do cabo;
- Fator de amplificação de carga no topo e no fundo.

As Figuras 5.2 a 5.5 ilustram as respostas do sistema.

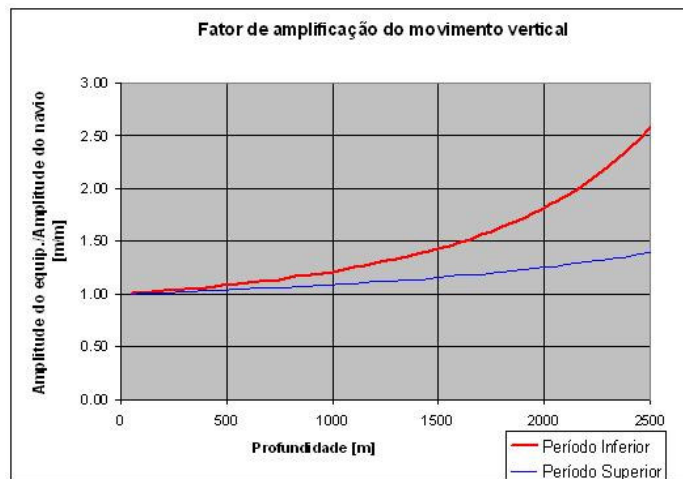


Figura 5.2 – Resultado para o fator de amplificação do movimento

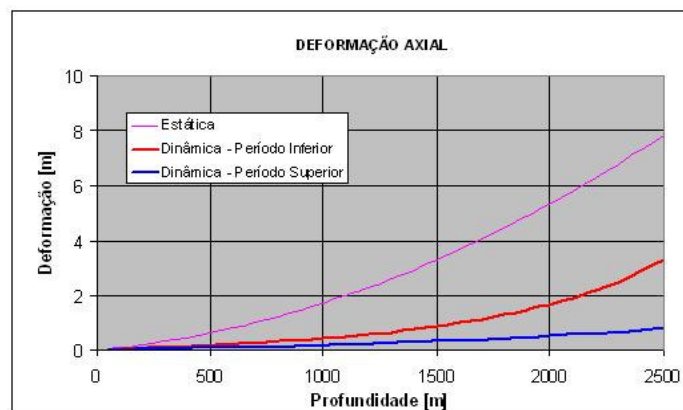


Figura 5.3 – Resultado para a deformação axial (amplitude de excitação 2 m)

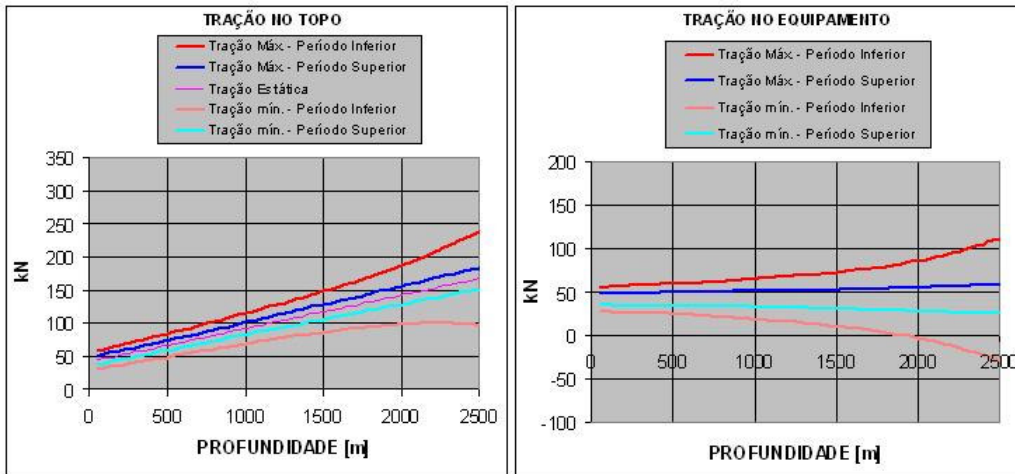


Figura 5.4 – Resultado para as trações no cabo (amplitude de excitação 2 m)

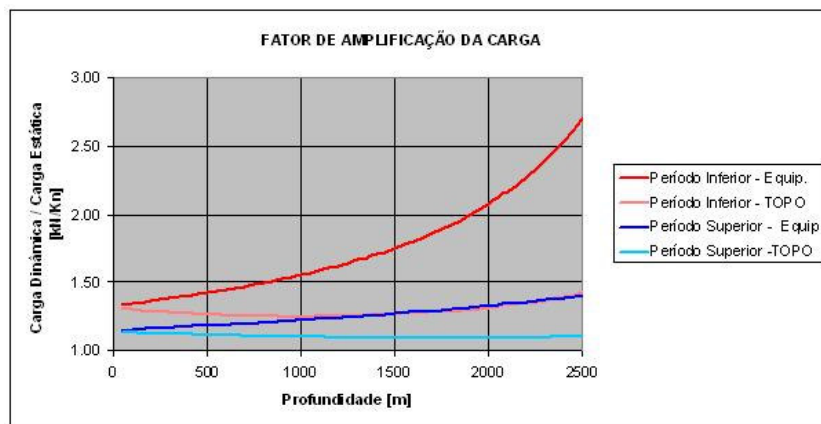


Figura 5.5 – Resultado para o fator de amplificação de carga (amplitude de excitação 2 m)

A instalação de módulos submarinos exige definição de critérios de aceitação para as várias posições que o equipamento assume durante a operação (p.ex. ar, entrada na água, região de influência das ondas, etc.) [31]. Considerando as posições analisadas neste trabalho tem-se que os principais critérios a serem satisfeitos são:

1. Em todas as condições a força total no cabo deve ser menor que sua carga mínima de ruptura (MBL) dividida por um fator de segurança (assumido 3);
2. Em nenhuma circunstância o cabo de instalação pode perder tração, ou seja, seu afrouxamento não é permitido;

3. Na profundidade de conexão com o equipamento residente, o módulo não pode possuir movimento oscilatório com grande energia pois, caso esta energia seja liberada num impacto durante o momento da conexão, danos podem ser gerados nos equipamento envolvidos [4].

A quantificação de um valor que traduza o terceiro critério não é simples. Em muitas operações uma regra prática consiste em definir um valor limite para a amplitude de oscilação do corpo no momento da conexão. No caso de um MCV por exemplo, o valor de amplitude limite se situa na faixa de 1 *m* a 1,5 *m*. Nas análises deste trabalho esta referência será utilizada também para o módulo de *choke*.

Verificando os gráficos de resposta para a instalação do módulo a cabo sem compensador de *heave* pode-se averiguar que o único critério satisfeito é relativo à capacidade de carga do cabo. Na amplificação do movimento, nota-se sua tendência de crescimento com o aumento da lâmina d'água, de modo que em uma profundidade de 2500 *m*, a amplitude de resposta torna-se duas vezes e meia à de excitação. Por fim, dos gráficos de tração no cabo e fator de amplificação de carga, nota-se que por volta de 1900 *m* para o período inferior de excitação (6 *s*) ocorre o afrouxamento do cabo.

Estes resultados causam grande restrição na janela de instalação do componente e ilustram um caso em que a utilização de sistema de compensação é altamente desejada.

## **5.2 Instalação do Módulo por Cabo com Compensador Passivo**

Ao inserir o compensador no sistema de instalação busca-se diminuir a rigidez do conjunto de forma que o movimento de resposta do módulo seja atenuado em relação à excitação proporcionada pela embarcação de instalação.

## 5.2.1 Dimensionamento do Compensador Não-Linear

### 5.2.1.1 Definição de Critérios

Para dimensionar a mola não-linear do compensador passivo propõe-se os seguintes critérios:

- a)  $\alpha_1 > 0$ : Pois no entorno da origem a rigidez deve ser positiva. A definição do valor para este parâmetro será feita após análise preliminar da curva de resposta de um sistema similar ao estudado (Item 5.2.1.2);
- b)  $\alpha_2 < 0$  e  $0 < \alpha_3 < \frac{(\alpha_2)^2}{3 \cdot \alpha_1}$ : De modo a garantir que no entorno da origem o comportamento seja progressivo para deslocamentos negativos e regressivo no outro sentido. (Obs.: O limite superior para o valor de  $\alpha_3$  tem a função de garantir que na região regressiva haja um ponto de máximo para a função de restauração);
- c) O valor da força de restauração no ponto de inflexão somado ao peso submerso do módulo de *choke* deve ser nulo. Isto garante que o polinômio descreve a força de restauração tendo como referência a condição de equilíbrio estático do sistema (semelhante ao ponto *P* no gráfico da Figura 4.4);
- d) Como ainda não há conhecimento sobre o limite de deformação que a mola não-linear suporta até apresentar comportamento dinamicamente instável define-se que o limite corresponderá àquele referente à posição do máximo da função.

A Figura 5.6 ilustra cada um dos critérios.



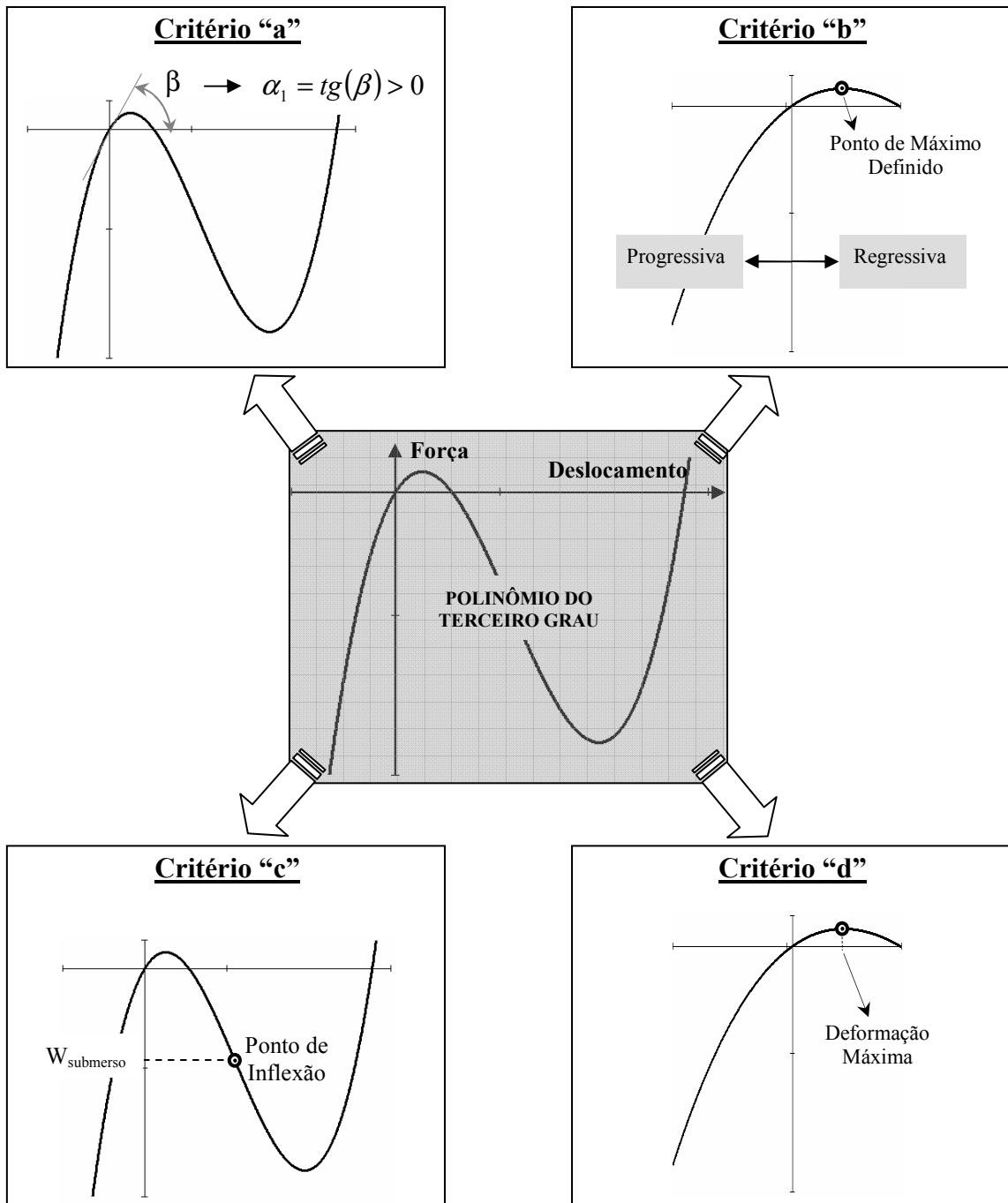


Figura 5.6 – Critérios preliminares para dimensionamento da mola não-linear

### 5.2.1.2 Resposta de um Sistema Não-linear Semelhante ao Estudado

A análise de um sistema descrito pela Equação 4.11 permite investigar de forma preliminar os fenômenos não lineares presentes neste tipo problema. Com este

pensamento executou-se uma análise de um sistema com características similares àquela pretendida para o compensador submarino. Os valores absolutos dos resultados obtidos com esta análise não têm grande valor prático neste momento. Entretanto a forma da resposta em função da variação da frequência de excitação desempenha papel importante. Este tipo de resposta pode mostrar mudanças qualitativas no comportamento do sistema, permitindo que situações indesejáveis possam ser identificadas. Determinadas estas situações é possível impor restrições aos parâmetros de dimensionamento do dispositivo não-linear para que este não opere sob estas condições.

A análise para este caso seguiu a metodologia descrita no Item 5.2.4.1 e os seguintes parâmetros foram considerados:  $M_e = 12280 \text{ kg}$ ,  $\rho = 1025 \text{ kg/m}$ ,  $C_d = 0,75$ ,  $A = 1,44 \text{ m}^2$ ,  $k_1 = 613,2 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = -160,2 \text{ N/m}^2$ ,  $k_3 = 2,3 \text{ N/m}^3$  e  $y_0 = 0,1 \text{ m}$ .

A Figura 5.7 mostra o fator de amplificação do movimento de resposta do sistema escolhido em função da frequência de excitação. Importante informar que devido ao comportamento não-linear da força de restauração (progressivo para deslocamento negativo e regressivo para positivo) a resposta tende a ser assimétrica, ou seja, o movimento apresenta valores de deslocamento diferentes para cada sentido da oscilação. Como consequência deste comportamento o gráfico apresenta duas curvas para uma mesma resposta, uma para cada sentido do movimento. O fator de amplificação pode então ser visto como a razão entre o valor do deslocamento máximo em um determinado sentido e a amplitude de excitação.

Vale ainda ressaltar que as análises foram conduzidas para variações quase-estáticas crescentes e decrescentes da frequência de excitação. As curvas com linhas sólidas apresentam as respostas para variação crescente, enquanto as pontilhadas para decrescente.

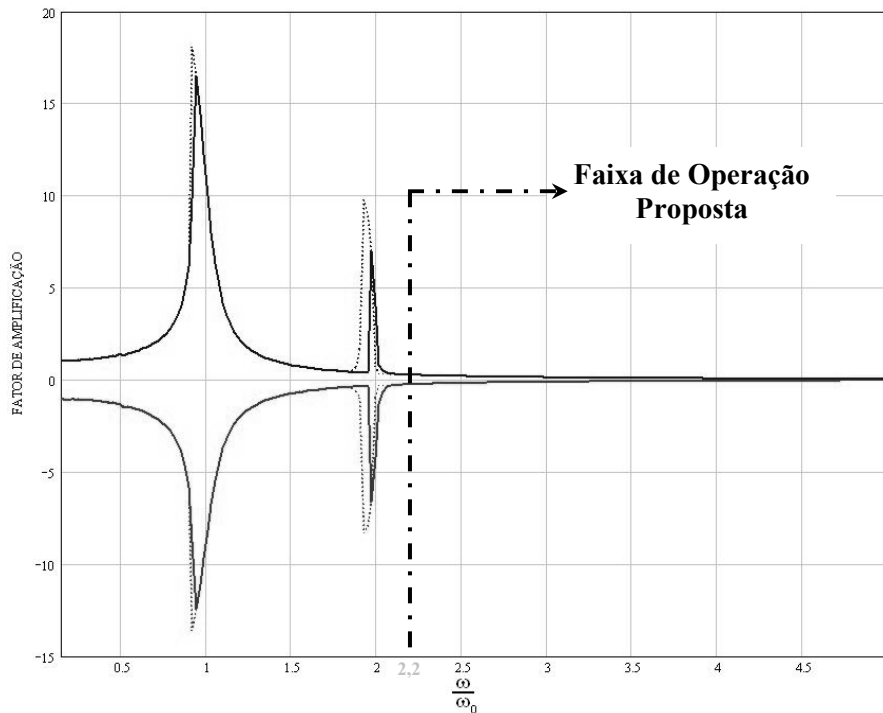


Figura 5.7 – Resposta de um sistema não-linear descrito pela Equação 4.11  
 ( $M_e = 12280 \text{ kg}$ ,  $\rho = 1025 \text{ kg/m}$ ,  $C_d = 0,75$ ,  $A = 1,44 \text{ m}^2$ ,  $k_1 = 613,2 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = -160,2 \text{ N/m}^2$ ,  $k_3 = 2,3 \text{ N/m}^3$  e  $y_0 = 0,1 \text{ m}$ )

Qualitativamente, as características que mais se destacam são as ressonâncias que ocorrem para as frequências de excitação iguais a uma e duas vezes a frequência natural linear do sistema, onde, além da amplificação de movimento, saltos podem ser observados na resposta. A Figura 5.8 mostra com detalhe as regiões de ressonância e os saltos presentes.

A ressonância em  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  já era esperada, contudo a amplificação para  $\frac{\omega}{\omega_0} = 2$  é inerente à não-linearidade da força de restauração e corresponde a uma ressonância de sub-harmônico. Esta característica impõe uma restrição importante ao dimensionamento da mola não-linear, pois se torna necessário que as frequências máxima e mínima de operação do componente sejam maiores que àquela que leva o sistema a esta situação de ressonância.

Admitindo que um valor de  $\omega/\omega_0 = 2,2$  garante esta condição, é possível se impor uma restrição na rigidez linear do sistema para que ele esteja imune à ressonância sub-harmônica. Esta restrição está expressa na Equação 5.1 e provém da substituição da razão de frequências acima na Equação 2.5.

$$k_1 \leq M_e \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{2,2 \cdot T_{\max}} \right)^2 \quad (5.1)$$

onde,  $T_{\max}$  é o valor do período máximo esperado para a excitação do sistema.

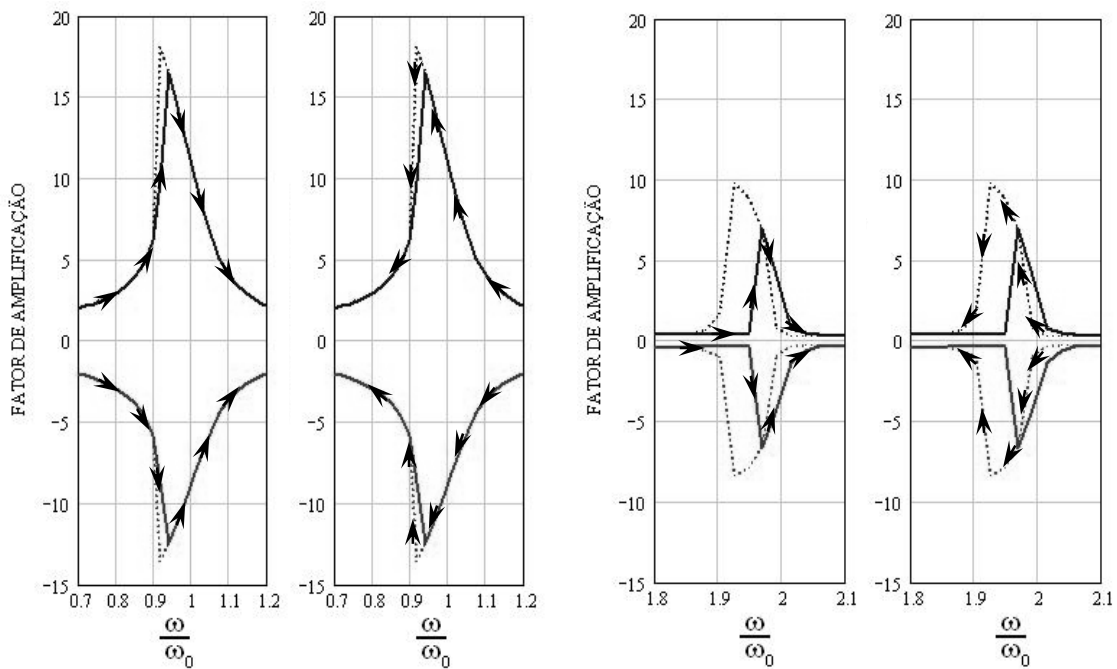


Figura 5.8 – Detalhes das respostas nas regiões de ressonância da Figura 5.7

Com todos os critérios definidos e assumindo que:

- a deformação máxima suportada pelo compensador submarino (critério “c”) é  $2 m$ ;
- o sistema deve compensar o movimento vertical ao longo de todo o intervalo de profundidades, da superfície à LDA final;
- o cabo de aço empregado na instalação tem diâmetro nominal de  $1,5 in$ ;

pode-se calcular os valores dos coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  do compensador submarino a ser empregado na instalação do módulo de *choke*. Assim:

$$- \alpha_1 = 613,25 \cdot \frac{N}{m};$$

$$- \alpha_2 = -160,2 \cdot \frac{N}{m^2};$$

$$- \alpha_3 = 2,3 \cdot \frac{N}{m^3}.$$

### 5.2.2 Dimensionamento das Curvas de Restauração para Várias Lâminas D'água

Utilizando o procedimento descrito no Item 4.1.4.3, é possível definir, para várias LDA's, os coeficientes dos polinômios de terceiro grau que aproximam a força de restauração do conjunto cabo de aço e compensador submarino. A Tabela 5.1 traz os valores destes coeficientes para várias condições.

Tabela 5.1 – Valores de rigidez do sistema para várias LDA's

<b>LDA</b> <b>[m]</b>	<b>k<sub>1</sub></b> <b>[N/m]</b>	<b>k<sub>2</sub></b> <b>[N/m<sup>2</sup>]</b>	<b>k<sub>3</sub></b> <b>[N/m<sup>3</sup>]</b>
0	613,3	-160,2	2,3
500	609,7	-158,4	2,26
1000	606,3	-156,6	2,22
1500	602,8	-154,8	2,18
2000	599,5	-153,1	2,15
2500	596,1	-151,4	2,11

A Figura 5.9 mostra as funções de restauração para três LDA's.

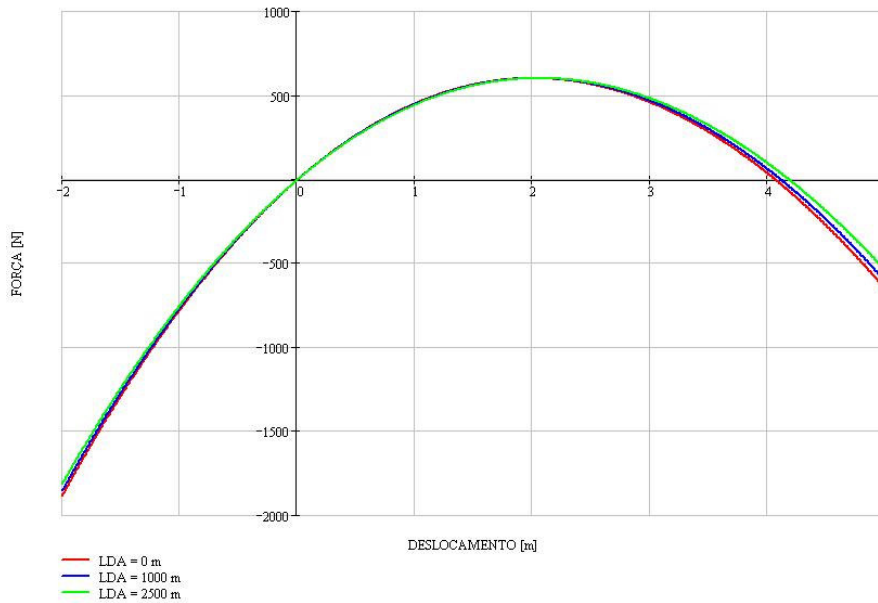


Figura 5.9 – Forças de restauração do sistema em três LDA's

Notar que as curvas para as diversas profundidades são muito próximas. Esta característica é resultado da baixa rigidez apresentada pelo compensador, que domina a associação em série deste componente com o cabo de instalação.

### 5.2.3 Avaliação do Sistema em Vibração Livre

#### 5.2.3.1 Sistema em Vibração Livre sem Amortecimento

O sistema em vibração livre sem amortecimento é descrito de forma geral pela Equação 4.11 com algumas simplificações. Os termos referentes à excitação e amortecimento não existem. Com isto tem-se a Equação 5.2.

$$M_e \cdot \ddot{X} + k_1 \cdot X + k_2 \cdot X^2 + k_3 \cdot X^3 = 0 \quad (5.2)$$

Analisando esta equação se verifica que três pontos críticos estão presentes no sistema:

1. Ponto (0, 0);

$$2. \text{ Ponto } \left( \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3}}{2 \cdot k_3}, 0 \right);$$

$$3. \text{ Ponto } \left( \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3}}{2 \cdot k_3}, 0 \right).$$

Tendo como referência os critérios definidos no Item 5.2.1 nota-se que os pontos críticos 1 e 3 são centros enquanto o ponto 2 é do tipo sela.

Multiplicando cada um dos termos da Equação 5.2 por  $\dot{X}$  inicia-se um processo para obtenção de uma solução analítica para a construção do retrato de fase do problema.

$$M_e \cdot \ddot{X} \cdot \dot{X} + (k_1 \cdot X + k_2 \cdot X^2 + k_3 \cdot X^3) \cdot \dot{X} = 0 \quad (5.3)$$

Agora, integrando a Equação 5.3 em relação ao tempo.

$$\int M_e \cdot \dot{X} \cdot \ddot{X} \cdot dt + \int (k_1 \cdot X + k_2 \cdot X^2 + k_3 \cdot X^3) \cdot \dot{X} \cdot dt = Cte \quad (5.4)$$

Simplificando a Equação 5.4.

$$M_e \cdot \int \dot{X} \cdot d\dot{X} + \int (k_1 \cdot X + k_2 \cdot X^2 + k_3 \cdot X^3) \cdot dX = Cte \quad (5.5)$$

Por fim, resolvendo a Equação 5.5 chega-se a:

$$\frac{1}{2} \cdot M_e \cdot \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot X^2 + \frac{1}{3} k_2 \cdot X^3 + \frac{1}{4} \cdot k_3 \cdot X^4 = Cte \quad (5.6)$$

Como analisa-se um sistema mecânico, o primeiro termo da Equação 5.6 é essencialmente a energia cinética deste sistema, enquanto a segunda parcela corresponde à sua energia potencial. Já a constante a que a soma das energias é igualada corresponde ao nível de energia do sistema ou energia total.

Sabendo que a energia potencial de um sistema está sempre relacionada a um referencial, é necessário definir esta condição para este problema. Ao analisar a forma

da força de restauração sabe-se que o local com a menor energia potencial corresponde ao terceiro ponto crítico, um centro. Definindo como nula a energia potencial neste local, a energia potencial do sistema pode ser representada pela Equação 5.7.

$$E_{POTENCIAL} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot X^2 + \frac{1}{3} k_2 \cdot X^3 + \frac{1}{4} \cdot k_3 \cdot X^4 - \frac{k_2 \cdot \sqrt{(k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3)^3}}{12 \cdot k_3^3} \quad (5.7)$$

Assim, a energia total corresponde a:

$$E_{TOTAL} = \frac{1}{2} \cdot M_e \cdot \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot X^2 + \frac{1}{3} k_2 \cdot X^3 + \frac{1}{4} \cdot k_3 \cdot X^4 - \frac{k_2 \cdot \sqrt{(k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3)^3}}{12 \cdot k_3^3} \quad (5.8)$$

Vê-se que a Equação 5.8 equivale à aplicação do princípio da conservação de energia ao sistema em estudo. Como esta equação relaciona diretamente  $X$  e  $\dot{X}$ , ao resolvê-la para vários valores de energia total obtém-se uma forma direta para construção do retrato de fase do sistema.

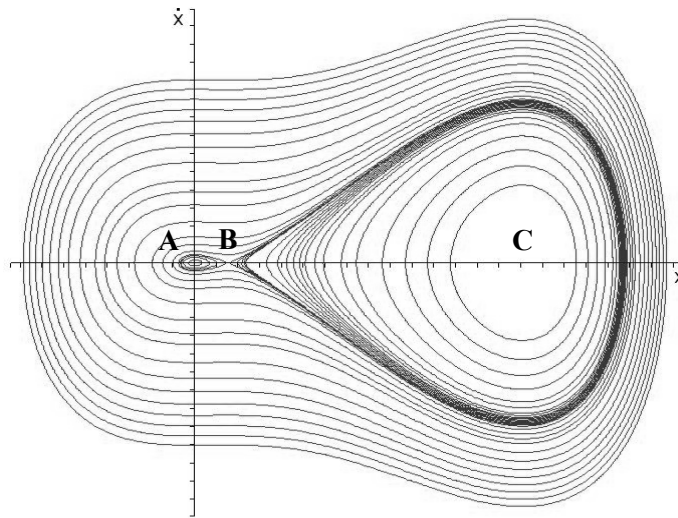


Figura 5.10 – Retrato de fase do sistema não amortecido em vibração livre

A Figura 5.10 ilustra este retrato, onde distingue-se os dois centros ( $A$  e  $C$ ), em torno dos quais, para pequenas e médias amplitudes, órbitas fechadas podem ser vistas. Aumentando-se a amplitude do movimento as trajetórias passam pelo ponto de sela ( $B$ )



e, por fim, no caso de grandes amplitudes, a oscilação resulta em movimento com órbita externa aos dois centros.

Reescrevendo a Equação 5.8 obtém-se a Equação 5.9, que permite o cálculo das velocidades do sistema.

$$\dot{X}^2 = \frac{2}{M_e} \cdot \left( E_{TOTAL} - \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot X^2 - \frac{1}{3} k_2 \cdot X^3 - \frac{1}{4} \cdot k_3 \cdot X^4 + \frac{k_2 \cdot \sqrt{(k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3)^3}}{12 \cdot k_3^3} \right) \quad (5.9)$$

Nota-se que uma solução real para  $\dot{X}$  existe se e somente se:

$$E_{TOTAL} \geq \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot X^2 + \frac{1}{3} k_2 \cdot X^3 + \frac{1}{4} \cdot k_3 \cdot X^4 - \frac{k_2 \cdot \sqrt{(k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3)^3}}{12 \cdot k_3^3} \quad (5.10)$$

Além de permitir a definição da condição acima, a Equação 5.9 mostra que as trajetórias do sistema são sempre simétricas em relação ao eixo  $X$ , isto porque:

$$\dot{X} = \pm \sqrt{\frac{2}{M_e} \cdot \left( E_{TOTAL} - \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot X^2 - \frac{1}{3} k_2 \cdot X^3 - \frac{1}{4} \cdot k_3 \cdot X^4 + \frac{k_2 \cdot \sqrt{(k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3)^3}}{12 \cdot k_3^3} \right)} \quad (5.11)$$

A Figura 5.11 apresenta um gráfico onde o retrato de fase está associado à curva da energia potencial do sistema. Nesta figura observa-se que para energias menores que a da separatriz (trajetória que passa pelo ponto de sela), o sistema poderá percorrer órbitas fechadas em dois locais distintos do plano de fase, mais precisamente ao redor dos dois centros. O que leva o sistema a orbitar em torno de um centro ou outro são as condições iniciais. Quando a energia total é maior que a energia potencial no ponto de sela (Equação 5.12), a solução se desprende dos centros perfazendo seu movimento numa órbita externa, que engloba todos os pontos críticos do sistema.

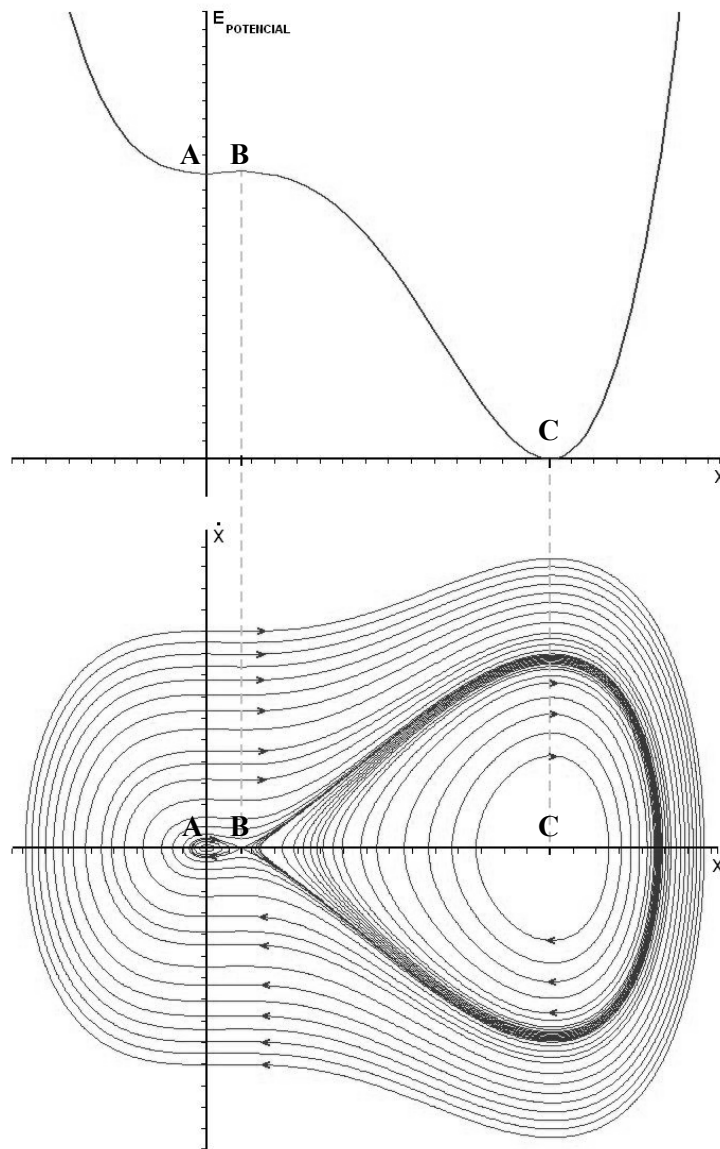


Figura 5.11 – Retrato de fase e curva de energia potencial do sistema não amortecido em vibração livre

A Equação 5.12 define o valor da energia potencial na separatriz.

$$E_{\text{Ponto\_sela}} = \frac{\left(k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3}\right)^2 \cdot \left(6 \cdot k_1 \cdot k_3 - k_2^2 - k_2 \cdot \sqrt{k_2^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_3}\right)}{96 \cdot k_3^3} \quad (5.12)$$

Analisando as figuras anteriores é possível identificar algumas características que diferenciam o sistema não-linear de um linear. Tomando o caso em que a amplitude de oscilação é extremamente pequena, nota-se que o sistema se aproxima de um linear, onde uma função harmônica simples pode descrever a solução no entorno do centro  $A$ .

Contudo, os casos de amplitudes maiores não são meras ampliações da solução para pequena amplitude. Nessas situações a resposta (trajetória) no plano de fase apresenta mudança de forma e não é mais simétrica em relação ao centro, ver Figura 5.12. Olhando atentamente vê-se que o deslocamento para um dos lados do centro tende a ser maior que para o outro. Esta assimetria na resposta, chamada *drift*, tende a aumentar com o acréscimo da amplitude. O comportamento pode ser facilmente compreendido ao se olhar para a forma da curva de restauração que é assimétrica, ou seja, para um mesmo valor de força tende a possuir um deslocamento maior em um sentido que em outro.

Tomando agora o sistema em vibração livre em profundidade nula, tem-se o retrato de fase no entorno da origem como mostra a Figura 5.12.

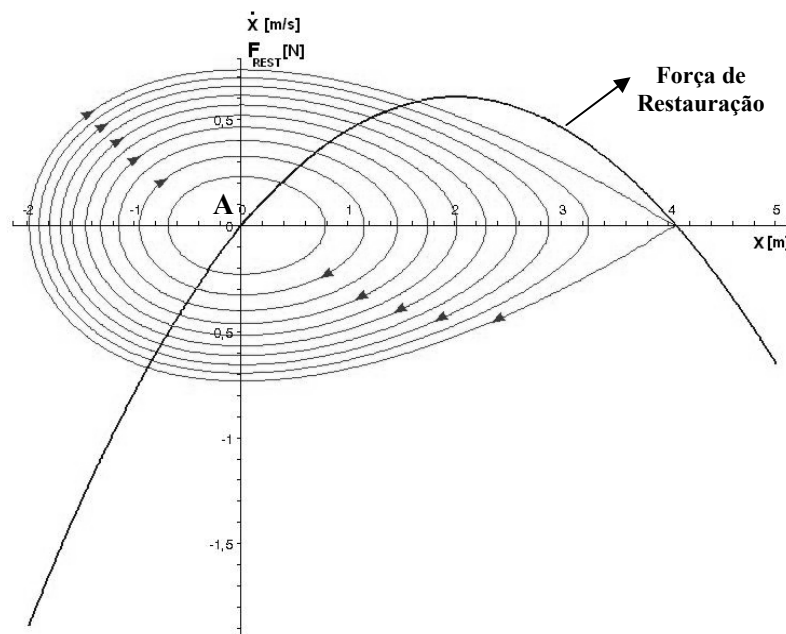


Figura 5.12 – Detalhe do retrato de fase e curva de restauração para o sistema em LDA de  $0\text{ m}$  ( $k_1 = 613,2\text{ N/m}$ ,  $k_2 = -160,2\text{ N/m}^2$ ,  $k_3 = 2,3\text{ N/m}^3$ )

Atentando para o ponto de centro  $A$  observa-se que, além das características discutidas anteriormente, o sistema não-linear apresenta um comportamento interessante. O deslocamento realizado pelo módulo pode ultrapassar de forma estável o ponto que corresponde ao máximo da função de restauração, ou seja, seu movimento

percorre de maneira estável região em que a rigidez do sistema é negativa. A princípio isto pode parecer incoerente mas é perfeitamente factível visto que nesta região, apesar da rigidez ser negativa, o valor da força é positivo, ou seja, se opõe ao movimento do módulo tendendo a reduzir sua velocidade e inverter seu sentido de movimento. Esta explicação vale para o movimento em torno do segundo centro, entretanto os sentidos de deslocamento e sinais das forças são invertidos.

### 5.2.3.2 Sistema em Vibração Livre com Amortecimento

O sistema em vibração livre com amortecimento dissipativo é representado pela Equação 5.13.

$$M_e \cdot \ddot{X} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} \cdot |\dot{X}| + k_1 \cdot X + k_2 \cdot X^2 + k_3 \cdot X^3 = 0 \quad (5.13)$$

Os centros para este caso tornam-se pontos espirais estáveis. Com isto as trajetórias próximas a estes pontos tendem a ser atraídas por eles. A Figura 5.13 ilustra este comportamento.

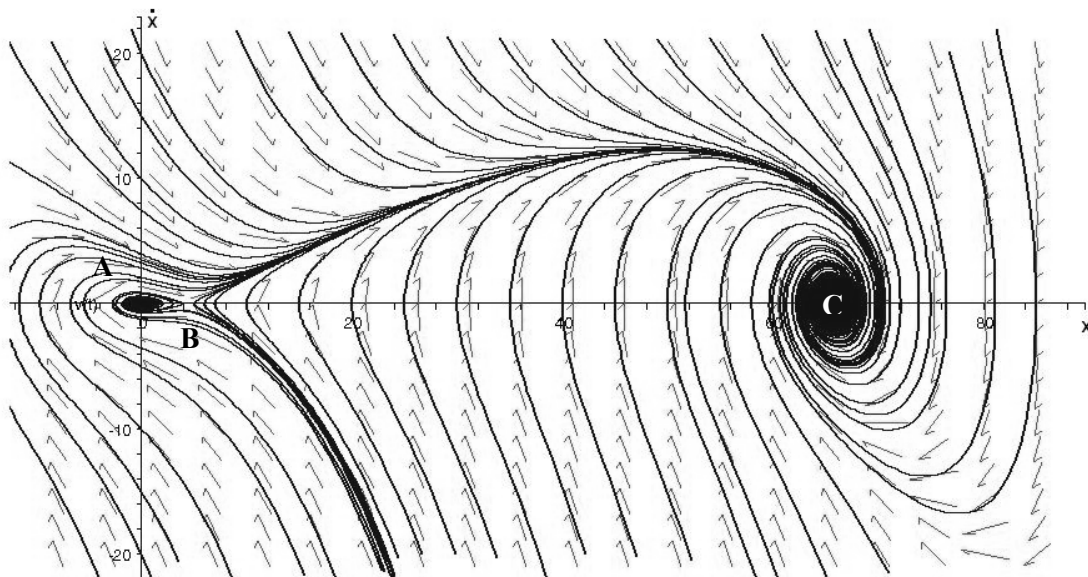


Figura 5.13 – Retrato de fase do sistema amortecido em vibração livre ( $k_1 = 613,2 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = -160,2 \text{ N/m}^2$ ,  $k_3 = 2,3 \text{ N/m}^3$ )

Novamente as condições iniciais definem a qual condição estável o sistema tenderá. As bacias de atração definem as regiões no plano de fase que contêm as respostas que são capturadas por um ponto fixo e pelo outro. A Figura 5.14 ilustra as bacias de atração para o sistema em LDA de 0 m.

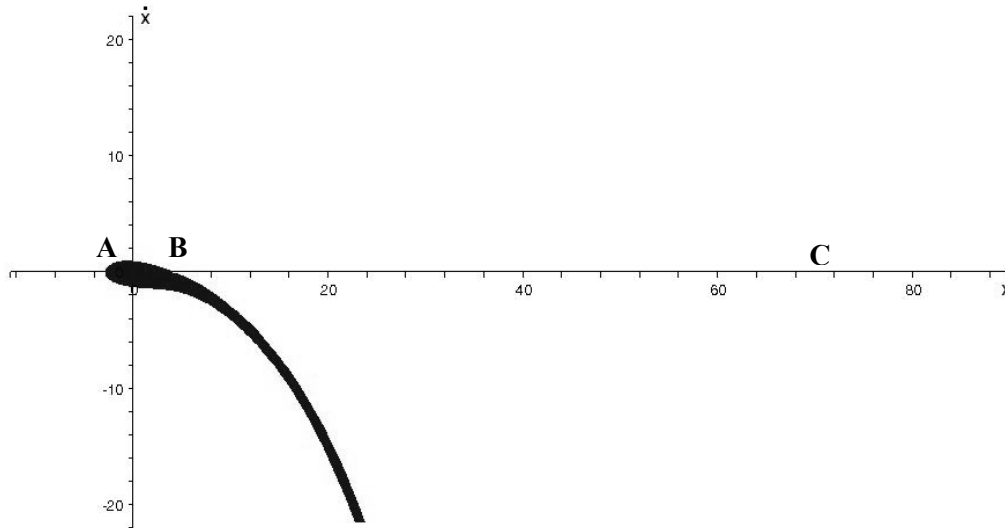


Figura 5.14 – Bacias de atração do sistema em LDA de 0 m ( $k_1 = 613,2 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = -160,2 \text{ N/m}^2$ ,  $k_3 = 2,3 \text{ N/m}^3$ )

A região negra agrupa os valores de condições iniciais que levam o sistema ao ponto espiral *A*. Todas as demais condições têm como destino o ponto *C*. A principal consequência ilustrada por este gráfico está na pequena bacia que leva o sistema a operar na região projetada para fazê-lo atuar como compensador, destacando a restrita influência deste atrator (*A*).

O método utilizado na construção das bacias de atração foi proposto por SEYDEL [27] e se baseia na determinação das separatrizes do sistema. A princípio, apenas o ponto limite final destas trajetórias é conhecido, correspondendo ao ponto de sela. A resolução da Equação 5.13 para tempos negativos tendendo a  $-\infty$ , partindo do ponto de sela, permite a obtenção de uma boa aproximação para as separatrizes. Com isto os limites das bacias de atração podem ser definidos e por consequência também as áreas de influência dos dois atratores do sistema.

## 5.2.4 Avaliação do Sistema em Vibração Forçada

O sistema em vibração forçada é sem dúvida o que mais se aproxima da condição real de instalação. Como explicado, do ponto de vista da dinâmica não-linear também é o mais complexo e por consequência o que pode apresentar maior quantidade de fenômenos não descritos pela análise linear.

Nas avaliações do sistema em vibração livre verificou-se a existência de duas regiões estáveis em torno das quais oscilações periódicas se desenvolvem (pontos *A* e *C* da Figura 5.10). Entretanto, apenas uma delas foi projetada para atenuar o movimento de resposta do módulo, correspondendo ao local no entorno da origem (*A*). Por este motivo, o foco de análise recairá sobre esta região. Numa primeira etapa o desempenho do compensador será avaliado sob sua envoltória de projeto (definido no Item 5.2.1), para então num segundo momento avaliar o comportamento do sistema sob condições mais amplas que as consideradas em seu dimensionamento. Isto permitirá o teste da robustez do compensador não-linear e a identificação de situações potenciais que podem alterar sua resposta em trabalho.

### 5.2.4.1 Metodologia de Análise

O sistema em vibração forçada é descrito pela Equação 4.11, transcrita abaixo:

$$\begin{aligned} M_e \cdot \ddot{X} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A \cdot \dot{X} \cdot |\dot{X}| + k_1 \cdot [X - y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] + \\ + k_2 \cdot [X - y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^2 + k_3 \cdot [X - y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ao olhar o modelo do sistema em estudo, verifica-se a existência de uma particularidade. A força de restauração depende ao mesmo tempo da excitação e da resposta do sistema. Isto também ocorre em sistemas de instalação com rigidez linear, contudo nestes casos é possível separar os termos de excitação e resposta; o que não

pode ser feito no problema não-linear.

A resolução da equação do sistema pode ser feita numericamente no domínio do tempo. Contudo, para que a avaliação do desempenho do compensador seja feita sob toda a envoltória de projeto é interessante que as respostas do sistema estejam disponíveis em função de determinados parâmetros (p. ex. frequência de excitação e LDA). Para permitir que estas situações sejam consideradas, a Equação 4.11 é resolvida no domínio do tempo para cada valor do parâmetro de interesse e as respostas pós-processadas para gerar cada um dos resultados pretendidos.

A condução das análises para obtenção dos resultados em função da LDA e frequência é feita de forma quase estática. Considerando por exemplo o caso relacionado à frequência, o processo se inicia pela análise para uma determinada condição de excitação, de onde se obtém uma resposta para o sistema. Incrementando o valor da frequência de excitação de forma discreta e com um intervalo pequeno o suficiente para não perturbar demasiadamente a resposta parte-se para a solução de uma nova condição. Vale ressaltar que para se ter uma transição suave entre as duas condições, os resultados obtidos para uma frequência são utilizados como condições iniciais na frequência seguinte. Este procedimento é executado de forma a varrer todo o intervalo de valores do parâmetro nos sentidos crescente e decrescente. A consideração dos dois sentidos de variação é extremamente importante, pois permite a detecção de qualquer fenômeno de salto no sistema.

O mesmo procedimento é utilizado para o caso em que as respostas são obtidas em função da lâmina d'água.

Adicionalmente à obtenção das respostas do sistema em função dos parâmetros  $\omega$  e LDA, em alguns casos são analisadas as respostas em condições específicas de frequências de excitação ou lâmina d'água. Nestes casos especiais faz-se avaliação dos

resultados por meio de retratos de fase e respostas no domínio do tempo.

#### *5.2.4.2 Análise do Sistema em sua Envoltória de Projeto*

Definiu-se no Item 5.2.1 que o compensador não-linear foi dimensionado para atuar sob determinadas condições e nesta envoltória de projeto atenuar o movimento de resposta do módulo submarino. Neste item avalia-se o desempenho do compensador sob suas condições de projeto. A análise primeiramente verifica a operação do dispositivo em diferentes profundidades e na seqüência investiga seu comportamento em função da freqüência, onde a literatura indica que vários fenômenos não-lineares podem se manifestar.

##### *a) Resultados em função da profundidade*

A primeira resposta corresponde ao fator de amplificação do movimento do módulo em relação à excitação da embarcação (2 m). Como explicado no Item 5.2.1.2, devido à característica assimétrica da resposta do sistema, necessita-se apresentar os resultados das análises para os dois sentidos de movimento do módulo, o que pode ser visto no gráfico da Figura 5.15.



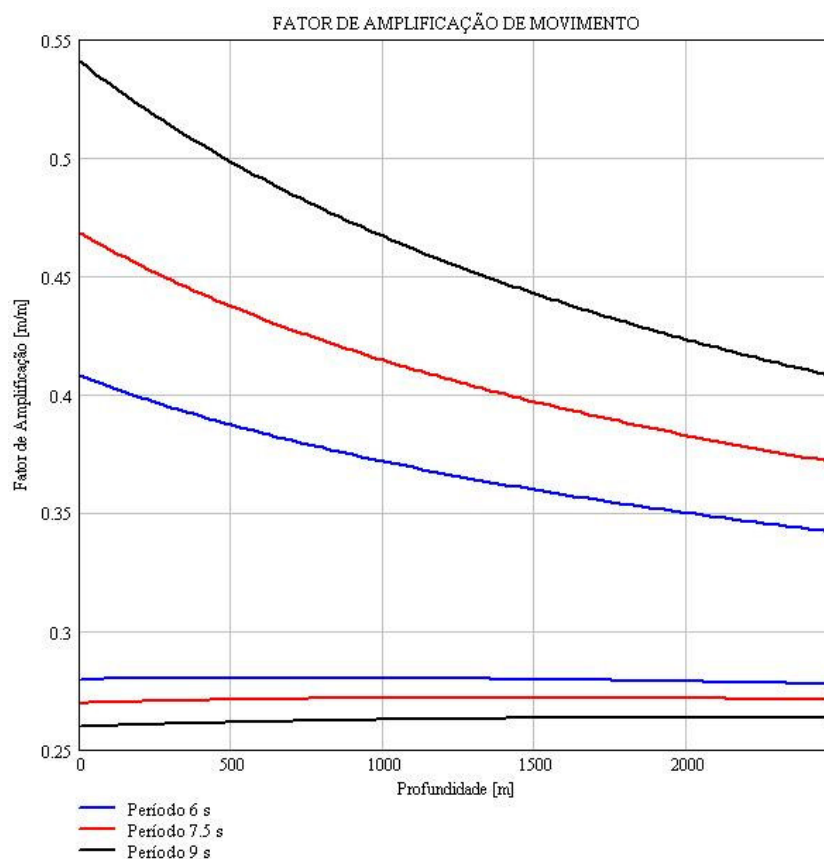


Figura 5.15 – Fator de amplificação do movimento vertical do módulo em função da LDA; períodos de excitação entre 6 e 9 s

A principal conclusão obtida se refere ao fato de que a mola não-linear conseguiu atenuar o movimento do módulo submarino, confirmando até este momento a efetividade de utilização do componente como compensador passivo. Nota-se também que a lâmina d'água não apresenta grande influência no limite inferior do fator de amplificação; contudo, esta constatação não é válida ao limite superior, visto que a modificação da LDA altera significativamente seu valor.

Nas Figuras 5.16 a 5.21 estão os gráficos com retratos de fase e respostas no domínio do tempo para o movimento do módulo submarino.

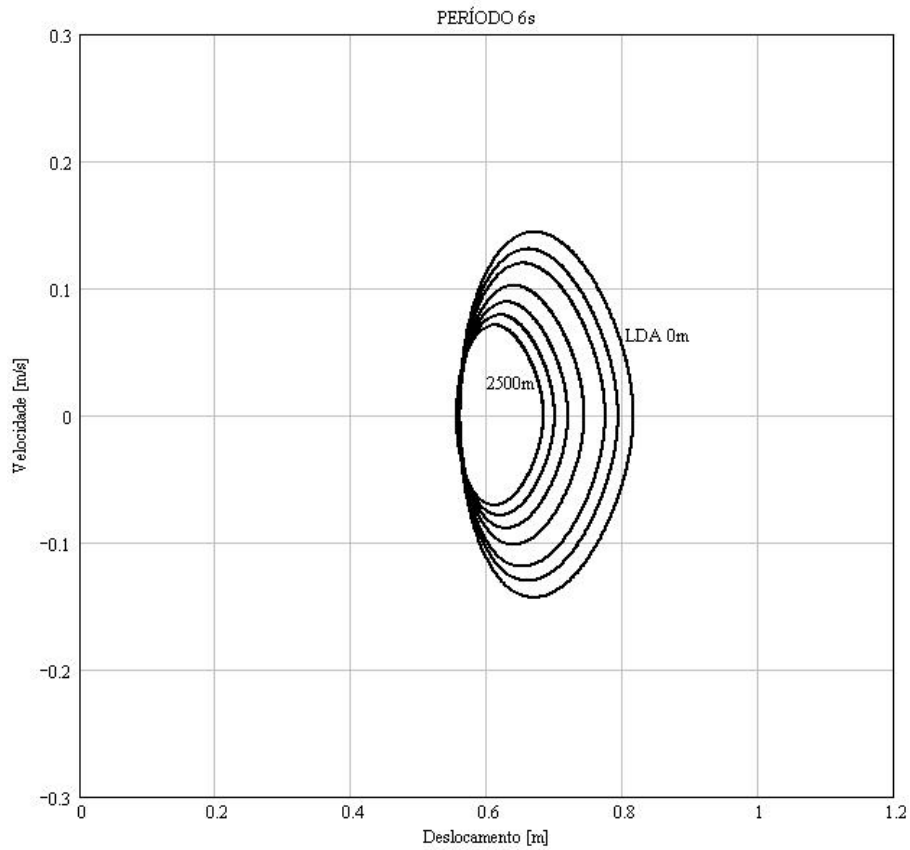


Figura 5.16 – Retrato de fase do movimento do módulo para excitação com período de 6 s; lâminas d’água variando de 0 a 2500 m

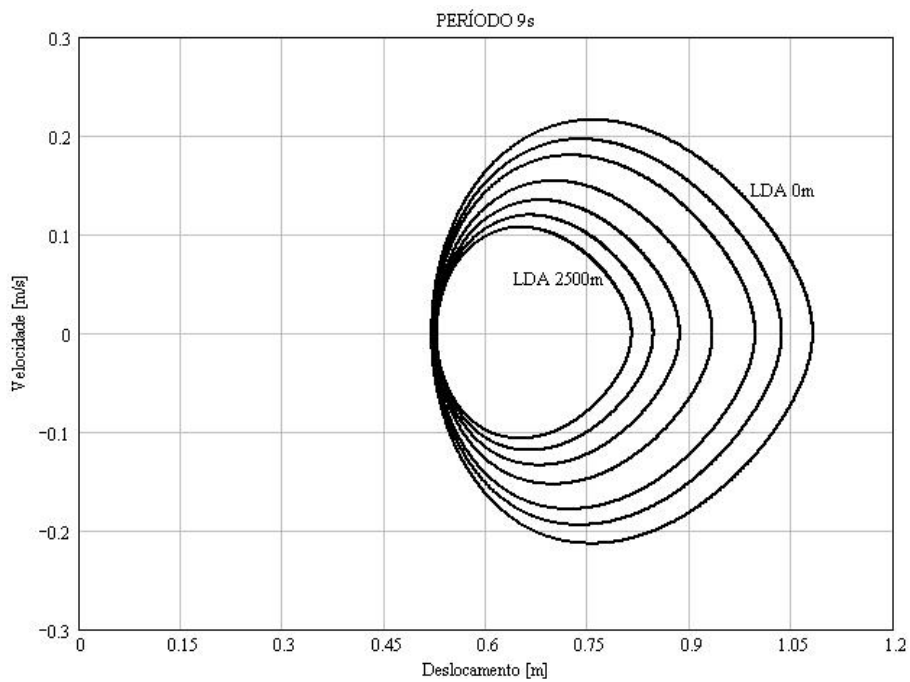


Figura 5.17 – Retrato de fase do movimento do módulo para excitação com período de 9 s; lâminas d’água variando de 0 a 2500 m

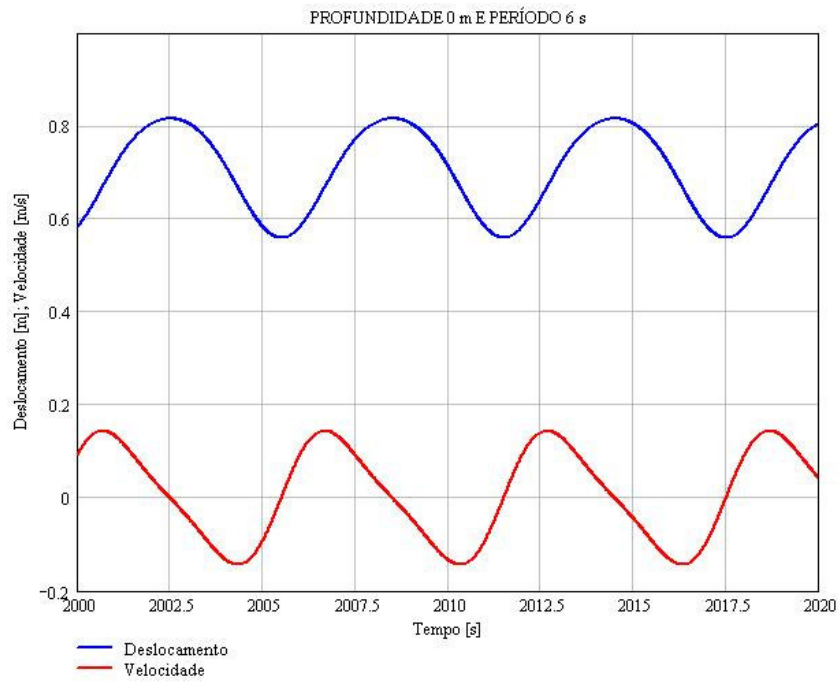


Figura 5.18 – Movimento de resposta do módulo no domínio do tempo, profundidade nula e excitação com período de 6 s

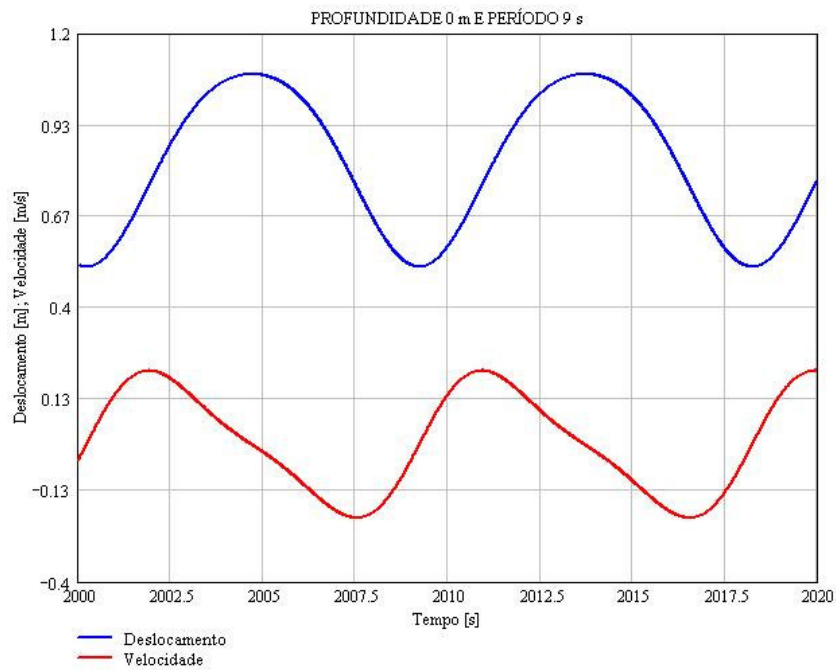


Figura 5.19 – Movimento de resposta do módulo no domínio do tempo, profundidade nula e excitação com período de 9 s

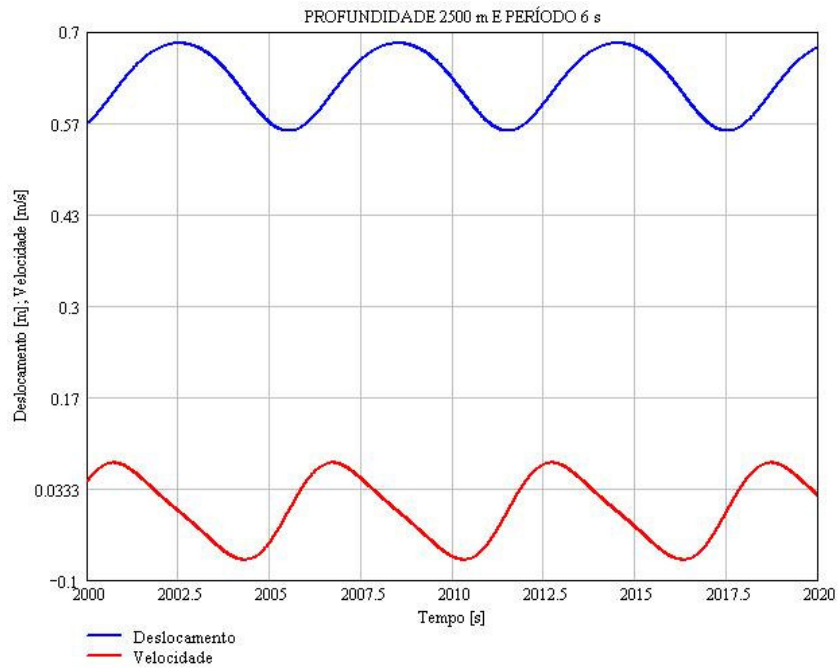


Figura 5.20 – Movimento de resposta do módulo no domínio do tempo, profundidade de 2500 m e excitação com período de 6 s

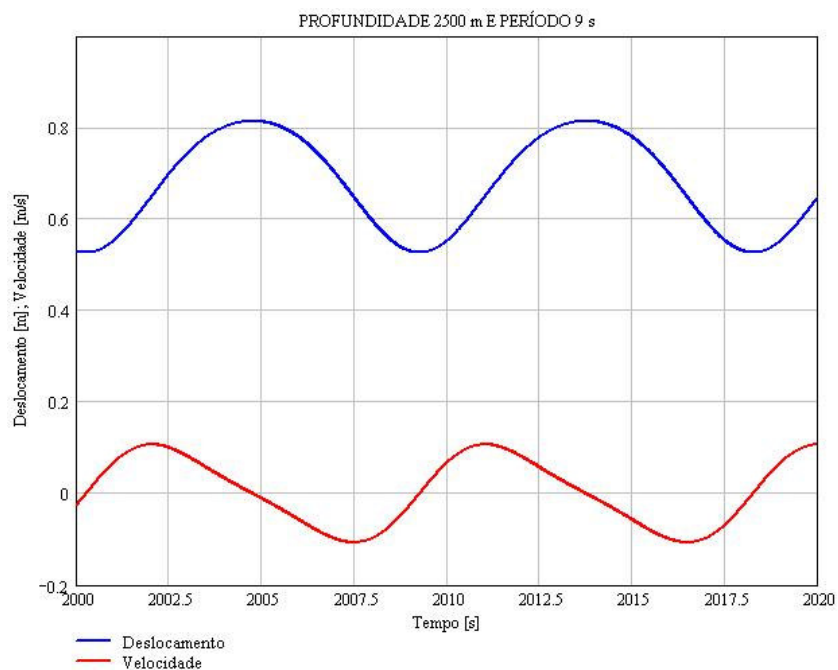


Figura 5.21 – Movimento de resposta do módulo no domínio do tempo, profundidade de 2500 m e excitação com período de 9 s

Nas Figuras 5.16 a 5.21 se observa que o movimento de resposta do módulo submarino apresenta como característica principal a periodicidade.

Nota-se ainda, nos retratos de fase, que o movimento oscilatório tende a apresentar assimetria em relação ao deslocamento e, somado a isto, a oscilação ocorre sempre entre valores limites positivos para esta variável. Estas características resultam exclusivamente da não-linearidade do sistema e não interferem no desempenho do dispositivo.

Por fim, verifica-se que para maiores lâminas d'água menores oscilações ocorrem; isto se deve à presença do cabo, que tende a diminuir a rigidez do sistema.

Nas Figuras 5.22 e 5.23 agrupa-se em um mesmo gráfico as respostas do sistema com e sem o compensador de *heave* e claramente observa-se que a utilização da mola não-linear viabiliza a instalação do módulo em águas profundas.

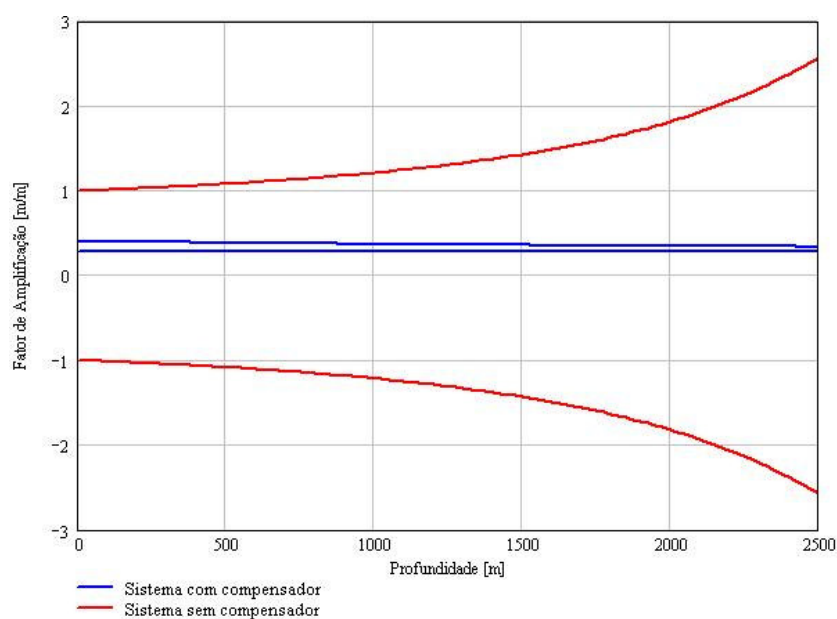


Figura 5.22 – Comparação da resposta para sistema com e sem compensador de *heave*; excitação com período de 6 s

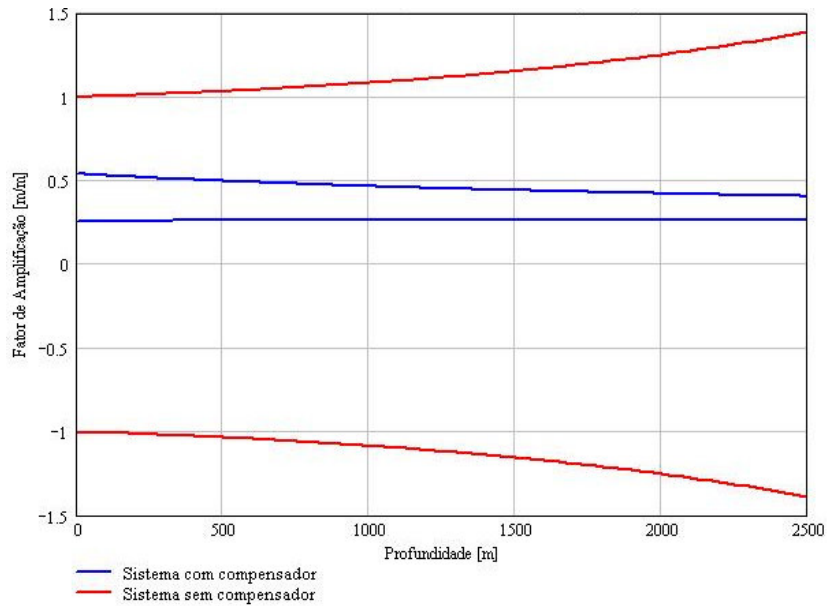


Figura 5.23 – Comparação da resposta para sistema com e sem compensador de *heave*; excitação com período de 9 s

Dos resultados obtidos até este momento nota-se um bom desempenho da mola não-linear. Entretanto vale lembrar que inúmeros fenômenos não-lineares se manifestam com a alteração da frequência de excitação. No item a seguir investiga-se a resposta do sistema em função da frequência de excitação, considerando a variação quase estática deste parâmetro entre os períodos mínimo e máximo, respectivamente 6 e 9 s.

b) Resultados em função da frequência de excitação

Nesta avaliação obtém-se resultados para a profundidade máxima de projeto (2500 m), que corresponde à situação em que há maior necessidade de utilização do compensador passivo.

NAYFEH E MOOK [21] estudaram equações diferenciais ordinárias em que a não-linearidade no termo de rigidez é representada por um polinômio de terceiro grau. Para o caso em que os termos cúbico e quadrático estão presentes verifica-se que ressonâncias podem ocorrer nos casos em que  $\omega/\omega_0$  se aproxima de 1,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $2/1$ ,  $3/1$ ,

$2/3, 3/2, \dots$ ; onde  $\frac{\omega}{\omega_0}$  é a razão entre frequência de excitação ( $\omega$ ) e a frequência linear do sistema ( $\omega_0$ ). Visto que o caso estudado neste trabalho se aproxima da equação descrita por NAYFEH E MOOK [21], atenção especial deve ser dada às regiões de sub-harmônicos pois o dispositivo foi desenvolvido para operar em frequência superiores a 2,2 vezes a frequência natural linear do sistema.

Na Figura 5.24 vê-se que nenhum fenômeno não-linear alterou de forma significativa o comportamento do sistema no intervalo de frequências esperado para a excitação. Nota-se também que, quanto maior a amplitude de excitação, maior o valor médio do fator de amplificação do movimento do módulo. A Figura 5.25 ilustra esta característica destacando as regiões de amplificação para várias amplitudes de excitação.

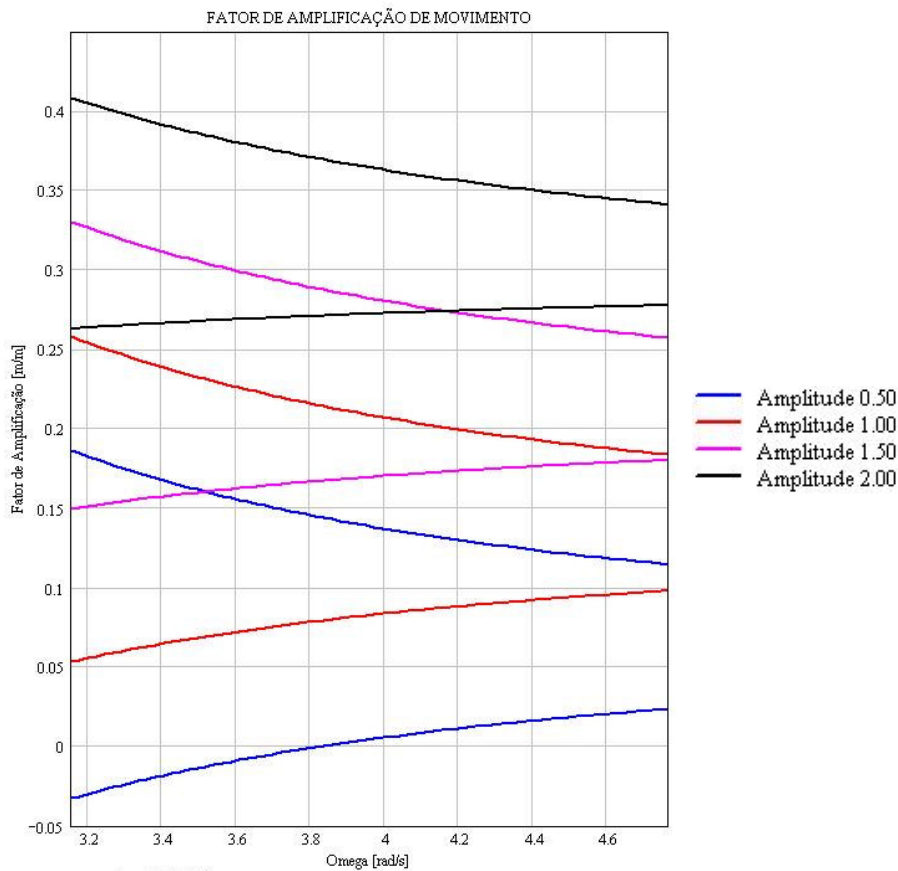


Figura 5.24 – Fator de amplificação do movimento vertical do módulo em função da frequência de excitação

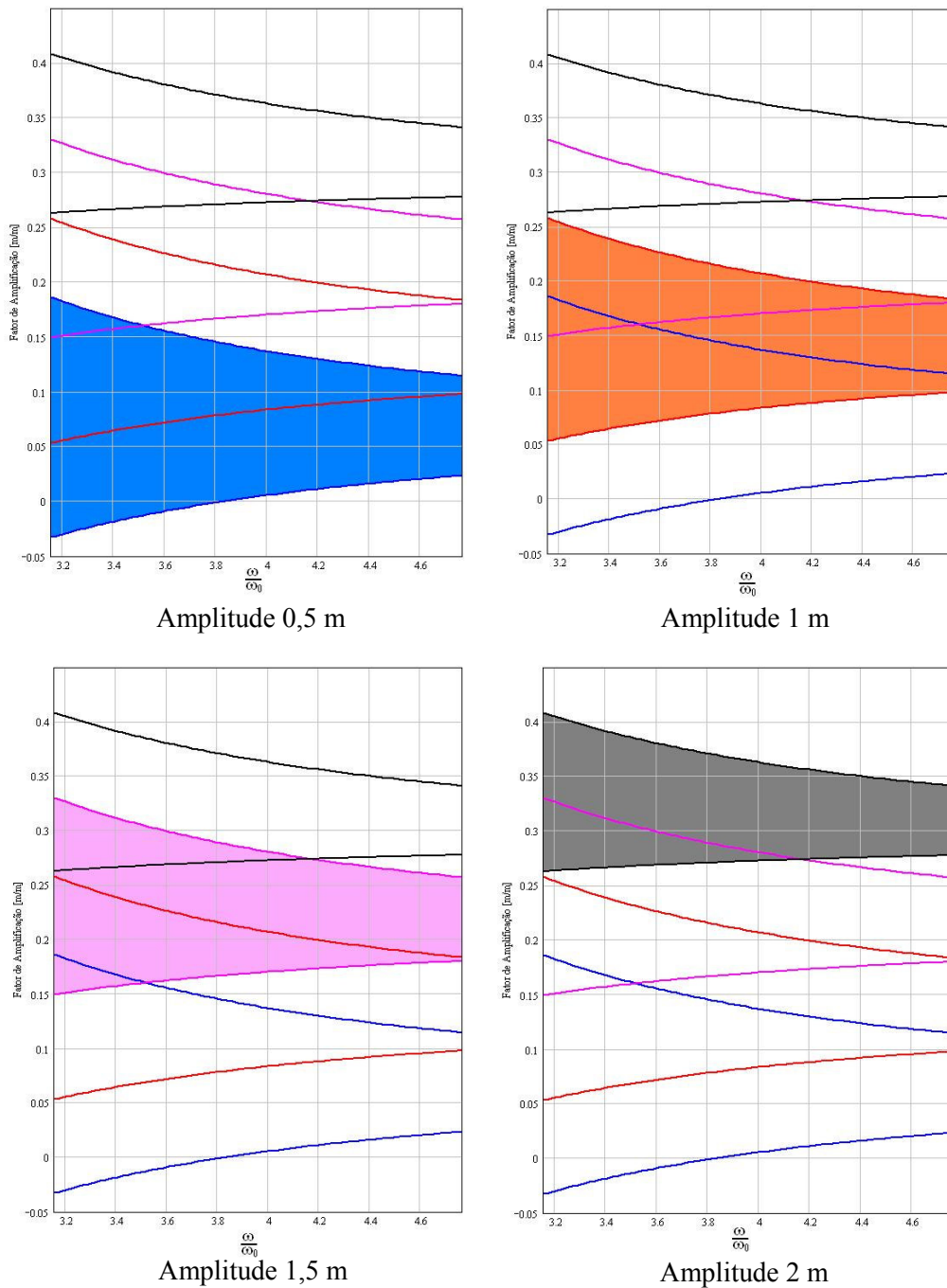


Figura 5.25 – Fatores de amplificação de movimento com foco nas respostas a diferentes amplitudes de excitação

As Figuras 5.26 a 5.28 mostram os retratos de fase para as condições de excitação com amplitudes fixas e várias frequências.



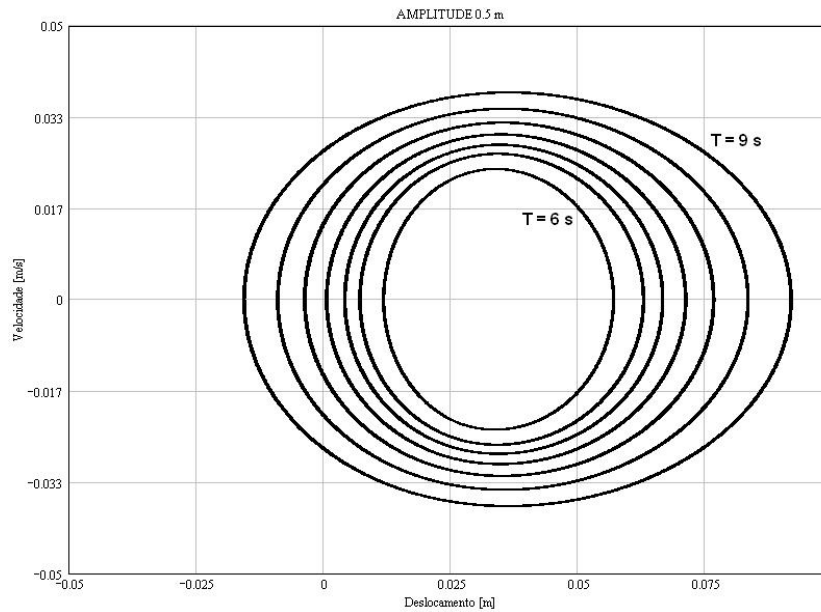


Figura 5.26 – Retratos de fase do movimento do módulo para amplitude de 0,5 m, períodos de excitação entre 6 e 9 s

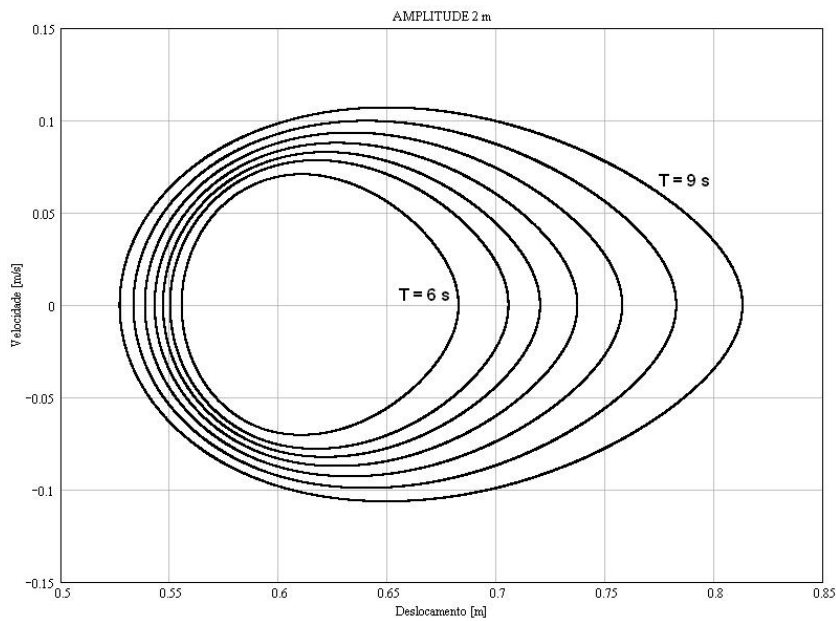


Figura 5.27 – Retratos de fase do movimento do módulo para amplitude de 2,0 m, períodos de excitação entre 6 e 9 s

Da análise dos gráficos acima se nota que para todas as condições avaliadas o movimento de resposta do módulo é periódico. Verifica-se que quanto maior a frequência de excitação menor a assimetria da resposta e menor o deslocamento total sofrido pelo módulo.

As Figuras 5.28 e 5.29 ilustram outros retratos de fase e mostram a influência da amplitude sobre a resposta, para períodos de excitação fixos. Estas figuras reforçam a afirmação de que a amplitude de excitação altera o deslocamento médio do movimento oscilatório do corpo.

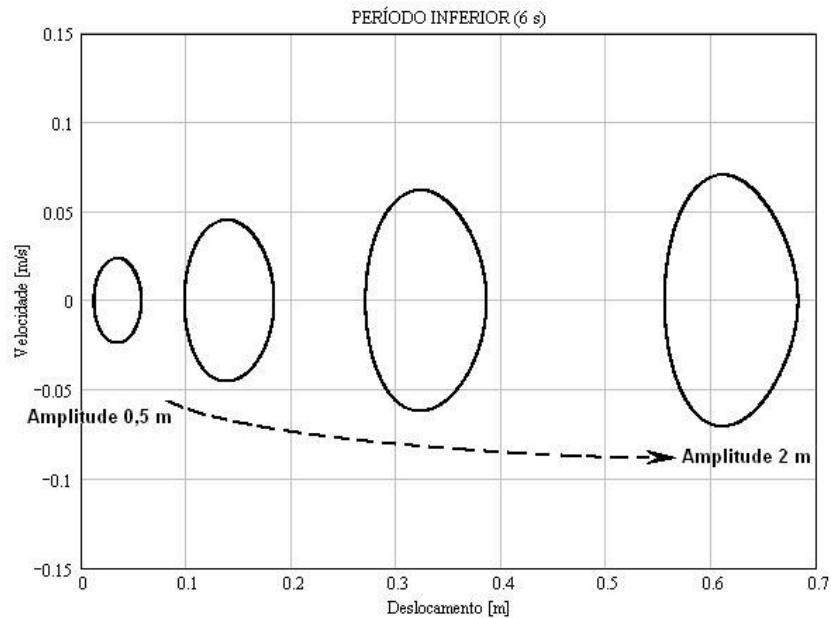


Figura 5.28 – Retrato de fase do movimento do módulo para excitações com período de 6 s e amplitudes de 0,5 a 2 m

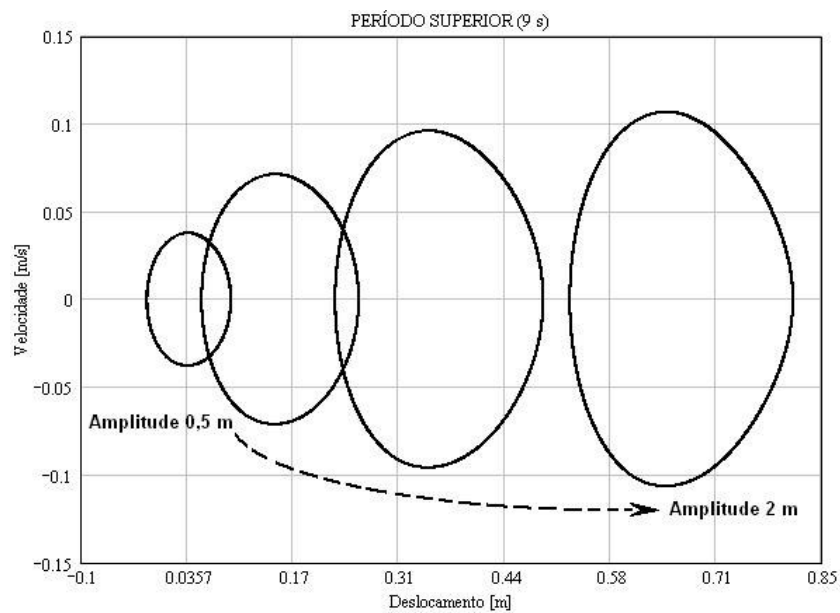


Figura 5.29 – Retrato de fase do movimento do módulo para excitação com período 9 s e amplitudes de 0,5 a 2 m

Dos resultados acima se conclui que o compensador não-linear apresenta excelente desempenho sob as condições de projeto. Resta agora testar sua robustez ao trabalhar em condições diferentes daquelas para as quais foi idealizado. Com este objetivo realizam-se análises sob condições de excitação mais amplas que as consideradas anteriormente, bem como se verifica o comportamento do sistema sob variação do coeficiente de arrasto do corpo.

#### *5.2.4.3 Análise de Sensibilidade do Compensador Submarino às Condições de Projeto*

Este tópico apresenta as respostas do sistema a condições de operação mais amplas que as consideradas anteriormente.

As análises foram executadas para profundidade fixa de 2500 *m* e consideraram:

- um intervalo de frequências de excitação entre 0 e 9 vezes a frequência natural linear do sistema;
- diversas amplitudes de excitação, com valores variando entre 0 e 3 *m*;
- coeficientes de arrasto entre 0,4 e 1,6; o que permite avaliar a sensibilidade da resposta ao amortecimento do sistema.

##### a) Estudo de sensibilidade do sistema em relação à amplitude de excitação

Estas análises permitem a verificação do desempenho do compensador sob condições muito mais amplas e severas de excitação, onde a frequência variou de 0 a 2 *rad/s* e a amplitude de 0 a 3 *m*. Os resultados obtidos para a amplitude do movimento de resposta do módulo estão condensados em dois gráficos (Figuras 5.29 e 5.31), o primeiro com a variação quase estática de frequência no sentido crescente e outro no sentido decrescente.

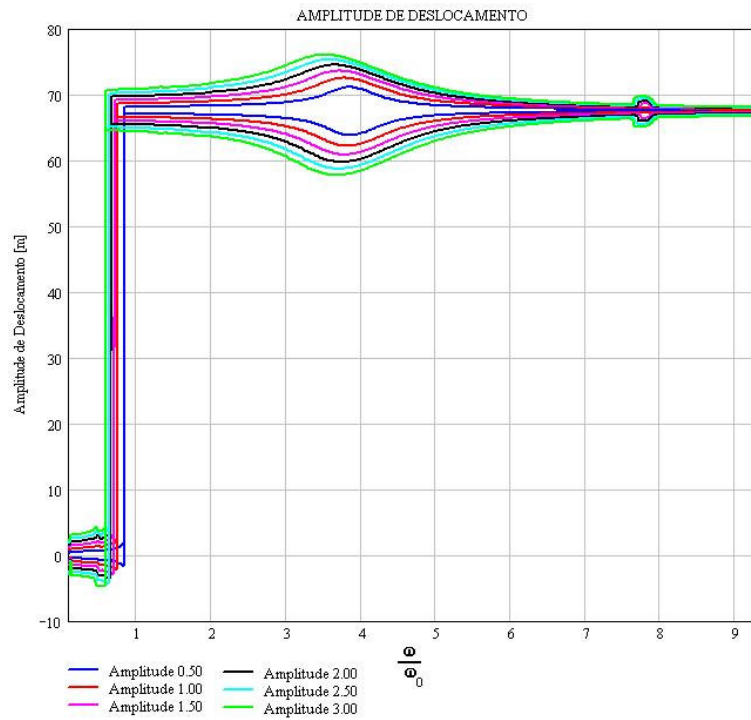


Figura 5.30 – Amplitude de resposta para inúmeras condições de excitação: variação crescente de frequência

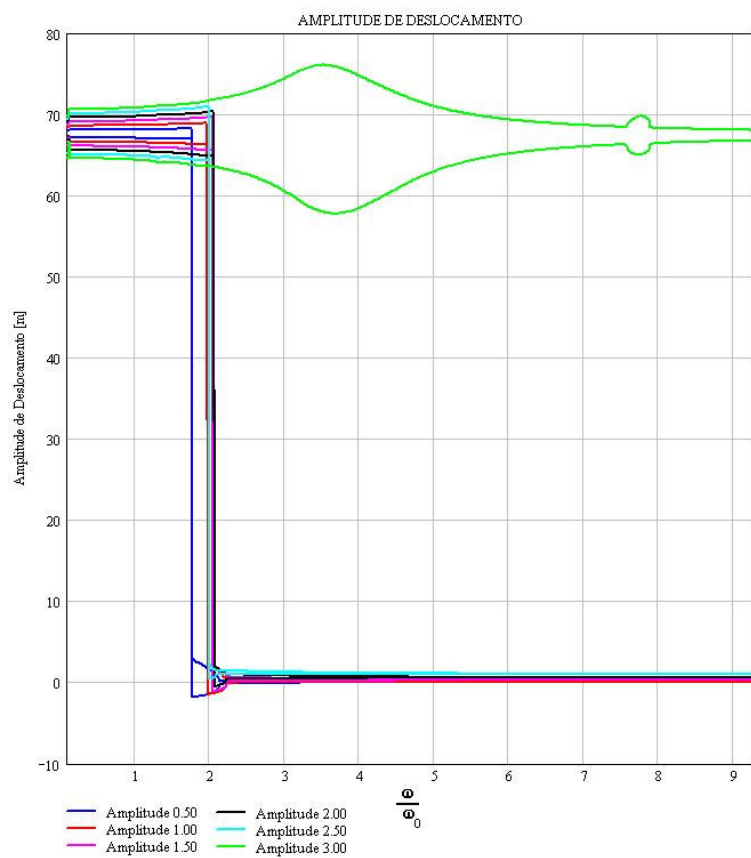


Figura 5.31 – Amplitude de resposta para inúmeras condições de excitação: variação decrescente de frequência

Na Figura 5.30 nota-se que ao se aproximar da ressonância principal o sistema começa a amplificar sua resposta, o que faz com que ele seja atraído para a segunda região de estabilidade (C). Em torno da nova posição de equilíbrio ele continua seu movimento oscilatório e passa pelas ressonâncias principal e sub-harmônica de ordem 2. Lembrar que na segunda região de estabilidade a rigidez linear é maior que na primeira, o que altera as frequências de ressonância também para valores maiores.

A Figura 5.31 mostra que, para amplitude de excitação menor ou igual a  $2,5 m$ , o sistema se comporta de maneira a atenuar sua resposta até próximo da condição de ressonância sub-harmônica. Ao chegar a este ponto as amplitudes de oscilação aumentam e o sistema passa a oscilar em torno de sua segunda região estável (C). Para amplitude de excitação de  $3 m$  o sistema tende a descrever seu movimento somente na segunda região de estabilidade, cuja bacia de atração é muito maior que a primeira (A).

Estas respostas ilustram a elevada dependência da mola não-linear às condições iniciais, reforçando a necessidade de definição de uma envoltória de dimensionamento robusta.

b) Estudo de sensibilidade do sistema em relação ao coeficiente de arrasto

As análises deste item proporcionam a avaliação da influência do amortecimento sobre a amplitude de resposta do sistema de instalação com compensador não-linear. Verificam-se os resultados para coeficientes de arrasto variando de 0,4 a 1,6, em condições de excitação com amplitude fixa  $2 m$  e frequência variando de 0 a  $2 rad/s$ . Os gráficos a seguir condensam os resultados de amplitude do movimento de resposta do módulo, onde a Figura 5.32 se refere à variação crescente de frequência e a Figura 5.33 à decrescente.

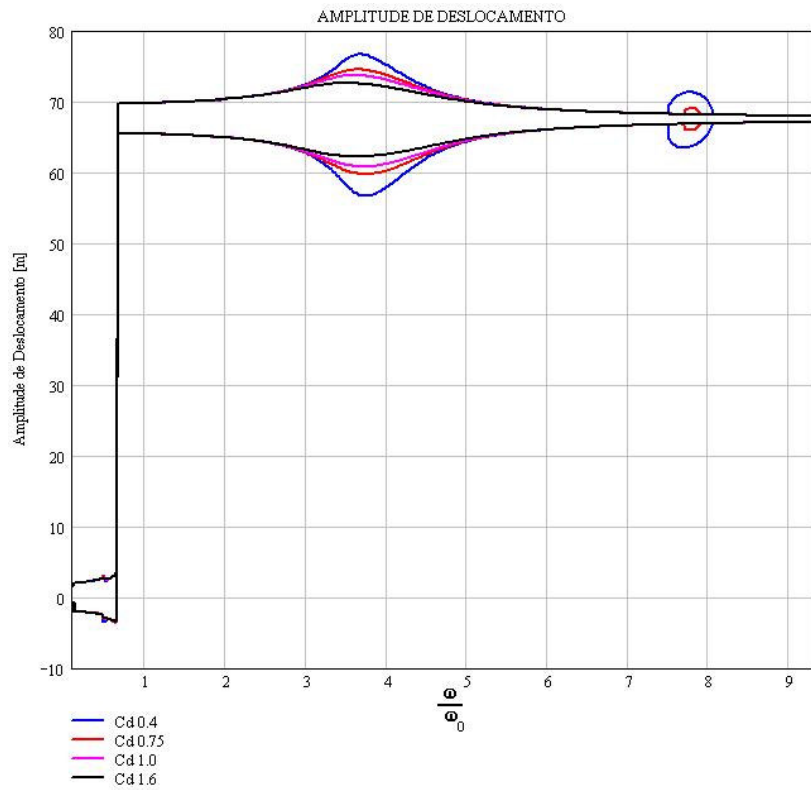


Figura 5.32 – Amplitude de resposta para inúmeros coeficientes de arrasto: variação crescente de frequência

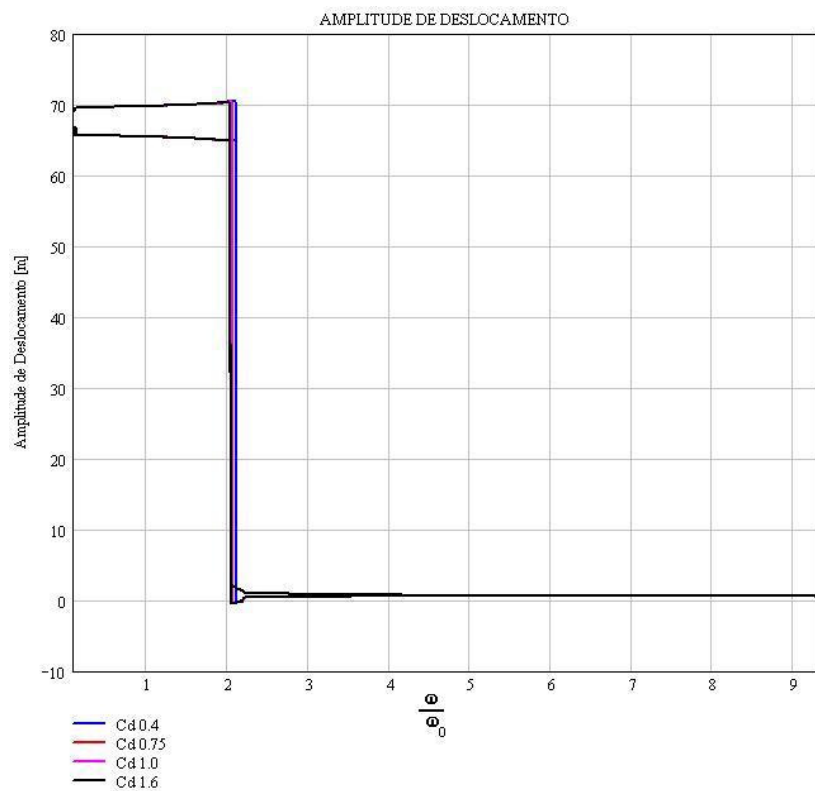


Figura 5.33 – Amplitude de resposta para inúmeros coeficientes de arrasto: variação decrescente de frequência

Os gráficos acima mostram que o coeficiente de arrasto pouco influencia as características do sistema quando em oscilação na de sua primeira região de equilíbrio (região no entorno de sua origem). Nota-se contudo que um maior amortecimento proporciona diminuição da amplitude de oscilação nos casos de ressonância principal e secundária na segunda região de estabilidade do sistema.

Como esperado, a Figura 5.34 mostra em detalhe que o coeficiente de arrasto praticamente não influencia a amplitude de resposta do sistema quando este opera sob suas condições de projeto. Nesta análise considerou-se excitação com amplitude fixa de 2 m e período variando entre 6 e 9 s.

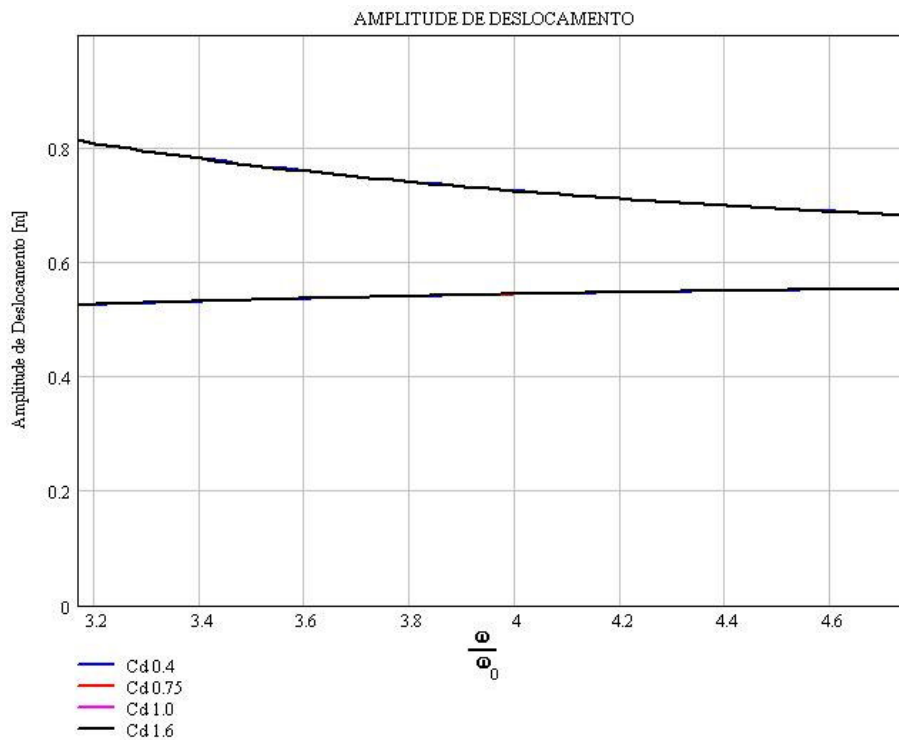


Figura 5.34 – Influência do coeficiente de arrasto sobre o sistema em sua envoltória de projeto

### 5.3 Dimensionamento de um Compensador Tipo Rhombus

Neste item busca-se dimensionar um dispositivo em que a mola não-linear é uma mola Rhombus. Para isto considera-se os valores dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  como

referência, visto que uma mola que apresente estas características possui bom desempenho na instalação de um módulo de *choke*.

Por meio das equações que aproximam a força de restauração da Rhombus por um polinômio de terceiro grau (ver APÊNDICE A) é possível relacionar as características construtivas do mecanismo com os valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ . Destas relações gera-se um sistema de equações não-lineares, cuja resposta traz os valores do comprimento das barras ( $L$ ), rigidez da mola linear ( $k$ ) e ângulo de montagem ( $\theta_0$ ) da mola Rhombus. A resolução deste sistema é custosa mesmo com a aplicação de métodos numéricos, contudo de forma aproximada obtém-se as seguintes características para o dispositivo:

- $L = 27,2 \text{ m}$ ;
- $k = 9130 \text{ N/m}$ ;
- $\theta_0 = 46,5^\circ$ .

De forma a averiguar dinamicamente a efetividade da aproximação da mola Rhombus por um polinômio de terceiro grau executou-se análises com oscilação forçada. O termo de excitação teve seus parâmetros (amplitude e frequência) variados dentro da envoltória de projeto e o resultado obtido foi o fator de amplificação do movimento vertical.

A comparação foi executada para LDA de  $0 \text{ m}$  e comprovou a validade da aproximação, como mostrado na Figura 5.35.



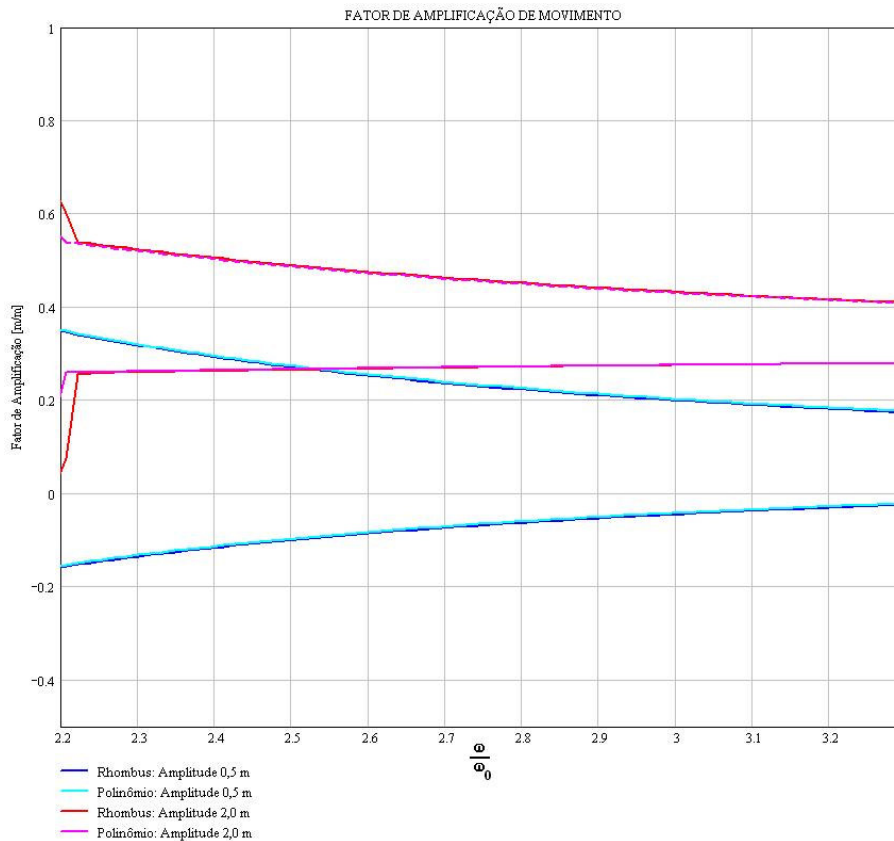


Figura 5.35 – Comparação entre os fatores de amplificação de movimento para análises dinâmicas com funções de restauração exata e aproximada para a Rhombus

Apesar de ter compensado o movimento do módulo de *choke*, a aplicação da mola Rhombus com as dimensões obtidas dificultaria a operação de instalação. Esta conclusão não condena a aplicação visto que a análise executada neste trabalho foi uma primeira abordagem à dinâmica de instalação com compensadores não-lineares.

A principal característica que levou o sistema a ter esta elevada dimensão foi a presença da ressonância sub-harmônica, que exigiu uma baixíssima rigidez ao sistema. A Figura 5.36 ilustra as forças de restauração da Rhombus a partir de sua própria posição de equilíbrio e em relação à posição que ela assume ao sustentar o módulo de *choke*.

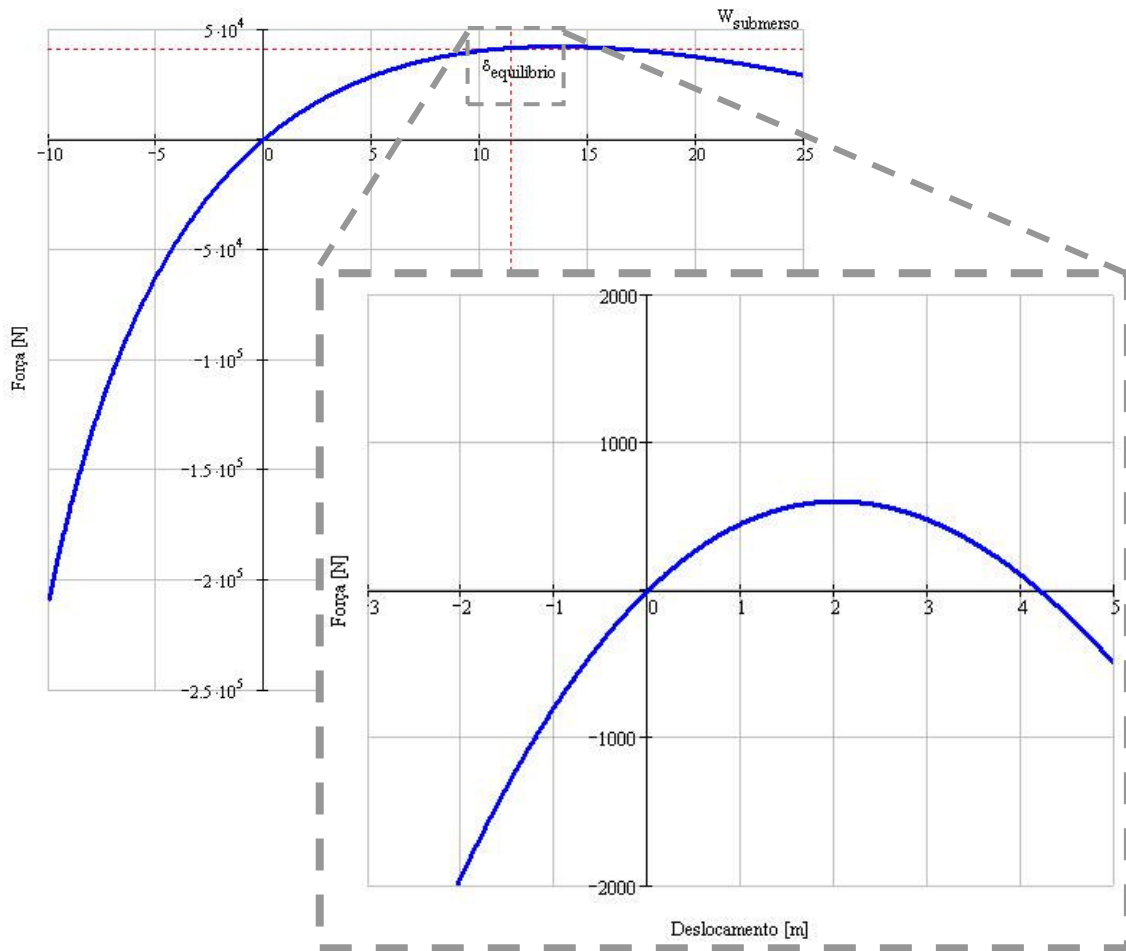


Figura 5.36 – Força de restauração da mola Rhombus

Ponto importante está relacionado ao fato de não se ter considerado a massa do dispositivo de compensação na dinâmica do sistema. Esta simplificação tem tendência de exigir rigidezes menores para que a atenuação seja alcançada, de forma que em estudos futuros esta influência deve ser considerada.

Por fim vale ressaltar que a mola Rhombus é apenas um dos dispositivos que apresentam características não-lineares, sendo que outras molas podem vir a apresentar dimensões menores quando utilizadas como compensadores passivos de *heave*.

## CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1 Discussão

A instalação de equipamentos submarinos por cabo tem aumentado consideravelmente nos últimos anos. Este método ganhou espaço no momento em que se tornou uma alternativa aos métodos tradicionais, que utilizavam sondas e faziam a descida do equipamento por coluna de trabalho (*riser*).

A instalação por cabo traz enormes ganhos de custo e tempo de operação, entretanto pode apresentar novas dificuldades ao processo, tais como: amplificação de movimento do equipamento a ser instalado e amplificação de carregamento sobre o elemento de instalação, neste caso o cabo.

De modo a atenuar os efeitos destes problemas dispositivos compensadores de movimento são utilizados. Diferentes concepções existem, variando de sistemas completamente ativos até os totalmente passivos.

Os sistemas passivos, foco deste trabalho, buscam a atenuação do movimento do equipamento apenas com as características inerentes à sua construção (rigidez e amortecimento), ou seja, não utilizam sistemas de controle em malha fechada ou atuadores com suprimento externo de energia, como fazem os compensadores ativos.

O objetivo principal deste estudo foi avaliar o uso de um novo conceito de sistema passivo de compensação, composto basicamente por um componente com rigidez não-linear. O conceito físico para o funcionamento do dispositivo se baseia na alteração da frequência natural do sistema de instalação de modo que ela fique com valor inferior à da excitação externa. Oscilando em frequências superiores à natural, espera-se que o corpo a ser instalado possua amplitude de resposta atenuada. A

mudança na frequência natural se dá pela introdução de uma baixa rigidez ao conjunto, o compensador submarino. A característica não-linear visa solucionar um impasse existente nas molas lineares em que uma baixa rigidez resulta em elevada deflexão. Esta característica, desejável ao sistema em oscilação, pode criar dificuldades de manuseio na embarcação, visto que o deslocamento da mola ao suportar o peso do equipamento a ser instalado poderia ser muito elevado.

Definido um caso base para estudo do comportamento deste compensador não-linear, diversas análises foram realizadas para averiguar a resposta do sistema com e sem este dispositivo. O item a seguir apresenta as conclusões obtidas com estas análises.

## **6.2 Conclusões**

No Capítulo 2 análises preliminares mostraram que para se obter atenuação do movimento de resposta durante a instalação de um módulo de *choke* (caso base) comprimentos elevados e não factíveis de cabo eram necessários. Por exemplo, para um cabo de 1,5 in de diâmetro são necessários mais que 8240 m de comprimento para se iniciar a atenuação. Neste mesmo capítulo concluiu-se que a utilização de uma mola linear em série com o cabo de instalação é impraticável, em função de sua elevada deflexão apenas para suportar estaticamente o peso do equipamento a ser instalado.

Com a proposição de utilização de molas não-lineares, análises foram executadas no Capítulo 5, considerando que a função de restauração do sistema pudesse ser expressa por um polinômio de terceiro grau. Com estas análises verificou-se que:

- O movimento de resposta do dispositivo é altamente dependente das condições iniciais da análise. Em função das características da excitação o sistema pode desenvolver oscilações em torno de duas regiões estáveis: uma na origem, dimensionada para compensar o movimento do corpo e outra no

segundo ponto de centro, onde a rigidez local é elevada e não propicia diminuição da amplitude de oscilação. Em termos práticos esta segunda região corresponderia a uma mola Rhombus invertida (ver Figura 2.14);

- Em função das características do sistema há a ocorrência de ressonância sub-harmônica de ordem 2. Este resultado causou grande impacto no dimensionamento da mola não-linear pois exigiu que a parcela referente à rigidez linear deste componente, na região de trabalho, tivesse de apresentar valor muito abaixo do esperado no início do trabalho;
- A análise dos resultados em função da lâmina d'água mostrou que este parâmetro apresenta baixa influência sobre o limite inferior do fator de amplificação de movimento do módulo. Contudo, para o limite superior do mesmo resultado, a influência é considerável e não pode ser desprezada;
- Análises considerando uma lâmina d'água de 2500 m, por meio dos resultados em função da frequência, mostraram a necessidade de definição robusta para as condições de projeto do componente não-linear. A seleção incorreta de valores pode levar o sistema a trabalhar em região de estabilidade diferente da projetada;
- As mesmas análises na profundidade de 2500 m evidenciaram que quanto maior a amplitude de excitação, maior o valor médio do fator de amplificação do movimento do módulo submarino;
- Os resultados em função da frequência de excitação, para vários valores de coeficiente de arrasto do módulo, mostraram que este parâmetro exerce pouca influência na resposta na região de trabalho. Ele altera os resultados apenas na segunda região de estabilidade, onde tende a diminuir a amplitude de oscilação próximo às ressonâncias principal e secundária;

- Ao se considerar uma mola Rhombus como compensador de *heave* verificou-se que a aproximação de sua função de restauração por um polinômio de terceiro grau é válida. Viu-se também que, para as condições consideradas na instalação do módulo de *choke* e desprezando sua massa, o dispositivo tende a apresentar elevadas dimensões. Esta característica dificulta sua aplicação prática em sistemas de instalação, contudo, não condena o conceito, que deve ser avaliado em estudos futuros.

### **6.3 Recomendações para Trabalhos Futuros**

Como conclusão final do trabalho viu-se que o conceito de compensador submarino com rigidez não-linear, em função de seu desempenho, possui grande potencial de utilização nos processos de instalação de módulos submarinos. Entretanto, de modo a viabilizar sua aplicação prática, estudos ainda devem ser feitos com os objetivos de:

- obtenção de molas não-lineares com dimensões que facilitem a operação *offshore*;
- avaliação das simplificações utilizadas na geração do modelo estudado neste trabalho.

Neste sentido propõe-se que trabalhos futuros abordem também outras concepções de molas e dispositivos não-lineares e avaliem a influência da condição de excitação sobre seus desempenhos. Estudos sobre as bacias de atração do sistema excitado externamente, por exemplo, podem contribuir com a definição dos limites operacionais do dispositivo.

Recomenda-se também a análise da introdução de um componente amortecedor no compensador submarino, verificando sua influência na resposta próxima às regiões

de ressonância principal e sub-harmônica.

Por fim, estudos que utilizem modelos com maior número de graus de liberdade permitem a avaliação da ação de outros parâmetros sobre a resposta do sistema, tais como correnteza e movimento horizontal da embarcação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANÔNIMO, *International Standard ISO 13628-1: Petroleum and Natural Gas Industries - Design and Operation of Subsea Production Systems – Part 1: General Requirements and Recommendations*, 2nd ed., International Organization for Standardization – ISO, 2005.
- [2] GARCIA, J.E., FIGUEIREDO, M.W., *Árvore de Natal Molhada*, Apostila, Macaé-RJ, 2002.
- [3] RIBEIRO, L.P., PAULO, C.A.S., NETO, E.A., "Campos Basin – Subsea Equipment: Evolution and Next Steps", *Offshore Technology Conference*, OTC 15223, Houston, Texas, USA, 5-8 May 2003.
- [4] SILVA JUNIOR, G.J.R., *Métodos Alternativos para Instalação de Módulos Submarinos Recuperáveis em Águas Ultraprofundas*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [5] CERQUEIRA, M.B., *Manifold Submarino*, Apostila, Rio de Janeiro, 2003.
- [6] PAULO, C.A.S., *Metodologia para Seleção de Manifolds Submarinos Baseada em Custo do Ciclo de Vida*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [7] STOCK, P.F.K., CERQUEIRA, M.B., ROVERI, F.E., "A New Method for Deploying Subsea Hardware in Deep Water", *Deep Offshore Technology*, New Orleans, November, 2002.
- [8] MOREIRA, J.R., VIEGAS, A.F., "Guidelineless Completions Offshore Brazil", *Offshore Technology Conference*, OTC 5975, Houston, Texas, USA, May 1989.



- [9] NAGLE, F.J.M., MOREIRA, J.R.F, CERQUEIRA, M.B., “Prototype Testing of an Innovative Diverless Guidelineless Flowline Connection System”, *Deep Offshore Technology*, pp. 97-112, Rio de Janeiro, Brasil, 30 Oct- 1 Nov., 1995.
- [10] MOREIRA, J.R., CERQUEIRA, M.B., SILVA, G.J.R., et al., “Further Advances in Deepwater Flowline Connection Technology”, *Offshore Technology Conference*, OTC 8239, Houston, Texas, USA, May 1996.
- [11] LALLIER, E.B., ROSS, C.L., DAVIS, C.I., "Protective Deployment of Subsea Equipment", *Offshore Technology Conference*, OTC 15089, Houston, Texas, USA, 5-8 May 2003.
- [12] MORRISON, D.G., SWANSON, R.C., PRITCHARD, J.J., “Dynamics of Novel Heave-Compensated Deepwater Intervention System”, *Offshore Mechanics and Artic Engineering Conference*, Florence, Italy, 1996.
- [13] CERQUEIRA, M.B., FERNANDES, A.C., SPHAIER, S.H., “Parametric Study of Intervention System in Ultra-deepwater up to 3000 m Using Passive Heave Compensation”, *International Society of Offshore and Polar Engineers Conference*, Seattle, USA, 28 May - 2 Jun 2000.
- [14] CERQUEIRA, M.B., *Instalação de Equipamentos Submarinos por meio de Suspensores Flexíveis*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998.
- [15] CERQUEIRA, M.B., SPHAIER, S.H., FERNANDES, A.C., “Parametric Study of Subsea Suspended Cables in 2500 m Water Depth”, *Offshore Mechanics and Artic Engineering Conference*, OMAE, 1998.

- [16] HOLLEY, M.H., ABENDSCHEIN, R.D., “Independence Project Overview – A Producer’s Perspective”, *Offshore Technology Conference*, OTC 18721, Houston, Texas, USA, 30 Apr - 3 May 2007.
- [17] CERQUEIRA, M.B., *Comunicação Pessoal*, 2005.
- [18] SCHNORR CORPORATION, *Handbook for Disc Springs*, German, 2003.
- [19] STROGATZ, S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1 ed., Cambridge, Massachusetts, Westview Press, 2000.
- [20] RAO, S.S., *Mechanical Vibrations*, 3 ed., Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [21] NAYFEH, A.H., MOOK, D.T., *Nonlinear Oscillations*, ed. de 1995, German, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [22] SAVI, M.A., "Caos em Sistemas Mecânicos". In: *Anais do I Congresso em Dinâmica, Controle e Aplicações*, Vol. 1, pp. 1-29, São José do Rio Preto, SP, Brasil, 2002.
- [23] SOUZA JUNIOR, J.A.R., *Geometrical Methods of Nonlinear Dynamics in Ship Capsize*, Ph.D. Thesis, University College London, London, England, 1995.
- [24] MINORSKY, N., *Nonlinear Oscillations*, 1 ed., Malabar, Florida, Robert Krieger Publishing Company, 1987 (reimpressão da 1 ed. 1962).
- [25] KREYSZIG, E., *Advanced Engineering Mathematics*, 8 ed., New York, John Wiley & Sons, 1999.
- [26] SAVI, M.A., *Dinâmica Não-linear e Caos*, 1 ed., Rio de Janeiro, E-papers, 2006.
- [27] SEYDEL, R., *Practical Bifurcation and Stability Analysis – From Equilibrium to Chaos*, 2 ed., New York, Springer-Verlag, 1994.
- [28] NAYFEH, A.H., *Perturbation Methods*, 1 ed., Blacksburg, Virginia, John Wiley & Sons, 1973.

- [29] CHAPRA, S.C., CANALE, R.P., *Numerical Methods for Engineers*, 2 ed., USA, McGraw-Hill, 1988.
- [30] ANÔNIMO, “Runge-Kutta-Fehlberg Method for O.D.E.s”, página da *internet*:  
<http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/RungeKuttaFehlbergMod.html>,  
acessado em 28 de julho de 2007.
- [31] ROVERI, F.E., *Especificação Técnica para Análise de Instalação do PLEM de Golfinho*, PETROBRAS RT TS 033/2005, 2005.

## APÊNDICE A: A MOLA RHOMBUS

A mola Rhombus é um quadro composto por quatro barras articuladas em que dois vértices opostos são ligados por uma mola, um terceiro é fixo e o último é interligado a uma carga externa, como mostra a Figura A.1.

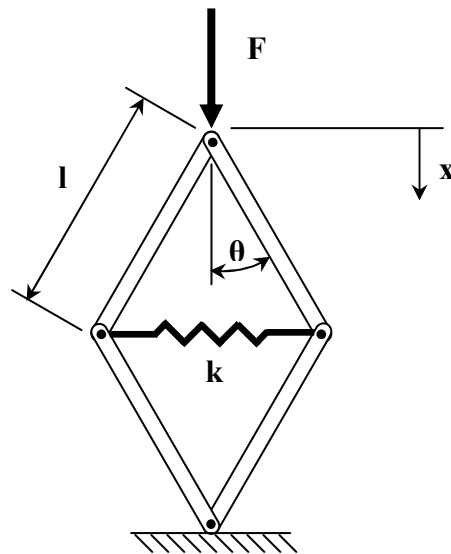


Figura A.1 – Mola Rhombus

### A.1. A Função de Restauração da Mola Rhombus

Desconsiderando o peso próprio do sistema e admitindo que o ângulo de montagem do conjunto é  $\theta_0$ , pode-se definir que o deslocamento da mola é bem representado pela Equação A.1.

$$x(\theta) = 2L(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (\text{A.1})$$

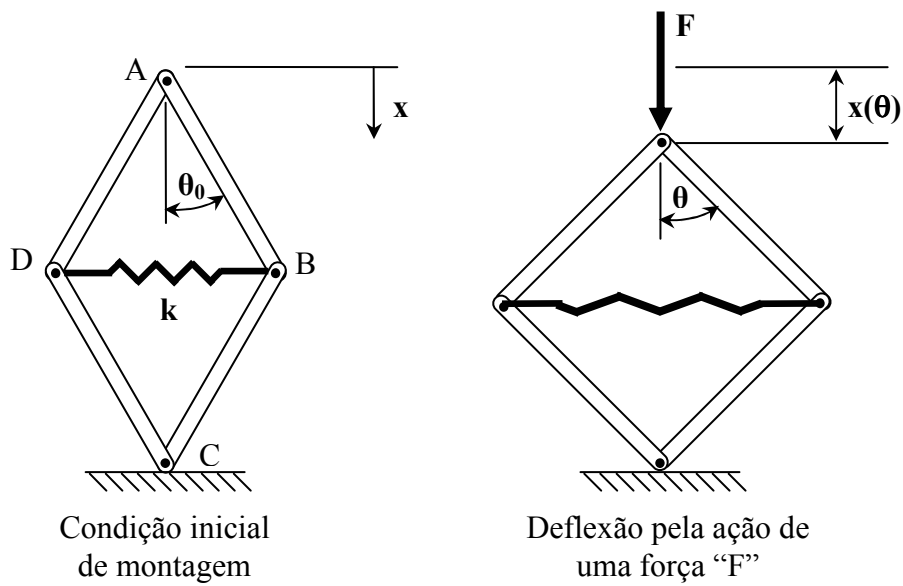


Figura A.2 – Deflexão da mola Rhombus sob ação de uma força externa

Construindo os diagramas de corpo livre (DCL's) do sistema da Figura A.2, com foco em suas articulações tem-se a Figura A.3.

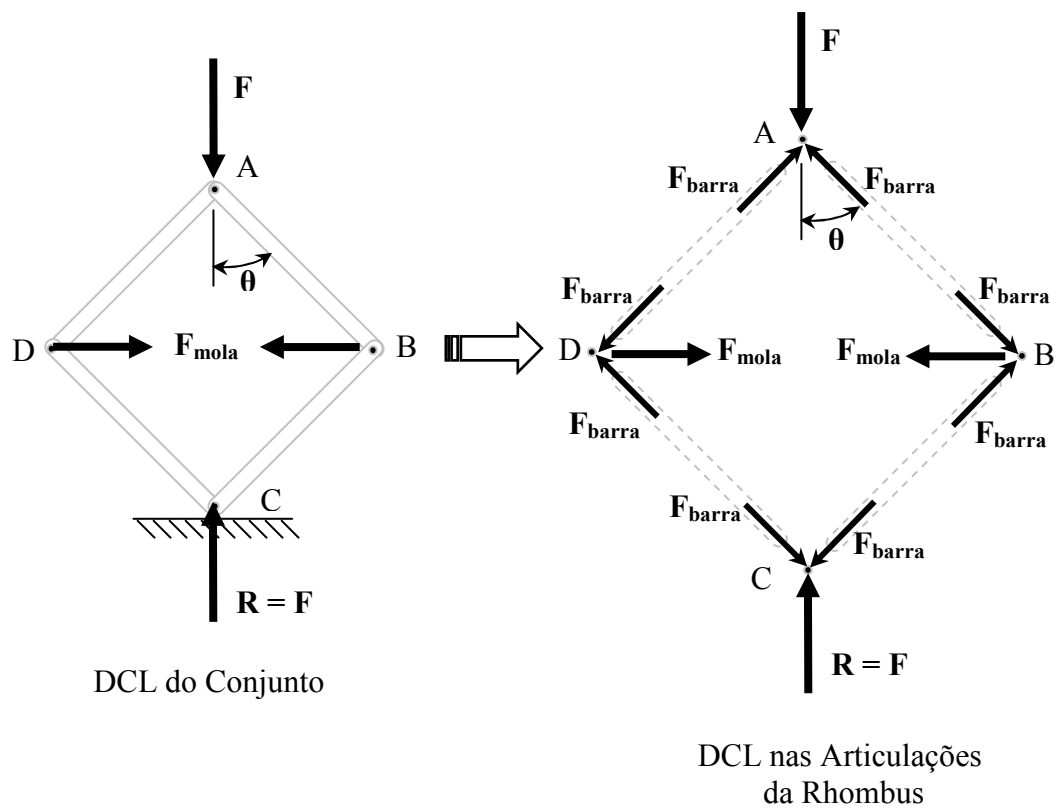


Figura A.3 – Diagramas de corpo livre da mola Rhombus

Dos diagramas é possível retirar as relações das Equações A.2 e A.3:

$$F(\theta) = 2 \cdot F_{barra} \cdot \cos \theta \quad (A.2)$$

$$F_{barra} = \frac{F_{mola}}{2 \cdot \text{sen} \theta} \quad (A.3)$$

Rearranjando, obtém-se uma função para a força de restauração em função do ângulo da mola Rhombus, como mostrado na Equação A.4.

$$F(\theta) = \frac{F_{mola}}{\text{tg} \theta} \quad (A.4)$$

Admitindo que o comportamento da mola utilizada na montagem da Rhombus é linear, chega-se à Equação A.5.

$$F_{mola} = k \cdot \Delta L_{mola} = 2 \cdot k \cdot L \cdot (\text{sen} \theta - \text{sen} \theta_0) \quad (A.5)$$

Tem-se então que:

$$F(\theta) = \frac{2 \cdot k \cdot L \cdot (\text{sen} \theta - \text{sen} \theta_0)}{\text{tg} \theta} \quad (A.6)$$

Colocando a força como uma função da deflexão da Rhombus ao invés de seu ângulo, após manipulações matemáticas chega-se à Equação A.7, que expressa a força de restauração.

$$F(x) = k \cdot (2 \cdot L \cdot \cos \theta_0 - x) \cdot \left[ 1 - \frac{\text{sen} \theta_0}{\sqrt{1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{x}{2L} \right)^2}} \right] \quad (A.7)$$

Assumindo alguns valores para os parâmetros construtivos do sistema (k, L e  $\theta_0$ ) pode-se construir um gráfico para a força de restauração proporcionada pela Rhombus. A Figura A.4 ilustra um caso para  $\theta_0 = 35^\circ$ ,  $L = 2.5 \text{ m}$  e  $k = 60000 \text{ N/m}$ .

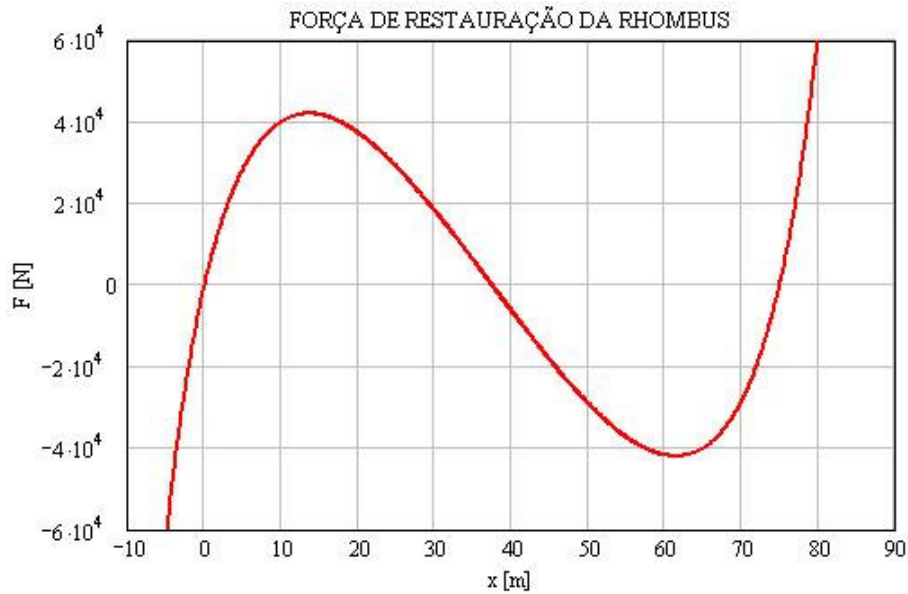


Figura A.4 – Exemplo da força de restauração de uma mola Rhombus ( $L = 27,2 \text{ m}$ ,  $k = 9130 \text{ N/m}$  e  $\theta_0 = 46,5^\circ$ )

A Figura A.4 mostra que para deslocamentos positivos no entorno da origem a mola Rhombus possui comportamento regressivo, enquanto deslocamentos no sentido oposto resultam em forças de restauração com característica progressiva.

### A.1.1. Considerações sobre a Rigidez do Sistema

Dado que a rigidez pode ser expressa como a derivada da força de restauração em relação ao deslocamento, pode-se obter uma função para esta característica da mola Rhombus.

Sabendo que a derivada da função de restauração da Rhombus é expressa pela Equação A.8.

$$k_{Rhombus} = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ k \cdot (2 \cdot L \cdot \cos \theta_0 - x) \cdot \left[ 1 - \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{x}{2L} \right)^2}} \right] \right] \quad (A.8)$$

A rigidez pode ser definida pela Equação A.9.

$$k_{Rhombus} = -k \cdot \left[ 1 - \frac{\sin \theta_0}{\left( \sqrt{1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{x}{2L} \right)^2} \right)^3} \right] \quad (A.9)$$

A Figura A.5 apresenta o gráfico de rigidez para uma mola Rhombus construída com as características do exemplo anterior.

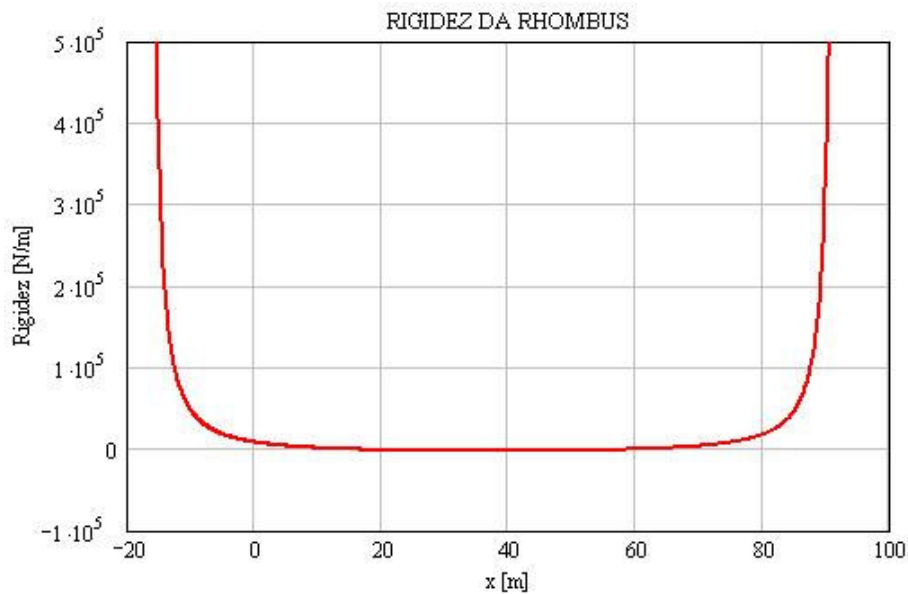


Figura A.5 – Exemplo da curva de rigidez de uma mola Rhombus ( $L = 27,2 \text{ m}$ ,  $k = 9130 \text{ N/m}$  e  $\theta_0 = 46,5^\circ$ )

### A.1.2. Considerações sobre o Ponto de Máxima Força do Sistema

Como se tem uma função explícita para a força de restauração da mola Rhombus, o cálculo do valor máximo desta função é feito ao se igualar sua primeira derivada a zero, colocando como condição adicional que a derivada segunda deve ser negativa.

Sabendo que a derivada da função da força de restauração é a própria rigidez do sistema, ao igualar sua expressão a zero pode-se chegar à Equação A.10.



$$x_{\max,\min} = 2 \cdot L \cdot \left[ \cos \theta_0 \pm \sqrt{1 - (\sin \theta_0)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (\text{A.10})$$

Impondo a condição da derivada segunda ser negativa, define-se que o deslocamento que leva à máxima força de restauração pode ser calculado pela Equação A.11.

$$x_{\max} = 2 \cdot L \cdot \left[ \cos \theta_0 - \sqrt{1 - (\sin \theta_0)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (\text{A.11})$$

A Equação A.11 mostra que o valor de deslocamento que leva uma mola Rhombus à sua maior força de restauração independe da rigidez da mola utilizada na construção do dispositivo; contudo, como será mostrado abaixo, o valor da força neste ponto é altamente dependente deste parâmetro.

Substituindo a expressão de  $x_{\max}$  na equação da força de restauração tem-se a força máxima como mostrado na Equação A.12.

$$F_{\max} = 2 \cdot k \cdot L \cdot \left[ 1 - (\sin \theta_0)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.12})$$

## **A.2. A Função de Restauração a Partir do Equilíbrio para a Rhombus Sustentando um Corpo de Massa “M”**

Ao se colocar uma mola não-linear, como a Rhombus, suportando um corpo de massa “M”, verifica-se que em torno do ponto de equilíbrio a rigidez do sistema não é idêntica àquela da mola isolada. Esta característica não pode ser desprezada ao se analisar um sistema massa-mola-amortecedor com rigidez não-linear. Por este motivo será desenvolvida abaixo a formulação da força de restauração de uma mola Rhombus a partir da posição de equilíbrio que ela assume ao suportar um corpo.

A determinação do deslocamento sofrido pela mola ao ser conectada ao corpo se dá pela resolução da Equação A.13:

$$k \cdot (2 \cdot L \cdot \cos \theta_0 - x) \cdot \left[ 1 - \frac{\text{sen} \theta_0}{\sqrt{1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{x}{2L} \right)^2}} \right] = W_{\text{corpo}} \quad (\text{A.13})$$

onde,  $W_{\text{corpo}}$  corresponde ao peso do corpo e  $\delta_{\text{eq}}$  o deslocamento da mola para atingir o equilíbrio.

Vale ressaltar que em função do valor do peso do corpo uma, duas ou três posições de equilíbrio estático podem existir. Como se objetiva um trabalho em região com baixa rigidez e em torno de uma posição que tenha estabilidade dinâmica o ponto selecionado corresponde àquele que possui deslocamento menor que  $x_{\text{max}}$  (ver Figura A.6).

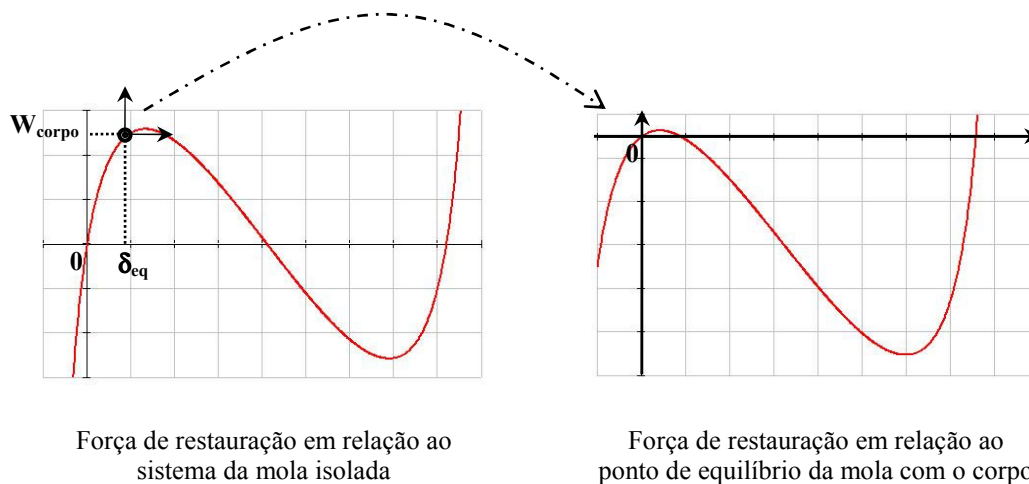


Figura A.6 – Comportamento da mola Rhombus ao suportar um corpo

Transladando a origem do sistema de coordenadas para este ponto, por meio das Equações A.14 e A.15.

$$\underline{x} = x - \delta_{eq} \quad (A.14)$$

$$\underline{F}(\underline{x}) = F - W_{corpo} \quad (A.15)$$

Substituindo estas relações na Equação A.7 tem-se a Equação A.16, que descreve a força de restauração em relação à posição de equilíbrio.

$$\underline{F}(\underline{x}) = k \cdot \left( 2 \cdot L \cdot \cos \theta_0 - \underline{x} - \delta_{eq} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{\text{sen} \theta_0}{\sqrt{1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\underline{x} + \delta_{eq}}{2L} \right)^2}} \right] - W_{corpo} \quad (A.16)$$

E para esta nova situação a rigidez é expressa pela Equação A.17.

$$k_{R\text{hombus}}(\underline{x}) = -k \cdot \left\{ 1 - \frac{\text{sen} \theta_0}{\left[ \sqrt{1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\underline{x} + \delta_{eq}}{2L} \right)^2} \right]^3} \right\} \quad (A.17)$$

Por fim, no ponto de máximo o valor de deslocamento e força são definidos pelas Equações A.18 e A.19.

$$\underline{x}_{\max} = 2 \cdot L \cdot \left[ \cos \theta_0 - \sqrt{1 - (\text{sen} \theta_0)^{\frac{2}{3}}} \right] - \delta_{eq} \quad (A.18)$$

$$\underline{F}_{\max} = 2 \cdot k \cdot L \cdot \left[ 1 - (\text{sen} \theta_0)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} - W_{corpo} \quad (A.19)$$

Ao analisar a curva da força de restauração observa-se que as principais características de sua geometria podem ser representadas de forma aproximada por um polinômio de terceiro grau. No item a seguir são calculados os coeficientes para o polinômio que aproxima a função da força de restauração do sistema.

### A.3. Aproximação da Função de Restauração por um Polinômio de Terceiro Grau

Neste tópico utiliza-se a fórmula de Taylor para o desenvolvimento da força de restauração em uma série de potências.

Esta fórmula diz que uma função analítica pode ser representada pela seguinte série (Equação A.20):

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} \cdot \frac{df(z_0)}{dz} + \frac{(z - z_0)^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f(z_0)}{dz^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} \cdot \frac{d^n f(z_0)}{dz^n} + R_n(z) \quad (\text{A.20})$$

onde  $z$  é a variável independente,  $z_0$  é o centro da expansão e  $R$  contempla os termos restantes da aproximação.

Aplicando a fórmula de Taylor ao caso em estudo e expandindo a função da Equação A.16 em torno da origem até o terceiro grau, tem-se os termos mostrados nas Equações A.21 a A.24.

$$f(z_0) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{z - z_0}{1!} \cdot \frac{df(z_0)}{dz} = -k \left\{ 1 - \frac{\text{sen } \theta_0}{\left[ 1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \cdot z \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{(z - z_0)^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f(z_0)}{dz^2} = -\frac{3 \cdot k \cdot \text{sen } \theta_0}{4 \cdot L} \left\{ \frac{\left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)}{\left[ 1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} \right\} \cdot z^2 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{(z - z_0)^3}{3!} \cdot \frac{d^3 f(z_0)}{dz^3} = \frac{3 \cdot k \cdot \text{sen} \theta_0}{4 \cdot L^2} \left\{ \frac{1 + 4 \cdot \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2}{\left[ 1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \right\} \cdot z^3 \quad (\text{A.24})$$

Assim, a força de restauração da mola em torno do ponto de equilíbrio pode ser escrita como mostrado na Equação A.25.

$$\begin{aligned} \underline{F}(x) = & -k \left\{ 1 - \frac{\text{sen} \theta_0}{\left[ 1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \cdot \underline{x} + \\ & + \frac{-3 \cdot k \cdot \text{sen} \theta_0}{4 \cdot L} \left\{ \frac{\left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)}{\left[ 1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} \right\} \cdot \underline{x}^2 + \\ & + \frac{3 \cdot k \cdot \text{sen} \theta_0}{4 \cdot L^2} \left\{ \frac{1 + 4 \cdot \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2}{\left[ 1 - \left( \cos \theta_0 - \frac{\delta_{eq}}{2L} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \right\} \cdot \underline{x}^3 + R_4(x) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A Figura A.7 mostra que para a região de interesse nas análises não-lineares a mola Rhombus é bem representada pela série de potências até o termo de terceiro grau.

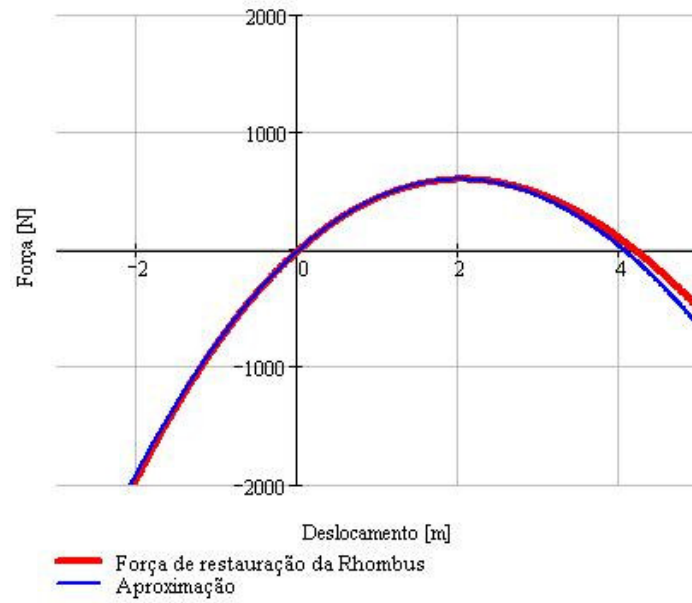


Figura A.7 – Aproximação da força de restauração da mola Rhombus ( $L = 27,2 \text{ m}$ ,  $k = 9130 \text{ N/m}$ ,  $\theta_0 = 46,5^\circ$  e  $W_{\text{corpo}} = 4220 \text{ kgf}$ )

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)