

MODELO DE CONTROLADOR LQG/LTR COM FILTRO DE KALMAN  
COM DINÂMICA AUMENTADA APLICADO A SISTEMAS DE  
POSICIONAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS OCEÂNICAS

Márcio Domingues Maia Júnior

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA OCEÂNICA.

Aprovada por:

---

Prof. Antonio Carlos Fernandes, Ph. D.

---

Prof. Carlos Antonio Levi da Conceição, Ph. D.

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D. Sc.

---

Dr. Mauro Costa de Oliveira, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MAIA, MÁRCIO DOMIGUES JR.

Modelo De Controlador LQG/LTR  
com Filtro de Kalman com Dinâmica  
Aumentada aplicado a Sistemas de  
Posicionamento Dinâmico de Estruturas  
Oceânicas [Rio de Janeiro] 2007

IX, 247 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
MSc, Engenharia Oceânica, 2007)

Dissertação – Universidade Federal  
do Rio de Janeiro, COPPE

1. Ancoragem Assistida por Propulsores
2. Controle Robusto de Sistemas Multi-  
variáveis
3. Valores Singulares

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

## DEDICATÓRIA

Dedico esta obra ao meu pai, Márcio Domingues Maia, que me deu toda estrutura e apoio que necessitava, nas horas certas e até nas inesperadas. Pessoa de grande sabedoria, que trouxe forças para mim em todos os momentos, inclusive os mais difíceis.

Preciso mais uma vez dizer o quanto sou grato a este homem que foi meu mentor, que me ajudou durante toda minha vida, que planejou meu futuro, mas que no momento em que maior regozijo teria ao ver os frutos que seu apoio fomentou, faleceu.

Assim, me sinto muito honrado em dizer com muito carinho e amor: “Esta obra é sua meu Pai. Descanse com Deus”.

Muito amor, carinho e saudades.

Seu filho.

## AGRADECIMENTOS

Sobre tudo gostaria de agradecer a Deus que esteve ao meu lado me possibilitando finalizar mais uma jornada, entre tantas outras que me acompanha.

Gostaria de agradecer a minha esposa, Shirley, por todo apoio dedicado a mim e amor, sem os quais qualquer trilha se torna mais longa do que deveria.

Aos meus filhos, por aceitarem e entenderem muitas vezes a minha ausência sem jamais esquecerem que sou seu pai.

A minha mãe e irmã, pois sempre estiveram ao meu lado nessa longa jornada que é a vida.

Agradeço, também, ao meu professor e orientador, Antonio Carlos Fernandes, pessoa com a qual pude sempre contar, de forma objetiva sempre me direcionou aos melhores caminhos da aprendizagem.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao professor e amigo Alexandre Alves Santiago, pessoa e profissional de alto valor, com quem sempre pude contar para me ajudar no galgar das etapas necessárias a novos limites de conhecimentos utilizados nesta Tese, e por que não dizer, de minha vida.

Sem dúvida são inúmeras as pessoas que devemos agradecer pelas nossas conquistas, em geral nenhuma é fruto unicamente de você, assim, antes de esquecer-se de alguém, gostaria de agradecer a todos que de algum modo cooperaram com o desenvolver deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

MODELO DE CONTROLADOR LQG/LTR COM FILTRO DE KALMAN  
COM DINÂMICA AUMENTADA APLICADO A SISTEMAS DE  
POSICIONAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS OCEÂNICAS

Márcio Domingues Maia Júnior

Junho/2007

Orientador: Antonio Carlos Fernandes

Programa: Engenharia Oceânica

Neste trabalho é apresentado o método de controle Linear Quadratic Gaussian – Loop Transfer Recovery (LQG – LTR) aplicado ao Posicionamento Dinâmico de Estruturas Oceânicas utilizando o Filtro de Kalman com Dinâmica Aumentada para a estima de movimentos de alta frequência.

A metodologia aqui apresentada se aplica tanto a estruturas livres, tal qual ocorre com Shuttle Tankers em operações de Offloading, como também a estruturas ancoradas, em uma configuração assistida por DP System (Ancoragem Assistida).

Tal estudo concentra-se em Sistemas com Ancoragem Assistida por DP que é caracterizado por alto nível de acoplamento entre os graus de liberdade do sistema devido à suposição de amarração assimétrica em “Spread Mooring”, gerando assim todos os termos fora da diagonal principal na matriz de restauração de ancoragem.

É importante ressaltar que esta metodologia desponta como importante opção na tecnologia de DP Systems, seja pela sua simplicidade, possuindo parâmetros de desempenho avaliados e definidos no domínio da frequência, seja por sua robustez, o que garante a eficiência e confiabilidade necessárias para que o sistema tenha o desempenho esperado apesar das não-linearidades e incertezas na modelação da dinâmica do sistema.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

LQG/LTR CONTROL MODEL WITH KALMAN FILTER  
WITH AUGMENTED DYNAMICS APPLIED TO DYNAMIC  
POSITIONING SYSTEMS OF OCEAN STRUCTURES

Márcio Domingues Maia Júnior

June/2007

Advisor: Antonio Carlos Fernandes

Department: Ocean Engineering

In this work a Linear Quadratic Gaussian – Loop Transfer Recovery (LQG – LTR) control method applied to dynamic positioning of ocean structures is presented. This methodology use a Kalman Filter with augmented dynamics to estimate high frequency motions.

The methodology presented here is applied to free structures, such as shuttle tankers in offloading operation for example, and moored structures, such as a DPS (Dynamic Positioning System) in Assisted Mooring configuration.

The study herein is concentrated on Assisted Mooring DPS which features high level of coupling between all of degrees of freedom of the system due to supposition of fully asymmetrical mooring in a “spread mooring” configuration what beget all terms out of the main diagonal of the mooring stiffness matrix, so making the problem more complex.

It is important to point out that this methodology arise as an important option in technology of DP systems due to its simplicity, because it has performance parameters evaluated within the frequency domain, and also because its robustness guarantees the necessary efficiency and reliability allowing the system to reach the expected performance although the non-linearity and uncertainty included on the dynamic modeling of the system.

# Índice

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Motivação.....	1
1.1.1	Sistemas de Posicionamento por Ancoragem.....	1
1.1.2	Sistemas de Posicionamento Dinâmico.....	2
1.1.3	Ancoragem Assistida por Propulsores.....	2
1.2	Histórico dos Sistemas de Posicionamento Dinâmico.....	3
1.3	Objetivo.....	4
1.4	Organização da Tese.....	6
2	ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE POSICIONAMENTO DINÂMICO.....	8
2.1	Introdução.....	8
2.2	Princípios de Posicionamento Dinâmico.....	8
2.3	Modos de Operação.....	13
2.4	Forças Ambientais (Distúrbios Externos).....	15
2.4.1	Força devido ao vento.....	16
2.4.2	Força devido às correntes marinhas.....	19
2.4.3	Forças devido às ondas.....	22
2.5	Forças devido à Amarração.....	27
2.6	Forças devido aos Propulsores.....	29
2.6.1	Considerações Gerais.....	29
2.6.2	Modelo Hidrodinâmico do Propulsor.....	30
2.6.3	Dinâmica do Propulsor.....	33
2.6.4	LDE.....	34
2.7	Sensores.....	39
2.7.1	Sensor de Posição.....	40
2.7.2	Girocompasso.....	41
2.7.3	Sensor de Vento.....	41
3	MODELO DINÂMICO DO SISTEMA.....	42
3.1	Introdução.....	42
3.2	Sistema de Coordenadas.....	43
3.3	Equações de Movimento.....	47
3.4	Forças e Momentos Externos.....	52
3.5	Modelo Nominal do Sistema.....	57
3.5.1	Modelo em Espaço de Estados.....	58
3.6	Conceituação MIMO da Planta.....	62
3.6.1	Introdução.....	62
3.6.2	Modelo Nominal.....	64
3.6.3	Representação do Erro de Modelagem.....	65
3.7	Objetivos de Projeto.....	68
3.7.1	Introdução.....	68
3.7.2	Estabilidade.....	69
3.7.3	Desempenho.....	78
3.7.4	Compromisso: Desempenho x Estabilidade.....	90
3.7.5	Erro Estacionário para Entrada em Degrau.....	91
4	ELEMENTOS BÁSICOS DO COMPENSADOR.....	95
4.1	Introdução.....	95
4.2	Estrutura do Compensador.....	95
4.3	Dinâmica do Sistema Nominal em Malha Fechada.....	100



5	O PROCEDIMENTO DE RECUPERAÇÃO .....	103
5.1	Introdução .....	103
5.2	O Regulador Linear Quadrático .....	104
5.3	O Resultado Fundamental .....	105
6	MALHA OBJETIVO .....	111
6.1	Introdução .....	111
6.2	O Filtro de Kalman e o Regulador LQG .....	112
6.3	Identidade de Kalman .....	117
6.3.1	Desempenho da Malha Objetivo .....	121
6.3.2	Robustez da Estabilidade da Malha Objetivo .....	122
6.3.3	Características de Cruzamento da Malha Objetivo .....	122
6.3.4	Margens de Ganho e Fase da Malha Objetivo .....	124
6.4	Escolha dos Parâmetros de Projeto .....	127
6.4.1	Inclusão de Integradores na Entrada da Planta .....	128
6.4.2	Filtro de Kalman com Dinâmica Aumentada .....	130
6.4.3	Casamento dos Valores Singulares .....	141
7	PROCEDIMENTO DE PROJETO .....	145
7.1	Resumo do Procedimento de Projeto .....	145
7.1.1	Introdução .....	145
7.1.2	Seqüência do Procedimento de Projeto .....	146
7.2	Projeto de Controlador para AAP – FPSO-BR P-57 .....	150
7.2.1	Introdução .....	150
7.2.2	Seqüência de Projeto .....	151
7.3	Apresentação de Resultados .....	155
7.3.1	Procedimento de Projeto .....	157
7.3.2	Simulações .....	169
7.4	Conclusões Finais e Sugestões de Estudos Futuros .....	204
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	206
	APÊNDICES .....	210
A	SISTEMAS DE CONTROLE – CONCEITOS BÁSICOS .....	210
A.1.	Sistemas SISO .....	210
A.1.1.	Introdução .....	210
A.1.2.	Conceitos Básicos .....	213
A.1.3.	Sistema Nominal .....	213
A.1.4.	Sistema Real .....	223
A.2.	Sistemas MIMO .....	234
A.2.1.	Resposta em Freqüência Multivariável .....	234
B	DADOS UTILIZADOS NAS SIMULAÇÕES .....	243
B.1.	RAOs .....	243
B.2.	Coefficientes de Vento e Corrente .....	244
B.3.	Ancoragem .....	245
B.4.	Coefficientes Hidrodinâmicos (Derivadas Hidrodinâmicas) .....	246
B.5.	Inércia da Plataforma .....	246
B.6.	Características Principais da P-57 .....	247

## ABREVIACES

<b>UEP</b>	-	<b>Unidade de Explorao e Produo</b>
<b>SS</b>	-	<b>Semi – Submersvel (Semi- Submersible)</b>
<b>AAP</b>	-	<b>Ancoragem Assistida por Propulsores</b>
<b>DPS</b>	-	<b>Dynamic Positioning System (Sistema de Posicionamento Dinmico)</b>
<b>PID</b>	-	<b>Proportional, Integral and Derivative</b>
<b>LQG</b>	-	<b>Linear Quadratic Gaussian</b>
<b>LTR</b>	-	<b>Loop Transfer Recovery</b>
<b>RLQ</b>		<b>Regulador Linear Quadrático</b>
<b>MIMO</b>		<b>Multi Input Multi Output</b>
<b>SISO</b>		<b>Single Input Single Output</b>
<b>KF</b>		<b>Kalman Filter (Filtro de Kalman)</b>
<b>FK</b>		<b>Kalman Filter (Filtro de Kalman)</b>
<b>EKF</b>		<b>Extended Kalman Filter (Filtro de Kalman Extendido)</b>
<b>LQR</b>		<b>Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)</b>
<b>RLQ</b>		<b>Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)</b>
<b>BOP</b>		<b>Blow Out Preventer</b>
<b>RAO</b>		<b>Response Amplitude Operator</b>
<b>LDE</b>		<b>Lgica de Distribuio de Empuxo</b>
<b>FT</b>		<b>Funo de Transferncia</b>
<b>GPS</b>		<b>Global Positioning System</b>
<b>SBL</b>		<b>Short Base Line</b>
<b>SPE</b>		<b>Semiplano Esquerdo</b>
<b>SPD</b>		<b>Semiplano Direito</b>
<b>CNS</b>		<b>Condio Necessária e Suficiente</b>
<b>EAR</b>		<b>Equao Algébrica de Riccati</b>

# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1 Motivação**

Grande parte das reservas de petróleo conhecidas no mundo está localizada no mar, isto é, abaixo da superfície marinha na plataforma continental e situada em lâminas d'água de até 2000 m (atualmente existem poços ainda mais profundos). Tal demanda gera altos custos para a exploração deste valioso recurso mineral e conseqüentemente a utilização de sistemas flutuantes sofisticados, tais como navios de perfuração e / ou plataformas semi-submersíveis (SS's).

Como primeira grande dificuldade nota-se a manutenção da posição da plataforma sobre o poço na superfície do mar durante a perfuração. Para superar tal obstáculo pode-se citar três principais métodos: Ancoragem tradicional (passiva), Sistema de Posicionamento Dinâmico (DPS) e Ancoragem Assistida por Propulsores (ativa). Cabe ressaltar ainda que como na maioria das aplicações de engenharia sua escolha deve observar aspectos econômicos, operacionais e de segurança.

### **1.1.1 Sistemas de Posicionamento por Ancoragem**

Tais sistemas operam de forma passiva, seguindo toda uma metodologia tradicional de sistemas de ancoragem, tendo, contudo, requisitos mais severos quanto a movimento da plataforma acima do poço.

Este tipo de ancoragem baseia-se na rigidez das linhas de amarração presas ao fundo por meio de âncoras para gerar a rigidez necessária aos movimentos da plataforma para que esta se mantenha em sua posição original (desejada). Tal rigidez é obtida pela tensão das catenárias das linhas de amarração instaladas.

Deve-se notar que estes sistemas são convenientes para águas rasas já que envolve sistemas de ancoragem menores e com sua operação facilitada. Contudo para lâminas d'águas maiores o sistema torna-se muito maior e mais caro, de tal maneira que sua instalação e remoção para a nova locação torna-se muito cara e despende trabalho excessivamente complicado para a manobra de embarcações de remoção / instalação de âncoras e amarras.

### **1.1.2 Sistemas de Posicionamento Dinâmico**

Tais sistemas operam exclusivamente com a utilização de propulsores para a manutenção de sua posição. Tais sistemas demandam uma série de equipamentos instalados, tais como geradores, propulsores, controladores etc. Estes equipamentos têm um custo elevado, contudo viabilizam-se em águas profundas em locais onde o tempo de permanência entre locações é mais curto, fato que inviabilizaria as manobras necessárias para um sistema de ancoragem convencional mudar de locação. Deve-se notar que estes sistemas têm custos tão maiores quanto maiores forem as demandas ambientais na locação onde deve operar, fato que se explica devido ao fato que teremos sistemas DP tão mais potentes quanto maiores as demandas externas (propulsores, consumo de combustível etc.).

### **1.1.3 Ancoragem Assistida por Propulsores**

Tal sistema tem o objetivo de aliar a economia de sistemas de ancoragem menores utilizados em águas rasas aos caros sistemas de DP para águas profundas. De uma forma geral é utilizado em águas rasas, em regime passivo, e em regime ativo, como ancoragem assistida por propulsores, para lâminas d'água médias e profundas, elevando a capacidade do sistema ainda mais profundas, desde que o sistema seja projetado adequadamente para as características especiais destes sistemas que possuem forte acoplamento entre todos os seus graus de liberdade, especialmente devido a ancoragem que o possibilita operar em água rasas sem o auxílio de seu DP.

## 1.2 Histórico dos Sistemas de Posicionamento Dinâmico

A exploração de petróleo em águas profundas se iniciou com a utilização de navios ancorados. À partir de meados da década de 60 os sistemas DP começaram a ser utilizados em navios de perfuração utilizando três controladores analógicos PID (Proportional, Integral and Derivative), um para cada movimento da embarcação no plano horizontal [9].

No início da década de 70 [10] passou-se a utilizar controle por computador digital em sistemas DP, motivado pela possibilidade de técnicas de compensação ativa e pela necessidade de se implementar uma lógica de distribuição de empuxo entre os vários propulsores da embarcação.

Ainda neste período houve o início da utilização dos filtros *notch* para evitar a modulação do propulsor devido ao movimento oscilatório de primeira ordem provocado pelas ondas do mar, problema este que também motivou o uso de filtros adaptativos [11]. Os primeiros sistemas utilizando AAP surgiram a partir de 74, instalados em navios, com o objetivo de conseguirem operações mais econômicas e seguras, mas ainda usando controladores PID [12].

O primeiro estudo sobre a aplicação de controle ótimo e filtro de Kalman (controlador LQG – Linear Quadratic Gaussian) em sistemas DP foi publicado em 76 [13]. Tal abordagem possibilitou se considerar o acoplamento entre os movimentos da embarcação e então se tratar o problema de controle utilizando um enfoque multivariável, introduzindo ainda um novo método de redução da modulação dos propulsores.

A primeira plataforma SS com sistema DP, a SEDCO 709, foi construída em 77, ela possuía também um sistema de ancoragem tradicional para operar até lâminas d'água de até 450m [14].

Já em 79 estavam disponíveis comercialmente sistemas DP e AAP utilizando controladores LQG, motivados pela busca da melhor precisão e capacidade de operar em condições ambientais mais severas [15].

A década de 80 foi marcada pela busca de uma maior confiabilidade dos sistemas DP. Tal objetivo foi alcançado com o uso de sistemas microprocessados para análise de falhas, supervisão e aumento da redundância de sensores, controladores, propulsores e geradores [16,17].

Contudo os sistemas de ancoragem também evoluíram para água mais profundas e com eles os que se utilizavam de AAP, sendo deste modo, nos dias de hoje, a escolha entre os três tipos de sistemas uma escolha de ordem econômica ou operacional [18].

Neste íterim cabe ressaltar a relevância da abordagem de filtragem ótima estocástica com dinâmica de alta frequência aumentada de forma a se reduzir a modulação, em [35] pode-se observar este enfoque, ainda que de forma preliminar, sem de fato se avaliar as estimativas de alta frequência para um espectro de mar, mas tão somente para uma onda monocromática. Contudo tal trabalho tem seu principal mérito na visualização da possibilidade, que aqui é tratada, de se obter um modelo que represente bem as estimativas de estado devido a dinâmica de alta frequência da plataforma e assim minimizar a modulação propulsiva.

Nos dias de hoje o que têm demandado maior esforço de pesquisa é a questão da modulação dos propulsores com o estado de mar de forma a se chegar a uma solução satisfatória. Encontram-se hoje algumas soluções adaptativas [19, 20] para o problema citado sem a intervenção de operadores, utilizando a abordagem LQG.

### **1.3 Objetivo**

Esta tese tem por objetivo mostrar a teoria envolvida e executar o projeto de um sistema de controle para plataformas ancoradas operando em águas profundas com a técnica de ancoragem assistida por propulsores (AAP), utilizando a técnica de LTR (Loop Transfer Recovery) aplicada ao modelo de controle LQG (Linear Quadratic Gaussian).

Para tanto a técnica LQG/LTR utiliza-se de um enfoque frequencial para avaliação de seus parâmetros de desempenho e obtenção do modelo de controle aplicado a um sistema MIMO (Multi Input Multi Output).

Neste ponto destaca-se a forte característica de robustez de tais sistemas, característica essa extremamente desejável em sistemas de controle por pelo menos duas razões. Primeiramente pela preocupação de todo projetista em garantir que o sistema de controle funcione satisfatoriamente ainda que em condições distintas daquelas consideradas no modelo de projeto (nominal). E em segundo lugar, mas bastante interessante, as condições de robustez podem ser utilizadas objetivando a adoção de um modelo intencionalmente simplificado, não só para a simplificação da análise, como também pelo seu impacto na complexidade do controlador resultante [21].

Assim deve ficar claro que o objetivo desta tese é o estudo do método LQG/LTR, que é uma técnica de projeto para controladores robustos para sistemas multivariáveis. Deste modo, mas sem perda de generalidade, o presente trabalho destaca aspectos relevantes de sistemas propulsivos e detalhes sobre sensores, contudo, não os insere no modelo, dado o foco principal na metodologia da projeto do compensador robusto, que, de fato, deve ser capaz de absorver sua exclusão.

Entre as características mais importantes do método, podem ser citadas as seguintes:

- a) a robustez do controlador em face de uma ampla classe de erros de modelagem é garantida pelo procedimento;
- b) a técnica foi concebida para aplicação a sistemas multivariáveis;
- c) o procedimento de projeto é de natureza sistemática;
- d) a metodologia se baseia numa abordagem frequencial, aplicando-se assim a sistemas lineares e invariantes no tempo;
- e) o número de parâmetros de projeto é relativamente pequeno;
- f) existe softwares de apoio ao projeto disponível comercialmente.

Assim, o controlador aqui projetado deverá atender a alguns requisitos de projeto para todos os sistemas reais associados ao modelo de projeto (nominal), caracterizando-se assim o problema como de controle robusto. Tais requisitos serão detalhados mais a frente.

## 1.4 Organização da Tese

No capítulo 2 será analisado de forma detalhada os conceitos e elementos envolvidos no problema do nosso sistema de AAP. De forma que passaremos por todas as forças envolvidas, distúrbios, atuadores, modos operacionais etc.

No capítulo 3 será desenvolvido o modelo matemático do sistema que é utilizado neste trabalho. Com isto estaremos aptos a dar início ao projeto do controlador e simulação do sistema completo. Trata-se aqui também o modelo nominal e erro de modelagem, definindo-se assim a classe de sistemas reais sobre as quais se aplica o projeto. Faz-se ainda uma explanação sobre os objetivos de projeto. Neste ponto são estabelecidas as condições de estabilidade e os requisitos de desempenho tanto para o modelo nominal, como para a família de plantas reais.

No capítulo 4 é apresentada a estrutura do compensador  $K(s)$  adotada pela metodologia LQG/LTR.

O capítulo 5 versa sobre um dos pontos fundamentais da metodologia aqui apresentada, a saber, o resultado que define o chamado procedimento de recuperação (“loop transfer recovery”, em inglês), responsável pela parte “LTR” da sigla que identifica a metodologia. Neste ponto definir-se-ão duas etapas: i) definição da malha objetivo (“target loop”, em inglês) que satisfaz as especificações de projeto; ii) recuperação assintótica da resposta em frequência da malha objetivo através do ajuste dos parâmetros livres do compensador.

A malha objetivo, suas propriedades e sugestões para escolha dos parâmetros de projeto são apresentadas no capítulo 6. Observa-se neste ponto que o FK (ou dualmente o LQR) possui uma série de propriedades interessantes no que se refere a estabilidade e desempenho que o qualificam para desempenhar o papel de malha objetivo.



No capítulo 7 é apresentado um resumo do procedimento de projeto no formato de uma seqüência de passos a serem seguidos para se aplicar ao nosso problema de sistemas de controle para AAP ou qualquer outro sistema MIMO. Por fim, ainda neste capítulo, são apresentados resultados do projeto de um controlador pela metodologia aqui descrita, assim como as conclusões e considerações finais.

No apêndice A faz-se uma síntese dos conceitos mais importante de sistemas de controle, iniciando com elementos básicos de sistemas SISO para mais adiante generalizarmos estes para o caso do nosso projeto, que se refere a um sistema MIMO. Define-se também a resposta em frequência e generaliza-se o Diagrama de Bode de ganho para o caso de sistemas MIMO.

Cabe ainda ressaltar que todos os modelos e rotinas foram feitos no ambiente do programa MATLAB versão 7.0 da MATH WORKS Inc. Sendo assim se apresentam nesta tese rotinas no formato *.m* e modelos do SIMULINK no formato *.mdl* .

## **2 ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE POSICIONAMENTO DINÂMICO**

### **2.1 Introdução**

Neste capítulo serão descritos todos os elementos de um sistema de posicionamento dinâmico, e em particular o caso de Ancoragem Assistida por Propulsores. Tal capítulo se faz necessário para que possamos mais a frente definir o nosso modelo, para o qual projetaremos o controlador, e ainda poder definir todos os requisitos que nosso sistema DP deverá atender.

### **2.2 Princípios de Posicionamento Dinâmico**

Neste ponto cabe ressaltar que iremos executar, no decorrer desta tese, o projeto de um sistema DP para uma plataforma com ancoragem, isto é, em ancoragem assistida por propulsores, contudo esta premissa serve de partida para que se justifique a utilização de uma metodologia multivariável, já que neste caso teremos os três graus de liberdade da nossa plataforma em seus movimentos no plano da superfície média do mar acoplados devido aos termos fora da diagonal principal na matriz de rigidez de ancoragem da plataforma. No entanto deve ser observado que tal metodologia se aplica integralmente ao caso de plataforma puramente DP, ou seja, sem a ancoragem passiva tradicional.

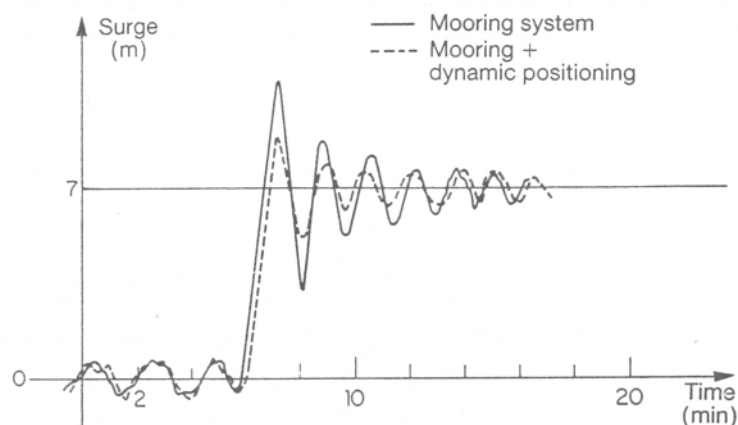
Cabe salientar que a opção de combinar um sistema com ancoragem tradicional a um sistema DP tem uma série de vantagens, contudo a decisão de se optar por um dado tipo de sistema é basicamente econômica. Sendo as principais vantagens da AAP as seguintes melhorias:

- O sistema DP ajuda o sistema com ancoragem passiva tradicional com:
  - a) Maior acurácia na manutenção de posição e aproamento da plataforma (ver *Figura 2-1*);
  - b) Viagens no mar, manobras de instalação e recuperação de linhas de amarração na locação;
  - c) Redução dos valores estáticos e dinâmicos da tensão nas linhas em presença de condições ambientais severas;
  - d) Manutenção de posição segura durante manutenção em uma das linhas de ancoragem.
  
- O sistema com ancoragem passiva tradicional ajuda o sistema DP com:
  - a) Aumenta os valores extremos de condições ambientais suportados por um sistema DP;
  - b) Garante algum nível de estabilidade em caso de eventual falha do sistema DP.

Deve-se ter em mente ainda que todo sistema AAP é feito para operar tanto em DP puro, ancoragem passiva pura ou de forma combinada, o que dará diferentes limites operacionais a plataforma para cada configuração.

**Tabela 2-1 - Comparação de sistemas de ancoragem passiva e sistemas DP instalados na mesma plataforma – retirado de [8]**

Vessel	Water depth capacity (m)	
	Conventional mooring	Dynamic positioning
<i>Sedco 709*</i> .....	450	2,000
<i>Ben Ocean Ranger III*</i> .....	450	1,350
<i>Glomar Pacific**</i> .....	600	900



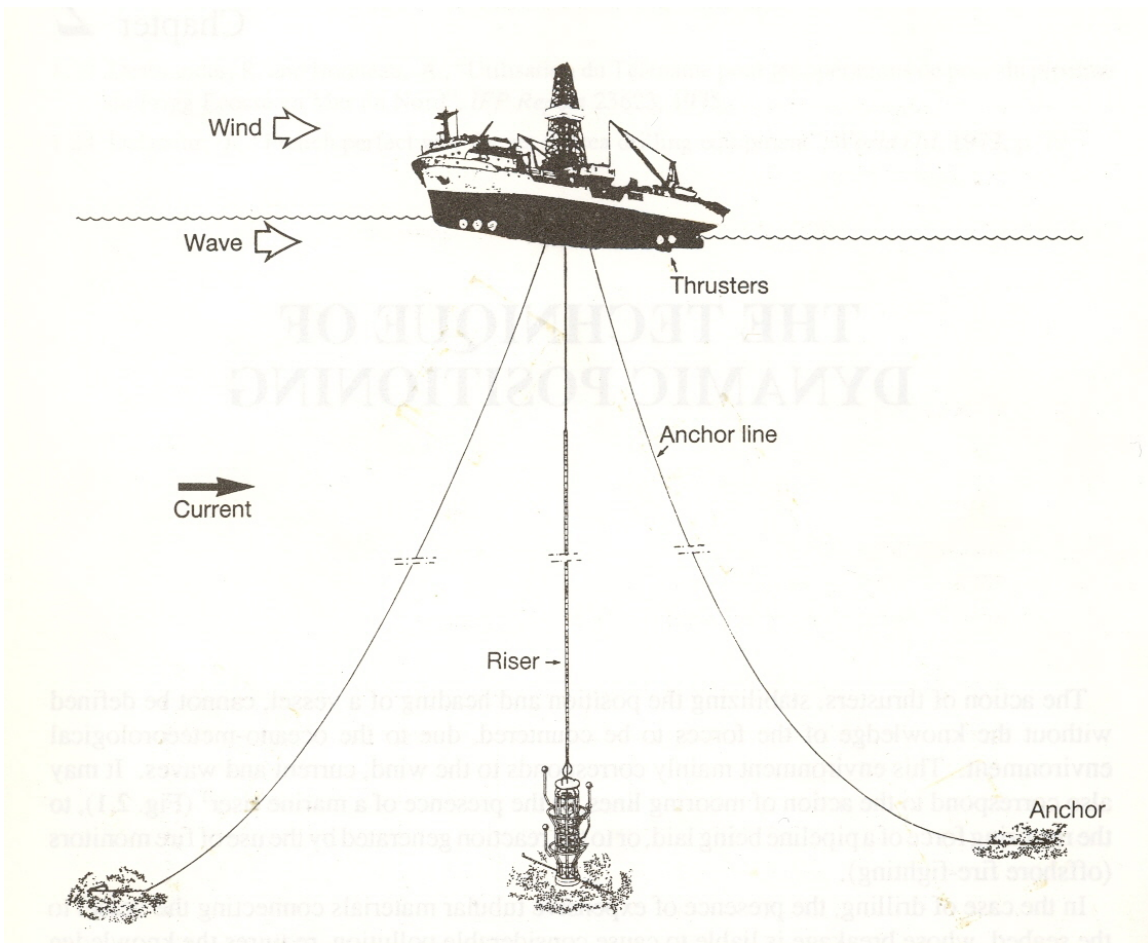
**Figura 2-1 - Resposta ao degrau de 7m de um sistema com ancoragem assistida por DP – retirado de [8]**

Conforme pode ser notado na *Tabela 2-1* há uma grande melhoria na performance de plataformas com AAP em relação a suas similares só com ancoragem passiva. De mesma maneira pode ser notado pela *Figura 2-1* o ganho na manutenção da posição que existem no sistema AAP em relação à ancoragem tradicional. Tal ganho se dá com o aumento no amortecimento do sistema massa/mola formado pela plataforma e as linhas.

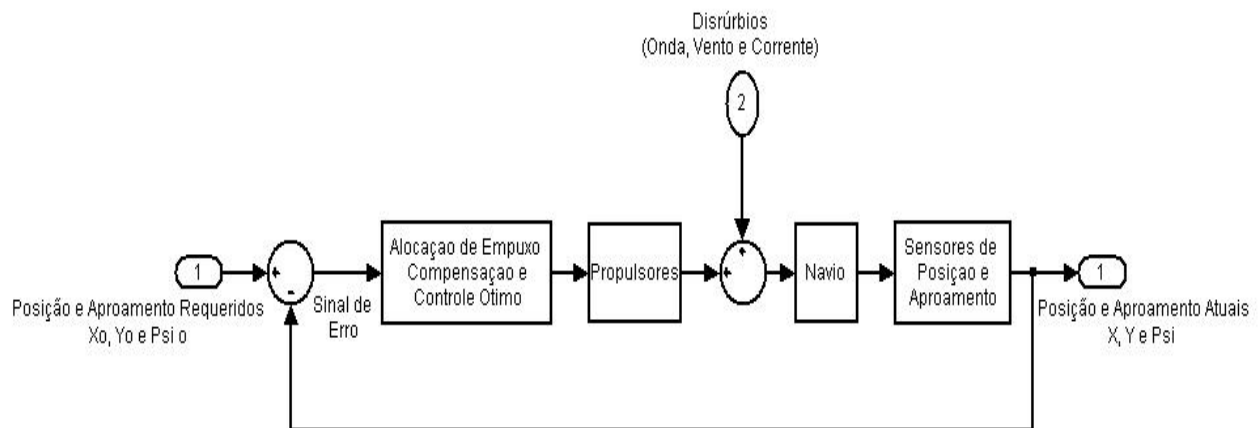
De uma forma geral um sistema de posicionamento dinâmico deve manter a posição da plataforma e seu aproamento, de forma que esta posição central (para Drilling Units é a posição horizontal do poço) seja o alvo, isto é, o sistema deverá utilizar as forças tanto dos propulsores como das amarras para manter a plataforma tão próxima quanto possível desta posição. O desvio desta posição permissível é um dos requisitos que o sistema deverá atender, sendo, para unidades de perfuração, limitado primordialmente pela junta esférica (ball joint) que articula o riser ao BOP (Blow Out Preventer – válvula de segurança instalada na cabeça do poço) gerando uma limitação de cerca de 6% da lâmina d'água.

Uma embarcação na superfície do mar tem movimentos em seis graus de liberdade, são eles três de translação (em x – *surge*, em y – *sway* e em z – *heave*) e outros três de rotação (em x – *roll*, em y – *pitch* e em z – *yaw*), contudo o sistema de DP somente irá responder aos movimentos no plano da plataforma, isto é, surge, sway e yaw.

Na *Figura 2-2* estão representados os elementos principais a serem considerados em sistemas AAP, assim como a *Figura 2-3* mostra o diagrama de blocos simplificado de tais sistemas.



**Figura 2-2 - Principais Componentes de uma Plataforma com sistema AAP instalado – retirado de [8]**



**Figura 2-3 - Principais Componentes de uma Plataforma com sistema AAP instalado**

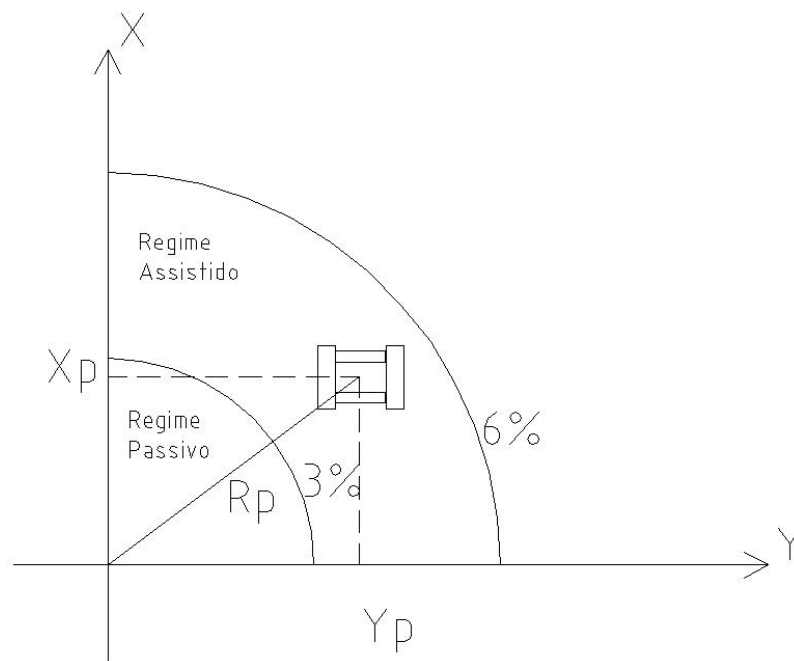
### 2.3 Modos de Operação

Durante a operação de uma plataforma em AAP, seja ela de perfuração ou qualquer outro tipo de função a desempenhar, faz-se necessário se aproveitar ao máximo a força de restauração devido às amarras, isto pelo fato óbvio de se desejar um sistema tão mais econômico quanto possível, ou seja, que utilize o menos possível os propulsores consumindo assim a menor quantidade de combustível possível. Para tanto é necessário que haja um sistema lógico de supervisão que mude o regime de manutenção de posição de passivo para ativo e vice-versa da forma mais eficiente possível.

Neste trabalho iremos focar o sistema ativo já que é neste que desenvolveremos todo o projeto de nosso sistema de controle.

Contudo cabe ressaltar que em geral tais sistemas trabalham em regime passivo até que algum limite operacional seja atingido e assim comute para o regime ativo passando então a atuar como um sistema de DP de fato.

De forma geral utiliza-se como limite um percentual da lâmina d'água, tal limite utilizado é comumente de 3%, e à partir deste valor o sistema passa a operar no modo ativo. Um outro detalhe importante é o limite máximo de passeio em torno da posição de equilíbrio, que em geral é da ordem de 6% da lâmina d'água e deve ser garantido pelo sistema DP ao entrar em operação.



**Figura 2-4 - Modo de Operação de uma Plataforma operando em AAP**

Ao entrar no regime assistido o sistema AAP funciona exatamente como um sistema DP convencional, contudo possui a vantagem de poder ainda contar com a restauração da amarração para desempenhar sua função de controle posicional.



Assim, neste momento, o sistema deverá acionar os propulsores de forma a se combinar com a força de restauração das amarras levando a plataforma a posição requerida ou *set-point*. Para isso deve ainda garantir que a Unidade não passe da sua excursão máxima e nem a amarração tenha suas trações além de seus limites de projeto.

Para rastrear a referência (ou *set-point*) o sistema DP deve constar de um controlador projetado para erro de regime nulo, o que nos leva a imposição de integradores na entrada do mesmo.

Com isso pode-se entender de uma forma sucinta que enquanto as forças de restauração da amarração forem suficientes para manter a plataforma tão próxima de seu *set-point* quanto 3% da lâmina d'água então o regime de operação será o passivo, mas ao a amarração não conseguir garantir tal imposição o sistema passa a opera em AAP e o controle DP deverá manter a unidade em questão dentro do limite distanciamento de 6% da lâmina d'água. No entanto cabe ressaltar que se as condições ambientais chegarem a patamares que elevem a distancia além deste limite, então a plataforma deverá ter suas atividades interrompidas, o que no caso de uma *drilling unit* significa a desconexão do riser do BOP.

## **2.4 Forças Ambientais (Distúrbios Externos)**

As forças ambientais estão presentes na natureza assim como atuando em qualquer corpo imerso ou flutuando no oceano.

Em uma plataforma flutuando no mar estão agindo forças provenientes da natureza e são elas as devido às ondas, ao vento e à correntes marinhas, e tais forças são analisadas como distúrbios externos e devem ser rejeitadas pelo sistema de controle. Precisamos então compreender como elas atuam e assim observarmos suas características para que possamos simular seus efeitos e assim avaliar o desempenho do controlador hora projetado.

### 2.4.1 Força devido ao vento

Para avaliar as forças devido ao vento neste trabalho é utilizada a formulação clássica de arrasto aerodinâmico. Assim, as fórmulas aqui empregadas são:

$$\begin{aligned} F_{wi} &= (X_{wi}, Y_{wi}, N_{wi}) \\ X_{wi} &= \frac{1}{2} \rho_a C_{wi_x} (\psi_{wi}) \{A_{ts} + (H - T)B\} V_{wi}^2 \\ Y_{wi} &= \frac{1}{2} \rho_a C_{wi_y} (\psi_{wi}) \{A_{ls} + (H - T)L\} V_{wi}^2 \\ N_{wi} &= \frac{1}{2} \rho_a C_{wi_{xy}} (\psi_{wi}) \{A_{ls} + (H - T)L\} L V_{wi}^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Onde:

$F_{wi} \rightarrow$  Força devido ao vento

$X_{wi}$

$Y_{wi} \rightarrow$  Componentes de força longitudinal, transversal e momento devido ao vento

$N_{wi}$

$\rho_a \rightarrow$  Densidade do ar

$\psi_{wi} \rightarrow$  Ângulo da plataforma em relação ao vento

$V_{wi} \rightarrow$  Velocidade do vento

$C_{wi_x}$

$C_{wi_y} \rightarrow$  Coeficiente de arrasto em x, y e de momento no plano

$C_{wi_{xy}}$

H → Borda livre do casco

T → Calado considerado

L → Comprimento do casco

$A_{ts}$  → Área transversal de estruturas acima do casco

$A_{ls}$  → Área longitudinal de estruturas acima do casco

Cabe salientar que nas fórmulas apresentadas acima se utiliza apenas a velocidade do vento absoluta, dado que esta é em geral bem superior a da plataforma.

No entanto ainda é importante introduzir o conceito de espectro de vento, já que a velocidade do vento é flutuante, isto é, composta de uma componente média constante e outra componente variável, ou flutuante.

Deste modo para analisarmos o vento utilizamos o auxílio de espectros de vento levantados para as regiões consideradas na locação da unidade flutuante considerada.

Tal formulação é ideal para a utilização da seguinte expressão:

$$V_{wi} = \bar{V}_{wi} + V_{wib} \quad (2.2)$$

Onde:

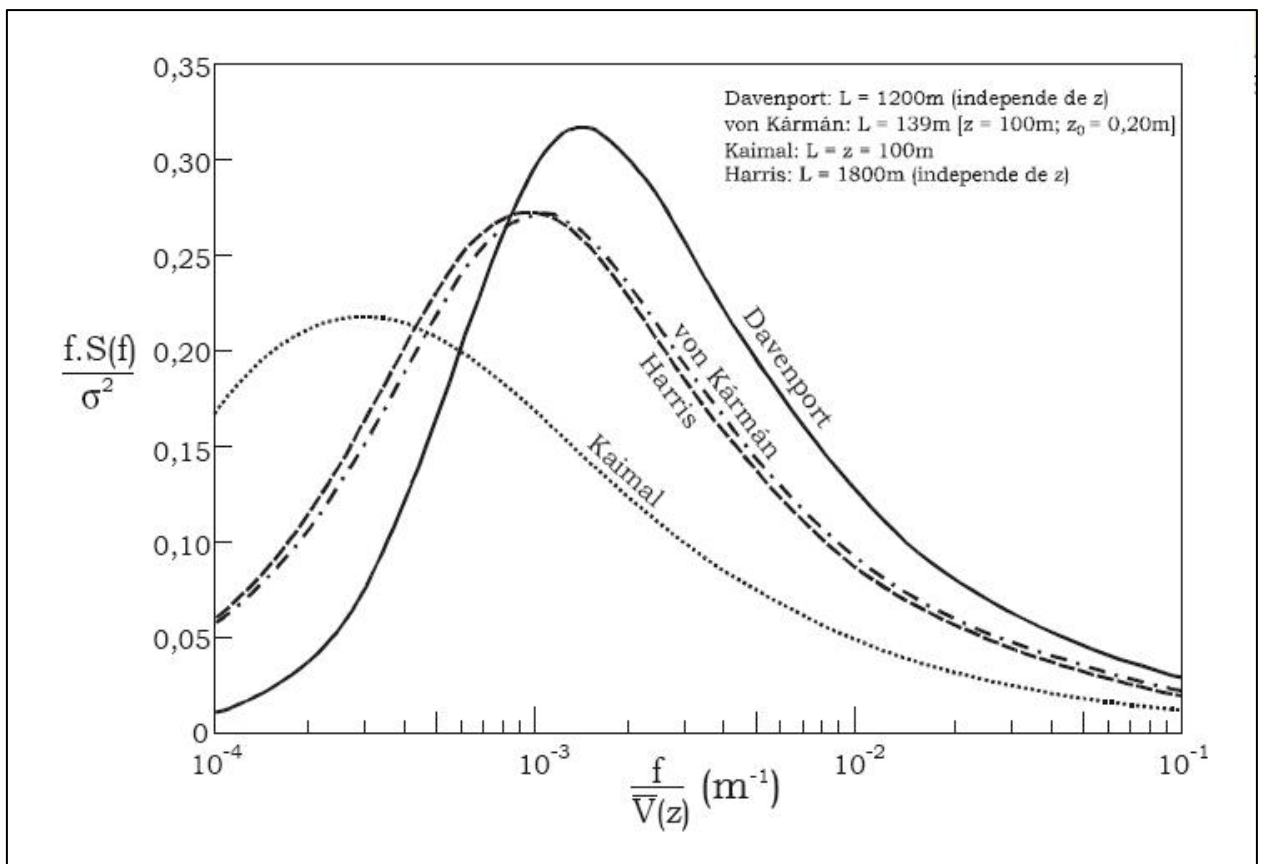
$V_{wi}$  → Velocidade total do vento

$\bar{V}_{wi}$  → Velocidade média do vento

$V_{wib}$  → Velocidade de rajada de vento, componente flutuante

Deve-se observar que apesar de uma ser uma componente média e outra uma flutuante, as duas são dados estatístico de uma dada região. A componente média em geral é levantada considerando-se um intervalo de 10 minutos para um período de N anos de recorrência. Enquanto que a velocidade de rajada pode ser retirada do espectro de velocidade efetiva de vento.

Abaixo se encontram alguns exemplos de espectro de vento:



**Figura 2-5 - Principais Tipos de Espectro de Vento**

Deve-se notar que tanto a velocidade média como a de rajada que compõe a velocidade total são dados estatísticos e característicos de cada região, devendo ser devidamente levantados para que sua utilização seja adequada a cada projeto.

A série temporal da velocidade de rajada de vento deve ser obtida pela transformada inversa de Fourier do espectro de vento, e que de uma forma simplificada pode ser dada da seguinte maneira:

$$V_{wib} = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi\omega_i t + \alpha_i) \quad (2.3)$$

onde:

$$A_i = \sqrt{2S_{wi}(\omega_i)\Delta\omega} \quad (2.4)$$

$\alpha_i$  é uma fase aleatória com distribuição de probabilidades uniforme entre 0 e  $2\pi$ .

#### **2.4.2 Força devido às correntes marinhas**

Para a avaliação das forças devido às correntes serão utilizadas aqui também fórmulas clássicas de arrasto hidrodinâmico, tendo contudo o cuidado de se utilizar a velocidade relativa da corrente em relação a unidade flutuante, dado que a velocidade absoluta da corrente é próxima a da plataforma.

Assim, as forças e momentos são calculados através das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} F_c &= (X_c, Y_c, N_c) \\ X_c &= \frac{1}{2} \rho_w C_{c_x} (\psi_{cr}) HB V_{cr}^2 \\ Y_c &= \frac{1}{2} \rho_w C_{c_y} (\psi_{cr}) HL V_{cr}^2 \\ N_c &= \frac{1}{2} \rho_w C_{c_{xy}} (\psi_{cr}) HL^2 V_{cr}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde:

$F_c \rightarrow$  Força devido à corrente

$X_c$

$Y_c \rightarrow$  Componentes de força longitudinal, transversal e momento devido à corrente

$N_c$

$\rho_w \rightarrow$  Densidade da água

$\psi_{cr} \rightarrow$  Ângulo cinemático da plataforma em relação a corrente (leva em consideração a velocidade da plataforma)

$\psi_c \rightarrow$  Ângulo absoluto da corrente

$\psi \rightarrow$  Ângulo absoluto da plataforma (azimute)

$V_{cr}$  → Velocidade relativa da corrente em relação a plataforma

$V_c$  → Velocidade absoluta da corrente

$u_c$  → Componente absoluta em x da velocidade da corrente

$v_c$  → Componente absoluta em y da velocidade da corrente

$u$  → Componente absoluta em x da velocidade da plataforma

$v$  → Componente absoluta em y da velocidade da plataforma

$u_{cr}$  → Componente relativa em x da velocidade da corrente

$v_{cr}$  → Componente relativa em y da velocidade da corrente

$C_{c_x}$

$C_{c_y}$  → Coeficiente de arrasto em x, y e de momento no plano

$C_{c_{xy}}$

$B$  → Boca da plataforma

$T$  → Calado considerado

$L$  → Comprimento do casco

$$V_{cr} = \sqrt{u_{cr}^2 + v_{cr}^2}, \text{ onde} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} u_c &= V_c \cos(\psi_c) \\ v_c &= V_c \sin(\psi_c) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
u_{cr} &= u_c - u \\
v_{cr} &= v_c - v \\
\psi_{cr} &= \arctg \left( \frac{v_{cr}}{u_{cr}} \right) - \psi
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

### 2.4.3 Forças devido às ondas

As forças devido às ondas nos dão uma parcela importantíssima dos esforços ambientais, seja pela sua magnitude, seja pelo fato de possuírem componentes que não deverão ser rejeitadas, que é o caso das parcelas de segunda ordem. Assim devemos proceder a divisão das forças devido as ondas. São elas:

- Forças de primeira ordem, ou forças de alta frequência (estas devem ser rejeitadas pelo sistema de controle);
- Forças de segunda ordem, ou de baixa frequência (não devem ser rejeitada pelo sistema e sim corrigidas), estas ainda se subdividem em:
  - Deriva média; tem sua intensidade constante; e
  - Deriva lenta.

#### 2.4.3.1 Forças de Primeira Ordem

Primeiramente iremos nos concentrar na parcela de alta frequência que deverá ser rejeitada pelo sistema, caso contrário este modularia os propulsores como será visto mais adiante.

De uma forma geral os esforços de primeira ordem devido às ondas são calculados utilizando-se a teoria pontencial linear, resolvendo-se o problema de valor de contorno. Problema este do tipo de irradiação e difração tridimensional, que nos gera como solução funções de transferência de deslocamentos denominadas RAO (Response Amplitude Operator), e tantas outras tais como as de força, pressão etc. Neste trabalho utilizou-se o programa WAMIT<sup>®</sup>, o qual resolve o problema acima descrito.



Seja a seguinte nomenclatura:

$F_w$  - Forças e momentos devido às ondas.

$F_{w1o}$  - Forças e momentos de 1ª ordem devido às ondas.

$F_{w2o}$  - Forças e momentos de 2ª ordem devido às ondas.

$j$  - Grau de liberdade de movimento (1 - surge, 2 - sway, 6 - yaw).

Dada a Função de transferência da força de excitação (difração e irradiação):

$F_{w1oj}(\chi, \omega)$  para  $j = 1, 2$  e  $6$

E o espectro de mar :

$S_w(\omega)$

Obs.: Cabe ressaltar que em geral para a Baía de Campos se utiliza o espectro de mar JONSWAP [7].

Os espectros de força e momento podem ser calculados por:

$$S_{Fw1oj}(\chi, \omega) = S_w(\omega)(F_{w1oj}(\chi, \omega))^2 \quad (2.9)$$

As forças e momentos de primeira ordem, em função do tempo, são calculados via transformação inversa de Fourier como segue:

$$F_{w1oj}(\chi, t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2S_{Fw1oj}(\chi, \omega_i)} d\omega \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (2.10)$$

$\chi$  é a direção (aproamento) de incidência da onda, em relação ao eixo do navio

$\omega$  é a freqüência circular da onda harmônica (rad/s)

Os cálculos dos deslocamentos devido às forças de primeira ordem, utilizando-se os RAOs, são obtidos de modo análogo ao método de se obter as forças.

Dados os RAOs de cada grau de liberdade:

$$RAO_j(\chi, \omega), j = 1, 2 \text{ e } 6$$

Os movimentos de primeira ordem, em função do tempo, são calculados via transformação inversa de Fourier como segue:

$$\zeta_j(\chi, t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2S(\omega)RAO_j(\chi, \omega_i)^2} d\omega \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (2.11)$$

### 2.4.3.2 Forças de Segunda Ordem

Neste ponto iremos tratar da parcela de baixa frequência de esforços devido às ondas, as forças de segunda ordem. Tal parcela pode ainda ser dividida em duas outras:

- Deriva Média (uma componente média ou D.C.); e
- Deriva Lenta (uma componente de baixa frequência).

#### 2.4.3.2.1 Deriva Média

A força de deriva média é considerada apenas para os movimentos no plano horizontal, ou seja, *surge*, *sway* e *yaw*.

A força de deriva média é obtida a partir das QTFs, *Quadratic Transfer Function*, definidas para os diversos valores de frequências de ondas harmônicas dentro da faixa do espectro do mar considerado.

$X_{dm1}(\chi, \omega)$ ,  $X_{dm2}(\chi, \omega)$ ,  $X_{dm6}(\chi, \omega)$  : QTFs

A força de deriva média para um dado ângulo de incidência, no espectro de mar considerado, é calculado por meio de cruzamento espectral.

$$F_{dmi}(\chi) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) X_{dmi}(\chi, \omega) d\omega \quad (2.12)$$

onde:  $F_{dmi}(\chi)$ ,  $i=1,2,6$  representam as forças/momento de deriva média na direção dos eixos x, y e z do navio.

#### **2.4.3.2.2 Deriva Lenta**

A interação quadrática entre duas ondas harmônicas de frequências quaisquer,  $\omega_i$  e  $\omega_j$ , tem como resultado o aparecimento da Força de Deriva Lenta, que tem uma natureza oscilatória com frequência igual à “frequência diferença” ( $\mu = \omega_i - \omega_j$ ).

Normalmente, a Força de Deriva Lenta tem intensidade menor que as outras componentes da onda, porém dependendo do sistema de amarração utilizado, esta força pode ter um efeito significativo, causando movimentos oscilatórios lentos de grande amplitude, devido à ressonância do sistema, resultando em altos picos de tensão no sistema de amarração.

Desta forma, a fórmula para o cálculo do espectro de deriva lenta, dada por [34]:

$$S_{F_{wsd}}(\chi, \mu) = 8 \int_0^{\infty} S(\omega) S(\omega + \mu) \left[ F_{wsd} \left( \chi, \omega + \frac{\mu}{2} \right) \right]^2 d\omega \quad (2.13)$$

Com os espectros de força de deriva lenta, as forças de deriva lenta no domínio do tempo ( $F_{wsd}(\chi, t)$ ) podem ser calculadas aplicando a transformada inversa de Fourier.

$$F_{wsd}(\chi, t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2 S_{F_{wsd}}(\chi, \mu)} d\mu \cos(\mu t + \phi_i) \quad (2.14)$$

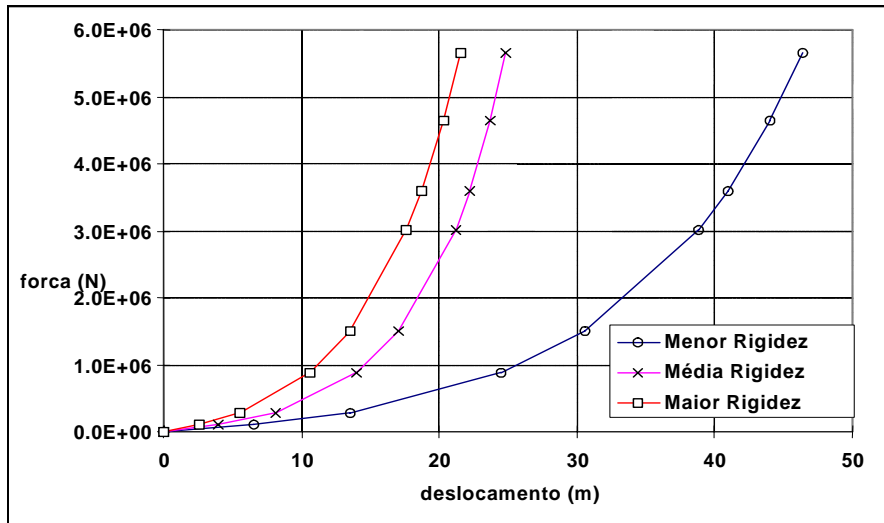
onde:

$d\mu = d\omega$  e  $\phi =$  fase aleatória ( $0 \sim 2\pi$ ).

## 2.5 Forças devido à Amarração

As forças devido a amarração são aquelas que se opõe a plataforma se afastar da posição original, ou de equilíbrio das amarras em que a plataforma foi instalada.

Modelando-se a suspensão das linhas de amarração por catenárias, obtêm-se uma formulação que se aproxima mais da realidade do fenômeno e nos gera uma curva de restauração não-linear para o movimento da unidade considerada.



**Figura 2-6 - Exemplo de curvas de restauração de Ancoragem - (Rigidez de Ancoragem)**

No entanto para fins deste trabalho utiliza-se apenas a região linear da curva de rigidez aqui mencionada para a geração do modelo da plataforma, o qual será utilizado para a determinação do nosso sistema de controle robusto.

As componentes da força assim definidas são representadas como se segue:

$$\begin{aligned}
 F_s &= (X_s, Y_s, N_s) \\
 X_s &= -(C_{xx} x + C_{xy} y + C_{x\psi} \psi) \\
 Y_s &= -(C_{yx} x + C_{yy} y + C_{y\psi} \psi) \\
 N_s &= -(C_{\psi x} x + C_{\psi y} y + C_{\psi\psi} \psi) \\
 \Rightarrow &
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

$$F_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ N_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{x\psi} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{y\psi} \\ C_{\psi x} & C_{\psi y} & C_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi \end{bmatrix}$$

Deve-se notar que os coeficientes acima incluídos nas equações são aproximações lineares do coeficiente angular do início da curva de restauração da amarração.

## **2.6 Forças devido aos Propulsores**

### **2.6.1 Considerações Gerais**

A força advinda dos propulsores é o elemento de um sistema DP ou AAP que de fato atua de forma com que o sistema permaneça na posição requerida ou comandada. Deste modo torna-se bastante claro que é de suma importância que este funcione adequadamente, isto é, que este desenvolva as forças e momentos que o sistema de controle comanda para que seja mantida ou alcançada a posição desejada.

Dada a importância destas forças existe um Sistema de Propulsão [22], sistema este que divide-se em três partes principais. Sendo elas:

- Lógica de Distribuição de Empuxo (LDE);
- Sistema de Controle do Propulsor (CP); e
- Propulsor (propriamente dito).

De uma forma geral podemos dizer que os propulsores são os atuadores de nosso sistema AAP, o Sistema de Controle do Propulsor é aquele responsável pelo acionamento do propulsor, e a Lógica de Distribuição de Empuxo é quem determina ao CP como o propulsor será acionado de modo a atender a demanda de força gerada pelo sistema de controle.

Assim, ao selecionar um tipo de propulsor para atender as demandas do sistema, os outros dois sistemas são projetados para este propulsor específico, com todas as suas peculiaridades.

Convêm ressaltar que temos diversos tipos de propulsores, que de uma forma genérica podem ser classificados em quatro tipos:

- *Fixos* – Não variam seu azimute;
- *Azimutais* – Giram em torno de um eixo vertical de forma a variar a direção do seu fluxo de água e conseqüentemente a de empuxo;
- *Passo fixo* – Não variam o passo das pás do hélice; e
- *Passo variável* – Variam o passo das pás do hélice de forma a obter diferentes empuxo em mesma rotação do propulsor..

Deve-se notar que a escolha do propulsor é de vital importância para o desempenho adequado do sistema DP ou AAP e modificará toda a forma de acionamento e distribuição de empuxo.

Neste trabalho iremos focar a malha de controle, isto é, foge do escopo o detalhamento do acionamento deste, assim como da LDE. Contudo a seguir será detalhado o modelo hidrodinâmico do propulsor e mais adiante será apresentado em linhas gerais um método bastante utilizado para a LDE.

## 2.6.2 Modelo Hidrodinâmico do Propulsor

Neste ponto será mostrado a abordagem tradicional para a determinação da forças de empuxo nos propulsores [33].

Deve-se observar que tal abordagem para o cálculo da força e do torque atuante em um propulsor baseia-se em ensaios em água aberta a partir dos quais se levanta as curvas características do propulsor. Estas curvas são definidas como função de um coeficiente adimensional, o coeficiente de avanço  $J_0$ , que é dado por:

$$J_0 = \frac{V_p}{n_p D_p} \quad (2.16)$$



sendo  $V_p$  a velocidade de avanço do propulsor (ou a velocidade da correnteza projetada na entrada do propulsor),  $n_p$  a rotação do propulsor e  $D_p$  o seu diâmetro.

Num sistema DP em geral as velocidades de avanço são pequenas e conseqüentemente as velocidades projetadas a montante de cada propulsor na direção de seu eixo, também, e assim  $J_0$  é em geral pequeno para todos os Thrusters em sistemas de posicionamento dinâmico de plataformas.

Dos ensaios acima referidos obtêm-se os coeficientes  $K_T$  e  $K_Q$ , que são função de  $J_0$  e definidos por:

$$K_T = \frac{T_{prop}}{\rho |n_p| n_p D_p^4} \quad (2.17)$$

$$K_Q = \frac{Q_{prop}}{\rho |n_p| n_p D_p^5}$$

sendo  $\rho$  a densidade da água,  $T_{prop}$  o empuxo desenvolvido pelo propulsor e  $Q_{prop}$  o torque hidrodinâmico do mesmo.

Em sistemas AAP e DP de um modo geral são extremamente empregados os propulsores em bocais. Este modelo de thruster, Kort Nozzle, utiliza o escoamento gerado pelo propulsor para gerar um empuxo adicional (devido ao lift gerado no difusor, ou bocal). Tal efeito é tradicionalmente modelado pelo coeficiente:

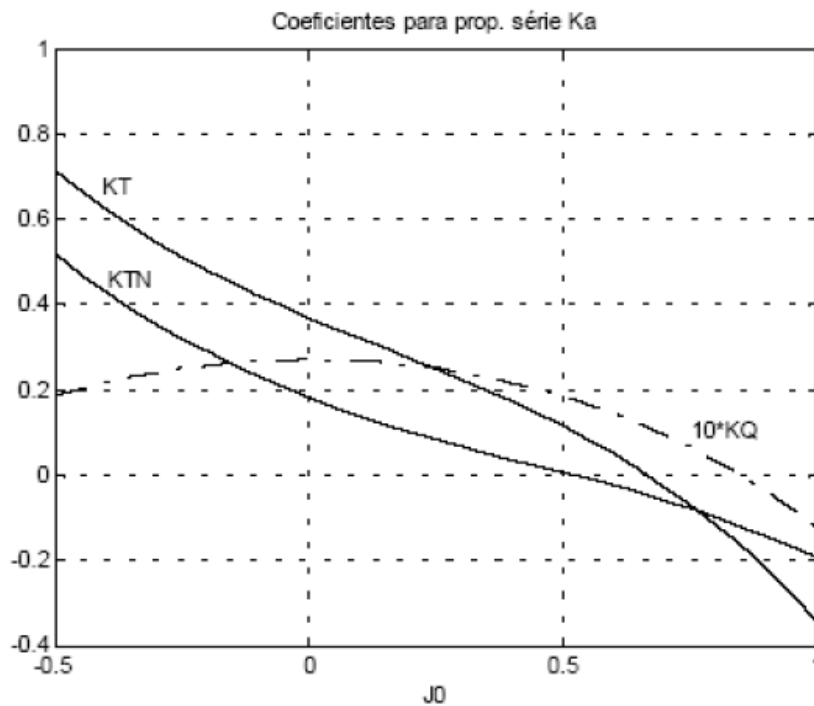
$$K_{TN} = \frac{T_N}{\rho |n_p| n_p D_p^4} \quad (2.18)$$

onde o índice N refere-se ao bocal (nozzle)[3].

Assim o coeficiente equivalente de empuxo pode ser encontrado simplesmente fazendo.

$$K_{Teq} = K_T + K_{TN} \quad (2.19)$$

Os coeficientes  $K_T$  e  $K_Q$  formam as curvas características dos propulsores e diversas séries dessas curvas são dadas por aproximações polinomiais [3], este método de formulação pode ser levado em conta e implementado juntamente com os propulsores de passo variável. Como exemplo é apresentado na *Figura 2-7* curvas para um propulsor em bocal da série Ka utilizando um bocal número 19<sup>a</sup>, com 2m de diâmetro e 1,6m de passo.



**Figura 2-7** - Curvas dos Coeficientes  $K_T$ ,  $K_{TN}$  e  $K_Q$  do Propulsor série Ka e bocal 19A. Passo de 1,6m e diâmetro de 2m.

### 2.6.3 Dinâmica do Propulsor

Na dinâmica do propulsor deve ser considerado ainda que as forças requeridas não se desenvolvem instantaneamente, mas levam um tempo para se apresentarem, isto é, obedecem a uma dinâmica.

Nesta dinâmica precisa-se então considerar a inércia do sistema eixo-propulsor, já que o propulsor é sujeito ao torque elétrico fornecido pelo motor ( $Q_e$ ) e ao torque resistente hidrodinâmico ( $Q_{prop}$ ). Sendo  $I$  o momento de inércia das estruturas girantes, incluindo o propulsor, o eixo e inércia hidrodinâmica adicional, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{n}_p &= \frac{1}{2\pi I} (Q_e - Q_{prop}) \\ \Rightarrow & \\ \dot{n}_p &= \frac{1}{2\pi I} (Q_e - \rho K_Q |n_p| n_p D_p^5) \end{aligned} \tag{2.20}$$

que representa a dinâmica do propulsor.

É resultado desta dinâmica um atraso entre a força comanda e a resposta como o empuxo hidrodinâmico. Este atraso é o mais importante a ser utilizado desta dinâmica.

A utilização do modelo dinâmico completo, descrito pela Eq. (2.24), requer alguns parâmetro que em geral não são conhecidos como a inércia do sistema eixo-propulsor, os ganhos específicos do controlador do motor elétrico responsável pelo valor de  $Q_e$  etc.

De uma forma geral pode se optar pela utilização de um filtro de primeira ordem no lugar da dinâmica do propulsor no cálculo da rotação real do eixo, introduzindo assim um atraso na resposta do sistema propulsivo.

É importante ainda salientar que a escolha do filtro ser de primeira ordem se dá devido a relação de primeira ordem entre a rotação real e o torque elétrico.

Como regra geral calcula-se a constante de tempo do filtro através de um parâmetro que em geral é conhecido para sistemas propulsores, o tempo que leva para ir de uma rotação nula até a máxima. A partir deste estima-se a constante de tempo do filtro, fazendo com que cinco vezes esta seja igual ao tempo para chegada a  $n_{máx}$ , pois em sistemas de primeira ordem cinco constantes de tempo é o que leva-se para chegar a 99% do valor de regime.

Na aproximação do sistema propulsivo descrito acima representaríamos a dinâmica do propulsor com a seguinte FT (Função de Transferência):

$$T(s) = \frac{K_{prop}}{\tau s + 1} \quad (2.21)$$

$K_{prop}$  - ganho linearizado do propulsor;

$\tau$  - constante de tempo do filtro.

#### 2.6.4 LDE

Conforme foi mencionado anteriormente foge do escopo do estudo deste trabalho a determinação do melhor esquema de distribuição de empuxo, já que isto é tema mais que suficiente para uma vasta pesquisa, contudo é interessante mostrar uma das formas que se utiliza para este fim e assim clarear os princípios da LDE.

Assim, deve-se observar que este trabalho determinará o sistema de controle adequado, isto é, aquele que comanda a força adequada na Unidade em AAP ou DP, contudo ainda precisa-se distribuir esta resultante pelos Thrusters.

Um método bastante utilizado é baseado nos Multiplicadores de Lagrange e é o que agora será mostrado.

Nosso sistema de controle irá atuar nos Thrusters (ou Propeller), de forma a corrigir a posição da plataforma, e para isso o sistema gera um vetor de forças requeridas:

$$\begin{aligned}
F_r &= (X_r, Y_r, N_r) \\
T_{pi}^2 &= X_{pi}^2 + Y_{pi}^2 \\
\alpha_i &= \arctg\left(\frac{Y_{pi}}{X_{pi}}\right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n X_{pi} &= X_r \\
\sum_{i=1}^n Y_{pi} &= Y_r \\
\sum_{i=1}^n (-d_{yi} X_{pi} + d_{xi} Y_{pi}) &= N_r
\end{aligned} \tag{2.23}$$

As Eq.2.26 representam as restrições a serem obedecidas.

- Fr - Vetor de forças requeridas pelo sistema de controle como esforço de controle;
- Xr, Yr e Nr - Componentes de Fr, forças e momentos;
- n - Número de propulsores;
- Xpi, Ypi - Componentes de empuxo gerado por cada propulsor;
- dxi e dyi - Posição em x e em y de cada propulsor;
- $\alpha_i$  - Azimute dos propulsores.

Define-se uma função custo  $f_c$ , e o seu mínimo é encontrado através do seu gradiente igualado a zero (princípio dos multiplicadores de Lagrange):

$$f_c = \sum_{i=1}^n (X_{pi}^2 + Y_{pi}^2) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n X_{pi} - X_r \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n Y_{pi} - Y_r \right) + \lambda_3 \left( \sum_{i=1}^n (-d_{yi} X_{pi} + d_{xi} Y_{pi}) - N_r \right) \tag{2.24}$$

Acha-se o mínimo através da aplicação do seguinte operador:

$$\nabla(X_{pi}, Y_{pi}, \lambda_j) f_c = 0 \quad (2.25)$$

⇒

Ao operar o gradiente nas variáveis acima obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} 2X_{p1} + \lambda_1 - \lambda_3 d_{y1} &= 0 \\ 2X_{p2} + \lambda_1 - \lambda_3 d_{y2} &= 0 \\ \vdots & \\ 2X_{pn} + \lambda_1 - \lambda_3 d_{yn} &= 0 \\ 2Y_{p1} + \lambda_2 + \lambda_3 d_{x1} &= 0 \\ 2Y_{p2} + \lambda_2 + \lambda_3 d_{x2} &= 0 \\ \vdots & \\ 2Y_{pn} + \lambda_2 + \lambda_3 d_{xn} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n X_{pi} - X_r &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_{pi} - Y_r &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (-d_{yi} X_{pi} + d_{xi} Y_{pi}) - N_r &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Que na forma matricial é expresso:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -d_{y1} \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -d_{y2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -d_{yn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & d_{x1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & d_{x2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 & d_{xn} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{y1} & -d_{y2} & \cdots & -d_{yn} & d_{x1} & d_{x2} & \cdots & d_{xn} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{p1} \\ X_{p2} \\ \vdots \\ X_{pn} \\ Y_{p1} \\ Y_{p2} \\ \vdots \\ Y_{pn} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_r \\ Y_r \\ N_r \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Ou de forma simplificada:

$$\begin{matrix} AT = B \\ A_{N \times N} \\ T_{N \times 1} \\ B_{N \times 1} \end{matrix} \quad (2.28)$$

Onde B é o vetor aumentado de esforço requerido pelo sistema de controle, T é o vetor aumentado com todas as componentes de força dos propulsores e mais os multiplicadores de Lagrange e A matriz que caracteriza a geometria do arranjo de propulsores.

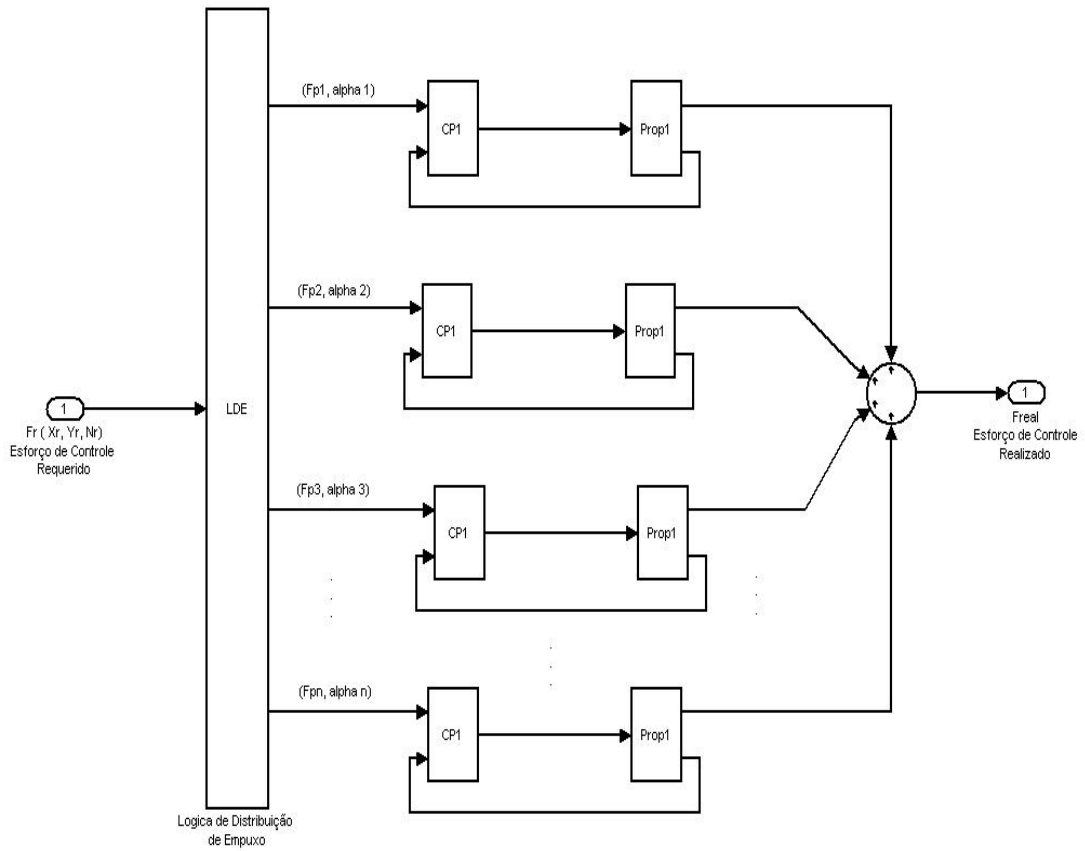
$\lambda_n$  - Multiplicadores de Lagrange;

N - Número de equações e de incógnitas => **solução única.**

Deste modo observa-se que ao resolvermos este sistema obteremos o empuxo que deve ser gerado por cada propulsor para que atenda a demanda do sistema de controle, assim como o seu azimute para o caso de azimutais..

Agora, de uma forma sistêmica, podemos representar nosso sistema propulsivo de forma a possuir uma entrada de comando (forças e momentos requeridos), e como saída a aplicação específica de cada propulsor para atender a demanda requerida.

Esquemáticamente ficaria como se segue:



**Figura 2-8 - Modelo Simplificado de Sistema de Propulsão**



## 2.7 Sensores

Existem diversos tipos de sensores para realizar a medida da posição. Por exemplo: sistemas hidroacústicos de base longa, curta ou ultra-curta; cabo tencionado (*taut-wire*), rádio, satélite (GPS – Global Positioning System) e sistema inercial. Para medir o rumo usa-se em geral um girocompasso. O uso de sensores de velocidade simplificaria o projeto do controlador, porém não existem atualmente sensores de velocidades confiáveis e precisos o suficientes para esta aplicação.

Deve ser notado que o objetivo desta seção é tão somente compreender as características dos sensores de forma a compreender e estabelecer especificações de projeto.

Devido a importância da medida de posição para o perfeito funcionamento do sistema de controle, utiliza-se, para plataformas de perfuração, pelo menos dois sensores com princípio de funcionamentos diferentes. O sistema de referência de posição deve possuir uma lógica de comutação que verifique a falha de um sensor e comute suavemente para o sensor correto, além de possuir filtros para a atenuação de ruídos. Existe, em geral, um computador dedicado exclusivamente para este fim. Deve-se notar que os sistemas de referência de posição possuem por si só complexidade suficiente para um estudo em separado. Existem livros totalmente dedicados a este assunto [23]. Para o projeto do controlador, entretanto, basta apenas conhecer o modelo dinâmico dos sensores.

Três sensores são necessários para as três malhas de controle: posição no eixo de *surge*, posição no eixo de *sway* e rumo (ou azimute da plataforma). Se o sistema possuir compensação ativa de vento então é necessário também um sensor de vento. Os sinais de posição são em geral provenientes de um sensor de dois canais, enquanto que o de rumo apenas um.

### 2.7.1 Sensor de Posição

Como sensores de posição podemos ter o GPS, o SBL (*Short Base Line*) etc.

De forma a observar as características importantes destes sensores para o projeto do sistema de controle utiliza-se aqui o SBL para a posição associado a um sensor do tipo giroscópio vertical para compensar os movimentos de roll e pitch na medição.

A FT deste dispositivo seria na forma a seguir:

$$\Theta_M = \left[ 1 - s^2 \frac{h_w}{g} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \right] \quad (2.29)$$

$\Theta_M$	- $\frac{x_{medido}}{x_{real}}$ - FT de posição
$h_w$	- profundidade
$g$	- aceleração da gravidade
$s$	- operador de laplace
$x$	- posição

Valores típicos de  $\omega_n$  e  $\zeta$  são respectivamente 0.0479 rad/s e 0.332. O modelo poderia ainda ter um ruído de saída, um atraso puro em série para modelar a medição periódica do sistema hidroacústico e um filtro. O ruído injetado representaria a incerteza aleatória na medida, assim é usualmente modelado como ruído branco com média zero e com variância que depende do sensor empregado. A variância pode ser necessária na formulação estocástica do problema, contudo em nosso trabalho este também será um item de projeto e conseqüentemente um dos requisitos de projeto do sensor a ser empregado.

### **2.7.2 Girocompasso**

Após os ciclos de alinhamento, o girocompasso responde a mudanças de rumo de maneira suficientemente rápida, o que de maneira objetiva nos dá a possibilidade de modelá-lo com uma FT unitária, ou seja, um sensor perfeito. Inclusive seu ruído é desprezível para os fins de nossa aplicação.

### **2.7.3 Sensor de Vento**

O sensor de vento apresenta atrasos nas mudanças de velocidade e direção e pode ser modelado por uma função de transferência de primeira ordem. Podendo ainda ser adicionado a saída da FT ruído caso estes dados estejam disponíveis.

O sensor de vento, assim como outros, pode apresentar um erro de medida constante devido à sombra de alguma estrutura ou devido à baixa altura de instalação relativa a superfície. Tal tipo de erro pode ser modelado através de um ganho para a velocidade e um *off-set* para o ângulo.

## 3 MODELO DINÂMICO DO SISTEMA

### 3.1 Introdução

A obtenção do modelo matemático do sistema tem dois objetivos principais: o projeto do controlador em si e a simulação do sistema para a avaliação do desempenho deste.

Deve-se notar que o modelo é uma aproximação que caracteriza um comportamento dinâmico de um sistema físico. Pode se ter vários modelos do mesmo sistema, cada qual com um grau de precisão. No entanto quanto mais preciso for o modelo, maior será sua complexidade e dificuldade de análise.

Os métodos de projeto disponíveis limitam-se basicamente a sistemas com modelos lineares ou linearizados ou ainda a um pequeno conjunto de sistemas não-lineares. Contudo deve-se destacar que modelos muito complexos fazem com que o projetista perca o contato com a física do problema causando assim a redução da capacidade de julgamento sobre o mesmo. Portanto, de forma geral, devem ser usados modelos simplificados.

É importante ressaltar que para tais modelos é muito comum a utilização das simulações digitais. Para tais simulações resolvem-se as equações diferenciais por computador e, aqui sim, é importante que o modelo seja tão realista quanto possível e contendo assim as não-linearidades intrínsecas ao mesmo.

Neste capítulo é desenvolvido um modelo bastante completo para a simulação, este, no entanto, ainda sofrerá algumas simplificações para a obtenção de um modelo linear para o projeto do controlador. Aqui será modelada a dinâmica da plataforma, já que os propulsores, sensores, amarração e forças ambientais já foram modelados no capítulo 2.

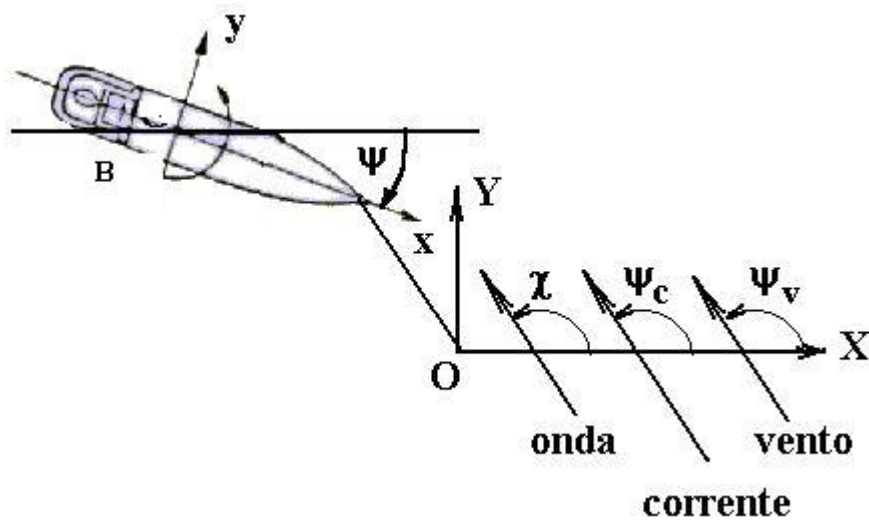
Deve ser salientado ainda que neste capítulo serão introduzidos e definidos todos os conceitos de sistemas de controle robusto SISO para sistemas MIMO, de forma que possa-se lançar mão desta teoria para o tratamento requerido na metodologia de projeto aqui tratada.

### 3.2 Sistema de Coordenadas

Para a obtenção das equações de movimentos de uma plataforma é conveniente usar-se dois sistemas de coordenadas: um estacionário, inercial, fixo na Terra e outro móvel, fixo na plataforma, conforme pode ser visto na *Figura 3-1*.

No sistema de coordenadas estacionário (fixo na Terra – Earth) o eixo X corresponde à direção *norte-sul*, sendo positivo no sentido da origem, O, para o norte, ao passo que o eixo Y corresponde à direção *leste-oeste* sendo positivo no sentido da origem, O, para o oeste. O eixo Z corresponde à direção vertical, tendo seu sentido positivo da origem, O, para cima.

Para o sistema de coordenadas móvel, isto é, fixo na plataforma (corpo- body), em geral escolhe-se a origem no CG da unidade e seus eixos paralelos aos eixos principais da mesma, pois deste modo as equações de movimentos ficam bastante reduzidas com este procedimento. De uma forma geral o eixo x corresponde à direção *proa-popa*, com sentido positivo do CG da embarcação, B, para a proa, ao passo que o eixo y corresponde à direção *boreste-bombordo*, com sentido positivo do CG da embarcação, B, para bombordo. O eixo z é o eixo vertical e tem seu sentido positivo no sentido do CG da embarcação, B, para cima. O rumo (aproamento ou azimute) da plataforma é o ângulo  $\psi$  formado pelos planos verticais que cortam os eixos X e Z, e x e z respectivamente, sendo seu sentido positivo o horário e a partir de Z.



**Figura 3-1 - Sistema de Coordenadas**

Cabe ressaltar que para o desenvolvimento do modelo neste trabalho só serão considerados os movimentos no plano, pois são estes que interessam para a posição que desejamos controlar. Assim, as equações serão simplificadas para o plano horizontal, onde só importarão os graus de liberdade 1, 2 e 6.

É importante notar ainda que todas as equações de movimento serão escritas e resolvidas no sistema de coordenadas do corpo (o local - móvel).

dados:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_6) = (X, Y, \Psi) - \text{vetor posição (sist. inercial)} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = (\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_6) - \text{vetor velocidade (sist. inercial)} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = (\ddot{X}_1, \ddot{X}_2, \ddot{X}_6) - \text{vetor aceleração (sist. inercial)} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_6) = (x, y, \psi) - \text{vetor deslocamento (sist. local)} \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_6) - \text{vetor velocidade (sist. local)} \quad (3.5)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_6) - \text{vetor aceleração (sist. local)} \quad (3.6)$$

Os indexadores de 1 a 6 correspondem aos graus de liberdade do navio:

1 - *surge* (movimento linear em x)

2 - *sway* (movimento linear em y)

6 - *yaw* (movimento de rotação em torno de z)

A transformação de coordenadas do sistema local para o inercial é feita como segue:

$$\begin{aligned} X_j &= T x_j \\ \dot{X}_j &= T \dot{x}_j + \dot{T} x_j \quad j = 1,2 \end{aligned}$$

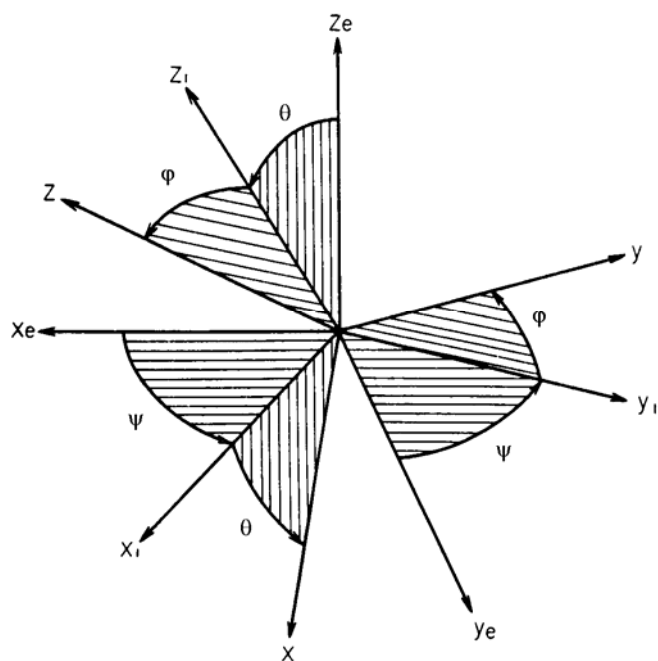
$$\begin{aligned} X_j &= T_R x_j \\ \dot{X}_j &= T_R \dot{x}_j + \dot{T}_R x_j \quad j = 6 \end{aligned}$$

Onde :

$$T = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O ângulo  $\psi$  da matriz de transformação T é um ângulo de Euler, com definição geral conforme a *Figura 3-2*.



**Figura 3-2 - Ângulos de Euler**



### 3.3 Equações de Movimento

Desenvolveremos à seguir as equações de movimentos de um corpo rígido no plano horizontal [2, 3 e 5]., relacionado o sistema de referência móvel com o fixo.

A equação vetorial do movimento do navio em relação ao sistema de coordenadas local, com origem no seu centro de gravidade, pode ser escrita como.

$$M\ddot{\mathbf{x}} = F \quad (3.7)$$

onde :

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

F – Resultante das forças externas.

As equações do movimento do navio são normalmente escritas e resolvidas em relação ao sistema de coordenadas local, uma vez que a massa adicional, e os coeficientes utilizados para os cálculos das forças hidrodinâmicas e aerodinâmicas são tradicionalmente levantados em relação a esse sistema. Tal procedimento tem a vantagem de simplificar as equações para os cálculos destas forças, consequência da simetria do navio. A origem do sistema é colocada no centro de gravidade do navio, de forma a também se obter uma série de simplificações, no caso, nas expressões de inércia do sistema.

Entretanto, o fato do sistema local de coordenadas, fixo ao navio, ser um sistema móvel, ou seja, tem as direções dos vetores de x, y, z variando com o tempo, implica no aparecimento de termos adicionais de inércia. Tal dificuldade, porém, é totalmente compensada com as simplificações decorrentes da utilização da simetria do navio, anteriormente comentadas.

A seguir, são desenvolvidas as equações de corpo rígido, para a determinação da força inercial adicional. Nas seções seguintes, são apresentados os modelos das forças externas consideradas.

A equação do movimento linear, aplicando a 2ª lei de Newton, no sistema local é dada por :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ext} &= m \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) \\ &= m \left( \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

para pequenas rotações tem se que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \frac{d\psi}{dt}\vec{j} \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= -\frac{d\psi}{dt}\vec{i} \end{aligned} \quad (3.10)$$

assim, a equação (3.9) fica:

$$\mathbf{F}_{ext} = m(\ddot{x}\vec{i} + \dot{x}(\dot{\psi}\vec{j}) + \ddot{y}\vec{j} + \dot{y}(-\dot{\psi}\vec{i})) \quad (3.11)$$

rearranjando:

$$\mathbf{F}_{ext} = m[(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\psi})\vec{i} + (\ddot{y} + \dot{x}\dot{\psi})\vec{j}] \quad (3.12)$$

ou ainda, pela notação indexada:

$$\mathbf{F}_{ext} = m[(\ddot{x}_1 - \dot{x}_2\dot{x}_6)\vec{i} + (\ddot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_6)\vec{j}] \quad (3.13)$$

Os termos  $(\ddot{x}_1 - \dot{x}_2\dot{x}_6)$  e  $(\ddot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_6)$  equivalem às componentes da aceleração total do navio em relação ao sistema de coordenadas local, instantâneo.

Para os movimentos angulares tem-se:

$$\mathbf{M}_{ext} = \frac{d}{dt} I_{zz} \dot{\psi} \quad (3.14)$$

ou:

$$\mathbf{M}_{ext} = \frac{d}{dt} (I_z \dot{\psi} \vec{k}) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = \frac{d(I_z \dot{\psi})}{dt} \vec{k} + I_z \dot{\psi} \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (3.16)$$

Considerando que o navio tenha a massa constante com o tempo, e consequentemente a inércia, que não há movimento fora do plano horizontal, e derivando os vetores vem:

$$\mathbf{M}_{ext} = I_z \ddot{\psi} \vec{k} \quad (3.17)$$

ou ainda, pela notação indexada:

$$\mathbf{M}_{ext} = I_Z \ddot{x}_6 \vec{k} \quad (3.18)$$

Assim, se considerarmos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= v \\ \dot{x}_6 &= \dot{\psi} = r \end{aligned} \quad (3.19)$$

Então chegamos a:

$$\mathbf{F}_{ext} = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = m[(\dot{u} - rv)\vec{i} + (\dot{v} + ru)\vec{j}] \quad (3.20)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = (N\vec{k}) = I_Z \dot{r} \vec{k} \quad (3.21)$$

Onde X e Y aqui são as componentes de forças externas nas direções x e y do sistema local respectivamente. Assim como N aqui é a componentes de momento externo na direção e z do sistema local respectivamente.

Na modelação do nosso sistema para o projeto do controlador serão utilizados apenas os três graus de liberdades do plano horizontal, assim as equações 3.20 e 3.21 se reduzem a:

$$\mathbf{F}_{ext} = (X\vec{i} + Y\vec{j}) = m[(\dot{u} - rv)\vec{i} + (\dot{v} + ru)\vec{j}] \quad (3.22)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = N\vec{k} = I_Z \dot{r} \vec{k} \quad (3.23)$$

Cabe ainda ressaltar aqui que quando das simulações as forças de vento e corrente devem ser calculadas levando-se em consideração o movimento da plataforma, isto é, seu aproamento e velocidades. Isso é feito utilizando-se o conceito de velocidade relativa do fluido em relação ao navio, definida por:

$$V_{(c/v)r} = \sqrt{u_r^2 + v_r^2} \quad (3.24)$$

onde, as componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} u_r &= u - V_{c/v} \cos(\psi_{c/v} - \psi) \\ v_r &= v - V_{c/v} \text{sen}(\psi_{c/v} - \psi) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\psi_{(c/v)r} = \text{arctg}\left(\frac{v_r}{u_r}\right)$$

onde  $\psi_{c/v}$  é o ângulo de incidência da corrente (ou vento) em relação ao sistema inercial de coordenadas, e  $V_{c/v}$  é o módulo da velocidade da corrente (ou vento), conforme *Figura.3-1*.

Devemos agora fazer uma linearização das equações de movimento, já que no projeto ao qual esse trabalho se propõe, um controlador robusto e linear, devemos ter um modelo linear do sistema que se deseja controlar, assim iremos desprezar todos os termos de segunda ordem, ou seja, como temos velocidades pequenas envolvidas em um sistema DP é bastante razoável desprezarmos termos multiplicativos entre eles, com isso as equações de movimento do modelo para o projeto (não para a simulação) se reduzem a:

$$\mathbf{F}_{ext} = (X\vec{i} + Y\vec{j}) = m[\dot{u}\vec{i} + \dot{v}\vec{j}] \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = N\vec{k} = I_z \dot{r}\vec{k} \quad (3.27)$$

### 3.4 Forças e Momentos Externos

Neste pontos detalhar-se-á todas as parcelas de forças e momentos externos que agem no nosso sistema (a plataforma) no plano horizontal de forma a se obter nosso modelo de projeto para o controlador.

Sejam:

$$F = ( X , Y , N )$$

$$F = F_w + F_{wi} + F_p + F_c + F_h + F_s$$

$$F_w = F_{w1o} + F_{w2o}$$

$$F_{w1o} = F_{whf}$$

$$F_{w2o} = F_{wlf}$$

$F$  - Forças e momentos externos (resultante)

$F_w$  - Forças e momentos devido às ondas.

$F_{wi}$  - Forças e momentos devido ao vento.

$F_c$  - Forças e momentos devido à correnteza.

$F_s$  - Forças e momentos devido rigidez de ancoragem.

$F_h$  - Forças e momentos hidrodinâmicos devido aos movimentos do corpo.

$F_p$  - Forças e momentos devido à ação dos propulsores (*esforço de controle*).

$F_{w1o}$  - Forças e momentos de 1ª ordem devido às ondas.

$F_{whf}$  - Forças e momentos de alta frequência devido às ondas.

$F_{w2o}$  - Forças e momentos de 2ª ordem devido às ondas.

$F_{wlf}$  - Forças e momentos de baixa frequência devido às ondas.

Tendo em mente a notação acima, observa-se que todas as parcelas de forças e momentos já foram detalhadas, exceto as devido ao movimento do corpo no meio fluido. Tal parcela será levantada apenas em seus termos lineares, já que este é o objetivo do projeto de nosso controlador e conseqüentemente do sistema sob o qual ele é projetado.

Para tanto iremos utilizar os termos lineares das derivadas hidrodinâmicas do casco da plataforma. Assim, vejamos a expansão a seguir.

$$F = F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) &= F(u=0, v=0, r=0, \dot{u}=0, \dots) + \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial u} u + \\ &+ \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial v} v + \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial r} r + \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \\ &+ \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial \dot{v}} \dot{v} + \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial \ddot{u}} \ddot{u} + \\ &+ \dots + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial u^2} u^2 + \dots + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial r^2} r^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial \ddot{u}^2} \ddot{u}^2 + \dots + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial u \partial v} uv + \dots + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial u \ddot{u}} u \ddot{u} + \dots + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots)}{\partial u^3} u^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se reescrevermos as derivadas parciais na notação a seguir teremos as derivadas hidrodinâmicas:

$$X = X(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) \quad (3.30)$$

$$X(u=0, v=0, r=0, \dot{u}=0, \dot{v}=0, \dot{r}=0, \ddot{u}=0 \dots) = X_e \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X}{\partial u} \\ X_v &= \frac{\partial X}{\partial v} \\ &\vdots \\ X_{\dot{u}} &= \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \\ &\vdots \\ X_{uu} &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \\ X_{rr} &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ &\vdots \\ X_{uv} &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 X}{\partial uv} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Segue-se a mesma idéia para Y e N.



Deste modo as forças externas são expressas em derivadas hidrodinâmica da seguinte forma:

Em x:

$$\begin{aligned}
 X(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) &= X = X_e + X_u u + X_v v + X_r r + X_{\dot{u}} \dot{u} + X_{\dot{v}} \dot{v} + X_{\dot{r}} \dot{r} + X_{\ddot{u}} \ddot{u} + \dots \\
 &+ X_{uu} u^2 + X_{uv} uv + X_{ur} ur + \dots + X_{u\ddot{u}} u\ddot{u} + \dots \\
 &+ X_{uuu} u^3 + \dots \\
 &+ X_{uuuu} u^4 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Em y:

$$\begin{aligned}
 Y(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) &= Y = Y_e + Y_u u + Y_v v + Y_r r + Y_{\dot{u}} \dot{u} + Y_{\dot{v}} \dot{v} + Y_{\dot{r}} \dot{r} + Y_{\ddot{u}} \ddot{u} + \dots \\
 &+ Y_{uu} u^2 + Y_{uv} uv + Y_{ur} ur + \dots + Y_{u\ddot{u}} u\ddot{u} + \dots \\
 &+ Y_{uuu} u^3 + \dots \\
 &+ Y_{uuuu} u^4 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Em z:

$$\begin{aligned}
 N(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) &= N = N_e + N_u u + N_v v + N_r r + N_{\dot{u}} \dot{u} + N_{\dot{v}} \dot{v} + N_{\dot{r}} \dot{r} + N_{\ddot{u}} \ddot{u} + \dots \\
 &+ N_{uu} u^2 + N_{uv} uv + N_{ur} ur + \dots + N_{u\ddot{u}} u\ddot{u} + \dots \\
 &+ N_{uuu} u^3 + \dots \\
 &+ N_{uuuu} u^4 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

De uma forma geral estes coeficientes, ou derivadas hidrodinâmicas do casco, são levantados em ensaios e podem ir tão longe quanto se desejar, obviamente dependendo do capital que se tem para investir e disponibilidade dos laboratórios e seus aparatos para ensaio.

Em nosso modelo utilizado para o projeto do controlador nos limitaremos aos termos das primeiras derivadas de aceleração de forma a ser coerente com a segunda lei de Newton, e ainda não utilizaremos termos cruzados ou proporcionais a velocidades ao quadrado, simplificando a análise consistentemente já que nosso sistema de controle se trata de um robusto.

Ainda podemos fazer algumas considerações:

- Simetria do casco em relação as eixos x (não há termos de força cruzados de x com y devido a movimentos em x);
- Não há restauração( não há termos dependentes da posição – já foi feita esta suposição no desenvolvimento acima);
- Utilização de termos dependentes apenas até a primeira derivada (aceleração - após isso não tem significado físico).

Com as premissas acima as nossas forças hidrodinâmicas serão representadas pela seguinte expressão:

Em x:

$$X(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) = X = X_u u + X_{\dot{u}} \dot{u} \quad (3.36)$$

Em y:

$$Y(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) = Y = Y_v v + Y_r r + Y_{\dot{v}} \dot{v} + Y_{\dot{r}} \dot{r} \quad (3.37)$$

Em z:

$$N(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}, \ddot{u} \dots) = N = N_v v + N_r r + N_{\dot{v}} \dot{v} + N_{\dot{r}} \dot{r} \quad (3.38)$$

Que ainda pode ser expressa na forma matricial como segue:

$$F_h = \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ N_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\ddot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{r}} \\ 0 & N_{\dot{v}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_u & 0 & 0 \\ 0 & Y_v & Y_r \\ 0 & N_v & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

### 3.5 Modelo Nominal do Sistema

Agora possuímos todos os elementos necessários para finalizar o nosso modelo sobre o qual projetaremos o sistema de controle.

Juntando todas as partes e igualando ao lado esquerdo da equação de movimentos temos:

$$\begin{bmatrix} m - X_{\ddot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{r}} \\ 0 & N_{\dot{v}} & I_{zz} - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & 0 & 0 \\ 0 & Y_v & Y_r \\ 0 & N_v & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{xx\ddot{u}} & -C_{xy} & -C_{x\psi} \\ -C_{yx} & -C_{yy\dot{v}} & -C_{y\psi} \\ -C_{\psi x} & -C_{\psi y} & -C_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi \end{bmatrix} + F_w + F_{wi} + F_c + F_p \quad (3.40)$$

Vale lembrar que  $F_w$ ,  $F_{wi}$ ,  $F_c$  e  $F_p$ , já foram modelados.

### 3.5.1 Modelo em Espaço de Estados

Neste ponto estamos prontos para apresentar nosso modelo definido em espaço de estados. Esta é a forma tradicional de se tratar sistemas de controle.

O modelo definido em espaço de estados é um sistema do tipo:

$$\dot{X} = AX + BU + GW$$

$$Y = CX + DU + V$$

$$X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \\ x \\ y \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad , \text{onde :}$$

$$x_1 = \dot{x}_4$$

$$x_2 = \dot{x}_5$$

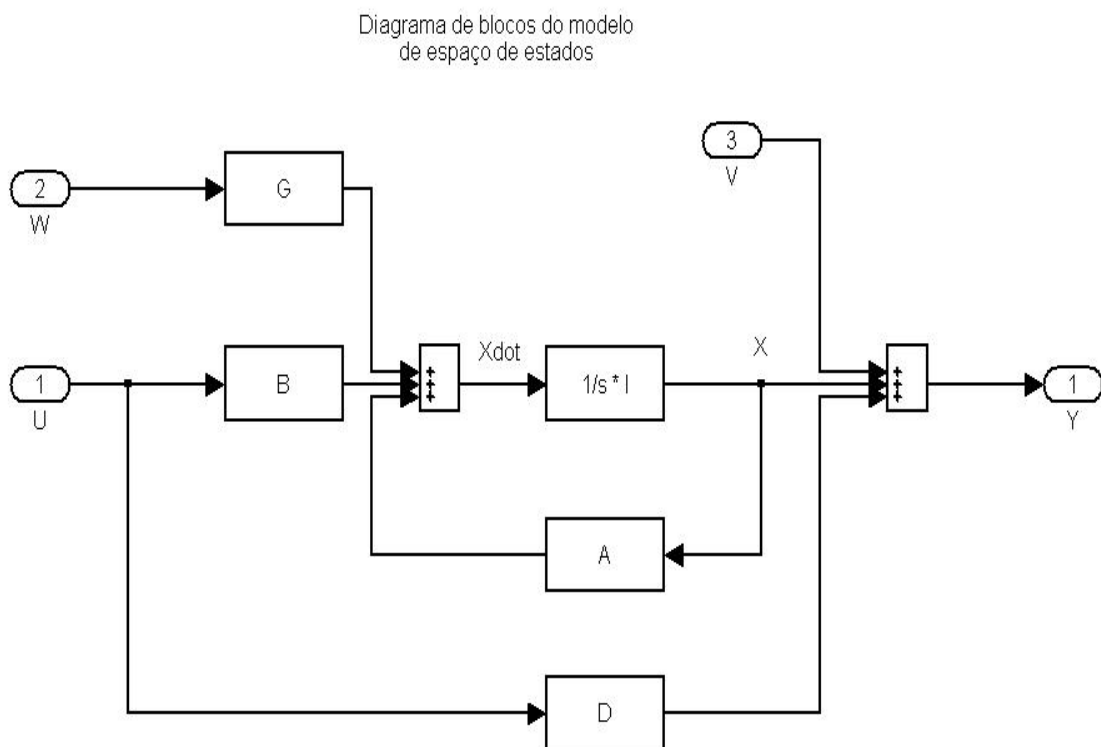
$$x_3 = \dot{x}_6$$

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Deve ainda ser notado que este modelo não possui o atraso dos propulsores, isto pois os azimutais de hoje possuem velocidades de rotação azimutal máxima da ordem de 3 a 4 RPM, o que dá um atraso muito pequeno em vista a nosso sistema robusto, e que na prática, não instabiliza o sistema mas tão somente torna o sistema ligeiramente mais lento. Assim, sem perda de generalidade, estaremos desprezando a sua dinâmica.

- X** - vetor de estados;
- Y** - vetor de saídas;
- U** - vetor de sinais de controle – (entrada);
- W**- distúrbio externo, atua nos estados assim como U;
- V** - ruído presente na saída;
- A** - matriz de mapeamento de X, dinâmica do sistema;
- B** - matriz de ganho da entrada U;
- G** - matriz de ganho do distúrbio externo;
- D** - matriz de mapeamento de U diretamente à saída (  $D = [0]$  para sistemas físicos);
- C** - matriz que gera a combinação linear de estados formadoras da saída.

Este modelo pode ser representado esquematicamente pelo diagrama de blocos da *Figura 3-3*.



**Figura 3-3 - Diagrama de Blocos Genérico de Sistema Definido em Espaço de Estados**

Manipulando as equações e parcelas da dinâmica do sistema teremos:

$$\begin{bmatrix} m - X_{\ddot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\ddot{v}} & Y_{\ddot{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{\ddot{v}} & I_{zz} - N_{\ddot{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & 0 & 0 & -C_{xx} & -C_{xy} & -C_{x\psi} \\ 0 & Y_v & Y_r & -C_{yx} & -C_{yy} & -C_{y\psi} \\ 0 & N_v & N_r & -C_{\psi x} & -C_{\psi y} & -C_{\psi\psi} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ N_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{d1} \\ Y_{d2} \\ N_{d3} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$\Rightarrow$

$$M\dot{X} = \hat{A}X + \hat{B}U + \hat{G}\bar{W} \tag{3.42}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{X} = M^{-1}\hat{A}X + M^{-1}\hat{B}U + M^{-1}\hat{G}\bar{W} \tag{3.43}$$

onde:

$$A = M^{-1}\hat{A} \tag{3.44}$$

$$B = M^{-1}\hat{B}$$

$$\bar{G} = M^{-1}\hat{G}$$

assim,

$$\dot{X} = AX + BU + \bar{G}\bar{W} \tag{3.45}$$

$$Y = CX$$

reescrevendo,

$$GW = \bar{G} \bar{W} \quad (3.46)$$

então,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU + GW \\ Y &= CX + V \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e,

$$W = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}, \text{ são os distúrbios externos.} \quad (3.49)$$

e

$$V = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}, \text{ são os ruídos na saída.} \quad (3.50)$$

*finalmente,*

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

*assim,*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Deste modo nosso sistema fica todo definido em um modelo de espaço de estados conforme a Eq.(3.47).

### **3.6 Conceituação MIMO da Planta**

#### **3.6.1 Introdução**

Deste ponto em diante passa-se a generalizações de importantes conceitos SISO para o caso MIMO, contudo uma revisão detalhada dos conceitos aqui utilizados se encontra no apêndice A.

No restante deste capítulo são generalizados para sistemas MIMO todos os conceitos necessários advindos da teoria de sistemas SISO, tais como erro de modelagem, robustez da estabilidade e do desempenho, entre outros, definindo assim os objetivos de projeto em função de tais conceitos.



O tratamento dado a técnica de projeto aqui contida se baseia não apenas no modelo nominal da planta, como também no erro associado a este modelo. Já que nenhum modelo matemático é capaz de representar perfeitamente um dado sistema físico, é necessário estabelecer alguma forma de representar e quantificar o erro (ou incerteza) a ele associado [27].

Existem dois tipos básicos de representações para os erros associados a um modelo, sendo elas, estruturadas e não estruturadas. Por exemplo, a relevância dos parâmetros do modelo a um dado conjunto é uma representação altamente estruturada do erro de modelagem. Neste caso, supõe-se conhecida a estrutura do modelo, residindo a incerteza apenas nos valores numéricos de seus parâmetros.

Já uma forma não estruturada de representação dos erros de modelagem é aquela que se refere à pertinência da matriz de funções de transferência da planta a um conjunto dado. Aqui, porém, não importa explicitar exatamente quais as fontes da incerteza – já que o relevante é apenas efeito final delas. Deste modo, quando se define a matriz de erro aditivo  $E_A(s)$  de maneira que

$$G_R(s) = G_N(s) + E_A(s) \quad , \quad (3.53)$$

e, assim como no caso SISO, não se está inferindo nada a respeito do mecanismo que produziu  $E_A(s)$ . A incerteza pode ser causada por efeitos dinâmicos desprezados, variações lentas de parâmetros ou quaisquer outros parâmetros não especificados.

*Contudo, cabe ressaltar que o levantamento destes parâmetros foge ao escopo deste texto, sendo por si só o tema de um completo estudo, assim, aqui utilizar-se-á de técnicas mais simples visando apenas mostrar a validade da metodologia de projeto adotada.*

### 3.6.2 Modelo Nominal

Assim como no caso SISO, o procedimento de projeto para sistemas MIMO é baseado em se fazer com que o sistema nominal atenda a determinado conjunto de restrições de desempenho e estabilidade, considerando-se os erros de modelagem no estabelecimento destas restrições.

Devem-se incorporar ao modelo nominal todas as dinâmicas que se deva aumentar neste de forma a atender, por exemplo, especificações de acompanhamento de sinais de referência e/ou de rejeição de perturbações. Um exemplo típico é a inclusão de integradores na entrada da planta. Esta questão ainda será discutida em capítulos a diante.

É importante notar, que de antemão admite-se que o modelo nominal da planta seja linear, invariante no tempo e de dimensão finita. No domínio do tempo admite-se que este seja representado na forma de estados por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}, \quad (3.54)$$

onde  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t), y(t) \in R^m$  e as matrizes A, B e C são constantes e com dimensão compatível. Note-se que o número de entradas é igual ao de saídas e, a planta é admitida quadrada.

No domínio da frequência, a matriz de funções de transferência nominal da planta  $G_N(s) \in C^{m \times m}$  é dada por

$$G_N(s) = C\Phi(s)B \quad (3.55)$$

onde

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.56)$$

são feitas as seguintes hipóteses acerca do modelo nominal:

- o par (A, B) é controlável [1];
- o par (C, A) é observável [1];
- os zeros de transmissão do modelo nominal são de fase mínima (isto é, estão localizados no SPE aberto) [1].

### 3.6.3 Representação do Erro de Modelagem

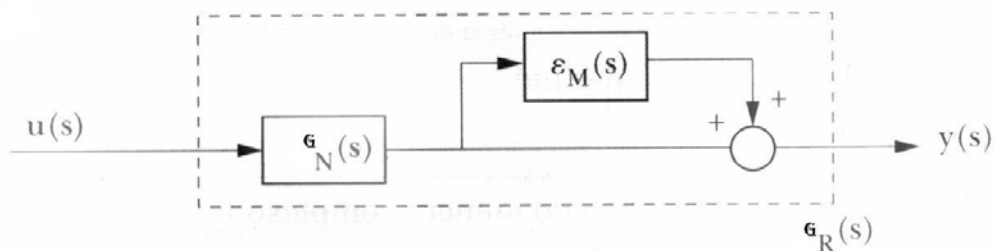
Identicamente ao caso SISO, utiliza-se aqui o erro multiplicativo para a representação do erro de, pela mesma razão que ele descreve o erro no modelo tanto para a matriz de funções de transferência da planta, como para a matriz de funções de transferência de malha. Sendo assim, adota-se o erro multiplicativo como [24]:

$$\varepsilon_M(s) = [G_R(s) - G_N(s)]G_N^{-1} \quad (3.57)$$

com essa definição, resulta que

$$G_R(s) = [I + \varepsilon_M(s)]G_N(s) \quad , \quad (3.58)$$

cujas representação na forma de diagrama de blocos é apresentada na *Figura 3-4*.



**Figura 3-4 - Diagrama de Blocos da Planta Real**

Em vista da estrutura do diagrama acima representado, diz-se que o erro de modelagem se apresenta refletido na saída da planta.

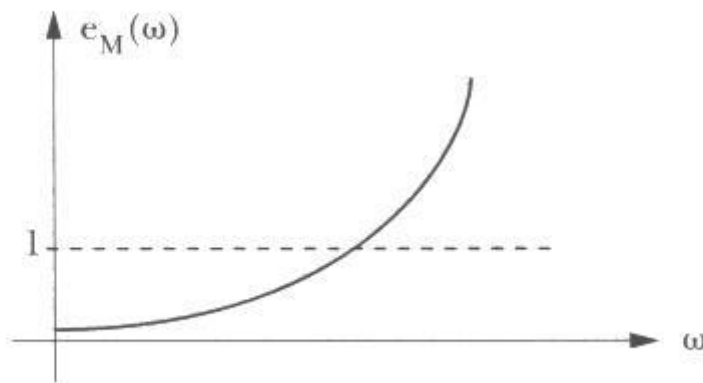
Naturalmente, o projetista não dispõe, em geral, da matriz  $\varepsilon_M(s)$ . Supõe-se porém, que ele seja capaz de estimar um limite superior para o erro como uma função escalar da frequência. Esse limite, aqui designado por  $e_M$ , será definido utilizando-se a norma espectral de  $\varepsilon_M(j\omega)$  como medida da magnitude do erro, isto é,

$$\|\varepsilon_M(j\omega)\| \leq e_M(\omega) \quad (\forall \omega \in R) \quad (3.59)$$

Com isso, considera-se a pior direção para definir o limite para o erro, o que pode introduzir certo grau de conservadorismo na representação. Essa medida do erro de modelagem será tão mais efetiva quanto mais “esférica” for a matriz  $\varepsilon_M(j\omega)$ , isto é, quanto mais próximos estiverem entre si os valores de  $\sigma_M[\varepsilon_M(j\omega)]$  e  $\sigma_m[\varepsilon_M(j\omega)]$ .

Em resumo admite-se que  $e_M(\omega)$  seja conhecido como parte do processo de modelagem.

O comportamento típico da função  $e_M(\omega)$  é aquele ilustrado na *Figura 3-5*.



**Figura 3-5** - Comportamento Típico de  $e_M(\omega)$  – retirado de [4]

A representação da incerteza adotada acima pode ser utilizada para incluir efeitos de perturbações que não são de fato incertezas. Assim, por exemplo, um elemento não-linear pode ter sido modelado com precisão, mas como a presente técnica não é apropriada ao tratamento de não linearidades, estas são consideradas através de setores cônicos [28]. Como outro exemplo, pode-se optar deliberadamente por ignorar várias características dinâmicas conhecidas de uma planta, de forma a tornar o modelo nominal mais simples. Neste caso, podem ser citadas a exclusão da dinâmica de atuadores ou sensores (faremos isso em nosso projeto, por simplicidade e objetivando destacar especialmente a metodologia de projeto aqui tratada), também a redução de ordem de modelos, etc.

Outra consideração a respeito de  $e_M(\omega)$  é que sua construção não é, em geral, tarefa simples [27]. Essa representação do erro de modelagem pressupõe um único limite superior, representativo do pior caso, associado a todos os canais de controle. Se existirem níveis de incerteza substancialmente distintos nos vários canais (isto é,  $\sigma_M[\varepsilon_M(j\omega)]$  muito diferente de  $\sigma_m[\varepsilon_M(j\omega)]$ ), pode ser necessário mudar a escala das variáveis de entrada e/ou saída, ou mesmo aplicar transformações dependentes da frequência para tornar  $e_M(\omega)$  uniformemente justo. Esses fatores de escala e transformações devem fazer parte do levantamento do modelo nominal  $G_N(s)$ .

Note-se que, com a representação acima,  $G_R(s)$  representa, de fato, um elemento qualquer de uma classe de matrizes de funções de transferência definida pela função  $e_M(\omega)$ .

Supõe-se, no que se segue, que o número de pólos instáveis é o mesmo para ambas  $G_R(s)$  e  $G_M(s)$  [27], o que, conforme dito anteriormente, é uma hipótese usual quando se usa o Critério de Nyquist para estudar a robustez de sistemas de controle.

Evidentemente os pólos instáveis de  $G_R(s)$  e  $G_M(s)$  não precisam ser idênticos, mas precisam ser em número igual num e noutro caso.

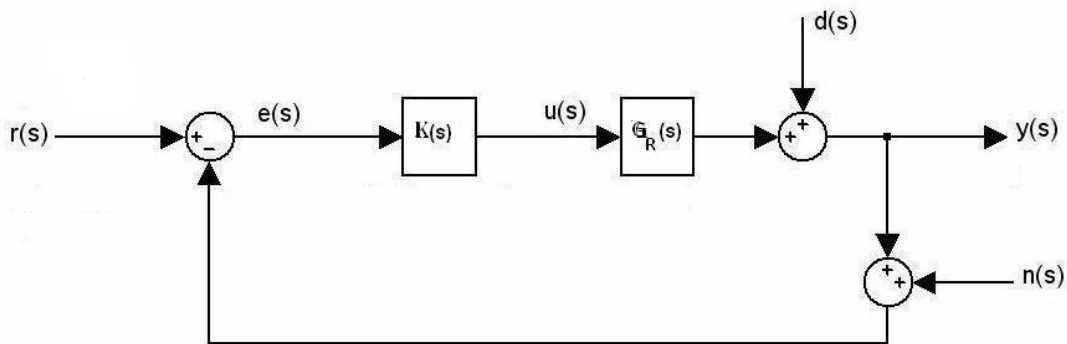
Ademais, admitir-se-á também que a matriz de funções de transferência seja estritamente própria para toda  $\varepsilon_M(s)$  admissível. A implicação desta hipótese deverá ficar clara mais adiante, quando da utilização do Critério de Nyquist Multivariável para o estudo da estabilidade do sistema. É ela que permite restringir a atenção apenas ao eixo imaginário, pois, fora daí,  $\|G_R(s)K(s)\| \rightarrow 0$  já que  $\|s\| \rightarrow \infty$ .

*Cabe ainda enfatizar que fôge do escopo deste trabalho o desenvolvimento de como se levantar  $e_M(\omega)$ , mas sim destacar a metodologia de projeto.*

### 3.7 Objetivos de Projeto

#### 3.7.1 Introdução

O objetivo da presente técnica de projeto é definir um compensador  $K(s)$  de maneira tal que toda a classe de sistemas em malha fechada representados na *Figura 3-6* satisfaça a determinadas especificações de projeto.



**Figura 3-6 - Diagrama de Blocos da Classe de Sistemas Reais**

Conforme sempre tem sido mencionado, os requisitos a serem satisfeitos dizem respeito à estabilidade e desempenho.

Com relação à estabilidade, deseja-se não apenas que o sistema nominal seja estável, como a robustez da estabilidade esteja garantida, isto é, toda a classe de sistemas reais seja estável.

Quanto ao desempenho, deseja-se que toda essa classe de sistemas satisfaça especificações de acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações, insensibilidade ao erro de medida e à variação de parâmetros do modelo nominal da planta.

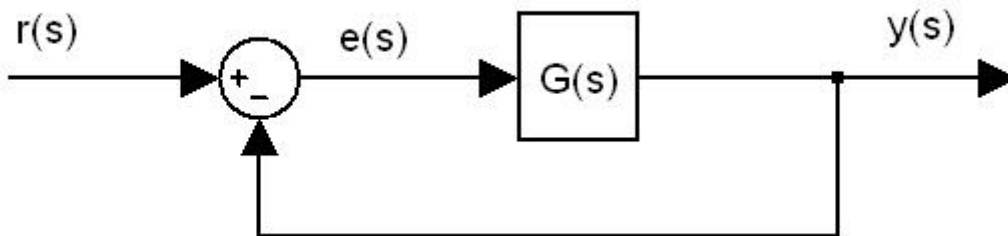
### 3.7.2 Estabilidade

A estabilidade do sistema nominal pode ser analisada pelo Critério de Nyquist Multivariável. Esta é a ferramenta a adequada para este fim, pois é possível utilizá-la também com o objetivo de estudar a robustez da estabilidade. No entanto, no caso MIMO, o tratamento da robustez da estabilidade requer considerações adicionais, diferentemente do caso SISO, em que isso é praticamente imediato.

#### 3.7.2.1 Estabilidade do Sistema Nominal

O objetivo desta seção é apresentar o Critério de Nyquist Multivariável.

Em primeiro lugar é necessário estabelecer uma relação entre os autovalores do sistema em malha aberta e os de malha fechada. Para simplificar a notação, considere-se o sistema representado na *Figura 3-7*.



**Figura 3-7** - Diagrama de Blocos do Sistema para o Estudo da Estabilidade

Seja  $(A, B, C)$  uma representação de estados de  $G(s)$ , isto é,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.60)$$

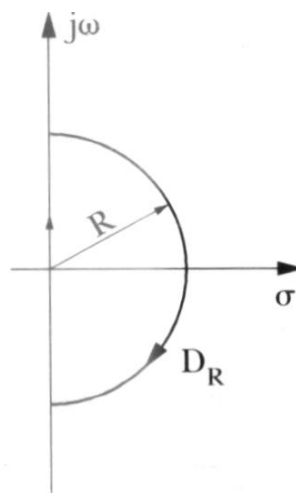
Os autovalores do sistema em malha aberta são as raízes da equação característica de  $\Phi_{MA}(s)$ :

$$\Phi_{MA}(s) = \det(sI - A) \quad (3.61)$$

Vale então a seguinte identidade, que relaciona os autovalores de malha aberta e de malha fechada do sistema.

$$\Phi_{MF}(s) = \Phi_{MA}(s) \det[I + G(s)] \quad (3.62)$$

Com essa relação em mãos, pode-se passar ao estudo do Critério de Nyquist Multivariável, propriamente. Cabe notar que os argumentos utilizados na demonstração do caso MIMO são os mesmos do caso SISO.



**Figura 3-8** - Contorno de Nyquist – retirado de [4]

Como pode ser notado o sistema em malha fechada será assintoticamente estável se somente se nenhuma das raízes de  $\Phi_{MF}(s)$  estiver localizada no SPD fechado. Da mesma forma que no caso SISO, a idéia básica é considerar uma curva fechada no plano  $s$  envolvendo, no limite, todo o SPD fechado. O contorno de Nyquist  $D_R$  utilizado, para  $R \rightarrow \infty$ , está representado na *Figura 3-8*.

Nestas condições o sistema em malha fechada será estável se e somente se a região definida pelo contorno  $D_R$  não contiver nenhuma raiz de  $\Phi_{MF}(s)$ . Para garantir este fato, utiliza-se o *Princípio do Argumento*, que pode ser entendido através do raciocínio simples que se segue.



Considere-se uma função racional genérica:

$$f(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{nz})}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{np})},$$

onde  $k > 0$ , para a qual vale:

$$\arg[f(s)] = \sum_{i=1}^{nz} \arg(s - z_i) - \sum_{j=1}^{np} \arg(s - z_j).$$

Seja  $C$  um contorno fechado que não passa por nenhum pólo ou zero de  $f(s)$  e sejam  $v_z$  e  $v_p$ , respectivamente, os números de zeros e pólos de  $f(s)$  no interior de  $C$ .

Quando  $s$  percorre  $C$  no sentido horário, a curva fechada que representa a imagem de  $f(s)$  no plano complexo envolve a origem deste  $v_z - v_p$  vezes também no sentido horário. Para representar este fato, define-se a função:

$$N(0, f(s), C) = v_z - v_p \quad (3.63)$$

Se  $v_{z1}$ ,  $v_{z2}$ ,  $v_{p1}$  e  $v_{p2}$  são, respectivamente, os números de zeros e pólos de  $f_1(s)$  e  $f_2(s)$  no interior de  $C$ , uma propriedade imediata de  $N(., ., .)$  é que

$$N(0, f_1(s)f_2(s), C) = (v_{z1} + v_{z2}) - (v_{p1} + v_{p2}) \quad (3.64)$$

Aplicando o princípio do argumento à função  $\Phi_{MF}(s)$ , resulta que o sistema em malha fechada será estável se e somente se:

$$N(0, \Phi_{MF}(s), D_R) = 0 \quad (3.65)$$

já que  $\Phi_{MF}(s)$  é um polinômio em  $s$  e, portanto, não tem pólos, mas apenas zeros.

Tendo em vista a propriedade dada por (3.62) e considerando (3.64), a condição de estabilidade de (3.65) pode ser reescrita de forma equivalente como:

$$N(0, \Phi_{MA}(s), D_R) + N(0, \det[I + G(s)], D_R) = 0 \quad (3.66)$$

Designando por  $n_{pi}$  o número de pólos instáveis do sistema em malha aberta (isto é, o número de zeros de  $\Phi_{MA}(s)$  no SPD),

$$n_{pi} = N(0, \Phi_{MA}(s), D_R) \quad (3.67)$$

segue-se, portanto que

$$N(0, \det[I + G(s)]_p, D_R) = -n_{pi} \quad (3.68)$$

A última expressão representa o Critério de Nyquist Multivariável. Em palavras, seu enunciado pode ser representado como: o sistema em malha fecha é estável se e somente se, quando  $s$  percorre o contorno de Nyquist  $D_R$  no sentido horário, o número de envoltimentos da origem realizado pela imagem da função  $\det[I+G(s)]$  no sentido anti-horário é igual ao número de autovalores instáveis do sistema em malha aberta.

Neste ponto cabem algumas considerações.

- a) Em primeiro lugar, deve-se notar ser imediata a equivalência entre as seguintes expressões do Critério de Nyquist Multivariável:

$$N(0, \det[I + G(s)]_p, D_R) = -n_{pi}$$

e

$$N(-1, -1 + \det[I + G(s)]_p, D_R) = -n_{pi}$$

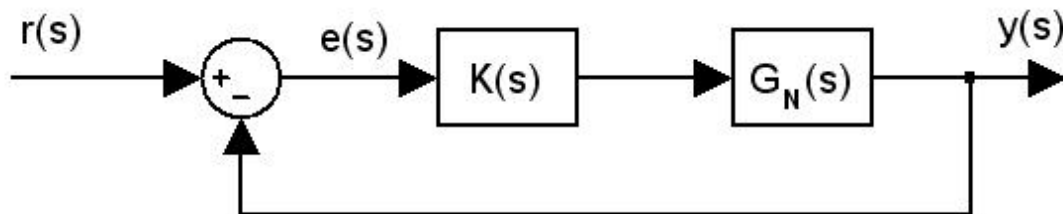
- b) Deve-se também notar que a função  $\det[I+G(s)]$  é racional e, portanto, em geral, tem tanto pólos como zeros.
- c) O Critério de Nyquist Multivariável fornece uma resposta de tipo *SIM* / *NÃO* à questão da estabilidade de sistemas MIMO em malha fechada. Ele estabelece uma Condição Necessária e Suficiente (CNS) de estabilidade.

d) Talvez uma maior razão da popularidade do Critério de Nyquist para sistemas SISO esteja no seu valor como ferramenta gráfica de projeto. Examinando o Diagrama de Nyquist é possível não apenas ter uma idéia do tipo de compensador a utilizar num dado problema, como também da robustez da estabilidade do sistema em face de erros de modelagem. As margens de ganho e fase são medidas tradicionalmente utilizadas para esta finalidade.

Contudo, para sistemas MIMO, o Diagrama de Nyquist Multivariável não fornece qualquer indicação a respeito do tipo de compensação que deve ser utilizado para estabilizar o sistema. Além disso, não é possível extrair dele qualquer informação a respeito da robustez da estabilidade do sistema em malha fechada.

Cabe então ressaltar que para termos de fato idéia da robustez em sistemas MIMO devemos olhar  $\sigma[I+G(j\omega)]$ .

Observando o diagrama de blocos da *Figura 3-9*, que é o nosso problema de fato, conclui-se que:



**Figura 3-9 - Diagrama de Blocos do Sistema de Interesse**

Para este sistema a condição estabelecida pelo Critério de Nyquist Multivariável se escreve como:

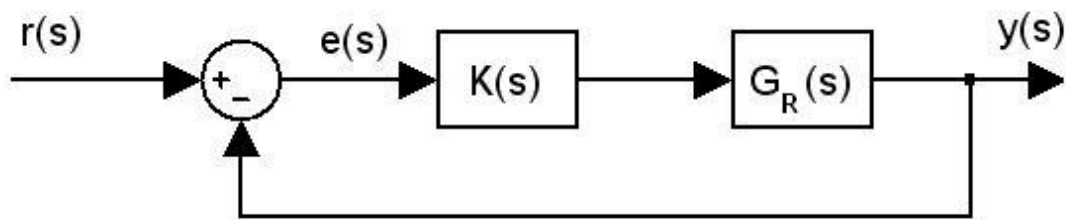
$$N(0, \det[I + G_N(s)K(s)], D_R) = -n_{pi} \quad (3.69)$$

ou equivalentemente,

$$N(-1, -1 + \det[I + G_N(s)K(s)]_p D_R) = -n_{pi} \quad (3.70)$$

### 3.7.2.2 Estabilidade do Sistema Real

Aqui é estabelecida uma condição que garanta a estabilidade do sistema real.



**Figura 3-10 - Diagrama de Blocos do Sistema de Real**

Em outras palavras, será apresentado o requisito necessário a que o modelo nominal da planta atenda de forma que a estabilidade de toda a família de sistemas representados na *Figura 3-10* seja assegurada. dado que

$$G_R(s) = [I + \varepsilon_M(s)]G_N(s) \quad (3.71)$$

para toda  $\varepsilon_M(s)$  tal que

$$\|\varepsilon_M(j\omega)\| < e_M(\omega) \quad (\forall \omega \in R) \quad (3.72)$$

onde  $e_M(\omega)$  é uma função suposta conhecida.

Como  $R \rightarrow \infty$  e  $G_R(s)K(s)$  é suposta estritamente própria, quando  $s \in D_R$ ,  $s \neq j\omega$ , tem-se que  $G_R(s)K(s) \rightarrow 0$ . Por essa razão, na aplicação do Critério de Nyquist Multivariável, pode-se considerar apenas a porção de  $D_R$  que corresponde ao eixo imaginário.

Conforme visto na seção anterior, o Diagrama de Nyquist Multivariável não permite avaliar de imediato a robustez da estabilidade do sistema nominal em malha fechada.

Intuitivamente, contudo, o que se pode afirmar é que um sistema multivariável não será robusto em face de erros de modelagem se a matriz de funções de transferência diferença de retorno nominal,  $I + G_N(j\omega)K(j\omega)$ , for “próxima” de singular para algum valor de  $\omega$ , pois, se isso ocorrer, uma “pequena” perturbação em  $G_N(j\omega)$  poderá anular  $\det[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]$ . Com isso, mudará o número de envoltimentos a que se refere o Critério de Nyquist Multivariável e estabilidade estará perdida.

Neste ponto é oportuno lembrar a hipótese feita na seção 3.6 de que  $G_R(s)$  e  $G_N(s)$  têm o mesmo número de pólos instáveis.

A estabilidade de toda a classe de sistemas reais está assegurada se o número de envoltimentos em torno da origem, contados no sentido anti-horário, realizados por  $\det[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$  for igual ao número de pólos instáveis de  $G_R(j\omega)K(j\omega)$ .

Em vista da hipótese acima, o número de envoltimentos de  $\det[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$  deverá ser então igual ao número de autovalores instáveis de  $G_N(s)K(s)$ , uma vez que o sistema nominal é admitido estável em malha fechada.

Sendo assim, a estabilidade da classe de sistemas reais estará garantida se o número de envoltimentos de  $\det[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$  permanecer inalterado para toda  $G_R(s)$  tal que  $\|\varepsilon_M(j\omega)\| < e_M(\omega)$ . Este fato estará assegurado se  $\det[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$  não se anular para todo  $\omega \in R$ , pois, obviamente, as mudanças do número de envoltimentos da origem sempre correspondem a anulações dessa função.

Essa condição pode ser escrita como:

$$I + [I + \varepsilon_M(j\omega)]G_N(j\omega)K(j\omega) \text{ for não singular } (\forall \omega \in R)$$

ou seja,

$$I + G_N(j\omega)K(j\omega) + \varepsilon_M(j\omega)G_N(j\omega)K(j\omega) \text{ não singular } (\forall \omega \in R)$$

onde

Como o sistema nominal em malha fechada foi admitido estável, ele não tem autovalores sobre o eixo imaginário e, portanto,  $I + G_N(j\omega)K(j\omega)$  é não singular. Assim, para que a condição acima se verifique é suficiente que:

$$[I + \varepsilon_M(j\omega)C_N(j\omega)] + [I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \text{ não singular } (\forall \omega \in R)$$

que por sua vez é o mesmo que:

$$[I + \varepsilon_M(j\omega)C_N(j\omega)] \text{ não singular } (\forall \omega \in R)$$

onde  $C_N(j\omega)$  é a planta compensada ou Matriz de Sensibilidade Complementar.

A questão da estabilidade robusta pode, pois, ser resumida em assegurar que a matriz  $[I + \varepsilon_M(j\omega)C_N(j\omega)]$  seja não singular para todo  $\omega \in R$ .

Que ao lançarmos mão de algumas manipulações algébricas e resultados de [27], tem-se:

$$\sigma_M[C_N(j\omega)] < \frac{1}{e_M(\omega)} \quad (\forall \omega \in R) \quad (3.73)$$

A desigualdade (3.73) é a representação da *Condição de Robustez da Estabilidade*.

A condição acima é a generalização para sistemas MIMO de (A.48) para sistemas SISO.

Exatamente como no caso SISO, aqui a Condição de Robustez da Estabilidade mostra que a estabilidade do sistema real só está garantida se o ganho em malha fechada for suficientemente pequeno na região em que o erro de modelagem é “grande”, impondo assim uma restrição a banda passante do sistema, já que em geral estes erros crescem com a frequência.

De forma equivalente, se  $G_N(j\omega)K(j\omega)$  não tem zeros de transmissão no eixo imaginário, a Condição de Robustez da Estabilidade pode ser expressa pela seguinte expressão:

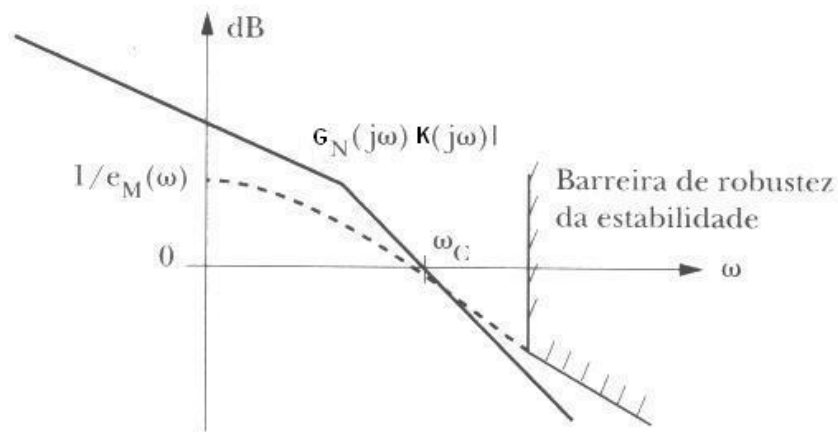
$$\sigma_m \{I + [G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} > e_M(\omega) \quad (3.74)$$

Se considerarmos, ainda  $e_M \gg 1$ , então pode-se obter nova forma de expressar a condição acima:

$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] < \frac{1}{e_M(\omega)} \quad (3.75)$$

A condição (3.75) pode ser visualizada na *Figura 3-11*.

Deve ser notado que a condição (3.75) apresenta-se de forma bastante interessante já que utiliza as FTs da planta e do compensador de um lado e do outro a incerteza no modelo, o que é bastante atrativo por lidar exatamente com os elementos principais de projeto.



**Figura 3-11** - Visualização da Condição de Robustez da Estabilidade em sua forma aproximada – retirado de [4]

### 3.7.3 Desempenho

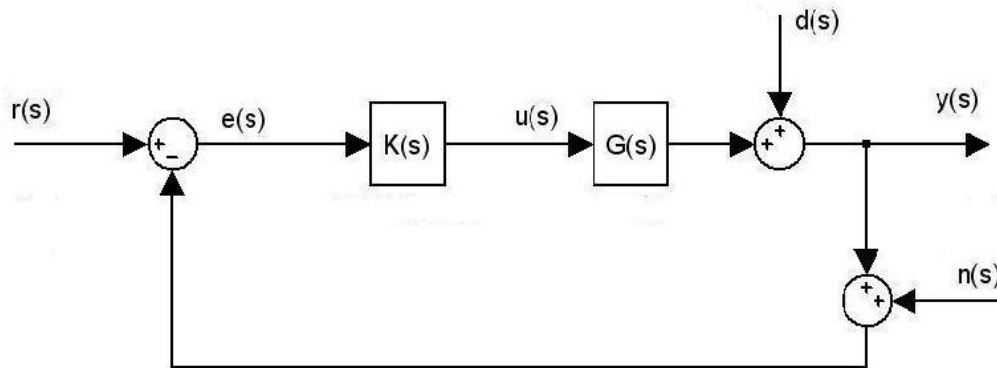
Nesta seção estendem-se as conclusões a respeito do caso SISO para o caso MIMO. De forma mais direta, será mostrado que matrizes de FT de malha “grandes” asseguram bom acompanhamento de sinal de referência, boa rejeição de perturbações e tem, ainda, boa insensibilidade a variações na planta; em contrapartida é salientado que quando as matrizes acima mencionadas são “pequenas”, o sistema apresenta boa rejeição ao erro de medida.

Tais características são visualizadas na forma de barreiras de desempenho, as quais devem ser obedecidas pelos Diagramas de Bode da matriz de FT de malha do sistema. Será, ainda, observada a influência do erro de modelagem sobre as barreiras citadas.



### 3.7.3.1 Desempenho do Sistema Nominal

Seja o sistema nominal como representado na figura a seguir.



Para este sistema valem as seguintes igualdades:

$$y(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} G_N(s)K(s)r(s) + [I + G_N(s)K(s)]^{-1} d(s) - [I + G_N(s)K(s)]^{-1} G_N(s)K(s)n(s) \quad (3.76)$$

e

$$e(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} r(s) - [I + G_N(s)K(s)]^{-1} d(s) - [I + G_N(s)K(s)]^{-1} n(s) \quad (3.77)$$

- Acompanhamento do Sinal de referência

Similarmente ao caso SISO, aqui a contribuição do sinal de referência para a saída é:

$$y(j\omega) = [I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1} G_N(j\omega)K(j\omega)r(j\omega) \quad (3.78)$$

Sendo  $\Omega_r$  a faixa de frequências onde  $r(j\omega)$  tem a maior parte de sua energia. O que, de forma geral, é um sinal de baixa frequência, isto é:

$$\Omega_r = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_r\} \quad (3.79)$$

O que, de forma objetiva, mostra que se a matriz de funções de transferência de malha  $G_N(j\omega)K(j\omega)$  for “grande”,  $y(j\omega) \approx r(j\omega)$  para todo  $(\omega \in \Omega_r)$ .

Assim, de forma direta para garantir o acompanhamento do sinal de referência, basta que:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (3.80)$$

Agora precisa-se saber o quão “grande”  $\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)]$  deve ser para garantir o acompanhamento do sinal de referência.

Para responder esta questão deve-se supor que se conhece um limite, o qual erro relativo no sinal de referência não deve ultrapassar como especificação de projeto,  $\alpha_r(\omega) \ll 1$ . Usualmente constante para  $(\omega \in \Omega_r)$ , isto é:

$$\frac{\|e(j\omega)\|}{\|r(j\omega)\|} \leq \alpha_r(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (3.81)$$

Para tanto é suficiente impor que:

$$\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_r(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (3.82)$$

Que de forma aproximada é expresso por:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_r(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (3.83)$$

A condição acima estabelece uma barreira que deve ser respeitada pelo Diagrama de Bode da matriz de funções de transferência de malha do sistema nominal para que seja atendida a especificação de *acompanhamento do sinal de referência*.

- Rejeição de Perturbações

Similarmente ao caso SISO, aqui a contribuição da perturbação para a saída é:

$$y(j\omega) = [I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1} d(j\omega) \quad (3.84)$$

Sendo  $\Omega_d$  a faixa de frequências onde  $d(j\omega)$  tem a maior parte de sua energia. O que, de forma geral, é um sinal de baixa frequência, isto é:

$$\Omega_d = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_d\} \quad (3.85)$$

O que, de forma objetiva, mostra que se a matriz de funções de transferência de malha  $G_N(j\omega)K(j\omega)$  for bem maior que a identidade (matriz I), ou seja, “grande”, a contribuição de  $d(j\omega)$  para a saída é nula para todo  $(\omega \in \Omega_d)$ .

Assim, de forma direta para garantir a rejeição de perturbações, basta que:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (3.86)$$

Agora se precisa saber o quão maior que 1  $\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)]$  deve ser para garantir a rejeição da contribuição de  $d(j\omega)$  para a saída.

Analogamente ao caso anterior, se deve conhecer de antemão, como especificação de projeto,  $\alpha_d(\omega) \ll 1$ . Usualmente constante para  $(\omega \in \Omega_d)$ , isto é:

$$\frac{\|e(j\omega)\|}{\|d(j\omega)\|} \leq \alpha_d(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (3.87)$$

Para tanto é suficiente impor que:

$$\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_d(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (3.88)$$

Que de forma aproximada é expresso por:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_d(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (3.89)$$

A condição acima estabelece uma barreira que deve ser respeitada pelo Diagrama de Bode da matriz de funções de transferência de malha do sistema nominal para que seja atendida a especificação de *rejeição de perturbações*.

- Insensibilidade a Variações na Planta

Neste estudo são utilizados dois resultados, para maior detalhe consultar [4].

Sejam eles:

$$\delta(A^{-1}) = -A^{-1}\delta(A)A^{-1} \quad (3.90)$$

onde  $\delta(A)$  é o diferencial de A.

e, dado que

$$y(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} G_N(s)K(s)r(s), \quad (3.91)$$

então

$$\delta y(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} \delta G(s)G_N^{-1}(s)y(s) \quad (3.92)$$

A partir de (3.91) e (3.92) pode ser demonstrado que:

$$\frac{\frac{\|\delta y(j\omega)\|}{\|y(j\omega)\|}}{\|\delta G(j\omega)G_N^{-1}(j\omega)\|} \leq \frac{1}{\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]} \quad (3.93)$$

Similarmente ao que tem sido feito, sendo  $\Omega_\delta$  a faixa de frequências onde  $\delta G(j\omega)$  tem a maior parte de sua energia. Então:

$$\frac{\frac{\|\delta y(j\omega)\|}{\|y(j\omega)\|}}{\|\delta G(j\omega)G_N^{-1}(j\omega)\|} \leq \alpha_\delta(\omega) \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (3.94)$$

onde a função

$$\alpha_\delta(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (3.95)$$

mais uma vez é admitida como parte das especificações de projeto, assim é suficiente que:

$$\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_\delta(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (3.96)$$

Que de forma aproximada é expresso por:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{1}{\alpha_\delta(\omega)} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (3.97)$$

cabe salientar que, na prática, é comum que o conjunto  $\Omega_\delta$  seja de baixa frequência, ou seja:

$$\Omega_\delta = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_\delta\} \quad (3.98)$$

- Rejeição do Erro de Medida

Dado que a contribuição do erro de medida para a saída é:

$$y(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} G_N(s)K(s)n(s), \quad (3.99)$$

Sendo  $\Omega_n$  a faixa de frequências onde  $n(j\omega)$  tem a maior parte de sua energia. Deve ainda ser observado que em geral os instrumentos de medidos induzem a erros relevantes em altas frequências, assim, de forma geral, é um sinal de alta frequência, isto é:

$$\Omega_n = \{\omega \in R : \omega \geq \omega_n\} \quad (3.100)$$

O que, de forma objetiva, mostra que se a matriz de funções de transferência de malha  $G_N(j\omega)K(j\omega)$  for “pequena”,  $n(j\omega)$  induzirá “pouco” erro sobre a saída para todo  $(\omega \in \Omega_n)$ .

Assim, de forma direta para garantir o acompanhamento do sinal de referência, basta que:

$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.101)$$

Para a quantificação do requisito de projeto acima, observa-se que:

$$\frac{\|y(j\omega)\|}{\|n(j\omega)\|} \leq \frac{\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)]}{\sigma_m [I + G_N(j\omega)K(j\omega)]} \quad (3.102)$$

Analogamente ao que tem sido feito nesta seção, supõe-se parte das especificações de projeto, uma função

$$\frac{\|y(j\omega)\|}{\|n(j\omega)\|} \leq \alpha_n(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.103)$$

Então, para garantir a validade da desigualdade acima, basta impor que:

$$\frac{\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)]}{\sigma_m [I + G_N(j\omega)K(j\omega)]} \leq \alpha_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.104)$$

E, pode ser demonstrado, que de forma aproximada, reduz-se a:

$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \alpha_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.105)$$

observando que

$$\alpha_n(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.106)$$

- Conclusão

De forma sumarizada do que foi vista nesta seção, os requisitos de desempenho podem ser agrupados e expressos da seguinte forma:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.107)$$

$$\sigma_M[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \alpha_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.108)$$

onde  $p(\omega)$  é a envoltória de  $1/\alpha_r(\omega)$ ,  $1/\alpha_d(\omega)$  e  $1/\alpha_s(\omega)$ ,

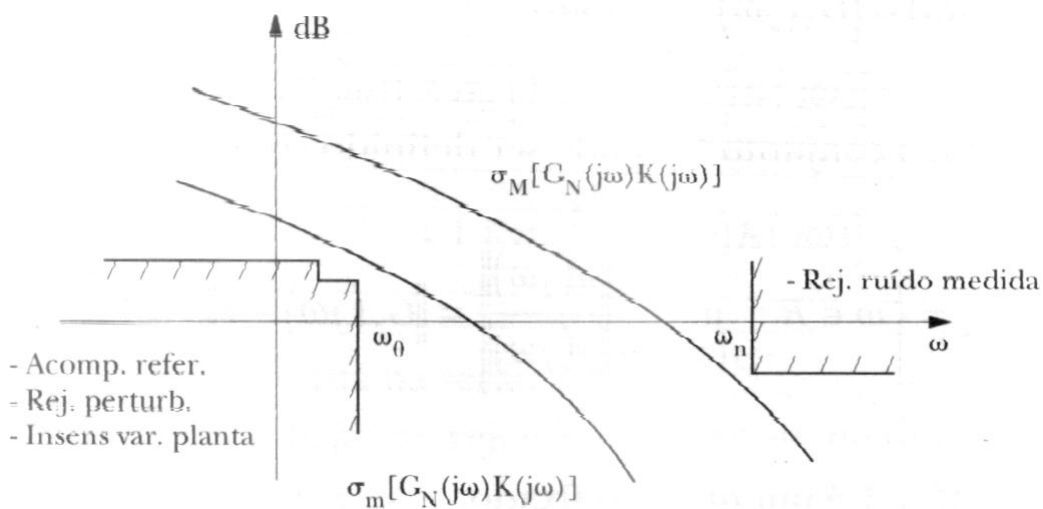
$$\Omega = \Omega_r \cup \Omega_d \cup \Omega_s = \{\omega \in R : \omega \leq \omega_0\} \quad (3.109)$$

e

$$\omega_0 = \max\{\omega_r, \omega_d, \omega_s\}.$$

Analogamente ao caso SISO, essas restrições formam as barreiras de desempenho que devem ser obedecidas pelos Diagramas de Bode da matriz de funções de transferência de malha do sistema nominal, conforme mostra a *Figura 3-12*.





**Figura 3-12 - Barreiras de Desempenho do Sistema Nominal – retirado [4]**

Cabe ainda salientar que como no caso SISO, as especificações de acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e insensibilidade a variações na planta são conflitantes com as especificações de rejeição do erro de medida, conforme pode ser notado na *Figura 3-12*.

É importante notar que (3.107) é resultado de aproximações, mas a forma exata é:

$$\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.110)$$

### 3.7.3.2 Desempenho do Sistema Real

Neste ponto será considerado como se garantir o atendimento as especificações de desempenho para toda a classe de plantas reais, ou seja, para toda  $G_R(s)$  tal que  $\|\varepsilon_M(j\omega)\| \leq e_M(\omega)$ ,  $(\forall \omega \in R)$ . Será suposto que  $e_M(\omega) < 1$   $\forall \omega \in \Omega$ , isto é, o erro de modelagem não é grande para  $\omega \in \Omega$ .

Conforme o que foi discutido na seção anterior (vide (3.110)), para garantir que as condições de desempenho sejam satisfeitas para toda a classe de plantas reais, é necessário que:

$$\sigma_m[I + G_R(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.111)$$

para toda  $\varepsilon_M(s)$  tal que

$$\|\varepsilon_M(j\omega)\| \leq e_M(\omega).$$

Assim, o que devemos fazer é expressar a condição (3.111) em termo da matriz de função de transferência nominal  $G_N(s)$  e de  $e_M(\omega)$ .

Após algumas manipulações algébricas, e com a utilização de (3.58), se obtém:

$$\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - \sigma_m[\varepsilon_M(j\omega)]} \quad (3.112)$$

Que resulta em uma condição suficiente para a robustez do desempenho, seja ela:

$$\sigma_m[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.113)$$

E, de forma aproximada, é equivalente a:

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.114)$$

Assim, a desigualdade (3.114) garante que toda a classe de sistemas reais satisfaz as especificações de desempenho. Tal condição será designada por *Condição de Robustez do Desempenho*.

De forma a completar a análise a respeito da robustez do desempenho, é necessário considerar a questão da rejeição do erro de medida.

Conforme o que foi feito para o modelo nominal (vide (3.105)), deve-se garantir que:

$$\sigma_M [G_R(j\omega)K(j\omega)] \leq \alpha_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.115)$$

Mais uma vez, após algumas manipulações algébricas, e com a utilização de (3.58), obtém-se:

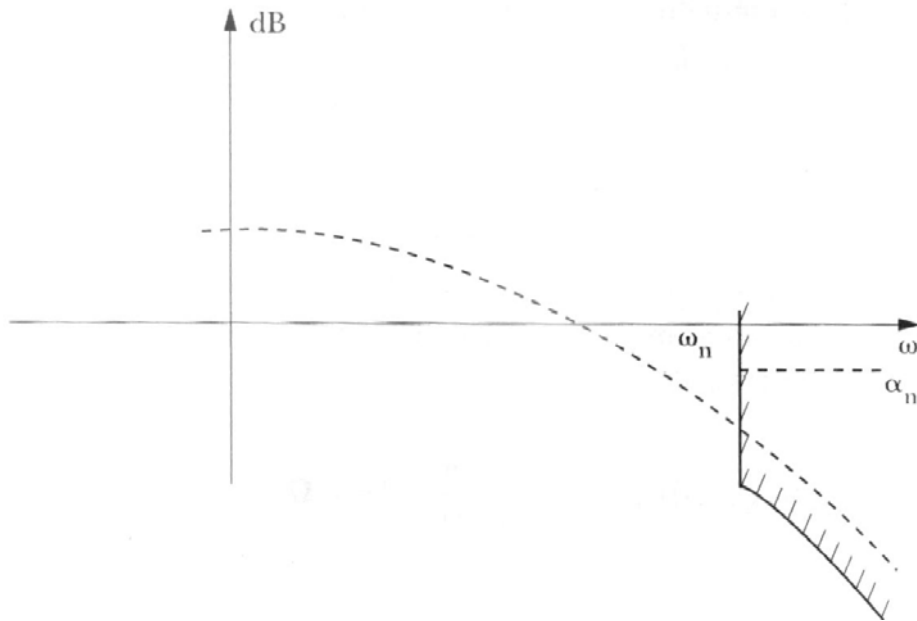
$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\alpha_n(\omega)}{1 + e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.116)$$

Esta desigualdade é a *Condição de Robustez da Rejeição do Erro de Medida*.

Contudo como na região considerada, de alta frequência,  $e_M(\omega) \ll 1$ , então (3.116) pode ser expressa como:

$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\alpha_n(\omega)}{e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (3.117)$$

tal condição mostra que a barreira de robustez de rejeição do erro de medida encontra-se bem abaixo da barreira de robustez do erro de modelagem, conforme *Figura 3-13*.



**Figura 3-13 - Barreira de Robustez de rejeição do Erro de Medida – retirado de [4]**

### 3.7.4 Compromisso: Desempenho x Estabilidade

As condições de estabilidade e desempenho obtidas aqui para o caso MIMO, não são diferentes em sua essência das obtidas para o caso SISO.

Assim, a estabilidade deve ser uma característica da malha nominal e, além disso, ser garantida para todas as perturbações admissíveis.

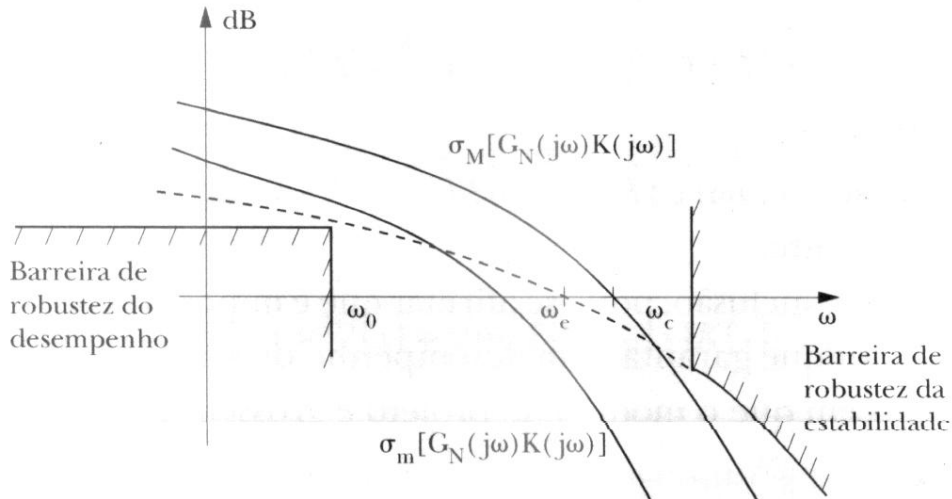
Conforme o que foi visto, uma condição para isto é que:

$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{1}{e_M(\omega)} \quad (\forall \omega \in R) \quad (3.118)$$

E o desempenho, é assegurado para toda planta se:

$$\sigma_m [G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.119)$$

Deste modo pode-se visualizar as condições de robustez da estabilidade e do desempenho no Diagrama de Bode da *Figura 3-14*.



**Figura 3-14 - Barreiras de Robustez da Estabilidade e do Desempenho**  
 – retirado de [4]

Assim, o objetivo do projetista deve ser o de obter um compensador  $K(s)$  de tal forma que o sistema nominal em malha fechada seja estável e atenda tanto as barreiras de robustez da estabilidade como as do desempenho.

Como a última *Figura 3-14* sugere, a banda passante da malha (em torno de  $\sigma_M(G_N K)$ ) do nosso sistema não pode ser muito superior a  $\omega_e$ , na qual  $e_M(\omega_e)=1$  (0dB). Com isso a faixa de freqüências na qual os requisitos de desempenho podem ser satisfeitos é restringida diretamente pelas incertezas do modelo.

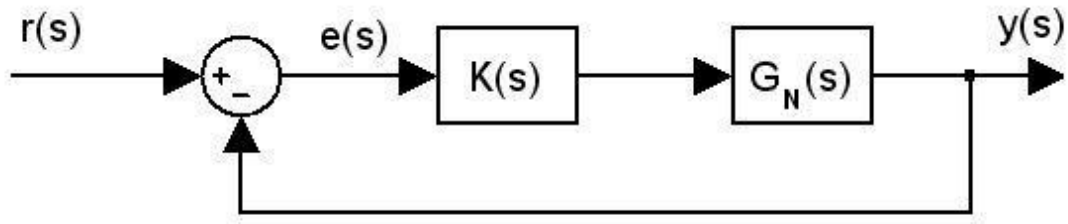
Deste modo fica evidente que é impossível se projetar um compensador que garanta bom desempenho do sistema na região de freqüências em que o modelo é grosseiro.

### 3.7.5 Erro Estacionário para Entrada em Degrau

Muitos sistemas de controle, assim como o que se trata neste texto, têm a exigência de erro nulo em regime estacionário para entrada em degrau.

Para garantirmos este requisito, considere-se o sistema de controle representado na *Figura 3-15*, para o qual:

$$e(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} r(s) \quad (3.120)$$



**Figura 3-15 - Diagrama de Blocos do Sistema para a Análise do Erro Estacionário**

Se aplica um degrau unitário a  $i$ -ésima componente ( $1 \leq i \leq m$ ) de  $r(t)$ , ou seja,

$$r(s) = \frac{1}{s} v^{(i)}, \quad (3.121)$$

onde

$$v^{(i)} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad (3.122)$$

e o elemento não nulo pertence a  $i$ -ésima linha. Seja, então,  $e^{(i)}(s)$  o erro resultante.

Dado que o sistema é estável em malha fechada, o Teorema do Valor Final fornece:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e^{(i)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [I + G_N(s)K(s)]^{-1} v^{(i)},$$

Deste modo, para que o erro estacionário seja nulo, a  $i$ -ésima coluna da matriz  $[I + G_N(s)K(s)]^{-1}$  deve ser nula no limite para  $s \rightarrow 0$ .

Ao repetir o argumento para  $i=1,2,\dots,m$ , tem-se o seguinte resultado:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [I + G_N(s)K(s)]^{-1} = 0,$$

Assim, para a garantia de erro estacionário nulo todos os elementos de  $G_N(s)K(s)$  devem ter pelo menos um pólo na origem, ou seja, deve ser da forma:

$$G_N(s)K(s) = \frac{1}{s} P(s) \quad (3.123)$$

e, deste modo, como  $\lim_{s \rightarrow 0} P_0 = cte.$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [I + G_N(s)K(s)]^{-1} = \lim_{s \rightarrow 0} sP_0^{-1} = 0,$$

com isso está garantido o erro estacionário nulo para a entrada em degrau em qualquer canal.

Pode ser mostrado, ainda, que isto significa que, a declividade de  $\sigma_i[G_N(s)K(s)]$  deve ser pelo menos de -20dB/dec em baixas frequências. O que é a generalização MIMO de um resultado bem conhecido para o caso SISO.

Deve ser notado que se a planta não tiver as características de declividade requeridas, então deverão ser incluídos integradores na entrada desta para que a mesma atenda ao requisito de erro estacionário nulo para entrada em degrau (vide *Figura 3-16*).



**Figura 3-16 - Diagrama de Blocos do Sistema com Integradores na Entrada (Planta Aumentada com Integradores)**

Com isso, quando se aumenta a planta com integradores, o modelo nominal da planta a ser utilizado no procedimento de projeto deve incluí-los como se segue:

$$\frac{I}{s} G_N(s) \quad (3.124)$$

Cabe ainda ressaltar que para o estudo do problema de perturbações em caráter estacionário, parte-se da seguinte expressão:

$$e(s) = -[I + G_N(s)K(s)]^{-1} d(s) \quad (3.125)$$

Que é análoga a (3.120), assim, pode-se mostrar que para se atender a especificações de *rejeição de perturbações em regime estacionário*, são necessários os mesmos integradores nos canais de entrada e a declividade mínima de -20dB/dec, assim com a inclusão dos integradores em todos os canais de entrada estão atendidos tanto os requisitos de erro estacionário para a entrada em degrau nulo como os de rejeição de perturbações em degrau em regime estacionário.



## 4 ELEMENTOS BÁSICOS DO COMPENSADOR

### 4.1 Introdução

Neste ponto inicia-se a abordagem da principal questão, que é a escolha do compensador  $K(s)$  de modo que o sistema em malha fechada seja estável e ainda tenha graus de liberdade suficientes para se dar forma à malha (“loop shaping”, em inglês), de forma a satisfazer os requisitos de desempenho e estabilidade desejados.

### 4.2 Estrutura do Compensador

Aqui será apresentada a estrutura adotada do compensador.

Seja um sistema do tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (4.1)$$

onde  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ , de forma que o par  $(A, B)$  seja controlável [1].

Se adotarmos,

$$u(t) = -Gx(t), \quad (4.2)$$

obtem-se uma lei de controle denominada *realimentação de estados*. A matriz  $G$  é a matriz de realimentação de estados e o sistema que resulta em malha fechada é o regulador.

Da maneira que foi descrito acima, o regulador, no domínio do tempo, é dado por:

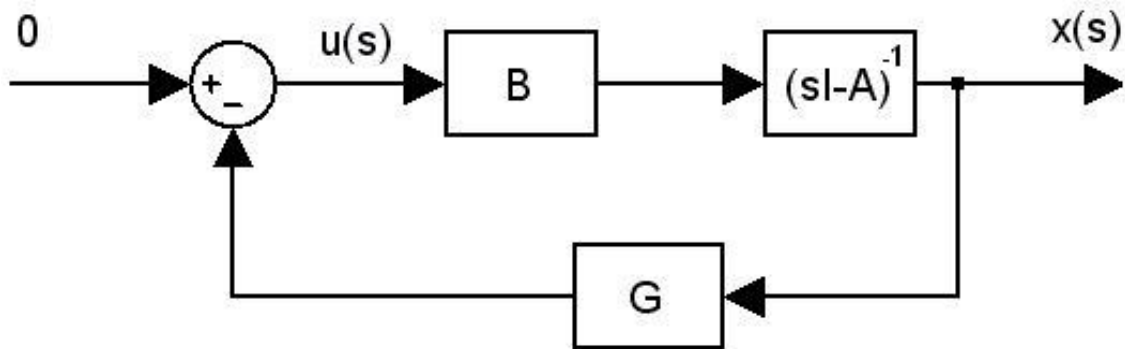
$$\dot{x}(t) = (A - BG)x(t), \quad (4.3)$$

ou, no domínio da frequência, por

$$x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s), \quad (4.4)$$

$$u(s) = -Gx(s), \quad (4.5)$$

A Figura 4-1 mostra o regulador em forma de diagrama de blocos.



**Figura 4-1 - Diagrama de Blocos do Regulador com Realimentação de Estados**

Pode ser mostrado [1], que se o par  $(A, B)$  for controlável, então é possível obter uma matriz  $G$  tal que os autovalores do regulador podem ser alocados arbitrariamente.

Contudo, deve ser observado que não é muito real supor que todas as variáveis de estado são conhecidas (seja por ausência de sensores para medi-las, pelo custo associado aos sensores, ou até por se tratar de variáveis não físicas e consequentemente não existe sensores para tais medições).

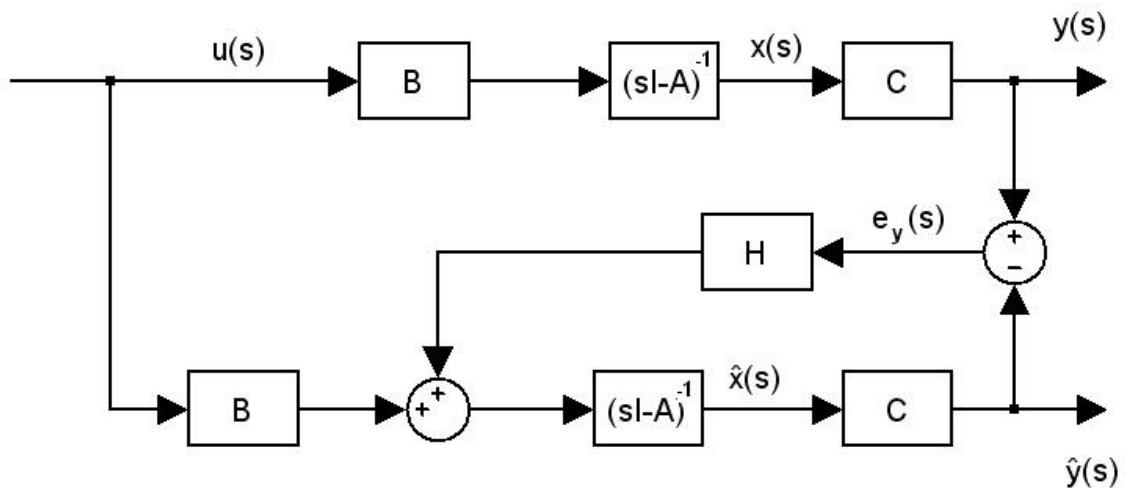
Assim, a primeira idéia que surge é a de se estimar as variáveis de estado, daí então surge o conceito de observadores de estado.

Imagina-se que pode ser medido um vetor  $y(t)$  do tipo:

$$y(t) = Cx(t), \quad (4.6)$$

a partir do qual se deseja estimar um vetor  $\hat{x}(t)$  que de alguma forma se aproxime de  $x(t)$ .

Este problema pode ser resolvido com a construção de um sistema como o que se apresenta no diagrama de blocos da *Figura 4-2*.



**Figura 4-2** - Diagrama de Blocos do Sistema com o Observador de Estados

É oportuno salientar que o observador tem um ramo direto, que é a reprodução do sistema dado e um ramo de realimentação que atua sobre o erro de observação ( $e_y$ ).

Dada a *Figura 4-2*, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + He_y(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\ e_y(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \end{aligned}, \quad (4.7)$$

Definindo-se, ainda, o erro da estimativa de estado por:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.8)$$

Considerando (4.1), (4.6), (4.7) e (4.8), obtêm-se que:

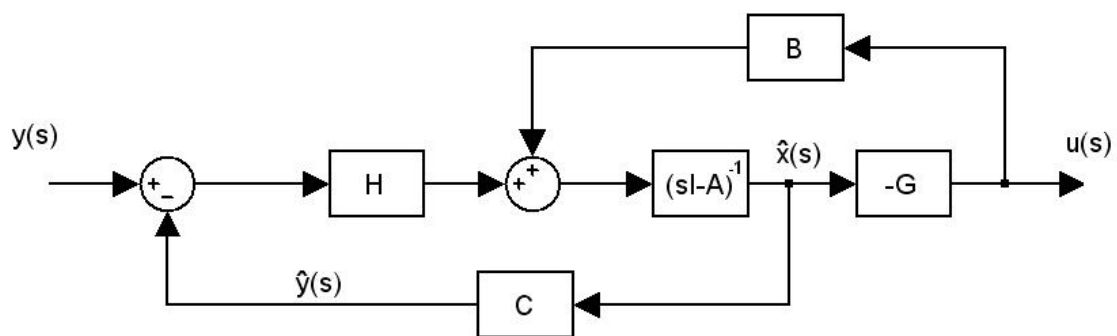
$$\dot{e}_x(t) = (A - HC)e_x(t) \quad (4.9)$$

O que mostra que o erro da estimativa de estado tem a sua dinâmica governada pela matriz  $(A - HC)$ . Assim, se todos os autovalores desta matriz pertencem ao SPE aberto, a estimativa  $\hat{x}(t)$  tende assintoticamente para o estado  $x(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Como o par  $(A, C)$  são supostos observáveis, então os autovalores de  $(A - HC)$  podem ser alocados arbitrariamente no SPE. Logo, em princípio, é possível fazer com que  $e_x(t)$  se aproxime assintoticamente de zero tão rápido quanto se deseje.

Com isso, é considerado um regulador que opera sobre o estado estimado (*Figura 4-3*), ou seja,

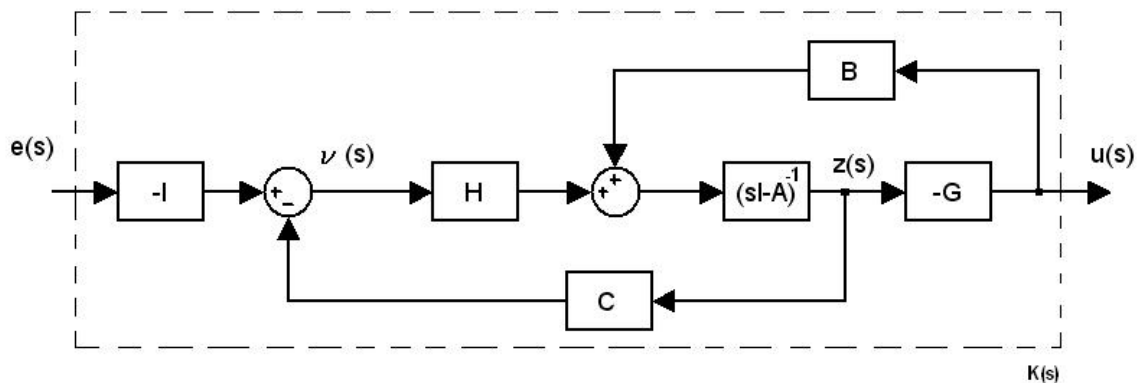
$$u(t) = -G\hat{x}(t).$$



**Figura 4-3** - Diagrama de Blocos do Regulador Contendo um Observador de Estados na Malha de Controle

O regulador LQG tem a mesma estrutura descrita acima, mas sua formulação baseia-se em um problema de controle ótimo estocástico. Neste regulador o objetivo é determinar uma lei de controle que minimiza o valor esperado de um índice de desempenho quadrático através de uma realimentação da saída, apresentando-se, para isso, tanto as equações aqui descritas como as equações de estado afetadas por ruídos brancos gaussiano, de média nula e não correlacionados entre si. Para resolver este problema as matrizes  $G$  e  $H$  são determinadas de forma específica, através da solução prévia de equações de Riccati envolvendo matrizes de penalização do estado e do controle, assim como as matrizes de intensidade dos ruídos no estado e na medida.

O regulador acima descrito sugere a adoção de um compensador  $K(s)$  com a estrutura da mostrada na *Figura 4-4*, tendo como entrada o erro  $e(s)$  e, como saída, o controle  $u(s)$ .



**Figura 4-4 - Diagrama de Blocos do Compensador  $K(s)$**

As matrizes  $H \in R^{n \times m}$  e  $G \in R^{m \times n}$  são os parâmetros livres do compensador, devendo ser escolhidas de modo a atender os objetivos do projeto.

Deve ser notado ainda que neste sistema dinâmico,  $z(s)$  tem a mesma dimensão do estado  $x(s)$  do modelo nominal da planta.

### 4.3 Dinâmica do Sistema Nominal em Malha Fechada

O compensador da *Figura 4-4* pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}v(t) &= -e(t) - Cz(t) \\ \dot{z}(t) &= Az(t) + Hv(t) + Bu(t), \\ u(t) &= -Gz(t)\end{aligned}\tag{4.10}$$

e substituindo as equações de  $v(t)$  e  $u(t)$  na equação de  $\dot{z}(t)$ , chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= (A - BG - HC)z(t) + He(t) \\ u(t) &= -Gz(t)\end{aligned},\tag{4.11}$$

Essas são as *Equações de Estado do Compensador*;  $z(t)$  é o seu vetor de estados,  $e(t)$  é a sua entrada e  $u(t)$ , a sua saída.

Assim, a matriz de funções de transferência do compensador é:

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1} H ,\tag{4.12}$$

Mas, se fizermos uma transformação de variáveis como se segue:

$$w(t) = x(t) - z(t),\tag{4.13}$$

obtêm-se que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix},\tag{4.14}$$

e, assim, as equações de estado em malha fechada tornam-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BG) & BG \\ 0 & (A-HC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} r(t), \quad (4.15)$$

Então, pode ser mostrado que os autovalores do sistema em malha fecha são as raízes de:

$$\det(\lambda I - A + BG) \det(\lambda I - A + HC) = 0, \quad (4.16)$$

Deste modo fica clara que a dinâmica do sistema em malha fechada é governada, desacopladamente, pela dinâmica da planta nominal com realimentação direta de estados e do observador de estados. Tal característica é conhecida como *Princípio da Separação*. Com base neste resultado a metodologia de projeto pode ser desenvolvida separadamente para o controlador e observador de estados.

Com isso o problema da estabilidade nominal consiste em garantir que:

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A-BG)] < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.17)$$

e

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A-HC)] < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.18)$$

para as matrizes G e H escolhidas, problema este que sempre tem solução em razão das hipóteses de controlabilidade e observabilidade feitas.

A descrição na forma de estados de (4.15) permite obter sua representação no domínio da frequência:

$$y(s) = C_N(s)r(s),$$

onde

$$C_N(s) = C(sI - A + BG)^{-1}BG(sI - A + HC)^{-1}H, \quad (4.19)$$

O que mostra que também no domínio da frequência, fica claro que o sistema nominal em malha fechada apresenta-se dinamicamente desacoplado. Além disso, deve-se notar que os autovalores em malha fechada são as raízes de:

$$\det(\lambda I - A + BG) = 0$$

e

$$\det(\lambda I - A + HC) = 0$$

É importante destacar, que no procedimento de projeto a ser desenvolvido, as matrizes de ganho de realimentação de estados (G) e do observador (H) serão calculadas como soluções de um problema do tipo LQG convenientemente definido. Contudo, tanto as matrizes de penalização de estado e do controle no índice de desempenho, como as matrizes de intensidade de ruído no estado e medida, serão encaradas de forma não ortodoxa, como parâmetros de projeto a serem escolhidos adequadamente pelo projetista. Este tópico será discutido nos próximos capítulos.



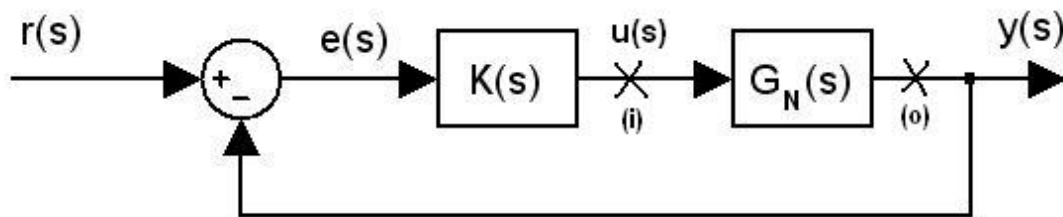
## 5 O PROCEDIMENTO DE RECUPERAÇÃO

### 5.1 Introdução

Nesta seção será apresentado o procedimento de recuperação, responsável pela sigla LTR (“Loop Transfer Recovery”, do inglês) através da qual o procedimento é designado usualmente.

Deve ser notado que o procedimento de recuperação se aplica a somente a plantas com zeros de transmissão no SPE (zeros de fase mínima).

O procedimento aqui referido é representado conforme mostra o diagrama de blocos da *Figura 5-1*.



**Figura 5-1** - *Diagrama de Blocos do Sistema para o Estudo do Procedimento de Recuperação*

Existem dois tipos de procedimentos (duais) de recuperação, um deles se refere à matriz de funções de transferência de malha  $G_N(s)K(s)$ , correspondente à abertura da malha na saída da planta (ponto (o) na *Figura 5-1*); o outro é aquele associado a matriz de funções de transferência de malha  $K(s)G_N(s)$  correspondente a abertura da planta na entrada (ponto (i) na *Figura 5-1*).

O procedimento tratado aqui é o primeiro, que é conhecido como LTR na saída da planta. Neste admite-se definida adequadamente a matriz de ganhos do observador H (de antemão – essa discussão será feita no capítulo 6), ao passo que a matriz de ganhos do controlador G é ajustável. Essa alternativa é extremamente consistente com a análise dos valores singulares de  $G_N(s)K(s)$  considerada até aqui para reproduzir as especificações do sistema de controle através de restrições sobre seus Diagramas de Bode.

Assim, neste capítulo é admitido que a matriz H tenha sido escolhida de forma que

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A-HC)] < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

enquanto varia-se G.

## 5.2 O Regulador Linear Quadrático

Seja o seguinte problema de controle ótimo:

$$\min J = \int_0^{\infty} y'(t)y(t) + u'(t)Ru(t)dt, \quad (5.1)$$

sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}, \quad (5.2)$$

onde  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  e  $y(t) \in R^m$ , as matrizes tem dimensões compatíveis e os pares (A, B) e (A, C) são controláveis e observáveis [1].

Esta é a forma genérica do RLQ, onde

$$Q = C'C, \quad Q = Q' \geq 0$$

e

$$R = R' > 0$$

Sua solução é a seguinte [29]:

$$G = R^{-1}B'K, \quad (5.3)$$

onde K é a solução simétrica positiva definida da Equação Algébrica de Riccati (EAR)

$$0 = -KA - A'K - C'C + KBR^{-1}B'K, \quad (5.4)$$

Quando a matriz R é da forma

$$R = \rho I, \quad (\rho > 0) \quad (5.5)$$

e  $\rho \rightarrow 0^+$ , denomina-se p problema de RLQ “cheap control”, por razões óbvias.

A razão da escolha deste caso para aplicação no procedimento de projeto que trata este texto, é porque o “cheap control” fornece um resultado fundamental que será mostrado adiante.

### 5.3 O Resultado Fundamental

Aqui, será apresentado um resultado assintótico, que se aplica ao sistema em malha fechada que resulta quando o compensador K(s) tem a estrutura discutida no capítulo 4 e G é a matriz de ganhos referente ao RLQ “cheap control”.

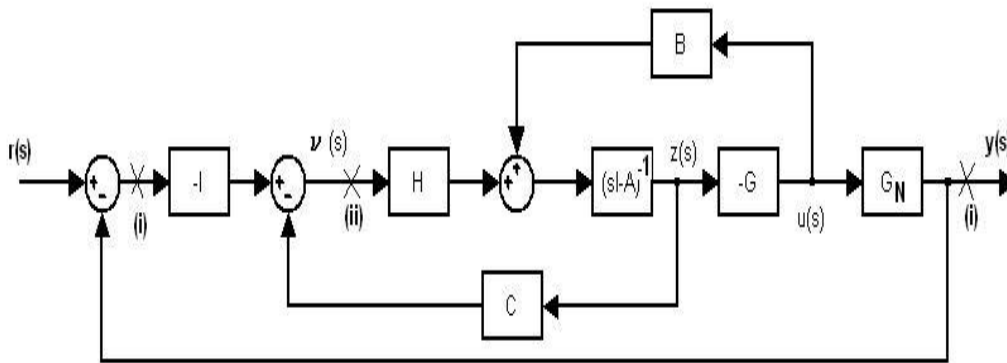
Sejam,

$$\begin{aligned}\phi(s) &= (sI - A)^{-1} \\ \bar{\phi}(s) &= (sI - A + HC)^{-1}\end{aligned}\tag{5.6}$$

assim vale a seguinte identidade

$$\bar{\phi}(s) = \phi(s) - \phi(s)H(I + C\phi(s)H)^{-1}C\phi(s)\tag{5.7}$$

Agora então pode-se passar ao resultado Teorema Fundamental. então considere-se a *Figura 5-2* a seguir na qual o compensador  $K(s)$  tem a estrutura discutida no capítulo 4.



**Figura 5-2 - Diagrama de Blocos do Sistema em Malha Fechada**

Se for suposto que a malha é aberta em (i), a matriz de funções de transferência de malha resulta igual a:

$$G_{(i)}(s) = G_N(s)K(s)\tag{5.8}$$

E, ainda, ao abrir a malha em (ii), a matriz de funções de transferência de malha é dada por

$$G_{(ii)}(s) = C(sI - A)^{-1}H \quad (5.9)$$

Deve ser notado que  $K(s)$  depende de  $\rho$  e, portanto, o mesmo ocorre com  $G_{(i)}(s)$ .

O resultado fundamental que será apresentado afirma, de forma objetiva, que  $G_{(i)}(s) \rightarrow G_{(ii)}(s)$  ponto a ponto em  $s$  quando  $\rho \rightarrow 0^+$ .

Para a validade do *Teorema Fundamental LTR* (consultar detalhes em [4]) que será mostrado agora, deve-se tomar como sendo atendidos os seguintes requisitos:

- a)  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  é observável;
- b)  $G_N(s)$  é quadrada;
- c) Os zeros de transmissão de  $G_N(s)$  se localizam no SPE aberto; e
- d) A matriz de ganhos  $G$  é calculada como segue:

$$G = \frac{1}{\rho} B'K, \quad (5.10)$$

onde  $\rho > 0$  e

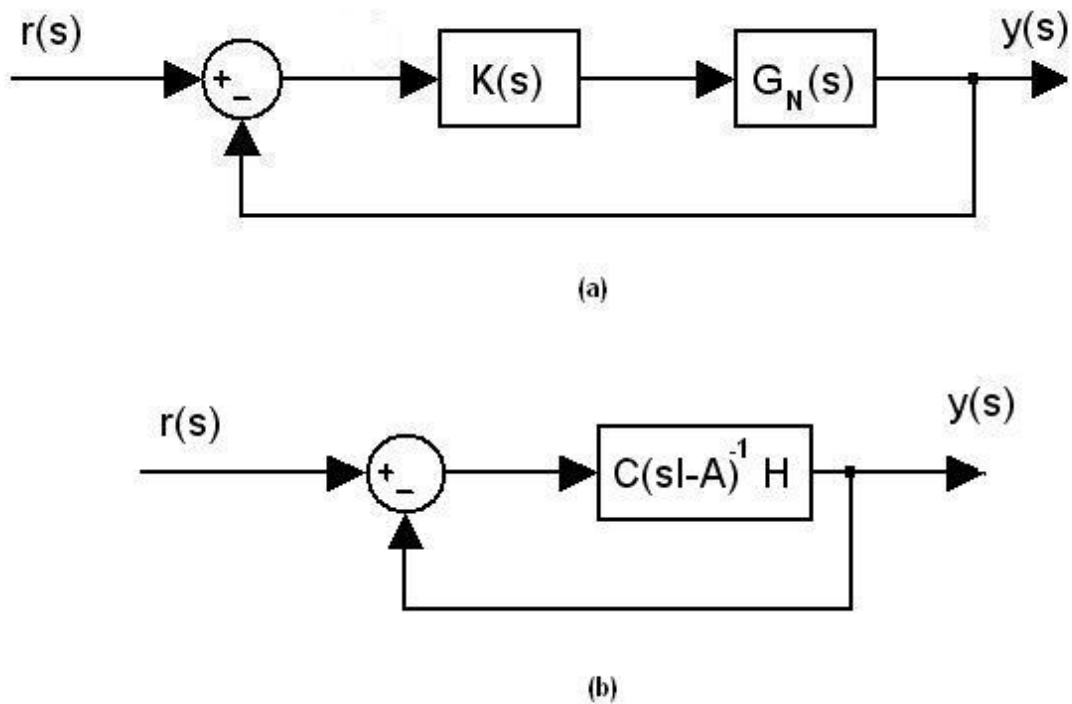
$$0 = -KA - A'K - C'C + \frac{1}{\rho} KBB'K, \quad (5.11)$$

assim,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(s) = [C(sI - A)^{-1}B]^{-1}C(sI - A)^{-1}H \quad (5.12)$$

Assim, o *Teorema Fundamental LTR* (5.12), afirma que o compensador  $K(s)$  inverte a planta. Por isso, do ponto de vista prático, a hipótese de que os zeros de transmissão do modelo nominal se localizam no SPE aberto se justifica, então, pois os pólos do compensador tendem a cancelar, no limite, os zeros da planta; e sabe-se que cancelamento de pólos e zeros são permitidos apenas no SPE aberto.

Se, ainda, se observar a *Figura 5-3*, pode ser visualizado que quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , o sistema nominal em malha fechada da *Figura 5-3* (a) se aproxima ponto a ponto em  $s$  do que está representado na *Figura 5-3* (b). Deste modo, o problema de projeto se resume em escolher a matriz  $H$  de forma conveniente, de forma que o sistema da *Figura 5-3* (b) tenha boas características de estabilidade e desempenho, então o compensador com a estrutura adotada e  $\rho$  suficientemente pequeno resolverá na prática o problema de projeto.



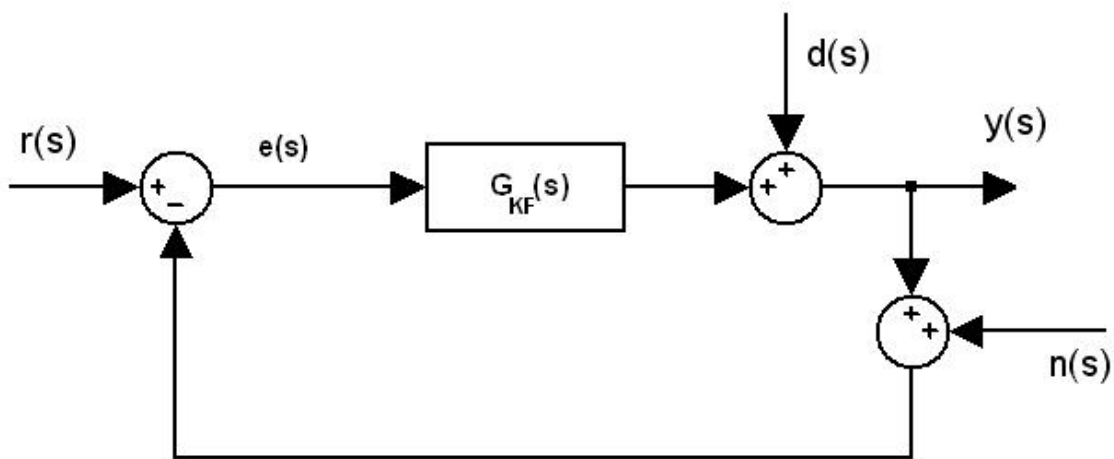
**Figura 5-3** - (a) Sistema Nominal em Malha Fechada; (b) Sistema Limite para  $\rho \rightarrow 0^+$

Tendo em visto o que foi exposto, para plantas com zeros de fase mínima [1], o procedimento de projeto resume-se aos seguintes passos:

- Dada  $G_N(s)$ , obter uma “boa” aproximação da matriz  $H$  de ganhos do observador, de maneira que a matriz de funções de transferência:

$$G_{KF}(s) = C(sI - A)^{-1}H$$

seja tal que a malha representada na *Figura 5-4*:



**Figura 5-4 - Diagrama de Blocos da Malha Objetivo**

- 1- satisfaça as especificações de desempenho; e
- 2- atenda às exigências de robustez e estabilidade.

- Com a matriz acima, aplicar o procedimento LTR e obter, para  $\rho$  suficientemente pequeno, a matriz de ganhos  $G$ .

Assim, a malha representada na *Figura 5-4* é denominada de malha objetivo (“target loop”, do inglês).

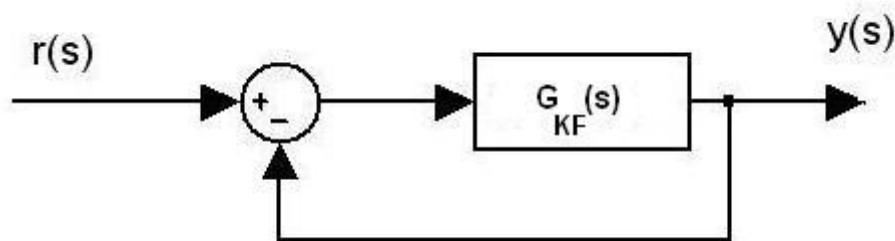
A designação “recuperação da função de transferência de malha” (“Loop Transfer Recovery”, em inglês) reflete as implicações do que foi exposto nos dois últimos parágrafos precedentes a *Figura 5-3*. Assim, deve ser notado que, admite-se implicitamente que uma “boa” matriz de funções de transferência de malha  $C(sI - A)^{-1}H$  tenha sido obtida pelo projetista. Essa matriz de funções de transferência é então recuperada pelo procedimento LTR.



## 6 MALHA OBJETIVO

### 6.1 Introdução

Como foi visto no último capítulo, o problema de projeto pode ser colocado como sendo o de determinar a malha objetivo que atenda as especificações de estabilidade e desempenho. Após isto, o procedimento de recuperação permite que quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , as características de resposta em frequência dessa malha sejam reproduzidas pela malha constituída pelo compensador  $K(s)$  seguido pela planta nominal  $G_N(s)$ .



**Figura 6-1 - Diagrama de Blocos da Malha Objetivo**

Neste capítulo será mostrado que o Filtro de Kalman (FK) pode ser utilizado como um meio eficiente de determinar a matriz de ganhos do observador  $H$  e, portanto, da malha objetivo (vide *Figura 6-1*).

A escolha conveniente dos parâmetros livres do filtro (matrizes de densidade espectral dos ruídos no estado e na observação) permite dar forma adequada aos valores singulares de  $G_{KF}(j\omega)$ , de forma que sejam respeitadas as barreiras de desempenho e estabilidade. Deve ser notado, no entanto, que esta abordagem é pouco ortodoxa, já que aqui os parâmetros livres do filtro não são tratados com seu significado estocástico, mas sim como variáveis de projeto, que podem ser utilizados pelo projetista de maneira pragmática, como um meio para se atingir um fim específico. Assim, os valores obtidos para os parâmetros do filtro especificam sensores, ruído máximo etc.

Aqui será também introduzido uma dinâmica aumentada no FK, já que é necessário que filtremos as componentes de alta frequência para evitar-se a modulação dos propulsores.

Assim, torna-se oportuno salientar que o FK (e, por dualidade o RLQ) tem uma estrutura tal que possui sempre boas propriedades de desempenho e robustez da estabilidade. O elemento fundamental que permite tal dedução é uma identidade frequencial chamada Identidade de Kalman.

## 6.2 O Filtro de Kalman e o Regulador LQG

Seja o sistema dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + L\xi(t), \quad (6.1)$$

onde  $x(t) \in R^n$ ,  $\xi(t) \in R^m$  é um processo estocástico chamado ruído no estado (ou no processo), que é admitido branco, gaussiano e tal que:

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= 0 \\ E[\xi(t)\xi'(t)] &= \Xi\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (6.2)$$

$\Xi = \Xi' > 0$  é a matriz de intensidade (ou densidade espectral) do ruído no estado [5].  
e  $\delta(t - \tau)$  é um impulso unitário.

Deve ser admitido que os sensores meçam não o estado diretamente, mas apenas variáveis de saída sujeitas a ação de um ruído de medida aditivo, ou seja,

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (y(t) \in R^m) \quad (6.3)$$

$v(t)$  é suposto branco, gaussiano, independente de  $\xi(t)$  e tal que:

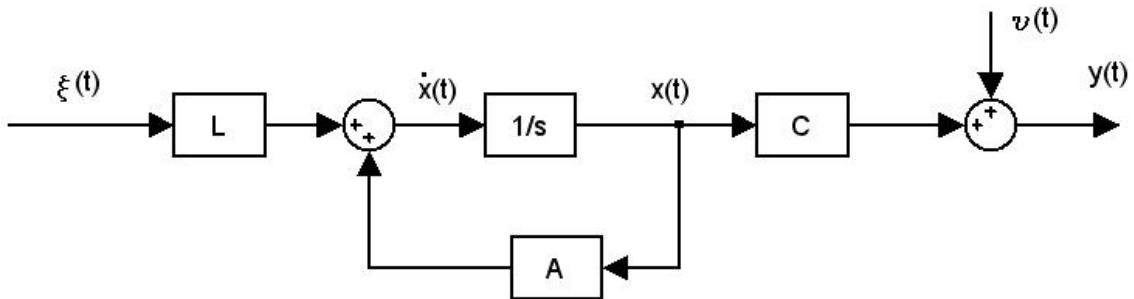
$$\begin{aligned}
 E[v(t)] &= 0 \\
 E[v(t)v'(t)] &= \Theta \delta(t - \tau).
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

onde  $\Theta = \Theta' > 0$  é a matriz de intensidade (ou densidade espectral) do ruído de medida [5].

e  $\delta(t - \tau)$  é um impulso unitário.

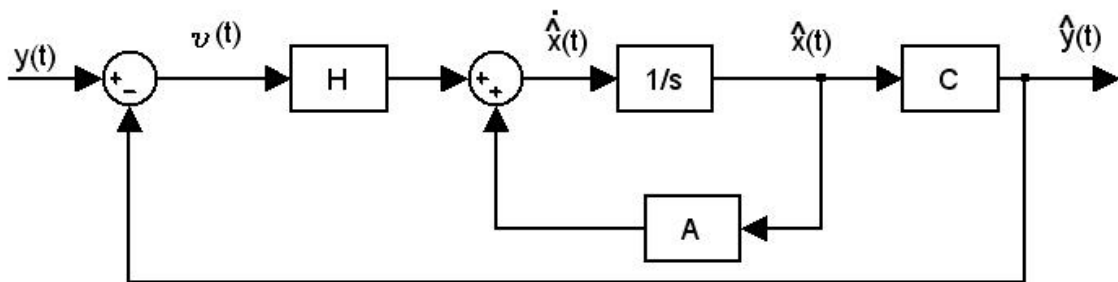
O par  $(A, C)$  é suposto observável.

O sistema descrito acima pode ser representado na forma de Diagrama de Blocos conforme mostra a *Figura 6-2*.



**Figura 6-2 - Diagrama de Blocos do Sistema**

Deste modo, o problema a ser resolvido consiste em obter uma estimativa  $\hat{x}(t)$  do estado  $x(t)$  a partir das observações de saída  $\{y(\tau), \tau \leq t\}$ .



**Figura 6-3 - Diagrama de Blocos do FK**

O FK é um sistema dinâmico, com a estrutura representada na *Figura 6-3*, onde a matriz de ganhos  $H$  é dada por:

$$H = \Sigma C' \Theta^{-1}, \quad (6.5)$$

onde  $\Sigma$  é a única solução simétrica definida positiva da EAR

$$0 = -A\Sigma - \Sigma A' - L\Xi L' + \Sigma C' \Theta^{-1} C \Sigma, \quad (6.6)$$

A estimativa gerada pelo filtro no sentido de que a variância do erro da estimativa  $x(t) - \hat{x}(t)$  é mínima, ou seja,

$$\min \sum_{i=1}^n E \{ [x(t) - \hat{x}(t)]^2 \}, \quad (6.7)$$

Com isso a dinâmica do FK fica dada por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + H[y(t) - C\hat{x}(t)], \quad (6.8)$$

assim o FK é tal que:

$$\text{Re}[\lambda_i(A - HC)] < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.9)$$

tal afirmação se deve devido a garantia de (6.7), que, de forma geral, significa que a malha objetivo é nominalmente estável.

O FK e o RLQ são duais, assim é possível obter relações similares nos dois casos simplesmente fazendo a correspondência entre seus parâmetros conforme indicado na *Tabela 6-1*.

**Tabela 6-1 – Parâmetros duais do RLQ e do FK**

RLQ	FK
$A$	$A'$
$B$	$C'$
$Q$	$L\Xi L'$
$R$	$\Theta$
$K$	$\Sigma$
$G$	$H'$

Assim, deve ficar claro que é natural considerar o problema do controle ótimo do tipo linear quadrático em que o estado não é diretamente medido, necessitando, então, ser estimado.

Seja o sistema dinâmico:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L\xi(t), \quad (6.10)$$

e o processo de medida

$$y(t) = Cx(t) + v(t), \quad (6.11)$$

onde  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^p$  e o restante das dimensões são compatíveis.

Admita-se que se deseja determinar uma lei de controle  $u(t)$  que minimize o funcional:

$$\min J = \int_0^{\infty} x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)dt, \quad (6.12)$$

onde  $Q = Q' \geq 0$

e

$$R = R' > 0$$

A solução deste problema é dada por:

$$u(t) = -G\hat{x}(t), \tag{6.13}$$

onde

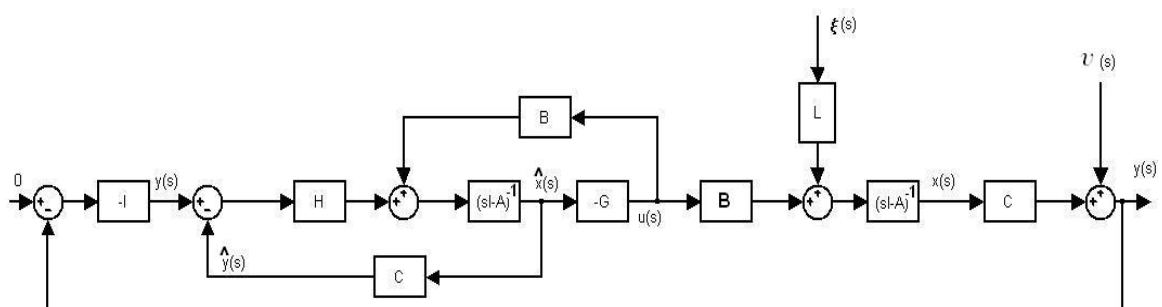
$$G = R^{-1}B'K, \tag{6.14}$$

e K é solução simétrica definida positiva da EAR

$$0 = -KA - A'K - Q + KBR^{-1}B'K, \tag{6.15}$$

O vetor  $\hat{x}(t)$  é a estimativa do estado gerado por FK (vide (6.8)), onde H é dada por (6.5) e  $\Sigma$  é a solução da EAR (6.6).

Este é o resultado conhecido como *Princípio da Separação*. Assim, a solução do problema de controle ótimo estocástico pode ser obtida aplicando-se a matriz de ganhos de um RLQ determinístico (sem estimativa de estados) à estimativa gerada pelo FK (*Figura 6-4*)



**Figura 6-4 - Diagrama de Blocos do Regulador LQG**

### 6.3 Identidade de Kalman

Neste ponto é importante observar que, tomando como referência os diagramas de blocos das *Figuras 6-2 e 6-3*, definem-se as seguintes FTs  $G_{MA}(s)$  e  $G_{KF}(s)$ , respectivamente como segue:

$$G_{MA}(s) = C(sI - A)^{-1}L, \quad (6.16)$$

e

$$G_{KF}(s) = C(sI - A)^{-1}H, \quad (6.17)$$

Deste modo, com as definições acima, as matrizes  $G_{MA}(s)$  e  $G_{KF}(s)$  são, exatamente aquelas que relacionam, respectivamente,  $\xi(s)$  a  $y(s)$  e  $\hat{y}(s)$  a  $v(s)$ , ou seja,

$$y(s) = G_{MA}(s)\xi(s)$$

e

$$\hat{y}(s) = G_{KF}(s)v(s)$$

Com isso a *Identidade de Kalman (IK)*, que é uma expressão que relaciona as matrizes acima, é escrita da seguinte forma:

$$[I + G_{KF}(s)]\Theta[I + G_{KF}(-s)] = \Theta + G_{MA}(s)\Xi G_{MA}(-s), \quad (6.18)$$

a partir de tal resultado obtêm-se (6.25).

Sua demonstração é omitida aqui, contudo pode ser consultada em [28].

Como será visto a seguir, neste capítulo, a IK é de grande valia para se explorar as possibilidades de dar forma aos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha, além de permitir analisar o comportamento de  $G_{KF}(s)$  nas vizinhanças da frequência de cruzamento, a robustez da malha objetivo e as margens de estabilidade multivariáveis.

Deve ser notado ainda, que a estabilidade da malha objetivo é sempre garantida nominalmente como uma propriedade do FK.

Cabe, ainda, ressaltar que devido a dualidade entre o FK e o RLQ, a IK assume a seguinte forma neste último caso:

$$\left[ I + G_{LQ}(s) \right] \Theta \left[ I + G_{LQ}(-s) \right] = \Theta + G_{OL}(s) \Xi G_{OL}(-s), \quad (6.19)$$

onde,

$$G_{LQ}(s) = G(sI - A)^{-1} B, \quad (6.20)$$

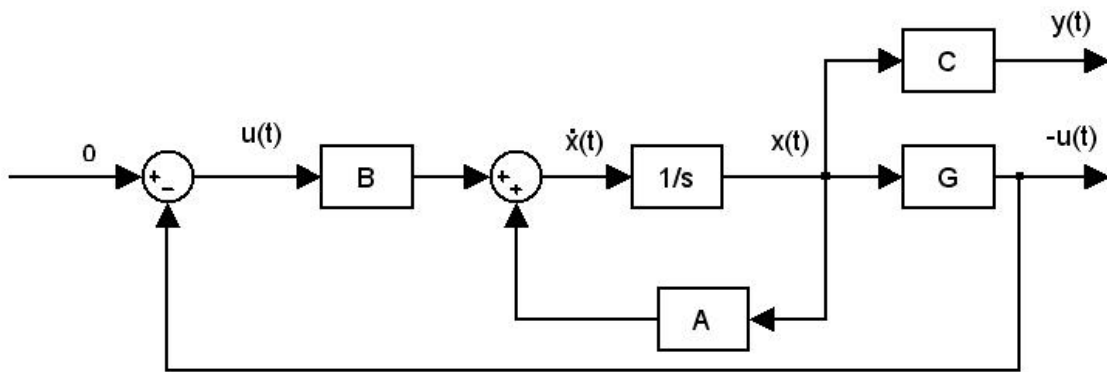
e

$$G_{OL}(s) = C(sI - A)^{-1} B, \quad (6.21)$$

e  $G$  é a matriz de ganhos do RLQ (vide (5.3)).

Em termos de diagrama de blocos, essas matrizes de FTs podem ser visualizadas conforme a *Figura 6-5* ilustra.





**Figura 6-5 - Diagrama de Blocos para a Visualização de  $G_{LO}(s)$  e  $G_{OL}(s)$**

Como consequência da IK deve ser notado que:

$$G'_{KF}(-j\omega) = G^H_{KF}(j\omega), \quad (6.22)$$

e o mesmo ainda vale para  $G_{MA}(s)$ .

Não será demonstrado (vide [28]), mas com as seguintes particularizações:

$$\begin{aligned} \Theta &= \mu I \quad (\mu > 0) \\ \Xi &= I \end{aligned}, \quad (6.23)$$

então a IK conduz a:

$$\sigma_i[I + G_{KF}(j\omega)] = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} \sigma_i^2 [C(j\omega I - A)^{-1} L]} \quad (\forall \omega \in R; i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.24)$$

Deve ficar claro que como esta identidade vale para todos os valores singulares, é válida também para o máximo e o mínimo. Assim, ela representa uma forma alternativa de se escrever a IK. A partir dela são extraídos importantes resultados a respeito da estabilidade e do desempenho da malha objetivo.

Contudo, ainda convém notar que a IK relaciona a matriz de funções de transferência diferença de retorno da malha objetivo, com os parâmetros livres, ou de projeto; são eles o escalar  $\mu > 0$  e a matriz  $L \in R^{n \times m}$ . Deste modo, esta relação representa uma forma conveniente, por conter em membros diferentes características da malha objetivo e parâmetros de projeto.

Ainda aqui cabe apresentar, uma aproximação de (6.24) que, sob certas circunstâncias que veremos a frente, é válida.

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L], \quad (6.25)$$

tanto em regiões de baixas como de altas frequências [27]

Esta relação é fundamental para o processo de dar forma aos valores singulares da malha objetivo, pois estabelece uma relação direta entre os parâmetros de projeto ( $\mu$  e  $L$ ) e a malha objetivo nas regiões de frequência onde se situam as barreiras de desempenho e estabilidade. Isso é poderoso especialmente pelo fato de não se precisar resolver a EAR em todas as iterações de escolhas de  $\mu$  e  $L$  no processo de se dar forma aos valores singulares de  $G_{KF}(j\omega)$ .

Deve ser ainda notado que os pólos de  $C(sI - A)^{-1}L$  dependem apenas de  $A$ , estando assim fixados uma vez escolhido o modelo nominal da planta, já os zeros de transmissão têm seu número, posição e direção dependentes de  $L$ , o que deve gerar graus de liberdade em número suficiente, juntamente com  $\mu$ , para dar forma aos valores singulares da malha objetivo.

### 6.3.1 Desempenho da Malha Objetivo

A região de freqüências onde se exige bom desempenho do sistema é aquela em que:

$$\sigma_m[G_{KF}(j\omega)] \gg 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

ou seja,

$$\sigma_m[I + G_{KF}(j\omega)] \gg 1 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

e a expressão (6.24) leva a aproximação de (6.25), conforme se segue:

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L] \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

Com isto, fica claro que  $\mu$  e  $L$  devem ser escolhidos de forma que  $\sigma_m[G_{KF}(j\omega)]$  respeite a barreira de desempenho. Deve ser notado que  $\mu$  pode ser utilizado para ajustar a freqüência de cruzamento.

Deve-se ainda observar que, dependendo das especificações de desempenho, pode ser necessário aumentar a dinâmica da planta. Assim, em nosso caso, para que o erro estacionário seja nulo para entrada do tipo degrau, é necessário que:

$$\sigma_m[C(j\omega I - A)^{-1}L] \rightarrow \infty, \quad \text{para } \omega \rightarrow 0$$

o que exige a adição de integradores à entrada da planta.

### 6.3.2 Robustez da Estabilidade da Malha Objetivo

A robustez da estabilidade na malha objetivo, tem mais relevância na região de altas frequências.

Pode ser demonstrado que (vide [28]), quando CL é não singular e  $\mu \ll 1$ , em altas frequências novamente vale a relação:

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L] \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

o que para a condição de robustez da estabilidade deve ser lembrado que vale a expressão:

$$\sigma_M[G_{KF}(j\omega)] < \frac{1}{e(\omega)}, \quad (\forall \omega \in R)$$

E, ainda, pode ser mostrado [28] que com CL não singular o Diagrama de Bode de  $\sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L]$  apresenta declividade de -20dB/dec, que é um dos requisitos de projetos aqui apresentados.

### 6.3.3 Características de Cruzamento da Malha Objetivo

De (6.24), obtêm-se dois resultados da matriz de transferência  $G_{KF}(s)$  [28] válidos para todo o domínio de frequências.

$$\sigma_m[I + G_{KF}(j\omega)] \geq 1, \quad (\forall \omega \in R), \quad (6.26)$$

$$\sigma_m[I + G_{KF}^{-1}(j\omega)] \geq \frac{1}{2}, \quad (\forall \omega \in R), \quad (6.27)$$

As propriedades apresentadas por (6.26) e (6.27) asseguram que a malha objetivo tem boas características na região de cruzamento ( deve ser observado que na verdade elas são válidas em todo o domínio de  $\omega$ ).

Com isto, a desigualdade (6.26) garante que o erro do acompanhamento do sinal de referência é atenuado na região de cruzamento, ao considerar as contribuições relativas a tal erro:

- do próprio sinal de referência, já que

$$\frac{\|e(j\omega)\|}{\|r(j\omega)\|} \leq \frac{1}{\sigma_m[I + G_{KF}(j\omega)]},$$

- das perturbações externas, já que

$$\frac{\|e(j\omega)\|}{\|d(j\omega)\|} \leq \frac{1}{\sigma_m[I + G_{KF}(j\omega)]},$$

- das variações da planta, já que

$$\frac{\frac{\|\delta y(j\omega)\|}{\|y(j\omega)\|}}{\|\delta G_{KF}(j\omega)G_{KF}^{-1}(j\omega)\|} \leq \frac{1}{\sigma_m[I + G_{KF}(j\omega)]}.$$

E a desigualdade (6.27) garante que a estabilidade da malha objetivo seja preservada para perturbações tais que:

$$e_M(j\omega) \leq \frac{1}{2}, \quad (\forall \omega \in R)$$

Deste modo, na região de cruzamento, em particular, a malha é razoavelmente robusta com respeito à estabilidade, embora, claramente, este limite de  $\frac{1}{2}$  seja insuficiente nas regiões de alta frequência, onde o modelo nominal é, de um modo geral, bem grosseiro.

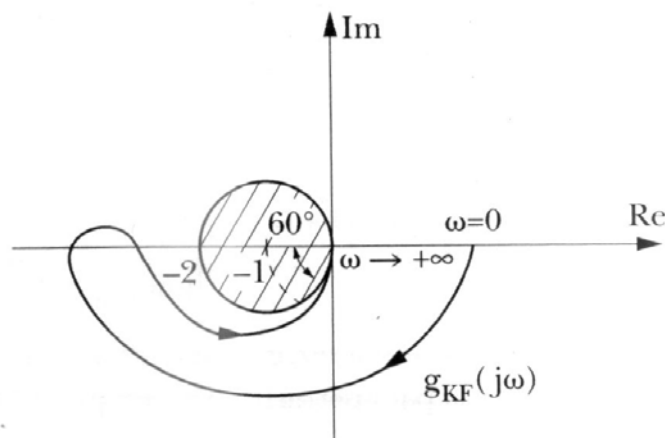
Contudo, como para sistemas de fase mínima, há uma correspondência entre boas características de cruzamento e declividade dos Diagramas de Bode, pode se esperar, então, que esta última seja favorável nessa região de frequências [27].

### 6.3.4 Margens de Ganho e Fase da Malha Objetivo

Antes de fazer-se considerações sobre o caso MIMO, é importante realizar uma abordagem inicial do caso SISO. Para tanto, deve ser notado que, neste caso, a desigualdade de (6.26) reduz-se a:

$$1 + g_{KF}(j\omega) \geq 1, \quad (\forall \omega \in R)$$

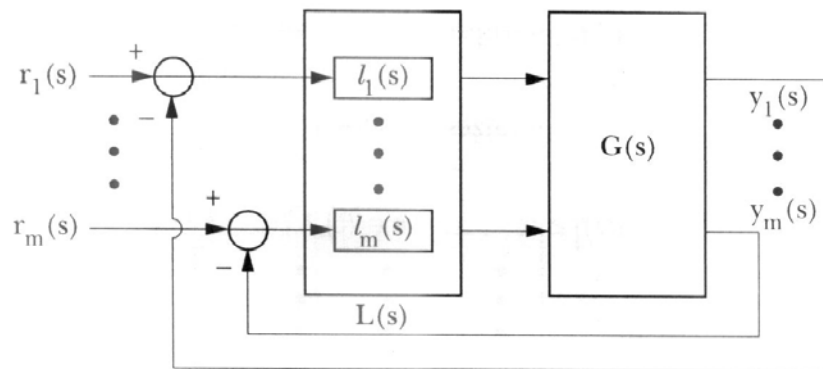
O que significa que o Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha não pode penetrar no círculo de raio unitário e centro no ponto  $-1+j0$  (vide *Figura 6-6*).



**Figura 6-6** - Diagrama de Nyquist de  $g_{KF}(j\omega)$  – retirado de [4]

Ao avaliar a *Figura 6-6* fica claro que a fase pode variar, respectivamente, pelo menos nos intervalos  $(1/2, +\infty)$  e  $(-60^\circ, +60^\circ)$  sem que o número de envolvimentos do ponto  $-1+j0$  se altere, e, deste modo, a estabilidade se mantém.

Contudo, no caso MIMO, a conceituação de margens de ganho e de fase refere-se a situação representada na *Figura 6-7*. Deve se admitir como hipótese a estabilidade nominal (isto é, para  $L(s)=I$ ) do sistema em malha fechada.



**Figura 6-7** - Diagrama de Blocos para a Definição das Margens de Estabilidade no caso MIMO – retirado de [24]

Entende-se como *Margem de Ganho* (MG) Multivariável como sendo o par de números reais  $c_1$  e  $c_2$  que delimitam o intervalo mais amplo  $(c_1, c_2)$  de forma que o sistema em malha fechada permanece estável quando  $l_i(s)$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , são constantes reais  $l_i$  satisfazendo as desigualdades:

$$c_1 < l_i < c_2, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.28)$$

Por outro lado, define-se como *Margem de Fase* (MF) multivariável como sendo o par de números reais  $c_1$  e  $-c_1$  que delimitam o intervalo mais amplo  $(-c_1, c_1)$  tal que o sistema em malha fechada permanece estável quando  $l_i(s)$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , representam defasagens puras, ou seja:

$$l_i(j\omega) = e^{j\phi_i(\omega)}. \quad (6.29)$$

onde

$$-c_1 < \phi_i(\omega) < c_1, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.30)$$

Observa-se ainda que estas definições reduzem-se às tradicionais do caso SISO [1].

Assim [24], se:

$$\sigma_m[I + G_{KF}(j\omega)] \geq \alpha, \quad (\forall \omega \in R), \quad (6.31)$$

então

$$MG \supset \left( \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1-\alpha} \right) \quad (6.32)$$

e

$$MF \supset \left( -2\text{sen}^{-1}(\alpha/2), 2\text{sen}^{-1}(\alpha/2) \right) \quad (6.33)$$

Assim, tendo em vista (6.26), obtém-se imediatamente que para a malha objetivo que este texto trata:

$$MG \supset \left( \frac{1}{2}, +\infty \right) \quad (6.34)$$

e

$$MF \supset (-60^\circ, +60^\circ)$$

o que nos dá o sentido que o ganho em cada canal de controle pode ser reduzido a metade ou aumentado indefinidamente sem que o nosso sistema perca a estabilidade. Assim como, defasagens puras de  $\pm 60^\circ$  podem ser introduzidas nos vários canais de entrada sem que a estabilidade seja perdida.



## 6.4 Escolha dos Parâmetros de Projeto

Aqui apresentar-se-á algumas sugestões de escolha dos parâmetros d projeto da malha objetivo,  $\mu$  e  $L$ .

É necessário se manter em mente que os passos necessários para definir a malha objetivo são os seguintes:

1. escolher  $\mu$  e  $L$  adequadamente;
2. resolver a EAR (6.6) para se obter  $\Sigma$ ;
3. calcular a matriz de ganhos  $H$  do FK usando (6.5).

A escolha de  $\mu$  e  $L$  será feita com base no fato de que

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L]$$

tanto em baixas como em altas frequências, quando  $\mu \ll 1$  e  $CL$  é não singular, conforme visto na seção 6.3. Tais hipóteses serão admitidas nesta seção.

Variações do parâmetro  $\mu$  têm como efeito apenas transladar verticalmente os Diagramas de Bode da malha objetivo nas referidas regiões de frequências, preservando, contudo, suas formas. A matriz  $L$  é que permite alterar a forma dos diagramas.

A primeira alternativa sempre deve ser a própria matriz de funções de transferência da malha nominal da planta e verificar se esta é satisfatória ( a menos do ganho  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ).

Se esta escolha não é satisfatória deve-se seguir com as sugestões.

### 6.4.1 Inclusão de Integradores na Entrada da Planta

Em modelos nominais que não apresentam integradores naturais, a malha objetivo apresenta, então, erros estacionários para sinais de referência ou perturbações em degrau. O que ocorre, também, com a malha de controle nominal do sistema hora projetado.

No entanto, é bastante comum o requisito de erro estacionário nulo em tais casos. O que de uma forma geral, exige a inclusão de integradores na entrada da planta.

Contudo, surge um benefício marginal, são introduzidos parâmetros de projeto adicionais, tornando possível, inclusive, realizar o casamento dos valores singulares em todas as faixas de frequências.

Seja o sistema nominal:

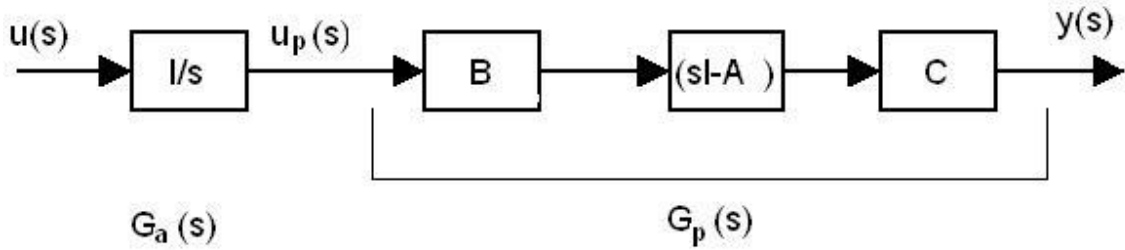
$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ e \\ y(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \tag{6.35}$$

onde o índice “p” é utilizado para enfatizar o fato de que se trata apenas do modelo da planta. A matriz de funções transferência da planta, por sua vez, será designada por  $G_p(s)$ :

$$G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p \tag{6.36}$$

Admite-se aqui a existência de  $A_p^{-1}$  ou, em outras palavras, a ausência de integradores naturais no modelo da planta nominal.

Neste ponto, então, inclui-se integradores (um por canal), conforme mostra a *Figura 6-8*.



**Figura 6-8 - Diagrama de Blocos da Planta Aumentada**

Deve ser notado que com isso fica definido um vetor de controle  $u(t)$  com dimensão idêntica à do vetor de controle da planta  $u_p(t)$ , de tal modo que:

$$\dot{u}_p(t) = u(t) \quad (6.37)$$

Claramente a matriz de transferência do bloco integrador é dada por:

$$G_a(s) = \frac{I}{s} \quad (6.38)$$

Assim, o sistema definido acima deve ser tratado pelo projeto da malha objetivo no lugar do nominal.

Deste modo,

$$G_N(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p \frac{I}{s} \quad (6.39)$$

Define-se então:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u_p(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} \in R^{m+n}, \quad (6.40)$$

obtendo-se assim a descrição de estados como se segue

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & C_p \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.41}$$

Com isso, fica evidente que, para se projetar a malha objetivo deve-se utilizar o modelo do sistema aumentado (A, B, C). Evidentemente para este modelo vale a aproximação

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L]$$

em baixas e em altas frequências.

#### 6.4.2 Filtro de Kalman com Dinâmica Aumentada

No caso do projeto do controlador que trata este texto, torna-se ainda necessário rejeitar os sinais de alta frequência definidos na seção (2.4.3.1), ou seja, as forças de primeira ordem do modelo dinâmico de movimentos da plataforma.

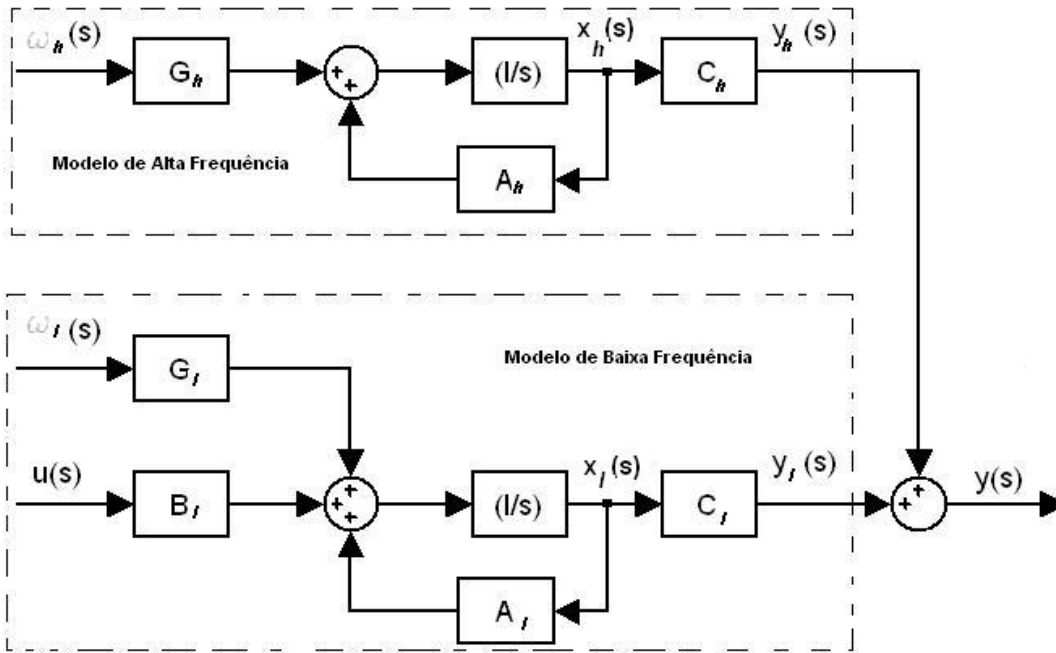
No caso de sistemas de posicionamento dinâmico não se deseja responder a estas forças, mas, tão somente, rejeitá-las. Caso contrário ter-se-ia forte modulação dos propulsores na frequência destes sinais, o que, certamente, além de aumentar consideravelmente o consumo de suas máquinas, ainda danificaria todo o sistema de propulsão.

Deste modo, precisa-se filtrar este sinal, e uma forma eficaz de fazê-lo é aproveitando o FK e incluindo neste a dinâmica de alta frequência associada aos movimentos da plataforma, e então, filtrar este sinal, de forma que as estimativas de estados do modelo de alta frequência geradas pelo observador não cheguem ao RLQ, impedindo assim, em tese, a modulação dos propulsores gerada pelo sinal de controle fornecido pelo compensador  $K(s)$ .

Para este desenvolvimento torna-se necessário a separação das dinâmicas de alta e baixa frequência na plataforma. Então, seja o modelo da planta nominal como se segue:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} x_l(t) \\ x_h(t) \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} \dot{x}_l(t) \\ \dot{x}_h(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l(t) \\ x_h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_l \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} G_l & 0 \\ 0 & G_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_l \\ \omega_h \end{bmatrix}, \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} C_l & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l(t) \\ x_h(t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Deve ser observado que os índices  $l$  e  $h$  designam respectivamente dinâmicas de baixa e alta frequência, conforme pode ser visto no diagrama de blocos da *Figura 6-9*.



**Figura 6-9 - Modelo Linear da Plataforma com Dinâmica de Altas e Baixas Frequência**

Deste modo, nosso sistema original

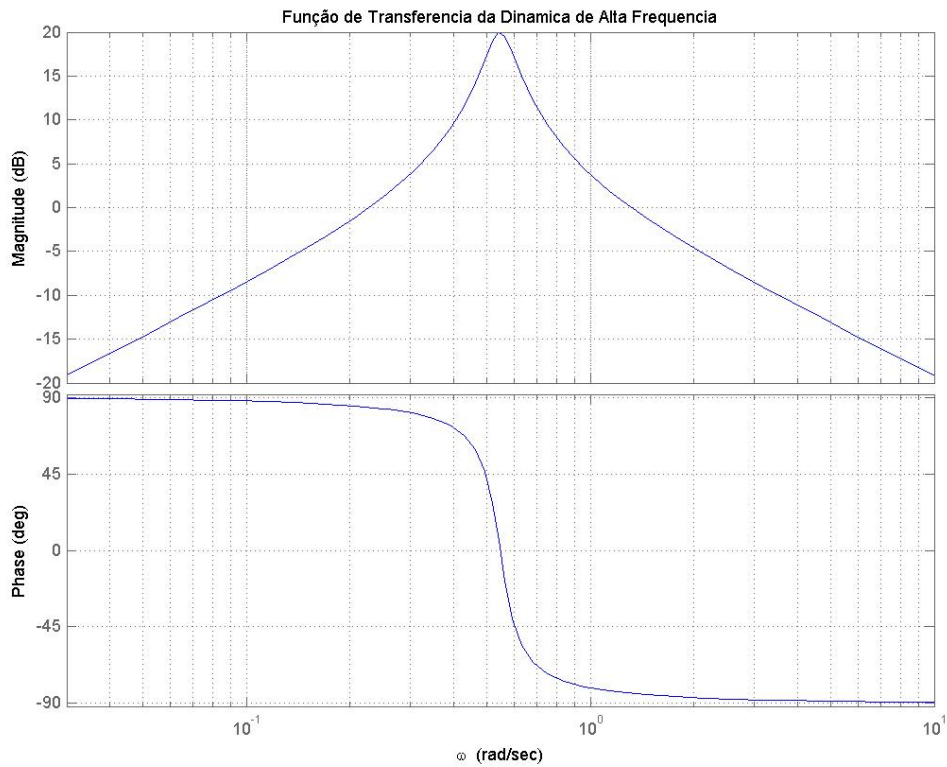
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu + G\omega,$$

$$y(t) = Cx.$$

deve ter suas matrizes compostas com as dinâmicas de altas e baixas frequências conforme (6.42).

Cabe ainda, ressaltar que no caso da inclusão dos integradores, as matrizes ficam exatamente como definido na seção 6.4.1, porém deve-se notar que agora as matrizes da planta (A, B, C e G) devem ser compostas pela dinâmica de altas e baixas frequências.

Para o modelo da dinâmica de alta frequência da plataforma é utilizado uma função de transferência de segunda ordem que se aproxima do espectro de mar, fazendo assim a frequência modal da FT do modelo alta frequência igual à frequência modal do espectro referente ao estado de mar.



**Figura 6-10** - Diagrama de Bode da Função de Transferência usada para a Dinâmica de Alta Frequência do FK

A função de transferência acima é descrita pela seguinte expressão:

$$Y_h(s) = \frac{K_\omega}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \dot{\omega} = \frac{K_\omega s}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \Omega(s) \quad (6.43)$$

$$FT(s) = \frac{Y_h(s)}{\Omega(s)} = \frac{K_\omega s}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

para a definição da função de transferência acima, define-se o seguinte vetor de estados:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y = \text{posição} \\ \dot{\xi} = y \end{bmatrix}, \text{ onde } \dot{x}_2 = x_1$$

e como

$$X_2(s) = \frac{1}{s} X_1(s) \Rightarrow \frac{X_2(s)}{\Omega(s)} = \frac{K_\omega}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (6.44)$$

assim,

$$\ddot{\xi} + 2\zeta\omega_0 \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = K_\omega \omega$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}_1 = -2\zeta\omega_0 x_1 - \omega_0^2 x_2 + K_\omega \omega, \text{ então}$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural não amortecida e  $\zeta$  o coeficiente de amortecimento do nosso oscilador harmônico.

Assim, a forma em espaço de estados para cada grau de liberdade é a que se apresenta a seguir:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\zeta\omega_0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\omega \\ 0 \end{bmatrix} \omega \quad (6.45)$$

$$A_h = \begin{bmatrix} -2\zeta & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_h = 0, C_h = [1 \ 0] \text{ e } G_h = \begin{bmatrix} K_\omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

e, lembrando que tais matrizes se aplicam a cada grau de liberdade.

Assim, como no projeto aqui tratado têm-se três graus de liberdade, então seguindo o que foi definido na seção 3.5.1, define-se:



$$\begin{aligned}
A_h &= \begin{bmatrix} -2\zeta_1 & 0 & 0 & -\omega_{01}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta_2 & 0 & 0 & -\omega_{02}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\zeta_3 & 0 & 0 & -\omega_{03}^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_h &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e \quad G_h = \begin{bmatrix} K_{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\omega_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
C_h &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Deve-se notar que o coeficiente de amortecimento  $\zeta$ , deve ser utilizado como um fator de ajuste para a filtragem das altas frequências, já que ele tem influência direta na atenuação e largura de faixa de rejeição da dinâmica de altas frequências do FK (vide *Figura 6-10*).

O coeficiente  $K_\omega$  deve ser utilizado para ajustar a largura de banda do filtro, e assim uma boa estimativa para ele é  $K_\omega = 2\zeta\omega_0\sigma_\omega$ , onde  $\sigma_\omega$  é o fator de qualidade do filtro e é o que dá forma a sua FT.

Cabe ainda ressaltar que com a inclusão desta dinâmica de alta no FK poder-se-ia imaginar que não mais seria aplicável a metodologia aqui desenvolvida, contudo é importante lembrar-se da *Propriedade da Separação*, esta permite resolver separadamente o problema do regulador e o da malha objetivo, assim o procedimento é o mesmo, mas faz-se uma pequena variação.

Seja a equação do sistema nominal com dinâmica de altas frequências:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_l x_l(t) + A_h x_h(t) + B_l u(t), \\ y(t) &= C_l x_l(t) + C_h x_h(t)\end{aligned}\tag{6.48}$$

que pode ainda ser reescrita com se segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_l(t) \\ \dot{x}_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l(t) \\ x_h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_l \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_l & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l(t) \\ x_h(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.49}$$

e, para o FK com a dinâmica aumentada com as altas frequências, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_l \hat{x}_l(t) + A_h \hat{x}_h(t) + B_l u(t) + H_l e_{y_l} + H_h e_{y_h}, \\ \hat{y}(t) &= C_l \hat{x}_l(t) + C_h \hat{x}_h(t), \text{ onde} \\ \hat{y}_l &= C_l \hat{x}_l(t) \text{ e } \hat{y}_h = C_h \hat{x}_h(t)\end{aligned}\tag{6.50}$$

que pode ainda ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_l(t) \\ \dot{\hat{x}}_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & A_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_l(t) \\ \hat{x}_h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_l \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} H_l \\ H_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{y_l} \\ e_{y_h} \end{bmatrix}, \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C_l & C_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_l(t) \\ \hat{x}_h(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.51}$$

e, de forma mais simples,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A \hat{x}(t) + B u(t) + H e_y, \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{6.52}$$

onde as matrizes de (6.51) tem correspondência em (6.50).

Assim, com este resultado, pode-se projetar a malha objetivo tendo em vista o sistema completo, aumentado com os integradores e a dinâmica de alta frequência da planta, e quando se passa para o projeto do LQR, utiliza-se apenas a dinâmica de baixa e possíveis integradores. Tal procedimento é válido, já que assim lança-se a mão da *Propriedade da Separação*. Contudo, ao se avaliar  $C_N(s)$ , volta-se a utilizar o sistema completo, com todas as dinâmicas incluídas.

Deve-se notar, no entanto que a matriz de ganhos do RLQ,  $G(s)$  será na realidade:

$$G(s) = [G_l(s) \quad 0] \quad (6.53)$$

assim, como

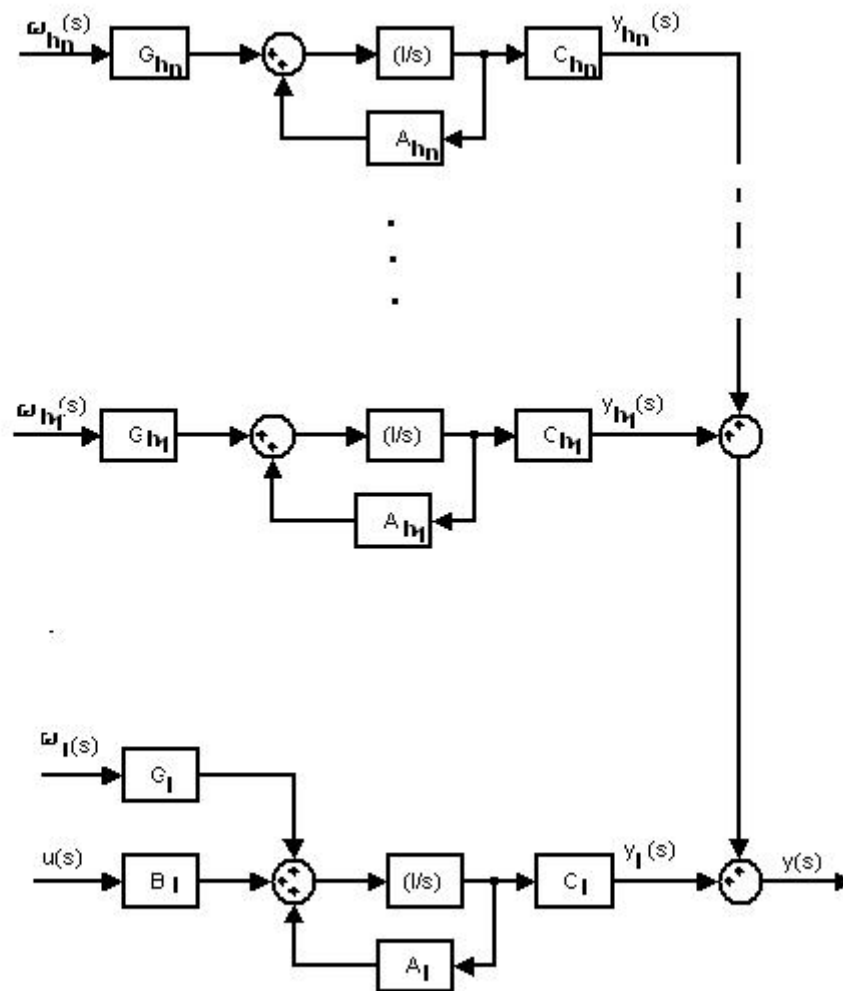
$$u(s) = -G(s)\hat{x}(s) = -[G_l(s) \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_l(s) \\ \hat{x}_h(s) \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

fica claro que  $u(t)$  não possui as componentes de alta frequências da planta, assim não há modulação dos propulsores, que só devem responder a dinâmica de baixa frequência.

Contudo ainda resta um problema, nosso filtro rejeita faixa gerado pela dinâmica aumentada no FK possui uma faixa de rejeição muito estreita, e apesar de possuir grande atenuação na frequência  $\omega_0$ , fora dela esta atenuação cai rapidamente, deixando, assim, o filtro, de desempenhar sua função desejada.

Uma saída é a inclusão de mais de uma frequência de alta, isto é, deve-se incluir mais de um  $\omega_0$  para cada grau de liberdade. Assim, como é sugerido em [2], utiliza-se três frequências de forma a tentar varrer a nossa faixa de frequências dos movimentos de primeira ordem da plataforma, que em geral estão no intervalo máximo de 0,16rad/s a 1,6rad/s (~40s a 4s de período).

Tal procedimento é ilustrado pelo diagrama de blocos da *Figura 6-11*.



**Figura 6-11** - Diagrama de Blocos do FK com  $n$  Dinâmicas de Alta Incluídas

Assim, uma boa varredura é obtida utilizando-se três frequências para os três dinâmicas de alta, são elas 0,2rad/s, 0,85rad/s e 1,5 rad/s. deste modo ficamos com um filtro rejeita faixa com uma banda de rejeição mas larga e cobrindo a região de frequências que a grande parte dos movimentos de primeira ordem da plataforma se encontram.

Tendo feito esta considerações é importante apresentar as matrizes que serão utilizadas no projeto do FK e do RLQ.

Para o Filtro de Kalman com as dinâmicas aumentadas tem-se:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u_p(t) \\ x_{p1}(t) \\ x_{ph1}(t) \\ x_{ph2}(t) \\ x_{ph3}(t) \end{bmatrix} \in R^{m+4n}, \quad (6.55)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{p1} & A_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{ph1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ph2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{ph3} \end{bmatrix} \in R^{m+4n} \times R^{m+4n}, \quad (6.56)$$

$$B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{m+4n} \times R^m, \quad (6.57)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{p_l} & C_{p_{h1}} & C_{p_{h2}} & C_{p_{h3}} \end{bmatrix} \in R^m \times R^{4m+n}, \quad (6.58)$$

e

$$H = \begin{bmatrix} H_l \\ H_h \end{bmatrix} \in R^{m+4n} \times R^m, \quad (6.59)$$

onde,

$$\begin{aligned} H_l &\in R^{m+n} \times R^m, \\ H_h &\in R^{3n} \times R^m \end{aligned} \quad (6.60)$$

Já para o RLQ, utiliza-se apenas a dinâmica de baixa com os integradores, assim tem-se:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u_p(t) \\ x_{p_l}(t) \end{bmatrix} \in R^{m+n}, \quad (6.61)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{p_l} & A_{p_l} \end{bmatrix} \in R^{m+n} \times R^{m+n}, \quad (6.62)$$

$$B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{m+n} \times R^m, \quad (6.63)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{p_l} \end{bmatrix} \in R^m \times R^{m+n}, \quad (6.64)$$

e

$$H = H_l \in R^{m+n} \times R^m, \quad (6.65)$$

e, ainda, ao associar o ganho do RLQ ao compensador  $K(s)$ , deve-se lembrar que:

$$G = [G_l \quad 0] \in R^m \times R^{m+4n}, \quad (6.66)$$

### 6.4.3 Casamento dos Valores Singulares

Como foi dito em seções anteriores, é interessante que os valores singulares estejam próximos entre si, para assim ser mais natural se dar forma aos valores singulares de forma a se atender aos requisitos de desempenho e estabilidade.

Seja a propriedade a seguir:

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ V & U \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ -U^{-1}VT^{-1} & U^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

que se aplica sempre que  $T$  e  $U$  são inversíveis.

Daí por diante entendam-se índices  $p$  desacompanhados de índices  $l$  ou  $h$  como designando a planta com suas dinâmicas de alta e baixa frequência sem os integradores e, quando não há índices, a planta completa, incluindo os integradores adicionados:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} sI & 0 \\ -B_p & sI - A_p \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ (sI - A_p)^{-1} B_p / s & (sI - A_p)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.68)$$

assim,

$$C(j\omega I - A)^{-1}L = \begin{bmatrix} 0 & C_p \begin{bmatrix} I / j\omega & 0 \\ (j\omega I - A_p)^{-1} B_p / j\omega & (j\omega I - A_p)^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_L \\ L_H \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

onde, claramente

$$L = \begin{bmatrix} L_L \\ L_H \end{bmatrix}.$$

Com isto, então, pode-se examinar o comportamento de  $C(j\omega I - A)^{-1}L$  em baixas e em altas frequências.

Neste projeto irá se utilizar a metodologia de casamento dos valores singulares em baixa e alta frequências, contudo descrição mais detalhada pode ser encontrada em [24].

- Casamento dos Valores Singulares em Baixas e altas Frequências

A escolha adequada de  $L_L$  e  $L_H$  permite o casamento dos valores singulares de  $G_{KF}(j\omega)$  em todas as frequências.

De (6.67) e (6.68), entendendo-se o índice  $p$  como indicando a planta completa, com dinâmica de baixa e as de alta frequências, mas sem os integradores, obtém-se

$$C(sI - A)^{-1}L = C_p (sI - A)^{-1} B_p \frac{I}{s} L_L + C_p (sI - A)^{-1} L_H \quad (6.70)$$

e, fazendo

$$L_H = -A_p^{-1} B_p L_L \quad (6.71)$$



e escolhendo

$$L_L = -(C_p A_p^{-1} B_p)^{-1} \quad (6.72)$$

pode-se mostrar [24] que obtém-se

$$C(sI - A)^{-1} L = \frac{I}{s} \quad (6.73)$$

que significa que

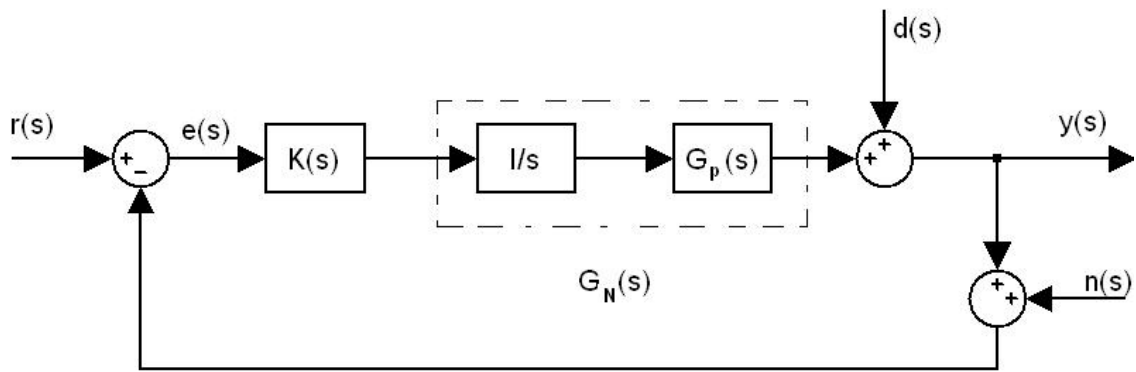
$$\sigma_i [C(j\omega I - A)^{-1} L] = \frac{1}{\omega} \quad (6.74)$$

e, deste modo, todos os valores singulares são iguais em todas as frequências, apresentado ainda, seus Diagramas de Bode com uma declividade de -20dB/dec.

*Nota:*

Deve ser notado que o parâmetro  $\mu$  pode ser utilizado para transladar para cima ou para baixo os gráficos de  $\sigma_i [G_{KF}(j\omega)]$  e, com isso, ajustar a frequência de cruzamento da malha objetivo, consistentemente com a restrição imposta pela barreira de robustez da estabilidade.

É importante ressaltar, ainda, que o bloco de integradores inseridos na planta (*Figura 6-12*) é visto dentro do procedimento como parte integrante da matriz de funções de transferência desta para o projeto do compensador  $K(s)$ , contudo, na prática, o bloco de integradores faz parte “fisicamente” do compensador e, assim, sua implementação num sistema real deve ser observada.



**Figura 6-12 - Diagrama de Blocos do Sistema em Malha Fechada**

## **7 PROCEDIMENTO DE PROJETO**

### **7.1 Resumo do Procedimento de Projeto**

Neste capítulo é apresentado toda uma seqüência de projeto de modo a sistematizar a especificação de sistemas DP.

Para a sistemática definida acima executa-se ainda aqui o projeto de um sistema AAP para o FPSO-BR P-57. Tal UEP é utilizada com o principal objetivo de mostrar que o grande acoplamento entre seus graus de liberdade devido a ancoragem em spread mooring podem ser levados em conta no projeto do controlador e aproveitar assim o esforço de ancoragem em favor do sistema DP.

Após isso faz-se ainda a apresentação de resultados e então as conclusões finais.

#### **7.1.1 Introdução**

Esta seção tem por objetivo apresentar um resumo do procedimento LQG/LTR, apresentando-o como uma seqüência de passos que se deve seguir para a obtenção do compensador.

O procedimento de projeto se resume às seguintes etapas:

- (i) modelagem matemática da dinâmica da planta;
- (ii) avaliação do erro de modelagem;
- (iii) mudança de escala das variáveis de entrada e/ou saída, quando necessário;
- (iv) obtenção das barreiras de desempenho e estabilidade a partir das especificações do sistema e do erro de modelagem;
- (v) inclusão de integradores ou outros tipos de compensadores na entrada da planta, quando necessário;
- (vi) aplicação da metodologia LQG/LTR:
  - (vi.1) conformação dos valores singulares da malha objetivo;
  - (vi.2) recuperação da malha objetivo.

Assim, deve-se notar que este é um procedimento iterativo, de modo que, de forma geral, é necessário aplicar o procedimento tantas vezes quanto necessário para se obter o resultado satisfatório.

Por exemplo, pode-se ter que retornar ao passo (v) devido ao não atendimento das especificações em (vi.1). Ou, ainda, ter que retornar ao passo (i) e melhorar o modelo quando as especificações forem incompatíveis com o modelo matemático existente.

### 7.1.2 Seqüência do Procedimento de Projeto

Ao detalharmos o procedimento LQG/LTR, objetivo deste trabalho, apresentam-se os seguintes passos:

#### PASSO 1

Neste ponto deve ser salientado que, o sistema nominal e suas matrizes tratadas aqui, ou seja, na construção da malha objetivo, deve ser composto por todas as dinâmicas incluídas (integradores e altas frequências).

a) escolher  $\mu$  e  $L$  de maneira que os

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i [C(j\omega I - A)^{-1} L]$$

obedeçam as barreiras de desempenho e estabilidade;

b) havendo alcançado o objetivo acima, plotar

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i [C(j\omega I - A)^{-1} L]$$

c) salvar os valores de  $\mu$  e  $L$  obtidos.

## PASSO 2

a) usando os valores de  $\mu$  e  $L$  obtidos acima, resolver a EAR

$$0 = A\Sigma + \Sigma A' + LL' - \frac{1}{\mu} \Sigma C' C \Sigma$$

b) calcular a matriz de ganhos do FK

$$H = \frac{1}{\mu} \Sigma C'$$

c) plotar os valores singulares  $\sigma_i[G_{KF}(j\omega)]$ , onde

$$G_{KF}(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} H$$

que, para as frequências distantes da de cruzamento devem ser próximos daqueles obtidos no passo 1b;

d) plotar  $\sigma_i\{[I + G_{KF}(j\omega)]^{-1} G_{KF}(j\omega)\}$ ,  $1/e_M(\omega)$  e verificar se vale a *Condição de Robustez da Estabilidade*:

$$\sigma_i\{[I + G_{KF}(j\omega)]^{-1} G_{KF}(j\omega)\} < \frac{1}{e_M(\omega)} \quad (\forall \omega)$$

se não retornar ao passo 1a.

Algumas vezes pode acontecer que a declividade de  $\sigma_i\{[I + G_{KF}(j\omega)]^{-1} G_{KF}(j\omega)\}$  em altas frequências (em torno de -20dB/dec) não seja suficiente para obedecer a barreira de alta frequência. No entanto, é possível que  $\sigma_M[G_{KF}(j\omega)K(j\omega)]$  obedeça-a, já que este tem, em geral, uma declividade mais acentuada.

### PASSO 3

Neste ponto deve ser salientado que, o sistema nominal e suas matrizes tratadas aqui, ou seja, na construção da malha objetivo, somente deve ter incluído a dinâmica dos integradores. Assim, a matriz de ganhos do FK deve ser apenas  $H_i(s)$ , onde

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_l(s) \\ H_h(s) \end{bmatrix}$$

a) Calcular os zeros de  $G_N(s)$  e verificar se eles se localizam no SPE aberto (mesmo que isso não aconteça deve se continuar com o procedimento);

b) deve-se resolver a EAR

$$0 = KA + A'K + C'C - \frac{1}{\rho} KBB'K$$

para algum valor de  $\rho > 0$  e em seguida

c) calcular a matriz de ganhos de realimentação de estados

$$G_l = \frac{1}{\rho} B'K$$

d) calcular a matriz de ganhos de realimentação de estados para o sistema completo (a partir de agora o sistema utilizado volta a ser o completo)

$$G = \begin{bmatrix} G_l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^n \times R^{4m+n}$$

e) calcular a matriz de funções de transferência do compensador

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1} H$$

f) calcular a matriz de funções de transferência do ramo direto  $G_N(s)K(s)$ , onde  $G_N(s)$  contém os eventuais integradores adicionados pelo projetista e as dinâmicas aumentadas na malha objetivo (matriz de funções de transferência aumentada);

g) plotar  $\sigma_i[G_N(j\omega)K(j\omega)]$ ;

h) comparar  $\sigma_i[G_N(j\omega)K(j\omega)]$  com  $\sigma_i[G_{KF}(j\omega)]$  obtidos no passo 2c, se a proximidade for satisfatória, prosseguir no passo 3i; caso contrário reduzir  $\rho$  e repetir o passo 3b a 3h;

i) plotar  $\sigma_M[C_N(j\omega)]$ ,  $1/e(\omega)$  e verificar se a *Condição de Robustez da Estabilidade*

$$\sigma_M[C_N(j\omega)] < 1/e(\omega) \quad (\forall \omega)$$

é obedecida, caso contrário, reduzir  $\rho$  e retornar ao passo 3b.

Ao fim do procedimento, obtém-se o compensador  $K(s)$  (ou  $I/sK(s)$ , no caso de inclusão de integradores na planta).

*Nota:*

No caso em que os zeros da planta do modelo de projeto são de fase mínima, o procedimento de recuperação certamente converge quando  $\rho \rightarrow 0^+$ .

Contudo, quando os zeros de transmissão são de fase não mínima, mas situados em frequências superiores à de cruzamento, o procedimento de recuperação geralmente leva a resultados satisfatórios [4]. Normalmente, observa-se que, à medida que  $\rho$  decresce, os  $\sigma_i[G_N(j\omega)K(j\omega)]$  vão ficando mais próximos de  $\sigma_i[G_{KF}(j\omega)]$  da região de baixas para a de altas frequências.

No entanto, se existem um ou mais zeros de fase não mínima na região de baixas frequências, então é de se esperar que os  $\sigma_i[G_N(j\omega)K(j\omega)]$  não se aproximem de  $\sigma_i[G_{KF}(j\omega)]$  nessas frequências e, conseqüentemente, o desempenho do sistema de controle resultante seja comprometido.

## 7.2 Projeto de Controlador para AAP – FPSO-BR P-57

### 7.2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o projeto de um controlador LQG/LTR para um FPSO em AAP. A plataforma considerada foi a unidade de produção da Petrobras, o FPSO BR P-57, projetada para operar na Bacia de Campos, no Campo de Jubarte.

Tal configuração foi escolhida com o objetivo de mostrar o caso mais geral para este projeto, já que um FPSO em “spread mooring” possui forte acoplamento entre seus graus de liberdade no movimento do plano horizontal, justificando assim, uma metodologia de projeto de controle multivariável. Contudo, cabe ressaltar que esta metodologia poderia se aplicar a sistemas de Drilling Units em AAP ou DP puro, Semi-Submersibles etc., onde não há forte acoplamento entre os graus de liberdade dos movimentos considerados (são eles, três – 3dof, surge, sway e yaw).

Deve ser ressaltado, que foi construído uma rotina, em ambiente de programação MatLab, para a execução do procedimento de projeto, tal rotina está em arquivo de nome LQG\_LTR\_procedure\_a.m.. Existe ainda outras rotinas, também em ambiente MatLab, para a leitura de dados da plataforma e condições ambientais, cujos nomes são p57\_lf\_data\_in.m e p57\_hf\_data\_in.m.

Cabe ainda salientar que foi construído um modelo não linear para a simulação dos movimentos no plano horizontal, onde são consideradas as equações de movimento completas em 3dof, no plano horizontal. Tal, modelo roda em ambiente MatLab, sob o arquivo de nome dyna\_ship.mdl. Nesta simulação estão todas as componentes externas, tal qual definidas no capítulo 2.

Os dados do projeto serão apresentados seguindo o resumo do procedimento de projeto mostrado neste capítulo.



## 7.2.2 Seqüência de Projeto

### 7.2.2.1 Modelo Matemático

Todos os dados referentes a movimentos (RAOs e QTFs) e condições ambientais (Vento e Corrente) foram retirados do relatório de movimentos desta unidade [30], assim como os dados referentes a rigidez de ancoragem foram retirados do relatório de ancoragem [31], e estes dados são processados no simulador (dyna\_ship.mdl) de forma a gerar as componentes conforme definidas no capítulo 2. Estes dados são inseridos e guardados nas rotinas p57\_lf\_data\_in.m e p57\_hf\_data\_in.m.

Para o modelo nominal de projeto foram obtidos coeficientes hidrodinâmicos para o casco segundo fórmulas de [3] conforme consta em planilha excel, cujo arquivo tem nome p57.xls, estes apesar de não serem valores tão exatos como poder-se-ia desejar, certamente ilustram consistentemente a metodologia de projeto de sistema de controle aqui estudada.

Deve-se ainda notar que os movimentos de primeira ordem (alta frequência) da plataforma inseridos na simulação, são calculados segundo o que o capítulo 2 mostra, contudo, para os de segunda ordem (baixa frequência), obter-se-ia valores pequenos devido a P-57 ter sido consistentemente projetada para operar sem AAP, assim foi utilizado para estes um mean-drift constante e slow-drift com frequência igual aos períodos naturais do movimento horizontal. Tal situação poderia ser catastrófica sem AAP, mas com este sistema de controle instalado obtém-se níveis de movimentos bastante razoáveis.

Assim, deve-se raciocinar de forma particionada, o projeto é feito em cima de uma planta nominal linearizada, contudo ao fim gera-se uma simulação (com o modelo completo e condições ambientais) no domínio do tempo de forma a se ter maior confiabilidade nos resultados obtidos pelo modelo linearizado utilizado para o projeto do controlador.

Deste modo, o modelo matemático utilizado para o projeto do controlador, conforme (3.41) e (3.47), tem seus valores numéricos guardados nos arquivos acima mencionados, onde podem ser consultados.

### **7.2.2.2 Avaliação do Erro de Modelagem**

Aqui não será tratado em detalhes este tópico, já que não é enfoque deste trabalho a avaliação precisa do mesmo, contudo é admitido que o ganho de malha precisa ser de pelo menos 60dB na faixa de frequências em que se deseja bom desempenho (baixas frequências), e de -60dB na faixa em que o erro de modelagem é grande (altas frequências).

Isto é consistente para  $e_M$  em torno de no mínimo 0,001 na faixa de frequências onde se deseja acompanhar o sinal de referência (baixas frequências) e  $e_M$  em torno de no máximo 1000, na faixa de frequências onde não se necessita seguir o sinal de referência (altas frequências).

Em outras palavras, na prática o que se quer é que os valores singulares tenham uma taxa de pelo menos -20dB/dec.

### **7.2.2.3 Mudança de Escala de Variáveis**

Para que possamos trabalhar com valores numéricos próximos entre si, neste projeto as grandezas de força estão sendo trabalhadas em tf, de momento em tf.m e tempo em s. Deste modo todas as outras saem por definição das equações de movimento conforme definidas no capítulo 2.

### **7.2.2.4 Barreiras de Desempenho e de Estabilidade**

Seguindo a mesma idéia da seção 7.2.2.2, aqui não será dado enfoque na determinação precisa de  $p(\omega)$ , mas tão somente admitir que ele é no máximo de 1000, o que em geral é bem conservativo para sistemas reais.

Assim as equações

*Barreira de Robustez do Desempenho*

$$\sigma_M[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{1}{e_M(\omega)} \quad (\forall \omega \in R)$$

e, *Barreira de Robustez da Estabilidade*

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} \quad (\omega \in \Omega)$$

reduzem-se, de forma prática a

$$\sigma_M[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{1}{e_M(\omega)} = \frac{1}{1000} = 0,001 = -60dB \quad (\forall \omega \geq \omega_e)$$

$$\sigma_m[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)} = \frac{1000}{1 - 0,001} \approx 1000 = 60dB \quad (\forall \omega \leq \omega_0)$$

Mais uma vez, em termos práticos, todo o procedimento acima pode ser resumido em garantir que os valores singulares tenham uma taxa de pelo menos -20dB/dec.

Deve ser notado que as faixas de frequências acima serão baseadas na frequência de corte desejada para o sistema, já que esta é uma especificação de fato para o um sistema de controle, pois ela interfere diretamente na região em que se deseja seguir o sinal de referência.

Uma forma prática de se determinar um valor aproximado de  $\omega_c$  é se basear em um sistema de primeira ordem, e assim utilizar a constante de tempo deste para achar  $\omega_c$ .

Assim este valor pode ser determinado como

$$\omega_c \approx \frac{2\pi}{\left( \frac{\text{tempo de acomodação}}{3} \right)}$$

Em geral, para plataformas, deseja que o tempo de acomodação esteja em torno de 5min, o que dá

$$\omega_c = 0,0628 \text{ rad/s.}$$

#### **7.2.2.5 Inclusão de Integradores**

Foi feita a inclusão de integradores conforme o que foi apresentado na seção 6.4.1 e, assim, o modelo nominal consta de integradores adicionados. As matrizes geradas podem ser vistas no arquivo LQG\_LTR\_procedure\_a.m.

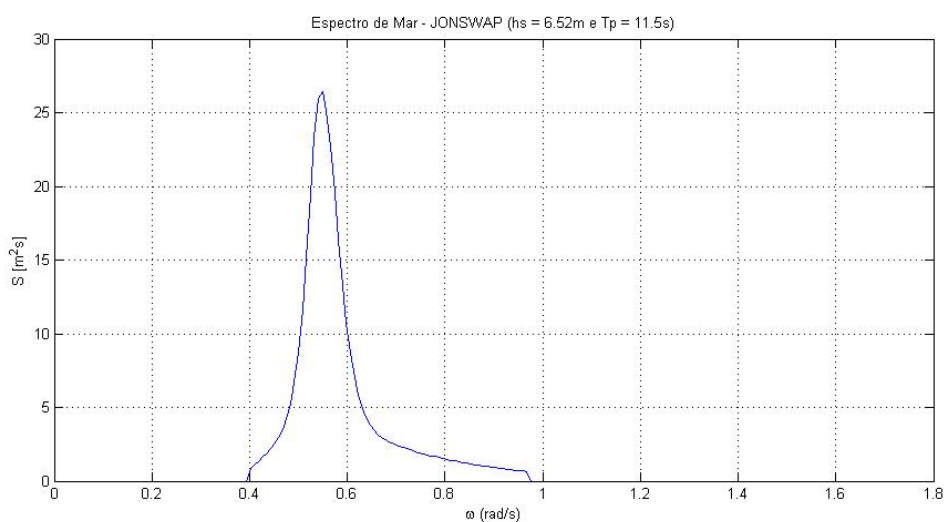
#### **7.2.2.6 Aplicação da Metodologia LQG/LTR**

A metodologia foi aplicada conforme o que foi discutido neste texto e resumido no início deste capítulo. Os detalhes de sua implementação podem ser observados no arquivo da rotina, LQG\_LTR\_procedure\_a.m.

### 7.3 Apresentação de Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com a execução das rotinas MatLab descritas acima para o projeto controlador, assim como ao final os resultados das simulações.

Para o projeto do controlador e nas simulações foi utilizado para a dinâmica de alta frequência o espectro de mar JONSWAP com  $H_s = 6.52\text{m}$  e  $T_p = 11.5\text{s}$ , contudo, conforme pode ser notado na *Figura 7-1*, o espectro teve suas constantes de forma alteradas de forma a torná-lo bastante “narrow band”, ou banda estreita, de forma a que a dinâmica de alta frequência do filtro de Kalman fosse suficiente sem a necessidade de se utilizar mais de um estágio para a dinâmica de alta frequência.

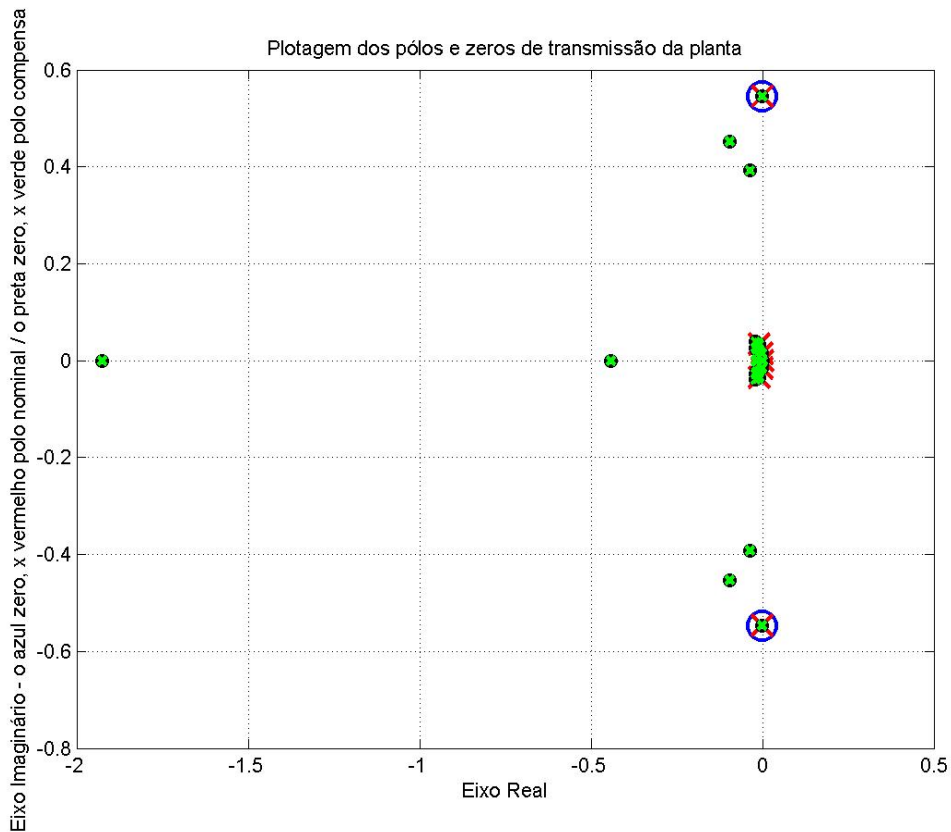


**Figura 7-1** – *Espectro de Mar utilizado no projeto e nas simulações*

*(centenário – BACIA DE CAMPOS)*

Ao se proceder a metodologia aqui tratada obtém-se os seguintes resultados para cada passo:

Pólos e Zeros do sistema nominal e compensado após a aplicação do procedimento de projeto.



**Figura 7-2** – *Pólos e Zeros de Transmissão da Planta Nominal em malha Aberta e da Compensada em Malha Fechada*

Conforme pode ser notado a planta nominal é de fase mínima, pois possui todos os pólos e zeros no SPE, o que garante a aplicabilidade da metodologia.

Deve ainda ser destacado que a planta compensada em malha fechada possui pólos mais rápidos de forma a atender os requisitos de resposta transitória.

### 7.3.1 Procedimento de Projeto

#### PASSO 1

Os pólos e zeros do sistema nominal podem ser vistos na *Figura 7-2*.

Matriz de ganhos de ruído de processo,  $L$ :

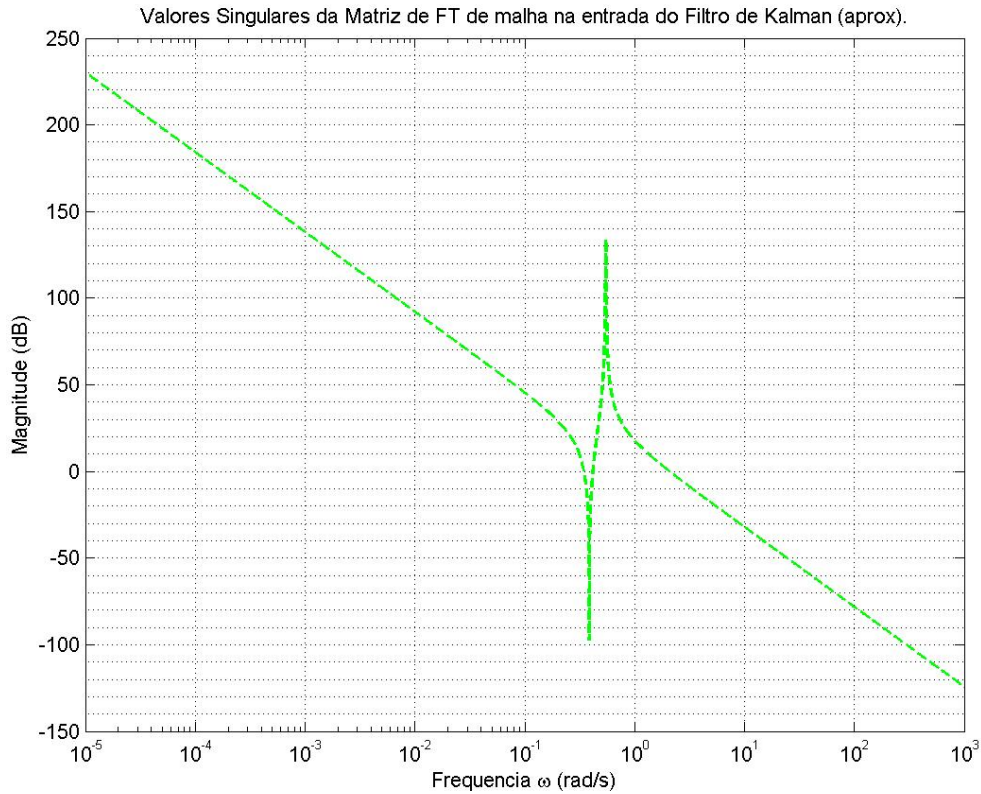
$$L = \begin{bmatrix} 97.646 & -0.14362 & -20.026 \\ -0.14362 & 154.17 & 1652.7 \\ -20.026 & 1652.7 & 5543900 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de intensidade de ruído de processo,  $\Xi$

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1e-009 & 0 & 0 \\ 0 & 1e-009 & 0 \\ 0 & 0 & 1e-007 \end{bmatrix}$$

Matriz de intensidade de ruído de processo,  $\Theta$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1e-008 & 0 & 0 \\ 0 & 1e-008 & 0 \\ 0 & 0 & 1e-007 \end{bmatrix}$$

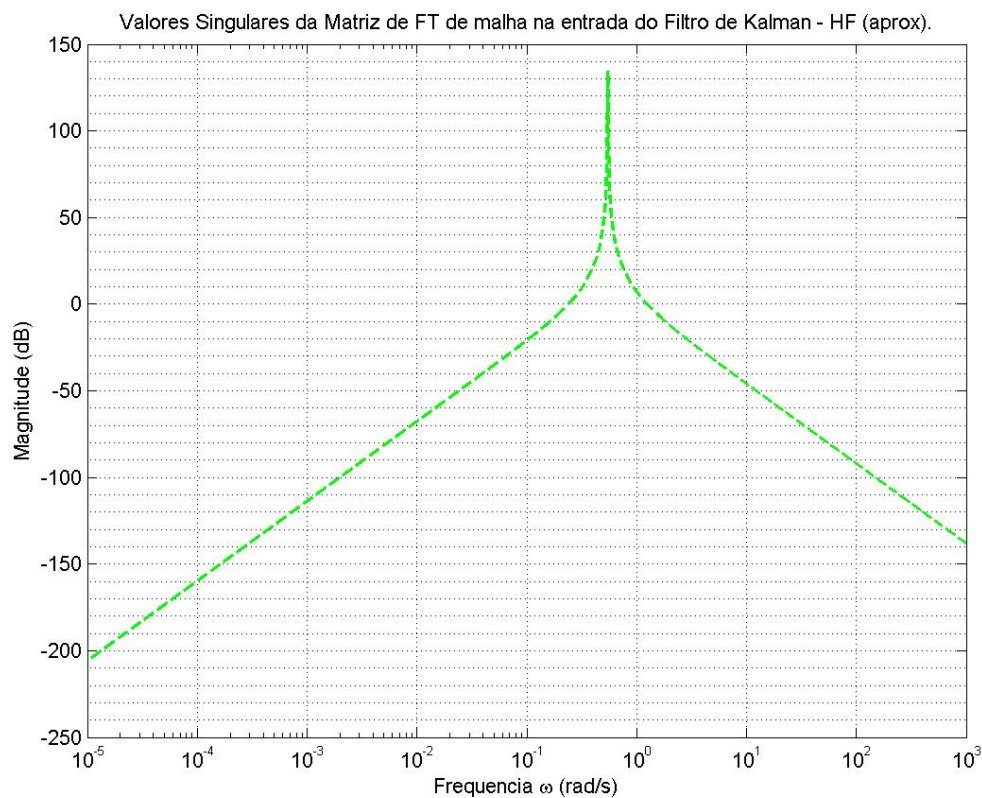


**Figura 7-3** – *Valores Singulares da Malha Objetivo Aproximada na Entrada da Planta – Passo 1*

Conforme pode ser notado na *Figura 7-3*, os valores singulares estão todos iguais, como a metodologia sugere, por isso aparece apenas uma curva plotada (na realidade são três sobrepostas).



Neste ponto deve ser notado que a frequência de corte na *Figura 7-3*,  $\omega_C = 0,35\text{rad/s}$  não está igual a calculada na seção 7.2.2.4, isto por que aquela é apenas uma primeira estimativa, mas temos ainda que verificar a resposta ao degrau unitário do sistema ao final do projeto do controlador de forma a se certificar que o sistema atende aos requisitos de resposta transitória (nosso caso 5min de tempo de acomodação).

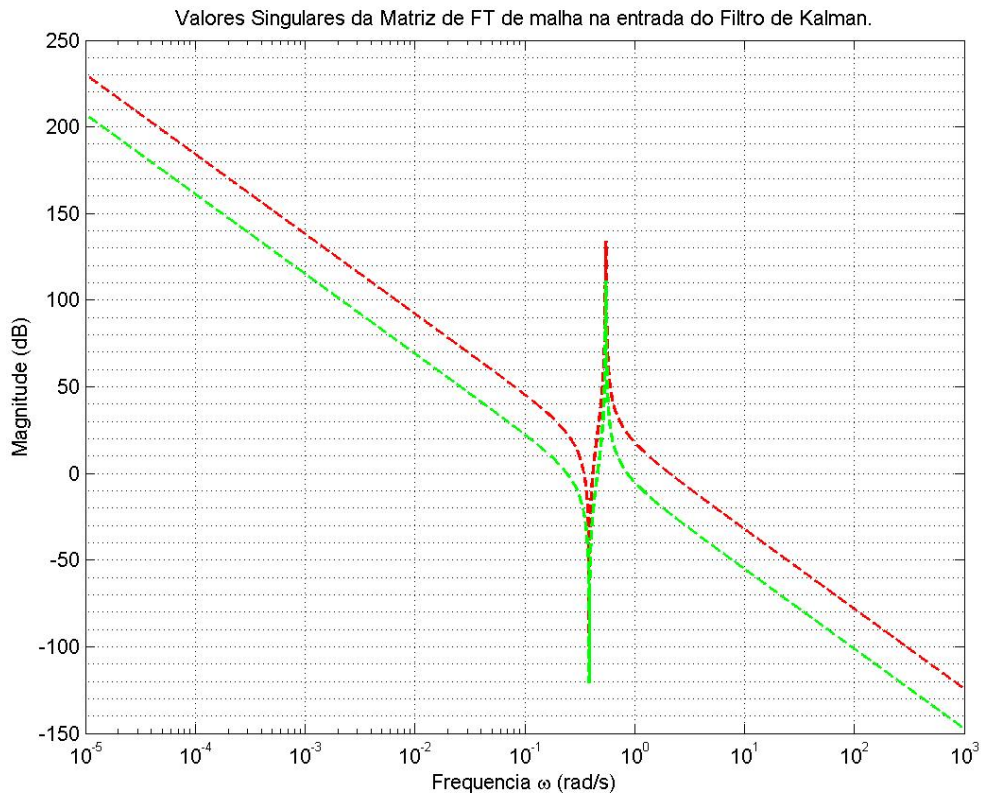


**Figura 7-4** – *Valores Singulares da Malha Objetivo Aproximada na Entrada da Planta – (dinâmica aumentada) – Passo 1*

Conforme pode ser notado, o pico da *Figura 7-3* ocorre na mesma frequência ( $\omega_p = 0,546 \text{ rad/s} - T_p = 11.5\text{s}$ ) em que ocorre o pico nos valores singulares da Malha Objetivo como um todo, isto é, composta pela dinâmica de baixa e alta frequência.

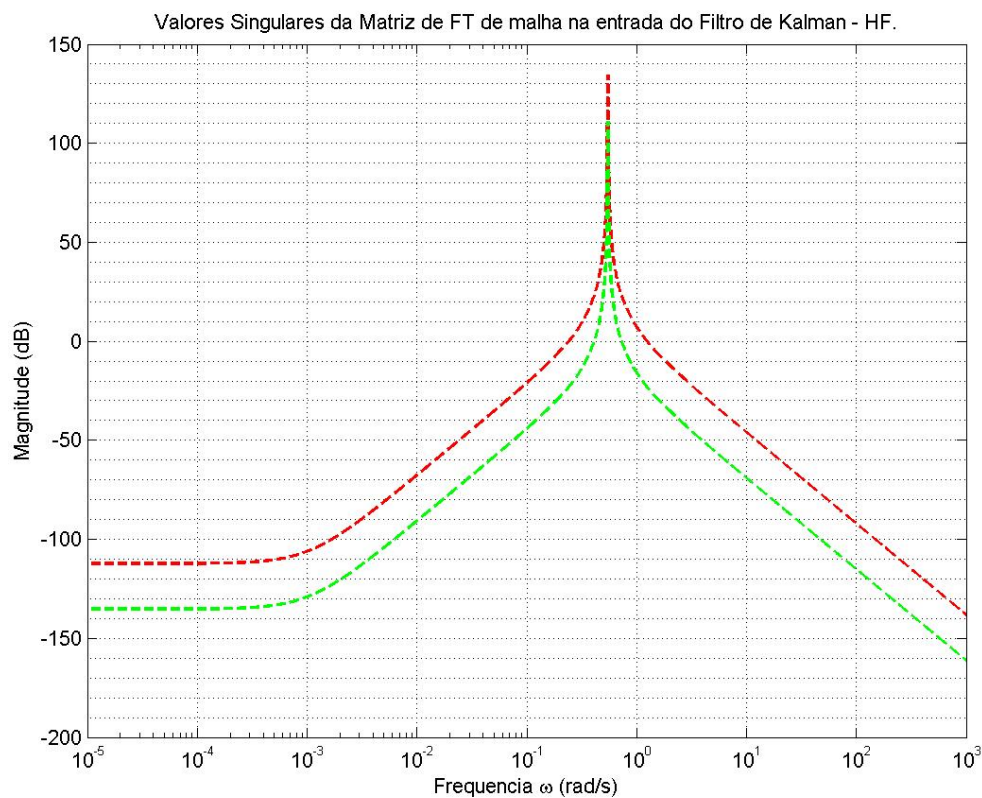
Apesar de aqui aparecer como um pico, este se transformará em um vale ao se aplicar a matriz de ganhos do RLQ com seus elementos referentes a alta frequência zerados. O que está compatível com o que a metodologia sugere.

## PASSO 2



**Figura 7-5** – *Valores Singulares da Malha Objetivo na Entrada da Planta – Passo 2*

Deve ser salientado que apesar de um dos valores singulares terem se afastando um pouco dos outros dois, estes valores singulares da Malha Objetivo já estão próximos o suficiente, pois ao fim das iterações teremos os valores singulares de malha aberta coincidindo nas baixas frequências até a frequência de corte, o que é suficiente para o nosso objetivo, já que abaixo da frequência de corte não se exige bom desempenho do sistema.



**Figura 7-6** – *Valores Singulares da Malha Objetivo na Entrada da Planta – (dinâmica aumentada) – Passo 2*

O deslocamento de um dos valores singulares aqui em relação aos outros são aceitáveis, assim como o comentário acima sugere.

A matriz de ganhos de correção de erro de medida (H) obtida é a seguinte:

```

H =
    30.8783764404802      -0.0454166317816238      -20.026
   -0.0454166316878912      48.7528346868792      1652.7
   -6.33277725215943      522.629628886438      5543900.00000001
  -4.45555198667617e-017    5.81769829215159e-015    3.33768188222409e-018
   6.32647128674181e-015    7.06517986122203e-014    -1.7943432730562e-017
   1.87688991091238e-017    2.85182943842482e-016    -3.46066279019775e-017
     0.316227766016838      1.90539846962867e-014      5.67360544633105e-017
   1.93296730044478e-014      0.316227766017061    -3.14709209222892e-017
  -5.11027567050457e-016    -5.08547097453536e-016      1
     0.315137558543042      1.44821254733149e-017    -9.62571687996418e-017
  -2.6120618268785e-016      0.315137558543043    -1.42257206970381e-017
   1.15816423687143e-016      5.1580681260263e-017      0.998909869108831
     0.00115423192754397    -2.01875404037623e-014      1.45474668610866e-017
  -2.00305546361901e-014      0.00115423192730728      8.15742208246006e-018
   3.37303661891928e-015    -1.00238314691981e-015      0.00364516421302178

```

Deve ainda ser verificado se a condição de robustez da estabilidade é atendida, que, de forma prática, significa garantir que a declividade dos valores singulares seja de pelo menos -20dB/dec.

No presente caso, pode ser verificado na *Figura 7-5* que a declividade é de -50dB/dec e, sendo assim, a condição está atendida.

### PASSO 3

Conforme pode ser notado na *Figura 7-2* os zeros de transmissão da planta nominal se localizam SPE aberto, o que garante, conforme já mencionado, que o procedimento será satisfatório para alguma matriz R (matriz de ponderação de esforço de controle).

Os valores de R (matriz de ponderação de esforço de controle) e Q (matriz de ponderação de estado) são:

R =

$$\begin{bmatrix} 0.015 & 0 & 0 \\ 0 & 0.015 & 0 \\ 0 & 0 & 8e-008 \end{bmatrix}$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

A matriz de ganhos de realimentação de estados, G é igual a:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{l_{3 \times 9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde  $G_1$  é igual a:

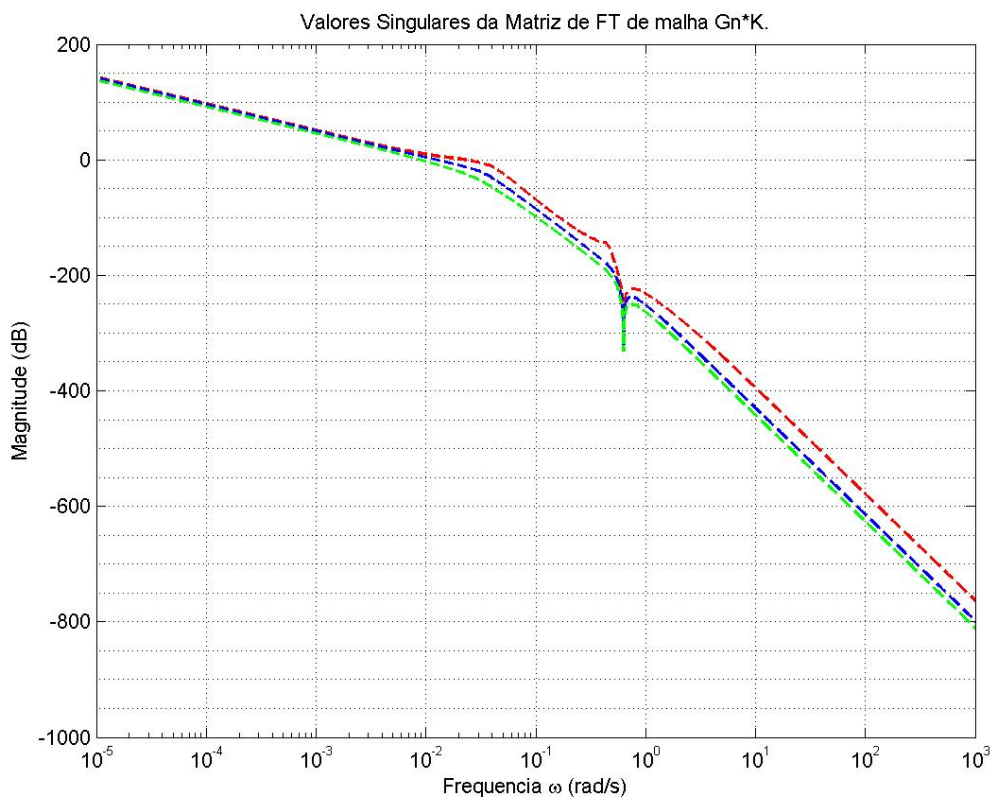
$$G_1 = [G_{13 \times 6} \quad G_{13 \times 3}]$$

$$G_{13 \times 6} =$$

0.0399498348448349	8.13210391764266e-006	5.6359248546985e-008	328.263216171734	0.19361484984718	10.8573956136492
8.13210391764266e-006	0.0313944222664754	-3.75772443417227e-006	0.117150412441629	372.74954593927	-449.032232874854
0.0105673591025597	-0.7045733314073	0.0220104213004806	74.2841675383041	-8940.16491666675	1047819.07365349

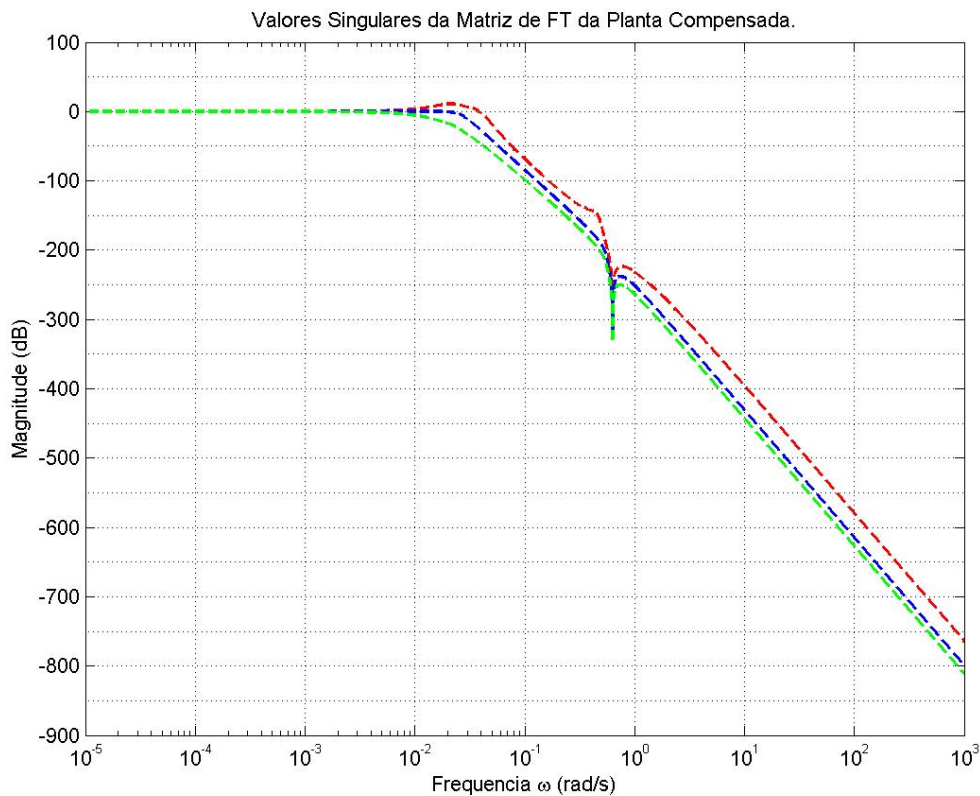
$$G_{13 \times 3} =$$

1.87256317689229	0.00486626489941278	0.403070273902258
0.00321974150414672	0.936121584775844	-22.0451306191546
0.002676660155216057	-14.9688208257383	-9123.57940247017



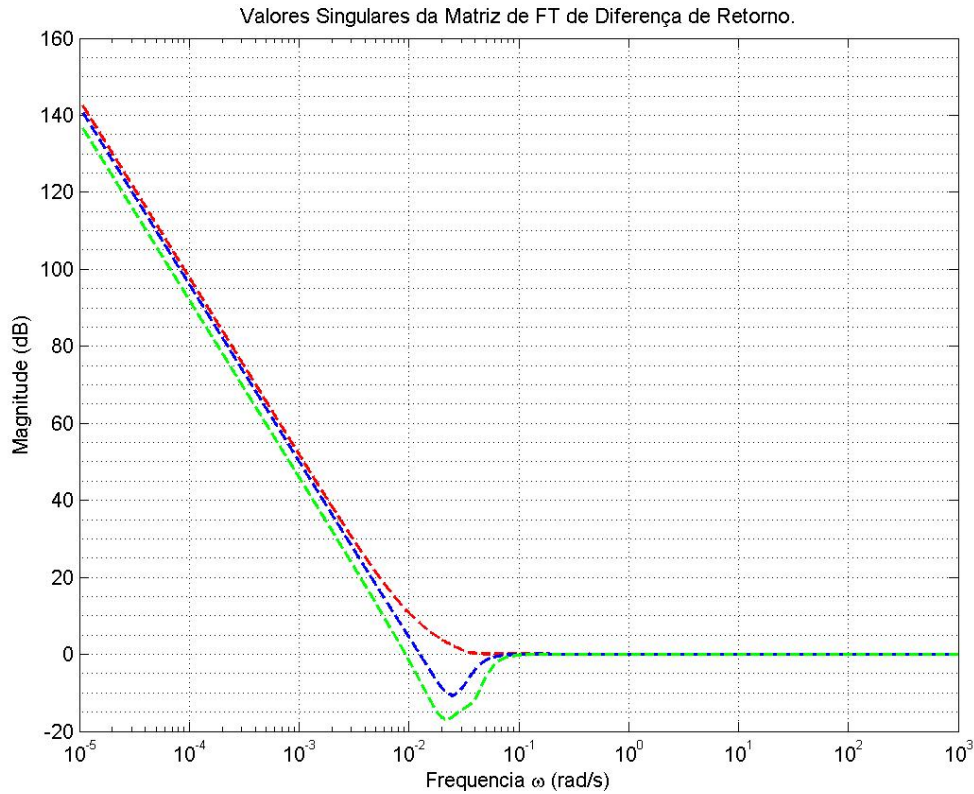
**Figura 7-7 – Valores Singulares da Matriz de Funções de Transferência de Malha ( $G_n * K$ ) – PASSO 3**

Conforme pode ser observado na *Figura 7-7*, os valores singulares acima da frequência de corte estão coincidentes, conforme é desejável para um desempenho adequado e similar dos três graus de liberdade. Contudo, pode ser notado, mais uma vez, que também aqui ainda não coincidimos com a frequência de corte estimada na seção 7.2.2.4, isso, pois após o ajuste feito na resposta ao degrau, este foi o melhor desempenho e assim a frequência de corte é de fato,  $\omega_c = 0.01\text{rad/s}$ , atendo assim o requisito de tempo de acomodação. Isto deve ser feito, pois caso contrário o controlador seria muito rápido, trazendo assim dificuldade de implementação de um sistema propulsivo real para a tender a demanda de empuxo.



**Figura 7-8** – *Valores Singulares da Matriz de Funções de Transferência de Malha Fechada da Planta Compensada  $(G_n * K * (I + G_n * K)^{-1})$  – PASSO 3*

Pode ser observado na *Figura 7-8* tem ganho unitário até a frequência de corte (0.02 rad/s), e à partir deste valor decai rapidamente tendo ainda um “notch” na frequência de 0,546 rad/s (frequência modal do mar) que é responsável pela filtragem da alta frequência no sinal de controle de forma a evitar a modulação dos propulsores.



**Figura 7-9** – *Valores Singulares da Matriz de Funções de Transferência de Diferença de Retorno*

Esta Matriz de funções de transferência é bastante útil para se avaliar a robustez do sistema dado que é interessante que ela convirja para um ganho unitário nas altas frequências e elevado ganho abaixo da frequência de corte.

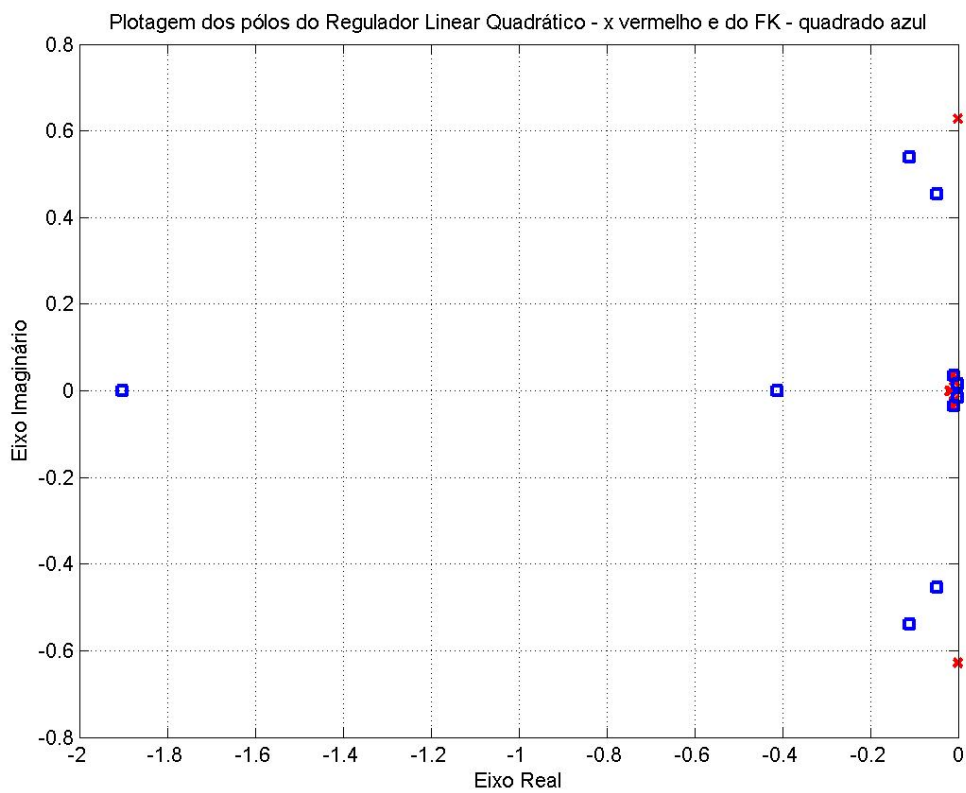


A partir dela podemos obter as margens de fase e ganho, que conforme definido na seção 6.3.4 foi calculada e obtida. Seus valores são:

MG = (0.5,  $\infty$ ) o limite superior é maior que  $1e+312$  (precisão numérica)

MF = (-60°, a 60°)

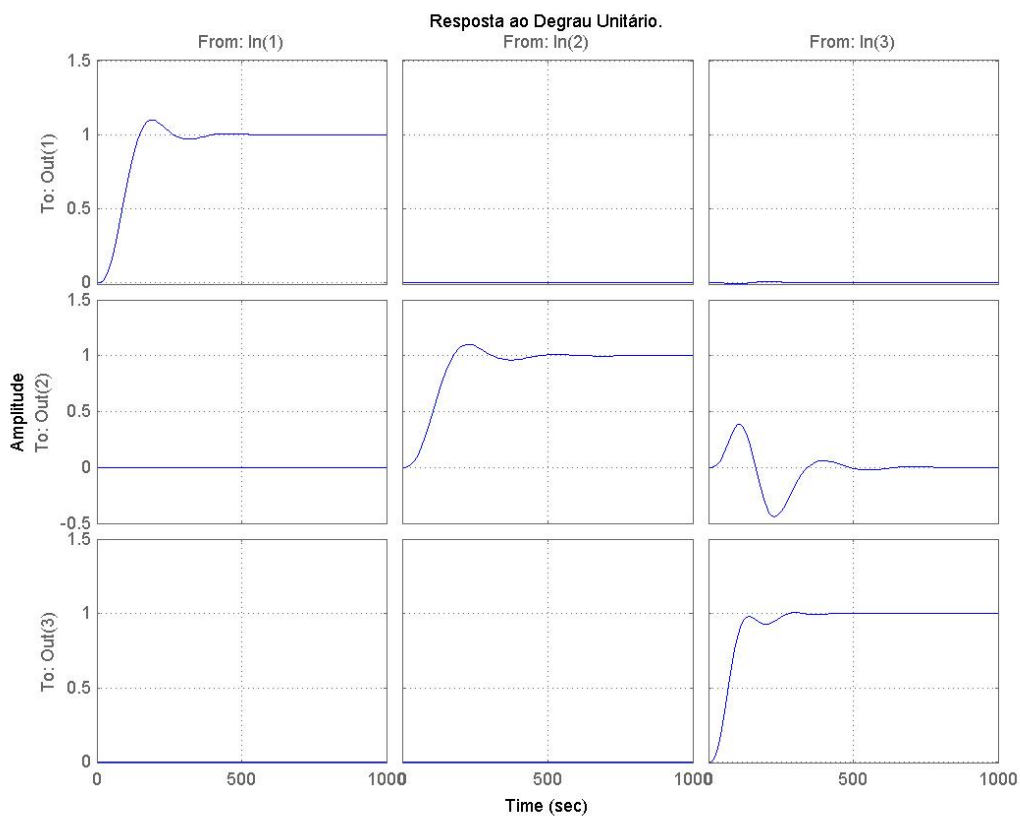
Tais resultados se mostram extremamente coerentes com o exposto na seção 6.3.4, o que dá grande robustez ao sistema.



**Figura 7-10** – Plotagem dos pólos do Filtro de Kalman e do Reguldor Linear Quadrático

Deve ser observado que os pólos do FK estão mais a esquerda no plano complexo do que os do RLQ, isto por que eles precisam ser mais rápido que os do regulador para que as estimas converjam rapidamente para erro nulo, e assim os estado estimados sejam tão próximos quanto possível dos reais. Isto justifica o motivo pelo qual posicionam-se os pólos do FK mais a esquerda fazendo assim que o erro de estima do observador caia a zero rapidamente e entregando assim estados estimados bastante representativos dos reais ao RLQ.

Agora precisa-se gerar uma resposta ao degrau para que se verifique elementos da resposta transitória, tais como tempo de acomodação (no nosso caso o mais forte requisito), overshoot, erro de regime etc.



**Figura 7-11 – Resposta ao Degrau Unitário da Planta Compensada**

Conforme pode ser observado o overshoot é menor que 20% da entrada de referência, o que é aceitável para sistemas DP. O erro de regime é nulo, como era desejável e, ainda, o tempo de acomodação é de aproximadamente 300s como se queria.

Agora, como o compensador obtido deve-se passar às simulações de modo a se confirmar o desempenho esperado para o compensador.

Após a rodadas dos passos 1 ao três obtêm-se os parâmetros de nosso compensador, contudo, um ajuste fino ainda é feito de forma a acertar a resposta transitória, e isto é que levou a diferença na frequência de corte calculada em 7.2.2.4 (0.0628rad/s) e a obtida ao final do procedimento (0,546rad/s).

### 7.3.2 Simulações

Nesta seção serão apresentados resultados de simulações, ou corridas, de 4 casos de específicos.

Nas simulações aplica-se o compensador aqui projetado à planta, contudo agora esta possui todos as não linearidades das equações de movimentos e seus acoplamentos sem simplificações e linearizações. Todos os agentes ambientais são calculados conforme descritos no capítulo 2, assim como as forças hidrodinâmicas.

Cabe ainda salientar que para os distúrbios externos referentes aos esforços de deriva média, foi utilizado um esforço constante de acordo com a direção do mar e capaz de deslocar a plataforma de 1% da LDA e os de lenta foram utilizados esforços harmônicos nas frequências ressonantes do sistema de ancoragem ( $T_{\text{surge}} = 410\text{s}$ ,  $T_{\text{sway}} = 440\text{ s}$   $T_{\text{yaw}} = 175\text{s}$ ) de forma a se enfatizar a capacidade do sistema de “compensar” estes distúrbios mesmo em uma condição tão crítica.

O modelo feito no simulink do MATLAB consta dos blocos na *Figura 7-12* e é apresentado a seguir.



A Tabela 7-1 traz um descritivo das corridas executadas no simulador.

**Tabela 7-1** – Dados referentes às corridas realizadas no simulador *dyna\_ship.mdl*

Corrida	Comando de Referência			Tempo Final Simulação		Lógica AAP			
	X (m)	Y (m)	Psi (m)	Tfinal (s)	Tfinal HF (s)	Xmax (m)	Ymax (m)	Psimax (°)	Ttrans (s)
1	5	-5	9	5000	-	-	-	900	-
2	0	0	0	15000	14000	13	13	30	900
3	0	0	0	15000	14000	10	10	30	900
4	0	0	0	15000	14000	10	10	30	900

(a) Dados da Simulação

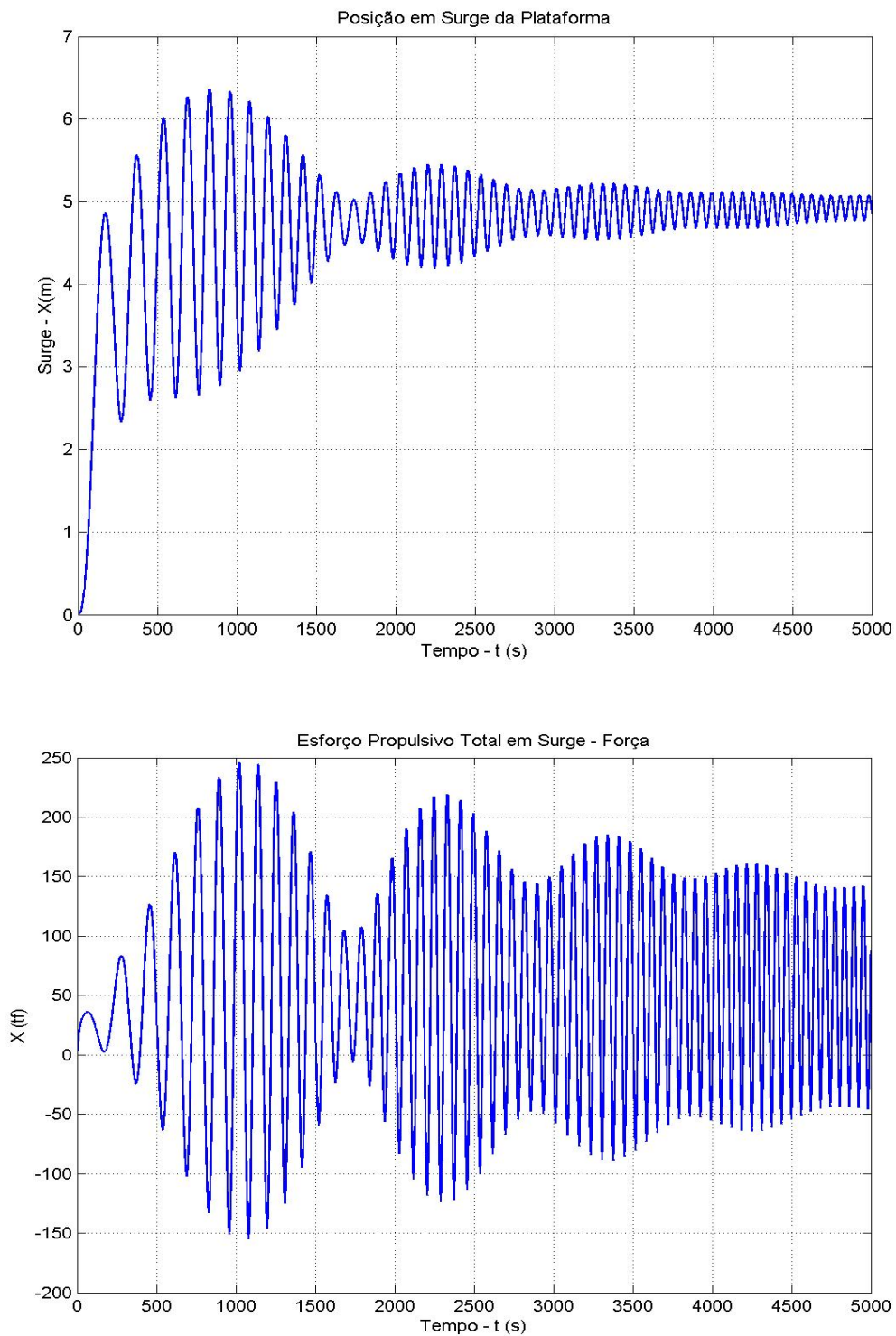
Corrida	Mar (JONSWAP)			Vento		Corrente	
	Hs (m)	Tp (s)	Heading (°)	Vw (m/s)	beta wind (°)	Vc (m/s)	beta curr (°)
1	-	-	-	-	-	-	-
2	6,52	11,5	90	15	90	1	60
3	6,52	11,5	0	15	0	1	0
4	6,52	11,5	45	15	45	1	45

(b) Dados de mar, Vento e Corrente

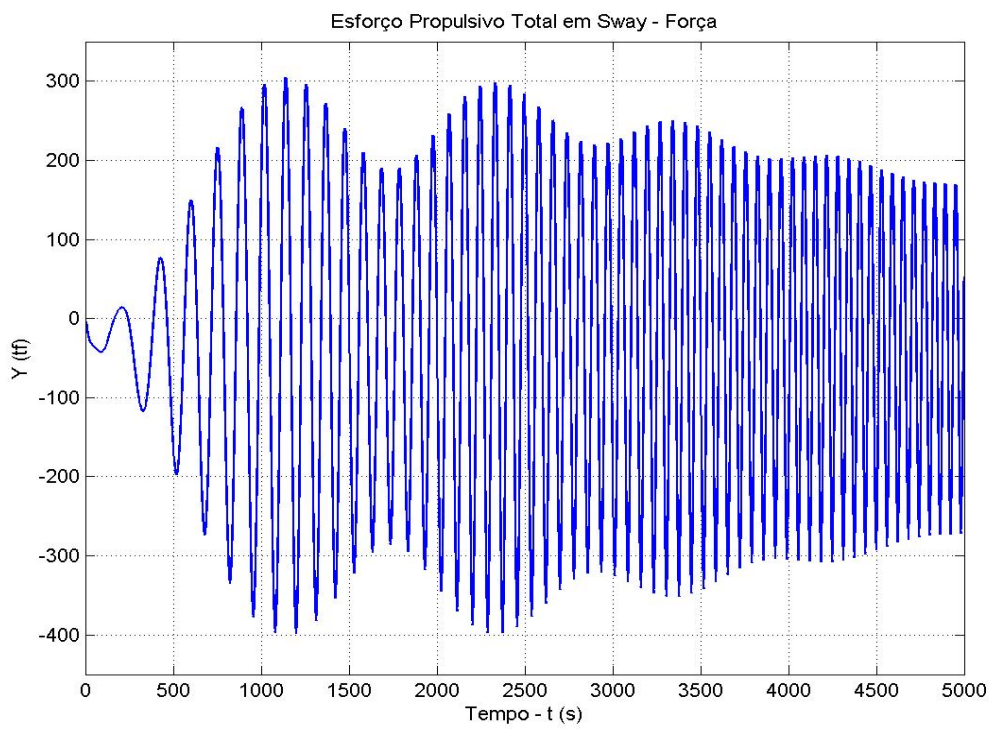
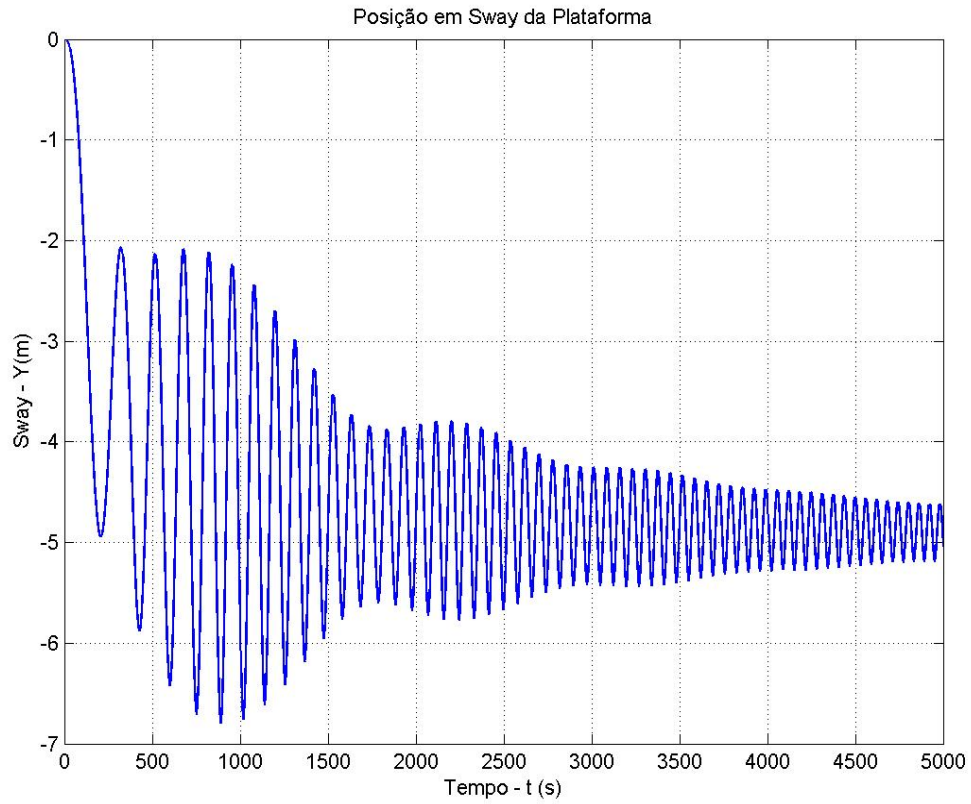
Corrida	Slow Drift			Mean Drift		
	Xsd (tf)	Ysd (tf)	Nsd (tf.m)	Xmd (tf)	Ymd (tf)	Nmd (tf.m)
1	-	-	-	-	-	-
2	10,7	20,4	71,4	2,0	-30,6	61,2
3	15,3	14,3	71,4	-10,2	2,0	61,2
4	12,3	12,3	102,0	-5,1	-5,1	204,1

(c) dados de Slow e Mean Drift devido às Ondas

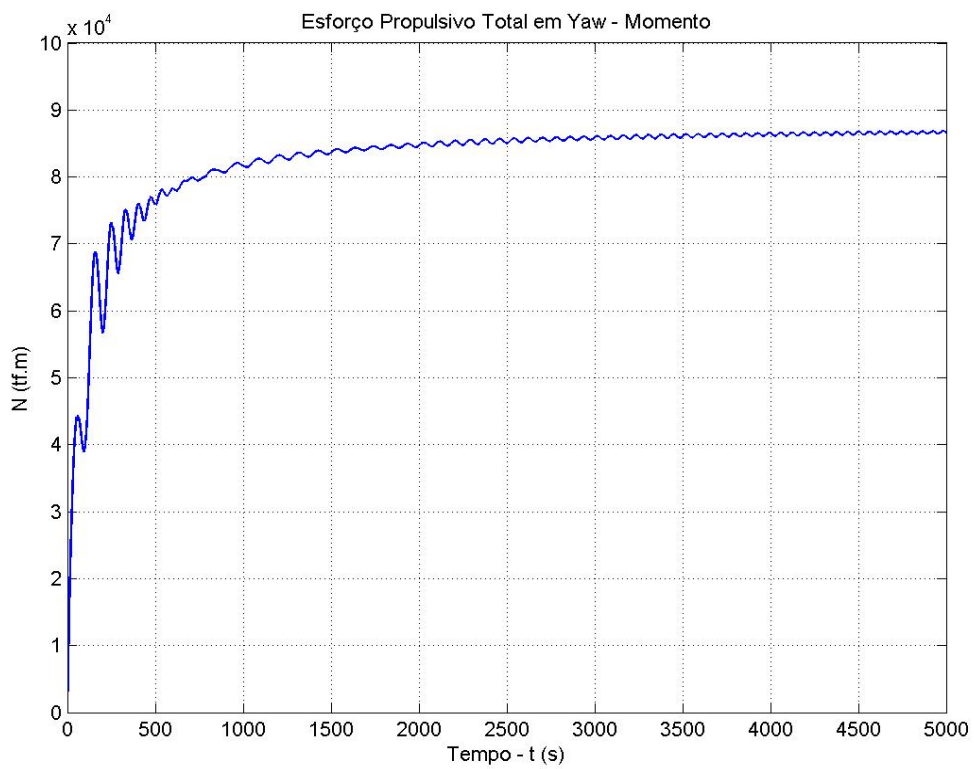
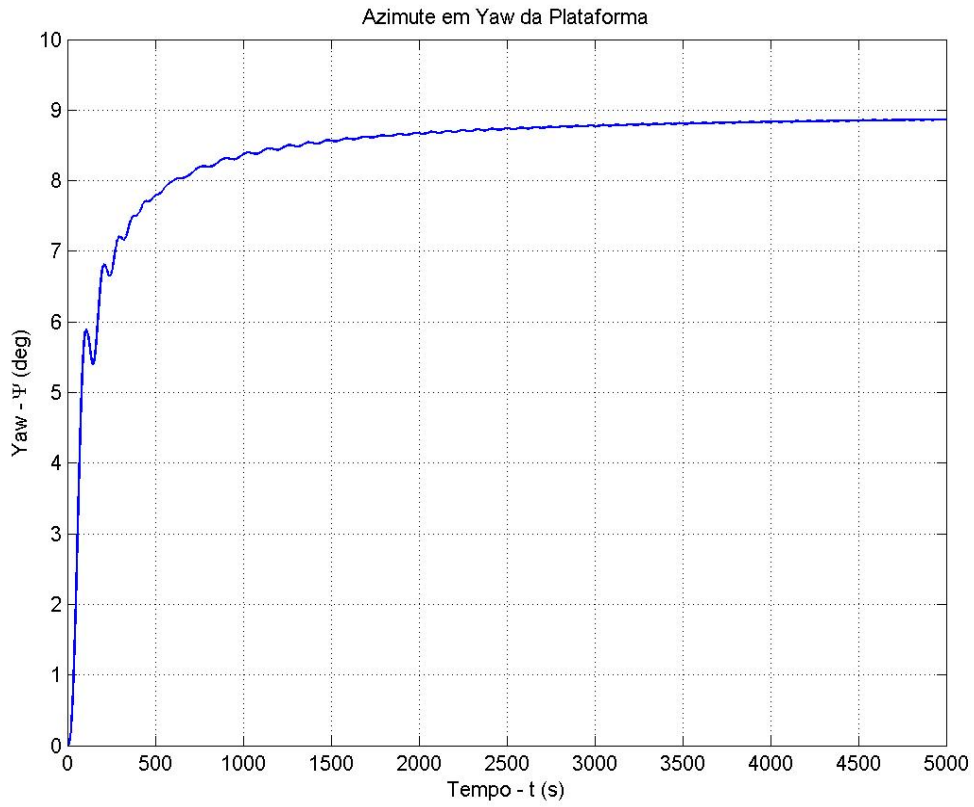
### 7.3.2.1 Corrida 1



**Figura 7-13** – Movimento em Surge e Esforço Propulsivo em Surge (corrida 1)

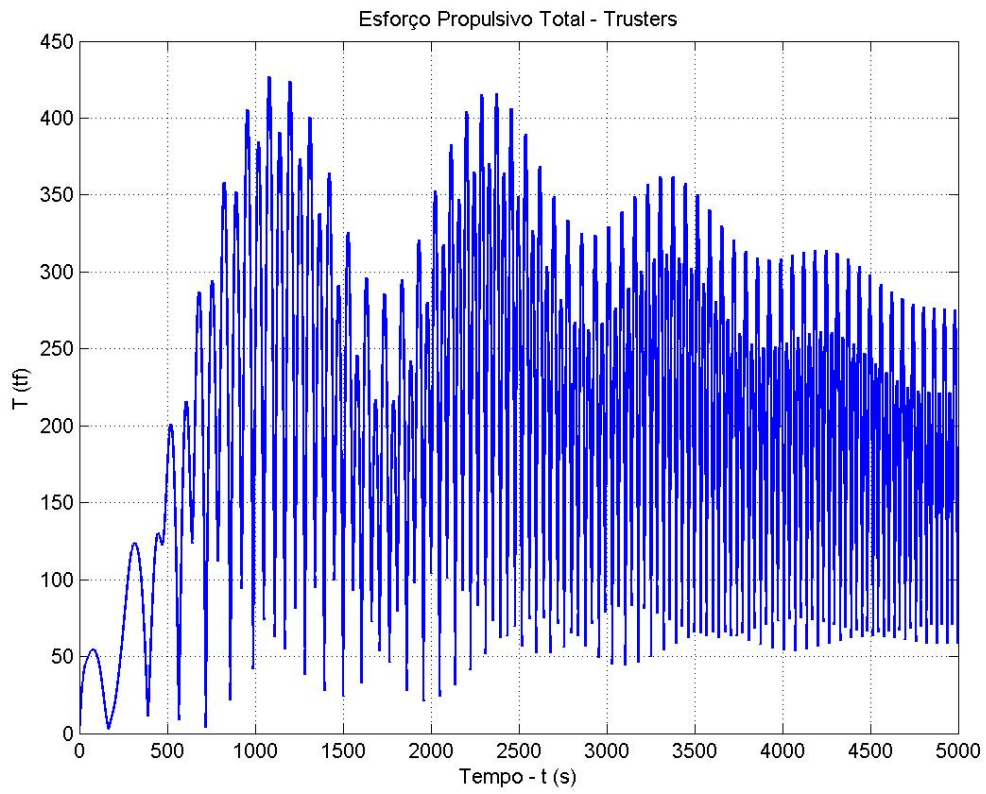


**Figura 7-14** – *Movimento em Sway e Esforço Propulsivo em Sway (corrida 1)*

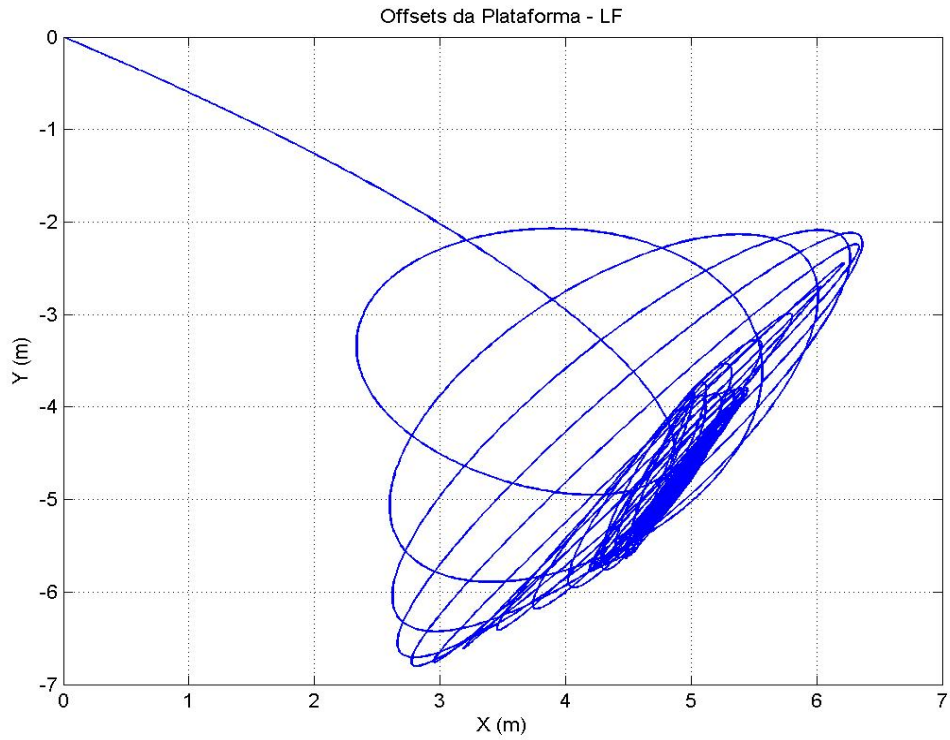


**Figura 7-15** – Movimento em Yaw e Esforço Propulsivo em Yaw (corrida 1)

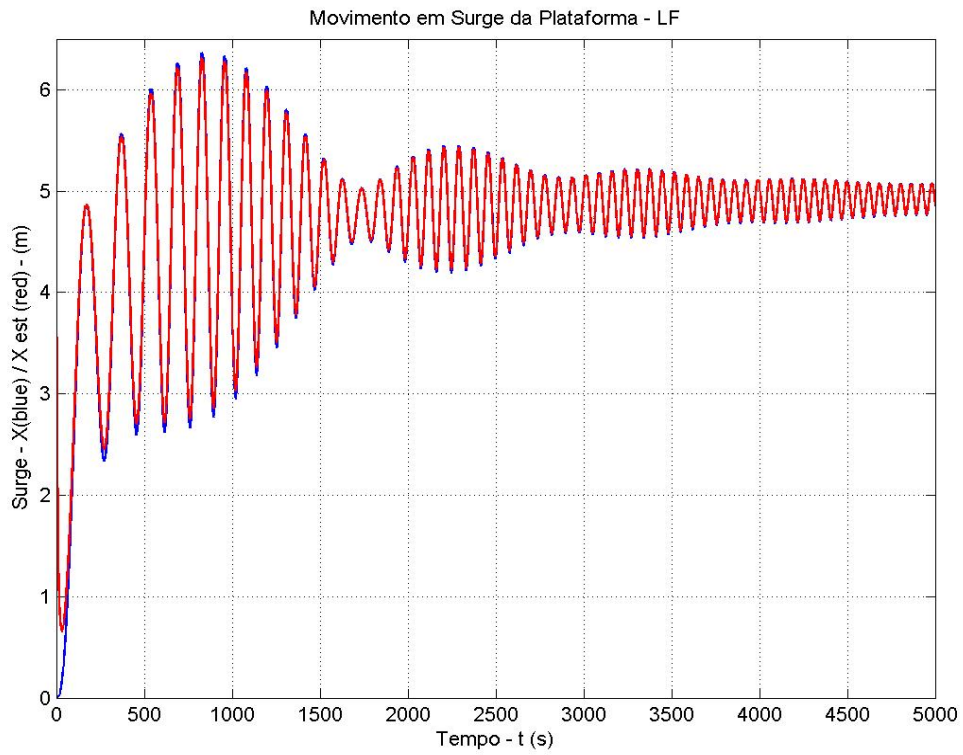




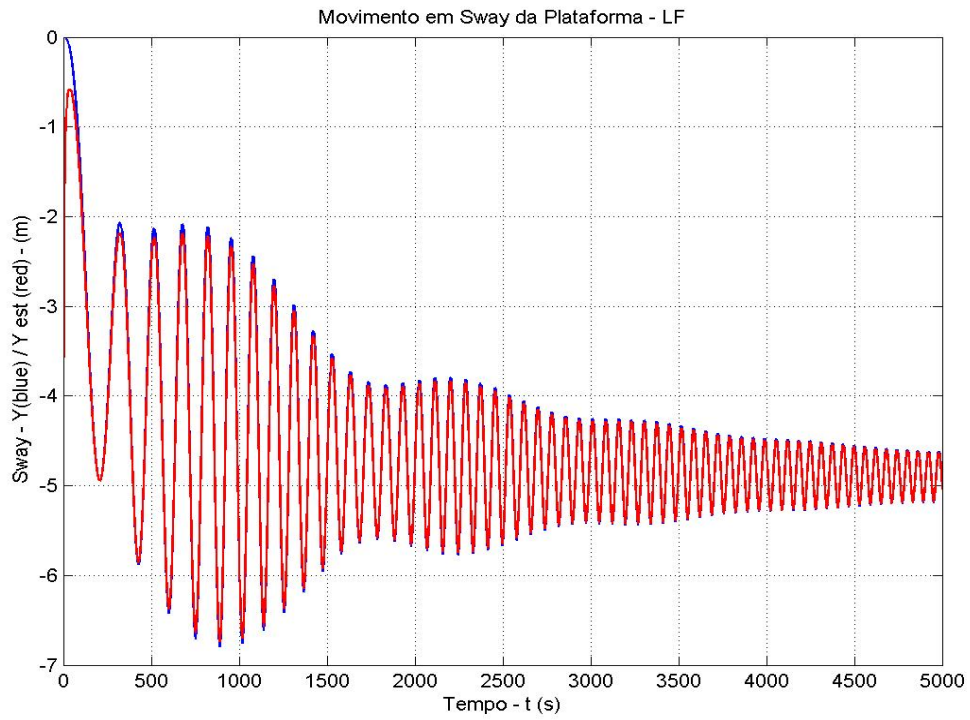
**Figura 7-16** –*Empuxo Total nos Thrusters (corrida 1)*



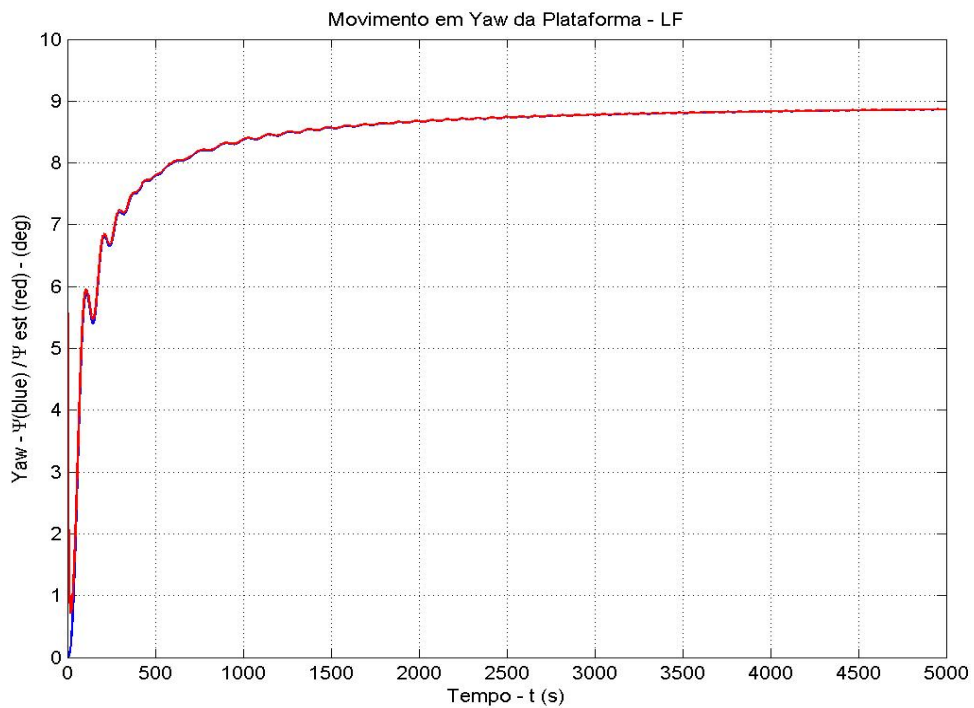
**Figura 7-17 – Offsets (corrida 1)**



**Figura 7-18 – Movimento em Surge real e estimado – LF (corrida 1)**

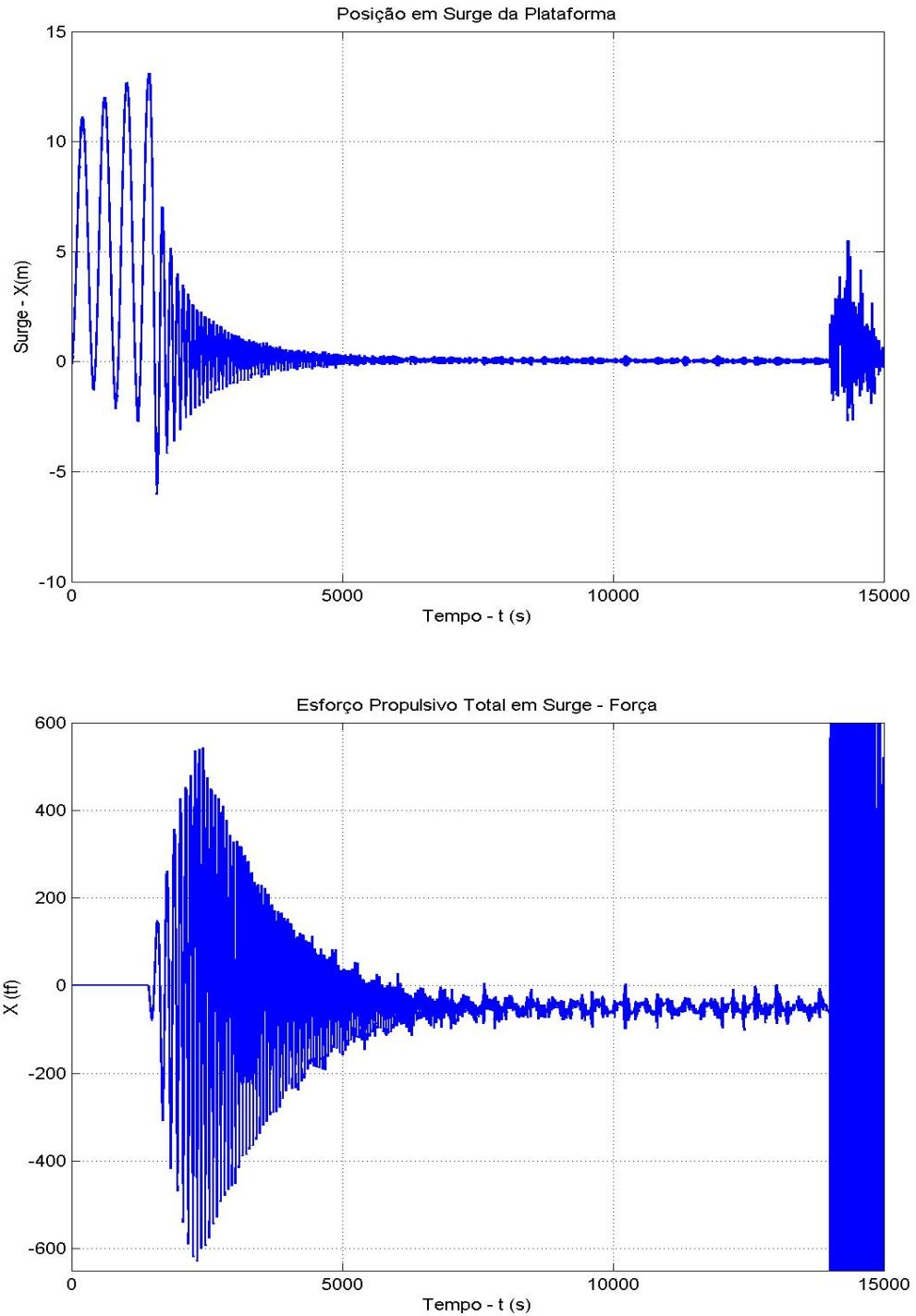


**Figura 7-19** – Movimento em Sway real e estimado – LF (corrida 1)

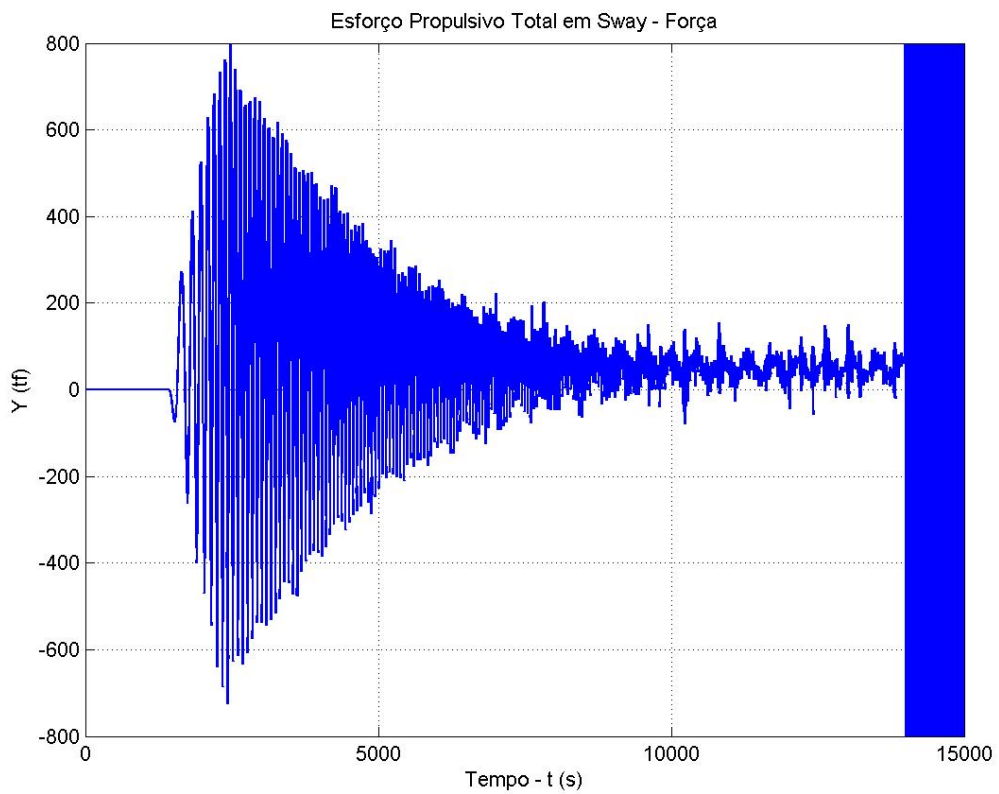
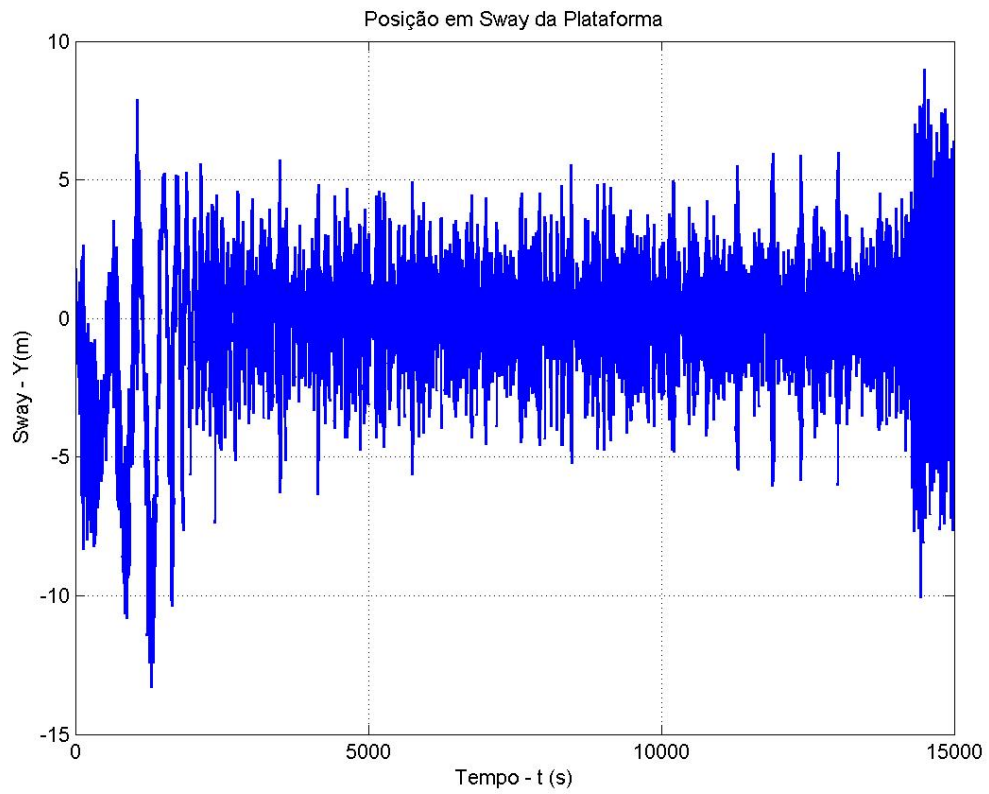


**Figura 7-20** – Movimento em Yaw real e estimado- LF (corrida 1)

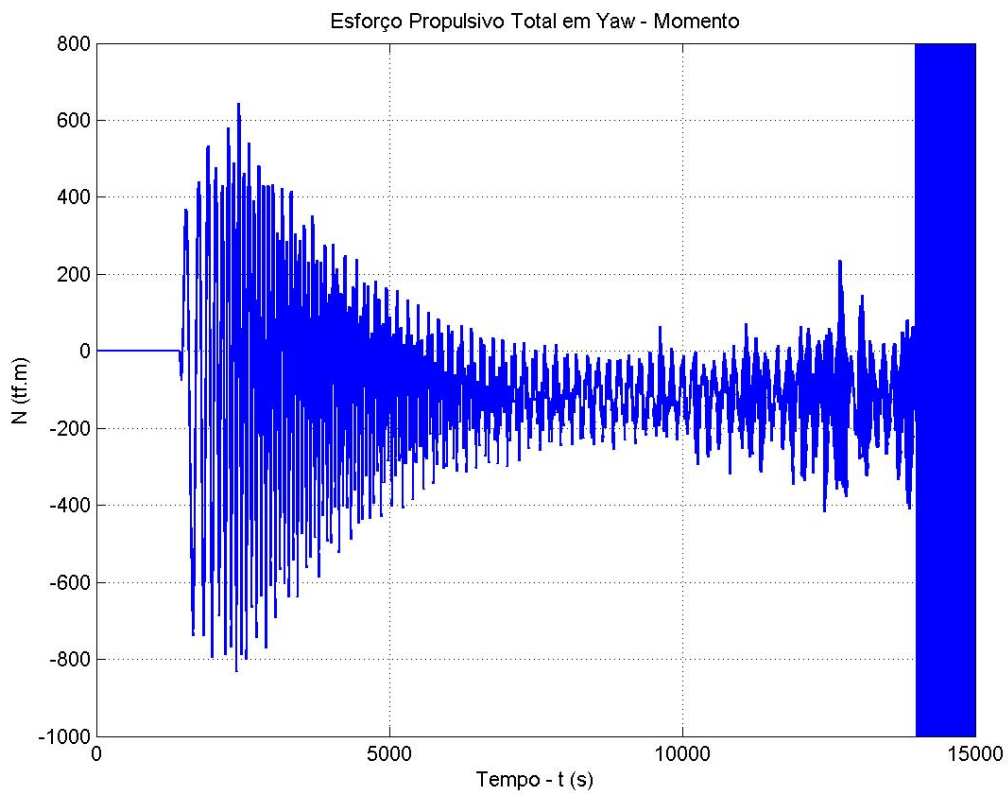
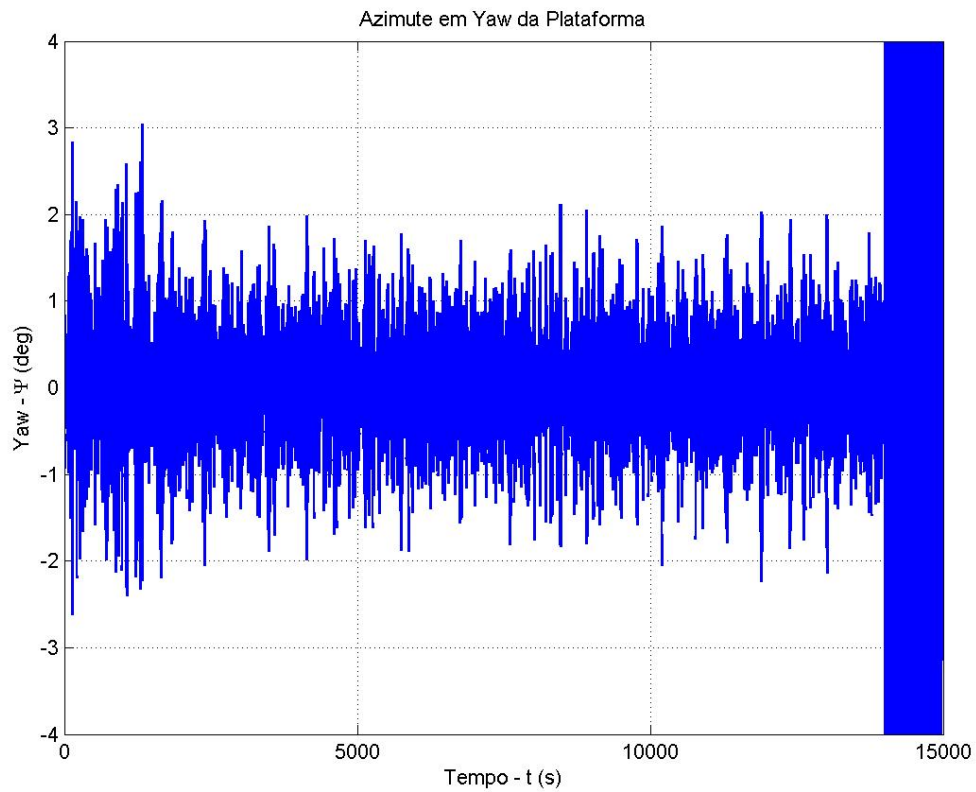
### 7.3.2.2 Corrida 2



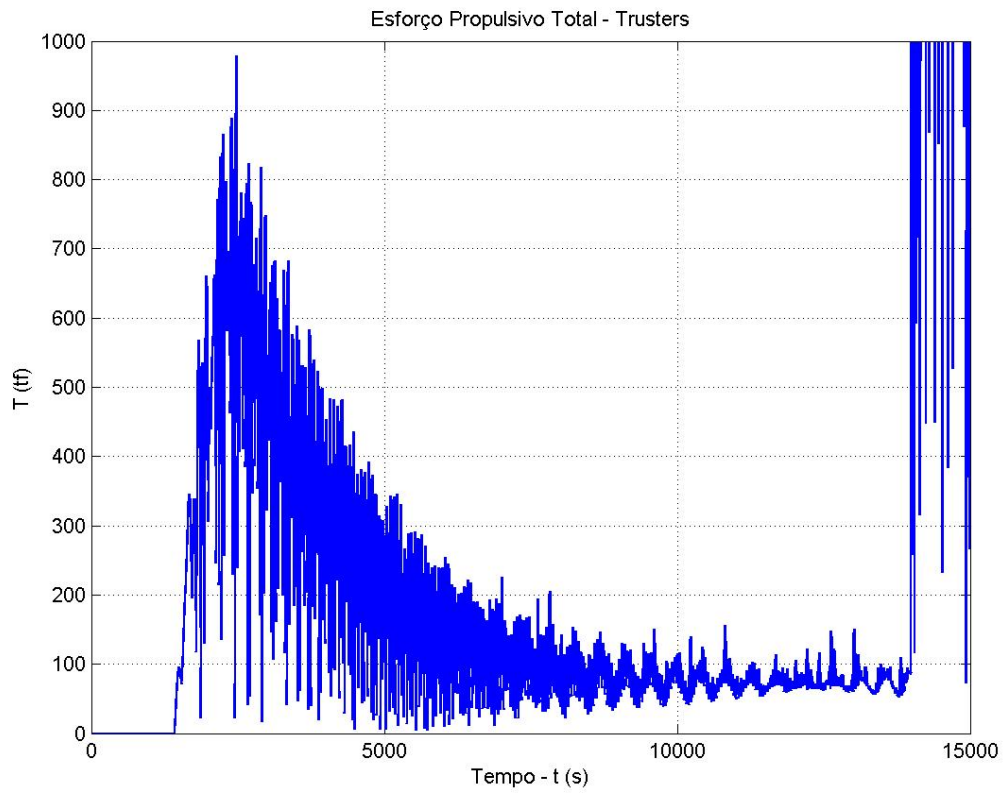
**Figura 7-21** – *Movimento em Surge e Esforço Propulsivo em Surge – Wave Frequency (corrida 2)*



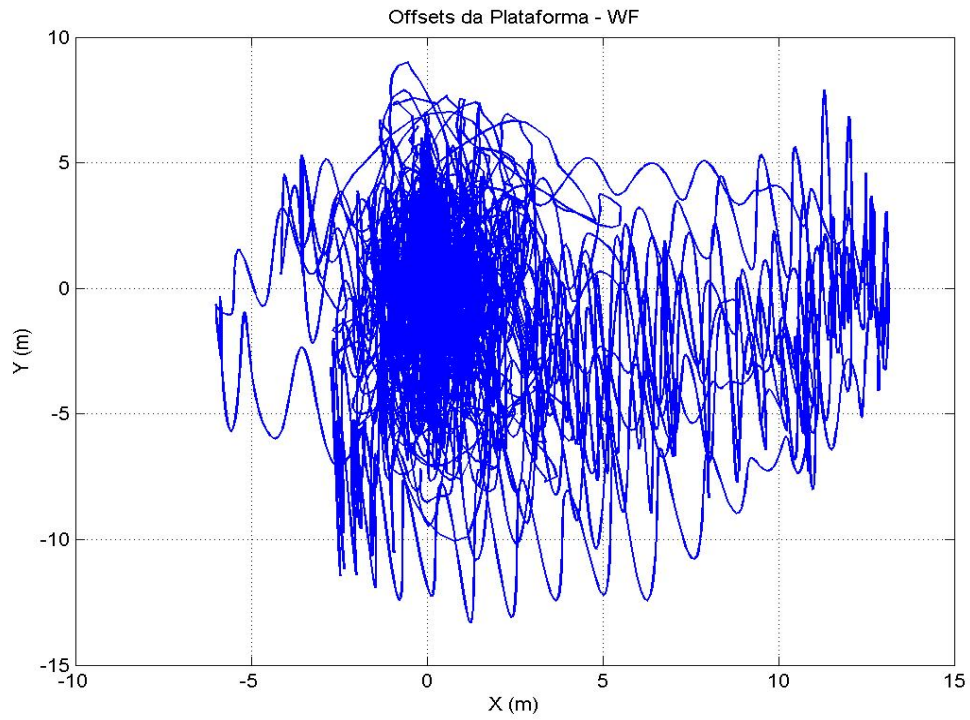
**Figura 7-22** – Movimento em Sway e Esforço Propulsivo em Sway – Wave Frequency  
(corrida 2)



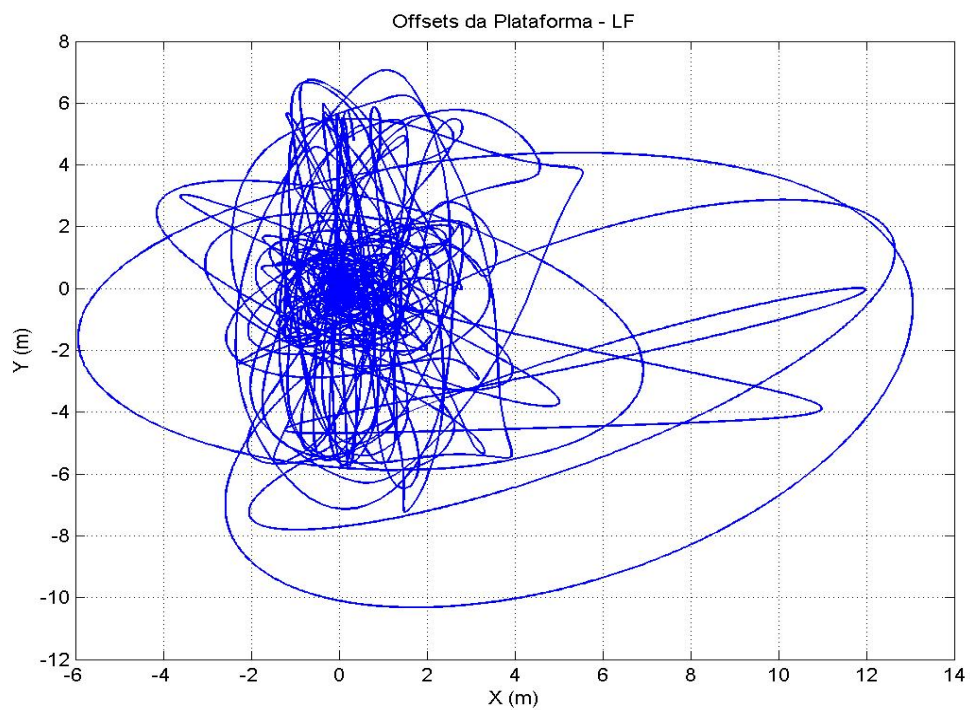
**Figura 7-23** – Movimento em Yaw e Esforço Propulsivo em Yaw – Wave Frequency (corrida 2)



**Figura 7-24** –Empuxo Total nos Thrusters (corrida 2)

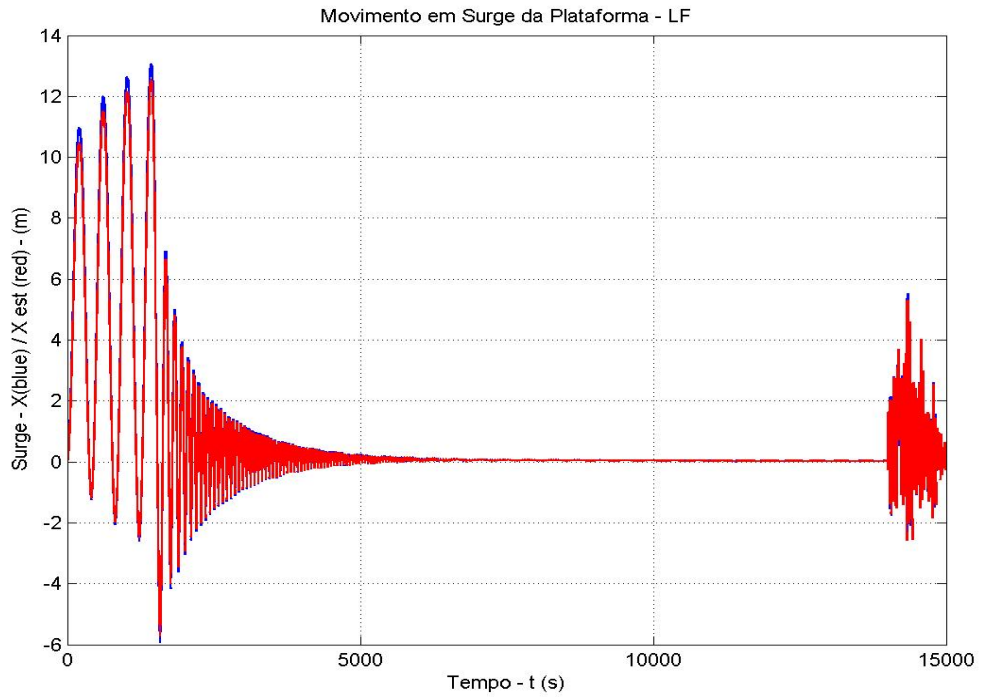


**Figura 7-25** – *Offsets – Wave frequency (corrida 2)*

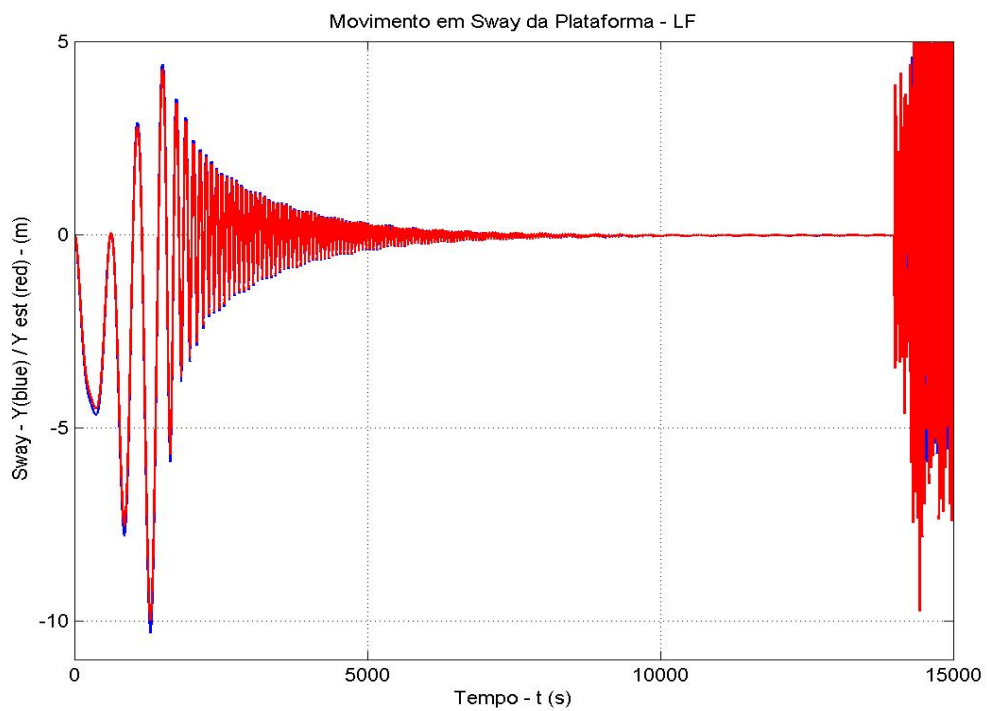


**Figura 7-26** – *Offsets – LF (corrida 2)*

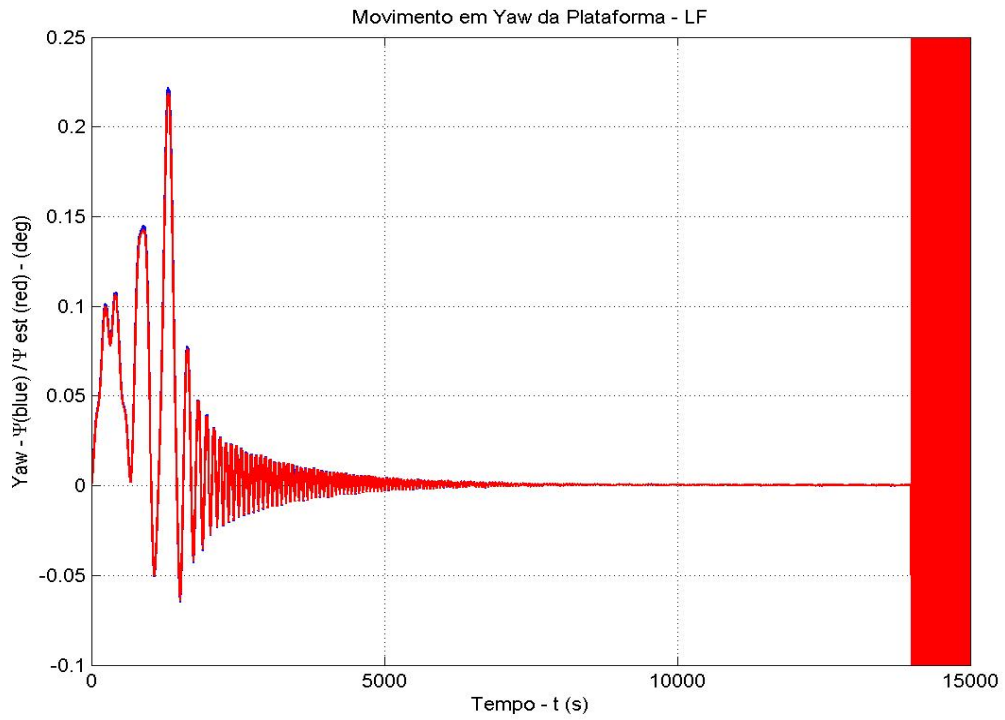




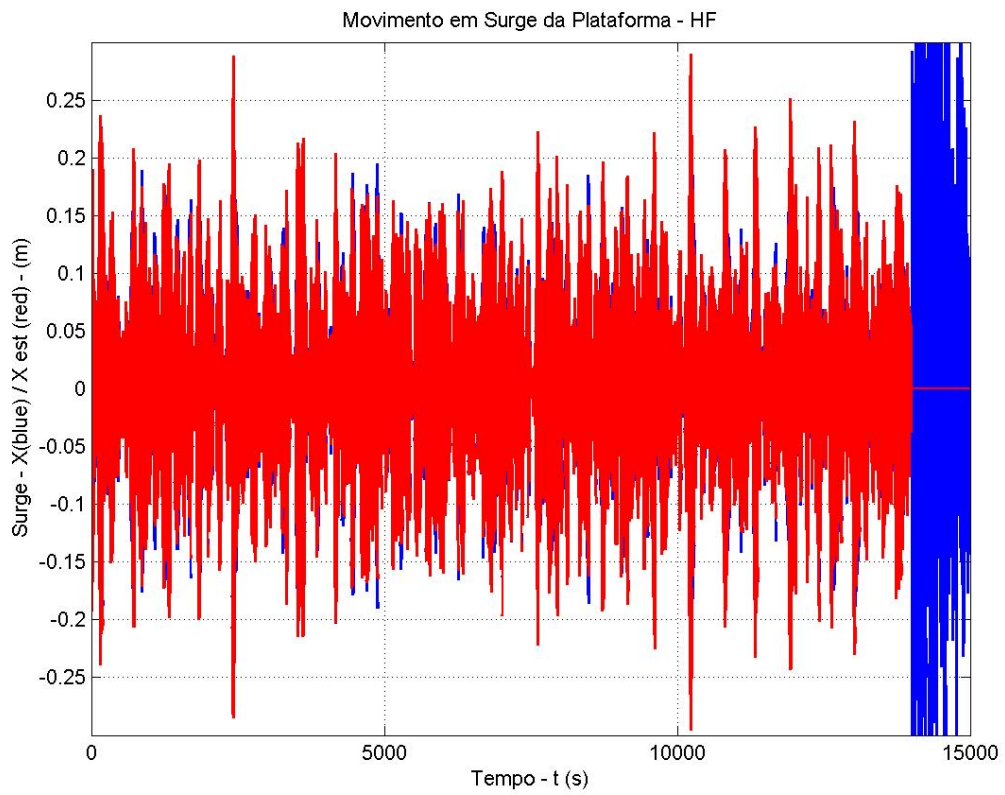
**Figura 7-27** – *Movimento em Surge real e estimado - LF (corrida 2)*



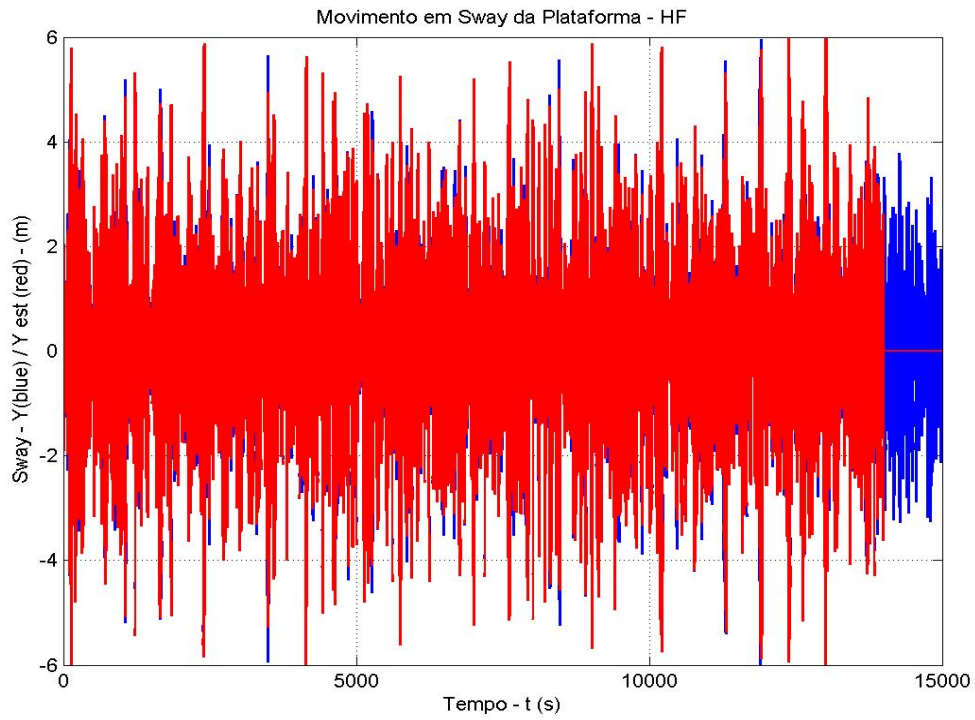
**Figura 7-28** – *Movimento em Sway real e estimado - LF (corrida 2)*



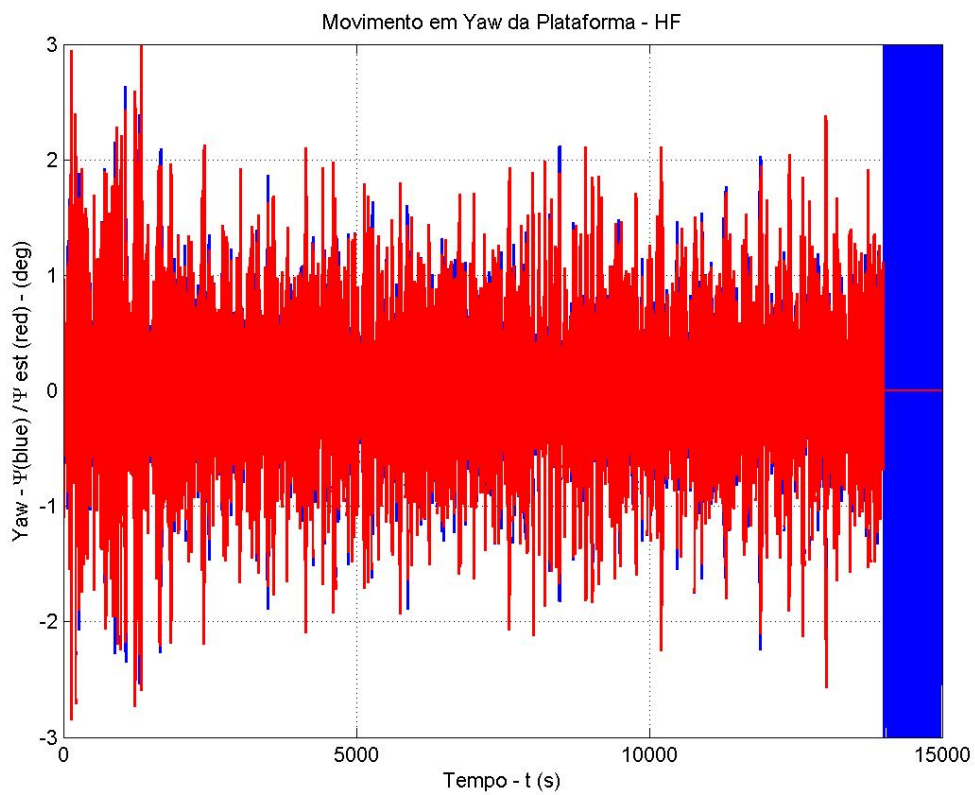
**Figura 7-29** – Movimento em Yaw real e estimado - LF (corrida 2)



**Figura 7-30** – Movimento em Surge real e estimado - HF (corrida 2)

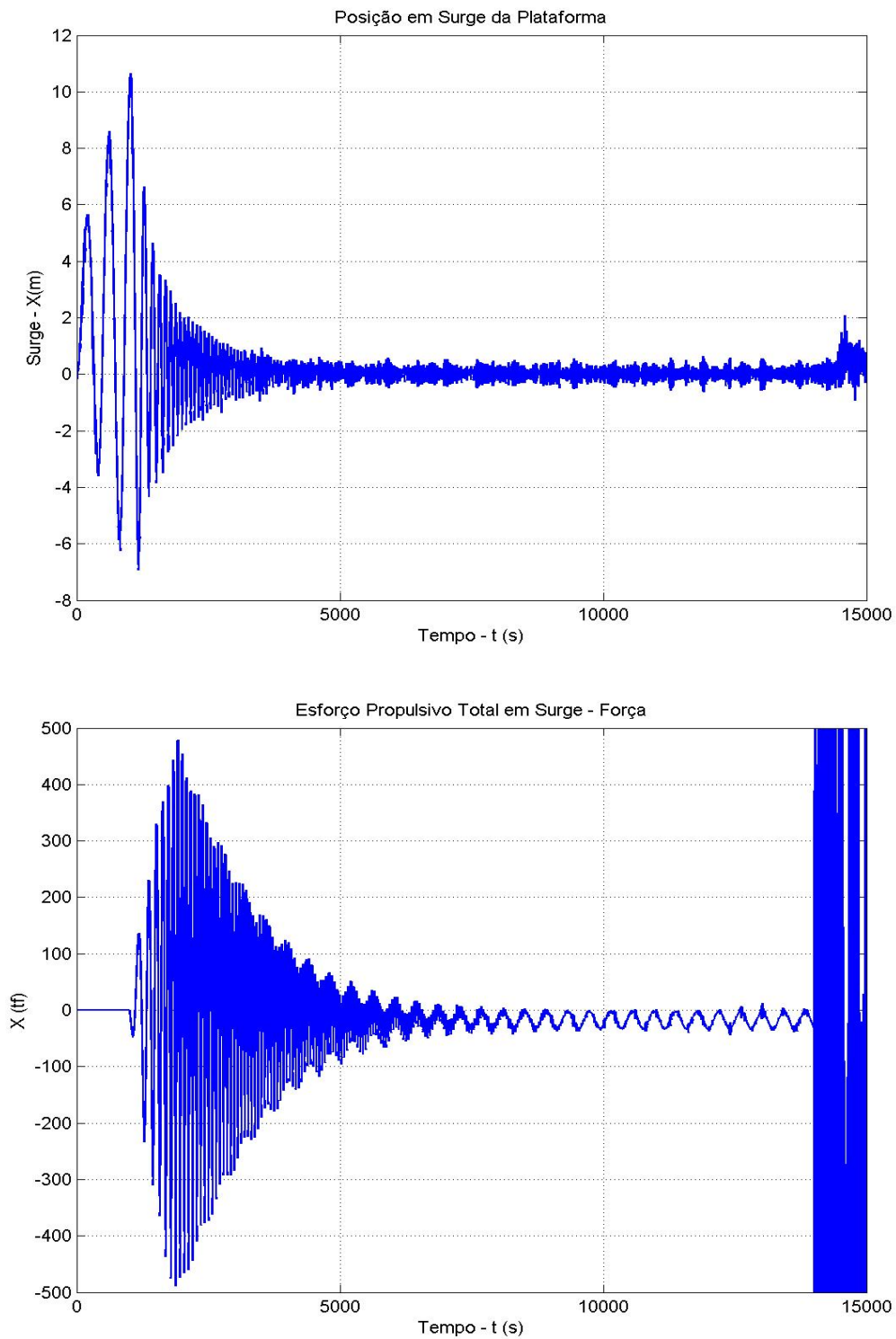


**Figura 7-31** – Movimento em Sway real e estimado - HF (corrida 2)

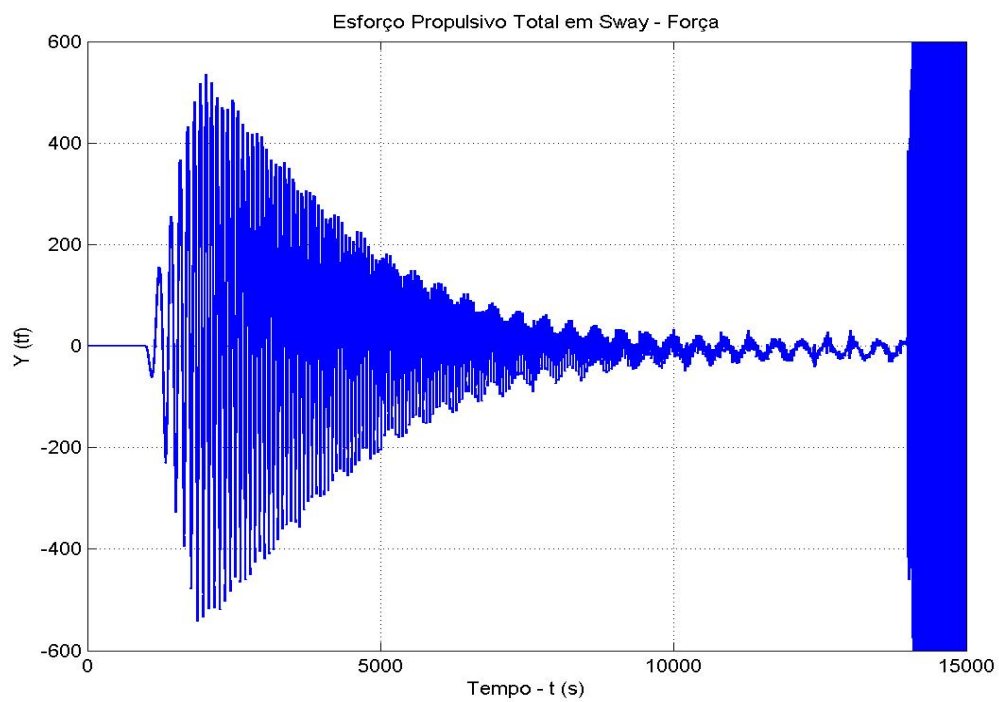
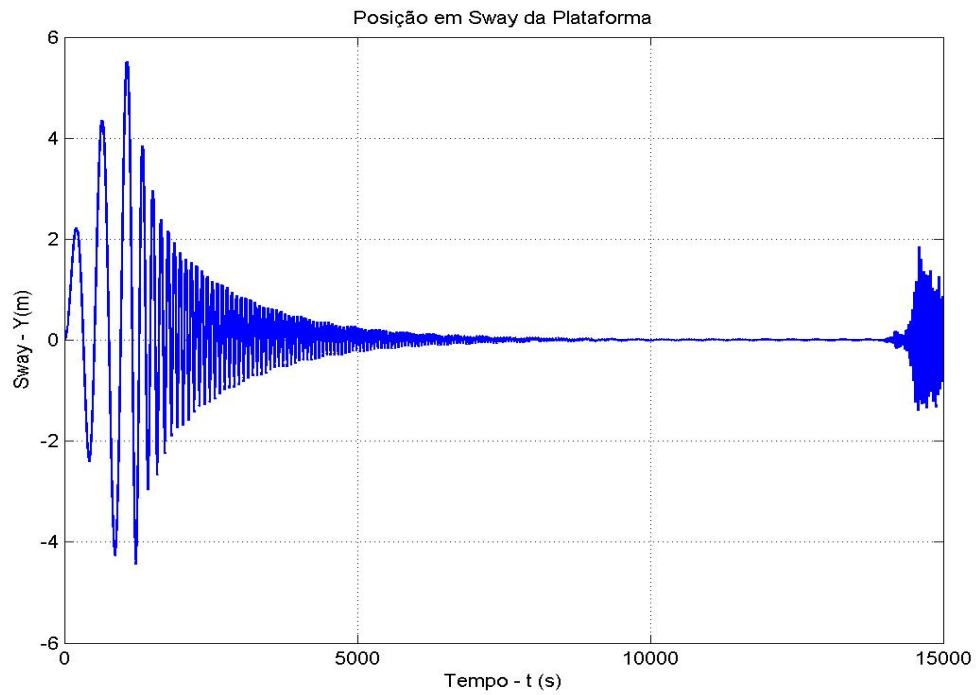


**Figura 7-32** – Movimento em Yaw real e estimado - HF (corrida 2)

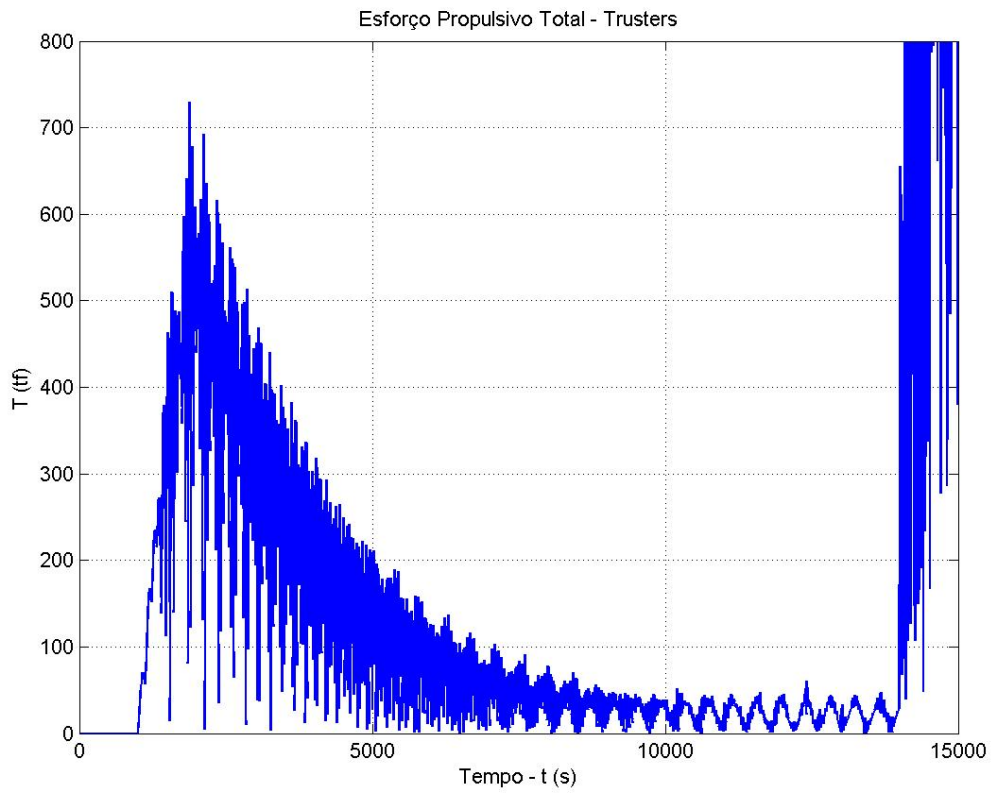
### 7.3.2.3 Corrida 3



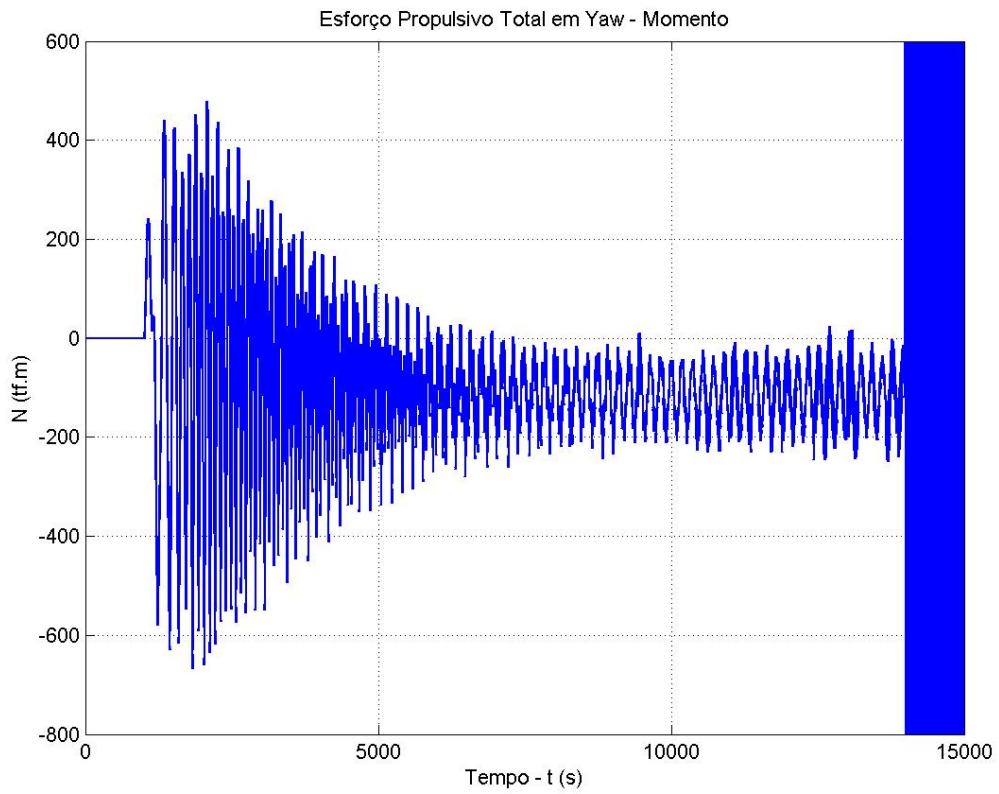
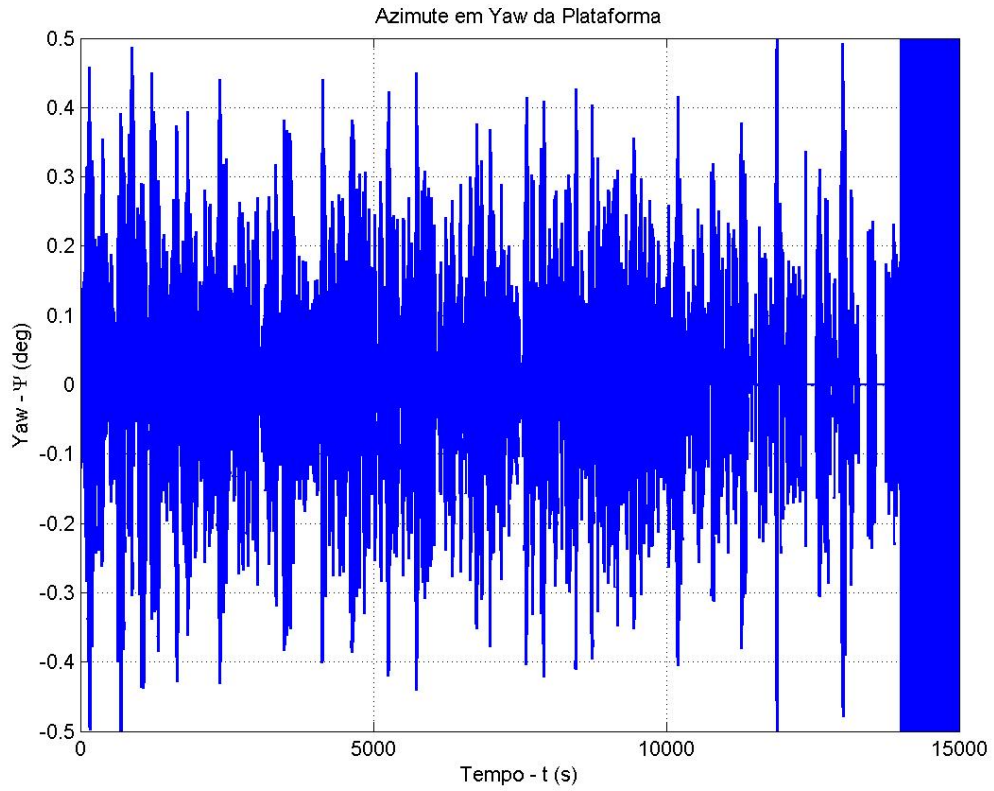
**Figura 7-33** – *Movimento em Surge e Esforço Propulsivo em Surge – Wave Frequency (corrida 3)*



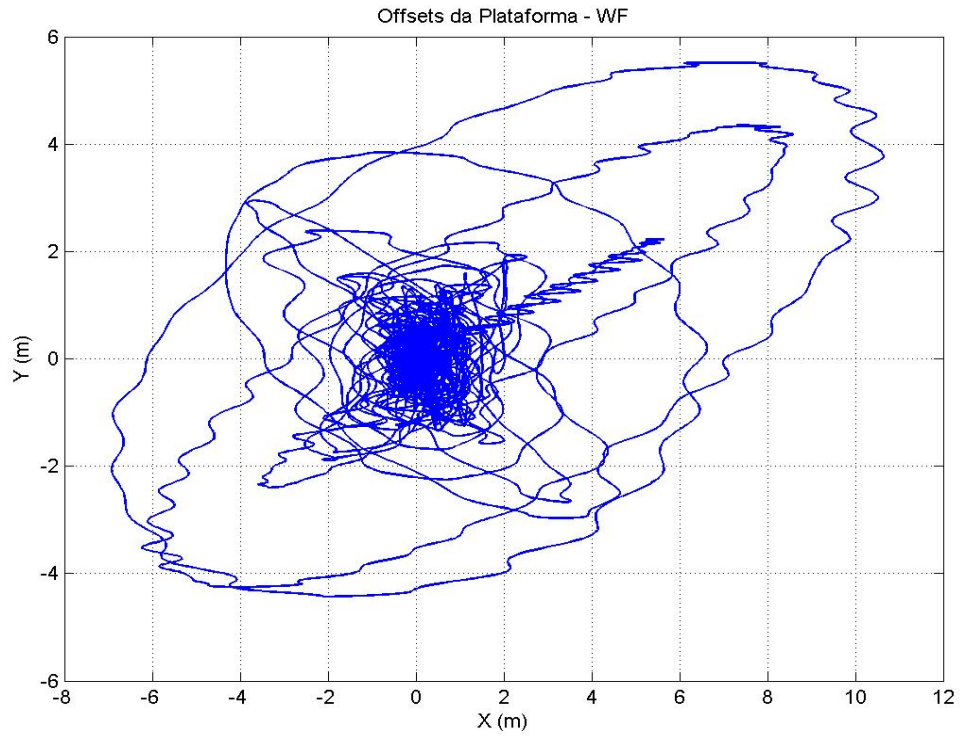
**Figura 7-34** – Movimento em Sway e Esforço Propulsivo em Sway – Wave Frequency  
(corrida 3)



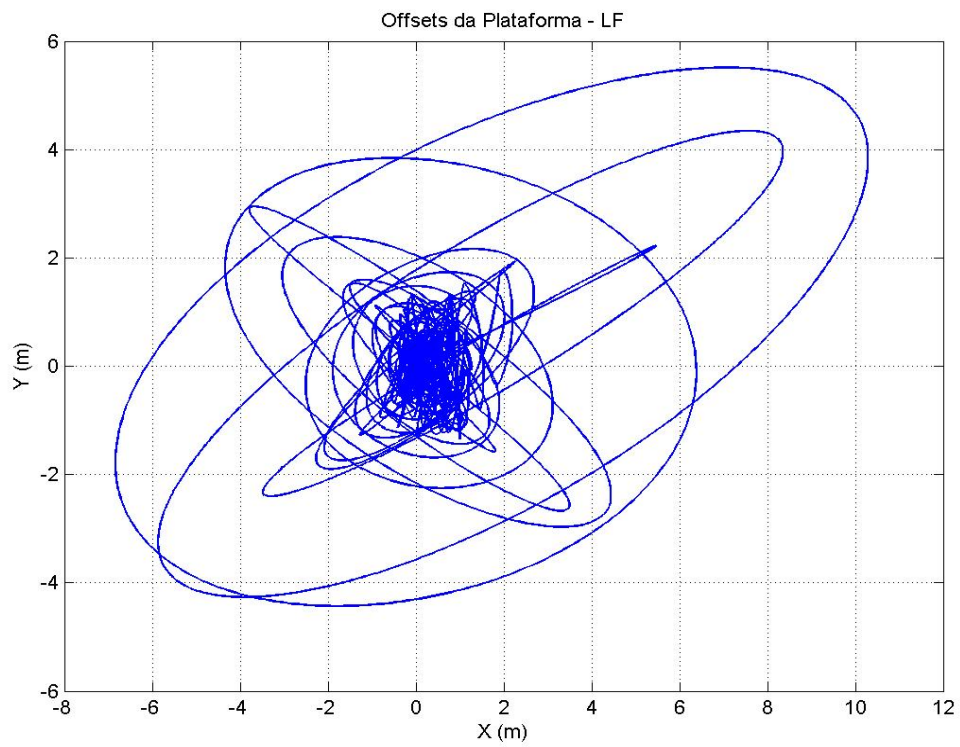
**Figura 7-35** –*Empuxo Total nos Thrusters (corrida 3)*



**Figura 7-36** – Movimento em Yaw e Esforço Propulsivo em Yaw – Wave Frequency (corrida 3)

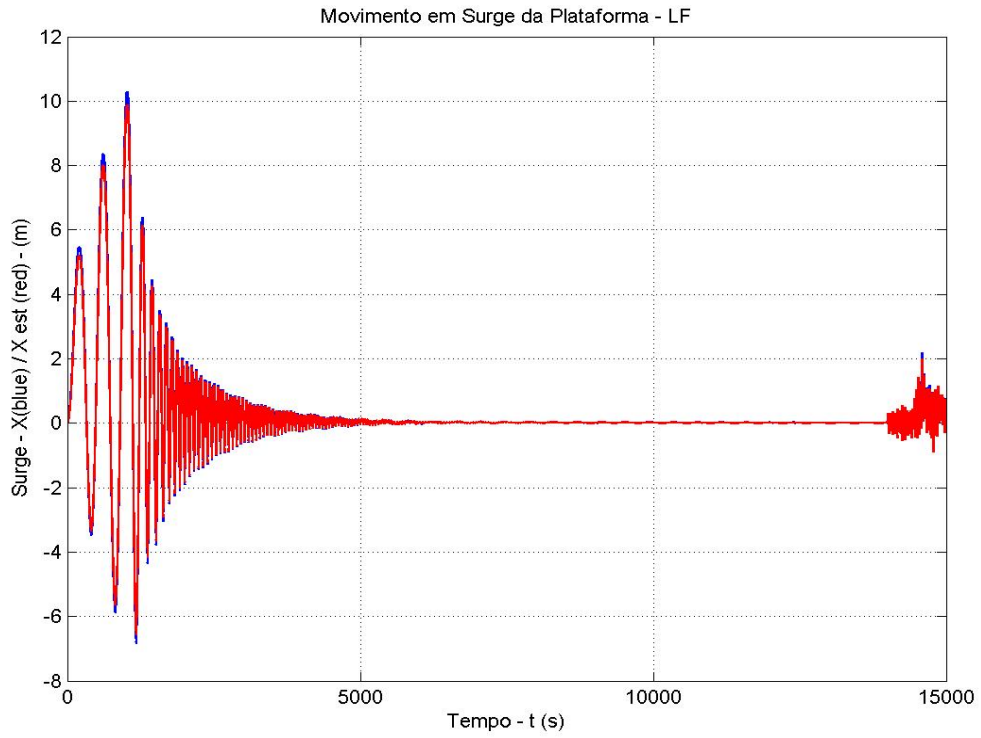


**Figura 7-37** – *Offsets – Wave Frequency (corrida 3)*

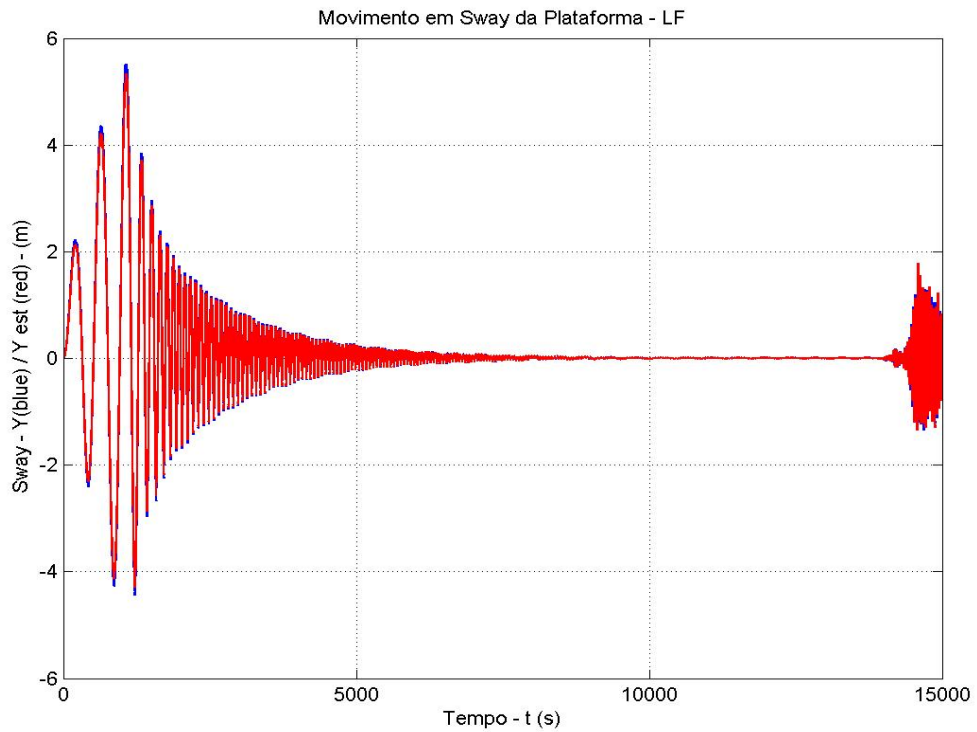


**Figura 7-38** – *Offsets – LF (corrida 3)*

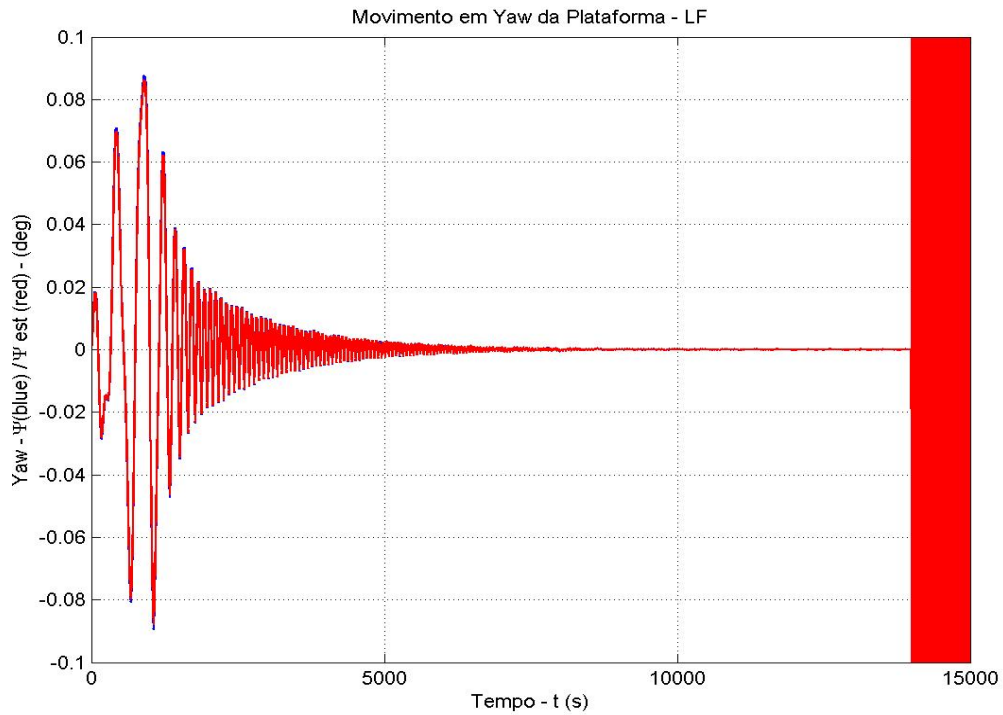




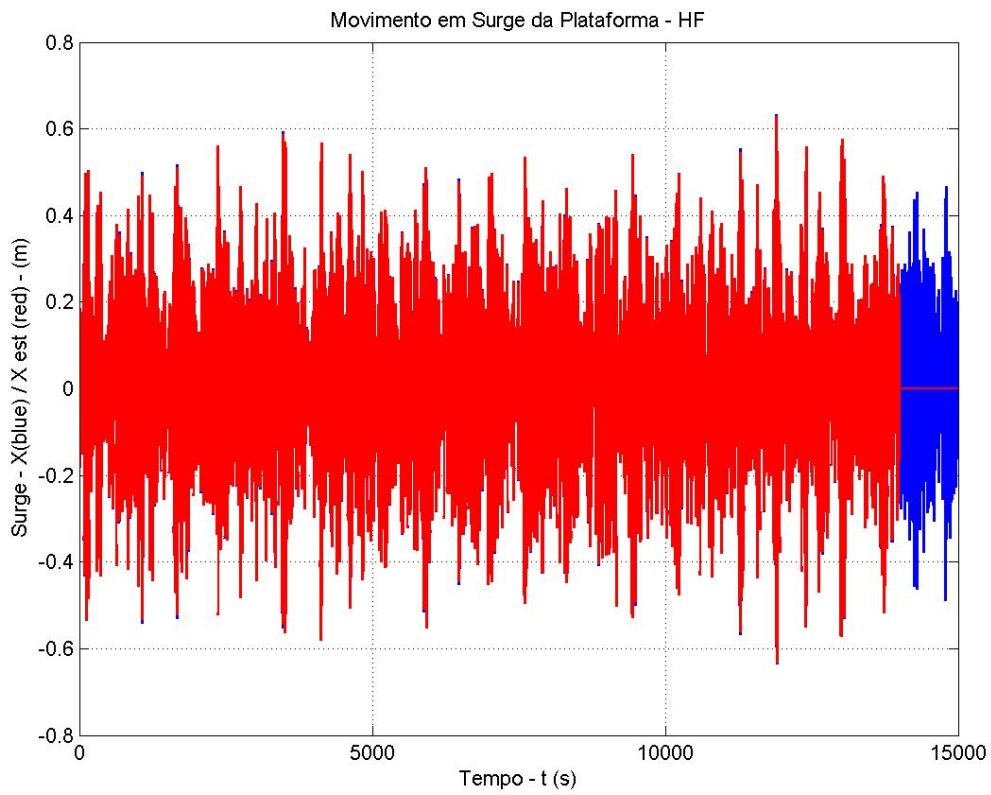
**Figura 7-39** – Movimento em Surge real e estimado - LF (corrida 3)



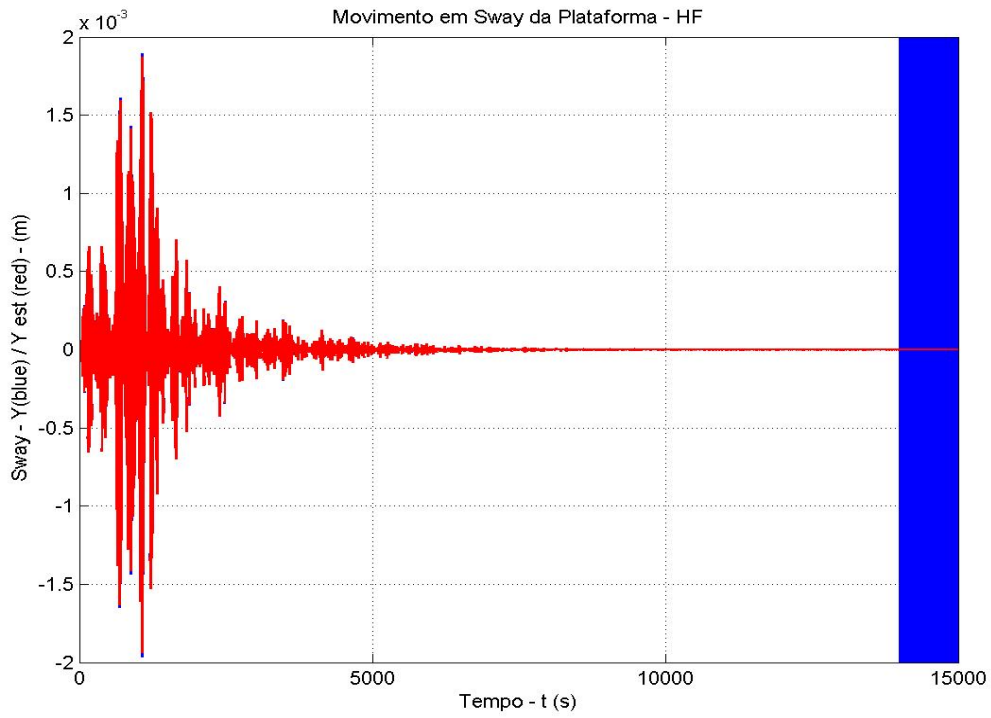
**Figura 7-40** – Movimento em Sway real e estimado - LF (corrida 3)



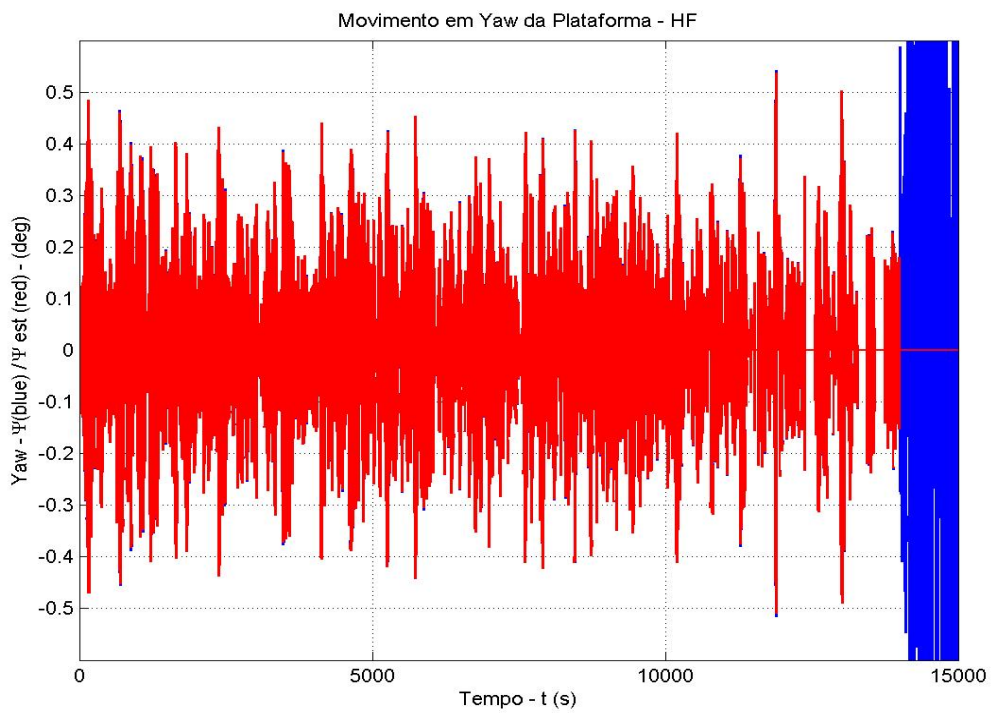
**Figura 7-41** – Movimento em Yaw real e estimado - LF (corrida 3)



**Figura 7-42** – Movimento em Surge real e estimado - HF (corrida 3)

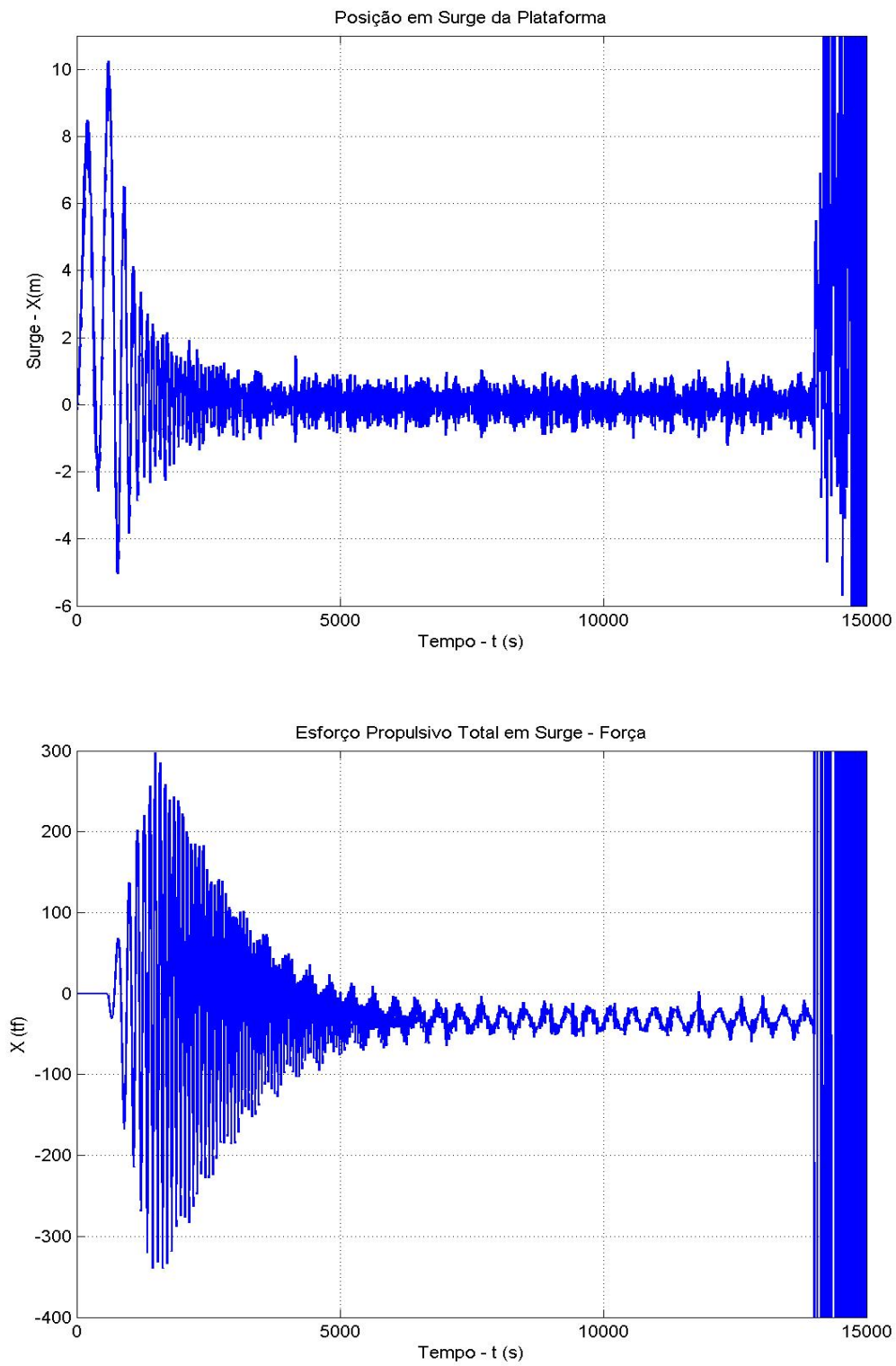


**Figura 7-43** – Movimento em Sway real e estimado - HF (corrida 3)

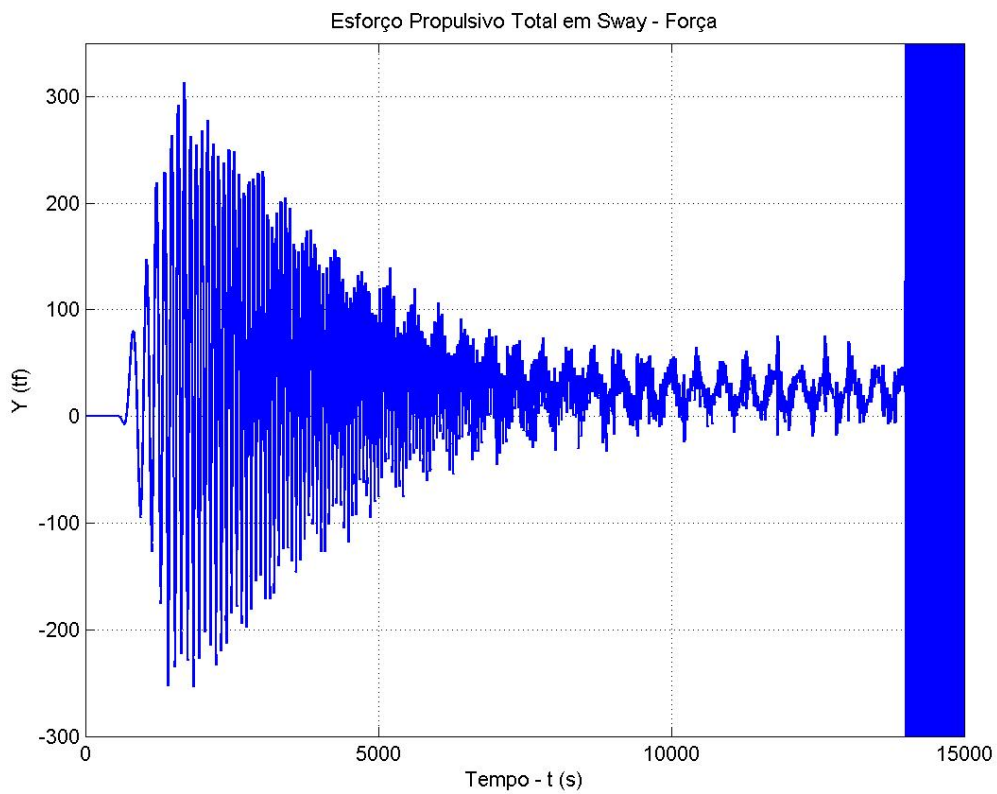
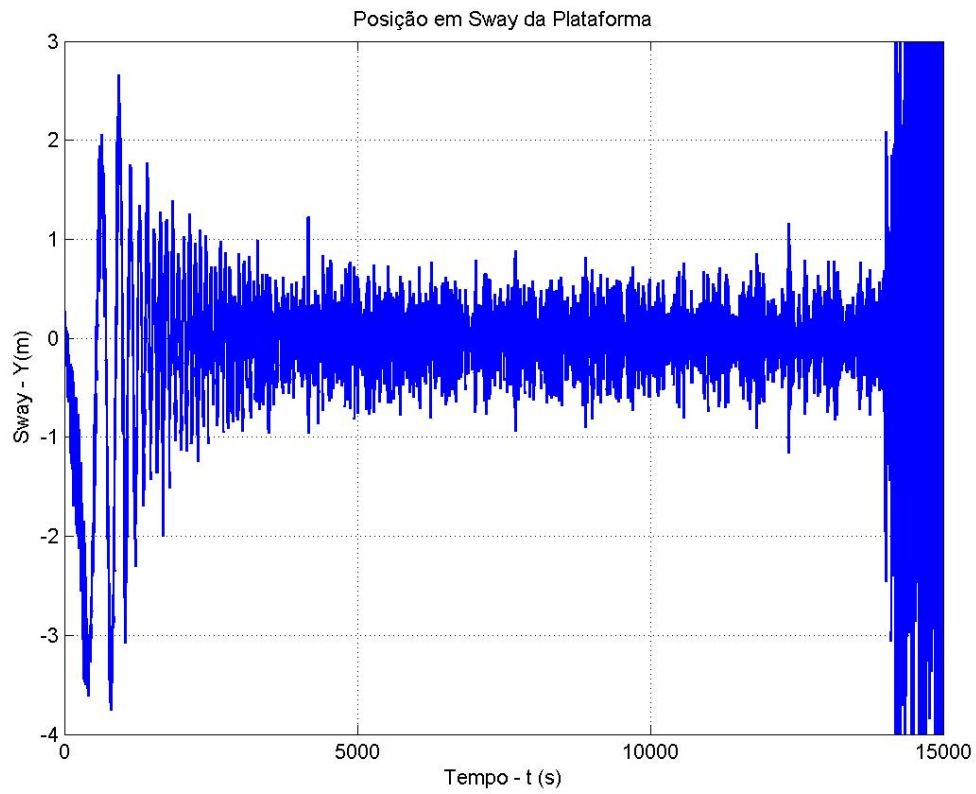


**Figura 7-44** – Movimento em Yaw real e estimado - HF (corrida 3)

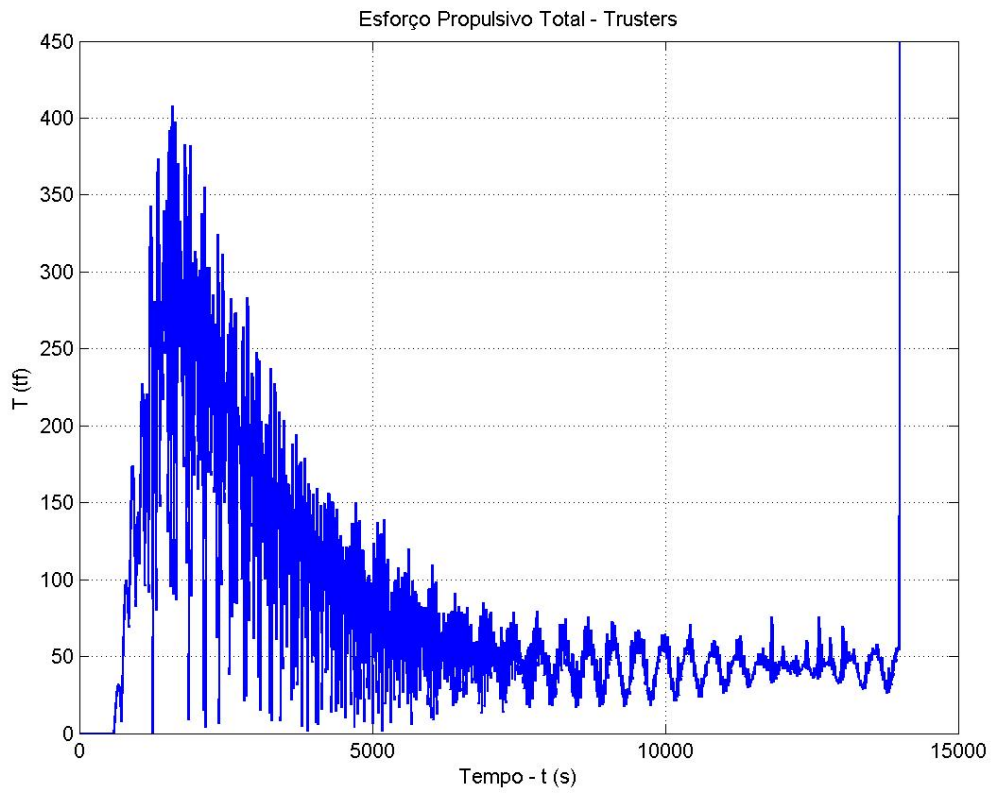
### 7.3.2.4 Corrida 4



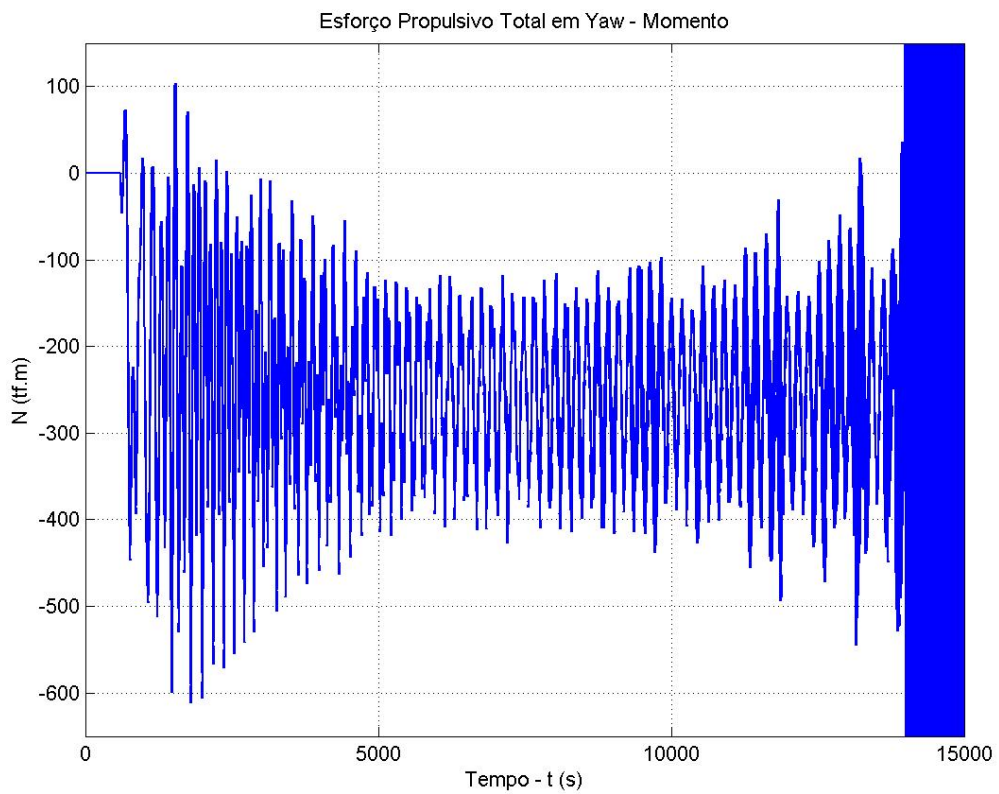
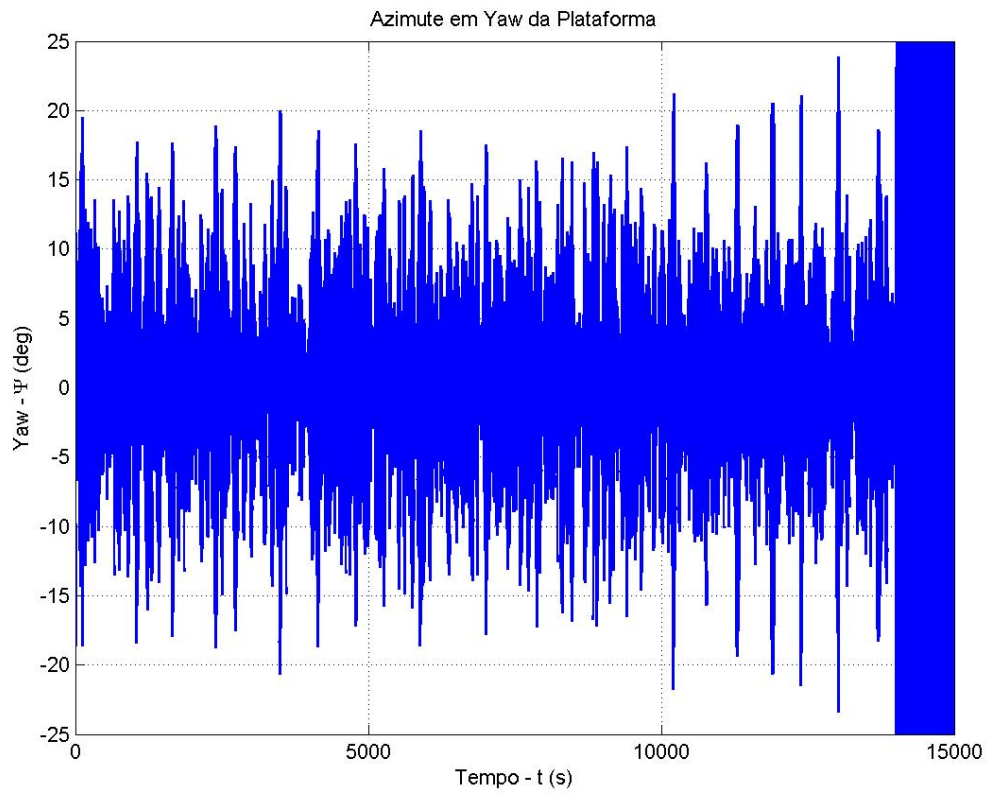
**Figura 7-45** – *Movimento em Surge e Esforço Propulsivo em Surge – Wave Frequency (corrida 4)*



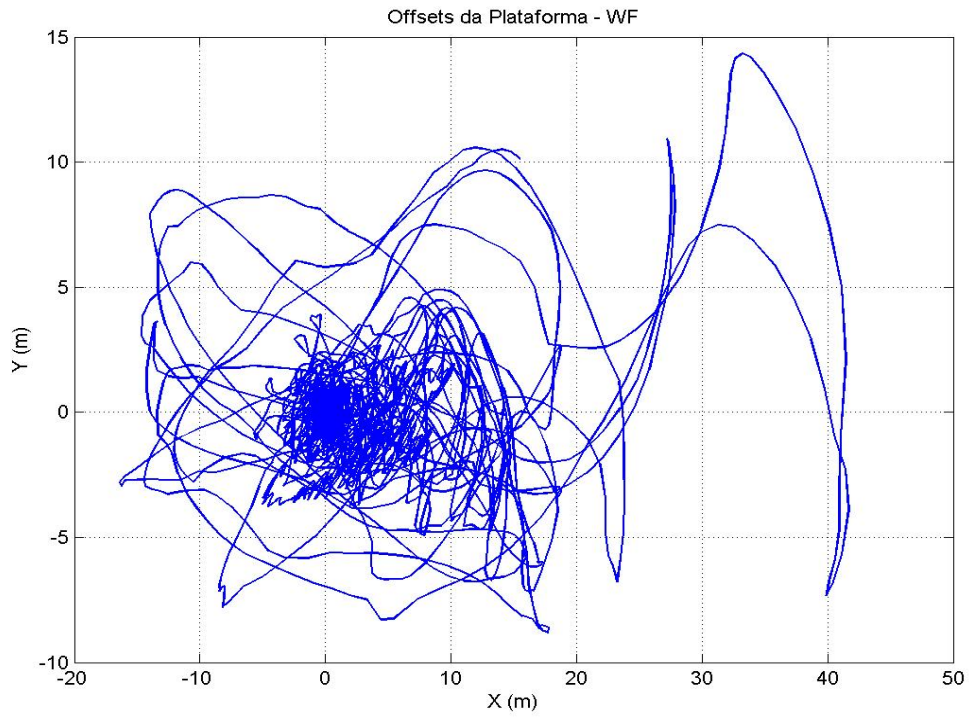
**Figura 7-46** – Movimento em Sway e Esforço Propulsivo em Sway – Wave Frequency (corrida 4)



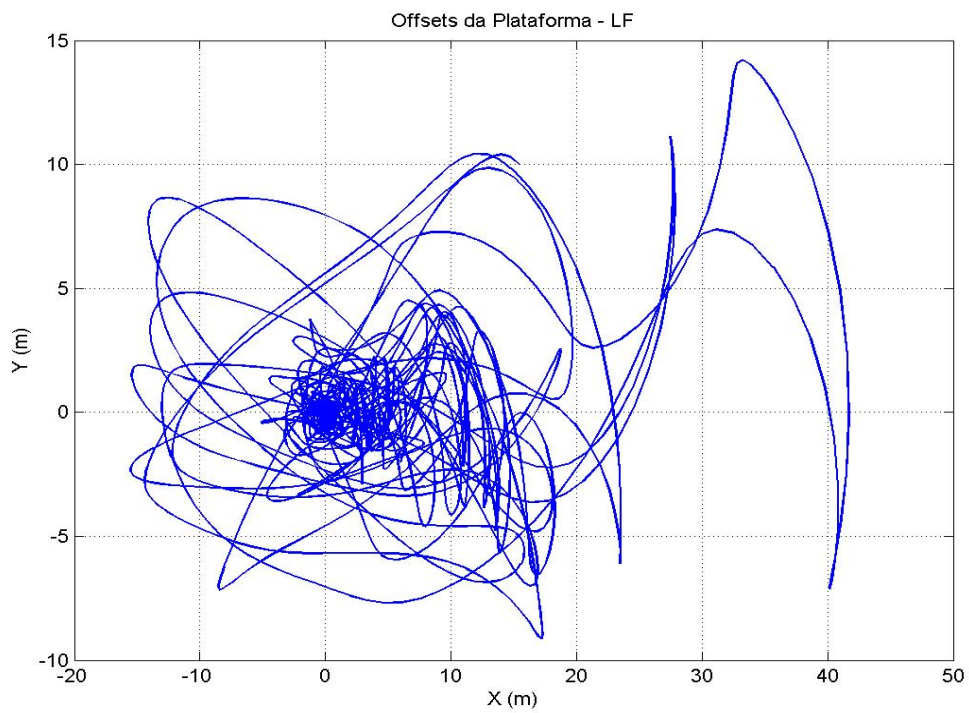
**Figura 7-47** –Empuxo Total nos Thrusters (corrida 4)



**Figura 7-48** – Movimento em Yaw e Esforço Propulsivo em Yaw – Wave Frequency (corrida 4)

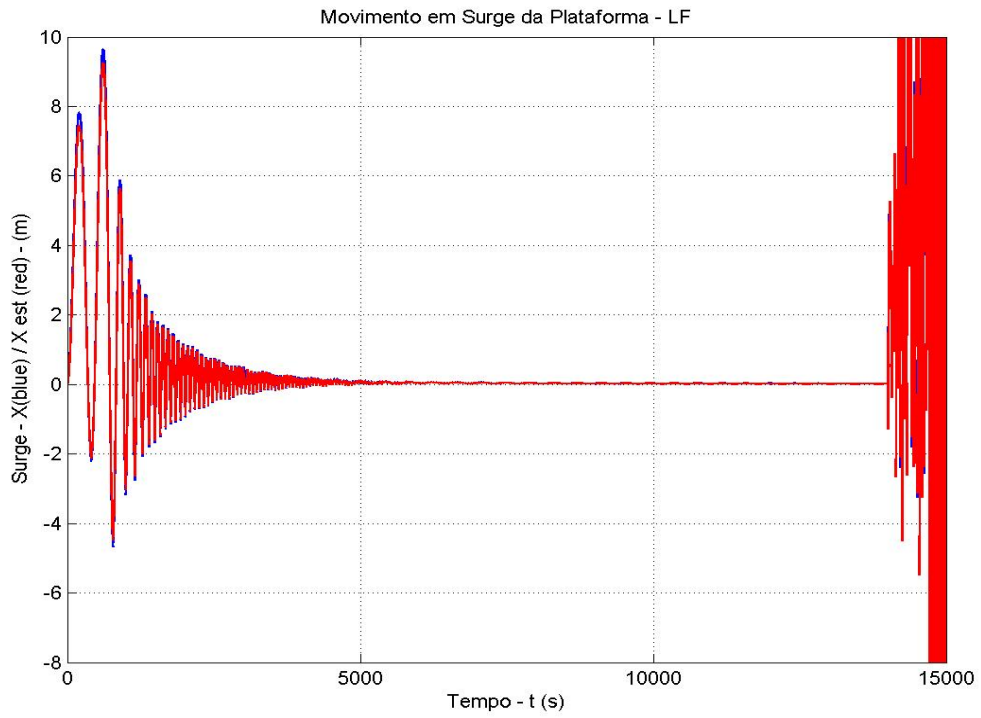


**Figura 7-49** – *Offsets – Wave Frequency (corrida 4)*

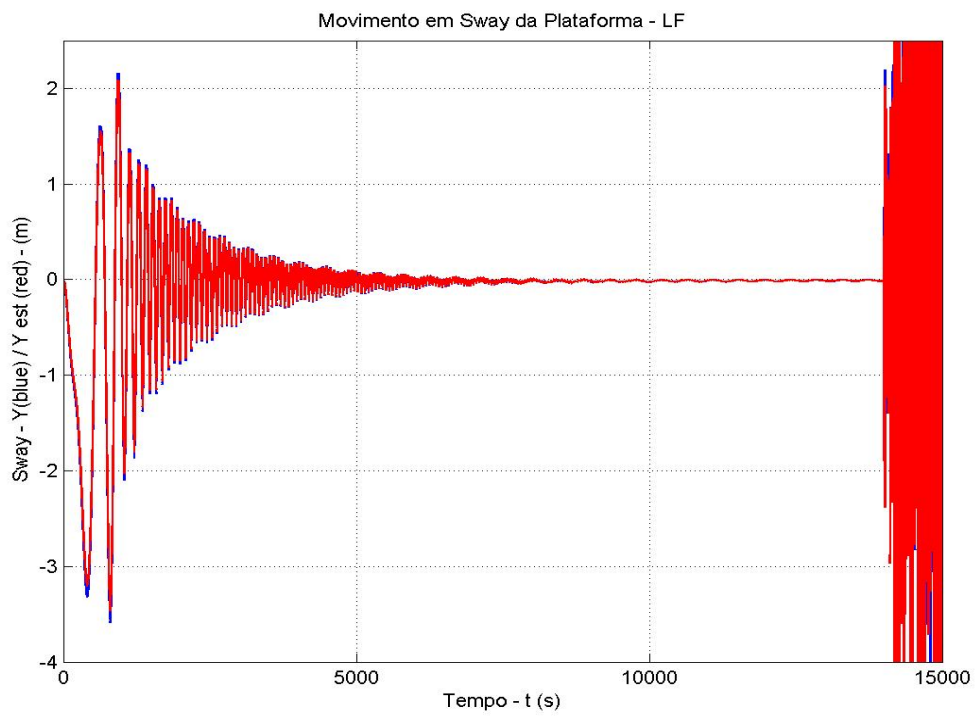


**Figura 7-50** – *Offsets – LF (corrida 4)*

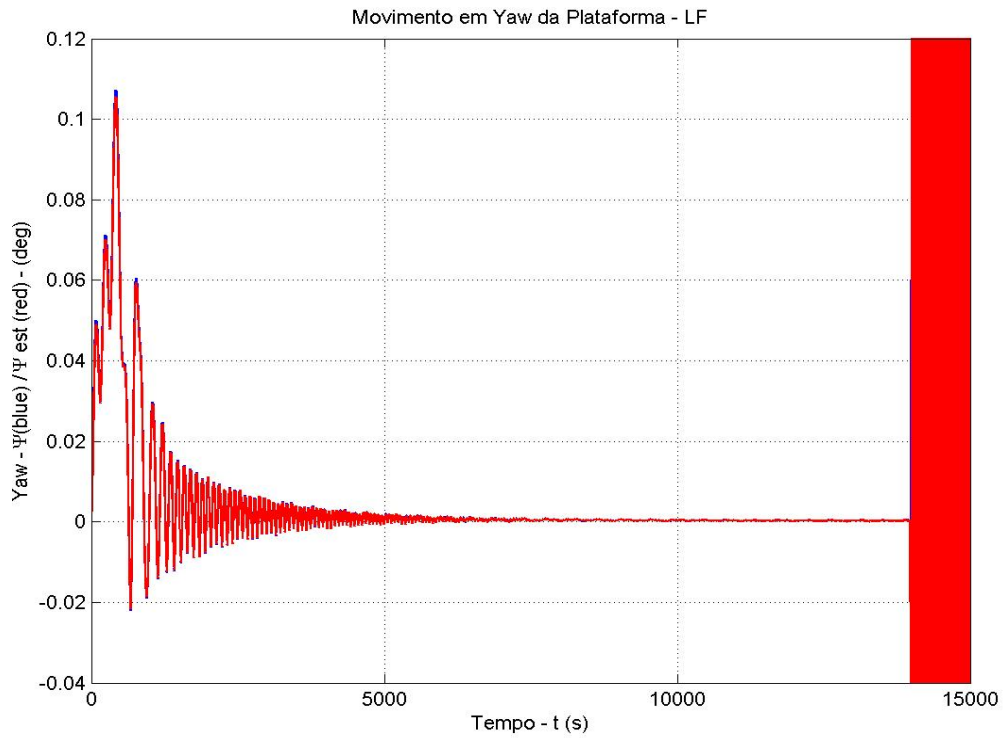




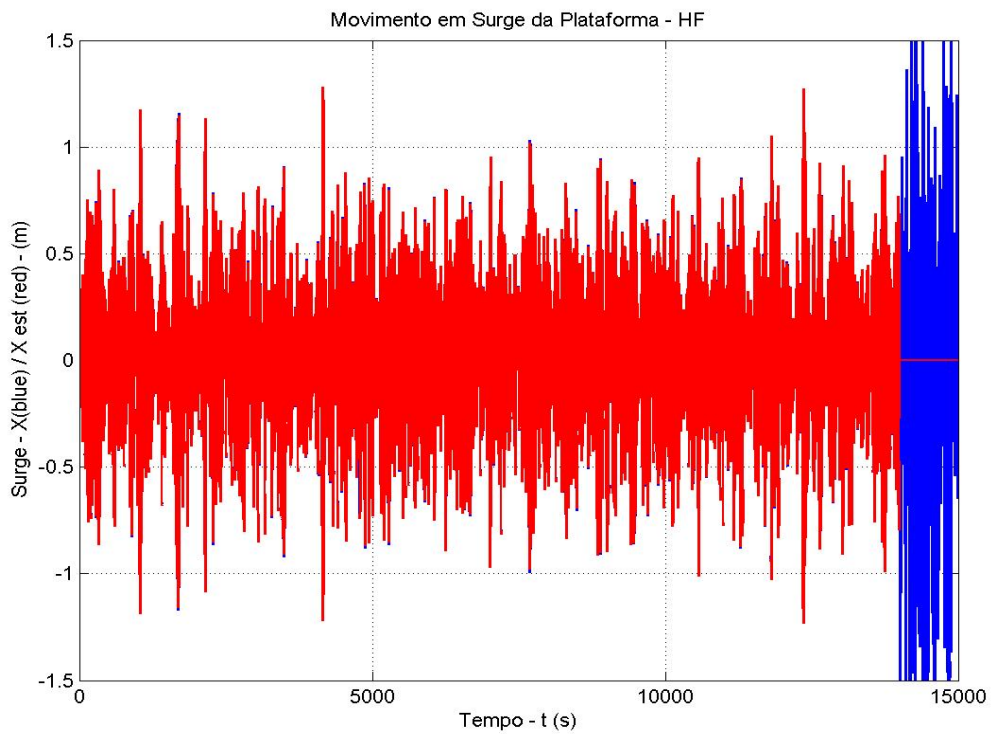
**Figura 7-51** – Movimento em Surge real e estimado - LF (corrida 4)



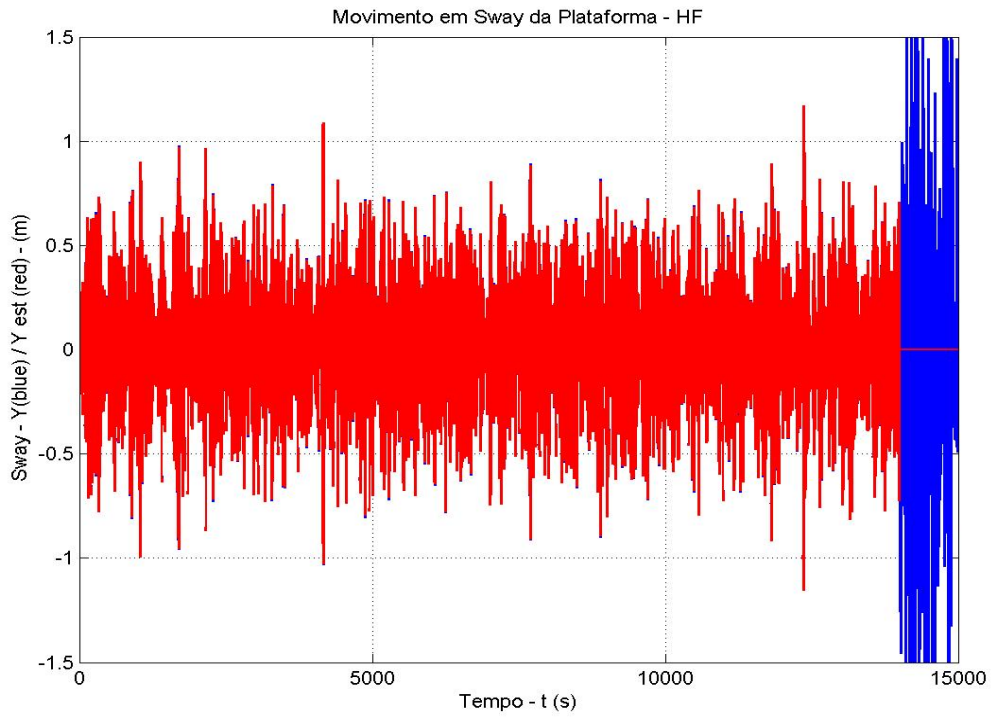
**Figura 7-52** – Movimento em Sway real e estimado - LF (corrida 4)



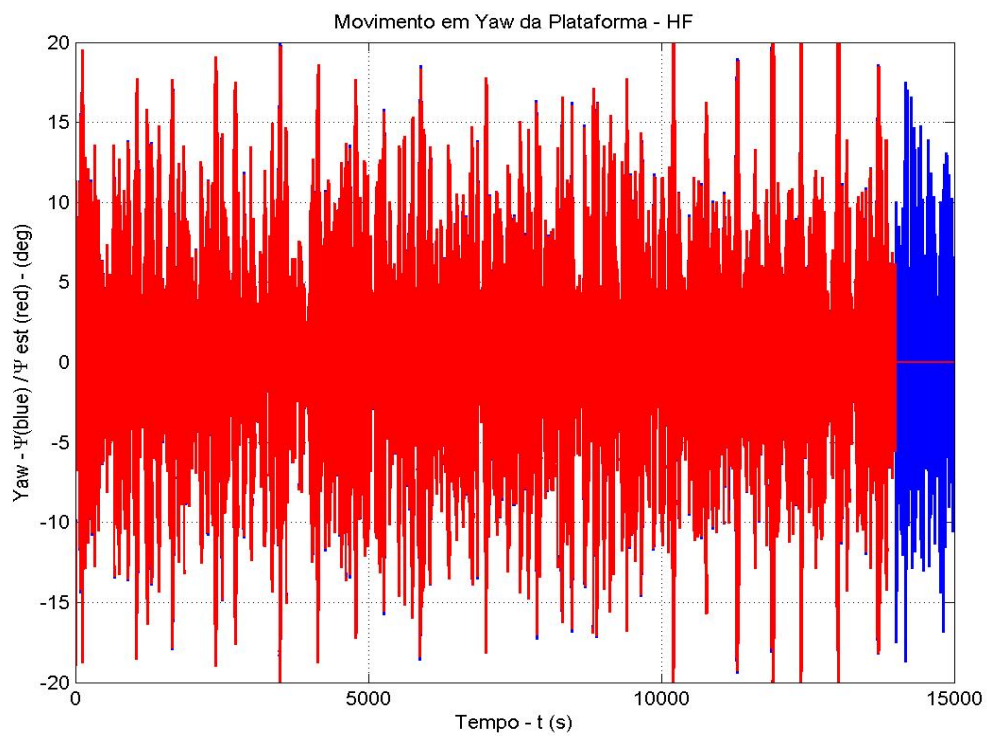
**Figura 7-53** – Movimento em Yaw real e estimado - LF (corrida 4)



**Figura 7-54** – Movimento em Surge real e estimado - HF (corrida 4)



**Figura 7-55** – Movimento em Sway real e estimado - HF (corrida 4)



**Figura 7-56** – Movimento em Yaw real e estimado - HF (corrida 4)

### 7.3.2.5 Sumário de Resultados

**Tabela 7-2** – *Sumários de Resultados de Deslocamentos das Corridas*

Corrida	Offsets (máximos)			Offsets (médios - regime)		
	X (m)	Y(m)	Psi ( °)	X (m)	Y(m)	Psi ( °)
1	6,4	-6,8	8,9	4,9	-4,9	8,9
2	13,0	-10,0	0,2	0,0	0,0	0,0
3	-10,5	5,6	-0,1	0,0	0,0	0,0
4	-10,3	-3,7	0,1	0,0	0,0	0,0

**Tabela 7-3** – *Sumários de Resultados de Empuxo dos Thrusters das Corridas*

Corrida	Empuxo (máximo)				Empuxo (médio - regime)			
	X (tf)	Y (tf)	N (tf.m)	T (tf)	X (tf)	Y (tf)	N (tf.m)	T (tf)
1	250,0	-400,0	87000,0	431,0	50,0	-50,0	87000,0	103,0
2	-610,0	800,0	-810,0	1112,0	-50,0	50,0	-110,0	102,0
3	-490,0	-550,0	-670,0	744,0	-20,0	-9,0	-145,0	31,0
4	-364,0	-311,0	-612,0	412,0	-33,0	-31,0	-294,0	54,0

Deve ser salientado que o acionamento máximo dos thrusters poderia alcançar valores muito melhores, visto que seus valores em regime são bem baixos. Nas simulações aqui se utilizou regime de ressonância do sistema pelo slow drift de forma a enfatizar a recuperação do sistema pelo compensador, de forma a equalizar a força externa e impedir o regime ressonância. No entanto, na prática esse regime quando atingido a plataforma já está em operação, e sua ocorrência é gradual, de modo que não se passa de um estado de mar para outro instantaneamente.

Na prática qualquer intervalo de dados para um período de medição de três horas de mar daria um novo mar (ainda que intervalados de minutos), o que caracteriza transição suave entre estados de mar, assim o sistema entraria em regime DP de forma quase contínua o que geraria extremos de acionamento dos thrusters bem abaixo do aqui encontrado e, bem mais próximos dos valores de regime.

Deve ser notado ainda que a transição dos distúrbios ambientais foi omitida por dois motivos principais, enfatizar a recuperação da posição gerada pelo compensador em uma situação altamente crítica e, também, para evitar a compressão excessiva de informações nas corridas que já são longas.

Assim, fica claro que para maior querência a ressonância deveria entrar gradualmente, assim como é feito para o sistema de controle, no entanto isto tornaria as corridas extremamente longas e reduzindo a capacidade de visualização dos resultados nos gráficos. No entanto, deve ser notado que os resultados de máximos de empuxo dos thrusters em ambientes reais serão muito próximos dos valores de regime permanente.

Um estudo paramétrico também poderia ser feito no intuito de encontrar o melhor intervalo de transição para a entrada do sistema em AAP de forma a minimizar seu efeito transiente reduzindo assim os empuxos máximos obtidos. Tal transição para a entrada do sistema DP foi considerada exponencial e com intervalo 3 tempos de acomodação até a aplicação total dos empuxos requeridos pelo sistema.

Pode ser notado nos gráficos ainda que a o acionamento dos thrusters decai para uma componente principal (fortemente atenuada) da frequência natural sistema ressonante, no entanto sua amplitude é extremamente pequena, como era desejado ao sistema, o que mostra a eficácia do compensador utilizado.

Assim, fica evidente pelos resultados apresentados nas *Tabelas 7-2 e 7-3*, que os resultados do compensador são excelentes de uma forma geral, mostrando que o acionamento dos thrusters para um casco de FPSO, é bastante reduzido, ainda que em uma condição crítica como as analisadas aqui.

Na corrida 1 o objetivo foi a verificação da resposta do sistema à uma entrada de referência, assim não foram utilizados nenhum distúrbio externo, e seu resultado ainda que um pouco mais lento que o esperado atende às necessidades de plataformas reais adequadamente.

Deve ainda ser notado que o valor de regime do momento requerido é elevadíssimo, no entanto é de se esperar que um sistema em AAP não queira gerar um azimute que não o de equilíbrio da ancoragem, já que nessa situação deixa de usar a ancoragem a favor de sua dinâmica e passa a ter que imprimir um elevado momento para compensar a restauração da amarração, fato que ocorre na corrida 1.

Nas corridas subseqüentes os resultados foram similares, mostrando um transiente inicial devido ao regime ressonante de slow-drift que entra abruptamente, sem a transição real que existe na natureza, então a lógica AAP aciona o sistema DP assim que os offsets ultrapassam um valor limite. Tal acionamento é feito ainda gradativamente, seguindo uma função exponencial e com tempo de transição igual a 900s.

Após cerca de 3 horas de corrida após a entrada completa do sistema DP, ao se chegar aos 14000s de simulação, a dinâmica de alta do observador é retirada, para que se possa notar o efeito devastador que seria provocado no sistema, gerando não só modulação como uma grave instabilização do mesmo o levando a “falência” total de sua aplicação.

É importante ainda notar que o observador, gerado pelo Filtro de Kalman, possui uma ótima estima dos estados de baixa frequência, conforme pode ser notado nos gráficos a sua proximidade com os valores reais (são praticamente os mesmos). Com relação aos estados de alta frequência, estes são estimados razoavelmente bem, mas poderiam ter suas estimações melhoradas com o acréscimo de mais dois estágios, de forma a cobrir melhor o espectro de mar.

Assim, de acordo com o acima explanado, o comportamento do compensador se deu conforme o esperado e mostra-se bastante eficiente no atendimento das necessidades da plataforma. Com isso fica demonstrado a validade do compensador LQG/LTR com FK com dinâmica aumentada aplicado a sistemas DP.

#### **7.4 Conclusões Finais e Sugestões de Estudos Futuros**

Conforme o que foi evidenciado, o compensador aqui tratado atende às expectativas quanto ao desempenho e a robustez, e possui uma metodologia estruturada, o que permite a utilização de ferramentas computacionais e a realização de algoritmos de forma a automatizar a sua especificação, o que é de grande importância por se traduzir em uma eficiente ferramenta de projeto.

Contudo cabe ressaltar que neste trabalho utilizou-se um espectro de Mar bastante “Narrow Band” de forma a se poder utilizar a penas um estágio de alta frequência no FK, mas na prática seria necessária a adição de mais um ou dois estágios de forma a fazer as estimas de estados de alta frequência adequadamente em mares mais reais que são mais “Wide Band”.

Assim, como sugestões para novos trabalhos e estudos estão os principais campos:

- *Filtragem de Alta Frequência* (1ª ordem dos distúrbios devido às ondas)

Com este tópico pode-se estudar maneiras ainda mais eficientes para se reduzir ao máximo a modulação dos propulsores devido às ondas e assim maximizar o desempenho e a vida útil do sistema, gerando maior confiabilidade e economia.

- *Distribuição de Potência e Modelagem do Sistema Propulsivo*

Ainda neste trabalho é sugerida uma técnica para esta distribuição de potência, contudo se faz necessário um estudo mais detalhado objetivando uma melhor modelação do sistema propulsivo gerando assim uma distribuição de empuxos adequada ao requisitado pelo sistema de controle e, assim, ajustando a estratégia de controle adotada à distribuição de empuxo propriamente dito.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] OGATA, K., *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Inc., 2º Ed. Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

[2] FOSSEN, T. I., *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. John Willey & Sons, New York, 1995.

[3] LEWIS, E. V., ed., *Principles of Naval Architecture*. 2nd Revision, SNAME, VOLUME III.

[4] CRUZ, J. J., *Controle Robusto Multivariável*. Ed. USP, São Paulo, 1996.

[5] TRIANTAFYLLOU, M. S. and HOVER, Franz S., *Maneuvering and Control of Marine Vehicles*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2005.

[6] HANSELMAN, D., *Mastering MATLAB®6 – A Comprehensive Tutorial and Reference*. Prentice-Hall, Inc, 2001.

[7] FALTINSEN, O. M., *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*. Cambridge University Press, 1990.

[8] FAY, H., *Dynamic Positioning Systems – Principles, Design and Applications*. Editions Technip, Paris, 1990.

[9] JOHN SJOUKE AND GEORGE LAGERS, *Development of Dynamic Positioning for IHC Drill Ship*. In Offshore Technology Conference, number OTC-1498, 1971.

[10] HARBONN, J., *The Terebel Dynamic Positioning System – results of five years of field work and experiments*. In Offshore Technology Conference, number OTC-1499, 1971.



- [11] SARGENT, J. S. and ELDRED, J. J., *Adaptive Control of Thruster Modulation for a Dynamic Positioned Drill Ship*. In Offshore Technology Conference, number OTC-2036, 1974.
- [12] SARGENT, J. S. and MORGAN, M. J., *Augmentation of a Mooring System Through Dynamic Positioning*. In Offshore Technology Conference, number OTC-2064, 1974.
- [13] BALCHEN, J. C., JENSSEN, N. A. and SAELID, S., *Dynamic Positioning Using Kalman Filtering and optimal Control Theory*. In IFAC, 1976.
- [14] HAMMETT, D. S., *The First Dynamic Stationed Semi-Submersible – SEDCO 709*. In Offshore Technology Conference, number OTC-2972, 1977.
- [15] LOKLING, T., *A New Generation of Dynamic Positioning Systems of Vessels*. In Offshore Technology Conference, number OTC-3581, 1979.
- [16] FOUGERE, P. A., and MINGE J.C., *The Upgrade and Performance of the Discovery 534 Dynamic Positioning System*. In Offshore Technology Conference, number OTC-6959, 1992.
- [17] SHATO, H. L., *Dynamic Positioning System Evaluation*. In Offshore Technology Conference, number OTC-6962, 1992.
- [18] WOLF, C. V., *Station Keeping in Deepwater: An Alternative to Dynamic Positioning*. In Offshore Technology Conference, number OTC-5624, 1988.
- [19] SALEID, S., JENSSEN, N. A. and BALCHEN, J. G., *Design Analysis of Dynamic Positioning System Based on Kalman Filtering and Optimal Control*. IEEE Transaction on Automatic Control, ac-28(3):331-339, march 1983.

- [20] MORGAN, P. T. and GRIMBLE, M. J., *Dynamic Ship Positioning Using a Self-tuning Kalman Filter*. IEEE Transaction on Automatic Control, ac-28(3):339-350, march 1983.
- [21] CRUZ, J. J., *Contribuição ao Estudo da Robustez da Estabilidade de Reguladores Não-Lineares Multivariáveis*. Tese de DSc., INPE, 1988, São Paulo, SP, Brasil.
- [22] MORGAN, M. J., *Dynamic Positioning of Offshore Vessels*. PPC Books Division of the Petroleum Publishing Company, 1<sup>st</sup> Edition, 1978.
- [23] MILNE, P. H., “*Under Water Acoustic Positioning Systems*. PPC Gulf Publishing Company, 1<sup>st</sup> Edition, 1983.
- [24] LEHTOMAKI, N. A., *Practical Robustness Measures in Multivariable Control Systems Analysis*. Cambridge, MA, MIT, may 1981, PhD Thesis.
- [25] STRANG, G., *Linear Algebra and its Applications*. New York, Academic Press, 1988.
- [26] NOBLE, B. and DANIEL, J. W., *Algebra Linear Aplicada*. Prentice-Hall do Brasil, 1986.
- [27] DOYLE, J. C. and STEIN, G., *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis*. IEEE Transaction on Automatic Control, ac-26, pp. 4-16, february 1981.
- [28] SAFONOV, M. G. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems* . Cambridge, MA, MIT Press, 1980.
- [29] KWAKERNAAK, H. and SIVAN, R.. *Linear Optimal Control*. New York, Wiley, 1970.
- [30] *I-RL-3010.72-1350-960-PPC-003 – Motion Analysis*. Cenpes, Petrobras, 2006.

- [31] I-RL-3010.72-1350-960-PPC-004 – Mooring Analysis. Cenpes, Petrobras, 2006.
- [32] SANTIAGO, A. A., *Controle LQG/LTR Aplicado ao Posicionamento Dinâmico de Plataforma Semi-Submersível*, Technical Report, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Naval e Oceânica, 2005.
- [33] HADDAD, S. M., *Posicionamento Dinâmico de Plataformas Semi-Submersíveis em Ambiente multidirecional*. Tese de MSc., COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [34] FERNANDES, A. C., *Dinâmica de Sistemas Flutuantes, Metodologia para Estimativa de Deriva Lenta em Corpos Flutuantes Amarrados*. Trabalho Realizado para a Petrobras, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [35] BORGES, A. de M., *Controle Ótimo Robusto Aplicado ao Posicionamento de Plataformas Offshore em Águas Profundas*. Tese de MSc., COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.

## APÊNDICES

### A SISTEMAS DE CONTROLE – CONCEITOS BÁSICOS

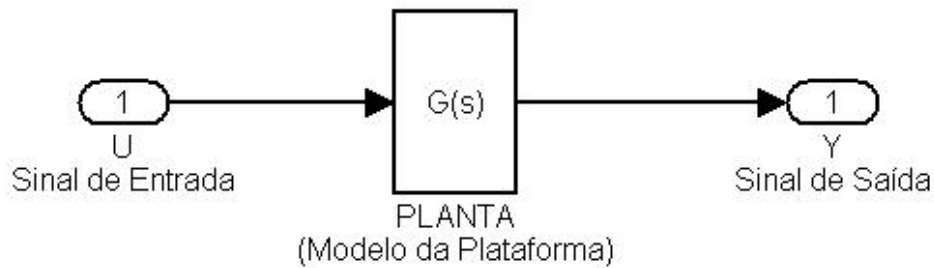
Deve ser ressaltado que este capítulo não tem como objetivo desenvolver alguma teoria, mas tão somente apresentar resultados fundamentais para o desenvolvimento do trabalho aqui proposto. Assim, deve-se ter em mente que diversas passagens podem estar sendo omitidas, contudo estão disponíveis para consulta mais detalhada em [1 e 4], de onde foi retirado o que se apresenta neste capítulo.

#### A.1. Sistemas SISO

##### A.1.1. Introdução

Um dos propósitos do texto deste trabalho é apresentar uma metodologia de projeto que permita a determinação de um compensador, a ser localizado no ramo direto da malha de controle, de maneira que sejam atendidos os requisitos de desempenho e estabilidade. Para tanto, neste capítulo, iremos apresentar conceitos básicos de sistemas de controle SISO e MIMO de forma a nos auxiliar no entendimento da metodologia de projeto aqui descrita.

No último capítulo obtivemos um modelo para a nossa plataforma; a partir de agora chamaremos a unidade flutuante de planta e o seu modelo pode ser representado como se segue:



**Figura A 1** – *Representação do Modelo da Plataforma em um bloco simples chamado de Planta*

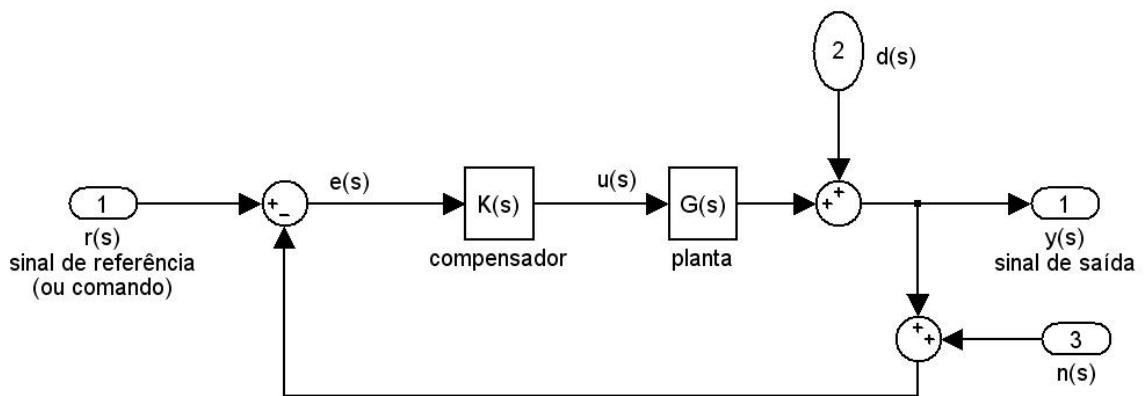
Deve ser notado que este bloco obedece todas as leis e formulações do modelo levantado no capítulo anterior e descrito em espaço de estados. Neste contexto, define-se  $G(s)$  como a função de transferência daquele modelo, ou seja, desta planta. Tal função é o que relaciona o comportamento da saída com o da entrada.

De forma a nos auxiliar vamos apresentar um diagrama de blocos para nos auxiliar a representar o problema que estudamos neste trabalho. Tal diagrama de blocos é o que se apresenta na *Figura A-1*.

Ele contém um novo bloco chamado de compensador, este é o objetivo deste trabalho, é através deste bloco que iremos projetar o sistema de controle de forma a atender nossas necessidades de posicionamento da plataforma.

Neste ponto vamos fazer algumas definições de nomenclatura para auxiliar no desenvolvimento deste trabalho. Sejam elas:

$C^m$  designa o conjunto de vetores complexos de dimensão  $m$  e  $C^{mxm}$ , o conjunto de vetores complexos de dimensão  $mxm$ .



**Figura A 2 – Diagrama de blocos do sistema a ser estudado**

Os sinais representados na *Figura A-2* acima através de suas Transformadas de Laplace, são representados como se segue:

- $r(s) \in C^m$  é o sinal de referência;
- $e(s) \in C^m$  é o sinal de erro;
- $u(s) \in C^m$  é o sinal de controle (ou de entrada da planta);
- $d(s) \in C^m$  é a perturbação refletida na saída da planta;
- $y(s) \in C^m$  é o sinal de saída;
- $n(s) \in C^m$  é o erro (ruído) de medida.
- 

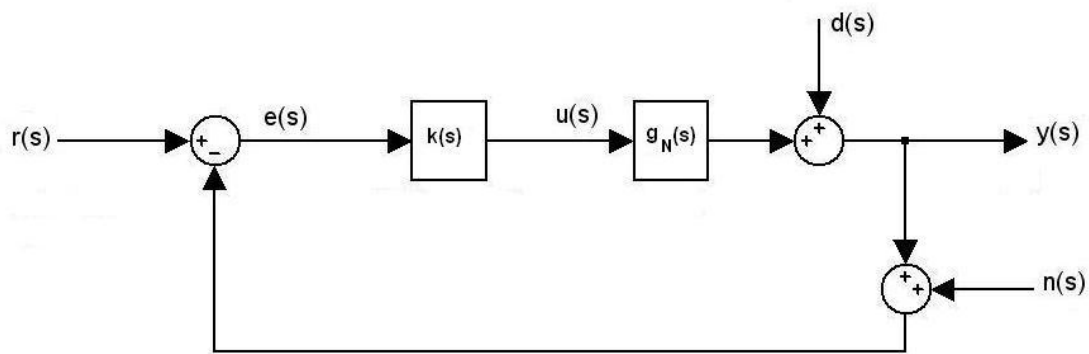
Além disso definem-se as seguintes matrizes de funções de transferência:

- $K(s) \in C^{m \times m}$  é a matriz de funções de transferência do compensador;
- $G(s) \in C^{m \times m}$  é a matriz de funções de transferência da planta;
- $G(s)K(s) \in C^{m \times m}$  é a matriz de funções de transferência de malha para a abertura de malha na saída da planta (“loop transfer function”, em inglês) ou matriz de funções de transferência do ramo direto;
- $I+G(s)K(s) \in C^{m \times m}$  é a matriz de funções de transferência diferença de retorno;
- $[I+G(s)K(s)]^{-1} \in C^{m \times m}$  é a matriz de sensibilidade;
- $C(s)=[I+G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \in C^{m \times m}$  é a matriz de funções de transferência de malha fechada ou matriz de sensibilidade complementar.

Daqui por diante iremos tratar sempre nossa planta como quadrada, por simplificação de detalhes e por se tratar do caso do projeto em questão.

### A.1.2. Conceitos Básicos

Nesta seção são apresentadas idéias básicas relativas a sistemas de controle robusto SISO, isto é, de apenas uma entrada e uma saída. Objetiva-se aqui discutir conceitos importantes para o caso MIMO em um ambiente de relativa simplicidade, os aspectos mais importantes relativos à estabilidade e desempenho robusto, que serão generalizados em seções subseqüentes para sistemas multivariáveis.



**Figura A 3** – Diagrama de blocos do sistema nominal

### A.1.3. Sistema Nominal

A Figura A-3 representa a função de transferência nominal (de projeto) da planta.

### A.1.3.1. Estabilidade do Sistema Nominal

O sistema em malha fechada é estável se, e somente se, os pólos de

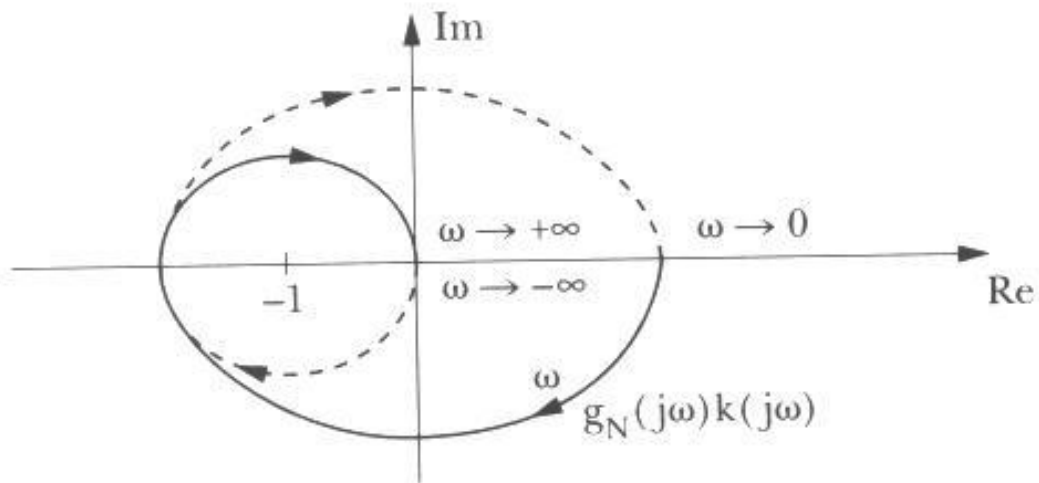
$$c_N(s) = \frac{g_N(s)k(s)}{1 + g_N(s)k(s)} \quad (\text{A 1})$$

estão localizados no semiplano esquerdo (SPE) aberto.

Uma das maneiras de se estudar a estabilidade do sistema é através do *Critério de Nyquist*, que pode ser enunciado da seguinte forma:

*Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema em malha fechada é que o número de voltas do Diagrama de Nyquist de  $g_N(s)k(s)$  em torno do ponto  $-1+j0$ , no sentido anti-horário, seja igual ao número de pólos instáveis de malha aberta [1].*

No caso da *Figura 4-4*, o sistema em malha fechada é, portanto, instável.



**Figura A 4** – Diagrama de Nyquist – retirado de [4]



Note-se que tanto a planta  $g_N(s)$  quanto o compensador  $k(s)$  podem ter pólos no semiplano direito (SPD).

### A.1.3.2. Desempenho do Sistema Nominal

Para o sistema representado na *Figura A-3* valem:

$$y(s) = \frac{g_N(s)k(s)}{1 + g_N(s)k(s)} r(s) + \frac{1}{1 + g_N(s)k(s)} d(s) - \frac{g_N(s)k(s)}{1 + g_N(s)k(s)} n(s) \quad (\text{A } 2)$$

e

$$e(s) = \frac{1}{1 + g_N(s)k(s)} r(s) - \frac{1}{1 + g_N(s)k(s)} d(s) - \frac{1}{1 + g_N(s)k(s)} n(s) \quad (\text{A } 3)$$

Baseado nessas duas igualdades pode-se estudar o desempenho do sistema nominal.

- Acompanhamento do Sinal de Referência

Considere-se apenas a contribuição de  $r(j\omega)$  para  $e(j\omega)$ :

$$e(j\omega) = \frac{g_N(j\omega)k(j\omega)}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} r(j\omega) \quad (\text{A } 4)$$

e seja  $\Omega_r$  o conjunto onde  $r(j\omega)$  tem a parte mais significativa da sua energia. Em geral  $\Omega_r$  é do tipo:

$$\Omega_r = \{\omega : \omega \leq \omega_r\} \quad (\text{A } 5)$$

Onde  $\omega_r$  é dado. Admita-se que, como parte das especificações do sistema de controle, seja dada uma função  $\alpha_r(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_r$ , tal que:

$$\frac{|e(j\omega)|}{|r(j\omega)|} \leq \alpha_r(\omega) \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (\text{A } 6)$$

Tipicamente a função  $\alpha_r(\omega)$  é constante e tal que:

$$\alpha_r(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (\text{A } 7)$$

Assim, para atender à especificação, é suficiente impor que:

$$|1 + g_N(j\omega)k(j\omega)| \geq \frac{1}{\alpha_r} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (\text{A } 8)$$

Ou, de forma aproximada,

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| \geq \frac{1}{\alpha_r} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (\text{A } 9)$$

O que resulta que:

$$y(j\omega) \approx r(j\omega) \quad (\omega \in \Omega_r) \quad (\text{A } 10)$$

E, portanto, o ganho da função de transferência de malha deve ser “grande” na região em que o sinal de referência tem a parte mais significativa de sua energia.

- Rejeição de Perturbações

Considerando apenas a contribuição de  $d(j\omega)$  para  $e(j\omega)$ , tem-se:

$$e(j\omega) = \frac{1}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} d(j\omega) \quad (\text{A 11})$$

E seja  $\Omega_d$  o conjunto onde  $d(j\omega)$  tem a maior parte de sua energia. Em geral  $\Omega_d$  é do tipo:

$$\Omega_d = \{\omega : \omega \leq \omega_d\} \quad (\text{A 12})$$

onde  $\omega_r$  é dado.

Supondo que as especificações referente à rejeição de perturbações seja dada através de uma função  $\alpha_d(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_d$ , de forma tal que:

$$\frac{|e(j\omega)|}{|d(j\omega)|} \leq \alpha_d(\omega) \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (\text{A 13})$$

então é suficiente que:

$$|1 + g_N(j\omega)k(j\omega)| \geq \frac{1}{\alpha_d} \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (\text{A 14})$$

Tipicamente a função  $\alpha_d(\omega)$  é constante e tal que:

$$\alpha_d(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (\text{A 15})$$

Portanto, a condição (A.14) pode ser reescrita de forma aproximada como:

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| \geq \frac{1}{\alpha_d} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_d) \quad (\text{A } 16)$$

Assim, o ganho da função de transferência de malha deve ser “grande” na região em que as perturbações tem a maior parte de sua energia.

- Insensibilidade a Variações na Planta

Para o sistema nominal,

$$y(s) = \frac{g_N(j\omega)k(j\omega)}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} r(j\omega) \quad (\text{A } 17)$$

Considerando-se apenas uma variação  $\delta g(s)$  na função de transferência da planta, de maneira que a saída passe a  $y(j\omega) + \delta y(j\omega)$ :

$$y(j\omega) + \delta y(j\omega) = \frac{[g_N(j\omega) + \delta g(j\omega)]k(j\omega)}{1 + [g_N(j\omega) + \delta g(j\omega)]k(j\omega)} r(j\omega) \quad (\text{A } 18)$$

Tomando a aproximação linear do segundo membro vem:

$$\delta y(j\omega) = \frac{k(j\omega)}{[1 + g_N(j\omega)k(j\omega)]^2} \delta g(j\omega) r(j\omega) \quad (\text{A } 19)$$

Dividindo-se (A.19) por (A.17) obtém-se:

$$\frac{\delta y(j\omega)}{y(j\omega)} = \frac{1}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} \frac{\delta g(j\omega)}{g_N(j\omega)} \quad (\text{A } 20)$$

Admita-se que  $\delta_g(j\omega)/g_N(j\omega)$  seja significativa para  $\omega \in \Omega_\delta$ , onde  $\Omega_\delta$ , em geral, é do tipo:

$$\Omega_\delta = \{\omega : \omega \leq \omega_\delta\} \quad (\text{A 21})$$

Para  $\omega_\delta$  dada e que seja dada uma função  $\alpha_\delta(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_\delta$ , de forma que se requer que:

$$\frac{\left| \frac{\delta y(j\omega)}{y(j\omega)} \right|}{\left| \frac{\delta g(j\omega)}{g_N(j\omega)} \right|} \leq \alpha_\delta(\omega) \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (\text{A 22})$$

Tipicamente a função  $\alpha_\delta(\omega)$  é constante e tal que:

$$\alpha_\delta(\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (\text{A 23})$$

Sendo assim para que a condição (A.22) seja satisfeita é suficiente:

$$\left| 1 + g_N(j\omega)k(j\omega) \right| \geq \frac{1}{\alpha_\delta} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (\text{A 24})$$

ou, de forma aproximada,

$$\left| g_N(j\omega)k(j\omega) \right| \geq \frac{1}{\alpha_\delta} \gg 1 \quad (\omega \in \Omega_\delta) \quad (\text{A 25})$$

Assim, o ganho da função de transferência de malha deve ser “grande” na região de frequências em que  $\delta_g(j\omega)/g_N(j\omega)$  é mais significativa.

*Nota*

em malha aberta,

$$y(j\omega) = g_N(j\omega)k(j\omega)r(j\omega)$$

assim,

$$\delta y(j\omega) = \delta g(j\omega)k(j\omega)r(j\omega)$$

portanto,

$$\frac{\delta y(j\omega)}{y(j\omega)} = \frac{\delta g(j\omega)}{g_N(j\omega)}$$

o que significa que variações relativas em  $g_N$  se fazem sentir integralmente na saída.

- Rejeição do Erro de Medida

Considera agora a contribuição de  $n(j\omega)$  para  $y(j\omega)$ . De (A.2) vem:

$$y(s) = -\frac{g_N(j\omega)k(j\omega)}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)}n(j\omega) \quad (\text{A 26})$$

Seja  $\Omega_n$  o conjunto onde a energia de  $n(j\omega)$  é mais significativa. Em geral,  $\Omega_n$  é do tipo:

$$\Omega_n = \{\omega : \omega \leq \omega_n\} \quad (\text{A 27})$$

para  $\omega_n$  dado. Admita-se dada uma função  $\alpha_n(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_n$ , tal que:

$$\frac{|y(j\omega)|}{|n(j\omega)|} \leq \alpha_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (\text{A 28})$$

Tipicamente  $\alpha_n(j\omega)$  é constante e

$$\alpha_n(\omega) \leq 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (\text{A 29})$$

Para obter uma condição que garanta a rejeição do erro de medida de acordo com o especificado, admita-se que:

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (\text{A 30})$$

Nestas condições,

$$|1 + g_N(j\omega)k(j\omega)| \approx 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (\text{A 31})$$

Assim, de forma aproximada, é suficiente que a desigualdade (A.32) seja satisfeita.

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| \leq \alpha_n(j\omega) \ll 1 \quad (\omega \in \Omega_n) \quad (\text{A 32})$$

Ou seja, o ganho da função de transferência deve ser “pequeno” na faixa de frequências onde o erro de medida é “grande”.

*Nota*

A análise anterior é coerente com aquela que decorre do uso da relação entre  $e(j\omega)$  e  $n(j\omega)$ , a saber:

$$e(s) = -\frac{1}{1 + g_N(s)k(s)} n(s)$$

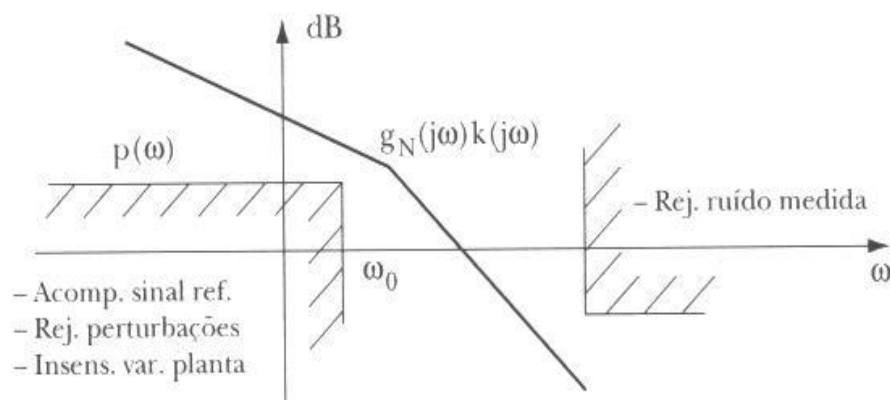
Se  $|g_N(j\omega)k(j\omega)| \ll 1$ , então  $e(j\omega) \simeq -n(j\omega)$ . Ora, como  $e(j\omega) = -n(j\omega) - y(j\omega)$ , resulta que  $y(j\omega) \simeq 0$ .

- Conclusão

Observa-se que os requisitos de acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e insensibilidade a variações na planta (que exigem que  $g_N(j\omega)k(j\omega)$  seja “grande”) são conflitantes com a rejeição do erro de medida (que requer que  $g_N(j\omega)k(j\omega)$  seja “pequena”).

Na maioria dos problemas práticos ocorre, felizmente, que  $\Omega_r$ ,  $\Omega_d$  e  $\Omega_\delta$  representam regiões de baixa frequência, enquanto  $\Omega_n$  corresponde a um conjunto de alta frequência.

Assim, o Diagrama de Bode do ganho da função de transferência de malha deve estar situado entre as barreiras de baixa e alta frequência, conforme representado na *Figura A-5*.

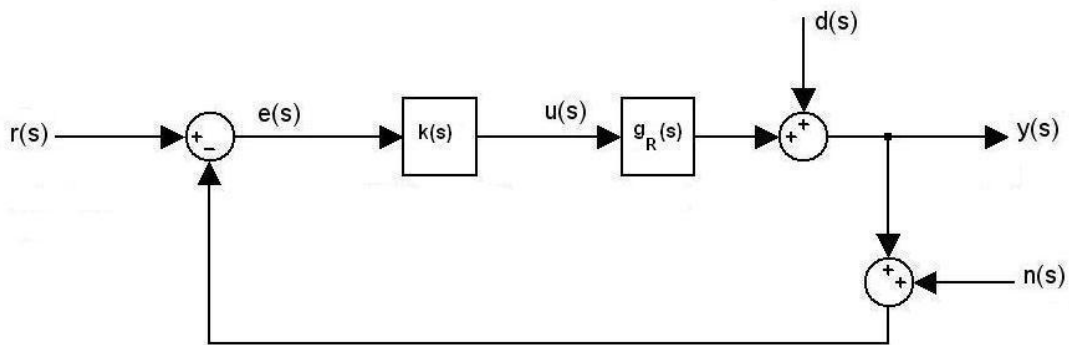


**Figura A 5** – Barreiras de Baixa e Alta Frequência – retirado de [4]



### A.1.4. Sistema Real

A *Figura A-6* representa o sistema de controle real. Deve ser notado que, enquanto a planta real  $g_R(s)$  difere, em princípio, da nominal, o compensador  $k(s)$  é suposto o mesmo nos dois casos.



**Figura A 6 – Diagrama de Blocos do Sistema Real**

#### A.1.4.1. Representação do Erro de Modelagem

Uma forma bastante imediata de se representar o erro de modelagem é através de uma função  $\varepsilon_A(s)$  definida por [24]:

$$\varepsilon_A(s) = g_R(s) - g_N(s) \quad (\text{A } 33)$$

Denominada *erro aditivo*.

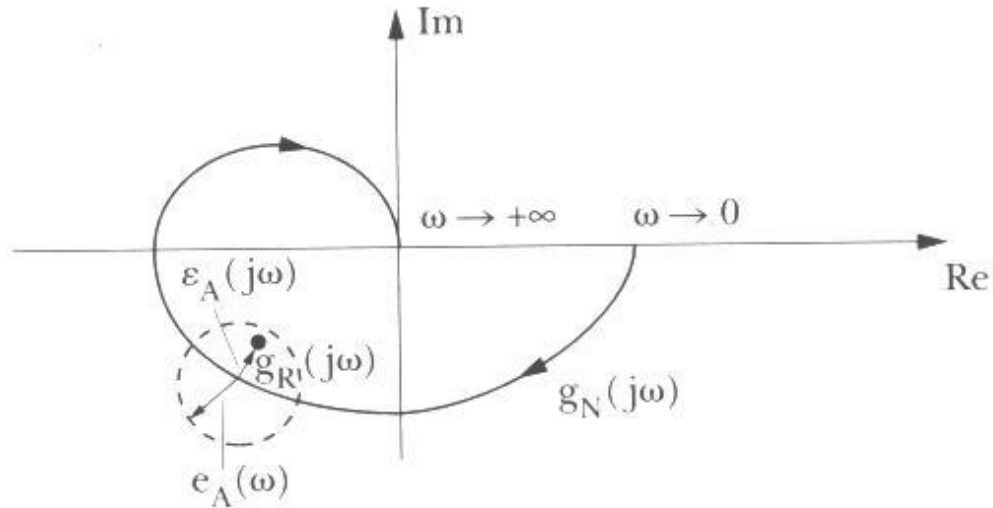
Em geral o projetista não conhece  $\varepsilon_A(s)$  (pois se conhecesse teria  $g_R(s)$ ), mas é capaz de estimar uma função  $e_A(\omega)$  tal que:

$$|\varepsilon_A(j\omega)| \leq e_A(\omega) \quad (\forall \omega \in R) \quad (\text{A } 34)$$

portanto,

$$|g_R(s) - g_N(s)| \leq e_A(j\omega) \quad (\forall \omega \in R) \quad (A 35)$$

o que, no Diagrama de Nyquist, pode ser visto como ilustrado na *Figura A-7*.



**Figura A 7** – Diagrama de Nyquist – retirado de [4]

Note-se que desta maneira, a incerteza a respeito da fase do erro aditivo é total, isto é,

$$-180^\circ \leq \arg[\epsilon_A(j\omega)] \leq 180^\circ \quad (A 36)$$

onde  $\arg(\cdot)$  representa a fase do número complexo ( $\cdot$ ).

O erro aditivo, contudo, apresenta um inconveniente. Para verificar tal fato, considere-se a função de transferência de malha real,  $g_R(s)k(s)$ , e o correspondente erro aditivo

$$g_R(s)k(s) - g_N(s)k(s) = \epsilon(s)k(s) \quad (A 37)$$

Observa-se assim que o erro aditivo na função de transferência de malha depende de  $k(s)$ , o que não é conveniente, pois o objetivo do projetista é justamente obter  $k(s)$ . Seria desejável que o erro dependesse apenas da planta.

Por essa razão, utiliza-se o *erro multiplicativo*  $\varepsilon_M(s)$ , definido por:

$$\varepsilon_M(s) = \frac{g_R(s) - g_N(s)}{g_N(s)} \quad (\text{A } 38)$$

que é uma medida *relativa* do erro.

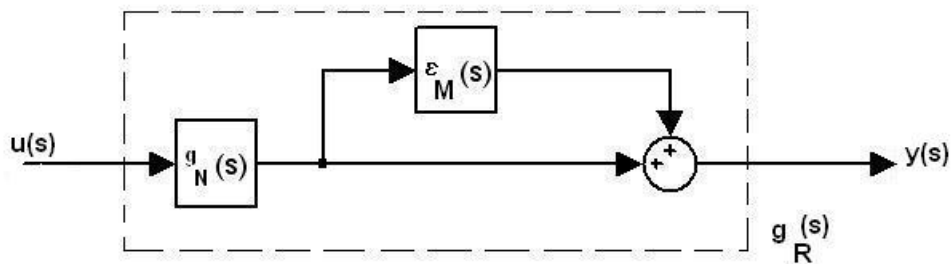
Claramente o erro multiplicativo na função de transferência é o próprio  $\varepsilon_M(s)$ , já que:

$$\varepsilon_M(s) = \frac{g_R(s)k(s) - g_N(s)k(s)}{g_N(s)k(s)} \quad (\text{A } 39)$$

De (A.38) segue-se que:

$$g_R(s) = [1 + \varepsilon_M(s)]g_N(s) \quad (\text{A } 40)$$

o que na forma de diagrama de blocos, pode ser visto como ilustrado na *Figura A-8*.

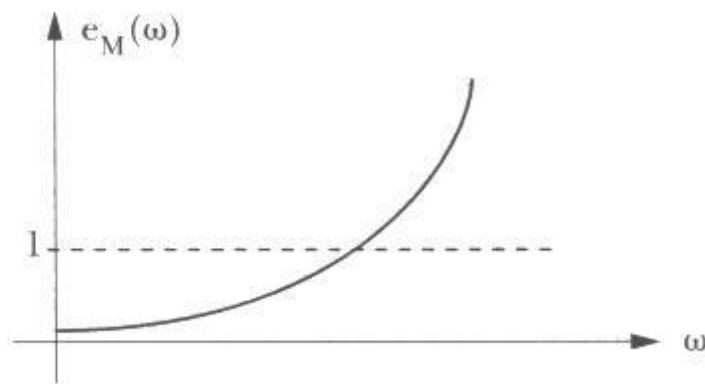


**Figura A 8**– Representação do Sistema Real na Forma de Diagrama de Blocos

Aqui será admitido que o projetista seja capaz de estabelecer um limite superior para  $|\varepsilon_M(j\omega)|$ , isto é, uma função  $e_M(\omega)$  tal que:

$$|\varepsilon_M(j\omega)| \leq e_M(\omega) \quad (\forall \omega \in R) \quad (A\ 41)$$

Tipicamente, o comportamento de  $e_M(\omega)$  é aquele apresentado na *Figura A-9*, o que significa, em geral, que os modelos são fiéis em baixas frequências e grosseiros em alta, isto é o que de fato ocorre em sistemas reais. Os erros de modelagem em altas frequências podem estar associados, por exemplo, a dinâmicas desprezadas de atuadores, sensores ou outros elementos de efeito relevante em altas frequências (indutâncias e capacitâncias parasitas, flexibilidades de eixos ou dentes de engrenagens, redução de ordem de modelos, etc.).



**Figura A 9**– *Comportamento Típico de  $e_M(\omega)$  – retirado de [4]*

Por fim é oportuno lembrar que, como

$$\varepsilon_M(s) = \frac{\varepsilon_A(s)}{g_N(s)} \quad (\text{A } 42)$$

a fase de  $\varepsilon_M(s)$  tem a mesma incerteza de  $\varepsilon_A(s)$ , isto é, é totalmente incerta.

#### A.1.4.2. Estabilidade do Sistema Real

O projetista deve ter como objetivo garantir a estabilidade do sistema real, o que de forma mais direta significa garantir a estabilidade de

$$c_R(s) = \frac{g_R(s)k(s)}{1 + g_R(s)k(s)} \quad (\text{A } 43)$$

para todo  $\varepsilon_M(s)$  tal que

$$|\varepsilon_M(j\omega)| \leq e_M(\omega) \quad (\forall \omega \in R) \quad (\text{A } 44)$$

supõe-se, é claro, que  $c_N(s)$  seja estável.

Neste ponto cabe fazer uma hipótese acerca de  $g_R(s)$ , a saber, a de que o número de pólos instáveis de  $g_R(s)$  é o mesmo de  $g_N(s)$ . É oportuno lembrar que esta hipótese, embora possa parecer, a primeira vista, de difícil garantia é implicitamente admitida sempre que se aplica o Critério de Nyquist a um problema prático de estabilidade. Neste caso, o número de pólos instáveis da planta real, em conjunto com o número de envoltimentos do Diagrama de Nyquist em torno do ponto  $-1+0j$ , é que permite se tirar conclusões a cerca da estabilidade em malha fechada.

O Critério de Nyquist permite afirmar que  $c_R(s)$  *se e somente se* o número de envolvimentos no sentido anti-horário do Diagrama de Nyquist de  $g_R(j\omega)k(j\omega)$  em torno do ponto  $-1+0j$  é igual ao número de pólos instáveis de  $g_R(s)k(s)$  (e, portanto, de  $g_N(s)k(s)$ , em vista da hipótese acima). Como esta condição deve ser satisfeita para toda  $\varepsilon_M(s)$  tal que  $|\varepsilon_M(j\omega)| \leq e_M(\omega)$ , temos que  $c_R(s)$  será estável *se e apenas se* o número de envolvimentos de  $g_R(j\omega)k(j\omega)$  permanecer inalterado para toda  $\varepsilon_M(s)$  nessas condições (já que se está supondo que o sistema nominal é estável). A condição de não cruzamento do ponto  $-1+0j$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$[1 + \theta \varepsilon_M(j\omega)]g_N(j\omega)k(j\omega) \neq -1 + 0j, \quad (\text{A } 45)$$

onde  $\theta \in [0,1]$ . Note que para  $\theta = 0$ , o lado esquerdo de (A.45) se reduz a  $g_N(j\omega)k(j\omega)$ , ao passo que para  $\theta = 1$ , obtém-se  $g_R(j\omega)k(j\omega)$ .

Como  $c_N(s)$  é suposta assintoticamente estável, todos os seus pólos se localizam no SPE aberto e, obviamente, nenhum deles se situa sobre o eixo imaginário. Por isso,  $1 + g_N(j\omega)k(j\omega) \neq 0$  o que permite que se reescreva a expressão anterior na forma:

$$1 + \varepsilon_M(j\omega) \frac{g_N(j\omega)k(j\omega)}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} \neq 0, \quad (\text{A } 46)$$

ou seja,

$$1 + \varepsilon_M(j\omega)c_N(j\omega) \neq 0, \quad (\text{A } 47)$$

e usando (A.44) pode-se mostrar que:

$$|c_N(j\omega)| < \frac{1}{e_M(\omega)}, \quad (\text{A } 48)$$

que será aqui designada de *Condição de Robustez da Estabilidade*.

## Notas

- a) Como  $e_M(\omega)$  em geral apresenta o aspecto apresentado na *Figura A-9*, conclui-se que a estabilidade do sistema real estará garantida se o ganho de malha fechada for suficientemente pequeno nas frequências que  $e_M(\omega)$  for grande. O que mostra que os erros de modelagem impõem uma restrição na *banda passante* do sistema.
- b) Na região em que  $e_M(\omega) \gg 1$ , a Condição de Robustez da Estabilidade pode ser escrita de forma aproximada como se mostra a seguir. De início nota-se que (A.48) pode ser posta na forma equivalente:

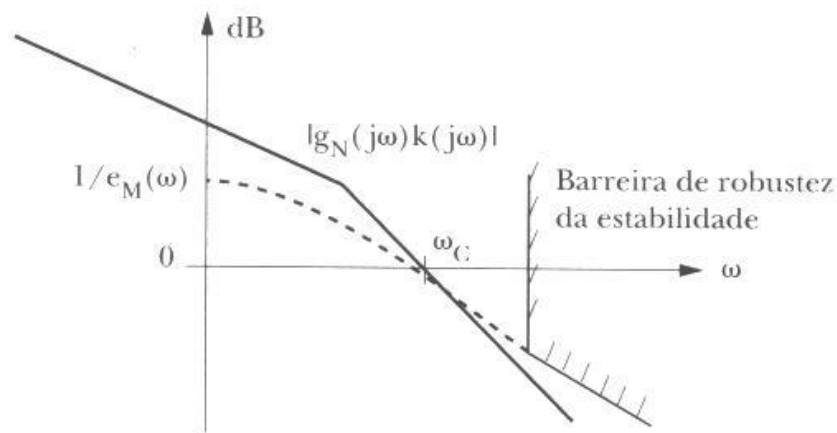
$$e_M(\omega) < \left| 1 + \frac{1}{g_N(j\omega)k(j\omega)} \right|, \quad (\text{A } 49)$$

Assim, como  $e_M(\omega) - 1 \approx e_M(\omega)$ , uma condição suficiente para a estabilidade robusta é dada por:

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| < \frac{1}{\varepsilon_M(\omega)}, \quad (\forall \omega \in R) \quad (\text{A } 50)$$

Esta condição aproximada (pois é válida somente nas frequências em  $e_M(\omega) \gg 1$ ), deve ser utilizada como uma orientação durante o projeto. Ela é bastante interessante por envolver a função de transferência de malha do sistema, que é o elemento básico em torno do qual se desenvolve o procedimento de projeto. No entanto, a Condição de Robustez da Estabilidade (A.48) deve ser sempre testada a posteriori para todas as frequências.

- c) A *Figura A-10* apresenta um caso típico da localização do Diagrama de Bode com relação à barreira de robustez da estabilidade.  $\omega_c$  é normalmente designada como frequência de corte ( ou de cruzamento) do sistema.



**Figura A 10**– *Diagrama de Bode para a Estabilidade Robusta – retirado de [4]*

#### A.1.4.3. Desempenho do Sistema Real

Conforme o que foi exposto para o sistema nominal, a condição para garantir o desempenho do sistema real, no que se refere a acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e insensibilidade a variações na planta, pode ser escrita de forma geral como:

$$|g_R(j\omega)k(j\omega)| \geq p(\omega), \quad (\forall \omega \leq \omega_0) \quad (\text{A } 51)$$

onde  $p(\omega)$  é a envoltória de  $\frac{1}{\alpha_r(\omega)}$ ,  $\frac{1}{\alpha_d(\omega)}$  e  $\frac{1}{\alpha_s(\omega)}$  e

$$\omega_0 = \max\{\omega_r, \omega_d, \omega_s\} \quad (\text{A } 52)$$

tendo em vista (A.40), o sistema real estará de acordo com as especificações se



$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| |1 + \varepsilon_M(j\omega)| \geq p(\omega), \quad (\forall \omega \leq \omega_0) \quad (\text{A } 53)$$

nessa região de frequências pode se supor que  $e_M(\omega) < 1$ , de onde decorre que:

$$|1 + \varepsilon_M(j\omega)| \geq 1 - |\varepsilon_M(j\omega)| \geq 1 - e_M(\omega) > 0, \quad (\forall \omega \leq \omega_0) \quad (\text{A } 54)$$

e, portanto, é suficiente impor que

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)}, \quad (\forall \omega \leq \omega_0) \quad (\text{A } 55)$$

esta desigualdade será aqui designada como *Condição de Robustez do Desempenho*.

Deve ser salientado que a incerteza no modelo da planta se reflete sobre a barreira de robustez do desempenho deformando-a e tornando-a mais restritiva.

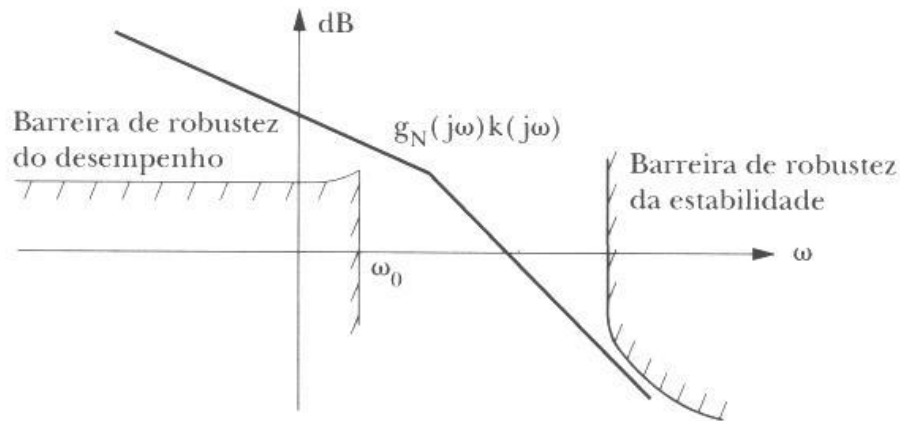
É importante enfatizar que a validade desta condição está subordinada às hipóteses de que

$$|g_N(j\omega)k(j\omega)| \gg 1$$

e

$$e_M(\omega) < 1.$$

A *Figura A-11* ilustra um caso típico da localização do Diagrama de Bode com relação às barreiras da robustez da estabilidade e do desempenho.



**Figura A 11**– *Diagrama de Bode para Estabilidade e Desempenho Robustos – retirado de [4]*

#### A.1.4.4. Compromisso: Desempenho x Estabilidade

Como é sugerido pela *Figura A-11*, os requisitos de robustez da estabilidade e do desempenho são de natureza conflitantes.

Para verificar este fato de maneira mais objetiva, deve-se notar que vale a seguinte identidade:

$$\frac{1}{g_N(j\omega)k(j\omega)} + c_N(j\omega) = 1 \quad (\forall \omega \leq \omega_0) \quad (\text{A } 56)$$

onde

$$c_N(j\omega) = \frac{g_N(j\omega)k(j\omega)}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} \quad (\text{A } 57)$$

De modo a garantir o desempenho do sistema em uma dada faixa de frequências, o ganho da função de transferência de malha  $g_N(j\omega)k(j\omega)$  deve ser “grande”. Ou, de outra forma,

$$\left| \frac{1}{1 + g_N(j\omega)k(j\omega)} \right| \ll 1 \quad (\text{A } 58)$$

Admita-se que nessa região, onde se exige desempenho do sistema de controle o erro de modelagem seja “grande” ( $e_M(\omega) \gg 1$ ). Neste caso a Condição de Robustez da Estabilidade exige que  $c_N(j\omega)$  seja “pequena”, pois

$$|c_N(j\omega)| < \frac{1}{e_M(\omega)} \ll 1, \quad (\text{A } 59)$$

Os requisitos impostos por (A.48) e (A.55) são, evidentemente, conflitantes em vista da identidade (A.56).

Assim, fica evidenciado que é impossível obter bom desempenho do sistema de controle em regiões de frequência em que o erro de modelagem é significativo.

#### *Nota*

Neste ponto é importante notar que nem sempre teremos os parâmetros aqui definidos para o nosso projeto (como é o caso de  $\varepsilon_M(j\omega)$  e  $e_M(\omega)$ ), ou mesmo isso poderia ser uma tarefa que dependesse muito mais verba do o projeto poderia dispor, assim deve-se ter a idéia da forma com que nossa curva da função de transferência de malha deve ter em função de nossas barreira de robustez de desempenho e estabilidade conforme o que é definido neste capítulo. A partir daí pode-se alternativamente trabalhar com outros parâmetros, tal qual, frequência de corte requerida, rejeição a perturbações em caráter estacionário (faz com que a declividade da FT de malha deva ser de -20dB/dec para rejeição de distúrbios em degrau), ganho “grande” em torno de no mínimo 60dB etc.) e assim modelarmos a FT de malha de forma a atender as demandas de projeto quanto a desempenho e estabilidade. Assim, fica evidente que de uma maneira geral podemos não ter os valores exatos de  $\varepsilon_M(j\omega)$  e  $e_M(\omega)$ , contudo temos uma idéia de como eles integram nosso Diagrama de Bode e assim podemos “modelar” o “caminho” por onde a curva de ganho de malha no domínio da frequência passa no Diagrama de Bode de forma a atender os requisitos de desempenho e estabilidade.

## **A.2. Sistemas MIMO**

### **A.2.1. Resposta em Frequência Multivariável**

#### **A.2.1.1. Introdução**

Aqui, assim como nas seções precedentes deste capítulo, apresentam-se somente conceitos básicos de forma a auxiliar no entendimento da metodologia de projeto adotada. Nesta seção, a resposta de sistemas multivariáveis é apresentada de forma a nos contextualizar no comportamento de sistemas MIMO.

A ferramenta utilizada para a abordagem de sistemas MIMO são os valores singulares de matrizes. A sua escolha baseia-se no fato de eles representam uma maneira natural e imediata de estender o conceito de ganho para o contexto multivariável.

Assim, torna-se possível vencer a tarefa de interpretar “direcionalmente” nossas matrizes de ganhos e então construir Diagramas de Bode para sistemas MIMO e interpretar especificações de desempenho e estabilidade no domínio da frequência. Nos dando ainda a noção do significado de matrizes “grandes” e “pequenas”.

#### **A.2.1.2. Conceituação de Resposta em Frequência**

Considere-se o sistema multivariável com matriz de funções de transferência  $G(s) \in C^{m \times m}$ , entrada  $u(s)$  e saída  $y(s)$ .

Em regime estacionário, utilizando-se da propriedade da superposição e de um resultado conhecido para sistemas SISO [1], vale:

$$y_k(j\omega) = \sum_{j=1}^k g_{kj}(j\omega)u_j(j\omega) \quad (1 \leq k \leq m), \quad (\text{A } 60)$$

onde  $G(s) = [g_{ij}(s)]$  e as várias senoides de entrada têm a mesma frequência  $\omega$ , que resulta ser a própria frequência de saída.

A equação (A.60) pode ser escrita na forma matricial como segue.

$$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega) \quad (\text{A } 61)$$

Aqui já se destaca uma diferença fundamental em relação ao caso SISO: aqui, a saída depende não só da magnitude da entrada, mas também da direção do vetor  $u(j\omega)$ . Assim, a saída estacionária corresponde a um sinal senoidal de amplitude unitária e fase nula no primeiro canal de entrada,

$$u(j\omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A } 62)$$

é em geral diferente daquela que corresponde ao mesmo sinal, porém aplicado ao segundo canal de entrada,

$$u(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A } 63)$$

Dessa forma, aparentemente é difícil visualizar graficamente a relação entre entrada e saída para sistemas MIMO (o que, no caso SISO, é imediato através do Diagrama de Bode).

Os valores singulares são ferramentas utilizadas para superar esta dificuldade.

### A.2.1.3. Valores Singulares

Introduzem-se aqui os conceitos de valores singulares particularizando-os, de forma a atender a demanda de elementos necessários aos objetivos buscados neste projeto. Os textos de álgebra linear são referências adequadas para uma exposição de natureza mais geral [25, e 26].

Seja um vetor  $x \in C^m$ , a notação  $x^H$  será utilizada para representar o vetor transposto conjugado de  $x$ . De forma análoga, para uma matriz  $G \in C^{m \times m}$ , denota-se sua transposta conjugada por  $G^H$ .

Assim, a *norma euclidiana* do vetor  $x$  é dada por:

$$\|x\| = \sqrt{x^H x} \quad (\text{A } 64)$$

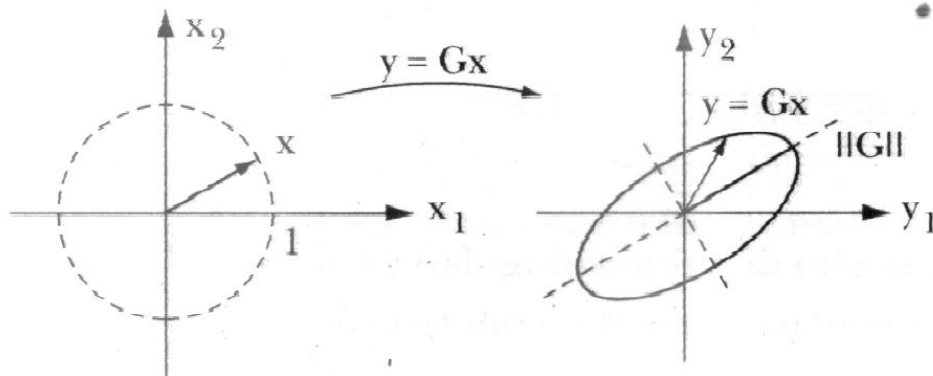
A *norma espectral* da matriz  $G$  é a norma induzida pela norma euclidiana

$$\|G\| = \max_{\|x\|=1} \|Gx\| \quad (\text{A } 65)$$

Esta definição representa uma generalização do conceito de ganho para sistemas multivariáveis. Graficamente, pode-se visualizá-la conforme ilustrado pela *Figura A-12*.

Qualquer funcional  $\|\cdot\|$  com as propriedades enumeradas a seguir é denominado *norma*.

- $\|G\| \geq 0$
- $\|G\| = 0 \Leftrightarrow G = 0$
- $\|\alpha G\| = |\alpha| \|G\| \quad (\forall \alpha \in C)$
- $\|G + H\| \leq \|G\| + \|H\| \quad (\text{Desigualdade Triangular})$



**Figura A 12**– Visualização de  $\|G\|$  – retirado de [4]

Do Quociente de Rayleigh [25], resulta de imediato a seguinte propriedade:

$$\|G\| = \sqrt{\lambda_M(G^H G)} \quad (\text{A } 66)$$

onde  $\lambda_M(\cdot)$  representa o máximo autovalor de  $(\cdot)$ .

Este fato sugere a definição de *valores singulares* que se segue:

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (\text{A } 67)$$

onde  $\lambda_i(\cdot)$  é o  $i$ -ésimo autovalor de  $(\cdot)$ .

Sejam os valores singulares ordenados da seguinte forma

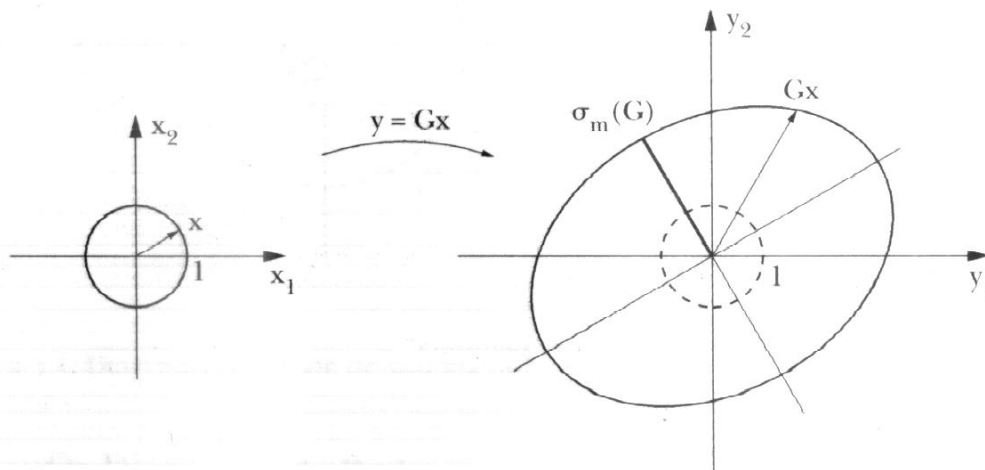
$$\sigma_1(G) \geq \sigma_2(G) \geq \dots \geq \sigma_n(G) \geq 0 \quad (\text{A } 68)$$

O máximo valor singular  $\sigma_1(G)$  é denotado por  $\sigma_M(G)$ .

Os valores singulares gozam das propriedades a seguir:

- $\sigma_M(G) = \|G\|$ ;
- $\sigma_m(G) = \left(\min_{\|x\|=1} \|Gx\|\right)^{1/2}$ ;
- $\|G^{-1}\| = 1/\sigma_m(G)$ ;
- $0 \leq \sigma_m(G) \leq \sigma_M(G)$ ;
- $\sigma_M(G+H) \leq \sigma_M(G) + \sigma_M(H)$ ; (Desigualdade Triangular)
- $\sigma_M(GH) \leq \sigma_M(G)\sigma_M(H)$ ; (Desigualdade de Schwarz)
- $|\sigma_m(G) - 1| \leq \sigma_m(I+G) \leq \sigma_m(G) + 1$ ;
- $|\sigma_M(G) - 1| \leq \sigma_M(I+G) \leq \sigma_M(G) + 1$ .

Aqui se pode ter a primeira noção do que se entende por matrizes “grandes” e “pequenas”. Sempre tendo em mente a matriz como uma transformação que opera sobre um conjunto de vetores complexos, diz-se que uma matriz é “grande” quando ele produz uma amplificação “grande” para todas as direções dos vetores sobre os quais ela opera. A *Figura A-13* ilustra o que se entende por matriz “grande”.



**Figura A 13**– Visualização de uma matriz “grande” – retirado de [4]



Essa idéia pode ser expressa pelo fato de que

$$\|Gx\| \gg 1 \quad (\forall x : \|x\| = 1) \quad (\text{A } 69)$$

Naturalmente daí decorre que

$$\min_{\|x\|=1} \|Gx\| \gg 1 \quad (\text{A } 70)$$

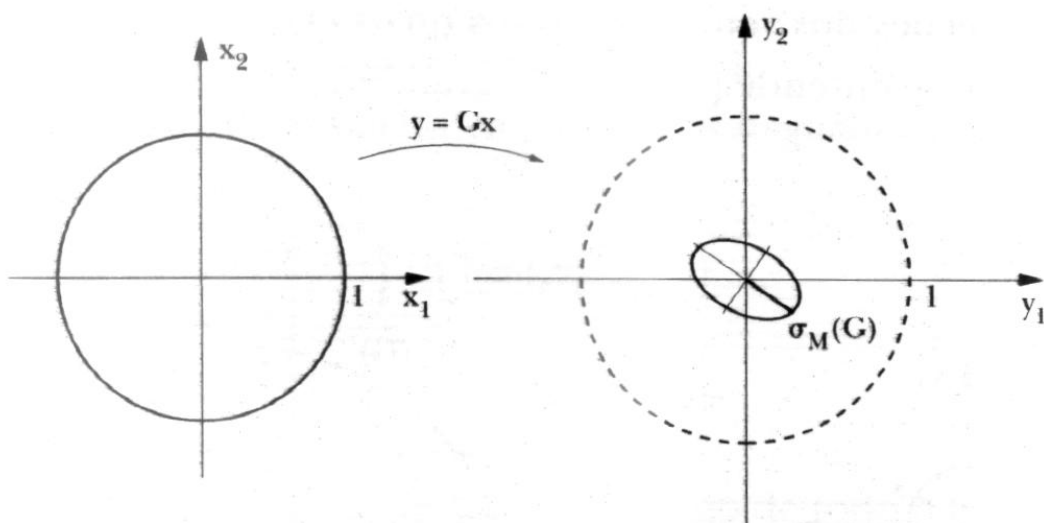
e, por conseqüência,

$$\sigma_m(G) \gg 1.$$

ou seja,

$$G \text{ é "grande" } \Leftrightarrow \sigma_m(G) \gg 1.$$

Analogamente, diz-se que uma matriz é “pequena” quando ela produz uma “grande” atenuação para todas as direções dos vetores sobre os quais ela opera. A *Figura A-14* ilustra este caso.



**Figura A 14**– Visualização de uma matriz “pequena” – retirado de [4]

Está claro que

$$\|Gx\| \ll 1 \quad (\forall x : \|x\| = 1) \quad (\text{A } 71)$$

e, portanto,

$$\max_{\|x\|=1} \|Gx\| \ll 1 \quad (\text{A } 72)$$

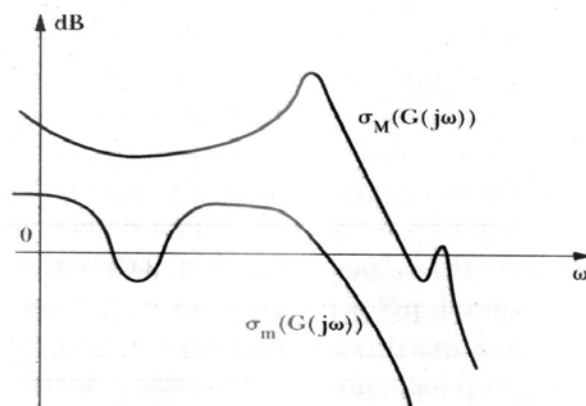
em outras palavras,

$$\sigma_M(G) \ll 1.$$

Assim, diz-se que  $G$  é “pequena” se e apenas se  $\sigma_M(G) \ll 1$ .

#### A.2.1.4. Diagramas de Bode

Como sua definição, os Diagramas de Bode para Sistemas Multivariáveis consistem nos gráficos de  $\sigma_M[G(j\omega)]$  e  $\sigma_m[G(j\omega)]$  em função da frequência angular  $\omega$ . É bastante comum marcar nas ordenadas os valores em  $dB$ , nas abscissas, as frequências em escala logarítmica, conforme ilustra a *Figura A-15*.



**Figura A 15**– *Diagramas de Bode de Sistemas Multivariáveis – retirado de [4]*

Os Diagramas de Bode possuem uma interpretação simples, em vista do exposto anteriormente. Para isso, considera-se uma entrada complexa.

$$u(t) = \bar{u}e^{j\omega t},$$

onde  $\bar{u} \in C^m$  e, sem perda de generalidade,

$$\|\bar{u}\| = 1.$$

Então em regime estacionário, a saída é

$$y(t) = \bar{y}e^{j\omega t},$$

onde

$$\bar{y} = G(j\omega)\bar{u}.$$

Torna-se claro que  $\|\bar{y}\|$  depende da direção de  $\bar{u}$ , além, é claro, da frequência.

Dos Diagramas de Bode, considerando todos os  $\bar{u}$  admissíveis tem-se:

$$\|\bar{y}\|_{\max} = \sigma_M[G(j\omega)] \tag{A 73}$$

$$\|\bar{y}\|_{\min} = \sigma_m[G(j\omega)] \tag{A 74}$$

para cada frequência  $\omega$ .

Diz-se que o ganho é “grande” numa dada frequência  $\omega$  se  $\sigma_m[G(j\omega)] \gg 1$  (ou 0dB) e “pequeno”, se  $\sigma_M[G(j\omega)] \ll 1$  (ou 0dB).

De forma geral, pólos pouco amortecidos correspondem a picos ressonantes na curva do valor singular máximo. Por outro lado, zeros de transmissão pouco amortecidos estão associados a vales no valor singular mínimo.

Vale ainda mencionar que os valores singulares dependem das unidades adotadas para expressar as variáveis de entrada e saída da planta, da mesma forma que o ganho de sistemas SISO. Assim, é oportuno dizer, que para um bom projeto precisamos ou fazer uma adimensionalização adequada das variáveis envolvidas ou uma escolha adequada de suas escalas (M, K etc.).

## B DADOS UTILIZADOS NAS SIMULAÇÕES

Aqui estão resumidos alguns dados referentes à plataforma utilizada nas simulações, a P-57 (todos os dados aqui estão nos arquivos p57\_lf\_data\_in.m e p57\_hf\_data\_in.m).

### B.1. RAOs

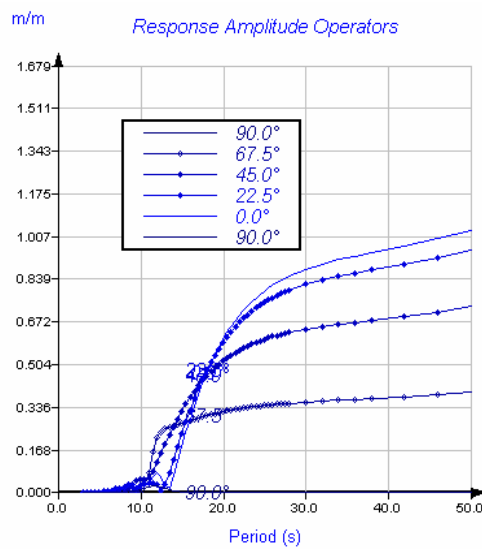


Figura B - 1 – RAOs de Surge

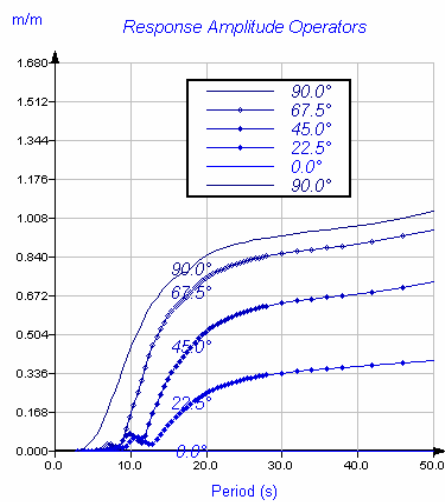
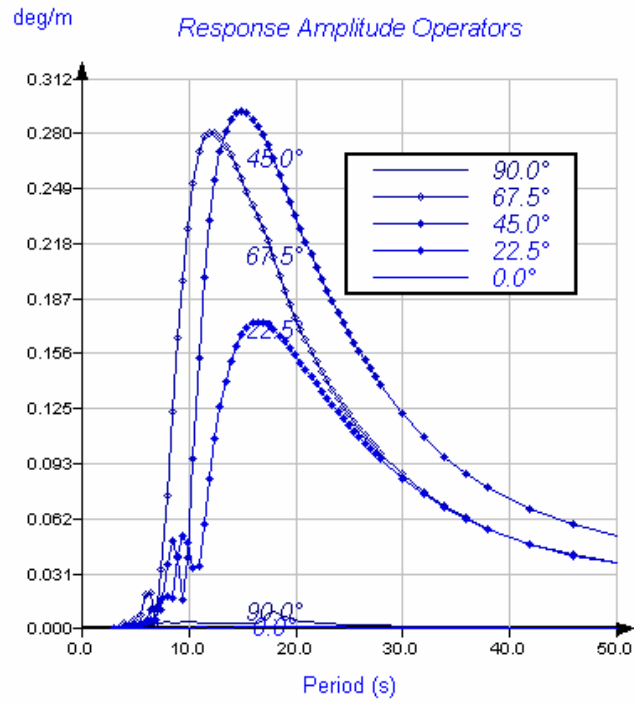
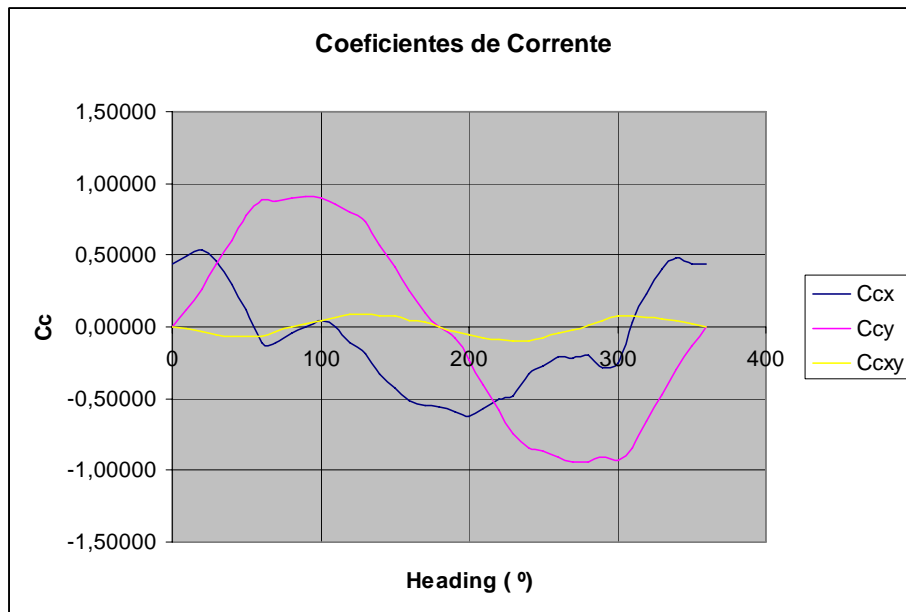


Figura B - 2 – RAOs de Sway



**Figura B - 3 – RAOs de Yaw**

**B.2. Coeficientes de Vento e Corrente**



**Figura B - 4 – Coeficientes de Corrente**

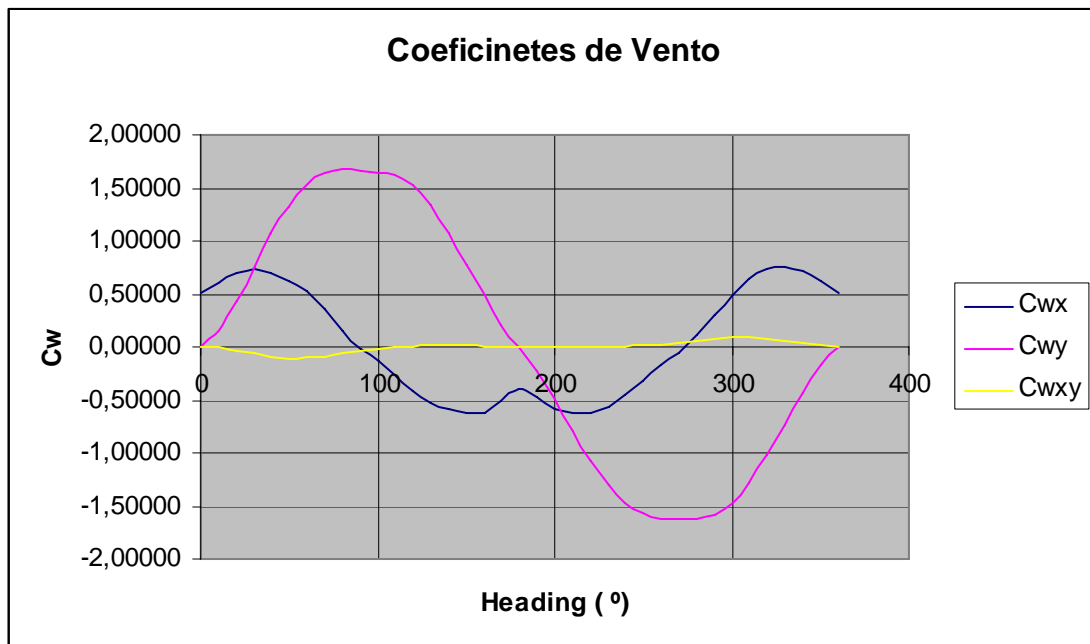


Figura B - 5 – Coeficientes de Vento

### B.3. Ancoragem

Conforme definido na seção 2.5, aqui estão apresentados os elementos responsáveis pela rigidez de ancoragem:

$$C_{xx} = 9,765 e + 1 [KN / m]$$

$$C_{yy} = 1,542 e + 2 [KN / m]$$

$$C_{\psi\psi} = 5,544 e + 6 [KN .m]$$

$$C_{xy} = C_{yx} = -1,44 e - 1 [KN / m]$$

$$C_{x\psi} = C_{\psi x} = -2,003 e + 1 [KN]$$

$$C_{y\psi} = C_{\psi y} = 1,653 e + 3 [KN]$$

#### **B.4. Coeficientes Hidrodinâmicos (Derivadas Hidrodinâmicas)**

Derivadas Hidrodinâmicas de Massas Adicionais:

$$X_{\ddot{u}} = -34687[t]$$

$$Y_{\ddot{v}} = -377764[t]$$

$$N_{\dot{r}} = -1998721790[t.m^2]$$

$$Y_{\dot{r}} = -287852[t.m]$$

$$N_{\dot{v}} = -287852[t.m]$$

Derivadas Hidrodinâmicas de Amortecimento:

$$X_u = -755.5[t/s]$$

$$Y_v = -876.6[t/s]$$

$$N_r = -82365411[t.m^2/s]$$

$$Y_r = 4811[t.m/s]$$

$$N_v = -7128[t.m/s]$$

#### **B.5. Inércia da Plataforma**

$$m = 376673[t]$$

$$I_{zz} = 2317608136[t.m^2]$$



## **B.6. Características Principais da P-57**

$L_{pp} = 322,38\text{m}$

$B = 54,52\text{m}$

$T = 24,10\text{m}$

$H_{ss} = 72,1\text{m}$  (Altura dos Top Sides)

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)