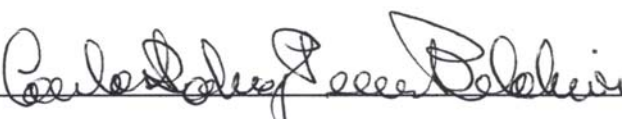



APLICAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DIRETA EM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR EM ROTODINÂMICA

João Luiz Pessoa de Oliveira


DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
OCEÂNICA.

Aprovada por:

  
Prof. Carlos Rodrigues Pereira Belchior, D.Sc.

  
Prof. Severino Fonseca da Silva Neto, D.Sc.

  
Prof. Luiz Antonio Vaz Pinto, D.Sc.

  
Prof<sup>a</sup>. Eliane Maria Lopes Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

OLIVEIRA, JOÃO LUIZ PESSOA DE

Aplicação da Integração Direta em  
Modelo de Elementos Finitos para Análise  
Não-linear em Rotodinâmica [Rio de  
Janeiro] 2007

VIII, 112 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
M.Sc., Engenharia Oceânica, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise Não-Linear

2. Elementos Finitos

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

*À minha avó materna Alda e ao meu avô paterno  
João Lindolfo, falecidos durante o período de  
execução deste trabalho.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

Aos meus pais João Gilberto e Edina pelo amor e dedicação, pelos sacrifícios e educação que me permite escrever este trabalho.

À minha esposa Ana Luísa, pelo amor, carinho, paciência, incentivo e apoio ao longo deste trabalho, e a minha filha Luiza, sem a qual, com certeza, este trabalho chegaria ao fim mais rapidamente, porém eu me sentiria muito menos realizado.

Aos meus irmãos, Raphael e João Gilberto pela amizade, carinho e apoio.

Ao professor Severino Neto por sua valiosa orientação, amizade, incentivo e apoio.

Aos meus sogros Sandra e Largura, pela ajuda e apoio.

Ao professor Luiz Vaz pela amizade e apoio recebido.

À Engenharia Básica do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento Leopoldo Américo Miguez de Mello (CENPES) da PETROBRAS por investir na minha capacitação.

A todos que de uma forma ou outra, auxiliaram na execução deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

APLICAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DIRETA EM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR EM ROTODINÂMICA

João Luiz Pessoa de Oliveira

Maio/2007

Orientadores: Carlos Rodrigues Pereira Belchior

Severino Fonseca da Silva Neto

Programa: Engenharia Oceânica

Este trabalho desenvolve e implementa métodos computacionais para a análise transiente não-linear de estruturas reticuladas espaciais, incluindo a formulação de elementos finitos de pórtico tridimensional com não-linearidade geométrica e técnicas para a solução do problema dinâmico não-linear. Com isso, pretende-se obter uma ferramenta numérica precisa e computacionalmente eficiente, para a investigação do comportamento de pórticos tridimensionais em geral, com uma atenção especial a sistemas rotodinâmicos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

APPLICATION OF THE DIRECT INTEGRATION IN MODEL OF FINITE ELEMENTS  
FOR NON-LINEAR ANALYSIS IN ROTORDYNAMICS

João Luiz Pessoa de Oliveira

May/2007

Advisors: Carlos Rodrigues Pereira Belchior  
Severino Fonseca da Silva Neto

Department: Ocean Engineering

This work develops and implements computational methods for non-linear and transient analyses for 3D framed structures, including the Finite Elements formulation for 3D frames containing geometric nonlinearities followed by strategies for the solution of the non-linear dynamic problem. Through this, the aim is to achieve a precise numerical tool, efficient from the computational point of view, for the 3D frames behavior investigation with special attention for rotordynamics systems.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVO	1
1.2	ESCOPO DO TRABALHO	6
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>8</b>
2.1	DESCRIÇÃO E HISTÓRICO	8
2.2	TEORIA DE VIBRAÇÃO DE EIXOS	10
2.3	CONSIDERAÇÕES E SUGESTÕES NAS ETAPAS DE MODELAGEM	15
<b>3</b>	<b>MODELO NUMÉRICO (PÓRTICO 3D)</b>	<b>18</b>
3.1	PROPRIEDADES DO MATERIAL	18
3.2	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	18
<b>4</b>	<b>ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA</b>	<b>20</b>
4.1	DESCRIÇÃO DA ANÁLISE	20
4.2	ETAPAS DA ANÁLISE ESTÁTICA	21
4.3	MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL	22
4.4	MATRIZ DE RIGIDEZ INCLUINDO A DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO	24
4.5	MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO (T)	27
4.6	MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL (K) E VETOR SOLICITAÇÃO	31
4.7	MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU	32
4.8	VALIDAÇÃO DA ANÁLISE	34
4.8.1	Condição de Carregamento 1	34
4.8.2	Condição de Carregamento 2	37
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE</b>	<b>39</b>
5.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR	39
5.2	ETAPAS DA ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE	41
5.3	MATRIZ DE MASSA LOCAL	42
5.4	MÉTODO DE ITERAÇÃO INVERSA	44
5.5	VALIDAÇÃO DA ANÁLISE	46
5.5.1	Modelo Numérico com Elementos Hexaédricos	46



5.5.2	Análise dos Resultados	52
<b>6</b>	<b>ANÁLISE TRANSIENTE</b>	<b>54</b>
6.1	DESCRIÇÃO DA ANÁLISE DINÂMICA	54
6.2	ETAPAS DA ANÁLISE TRANSIENTE	56
6.3	MATRIZ DE AMORTECIMENTO	57
6.4	MÉTODO DE NEWMARK	60
6.5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	63
<b>7</b>	<b>ANÁLISE TRANSIENTE NÃO-LINEAR</b>	<b>67</b>
7.1	DESCRIÇÃO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR	67
7.2	ETAPAS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR	69
7.3	MATRIZES DE RIGIDEZ NÃO-LINEAR	70
7.4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	73
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>ANEXO</b>	<b>83</b>
A.1	ANÁLISE ESTÁTICA	83
A.1.1	Planilha de Entrada	83
A.1.2	Solver Mathcad	84
A.2	ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE	89
A.2.1	Planilha de Entrada	89
A.2.2	Solver Mathcad	90
A.3	ANÁLISE TRANSIENTE	97
A.3.1	Planilha de Entrada	97
A.3.2	Solver Mathcad	98
A.4	ANÁLISE TRANSIENTE NÃO-LINEAR	104
A.4.1	Planilha de Entrada	104
A.4.2	Solver Mathcad	105

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVO

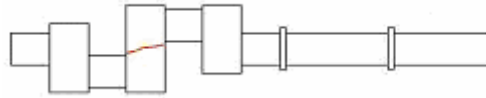
A utilização de ferramentas matemáticas, baseadas em métodos numéricos, tem sido cada vez mais freqüente na predição do comportamento dinâmico de máquinas em instalações industriais, navais e offshore (MACHADO, 2004). Os resultados de aplicações dessas técnicas são validados a partir da comparação com dados experimentais (LOPES, 1986) e permitem a simulação de propostas de solução para minimização dos efeitos da vibração causada pela máquina em seus componentes e na estrutura adjacente. Com isso, busca-se evitar o colapso e peças e estruturas, bem como desconforto nas regiões próximas às máquinas (LEGUE, 1990).

O melhor conhecimento das causas da vibração de máquinas (LOPES, 1985) e estruturas (SILVA NETO, 1996), e o acesso a valores reais de seus parâmetros (DOMENICO, 1997), obtidos experimentalmente, permitem a melhoria da qualidade do projeto e dos processos de construção (MELLO, 2006), simulando adequadamente o comportamento real através de ajuste dos modelos aos dados experimentais, verificando e propondo medidas de minimização de vibração e, conseqüentemente, evitando danos ao sistema, ao meio ambiente e à vida humana.

No caso de máquinas de grande porte, submetidas a grandes esforços dinâmicos, as magnitudes de suas forças e de seus momentos variam com a posição do eixo de manivelas. Em eixos girantes de geometria complexa (virabrequim), o efeito de acoplamento entre torção, flexão e esforços axiais pode ser considerado. Em geral, modos torcionais de vibração são acoplados com modos de flexão (fora do plano) e modos axiais são acoplados com modos de flexão (mesmo plano).

A motivação do presente estudo teve origem numa recente falha (quebra) em eixos de compressores alternativos, dentro de uma Planta Industrial, que levou à investigação

da(s) sua(s) possível(is) causas. As figuras seguintes ilustram a falha. A fratura ocorre na região entre os dois conjuntos pistão-biela (Figura 1.1). A Figura 1.2 mostra a seção de fratura (idêntica para as duas máquinas), com suas marcas de praia bem caracterizadas (fadiga de alto ciclo).



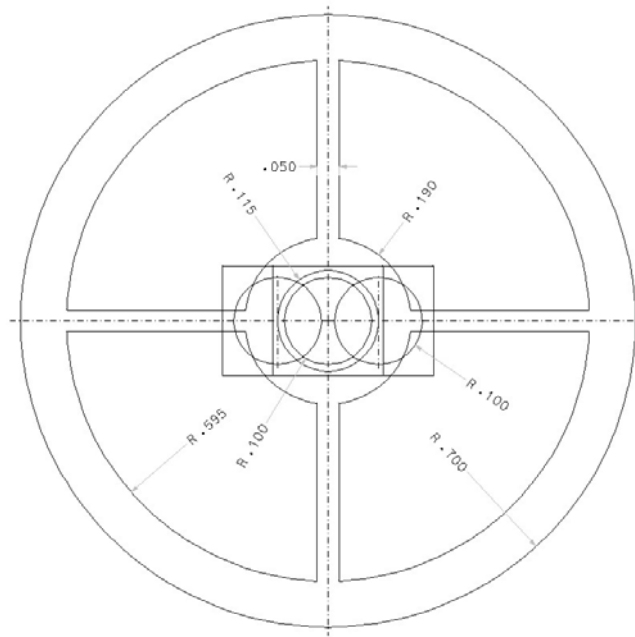
**Figura 1.1** Esboço do Virabrequim



**Figura 1.2** Detalhe da Seção da Fratura

O compressor em questão é uma máquina de 1472 kW, e rotação de 514 rpm, com torque máximo de projeto 91000 N.m e inércia do virabrequim de 5.60 Kg.m<sup>2</sup>. As figuras abaixo mostram as dimensões, em metros, de todas as partes da estrutura do virabrequim utilizadas para compor os modelos numéricos para as análises.





**Figura 1.5** Vista Frontal.

A característica preponderante da falha foi fratura por flexão do braço lateral do virabrequim.

Malhas muito refinadas da geometria analisada levam a matrizes de grandes dimensões. Portanto, para a solução das equações, são necessárias hipóteses simplificadoras, como a superposição modal (BATHE, 1996a), que considera a resposta dinâmica como uma combinação linear dos modos de vibração correspondentes às frequências naturais mais baixas. Desta forma, efeitos de acoplamento não-lineares não são considerados.

Buscando uma forma precisa e eficiente para simulação de seu comportamento dinâmico, optou-se pela construção, em ambiente matemático, de uma seqüência de operações numéricas baseadas na integração direta das equações da formulação não-linear, em modelos formados por elementos reticulados com esforços axiais, flexão e torção (elementos de viga ou pórtico espacial).

O objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar métodos computacionais para a

análise transiente não-linear de estruturas reticuladas espaciais, incluindo a formulação de elementos finitos de pórtico tridimensional com não-linearidade geométrica e técnicas para a solução do problema dinâmico não-linear, criando uma ferramenta numérica precisa e computacionalmente eficiente, para a investigação do comportamento de pórticos tridimensionais para o caso do sistema rotodinâmico mencionado acima.

## 1.2 ESCOPO DO TRABALHO

O presente trabalho de tese está dividido em nove capítulos, incluindo o presente capítulo, disposto de forma lógica com objetivo de expor melhor o tema proposto.

**Capítulo II** apresenta a descrição e um breve histórico do método dos elementos finitos; expõe a teoria de vibrações de eixos baseado na formulação lagrangeana via método de elementos finitos; e apresenta as três etapas de modelagem com suas respectivas considerações e sugestões.

**Capítulo III** apresenta as características do modelo numérico do virabrequim, que consiste em propriedades do material (módulo de elasticidade, coeficiente Poisson, etc.) e propriedades geométricas referente aos nós, elementos, propriedades, etc.

**Capítulo IV** descreve de forma sucinta a análise linear, apresenta todas as suas etapas, que consiste na formação da matriz de rigidez local incluindo efeito de cisalhamento, da matriz de transformação de rotação, da matriz de rigidez global, do vetor de forças nodais externas e o método de decomposição L.U.

**Capítulo V** descreve de forma sucinta a análise de vibração livre, apresenta todas as etapas consideradas na análise, a formação da matriz de massa local e o método de iteração inversa responsável pela determinação das frequências naturais com os respectivos modos de vibração.

**Capítulo VI** descreve de forma sucinta a análise dinâmica, apresenta todas as etapas adotadas na análise, a formação da matriz de amortecimento, o método de Newmark responsável pela integração direta da equação de equilíbrio dinâmico e os resultados obtidos.

**Capítulo VII** descreve sucintamente a análise não-linear, apresenta todas as etapas

consideradas na análise, a formação da matriz de rigidez geométrica (não-linear) e os resultados obtidos.

**Capítulo VIII** apresenta as conclusões gerais sobre os resultados alcançados e comenta os aspectos mais relevantes do tema abordado neste trabalho, sugerindo outras abordagens para prosseguimento dessa linha de pesquisa.



## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 DESCRIÇÃO E HISTÓRICO

Métodos analíticos clássicos permitem o cálculo da resposta exata dos deslocamentos, deformações e tensões na estrutura em todos os seus pontos, porém estas soluções são somente conhecidas para alguns casos, que fogem da maioria das aplicações práticas que encontramos no dia-a-dia. Para estruturas muito complexas e de forma arbitrária, a solução analítica freqüentemente torna-se impossível, e o problema requer grandes e excessivas simplificações, se quisermos aplicar tais expressões analíticas fechadas, resultando em cálculos pouco acurados. Portanto seria interessante desenvolver procedimentos aproximados, que pudessem ser aplicados em caráter geral, independente da forma da estrutura e da condição de carregamento, dentro da precisão aceitável do problema. Este caminho alternativo aos procedimentos analíticos clássicos, denominado Método dos Elementos Finitos, constitui o foco principal do nosso estudo.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) teve suas origens nos anos 40, tendo sido vastamente utilizado apenas nos últimos 20-30 anos, graças aos avanços tecnológicos ocorridos nos equipamentos computacionais. Um grande impulso para o seu desenvolvimento e aperfeiçoamento foi dado pela indústria aeroespacial que vem tendo larga aplicação desde os anos 50, sendo utilizado, entre outros, para o projeto e análise de estruturas complexas de aeronaves, as quais certamente não poderiam ser analisadas e projetadas de forma segura usando-se apenas técnicas tradicionais analíticas.

O MEF é uma análise matemática que discretiza um meio contínuo em pequenos elementos finitos, mantendo as mesmas propriedades do meio original. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados. Este método consiste

basicamente numa adaptação/modificação de métodos de aproximação conhecidos já no início deste século, como exemplo o Método de Ritz, estabelecido em 1909. Atualmente considerado um método matemático para a solução de equações diferenciais parciais, entre as quais se inclui a Equação de Poisson, Equação de Laplace, Equação de Helmholtz, Navier- Stokes, etc. Devido às suas características de flexibilidade e estabilidade numérica, ele pode ser implementado na forma de um sistema computacional (programa de computador) de forma consistente e sistemática, fato que explica a sua grande popularidade nos dias atuais. Entre as muitas áreas em que o MEF pode ser aplicado cita-se: projeto e análise de estruturas, análise de escoamento de fluidos, distribuição de temperaturas, eletromagnetismo, projeto de equipamentos eletromecânicos (máquinas, transformadores, contadores, etc...). Em muitos casos práticos, o Método dos Elementos Finitos é a única ferramenta capaz de fornecer uma solução aceitável, ainda que sob o ponto de vista matemático a solução seja considerada como uma aproximação.

Finalmente, devido à utilidade e interesse para diversas áreas técnicas, o MEF foi objeto de um número incalculável de artigos e livros publicados nos últimos 20 anos, sendo também incluído como disciplina obrigatória nos currículos da grande maioria das universidades européias e americanas, fato que também já ocorre em muitas universidades brasileiras. À medida que técnicas computacionais e numéricas desempenham um papel cada vez mais relevante na vida do engenheiro, torna-se fundamental o conhecimento dos fundamentos do MEF e da sua aplicação prática, especialmente para aqueles que trabalham em áreas de projeto e análise.

## 2.2 TEORIA DE VIBRAÇÃO DE EIXOS

Em eixos girantes de geometria complexa, o efeito de acoplamento entre torção, flexão e esforços axiais pode ser considerado. Em geral, modos torcionais de vibração são acoplados com modos de flexão e modos axiais são acoplados com modos de flexão.

Pelo princípio da conservação da energia (Princípio de Hamilton), as energias cinética  $T$  e potencial  $V$  de um sistema contínuo e o trabalho  $W$  das forças que agem sobre ele são relacionadas como mostrado na Equação (2.1):

$$\delta \int_{\Delta t} (\dot{T} - \dot{V}) + \int_{\Delta t} \delta W = 0 \quad (2.1)$$

que desenvolvidas para um modelo composto por elementos finitos, no qual as variáveis contínuas de deslocamento  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  e de rotação  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  no sistema Cartesiano de coordenadas  $(x,y,z)$  são substituídas por variáveis de interpolação nodais  $U_i$ , levam à Equação de Lagrange [Equação (2.2)]

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial V}{\partial \dot{U}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial U_i} + \frac{\partial V}{\partial U_i} = F_i \quad (2.2)$$

onde  $F_i$  são forças generalizadas.

Somando a energia cinética de translação, dada por [Equação (2.3)]:

$$K_t = \int_V \frac{1}{2} [(\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_y)^2 + (\dot{u}_z)^2] \rho dv = \int_0^L \frac{\rho A}{2} [(\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_y)^2 + (\dot{u}_z)^2] dx \quad (2.3)$$

com a energia cinética devida à velocidade angular, assumindo pequenos ângulos e integrando ao longo do comprimento  $L$ , obtém-se:

$$K_t = \int_0^L \frac{\rho A}{2} [(\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_y)^2 + (\dot{u}_z)^2] dx + \int_0^L \left( \frac{J_t}{2} [(\dot{\theta}_x)^2 + 2\dot{\theta}_y \dot{\theta}_x \dot{\theta}_z] + \frac{J_{bn}}{2} [(\dot{\theta}_y)^2 + (\dot{\theta}_z)^2] \right) dx \quad (2.4)$$

onde pontos superpostos às variáveis representam derivadas em relação ao tempo e  $J_t$  e  $J_{bn}$  representam termos das direções principais do tensor de inércia  $[J]$  por unidade de comprimento.

A energia potencial elástica, ou energia de deformação, é definida em função dos vetores de tensões  $\sigma$  e de deformações  $\varepsilon$ , que é obtida por unidade de volume como:

$$V_i = \int (\sigma \cdot d\varepsilon) = \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot C \cdot \varepsilon) \quad (2.5)$$

onde  $C$  é a matriz elástica que relaciona tensão com deformação na versão generalizada da lei de Hooke ( $\sigma = C \cdot \varepsilon$ ), dada por:

$$C = \begin{bmatrix} (1-\nu)\lambda.E & \nu\lambda.E & \nu\lambda.E & 0 & 0 & 0 \\ \nu\lambda.E & (1-\nu)\lambda.E & \nu\lambda.E & 0 & 0 & 0 \\ \nu\lambda.E & \nu\lambda.E & (1-\nu)\lambda.E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.G \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\text{e } \lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Considerando somente as tensões que contribuem para a energia de deformação da viga, a Equação (2.5) reduz-se a:

$$V_i = \frac{E}{2} \cdot \varepsilon_1^2 + \frac{G}{2} \cdot (\varepsilon_4^2 + \varepsilon_6^2) \quad (2.7)$$

onde

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

Para o elemento de módulo de elasticidade  $E$ , área  $A$ , módulo de elasticidade transversal  $G$ , momentos de inércia  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ , a energia total é obtida pela integração sobre seu volume, dada por (DYKSTRA, 1996):

$$\begin{aligned} V = & \frac{E.A}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{G.I_x}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E.I_z}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E.I_y}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E.A}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^3 dx \\ & + \frac{E.A}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} (\theta_y)^2 dx + \frac{E.A}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} (\theta_z)^2 dx + \frac{3.E.I_z}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{3.E.I_y}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx \\ & + \frac{3.E.I_x}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{(E-G).I_x}{2} \int_0^L \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cdot \theta_y \cdot \frac{\partial \theta_z}{\partial x} dx - \frac{(E-G).I_x}{2} \int_0^L \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cdot \theta_z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

cujos, os quatro primeiros termos representam, respectivamente, contribuições lineares devidas à carga axial, a torção e flexão:

$$\frac{E.A}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{G.I_x}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E.I_z}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E.I_y}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.9)$$

Os acoplamentos podem ser observados pelas contribuições não-lineares:

$$\frac{E.A}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^3 dx \quad (2.10)$$

as devidas ao acoplamento axial/flexão

$$\frac{E.A}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} (\theta_y)^2 dx + \frac{E.A}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} (\theta_z)^2 dx \quad (2.11)$$

flexão/axial

$$\frac{3.E.I_z}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{3.E.I_y}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.12)$$

axial/torção

$$\frac{3.E.I_x}{2} \int_0^L \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.13)$$

e torção/flexão

$$\frac{(E-G).I_x}{2} \int_0^L \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cdot \theta_y \cdot \frac{\partial \theta_z}{\partial x} dx - \frac{(E-G).I_x}{2} \int_0^L \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cdot \theta_z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} dx \quad (2.14)$$

O sistema discreto de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico:

$$[M].\{\ddot{U}(t)\} + [C].\{\dot{U}(t)\} + [K].\{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.15)$$

é obtido pela substituição de funções aproximadas nessas expressões de energia e nas de trabalho, avaliando as integrais. A determinação precisa dos parâmetros lineares e não-lineares que representam as matrizes de rigidez [K] a partir da energia potencial elástica e de massa [M] a partir da energia cinética do sistema, modelado através do método dos elementos finitos, bem como o vetor das forças externas {F} e da matriz de amortecimento [C], permitem a solução numérica do sistema de equações diferenciais, onde os vetores  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  e  $\{U\}$  correspondem, respectivamente, às acelerações, velocidades e deslocamentos dos graus de liberdade do sistema.

Tanto para a solução do problema de autovalor, quanto para o cálculo do problema completo de vibração forçada, no domínio do tempo ou da frequência, é fundamental a representação correta de rigidez, massa estrutural, massa do fluido adjacente e, principalmente, amortecimento e força, geralmente obtidos de através de medições em escala real.

Outra característica de eixos girantes de geometria complexa está ligada ao acoplamento das deformações em planos ortogonais, produzida por alguma assimetria do momento de inércia dos planos XZ e XY. Esta assimetria produz “cross coupling” no movimento do eixo (quando deformado no plano XZ surge um momento que tende a girá-lo em direção ao plano XY - de menor rigidez). Este momento é de natureza senoidal, o que introduz uma não linearidade na equação de movimento do eixo, a qual pode ser traduzida de forma simplificada através da equação de “Mathieu” (MEIROVITCH, 1975). Este fenômeno é denominado como vibração paramétrica e pode vir a ser responsável pela geração de um quadro clássico de instabilidade rotodinâmica conhecido como instabilidade paramétrica e que gera sub-harmônicos (normalmente na frequência igual à metade da rotação) no movimento do eixo.

### 2.3 CONSIDERAÇÕES E SUGESTÕES NAS ETAPAS DE MODELAGEM

Análise estrutural engloba as etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento. A primeira etapa inclui as modelagens matemática e discreta do problema, e SORIANO (2003a) sugere iniciar a discretização com malhas simples e:

- I) Utilizar elementos com menores dimensões e/ou de maior ordem de interpolação em regiões de gradientes de tensões mais elevados.
- II) Acompanhar adequadamente os contornos geométricos, colocando pontos nodais onde ocorrem apoios elásticos, deslocamentos e forças externas concentradas.
- III) Dar preferência a formas não distorcidas de elemento, principalmente em regiões de relevantes gradientes de tensão, evitando espaçamento desigual de ponto nodal em lado ou face de elemento, ângulos internos de vértices menores do que  $45^\circ$  e maiores do que  $135^\circ$ , assim como o lado de elemento maior do que três vezes os demais lados.
- IV) Evitar a ligação de elementos de rigidez desproporcionalmente distinta, sendo preferível impor relações de restrição entre deslocamentos nodais (uso de nó máster e slaves) do que incluir partes rígidas dentro do modelo discreto utilizando elementos de grande rigidez.
- V) Evitar a utilização de eixos de simetria para geração de modelos discretos com menor número de elementos, em problemas dinâmicos e estáticos não-lineares,

Na etapa de processamento, SORIANO (2003b) afirma que em análises dinâmicas e / ou não-lineares, é necessário o conhecimento das limitações da teoria e das limitações



da implementação. Atualmente, em sistema de características gerais são apresentadas diversas opções de análises, dentre elas:

- VI) Inclusão ou não de modos incompatíveis.
- VII) Análise estática ou dinâmica, linear ou não-linear.
- VIII) Método de integração e intervalo de discretização da variável tempo.
- IX) Número de modos de vibração.
- X) Alteração da precisão em métodos iterativos.
- XI) Utilização de procedimentos incrementais e / ou iterativos, etc.

Na etapa de pós-processamento, a interpretação de resultados oferece ao analista maior confiabilidade ou identifica modelagens inadequadas, erros ou omissões de fornecimento de dados, opções inadequadas de análise ou erros do sistema computacional. Modelagens podem ser avaliadas comparando-as com resultados de modelos físicos e com resultados de análise de problemas semelhantes, ou analisadas sob os aspectos de:

- XII) Convergência de resultados por refinamento de malha.
- XIII) Níveis de descontinuidade de tensões entre elementos adjacentes.
- XIV) Em análise estática, verificar o equilíbrio global ou das partes do modelo.
- XV) Em análise dinâmica com integração numérica na variável tempo, através de utilização de sucessivas reduções de intervalos de tempo.

- XVI) Em análise dinâmica, pelo método de superposição modal, através da utilização de sucessivos números de modos de vibração.
- XVII) Comparação de resultados obtidos com elementos e / ou métodos distintos.
- XVIII) Identificação de instabilidade numérica através da avaliação de resultados exageradamente grandes, sem coerência física.
- XIX) Exame de deformadas, modos de vibração, etc, por meio de códigos de cores.

Além de exigir experiência, a interpretação dos resultados necessita de bastante cuidado por parte do analista, pois certas análises podem conter erros em resultados aparentemente corretos. Como exemplo, matriz de rigidez computada incorretamente pode permitir soluções equilibradas e em ordens de grandeza aparentemente adequadas, que não evidenciem incorreções. Neste caso, a comparação com soluções de problemas semelhantes e / ou utilização de métodos e / ou elementos distintos do sistema pode levar à identificação do erro.

### 3 MODELO NUMÉRICO (PÓRTICO 3D)

#### 3.1 PROPRIEDADES DO MATERIAL

O material considerado para todos os modelos presentes neste estudo apresenta as seguintes propriedades:

$E = 2.00E+11 \text{ N/m}^2$	Módulo de Elasticidade
$\nu = 0.3$	Coefficiente de Poisson
$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$	Massa Específica

#### 3.2 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

O modelo do virabrequim consiste de 56 nós e 55 elementos numerados a partir suas posições em relação sistema de coordenadas, respeitando a direção positiva dos eixos x, y e z, representados na figura abaixo.

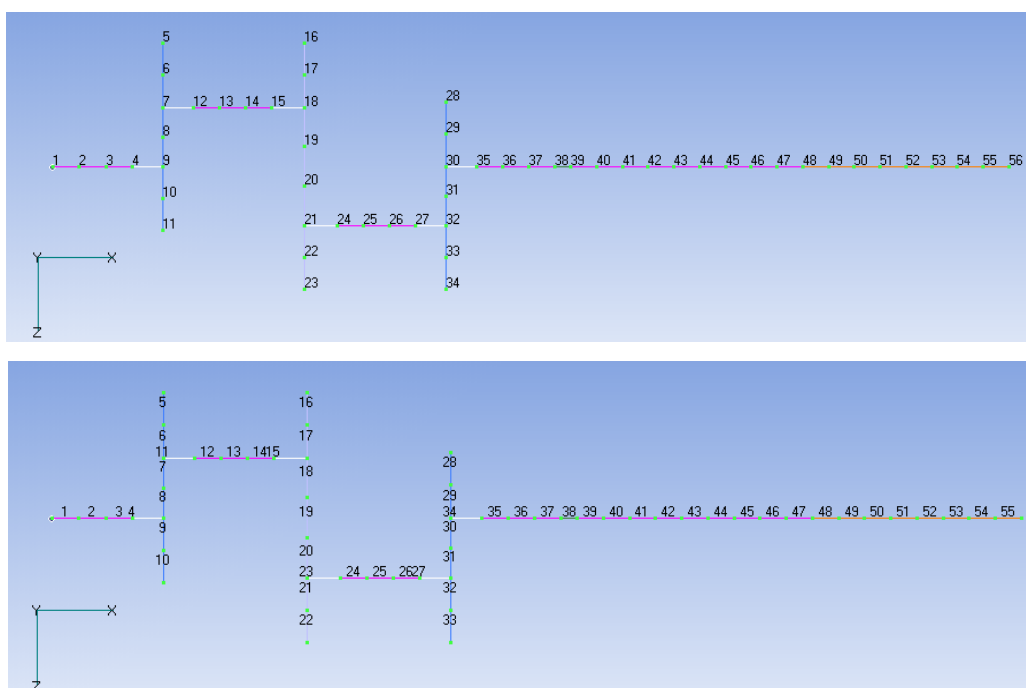
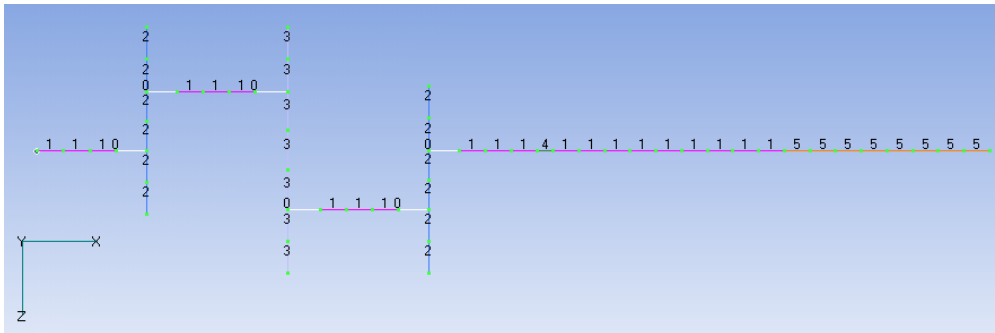


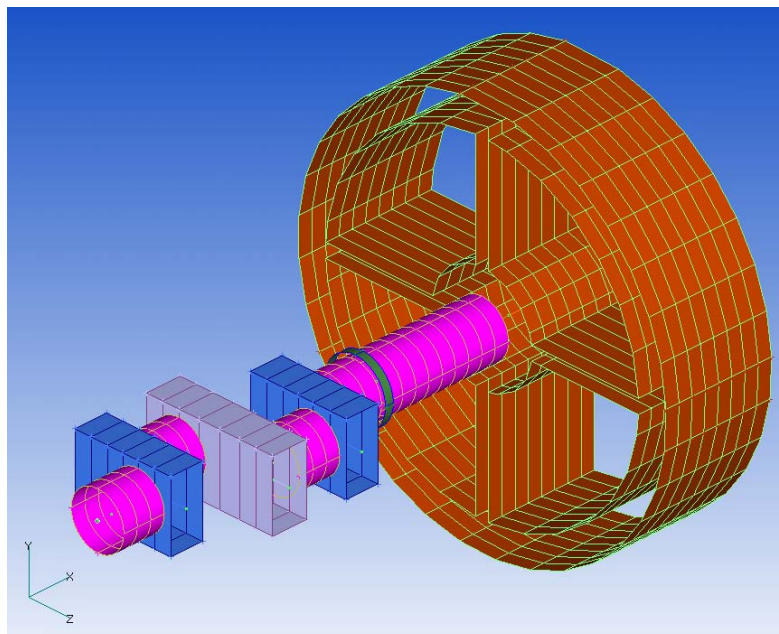
Figura 3.1 Numeração dos Nós e Elementos do Modelo.

As propriedades dos elementos, apresentadas no Anexo A.1.1, estão representadas nas Figuras 3.2 e 3.3. Os elementos representados com número da propriedade zero posicionado sobre um de seus nós, são os elementos rígidos com seus respectivos nós MÁSTER.



**Figura 3.2** Numeração das Propriedades dos Elementos

Todas as propriedades, incluindo as áreas efetivas por cisalhamento  $y$  e  $z$ , são calculadas automaticamente pelo programa FEMAP (2005), inclusive a propriedade do volante, onde sua área seccional foi importada do programa de CAD (Microstation).



**Figura 3.3** Representação das Seções Transversais das Vigas

## 4 ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA

### 4.1 DESCRIÇÃO DA ANÁLISE

O termo “linear” significa que a resposta computada (deslocamento, tensão, etc) é linearmente proporcional à força aplicada. O termo estático significa que as forças não variam com o tempo ou que a variação do tempo é insignificante, podendo ser desprezada.

Eliminando também, as forças inerciais e as forças de amortecimento da equação de equilíbrio dinâmico [Equação (2.15)], a equação da análise linear estática é dada por:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4.1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez do sistema,  $\{F\}$  é o vetor de forças aplicadas e  $\{U\}$  é o vetor de deslocamentos computado.

## 4.2 ETAPAS DA ANÁLISE ESTÁTICA

A figura abaixo representa a seqüência de todas as etapas envolvidas para a solução do sistema linear apresentado na Equação (4.1), através do método de decomposição L.U, desde os dados de entrada importados da planilha Excel até a obtenção dos deslocamentos nodais de qualquer estrutura constituída de elementos de pórtico 3D sujeitos a diversos tipos de carregamentos

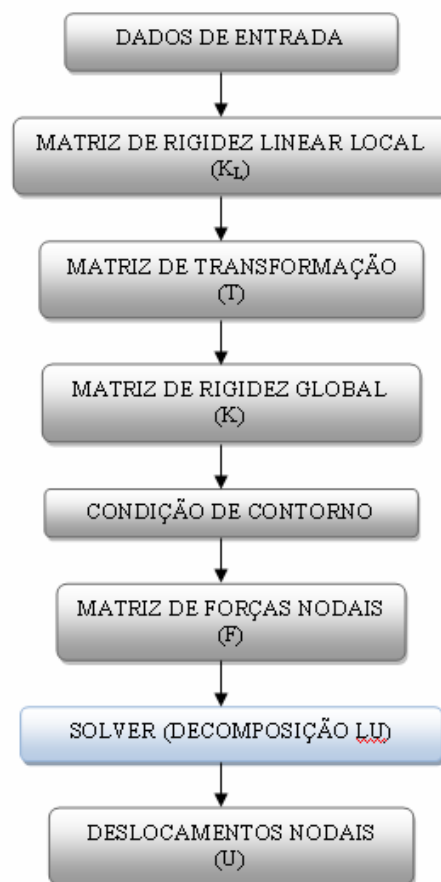


Figura 4.1 Etapas da Análise Estática

### 4.3 MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL

A matriz de rigidez do elemento de pórtico 3D, com 12 graus de liberdade, pode ser montada considerando todos os componentes de rigidez correspondentes aos trabalhos de FLEXÃO em cada um dos planos perpendiculares que contém os eixos centrais principais, devido à ação de momentos fletores e forças cortantes atuantes nesses planos, de TORÇÃO da viga e das FORÇAS AXIAIS. O conceito físico do elemento da matriz de rigidez  $k_{ij}$  é o esforço restaurador provocado na coordenada generalizada  $i$ , devido a um deslocamento unitário na coordenada generalizada  $j$ , mantendo-se todas as outras coordenadas fixas.

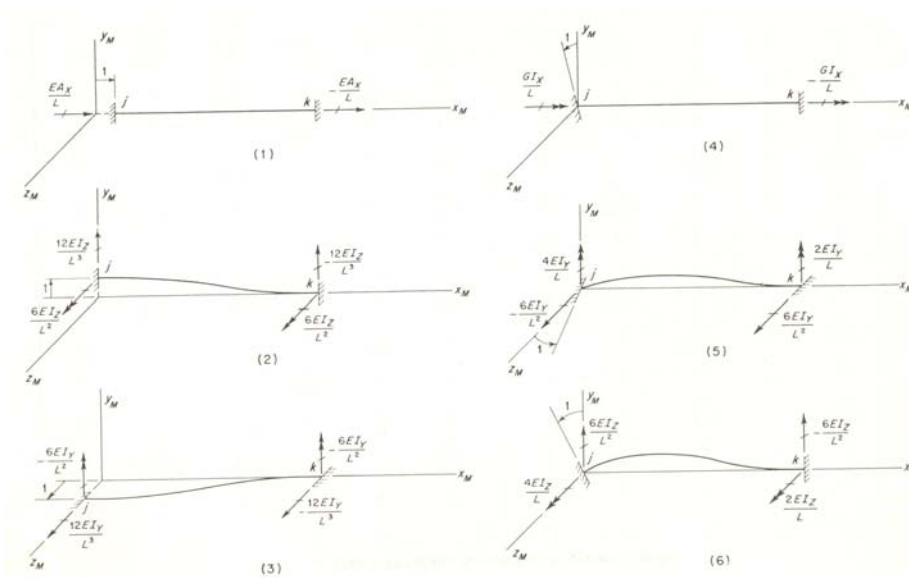


Figura 4.2 Translações Unitárias dos Seis Graus de Liberdade na 1ª Extremidade do Membro.

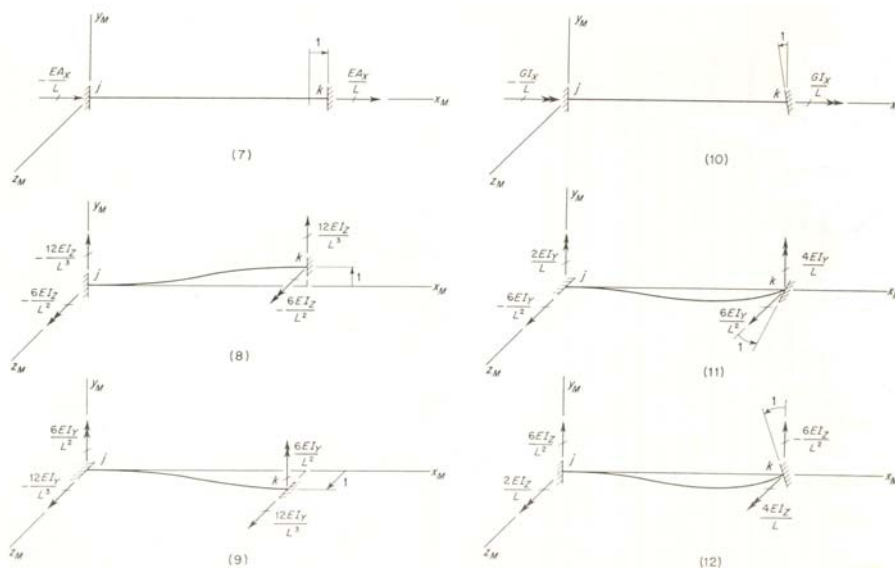


Figura 4.3 Giros Unitários dos Seis Graus de Liberdade na 2ª Extremidade do Membro.

A matriz de rigidez da Equação (2.15) pode ser separada em contribuições lineares e não lineares de modo que  $[K] = [K_L] + [K_N]$ . As contribuições lineares para a rigidez resultam dos primeiros quatro termos da expressão de energia de deformação, dada na Equação (2.8), sendo representada por GERE (1965) na Equação (4.2).

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12.E.I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_z}{L^2} & 0 & -\frac{12.E.I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12.E.I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12.E.I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 & \frac{4.E.I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 & \frac{2.E.I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6.E.I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4.E.I_z}{L} & 0 & -\frac{6.E.I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2.E.I_z}{L} \\ -\frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12.E.I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6.E.I_z}{L^2} & 0 & \frac{12.E.I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6.E.I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12.E.I_y}{L^3} & 0 & \frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12.E.I_y}{L^3} & 0 & \frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 & \frac{2.E.I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_y}{L^2} & 0 & \frac{4.E.I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6.E.I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2.E.I_z}{L} & 0 & -\frac{6.E.I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4.E.I_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



#### 4.4 MATRIZ DE RIGIDEZ INCLUINDO A DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO

Com um exemplo prático sobre as ações das tensões cisalhantes, ALVES FILHO (2000a) apresenta na figura abaixo duas vigas, sendo uma constituída de fibras separadas, e outra um bloco único. Na primeira viga, as fibras tendem a escorregar horizontalmente umas em relação às outras e na viga homogênea, embora esta tendência exista, as fibras não se separam devido às tensões de cisalhamento.

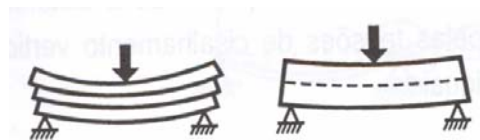


Figura 4.4 Vigas com Fibras Separadas e Homogênea.

No estudo das resistências dos materiais a tensão de cisalhamento em uma fibra distando  $y$  da linha neutra, como mostra a figura abaixo, é calculado por  $\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I}$ , onde  $Q$  corresponde à força cortante na seção transversal,  $M_s = \int y \cdot dA$  é o momento estático, ou primeiro momento de área, em relação à linha neutra, da área acima da fibra considerada, e  $b$  a largura da viga na fibra.

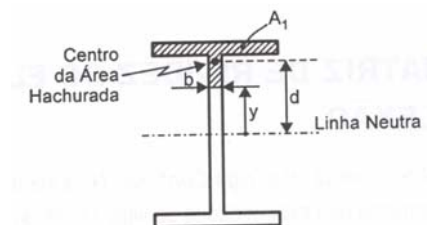
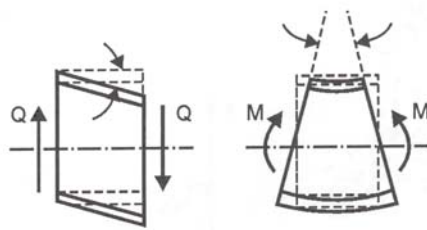


Figura 4.5 Momento Estático, em relação à Linha Neutra.

As tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal de uma viga provocam um deslocamento ou ação de deslizamento de uma seção em relação à outra, em um plano perpendicular ao eixo da viga, diferente daqueles provocados pela flexão,

representados na figura abaixo.



**Figura 4.6** Deformação por cisalhamento e flexão, respectivamente.

Ao avaliar a deflexão de uma viga, na maioria das vezes, considera-se somente o efeito das deformações por flexão, e as deflexões ocasionadas pelo cisalhamento são normalmente ignoradas, pois elas constituem uma pequena parcela das deflexões totais. Porém, para as vigas cujo comprimento não é muito maior que sua altura, as deformações devidas a forças cortantes podem ser de grandezas significativas, o que torna necessário à incorporação destes efeitos na formulação da matriz de rigidez do elemento finito.

Incluindo um fator de correção que diminua a rigidez à flexão do elemento de viga, de modo que com menor rigidez à flexão, as deflexões seriam maiores, e este aumento nas deflexões incorporaria o efeito das deformações por cisalhamento. O fator de correção  $\Phi$  para as direções y e z (ALVES FILHO, 2000b), é dado por:

$$\phi_y = \frac{12.E.I_z}{G.A_{sy}.L^2} \qquad \phi_z = \frac{12.E.I_y}{G.A_{sz}.L^2} \qquad (4.3)$$

Onde  $A_{sy}$  e  $A_{sz}$  - são as áreas da seção transversal efetivas ao cisalhamento nas direções y e z, respectivamente.

As áreas efetivas ao cisalhamento  $A_{sy} = \frac{A}{f_{fy}}$  e  $A_{sz} = \frac{A}{f_{fz}}$  de todas as seções transversais dos elementos de viga que constituem o virabrequim foram obtidas diretamente do programa Femap/Nastran. Segundo PILKEY (2002) os fatores de forma  $f_{fy}$  e  $f_{fz}$  são

determinados, com certa aproximação, através das seguintes fórmulas:

$$f_{fy} = \frac{A}{I_y^2} \int \left( \frac{Q_y}{b} \right)^2 .dA \quad (4.4)$$

$$f_{fz} = \frac{A}{I_z^2} \int \left( \frac{Q_z}{b} \right)^2 .dA \quad (4.5)$$

A partir da consideração dos parâmetros  $\phi_y$  e  $\phi_z$ , a matriz de rigidez linear completa do elemento de viga com 12 graus de liberdade que contabiliza o efeito da deformação por cisalhamento é definida na equação abaixo.

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12.E.I_z}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & \frac{-12.E.I_z}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12.E.I_y}{(1+\phi_z)L^3} & 0 & \frac{-6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12.E.I_y}{(1+\phi_z)L^3} & 0 & \frac{-6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-G.I_x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 & \frac{(4+\phi_z).E.I_y}{(1+\phi_z)L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 & \frac{(2-\phi_z).E.I_y}{(1+\phi_z)L} & 0 \\ 0 & \frac{6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y).E.I_z}{(1+\phi_y)L} & 0 & \frac{-6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y).E.I_z}{(1+\phi_y)L} \\ -\frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12.E.I_z}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & \frac{12.E.I_z}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12.E.I_y}{(1+\phi_z)L^3} & 0 & \frac{6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12.E.I_y}{(1+\phi_z)L^3} & 0 & \frac{6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-G.I_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G.I_x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 & \frac{(2-\phi_z).E.I_y}{(1+\phi_z)L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_y}{(1+\phi_z)L^2} & 0 & \frac{(4+\phi_z).E.I_y}{(1+\phi_z)L} & 0 \\ 0 & \frac{6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y).E.I_z}{(1+\phi_y)L} & 0 & \frac{-6.E.I_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y).E.I_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

## 4.5 MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO (T)

O método direto adotado para formulação das rigidezes de membro  $K_L$  é satisfatório para vigas contínuas, contudo é conveniente adotar um método que emprega a rotação de eixos adaptando assim a estruturas mais complexas. A matriz de rigidez  $K_G$  (coordenadas globais) é obtida da matriz de rigidez local  $K_L$  pelo método de rotação de eixos, e a matriz de rotação requerida para esta transformação pode tomar uma de várias formas, dependendo da orientação do membro no espaço.

Considerando um elemento de pórtico espacial  $i$  com seus eixos principais  $y_M$  e  $z_M$  em direções oblíquas, três sucessivas rotações dos eixos da estrutura foram adotadas para especificar a posição dos eixos, conforme indicado na Figura 4.7. A primeira rotação consiste no giro de um ângulo  $\beta$  em torno do eixo  $y_S$ . Este giro coloca o eixo  $x$  na posição denominada  $x_\beta$ , que é a interseção do plano  $x_S$ - $z_S$  com o plano  $x_M$ - $y_S$ . A segunda etapa na transformação consiste em um giro de um ângulo  $\gamma$  em torno do eixo  $z_\beta$ , colocando o eixo  $x_\gamma$  em sua posição final. A última etapa consiste da rotação de um ângulo  $\alpha$  fazendo que os eixos  $y_M$  e  $z_M$  coincidam com os eixos principais da seção transversal.

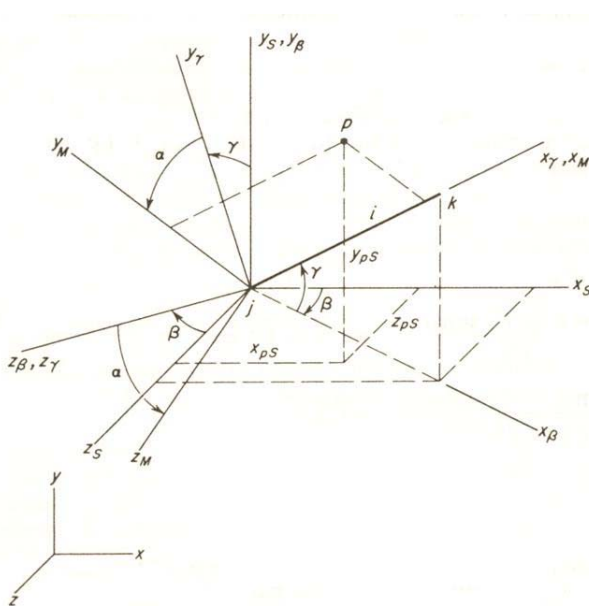


Figura 4.7 Rotação de eixos para um membro de pórtico espacial.

Para obtenção da matriz transformação de rotação os co-senos diretores ( $C_x$ ,  $C_y$  e  $C_z$ ) e o comprimento  $L$  de cada membro são determinados a partir das coordenadas de seus pontos extremos:

$$C_x = \frac{x_k - x_j}{L} \quad C_y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad C_z = \frac{z_k - z_j}{L} \quad (4.7)$$

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2} \quad (4.8)$$

Para o giro de um ângulo  $\beta$  em torno do eixo  $y_s$ , a matriz de rotação 3x3,  $R_\beta$ , consiste nos co-senos diretores dos eixos  $\beta$  ( $x_\beta$ ,  $y_\beta$  e  $z_\beta$ ) em relação aos eixos da estrutura ( $x_s$ ,  $y_s$  e  $z_s$ ).

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

O segundo giro em torno do eixo  $z_M$  do ângulo  $\gamma$  pode ser tratado de forma similar. Escrevendo a matriz  $R_\gamma$  que contém os co-senos diretores dos eixos do membro em relação aos eixos  $\beta$ , temos:

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

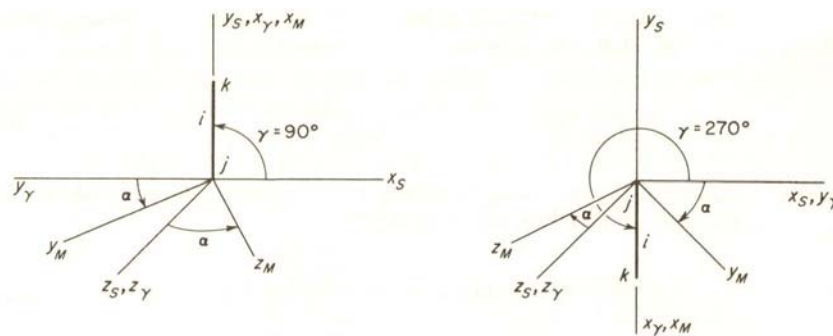
A rotação de eixos do ângulo  $\alpha$  requer a introdução de uma matriz de rotação  $R_\alpha$  na qual os elementos são co-senos diretores dos eixos finais em relação aos eixos  $\gamma$ .

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Multiplicando as matrizes  $R_\alpha$ ,  $R_\gamma$  e  $R_\beta$  conforme indicado abaixo, obtém-se a matriz de rotação  $t$ .

$$t = R_\alpha R_\gamma R_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \cos \alpha & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \cos \alpha \\ \frac{-C_x C_y \cos \alpha - C_z \text{sen} \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \cos \alpha & \frac{-C_y C_z \cos \alpha + C_x \text{sen} \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \text{sen} \alpha - C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \text{sen} \alpha & \frac{C_y C_z \text{sen} \alpha + C_x \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Considerando as rotações sucessivas dos eixos para um membro vertical, não existe giro através do ângulo  $\beta$  (em torno do eixo  $y_s$ ). O primeiro giro se dá através do ângulo  $\gamma$ , que pode ser de  $90^\circ$  ou de  $270^\circ$  (ver figura abaixo). O segundo giro é através do ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $x_M$ .



**Figura 4.8** Rotação de eixos para um membro vertical de pórtico espacial.

A matriz de rotação para membros verticais de pórtico espacial consiste nos co-senos diretores dos eixos  $x_M$ ,  $y_M$  e  $z_M$  em relação aos eixos da estrutura:

$$t_{\text{VERT}} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha \\ C_y \text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A matriz de transformação de rotação  $\mathbf{T}$  (12x12) para um membro de pórtico espacial apresenta a seguinte forma.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.6 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL (K) E VETOR SOLICITAÇÃO

Ao montar a matriz de rigidez local de todos os elementos que constituem a estrutura, referente ao sistema local de coordenadas, cada elemento deverá referir-se ao sistema global de coordenadas, através da Equação (4.15), para posteriormente montar a matriz de rigidez da estrutura ou global a partir das matrizes de rigidez de cada um de seus elementos.

$$K_G = T^{-1} \cdot K_L \cdot T \quad (4.15)$$

onde, T é a matriz transformação de rotação.

Com a matriz de membro  $K_G$  para os eixos da estrutura (coordenadas globais) definida, o próximo passo é montar a matriz de rigidez da estrutura. Devemos identificar em cada matriz de rigidez de elemento  $K_G$ , a sua contribuição nessa montagem. Por exemplo, os coeficientes  $i, j$  da matriz de um elemento serão adicionados na mesma localização  $i, j$  da matriz da estrutura  $K$ .

Depois de formada a matriz de rigidez da estrutura, o próximo passo é considerar as cargas nodais sobre a estrutura, através do vetor solicitação  $F$ . Este carregamento nodal é fornecido pelo usuário, através dos dados de entrada da planilha eletrônica, correspondentes aos seis graus de liberdade. Neste estudo não foram consideradas cargas nos membros, somente cargas nodais.





$$\text{Método Direto} \left\{ \begin{array}{l} \text{Regra de Cramer} \\ \text{Inversão da Matriz } A \\ \text{Eliminação de Gauss} \\ \text{Decomposição LU} \end{array} \right.$$

Métodos Iterativos – Processo de aproximação iterativa da solução. A convergência é assegurada sob certas condições.

$$\text{Métodos Iterativos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estacionários} \left\{ \begin{array}{l} \text{Gauss – Jacobi} \\ \text{Gauss – Seidel} \\ \text{Sobrerelaxação} \end{array} \right. \\ \text{Não – Estacionários} \left\{ \begin{array}{l} \text{Gradiente Conjugado} \\ \text{Gradiente Biconjugado} \\ \text{Gradiente Biconjugado Estabilizado} \\ \text{etc..} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

O método direto Decomposição LU, também conhecido como Método de Doolittle, foi o método adotado para solução de sistemas lineares neste estudo, e consiste na seguinte seqüência de passos:

I) Decompor a matriz  $[A]$  da Equação (4.17) em LU:

$$[L].[U].\{X\} = \{B\} \tag{4.18}$$

onde,  $[U]$  é a matriz triangular superior obtida ao final da fase de eliminação do método de Gauss; e  $[L]$  é uma matriz triangular inferior, cujos elementos da diagonal principal são unitários.

II) Considerar  $[U].\{X\} = \{D\}$  e resolver o sistema triangular inferior  $[L].\{D\} = \{B\}$  ;

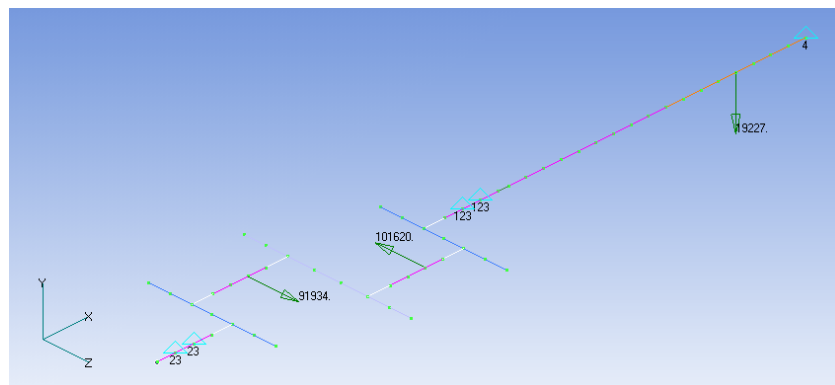
IV) Resolver o sistema triangular superior  $[U].\{X\} = \{D\}$  .

## 4.8 VALIDAÇÃO DA ANÁLISE

Com objetivo de validar a matriz de rigidez global [K] do sistema considerando o efeito de cisalhamento e o vetor de forças externas {F} considerando o efeito da aceleração da gravidade, esta seção compara os resultados do algoritmo desenvolvido no programa Mathcad com os do programa Femap/Nastran das condições de carregamento definidas a seguir. Nestas análises os elementos rígidos foram considerados nas extremidades dos eixos que se conectam com os blocos para ambos os programas.

### 4.8.1 Condição de Carregamento 1

A condição de carregamento 1 consiste em aplicar ao modelo, restrições dos deslocamentos y e z para os nós referentes ao 1º mancal, restrições dos deslocamentos x, y e z referentes ao 2º mancal, carregamentos na direção z ( $F_{z1} = 91934 \text{ N}$  e  $F_{z2} = -101620 \text{ N}$ ) referentes aos esforços das manivelas, e um carregamento na direção y ( $F_y = -19227 \text{ N}$ ) referente ao peso do volante.



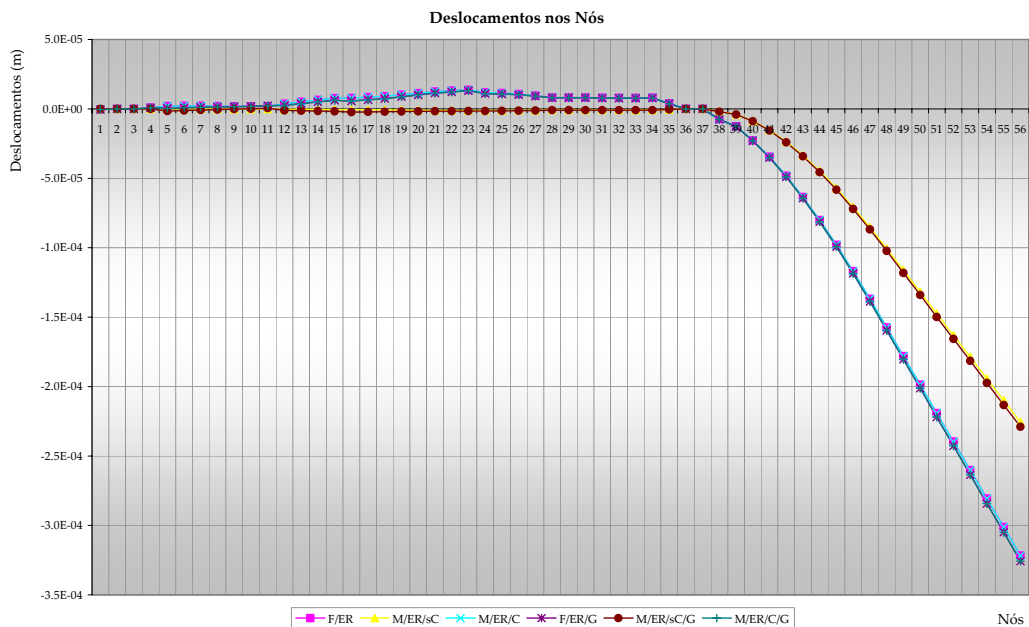
**Figura 4.9** Condição de Carregamento 1.

O gráfico seguinte mostra os deslocamentos verticais de todos os nós do modelo para os casos:

- F/ER** Femap com Elemento Rígido;
- M/ER/sC** Mathcad com Elemento Rígido e sem Cisalhamento;
- M/ER/C** Mathcad com Elemento Rígido e com Cisalhamento;

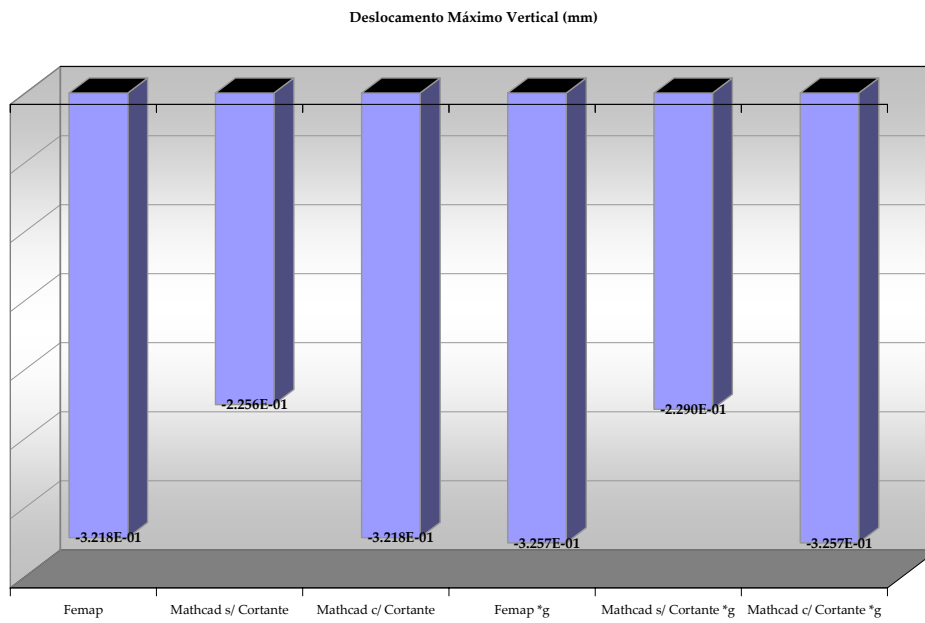
- F/ER/G Femap com Elemento Rígido e Gravidade;
- M/ER/sC/G Mathcad com Elemento Rígido, sem Cisalhamento e com Gravidade;
- M/ER/C/G Mathcad, com Elemento Rígido, Cisalhamento e Gravidade;

Nos casos F/ER/G, M/ER/sC/G e M/ER/C/G, onde é considerada a aceleração da gravidade, o peso de cada elemento do virabrequim é transmitido para seus respectivos nós como carga nodal  $F_{NÓ} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{2} \cdot g$ , e o carregamento de 1960 N referente ao peso do volante, é excluído.



**Figura 4.10** Deslocamentos nodais (m) da condição de carregamento 1.

Observando que os deslocamentos verticais dos 56 nós da estrutura (Figura 4.10) extraídos do Femap/Nastran são iguais aos deslocamentos verticais extraídos do algoritmo considerando o efeito do cisalhamento, tanto para os casos com ou sem gravidade; conclui-se que tal efeito para o modelo do virabrequim deve ser considerado, pois para os casos em que o algoritmo não considera (M/ER/sC e M/ER/sC/G), os deslocamentos verticais máximos referentes ao nó 56, representados no gráfico abaixo, chegam a apresentar valores 42% inferiores dos que consideram tal efeito.



**Figura 4.11** Deslocamento vertical máximo (mm) da condição de carregamento 1.

Os três últimos casos da Figura 4.11, onde a aceleração da gravidade foi considerada, apresentam deslocamentos verticais superiores a 1% em relação aos três primeiros casos que não a consideram, devido à consideração de todo peso estrutural ao invés somente do volante.

#### 4.8.2 Condição de Carregamento 2

A diferença da condição 2 para condição 1 está na direção do carregamento referente ao peso do volante e a aceleração da gravidade, que mudam da y para a direção z.

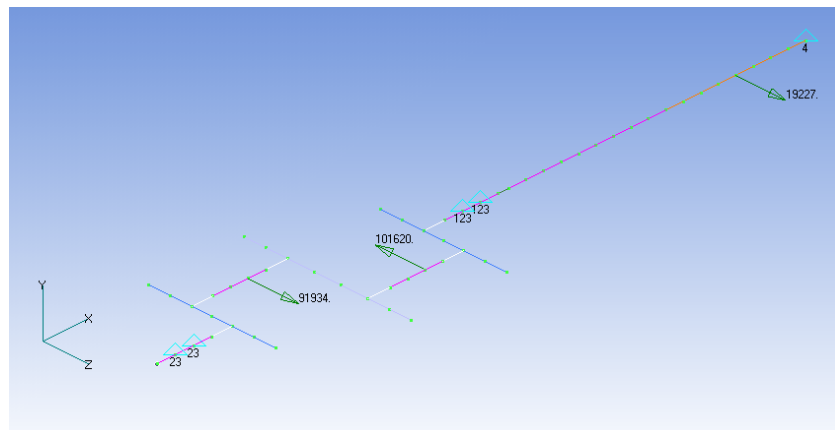


Figura 4.12 Condição de Carregamento 2.

O gráfico da figura seguinte mostra os deslocamentos transversais de todos os nós do modelo para os mesmos casos definidos na condição de carregamento 1.

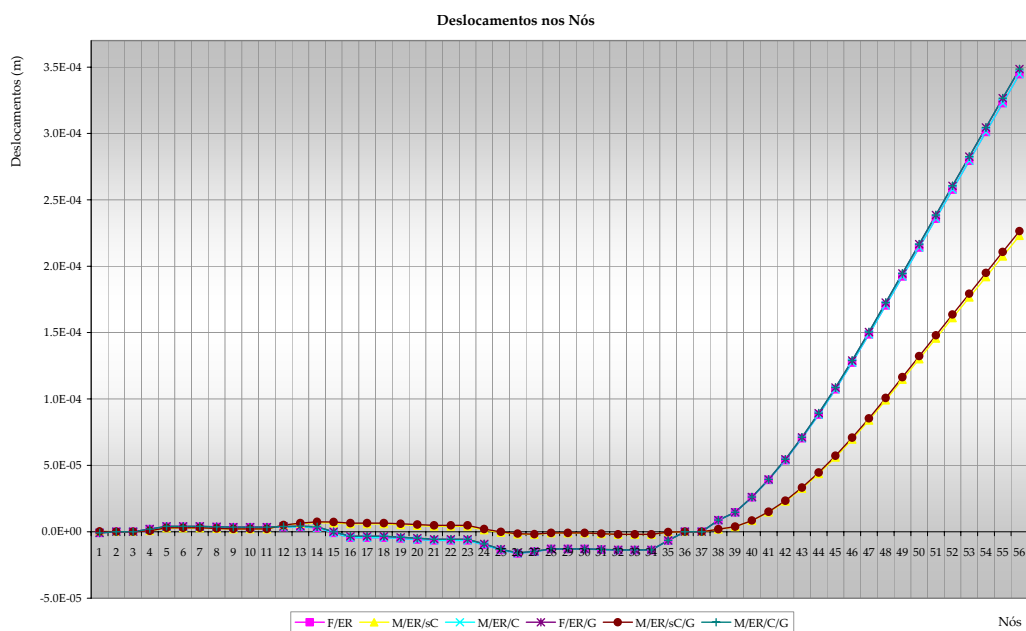
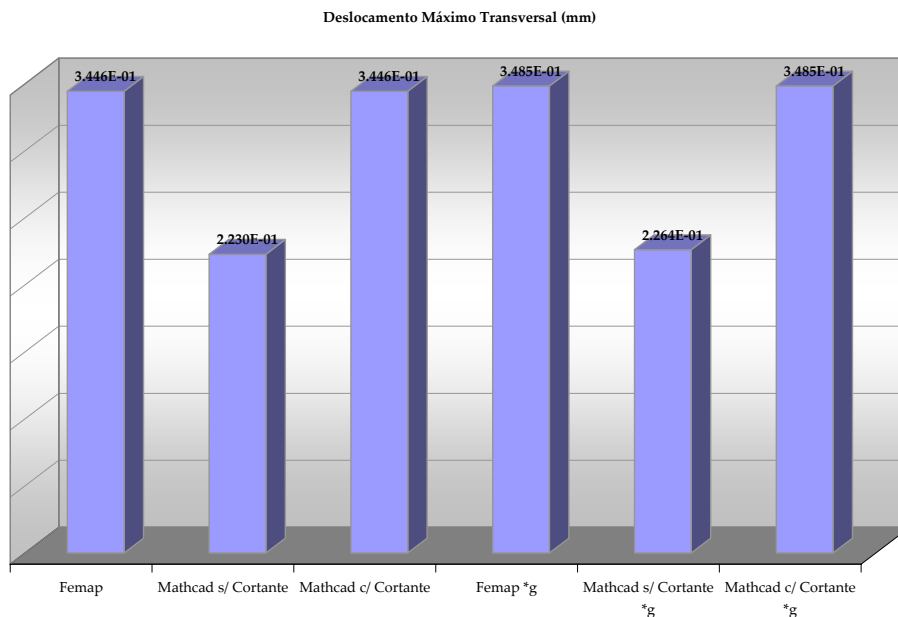


Figura 4.13 Deslocamentos nodais (m) da condição de carregamento 2.

Como a condição de carregamento 1, esta condição também consolida a inclusão do efeito de cisalhamento na matriz de rigidez de cada membro que compõe o modelo do virabrequim. Para os casos em que o algoritmo não considera (M/ER/sC e M/ER/sC/G), os deslocamentos transversais máximos também referentes ao nó 56, representados no gráfico a seguir, chegam a apresentar valores 52% inferiores dos que consideram tal efeito.



**Figura 4.14** Deslocamento transversal máximo (mm) da condição de carregamento 2.

Comparando para um mesmo caso, o deslocamento vertical máximo da condição de carregamento 1 (Figura 4.11) com o deslocamento transversal máximo desta condição (Figura 4.13), observa-se que a rigidez da estrutura na direção y é superior a rigidez na direção z.

## 5 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE

### 5.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR

Para o caso de vibrações livres sem amortecimento, supõe-se que uma frequência natural que depende somente das propriedades do material, da conformação geométrica e das restrições do sistema, fará cada ponto da estrutura executar um movimento harmônico em relação a uma posição de equilíbrio estático. E os maiores danos em sistemas mecânicos são geralmente causados por condições de ressonância, que ocorrem quando a frequência da força de excitação está próxima à frequência natural  $\omega$  (rad/s) da estrutura. No estudo de vibrações livres não amortecidas, considera-se  $[C]=[0]$  e  $\{F\}=\{0\}$  e propõe-se a solução:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0 \quad (5.1)$$

Substituindo a solução  $U = \phi \cdot \sin(\omega t + \theta)$ , que pode ser dada por uma função periódica, e sua segunda derivada  $\ddot{U} = -\omega^2 \cdot \phi \cdot \sin(\omega t + \theta)$  na Equação (5.1) obtemos um problema de autovalor generalizado onde cada  $\phi$  e  $\omega$  pode ser determinado.

$$K \cdot \phi = \omega^2 \cdot M \cdot \phi \quad (5.2)$$

Autovalores e autovetores são entidades amplamente utilizadas na álgebra matricial, principalmente quando se deseja observar determinadas características de uma matriz. Os  $n$  autovalores obtidos  $(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2)$  representam as frequências naturais dos  $n$  modos de vibração do sistema. Os autovetores associados a cada um dos autovalores são as formas modais  $\phi_n$  dos  $n$  modos de vibração, correspondendo apenas à forma geométrica assumida pelo sistema em vibração livre na frequência particular, não possuindo qualquer relação com as amplitudes das oscilações.

O código elaborado determina com boa precisão as menores frequências naturais com



seus correspondentes modos de vibração, através do método da iteração inversa do coeficiente de Rayleigh, servindo como parâmetro dinâmico importante para a avaliação da resposta do sistema, a carregamentos variáveis.

## 5.2 ETAPAS DA ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE

A figura abaixo mostra a seqüência de todas as etapas envolvidas na solução da equação de vibração livre sem amortecimento [Equação (5.1)], através do método de integração inversa, desde os dados de entrada importados da planilha Excel com a formação das matrizes de massa de cada membro, até a obtenção frequências naturais (autovalores) com seus respectivos modos de vibração (autovetores) da estrutura constituída de elementos de pórtico 3D.

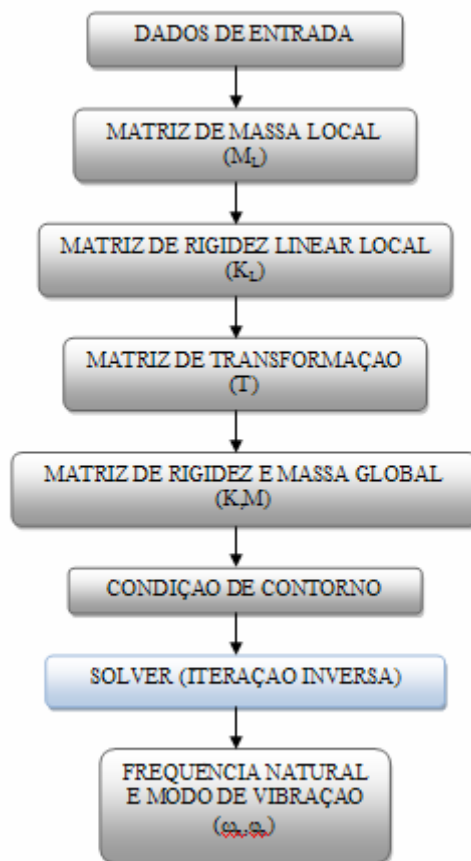


Figura 5.1 Etapas da Análise de Vibração Livre s/ Amortecimento

### 5.3 MATRIZ DE MASSA LOCAL

De maneira análoga a matriz de rigidez local, mencionada na seção 4.3, um elemento  $m_{ij}$  da matriz de massa pode ser entendido como o esforço de inércia provocado na coordenada generalizada  $i$ , devido a uma aceleração unitária na coordenada generalizada  $j$ .

As contribuições inerciais de cada grau de liberdade tornam-se claras quando a matriz é separada em dois componentes:  $[M] = [M_1] + [M_n]$ . A matriz  $M_1$ , representada na Equação (5.3) inclui todas as três contribuições de translação e a contribuição axial-rotacional, enquanto que a matriz  $M_n$  [Equação (5.4)] contém as contribuições do terceiro e quarto componentes de rotação, assim fornecendo uma correção para a inércia rotatória.

$$[M_1] = \rho \cdot A \cdot L \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{3 \cdot A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{6 \cdot A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11L}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{6 \cdot A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{3 \cdot A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$[M_n] = \frac{\rho I_{yz}}{L} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\
0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 \\
0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{10} \\
0 & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\
0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15}
\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

## 5.4 MÉTODO DE ITERAÇÃO INVERSA

A condição primordial desta rotina que traz como resultado final o conjunto dos  $n$  autovalores com seus respectivos autovetores, é das matrizes  $[K]$  e  $[M]$  da Equação (5.1) serem positivas-definidas. Segundo BATHE (1996b), a técnica de iteração inversa é bastante eficiente para os cálculos de autovetores, e que em alguns casos os correspondentes autovalores também podem ser determinados. Mas para o nosso caso em que estamos analisando frequências próximas à rotação do virabrequim de 8.5 Hz, este método iterativo apresenta resultados satisfatórios, conforme veremos a seguir.

O passo inicial para o cálculo dos modos de vibração com suas respectivas frequências naturais foi definir o vetor iteração de inicialização ( $x_1$ ). O próximo passo foi criar um processo iterativo substituindo este vetor na Equação (5.5).

$$\bar{x}_{k+1} = K^{-1} \cdot M \cdot x_k \quad (5.5)$$

Desenvolvendo a relação  $\bar{y}_{k+1} = M \cdot \bar{x}_{k+1}$  e utilizando o Quociente de Rayleigh para determinar o autovalor aproximado, convenientemente utilizado para determinar a convergência na iteração, dado por:

$$\rho(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^T \cdot y_k}{\bar{x}_{k+1}^T \cdot \bar{y}_{k+1}} \quad (5.6)$$

e normalizando o vetor definido acima, obtém-se os respectivos autovetores do sistema:

$$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T \cdot \bar{y}_{k+1})^{1/2}} \quad (5.7)$$

Desde que atenda o seguinte critério de convergência:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq 10^{-2s} \quad (5.8)$$

onde o fator de convergência considerado neste estudo foi  $10^{-6}$  ( $s = 3$ ) e  $\lambda_1^{(k+1)} = \rho(\bar{x}_{k+1})$ .

## 5.5 VALIDAÇÃO DA ANÁLISE

Com a finalidade de validar a matriz de massa global do sistema [M] e o método adotado (iteração inversa) para o cálculo das primeiras frequências naturais com seus respectivos modos de vibração, um modelo numérico com elementos sólidos hexaédricos (WORKBENCH, 2007a) foi elaborado nesta seção para comparar seus resultados com os resultados obtidos do algoritmo, e do programa Femap/Nastran. As frequências naturais determinadas nesta seção, servirão como dados de entrada para a formação da matriz de amortecimento [C] na análise dinâmica apresentada no capítulo seguinte.

### 5.5.1 Modelo Numérico com Elementos Hexaédricos

A utilização do Método dos Elementos Finitos na análise de sólidos tridimensionais é mais laboriosa do que na análise de problemas planos. Tanto o domínio a discretizar como os elementos finitos são tridimensionais; as funções têm três variáveis; o número de componentes de cada vetor é mais elevado, o número de funções de interpolação de cada grau é mais elevado. Em contrapartida, do ponto de vista teórico, não existe qualquer dificuldade adicional. As expressões das relações fundamentais e as fórmulas para o cálculo das matrizes de rigidez e vetores de forças elementares são as mesmas.

Sabendo que é possível exportar arquivos feitos em sistemas CAD para o sistema Workbench, optou-se por utilizar o programa Microstation para a construção dos sólidos que compõe o modelo do virabrequim, já que este possui muitas facilidades (ferramentas) para qualquer tipo de desenho, além de possibilitar salvar arquivos em extensões lidas pelo sistema Workbench. O objetivo, então, é construir os sólidos no programa Microstation, exportar para o sistema Workbench com extensão STEP (\*.stp) e, neste ambiente, construir a malha e realizar a análise dos modos normais através do método de elementos finitos.

O volante, o eixo principal, os suportes (parte do eixo principal onde estão posicionados os mancais), os blocos, as manivelas (parte do eixo onde estão posicionadas as manivelas) e o anel, componentes do modelo do virabrequim, foram modelados como partes sólidas independentes com objetivo de facilitar a geração de malha com elementos hexaédricos quadráticos. As regiões de contato entre as superfícies foram criadas automaticamente (WORKBENCH, 2007b), adotando como default o contato “bonded” que não permite deslizamento relativo entre as superfícies nem tampouco a perda de contato entre elas, conforme mostra Figura 5.2. Este tipo de contato permite para uma solução linear desde que o comprimento ou área de contato não mude durante a aplicação da carga.

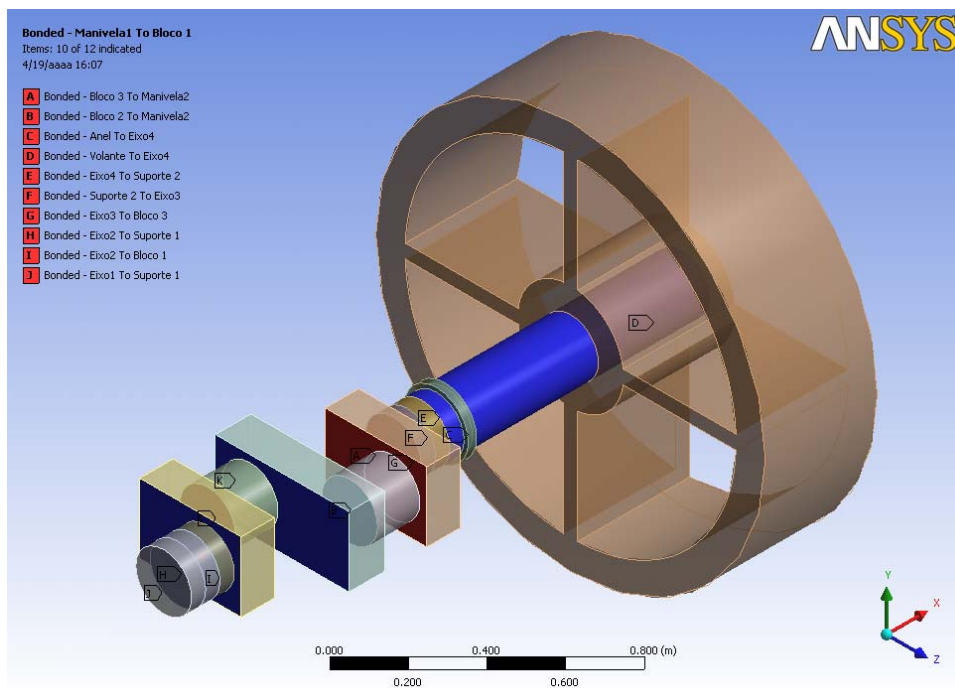
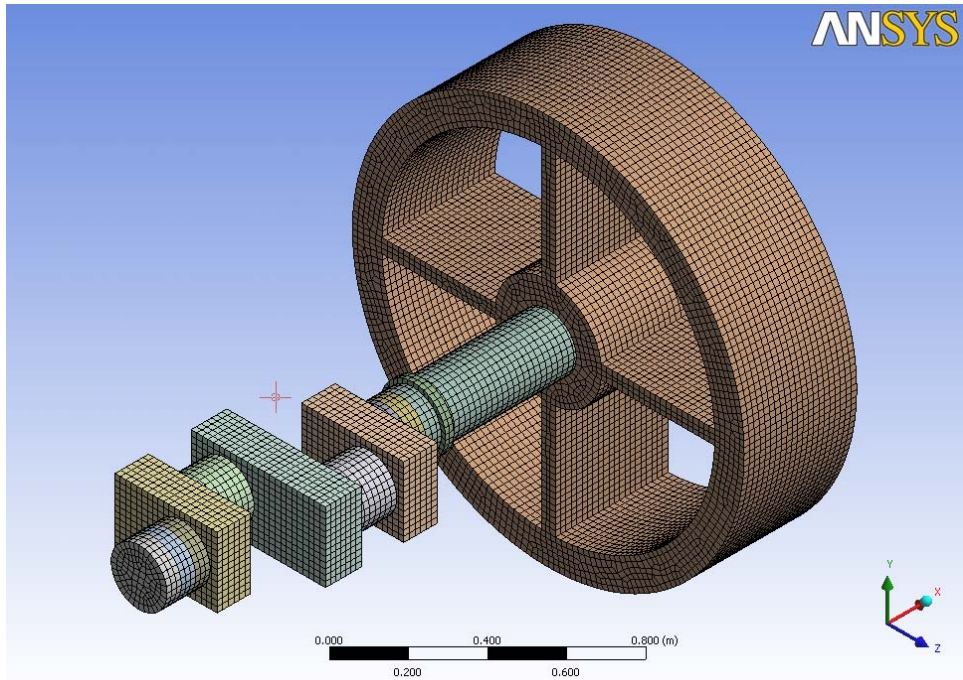


Figura 5.2 Contato “Bonded” entre as Partes do Modelo.

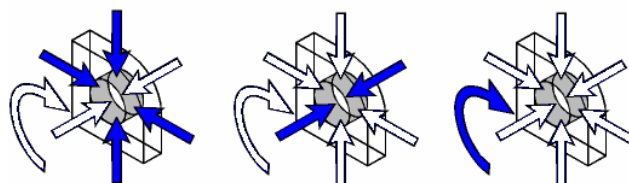
A malha regular, de todas as partes sólidas que compõe o virabrequim, formada por elementos sólidos hexaédricos (SOLID 186) de segunda ordem é mostrada na Figura 5.3.





**Figura 5.3** Malha com Elementos Hexaédricos

Em superfícies cilíndricas, o programa disponibiliza a opção de restrição dos deslocamentos radiais, axiais e tangenciais (coordenadas cilíndricas) facilitando a aplicação da condição de contorno ao modelo que apresenta superfícies cilíndricas. Supondo que as setas azuis (Figura 5.4) restrinjam e as setas brancas liberam os deslocamentos, no primeiro exemplo as direções radiais relativas ao cilindro são fixadas e as direções axiais e tangenciais liberadas. No segundo exemplo a direção axial foi restringida e as direções radiais e tangenciais foram liberadas, enquanto que no terceiro, a direção tangencial foi restringida e as demais liberadas.



**Figura 5.4** Suporte Cilíndrico Radial, Axial e Tangencial

Para aproximar ao máximo a condição de contorno adotada no elemento de viga, o suporte cilíndrico A (Figura 5.5) foi restringido somente para deslocamentos radiais, enquanto que o suporte cilíndrico B foi restringido para deslocamentos radiais e axiais.

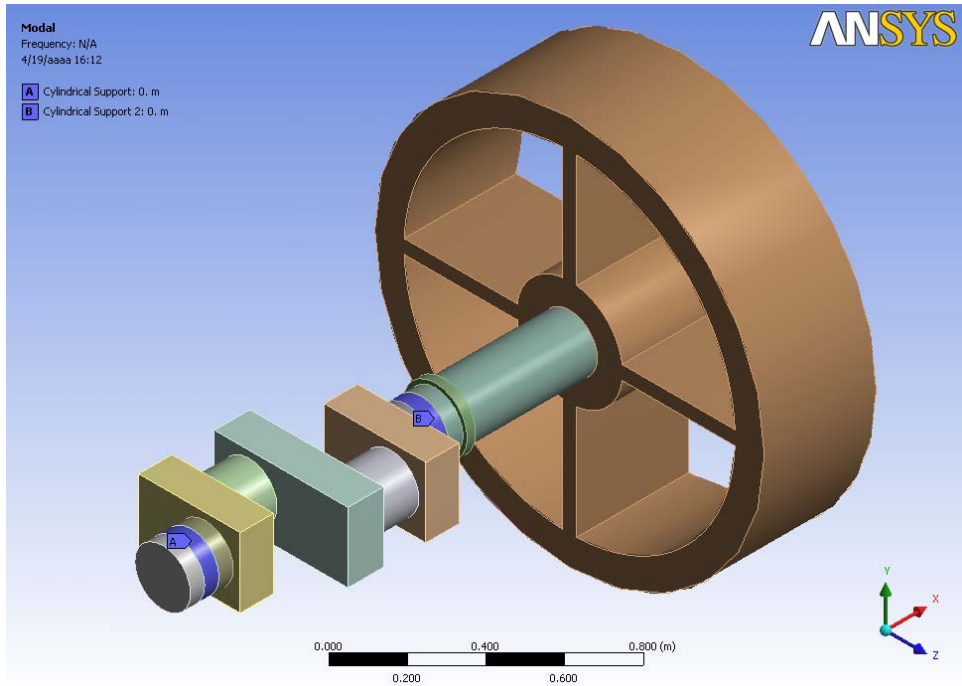


Figura 5.5 Condição de Contorno: Suportes Cilíndricos A e B

As Figuras de 5.6 a 5.10 representam os 5 primeiros modos de vibração do sistema.

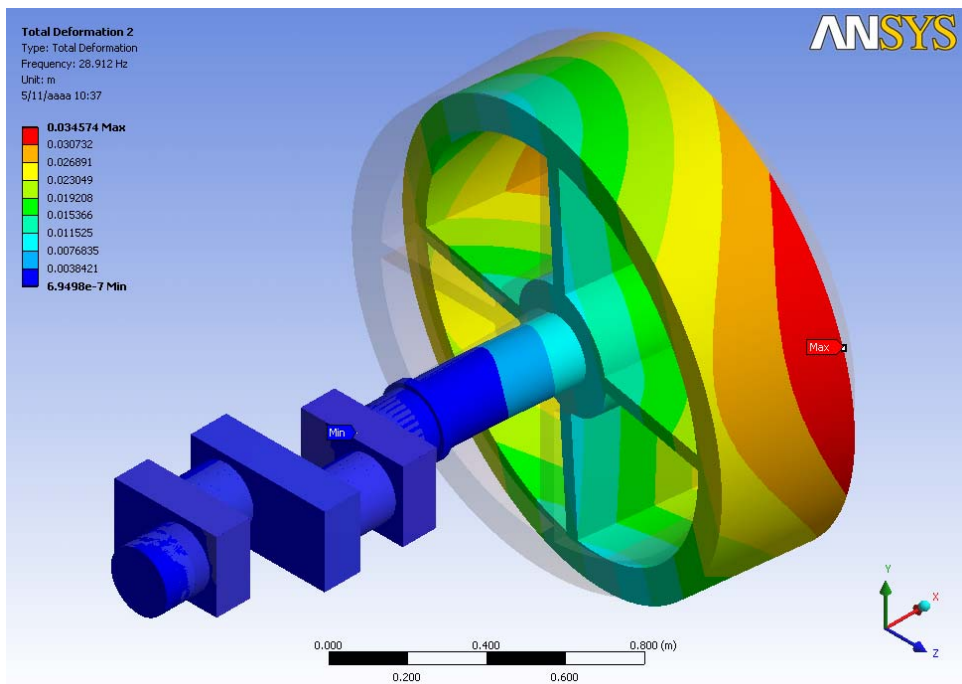


Figura 5.6 1º Modo de Vibração (28.91 Hz)

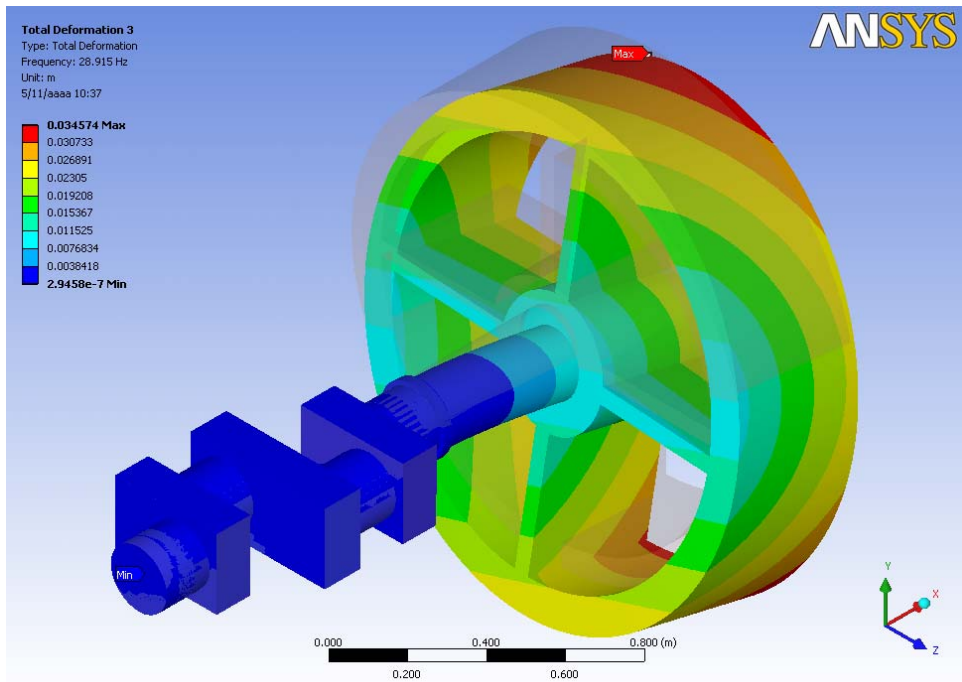


Figura 5.7 2º Modo de Vibração (28.92 Hz)

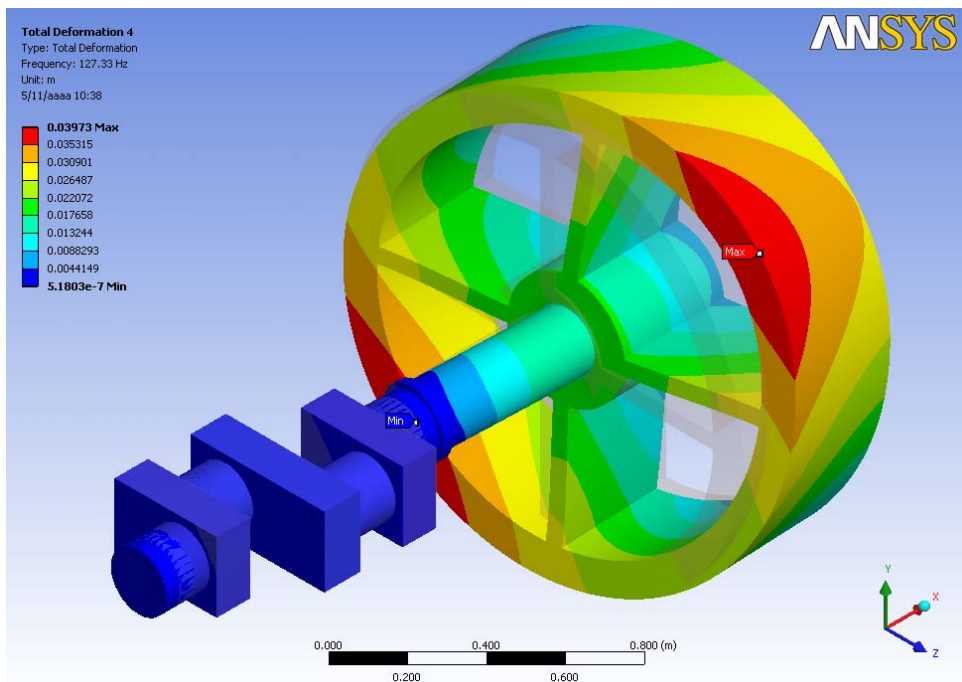


Figura 5.8 3º Modo de Vibração (127.34 Hz)

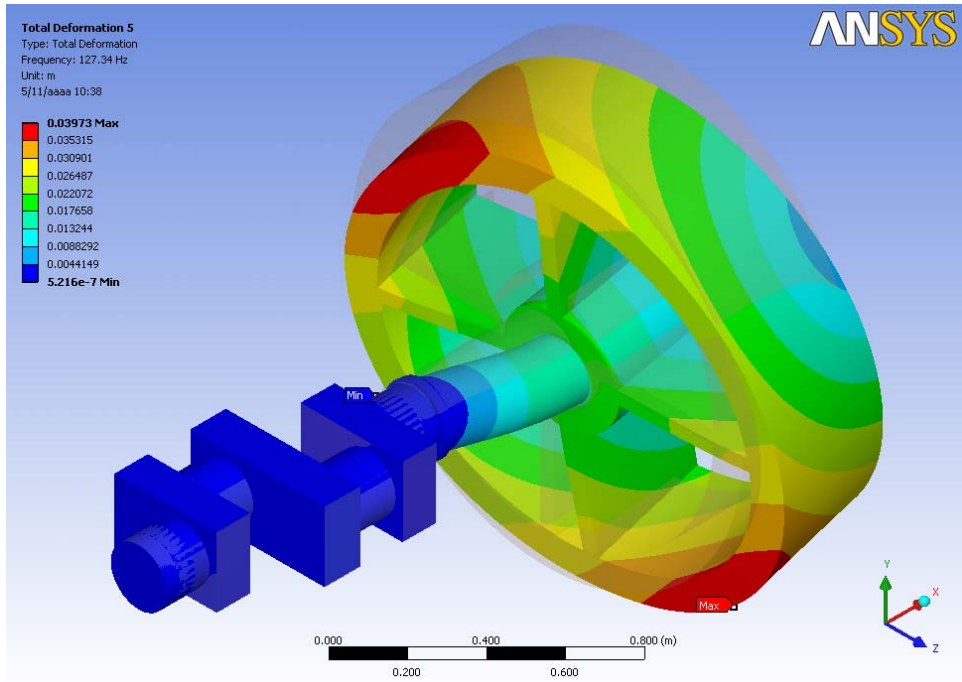


Figura 5.9 4º Modo de Vibração (127.34 Hz)

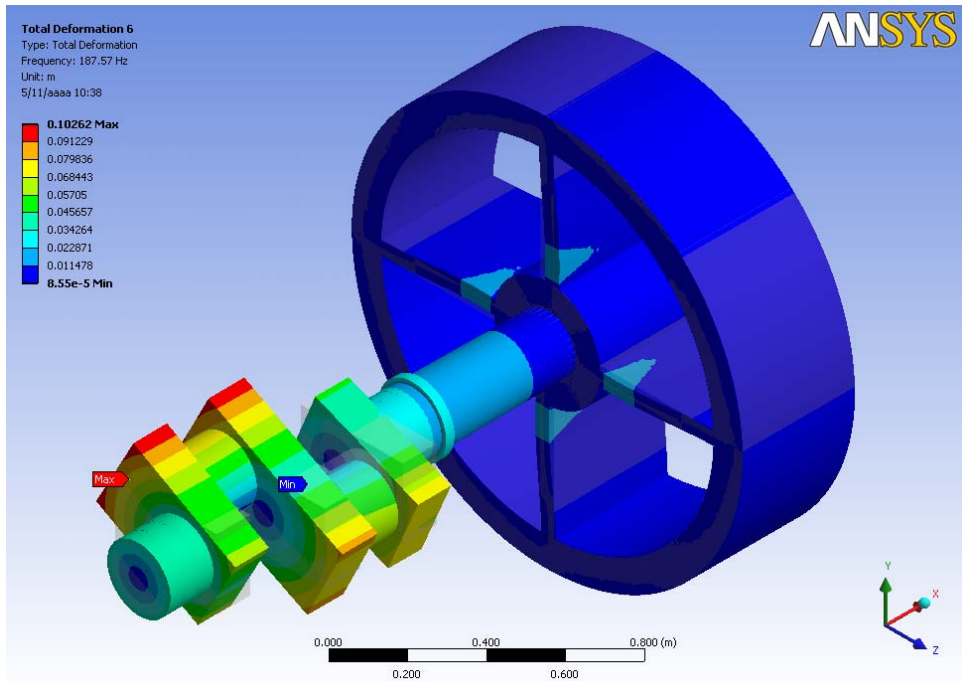


Figura 5.10 5º Modo de Vibração (187.50 Hz)

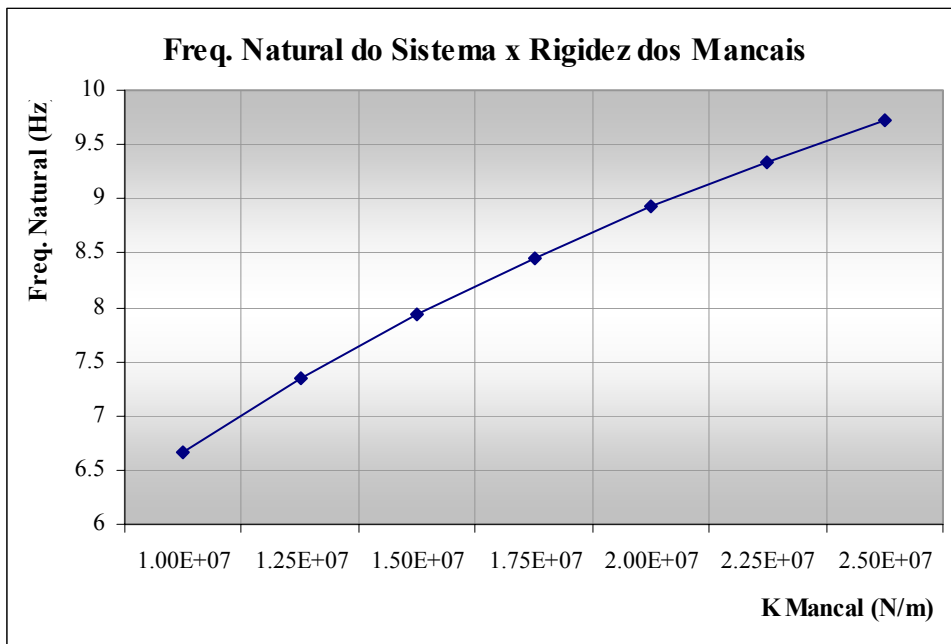
## 5.5.2 Análise dos Resultados

A tabela abaixo compara as frequências naturais do modelo com elementos sólidos hexaédricos de 20 e 40 mm de lado com o algoritmo e com os modelos de elemento viga elaborados no Workbench e Femap/Nastran. Considerando como parâmetro os resultados dos modelos com elementos sólidos, observa-se que para as duas primeiras frequências encontradas, que estão mais próximas da frequência de excitação (8.5 Hz), o algoritmo que considera o elemento rígido e o efeito de cisalhamento apresenta resultados consistentes, validando todo seu processo na análise de vibração livre não amortecida.

Frequência Natural (Hz)									
Modos	Sólido 40mm (Ansys)	Sólido 20mm (Ansys)	Viga s/ el.Rígido (Ansys)	Viga s/ el.Rígido (Nastran)	Viga c/ el.Rígido (Nastran)	s/ Cortante s/ el.Rígido (Mathcad)	s/ Cortante c/ el.Rígido (Mathcad)	c/ Cortante s/ el.Rígido (Mathcad)	c/ Cortante c/ el.Rígido (Mathcad)
1	28.51	28.91	25.74	31.18	31.45	30.34	30.35	25.85	26.04
2	28.53	28.92	25.77	31.23	31.45	30.34	30.35	25.88	26.06
3	127.15	127.34	147.79			186.74	186.80	148.04	148.69
4	127.22	127.34	147.86			186.75	186.80	148.05	148.69
5	187.14	187.57	186.96	199.52	237.02	186.96	218.67	185.57	217.51

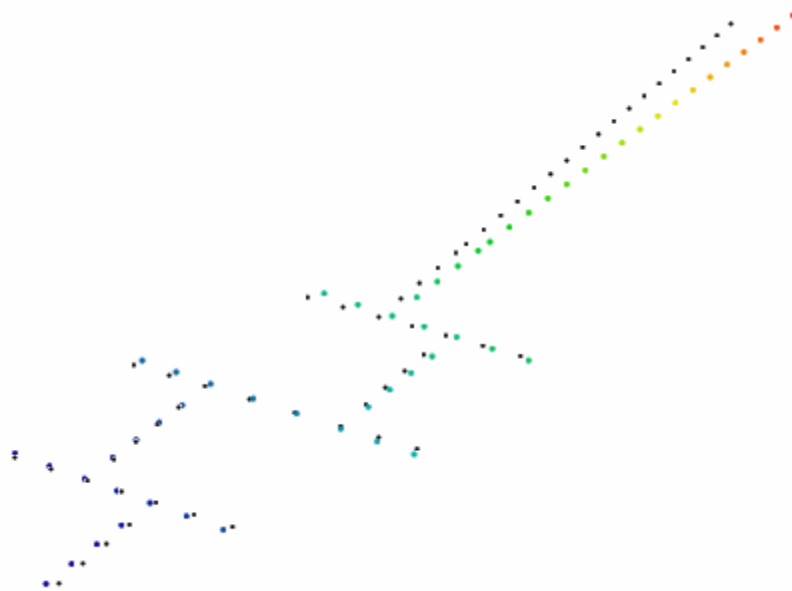
**Tabela 5.1** Frequências Naturais (Hz) dos 5 Primeiros Modos de Vibração

Com o algoritmo consolidado, o próximo passo foi varrer a frequência natural do sistema em torno da frequência de excitação com o objetivo de estudar o comportamento do virabrequim em ressonância. Para isto, as restrições (condições de contorno) referentes aos mancais foram substituídas por elemento de mola, que consiste na aplicação direta de sua rigidez (dado de entrada) na diagonal principal da matriz de rigidez de um determinado grau de liberdade. A rigidez do mancal que faz virabrequim entrar em ressonância é de aproximadamente  $1.75E+07$  N/m, conforme mostra a curva “Freq. Natural do Sistema x Rigidez do Mancal” representada no gráfico a seguir.



**Figura 5.11** Freqüência Natural (Sistema) x Rigidez (Mancais).

Considerando uma rigidez finita dos mancais ( $K_{mola} = 1.75E+07$  N/m), o primeiro modo de vibração do sistema em ressonância não representa movimento de corpo rígido, pois o virabrequim sofre uma pequena flexão apresentada na Figura 5.12.



**Figura 5.12** 1º Modo de Vibração (Freq. Natural 8.5 Hz).

## 6 ANÁLISE TRANSIENTE

### 6.1 DESCRIÇÃO DA ANÁLISE DINÂMICA

O problema de dinâmica estrutural difere de seu equivalente estático em dois importantes aspectos. A primeira diferença a ser notada, por definição, é a característica de variação temporal do problema dinâmico, devido ao fato de que o carregamento e a resposta variam com o tempo. Um problema dinâmico não possui uma única solução, como é o caso de um problema estático, estabelecendo uma sucessão de soluções para todos os instantes no histórico de resposta. Assim uma análise dinâmica é claramente mais complexa e consome mais tempo que uma análise estática. O segundo aspecto que diferencia fundamentalmente problemas estáticos e dinâmicos é o surgimento de forças de inércia, associadas às acelerações, e forças de dissipação, usualmente associadas às velocidades, sendo necessária uma metodologia mais robusta para a solução das equações diferenciais no tempo.

Para resolver a equação de equilíbrio dinâmico [Equação (2.15)] são utilizados diversos métodos de integração, dentre eles, o método de diferença central, o método de Newmark, sobreposição modal e etc.

Como critério para seleção de um destes métodos de integração no algoritmo, levou-se em consideração a estabilidade da solução na presença de erros de arredondamento, o custo de processamento para obter a convergência e a precisão do método de fornecer resultados próximos o suficiente da solução exata.

O método da diferença central é um esquema explícito e direto de integração, com precisão de segunda ordem somente se as matrizes de massa e de amortecimento forem diagonais, e outra desvantagem deste método é ser condicionalmente estável; assim, o passo de integração deve ser suficientemente pequeno para que o método não divirja. O método da sobreposição de modos pode acelerar o processo computacional



de resolução da equação de equilíbrio dinâmico se for reduzido o número de modos de vibração utilizado. No entanto, o uso de poucos modos de vibração pode comprometer significativamente a precisão dos resultados obtidos. Por outro lado, o método de Newmark usado como um esquema de segunda ordem é incondicionalmente estável, permitindo a sua utilização com um passo de integração maior, fazendo com que aumente sua convergência.



## 6.2 ETAPAS DA ANÁLISE TRANSIENTE

A seqüência de todas as etapas envolvidas para a solução da Equação (2.15), através do método de Newmark, desde os dados de entrada importados da planilha Excel, que inclui as duas primeiras freqüências naturais do sistema com seus respectivos fatores de amortecimento, até a obtenção dos deslocamentos, velocidades e acelerações a cada passo de tempo de todos os nós da estrutura, é mostrada na figura abaixo.

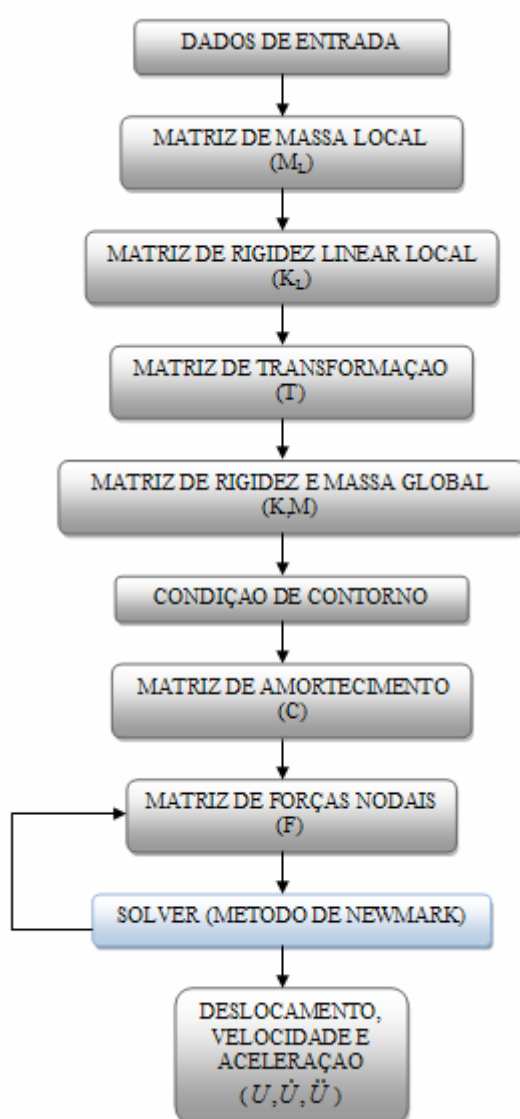


Figura 6.1 Etapas da Análise Transiente

### 6.3 MATRIZ DE AMORTECIMENTO

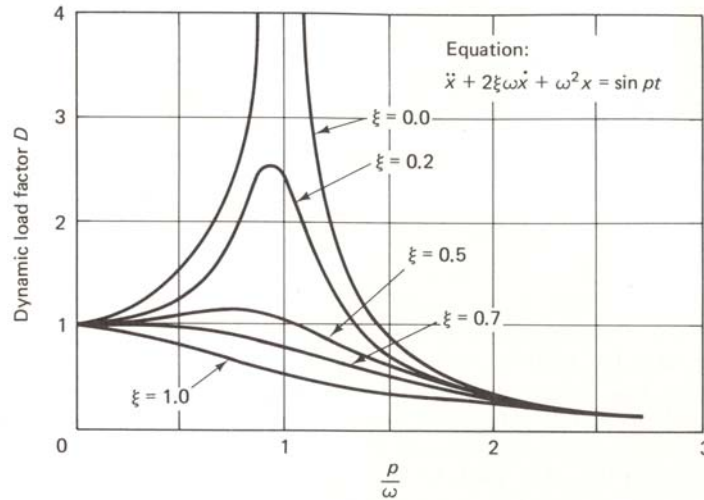
É observado que na resposta dinâmica da estrutura existe energia dissipada. Geralmente são as forças de amortecimento que estão relacionadas a esse processo. Diferentemente da massa e rigidez, o amortecimento não é necessariamente uma propriedade inerente ao sistema. As forças de amortecimento não dependem apenas do sistema oscilante mais também do meio circundante.

Três casos diferentes de amortecimento são classificados, de acordo com o valor do coeficiente de amortecimento estrutural  $c$  e do coeficiente crítico  $c_{cr}$ :

- amortecimento supercrítico ( $c > c_{cr}$ ): o sistema não é oscilatório;
- amortecimento crítico ( $c = c_{cr}$ ): o sistema está na iminência para oscilar;
- amortecimento subcrítico ( $c < c_{cr}$ ): o sistema oscila em torno da sua posição de equilíbrio.

O efeito do amortecimento em um sistema vibratório é ilustrado na Figura 6.2, a título de exemplo. Nela está representada o fator de carga dinâmico  $D = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}}$  como uma

função de  $p/\omega$  (relação entre a frequência de excitação e a frequência natural) e do fator de amortecimento  $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$ .



**Figura 6.2** Fator de Carga Dinâmica

A abordagem do amortecimento para o Método da Superposição Modal e para os Métodos de Integração Direta é diferente, pois no primeiro há a necessidade de se resolver a equação diferencial de movimento desacoplada para cada grau de liberdade, e somente o fator de amortecimento é exigido; no segundo método é necessário obter diretamente a matriz de amortecimento [C]. Na prática é mais fácil determinar ou estimar o fator de amortecimento modal associado a cada frequência ao invés de se obter diretamente o coeficiente  $c$ , calculando a matriz de amortecimento através da combinação da matriz de massa e rigidez do sistema, mantendo a condição de ortogonalidade dos modos de vibração. Um caso especial, de uma dessas combinações é o amortecimento de Rayleigh, dado por:

$$C = \alpha.[M] + \beta.[K] \quad (6.1)$$

onde,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes a serem determinadas.

Utilizando-se das propriedades de ortogonalidade dos modos de vibração  $\phi_i^T.[K].\phi_i = \omega_i^2.\phi_i^T.[M].\phi_i$ , e admitindo  $\phi_i^T.[C].\phi_i = 2.\omega_i.\xi_i.\phi_i^T.[M].\phi_i$  como sendo a parcela de amortecimento, a Equação (6.1) é dada por:

$$2.\omega_i.\xi_i.\phi_i^T.[M].\phi_i = \alpha.\phi_i^T.[M].\phi_i + \beta.\omega_i^2.\phi_i^T.[M].\phi_i \quad (6.2)$$

Considerando a M-ortonormalidade dos modos de vibração na Equação (6.2), as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são determinadas por um sistema linear contendo dois fatores de amortecimento correspondentes a suas duas frequências naturais diferentes.

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

## 6.4 MÉTODO DE NEWMARK

Sendo um processo numérico de integração direta, o equilíbrio dinâmico das equações é realizado em pontos discretos do tempo, associados ao passo de integração  $\Delta t$ , e a variação dos deslocamentos, velocidades e acelerações em cada intervalo de tempo é postulada.

O método de Newmark refere-se à família de processos implícitos de solução da equação de movimento de um sistema, pois tanto o equilíbrio, definido na Equação (2.15), quanto à solução  $U_{t+\Delta t}$  são escritos no mesmo tempo  $t+\Delta t$ , ao contrário, por exemplo, do método de diferença central, onde o equilíbrio é satisfeito no tempo  $t$  e a solução obtida para o tempo  $t+\Delta t$  caracterizando-se então como um método "explícito".

Definindo os coeficientes  $\alpha$  e  $\delta$  como a variação da aceleração em um passo de tempo, e truncando o termo de terceira ordem da expansão do deslocamento  $U_{t+\Delta t}$  e da velocidade  $\dot{U}_{t+\Delta t}$  em Série de Taylor, o método sugere as seguintes equações.

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \cdot \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{U}_t + \alpha \cdot \Delta t^3 \cdot \ddot{\ddot{U}}_t \quad (6.4)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t \cdot \ddot{U}_t + \delta \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{\ddot{U}}_t \quad (6.5)$$

Substituindo a aceleração linear  $\ddot{\ddot{U}}_t = \frac{\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t}{\Delta t}$  nas Equações (6.4) e (6.5), as duas equações fundamentais do método, são dadas por:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \left[ (1-\delta) \cdot \ddot{U}_t + \delta \cdot \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (6.6)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t \cdot \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \cdot \ddot{U}_t + \alpha \cdot \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \cdot \Delta t^2 \quad (6.7)$$

Destacando  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$  na Equação (6.7) e substituindo na equação (6.6), duas equações para  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{U}_{t+\Delta t}$  em termos de  $U_{t+\Delta t}$  como única variável desconhecida, temos:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U_t - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}_t - \left( \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \ddot{U}_t \quad (6.8)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} U_{t+\Delta t} - \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} U_t + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \cdot \dot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( 2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \cdot \ddot{U}_t \quad (6.9)$$

Substituindo as equações (6.8) e (6.9) na equação de equilíbrio dinâmico  $[M] \cdot \ddot{U}_{t+\Delta t} + [C] \cdot \dot{U}_{t+\Delta t} + [K] \cdot U_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}$ , esta toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & M \cdot \left[ \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U_t - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}_t - \left( \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \ddot{U}_t \right] + \dots \\ & C \cdot \left[ \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} U_{t+\Delta t} - \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} U_t + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \cdot \dot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( 2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \cdot \ddot{U}_t \right] + K \cdot U_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Destacando a variável desconhecida  $U_{t+\Delta t}$  da Equação (6.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot M + \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot C + K \right] U_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + M \cdot \left[ \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot U_t + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{U}_t + \left( \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \ddot{U}_t \right] + \dots \\ & C \cdot \left[ \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} U_t + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cdot \dot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \cdot \ddot{U}_t \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Adotando constantes de integração  $a_0 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2}$ ,  $a_1 = \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t}$ ,  $a_2 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t}$ ,  $a_3 = \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1$ ,  $a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$ ,  $a_5 = \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$ ,  $a_6 = \Delta t \cdot (1 - \delta)$ ,  $a_7 = \delta \cdot \Delta t$ , nos termos da Equação (6.11), as matriz de rigidez efetiva  $[\hat{K}]$  e a matriz de carga efetiva  $F_{t+\Delta t}$ , são respectivamente determinadas.

$$[\hat{K}] = [K] + a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [C] \quad (6.12)$$

$$\hat{F}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + [M](a_0 \cdot U_t + a_2 \cdot \dot{U}_t + a_3 \cdot \ddot{U}_t) + [C](a_1 \cdot U_t + a_4 \cdot \dot{U}_t + a_5 \cdot \ddot{U}_t) \quad (6.13)$$

Com o deslocamento conhecido do sistema linear  $[\hat{K}]U_{t+\Delta t} = \hat{F}_{t+\Delta t}$ , determina-se a aceleração e a velocidade segundo a formulação abaixo.

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = a_0 \cdot (U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \cdot \dot{U}_t - a_3 \cdot \ddot{U}_t \quad (6.14)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \cdot \ddot{U}_t + a_7 \cdot \ddot{U}_{t+\Delta t} \quad (6.15)$$

Em sistemas lineares, CHAPRA (1985) associa a estabilidade do método de Newmark à seguinte expressão:

$$\frac{\Delta t}{T_{\min}} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta - 2\alpha}} \quad (6.16)$$

$T_{\min}$  é o menor período natural de vibração.

Para  $\delta = \frac{1}{2}$  e  $\alpha = \frac{1}{4}$  a Equação (6.16) resulta em  $\frac{\Delta t}{T_{\min}} \leq \infty$  tornando o método de incondicionalmente estável. Mas a estabilidade não garante a precisão do método de Newmark, sendo esta dependente da duração do passo de integração adotado. É consenso entre autores conhecidos, que valores para  $\Delta t$  da ordem de um décimo do menor período natural do modelo pode produzir resultados satisfatórios.

## 6.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esta seção consiste em avaliar o comportamento dinâmico da estrutura considerando um amortecimento estrutural como combinação linear da massa e rigidez para as seguintes condições:

- Condição 1 - virabrequim girando sob ação da gravidade, com as condições de contorno ( $K_{mola} = \infty$ ) simulando os mancais e com fator de amortecimento  $\xi=3.0\%$ .
- Condição 2 - virabrequim girando em ressonância sob ação da gravidade, com as molas simulando a rigidez ( $K_{mola} = 1.75E+07$  N/m) dos mancais e com fator de amortecimento  $\xi=3.0\%$ .

A estratégia adotada para considerar o virabrequim girando sob ação da gravidade foi variar a direção da aceleração da gravidade a cada passo de tempo com a mesma velocidade angular do sistema.

Os parâmetros considerados para simular a dinâmica da estrutura para os dois casos acima citados são:

- |                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| ▪ $\Delta t = 0.001$ s         | Passo de Tempo                    |
| ▪ $T_{MAX} = 2.5$ s            | Tempo Limite                      |
| ▪ $\omega_{sist} = 53.4$ rad/s | Velocidade Angular do Virabrequim |
| ▪ $\lambda_1 = 26.04$ Hz       | Primeira Freqüência Natural       |
| ▪ $\lambda_2 = 26.06$ Hz       | Segunda Freqüência Natural        |
| ▪ $\xi = 0.03$                 | Fator de Amortecimento            |
| ▪ $K_{mola} = 1.75E+07$ N/m    | Rigidez dos Mancais               |

O gráfico da Figura 6.3 apresenta o deslocamento vertical (curva r) e o deslocamento transversal (curva s), em metros, da extremidade do virabrequim (nó 56) ao longo do tempo referente à condição 1, enquanto que o gráfico da Figura 6.4 mostra a trajetória



do mesmo ponto. A razão da trajetória elíptica da extremidade do virabrequim é a diferença de rigidez do sistema nas direções  $y$  e  $z$ , conforme mencionado no item 4.8.2.

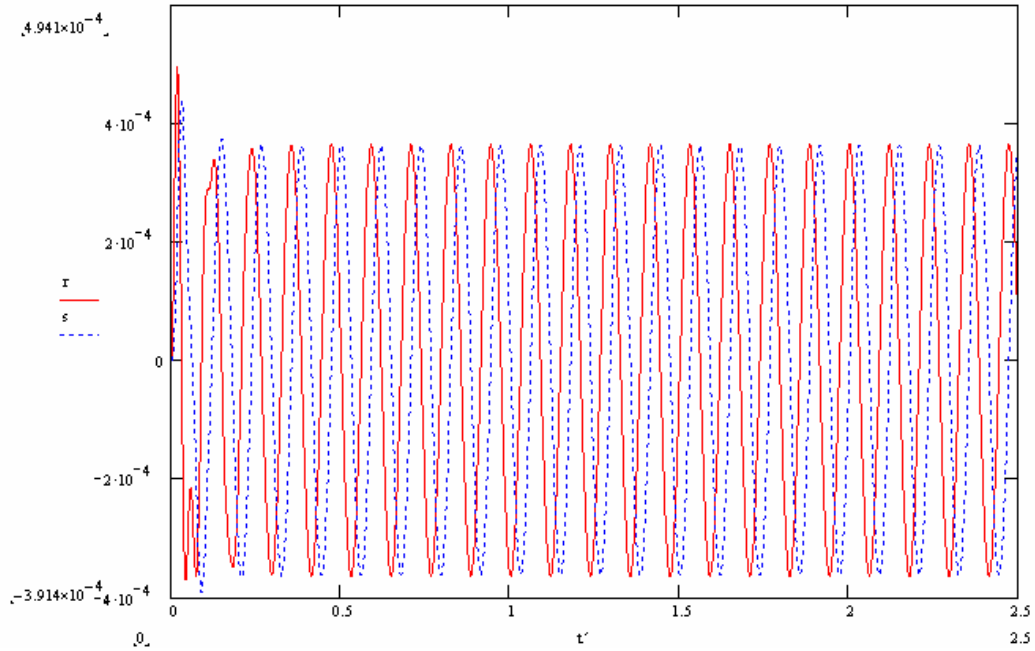


Figura 6.3 Deslocamento (m) Vertical e Transversal do Nó 56 na Condição 1.

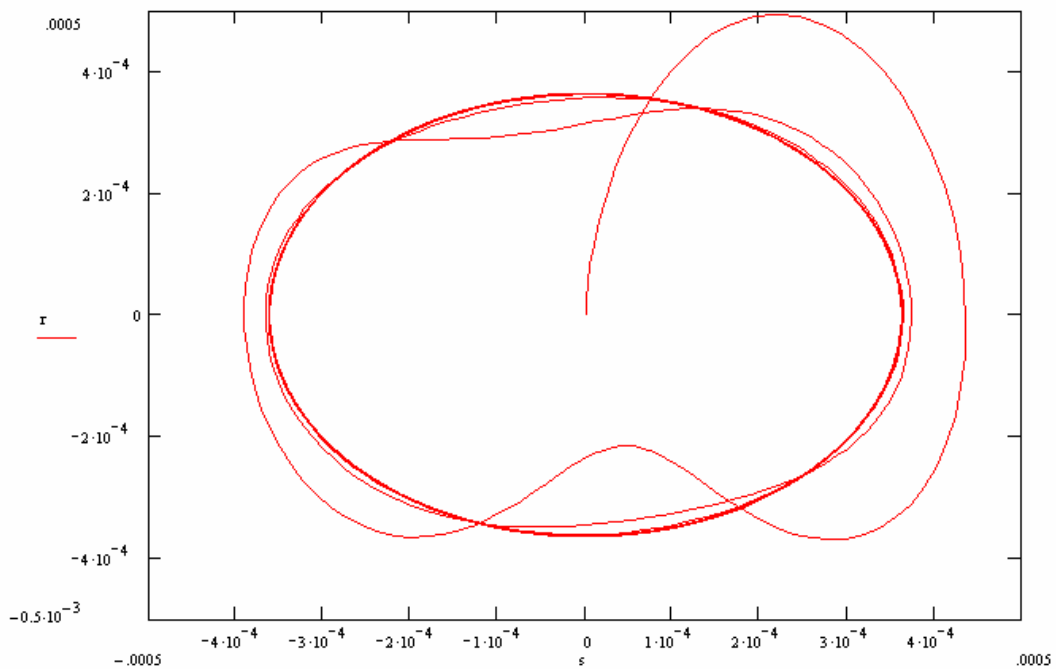
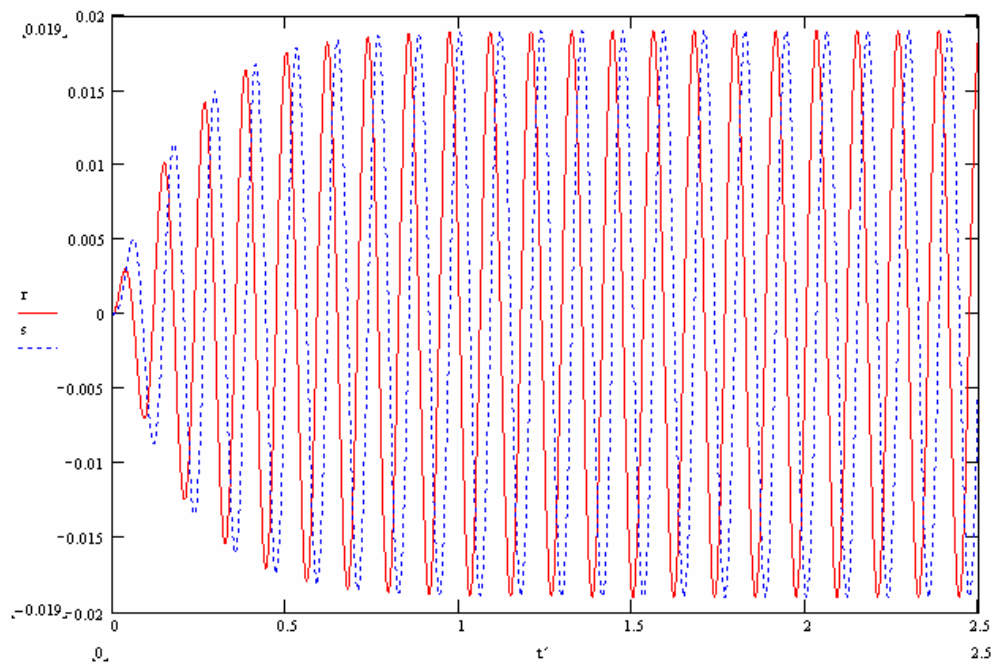


Figura 6.4 Trajetória da Extremidade (Nó 56) na Condição 1, em metros

O gráfico da Figura 6.5 também apresenta o deslocamento vertical (curva r) e o deslocamento transversal (curva s), em metros, do nó 56 ao longo do tempo referente à condição 2, enquanto que o gráfico da Figura 6.6 mostra a trajetória do mesmo nó.

Os deslocamentos verticais e transversais máximos da condição 2 são da ordem de 19mm enquanto que os deslocamentos da condição 1 são da ordem de 0.5mm, mostrando que a frequência de excitação próxima à frequência natural do sistema amplifica



**Figura 6.5** Deslocamento (m) Vertical e Transversal do Nó 56 para o Caso 2.

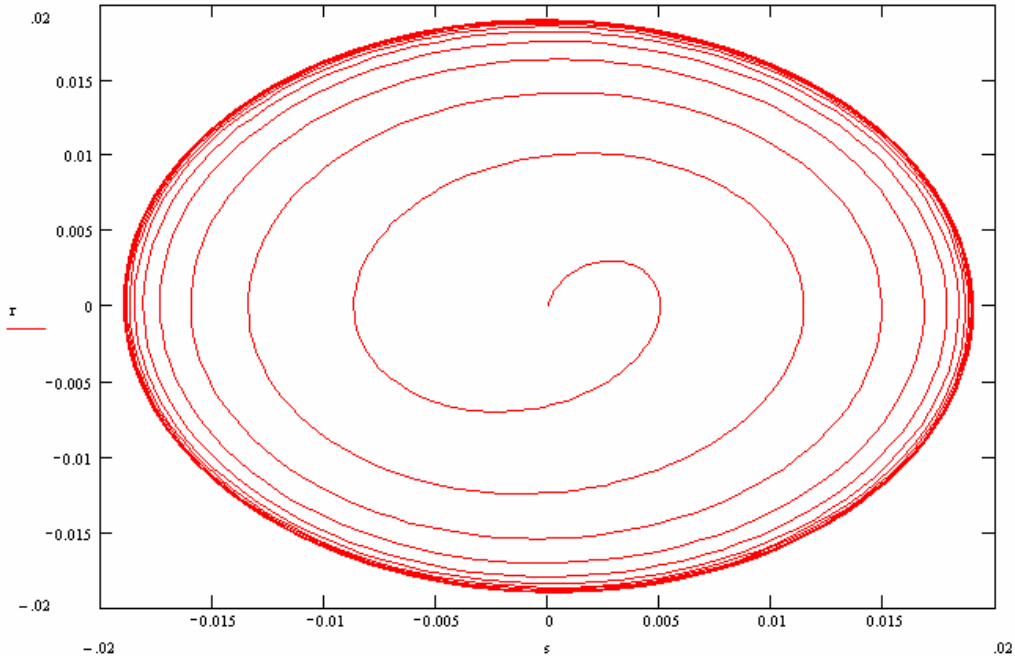


Figura 6.6 Trajetória da Extremidade (Nó 56) na Condição 2, em metros

O gráfico abaixo, semelhante ao da Figura 6.2, apresenta curvas que representam as deflexões máximas transversais do modelo dinâmico, em relação às rigidezes dos mancais para os seguintes fatores de amortecimento:  $\xi=2.0\%$ ,  $\xi=2.5\%$ ,  $\xi=3.0\%$  e  $\xi=3.5\%$ .

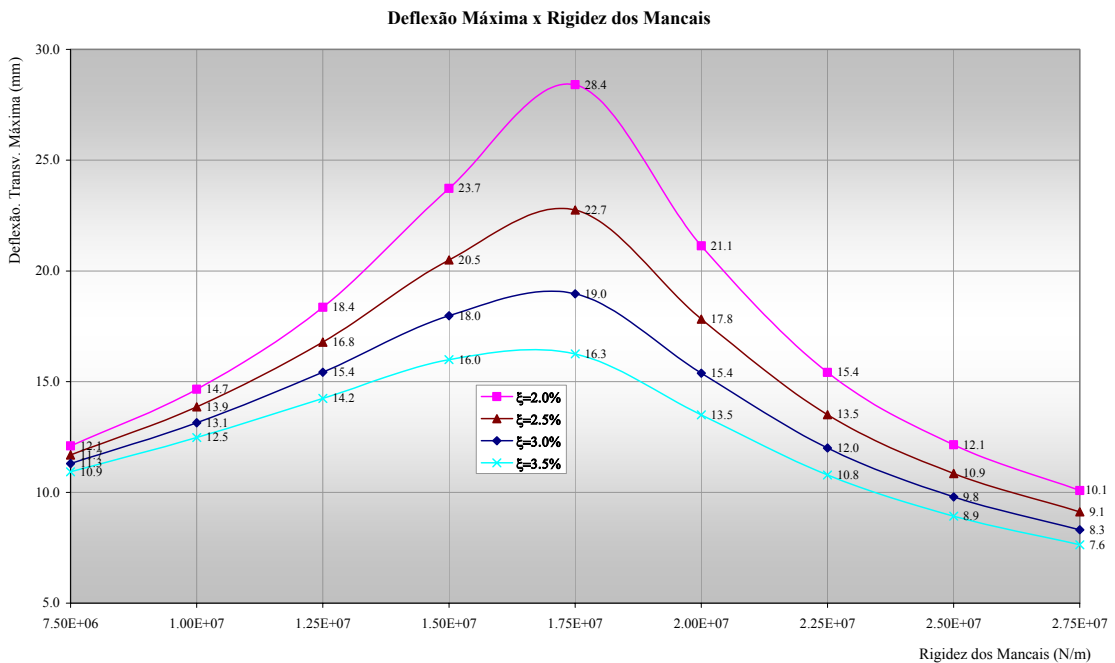


Figura 6.7 Deflexões Máximas Transversais (mm) versus Rigidez dos Mancais

## 7 ANÁLISE TRANSIENTE NÃO-LINEAR

### 7.1 DESCRIÇÃO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR

A não linearidade ocorre por várias causas (plasticidade, grandes deslocamentos, grandes rotações, deformações não-infinitesimais e efeitos derivados do contato entre os elementos considerados), as quais podem ser agrupadas em três categorias (Figura 7.1):

- Não-linearidade de Material
- Não-linearidade Geométrica
- Contato Não-Linear

O comportamento não-linear do tipo constitutivo (BATHE, 1996c), ou a não-linearidade do material, surge devido ao caráter inelástico (plástico, viscoplástico, degradação) que caracteriza as deformações do material. O comportamento não-linear do tipo cinemático (não-linearidade geométrica) é devido a grandes deslocamentos, rotações e deformações que surgem no sistema acompanhadas de modificações na rigidez sob certo carregamento aplicado. O caráter não-linear das condições de contorno devido à interação (contato e atrito) que se produz entre sólidos que atuam no processo ao longo de uma superfície de contato que não é conhecida inicialmente e que varia ao longo do processo.

A não-linearidade geométrica ocorre sempre que os deslocamentos e/ou deformações sejam suficientemente significativos para que a configuração inicial não possa mais ser utilizada para exprimir as condições de equilíbrio e compatibilidade. Um exemplo simples é a “vara de pescar” sujeita a um carregamento apresentado na figura acima, induzindo um aumento em sua rigidez devido sua própria configuração deformada. Este tipo de não-linearidade engloba também os efeitos de acoplamento entre torção, flexão e esforços axiais, que serão apresentados posteriormente neste capítulo.

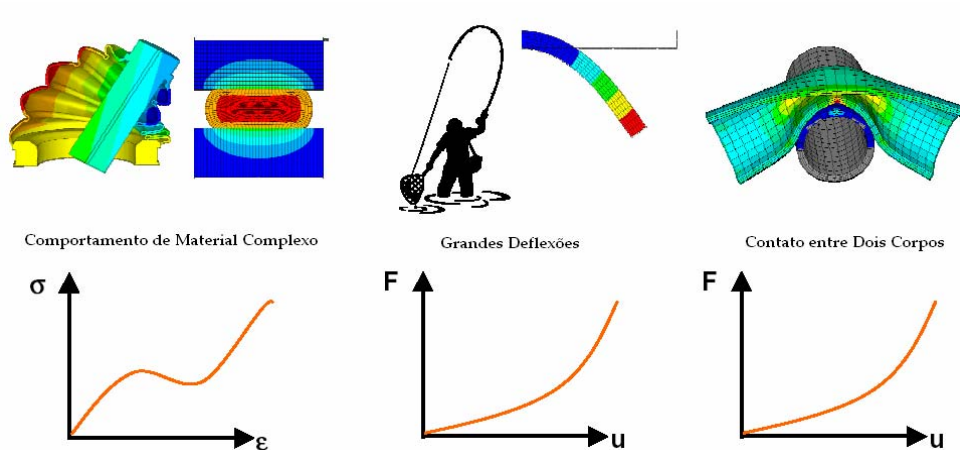


Figura 7.1 Tipos de Comportamento Não-Linear

Observando os gráficos da figura acima, nota-se exatamente as características fundamentais do comportamento não-linear através da mudança da rigidez estrutural, onde a equação de equilíbrio dinâmico, apresentada na Equação (2.15), torna-se não-linear quando a matriz de rigidez  $[K]$  é dependente do deslocamento  $U(t)$  ou de suas derivadas, dada por:

$$[M].\{\ddot{U}(t)\} + [C].\{\dot{U}(t)\} + [K.(U(t))].\{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (7.1)$$

Em análises não-lineares do tipo passo-a-passo, onde o interesse está centrado na história de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento, a formulação Lagrangeana é particularmente apropriada. Posto isso, o presente trabalho restringir-se-á fundamentalmente a formulações do tipo Lagrangeana, tendo-se em vista, ainda, que a maioria das formulações, de elementos finitos com não-linearidade geométrica, encontradas na literatura se baseia nesse tipo de referencial.

## 7.2 ETAPAS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR

A seqüência de todas as etapas envolvidas, considerando a variação da matriz de rigidez do sistema, referentes aos termos não-lineares, a cada passo de tempo através da integração direta (método de Newmark) para análise não-linear, é mostrada na figura abaixo.

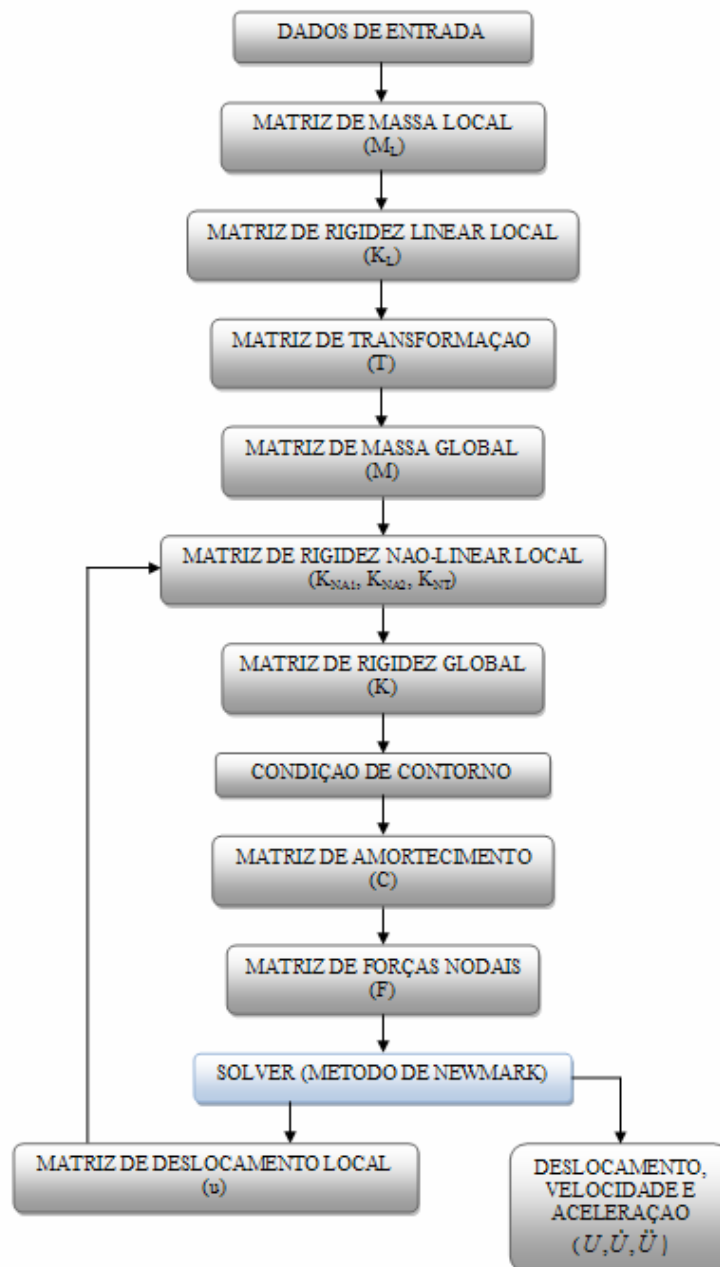


Figura 7.2 Etapas da Análise Não-Linear

### 7.3 MATRIZES DE RIGIDEZ NÃO-LINEAR

Os componentes da matriz de rigidez não-linear surgem devido à retenção dos termos de segunda ordem na relação deformação-deslocamento e resulta nos termos 5-12 da Equação (2.8). As contribuições de cada termo tornam-se claras quando a matriz não-linear é novamente reduzida em matrizes componentes.

$$[K_N] = [K_{NA1}] + [K_{NA2}] + [K_{NT}] \quad (7.2)$$

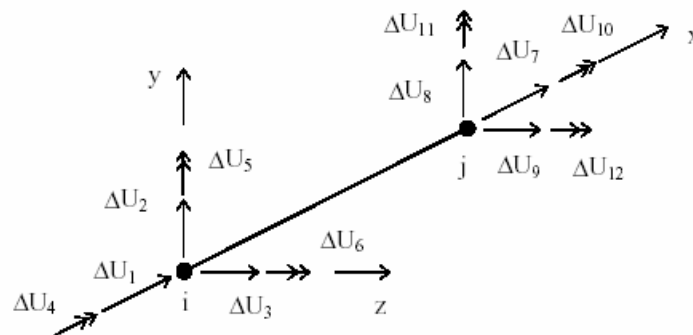
A matriz  $[K_{NA1}]$  da Equação (7.2) representa o acoplamento entre a flexão e a força axial referentes aos termos 6 e 7 da Equação (2.8).

$$[K_{NA1}] = \frac{E.A.(U_7 - U_1)}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_x}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

A matriz  $[K_{NA2}]$  também representa o acoplamento entre a flexão e a força axial, sendo resultado dos termos 8 e 9 da Equação (2.8).

$$[K_{NA2}] = \frac{E \cdot I_{yz} \cdot (U_7 - U_1)}{L^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.L^2 & 0 & 0 & 0 & 3.L^3 & 0 & -6.L^2 & 0 & 0 & 0 & 3.L^3 \\ 0 & 0 & 6.L^2 & 0 & -3.L^3 & 0 & 0 & 0 & -6.L^2 & 0 & -3.L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.L^3 & 0 & 2.L^4 & 0 & 0 & 0 & 3.L^3 & 0 & L^4 & 0 \\ 0 & 3.L^3 & 0 & 0 & 0 & 2.L^4 & 0 & -3.L^3 & 0 & 0 & 0 & L^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.L^2 & 0 & 0 & 0 & -3.L^3 & 0 & 6.L^2 & 0 & 0 & 0 & -3.L^3 \\ 0 & 0 & -6.L^2 & 0 & 3.L^3 & 0 & 0 & 0 & 6.L^2 & 0 & 3.L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.L^3 & 0 & L^4 & 0 & 0 & 0 & 3.L^3 & 0 & 2.L^4 & 0 \\ 0 & 3.L^3 & 0 & 0 & 0 & L^4 & 0 & -3.L^3 & 0 & 0 & 0 & 2.L^4 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Observe que estas matrizes dependem dos deslocamentos  $U_7$  e  $U_1$  de cada elemento a cada passo.  $U_7$  e  $U_1$  correspondem aos deslocamentos nodais na direção  $x$  do sistema de coordenadas de cada elemento, conforme mostra a figura abaixo.



**Figura 7.3** Sistema de referência e graus de liberdade do elemento de pórtico espacial

A matriz  $[K_{NT}]$  representada na Equação (7.5) também contribui na rigidez geométrica e representa os efeitos de torção de cada elemento.

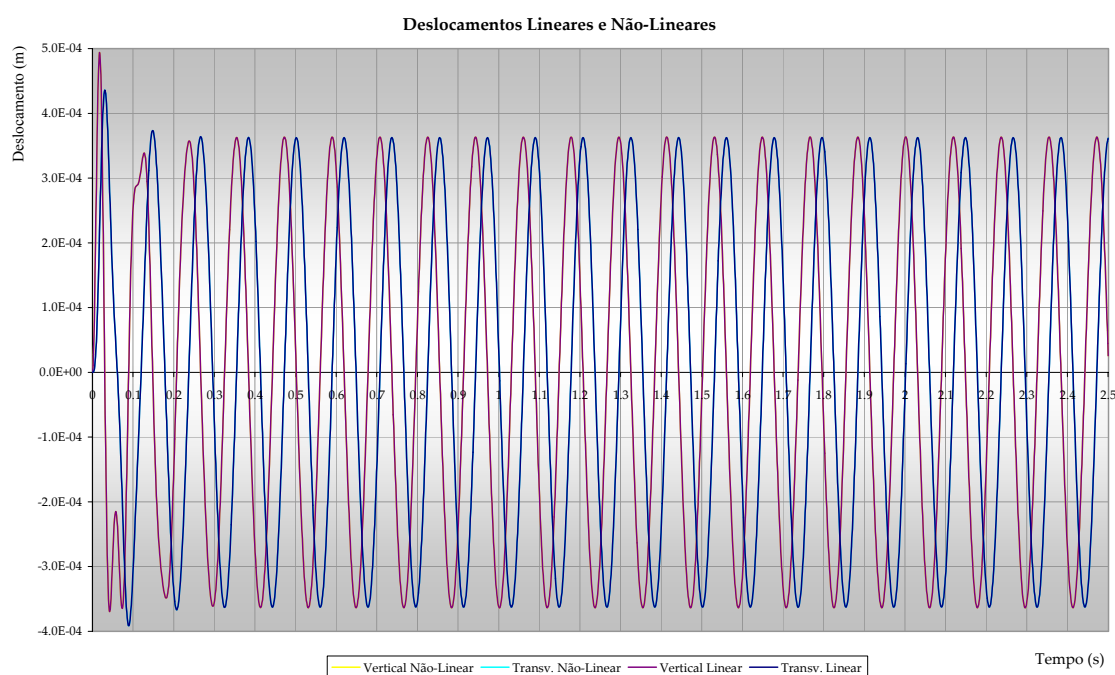


$$[K_{NT}] = (1+2\nu) \cdot \frac{G I_x (U_{10} - U_4)}{L^2} \cdot \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{L}{2} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \cdot \frac{1+\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

Foi implementado o processo incremental de carregamento para permitir análises não lineares geométricas das estruturas. Este processo consiste basicamente no carregamento gradativo da estrutura e para cada passo de carga o acúmulo dos esforços e deslocamentos globais e a atualização da geometria. A matriz de rigidez dos elementos fica acrescida da matriz geométrica, variável a cada incremento de carga.

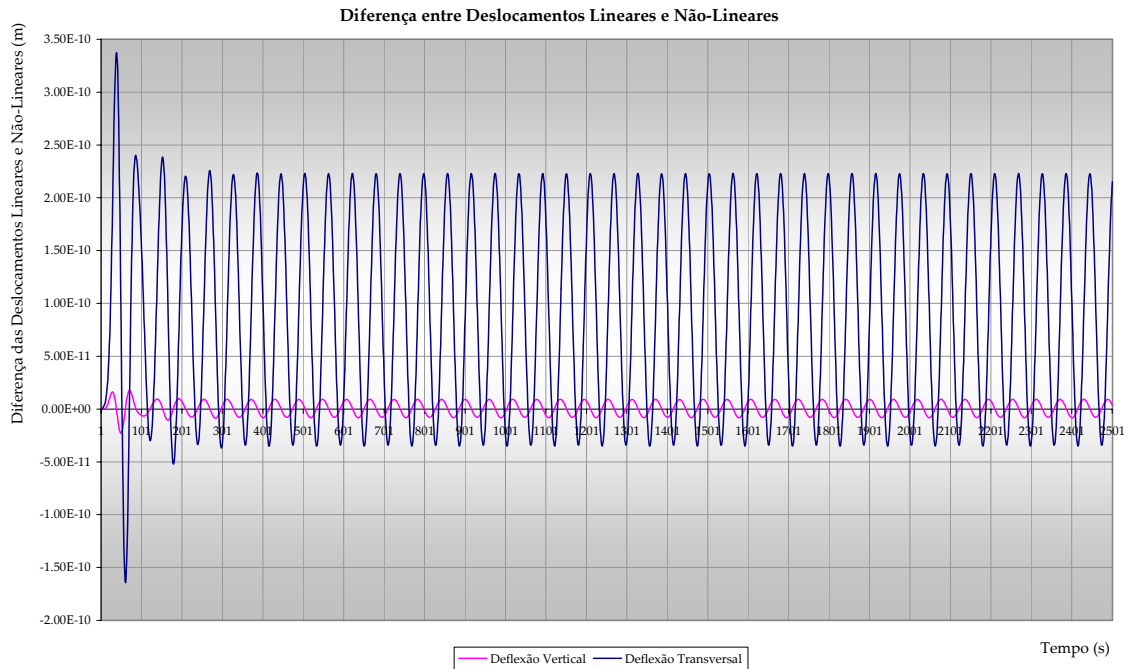
## 7.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A avaliação do comportamento dinâmico e não-linear da estrutura, neste estudo, consiste em comparar com as mesmas condições apresentadas na seção 6.5. Os deslocamentos verticais e transversais da extremidade do modelo referentes às análises lineares e não-lineares da condição 1, estão representados na Figura 7.4.

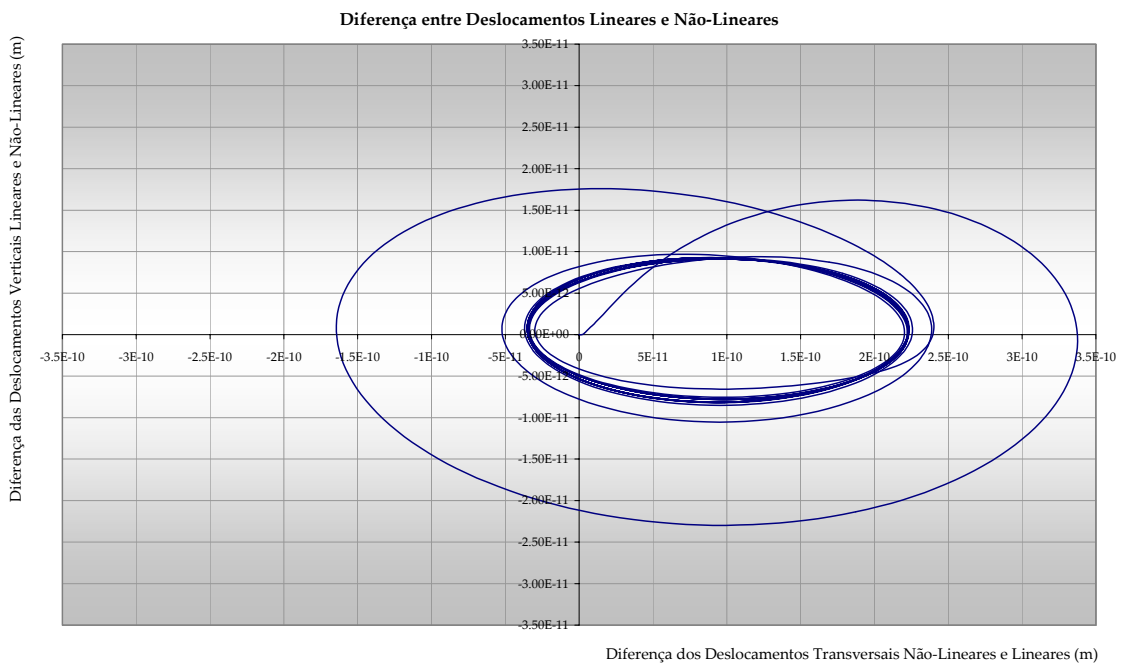


**Figura 7.4** Deslocamentos (m) Lineares e Não-Lineares da Condição 1

O gráfico acima mostra que praticamente não há diferença entre os deslocamentos lineares e não-lineares. Este fato ocorre devido à elevada rigidez da estrutura do virabrequim e ao baixo carregamento externo (aceleração da gravidade) aplicado ao sistema, tornando as matrizes de rigidez não-lineares menos eficazes a pequenos deslocamentos, já que estas dependem da diferença dos deslocamentos entre os nós dos elementos a cada passo de tempo. Da ordem de grandeza de  $10^{-7}$  mm, a diferença entre deslocamentos lineares e não-lineares é mínima com relação aos próprios deslocamentos da estrutura da ordem de  $10^{-1}$  mm, conforme mostram os gráficos das Figuras 7.5 e 7.6.

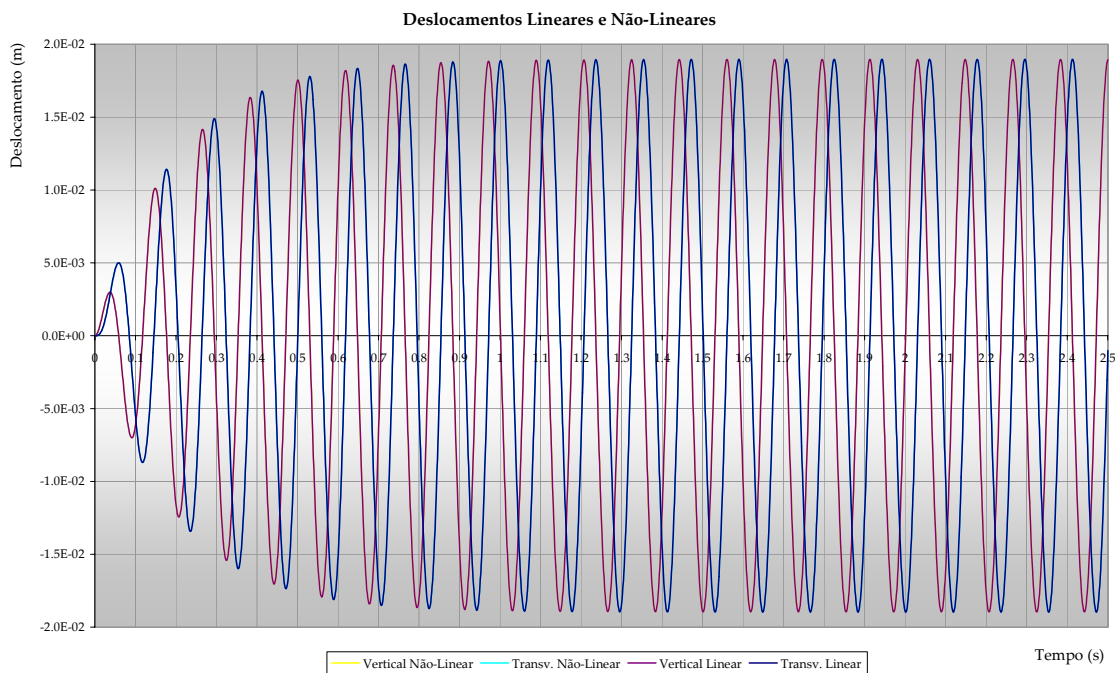


**Figura 7.5** Diferença dos Deslocamentos Lineares e Não Lineares da Condição 1, em metros



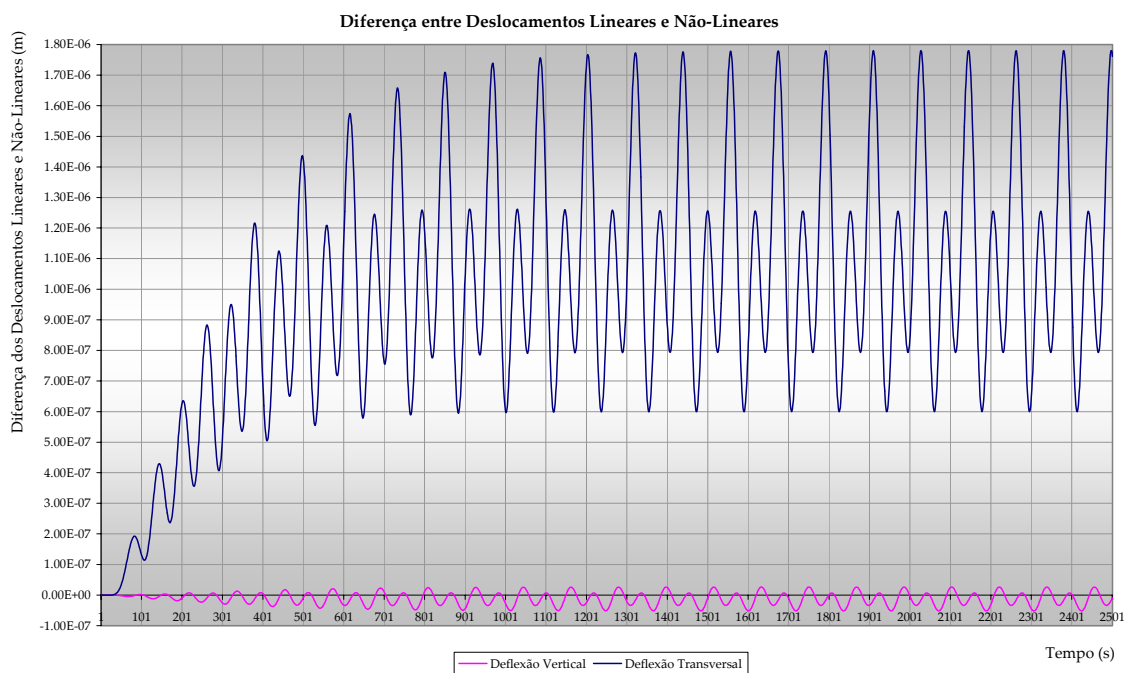
**Figura 7.6** Diferença das Trajetórias Lineares e Não Lineares da Condição 1, em metros

Os deslocamentos verticais e transversais da extremidade do modelo referentes às análises lineares e não-lineares da condição 2, estão representados no gráfico a seguir.

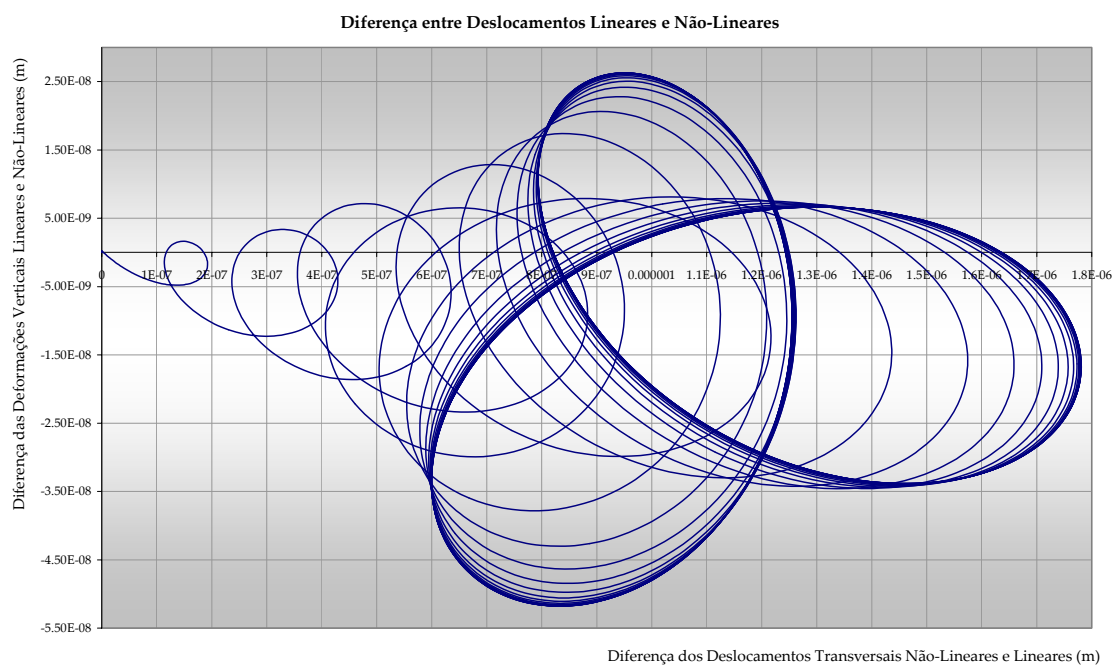


**Figura 7.7** Deslocamentos (m) Lineares e Não-Lineares da Condição 2

Da ordem de grandeza de  $10^{-3}$  mm, a diferença entre deslocamentos lineares e não-lineares, na condição de ressonância, é razoável com relação aos próprios deslocamentos da estrutura de ordem  $10^1$  mm, conforme as Figuras 7.8 e 7.9.



**Figura 7.8** Diferença dos Deslocamentos Lineares e Não Lineares da Condição 2, em metros



**Figura 7.9** Diferença das Trajetórias Lineares e Não Lineares da Condição 2, em metros

## 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas a partir do desenvolvimento do estudo e resultados alcançados. Sugestões para futuros estudos de modo a otimizar o algoritmo e a metodologia, serão apresentadas.

No desenvolvimento da presente pesquisa, utilizou-se um equacionamento baseado em uma formulação lagrangeana via método de elementos finitos. A discretização permitiu a construção das matrizes de rigidez lineares e não-lineares, e da matriz de massa da estrutura. A matriz de rigidez linear considerando o efeito de cisalhamento apresentou melhores resultados com relação à matriz que não considera tal efeito, devido principalmente pela razão  $h/L$  dos elementos que compõe o virabrequim.

Em relação aos métodos de solução das equações de equilíbrio dinâmico, optou-se pelo método de integração direta em contraposição ao método da superposição modal, pela necessidade de trabalhar com as matrizes completas, sem transformações simplificadoras que pudessem introduzir algum erro na solução. Na solução da equação de vibração livre sem amortecimento, o método de iteração inversa fornece resultados precisos referentes aos primeiros modos. A escolha do método de Newmark com aceleração média constante para integração da equação de equilíbrio dinâmico foi devido ao seu processamento incondicionalmente estável. Com isso, todos os métodos de análise inseridos no ambiente matemático foram validados para obter resultados confiáveis relativos aos novos modelos rotodinâmicos, permitindo melhor compreensão dos fenômenos envolvidos.

Os resultados referentes aos comportamentos dinâmicos lineares e não-lineares, permitiram concluir, que os efeitos não-lineares para a condição em que os mancais apresentam rigidez infinita (condição de contorno) são desprezíveis, enquanto que para condição ressonante, referente aos mancais com rigidez de  $1.75E+07$  N/m, tais efeitos tornam-se significativos.

Como proposta para futuros estudos, as idéias apresentadas podem ser divididas em proposta para o desenvolvimento do programa e proposta quanto aos resultados obtidos.

I) Para desenvolvimento do código, sugere-se:

- Atualização da matriz de massa da estrutura, a cada vez que se alteram as características geométricas da mesma,
- Consideração da matriz de amortecimento não-linear,
- Consideração dos efeitos giroscópico e centrífugo em estruturas rotodinâmicas,
- Adotar metodologias mais robustas para a solução da equação de vibração livre.

II) De forma a aferir os resultados obtidos do comportamento estrutural não-linear do virabrequim, sugere-se realizar testes computacionais mais robustos, como modelos numéricos com elementos sólidos, acompanhados de testes físicos onde sejam utilizadas mesmas condições.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES FILHO, A. (2000) – *Elementos Finitos / A Base da Tecnologia CAE* - Érica, São Paulo.

BAPTISTA, L.A.R. (MAI/1993) – “Análise do Alinhamento de Eixos Propulsores” – Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Engenharia Oceânica/ COPPE – Tese de M.Sc. – pg.11-40; R.J.

BATHE K.J. (1996) – *Finite Element Procedures* - Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N.J., E.U.A.

BEER, F.P. ; JOHNSTON, E.R. (1984) – *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamic*” – Fourth Edition, McGraw-Hill, Inc., New York.

CHAPRA, S.C. (1985) – *Numerical Methods for Engineers*- Second Edition, McGraw-Hill, E.U.A.

DAHLER, G.; BRODIN, E.; VARTDAL, B.J.; CHISTENSEN, H.W.; JAKOBSEN, S.B.; OK, Y.K.; HEO, J.H.; PARK, K.R. (2004) – “A Study of Flexible Hulls, Flexible Engines, Crank Shaft Deflections and Engine Bearing Loads for VLCC Propulsion Machinery”- International Council on Combustion Engines – CIMAC; Kyoto.

DEN HARTOG, J.P. (1985) – “Mechanical Vibrations” – Dover Publications, Inc., New York.

DOMENICO, C.; SILVA NETO, S. F.; ALBRECHT, C. H. (OUT/1997) - “Sistema para Estimativa de Assinatura Acústica, Gerenciamento e Tratamento de Dados de Ruído e Vibração de Navios e Submarinos” –REVISTA MARÍTIMA BRASILEIRA – Suplemento Especial: PESQUISA NAVAL – Número 10 – Capítulo XV - págs. 199-206.



DYKSTRA, M.W. (MAY/1996) – *Nonlinear Drill String Dynamics* – The University of Tulsa – Department of Petroleum Engineering – Ph.D. Dissertation – pg 50-85; Tulsa, Oklahoma.

FEMAP, N. (2005) – *Help Topics-Commands-Finite Element Modeling* – Version 9.0.1.

GERE, J.M. ; WEAVER Jr., W. (1965) – *Analysis of Framed Structures* - New York.

LEGUE, H. J. L.; LOPES, T. A. P.; SILVA NETO, S. F. (OUT-1990) - “Modelação e Análise da Vibração da Estrutura da Praça de Máquinas do Navio” - 13º Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval da Sociedade Brasileira de Engenharia Naval (SOBENA), pp. 249-274. RJ.

LOPES, T. A. P.; TACQUES, R. R.; TROYMAN, A. C. R.; SILVA NETO, S. F.; NOVAES, S. F.; NOVAES, F. (SET-1985) - “Failure Identification and Prevention in Rotating Equipment by Vibration Measurement” - Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Symposium of Offshore Engineering, pp. 817-832. RJ.

LOPES, T. A. P.; SILVA NETO, S. F.; TROYMAN, A. C. R. (OUT-1986) - “Testes de Vibração e Ruído em Navios” - II Seminário Internacional de Controle de Ruído no Sétimo Encontro da Sociedade Brasileira de Acústica (SOBRAC), Paper A-4. RJ.

LOPES, T. A. P.; TROYMAN, A. C. R.; SILVA NETO, S. F.; ADEJORO, S. T. (SET/2002) – “AD4: A System for Intelligent On-Line Condition Supervising” – COMADEM 2002 Conditioning, Monitoring and Diagnostic Engineering Management – U.K.

MACHADO, C. L. M.; CABRAL, R. P.; SILVA NETO, S. F. (NOV-2004) - “Análise Dinâmica da Interação Casco-Linha de Eixo de um Rebocador” - 20º Congresso Nacional de Transportes Marítimos, Construção Naval e Offshore da Sociedade Brasileira de Engenharia Naval (SOBENA), RJ.

MEIROVITCH, L. (1975) – *Elements of Vibration Analysis* – International Student Edition – College of Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University.

MELLO, U. G. V.; SILVA NETO, S. F.; NOVAES, F.; PINTO, L. A. V. (NOV/2006) – “Testes em Provas de Mar: Banco de Dados de Vibração como Apoio para a Melhoria da Qualidade da Construção de Navios” - 21º Congresso Nacional de Transportes Marítimos, Construção Naval e Offshore da Sociedade Brasileira de Engenharia Naval (SOBENA), RJ.

NOVAES, F.; PINTO, L. A. V.; SILVA NETO, S. F. (NOV/99) – “LEDAV-NOISE: Sistema Computacional para Gerenciamento de Dados Numérico-Experimentais de Ruído e Vibração em Sistemas Oceânicos” - XX CILAMCE - Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – São Paulo.

PILKEY, W. D. (2002) - *Analysis and Design of Elastic Beams: Computational Methods* – Wiley - New York.

PRZEMIENIECKI, J.S. (1985) – *Theory of Matrix Structural Analysis* – Dover Publications, Inc., New York.

RAO, S.S. (1990) – *Mechanical Vibrations* – Second Edition, Addison-Wesley Publishing Co., New York.

ROARK, R.J. ; YOUNG, W.C. (1975) – *Formulas for Stress and Strain* – Fifth Edition, McGraw-Hill, Inc., New York.

SILVA NETO, S. F.; TROCADO, E. T. (SET/96) - “Avaliação Numérica da Influência da Rigidez do Estaiamento Lateral de Motores na Vibração da Praça de Máquinas” - 16º Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval” - SOBENA'96 - RJ - págs. 421-428.

SORIANO, H.L. (2003) – *Método de Elementos Finitos em Análise de Estrutura*, ESUSP, São Paulo, 2003.

SVERKO, D. (OUT/2005) – “Investigation on Hull Deflection and its Influence on Propulsion Shaft Alignment” – SMTC&E, Houston.

WORKBENCH, A. (2007) – *User Manual - Documentation for Ansys Workbench* – Release 11.0.



## A.1.2 Solver Mathcad

```

E ← tab9,11
v ← tab10,11
ρ ← tab11,11
G ←  $\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ 
i ← 1
while tabi,6 ≠ 0
  i ← i + 1
N ← i - 1
for n ∈ 1..N + 1
  for i ∈ 1..3
    noi ← tabn,i
  noden ← no
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..2
    elei ← node(tabn,4+i)
  elemn ← ele
  Ln ←  $\sqrt{\sum [(elemn)_2 - (elemn)_1]^2}$ 
  An ← tabtabn,7,11
  Iyn ← tabtabn,7,12
  Izn ← tabtabn,7,13
  Jn ← tabtabn,7,14
  Asyn ← tabtabn,7,15
  Aszn ← tabtabn,7,16
  αn ← tabn,8
  φyn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{G \cdot A_{sy_n} \cdot (L_n)^2}$ 
  φzn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{G \cdot A_{sz_n} \cdot (L_n)^2}$ 

```

for  $n \in 1..N$

for  $i \in 1..12$

for  $j \in 1..12$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=1)] \vee [(i=7) \wedge (j=7)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=7)] \vee [(i=7) \wedge (j=1)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=2)] \vee [(i=8) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=6)] \vee [(i=2) \wedge (j=12)] \vee [(i=6) \wedge (j=2)] \vee [(i=12) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=6)] \vee [(i=8) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=3)] \vee [(i=9) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=5)] \vee [(i=3) \wedge (j=11)] \vee [(i=5) \wedge (j=3)] \vee [(i=11) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=5)] \vee [(i=9) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=4)] \vee [(i=10) \wedge (j=10)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=10)] \vee [(i=10) \wedge (j=4)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=5)] \vee [(i=11) \wedge (j=11)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=5)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=6)] \vee [(i=12) \wedge (j=12)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=6)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise}$$

$$K_{L_n} \leftarrow k_1$$

$$C_{x_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_1 - [(\text{elem}_n)_1]_1}{L_n}$$

$$C_{y_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_2 - [(\text{elem}_n)_1]_2}{L_n}$$

$$C_{z_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_3 - [(\text{elem}_n)_1]_3}{L_n}$$

for  $i \in 1..3$

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} = 0$$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow 0 \quad \text{otherwise}$$

for  $i \in 1..3$

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \neq 0$$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{x_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{z_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

for  $i \in 1..3$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i+3,j+3} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+0,j+0} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+9,j+9} \leftarrow t_{i,j}$$

$$T_n \leftarrow t$$

```

for n ∈ 1..N
  | KLn ← 1000000·KLn if tabn,9 = 1
  | KGn ← (Tn)-1·KLn·Tn
for i ∈ 1..6·(N+1)
  for j ∈ 1..6·(N+1)
    Ki,j ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      | Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,5-1) ← Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,5-1) + (KGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i ≤ 6)
      | Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,6-2) ← Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,6-2) + (KGn)i,j if (j > 6) ∧ (i ≤ 6)
      | Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,5-1) ← Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,5-1) + (KGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i > 6)
      | Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,6-2) ← Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,6-2) + (KGn)i,j if (j > 6) ∧ (i > 6)
for n ∈ 1..N+1
  for i ∈ 1..6
    fn,i ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..6
    | f(tabn,5),i ← f(tabn,5),i if tabn,9 = 1
    | f(tabn,5),i ← f(tabn,5),i +  $\frac{\rho \cdot \text{tab}_{12+i,11}}{2} \cdot A_n \cdot L_n$  if tabn,9 = 0
    | f(tabn,6),i ← f(tabn,6),i if tabn,9 = 1
    | f(tabn,6),i ← f(tabn,6),i +  $\frac{\rho \cdot \text{tab}_{12+i,11}}{2} \cdot A_n \cdot L_n$  if tabn,9 = 0
for n ∈ 1..N+1
  for i ∈ 1..6
    | cci+6·(n-1) ← tabn,i+17
    | Fi+6·(n-1) ← tabn,i+24 + fn,i
for i ∈ 1..6·(N+1)
  for j ∈ 1..6·(N+1)
    | Ki,j ← 1 if (i = j) ∧ (cci = 0)
    | Fi ← 0 if cci = 0
    | Ki,j ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)
    | Kj,i ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)

```



```

A2 ← K
C2 ← F
U2 ← A2
n ← 1
while n ≠ 0
  | Sn ← "size" on error A2n,n
  | (break) if Sn = "size"
  | n ← n + 1
N2 ← n - 1
for i ∈ 1..N2
  for j ∈ 1..N2
    f2i,j ← 0
  for n ∈ 1..N2 - 1
    for i ∈ n + 1..N2
      | f2i,n ←  $\frac{A_{2i,n}}{A_{2n,n}}$ 
      | for j ∈ 1..N2
      |   U2i,j ← U2i,j - A2n,j ·  $\frac{A_{2i,n}}{A_{2n,n}}$ 
      | A2 ← U2
  for i ∈ 1..N2
    for j ∈ 1..N2
      | L2i,j ← 1 if i = j
      | L2i,j ← f2i,j otherwise
D21 ← C21
for i ∈ 2..N2
  | g ← 0
  | for j ∈ 1..i - 1
  |   g ← g + L2i,j · D2j
  | D2i ← C2i - g
X2N2 ←  $\frac{D2_{N2}}{U2_{N2,N2}}$ 
for i ∈ N2 - 1..1
  | g ← 0
  | for j ∈ i + 1..N2
  |   g ← g + U2i,j · X2j
  | X2i ←  $\frac{D2_i - g}{U2_{i,i}}$ 
for i ∈ 1..N + 1
  for j ∈ 1..6
    Ui,j ← X2j+6-(i-1),1

```



## A.2.2 Solver Mathcad

```

E ← tab9,11
v ← tab10,11
ρ ← tab11,11
G ←  $\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ 
i ← 1
while tabi,6 ≠ 0
  i ← i + 1
N ← i - 1
for n ∈ 1..N + 1
  for i ∈ 1..3
    noi ← tabn,i
  noden ← no
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..2
    elei ← node(tabn,4+i)
  elemn ← ele
  Ln ←  $\sqrt{\sum [(elemn)_2 - (elemn)_1]^2}$ 
  An ← tabtabn,7,11
  Iyn ← tabtabn,7,12
  Izn ← tabtabn,7,13
  Jn ← tabtabn,7,14
  Asyn ← tabtabn,7,15
  Aszn ← tabtabn,7,16
  αn ← tabn,8
  φyn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{G \cdot A_{sy_n} \cdot (L_n)^2}$ 
  φzn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{G \cdot A_{sz_n} \cdot (L_n)^2}$ 

```

```

for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      mi,j ←  $\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 1) ∧ (j = 1)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 7)]
      mi,j ←  $\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 1) ∧ (j = 7)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 1)]
      mi,j ←  $\frac{13}{35} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
      mi,j ←  $\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
      mi,j ←  $\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
      mi,j ←  $\frac{9}{70} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
      mi,j ←  $-\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)]
      mi,j ←  $\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)]
      mi,j ←  $\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot J_n \cdot L_n$  if [(i = 4) ∧ (j = 4)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 10)]
      mi,j ←  $\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot J_n \cdot L_n$  if [(i = 4) ∧ (j = 10)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 4)]
      mi,j ←  $\frac{1}{105} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^3$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
      mi,j ←  $-\frac{1}{140} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^3$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
      mi,j ← 0 otherwise
    MLn ← mi
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      mni,j ←  $\frac{6}{5} \cdot \frac{\rho \cdot I_{Z_n}}{L_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
      mni,j ←  $-\frac{6}{5} \cdot \frac{\rho \cdot I_{Z_n}}{L_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
      mni,j ←  $\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)]
      mni,j ←  $\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
      mni,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)]
      mni,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
      mni,j ←  $\frac{2}{15} \cdot \rho \cdot I_{Z_n} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
      mni,j ←  $-\frac{1}{30} \cdot \rho \cdot I_{Z_n} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
      mni,j ← 0 otherwise
    MNn ← mn
  MLn ← MLn + MNn

```

for  $n \in 1..N$

for  $i \in 1..12$

for  $j \in 1..12$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=1)] \vee [(i=7) \wedge (j=7)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=7)] \vee [(i=7) \wedge (j=1)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=2)] \vee [(i=8) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=6)] \vee [(i=2) \wedge (j=12)] \vee [(i=6) \wedge (j=2)] \vee [(i=12) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=6)] \vee [(i=8) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=3)] \vee [(i=9) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=5)] \vee [(i=3) \wedge (j=11)] \vee [(i=5) \wedge (j=3)] \vee [(i=11) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=5)] \vee [(i=9) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=4)] \vee [(i=10) \wedge (j=10)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=10)] \vee [(i=10) \wedge (j=4)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=5)] \vee [(i=11) \wedge (j=11)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=5)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=6)] \vee [(i=12) \wedge (j=12)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=6)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise}$$

$$K_{L_n} \leftarrow k_1$$

$$C_{x_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_1 - [(\text{elem}_n)_1]_1}{L_n}$$

$$C_{y_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_2 - [(\text{elem}_n)_1]_2}{L_n}$$

$$C_{z_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_3 - [(\text{elem}_n)_1]_3}{L_n}$$

for  $i \in 1..3$

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} = 0$$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow 0 \quad \text{otherwise}$$

for  $i \in 1..3$

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \neq 0$$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{x_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{z_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

for  $i \in 1..3$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i+3,j+3} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+6,j+6} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+9,j+9} \leftarrow t_{i,j}$$

$T_n \leftarrow t$

```

for n ∈ 1..N
  KLn ← 1000 · KLn if tabn,9 = 1
  MLn ← 0 if tabn,9 = 1
  KGn ← (Tn)-1 · KLn · Tn
  MGn ← (Tn)-1 · MLn · Tn
for i ∈ 1..6 · (N + 1)
  for j ∈ 1..6 · (N + 1)
    Ki,j ← 0
    Mi,j ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      Ki+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,5-1) ← Ki+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,5-1) + (KGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i ≤ 6)
      Ki+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,6-2) ← Ki+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,6-2) + (KGn)i,j if (j > 6) ∧ (i ≤ 6)
      Ki+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,5-1) ← Ki+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,5-1) + (KGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i > 6)
      Ki+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,6-2) ← Ki+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,6-2) + (KGn)i,j if (j > 6) ∧ (i > 6)
      Mi+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,5-1) ← Mi+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,5-1) + (MGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i ≤ 6)
      Mi+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,6-2) ← Mi+6 · (tabn,5-1), j+6 · (tabn,6-2) + (MGn)i,j if (j > 6) ∧ (i ≤ 6)
      Mi+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,5-1) ← Mi+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,5-1) + (MGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i > 6)
      Mi+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,6-2) ← Mi+6 · (tabn,6-2), j+6 · (tabn,6-2) + (MGn)i,j if (j > 6) ∧ (i > 6)
for n ∈ 1..N + 1
  for i ∈ 1..6
    cci+6 · (n-1) ← tabn,i+17
for i ∈ 1..6 · (N + 1)
  Ki,i ← Ki,i + tab13,11 if cci = 2
  for j ∈ 1..6 · (N + 1)
    Ki,j ← 1 if (i = j) ∧ (cci = 0)
    Ki,j ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)
    Kj,i ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)

```

```

N_cols ← cols(K)
N_vals ← 20
for i ∈ 1..N_cols
  X_i ← 0
X_1 ← 1
Y ← M·X
r ← 1
ε_{λ_r} ← 1
while ε_{λ_r} > 10^{-6}
  |
  | χ ← K^{-1}·M·X
  | X ← χ · \frac{1}{\sqrt{\chi^T \cdot M \cdot \chi}}
  | ψ ← M·χ
  | \rho_r ← \frac{(\chi^T \cdot Y)_1}{(\chi^T \cdot \psi)_1}
  | Y ← ψ · \frac{1}{\sqrt{\psi^T \cdot \psi}}
  | \epsilon_{\lambda_{r+1}} ← \frac{|\rho_r - \rho_{r-1}|}{\rho_r} \text{ if } r > 1
  | \epsilon_{\lambda_{r+1}} ← 1 \text{ if } r = 1
  | r ← r + 1
iter_1 ← r - 1
λ_1 ← ρ_{r-1}
φ_1 ← X
for i ∈ 1..N_cols
  Φ_{i,1} ← X_i

```



```

w ← 2
while w ≤ Nvals
  for i ∈ 1..Ncols
    Xi ← 1
  Y ← M·X
  r ← 1
  ελr ← 1
  while ελr > 10-6
    χ ← K-1·M·X
    for i ∈ 1..w-1
      αi ← (φiT·M·χ)1
      χ ← χ - αi·φi
    X ← χ ·  $\frac{1}{\sqrt{\chi^T \cdot M \cdot \chi}}$ 
    ψ ← M·χ
    ρr ←  $\frac{(\chi^T \cdot Y)_1}{(\chi^T \cdot \psi)_1}$ 
    Y ← ψ ·  $\frac{1}{\sqrt{\chi^T \cdot \psi}}$ 
    ελr+1 ←  $\frac{|\rho_r - \rho_{r-1}|}{\rho_r}$  if r > 1
    ελr+1 ← 1 if r = 1
    r ← r + 1
  iterw ← r - 1
  λw ← ρr-1
  φw ← X
  for i ∈ 1..Ncols
    φi,w ← Xi
  w ← w + 1
fn ←  $\frac{\sqrt{\lambda}}{2 \cdot \pi}$ 

```



### A.3.2 Solver Mathcad

```

E ← tab9,11
v ← tab10,11
ρ ← tab11,11
G ←  $\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ 
i ← 1
while tabi,6 ≠ 0
    i ← i + 1
N ← i - 1
for n ∈ 1..N + 1
    for i ∈ 1..3
        noi ← tabn,i
        noden ← no
    for n ∈ 1..N
        for i ∈ 1..2
            elei ← node(tabn,4+i)
            elemn ← ele
            Ln ←  $\sqrt{\sum [(elemn)_2 - (elemn)_1]^2}$ 
            An ← tabtabn,7,11
            Iyn ← tabtabn,7,12
            Izn ← tabtabn,7,13
            Jn ← tabtabn,7,14
            Asyn ← tabtabn,7,15
            Aszn ← tabtabn,7,16
            αn ← tabn,8
            φyn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{G \cdot A_{sy_n} \cdot (L_n)^2}$ 
            φzn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{G \cdot A_{sz_n} \cdot (L_n)^2}$ 

```

```

for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      m1,i,j ←  $\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 1) ∧ (j = 1)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 7)]
      m1,i,j ←  $\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 1) ∧ (j = 7)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 1)]
      m1,i,j ←  $\frac{13}{35} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
      m1,i,j ←  $\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
      m1,i,j ←  $\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
      m1,i,j ←  $\frac{9}{70} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
      m1,i,j ←  $\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)]
      m1,i,j ←  $\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)]
      m1,i,j ←  $\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot J_n \cdot L_n$  if [(i = 4) ∧ (j = 4)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 10)]
      m1,i,j ←  $\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot J_n \cdot L_n$  if [(i = 4) ∧ (j = 10)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 4)]
      m1,i,j ←  $\frac{1}{105} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^3$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
      m1,i,j ←  $-\frac{1}{140} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^3$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
      m1,i,j ← 0 otherwise
    MLn ← m1
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      mn,i,j ←  $\frac{6}{5} \cdot \frac{\rho \cdot I_{Z_n}}{L_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
      mn,i,j ←  $-\frac{6}{5} \cdot \frac{\rho \cdot I_{Z_n}}{L_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
      mn,i,j ←  $\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)]
      mn,i,j ←  $\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
      mn,i,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)]
      mn,i,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
      mn,i,j ←  $\frac{2}{15} \cdot \rho \cdot I_{Z_n} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
      mn,i,j ←  $-\frac{1}{30} \cdot \rho \cdot I_{Z_n} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
      mn,i,j ← 0 otherwise
    MNn ← mn
  MLn ← MLn + MNn

```

for  $n \in 1..N$

for  $i \in 1..12$

for  $j \in 1..12$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=1)] \vee [(i=7) \wedge (j=7)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=7)] \vee [(i=7) \wedge (j=1)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=2)] \vee [(i=8) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=6)] \vee [(i=2) \wedge (j=12)] \vee [(i=6) \wedge (j=2)] \vee [(i=12) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=6)] \vee [(i=8) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=3)] \vee [(i=9) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=5)] \vee [(i=3) \wedge (j=11)] \vee [(i=5) \wedge (j=3)] \vee [(i=11) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=5)] \vee [(i=9) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=4)] \vee [(i=10) \wedge (j=10)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=10)] \vee [(i=10) \wedge (j=4)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=5)] \vee [(i=11) \wedge (j=11)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=5)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=6)] \vee [(i=12) \wedge (j=12)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=6)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise}$$

$$K_{L_n} \leftarrow k_1$$

$$C_{x_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_1 - [(\text{elem}_n)_1]_1}{L_n}$$

$$C_{y_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_2 - [(\text{elem}_n)_1]_2}{L_n}$$

$$C_{z_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_3 - [(\text{elem}_n)_1]_3}{L_n}$$

for i ∈ 1..3

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} = 0$$

for j ∈ 1..3

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow 0 \quad \text{otherwise}$$

for i ∈ 1..3

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \neq 0$$

for j ∈ 1..3

$$t_{i,j} \leftarrow C_{x_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{z_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

for i ∈ 1..3

for j ∈ 1..3

$$t_{i+3,j+3} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+6,j+6} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+9,j+9} \leftarrow t_{i,j}$$

$$T_n \leftarrow t$$

```

for n ∈ 1..N
  | KLn ← kLn
  | KLn ← 1000 · KLn if tabn,9 = 1
  | MLn ← 0 if tabn,9 = 1
  | KGn ← (Tn)-1 · KLn · Tn
  | MGn ← (Tn)-1 · MLn · Tn
for i ∈ 1..6 · (N + 1)
  for j ∈ 1..6 · (N + 1)
    | Ki,j ← 0
    | Mi,j ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      | Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,5-1) ← Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,5-1) + (KGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i ≤ 6)
      | Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,6-2) ← Ki+6(tabn,5-1),j+6(tabn,6-2) + (KGn)i,j if (j > 6) ∧ (i ≤ 6)
      | Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,5-1) ← Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,5-1) + (KGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i > 6)
      | Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,6-2) ← Ki+6(tabn,6-2),j+6(tabn,6-2) + (KGn)i,j if (j > 6) ∧ (i > 6)
      | Mi+6(tabn,5-1),j+6(tabn,5-1) ← Mi+6(tabn,5-1),j+6(tabn,5-1) + (MGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i ≤ 6)
      | Mi+6(tabn,5-1),j+6(tabn,6-2) ← Mi+6(tabn,5-1),j+6(tabn,6-2) + (MGn)i,j if (j > 6) ∧ (i ≤ 6)
      | Mi+6(tabn,6-2),j+6(tabn,5-1) ← Mi+6(tabn,6-2),j+6(tabn,5-1) + (MGn)i,j if (j ≤ 6) ∧ (i > 6)
      | Mi+6(tabn,6-2),j+6(tabn,6-2) ← Mi+6(tabn,6-2),j+6(tabn,6-2) + (MGn)i,j if (j > 6) ∧ (i > 6)
for n ∈ 1..N + 1
  for i ∈ 1..6
    fn,i ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..6
    | f(tabn,5),i ← f(tabn,5),i if tabn,9 = 1
    | f(tabn,5),i ← f(tabn,5),i +  $\frac{\rho \cdot \text{tab}_{17+i,11}}{2} \cdot A_n \cdot L_n$  if tabn,9 = 0
    | f(tabn,6),i ← f(tabn,6),i if tabn,9 = 1
    | f(tabn,6),i ← f(tabn,6),i +  $\frac{\rho \cdot \text{tab}_{17+i,11}}{2} \cdot A_n \cdot L_n$  if tabn,9 = 0
for n ∈ 1..N + 1
  for i ∈ 1..6
    | cci+6(n-1) ← tabn,i+17
    | Fi+6(n-1) ← fn,i
for i ∈ 1..6 · (N + 1)
  | Ki,i ← Ki,i + tab25,11 if cci = 2
  for j ∈ 1..6 · (N + 1)
    | Ki,j ← 1 if (i = j) ∧ (cci = 0)
    | Fi ← 0 if cci = 0
    | Ki,j ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)
    | Kj,i ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)

```

```

δ ← 0.5
α ← 0.25 ·  $\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2$ 
Δt ← 0.001
Tmax ← 2.5
a0 ←  $\frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2}$ 
a1 ←  $\frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t}$ 
a2 ←  $\frac{1}{\alpha \cdot \Delta t}$ 
a3 ←  $\frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1$ 
a4 ←  $\frac{\delta}{\alpha} - 1$ 
a5 ←  $\frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)$ 
a6 ← Δt · (1 - δ)
a7 ← δ · Δt
for i ∈ 1..6 · (N + 1)
    Ui ← 0
    U'i ← 0
    U''i ← 0
β ← lsolve  $\begin{bmatrix} 1 & (\text{tab}_{15,11})^2 \\ 1 & (\text{tab}_{16,11})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \text{tab}_{15,11} \cdot \text{tab}_{13,11} \\ 2 \cdot \text{tab}_{16,11} \cdot \text{tab}_{13,11} \end{pmatrix}$ 
C ← β1 · M + β2 · K
freq ← 8.5
Keffect ← K + a0 · M + a1 · C
x ← 0
for t ∈ 0, Δt.. Tmax
    x ← x + 1
    tx ← t
    for n ∈ 1.. N + 1
        for i ∈ 1..6
             $\begin{cases} F_{t_{i+6 \cdot (n-1)}} \leftarrow F_{i+6 \cdot (n-1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \text{freq} \cdot t) & \text{if } i = 2 \\ F_{t_{i+6 \cdot (n-1)}} \leftarrow F_{i+6 \cdot (n-1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \text{freq} \cdot t) & \text{if } i = 3 \\ F_{t_{i+6 \cdot (n-1)}} \leftarrow F_{i+6 \cdot (n-1)} & \text{otherwise} \end{cases}$ 
            Feffect ← Ft + M · (a0 · U + a2 · U' + a3 · U'') + C · (a1 · U + a4 · U' + a5 · U'')
            Upos ← lsolve(Keffect · Feffect)
            U''pos ← a0 · (Upos - U) - a2 · U' - a3 · U''
            U'pos ← U' + a6 · U'' + a7 · U''pos
            U ← Upos
            U' ← U'pos
            U'' ← U''pos

```





## A.4.2 Solver Mathcad

```

E ← tab9,11
v ← tab10,11
ρ ← tab11,11
G ←  $\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ 
i ← 1
while tabi,6 ≠ 0
    i ← i + 1
N ← i - 1
for n ∈ 1..N + 1
    for i ∈ 1..3
        noi ← tabn,i
        noden ← no
    for n ∈ 1..N
        for i ∈ 1..2
            elei ← node(tabn,4+i)
            elemn ← ele
            Ln ←  $\sqrt{\sum [(elemn)_2 - (elemn)_1]^2}$ 
            An ← tabtabn,7,11
            Iyn ← tabtabn,7,12
            Izn ← tabtabn,7,13
            Jn ← tabtabn,7,14
            Asyn ← tabtabn,7,15
            Aszn ← tabtabn,7,16
            αn ← tabn,8
            φyn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{G \cdot A_{sy_n} \cdot (L_n)^2}$ 
            φzn ←  $\frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{G \cdot A_{sz_n} \cdot (L_n)^2}$ 

```

```

for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      mi,j ←  $\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 1) ∧ (j = 1)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 7)]
      mi,j ←  $\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 1) ∧ (j = 7)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 1)]
      mi,j ←  $\frac{13}{35} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
      mi,j ←  $\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
      mi,j ←  $\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
      mi,j ←  $\frac{9}{70} \cdot \rho \cdot A_n \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
      mi,j ←  $\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)]
      mi,j ←  $\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^2$  if [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)]
      mi,j ←  $\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot J_n \cdot L_n$  if [(i = 4) ∧ (j = 4)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 10)]
      mi,j ←  $\frac{1}{6} \cdot \rho \cdot J_n \cdot L_n$  if [(i = 4) ∧ (j = 10)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 4)]
      mi,j ←  $\frac{1}{105} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^3$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
      mi,j ←  $-\frac{1}{140} \cdot \rho \cdot A_n \cdot (L_n)^3$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
      mi,j ← 0 otherwise
    MLn ← mi
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      mni,j ←  $\frac{6}{5} \cdot \frac{\rho \cdot I_{Z_n}}{L_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
      mni,j ←  $-\frac{6}{5} \cdot \frac{\rho \cdot I_{Z_n}}{L_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
      mni,j ←  $\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)]
      mni,j ←  $\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
      mni,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)]
      mni,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot \rho \cdot I_{Z_n}$  if [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
      mni,j ←  $\frac{2}{15} \cdot \rho \cdot I_{Z_n} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
      mni,j ←  $-\frac{1}{30} \cdot \rho \cdot I_{Z_n} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
      mni,j ← 0 otherwise
    MNn ← mn
  MLn ← MLn + MNn

```

for  $n \in 1..N$

for  $i \in 1..12$

for  $j \in 1..12$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=1)] \vee [(i=7) \wedge (j=7)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-E \cdot A_n}{L_n} \text{ if } [(i=1) \wedge (j=7)] \vee [(i=7) \wedge (j=1)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=2)] \vee [(i=8) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=2) \wedge (j=6)] \vee [(i=2) \wedge (j=12)] \vee [(i=6) \wedge (j=2)] \vee [(i=12) \wedge (j=2)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=8)] \vee [(i=8) \wedge (j=6)] \vee [(i=8) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=8)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=3)] \vee [(i=9) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-12 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^3} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=3) \wedge (j=5)] \vee [(i=3) \wedge (j=11)] \vee [(i=5) \wedge (j=3)] \vee [(i=11) \wedge (j=3)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{6 \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot (L_n)^2} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=9)] \vee [(i=9) \wedge (j=5)] \vee [(i=9) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=9)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=4)] \vee [(i=10) \wedge (j=10)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{-G \cdot J_n}{L_n} \text{ if } [(i=4) \wedge (j=10)] \vee [(i=10) \wedge (j=4)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=5)] \vee [(i=11) \wedge (j=11)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{z_n}) \cdot E \cdot I_{y_n}}{(1 + \phi_{z_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=5) \wedge (j=11)] \vee [(i=11) \wedge (j=5)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(4 + \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=6)] \vee [(i=12) \wedge (j=12)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow \frac{(2 - \phi_{y_n}) \cdot E \cdot I_{z_n}}{(1 + \phi_{y_n}) \cdot L_n} \text{ if } [(i=6) \wedge (j=12)] \vee [(i=12) \wedge (j=6)]$$

$$k_{1,i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise}$$

$$K_{L_n} \leftarrow k_1$$

```

for i ∈ 1..12
  for j ∈ 1..12
    kna1i,j ←  $\frac{3}{2}$  if [(i = 1) ∧ (j = 1)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 7)]
    kna1i,j ←  $-\frac{3}{2}$  if [(i = 1) ∧ (j = 7)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 1)]
    kna1i,j ←  $\frac{6}{5}$  if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
    kna1i,j ←  $-\frac{6}{5}$  if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
    kna1i,j ←  $\frac{1}{10} \cdot L_n$  if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)]
    kna1i,j ←  $\frac{1}{10} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
    kna1i,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot L_n$  if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)]
    kna1i,j ←  $-\frac{1}{10} \cdot L_n$  if [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
    kna1i,j ←  $\frac{J_n}{A_n}$  if [(i = 4) ∧ (j = 4)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 10)]
    kna1i,j ←  $-\frac{J_n}{A_n}$  if [(i = 4) ∧ (j = 10)] ∨ [(i = 10) ∧ (j = 4)]
    kna1i,j ←  $\frac{2}{15} \cdot (L_n)^2$  if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
    kna1i,j ←  $-\frac{1}{30} \cdot (L_n)^2$  if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
    kna1i,j ← 0 otherwise
  kNA1n ← kna1
for i ∈ 1..12
  for j ∈ 1..12
    kna2i,j ← 6 · (Ln)2 if [(i = 2) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 9)]
    kna2i,j ← 3 · (Ln)3 if [(i = 2) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 2) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 2)]
    kna2i,j ← 3 · (Ln)3 if [(i = 5) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 9)]
    kna2i,j ← -6 · (Ln)2 if [(i = 2) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 3)]
    kna2i,j ← -3 · (Ln)3 if [(i = 3) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 3)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 3)]
    kna2i,j ← -3 · (Ln)3 if [(i = 6) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 8)]
    kna2i,j ← 2 · (Ln)4 if [(i = 5) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 12)]
    kna2i,j ← (Ln)4 if [(i = 5) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 6)]
    kna2i,j ← 0 otherwise
  kNA2n ← kna2
for i ∈ 1..12
  for j ∈ 1..12
    knti,j ←  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1+v}{1+2 \cdot v}$  if [(i = 1) ∧ (j = 4)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 10)]
    knti,j ←  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1+v}{1+2 \cdot v}$  if [(i = 1) ∧ (j = 10)] ∨ [(i = 7) ∧ (j = 4)]
    knti,j ← -1 if [(i = 2) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 6)] ∨ [(i = 5) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 3)]
    knti,j ← -1 if [(i = 8) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 9)]
    knti,j ← -1 if [(i = 2) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 3) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 2)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 3)]
    knti,j ← -1 if [(i = 5) ∧ (j = 8)] ∨ [(i = 6) ∧ (j = 9)] ∨ [(i = 8) ∧ (j = 5)] ∨ [(i = 9) ∧ (j = 6)]
    knti,j ←  $-\frac{1}{2} \cdot L_n$  if [(i = 5) ∧ (j = 12)] ∨ [(i = 12) ∧ (j = 5)]
    knti,j ←  $\frac{1}{2} \cdot L_n$  if [(i = 6) ∧ (j = 11)] ∨ [(i = 11) ∧ (j = 6)]
    knti,j ← 0 otherwise
  kNTn ← knt

```

$$C_{x_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_1 - [(\text{elem}_n)_1]_1}{L_n}$$

$$C_{y_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_2 - [(\text{elem}_n)_1]_2}{L_n}$$

$$C_{z_n} \leftarrow \frac{[(\text{elem}_n)_2]_3 - [(\text{elem}_n)_1]_3}{L_n}$$

for  $i \in 1..3$

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} = 0$$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow 0 \quad \text{otherwise}$$

for  $i \in 1..3$

$$\text{if } \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \neq 0$$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{x_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{y_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow C_{z_n} \quad \text{if } (i=1) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \cos(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \cos(\alpha_n) \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{-C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \sin(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=2) \wedge (j=3)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{x_n} \cdot C_{y_n} \cdot \sin(\alpha_n) - C_{z_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=1)$$

$$t_{i,j} \leftarrow -\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2} \cdot \sin(\alpha_n) \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=2)$$

$$t_{i,j} \leftarrow \frac{C_{y_n} \cdot C_{z_n} \cdot \sin(\alpha_n) + C_{x_n} \cdot \cos(\alpha_n)}{\sqrt{(C_{x_n})^2 + (C_{z_n})^2}} \quad \text{if } (i=3) \wedge (j=3)$$

for  $i \in 1..3$

for  $j \in 1..3$

$$t_{i+3,j+3} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+6,j+6} \leftarrow t_{i,j}$$

$$t_{i+9,j+9} \leftarrow t_{i,j}$$

$$T_n \leftarrow t$$

```

 $\delta \leftarrow 0.5$ 
 $\alpha \leftarrow 0.25 \cdot (0.5 + \delta)^2$ 
 $\Delta t \leftarrow 0.001$ 
 $T_{\max} \leftarrow 2.5$ 
freq  $\leftarrow 8.5$ 
 $a_0 \leftarrow \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2}$ 
 $a_1 \leftarrow \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t}$ 
 $a_2 \leftarrow \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t}$ 
 $a_3 \leftarrow \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1$ 
 $a_4 \leftarrow \frac{\delta}{\alpha} - 1$ 
 $a_5 \leftarrow \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$ 
 $a_6 \leftarrow \Delta t \cdot (1 - \delta)$ 
 $a_7 \leftarrow \delta \cdot \Delta t$ 
 $\beta \leftarrow \text{lsolve} \left[ \begin{array}{c} 1 \quad (\text{tab}_{15,11})^2 \\ 1 \quad (\text{tab}_{16,11})^2 \end{array} \right], \left( \begin{array}{c} 2 \cdot \text{tab}_{15,11} \cdot \text{tab}_{13,11} \\ 2 \cdot \text{tab}_{16,11} \cdot \text{tab}_{13,11} \end{array} \right)$ 
for n  $\in$  1..N+1
  for i  $\in$  1..6
     $f_{n,i} \leftarrow 0$ 
  for n  $\in$  1..N
    for i  $\in$  1..6
       $f_{(\text{tab}_{n,5}),i} \leftarrow f_{(\text{tab}_{n,5}),i}$  if  $\text{tab}_{n,9} = 1$ 
       $f_{(\text{tab}_{n,5}),i} \leftarrow f_{(\text{tab}_{n,5}),i} + \frac{\rho \cdot \text{tab}_{17+i,11}}{2} \cdot A_n \cdot L_n$  if  $\text{tab}_{n,9} = 0$ 
       $f_{(\text{tab}_{n,6}),i} \leftarrow f_{(\text{tab}_{n,6}),i}$  if  $\text{tab}_{n,9} = 1$ 
       $f_{(\text{tab}_{n,6}),i} \leftarrow f_{(\text{tab}_{n,6}),i} + \frac{\rho \cdot \text{tab}_{17+i,11}}{2} \cdot A_n \cdot L_n$  if  $\text{tab}_{n,9} = 0$ 
  for n  $\in$  1..N+1
    for i  $\in$  1..6
       $cc_{i+6 \cdot (n-1)} \leftarrow \text{tab}_{n,i+17}$ 
       $F_{i+6 \cdot (n-1)} \leftarrow f_{n,i}$ 
  for i  $\in$  1..6 \cdot (N+1)
    for j  $\in$  1..6 \cdot (N+1)
       $F_i \leftarrow 0$  if  $cc_i = 0$ 
  for n  $\in$  1..N
     $M_{L_n} \leftarrow 0$  if  $\text{tab}_{n,9} = 1$ 
     $M_{G_n} \leftarrow (T_n)^{-1} \cdot M_{L_n} \cdot T_n$ 

```

```

for i ∈ 1..6.(N+1)
  for j ∈ 1..6.(N+1)
    Mi,j ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      
$$\begin{cases} M_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} \leftarrow M_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} + (M_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j \leq 6) \wedge (i \leq 6) \\ M_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} \leftarrow M_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} + (M_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j > 6) \wedge (i \leq 6) \\ M_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} \leftarrow M_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} + (M_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j \leq 6) \wedge (i > 6) \\ M_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} \leftarrow M_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} + (M_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j > 6) \wedge (i > 6) \end{cases}$$

for i ∈ 1..6.(N+1)
  
$$\begin{cases} U_i \leftarrow 0 \\ U'_i \leftarrow 0 \\ U''_i \leftarrow 0 \end{cases}$$

for n ∈ 1..N
  
$$\begin{cases} \text{for } i \in 1..12 \\ (u')_i \leftarrow 0 \\ u_n \leftarrow u' \end{cases}$$

x ← 0
for t ∈ 0, Δt.. Tmax
  x ← x + 1
  tx ← t
  for n ∈ 1..N
    
$$\begin{cases} K_{NA1_n} \leftarrow \frac{E \cdot A_n [(u_n)_7 - (u_n)_1]}{(L_n)^2} \cdot k_{NA1_n} \\ K_{NA2_n} \leftarrow \frac{E \cdot I_z [(u_n)_7 - (u_n)_1]}{(L_n)^4} \cdot k_{NA2_n} \\ K_{NT_n} \leftarrow \frac{(1 + 2 \cdot \nu) \cdot G \cdot J_n [(u_n)_{10} - (u_n)_4]}{(L_n)^2} \cdot k_{NT_n} \\ K_{L_n} \leftarrow k_{L_n} + K_{NA1_n} + K_{NA2_n} + K_{NT_n} \\ K_{L_n} \leftarrow 1000 \cdot K_{L_n} \text{ if } \text{tab}_{n,9} = 1 \\ K_{G_n} \leftarrow (T_n)^{-1} \cdot K_{L_n} \cdot T_n \end{cases}$$

for i ∈ 1..6.(N+1)
  for j ∈ 1..6.(N+1)
    Ki,j ← 0
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    for j ∈ 1..12
      
$$\begin{cases} K_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} \leftarrow K_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} + (K_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j \leq 6) \wedge (i \leq 6) \\ K_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} \leftarrow K_{i+6(\text{tab}_{n,5-1}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} + (K_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j > 6) \wedge (i \leq 6) \\ K_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} \leftarrow K_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,5-1})} + (K_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j \leq 6) \wedge (i > 6) \\ K_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} \leftarrow K_{i+6(\text{tab}_{n,6-2}),j+6(\text{tab}_{n,6-2})} + (K_{G_n})_{i,j} & \text{if } (j > 6) \wedge (i > 6) \end{cases}$$


```



```

for i ∈ 1..6.(N + 1)
  Ki,i ← Ki,i + tab25,11 if cci = 2
  for j ∈ 1..6.(N + 1)
    Ki,j ← 1 if (i = j) ∧ (cci = 0)
    Ki,j ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)
    Kj,i ← 0 if (i ≠ j) ∧ (cci = 0)
C ← β1·M + β2·K
for n ∈ 1..N + 1
  for i ∈ 1..6
    Fti+6(n-1) ← Fi+6(n-1)·cos(2·π·freq·t) if i = 2
    Fti+6(n-1) ← Fi+6(n-1)·sin(2·π·freq·t) if i = 3
    Fti+6(n-1) ← Fi+6(n-1) otherwise
Keffect ← K + a0·M + a1·C
Feffect ← Ft + M·(a0·U + a2·U' + a3·U'') + C·(a1·U + a4·U' + a5·U'')
Upos ← lsolve(Keffect, Feffect)
U''pos ← a0·(Upos - U) - a2·U' - a3·U''
U'pos ← U' + a6·U'' + a7·U''pos
for n ∈ 1..N
  for i ∈ 1..12
    uloci ← Upos6·(tabn,5-1)+i if i ≤ 6
    uloci ← Upos6·(tabn,6-2)+i if i > 6
  uLOCn ← uloc
  un ← Tn·uLOCn
U ← Upos
U' ← U'pos
U'' ← U''pos

```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)