

UMA VISÃO GLOBAL DA ROTODINÂMICA DE TURBOMÁQUINAS: ÊNFASE
NO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E NA PROPRIEDADE DOS
AUTOVETORES GIROSCÓPICOS DESACOPLAREM
AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Adhemar Castilho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA OCEÂNICA

Aprovada por :

Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D

Prof. Tiago Alberto Piedras Lopes, D.Sc.

Prof. Paul Eugene Allaire, Ph.D

Prof. Moysés Zindeluk, D.Sc.

Prof. Breno Pinheiro Jacob, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CASTILHO, ADHEMAR

Uma Visão Global da Rotodinâmica de Turbomáquinas: Ênfase no Método de Elementos Finitos e na Propriedade dos Autovetores Giroscópicos Desacoplarem as Equações de Movimento [Rio de Janeiro] Setembro, 2007

XXII. 366p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, DSc., Engenharia Naval, 2007)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Rotodinâmica I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

DEDICATÓRIA

Dedico esta Tese à minha família que muito me apoiou em todos os momentos difíceis desta jornada.

Dedico também esta Tese a todos os meus Amigos, que de muitas formas incentivaram, patrocinaram, fomentaram, viabilizaram e permitiram que este sonho tenha se tornado uma realidade.

Embora os seus nomes não apareçam aqui explicitados, estou bem certo que todos eles conhecem perfeitamente o tamanho da minha dívida de gratidão

AGRADECIMENTO

Como agradecer a Quem tanto fez por mim ?

Para agradecê-Lo farei uso da linguagem poética empregada pelo rei Davi no Salmo oitavo da Bíblia Sagrada.

Que é o homem para que dele te lembres ?
e o filho do homem para que o visites ?
Fizeste-o no entanto por um pouco menores do que Deus
e de glória e honra o coroaste.
Deste –lhe domínio sobre as obras das tuas mãos,
E sob seus pés tudo lhe pusestes :
Ovelhas e bois, todos
e também os animais do campo ;
as aves do céu e os peixes do mar,
e tudo o que percorre as sendas dos mares.
Ó Senhor , Senhor nosso,
quão magnífico em toda a terra é o teu Nome !

DEUS deu ao homem delegação sobre todo o conhecimento, de tal forma que nenhum conhecimento está oculto ao gênero humano. Todo novo conhecimento representa um presente de DEUS, uma dádiva do DEUS ETERNO.

Todo novo conhecimento tem por finalidade promover o Amor e a Paz dentro do Universo. Neste sentido espero que este trabalho possa contribuir de alguma forma para o bem de todos que se proponham a usar, aperfeiçoar ou implementar estas idéias aqui elaboradas.

Esta Tese é uma declaração de Fé.

Toda Honra e Toda Glória são devidas a DEUS “ Soli Deo Gloria ”.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

UMA VISÃO GLOBAL DA ROTODINÂMICA DE TURBOMÁQUINAS: ÊNFASE
NO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E NA PROPRIEDADE DOS
AUTOVETORES GIROSCÓPICOS DESACOPLAREM AS
EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Adhemar Castilho

Setembro de 2007

Orientador : Tiago Alberto Piedras Loppes, D. Sc.

Programa : Engenharia Oceânica

Esta Tese tem seu foco principal na discussão das técnicas rotodinâmicas associadas ao equacionamento e à solução da equação de movimento de rotores flexíveis. A metodologia utilizada é o sucessivo equacionamento e solução de problemas de complexidade crescente e que possibilitem a completa compreensão dos fenômenos físicos envolvidos.

O equacionamento é inicialmente feito com a ajuda de modelação contínua. Na medida em que o modelo fica mais complexo torna-se imperativo o uso de técnicas discretas, as quais apresentam um elevado nível da abstração e conseqüentemente comprometem o sentido físico. Especial ênfase é dada ao método dos Elementos Finitos.

O aspecto inovador desta Tese é o desenvolvimento de um novo método de solução das equações de movimento de sistema giroscópicos conservativos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

AN OVERALL UNDERSTANDING ON TURBO MACHINERY FINITE ELEMENT
ROTOR DYNAMICS APPROACH, EMPHASIS ON GYROSCOPIC
EIGENVECTORS DECOUPLING PROPERTY AT GYROSCOPIC CONSERVATIVE
MOTION EQUATIONS

Adhemar Castilho

September, 2007

Advisor : Tiago Alberto Piedras Loppes, D. Sc.

Department : Ocean Engineering

This dissertation main focus is connected to rotor dynamic modelling techniques and dynamic interaction between machinery and its support structure.

The Thesis introduces the problem in a sequence of different rotordynamic problems in an increasing degree of complexity, in order to allow a complete understanding of all physical phenomenon.

At beginning, equations are developed in continuous approach theory which allows a good level of physical understanding, up to the point where finite element approach need to be implemented due to limitations on representing real rotor model.

Finite element approach is too much abstract and does not permit easy physical association to mathematical simulation. This thesis brings a big effort trying not to lose contact with physical meaning in simulation process.

This thesis main discussion is associated with a new uncoupling method applied to gyroscopic conservative systems based on gyroscopic eigenvectors.

ÍNDICE DO TEXTO

	Página
I INTRODUÇÃO	
1.1 Histórico	(004)
1.1.1 Análise e Revisão do Conhecimento Rotodinâmico	(004)
1.1.2 Revisão do Conhecimento sobre Suportação de Máquinas	(006)
1.1.3 Revisão Histórica dos Métodos de Redução de Matrizes	(009)
1.1.4 História Rotodinâmica dos Últimos Anos no BRASIL	(010)
1.1.5 Rotodinâmica nos últimos 10 anos no Mundo	(013)
1.2 Diretrizes Utilizadas para a Construção do Conhecimento	(018)
1.2.1 Foco da Tese	(018)
1.2.2 Apresentação dos Capítulos: Corpo da Tese	(022)
1.2.3 Impacto da Pesquisa	(026)
1.2.4 Aspectos Inovadores da Pesquisa	(027)
1.2.5 Não constitui foco desta Tese os seguintes aspectos	(028)
II CINEMÁTICA DE UM ROTOR EM BALANÇO	
2.1 Precessão e Rotação	(029)
2.2 Frequência Natural e Velocidade Crítica	(030)
2.3 Coordenadas Globais de um Volante	(031)
2.4 Orientação Angular do Disco em Termos da Elástica	(032)
2.5 Velocidades e Acelerações Angulares do Disco	(034)
2.6 Energia Cinética Total do Disco/Eixo	(036)
2.7 Frequências Naturais de um Rotor em Balanço	(037)
2.7.1 Equações Básicas de Equilíbrio do Rotor	(037)
2.7.2 Equação de Frequência	(039)
2.7.3 Análise das Curvas de Frequência	(040)
III FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS EM ROTORES (CONTÍNUO)	
3.1 Equação Diferencial do Movimento do Rotor em Balanço	(042)
3.1.1 Estabelecimento da Equação Diferencial	(043)
3.1.1.1 Relação Entre a Curvatura e o Momento Fletor	(045)
3.1.1.2 Equação de Equilíbrio do Elemento de Eixo	(046)
3.1.1.3 Determinação da Relação Entre o Cortante e o Fletor	(049)
3.1.2 Caracterização das Condições de Contorno	(049)
3.1.2.1 Condições de Contorno na Extremidade do Volante	(050)
3.1.2.2 Condições de Contorno na Extremidade com Mola	(051)

3.1.3	Solução da Equação Diferencial de Movimento	(053)
3.1.3.1	Determinação das Frequências Naturais	(054)
3.1.3.2	Determinação dos Modos Normais de Vibração	(059)
3.1.4	Exemplos : Caso de Estudo	(060)
3.1.4.1	Influência da Variação Diâmetro – Suspensão Rígida	(061)
3.1.4.2	Influência da Variação do Comprimento do Eixo	(062)
3.1.4.3	Modos Normais de Vibração	(063)
3.2	Equação de Movimento Rotor Bi-Apoado	(064)
3.2.1	Determinação da Equação de Movimento	(064)
3.2.2	Caracterização das Condições de Contorno	(066)
3.2.3	Solução da Equação Diferencial de Movimento	(067)
3.2.3.1	Determinação das Frequências Naturais	(071)
3.2.3.2	Determinação dos Modos Naturais de Vibração	(073)

IV FREQUÊNCIAS/MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

4.1	Hipóteses Simplificadoras do Modelo.	(071)
4.2	Parcelas de Energia de Flexão (equilíbrio Dinâmico)	(072)
4.2.1	Energia Cinética do Eixo	(072)
4.2.2	Energia Cinética do Impelidor	(072)
4.2.3	Energia Potencial do Eixo	(072)
4.2.4	Energia Potencial das Molas	(073)
4.3	Dedução da Equação Diferencial	(073)
4.3.1.	Energia Cinética de Translação/Rotação do Eixo	(074)
4.3.2.	Energia Cinética de Translação/Rotação do Impelidor	(076)
4.3.3	Energia Potencial do Eixo	(078)
4.3.4	Energia Potencial das Molas	(079)
4.4	Solução da Equação Diferencial,	(081)
4.4.1	Preparação das Equações	(081)
4.4.2	Condições de Contorno com Mola	(082)
4.4.3	Solução da Eq. Dif. de Movimento	(083)
4.4.3.1	Cálculo dos Coeficientes a Determinar	(086)
4.4.3.2	Solução do Sistema Algébrico	(089)
4.4.3.3	Definição da Elástica : Autovetor	(093)
4.5	Resultados Obtidos dos Cálculos de Computador	(094)
4.6	Conclusões Sobre a Pertinência do Método	(104)

V ELEMENTOS FINITOS NA ROTODINÂMICA 3

5.1	Elementos Finitos em Turbomáquinas	(109)
5.1.1	Diferentes Formas de Energia	(111)
5.1.1.a	Energia Cinética do Eixo	(111)
5.1.1.b	Energia Cinética do Impelidor	(112)
5.1.1.c	Energia Potencial do Eixo	(112)
5.1.1.d	Energia Potencial das Molas dos Mancais	(113)
5.1.2	Aplicação da Teoria de Vigas para Eixos	(113)
5.1.3	Discretização do Eixo em Elementos Finitos	(115)
5.2	Estabelecimento das Matrizes de Elementos Finitos	(116)
5.2.1	Matriz de Rigidez do Rotor	(116)
5.2.2	Matrizes de Massa/Inerciais/Giroscópica do Rotor em YZ	(126)
5.3	Equação de Movimento do Rotor (Rotação Constante)	(136)
5.3.1	Equação de Movimento do Eixo	(136)
5.3.2	Equação de Movimento do Eixo/Disco	(136)
5.3.3	Equação de Movimento do Eixo/Disco/Mancais	(139)
5.4	Discussão sobre a Rigidez dos Mancais	(141)
5.5	Discussão sobre o Amortecimento dos Mancais	(143)
5.6	Solução da Equação de Movimento (Autovalor)	(146)
5.6.1	Transformações em Sistemas Lineares : Propriedades	(148)
5.6.2	Solução da Equação de Movimento com Amortecimento Puro	(150)
5.6.2.a	Solução Simplificada, Sistema com Amortecido Proporcional	(151)
5.6.2.b	Solução Simplificada para o Problema de Resposta Dinâmica (Truncamento)	(153)
5.6.2.c	Solução Simplificada do Sistema com Amortecimento	(154)
5.6.2.d	Solução Geral da Equação do Sistema com Amortecimento Puro	(156)
5.6.3	Solução da Equação do Sistema Giroscópico Puro : (Forma Padrão)	(158)
5.6.3.a	Problema de Autovalor : Sistema Giroscópico (Forma Padrão)	(158)
5.6.3. a-1	Exercício Giroscópico 1 (Roda de Bicicleta 1)	(159)
5.6.3. a-2	Prova de Desacoplamento das Equações do Sistema Giroscópico Puro :	(165)
5.6.3. a-3	Exercício Giroscópico 2 (Roda de Bicicleta 2)	(175)
5.6.3. a-4	Prova de Desacoplamento das Equações do Sistema Giroscópico Puro N GL:	(185)
5.6.3. a-5	Exercício Giroscópico 3 (8X8 - Rotor em Balanço)	(189)
5.6.4	Autovalores do Sistema Giroscópico Puro (Equação de Estado)	(197)
5.6.4.a	Problema de Resposta Dinâmica em Sistema Giroscópico Puro	(202)
5.6.5	Solução Equação do Sistema Giroscópico Amortecido	(208)
5.6.5.a	Sistema Giroscópico Amortecido Simplificado	(209)
5.6.5.b	Sistema Giroscópico Amortecido (Problema de Autovalor)	(209)
5.6.6	Resposta Dinâmica do Sistema Giroscópico Amortecido	(212)

VI INSTABILIDADE EM ROTORES FLEXÍVEIS

6.1	Precessão ou Chicoteamento	(218)
6.1.1	Diferentes do Formas Mecanismo de Precessão	(219)
6.1.1.1	Instabilidade Histerética	(220)
6.1.1.2	Instabilidade Hidrodinâmica (Oil Whirl)	(224)
6.1.1.3	Força de Alford (Folga no topo de palhetas)	(225)
6.1.1.4	Instabilidade por Atrito Seco (Rubbing dry friction/whip)	(226)
6.1.1.5	Instabilidade por Fluido Aprisionado no Rotor	(227)
6.1.1.6	Instabilidade de Compressores de Alta Pressão	(228)
6.1.2	Diagnóstico de Vibrações Auto-excitadas	(228)
6.1.2.1	Diferenças entre Chicoteamento e Outras Vibrações	(228)
6.1.2.2	Identificação, Diagnose e Solução	(230)
6.1.3	Simulação dos Fenômenos de Instabilidade	(231)
6.1.3.1	Simulação com Um Grau de Liberdade	(231)
6.1.3.2	Simulação com Dois Graus de Liberdade	(233)
6.1.3.2.1	Exercício de Estabilidade 1 (Instabilidade Histerética)	(233)
6.1.3.2.2	Exercício de Estabilidade 2 (Instabilidade Hidrodinâmica)	(237)
6.1.4	Ampliação do Conceito de Instabilidade	(244)
6.1.4.1	Exercício de Estabilidade 3 (Routh Hurwitz)	(245)
6.1.5	Generalização do Conceito de Instabilidade em Sistemas Lineares	(247)
6.2	Instabilidade Paramétrica	(251)
6.3	Atrito Variável Prende-Solta	(253)
6.4	Comentários Finais	(254)

VII EXEMPLO ROTODINÂMICO-1 SUPORTE RÍGIDO

7.1	Modelação do Rotor	(257)
7.2	Resultados Obtidos com a Análise das Velocidades Críticas	(259)
7.3	Cálculo da Rigidez e Amortecimento dos Mancais	(261)
7.4	Resposta do Rotor ao Desbalanceamento	(262)
7.5	Estudo de Estabilidade do Rotor	(266)
7.6	Conclusões Finais do Relatório Rotodinâmico	(270)

VIII EXEMPLO ROTODINÂMICO – 2 (SUPORTE FLEXÍVEL):

8.1	Modelação da Estrutura por Elementos Finitos (ANSYS).	(272)
8.1.1	Modelo Simplificado da Estrutura de Suportação	(273)
8.1.2	Modelo Completo da Estrutura de Suportação	(274)
8.1.3	Função de Resposta em Freqüência	(276)
8.2	Modelação Rotodinâmica pelos Programas do ROMAC	(276)
8.2.1	Modelação do Rotor	(277)
8.2.2	Análise dos Mancais Hidrodinâmicos	(278)
8.2.2.1	Análise dos Mancais (Velhos)	(278)
8.2.2.2	Análise dos Mancais (Novos)	(378)
8.3	Redução Dinâmica da Estrutura: (Coeficientes dos Mancais)	(279)
8.3.1	Redução da Matriz Original para 155 Master GL's Principais	(279)
8.3.2	Redução da Matriz de 155 GL's para 14 GL's	(280)
8.3.2.1	Problema de Autovalor: Solução Usando Hankel Singular Value	(280)
8.3.2.2	Construção das FRF's dos Mancais para 14 GL's	(281)
8.4	Análise das Propostas de Modificação da Estrutura e dos Mancais :	(282)
8.4.1	Modificação dos coeficientes dos Mancais K_{eq} , C_{eq}	(282)
8.4.2	Solução do Modelo: Freqüências Naturais Amortecidas e Modos Vibrar Acoplados	(282)
8.5	Solução de Compromisso:	(283)
8.5.1	Modificações da Estrutura (Filosofia)	(283)
8.5.2	Primeira Proposta (Compromisso Resultado Simplicidade)	(283)
8.5.3	Interação Rotor/Mancais/Estrutura (Análise Assíncrona)	(284)
8.6	Comentários finais	(286)
8.6.1	A Melhor Opção: Coluna de Concreto Conforme Modelo	(286)
8.6.2	Resultado de Campo	(286)

IX CONCLUSÃO (287)

BIBLIOGRAFIA

APÊNDICE A Relatório Relativo a Estudo de Caso Real COMPRESSOR 105-J da FAFEN/SE

APÊNDICE B MODOS DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA

INDICE DE FIGURAS

I INTRODUÇÃO

- FIG. 1.1 - ROTOR GIROSCÓPIO EM BALANÇO, 2 GL
- FIG 1.2 - ROTOR CONTÍNUO EM BALANÇO.
- FIG 1.3 - ROTOR ESQUEMÁTICO BI - SUPORTADO.
- FIG 1.4 - ROTOR ESQUEMÁTICO SUPORTADO POR MOLA
- FIG 1.5 - ROTOR REAL SUPORTADO ENTRE MANCAIS.
- FIG 1.6 - ROTOR ESQUEMÁTICO EM SUPORTE FLEXÍVEL

II CINEMÁTICA DE UM ROTOR EM BALANÇO

- FIG 2.1 - SISTEMA DE COORDENADAS XYZ, xyz
- FIG 2.2 - ÂNGULOS DE EULER.
- FIG 2.3 - ÂNGULOS DE EULER. DECOMPOSTO
- FIG 2.4 - COORDENADAS (X, θ) DO MODELO DISCRETO
- FIG 2.5 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DO MODELO

III FREQUÊNCIAS/MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO EM ROTORES FLEXÍVEIS (CONTÍNUO)

- FIG 3.1 - EQUILÍBRIO DINÂMICO
- FIG 3.2 - COORDENADAS DO EIXO INERCIAL
- FIG 3.3 - GEOMETRIA DA CURVATURA PLANA DO EIXO
- FIG 3.4 - CONDIÇÃO DE CONTORNO DO VOLANTE
- FIG 3.5 - CONDIÇÃO DE CONTORNO DA MOLA
- FIG 3.6 - VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS
- FIG 3.7 - CONJUNTO DE ZEROS DE $[\text{DET } M]$
- FIG 3.8 - TABELA ESQUEMÁTICA
- FIG 3.9 - VARIAÇÃO DO DIÂMETRO
- FIG 3.10 - VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO
- FIG 3.11 - MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DO ROTOR

IV FREQUÊNCIAS/MODOS DE VIBRAÇÃO (Hamilton):

- FIG 4.1 - ROTOR ESQUEMÁTICO SUPORTADO P/ MOLA
- FIG 4.2 - VALORES ω QUE ANULAM DET [M] P/ $\Omega = \text{cte}$
- FIG 4.3 - TABELA ESQUEM. FREQUÊNCIAS NATURAIS
- FIG 4.4 - VARÇ. PRIM. FREQ. NAT. COM DIÂMT. DO DISCO
- FIG 4.5 - VARÇ. SEG. FREQ. NAT. COM O DIÂM. DO DISCO
- FIG 4.6 - VARÇ. PRIM. FREQ. NAT. COM A POSIÇ. DO DISCO
- FIG 4.7 - VARÇ. SEG. FREQ. NAT. COM A POSIÇ. DO DISCO
- FIG 4.8 - VARÇ. TERC. FREQ. NAT. COM A POSIÇ. DO DISCO
- FIG 4.9 - VARÇ. 1 e 2 FREQ. NAT. C/ A ROTAÇÃO P/ $K \approx 10^9$
- FIG 4.10 - VARÇ. 1 CRÍTICA COM A RIG. DO MANC. K
- FIG 4.11 - VARIAÇÃO DAS CRÍTICAS/FREQUÊNCIAS NATURAIS COM DOIS ROTORES

V ROTODINÂMICA COM ELEMENTOS FINITOS

- FIG 5.1 - DESENHO ESQUEMÁTICO DE UM ROTOR
- FIG 5.2 - EIXOS DO ROTOR :
- FIG 5.3 - CONVENÇÃO DO FLETOR POSITIVO EM YZ
- FIG 5.4 - PARTIÇÃO PLANA DO ROTOR
- FIG 5.5 - MODELO DE PARTIÇÃO. DO ROTOR 3D
- FIG 5.6 - MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL
- FIG 5.7 - ROTOR REAL SUPORTADO ENTRE MANCAIS.
- FIG 5.8 - ÓRBITAS ELÍPTICAS DE UM ROTOR REAL
- FIG 5.9 - EXERCÍCIO GIROSCÓPICO 1
- FIG 5.10 - EXERCÍCIO GIROSCÓPICO 2
- FIG 5.11 - EXERCÍCIO GIROSCÓPICO 3
- FIG 5.12 - RESULTADO ESQUEMÁTICO (CAMPBEL)

VI INSTABILIDADE EM ROTORES FLEXÍVEIS

- FIG 6.1 - FRÇ PROPULSORA F_T DA PRECESSÃO DO ROT.
- FIG 6.2 - DEFLX ESTÁT.DEV.PESO PRÓPRIO
- FIG 6.3 - FRÇS ELÁSTICAS DE DEFX. DO EIXO
- FIG 6.4 - FRÇS DE AMORTEC. FIBRAS DO EIXO
- FIG 6.5 - ATRASO ENTRE LNT E LND AMORTEC.

- FIG 6.6 - “CROSS COUPLING “ HIDRO-DINÂMICO
- FIG 6.7 - “CROSS COUPLING “ CAUS. FRÇ DE ALFORD
- FIG 6.8 - “CROSS COUPLING “ CAUS. P/ ATRITO SECO
- FIG 6.9 - “CROSS COUPLING “ CAUS. P/ LÍQ. ROTOR
- FIG 6.10 - CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE COMP.
- FIG 6.11 - DIAGR. CASCATA P/ DIAGNS. INSTABILIDADE.
- FIG 6.12 - MOVIM. VIBRATÓRIO ESTÁVEL/INSTÁVEL
- FIG 6.13 - EFEITO DO ACOPLAMENTO CRUZADO.
- FIG 6.14 - MODELO MATEMÁTICO PARA 2 .GL
- FIG 6.15 - ROTOR EM MOVIM. DE ROT. E PREC.
- FIG 6.16 - EQUILÍBRIO DINÂMICO DO ROTOR :
- FIG 6.17 - FRÇS EM UM MANCAL NORMAL
- FIG 6.18 - AMORTECEDOR DE ÓLEO Prensado
- FIG 6.19 - FRÇS EM MANCAL COM ÓLEO Prensado

VII EXEMPLO ROTODINÂMICO – 1 (SUPORTE RÍGIDO):

- FIG 7.1 - DESENHO ESQUEMÁTICO DO ROTOR DA TURBINA
- FIG 7.2 - DESENHO ESQM. DO ROTOR DA TURBINA
- FIG 7.3 - MAPA DAS CRÍTICAS DO ROTOR DA TURBINA
- FIG 7.4 - RSPT. DINÂMICA NO MANC. EX, PESO NO CENTRO
- FIG 7.5 - RSPT. DINÂMICA NO CENTRO, PESO NO CENTRO
- FIG 7.6 - RSPT. DINÂMICA NO MANCAL INT., PESO CENTRO
- FIG 7.7 - RSPT. DINÂMICA NO MANCAL EXT., PESO PONTAS
- FIG 7.8 - RSPT. DINÂMICA NO CENTRO, PESO PONTAS
- FIG 7.9 - RSPT. DINÂMICA MANCAL INT., PESO PONTAS
- FIG 7.10 - PRIMEIRO MODO AMORTECIDO A 1000 rpm
- FIG 7.11 - SEGUNDO MODO AMORTECIDO A 1000 rpm
- FIG 7.12 - PRIMEIRO MODO AMORTECIDO 3000 rpm
- FIG 7.13 - QUARTO MODO AMORTECIDO A 6550 rpm
- FIG 7.14 - PRIMEIRO MODO AMORTECIDO A 9000 rpm
- FIG 7.15 - SEGUNDO MODO AMORTECIDO A 9000 rpm
- FIG 7.16 - TERCEIRO MODO AMORTECIDO A 9000 rpm
- FIG 7.17 - QUARTO MODO AMORTECIDO A 9000 rpm
- FIG 7.18 - DIAGRAMA CASCATA PRODUZIDO PELO AD4

VIII EXEMPLO ROTODINÂMICO – 2 (SUPORTE FLEXÍVEL)

- FIG 8.1 - CONJUNTO COMPRESSOR 105-J
- FIG 8.2 - QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA
- FIG 8.3 - NONO E DÉCIMO MODOS
- FIG 8.4 - FRF DO MANC. MOTOR LA VERTICAL
- FIG 8.5 - DESENHO DO ROTOR DO MOTOR
- FIG 8.5a - DESENHO ESQUEMÁTICO DO ROTOR
- FIG 8.6 - FREQUÊNCIAS NAT./ MODOS DO ROTOR
- FIG 8.7 - ESQ. MANC LUBRIF. P/ ANEL - ARCO PARCIAL
- FIG 8.8 - FRF DO MANC. LA HORIZONTAL (14 GL)
- FIG 8.9 - FRF DO MANC LA VERTICAL (155 GL)
- FIG. 8.10 - MODIFICAÇÃO IMPLEMENTADA
- FIG. 8.11 - FRFs DA SOLUÇÃO APRESNT. SECÃO 8.5.1.1
- FIG. 8.12 - COMP. DAS FRF DO MANCAL LA ANTES/DEPOIS
- FIG. 8.13 - RESP. NO ACOPLMT COM/SEM FUND
- FIG. 8.14 - RESP. MANC. LA COM/SEM FUND.
- FIG. 8.15 - RESP. MANC. LOA COM/SEM FUND.
- FIG. 8.16 - RESP. NA EXCITATRIZ COM/SEM FUND.
- FIG. 8.17 - ESPECTRO DE VIBRAÇÃO VERTICAL MOTOR LA

ÍNDICE DE TABELAS

VII EXEMPLO ROTODINÂMICO – 1 (SUPORTE RÍGIDO):

TAB 7.1 GEOMETRIA DO ROTOR

VIII EXEMPLO ROTODINÂMICO – 2 (SUPORTE FLEXÍVEL):

TAB 8.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA DE SUPORTE

TAB 8.2 GEOMETRIA DO MANCAL

TAB 8.3 PARÂMT GEOMT DOS MANCAIS VELHO/NOVOS

TAB 8.4 PARÂMT OPERAC DOS MANCAIS VELHO/NOVOS

TAB 8.5 COMPARAÇÃO DAS CRÍTICAS DO ROTOR COM AS CRÍT. DA ESTRUTURA

LISTA DE SÍMBOLOS

"A" "B", "C" e "D",	Coeficientes a Determinar do método de Cramer
A, B, C, D, E, F, G, H	Constantes de Integração
a	Razão: Momentos de Inércia, Polar e Diametral.
a	Constante Auxiliar.
A,b,c,d,e,f,g	Coeficientes Auxiliares.
a_{ij}	Coeficiente Auxiliar de Integração
\bar{a}^*	Aceleração do centro de gravidade
\bar{a}	Aceleração em Coordenadas Cilíndricas
A,Á	Pontos da superfície do eixo
A	Matriz representativa do Sistema aberto
b	Constante Auxiliar
$B^T B$	Segunda Derivada de N^e
B	Carregamento de entrada (input);
C _{ij}	Elemento da Matriz de Amortecimento em i, j.
$[C] = \sum_{j=-r}^s a_j [\lambda]^j$	Matriz de Amortecimento
$[C_e]$	Matriz de Amortecimento
C	Centro do Disco
CG.	Centro de Gravidade do Disco
C_d	Coeficiente de Amortecimento Externo,
C_i	Coeficiente de Amortecimento Interno,
$C_c = 2\sqrt{KM}$	Amortecimento Crítico
C_χ	Amortecimento Cruzado
C_b	Folga do Mancal (Bearing Clearence)
C_p	Folga da sapata (Pad Clearence)
D	Adimensional de Inércia
D	Diâmetro da palheta

D	Matriz de saída (out-put)
E	Adimensional Elástico
$\bar{r} = r\bar{e}_e$	Vetor em Coordenadas Cilíndricas
$\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z \equiv e_r, e_\theta, e_z$	Vetores Unitários do Referencial Cilíndrico
$\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z \equiv e_x, e_y, e_z$	Vetores Unitários do Referencial Móvel x, y, z
EC, CE	Energia Cinética
EP, PE	Energia Potencial
$EP(z, t), EC(z, t)$	Energia Cinética e Potencial em função de Z
E	Modulo de Young (F / L^2)
$[E] =$	Matriz que enfatiza a deslocamento Vertical Y
“E”, “F”,	Funções Transcendentais de da Elástica
F	Adimensional de Preeceção .
F^{iv}, F''', F'', F	Derivadas da Elástica
$F_n(Z)$	Equação da Elástica
F'	Derivada Parc./Ordin. de F em relação a Z
\dot{F}	Derivada Parcial da função F em relação a t
F_T	Força Tangencial
F_R	Força Radial
F	Força Radial
F_S	Força Vapor
F_N	Força Normal
G	Centro de gravidade do disco
G	Modulo de Cisalhamento (F / L^2),
”G”, ”H”,	Funções Transcendentais da Elástica
$[G_e] \Rightarrow$	Matriz Giroscópica
$[G(s)]$	Matriz da função de transferência
h	Altura ou Raio do no Eixo

$\{h\} = \{\eta\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}$	Variável auxiliar (autovalor)
\bar{H}_{xyz}	Vetor Momento Cinético
\dot{H}_x	Derivada em t do Momento Cinético (x)
$\dot{\bar{H}}_{xyz}$	Derivada Total do Momento Cinético.
[H]	Matriz de Resposta em Frequência
H	Hamiltoniano
H	Altura da Palheta da Turbina (Força de Alford)
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \equiv i, j, k$	Vetores Unitários do Referencial Inercial.
"I", "J",	Funções Transcendentais da Elástica
$I_p = Kg.m^2$	Momento Polar de Inércia do Disco. ML^2
I_p	Momento Polar de Inércia do Eixo. ML^2
I	Momento de Inércia Transversal do Disco. ML^2
I	Momento de Inércia Transversal.
$I; i; j = \sqrt{-1}$	Numero Complexo.
$I_s(Z)$	Função de distribuição de Inércia
$I_{xx} = I = I_{yy}$	Momento de Inércia Transversal de Área (L^4)
$j\bar{X} = \bar{Y}$	Operador de rotação, 90 graus
$j\bar{Y} = -\bar{X}$	Operador de rotação, 90 graus
k	Fator de Forma ao Cisalhamento
K, K	Rigidez de Mola Linear do Mancal.
KF, k, κ	Rigidez de Mola Angular do Mancal.
$K_{i,j}$	Elemento da Matriz de Rigidez em i,j.
$[K_e] \Rightarrow$	Matriz de Rigidez
$K_{x1}, K_{x2}, K_{x3}, K_{x4}$	Elementos da Matriz de Rigidez
K_{κ}	Rigidez cruzada
$[K_{seq}(s)] = [G(s)]^{-1}$	Rigidez dinâmica Equivalente

LM	Linha dos Mancais
LC	Linha de Centro do Disco
$L\{G(z)\} = \overline{G}(S) = \overline{G}$	Transformada de Laplace
l, L	Comprimento do Eixo/Elemento.
M	Momento Fletor no eixo (FL)
M_x, M_y	Fletor nas Direções X e Y (FL)
$m(z)$	Massa distribuída do Eixo como função de Z
$m_s(Z)$	Função de distribuição de Inércia
m	Massa distribuída do Eixo
$m =$	Massa por unidade de comprimento
$M = M_d$	Massa do disco
$[M_e] \Rightarrow$	Matriz de Inércia
$M_{x1}, M_{x2}, M_{x3}, M_{x4}$	Elementos da Matriz de Inércia
Mancal Flooded	Sem cavitação
Mancal Starved	Com cavitação
M	Preload (pré-carga do Mancal)
$N^e, N^{e'}, N^{e''}$	Função de Interpolação do Elemento e Derivadas
Os, O	Cenytro do Eixo
(P,T)	Carregamento Dinâmico do Disco (Força e Torque)
$P(Z); Q(Z)$	Funções Periódicas
$[P]$	Auto-vetor
P	Carga Axial (F)
{Q}	Vetor Posição
$Q(Z)$	Elástica do Eixo
$\overline{Q}(S)$	Elástica do Eixo no Domínio de Laplace
Q^e	Coordenadas Generalizadas dos nos do elemento

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{yi} \\ \phi_{xi} \\ u_{yj} \\ \phi_{xj} \end{Bmatrix} = Q^e$$

Coordenadas Generalizadas dos nos do elemento

$$r_r = \frac{\Omega}{\omega_r}$$

Velocidade Modal Relativa

r ; s

Autovalores

S,s

Variável No Domínio de Laplace

S

Adimensional de Rotação

$$S = E \cdot \varepsilon$$

Tensão no Eixo

$$s = \lambda \pm i\omega_d$$

Autovalor

s

Frequência Complexa

$$(T = K(+))jK_s)$$

Numero Complexo T

$$(T' = K(-))jK_s)$$

Complexos conjugados T'

$$u_y(Z,t) \rightarrow$$

Vetor dos Deslocamento Generalizados do rotor

$$U = (u_x, u_y)$$

Coordenada Generalizadas em X e Y

UVZ

Referencial Rotativo

U

Auto-vetor

u

Variáveis de input

$$\dot{v} = Av + Bu$$

Equação Diferencial (teoria de controle)

$$v = T\{q\}$$

Variável de Estado ;

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + \omega r\bar{e}_\theta$$

Vetor Velocidade Coordenadas Cilíndricas

V

Auto-vetor

X

Eixo Principal do Triedro Inercial

XYZ

Referencial Inercial, Fixo ou Global

xyz

Referencial Móvel solidário ao eixo, não gira

xyz, x'y'z', x''y''z'', xo yo zo

Referenciais Móveis auxiliares

(X, θ) -

Deslocamento CG e Ângulo de Rotação do Disco

Y

Eixo Principal do Triedro Inercial

$$y = Dx \rightarrow$$

(I / O) Teoria de Controle

$\ z_i\ $	Vetor Norma
$\ z_i\ _{\infty}$	Vetor Norma Infinita
Z	Eixo Principal do Triedro Inercial
α	Parâmetro Adimensional Rotativo Eixo
$\bar{\alpha}$	Parâmetro Adimensional Rotativo Disco
$\bar{\alpha}_{xyz}^v$	Aceleração angular no Ref Móvel
$(\alpha)_-$	Matriz de Flexibilidade do Eixo
$[\alpha M + \beta K]$	Amortecimento Proporcional
α_{ij}_-	Coefficiente de Influência da Matriz de Flexib. do Eixo
$\Delta\alpha_{ij}$	Determinante Característico de sistemas Lineares
β	Coefficiente de ajuste da Força de Alford ;
β^4	Parâmetro Adimensional Translação Eixo
$\bar{\beta}^4$	Parâmetro Adimensional Translação Disco
δ	Parâmetro Transcendental Eixo
$\Delta\alpha_{ij}$	Determinante Característico de sistemas Lineares
$\delta(Z - C)$	Função Delta de Dirac
$\delta'(Z - C)$	Derivada da Função Delta de Dirac (Binário Unitário)
$\delta u_z = -y \frac{\partial u_y}{\partial z}$	Deformação específica na direção Z
$\delta = \frac{2\pi \cdot \xi_{rr}}{\sqrt{1 - \xi_{rr}^2}}$	Decremento Logarítmico
$\frac{\partial EP(z, t)}{\partial q_i}$	Gradiente de $EP(z, t)$
ε	Parâmetro Transcendental Eixo
ε	Deformação Específica (strain)
ε	Deformação Específica (strain)
$\varepsilon_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}$	Deformação específica axial (strain)
(ϕ, ψ, θ)	Ângulos de Euler

ϕ	Defasagem entre forças, Auto-vetor
$\dot{\phi}$	Velocidade angular na direção X
$\phi_y = \frac{\partial u_x}{\partial z}$	Deslocamento Angular no plano xz
$\phi_x = -\frac{\partial u_y}{\partial z}$	Deslocamento Angular no plano yz
$[\Phi] = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{i+1}\}$	Matriz Modal de Auto-vetor
$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}$ e $\{\dot{\varphi}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$	Vetor auxiliar na solução do autovalor
φ, η	Autovetores
$\gamma = \frac{kl}{EI}$	Parâmetros Adims de Rig. Tors. do mancal do Eixo
$\eta(z) = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$	Vetor Espacial de Posição de (X,Y,Z)
$\frac{\partial \eta}{\partial Z}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2}, \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4}, \ddot{\eta}, \dot{\eta}$	São as derivadas do Vetor $\eta(z)$
$\eta(z) \rightarrow \{Q(z,t)\}$	Coordenadas Modais Generalizadas
$\eta(z)$	Autovetor
$\bar{\eta}(z) = \bar{X} + \bar{Y}$	Posição espacial do Elemento em (x,y,z)
η	Amortecimento Cruzado Relativo
$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}$ e $\{\dot{\eta}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$	Função auxiliar na solução do autovalor
$[\lambda]$	Matriz de Autovalores
λ	Espessura do Disco
$\lambda = -\omega^2$	Autovalor / Eigenvalue.
$\lambda(x)$	Saída (output) do Sistema Global
$\lambda(x) = Ex$	Prioriza pos. partclar do i/o em detrm.de outras
$\Gamma = \frac{Kl^3}{EI}$	Parâmetros Adims de Rigidez do mancal do Eixo

$\sum F, T, M$	Somatório de Forças, Torques e Momentos
μ_1 e μ_2	Coefficientes de atrito de Coulomb
μ, φ, ψ	Autovetores
$\mu(z-c)$	"Função" Degrau Unitário
\bar{v}	Vetor Posição em coordenadas Cilíndricas
ν	Coefficiente de Poison
$[\Lambda]$	Matriz de Autovalores
Π	Tensor de Inércia do Disco
$\dot{\theta}$	Velocidade angular na direção Y
(θ)	Ângulos de Euler
ρ	Raio de curvatura do Eixo
$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$	Tensão principal direção Z
σ	Tensão
σ_{MAX}	Tensão Máxima
ω	Frequência de Precessão do Eixo
$\bar{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}$	Velocidade Absoluta de Rotação do Eixo
$\bar{\omega}^v = \bar{\omega}^d$	Velocidade Absoluta do Volante no Ref Móvel
ω_{rr}	Frequência Natural de Vibração
ω	Frequência de Precessão do Eixo "Whirl"
ξ_{rr}	Fator de Amortecimento Modal
ξ	Amortecimento Externo Relativo
$\{\psi\} =$	Matriz de Autovalores
(ψ, θ, ϕ)	Ângulos de Euler
$\dot{\psi} = \Omega, \dot{\theta} = \frac{\partial \dot{X}(Z, t)}{\partial Z}, \dot{\phi} = -\frac{\partial \dot{Y}(Z, t)}{\partial Z}$	Velocidades angulares elemento de disco
Ω	Frequência de Rotação do Eixo "spin"

I INTRODUÇÃO

A garantia da continuidade operacional é um aspecto fundamental para o bom resultado econômico das indústrias de processo. Nesse sentido, as turbomáquinas despontam com os maiores graus de criticidade dentre os equipamentos utilizados.

Especialmente com relação às máquinas, a observação e a análise do comportamento vibratório dos rotores, mancais e de toda a sua estrutura de suportaçoão constituem recursos inestimáveis para minimizar não só os riscos de interrupção da produção mas também evitar acidentes e danos ambientais.

Essa prática compreende a determinação de freqüências naturais, a definição da resposta dinâmica ao desbalanceamento, o estabelecimento da curva elástica do rotor, a caracterização da estabilidade dinâmica do conjunto rotativo, além de vários outros estudos relacionados às manifestações vibratórias.

O mau desempenho no funcionamento rotodinâmico de uma turbomáquina é geralmente caracterizado por um elevado nível de vibração do eixo, o qual precisa ser contido dentro de valores pré-estabelecidos, para garantir um funcionamento adequado deste equipamento (confiabilidade).

Vibração elevada é sinônimo de:

- 1) Elevado ruído, inadmissível em submarinos e navios de Guerra,
- 2) Baixa confiabilidade dos equipamentos (baixo tempo médio entre falhas),
- 3) Desgaste excessivo dos componentes das máquinas (mancais, acoplamentos),
- 4) Custos elevados de manutenção,
- 5) Perdas elevadas por lucro cessante

A análise dinâmica tem um importante papel na fase de projeto e objetiva minimizar os riscos do investimento. A identificação tardia de um problema (na fase de fabricação e montagem da máquina), é mais custosa do que a sua identificação na fase de projeto. Analogamente, podemos dizer que a identificação de um problema na fase de partida da planta também é mais cara do que a sua identificação na fase de fabricação.

Se o problema for identificado na fase de produção, a perda por lucros cessantes é ainda maior. Em alguns casos a planta fica condenada, como veremos no Capítulo VIII, a conviver com os prejuízos decorrentes do mau funcionamento das turbomáquinas mal projetadas, mal montadas ou mantidas inadequadamente.

Todo o esforço feito na fase de projeto para garantir o bom desempenho rotodinâmico de uma turbomáquina, pode ser perdido caso os aspectos relacionados à montagem não sejam convenientemente tratados.

Especial atenção deve ser dedicada à estrutura de suportação da máquina. É muito importante registrar que um bom projeto rotodinâmico de uma turbomáquina, não   garantia real de que este equipamento v  funcionar bem no campo (baixos níveis de vibração), quando o mesmo for instalado em seu berço de trabalho. Este problema é ainda mais sério, na medida em que sabemos que as engenharias de construção civil, aeronáutica e naval não dominam a tecnologia de modelagem dos protótipos virtuais no caso da instalação de turbomáquinas.

Nos projetos de construção civil são aplicados métodos est ticos para projeto das fundações, que têm a sua eficácia comprovada, todavia existe um risco inerente ao processo de simplificação, que faz com que em muitos casos os níveis de vibração observados no campo sejam bem superiores àqueles medidos na base inercial (teste realizado no fabricante). Em alguns casos estes níveis são tão elevados que comprometem o funcionamento da turbomáquina, como será mostrado no caso de estudo apresentado no Capítulo VIII.

A utilização de programas de elementos finitos para o projeto dos suportes, empregada na engenharia aeronáutica e naval, aumenta as chances de sucesso do projeto, todavia não é suficiente para representar o acoplamento dinâmico entre as diversas partes inter-relacionadas (abordagem simplificada), exigindo custosos esforços experimentais após a construção do primeiro protótipo, para garantir a inexistência de problemas.

Em termos mais específicos, podemos afirmar que as frequências naturais do rotor serão distintas para configurações diferentes do suporte (variações da ordem de 10% são percebidas conforme as condições de contorno do suporte). Como se trata de um problema acoplado, também as frequências naturais do suporte são alteradas quando o rotor é acoplado à estrutura (menores variações são observadas).

Desta forma, a simulação da interaço rotor/estrutura/mancais   necessária e essencial para uma representação correta do modelo físico, correspondendo a um protótipo virtual verdadeiramente representativo.

Em alguns sistemas, onde são instaladas múltiplas máquinas sobre uma única estrutura de suportação, a estrutura de suporte pode ser excitada por uma grande gama de harmônicos e sub-harmônicos das máquinas, elevando bastante o risco do projeto desta estrutura (o trem de compressão pode ser composto de diversas turbomáquinas trabalhando com diferentes rotações).

Segundo o API-617 (Norma Internacional dedicada a compressores centrífugos para uso na indústria do petróleo), a rigidez da base de uma máquina deve ser no mínimo 3,5 vezes superior à rigidez do mancal. Caso esta exigência não seja cumprida, as freq ncias naturais calculadas pelo estudo rotodinâmico estarão comprometidas e, conseqüentemente, as margens de separa o (segurança) esperadas serão diferentes.

O nível de rigidez exigido pelo API-617, pode, em alguns casos, ser muito elevado e tornar-se inexec vel na prática. Mesmo assim, essa recomenda o poderia não ser suficiente para garantir o sucesso do projeto.

Sabemos também que o amortecimento proporcionado pelos mancais   seriamente prejudicado pela baixa rigidez da funda o. Caso a rigidez do suporte tenha valor inferior a cerca de 10 vezes   rigidez dos mancais, as conseq ncias serão notadas no fator de amplifica o da resposta dinâmica da máquina.

As estruturas de suportaço acima discutidas podem ser, por exemplo:

- 1) Um mezanino em uma planta industrial,
- 2) O casco de um submarino ou de um navio de Guerra,
- 3) Uma plataforma marítima de petróleo "off shore",
- 4) A asa de um avio o responsável pela suportaço de suas turbinas a gás.

Um equipamento rotativo real t pico (tal como uma turbomáquina),   constituído de vários subsistemas, tais como: rotor, mancais, carcaça, impelidores, selagem, funda o, etc... Quando o rotor é submetido a distúrbios internos ou externos, tais como desbalanceamento, desalinhamento, freq ncia de passagem das palhetas, freq ncia de engrenamento, instabilidade rotodinâmica, freq ncias harm nicas da rede elétrica, entre outros, estes componentes interagem entre si em um processo dinâmico de absor o e dissip o de energia.

Estes distúrbios se configuram pelo estabelecimento de um regime complexo de funcionamento do rotor, caracterizado por movimentos de deforma o do eixo que gira

com rotação Ω . Este movimento é caracterizado também por uma ou mais frequências de precessão ω , independentes da frequência de rotação Ω do rotor.

O eixo deforma-se em uma curva espacial, denominada curva elástica do rotor (reversa no espaço). Esta curva tem grande importância no projeto das máquinas, na medida em que define as tensões máximas de projeto do eixo, bem como as folgas internas mínimas da máquina. A obtenção da curva elástica tem sido facilitada pelo uso de programas de computador.

A ciência da Rotodinâmica é pouco estudada nas universidades brasileiras, notadamente pela completa inexistência de fabricantes de turbomáquinas no Brasil.

Os fabricantes de turbomáquinas são os usuários que mais demandam este conhecimento. A Petrobras, na qualidade de maior operadora de turbomáquinas do Brasil, tem se esforçado para desenvolver esta particular área da dinâmica.

Antes do estabelecimento das diretrizes deste trabalho e de iniciarmos a construção do nosso ferramental analítico para enquadramento das dificuldades teóricas que serão aqui discutidas, cabe uma revisão do estado atual da arte desta ciência, a Rotodinâmica.

1.1 Histórico

1.1.1 Análise e Revisão do Conhecimento Rotodinâmico

O primeiro trabalho rotodinâmico remonta a mais de um século, sendo apresentado por RANKINE (1869). RAYLEIGH (1894) apresentou um método aproximado para cálculo de frequências naturais em vigas.

TIMOSHENKO (1945) introduziu o conceito de cisalhamento transversal nas frequências naturais.

JEFFCOTT (1919) é o primeiro a apresentar o conceito de precessão do eixo “whirl”, tal como é conhecido hoje. No seu trabalho o equacionamento da elástica (deformada), é definido em termos de forças ortogonais que agem sobre o eixo, tais como as forças de inércia e de resistência elástica a deformação.

SOUTHWELL e GOUGH (1921), verificaram a redução da frequência natural do rotor com a aplicação do torque e do empuxo axial. SMITH (1933) discutiu a influência

do efeito giroscópico na frequência natural de rotores com grande disco. Esta idéia é posteriormente estendida por GREEN (1958).

HOLZER (1921) apresentou um método manual para calcular frequências críticas em compressores alternativos. Este método foi modificado e é usado hoje na forma de matrizes para análise torcional. MYKLESTAD (1945) desenvolveu um método para cálculo de frequências naturais de asas de avião ao mesmo tempo em que PROHL (1945) apresentou um método para cálculo de frequências naturais em rotores de turbomáquinas.

Estes três métodos (HOLZER, MYKLESTAD, PROHL) formam a base para os atuais métodos rotodinâmicos e marcam uma nova era na análise das vibrações, caracterizada pela mudança do contínuo para os métodos discretos. MILLER (1953) introduziu a discussão sobre suportes flexíveis e discutiu a resposta dinâmica lateral de vigas.

RAUL (1970) investigou a resposta dinâmica ao desbalanceamento, utilizando análise matricial. Os livros texto de VANCE (1988) e CHILD (1993) mostram a grande quantidade de trabalhos realizados nesta área.

RUHL e BOOKER (1972) desenvolveram as matrizes de massa e rigidez do elemento e LUND (1974) desenvolveu o método de matriz de transferência para cálculo de estabilidade e frequências naturais amortecidas de sistemas rotor/mancais hidro-dinâmicos, levando em consideração o amortecimento interno (histerético) e as forças aerodinâmicas de acoplamento cruzado, “cross coupling”.

NELSON e McVAUGH (1976) desenvolveram diferentes matrizes elementares para diferentes elementos no rotor. Utilizaram o conceito de função de interpolação e aplicaram o princípio dos trabalhos virtuais.

MURPHY e VANCE (1983) apresentaram um método para calcular o polinômio característico a partir do método da matriz de transferência. KIM e DAVID (1990) apresentaram variação do método de matriz de transferência com matrizes diferentes para massa, rigidez e inércia rotatória, podendo calcular o polinômio característico diretamente, o qual era convertido em problema de autovalor. WILKINSON e REINSCH (1971) resolveram este problema.

MASLEN e BILK (1992) apresentaram modelo para inclusão de mancais magnéticos na análise rotodinâmica. A análise de estabilidade foi executada na forma de espaço-estado “state –space”.

1.1.2 Revisão do Conhecimento sobre Suportação de Máquinas

Desde os primeiros trabalhos rotodinâmicos estava clara a importância da fundação nos cálculos rotodinâmicos. Algumas das pesquisas feitas em suportes flexíveis são apresentadas abaixo.

BOHM (1964) discutiu a necessidade de incluir características do suporte e da carcaça na análise de turbomáquinas. BANNISTER e THOMAN (1964) apresentaram o método da impedância para caracterizar a flexibilidade das fundações. Este trabalho foi desenvolvido por EWINS (1984).

LUND (1965) propôs método para cálculo limite de estabilidade em rotores flexíveis em mancais com suporte flexível e amortecido. Com este modelo simples mostrou que as características do suporte afetam grandemente a estabilidade do rotor. Em suportes sem amortecimento a estabilidade cai e, no caso em que haja amortecimento, a estabilidade cresce.

GUNTER e TRUMPLER (1969) mostraram o efeito da anisotropia do suporte no limite da estabilidade. Esta análise foi feita usando modelo modificado de JEFFCOTT.

GUNTER (1970) estudou amortecedores de óleo prensado “squeeze film” e mostrou sua influência na resposta dinâmica. KIRK e GUNTER (1972) usando o modelo modificado de JEFFCOTT (1919), mostraram o efeito do suporte na resposta síncrona. Discutiram a sintonia do suporte flexível e suas conseqüências na rotodinâmica do rotor.

BASAL e KIRK (1975) apresentaram um método para incluir a fundação flexível na matriz de transferência (one mass-spring-damper).

KIRK e GUNTER (1976) estudaram um modelo de uma massa para representação de mancais planos em suporte flexível do tipo “squeeze film”.

BLACK (1976) estudou a estabilidade do rotor sujeito à força histerética e externamente amortecido no suporte. Estudou ainda o efeito da rigidez e do amortecimento na estabilidade rotodinâmica.

CHOUDHURY, et all (1976) mostraram o efeito da rigidez e do amortecimento do suporte na frequência natural.

GASH (1976) usou dados experimentais para simular a fundação. As características do modelo são função da rotação. O autor usou dados experimentais para modificar os coeficientes dos mancais inclusive os “cross couplings”. A matriz global é aumentada para incluir o efeito do suporte. Esta contribuição é efetiva para a

resposta dinâmica, que será função da frequência de vibração, mas não é adequada para o estudo de estabilidade

BARRETT, GUNTER e ALLAIRE (1978) discutiram um método rápido e aproximado para calcular rigidez e amortecimentos ótimos para resposta e estabilidade de mancais próximo da crítica, mostrando a influência do suporte.

HASHISH e SANKAR (1984) incluíram na análise rotodinâmica diversos efeitos lineares e não lineares no amortecimento e na rigidez de mancais em suportes flexíveis.

QUEITZSCH (1985) apresentou um método para cálculo da resposta dinâmica em suportes flexíveis. As estruturas são analisadas independentemente e então juntadas. A função impedância da estrutura é acoplada aos mancais e usa a função de transferência como ferramenta de cálculo.

BARRETT e NICHOLAS (1986) usaram resposta em frequência da carcaça de uma turbina para modificar os coeficientes dos mancais conseguindo melhor compromisso entre resultados experimentais e analíticos.

LUND e WANG (1986) usaram um método onde resolvem o rotor e a estrutura independentemente, acoplando os resultados posteriormente.

NICHOLAS e BARRETT (1986) apresentaram um método para incluir o suporte flexível na análise rotodinâmica. Derivaram coeficientes equivalentes que incluem os parâmetros do suporte. O exemplo aplica a teoria a uma máquina real com mancais de sapatas pivotadas “tilting pad”, sem incluir o efeito “cross coupling”

NICHOLAS e WHAREN (1986) aplicaram esta mesma teoria para calcular a resposta forçada em uma turbina a vapor. Usou Função de Resposta em Frequência (FRF) experimental para derivar os coeficientes. O autor considera o amortecimento 10% do crítico.

KAZAO e GUNTER (1987) ampliaram o método de matriz de transferência para incluir múltiplos rotores.

EARLES e PALAZZOLO (1988) apresentaram um método para cálculo rotodinâmico em suportes flexíveis por elementos finitos. Este método foi usado para cálculo de resposta dinâmica de um modelo.

FAN e NOAH (1989) utilizaram um sistema de redução (modal reduction) do modelo para análise de rotores flexíveis independentemente e posterior acoplamento aos mancais. Apresentam um exemplo onde rotor e suporte são analisados independentemente e então acoplados.

WANG e TSAI (1989) apresentaram estudo sobre o efeito anisotrópico do suporte sobre a instabilidade aerodinâmica. O rotor Delaval foi usado para o estudo de um grau de liberdade na fundação. O efeito anisotrópico da fundação ficou explicado mostrando que em alguns casos este efeito pode melhorar a estabilidade

BRENO (1989) Estende a modelação a sistemas não lineares, como estruturas “off shore”. Apresenta ainda uma abrangente revisão bibliográfica, na qual é apresentado um trabalho completo que relaciona estruturas lineares e não lineares.

ROUCH e McMANS (1989), usam a Função de Resposta em Frequência (FRF) para representar a fundação, no estudo de resposta dinâmica do rotor. Esta análise é feita em elementos finitos e o autor investiga duas alternativas, o amortecimento proporcional e a utilização da informação de fase.

STEPHENSON e ROUCH (1992) apresentam um método de determinação das matrizes dinâmicas usando dados experimentais. O autor usa “Least Square Method-LSM” para calcular as matrizes do sistema, a partir de um conjunto completo de vetores modais.

WYGANT (1993) incluiu a influência do pedestal flexível e da carcaça usando informação modal. Este estudo inclui pedestal “cross talk” dentro de um procedimento de matriz de transferência. As informações modais podem vir de um modelo analítico ou de um resultado experimental.

REDMOND (1996) discutiu a imprecisão dos testes de impedância experimental de suportes e implementa procedimento para subtrair o efeito dinâmico do rotor dos dados originais. O sistema de suportaçao considera um modelo de um grau de liberdade e contempla o “cross coupling e o cross talk” entre mancais (aplica-se para o cálculo de resposta dinâmica).

VAZQUEZ e BARRETT (1998) sistematizaram um método para incluir a flexibilidade dos suportes nos cálculos rotodinâmicos. Os suportes são representados usando-se funções de transferência polinomiais e é aplicado para resposta dinâmica e estudo de estabilidade.

LEES e FRISWHEEL (1998) descreveram um método para modelação dinâmica da fundação a partir da resposta dinâmica. Isto é obtido pela formulação inversa do problema de resposta do rotor e a partir do modelo do rotor para identificação das forças aplicadas nos mancais. Estas forças são combinadas com os deslocamentos encontrados no pedestal e é usado para calcular os parâmetros da fundação.

FENG e HAHN (1998) apresentaram um método para calcular parâmetros modais da fundação a partir de informações de desbalanceamento. Aplica-se a máquinas montadas em suportes flexíveis, rigidamente ligadas ao solo.

RIEGER e ZHOU (1998) usaram o método da matriz de transferência para rotor suportado em pedestal flexível, suportado em fundação flexível. O autor deduz a matriz de transferência da fundação para propriedades diferentes em X e Y.

1.1.3 Revisão Histórica dos Métodos de Redução de Matrizes

Desde o início tem sido reconhecido que o tamanho da matriz estrutural era muito grande para ser resolvida com os recursos computacionais disponíveis. Alguns métodos têm sido desenvolvidos para resolver o problema associado ao tamanho da matriz sem descaracterizar o modelo.

As técnicas de redução de matriz podem ser grupadas em três categorias: redução estática, redução modal e redução dinâmica ou redução exata. Os dois primeiros grupos de técnicas de redução levam a soluções aproximadas que satisfazem a maioria dos casos, enquanto o terceiro grupo conserva o exato comportamento dinâmico do sistema, porém exige métodos especiais para resolver o sistema.

Revisão dos trabalhos realizados neste tópico:

IRONS, B. (1965) introduziu a redução estática, onde a massa dos graus escravos (slaves) era negligenciada.

GUYAN, (1965) apresentou um método de redução estática com muitas modificações e seu método tem sido largamente utilizado em análise estrutural. Este método leva a uma solução aproximada.

KIDDER, (1973) apresentou uma expansão do método (Guyan reduction), introduz aproximações associadas à expansão do inverso da redução, em série de Taylor

HENKHELL e ONG, (1975) apresentaram um método para seleção automática dos graus de liberdade (master degrees of freedom) através do conceito de autovalor (SVD-Single value decomposition). Este método é apresentado como uma melhoria do método de Guyan, sendo, porém, muito útil em redução dinâmica.

JOHNSON e CRAIG et all (1980) apresentaram uma variação do método de Guyan. Configura o problema como sendo de autovalor de um sistema de equações de segunda ordem. Este sistema é mais acurado para a mesma faixa de frequência.

PAZ, (1984) apresentou um método iterativo para cálculo do autovalor de um grande sistema, usando redução dinâmica. O "eigenvalue solver" requer matrizes de coeficientes constantes.

VANCE, MURPHY et all, (1987) usaram teste modal para verificar resultados analíticos em diversos rotores.

HASSENPFKUG, (1988) desenvolveu um método para criar modelos matemáticos a partir dos resultados modais. Neste enfoque alguns graus de liberdade são selecionados e uma transformação modal inversa é aplicada para gerar um modelo matemático de ordem reduzida em coordenadas físicas.

LUND, (1994) revisou algumas técnicas modais usadas na análise rotodinâmica. Especial ênfase foi dada ao cálculo de sistemas amortecidos, a redução modal e ao cálculo da matriz de resposta em frequência, erroneamente chamada de matriz da função de transferência.

BARRETT e ALLAIRE, (1988) usaram redução dinâmica dos coeficientes de um mancal "tilting pad" reduzindo para 8 o número de coeficientes. Este "paper" usa o método de montagem das sapatas, para calcular os 8 coeficientes.

VAZQUEZ e ARRETT, (1998a) apresentaram um método de representação de mancal "tilting pad", usando função de transferência para explicitar a redução dinâmica dos graus de liberdade, expressando-os como taxa de polinômios.

VAZQUEZ e BARRETT,. (1998c) usaram um teste modal para verificar o modelo de rotor utilizado em seu trabalho, mostrando bons resultados nas frequências naturais e nos modos de vibração. Expandiu-se esta análise para quantificar diferenças do modelo do rotor, na estabilidade e na resposta dinâmica.

1.1.4 História Rotodinâmica dos Últimos Anos no BRASIL

A primeira bancada experimental construída na COPPE/UFRJ foi utilizada na tese de mestrado "Balanceamento de Rotores Flexíveis pelo Método dos Coeficientes de Influência", de Alfonso Garcia Castro, em abril de 1986. Esta bancada serviu a inúmeros trabalhos e até hoje se encontra em uso na UFRJ.

O primeiro trabalho analítico em rotodinâmica, elaborado na COPPE / UFRJ, foi a Tese de Mestrado de Adhemar Castilho, em 1983.

Na tese de Mestrado de Renato de Oliveira Rocha (1992), apresentada na COPPE/UFRJ, são propostas a modelagem e a simulação de rotores utilizando o

Método dos Elementos Finitos.

RENATO, (1996) desenvolveram protótipos de sistema rotodinâmico flexível em laboratório, com a construção de modelos matemáticos para a estrutura e para o rotor em elementos finitos. Discutem métodos para identificação de modelos matemáticos. Modelam o rotor e a estrutura usando programas de elementos finitos (com identificação dos modelos e função de Resposta em Frequência). Discutem técnicas de redução de modelos estática e modal, aplicando síntese modal e truncamento modal.

Em 2000, Marcelo de Souza Murta apresentou sua tese de mestrado, intitulada "Projeto, Construção e Avaliação Dinâmica de Um Rotor Vertical Suportado em Mancais Hidrodinâmicos", COPPE / UFRJ.

MOHAMME, (2000) analisaram o processo de contato entre o rotor e o estator em máquinas rotativas, objetivando melhorar a capacidade das mesmas de evitar o roçamento, bem como poder resistir ao mesmo nas circunstâncias em que se tornem inevitáveis

Mais recentemente, em 2003, Ítalo Márcio Madeira apresentou na COPPE / UFRJ, uma tese de mestrado cujo objetivo é a modelagem em elementos finitos de máquinas rotativas com efeitos não-lineares, orientado por ZINDELUK.

MARCIO, (2004) discutem a utilização de um excitador eletromagnético capaz de excitar o conjunto rotativo em seus modos normais diretos e retrógrados. Modelam o rotor através de elementos finitos e discutem o problema da instabilidade paramétrica, usando para isto a equação de Mathieu (que não possui solução analítica) e excitação experimental, na investigação de áreas de estabilidade e instabilidade.

Em ATAYDE, J. P. e WEBER, H. I., (2006) é discutida a dinâmica de máquinas rotativas em mancais hidrodinâmicos, com a substituição de coeficientes dos mancais obtidos pelos programas de cálculo de mancais nos programas de rotodinâmica.

Além dos trabalhos comentados nos parágrafos anteriores, podem também ser citados os seguintes trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa em Rotodinâmica da USP, Universidade Federal de Campinas e Universidade Federal de Uberlândia:

- ZACHARIADIS, DC, Critical Speeds and Unbalance Response of a Jeffcott Rotor on Angular Misaligned Hydrodynamic Bearings, In: SAE Brasil International Mobility Congress and Exhibition, 2001, São Paulo, Brasil
- ZACHARIADIS, DC, Stability versus unbalance response of statically indeterminate rotors supported on hydrodynamic journal bearings, In: IFToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, 2002, Sydney, Australia

- ZACHARIADIS, DC, Unbalance Response of Statically Indeterminate Rotors Supported on Hydrodynamic Journal Bearings: Use of the 32 Dynamic Coefficients Bearing Model, In: International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2006, Leuven, Bélgica
- ZACHARIADIS, DC, Unbalance Response of Rotors Supported on Hydrodynamic Bearings Placed Close to Nodal Points of Excited Vibration Modes, ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, USA, v. 128, n. 3, p. 661-669, 2006.
- CAVALCA, KL e LINS, HQ, Dynamic analysis of horizontal rotating machinery, In: Sae Technical Papers, USA, v. 1, n. 1, p. 1-10, 1999
- CAVALCA, KL e CAVALCANTE, PF, Estudo da Interação entre rotores e estrutura de suporte, In: 9o Congresso Chileno de Engenharia Mecânica, COCIM-CONAE, Valparaiso, Chile, v. 1. p. 1-7, 2000
- CAVALCA, KL e SBRAVATI, A, Dynamic Analysis of Flexible Gear Coupling Efforts in Rotating Machinery, SAE Technical Papers, USA, v. 1, n. 1, p. 1-12, 2002
- CAVALCA, KL e CAVALCANTE. An experimental analysis of rotors on flexible structure, In: Sixth IFToMM 2002 - International Conference on Rotor Dynamics, Sydney, Australia, v. 1. p. 531-538, 2002
- CAVALCA, KL, CAVALCANTE, PF e OKABE, EP, An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system, In: Mechanical Systems And Signal Processing, UK, v. 19, n. 1, p. 157-174, 2006.
- CAVALCA, KL, CASTRO, HF e NORDMANN, R, Rotor-bearing system instabilities considering a non-linear hydrodynamic model. In: IFToMM2006 - Proceedings 7th International Conference on Rotordynamics, Vienna, v. 1. p. 1-10, 2006
- CAVALCA, KL, OKABE, EP, Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting-pad bearings. In: IFToMM2006- Proceedings 7th International Conference on Rotor Dynamics, Vienna, v. 1. p. 21-30, 2006
- SALDARRIAGA, MRV e STEFFEN JR, V, Modelagem de Rotores flexíveis montados sobre Suportes Viscoelásticos, In: III National Congress of Mechanical Engineering – CONEM – Belém, Brasil, 2004
- Tese de doutorado: Eduardo Paiva Okabe - Interação Rotor-Estrutura: Modelo Teórico-Experimental. 2007, Universidade Estadual de Campinas - UniCamp, *orientador*: Katia Lucchesi Cavalca Dedini

1.1.5 Rotodinâmica nos Últimos 10 Anos no Mundo

A disciplina Rotodinâmica é hoje considerada uma ciência madura, onde os conhecimentos estão bem consolidados e em fase de otimização. Mesmo dentro desta realidade, constatamos que a comunidade científica mundial tem optado por trilhar alguns caminhos particulares, esquecendo-se, em alguns casos, de investigar outras opções de pesquisa. Neste contexto, esta Tese propõe uma nova alternativa de solução de sistemas giroscópicos conservativos.

A consequência natural desta realidade, é que o número de trabalhos em rotodinâmica vem declinando e dando lugar a outros enfoques, como é o caso das suspensões com mancais magnéticos e das investigações em suportes flexíveis. Dentro desta percepção, apresentaremos alguns trabalhos recentemente escritos sobre esta disciplina, através da apresentação de alguns artigos mais recentes

NICHOLAS et all, (2000) propõem um método para introdução da flexibilidade do mancal nos cálculos rotodinâmicos, usando para isso análise modal experimental, levantando a função “compliance” de resposta em frequência (inverso da rigidez dinâmica) e corrigindo, desta forma, os valores calculados para a velocidade crítica em base inercial.

SAWICKI e GENTA (2001), propõem um enfoque diferente e particular para desacoplar os sistemas de equações de movimento (rotodinâmicos), sem contudo fugir da solução do problema de autovalor, empregando matrizes $2n \times 2n$.

KASARDA e MENDONZA, 2003, apresentam um mecanismo para controlar vibrações sub-síncronas através de amortecimento ativo de mancais magnéticos. Apresenta também resultados reduzindo as amplitudes de vibração críticas.

HU, FENG, et all (2004), discutem a sensibilidade da resposta em posição do centro das órbitas dos mancais de turbomáquinas em função da metodologia empregada nos cálculos hidrodinâmicos.

HENNIN e INGOLSTAD, (2005), discutem a viabilidade das técnicas de otimização de medidas de vibração para caracterizar trincas em eixos de turbomáquinas. Usa elementos finitos e o enfoque das forças modais no avanço das trincas. Usa algoritmo de otimização global para identificação das trincas.

Como referência adicional, podemos citar os seguintes trabalhos:

Artigos: Rotordynamics			
CONF	Ano	Título	Autores
<u>ASME Biennial</u>	1999	Use of the Campbell Diagram in Rotordynamics	Lalanne, M.; Ferraris, G.
<u>ASME Biennial</u>	2001	Jorgen Lund: A Perspective on His Contributions to Modern Rotordynamics (Invited Paper)	Anthony J. Smalley, Southwest Research Institute
<u>ASME Biennial</u>	2001	Rotordynamics Involving Axial Rubbing Against a Disk	Dara W. Childs and Nameer A. Siddiqui, Texas A & M University
<u>IGTI</u>	1996	Experience in Full Load Testing Natural Gas Centrifugal Compressors For Rotordynamics Improvements	Alain Gelin, Jean-Marc Pugnet, Daniel Bolusset, Patrick Friez, FRAMATOME Division THERMODYN, Le Creusot, France
<u>IGTI</u>	1997	Rotordynamics Modeling for an Actively Controlled Magnetic Bearing Gas Turbine Engine	B.M. Antkowiak, The Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge, MA, USA; F.C. Nelson, College of Engineering, Tufts University, Medford, MA, USA
<u>IGTI</u>	2000	A New CFD-Perturbation Model for the Rotordynamics of Incompressible Flow Seals	Namhyo Kim, David H. Rhode, Texas A&M University, College Station, TX, USA
<u>IGTI</u>	2001	Finite Element and Transfer Matrix Methods for Rotordynamics - A Comparison	Jorgen L. Nikolajsen, Staffordshire University, Stafford, England
<u>IGTI</u>	2001	Predicted Effects of Shunt Injection on the Rotordynamics of Gas Labyrinth Seals	Namhyo Kim, Weatherford International, Inc., Houston, TX, USA; Sung-Young Park, David L. Rhode, Texas A&M University, College Station, TX, USA
<u>IGTI</u>	2001	Experimental Evaluation of Hybrid Damper Seals with Brush Elements - Effect of the Bristles on Power Dissipation and Rotordynamics	Steven E. Buchanan, Schlumberger, Rosharon, TX, USA; John M. Vance, Texas A&M University, College Station, TX, USA
<u>IMechE</u>	2000	Rotordynamics and leakage - measurements and calculations on labyrinth gas seals and their application to large turbomachinery	J Sobotzik, R Nordmann, F Hip, and K Kwanka
<u>ISCORMA</u>	2001	Rotordynamics and DDM Design Sensitivity Analysis of an APU Gas Turbine Having a Spline Shaft Connection	A. S. Lee, J. W. Ha
<u>ISCORMA</u>	2001	Fact and Fallacy in Linear Rotordynamics Analysis	A. Caldwell
<u>ISMB</u>	1996	Experimental Verification of Magnetic Bearing System Rotordynamics Code	Urednicek, M., Bear, C.
<u>ISMB</u>	2000	Noncolocation Effects on Rigid Body Rotordynamics of Rotors on AMB	Giancarlo Genta, Stefano Carabelli, Politecnico di Torino, Italy
<u>ISROMAC</u>	1996	Studies in Spontaneous Sidebanding in Rotordynamics	Fredric Ehrich
<u>ISROMAC</u>	1996	System Rotordynamics Model Based on a Hybrid Composition of the Global Deformation	Jorg Wauer

<u>ISROMAC</u>	1996	Rotordynamics on the pc: Transient Analysis with ARDS	David P. Fleming
<u>ISROMAC</u>	1998	Rotordynamics on the PC: Further Capabilities of ARDS	D. P. Fleming
<u>TAMU Pump Show</u>	1998	Pump Rotordynamics Made Simple	Mark A. Corbo, Stanley B. Malanoski
<u>TAMU Turbo Show</u>	1997	Annular Gas Seals And Rotordynamics Of Compressors And Turbines	Dara W. Childs, Leland T. Jordan, John M. Vance
<u>TAMU Turbo Show</u>	2000	Designing High Performance Steam Turbines with Rotordynamics as a Prime Consideration	Stephen L. Edney, George M. Lucas
<u>IFTToMM</u>	2002	Practical applications of singular value decomposition in rotordynamics	Cloud CH, Foiles WC, Li G, Maslen EH and Barrett LE
<u>IFTToMM</u>	2002	Rotordynamics of turbomachinery ... looking back ... looking forward	Childs DW
<u>ISROMAC</u>	2002	Determination of Rotordynamics Parameters for the Jeffcott Rotor-bearing Model	A Antonio-García, J Gómez-Mancilla, V V Kucherenko
<u>ISROMAC</u>	2002	Non-linear Rotordynamics: Computational Strategies	T J Chalko
<u>ISROMAC</u>	2002	Enhanced Rotordynamics for High Power Cryogenic Turbine Generators	J V Madison
<u>IGTI</u>	2003	CFD Determination of Pre-Chamber Flow Perturbation Inlet Boundary Conditions for Seal Rotordynamics Models	David L. Rhode, Texas A & M University, United States; Ganesh Venkatesan, Adapco, India
<u>ASME Biennial</u>	2003	Rotordynamics Analysis: Experimental and Numerical Investigations	Jean-Jacques Sinou, David Demally, Cristiano Villa, Fabrice Thouverez, Michel Massenzio, Franck Laurant
<u>ISCORMA</u>	2003	Numerical Modelling and Simulation in Rotordynamics	G. Genta
<u>ISCORMA</u>	2003	Non-Axisymmetrical 3D Element for FEM Rotordynamics	M. Silvagni, G. Genta, and A. Tonoli
<u>IGTI</u>	2004	Squeeze-Film Damper Predictions for Simulation of Aircraft Engine Rotordynamics	Cyril Defaye, Franck Laurant, Philippe Carpentier, Mihai Arghir, Olivier Bonneau, Samuel Colboc
<u>IMechE</u>	2004	Rotordynamics of turbine labyrinth seals – a comparison of CFD models to experiments	J Schettel and R Nordmann
<u>IMechE</u>	2004	Integrating experimental tests and rotordynamics analysis for solving vibration problems on geothermal turbogenerator sets	L Gregori, G A Zanetta, D Lucci, and C Lupetti
<u>IMechE</u>	2004	Parametric characterization of rub induced whirl instability using an instrumented rotordynamics test rig	R J Williams
<u>ISCORMA</u>	2005	ROTORDYNAMICS SIGNATURE FOR EMBEDDED SYSTEM	Carabelli, S., Macchi, P., Silvagni, M., Tonoli, A., Visconti, M.
<u>ISCORMA</u>	2005	THE BEAUTY OF ROTORDYNAMICS	Genta, G.
<u>ISCORMA</u>	2005	SOME CONSIDERATIONS ON	Genta, G., Silvagni, M.

		CYCLIC SYMMETRY IN ROTORDYNAMICS	
<u>ASME Biennial</u>	2005	Structural Finite Element Modeling of Electromechanical Interaction in Rotordynamics of Electrical Machines	Antti Laiho, Helsinki University of Technology, Espoo, Espoo, Finland, Timo P. Holopainen, ABB Electrical Machines, Helsinki, Finland, Paul Klinge, VTT Industrial Systems, Helsinki, Finland, Antero Arkkio, Laboratory of Electromechanics, Helsinki, Finland
<u>IGTI</u>	2005	Nonlinear Rotordynamics of Automotive Turbochargers: Predictions and Comparisons to Test Data	Luis San Andrés, Juan Carlos Rivadeneira, Murali Chinta, Kostandin Gjika, and Gerry La Rue
<u>IGTI</u>	2005	Mechanism and Impact of Damper Seal Clearance Divergence on the Rotordynamics of Centrifugal Compressors	Thom M. Eldridge and Thomas A. Soulas

Artigos: rotor instability			
CONF	Ano	Título	Autores
<u>ASME Biennial</u>	1997	Rotor Instability Due to Coupled Effect of Lateral and Torsional Modes and Improper Bearing Design	Yatao Zhang and Jari Nyqvist, ABB STAL
<u>ASME Biennial</u>	2001	Some Unusual Cases of Rotor Instability (Invited Paper)	Karl-Olof Olsson, Linköping University, Sweden
<u>ASME Biennial</u>	2001	Theoretical Study on Instability Boundary of Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems: Part I- Jeffcott Rotor with External Damping	Zenglin Guo and R. Gordon Kirk, Virginia Polytechnic Institute and State University
<u>ASME Biennial</u>	2001	Theoretical Study on Instability Boundary of Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems: Part II- Rotor with External Flexible Damped Support	Zenglin Guo and R. Gordon Kirk, Virginia Polytechnic Institute and State University
<u>IGTI</u>	1997	Rotordynamic Instability from an Anti-Swirl Device	John Vance, Texas A&M University, College Station, TX, USA; Steven B. Handy, Castrol North America, Inc., Piscataway, NJ, USA
<u>IGTI</u>	1998	Identification of the Intermittent Synchronous Instability in a High Performance Steam Turbine Rotor Due to Deteriorated Labyrinth Seals	Inam U. Haq, Rayed M. Al-Zaid, SABIC Research & Development, Jubail, Saudi Arabia; Chittineni V. Kumar, Al-Jubail Fertilizer Company, Jubail, Saudi Arabia
<u>IGTI</u>	2000	Instability of an Over-Hung Rigid Centrifuge Rotor Partially Filled with Fluid	Zhu Changsheng, Zhejiang University, Zhejiang, China; H. Ulbrich, University of Essen, Essen, Germany
<u>IMechE</u>	1996	Simulations and experiments of the non-linear hysteresis loop for rotor-bearing instability	Maurice L Adams, Michael L Adams, and J-S Guo
<u>IMechE</u>	2000	Thermal distortion synchronous rotor instability	R G Kirk and A C Balbahadur
<u>ISCORMA</u>	2001	Effect of Interference Fits on	J. M. Vance, D. Ying

		Threshold Speeds of Rotordynamic Instability	
<u>ISROMAC</u>	1998	Transition to Fluid-Induced Limit Cycle Self-Excited Vibrations of a Rotor and Instability Threshold Hysteresis	A. Muszynska
<u>TAMU Turbo Show</u>	1998	Application of a Heat Barrier Sleeve to Prevent Synchronous Rotor Instability	Frits M. de Jongh, Pieter van der Hoeven
<u>TAMU Turbo Show</u>	1999	Unexpected Rotordynamic Instability in a "Proven" FCC Wet Gas Compressor	Ed Wilcox
<u>TAMU Turbo Show</u>	2001	Rotor Instability Problems in an Integrally Geared Compressor Supported by Tilting Pad Bearings	Peter M. Gruntfest, Leo Andronis, William D. Marscher
<u>IGTI</u>	2002	Seal and Bearing Upgrade for Eliminating Rotor Instability Vibration in a High Pressure Natural Gas Compressor	Jiming Li, Pranabesh De Choudhury, Elliott Company, Jeannette, PA, USA; Rogerio Tacques, Petrobras S/A, Rio de Janeiro, BRAZIL
<u>IFTtoMM</u>	2002	Electromagnetic circulatory forces and rotordynamic instability in electric machines	Holopainen TP, Tenhunen A and Arkkio A
<u>IFTtoMM</u>	2002	Instability and control of a cantilever rotor supported on MR fluid damper and sliding bearing	Wang J and Meng G
<u>IFTtoMM</u>	2002	Part I – Theoretical model for a synchronous thermal instability operating in overhung rotors	Balbahadur AC and Kirk RG
<u>IFTtoMM</u>	2002	Part II – Case studies for a synchronous thermal instability operating in overhung rotors	Balbahadur AC and Kirk RG
<u>ISROMAC</u>	2002	Darmstadt Rotor No. 2-Part V: Experimental Investigation of the Instability Behaviour of an Aft-swept Transonic Compressor Rotor	S Wagner, S Kablitz, D K Hennecke, U Schmidt-Elsenlohr
<u>TAMU Turbo Show</u>	2003	Synchronous Thermal Instability Prediction for Overhung Rotors	R. Gordon Kirk, Zenglin Guo, Avinash C. Balbahadur
<u>ISCORMA</u>	2003	Instability Induced by Iron Losses in Rotor-Active Magnetic Bearing System	N. Takahashi, M. Hiroshima, H. Miura, and Y. Fukushima
<u>IMechE</u>	2004	Experiments and modelling of a three-bearing flexible rotor for unbalance response and instability thresholds	M L Adams and A H Falah
<u>IMechE</u>	2004	Parametric characterization of rub induced whirl instability using an instrumented rotordynamics test rig	R J Williams
<u>ISCORMA</u>	2005	APPLICATION OF ROTOR DYNAMIC ANALYSIS FOR EVALUATION OF SYNCHRONOUS SPEED INSTABILITY AND AMPLITUDE HYSTERESIS AT 2ND MODE FOR A GENERATOR ROTOR IN A HIGH-SPEED BALANCING	L'vov, M. M., Gunter, E. J.

		FACILITY	
<u>ISCORMA</u>	2005	EXPERIMENTS AND ANALYSIS FOR A COMMON CASE OF CRACKED ROTORS INSTABILITY AIDING ITS DETECTION	Gómez-Mancilla, J., Machorro-López, J.
<u>ISMB</u>	2006	Thermally Induced Synchronous Vibration Instability in a Magnetic Bearing Supported Highspeed Rotor	Naohiko Takahashi, Haruo Miura and Yasuo Fukushima, Hitachi Plant Technologies, Ltd., Japan.
<u>IFTToMM</u>	2006	Investigation of a Rotordynamic Instability in a High Pressure Centrifugal Compressor Due to Damper Seal Clearance Divergence	J.J. Moore*, Southwest Research Institute, USA; M. Camatti, GE Oil & Gas, Italy; A.J. Smalley, Tony Smalley Consulting, LLC, USA; G. Vannini, GE Oil & Gas, Italy; L.L. Vermin, Shell Petroleum Development Co. of Nigeria, Ltd., Nigeria
<u>IFTToMM</u>	2006	Swirl Breaking Devices and Their Effectiveness in Reducing Rotor Instability	R. Subbiah*, V. Choudhry, Siemens Power Generation Inc., USA

Artigos: coupling gyroscopic			
CONF	Ano	Título	Autores
<u>IFTToMM</u>	1998	Coupling of elastic and gyroscopic modes of rotating disc structures	F. Reuter

1.2 Diretrizes Utilizadas na Construção do Conhecimento

1.2.1 Foco da tese

Esta Dissertação tem seu foco principal na discussão de problemas dinâmicos, associados à compreensão e estabelecimento das equações de movimento do rotor.

Embora este conhecimento esteja difundido (na literatura) de forma pulverizada, de tal forma que os conceitos aqui apresentados sejam não evidentes, neste trabalho é feito um esforço inédito de compilação deste conhecimento, no sentido da aderência dos modelos matemáticos utilizados à realidade física do rotor real.

O método utilizado nesta tese para o esclarecimento das questões associadas a Rotodinâmica, é a sucessiva apresentação, equacionamento e solução destes modelos, em ordem crescente de complexidade.

Inicialmente, o nível de abstração dos modelos matemáticos apresentados é pequeno. Este nível de abstração vai sendo ampliado através de sucessivas abordagens, sem a perda de seu significado físico, importante aspecto deste trabalho, o qual é constantemente trazido para a discussão.

Nos capítulos II, III e IV são discutidas, até ao limite, as possibilidades de representação da ciência Rotodinâmica, dentro de uma modelação que utilize a teoria do contínuo.

Nestes capítulos podemos identificar que esta abordagem é muito rica de significado físico, apesar de seu elevado nível de abstração, permitindo o crescimento balanceado da capacidade de simulação, enquanto desenvolve-se uma importante compreensão dos fenômenos físicos associados a esta disciplina.

Entretanto esta abordagem experimenta restrições crescentes em complexidade matemática, bem como uma crescente dificuldade de resolução dos problemas numéricos associados à solução da equação diferencial de movimento. Os simuladores até aqui desenvolvidos são excessivamente teóricos e não são capazes de retratar um rotor real (praticamente esgotando as possibilidades atualmente disponíveis para a representação destes rotores).

Neste contexto surge a possibilidade do tratamento destes modelos físicos com o uso de técnicas discretas de modelação, as quais trabalham com níveis de abstração muito superiores e que, por isto mesmo, dificultam a compreensão física do problema. Dificultam portanto, a capacidade de representação dos conceitos mecânicos, tão necessários ao completo entendimento destas questões.

Dentre as técnicas discretas de modelação matemática dos rotores reais, a técnica de elementos finitos tem se mostrado, nos últimos anos, a mais adequada para o tratamento global das questões rotodinâmicas, não só pela sua ilimitada capacidade de retratar os rotores reais (como veremos no Capítulo V), como também pelas possibilidades que oferece na simplificação das soluções.

Podemos ainda complementar esta idéia dizendo que a experiência tem comprovado que a melhor forma de resolver os complicados sistemas de equações de movimento axial, torcional e lateral, é através do Método de Elementos Finitos, o qual permite fácil formulação de suas matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

No Capítulo V é feito um trabalho cuidadoso de dedução das matrizes de rigidez, inércia e giroscópica, dentro da teoria de elementos finitos, usando para isto a equação de Lagrange. É ainda apresentado grande conjunto de métodos para solução das equações de movimento, dos sistemas dinâmicos, em diversos cenários reais.

Ainda no Capítulo V é desenvolvido um método novo para solução de sistemas giroscópicos conservativos (característicos de sistemas giroscópios de elevada rotação),

método este que viabiliza o desacoplamento das equações diferenciais do movimento destes sistemas, com o emprego dos autovetores da matriz giroscópica.

Este método para solução de sistemas de equações de movimento é fundamentado em uma propriedade particular dos autovetores giroscópicos, segundo a qual estes autovetores são capazes de desacoplar as equações de movimento de um sistema giroscópico conservativo.

A demonstração desta propriedade é feita inicialmente para um modelo contínuo, através da demonstração da propriedade dos autovetores adjuntos da matriz giroscópica, de desacoplar as equações de movimento do sistema giroscópico conservativo. Posteriormente prova-se que estes autovetores desacoplam as matrizes de massa e rigidez de um sistema $n \times n$, em $n/2$ sistemas independentes de equações duplas.

Esta prova é posteriormente complementada (por analogia), fazendo-se uso da formulação da teoria do contínuo, como poderá ser visto no Capítulo V.

O caráter inédito desta metodologia é fortalecido através de pesquisa bibliográfica realizada pela Biblioteca Central da Petrobras.

No Capítulo VI é discutido o problema conhecido como “instabilidade rotodinâmica” de uma forma precisa, abrangente e profunda.

No Capítulo VII é apresentado o primeiro exemplo rotodinâmico, no qual é simulado um rotor real, de uma das refinarias da Petrobras, para efeito de exemplificação da tecnologia discutida, sendo apresentado sob a forma de um exercício completo.

No Capítulo VIII desta tese é discutido o segundo exemplo rotodinâmico. Neste a tecnologia de integração de um rotor real à sua estrutura de suporte real, que é flexível (segundo exemplo rotodinâmico). A estrutura é simulada através de um modelo de elementos finitos e é representativa de sistemas existentes em plataforma *off-shore*, asa de avião, submarino, etc. Este objetivo é alcançado através da discussão de um caso real de um problema ocorrido nas instalações da Petrobras.

A tecnologia discutida no Capítulo VIII é nova e é de propriedade exclusiva do ROMAC, não tendo sido possível uma pesquisa mais profunda e a completa explicitação da sua metodologia, que está parcialmente aqui apresentada.

Esta metodologia foi usada na solução de um complexo problema de vibração, ligado ao projeto inadequado do sistema de suportação de um compressor de amônia,

localizado em uma das plantas de fertilizantes da Petrobras. Este trabalho foi discutido em artigo elaborado por ALLAIRE, ROCKWELL, CASTILHO ET ALL (2005).

Este método de análise foi desenvolvida pelo Consórcio Multi-Cliente ROMAC (Rotating Machinery Research Industrial Program - Virginia University) sob supervisão do Professor Paul E. Allaire. A Petrobras faz parte deste consórcio desde 1986 e participou deste projeto, sendo representada pelo autor desta tese.

Essa tecnologia é capaz de superar as limitações impostas pelos métodos atualmente utilizados, os quais são muito dependentes da percepção humana. Neste caso particular, todas as tentativas de solução do problema, realizadas ao longo de vinte anos de funcionamento desta planta foram frustradas. A tecnologia do ROMAC permitiu a obtenção de resultados precisos através de um protótipo virtual, com a utilização dos programas de computador normalmente utilizados no ROMAC.

A correta simulação da interação rotor/estrutura e mancais é necessária e essencial para representação do rotor real, viabilizando a idéia de um protótipo virtual. A construção deste protótipo foi decisiva para a obtenção dos bons resultados obtidos.

O pioneirismo desta tecnologia fica evidenciado a partir de reunião realizada em 17 de agosto de 2006, entre os Consultores da Universidade de Virginia com os Consultores da Boeing, assessorados por Consultores do Nastran (consórcio Boeing/Nastran). No aludido encontro, a Boeing apresentou seu desenvolvimento conjunto Boeing/Nastran para simulação da interação rotodinâmica de suas turbinas a gás com a estrutura da asa de seus aviões. Nesta reunião ficou evidente a dificuldade, por parte do consórcio Boeing/Nastran, da representação precisa dos efeitos de rigidez cruzada e do amortecimento real dos mancais. Esta reunião objetivou a implementação da nova tecnologia, discutida no Capítulo VIII, nos códigos dos programas desenvolvidos pelo consórcio Boeing/Nastran.

Essa dissertação também representa o fechamento de todo um esforço pessoal de pesquisa (durante mais vinte anos), objetivando a compreensão global dos fenômenos vibratórios em turbomáquinas, notadamente aqueles comportamentos complexos que surgem quando colocamos uma turbomáquina em suportes flexíveis.

Essa tese também caracteriza um esforço de transferência de tecnologia, já que este conhecimento não está ainda ao alcance de nossos técnicos.

Tal tecnologia está alicerçada em um tripé tecnológico, representado por uma boa capacidade de simulação de mancais hidrodinâmicos, associada a uma boa capacidade

de simulação rotodinâmica e complementada com a ajuda de programas como o ANSYS, o Nastran e outros, para simulação da estrutura de suportaço.

A partir deste trabalho, um completo roteiro de simulaço dinâmica da interaço rotoestrutura fica disponibilizado, bem como a tecnologia que viabiliza a construçõ do protótipo virtual, conforme mostrado no Capítulo VIII.

Este tripé tecnológico promove o consórcio ROMAC à categoria de Centro de Excelência Mundial em simulaço e estudos dos fenômenos dinâmicos associados à interaço de rotores com a sua estrutura de suportaço.

Esta tese encontra sua motivaço na vontade que a Petrobras tem de conhecer e dominar todos os processos tecnológicos dentro daquelas áreas consideradas por ela estratégicas. Turbomáquinas são classificadas como equipamentos estratégicos.

Após a soluço de um complexo problema de vibraço em um de seus compressores, problema esse que exigiu grande esforço científico para sua soluço, a Petrobras decidiu investir na direço da maior compreensõ desta tecnologia.

O estudo de caso denominado rotodinâmico 2, no Capítulo VIII, pretende registrar todo o conhecimento adquirido neste intercâmbio, destacando as novas experiências científico-tecnológicas realizadas pelos pesquisadores da Universidade de Virginia, no processo de identificaço da causa básica deste problema.

Objetivando a compreensõ do conhecimento, esta tese discute diversos aspectos importantes no universo das vibrações de turbomáquinas. Entre estes aspectos destacamos os temas:

- 1) identificaço das Freqüências Naturais;
- 2) determinaço da Resposta Dinâmica;
- 3) compreensõ do Fenômeno de Instabilidade Rotodinâmica,
- 4) apresentaço de exemplos reais de modelaçõ matemática, aplicado a simulaço de rotores de turbomáquinas (Capítulo VII) e da interaço rotor-estrutura (Capítulo VIII).

1.2.2 Apresentaçõ dos Capítulos: Corpo da Tese

No Capítulo II é discutido o movimento de um rotor/giroscópico em balanço através de um modelo de dois graus de liberdade e que tem a finalidade de introduzir alguns conceitos físicos inerentes a esta tecnologia, tal como os conceitos de rotaço e precessõ do eixo rotativo.

No Capítulo III o mesmo problema é equacionado e resolvido, agora já com uma abordagem contínua, a qual já exige um nível mais elevado de abstração. O modelo da FIG-1.1 já aparece com uma representação esquemática diferente na FIG-1.2. A Lei de Newton é usada para equacionar o problema que é resolvido com ajuda de uma matemática mais elaborada.

A solução da equação diferencial que governa este movimento (sendo o disco e as molas introduzidos como condição de contorno) traz uma importante compreensão da participação do efeito giroscópico no cálculo das frequências naturais e dos modos naturais de vibração, bem como caracteriza, de forma inequívoca, a independência linear dos autovetores giroscópicos, em um sistema giroscópico conservativo.

Ainda no Capítulo III, e com o mesmo enfoque usado no equacionamento do problema anterior, é deduzida a equação de movimento do rotor bi-apoiado mostrado esquematicamente na figura FIG-1.3.

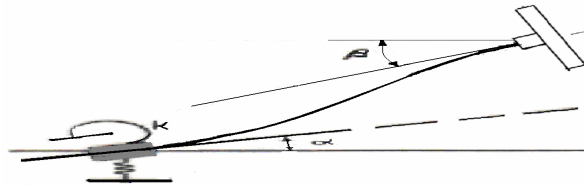


FIG. 1.1 - ROTOR GIROSCÓPIO EM BALANÇO, 2 GL

O disco giroscópico é então introduzido dentro da equação diferencial de movimento com a ajuda da função Delta de Dirac. A independência linear dos autovetores giroscópicos deste novo sistema fica assegurada mesmo com a introdução do disco na equação diferencial de movimento.

No Capítulo IV o rotor bi-apoiado é equacionado com a ajuda do Princípio Variacional (Hamilton), agora com a introdução de mais discos e com molas na posição dos mancais, conforme mostrado esquematicamente na FIG-1.4.

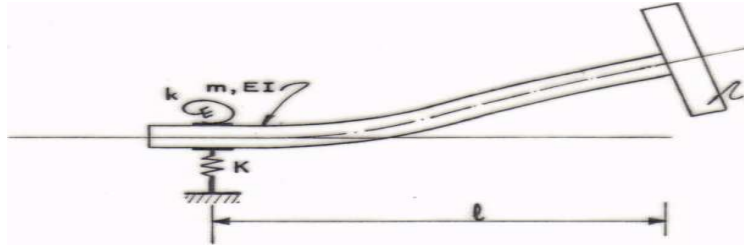


FIG 1.2 - ROTOR CONTÍNUO EM BALANÇO.

Esta abordagem discute o problema anterior de uma forma bem mais abstrata, procurando eliminar dúvidas que foram levantadas durante o equacionamento do problema anterior, relativas ao sinal do efeito giroscópico dentro da equação de movimento. PRODONOFF, V., CASTILHO, (1989). A independência linear dos autovetores giroscópicos, também aqui, fica assegurada.

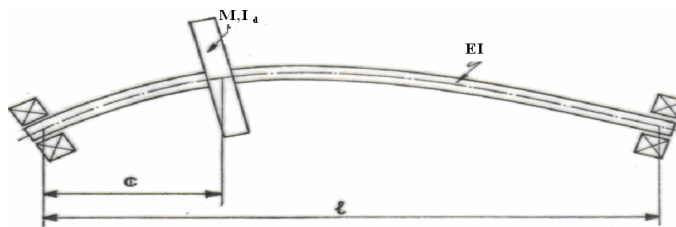


FIG 1.3 - ROTOR ESQUEMÁTICO BI - SUPORTADO.

Neste ponto fica evidente a limitação da abordagem contínua na simulação dos rotores reais, na medida em que esta abordagem é incapaz de atender a complexidade geométrica e a multiplicidade dos detalhes existentes em rotores da vida real e que estão esquematicamente representados na FIG-1.5

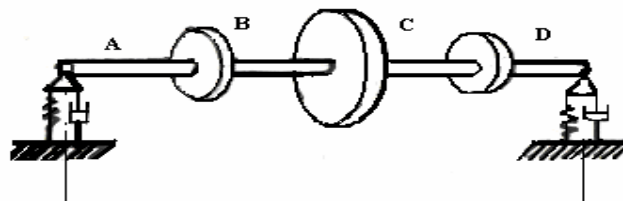


FIG 1.4 - ROTOR ESQUEMÁTICO SUPORTADO POR MOLAS

No Capítulo V é introduzido o equacionamento do movimento do rotor com o auxílio da técnica de Elementos Finitos. A utilização do Princípio das Variações no processo de equacionamento do movimento do rotor admite uma capacidade muito superior de representação das particularidades geométricas de um rotor da vida real.

É interessante registrar que se trata de uma abordagem muito abstrata, como será discutido oportunamente. Neste Capítulo, são discutidos aspectos originais do equacionamento e solução de sistemas lineares de segunda e de primeira ordem.

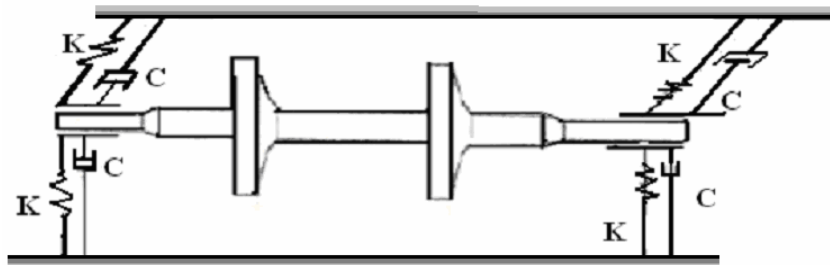


FIG 1.5 - ROTOR REAL SUPORTADO ENTRE MANCAIS

Grande atenção é voltada para a demonstração da propriedade intrínseca dos autovetores giroscópicos, de desacoplar as equações de movimento em sistemas giroscópicos conservativos, provenientes do equacionamento do movimento vibratório em sua forma convencional.

A aplicação desta propriedade inédita, dá ensejo ao desenvolvimento de novo método para desacoplamento das equações diferenciais de sistemas giroscópicos conservativos e permite a fácil solução das equações de movimento, conforme será apresentado no Capítulo V.

Neste Capítulo é largamente discutido o método de solução destas equações, através da formulação do “espaço-estado”, apresentada em MEIROVITCH, L. (1997).

No Capítulo VI é introduzido o conceito de Instabilidade Rotodinâmica, com a ajuda de uma formulação matemática bastante simplificada. Esta abordagem é muito eficaz para a compreensão dos mecanismos físicos envolvidos no processo de instabilidade de rotores flexíveis.

No Capítulo VII é apresentado, a título de exemplo, a modelação rotodinâmica de um rotor real da Petrobras montado em base inercial. Neste exercício são apresentadas

as diversas formas de análise praticadas em um processo de projeto de rotor, onde são mostrados os diversos aspectos do funcionamento de um rotor real.

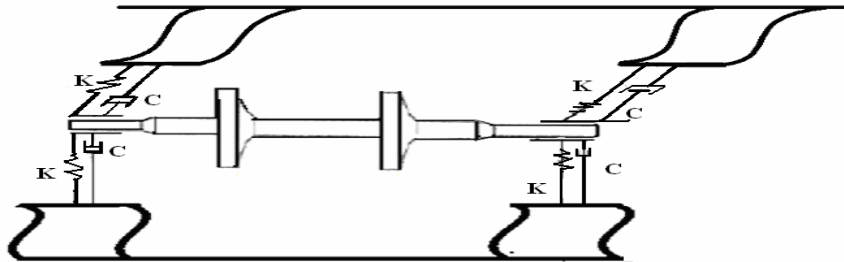


FIG 1.6 - ROTOR ESQUEMÁTICO EM SUPORTE FLEXÍVEL

No Capítulo VIII é discutido o problema geral da interação rotor-estrutura, em uma máquina montada em suporte flexível, sendo apresentado o trabalho realizado pelos cientistas da Universidade de Virgínia (com a participação do autor desta Tese), para a simulação completa do problema de interação rotor com a estrutura de suportação (esquemáticamente apresentado na FIG-1.6).

Este trabalho é discutido em ALLAIRE, P. E., ROCKWELL, D. R., CASTILHO, A, ET ALL, (2005), oportunidade em que é discutido o protótipo virtual.

1.2.3 Impacto da Pesquisa

O Capítulo V apresenta um novo método de cálculo para ser empregado na solução de sistemas giroscópicos conservativos (sistemas de orientação inercial). Trata-se de metodologia aparentemente inédita dentro do cenário científico mundial.

É oportuno registrar que por volta dos anos 70 os cientistas rotodinâmicos depararam-se com equações diferenciais parciais acopladas pelo efeito giroscópico, advindas da teoria do contínuo, conforme mostrado nos Capítulos III e IV desta tese.

Neste ponto, quase todos abandonaram a teoria do contínuo e resolveram tratar os problemas rotodinâmicos na teoria discreta, o que trouxe grande avanço para a ciência rotodinâmica, com o tratamento criterioso das questões numéricas e de convergência.

Esta tese resgata aquele ponto histórico de ruptura e prova que o acoplamento do efeito giroscópico é dinâmico e desaparece após a eliminação da variável tempo.

Isto é equivalente a dizer que os modos de vibração giroscópicos constituem uma base para o desacoplamento das equações do movimento de sistemas giroscópicos.. Com base neste conhecimento é desenvolvido um novo método de solução de equações de movimento, para sistemas giroscópicos conservativos.

O Capítulo VIII apresenta uma ferramenta extremamente precisa, desenvolvida pelo consórcio ROMAC, sob supervisão do Professor Paul Allaire, para resolver complexos problemas de vibração provocados por um mau projeto da suportaçã de campo de um compressor de amônia.

Esta solução, apresentada em ALLAIRE, P. E., ROCKWELL, D. R., CASTILHO, A., ET ALL, (2005) ainda não foi completamente implementada até o momento, porém, os resultados parciais já obtidos do campo são tão encorajadores que projetam um grande salto no estado da arte desta tecnologia.

Esta nova tecnologia pode lidar com muitas das limitações hoje existentes na experiência de modelação dos atuais projetistas de estruturas de suportaçã. É ainda capaz de assegurar bons resultados em suas análises ainda que os modelos da estrutura de suporte não sejam exatos (devem ser precisos na faixa de interesse).

1.2.4 Aspectos Inovadores da Pesquisa

Estando o conhecimento associado à modelação rotodinâmica pelo Método de Elementos Finitos difundido na literatura científica, é fácil perceber que o mesmo encontra-se pulverizado.

A proposta apresentada aqui, onde o processo de equacionamento e solução destes modelos é discutido progressivamente, de forma encadeada e sem a perda da aderência ao modelo físico é uma importante contribuição deste trabalho.

Os conceitos aqui apresentados não estão evidentes na literatura. Neste trabalho é feito um esforço inédito de compilação deste conhecimento, no sentido da aderência dos modelos matemáticos utilizados à realidade física do rotor real.

Na literatura internacional especializada não existe, aparentemente, referência ao método desenvolvido nesta pesquisa de tese, para solução e desacoplamento de sistemas giroscópicos conservativos.

Outro aspecto útil desta pesquisa é a apresentação de tecnologia inédita (extremamente precisa), usada para resolver um complexo problema de vibração

ocorrido no compressor de amônia 105-J (FAFEN/SE), problema este associado ao projeto inadequado de seu sistema de suportaçãõ.

1.2.5 Não Constitui Foco desta Tese os Seguintes Aspectos

No Capítulo V é introduzido o equacionamento do movimento do rotor com o auxilio da técnica de elementos finitos. A soluçãõ dos problemas de autovalor é largamente discutida neste trabalho, porém não faz parte do escopo desta tese a discussãõ sobre métodos para soluçãõ de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem “eigensolvers”, associada à teoria de controle.

O trabalho desenvolvido na Universidade de Virgínia, sob a supervisãõ do Professor Paul Allaire, envolveu a participaçãõ de diferentes grupos de cientistas que militam em diferentes especialidades (em diferentes áreas científicas), sendo certo que nenhum deles sozinho domina todas as disciplinas aqui discutidas.

No Capítulo VIII é largamente discutida a questãõ da modelaçãõ da estrutura de suportaçãõ do compressor, através da utilizaçãõ do programa ANSYS.

A especializaçãõ na utilizaçãõ do programa ANSYS está fora do escopo da tese.

A discussãõ da correçãõ dos coeficientes dos mancais, que é apresentada como parte da soluçãõ do problema da interaçãõ rotor/mancais/estrutura e é discutida superficialmente neste trabalho, não é foco da tese que se encontra detalhada em VAZQUEZ, J. A., BARRETT, L. E., FLACK, R. D., (2001).

II CINEMÁTICA DE UM ROTOR EM BALANÇO

Neste Capítulo, serão apresentadas as equações dos componentes da velocidade e da aceleração angulares e a expressão de equilíbrio dos momentos aplicados a um disco rotativo. Estas expressões serão utilizadas posteriormente na caracterização do comportamento dinâmico de um disco, no Capítulo III, e na formulação do comportamento dinâmico de um elemento de disco de comprimento infinitesimal, no Capítulo IV.

2.1 Precessão e Rotação

Imaginemos inicialmente um rotor em balanço dotado de movimentos angulares de rotação e precessão Ω e ω , conforme indicado na FIG-2.1. Tais movimentos podem ser originados pelo desbalanceamento.

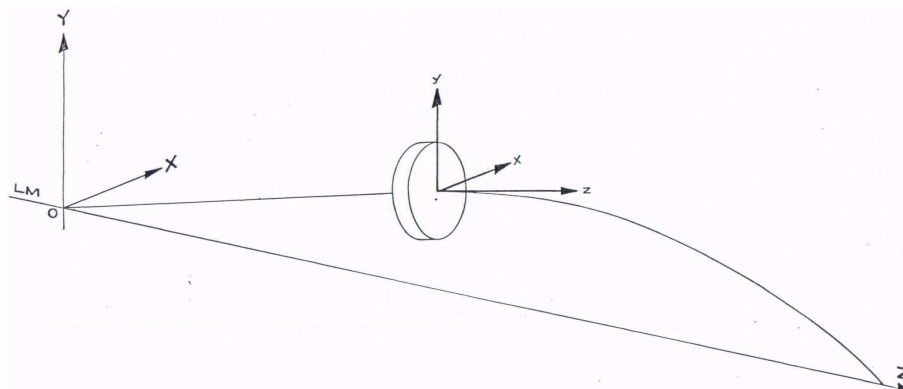


FIG-2.1 SISTEMA DE COORDENADAS XYZ, xyz

Imaginemos que o primeiro movimento angular ω , é um movimento orbital que fica definido como a velocidade angular de um plano definido pela linha dos mancais LM e o centro de gravidade do disco (G), girando em torno de LM.

O segundo movimento angular Ω , é a velocidade angular com que o eixo gira em torno de sua linha de centro (LC). Dada a necessidade de caracterizá-lo rigorosamente, podemos defini-lo, tendo ainda em vista a FIG-2.2, como a velocidade angular relativa do disco, em relação ao sistema móvel x y z, descrito posteriormente.

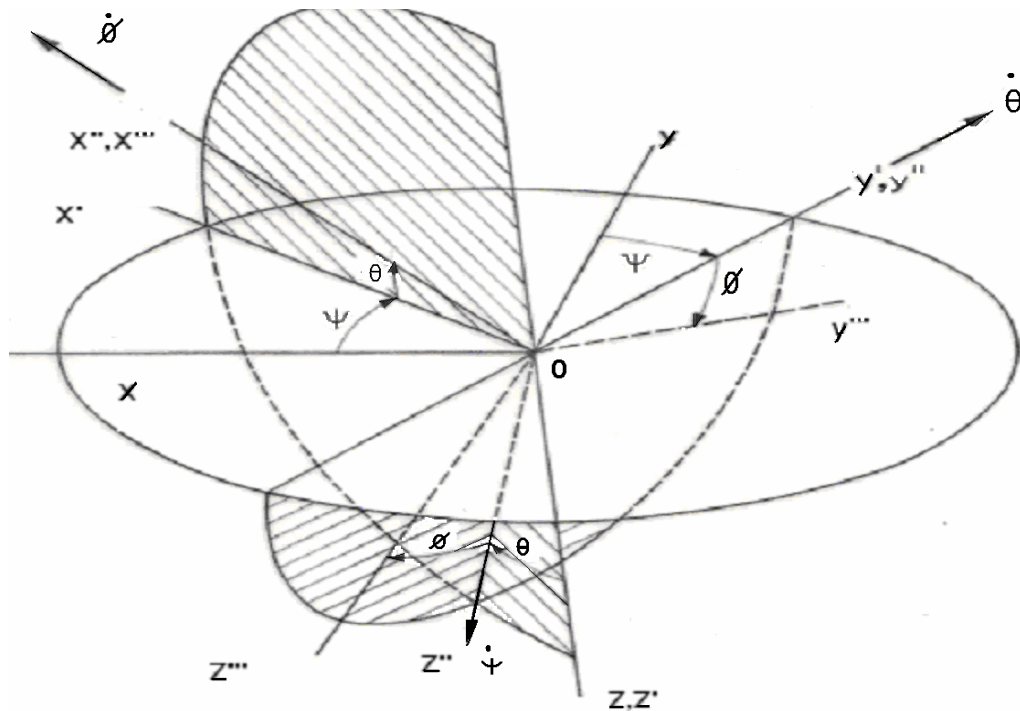


FIG-2.2 ÂNGULOS DE EULER.

Na prática, pode ocorrer que as velocidades angulares descritas acima, sejam iguais ou não. Sendo iguais estaremos em presença de precessão síncrona. Em caso contrário, precessão assíncrona.

2.2 Freqüência Natural e Velocidade Crítica

Nos diversos modelos apresentados neste estudo, o termo freqüência natural se refere à velocidade angular de precessão, ω , na qual o rotor se mantém em oscilação harmônica. O movimento se processa unicamente sob a ação das forças e torques de inércia e forças elásticas de restauração, sem nenhuma ação de forças externas perturbadoras do equilíbrio, como o desbalanceamento. Será mostrado posteriormente que a freqüência natural depende da rotação Ω do eixo, sendo portanto $\omega = f(\Omega)$.

Historicamente, o termo velocidade crítica tem sido usado para definir aquelas velocidades de rotação nas quais se desenvolvem grandes deflexões no eixo. Tal definição, no entanto, não é precisa. Velocidade crítica será aqui definida como aquela freqüência natural em que a rotação Ω coincide com a precessão síncrona ω .

2.3 Coordenadas Globais de um Volante

Para descrever a posição de um volante no espaço, faremos uso de dois sistemas de coordenadas, um fixo e um móvel. Seja XYZ um sistema fixo ou global de coordenadas. Para o nosso rotor flexível, a origem deste sistema estará normalmente fixada a um mancal. O eixo Z é coincidente com a linha de centro dos mancais, e o eixo Y normalmente vertical enquanto o eixo X completa o triedro direto FIG-2.1

O sistema móvel $x y z$ tem as seguintes características:

- a) a origem pertence ao centro de gravidade do volante;
- b) o eixo z é tangente à elástica do eixo flexível do rotor;
- c) o plano $x y$ coincide com o plano do disco, sendo que, na posição de repouso, x é paralelo a X , e y é paralelo a Y .

Da definição acima, vê-se que o sistema $x y z$ possui todos os movimentos angulares do disco, a menos da rotação Ω em torno do eixo z . Em outras palavras, possui os movimentos do disco montado em um eixo (fatia do rotor).

A posição genérica do disco no espaço, considerado como corpo rígido, envolve três coordenadas cartesianas do centro de massa (X, Y, Z) e três coordenadas generalizadas de ângulos de orientação do volante em relação ao seu CG, definidas pelos ângulos de Euler (ψ, θ, ϕ).

Embora no caso geral sejam necessárias 6 coordenadas, esta formulação usará apenas 4 (X, Y, θ, ϕ), assumindo as simplificações seguintes.

- a) O CG se desloca em um plano paralelo a XYZ. (pequenos deslocamentos) ;
- b) Devido à simetria radial do disco, não há necessidade de indicar a posição específica de um raio do mesmo.

A primeira destas simplificações é perfeitamente válida para o caso de pequenas deformações do eixo. A segunda indica ser a orientação do disco a mesma do sistema móvel $x y z$, que coincide com os eixos principais de inércia do volante.

2.4 Orientação Angular do Disco em termos da Elástica

Foi mostrado acima que a posição angular do volante pode ser descrita como sendo idêntica à posição do referencial móvel $x y z$. Tomando, inicialmente, um sistema $x_0 y_0 z_0$, paralelo a $X Y Z$, e procedendo-se três rotações de seus eixos, podemos fazê-lo coincidir com uma posição qualquer genérica de $x y z$.

As três rotações referidas são definidas a seguir com a ajuda da FIG-2.3.

1) Rotação do ângulo ϕ em $x y z$ em torno de x , produzindo finalmente o sistema $x y' z'$.

2) Rotação do ângulo θ em torno de y' , produzindo $x' y' z''$.

3) Rotação do ângulo ψ em torno do eixo z'' , produzindo o sistema $x'' y'' z''$.

Usando as funções descritivas da linha elástica do eixo do rotor, $X = X(Z, t)$, $Y = Y(Z, t)$, $\theta = \partial X(Z, t) / \partial Z$. e $\phi = \partial Y(Z, t) / \partial Z$, e os ângulos ψ , θ e ϕ conforme definidos acima, podemos dizer que, para pequenas deformações:

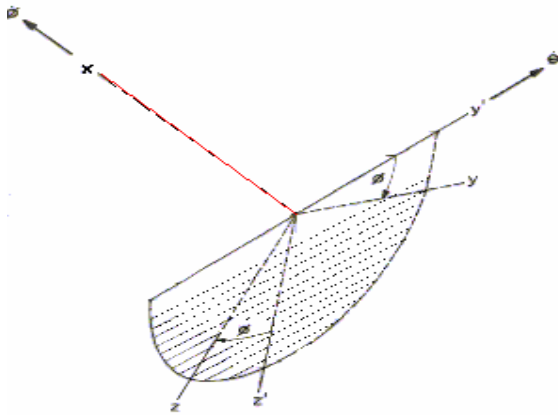
$$\dot{\psi} = 0 \quad (2.1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \dot{X}(Z, t)}{\partial Z} \quad (2.2)$$

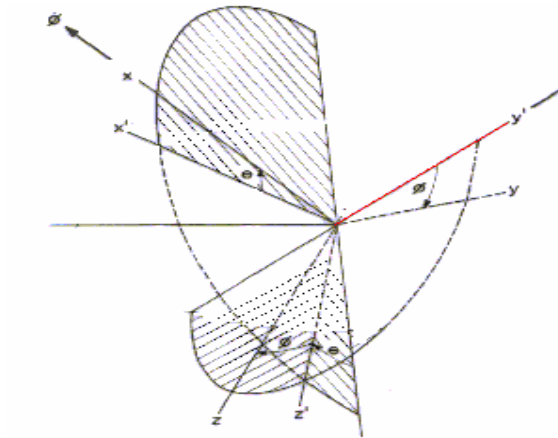
$$\dot{\phi} = -\frac{\partial \dot{Y}(Z, t)}{\partial Z} \quad (2.3)$$

A última expressão (2.3) é aproximada e já leva em conta que o eixo sofre pequenas deformações. Cada seção do eixo, ou do volante, pode ser definida no espaço pelas quatro coordenadas:

2.3.1) Girando x de um ângulo (ϕ), x , y' , z'



2.3.2) Girando y' de um ângulo (θ), x', y', z''



2.3.3) Girando z'' de um ângulo (ψ), x'', y'', z''

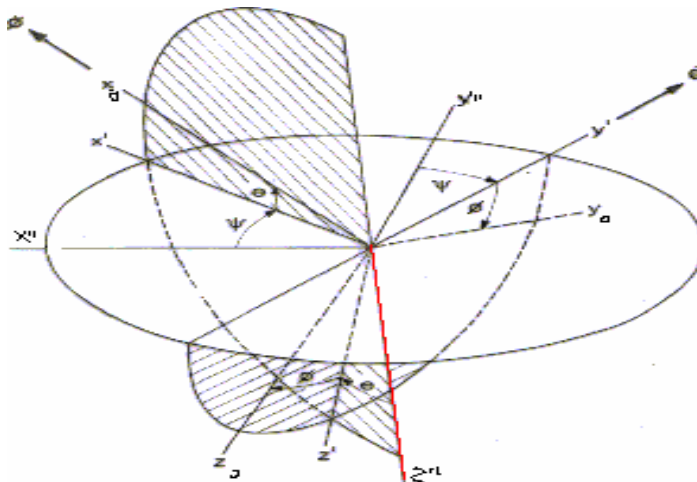


FIGURA FIG-2.3 - ÂNGULOS DE EULER DECOMPOSTO

2.5 Velocidades e Acelerações Angulares do Disco

A velocidade angular absoluta do referencial móvel $x y z$ pode ser escrita como:

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi} \quad (2.4)$$

Usando as equações (2.1), (2.2) e (2.3) no domínio das pequenas deformações, fica-se com a seguinte expressão para a velocidade angular do sistema móvel, escrita no referencial dos eixos principais de inércia.

$$\bar{\omega}_{xyz} = -\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y = \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y \quad (2.5)$$

Nas expressões acima $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z \equiv e_x, e_y, e_z$ são os vetores unitários do referencial $x y z$.

Tendo em vista que o sistema móvel $x y z$ não é solidário ao volante, a velocidade angular absoluta do volante é:

$$\bar{\omega}_{xyz}^v = -\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y + \Omega \bar{e}_z \quad (2.6)$$

O momento cinético do volante tem as seguintes componentes absolutas, escritas no referencial móvel:

$$\bar{H}_{xyz} = \Pi \times \bar{\omega}_i^v e_i = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \bar{e}_x \\ \omega_y \bar{e}_y \\ \Omega \bar{e}_z \end{Bmatrix} \quad i = x, y, z \quad (2.7)$$

$$\bar{H}_{xyz} = -I_d \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + I_d \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y + I_p \Omega \bar{e}_z \quad (2.8)$$

onde:

H = vetor momento cinético do disco;

I_d = momento de inércia de massa, diametral, do volante;

I_p = momento de inércia de massa, polar, do volante.

Tomando agora a derivada total do vetor, momento cinético \mathbf{H} , temos:

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}_{xyz} = \dot{H}_x \bar{e}_x + \dot{H}_y \bar{e}_y + \dot{H}_z \bar{e}_z + H_x \dot{\bar{e}}_x + H_y \dot{\bar{e}}_y + H_z \dot{\bar{e}}_z \quad (2.9)$$

$$\dot{\bar{e}}_x = \bar{\omega}_{xyz} \times e_x = (\omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y) \times \bar{e}_x = -\omega_y \bar{e}_z = -\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_z \quad (2.10)$$

$$\dot{\bar{e}}_y = \bar{\omega}_{xyz} \times e_y = (\omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y) \times \bar{e}_y = +\omega_x \bar{e}_z = -\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_z \quad (2.11)$$

$$\dot{\bar{e}}_z = \bar{\omega}_{xyz} \times e_z = (\omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y) \times \bar{e}_z = -\omega_x \bar{e}_y + \omega_y \bar{e}_x = +\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_y \quad (2.12)$$

Substituindo as expressões (2.10), (2.11) e (2.12) em (2.9)

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}_{xyz} = -\text{Id} \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + \text{Id} \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y - \text{Id} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \left(-\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z}\right) \bar{e}_z + \text{Id} \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \left(-\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z}\right) \bar{e}_z + \text{Ip} \Omega \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_y\right) \quad (2.9a)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}_{xyz} = \left(-\text{Id} \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + \text{Ip} \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z}\right) \bar{e}_x + \left(\text{Id} \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + \text{Ip} \Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z}\right) \bar{e}_y \quad (2.13)$$

Usando mais uma vez da simplificação, baseado nas pequenas deformações do eixo, pode ser escrito,

$$\bar{e}_x \cong \bar{i} \quad ; \quad \bar{e}_y \cong \bar{j} \quad ; \quad \bar{e}_z \cong \bar{k} \quad (2.14)$$

sendo $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \equiv \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ os vetores unitários de XYZ (referencial inercial).

Sabemos também que: $\dot{\bar{e}}_x \neq 0$, $\dot{\bar{e}}_y \neq 0$, $\dot{\bar{e}}_z \neq 0$

Considerando ainda que a massa do disco se distribui apenas sobre o seu plano médio, paralelo às faces (volante sem espessura), pode-se dizer que:

$$\text{Ip} = 2 \text{Id} \quad (2.15)$$

Substituindo (2.14) em (2.13) diz-se:

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}_{xyz} = \left(-\text{Id} \frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + \text{Ip} \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z}\right) \bar{i} + \left(\text{Id} \frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + \text{Ip} \Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z}\right) \bar{j} \quad (2.16)$$

Como a derivada do momento cinético é igual ao momento das forças externas relativamente ao seu centro de gravidade, pode-se escrever, $\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \sum \bar{\mathbf{M}}$ e pode-se então concluir, observando que em (2.16)

$$\dot{\bar{H}} \cdot \bar{i} = -\text{Id}\left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z}\right) \quad (2.17)$$

$$\dot{\bar{H}} \cdot \bar{j} = +\text{Id}\left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z}\right) \quad (2.18)$$

onde $\dot{\bar{H}} \cdot \bar{i}$ e $\dot{\bar{H}} \cdot \bar{j}$ são as componentes do somatório dos momentos aplicados ao volante nas direções \bar{X} e \bar{Y} inerciais (produto escalar).

As equações (2.5) e (2.16) fornecem a velocidade angular e a resultante dos momentos aplicados ao disco, equações estas que serão usadas nas seções seguintes.

2.6 Energia Cinética Total do Disco/Eixo

A expressão da energia cinética de translação e rotação é:

$$EC = \int_0^L MV_{xyz} \delta V = \frac{1}{2} \int_0^L M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \delta Z \quad EC = \frac{mL^2}{s^2} \quad (2.19)$$

$$EC = \int_0^l \int_0^\omega \bar{H}_{xyz} \delta \omega \cdot dz = \int_0^l \int_0^\omega \Pi \cdot \bar{\omega}_{xyz}^v \delta \omega \cdot dz \quad (2.20)$$

$$\bar{\alpha}_{xyz}^v = \frac{\delta \bar{\omega}_{xyz}^v}{\delta \bar{\alpha}} = \dot{\omega}_x \bar{e}_x + \dot{\omega}_y \bar{e}_y + \dot{\omega}_z \bar{e}_z + \omega_x \dot{\bar{e}}_x + \omega_y \dot{\bar{e}}_y + \omega_z \dot{\bar{e}}_z \quad (2.21)$$

$$\bar{\alpha}_{xyz}^v = \frac{\delta \bar{\omega}_{xyz}^v}{\delta \bar{\alpha}} = -\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_z - \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_z + \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_x + \Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_y \quad (2.22)$$

$$\frac{\delta \bar{\omega}_{xyz}^v}{\delta \bar{\alpha}} = \left(-\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} + \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{e}_x + \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + \Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \bar{e}_y \quad (2.23)$$

$$\delta \bar{\omega}_{xyz}^v = \left[\left(-\delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} + \Omega \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{e}_x + \left(\delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + \Omega \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \bar{e}_y + \delta \Omega \bar{e}_z \right] \quad (2.24)$$

$$EC = \int_0^l \int_0^\omega \left(-I_d \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \bar{e}_x + I_d \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \bar{e}_y + I_p \Omega \bar{e}_z \right) \cdot \left[\left(-\delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} + \Omega \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \bar{e}_x + \left(\delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + \Omega \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \bar{e}_y + \delta \Omega \bar{e}_z \right] \quad (2.25)$$

$$EC = \int_0^l \int_0^\omega \left(-I_d \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} - I_p \Omega \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) + \left(I_d \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + 2I_d \Omega \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) + I_p \Omega \delta \Omega \cdot dz \quad (2.25a)$$

$$EC = \int_0^l \left(-\frac{1}{2} I_d \left(\frac{\partial \dot{Y}^2}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} I_d \left(\frac{\partial \dot{X}^2}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) + I_p \Omega^2 \right) dz \quad (2.26)$$

2.7 Freqüências Naturais de um Rotor em Balanço

Neste Capítulo é usado o modelo matemático simplificado, sugerido por THOMSON (1977), para solução do problema físico apresentado na FIG-1.1. Através dele serão apresentadas algumas idéias e conceitos, inerentes aos fenômenos, que ficam mais simples quando focalizadas por intermédio deste modelo.

Na abordagem discreta, que é aqui discutida, são admitidas as seguintes simplificações: o eixo contém rigidez elástica distribuída, embora não possua massa; as extremidades possuem pequenos trechos rígidos, simulando os comprimentos pertencentes aos mancais e volante; o sistema é analisado com apenas dois graus de liberdade, X e θ , conforme a Fig-2.4; o disco é considerado rígido e perfeitamente balanceado. Esta última hipótese tem a finalidade de generalizar o estudo rotação x precessão, uma vez que o desbalanceamento gera precessão síncrona.

2.7.1 Equações Básicas de Equilíbrio do Rotor

A análise dinâmica do rotor é feita através do equilíbrio de uma viga com as seguintes condições de contorno:

- a) suspensão elástica linear e rotacional, em uma extremidade e
- b) força e momento induzidos pelo disco.

Como incógnitas são consideradas a deflexão e a rotação da extremidade que contém o disco. A equação matricial do equilíbrio nas variáveis (X, θ) é:

$$\begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = [\alpha] \times \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} ; \quad [\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

(X, θ) - deslocamento do CG do disco e ângulo de rotação do disco ;

F, M - carregamento dinâmico (Força e Momento);

$[\alpha]$ - matriz de flexibilidade do eixo;

$\alpha_{i,j}$ - coeficientes de influência da matriz de flexibilidade do eixo.

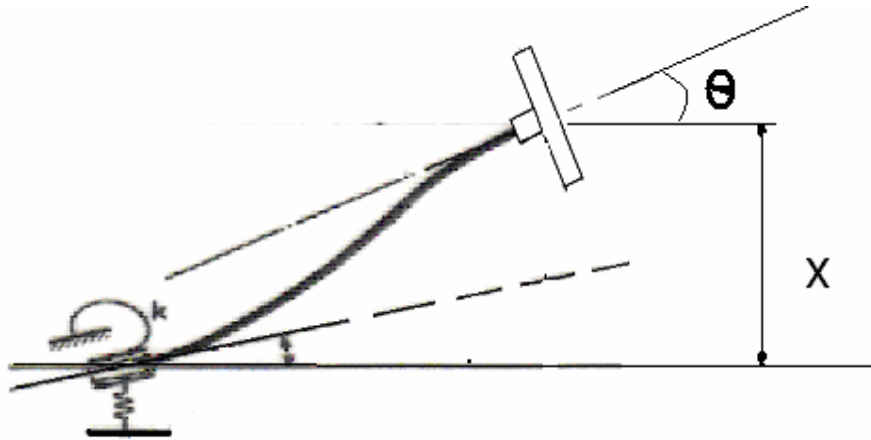


FIG-2.4 COORDENADAS (X, θ) DO MODELO DISCRETO

Dos coeficientes de influência α_{ij} CASTILHO (1983), têm-se os valores:

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EI} + \frac{\lambda^2 l}{EI} + \frac{\lambda l^2}{EI} + \frac{1}{K} + \frac{L^2}{K}; \quad \alpha_{12} = \frac{l^2}{2EI} + \frac{l\lambda}{EI} + \frac{L}{K};$$

$$\alpha_{22} = \frac{l}{EI} + \frac{1}{K}; \quad F = M\omega^2 X; \quad M = I_d \omega^2 \left(a \frac{\Omega}{\omega} - 1\right) \theta \quad (2.28)$$

O carregamento imposto à extremidade do eixo pelo disco tem duas naturezas: uma força de inércia centrífuga F, um momento giroscópio M e suas expressões são:

$$F = M\omega^2 X; \quad M = I_d \omega^2 \left(a \frac{\Omega}{\omega} - 1\right) \theta \quad (2.29)$$

Ω - rotação do eixo ; ω - precessão do eixo

M - massa do disco ; I_d - momento de inércia diametral de massa do disco a

a - razão entre os momentos de inércia de massa, polar e diametral.

Substituindo as equações (2.28) e (2.29) na equação matricial (2.27), chegamos ao sistema homogêneo de equações nas variáveis X e θ , DEN HARTOG, (1972), mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{11}M\omega^2 - 1) & -\alpha_{12}I_d\omega^2(a\frac{\Omega}{\omega} - 1) \\ \alpha_{12}M\omega^2 & \alpha_{22}I_d\omega^2(a\frac{\Omega}{\omega} - 1) - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Tal sistema terá como solução os valores $X = 0$ e $\theta = 0$ (o sistema estará permanentemente em repouso quaisquer que sejam os valores de rotação Ω e precessão ω), à menos que Ω e ω sejam tais que anulem o valor do determinante da matriz dos coeficientes de X e θ .

Os pares de valores (Ω e ω) capazes de anular o determinante referido, caracterizarão uma condição de equilíbrio na qual o sistema sairá do repouso ($X \neq 0$, $\theta \neq 0$), assumindo uma configuração específica de relação constante entre X e θ .

2.7.2 Equação de Frequência

Para generalizar o estudo, considerem-se os seguintes parâmetros adimensionais relacionados a seguir, na equação (2.31)

$$F = \omega\sqrt{\alpha_{11}M}, \text{ Fator de Precessão}; \quad S = \Omega\sqrt{\alpha_{11}M} \text{ Fator de Rotação}$$

$$D = \frac{\alpha_{22}I_d}{\alpha_{11}M}, \text{ Fator de Inércia}; \quad E = \frac{\alpha_{22}I_d}{\alpha_{11}M}, \text{ Fator Elástico} \quad (2.31)$$

A introdução destes parâmetros na equação (2.30) fornece o novo sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} (F^2 - 1) & -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}EDF^2(a\frac{S}{F} - 1) \\ \alpha_{12}F^2 & -\left(DF^2(a\frac{S}{F} - 1) + 1\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Anulando o determinante da matriz apresentada na equação (2.32) e explicitando o fator de rotação, obtemos:

$$S = \frac{F^4 + \frac{(D+1)}{D(E-1)}F^2 - \frac{1}{D(E-1)}}{aF \left(F^2 + \frac{1}{E-1} \right)} \quad (2.33)$$

A equação (2.33) é uma extensão daquela apresentada por DEN HARTOG, J. P., (1972) com os refinamentos seguintes: suspensão elástica, eixo rígido nas extremidades e relação mais geral entre os momentos de inércia de massa do disco $a = I_p/I_d$, conforme THOMSON, W. T., (1977)

2.7.3 Análise das Curvas de Frequência

A equação (2.33) fornece o conjunto de pontos (S, F) capazes de anular o determinante da equação(2.30). Tais pontos, arranjados sob a forma de curva(S X F), caracterizam as frequências naturais do eixo em função da variação da rotação, conforme mostrado na FIG-2.5.

Por ser este modelo simplificado, com apenas dois graus de liberdade, a curva superior da FIG-2.5 apresenta uma distorção muito grande, pois está substituindo uma infinidade de curvas de frequência natural. A curva inferior, entretanto, pode ser considerada como uma boa aproximação da primeira frequência natural.

Neste ponto pode-se visualizar o parâmetro definido como velocidade crítica, anteriormente. Basta que se imagine uma reta inclinada de 45° , a partir da origem e no primeiro quadrante da FIG-2.5. Tal reta terá a propriedade de conter os pontos que possuam velocidade de rotação igual à velocidade de precessão. Observando a FIG-2.5, vê-se que as velocidades críticas são fornecidas pela intercessão das curvas de frequência natural com a reta inclinada de 45° .

DEN HARTOG, (1972) apresenta considerações importantes para desenvolvimento de sentimento físico dos fenômenos rotodinâmicos e entre elas o exemplo seguinte:

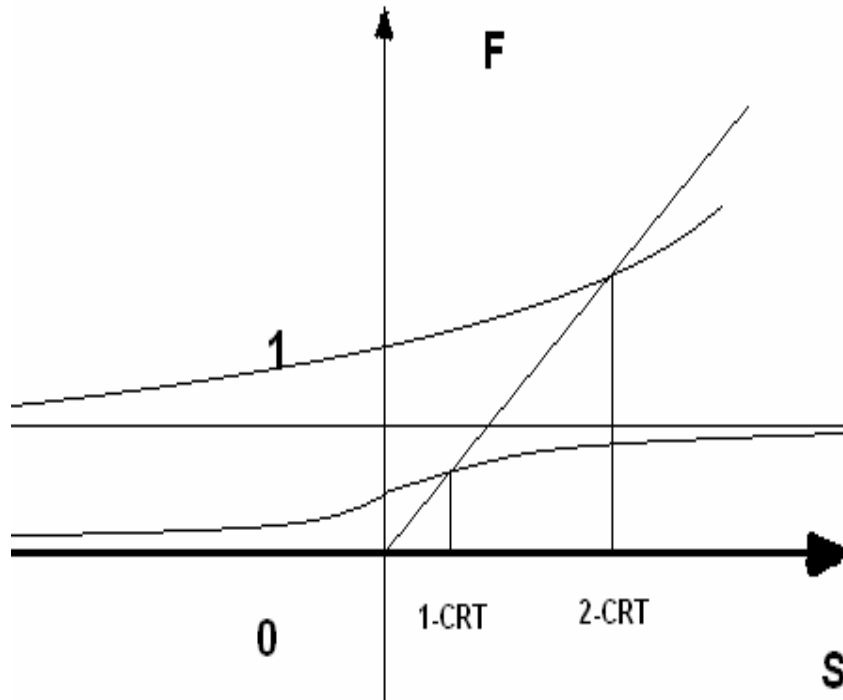


FIG-2.5 FREQUÊNCIAS NATURAIS DO MODELO

Exemplo: Massa do Disco Concentrada em um Ponto.

Levando esta informação para a equação (2.33), e fazendo $\lim_{D \rightarrow 0}$, verifica-se que a equação se reduz a $F^2 = 1$. Por conseguinte $\omega = \sqrt{K/M}$, que é um caso bastante conhecido do estudo de vibrações com um grau de liberdade.

III FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS EM ROTORES

3.1 Equação Diferencial do Movimento de um Rotor em Balanço

Tendo analisado, no Capítulo anterior o rotor em balanço, segundo um modelo simplificado de apenas dois graus de liberdade, estudaremos agora o mesmo problema sob a ótica de uma modelação matemática mais exata. Trata-se da análise do modelo apresentado esquematicamente na FIG-1.2, ou seja, um rotor em balanço com um disco em uma extremidade e com suspensão elástica na outra.

O modelo matemático, aqui referido, é obtido através do equacionamento do movimento de um elemento genérico de eixo e posterior integração da equação diferencial de movimento, objetivando a determinação da curva elástica do eixo.

Para obtenção da equação diferencial do movimento do rotor, as seguintes simplificações são feitas:

- a) O material do eixo é homogêneo e isotrópico, apresentando comportamento elástico linear (aplica-se a Lei de Hooke);
- b) São consideradas apenas as deflexões laterais suficientemente pequenas para que se possa considerar a teoria linear valha;
- c) O diâmetro do eixo é pequeno quando comparado com o seu comprimento, de tal forma que a teoria de viga de Euler-Bernoulli seja válida, estendida com a inclusão da inércia de rotação (o cisalhamento transversal será desconsiderado) ;
- d) As seções planas permanecem planas após a deflexão;
- e) A deformação inicial causada pelo peso próprio é desprezível;
- f) As curvas tensão x deformação em tração e compressão são idênticas ;
- g) O carregamento (forças e momentos) age no plano que contém o centro de gravidade da seção transversal e em consequência as deformações também estarão contidas neste plano (característica geométrica do eixo);
- h) O disco é rígido;
- i) O acoplamento do disco ao eixo se dá segundo um ângulo reto (não ocorre deformação angular no ponto de engastamento);

j) O eixo é perfeitamente balanceado, o centro geométrico coincide com o centro de gravidade em cada seção reta do eixo.

3.1.1) Estabelecimento da Equação Diferencial (Newton)

Consideremos um elemento de eixo, de comprimento infinitesimal, dotado dos movimentos de rotação e precessão. Sobre este elemento atuam forças elásticas provenientes das reações de trechos adjacentes do eixo, conforme a FIG-3.1. O disco elementar estará em equilíbrio, dinâmico, sob a ação das forças elásticas e de inércia, podendo este equilíbrio ser retratado através das leis de Newton.

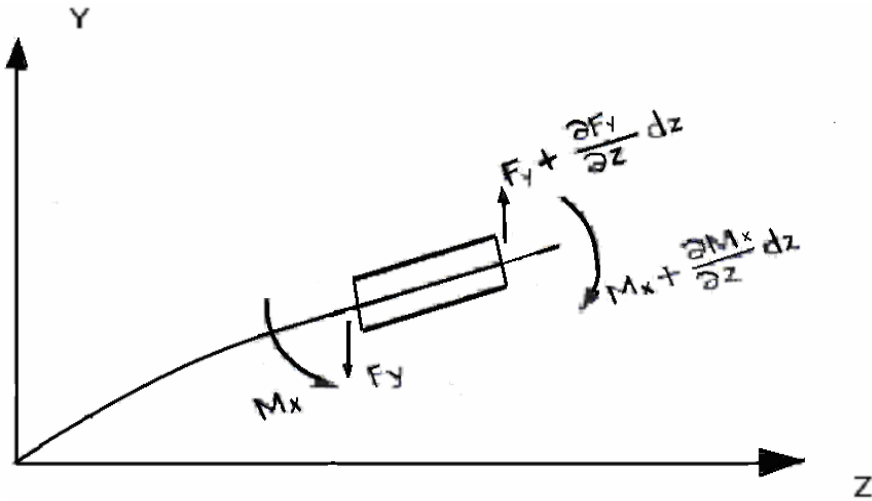


FIG 3.1 - EQUILÍBRIO DINÂMICO

$$\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}^* \quad \text{e} \quad \bar{F} = F_x \cdot \bar{j} + F_y \cdot \bar{j} ; \quad -F_y + F_y + \frac{\partial F_y}{\partial Z} dZ = (m \partial Z) \ddot{Y} \quad (3.1)$$

$$\sum \bar{M} = \sum \bar{T}^* = -\dot{\bar{H}} = \frac{d}{dt} (\Pi \times \bar{\omega}^v) \quad (3.2)$$

onde:

- Π - Tensor de inércia do corpo
- $\bar{\omega}^v = \bar{\omega}^d$ - Velocidade angular do corpo/disco
- \bar{a}^* - Aceleração do centro de gravidade
- m - Massa por unidade de comprimento
- $\sum \bar{M} = \sum \bar{T}^*$ - Torques no centro de gravidade (torque de inércia).

Como a curva elástica resultante da deformação do eixo gira com a velocidade de precessão, a mesma será analisada projetando-a em dois planos ortogonais. Desta forma, a posição no espaço do elemento de cota Z fica definida pelo vetor $\bar{\eta}$, o qual, é decomposto vetorialmente. (ver FIG-3.2)

$$\bar{\eta} = \bar{X} + i\bar{Y} \Rightarrow \eta = X + iY \quad (3.3)$$

Para efeito de obtenção das equações de equilíbrio do elemento, no espaço, será adotada a estratégia seguinte:

- a) Estabelecimento da equação diferencial do movimento conforme visto no plano $Y Z$ (projeção do movimento no plano $Y Z$);
- b) Obtenção da equação diferencial do movimento projetada no plano XZ . Aplicando-se o operador complexo j a equação diferencial obtida no plano YZ obtém-se automaticamente a equação em XZ , sem necessidade de sua dedução;
- c) Composição do vetor espacial $\bar{\eta}$ pela soma dos componentes \bar{X} e \bar{Y}

O operador j quando aplicado às coordenadas é definido pelas propriedades

$$j\bar{X} = \bar{Y} \quad ; \quad j\bar{Y} = -\bar{X} \quad (3.4)$$

Para se ir do eixo X para Y , basta uma rotação de 90° no sentido direto

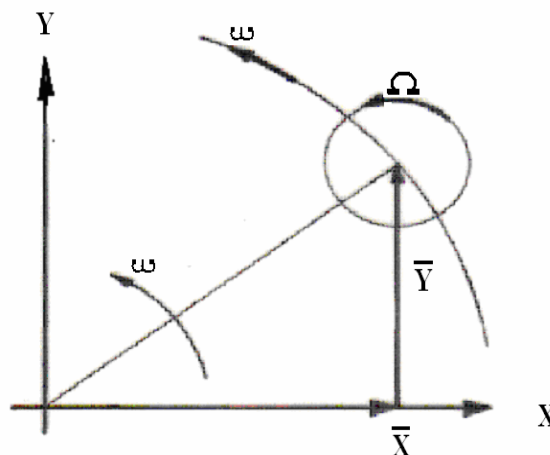


FIG 3.2 - COORDENADAS DO EIXO INERCIAL, $\bar{\eta} = \bar{X} + i\bar{Y}$

3.1.1.1) Relação Entre a Curvatura e o Momento Fletor

Quando não se considera o cisalhamento e pressupõe-se curvatura plana, pode-se dizer que a curvatura do eixo é integralmente provocada pelo momento fletor. A expressão matemática do raio de curvatura plana é a seguinte:

$$\rho = \frac{(1 + (Y')^2)^{3/2}}{Y''}, \quad \rho = \text{raio de curvatura em YZ} \quad (3.5)$$

$$Y' = \frac{\partial Y(Z, T)}{\partial Z} \quad (3.5a)$$

$$Y'' = \frac{\partial^2 Y(Z, T)}{\partial Z^2} \quad (3.5b)$$

Para pequenas deformações do eixo, $[Y']^2 = 0$, portanto:

$$\rho = \frac{1}{Y''} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} = Y'' \quad (3.6)$$

Da resistência dos materiais sabe-se que:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + h)\partial\theta - \rho\partial\theta}{\rho\partial\theta} = \frac{h}{\rho} \quad ; \quad S = E \quad ; \quad \varepsilon = E \cdot \frac{h}{\rho} \quad (3.6a)$$

$$M = \int Sh\partial A = \frac{E}{\rho} \int h^2\partial A = \frac{EI}{\rho} \quad (3.7)$$

onde "h" é a dimensão transversal da viga, (ver FIG 3.3).

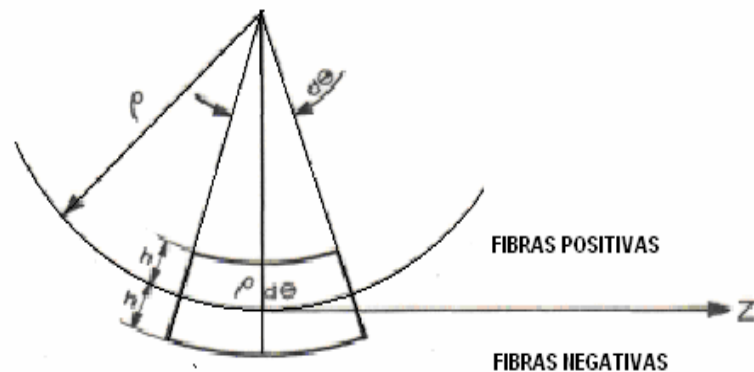


FIG-3.3 - GEOMETRIA DA CURVATURA PLANA DO EIXO

Substituindo (3.6) em (3.7), teremos:

$$\bar{M} = EI \cdot \bar{Y}'' \quad (3.8)$$

Neste trabalho valerá a seguinte convenção dos sinais dos momentos:

a) No plano Y Z, o momento que tracionar as fibras positivas terá a seguinte relação entre a curvatura e o momento fletor (ver FIG-3.1):

$$M_x = -EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \quad (3.9)$$

b) Para o plano X Z, aplicando-se o operador j à equação (3.9), tem-se:

$$M_y = EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \quad (3.10)$$

O operador j é usado para girar o referencial de 90°.

3.1.1.2) Equação de Equilíbrio do Elemento de Eixo

Considere um elemento infinitesimal de eixo, submetido a momentos fletores e a esforços cortantes, conforme a FIG-3.1

Aplicando-se a equação (3.2), tem-se:

$$\sum \bar{M} = -\dot{\bar{H}}; \quad (3.2)$$

$\sum \bar{M}$ = somatório dos momentos externos

$\dot{\bar{H}}$ = derivada em relação ao tempo do momento cinético.

Conforme demonstrado no Capítulo II e substituindo-se \dot{H} de acordo com a equação (2.16), pode-se então dizer que no plano Y Z:

$$\sum \bar{M}_x = I_d \cdot \left(-\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} + \frac{I_p}{I_d} \Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \cdot \bar{i} \quad (3.2.a)$$

$$I_p = \frac{mR^2}{4} \partial Z ; \quad \frac{I_p}{I_d} = 2 \quad \text{sendo ;}$$

m = massa por unidade de comprimento do eixo

R = raio do eixo

O somatório dos momentos $\sum \bar{M}_x$, é obtido com auxílio da FIG 3.1. Considerando-se todos os momentos fletores e o momento dos cortantes em relação ao CG do elemento de eixo no plano Y Z, tem-se:

$$-M_x + M_x + \frac{\partial M_x}{\partial Z} dZ + F_y dZ + \frac{\partial F_y}{\partial Z} dZ \frac{dZ}{2} = -\frac{mR^2}{4} \cdot \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.11)$$

Simplificando e explicitando-se o cortante F_y em função das coordenadas e do momento fletor no plano

$$F_y = \frac{\partial M_x}{\partial Z} + \frac{mR^2}{4} \cdot \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.12)$$

Utilizando a equação (3.1) que diz-se que $\sum F = m \cdot \bar{a}^*$ e a partir da FIG 3.1 escreve-se a equação que falta para completar o equilíbrio do elemento de eixo, ou seja, a equação de equilíbrio das forças externas

$$-F_y + F_y + \frac{\partial F_y}{\partial Z} dZ = (mdZ)\ddot{Y} \quad (3.1.a)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial Z} = m\ddot{Y} \quad (3.1.b)$$

Derivando a equação (3.12) em relação à distância axial

$$\frac{\partial F_y}{\partial Z} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial Z^2} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \right) \quad (3.13)$$

Substituindo nela as equações (3.1.b) e (3.9) tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} + m\ddot{Y} = \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \right) \quad (3.14)$$

que é a equação de movimento do eixo projetado no plano Y Z.

Comparando-se a equação acima com a equação de movimento de uma viga, no plano YZ, conforme apresentado em CRAIG Jr., R. R., (1995),

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} + m\ddot{Y} = \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} - \text{E. GIROSCÓPICO.} \right) + \frac{EI}{k'GA} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} m\ddot{Y} + \frac{m^2 I}{k'GA^2} \frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial t^2} \quad (3.14.a)$$

podemos registrar as parcelas de contribuição do cisalhamento não levadas em conta neste trabalho (por não ser importante no universo das turbomáquinas).

$$\frac{EI}{k'GA} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} m\ddot{Y} \quad \text{termo de cisalhamento} \quad ;$$

$$\frac{m^2 I}{k'GA^2} \frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial t^2} \quad \text{termo de cisalhamento combinado com inércia rotativa}$$

Para obter-se a equação de movimento do eixo no plano X Z, basta que se gire o referencial de 90°, através da aplicação do operador j

$$-EI \frac{\partial^4 X}{\partial Z^4} - m\ddot{X} = \frac{mR^2}{4} \left(-\frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \right) \quad (3.14.b)$$

e, portanto, a equação diferencial de movimento no plano XZ torna-se

$$EI \frac{\partial^4 X}{\partial Z^4} + m\ddot{X} = \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial Z^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \right) \quad (3.15)$$

Compondo-se agora o movimento do eixo, pela soma de seus vetores posição X e Y, teremos a posição do eixo no espaço. Para tanto utiliza-se a variável complexa $\bar{\eta}$ definida em (3.3) $\bar{\eta} = \bar{X} + i\bar{Y}$

Multiplicando-se a equação (3.14) pelo imaginário $i = \sqrt{-1}$ e somando com a equação (3.15) e substituindo (3.3) tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m\ddot{\eta} - \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} + 2i\Omega \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} = 0, \quad (3.16)$$

que é a equação diferencial de movimento de um eixo no espaço.

Cada termo da equação tem dimensão de carga distribuída. Assim:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} \quad - \text{parcela associada à reação elástica}$$

$$m\ddot{\eta} \quad - \text{parcela associada à inércia translação}$$

$$\frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \text{parcela associada à inércia de rotação}$$

$$2j\Omega \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \text{parcela associada ao efeito giroscópio}$$

3.1.1.3) Determinação da relação entre o Cortante e o Fletor

A relação entre o cortante e o momento fletor surge naturalmente quando se escreve a equação de equilíbrio dos momentos que atuam no elemento de eixo. Esta expressão, obtida na equação (3.12),

$$F_Y = \frac{\partial M_x}{\partial Z} + \frac{mR^2}{4} \cdot \left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.12)$$

é bastante utilizada no estudo de vigas, salvo a segunda parcela que é relativa aos movimentos de rotação e precessão do eixo.

Será convencionado como positivo o cortante representado na FIG 3.1.

A representação de um cortante negativo será obtida pela inversão das setas da mesma figura.

3.1.2) Caracterização das Condições de Contorno

Tendo definido a equação diferencial, precisamos agora determinar as expressões dos momentos e cortantes que agem nas extremidades do eixo, quando o conjunto em estudo é posto em movimento.

Como a solução da equação diferencial de movimento dependerá do comportamento das extremidades do conjunto, estabeleceremos as condições de contorno que completam a simulação matemática do modelo físico em estudo.

3.1.2.1) Condições de Contorno na Extremidade do Volante

Para obter o cortante na extremidade com disco, usamos as equações (3.12) e (3.9)..

$$F_Y = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.17)$$

Observando a FIG-3.4 vemos que $F_Y = -M\ddot{Y}$, logo

$$-M\ddot{Y} = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.18)$$

O cortante no plano X Z é obtido aplicando-se o operador j, de rotação.

$$M\ddot{X} = EI \frac{\partial^3 X}{\partial Z^3} - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (3.18.a)$$

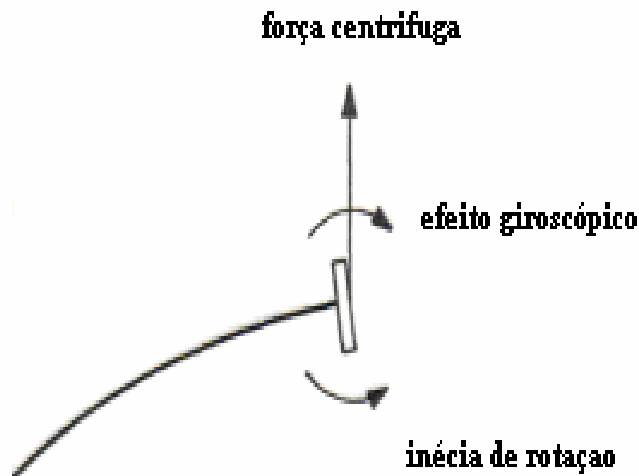


FIG-3.4 CONDIÇÃO DE CONTORNO DO VOLANTE

Multiplicando a equação (3.18) por $-j$ e somando com (3.19), tem-se:

$$M(\ddot{X} + j\ddot{Y}) = EI \frac{\partial^3}{\partial Z^3} (X + jY) - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial Z} (\ddot{X} + j\ddot{Y}) - 2\Omega \frac{\partial}{\partial Z} (j\dot{X} + \dot{Y}) \right) \quad (3.19)$$

Substituindo a expressão $\eta = \bar{\eta} = \bar{X} + i\bar{Y}$, temos, finalmente, o cortante na extremidade com disco:

$$M\dot{\eta} = EI \frac{\partial^3}{\partial Z^3} \eta - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial Z} \dot{\eta} - 2j\Omega \frac{\partial}{\partial Z} \dot{\eta} \right), \quad (3.20)$$

O momento fletor na extremidade com disco é obtido pela combinação das equações (3.9) e (3.11), com sinal trocado:

$$-EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = I_d \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.21)$$

Aplicando o operador de rotação j , à equação (3.21), surge a expressão do momento no plano XZ :

$$EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} = I_d \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (3.22)$$

Multiplicando-se a equação (3.21) por $-j$ e somando com (3.22):

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -I_d \left(-\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \quad (3.23)$$

3.1.2.2) Condições de Contorno na Extremidade com Mola

Novamente, para determinar o cortante (desta vez na extremidade com mola), usamos as equações (3.12) e (3.9) que, combinadas, fornecem a equação (3.17).

Observando a FIG.3.5, tem-se $F = -KY$, logo, considerando a curvatura negativa,

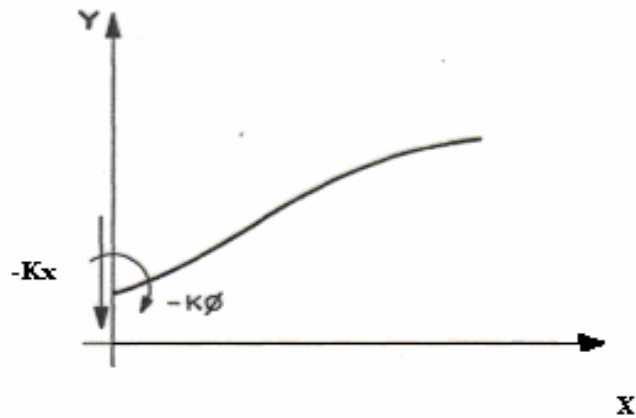


FIG-3.5 CONDIÇÃO DE CONTORNO DE MOLA

$$-KY = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \quad (3.24)$$

Aplicando o operador de rotação j , tem-se que

$$KX = EI \frac{\partial^3 X}{\partial Z^3} - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) \quad (3.25)$$

Somando-se a equação (3.25) com (3.24), multiplicada por $-j$, tem-se:

$$-K\eta = -EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2j\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \quad (3.26)$$

que reflete o cortante aplicado na extremidade $Z = 0$.

O momento fletor na extremidade com mola, tracionar as fibras negativas $-MX$ e é obtido pela aplicação de:

$$-M_x = -EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \quad (3.26.a)$$

Sendo o momento mostrado na FIG 3.5, conforme convenção adotada

$$M_x = -K\phi = -K \frac{\partial Y}{\partial Z} \quad (3.26.b)$$

Substituindo acima, obtemos:

$$K \frac{\partial Y}{\partial Z} = -EI \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \quad (3.27); \quad -K \frac{\partial X}{\partial Z} = -EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \quad (3.27.a)$$

Girando o referencial através do operador j obteremos (3.27.a)

Compondo as coordenadas X e Y para obtenção do complexo η temos

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -K \frac{\partial \eta}{\partial Z} \quad (3.28)$$

Resumindo, as condições de contorno do eixo são:

- a) extremidade com disco - equações (3.20) e (3.23);
- b) extremidade com mola - equações (3.26) e (3.28).

3.1.3) Solução da Equação Diferencial de Movimento

A simulação do comportamento dinâmico de um rotor flexível, conforme apresentado, consiste em resolver a equação diferencial (3.16), condicionada as restrições impostas pelas características das extremidades do eixo.

No presente modelo físico, são as seguintes as condições de contorno:

$$EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} = +K\eta + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=0} \quad (3.26)$$

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -K \frac{\partial \eta}{\partial Z} \Big|_{Z=0} \quad (3.28)$$

$$EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} = M\dot{\eta} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial}{\partial Z} \ddot{\eta} - 2i\Omega \frac{\partial}{\partial Z} \dot{\eta} \right) \Big|_{Z=l} \quad (3.20)$$

$$EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = I_d \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=l} \quad (3.23)$$

Nas expressões acima, o deslocamento transversal do centro da seção, é uma variável complexa e pode ser escrita como $\eta = \eta(Z,t)$. Em se tratando de vibração natural, supõe-se solução $\eta(Z,t) = F(Z)e^{i\omega t}$.

O parâmetro ω (velocidade de precessão) aparece no processo de solução da equação diferencial e representa a velocidade de rotação do plano que contém a linha elástica.

3.1.3.1) Determinação das Freqüências Naturais

A solução da equação diferencial (3.16), como vimos, será perseguida por meio da separação de variáveis.

Supondo $F \equiv F(Z)$, função escalar sa variável Z ,

$\eta = Fe^{i\omega t}$, onde $F \equiv F(Z)$. As derivadas do deslocamento serão:

$$\dot{\eta} = i\omega Fe^{i\omega t}, \quad \ddot{\eta} = -\omega^2 Fe^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} = \frac{\partial^4 F}{\partial Z^4} e^{i\omega t}, \quad \text{etc..} \quad (3.29)$$

Substituindo as expressões acima nas equações diferencial e de contorno e eliminando-se, também, $e^{i\omega t}$, vem:

$$-m\omega^2 F + EI \frac{\partial^4 F}{\partial Z^4} + \frac{mR^2}{4} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = 0 \quad ; \quad (3.30)$$

$$EI \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} = -KF + \frac{mR^2}{4} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{\partial F}{\partial Z} \quad (Z = 0) \quad (3.31.a)$$

$$EI \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = -K \frac{\partial F}{\partial Z} \quad (Z = 0) \quad (3.31.b)$$

$$EI \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} = -m\omega^2 F - \frac{mR^2}{4} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{\partial F}{\partial Z} \quad (Z = L) \quad (3.31.c)$$

$$EI \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = I_d (\omega^2 - 2\Omega\omega) \frac{\partial F}{\partial Z} \quad (Z = L) \quad (3.31.d)$$

Após a separação de variáveis, a equação diferencial parcial de coeficientes complexos (3.16) transforma-se na equação (3.30) apresentando-se como uma equação diferencial ordinária linear de quarta ordem e com coeficientes constantes e reais. Podemos então afirmar que as soluções desta equação encontram-se no plano e são linearmente independentes.

O efeito giroscópio portanto não acopla os modos naturais de vibração em um sistema rotor. (autovetores giroscópicos)

Objetivando dar ao estudo uma maior abrangência, adotemos a variável adimensional de posição "z", tal que:

$$z = \frac{Z}{L}, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (3.32)$$

Com esta mudança de variável, as derivadas de F(Z) terão as seguintes expressões:

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{l} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{l} F' \quad (3.33.a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = \frac{1}{l^2} F'' \quad (3.33.b)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} = \frac{1}{l^3} F''' \quad (3.33.c)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial Z^4} = \frac{1}{l^4} F^{iv} \quad (3.33.d)$$

substituindo:

$$F' = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad F''' = \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}, \quad F^{iv} = \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} \quad \text{teremos:}$$

$$F^{iv} + \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) F^{ii} - \frac{m\omega^2 l^4}{EI} F = 0 \quad \text{ou} \quad F^{iv} + \alpha F^{ii} - \beta^4 F = 0 \quad (3.34)$$

onde α e β^4 , dados por $\alpha = \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$ e $\beta^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}$, são valores adimensionais

Analogamente, fazendo $z = \frac{Z}{L}$ nas condições de contorno, teremos:

$$F''' = -\frac{Kl^3}{EI} F + \alpha F' \quad (Z = 0) \quad (3.34.a)$$

$$F'' = -\frac{Kl}{EI} F' \quad (Z = 0) \quad (3.34.b)$$

$$F''' = -\bar{\beta}^4 F - \alpha F' \quad (Z = 1) \quad (3.34.c)$$

$$F'' = \bar{\alpha} F' \quad (Z = 1) \quad (3.34.d)$$

Sendo $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}^4$ parâmetros adimensionais, relativos ao volante, cujas expressões

$$\text{são } \bar{\alpha} = \frac{I_d l}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) \quad \text{e} \quad \bar{\beta}^4 = \frac{M\omega^2 l^3}{EI}$$

A equação diferencial ordinária linear de quarta ordem, com coeficientes constantes $F^{iv} + \alpha F'' - \beta^4 F = 0$ tem sua solução na forma:

$$F(Z) = A \operatorname{sen} \varepsilon Z + B \cos \varepsilon Z + C \operatorname{senh} \delta Z + D \operatorname{cosh} \delta Z \quad (3.35)$$

$$\text{onde: } \varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} \quad (3.35.a); \quad \delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} \quad (3.35.b)$$

Para que tenhamos uma melhor visão dos parâmetros adimensionais ε e δ , façamos uma breve discussão sobre seus valores.

a) $\varepsilon = \delta$ sempre que $\alpha = 0$, o que ocorre por exemplo, sempre que $\omega = 2\Omega$

b) Os valores numéricos de ε e δ , para um certo sistema, dependem dos parâmetros Ω e ω e são sempre positivos.

Na FIG-3.5 apresentam-se os valores de ε e δ nas extremidades de um diagrama $\Omega \times \omega$ arbitrariamente escolhido.

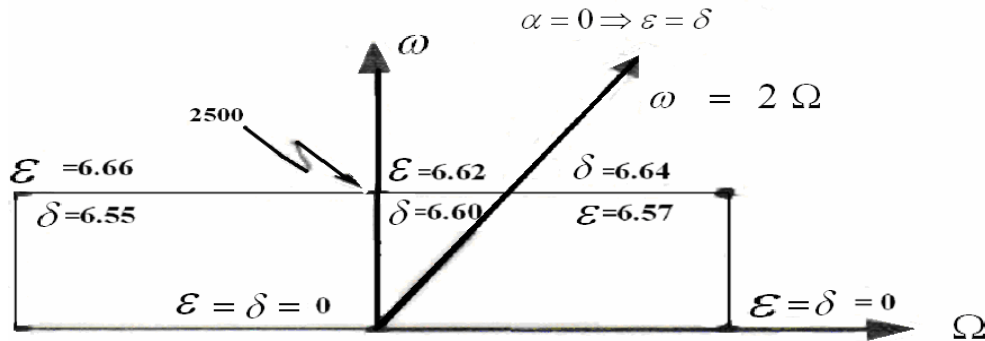


FIG-3.6 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Os valores dos parâmetros ε e δ são bem próximos, devido à fraca influência do adimensional α , na definição dos argumentos das funções base da solução da equação diferencial.

Dando prosseguimento à solução da equação diferencial, Seção 3.3, passaremos à determinação das constantes de integração.

A partir da equação (3.35) podem-se obter as expressões de $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, $F'''(z)$ e substituí-las nas equações (3.34a), (3.34b), (3.34c) e (3.34d), que são as condições de contorno relativas ao nosso problema.

Assim procedendo, surge o sistema homogêneo abaixo:

$$A(\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon) + \frac{BKl^3}{EI} + C(\delta^3 - \alpha\delta) + D\frac{Kl^3}{EI} = 0 \quad (3.36)$$

$$A\frac{kl\varepsilon}{EI} - B\varepsilon^2 + C\frac{kl\delta}{EI} + D\delta^2 = 0. \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} A\{-\varepsilon^3 \cos(\varepsilon) + \bar{\beta}^4 \text{sen}(\varepsilon) + \alpha\varepsilon \cos(\varepsilon)\} + \\ B\{-\varepsilon^3 \text{sen}(\varepsilon) + \bar{\beta}^4 \cos(\varepsilon) - \alpha\varepsilon \text{sen}(\varepsilon)\} + \\ C\{-\delta^3 \cosh(\delta) + \bar{\beta}^4 \text{senh}(\delta) + \alpha\delta \cosh(\delta)\} + \\ D\{\delta^3 \text{senh}(\delta) + \bar{\beta}^4 \cosh(\delta) + \alpha\delta \text{senh}(\delta)\} = 0 \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\{-\varepsilon^2 \text{sen}(\varepsilon) - \bar{\alpha}\varepsilon \cos(\varepsilon)\} + B\{-\varepsilon^2 \cos(\varepsilon) + \bar{\alpha}\varepsilon \text{sen}(\varepsilon)\} \\ + C\{\delta^2 \text{senh}(\delta) - \bar{\alpha}\delta \cosh(\delta)\} + D\{\delta^2 \cosh(\delta) - \bar{\alpha}\delta \text{senh}(\delta)\} = 0 \quad (3.39) \end{aligned}$$

Com relação a este último sistema, convém observar que:

- 1) Temos um sistema de equações algébricas homogêneo de 4ª - ordem (4 equações e 4 incógnitas) representado matricialmente por $[MR] \{X\} = \{0\}$, onde $\{X\}^T$ transposta é igual a $\{ABCD\}$ e $[MR]$ é a matriz dos coeficientes.
- 2) Uma solução possível para o sistema é $A=B=C=D=0$ (solução trivial), em que não há flexão no eixo.
- 3) Para que a função $F(z)$ tenha uma forma bem definida, há necessidade de se impor um valor nulo ao determinante dos coeficientes de A, B, C e D no sistema homogêneo.
- 4) A matriz dos coeficientes $[MR]$ é formada por funções transcendentais e seu determinante se anulará em um número infinito de valores de ω (precessão), para cada valor do parâmetro Ω (rotação) previamente fixado.
- 5) O sistema homogêneo encontra-se apresentado na forma matricial (veja a seguir)

Os valores singulares ω que anulam o determinante são as frequências naturais de vibração. Para determiná-las, procede-se como segue:

- 1) Fixar um valor para o parâmetro Ω (rotação).
- 2) Dá-se valores continuamente ao parâmetro ω (precessão), até que $\text{DET} [MR] = 0$, (ver FIG-3.7). Existe um número infinito de valores de ω , para cada Ω , capazes de anular o determinante. No presente trabalho, selecionamos as três primeiras raízes somente.
- 3) Dá-se novo valor para Ω , repetindo-se a instrução (2). Organiza-se então uma tabela conforme mostrado esquematicamente na FIG-3.8.

Em forma compacta, a equação matricial (3.40), envolvendo as constantes a determinar, com as expressões dos parâmetros adimensionais que serão utilizados.

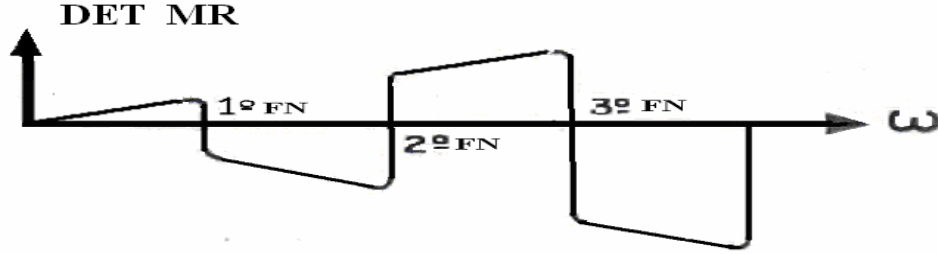


FIG-3.7 CONJUNTO DE ZEROS DE [DET MR]

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon & \frac{Kl^3}{EI} & \delta^3 - \alpha\delta & \frac{Kl^3}{EI} \\ \frac{kl\varepsilon}{EI} & -\varepsilon^2 & \frac{kl\delta}{EI} & \delta^2 \\ \begin{pmatrix} -\varepsilon^3 \cos(\varepsilon) \\ +\bar{\beta}^4 \sin(\varepsilon) \\ +\alpha\varepsilon \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\varepsilon^3 \sin(\varepsilon) \\ +\bar{\beta}^4 \cos(\varepsilon) \\ -\alpha\varepsilon \sin(\varepsilon) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\delta^3 \cosh(\delta) \\ +\bar{\beta}^4 \sinh(\delta) \\ +\alpha\delta \cosh(\delta) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta^3 \sinh(\delta) \\ +\bar{\beta}^4 \cosh(\delta) \\ +\alpha\delta \sinh(\delta) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \sin(\varepsilon) \\ -\bar{\alpha}\varepsilon \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \cos(\varepsilon) \\ +\bar{\alpha}\varepsilon \sin(\varepsilon) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta^2 \sinh(\delta) \\ -\bar{\alpha}\delta \cosh(\delta) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta^2 \cosh(\delta) \\ -\bar{\alpha}\delta \sinh(\delta) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Ω	$\omega 1$	$\omega 2$	$\Omega 3$
-1000
0	---	---	---
1000	---	---	---

FIG-3.8 TABELA ESQUEMÁTICA

Relação dos parâmetros adimensionais:

$$\alpha = \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega); \quad \beta^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}; \quad \bar{\alpha}_i = \frac{I_{di} l}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega); \quad \frac{Kl^3}{EI};$$

$$\bar{\beta}^4 = \frac{M\omega^2 l^3}{EI}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}}; \quad \delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}}; \quad \frac{kl\delta}{EI}; \quad \frac{kl\varepsilon}{EI} \quad (3.40.a)$$

3.1.3.2) Determinação dos Modos Naturais de Vibração

Os modos normais de vibração são fornecidos através da solução da elástica (3.35), a qual, depende de um par (Ω, ω) que anule o determinante da matriz dos coeficientes,

Sendo o $\text{DET} [\text{MR}] = 0$, resolver o sistema representado na equação (3.40) para um conjunto (Ω, ω) , onde $\text{DET} [\text{MR}] = 0$ é resolver o sistema abaixo, onde $a_{ij} = a_{ij}(\Omega, \omega)$ são elementos da matriz dos coeficientes $[\text{MR}]$.

$$\begin{cases} a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C + a_{24}D = 0 \\ a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C + a_{34}D = 0 \\ a_{41}A + a_{42}B + a_{43}C + a_{44}D = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Para resolver o sistema homogêneo indeterminado deve-se calcular, por exemplo, os valores de B, C e D, como função de A, escrevendo o sistema:

$$\begin{cases} a_{22}B + a_{23}C + a_{24}D = -a_{21}A \\ a_{32}B + a_{33}C + a_{34}D = -a_{31}A \\ a_{42}B + a_{43}C + a_{44}D = -a_{41}A \end{cases} \quad (3.42)$$

Pela regra de Cramer teremos:

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta}; C = \frac{\Delta_C}{\Delta}; D = \frac{\Delta_D}{\Delta}, \text{ onde os determinantes} \quad (3.42.a)$$

$$\Delta_B = -(\Delta\alpha_{12}); \quad \Delta_C = -(\Delta\alpha_{13}); \quad \Delta_D = -(\Delta\alpha_{14}) \quad \text{são:} \quad (3.42.b)$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -a_{21}A + a_{23} + a_{24} \\ -a_{31}A + a_{33} + a_{34} \\ -a_{41}A + a_{43} + a_{44} \end{vmatrix}; \quad \Delta_C = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}A + a_{24} \\ a_{32} - a_{31}A + a_{34} \\ a_{42} - a_{41}A + a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} a_{22} + a_{23} - a_{21}A \\ a_{32} + a_{33} - a_{31}A \\ a_{42} + a_{43} - a_{41}A \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{32} + a_{33} + a_{34} \\ a_{42} + a_{43} + a_{44} \end{vmatrix} \quad (3.42.c)$$

Podemos escrever, em uma representação simplificada que, $\Delta_B = -(\Delta\alpha_{12}) \cdot A$; $\Delta_C = -(\Delta\alpha_{13}) \cdot A$; $\Delta_D = -(\Delta\alpha_{14}) \cdot A$, sendo $\Delta\alpha_{ij}$ o determinante de 3ª ordem proveniente da eliminação da linha i e da coluna j do DET [M]. Com esta notação, os modos naturais poderão ser expressos como:

Equação da Elástiua

$$F_n(Z) = A_n \left(\text{sen}\varepsilon Z - \frac{\Delta\alpha_{.12}}{\Delta\alpha_{.11}} \text{cos}\varepsilon Z + \frac{\Delta\alpha_{.13}}{\Delta\alpha_{.11}} \text{senh}\delta Z - \frac{\Delta\alpha_{.14}}{\Delta\alpha_{.11}} \text{cosh}\delta Z \right) \quad (3.43)$$

Onde n representa o n -ésimo autovetor linearmente independente da série infinita.

O efeito giroscópio não acopla os modos de vibração do rotor, nem as equações do movimento (autovetores giroscópicos são linearmente independentes)

3.1.4) Exemplos: Caso de Estudo

CASTILHO, A. (1983) discutiu a influência da variação dos parâmetros físicos e geométricos na frequência natural de um rotor. Como já havia sido mencionado anteriormente, os autovetores pertencem ao plano e são linearmente independentes. O modelo físico tomado como base para a discussão dos resultados tem as seguintes características:

ROTOR EM BALANÇO - SUSPENSÃO COM MOLAS

Diâmetro do eixo	= 0,05 m	Inércia de massa diametral	= 0,50
Espessura do disco	= 0,05 m	Inércia de massa polar	= 0,98
Diâmetro do disco	= 0,40 m	Material do disco	= Aço
Massa do disco	= 49,01 kg		
Comprimento do eixo flexível	= 0,975 m		
Inércia de flexão do eixo	$EI = 0,307$		

3.1.4.1) Influência da Variação do Diâmetro – Suspensão Rígida

A FIG- 3.9 relativa a 1ª frequência natural, mostra que existe uma forte influência do diâmetro nas curvas de frequência natural.

O crescimento do diâmetro aumenta a massa do disco e em consequência cai o valor da frequência natural, para uma velocidade de rotação nula. O aumento do diâmetro provoca ainda um fortalecimento da atuação do efeito giroscópico. Isto pode ser percebido em todas as curvas de frequência natural apresentadas pela acentuada diferença das frequências “forward” e “backward”.

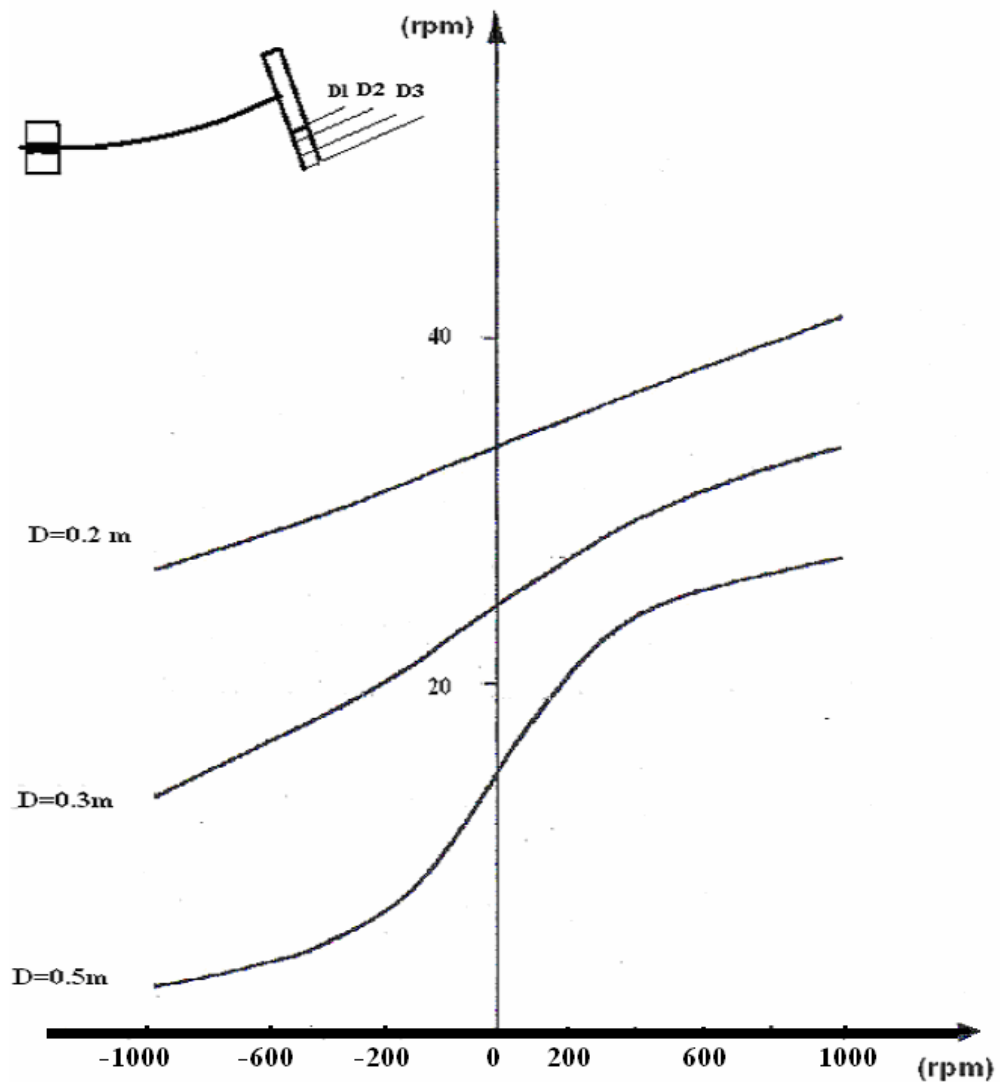


FIG-3.9 VARIAÇÃO DO DIÂMETRO

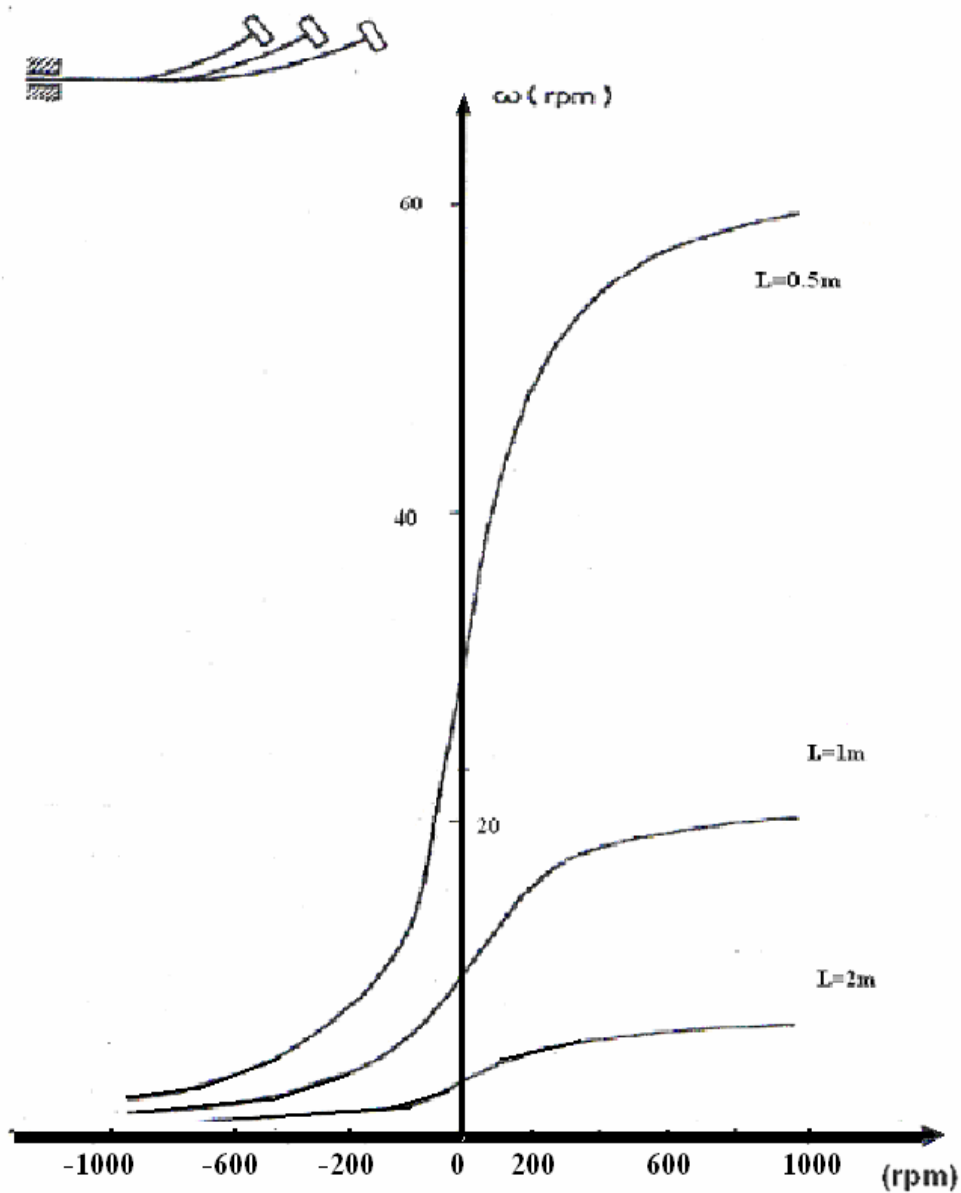


FIG-3.10 VARIACÃO DO COMPRIMENTO

3.1.4.2) Influência da Variação do Comprimento do Eixo

Observando a FIG-3.10 relativa à 1ª frequência natural, respectivamente, vemos que a diminuição do comprimento do eixo enrijece o sistema, o que é um resultado esperado, aumentando as frequências naturais.

Um enrijecimento pode ser conseguido pelo aumento do diâmetro do eixo, permanecendo constante o seu comprimento.

3.1.4.3) Modos Naturais de Vibração

Na FIG-3.11 podemos observar a forma que a elástica assume nos três primeiros modos naturais de vibração para dois valores distintos da velocidade de rotação, tais que: $\Omega = -1000$ rpm e $\Omega = 1000$ rpm

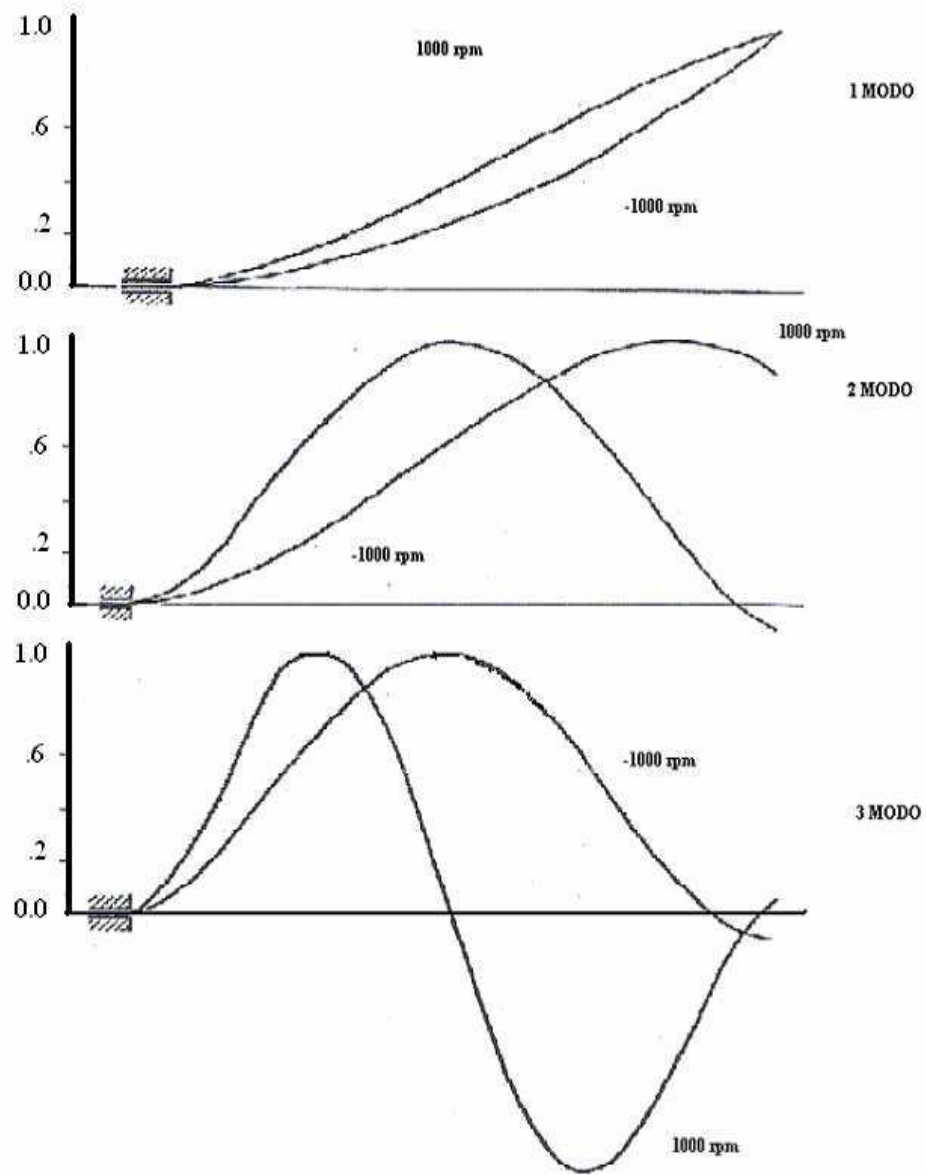


FIG-3.11 MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DO ROTOR

3.2 Equação de Movimento de Rotor Bi-Apoiado

3.2.1 Determinação da Equação de Movimento

O problema a ser analisado neste Capítulo é apresentado na FIG-1.3. Consta de um eixo uniforme bi-apoiado, de massa e elasticidade distribuídas e com um disco rígido, sem espessura, localizado entre os apoios. Tal disco é considerado como tendo massa e momento de inércia concentrados.

Serão adotadas todas as mesmas simplificações apresentadas no início do Capítulo III, para efeito de determinação da equação diferencial de movimento.

Sem perda de generalidade, as condições de contorno serão aquelas apresentadas para o rotor bi-apoiado de acordo com a FIG-1.3.

Na seção (3.1) vimos que a equação diferencial era dada pela equação (3.16).

Observa-se, na presente simulação, que o disco não poderá ser considerado através das condições de contorno, como o foi no seção 3.1. Surge então a necessidade de introduzir o seu efeito na própria equação diferencial e integrá-la para as condições de contorno impostas.

Para a consideração da massa e do momento de inércia de massa concentrados, faremos uso de funções especiais: pulso unitário (delta de Dirac) e binário unitário (double). Algumas propriedades destas "funções" estão relacionadas no Apêndice A. Sejam $m(Z)$ e $I(Z)$ os novos valores de massa e momento de inércia de massa distribuídas ao longo do eixo.

$$m_s(Z) = m + M \delta(Z - C) \quad (3.44)$$

$$I_s(Z) = \frac{mR^2}{4} + I_d \delta(Z - C) \quad (3.45)$$

Nas equações acima "m" é a massa (constante) por unidade de comprimento do eixo, "M" a massa concentrada do disco, o " $\frac{mR^2}{4}$ " momento de inércia diametral (constante) por unidade de comprimento do eixo, " $I_d = I$ " momento de inércia concentrado diametral do disco e $\delta(Z - C)$ uma "função" pulso unitário em $Z = C$.

Substituindo a equação (3.44) na equação (3.13), a equação (3.45) na equação (3.12) e seguindo o mesmo processo da Seção 3.1, com a notação $\eta = X + iY$, chegamos a seguinte expressão:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m_s \ddot{\eta} = \frac{\partial}{\partial Z} I_s \left(\left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} + 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \right) \quad (3.46)$$

Esta expressão é equivalente a equação (3.16)

Substituindo a equação (3.44) e (3.45) na equação (3.46) e sabendo que $m ; \frac{mR^2}{4}$;

M e I_d não variam com Z , podemos escrever:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} + M \ddot{\eta} \delta(Z - C) - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} + 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) - I_d \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \delta(Z - C) \right) = 0 \quad (3.47)$$

Chamando de $Q_Z = \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right)$ a derivada da expressão entre parenteses será igual a $\frac{\partial}{\partial Z} Q(Z) \cdot \delta(Z - C) = Q(C) \delta'(Z - C)$; onde $\delta'(Z - C)$ é a "função" binário unitário, obtida da derivação do pulso unitário, ver Apêndice 3.1.

Levando este resultado na equação (3.47), teremos a equação diferencial de movimento do conjunto rotor:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} + M \ddot{\eta} \delta(Z - C) - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) - I_d \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=C} \delta'(Z - C) = 0 \quad (3.48)$$

Todos os termos da expressão acima têm a dimensão de uma força por unidade de comprimento, a saber:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} \quad - \quad \text{força de reação elástica} \quad (3.48.a)$$

$$m\ddot{\eta} \quad - \quad \text{força centrífuga devida à precessão do eixo} \quad (3.48.b)$$

$$M\ddot{\eta}\delta(Z-C) \quad - \quad \text{força centrífuga devida à precessão do disco} \quad (3.48.c)$$

$$\frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \quad \text{inércia de rotação de um elemento de eixo} \quad (3.48.d)$$

$$I_d \left. \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} \right|_{Z=C} \delta'(Z-C) \quad - \quad \text{inércia de rotação do disco} \quad (3.48.e)$$

$$\frac{mR^2}{4} \cdot 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \quad - \quad \text{efeito giroscópico do elemento de eixo} \quad (3.48.f)$$

$$I_d \cdot 2i\Omega \left. \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right|_{Z=C} \delta'(Z-C) = 0 \quad - \quad \text{efeito giroscópico devido ao disco} \quad (3.48.g)$$

3.2.2) Caracterização das Condições de Contorno

Para o rotor bi-apoiado da FIG-1.3, são nulos os deslocamentos e os momentos fletores nas duas extremidades, portanto:

$$\eta(0) = 0 \quad (3.49)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.50)$$

$$\eta(l) = 0 \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} \right|_{z=l} = 0 \quad (3.52)$$

3.2.3) Solução da Equação Diferencial de Movimento

A curva elástica do rotor flexível se obtém com a solução da equação diferencial (3.48), sujeita às condições de contorno (3.49) a (3.52).

Na pesquisa da solução da equação diferencial supomos a separação de variáveis para o deslocamento complexo:

$$\eta(Z, t) = Q(Z) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.53)$$

onde:

$Q(Z)$ é a curva elástica do eixo, podendo, inclusive, ser da forma complexa

$Q(Z) = q_1(Z) + i q_2(Z)$ e ω é a velocidade angular (precessão) do rotor

Introduzindo a separação de variáveis, equação (3.53), na equação (3.48) e eliminando o termo comum $e^{i\omega t}$, somos conduzidos a:

$$EI \frac{\partial^4 Q}{\partial Z^4} - m\omega^2 Q - M\omega^2 Q \delta(Z - C) + \frac{mR^2 \omega^2}{4} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 Z} - 2\Omega\omega \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} \right) + I_d \omega^2 \frac{\partial Q}{\partial Z} \Big|_{Z=C} \delta'(Z - C) - I_d \Omega \omega \frac{\partial Q}{\partial Z} \Big|_{Z=C} \delta'(Z - C) = 0 \quad (3.54)$$

Da mesma forma, também neste Capítulo, lançamos mão da mudança de variável, da variável Z , na equação (3.32), fazendo $z = \frac{Z}{L}$, $0 \leq z \leq 1$; $c = \frac{C}{L}$.

Com a nova variável "z", as derivadas passam a ser expressas por:

$$\frac{\partial Q}{\partial Z} = \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{L} \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{L} Q' \quad (3.33.a)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} = \frac{1}{L^2} Q'' \quad (3.33.b)$$

$$\frac{\partial^3 Q}{\partial Z^3} = \frac{1}{L^3} Q''' \quad (3.33.c)$$

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial Z^4} = \frac{1}{L^4} Q^{iv} \quad (3.33.d)$$

e as "funções" pulso e doublé unitário (Apêndice 3.1) transformam-se em:

$$\delta(Z - C) = \frac{1}{l} \delta^*(z - c) \quad (3.33.e)$$

$$\delta'(Z - C) = \frac{1}{l^2} \delta'^*(z - c) \quad (3.33.f)$$

Re-escrevendo (3.54) após a mudança de variável e multiplicando por $\frac{l^4}{EI}$, temos:

$$Q^{iv} - \frac{m\omega^2 l^4}{EI} Q - \frac{M\omega^2 l^3}{EI} Q \delta^*(z - c) + \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) Q'' + \frac{I_d l}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) Q' \Big|_{z=c} \delta'^*(z - c) = 0 \quad (3.55)$$

Note-se que os coeficientes de (3.55) são todos reais e, portanto, a função $Q(z)$ também é real. Isto implica em dizer que a curva elástica $\eta(z, t)$ está contida em um plano, $\eta(Z, t) = q_1(Z, t) \cos(\alpha t) + i q_2(Z, t) \sin(\alpha t) = q_1(Z, t) e^{i\alpha t}$, pois todos os pontos do eixo estão igualmente defasados no tempo.

O efeito giroscópico portanto não acopla os modos naturais de vibração em um sistema rotor (autovetores giroscópicos).

Substituindo, na equação (3.55), os parâmetros adimensionais $\alpha; \bar{\alpha}; \beta; \bar{\beta}$ apresentados em (3.3.1), a equação diferencial apresenta-se sob a forma compacta

$$Q^{iv} - \beta^4 Q - \bar{\beta}^4 Q \delta^*(z - c) + \alpha Q'' + \bar{\alpha} Q' \Big|_{z=c} \delta'^*(z - c) = 0 \quad (3.56)$$

a qual está sujeita as condições de contorno

$$Q(0) = 0 \quad (3.56.a)$$

$$Q''(0) = 0 \quad (3.56.b)$$

$$Q(1) = 0 \quad (3.56.c)$$

$$Q''(1) = 0 \quad (3.56.d)$$

A partir deste ponto omitiremos, o asterístico "*" em $\delta^*(z - c)$ e $\delta'^*(z - c)$

Observamos, então, que a equação (3.56) não é de solução imediata, como ocorre no caso da equação (3.34) da seção 3.1, pois neste caso os coeficientes não são constantes em toda a extensão $0 < z < 1$.

Tratando-se de uma equação diferencial ordinária linear, a solução será obtida com o auxílio da transformada de Laplace, conforme NOWACKI, W.,(1963).

A transformada de uma função $G(z)$ é definida como sendo.

$$L\{G(Z)\} = \int_0^{\infty} e^{-SZ} G(S) \partial Z = \bar{G}(S) = \bar{G} \quad (3.57)$$

Multiplicando-se cada termo da equação (3.56) por $e^{-SZ} \partial Z$ e, integrando-se de 0 a ∞ , passamos a ter:

$$L\{Q^{iv}\} - \beta^4 L\{Q\} - \bar{\beta}^4 L\{Q\delta(z-c)\} + \alpha L\{Q''\} + \bar{\alpha} L\{Q'\delta'(z-c)\} = 0 \quad (3.58)$$

Aplicando a tabela de transformada de Laplace, podemos escrever a equação algébrica da transformada de $Q(z)$ (APÊNDICE B)..

$$(S^4 + \alpha S^2 - \beta^4) \bar{Q} = Q(0)(S^3 + \alpha S) + Q'(0)(S^2 + \alpha) + SQ''(0) + Q'''(0) + \bar{\beta}^4 Q(c)e^{-cS} - \bar{\alpha} Q'(c) S e^{-cS} \quad (3.59)$$

Sabendo que $(S^4 + \alpha S^2 - \beta^4) = (S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)$, onde:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} \quad ; \quad \delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} \quad (3.35.a,b)$$

a transformada de $Q(z)$ finalmente é expressa pela seguinte equação algébrica:

$$\bar{Q} = \frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} (Q(0)(S^3 + \alpha S) + Q'(0)(S^2 + \alpha) + SQ''(0) + Q'''(0) + \bar{\beta}^4 Q(c)e^{-cS} - \bar{\alpha} Q'(c) S e^{-cS}) \quad (3.60)$$

Usando-se a identidade matemática

$$\frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{1}{(S^2 - \delta^2)} - \frac{1}{(S^2 + \varepsilon^2)} \right) \quad (3.61)$$

e substituindo-se as equações (3.60) e (3.61) na equação (3.59), a transformada pode ser apresentada em uma forma mais conveniente para sua posterior inversão

$$\begin{aligned} \bar{Q}(S) = & \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left\{ Q(0) \left(\frac{S^3}{S^2 - \delta^2} - \frac{S^3}{S^2 + \varepsilon^2} + \frac{\alpha S}{S^2 - \delta^2} - \frac{\alpha S}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \right. \\ & + Q'(0) \left(\frac{S^2}{S^2 - \delta^2} - \frac{S^2}{S^2 + \varepsilon^2} + \frac{\alpha}{S^2 - \delta^2} - \frac{\alpha}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + Q''(0) \left(\frac{S}{S^2 - \delta^2} - \frac{S}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \\ & + Q'''(0) \left(\frac{1}{S^2 - \delta^2} - \frac{1}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \bar{\beta}^4 Q(c) \left(\frac{e^{-cS}}{S^2 - \delta^2} - \frac{e^{-cS}}{S^2 + \varepsilon^2} \right) - \\ & \left. - \bar{\alpha} Q'(c) \left(\frac{S e^{-cS}}{S^2 - \delta^2} - \frac{S e^{-cS}}{S^2 + \varepsilon^2} \right) \right\} \quad (3.62) \end{aligned}$$

Aplicando a tabela, de transformadas de Laplace inversa do APÊNDICE B á equação (3.62) e simplificando, a solução $Q(z)$ é obtida como:

$$\begin{aligned} Q(z) = & Q(0) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cosh \delta z + \varepsilon^2 \cos \varepsilon z) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \cosh \delta z - \varepsilon \cos \varepsilon z) \right) + \\ & Q'(0) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \sinh \delta z + \varepsilon \sin \varepsilon z) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \right) + \\ & Q''(0) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) \right) + Q'''(0) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \right) + \\ & \bar{\beta}^4 Q(c) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta(z-c)}{\delta} - \frac{-\sin \varepsilon(z-c)}{\varepsilon} \right) \mu(z-c) - \\ & \bar{\alpha} Q'(c) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta(z-c) - \cos \varepsilon(z-c)) \mu(z-c) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Observação:

- δ - parâmetro adimensional
- ε - parâmetro adimensional
- $\mu(z-c)$ - "função" degrau unitário

Para que a equação (3.63) possa ser escrita de forma mais compacta, definiremos as funções:

$$E = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \quad (3.63.a)$$

$$E' = F = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) \quad (3.63.b)$$

$$F' = G = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \sinh \delta z + \varepsilon \sin \varepsilon z) \quad (3.63.c)$$

$$G' = H = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cosh \delta z + \varepsilon^2 \cos \varepsilon z) \quad (3.63.d)$$

$$H' = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^3 \sinh \delta z + \varepsilon^3 \sin \varepsilon z) \quad (3.63.e)$$

Substituindo as equações (3.63a), (3.63b), (3.63c) e (3.63d) na equação (3.63), temos:

$$Q(z) = Q(0)(H(z) + \alpha F(z)) + Q'(0)(G(z) + \alpha E(z)) + Q''(0)F(z) + Q'''(0)E(z) + \bar{\beta}^4 Q(c)E(z-c)\mu(z-c) - \bar{\alpha} Q'(c)F(z-c)\mu(z-c) \quad (3.64)$$

A equação (3.64) é a forma mais geral da curva elástica do eixo, para quaisquer condições de contorno. Conforme já foi dito anteriormente, ela é uma curva plana, pois todos os seus coeficientes são reais.

3.2.3.1) Determinação das Frequências Naturais

Para o cálculo das frequências naturais, aplica-se à equação (3.64) as condições de contorno do problema em causa, que são:

$$Q(0) = Q(l) = 0 \quad (3.56.e)$$

$$Q''(0) = Q''(1) = 0 \quad (3.56.f)$$

Como $Q(0) = 0$ e $q''(0) = 0$, a equação (3.64) simplifica-se em:

$$Q(z) = Q'(0)(G(z) + \alpha E(z)) + Q'''(0)E(z) + \bar{\beta}^4 Q(c)E(z-c)\mu(z-c) - \bar{\alpha}Q'(c)F(z-c)\mu(z-c) \quad (3.65)$$

Para usar as condições de contorno em $z=1$, precisamos das derivadas

$$Q'(z) = Q'(0)(H(z) + \alpha F(z)) + Q'''(0)F(z) + \bar{\beta}^4 Q(c)F(z-c)\mu(z-c) - \bar{\alpha}Q'(c)G(z-c)\mu(z-c) \quad (3.66)$$

$$Q''(z) = Q'(0)(H'(z) - \alpha G(z)) + Q'''(0)(G(z) + \bar{\beta}^4 Q(c)G(z-c)\mu(z-c) - \bar{\alpha}Q'(c)H(z-c)\mu(z-c)) \quad (3.67)$$

Utilizando-se as equações (3.66) e (3.67), as condições de contorno restantes $q(1)=0$ e $q''(1) = 0$, e escrevendo os valores de $Q(c)$ e $Q'(c)$, montaremos o sistema homogêneo abaixo (3.68):

$$\begin{aligned} Q'(0)(G(1) + \alpha E(1)) + Q'''(0)E(1) + \bar{\beta}^4 Q(c)E(1-c) - \bar{\alpha}Q'(c)F(1-c) &= 0 \\ Q'(0)(H'(1) + \alpha G(1)) + Q'''(0)(G(1) + \bar{\beta}^4 Q(c)G(1-c) - \bar{\alpha}Q'(c)H(1-c)) &= 0 \\ Q'(0)(G(c) + \alpha E(c)) + Q'''(0)E(c) - Q(c) + 0 &= 0 \\ Q'(0)(H(c) + \alpha F(c)) + Q'''(0)F(c) + 0 - Q'(c) &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Escrevendo este sistema na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} G(1) + \alpha E(1) & E(1) & \bar{\beta}^4 E(1-c) & -\bar{\alpha}F(1-c) \\ H'(1) + \alpha G(1) & G(1) & \bar{\beta}^4 G(1-c) & -\bar{\alpha}H(1-c) \\ G(1) + \alpha E(c) & E(c) & -1 & 0 \\ H(c) + \alpha F(c) & F(c) & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q'(0) \\ Q'''(0) \\ Q(c) \\ Q'(c) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

que se constitui em um problema de autovalor. O sistema (3.69) é homogêneo de quarta ordem (4 equações e 4 incógnitas), e sua solução será $Q'(0)=Q''(0)=Q(c)=0$ $Q'(c) = 0$ (solução trivial), a menos que o determinante da matriz dos coeficiente se anule.

A anulação do determinante estabelece uma equação de frequência. Para cada valor escolhido de Ω existe um número infinito de valores de ω que anulam o determinante, formando o conjunto das frequências naturais.

A equação de frequência será resolvida numericamente, usando-se o mesmo algoritmo do da seção 3.1.

3.2.3.2) Determinação dos Modos Naturais de Vibração

A solução $Q(z)$ terá sua forma bem definida (problema de autovalor) quando o determinante obtido de (3.69) se anular, ou seja,

$$Q(z) = Q'(0)(G(z) + \alpha E(z)) + Q''(0)E(z) + \bar{\beta}^4 Q(c)E(z-c)\mu(z-c) - \bar{\alpha} Q'(c)F(z-c)\mu(z-c) \quad (3.65)$$

onde $Q'(0)$, $Q''(0)$, $Q(c)$ e $Q'(c)$ vêm da solução do sistema indeterminado abaixo, pela atribuição de um valor arbitrário à incógnita $Q'(0)$

$$\begin{cases} a_{22}Q''(0) + a_{23}Q(c) + a_{24}Q'(c) = -a_{21}Q'(0) \\ a_{32}Q''(0) + a_{33}Q(c) + a_{34}Q'(c) = -a_{31}Q'(0) \\ a_{42}Q''(0) + a_{43}Q(c) + a_{44}Q'(c) = -a_{41}Q'(0) \end{cases} \quad (3.70)$$

No sistema acima $a_{ij} = a_{ij}(\Omega, \omega)$ são os termos da matriz de (3.69).

Aplicando-se a regra de Cramer temos:

$$Q''(0) = \frac{\Delta Q''(0)}{\Delta}; Q(c) = \frac{\Delta Q(c)}{\Delta}; Q'(c) = \frac{\Delta Q'(c)}{\Delta}; \quad (3.71)$$

onde:

$$\Delta Q'''(0) = \begin{vmatrix} -a_{21}Q'(0) + a_{23} + a_{24} \\ -a_{31}Q'(0) + a_{33} + a_{34} \\ -a_{41}Q'(0) + a_{43} + a_{44} \end{vmatrix}; \Delta Q(c) = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}Q'(0) + a_{24} \\ a_{32} - a_{31}Q'(0) + a_{34} \\ a_{42} - a_{41}Q'(0) + a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\Delta Q'(c) = \begin{vmatrix} a_{22} + a_{23} - a_{21}Q'(0) \\ a_{32} + a_{33} - a_{31}Q'(0) \\ a_{42} + a_{43} - a_{41}Q'(0) \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{32} + a_{33} + a_{34} \\ a_{42} + a_{43} + a_{44} \end{vmatrix} \quad (3.72)$$

Chamando de $\Delta\alpha_{ij}$ o determinante de 3ª ordem obtido pela eliminação da linha i e da coluna j do determinante principal, a expressão abaixo define o modo natural de vibração do rotor flexível.

Equação da Elástica

$$Q_n(Z) = Q'_n(0) \left((G(z) + \alpha E(z)) - \frac{\Delta\alpha_{12}}{\Delta\alpha_{11}} E(z) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\alpha_{13}}{\Delta\alpha_{11}} \bar{\beta}^4 E(z-c)\mu(z-c) - \frac{\Delta\alpha_{14}}{\Delta\alpha_{11}} \bar{\alpha} F(Z-c)\mu(Z-c) \right) \quad (3.70)$$

$$\Delta Q'''(0) = -(\Delta\alpha_{12}) \cdot Q'(0); \quad \Delta Q(c) = -(\Delta\alpha_{13}) \cdot Q'(0); \quad \Delta Q'(c) = -(\Delta\alpha_{14}) \cdot Q'(0)$$

onde n representa o n-ésimo autovetor linearmente independente da série infinita.

O efeito giroscópio não acopla os modos de vibração do rotor. nem as equações do movimento (autovetores giroscópicos são linearmente independentes)

IV FREQUÊNCIAS/MODOS DE VIBRAÇÃO (HAMILTON):

A simulação de rotores é uma importante ferramenta de projeto, manutenção e diagnose dos problemas de turbomáquinas pela facilidade com que representa o rotor real, permitindo a fácil determinação das causas do mau funcionamento das máquinas.

No Capítulo III o equacionamento do rotor foi obtido através de um elemento diferencial do eixo. Neste Capítulo usaremos o princípio variacional para obtenção das equações de movimento e das condições de contorno. Com isto, objetiva-se elucidar problemas de interpretação de sinais e facilitar a introdução do Método de Elementos Finitos.

4.1 Hipóteses Simplificadoras do Modelo.

Estas hipóteses, lembradas a seguir (apresentado também na Seção 3.1), são importantes para a construção do modelo teórico do equacionamento do movimento.

- a) O material homogêneo e isotrópico, comportamento linear HOOKE ;
- b) Consideradas apenas deflexões laterais pequenas EULER ;
- c) Diâmetro pequeno em relação ao comprimento EULER-BERNOULLI ;
- d) Inclusão da inércia de rotação, cisalhamento desprezado TIMOSHENKO ;
- e) Seções planas permanecem planas após a deflexão; EULER ;
- f) Deformação inicial causada pelo peso próprio desprezível TIMOSHENKO ;
- g) Carregamento no plano do CG, deformações contidas no plano EULER ;
- h) Acoplamento do disco com o eixo em ângulo reto EULER ;
- i) O eixo balanceado AUTOVALOR.

Na prática todavia, todas estas restrições não representam nenhuma limitação real ao método de modelação rotodinâmica de turbomáquinas. A aplicação deste modelo teórico é plenamente adequada aos objetivos.

4.2 Parcelas da Energia de Flexão (Equilíbrio Dinâmico)

4.2.1 Energia Cinética do Eixo

Na Seção 2.6 é desenvolvida a expressão da energia cinética de um disco elementar, a qual é apresentada abaixo:

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \{m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)\} dZ \quad (2.19)$$

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_d \left(\left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) + I_d \left(\left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) + I_p \Omega^2 \right\} dZ \quad (2.26)$$

4.2.2 Energia Cinética do Impelidor

Na Seção 2.6 é desenvolvida a expressão da energia cinética dos impelidores, a qual é apresentada abaixo:

$$EC = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b M_i (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2) \quad (2.19)$$

$$EC = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left(\left(\frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left(\left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{pi} \Omega^2 \quad (2.26)$$

4.2.3 Energia Potencial do Eixo

Sabemos da resistência dos Materiais que a energia potencial elástica de uma viga deformada no plano é:

$$EP = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial Z^2} \right)^2 dZ, \text{ sendo } \eta(Z) = X(Z)i + Y(Z)j \quad (4.1)$$

$$EP = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right\} dZ \quad (4.2)$$

4.2.4) Energia Potencial das Molas EP

Sabemos que a energia potencial elástica de uma mola linear e de torção é dada por:

$$EP = \frac{1}{2}K_1X_0^2 + \frac{1}{2}K_2Y_0^2 + \frac{1}{2}K_3X_L^2 + \frac{1}{2}K_4Y_L^2 + \frac{1}{2}k_1\left(\frac{\partial X_0}{\partial Z}\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{\partial Y_0}{\partial Z}\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(\frac{\partial X_L}{\partial Z}\right)^2 + \frac{1}{2}k_4\left(\frac{\partial Y_L}{\partial Z}\right)^2 \quad (4.3)$$

A energia total armazenada no rotor em rotação dada por:

$$ET = EC + EP, \quad \text{onde} \quad (4.4)$$

$$EC = \text{soma das eq. (2.19)(2.26)(2.19.a)(2.26.a);} \quad EP = \text{soma das eq. (4.2)(4.3)} \quad (4.5)$$

Obtidas as parcelas de energia que participam do balanço dinâmico, várias são as formas de operá-las para a obtenção das equações de movimento. As duas formas mais comumente empregadas são: Equações de Lagrange e Princípio de Hamilton.

$$\delta \int_{\Delta T} \{(EC - EP) + W\} = 0 \quad \text{Princípio Variacional de Hamilton} \quad (4.6)$$

$$\delta \int_{\Delta T} \{(EC - EP)\} = 0 \quad \text{Princípio Hamilton Conservativos} \quad (4.7)$$

O princípio de Hamilton, por envolver um processo de minimização das energias reinantes e sendo um princípio variacional, é adequado para introduzir algumas das idéias que serão apresentadas no Capítulo V (Elementos Finitos).

4.3 Dedução da Equação Diferencial

A aplicação do princípio variacional nos conduz a um sistema de duas equações nas variáveis X e Y (referencial inercial - amplitudes das coordenadas do eixo fletido). Estas equações são acopladas pelo termo do efeito giroscópico, uma vez que uma flexão no plano YZ produz um carregamento dinâmico na direção do plano XZ.

Para chegarmos à equação diferencial do movimento, faremos a integração por partes das equações (4.6), até que apareça a variação elementar das variáveis deslocamento δX e δY . A integração por partes é representada por:

$$\int_{\Delta T} \{u.\delta v\} = u.v - \int_{\Delta T} \{v.\delta u\} \quad \text{Integração por partes} \quad (4.8)$$

A utilização da variável complexa auxiliar introduzida no Capítulo III $\eta = X + iY$ permite, junto com a separação de variáveis, reduzir as duas equações diferenciais parciais de movimento para uma única equação diferencial ordinária linear de quarta ordem, conforme anteriormente visto.

4.3.1) Energia Cinética de Translação/Rotação do Eixo

Integrando por partes a energia cinética de translação do eixo e aplicando o Princípio de Hamilton à energia, temos:

$$2.19) \quad EC = \frac{1}{2} \int_0^L \{m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)\} \delta Z \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L 2 \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \right\} \delta t = 0 \quad (4.9)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left\{ -m(\ddot{X}\delta X + \ddot{Y}\delta Y) \right\} \delta t \delta Z \Rightarrow \text{Equação Diferencial} \quad (4.10)$$

Condições de Contorno inexistentes

Integrando por partes a energia cinética de rotação do eixo e aplicando Hamilton à energia, temos:

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_d \left(\left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) + I_d \left(\left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) + I_p \Omega^2 \right\} \delta Z \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} \left\{ I_d \left(\frac{\partial \dot{Y}^2}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) + I_d \left(\frac{\partial \dot{X}^2}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) + I_p \Omega^2 \right\} \partial Z \delta \alpha = 0 \quad (4.11)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} I_d \left(\frac{\partial \dot{Y}^2}{\partial Z} + \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial Z} + I_p \Omega^2 \right) \partial Z \delta \alpha + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} I_d \left(2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \partial Z \delta \alpha = 0 \quad (4.12)$$

Esta parcela de energia irá compor o termo $\frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial^2 Z} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right)$ da equação diferencial deduzida no Capítulo III e mostrada a seguir:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m\ddot{\eta} + M\dot{\eta} \delta(Z-C) - \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial^2 Z} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) - I_d \left(\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=C} \delta'(Z-C) = 0 \quad (3.48)$$

Procedendo à integração:

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} I_d \left(\frac{\partial \dot{Y}^2}{\partial Z} + \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial Z} + 2\Omega^2 \right) \right\} \partial Z \delta \alpha = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ I_d \left(-\frac{\overbrace{\partial \dot{Y}}^u}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \right\} \partial Z \delta \alpha = \quad (4.13)$$

$$I_d \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta \dot{Y} \Big|_0^L + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \dot{X} \Big|_0^L \right\} \partial t - I_d \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta Y + \left(\frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta X \right) \partial Z \delta \alpha = 0 \quad (4.14)$$

$$I_d \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} \right) \delta Y + \left(\frac{\partial^2 \ddot{X}}{\partial Z^2} \right) \delta X \right) \partial Z \delta \alpha \Rightarrow \quad \text{Equação Diferencial} \quad (4.15)$$

$$I_d \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta \dot{Y} \Big|_0^L + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \dot{X} \Big|_0^L \right\} \partial t \Rightarrow \quad \text{Condições de Contorno} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} I_d \left(2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \partial Z \delta \alpha = \\ & = I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_d \left(\frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \frac{\partial Y}{\partial Z} - \frac{\partial X}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \partial Z \delta \alpha = \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_d \left(\frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) \partial Z \delta t = \quad (4.18)$$

$$I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \dot{X} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \delta \dot{X} + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta Y \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \delta Y \right\} \partial t = \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow 2I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \partial X - \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \partial Y \right) \partial Z \delta t + \quad (4.20)$$

$$+ I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \dot{X} \Big|_0^L - \frac{\partial X}{\partial Z} \delta \dot{Y} \Big|_0^L + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta Y \Big|_0^L - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta X \Big|_0^L \right\} \partial t = 0$$

$$2I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial Z^2} \partial X - \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \partial Y \right) \partial Z \delta t \quad \text{Equação Diferencial} \quad (4.21)$$

$$I_d \Omega \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \dot{X} \Big|_0^L - \frac{\partial X}{\partial Z} \delta \dot{Y} \Big|_0^L + \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta Y \Big|_0^L - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta X \Big|_0^L \right\} \partial t \quad \text{Condições de Contorno} \quad (4.22)$$

4.3.2) Energia Cinética de Translação/Rotação do Impelidor

Integrando por partes a energia cinética de translação do impelidor e aplicando Hamilton à energia, temos:

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \{m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)\} \partial Z \quad (2.19)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \{M_i(\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2)\} \delta t = 0 \quad (4.23)$$

Equação Diferencial

$$\sum_{i=1}^b \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{-M_i \ddot{X}_i \Delta(Z-Z_i) \delta X - M_i \ddot{Y}_i \Delta(Z-Z_i) \delta Y\} \partial Z \delta t \quad \text{Equação Diferencial} \quad (4.24)$$

Condições de Contorno Naturais inexistentes

Integrando por parte a energia cinética de rotação do impelidor e aplicando Hamilton à energia temos:

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_d \left(\left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) + I_d \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) + I_p \Omega^2 \right\} \partial Z \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left\{ \left(\frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \frac{\partial X_i}{\partial Z} \right) + I_{di} \left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial Y_i}{\partial Z} \right) + I_{di} \Omega^2 \right\} \partial Z \delta = 0 \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left\{ \left(\left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega^2 \right) \right\} \partial Z \partial t + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left\{ \left(2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial Y_i}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \frac{\partial X_i}{\partial Z} \right) \right\} \partial Z \partial t \quad (4.27)$$

Esta parcela de energia irá compor o termo $\sum_1^b I_{di} \Delta'(Z-Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right)$

da equação diferencial deduzida anteriormente e mostrada a seguir:

$$-EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m \ddot{\eta} - \sum_1^b M_i \ddot{\eta}_i \Delta(Z-Z_i) + I_d \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) + \sum_1^b I_{di} \Delta'(Z-Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) = 0 \quad (4.28)$$

Procedendo a integração

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left\{ \left(\left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega^2 \right) \right\} \partial Z \partial t = \quad (4.29)$$

$$\sum_{i=1}^b I_{di} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\Delta'(Z-Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} \right) \delta X + \Delta'(Z-Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} \right) \delta Y \right) \partial Z \partial t \dots \dots \quad (4.30)$$

$$\sum_{i=1}^b I_{di} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\Delta'(Z-Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} \right) \delta X + \Delta'(Z-Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} \right) \delta Y \right) \partial Z \partial t \quad \text{Equação Diferencial} \quad (4.31)$$

Condições de Contorno Naturais inexistentes

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left\{ \left(2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial Y_i}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \frac{\partial X_i}{\partial Z} \right) \right\} \partial Z \partial t = 0 \Rightarrow \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_{di} \Omega \left(\Delta(Z - Z_i) \frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} + \Delta(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) \cdot \partial Z \cdot \partial t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_{di} \Omega \left(\Delta(Z - Z_i) \frac{\partial X}{\partial Z} \delta \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} - \Delta(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \partial Z \partial t \quad (4.33)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left\{ \left(2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial Y_i}{\partial Z} \right) \right\} \partial Z \partial t = 0 \Rightarrow \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow I_{di} \Omega \int_0^L \left[\int_{t_1}^{t_2} \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \delta X - \int_{t_1}^{t_2} \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \delta Y \right] \partial t \partial Z = 0 \Rightarrow \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow I_{di} \Omega \int_0^L \left[\int_{t_1}^{t_2} \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \delta X - \int_{t_1}^{t_2} \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \delta Y \right] \cdot \partial t \partial Z \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow 2I_{di} \Omega \int_0^L \left[\int_{t_1}^{t_2} \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \delta X - I_{di} \Omega \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \delta Y \right] \partial Z \delta \quad \text{Equação Diferencial} \quad (4.37)$$

Condições de Contorno Naturais inexistentes

4.3.3) Energia Potencial do Eixo

Aplicando o princípio de Hamilton e integrando por partes a energia potencial do eixo, tem-se:

$$EP = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right\} \partial Z \quad (4.2)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right] \partial Z \delta t \quad (4.38)$$

$$- EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right) \right] \partial Z \partial t = \quad (4.39)$$

Equação Diferencial

$$- EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^4 X}{\partial Z^4} \right) \delta X + \left(\frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} \right) \delta Y \right] \partial Z \delta t \quad (4.40)$$

Condições de Contorno Naturais inexistentes

$$-EI \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right) \delta \frac{\partial X}{\partial Z} \Big|_0^L - \delta X \left(\frac{\partial^3 X}{\partial Z^3} \right) \Big|_0^L + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right) \delta \frac{\partial Y}{\partial Z} \Big|_0^L - \delta Y \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3} \right) \Big|_0^L \right] dt \quad (4.41)$$

4.3.4) Energia Potencial das Molas

Aplicando o princípio de Hamilton e integrando por partes a energia potencial do eixo, tem-se:

$$EP = \frac{1}{2} K_1 X_0^2 + \frac{1}{2} K_2 Y_0^2 + \frac{1}{2} K_3 X_L^2 + \frac{1}{2} K_4 Y_L^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{\partial X_0}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{\partial Y_0}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left(\frac{\partial X_L}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2} k_4 \left(\frac{\partial Y_L}{\partial Z} \right)^2 \quad (4.3)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L -[EP] \delta Z dt = 0 \quad \text{onde} \quad K_1 = K_2; K_3 = K_4 \quad \text{e} \quad k_1 = k_2; k_3 = k_4 \quad (4.42)$$

Equação Diferencial de mola inexistente

Condições de Contorno de mola.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 K_j \Delta(Z - Z_j) (X^2 + Y^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 k_j \Delta(Z - Z_j) \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Z} \right)^2 \right] \right\} \delta Z \delta.t \quad (4.43)$$

Equação Diferencial de mola angular inexistente

Condições de Contorno de mola angular

$$- \sum_{j=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} K_j (X \delta X + Y \delta Y) \Big|_0^L - \sum_{j=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} k_j \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \delta \frac{\partial X}{\partial Z} + \frac{\partial Y}{\partial Z} \delta \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) \Big|_0^L \quad (4.44)$$

Escrevendo a equação diferencial em YZ , tem-se:

$$\int_0^{L/2} \int_{-l}^l \left\{ -EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} - m\ddot{Y} - \sum_1^b M_i \ddot{Y}_i \Delta(Z - Z_i) + \right\} dX d\tau dZ + \\ + \int_0^{L/2} \int_{-l}^l \left\{ +I_d \left(\frac{\partial^2 \ddot{Y}}{\partial Z^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial Z^2} \right) + \sum_1^b I_{di} \Delta'(Z - Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) \right\} dX d\tau dZ = 0 \quad (4.45)$$

Equação diferencial do movimento no espaço com $\eta = X + iY$ carga distribuída fica sendo dada por:

$$\int_0^{L/2} \int_{-l}^l \left\{ -EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m\ddot{\eta} - \sum_1^b M_i \ddot{\eta}_i \Delta(Z - Z_i) + \right\} dX d\tau dZ + \\ + \int_0^{L/2} \int_{-l}^l \left\{ +I_d \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) + \sum_1^b I_{di} \Delta'(Z - Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \right\} dX d\tau dZ = 0 \quad (4.46)$$

onde:

- | | |
|--|--|
| $EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4}$ | força de reação elástica; |
| $m\ddot{\eta}$ | força centrífuga devida à precessão do eixo; |
| $M\ddot{\eta}_i \Delta(Z - C)$ | força centrífuga de precessão do disco; |
| $\frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2}$ | inércia de rotação de um elemento de eixo; |
| $I_d \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} \Big _{Z=C} \Delta'(Z - Z_i)$ | inércia de rotação do disco; |
| $\frac{mR^2}{4} \cdot 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2}$ | efeito giroscópico devido ao elemento de eixo; |
| $I_d \cdot 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \Big _{Z=C} \Delta'(Z - Z_i)$ | efeito giroscópico devido ao disco. |

4.4 Solução da Equação Diferencial

4.4.1) Preparação das Equações

Em se tratando de um problema conservativo de vibração natural, devido à ausência de forças externas, devemos tentar uma solução harmônica (conforme seção 3.1.3.1). Supomos, portanto, para a elástica do rotor, a forma complexa com separação das variáveis Z e t ; $\eta = X + iY$; $\eta(Z, t) = Q(Z) \cdot e^{i\omega t}$; considerando que $Q(Z)$ pode ser complexa (não plana), $Q(Z) = q_1(Z) + iq_2(Z)$

A substituição de $\eta(Z, t) = Q(Z) \cdot e^{i\omega t}$ elimina a variável tempo t , o que indica que o movimento é realmente oscilatório, como suposto anteriormente. Então:

$$\dot{\eta} = i\omega Q e^{i\omega t}, \quad \ddot{\eta} = -i\omega^2 Q e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} = \frac{\partial^4 Q}{\partial Z^4} e^{i\omega t}$$

$$EI \frac{\partial^4 Q}{\partial Z^4} - m\omega^2 Q - \sum_1^b M_i \omega^2 Q \Delta(Z - Z_i) + \frac{mR^2}{4} (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} + \sum_1^b I_{di} \Delta'(Z - Z_i) (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{\partial Q}{\partial Z} = 0 \quad (4.47)$$

Sendo ω a precessão do rotor e $Q(Z)$ a equação da linha elástica do eixo em movimento harmônico, introduzindo os parâmetros a dimensionais deduzidos abaixo, tem-se: $Z \Rightarrow 0 < z < l$,

Fazendo $z = \frac{Z}{l}$, sendo $0 \leq z \leq 1$, $z_i = \frac{Z_i}{l}$ e

$$\frac{\partial Q}{\partial Z} = \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{l} \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{l} Q' ; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} = \frac{1}{l^2} Q'' ; \quad \frac{\partial^3 Q}{\partial Z^3} = \frac{1}{l^3} Q''' ; \quad \frac{\partial^4 Q}{\partial Z^4} = \frac{1}{l^4} Q^{iv} ;$$

$$\Delta(Z - Z_i) = \frac{1}{l} \Delta^*(z - z_i) ; \quad \Delta'(Z - Z_i) = \frac{1}{l^2} \Delta'^*(z - z_i) \quad (4.48)$$

$$Q^{iv} - \frac{m\omega^2 l^4}{EI} Q - \frac{M\omega^2 l^3}{EI} Q \Delta^*(z - z_i) + \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) Q'' + \frac{I_d l}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) Q' \Big|_{z=c} \Delta'^*(z - z_i) = 0 \quad (4.49)$$

suprimindo o "*" em $\Delta^*(z - z_i)$ e $\Delta'^*(z - z_i) = 0$, e como os coeficientes são reais

($Q(z)$ é real), logo depreende-se que a elástica $Q(Z) = q_1(Z) + i q_2(Z)$ está no plano e os autovetores são linearmente independentes. Reescrevendo a equação (4.23) obtemos:

$$Q^{iv} + \alpha Q'' + \sum_1^b \bar{\alpha}_i \Delta'(z - z_i) Q' - \beta^4 Q - \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 \Delta(z - z_i) Q = 0 \quad (4.50)$$

onde:

$$\alpha = \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) ; \quad \beta^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI} ; \quad \bar{\alpha}_i = \frac{I_{di} l}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) ; \quad \bar{\beta}_i^4 = \frac{M_i \omega^2 l^3}{EI}$$

Este problema já foi resolvido na seção 3.2.2 para condições de contorno

$$\text{simplicadas: } \eta(0) = 0 ; \quad \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} \right|_{z=0} = 0 ; \quad \eta(1) = 0 ; \quad \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} \right|_{z=l} = 0$$

4.4.2) Condições de Contorno com Mola

Este procedimento já foi realizado na seção 3.1.2.2. Novamente, para determinar o cortante na extremidade com mola, usamos as equações já anteriormente deduzidas, para obter.

$$-K\eta = -EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial Z^3} + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} - 2j\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) \quad (3.26) \quad \text{E} \quad (3.28) \quad EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial Z^2} = -K \frac{\partial \eta}{\partial Z} \quad (4.51)$$

Aplicando-se a separação de variáveis e a adimensionalização, podemos reescrever a equação com suas condições de contorno, como segue:

$$Q^{iv} + \alpha Q'' + \sum_1^b \bar{\alpha}_i \Delta'(z - z_i) Q' - \beta^4 Q - \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 \Delta(z - z_i) Q = 0 \quad (4.52)$$

$$Q''' = \frac{Kl^3}{EI} Q - \alpha Q' ; \quad = \quad Q''' = \Gamma Q - \alpha Q' ; \quad (Z = 0; 1) \quad \Gamma = \frac{Kl^3}{EI} \quad (4.53)$$

$$Q'' = -\frac{kl}{EI} Q' ; \quad = \quad Q'' = -\gamma Q' ; \quad (Z = 0; 1) \quad \gamma = \frac{kl}{EI} \quad (4.54)$$

Para simular o comportamento dinâmico do rotor, temos que resolver a equação diferencial com as condições de contorno da equação (4.54).

4.4.3) Solução da Equação Diferencial de Movimento

A solução da equação diferencial é desenvolvida a seguir:

$$Q^{iv} + \alpha Q'' + \sum_1^b \bar{\alpha}_i \Delta'(z - z_i) Q' - \beta^4 Q - \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 \Delta(z - z_i) Q = 0 \quad (4.55)$$

$$Q''' = \frac{Kl^3}{EI} Q - \alpha Q' = Q''' = \Gamma Q - \alpha Q' \quad ; \quad (Z = 0;1) \quad \Gamma = \frac{Kl^3}{EI}$$

$$Q'' = -\frac{kl}{EI} Q' = Q'' = -\gamma Q' \quad ; \quad (Z = 0;1) \quad \gamma = \frac{kl}{EI}$$

Adimensionais: $\alpha = \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$; $\beta^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}$; $\bar{\alpha}_i = \frac{I_{di} l}{EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega)$

$$\bar{\beta}_i^4 = \frac{M_i \omega^2 l^3}{EI} ; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} ; \quad \delta = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^4}} ; \quad \Gamma = \frac{Kl^3}{EI} ; \quad \gamma = \frac{kl}{EI} ;$$

Esta equação de movimento simula o rotor físico apresentado na FIG-4.1.

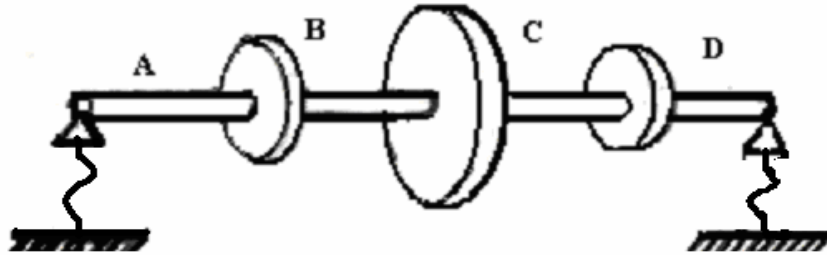


FIG 4.1 ROTOR ESQUEMÁTICO SUPORTADO POR MOLA

As frequências e os modos naturais de vibração do rotor bi-apoiado da FIG-4.1 são obtidos da solução da equação (4.55).

A equação (4.55) não é de solução imediata, pois os coeficientes não são constantes em $0 < z < 1$.

Tratando-se de uma equação diferencial ordinária linear de quarta ordem com coeficientes variáveis, a solução será obtida com o auxílio da transformada de Laplace, conforme NOWACKI, (1963). A transformada de uma função $G(z)$ é definida no Capítulo III como sendo.

$$L\{G(Z)\} = \int_0^{\infty} e^{-SZ} G(S) \partial Z = \bar{G}(S) = \bar{G} \quad (4.56)$$

Multiplicando-se cada termo da equação (4.24) por $e^{-SZ} \partial Z$ e integrando-se de 0 a ∞ , passamos a ter:

$$L\{Q^{iv}\} - \beta^4 L\{Q\} - \bar{\beta}^4 L\{Q\delta(z-c)\} + \alpha L\{Q''\} + \bar{\alpha} L\{Q'\delta'(z-c)\} = 0 \quad (4.57)$$

Aplicando-se a tabela de transformada de Laplace podemos escrever a equação algébrica da transformada de $Q(z)$ como: (Apêndice B).

$$(S^4 + \alpha S^2 - \beta^4) \bar{Q} = Q(0)(S^3 + \alpha S) + Q'(0)(S^2 + \alpha) + S Q''(0) + Q'''(0) + \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 Q(z_i) e^{-z_i S} - \sum_1^b \bar{\alpha}_i Q'(z_i) S e^{-z_i S} \quad (4.58)$$

Conforme NOWACKI, (1963) e rearranjando $\bar{Q}(s)$, tem-se:

$$\bar{Q} = \frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} (Q(0)(S^3 + \alpha S) + Q'(0)(S^2 + \alpha)) + \frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} \left(S Q''(0) + Q'''(0) + \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 Q(z_i) e^{-z_i S} - \sum_1^b \bar{\alpha}_i Q'(z_i) S e^{-z_i S} \right) \quad (4.59)$$

Sabendo-se que: $(S^4 + \alpha S^2 - \beta^4) = (S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)$ e que

$$\frac{1}{(S^2 - \delta^2)(S^2 + \varepsilon^2)} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{1}{(S^2 - \delta^2)} - \frac{1}{(S^2 + \varepsilon^2)} \right) \quad (4.60)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}(S) = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} & \left\{ Q(0) \left(\frac{S^3}{S^2 - \delta^2} - \frac{S^3}{S^2 + \varepsilon^2} + \frac{\alpha S}{S^2 - \delta^2} - \frac{\alpha S}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \right. \\
& Q'(0) \left(\frac{S^2}{S^2 - \delta^2} - \frac{S^2}{S^2 + \varepsilon^2} + \frac{\alpha}{S^2 - \delta^2} - \frac{\alpha}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + Q''(0) \left(\frac{S}{S^2 - \delta^2} - \frac{S}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \\
& + Q'''(0) \left(\frac{1}{S^2 - \delta^2} - \frac{1}{S^2 + \varepsilon^2} \right) + \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 Q(z_i) \left(\frac{e^{-z_i S}}{S^2 - \delta^2} - \frac{e^{-z_i S}}{S^2 + \varepsilon^2} \right) \\
& \left. - \sum_1^b \bar{\alpha}_i Q'(z_i) \left(\frac{S e^{-z_i S}}{S^2 - \delta^2} - \frac{S e^{-z_i S}}{S^2 + \varepsilon^2} \right) \right\} \quad (4.61)
\end{aligned}$$

Aplicando o tratamento inverso deLaplace, à equação anterior e simplificando, vem:

$$\begin{aligned}
Q(z) = Q(0) & \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cosh \delta z + \varepsilon^2 \cos \varepsilon z) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \cosh \delta z - \varepsilon \cos \varepsilon z) \right) + \\
Q'(0) & \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \sinh \delta z + \varepsilon \sin \varepsilon z) + \frac{\alpha}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \right) + \\
Q''(0) & \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) \right) + Q'''(0) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \right) + \quad (4.62) \\
& \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 Q(z_i) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta(z-c)}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon(z-c)}{\varepsilon} \right) \mu(z-c) - \\
& \sum_1^b \bar{\alpha}_i Q'(z_i) \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta(z-c) - \cos \varepsilon(z-c)) \mu(z-c)
\end{aligned}$$

Observação: δ e ε são parâmetros adimensionais, $\mu(z-c)$ é a função degrau unitário. Objetivando a simplificação da equação (4.62), tem-se

$$E = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left(\frac{\sinh \delta z}{\delta} - \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon} \right) \quad (4.63)$$

$$E' = F = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\cosh \delta z - \cos \varepsilon z) \quad (4.64)$$

$$F' = G = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta \sinh \delta z + \varepsilon \sin \varepsilon z) \quad (4.65)$$

$$G' = H = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cosh \delta z + \varepsilon^2 \cos \varepsilon z) \quad (4.66)$$

$$H' = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\delta^3 \sinh \delta z + \varepsilon^3 \sin \varepsilon z) \quad (4.67)$$

Substituindo estes valores na equação (4.62), teremos a equação:

$$\begin{aligned}
Q(z) = & Q(0)(H + \alpha F) + Q'(0)(G + \alpha E) + Q''(0)F + Q'''(0)E + \\
& + \sum_1^n \bar{\beta}^4 Q(z_i)E(z - z_i)\mu(z - z_i) - \sum_1^n \bar{\alpha} Q'(z_i)F(z - z_i)\mu(z - z_i)
\end{aligned} \quad (4.68)$$

Esta é a forma mais geral da curva elástica do eixo, para quaisquer condições de contorno. Conforme já foi dito, esta curva é plana, pois seus coeficientes são reais.

4.4.3.1) Cálculo dos Coeficientes a Determinar

Deve-se agora calcular os coeficientes reais da equação diferencial (elástica)

$$Q(0), Q'(0), Q''(0), Q'''(0), Q(z_1), Q'(z_1), Q(z_2), Q'(z_2)$$

O sistema para cálculo das frequências naturais/elástica será constituído por

- 4 quatro condições de contorno que fornecem 4 equações
- $Q(z_i)$ em cada disco que fornece uma equação
- $Q'(z_i)$ em cada disco que fornece uma equação.

No total serão utilizadas $2n + 4$ equações que comporão um sistema de equações algébricas e exigirão a solução de um determinante de mesma ordem (pesquisa por valores singulares). Sendo:

$$\begin{aligned}
Q(z) = & Q(0)(H + \alpha F) + Q'(0)(G + \alpha E) + Q''(0)F + Q'''(0)E + \\
& + \sum_1^n \bar{\beta}^4 Q(z_i)E(z - z_i)\mu(z - z_i) - \sum_1^n \bar{\alpha} Q'(z_i)F(z - z_i)\mu(z - z_i)
\end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}
Q'(z) = & Q(0)(I + \alpha G) + Q'(0)(H + \alpha F) + Q''(0)G + Q'''(0)F + \\
& + \sum_1^n \bar{\beta}^4 Q(z_i)F(z - z_i)\mu(z - z_i) - \sum_1^n \bar{\alpha} Q'(z_i)G(z - z_i)\mu(z - z_i)
\end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
Q''(z) = & Q(0)(J + \alpha H) + Q'(0)(I + \alpha G) + Q''(0)H + Q'''(0)G + \\
& + \sum_1^n \bar{\beta}^4 Q(z_i)G(z - z_i)\mu(z - z_i) - \sum_1^n \bar{\alpha} Q'(z_i)H(z - z_i)\mu(z - z_i)
\end{aligned} \quad (4.71)$$

$$Q''(z) = Q(0)(L + \alpha I) + Q'(0)(J + \alpha H) + Q''(0)I + Q'''(0)H + \\ + \sum_1^n \bar{\beta}^4 Q(z_i)H(z - z_i)\mu(z - z_i) - \sum_1^n \bar{\alpha} Q'(z_i)I(z - z_i)\mu(z - z_i) \quad (4.72)$$

onde $I=H'$; $J=I'=H''$; $L=J'=I''=H'''$ e, aplicando-se as condições de contorno, pode-se montar o sistema de equações homogêneo abaixo:

$$Q'''(0) = \Gamma Q(0) - \alpha Q'(0); \quad (4.73)$$

$$Q''(0) = -\gamma Q'(0) ; \quad (4.74)$$

$$Q'''(1) = \Gamma Q(1) - \alpha Q'(1) ; \quad (4.75)$$

$$Q''(1) = -\gamma Q'(1) ; \quad (4.76)$$

$$Qz1 - Q(z1) = 0; \quad (4.77)$$

$$Q'z1 - Q'(z1) = 0; \quad (4.78)$$

$$Qz2 - Q(z2) = 0 ; \quad (4.79)$$

$$Q'z2 - Q'(z2) = 0 \quad (4.80)$$

$$Q(0)(L0 + \alpha I0) + Q'(0)(J0 + \alpha H0) + Q''(0)I0 + Q'''(0)H0 = \\ = \Gamma[Q0(H0 + \alpha F0) + Q'0(G0 + \alpha E0) + Q''0F0 + Q'''0E0] - \\ - \alpha[Q0(I0 + \alpha G0) + Q'0(H0 + \alpha F0) + Q''0G0 + Q'''0F0] \quad (4.81)$$

$$\text{Simplificando, vem } Q0[L0 + \alpha I0 - \Gamma H0 - \Gamma \alpha F0 + \alpha I0 + \alpha^2 G0] + \\ + Q'0[J0 + \alpha H0 - \Gamma G0 - \Gamma \alpha E0 + \alpha H0 + \alpha^2 F0] + \\ + Q''0[I0 - \Gamma F0 + \alpha G0] + Q'''0[H0 - \Gamma E0 + \alpha F0] = 0 \quad (4.82)$$

$$Q'''(0) = \Gamma Q(0) - \alpha Q'(0) \Rightarrow Q0[\alpha^2 G0 - \alpha \Gamma F0 + 2\alpha I0 - \Gamma H0 + L0] + \\ + Q'0[\alpha^2 F0 - \alpha \Gamma E0 + 2\alpha H0 - \Gamma G0 + J0] + \\ + Q''0[\alpha G0 - \Gamma F0 + I0] + Q'''0[\alpha F0 - \Gamma E0 + H0] = 0 \quad (4.83)$$

Procedendo-se igualmente para as outras equações obtém-se:

$$Q''(0) = -\gamma Q'(0) \Rightarrow Q0[\gamma \alpha G0 + \alpha H0 + \gamma I0 + J0] +$$

$$\begin{aligned}
& Q'0[\gamma\alpha F0 + \alpha G0 + \gamma H0 + I0] + \\
& Q''0[\gamma G0 + H0] + Q'''0[\gamma F0 + G0] = 0 \quad (4.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q''(1) = \Gamma Q(1) - \alpha Q'(1) \Rightarrow & Q0[\alpha^2 G1 - \alpha \Gamma F1 + 2\alpha I1 - \Gamma H1 + L1] + \\
& Q'0[\alpha^2 F1 - \alpha \Gamma E1 + 2\alpha H1 - \Gamma G1 + J1] + \\
& Q''0[\alpha G1 - \Gamma F1 + I1] + Q'''0[\alpha F1 - \Gamma E1 + H1] + \\
& Q(z1)\bar{\beta}^4[\alpha F(1-z1) - \Gamma E(1-z1) + H(1-z1)] + \\
& Q(z2)\bar{\beta}^4[\alpha F(1-z2) - \Gamma E(1-z2) + H(1-z2)] + \\
& Q'(z1)\bar{\alpha}1[-\alpha G(1-z1) + \Gamma F(1-z1) - I(1-z1)] + \\
& Q'(z2)\bar{\alpha}2[-\alpha G(1-z2) + \Gamma F(1-z2) - I(1-z2)] = 0 \quad (4.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q''(1) = -\gamma Q'(1) \Rightarrow & Q0[\gamma\alpha G1 + \alpha H1 + \gamma I1 + J1] + \\
& Q'0[\gamma\alpha F1 + \alpha G1 + \gamma H1 + I1] + Q''0[\gamma G1 + H1] + Q'''0[\gamma F1 + G1] + \\
& Q(z1)\bar{\beta}^4[\alpha F(1-z1) - \Gamma E(1-z1) + H(1-z1)] + \\
& Q(z2)\bar{\beta}^4[\alpha F(1-z2) - \Gamma E(1-z2) + H(1-z2)] + \\
& Q'(z1)\bar{\alpha}1[-\alpha G(1-z1) + \Gamma F(1-z1) - I(1-z1)] + \\
& Q'(z2)\bar{\alpha}2[-\alpha G(1-z2) + \Gamma F(1-z2) - I(1-z2)] = 0 \quad (4.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Qz1 - Q(z1) = 0 \Rightarrow & Q0[-Hz1 - \alpha Fz1] + Q'0[-Gz1 - \alpha Ez1] + \\
& Q''0[-Fz1] + Q'''0[-Ez1] + Qz1 \bullet 1 = 0 \quad (4.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'z1 - Q'(z1) = 0 \Rightarrow & Q0[-Iz1 - \alpha Gz1] + Q'0[-Hz1 - \alpha Fz1] + \\
& Q''0[-Gz1] + Q'''0[-Fz1] + Q'z1 \bullet 1 = 0 \quad (4.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Qz2 - Q(z2) = 0 \Rightarrow & Q0[-Hz2 - \alpha Fz2] + Q'0[-Gz2 - \alpha Ez2] + \\
& Q''0[-Fz2] + Q'''0[-Ez2] + Qz2 \bullet 1 \\
& + Q(z1)[-\bar{\beta}^4 E(z2-z1)\mu(z2-z1)] + \\
& Q'(z1)[\bar{\alpha}1 F(z2-z1)\mu(z2-z1)] = 0 \quad (4.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'z2 - Q'(z2) = 0 \Rightarrow & Q0[-Iz2 - \alpha Gz2] + Q'0[-Hz2 - \alpha Fz2] + \\
& Q''0[-Gz2] + Q'''0[-Fz2] + Q'z2 \bullet 1 + \\
& Q(z1)[-\bar{\beta}^4 F(z2-z1)\mu(z2-z1)] + \\
& Q'(z1)[\bar{\alpha}1 G(z2-z1)\mu(z2-z1)] = 0 \quad (4.90)
\end{aligned}$$

4.92	$Q(0)$	$Q'(0)$	$Q''(0)$	$Q'''(0)$	$Q(z_1)$	$Q'(z_1)$	$Q(z_2)$	$Q'(z_2)$
Eqc. 1	A 1,1	A 1,2	A 1,3	A 1,4	0	0	0	0
Eqc. 2	A 2,1	A 2,2	A 2,3	A 2,4	0	0	0	0
Eqc. 3	A 3,1	A 3,2	A 3,3	A 3,4	A 3,5	A 3,6	A 3,7	A 3,8
Eqc. 4	A 4,1	A 4,2	A 4,3	A 4,4	A 4,5	A 4,6	A 4,7	A 4,8
Eqc. 5	A 5,1	A 5,2	A 5,3	A 5,4	1	0	0	0
Eqc. 6	A 6,1	A 6,2	A 6,3	A 6,4	0	1	0	0
Eqc. 7	A 7,1	A 7,2	A 7,3	A 7,4	A 7,5	A 7,6	1	0
Eqc. 8	A 8,1	A 8,2	A 8,3	A 8,4	A 8,5	A 8,6	0	1

(4.92)

O matriz apresentada acima está associada a um sistema homogêneo de oitava ordem (8 equações e 8 incógnitas). Terá uma solução trivial $Q(0)=Q'(0)=Q''(0)=Q'''(0)=Q(z_1)=Q'(z_1)=Q(z_2)=Q'(z_2)=0$. Terá também outras soluções nos casos em que o determinante da matriz de coeficientes se anular.

Estamos diante de um sistema de equações algébricas homogêneo de oitava ordem (8 equações e 8 incógnitas), representado matricialmente por

$$[M] \{X\} = \{0\}, \text{ onde: } [M] \text{ é a matriz dos coeficientes} \quad (4.93)$$

$$\{X\}^T = \{Q(0)Q'(0)Q''(0)Q'''(0)Q(z_1)Q'(z_1)Q(z_2)Q'(z_2)\} \text{ e} \quad (4.94)$$

Este é um problema de autovalor. Os valores singulares de $[M]$ (autovalores), tais que $\text{Det}[M]=0$, permitirão a determinação dos componentes do vetor $\{X\}^T$ que, por sua vez definirá a forma da elástica (autovetor).

A matriz de coeficientes $[M]$ é formada por funções transcendentais e seu determinante se anulará em um número infinito de pares de valores de (Ω, ω) .

Definido o valor de Ω , existe um número infinito de valores de ω , capazes de anular $\text{Det}[M]=0$

Os valores de ω que anulam o determinante são as frequências naturais de vibração (autovalores) do sistema rotor e, para determiná-las, procede-se como segue:

- 1) Fixar um valor para o parâmetro Ω .
- 2) Dá-se valores continuamente ao parâmetro ω , até que $\text{DET}[M] = 0$.
(No presente trabalho selecionamos as três primeiras raízes somente). (veja a FIG-4.2)

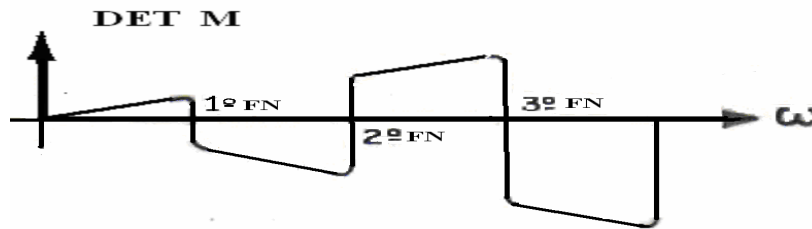


FIG 4.2 VALORES ω QUE ANULAM $\text{DET}[M]$ PARA $\Omega = Cte$

- 3) Dá-se novo valor para $\Omega = cte$ e repete-se a instrução item (2). Organiza-se, então, uma tabela esquemática, conforme mostrado na FIG-4.3.

$\Omega =$	ω_1	ω_2	ω_3
..... ∞ ∞ ∞ ∞
$\Omega = -2000$	$\omega_{1,-2000}$	$\omega_{2,-2000}$	$\omega_{3,-2000}$
$\Omega = -1000$	$\omega_{1,-1000}$	$\omega_{2,-1000}$	$\omega_{3,-1000}$
$\Omega = 0$	$\omega_{1,0}$	$\omega_{2,0}$	$\omega_{3,0}$
$\Omega = 1000$	$\omega_{1,1000}$	$\omega_{2,1000}$	$\omega_{3,1000}$
$\Omega = 2000$	$\omega_{1,2000}$	$\omega_{2,2000}$	$\omega_{3,2000}$
..... ∞ ∞ ∞ ∞

FIG 4.3 TABELA ESQUEMÁTICA FREQUÊNCIAS NATURAIS

4.4.3.3) Definição da Elástica: Autovetor

Re-escrevendo-se a equação (4.30), vem:

$$Q(z) = Q(0)(H + \alpha F) + Q'(0)(G + \alpha E) + Q''(0)F + Q'''(0)E + \sum_1^n \bar{\beta}^4 Q(z_i)E(z - z_i)\mu(z - z_i) - \sum_1^n \bar{\alpha} Q'(z_i)F(z - z_i)\mu(z - z_i) \quad (4.68)$$

Calculando-se os valores $Q(0)$, $Q'(0)$, $Q''(0)$, $Q'''(0)$, $Q(z1)$, $Q'(z1)$, $Q(z2)$, $Q'(z2)$ que satisfazem a equação (4.12), teremos a elástica definida, para cada valor de frequência natural.

Para calcular $Q(0)$, $Q'(0)$, $Q''(0)$, $Q'''(0)$, $Q(z1)$, $Q'(z1)$, $Q(z2)$, e $Q'(z2)$ arbitramos $Q(0)$ e usando a regra de Cramer resolvemos os sistemas algébricos:

$$Q(0) = \frac{\Delta Q(0)}{\Delta}; Q'(0) = \frac{\Delta Q'(0)}{\Delta}; Q''(0) = \frac{\Delta Q''(0)}{\Delta};$$

$$Q'''(0) = \frac{\Delta Q'''(0)}{\Delta}; Q(z1) = \frac{\Delta Q(z1)}{\Delta}; Q'(z1) = \frac{\Delta Q'(z1)}{\Delta};$$

$$Q(z2) = \frac{\Delta Q(z2)}{\Delta}; Q'(z2) = \frac{\Delta Q'(z2)}{\Delta}; \quad (4.95)$$

A Matriz $\Delta = \Delta\alpha_{11}$ é a Matriz obtida da equação (4.92) pela eliminação da linha 1 e da coluna 1.

A 2,2	A 2,3	A 2,4	0	0	0	0
A 3,2	A 3,3	A 3,4	A 3,5	A 3,6	A 3,7	A 3,8
A 4,2	A 4,3	A 4,4	A 4,5	A 4,6	A 4,7	A 4,8
A 5,2	A 5,3	A 5,4	1	0	0	0
A 6,2	A 6,3	A 6,4	0	1	0	0
A 7,2	A 7,3	A 7,4	A 7,5	A 7,6	1	0
A 8,2	A 8,3	A 8,4	A 8,5	A 8,6	0	1

(4.96)

$$\Delta Q'(0) = -\Delta\alpha_{12}, \quad \Delta Q''(0) = -\Delta\alpha_{13}, \quad (4.97)$$

O termo $\Delta\alpha_{ij}$ é um determinante de 7ª ordem gerado a partir da equação (4.96) pela eliminação da linha i e da coluna j .

A equação da elástica (4.68) pode, então, ser reescrita como:

Equação da Elástica

$$\begin{aligned}
Q_n(Z) = Q_n(0) & \left((H(z) + \alpha F(z)) - \frac{\Delta\alpha_{12}}{\Delta\alpha_{11}} (G(z) + \alpha E(z)) + \frac{\Delta\alpha_{13}}{\Delta\alpha_{11}} F(z) - \frac{\Delta\alpha_{14}}{\Delta\alpha_{11}} E(z) \right) + \\
& + \left(\frac{\Delta\alpha_{15}}{\Delta\alpha_{11}} \bar{\beta}_1^4 E(z-z1)\mu(z-z1) - \frac{\Delta\alpha_{16}}{\Delta\alpha_{11}} \bar{\alpha}_1 F(z-z1)\mu(z-z1) \right) + \\
& + \left(\frac{\Delta\alpha_{17}}{\Delta\alpha_{11}} \bar{\beta}_2^4 E(z-z2)\mu(z-z2) - \frac{\Delta\alpha_{18}}{\Delta\alpha_{11}} \bar{\alpha}_2 F(z-z2)\mu(z-z2) \right) \quad (4.98)
\end{aligned}$$

onde n representa o n -ésimo autovetor linearmente independente da série infinita.

O efeito giroscópio não acopla os modos de vibração do rotor. nem as equações do movimento (autovetores giroscópicos são linearmente independentes)

4.5 Resultados Obtidos dos Cálculos de Computador

Os programas de computador foram rodados com para um rotor com as características seguintes:

Rotor bi-apoiado

Diâmetro do eixo = 0,05 m

Comprimento do eixo = 1,0 m

Material do eixo = aço, Disco localizado no centro do eixo,

A figura 4.4 mostra como varia a primeira frequência natural do rotor com o diâmetro do disco.

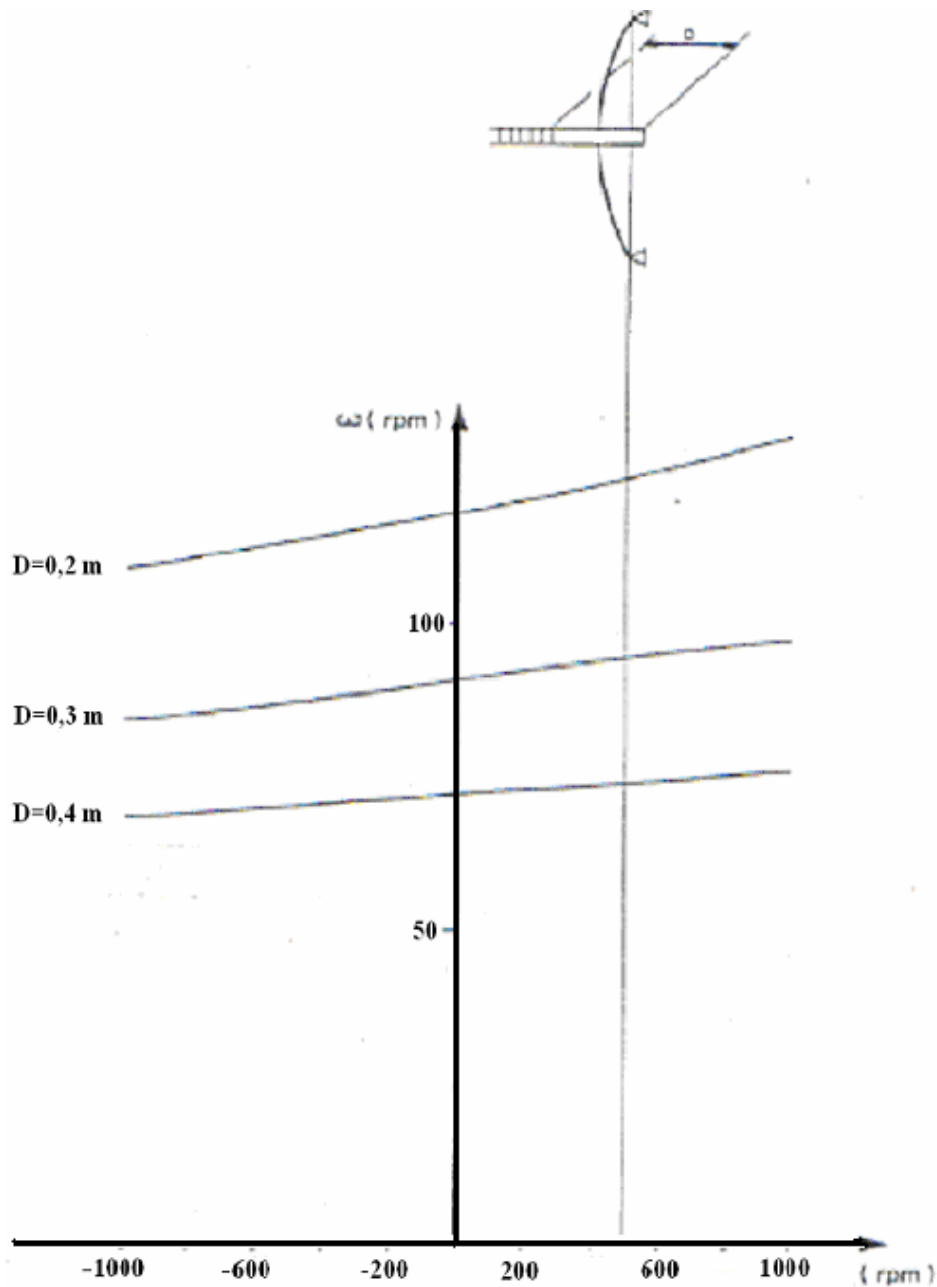


FIG 4.4 VARIAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COM O DIÂMETRO DO DISCO

A figura 4.5 mostra como varia a segunda frequência natural do rotor com o diâmetro do disco. Mostra também a mudança do modo de vibração causada pelo efeito giroscópico, efeito este que produz resultados no plano de deformação do eixo. O efeito giroscópico também enrijece o eixo neste caso.

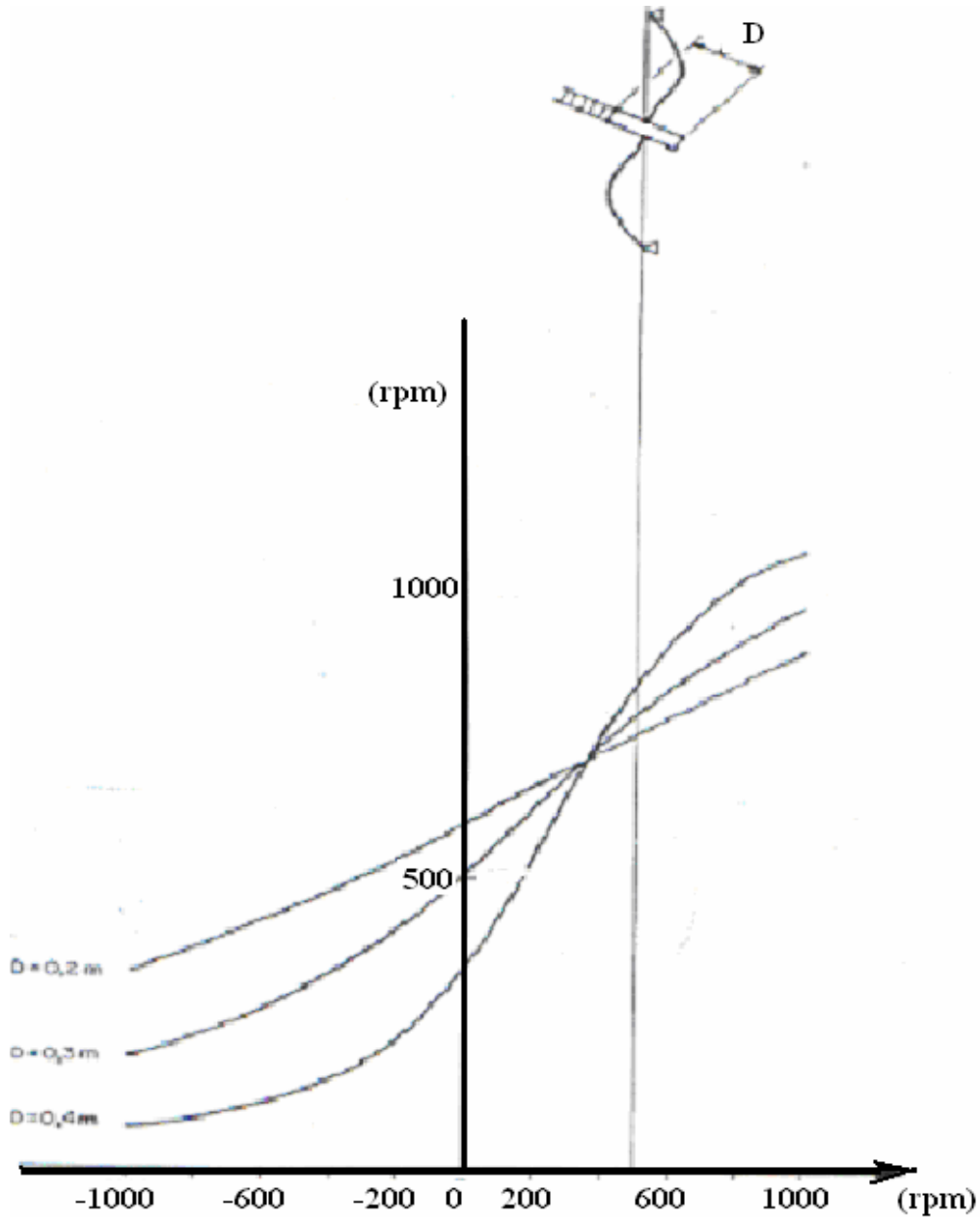


FIG 4.5 VARIAÇÃO SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL COM O DIÂMETRO DO DISCO

A figura 4.6 apresenta a primeira frequência natural do mesmo rotor, apenas com o disco colocado em diferentes posições, fora do centro. Como nestas posições o disco experimenta rotação transversal oscilante, há uma variação acentuada das frequências naturais do eixo com a rotação e com a posição do disco. O exemplo mostra ainda a elástica deformada no plano.

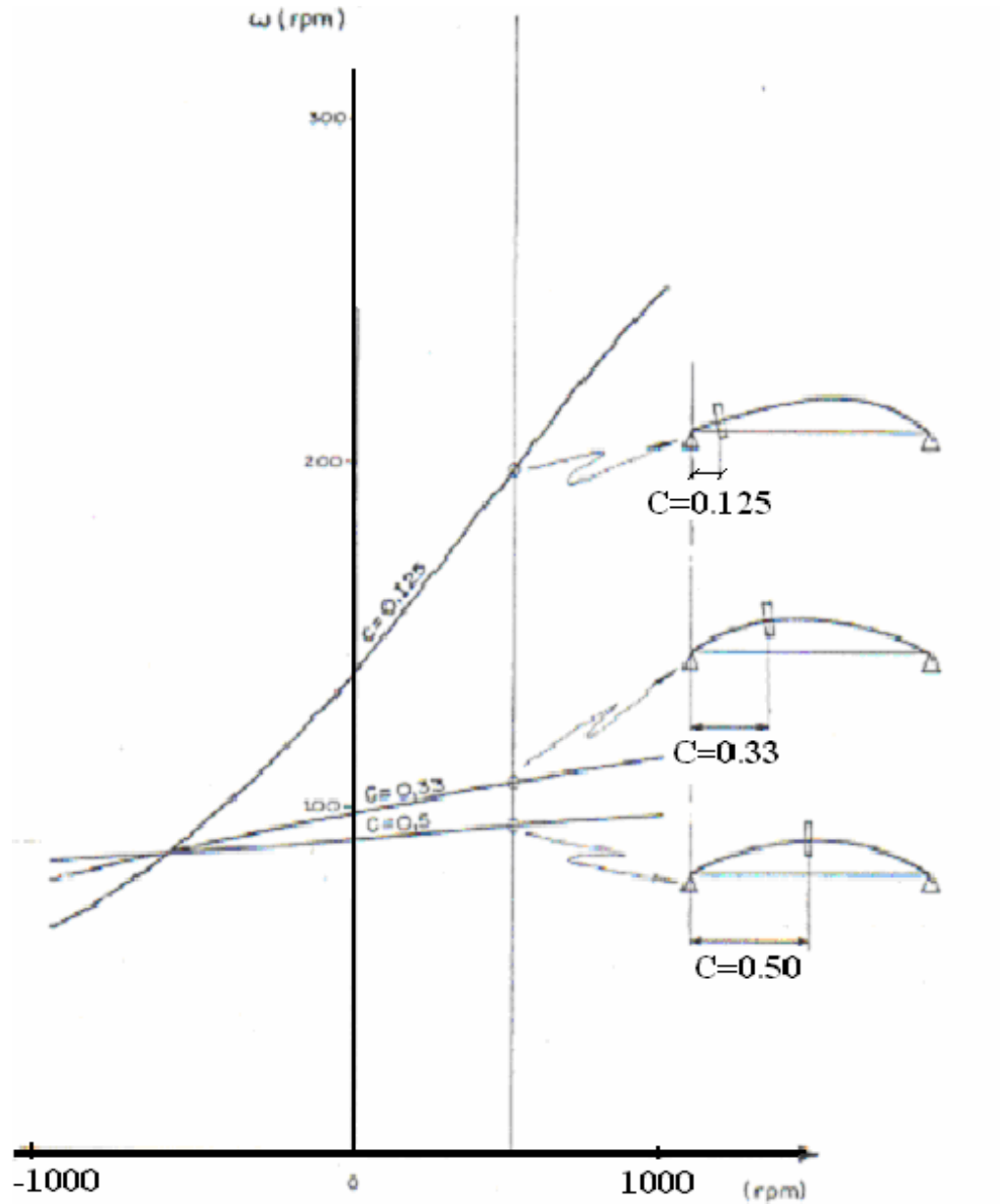


FIG 4.6 VARIAÇÃO PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COM A POSIÇÃO DO DISCO

A figura 4.7 apresenta as curvas de variação da segunda frequência natural do rotor, com o disco colocado em diferentes posições fora do centro. Como nestas posições o disco experimenta rotação transversal oscilante, há uma variação acentuada das segundas frequências naturais do eixo com a rotação e com a posição do disco. O exemplo mostra ainda a elástica deformada no plano.

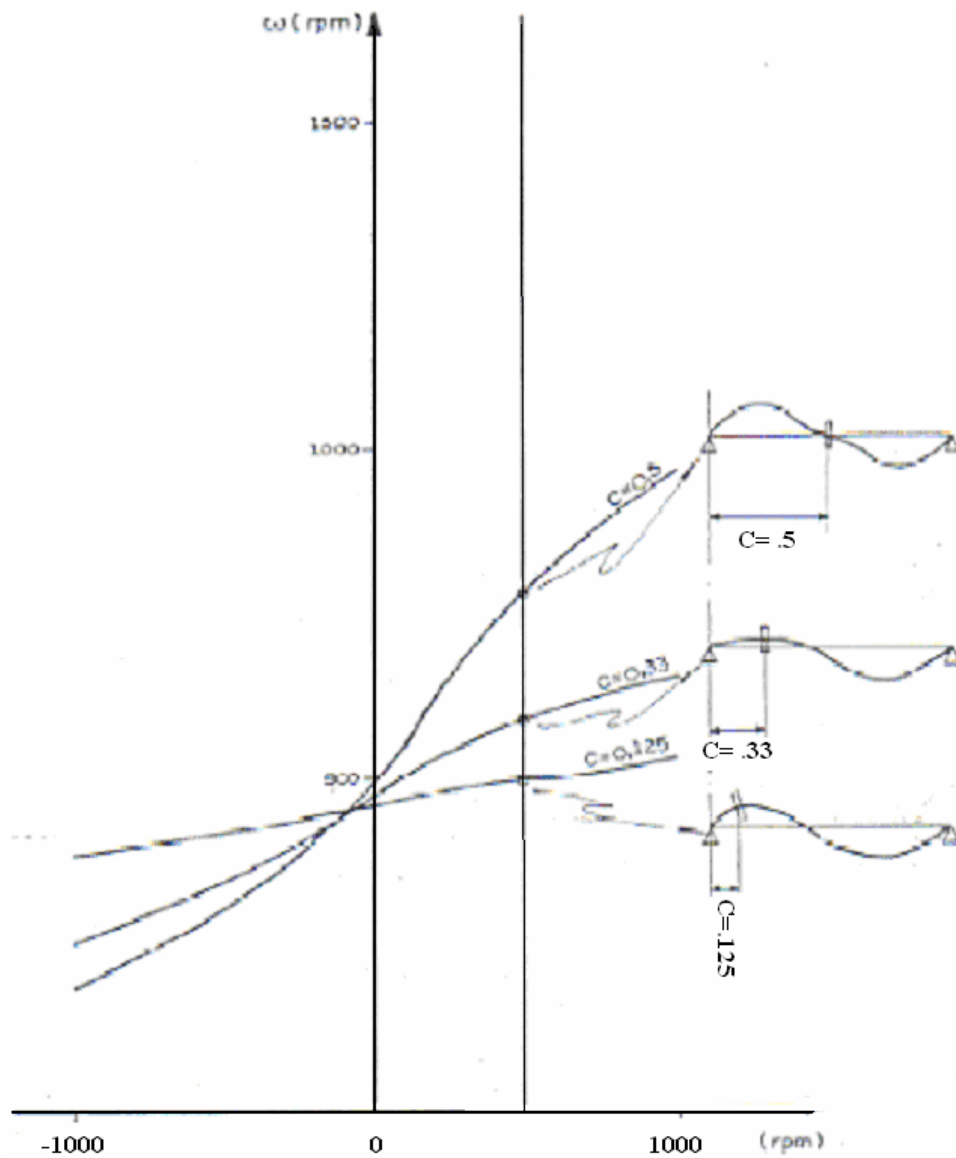


FIG 4.7 VARIAÇÃO SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL COM A POSIÇÃO DO DISCO

A figura 4.8 apresenta as curvas de variação da terceira frequência natural do rotor, com o disco colocado em diferentes posições fora do centro. Há uma variação acentuada das terceiras frequências naturais do eixo com a rotação e com a posição do disco. A elástica deformada está no plano.

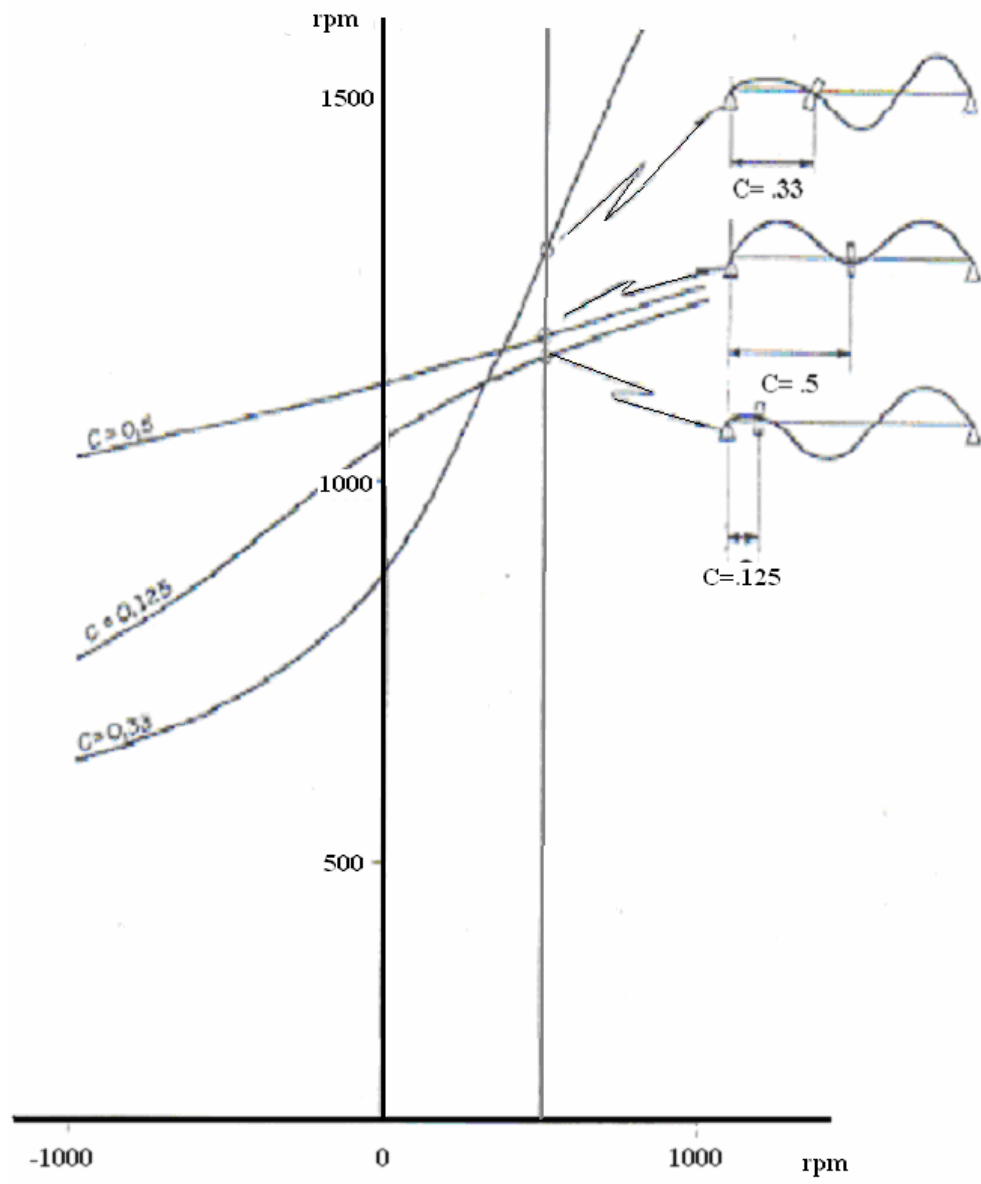


FIG 4.8 VARIAÇÃO TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL COM A POSIÇÃO DO DISCO

A figura 4.9 apresenta as variações das curvas de frequência natural do rotor em um cenário de elevada rigidez do mancal ($K \approx 10^9$). Mostra a variação da primeira e da segunda frequências naturais. São mostradas também as velocidades críticas, em que precessão é igual a rotação.

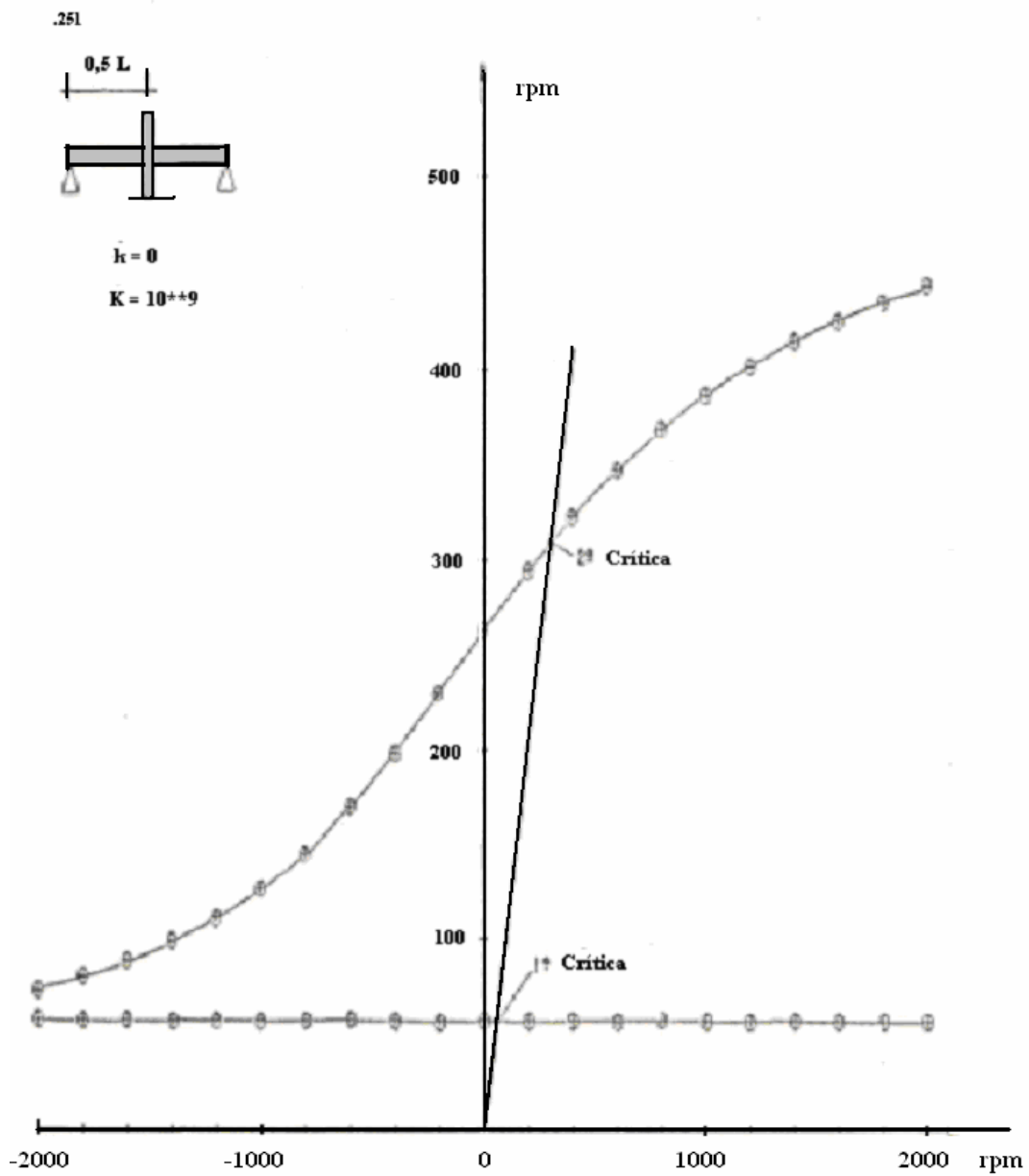


FIG 4.9 VARIAÇÃO 1 e 2 FREQUÊNCIA NATURAL COM A ROTAÇÃO PARA $K \approx 10^9$

A figura 4.10 apresenta as variações das curvas de primeira frequência natural do rotor para diferentes valores de K do mancal: $K = 2 \times 10^6$, $K = 4 \times 10^6$ e $K = 10^9$ e com o rotor deslocado do centro. São mostradas também as velocidades críticas A, B e C para diferentes valores de K .

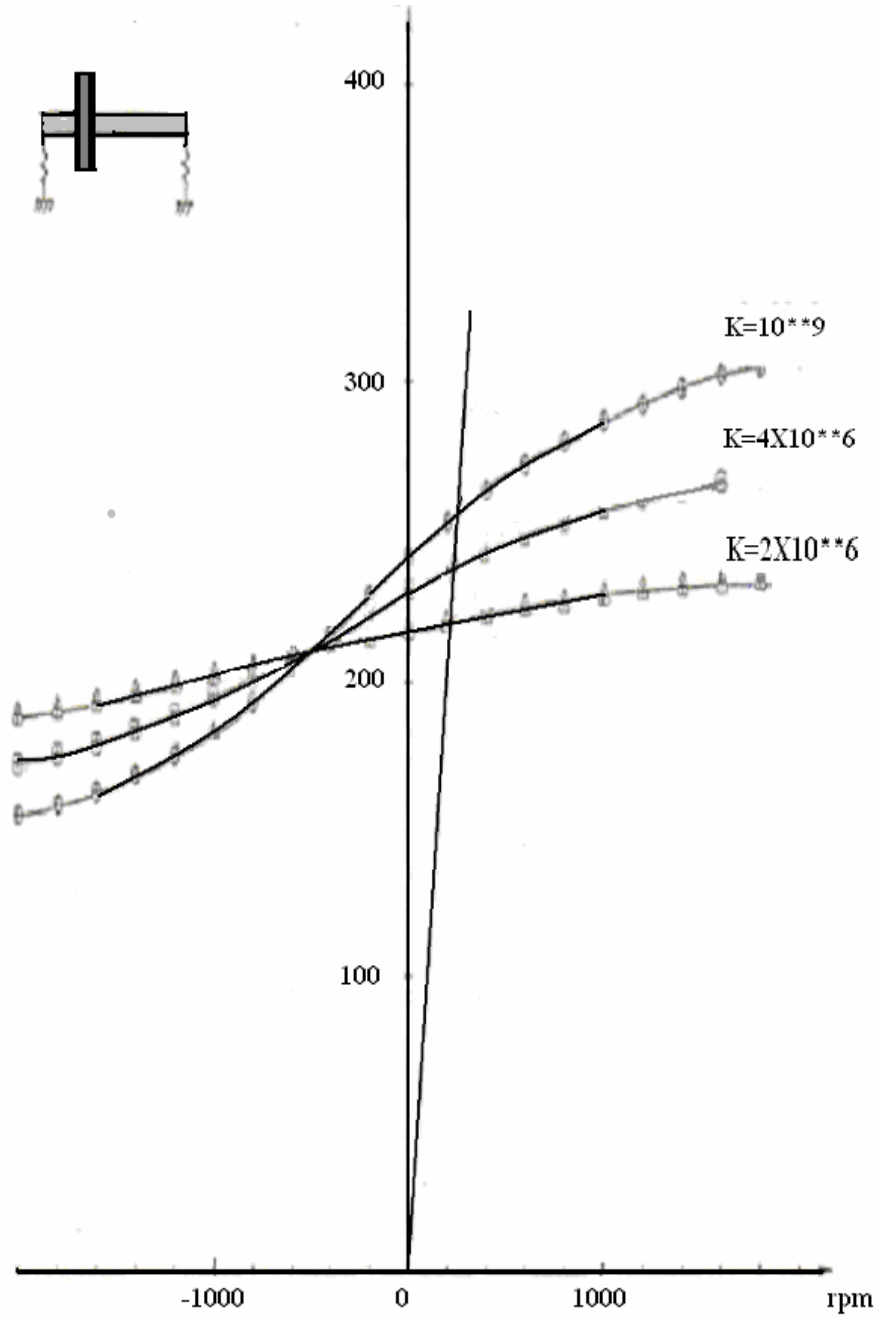


FIG 4.10 VARIAÇÃO 1 CRÍTICA COM A RIGIDEZ DO MANCAL K

A figura 4.11 apresenta as variações da primeira e da segunda críticas do rotor com a colocação de dois rotores no eixo e para K rígido.

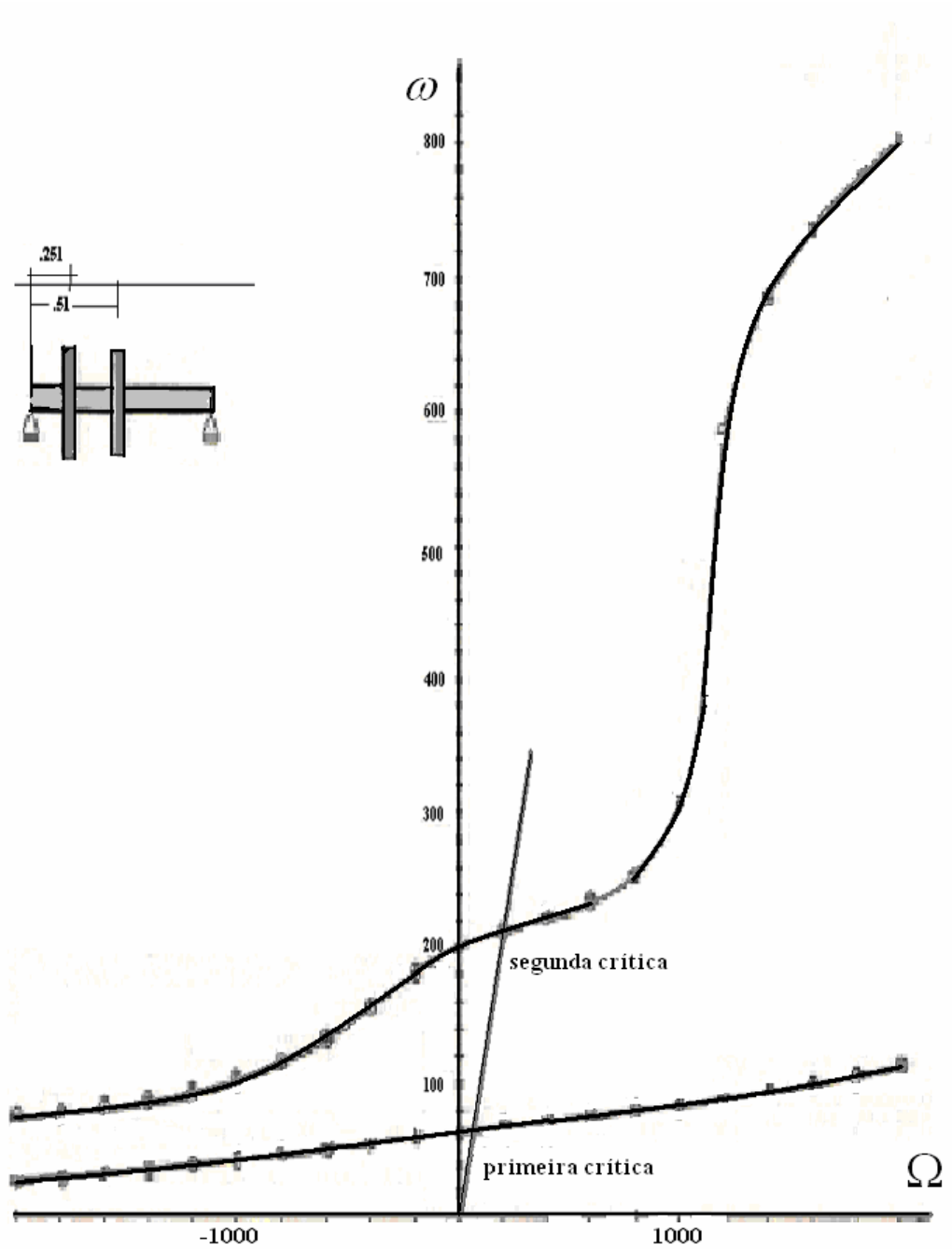


FIG 4.11 VARIAÇÃO DAS CRÍTICAS/FREQÜÊNCIAS NATURAIS COM DOIS ROTORES

4.6 Conclusões Sobre a Pertinência do Método

O método discutido no Capítulo IV permite o cálculo das frequências naturais de rotores com múltiplos discos e com a representação da rigidez dos mancais, conforme resultados apresentados. É todavia limitado pela dificuldade de representação de geometrias complexas, representativas dos rotores reais.

No Capítulo V este mesmo problema será apresentado através do método de elementos finitos e como veremos, possui ilimitadas possibilidades de representação de um rotor real. Não é do conhecimento do autor que esta solução tenha sido publicada anteriormente em algum livro sendo este um desenvolvimento próprio.

V ELEMENTOS FINITOS NA ROTODINÂMICA:

Nos Capítulos II, III, IV discutimos as possibilidades de representação da ciência rotodinâmica, dentro da modelação pela teoria do contínuo.

Podemos dizer que esta abordagem é muito rica em significado físico, apesar de seu elevado nível de abstração, experimenta uma complexidade matemática crescente no processo de solução da equação diferencial de movimento.

Neste contexto, surge a possibilidade do tratamento destes modelos físicos com o uso de técnicas discretas de modelação. Dentre as técnicas discretas de modelação matemática dos rotores reais, destaca-se a de elementos finitos, a qual tem se mostrado, a mais adequada para o tratamento global das questões rotodinâmicas.

Podemos ainda complementar esta idéia dizendo que a experiência tem provado ser através das técnicas de elementos finitos a melhor forma de se resolver complicados sistemas de equações de movimentos axial, torsional e lateral.

Neste Capítulo é dada particular importância ao desacoplamento das equações diferenciais do rotor giroscópico puro, sendo o foco desta tese a apresentação de um método para desacoplamento destas equações diferenciais e a sua solução.

A figura 5.1 mostra esquematicamente o modelo de um rotor real, alvo deste estudo.

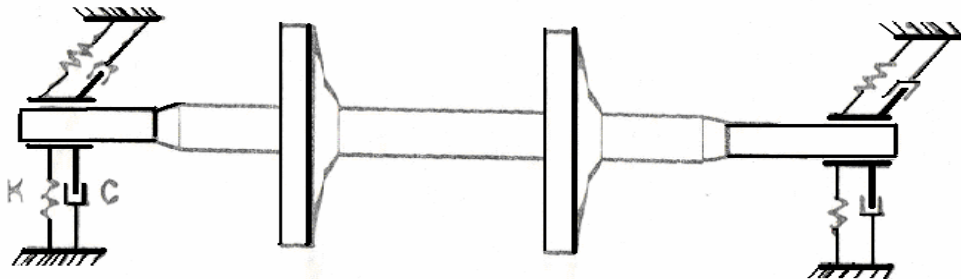


FIG 5.1 - DESENHO ESQUEMÁTICO DE UM ROTOR

5.1 Elementos Finitos em Turbomáquinas:

Sendo a técnica de elementos finitos muito abstrata, ela não requer uma grande discussão teórica em seu processo de implementação. Até mesmo as hipóteses teóricas requeridas nos Capítulos II,III,IV são aqui desnecessárias.

Com o objetivo de colocar esta questão em evidência, vamos rerepresentar aqui, as hipóteses teóricas discutidas nos Capítulos iniciais.

a) O material do eixo é homogêneo e isotrópico, apresentando comportamento elástico linear (aplica-se a Lei de Hooke).

Podemos dizer que esta tão importante hipótese, está embutida na matriz de rigidez do eixo passando completamente despercebida ao usuário desta matriz.

b) São consideradas apenas as deflexões laterais (em planos ortogonais) suficientemente pequenas para que a teoria linear tenha valor.

Esta hipótese, importante para a linearização das equações do efeito giroscópico, são aqui desnecessárias, passando completamente despercebida ao usuário do método

c) Os elementos são considerados como vigas de Rayleigh (levam em conta o efeito da rotação nos nós do sistema em x e y).

Esta hipótese, importante para a representação da inércia de rotação e do efeito giroscópico do elemento de eixo, está na realidade embutida dentro da formulação das funções de interpolação do modelo de elementos finitos, não sendo nem mesmo percebida pelo usuário desta matriz.

d) Seções planas permanecem planas após deflexão.

Esta hipótese, importante para a linearização das equações elásticas (momento e cortante), está, na verdade, embutida dentro da formulação das funções de interpolação do modelo de elementos finitos.

e) O amortecimento estrutural é desconsiderado na solução do problema de autovalor.

Esta hipótese tão restritiva para o problema contínuo é tratada de forma simples na abordagem de elementos finitos, perdendo sua importância, como veremos posteriormente.

f) O modelo adotado leva em conta somente a flexão. (a torção que só é importante na fase transiente não é considerada).

Normalmente os programas de elementos finitos para solução de problemas rotodinâmicos tratam os movimentos de torção e axial independentemente.

g) Deslocamentos e cargas axiais são desconsiderados.

A matriz de rigidez associada a cargas axiais (normalmente não utilizada), pode ser facilmente introduzida dentro da matriz de rigidez, se necessário (LALANNE, M., FERRARIS, G., 1998, pp.9)

h) O disco é considerado rígido e apresenta espessura desprezível, sendo considerado ponto de massa concentrada, sem rigidez, com inércia de rotação e efeito giroscópico (FIG-5.2).

O método de elementos finitos introduz o impelidor no modelo matemático com grande facilidade, conforme veremos.

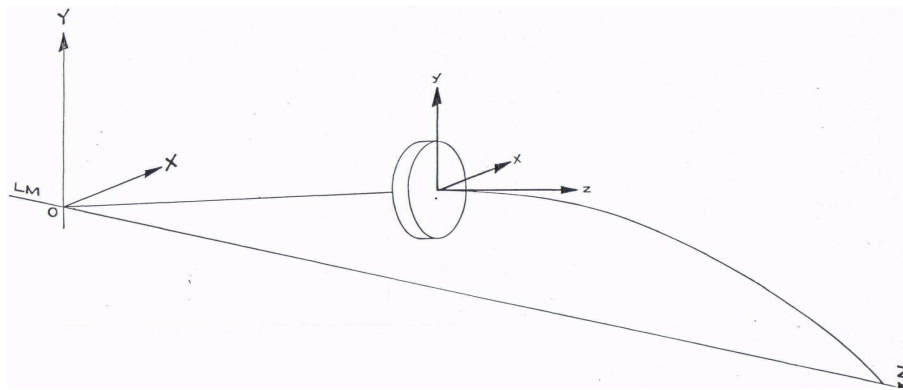


FIG 5.2 EIXOS DO ROTOR:

i) Os mancais também são pontuais e interpretam as condições de contorno.

O método de elementos finitos introduz os mancais no modelo matemático com grande facilidade.

j) O eixo é balanceado e seu centro geométrico coincide com o centro de gravidade em cada seção reta do eixo.

No método de elementos finitos esta questão é imperceptível e está embutida nas matrizes de rigidez e de inércia do elemento.

k) A deformação do peso próprio e cisalhamento são desprezíveis.

O método de elementos finitos pode incorporar o efeito de cisalhamento na matriz de rigidez, todavia este efeito não tem se mostrado importante em turbomáquinas. (GUNTER, E. J., CHEN, W. J., 2005.)

Na realidade nenhuma destas restrições teóricas, acima referidas, traz qualquer limitação real para a aplicabilidade do modelo matemático, o qual é capaz de simular o modelo físico com grande representatividade.

Portanto, o elevado nível de abstração reinante no método elementos finitos reduz a importância destas questões teóricas sem introduzir nenhuma restrição à sua aplicabilidade, permitindo que elas se tornem imperceptíveis ao analista.

5.1.1) Diferentes Formas de Energia:

São apresentadas a seguir as diferentes formas de energia normalmente encontradas em um rotor, conforme apresentado no Capítulo IV, objetivando a construção das matrizes dos elementos. A energia total é a soma de todas estas energias.

a - Energia Cinética do Eixo

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \{m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)\} \partial Z \quad (5.1)$$

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_e \left(\left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right) + I_e \left(\left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right) + I_p \Omega^2 \right\} \partial Z \quad (5.2)$$

Sendo $I_p = 2I_d = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow$ Momento Polar Inércia,

Considerando o caso de um sistema discreto com n graus de liberdade, a expressão da energia cinética, (em coordenadas generalizadas) pode ser apresentada da forma seguinte:

$$EC = T_2 + T_1 + T_0, \text{ onde} \quad (5.3)$$

T_2 é o termo quadrático da velocidade generalizada, dada por:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L m(X^2 + Y^2) \partial Z + \frac{1}{2} \int_0^L I_d \left(\left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \right)^2 \right) \partial Z \quad (5.4)$$

T_1 é o termo linear da velocidade generalizada e está ligado ao efeito giroscópico, dado por:

$$T_1 = \sum_{j=1}^n f.(q_1.q_2.q_3.q_4.q_5.....)q_j \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L I_d \left(2\Omega \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} - 2\Omega \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \partial Z \quad (5.5)$$

T_0 é o termo linear das coordenadas generalizadas e está ligado à força centrífuga, como segue:

$$T_0 = T_0.(q_1.q_2.q_3.q_4.q_5.....) \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L I_p \Omega^2 \partial Z \quad (5.6)$$

b - Energia Cinética do Impelidor

$$EC = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b M_i (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2) \quad (5.7)$$

$$EC = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left(\left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{di} \left(\left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \right)^2 + 2\Omega \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial Z} \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b I_{pi} \Omega^2 \quad (5.8)$$

c - Energia Potencial do Eixo

$$EP = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right\} \partial Z \quad (5.9)$$

A energia potencial de deformação em vigas é modificada no caso de se considerar o efeito de cisalhamento e a carga axial.

Sendo $\frac{\partial X}{\partial Z} = \beta_y + \theta_y$, onde: θ_y é o angulo de flexão e β_y é o angulo de

distorção devido ao cisalhamento, obtem-se

$$EP = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial Z} \right)^2 \right\} \partial Z + \frac{1}{2} \int_0^L kGA \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial Z} - \theta_y \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Z} + \theta_x \right)^2 \right\} \partial Z + \frac{1}{2} \int_0^L P \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Z} \right)^2 \right\} \partial Z \quad (5.10)$$

onde:

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	Modulo de Cisalhamento,
E	Modulo de Elasticidade,
$I_{xx} = I = I_{yy} = (L^4)$	Momento de Inércia Transversal de Área,
ν	Coefficiente de Poisson,
A	Área,
k	Fator de Forma,
P	Carga Axial,

A energia potencial de deformação (com o efeito de cisalhamento e carga axial) é dada por NELSON, H. D., McVAUGH, J.,M.,1976 e podemos escrever:

$$EP = \frac{1}{2} q^T (K_{Flexão} + K_{Cisalhamento} + K_{Axial}) q \quad (5.11)$$

Usualmente nos cálculos rotodinâmicos somente a energia potencial elástica de deformação lateral é levada em conta.

d - Energia Potencial das Molas dos Mancais

$$EP = \frac{1}{2} K_1 X_0^2 + \frac{1}{2} K_2 Y_0^2 + \frac{1}{2} K_3 X_L^2 + \frac{1}{2} K_4 Y_L^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{\partial X_0}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{\partial Y_0}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left(\frac{\partial X_L}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2} k_4 \left(\frac{\partial Y_L}{\partial Z} \right)^2 \quad (5.12)$$

Embora outras formas de energia possam ocorrer no rotor, estas são as mais importantes.

5.1.2) Aplicação da Teoria de Vigas para Eixo

Aqui o deslocamento lateral será dado por:

$u_x(z,t)$, $u_y(z,t)$ deslocamento lateral horizontal/vertical (L)

K, k coeficientes de mola linear e de torção (F/L, Torque / ϕ)

Os dois deslocamentos angulares serão fornecidos por:

$\phi_y = + \frac{\partial u_x}{\partial z}$ deslocamento Angular no plano xz (Gr)

$\phi_x = - \frac{\partial u_y}{\partial z}$ deslocamento Angular no plano yz (Gr)

A convenção de sinais de momentos fletores e cortantes, está mostrado na figura 5.3

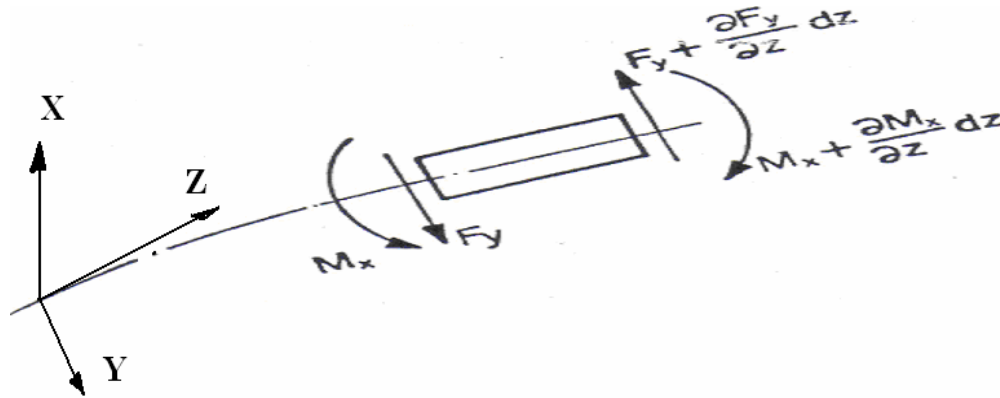


FIG 5.3 - CONVENÇÃO DO FLETOR POSITIVO EM YZ.

Algumas propriedades da viga Bernoulli-Euler:

$$M_Y = EI_{xx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial Z^2} \quad \text{momento fletor na direção X}$$

$$M_x = EI_{yy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial Z^2} \quad \text{momento fletor na direção Y}$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial Z} \left(EI_{xx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial Z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial Z} M_Y \quad \text{força de cisalhamento na direção X}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial Z} \left(EI_{yy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial Z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial Z} M_x \quad \text{força de cisalhamento na direção Y}$$

Aplicando-se a lei de Newton podemos re-escrever a equação diferencial de movimento para o eixo em coordenadas cartesianas, através da teoria do contínuo conforme foi mostrado no Capítulo 3.

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \dot{\eta} - \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} + 2i\Omega \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} = 0, \quad (5.13)$$

m massa por unidade de comprimento

$I_{xx} = I = I_{yy}$ momento de inércia transversal de área

$I_p = 2I_d = \frac{mR^2}{2}$ momento polar de inércia

$\eta = X + iY$ variável complexa auxiliar

GASH, R., (1976), propõe outros termos para esta equação, como por exemplo a combinação do cisalhamento com a inércia de rotação. Entretanto, conforme já foi dito anteriormente, o efeito do cisalhamento é desprezível em rotores de turbomáquinas, portanto, o termo da combinação do cisalhamento/inércia de rotação não será considerado

5.1.3) Discretização do Eixo em Elementos Finitos

Na Seção (5.2) será discutida a modelação do eixo, dos impelidores e dos mancais através da teoria de elementos finitos aplicada ao rotor.

Com este propósito, precisamos dividir o rotor em pequenos elementos (elementos finitos), modelados inicialmente como viga, conforme figura 5.4 .

A forma geral do deslocamento lateral dos pontos, dentro da teoria de elementos finitos, é apresentada abaixo, para uma viga:

$$u_y(z,t) = u_x(z,t) = N^e Q^e = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{Deslocamentos Generalizados}) \quad (5.14)$$

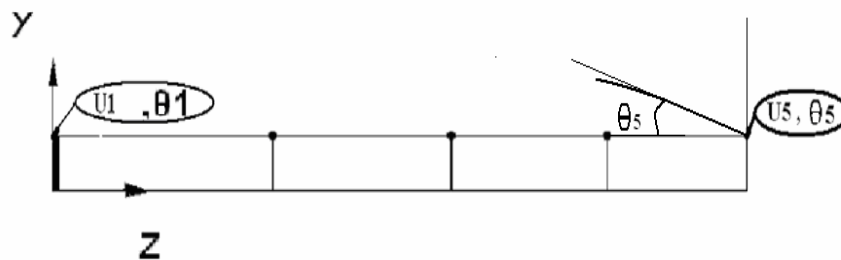


FIG 5.4 - PARTIÇÃO PLANA DO ROTOR

Toda a energia do sistema conservativo pode ser apresentada sob a forma de energia cinética e potencial.

A energia potencial se relaciona com a deflexão do eixo e com o efeito de cisalhamento no rotor, enquanto que a energia cinética se relaciona com os efeitos provocados pela inércia lateral e de rotação do eixo.

A Transformada de Lagrange é, então, aplicada ao conteúdo de energia do rotor para, finalmente, se obter a equação de movimento do elemento eixo, como a seguir:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (5.15)$$

Neste Capítulo será discutida a vibração lateral 3D, juntamente com o efeito giroscópico do elemento de eixo e do impelidor.

5.2 Estabelecimento das Matrizes de Elementos Finitos

Nesta seção serão desenvolvidas as matrizes de rigidez, massa, giroscópica e de amortecimento de cada elemento de eixo. Simultaneamente, também estaremos construindo progressivamente a equação diferencial de movimento do eixo, na medida em que cada nova matriz esteja sendo incorporada ao modelo matemático.

5.2.1) Matriz de Rigidez do Rotor

A matriz do elemento é similar nos planos XZ e YZ, sendo que os sinais são diferentes, na medida em que YZ está no sentido direto e XZ está no sentido inverso.

Na teoria de flexão do eixo de Euler-Bernoulli, a energia de deformação pode ser determinada da seguinte forma:

O deslocamento axial $u_z = -y \frac{\partial u_y}{\partial z}$ em um elemento de viga ocorre sempre que existe movimento (vertical ou horizontal) dos nós u_y .

A deformação específica associada a este movimento é dada por

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -y \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = B = -yN'' \quad (\text{associada à flexão lateral do eixo}).$$

Para materiais do eixo lineares, a relação tensão/deformação é dada por:

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z} = -Ey \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = -E \cdot [B]$$

a - Energia de Deformação Lateral do Eixo (Plano YZ)

$$\text{Conforme a equação (5.9)} \quad EP_E(z,t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right\} \partial Z \quad (5.16)$$

A mesma energia, escrita em termos de tensões e deformações é:

$$\begin{aligned} EP_E(z,t) = U_E(z,t) &= \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} \right) \partial V = \int_A \int_l \left(\frac{1}{2} A \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} \right) \partial A \partial z \\ &= \frac{1}{2} E \int_A \int_z (B^T B) \partial A \partial z = \frac{1}{2} E \int_A y^2 \partial A \int_z \frac{\partial^2 N^{eT}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \partial z = \frac{1}{2} EI \int_z \frac{\partial^2 N^{eT}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \partial z \quad (5.17). \end{aligned}$$

A energia potencial total da viga é dada pela expressão:

$$EP(z,t) = \sum_{e=1}^E \frac{1}{2} E \int_A \int_z (B^T B) \partial A \partial z \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} \right)^2 \right\} \partial Z \quad (5.18)$$

A função de interpolação lateral $[N]$ do elemento de eixo tem a forma seguinte:

$$u_Y(z,t) = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = N^e Q \quad \text{Função de interpolação do eixo} \quad (5.19)$$

onde N^e é a função cúbica de interpolação, também chamada de função Hermitiana (descrita por Euler-Bernoulli):

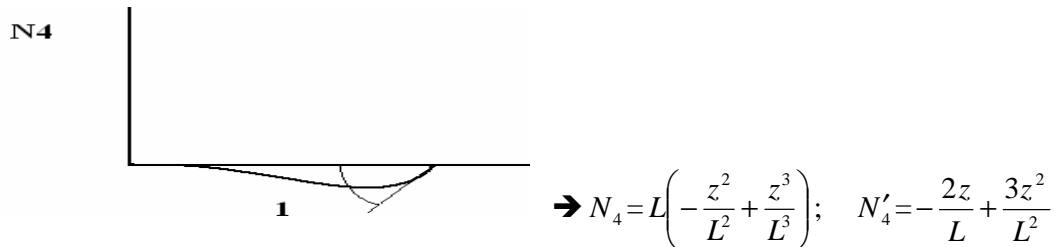
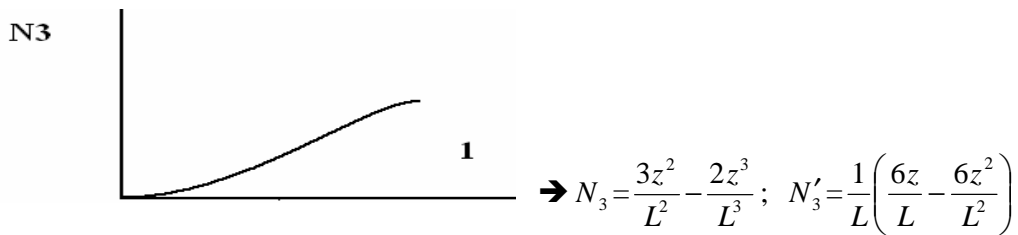
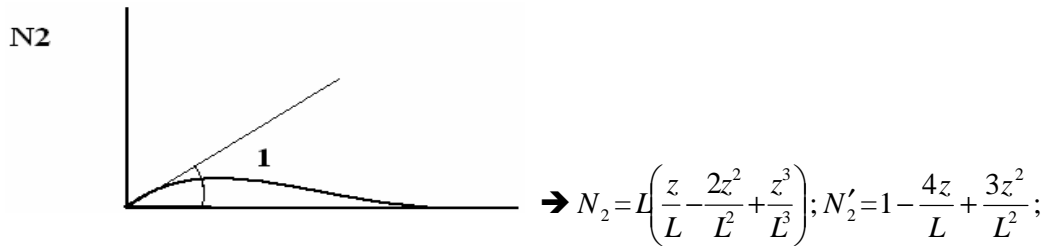
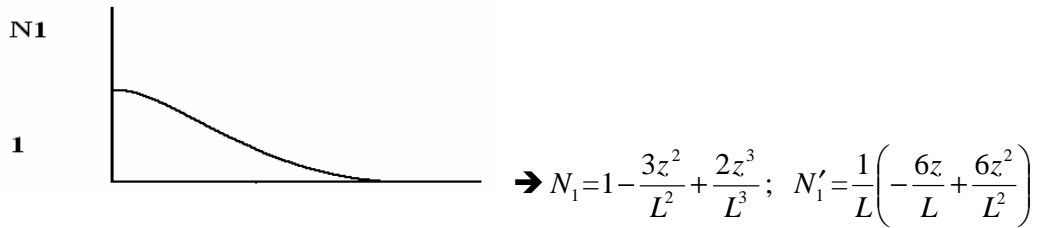
$$N^e = [N_1, N_2, N_3, N_4] = \left[\left(1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} \right); L \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right); \left(\frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \right); L \left(-\frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right) \right] \quad (5.20)$$

Variáveis nodais:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{Yi} \\ \phi_{Xi} \\ u_{Yj} \\ \phi_{Xj} \end{Bmatrix} = Q^e \quad (5.20^*)$$

$$\text{Valores entre nós } u_Y(z,t) \rightarrow u(z,t) = q_1 N_1 + q_2 N_2 + q_3 N_3 + q_4 N_4 \quad (5.21)$$

A função Hermitiana interpola, simultaneamente, valores intermediários do deslocamento $u(z,t)$ a partir das quatro coordenadas generalizadas que definem a posição dos pontos de um elemento de eixo $(Q^e)^T = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ com as seguintes representações gráficas:



$$u_v(z,t) = \left(1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} \right) q_1 + L \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right) q_2 + \left(\frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \right) q_3 + L \left(-\frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right) q_4 \quad (5.22)$$

As primeiras derivadas de $u_y(z,t)$ em relação a z e t são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y(z,t)}{\partial z} &\equiv \phi' ; \mathcal{Q}^e N^{e'} = [N_1', N_2', N_3', N_4'] \mathcal{Q}^e \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\frac{1}{L} \left(-\frac{6z}{L} + \frac{6z^2}{L^2} \right) ; \left(1 - \frac{4z}{L} + \frac{3z^2}{L^2} \right) ; \frac{1}{L} \left(\frac{6z}{L} - \frac{6z^2}{L^2} \right) ; -\frac{2z}{L} + \frac{3z^2}{L^2} \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial u_y(z,t)}{\partial z} \equiv \phi'(z,t) = q_1 N_1' + q_2 N_2' + q_3 N_3' + q_4 N_4' \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial u_y(z,t)}{\partial t} = \dot{U}_y = N^e \dot{\mathcal{Q}}^e = [N_1, N_2, N_3, N_4] \dot{\mathcal{Q}}^e \rightarrow \text{velocidade generalizada} \quad (5.25)$$

A segunda e terceira derivadas de $u_y(z,t)$ em relação a z e t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial z^2} &\equiv \phi'' ; N^{e''} = [N_1'', N_2'', N_3'', N_4''] \rightarrow \\ &= \left[\frac{1}{L^3} [(-6L + 12z); (-4L^2 + 6Lz); (6L - 12z); (-2L^2 + 6zL)] \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial z^2} \equiv \phi'' ; \phi_1''(z,t) = q_1 N_1'' + q_2 N_2'' + q_3 N_3'' + q_4 N_4'' \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial z^2} \equiv \phi'' = \frac{1}{L^3} [(-6L + 12z)q_1 + (-4L^2 + 6Lz)q_2 + (6L - 12z)q_3 + (-2L^2 + 6zL)q_4] \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial^3 u_y(z,t)}{\partial z^3} \equiv \phi''' ; \phi'''(z,t) = q_1 N_1''' + q_2 N_2''' + q_3 N_3''' + q_4 N_4''' \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial^3 u_y(z,t)}{\partial z^3} \equiv \phi''' ; \frac{12}{L^3} q_1 + \frac{6}{L^2} q_2 - \frac{12}{L^3} q_3 + \frac{6}{L^2} q_4 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial u_y(z,t)}{\partial t} = \dot{U}_y = N^e \dot{\mathcal{Q}}^e \rightarrow \text{velocidade generalizada} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial^2 u_y(z,t)}{\partial t^2} = \ddot{U}_y = N^e \ddot{\mathcal{Q}}^e = [N_1, N_2, N_3, N_4] \ddot{\mathcal{Q}}^e \rightarrow \text{aceleração generalizada} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^3 u_y(z,t)}{\partial t^3} = \ddot{\ddot{U}}_y = N^e \ddot{\ddot{\mathcal{Q}}}^e = [N_1, N_2, N_3, N_4] \ddot{\ddot{\mathcal{Q}}}^e \rightarrow \text{aceleração generalizada} \quad (5.32)$$

b - Matriz de Rigidez Lateral (Plano YZ)

Re-escrevendo a equação (5.17)

$$EP(z,t) = \frac{1}{2} E \int_{z_A} \int_A (B^T B) \delta A \delta z = \frac{1}{2} E \int_A y^2 \delta A \int_l \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \delta z \quad (5.33)$$

$$EP(z,t) = \sum_{e=1}^E E \int_{z_A} \int_A (B^T B) \delta A \delta z E; \quad -y \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} = B^e = -\frac{y}{L^3} \begin{bmatrix} -6L + 12z \\ -4L^2 + 6Lz \\ 6L - 12z \\ -2L^2 + 6zL \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

A energia elástica de um elemento de viga deformada na direção q_1 é dada por:

$$EP_{.}(z,t) = \frac{E}{L^6} \int_{z_A} \int_L \left[(-6L + 12z)q_1 + (-4L^2 + 6Lz)q_2 + (6L - 12z)q_3 + (-2L^2 + 6Lz)q_4 \right] \cdot \delta z \quad (5.35)$$

A modificação da posição de cada coordenada generalizada, causa variação na energia elástica do elemento de viga, que é dada pelo gradiente da energia potencial.

No Capítulo IV o princípio de Hamilton foi utilizado para a dedução da equação de movimento do rotor. Quando se fala em elementos finitos, torna-se mais adequado a utilização do princípio variacional associado à equação de Lagrange, (RAO,(1999)).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0; \quad L = \sum EC_e + \sum EP_e \Rightarrow \text{Lagrangiano}, \quad (5.36)$$

onde $j=1,2,3..J$

$EC = \sum EC_e$ energia cinética do eixo

$EP = \sum EP_e$ energia potencial do eixo

R função de dissipação

q_j deslocamento nodal: $\dot{q}_j \Rightarrow$ Velocidade Nodal; $j \rightarrow$ coordenada do elemento

Aplicando Lagrange à parcela de energia potencial do sistema conservativo, obtem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial EP}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{E}{2L^6} \int_V \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} q_i^2 \delta z = \frac{E}{L^6} \int_V q_i \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \delta q_i \delta z = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{E}{L^6} \int q_i a_{ij} \delta q_j \right) \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial EP(z,t)}{\partial q_i} = \frac{E}{L^6} \begin{vmatrix} \frac{\partial(q_1 a_{11} \cdot q_1)}{\partial q_1} & \frac{\partial(q_1 a_{12} \cdot q_2)}{\partial q_1} & \frac{\partial(q_1 a_{13} \cdot q_3)}{\partial q_1} & \frac{\partial(q_1 a_{14} \cdot q_4)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial(q_2 a_{21} \cdot q_1)}{\partial q_2} & \frac{\partial(q_2 a_{22} \cdot q_2)}{\partial q_2} & \frac{\partial(q_2 a_{23} \cdot q_3)}{\partial q_2} & \frac{\partial(q_2 a_{24} \cdot q_4)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial(q_3 a_{31} \cdot q_1)}{\partial q_3} & \frac{\partial(q_3 a_{32} \cdot q_2)}{\partial q_3} & \frac{\partial(q_3 a_{33} \cdot q_3)}{\partial q_3} & \frac{\partial(q_3 a_{34} \cdot q_4)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial(q_4 a_{41} \cdot q_1)}{\partial q_4} & \frac{\partial(q_4 a_{42} \cdot q_2)}{\partial q_4} & \frac{\partial(q_4 a_{43} \cdot q_3)}{\partial q_4} & \frac{\partial(q_4 a_{44} \cdot q_4)}{\partial q_4} \end{vmatrix} = [K] \{Q\} \quad (5.38)$$

$$a_{11} = \frac{E}{L^6} \int_A y^2 \partial A \int_0^L (144z^2 + 36L^2 - 144Lz) dz = 48z^3 + 36L^2z - 72Lz^2 \Big|_0^L = \frac{12EIL^3}{L^6} \quad (5.39)$$

$$a_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad (5.40)$$

$$a_{12} = \frac{E}{L^6} \int_A y^2 \partial A \int_0^L (24L^3 - 84L^2z + 72Lz^2) dz = (24L^3z - 42L^2z^2 + 24Lz^3) \Big|_0^L \Rightarrow \frac{6EIL^4}{L^6} \quad (5.41)$$

$$a_{12} = a_{21} \Rightarrow \frac{6EIL}{L^3} = \frac{6EI}{L^2} \quad (5.42)$$

$$a_{13} = \frac{E}{L^6} \int_A y^2 \partial A \int_0^L (-144z^2 - 36L^2 + 144Lz) dz = -48z^3 - 36L^2z + 72Lz^2 \Big|_0^L = -\frac{12EIL^3}{L^6} \quad (5.43)$$

$$a_{13} = a_{31} \Rightarrow -\frac{12EI}{L^3} \quad (5.44)$$

$$a_{14} = a_{41} \Rightarrow \frac{6EI}{L^2} \quad (5.45)$$

$$a_{22} = \frac{E}{L^6} \int_A y^2 \partial A \int_0^L (16L^4 + 36L^2z^2 - 48L^3z) dz = (16L^4z + \frac{36}{3}L^2z^3 - \frac{48}{2}L^3z^2) \Big|_0^L = \frac{4EIL^5}{L^6} = \frac{4EI}{L} \quad (5.46)$$

$$a_{22} = \frac{4EIL^2}{L^3} = \frac{4EI}{L} \quad (5.47)$$

$$a_{23} = \frac{E}{L^6} \int_A y^2 \partial A \int_0^L (-24L^3 + 84L^2z - 72Lz^2) dz = (-24L^3z + 42L^2z^2 - 24Lz^3) \Big|_0^L = \frac{EI}{L^6} \int_A -6L^4 dA \quad (5.48)$$

$$a_{23} = a_{32} \Rightarrow -\frac{6EIL}{L^3} = -\frac{6EI}{L^2} \quad (5.49)$$

Atuando de forma análoga podemos determinar todos os outros coeficientes da matriz de rigidez, obtem-se:

$$a_{24} = a_{42} \Rightarrow \frac{2EIL^2}{L^3} = \frac{2EI}{L} \quad (5.50)$$

$$a_{33} \Rightarrow \frac{12EI}{L^3} \quad (5.51)$$

$$a_{34} = a_{43} \Rightarrow -\frac{6EIL}{L^3} = -\frac{6EI}{L^2} \quad (5.52)$$

$$a_{44} \Rightarrow \frac{4EI}{L} \quad (5.53)$$

Re-escrevendo-se a equação (5.37), vem:

$$\frac{\partial EP}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{E}{2L^6} \int_V \frac{\partial^2 N^{eT}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \cdot q_i^2 \cdot \partial z = \frac{E}{L^6} \int_V q_i \frac{\partial^2 N^{eT}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N^e}{\partial z^2} \cdot \partial z \rightarrow K_{YZ}^e \cdot Q_{YZ}^e \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial EP}{\partial q_j} \rightarrow K_{YZ}^e \cdot Q_{YZ}^e = [K_e] \Rightarrow K_e = \frac{EI_{yy}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot Q_{YZ}^e \rightarrow$$

$$\rightarrow K_{y1} = \frac{12EI}{l^3}, K_{y2} = \frac{6EI}{l^3}, K_{y3} = \frac{4EI}{l^3}, K_{y4} = \frac{2EI}{l^3} \quad (5.55)$$

Re-escrevendo a matriz no plano YZ. Vem:

$$K_{YZ}^e \cdot Q_{YZ}^e = \begin{bmatrix} K_{y1} & K_{y2} & -K_{y1} & K_{y2} \\ K_{y2} & K_{y3} & -K_{y2} & K_{y4} \\ -K_{y1} & -K_{y2} & K_{y1} & -K_{y2} \\ K_{y2} & K_{y4} & -K_{y2} & K_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yi} \\ \phi_{xi} \\ u_{yj} \\ \phi_{xj} \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

c - Matriz de rigidez lateral (Plano XZ)

Usando a mesma análise realizada na seção anterior, podemos estabelecer a matriz de rigidez no plano XZ, apresentada abaixo:

$$K_{XZ}^e \cdot Q_{XZ}^e = \begin{bmatrix} K_{x1} & -K_{x2} & -K_{x1} & -K_{x2} \\ -K_{x2} & K_{x3} & K_{x2} & K_{x4} \\ -K_{x1} & K_{x2} & K_{x1} & K_{x2} \\ -K_{x2} & K_{x4} & K_{x2} & K_{x3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ \phi_{yi} \\ u_{xj} \\ \phi_{yj} \end{Bmatrix}; K_{x1}^e = K_{y1}^e; K_{x2}^e = K_{y2}^e; \dots \quad (5.57)$$

d - Matriz de Rigidez Lateral Tridimensional

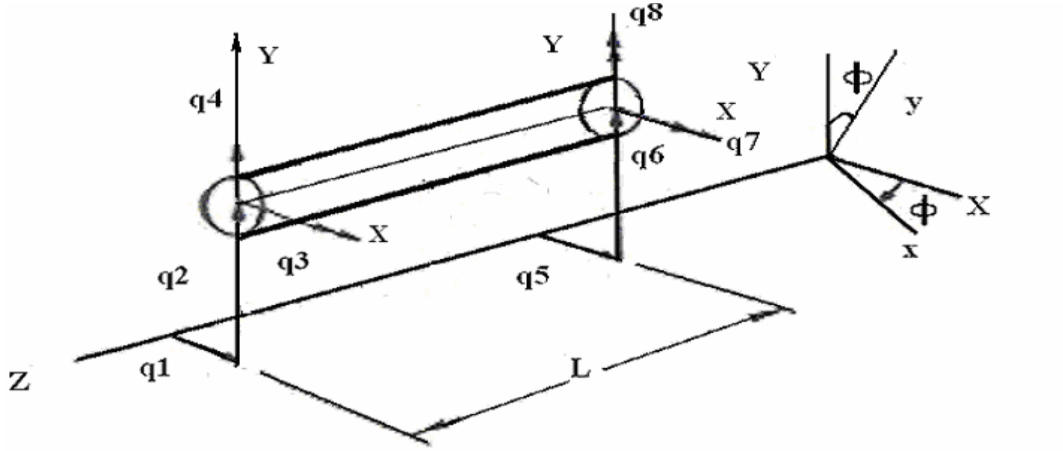


FIG 5.5 MODELO DE PARTIÇÃO DO ROTOR 3D

Procedendo de forma semelhante às seções anteriores, levando-se em conta que existe movimento em dois planos independentes, XZ e YZ, e que o número de graus de liberdade dos elementos (coordenadas generalizadas) é agora 8 (não mais 4), podemos equacionar o rotor.

Os planos XZ e YZ contêm os eixos principais de inércia da seção transversal. O movimento e as forças nestes dois planos podem ser considerados independentes

Podemos dizer que, se a matriz de rigidez do rotor é 8 X 8, é possível escrever esta matriz pela superposição de duas matrizes 4 X 4.

O deslocamento no plano XZ ($u_{xi} = q_1, \phi_{yi} = q_4, u_{xj} = q_5, \phi_{yj} = q_8$) é independente do deslocamento em YZ ($u_{yi} = q_2, \phi_{xi} = q_3, u_{yj} = q_6, \phi_{xj} = q_7$) $\rightarrow (u_i(0) \equiv q_i)$

O referencial móvel xyz, (onde encontra-se o sistema de coordenadas local) coincide com o sistema inercial no repouso (eixos principais de inércia), portanto os deslocamentos podem ser separados em dois diferentes grupos independentes.

As coordenadas generalizadas do elemento tridimensional serão, portanto:

$$u_{x1}(z,t) = u_1^e(z,t) = q_1 N_1 + q_4 N_2 + q_5 N_3 + q_8 N_4 \quad (\text{deslocamento em XZ}) \quad (5.58)$$

$$u_{y1}(z,t) = u_2^e(z,t) = q_2 N_1 + q_3 N_2 + q_6 N_3 + q_7 N_4 \quad (\text{deslocamento em YZ}) \quad (5.59)$$

$$\phi_{x1}(z,t) = \phi_1^e(z,t) = q_2 N_1' + q_3 N_2' + q_6 N_3' + q_7 N_4' \quad (\text{ângulo } \phi_x) \quad (5.60)$$

$$\phi_{y1}(z,t) = \phi_2^e(z,t) = q_1 N_1' + q_4 N_2' + q_5 N_3' + q_8 N_4' \quad (\text{ângulo } \phi_y) \quad (5.61)$$

$$u_{x2}(z,t) = u_3^e(z,t) = q_1 N_1 + q_4 N_2 + q_5 N_3 + q_8 N_4 \quad (5.62)$$

$$u_{y2}(z,t) = u_4^e(z,t) = q_2 N_1 + q_3 N_2 + q_6 N_3 + q_7 N_4 \quad (5.63)$$

$$\phi_{x2}(z,t) = \phi_3^e(z,t) = q_2 N_1' + q_3 N_2' + q_6 N_3' + q_7 N_4' \quad (5.64)$$

$$\phi_{y2}(z,t) = \phi_4^e(z,t) = q_1 N_1' + q_4 N_2' + q_5 N_3' + q_8 N_4' \quad (5.65)$$

Dessa forma podemos escrever a matriz 8X8 representativa da rigidez do rotor, no espaço 3D como:

$$K_{xyz}^e = \frac{EI_{yy}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ 0 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & 6l & 0 \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} \quad (5.66)$$

É importante registrar, neste ponto, que no universo da rotodinâmica, a matriz de rigidez normalmente é real simétrica e definida positiva. A matriz de rigidez admite os autovetores de corpo rígido, (com seus autovalores nulos) podendo ser semi-positiva definida.

Os modos de corpo rígido, entretanto, não interferem na solução do problema de vibração, na medida em que somente alteram o valor médio da vibração.

As matrizes de rigidez nos planos XZ e YZ são parecidas havendo diferenças de sinais como pode ser visto a seguir. Os autovalores são iguais.

$$\left[K_{XZ}^e \right]^T = \left[K_{XZ}^e \right] \quad (\text{matriz simétrica tem transpostas iguais}) \quad (5.67)$$

$$K_{XZ}^e = \begin{bmatrix} K_{x1} & -K_{x2} & -K_{x1} & -K_{x2} \\ -K_{x2} & K_{x3} & K_{x2} & K_{x4} \\ -K_{x1} & K_{x2} & K_{x1} & K_{x2} \\ -K_{x2} & K_{x4} & K_{x2} & K_{x3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ \phi_{yi} \\ u_{xj} \\ \phi_{yj} \end{Bmatrix} \Rightarrow K_{YZ}^e = \begin{bmatrix} K_{y1} & K_{y2} & -K_{y1} & K_{y2} \\ K_{y2} & K_{y3} & -K_{y2} & K_{y4} \\ -K_{y1} & -K_{y2} & K_{y1} & -K_{y2} \\ K_{y2} & K_{y4} & -K_{y2} & K_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yi} \\ \phi_{xi} \\ u_{yj} \\ \phi_{xj} \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

$$K_{y1} = K_{x1} = \frac{12EI}{l^3}, K_{y2} = K_{x2} = \frac{6EI}{l^3}, K_{y3} = K_{x3} = \frac{4EI l^2}{l^3}, K_{y4} = K_{x4} = \frac{2EI l^2}{l^3} \quad (5.69)$$

$$K_{x1} = K_{y1} = K_{x11} = K_{x13} = K_{x31} = K_{x33} = K_{y11} = K_{y13} = K_{y31} = K_{y33} = \frac{12EI}{L^3} \quad (5.70)$$

$$K_{x2} = K_{y2} = K_{x/y12} = K_{x/y14} = K_{x/y21} = K_{x/y23} = K_{x/y32} = K_{x/y34} = K_{x/y41} = K_{x/y43} = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6EI \cdot l}{l^3} \quad (5.71)$$

$$K_{x3} = K_{y3} = K_{x22} = K_{x44} = K_{y22} = K_{y44} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI \cdot l^2}{l^3} \quad (5.72)$$

$$K_{x4} = K_{y4} = K_{x24} = K_{x42} = K_{y24} = K_{y42} = \frac{2EI}{L} = \frac{2EI \cdot l^2}{l^3} \quad (5.73)$$

É importante chamar a atenção, pois alguns autores apresentam estas matrizes no referencial K_{XYZ}^e , enquanto outros preferem trabalhar no referencial K_{YXZ}^e . Não podemos misturar as matrizes de um referencial com as dos outros.

$$K_{XYZ}^e = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \phi_{xi} \\ \phi_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \phi_{xj} \\ \phi_{yj} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} +K_{x11} & 0 & 0 & +K_{x21} & -K_{x31} & 0 & 0 & K_{x41} \\ 0 & +K_{y11} & -K_{y21} & 0 & 0 & -K_{y31} & -K_{y41} & 0 \\ 0 & -K_{y12} & K_{y22} & 0 & 0 & K_{y32} & K_{y42} & 0 \\ K_{x12} & 0 & 0 & K_{x22} & -K_{x32} & 0 & 0 & +K_{x42} \\ -K_{x13} & 0 & 0 & -K_{x23} & K_{x33} & 0 & 0 & -K_{x43} \\ 0 & -K_{y13} & K_{y23} & 0 & 0 & K_{y33} & K_{y43} & 0 \\ 0 & -K_{y14} & +K_{y24} & 0 & 0 & K_{y34} & K_{y44} & 0 \\ K_{x14} & 0 & 0 & +K_{x24} & -K_{x34} & 0 & 0 & K_{x44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} \quad (5.74)$$

$$K_{YXZ}^e = \begin{Bmatrix} u_{yi} \\ u_{xi} \\ \phi_{yi} \\ \phi_{xi} \\ u_{yj} \\ u_{xj} \\ \phi_{yj} \\ \phi_{xj} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} +K_{y11} & 0 & 0 & -K_{y21} & -K_{y31} & 0 & 0 & -K_{y41} \\ 0 & +K_{x11} & +K_{x21} & 0 & 0 & -K_{x31} & +K_{x41} & 0 \\ 0 & K_{x12} & K_{x22} & 0 & 0 & -K_{x32} & K_{x42} & 0 \\ -K_{y12} & 0 & 0 & K_{y22} & K_{y32} & 0 & 0 & +K_{y42} \\ -K_{y13} & 0 & 0 & K_{y23} & K_{y33} & 0 & 0 & K_{y43} \\ 0 & -K_{x13} & -K_{x23} & 0 & 0 & K_{x33} & -K_{x43} & 0 \\ 0 & K_{x14} & +K_{x24} & 0 & 0 & -K_{x34} & K_{x44} & 0 \\ -K_{y14} & 0 & 0 & +K_{y24} & K_{y34} & 0 & 0 & K_{y44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

5.2.2) Matrizes de Massa/Inerciais/Giroscópica do Rotor em YZ

a - Energia Cinética de Translação (Plano YZ)

Conforme equação (5.1), pode-se escrever:

$$EC = \int_0^L MV_{xyz} \delta V = \frac{1}{2} \int_0^L M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \delta Z \quad (\text{Translação}) \quad (5.76)$$

$$EC = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b M_i (Y_i^2) \quad (\text{coordenadas cartesianas no plano}) \quad (5.77)$$

Em coordenadas generalizadas podemos dizer que para um elemento:

$$EC_E = \int_V \frac{1}{2} \rho [\dot{U}_{yz}]^T [\dot{U}_{yz}] \delta V \quad \rightarrow \quad \dot{U}_{yz} = N \dot{Q}_{yz}; \quad (5.78)$$

$$EC_E = [\dot{Q}_{yz}]^T \left\{ \int_V \frac{1}{2} \rho [N]^T [N] \delta V \right\} [\dot{Q}_{yz}] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \dot{Q}^{eT} [M_{e.}] \dot{Q}^e \quad (5.79)$$

A energia cinética do eixo em coordenadas generalizadas é:

$$EC_T = \sum_{e=1}^N EC_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \rho \dot{Q}^T \left[\int_V (N^T N) \delta V \right] \dot{Q} \quad (5.80)$$

A função de interpolação da velocidade é dada por:

$$\dot{U}_y = \frac{\partial u_y(z,t)}{\partial t} = \dot{q}_1 N_1 + \dot{q}_2 N_2 + \dot{q}_3 N_3 + \dot{q}_4 N_4 = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix} = N^e \dot{Q}^e \quad (5.81)$$

Aplicando-se Lagrange a $EC_E = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{Q}^T N^T N \dot{Q} \delta V$, vem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{Q}^T N^T N \dot{Q} \delta V}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{Q}} \left[\int_V \frac{1}{2} \rho N^T N \delta V \right] \dot{Q}^2 \right) \quad (5.82)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{Q}} \left[\int_V \frac{1}{2} \rho N^T N \delta V \right] \dot{Q}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial [M] \dot{Q}^2}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{2} [M] \dot{Q} \right) = [M] \ddot{Q} \quad (5.83)$$

$$[M] = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot N^T N \delta V = \frac{1}{2} \rho A \int_l N^T N \delta z \quad \rightarrow \quad (5.84)$$

procedendo de forma semelhante ao que foi feito na seção (5.2.1-a), vem:

$$q_{11} = \frac{\rho A l}{2} \int_0^L \left(1 - 6 \frac{z^2}{L^2} + 4 \frac{z^3}{L^3} + 9 \frac{z^4}{L^4} - 12 \frac{z^5}{L^5} + 4 \frac{z^6}{L^6} \right) dz = z - 2 \frac{z^3}{L^2} + \frac{z^4}{L^3} + \frac{9z^5}{5L^4} - 2 \frac{z^6}{L^5} + \frac{4z^7}{7L^6} \Big|_0^L \quad (5.85)$$

$$q_1 a_{11} q_1 = q_1 \frac{13 \rho A L}{35} \cdot q_1 = q_1 \frac{156 \rho A L}{420} \cdot q_1 \quad \rightarrow \quad m_{T1} = \frac{156 \rho A l}{420} \quad (5.86)$$

$$[M_e]_{YZ} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}; \quad [M_e]_{XZ} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Existem apenas 6 termos diferentes na matriz:

$$m_{T1} = 156a, \quad m_{T2} = 22la, \quad m_{T3} = 54a, \quad m_{T4} = 13la, \quad m_{T5} = 4l^2a, \quad m_{T6} = 3l^2a, \quad a = \frac{\rho A l}{420} \quad (5.88)$$

onde:

ρ - massa / unidade de volume,

A - área da seção transversal,

l - comprimento do elemento.

As matrizes de massa em YZ/XZ, são respectivamente:

$$[M_{TYZ}^e] \{ \ddot{Q}_{XZ}^e \} = \begin{bmatrix} m_{T1} & m_{T2} & m_{T3} & -m_{T4} \\ m_{T2} & m_{T5} & m_{T4} & -m_{T6} \\ m_{T3} & m_{T4} & m_{T1} & -m_{T2} \\ -m_{T4} & -m_{T6} & -m_{T2} & m_{T5} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{yi} \\ \ddot{\theta}_{xi} \\ \ddot{u}_{yj} \\ \ddot{\theta}_{xi} \end{Bmatrix}^e \quad (5.89)$$

$$[M_{TXZ}^e] \{ \ddot{Q}_{YZ}^e \} = \begin{bmatrix} m_{T1} & -m_{T2} & m_{T3} & m_{T4} \\ -m_{T2} & m_{T5} & -m_{T4} & -m_{T6} \\ m_{T3} & -m_{T4} & m_{T1} & m_{T2} \\ m_{T4} & -m_{T6} & m_{T2} & m_{T5} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xi} \\ \ddot{\theta}_{yi} \\ \ddot{u}_{xj} \\ \ddot{\theta}_{yi} \end{Bmatrix}^e \quad (5.90)$$

b - Matriz 3D de Massa em Translação

A matriz 3D abaixo é a matriz consistente de massa em translação sendo sempre simétrica e positiva definida. Aqui também os dois planos são desacoplados. Uma deformação angular infinitesimal na direção X não provoca nenhuma deformação em Y, de tal forma que: $\Delta q_1 \Rightarrow \delta q_1, 0q_2, 0q_3, \delta' q_4, \delta'' q_5, 0q_6, 0q_7, \delta''' q_8$,

Ou seja:

$$M_T^e \cdot \ddot{Q}^e = \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22l & 54 & 0 & 0 & -13l \\ 0 & 156 & -22l & 0 & 0 & 54 & 13l & 0 \\ 0 & -22l & 4l^2 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 \\ 22l & 0 & 0 & 4l^2 & 13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 156 & 0 & 0 & -22l \\ 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 156 & 22l & 0 \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 22l & 4l^2 & 0 \\ -13l & 0 & 0 & -3l^2 & -22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_8 \end{Bmatrix} \quad (5.91)$$

O novo vetor de aceleração das coordenadas generalizadas é:

$$\frac{\partial^2 u_y(z, t)}{\partial t^2} = \ddot{Q}^e = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xi} \\ \ddot{u}_{yi} \\ \ddot{\phi}_{xi} \\ \ddot{\phi}_{yi} \\ \ddot{u}_{xj} \\ \ddot{u}_{yj} \\ \ddot{\phi}_{xj} \\ \ddot{\phi}_{yj} \end{Bmatrix}; \quad \text{Laplace} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{Q}^T N^T N \dot{Q} dV}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{d}{dt} ([M] \dot{Q}) = [M] \ddot{Q} \quad (5.92)$$

Semelhantemente ao que ocorreu na seção (5.2.1.d) podemos dizer que:

$$\left[M_{XYZ}^e \right]^T = \left[M_{XYZ}^e \right] = \begin{bmatrix} +m_{T1} & 0 & 0 & +m_{T2} & m_{T3} & 0 & 0 & -m_{T4} \\ 0 & +m_{T1} & -m_{T2} & 0 & 0 & +m_{T3} & m_{T4} & 0 \\ 0 & -m_{T2} & m_{T5} & 0 & 0 & -m_{T4} & -m_{T6} & 0 \\ +m_{T2} & 0 & 0 & m_{T5} & m_{T4} & 0 & 0 & -m_{T6} \\ m_{T3} & 0 & 0 & m_{T4} & +m_{T1} & 0 & 0 & -m_{T2} \\ 0 & m_{T3} & -m_{T4} & 0 & 0 & +m_{T1} & m_{T2} & 0 \\ 0 & m_{T4} & -m_{T6} & 0 & 0 & m_{T2} & m_{T5} & 0 \\ -m_{T4} & 0 & 0 & -m_{T6} & -m_{T2} & 0 & 0 & m_{T5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_8 \end{Bmatrix} \quad (XY) \quad (5.93)$$

Após a aplicação da Transformação de Lagrange às parcelas de energia potencial e cinética, começa a tomar forma a equação homogênea de movimento do rotor:

$$[M_{eT}]\{\ddot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (\text{usada no problema de autovalor}) \quad (5.94)$$

$e \rightarrow$ eixo ; $eT \rightarrow$ eixo/Translação ; $e \rightarrow$ eixo

A mesma equação de movimento é escrita em 3D, para um sistema contínuo

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m\ddot{\eta} = 0 \quad (\text{problema de autovalor}) \quad (5.95)$$

$$[M_{eT}]\{\ddot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = Q \quad (\text{problema de resposta Dinâmica}) \quad (5.96)$$

c - Matriz 3D de Inércia Rotatória do Eixo (Plano YZ)

Conforme discutido no Capítulo II a energia cinética rotativa total de um eixo é dada na equação (5.2)

$$EC = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} I_d (\omega_x^2 + \omega_y^2) \right\} dz \quad (\text{coordenadas Cartesianas}) \quad (5.97)$$

Em coordenadas generalizadas podemos dizer que, para um elemento, a energia cinética rotatória associada é dada por T_2 (equação (5.4)):

$$EC_R = \sum_{e=1}^N EC_e = \sum_{e=1}^N \dot{Q}_{y,z}^T \left\{ \int_l \frac{1}{2} I_d [N']^T [N'] dz \right\} \dot{Q}_{y,z} \rightarrow \quad (5.98)$$

\rightarrow aplicando a Transformada de Lagrange \rightarrow

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_{y,z}} \left(\dot{Q}_{y,z}^T \left\{ \int_l \frac{1}{2} I_d [N']^T [N'] dz \right\} \dot{Q}_{y,z} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial [M_R] \dot{Q}^2}{\partial \dot{Q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{2} [M_R] \dot{Q} \right) = [M_R] \ddot{Q} \quad (5.99)$$

$$[M_{Ryz}] = \int_l I_d \cdot N'^T N' dz = \int_l I_d N'^T N' dz \rightarrow \quad (5.100)$$

Procedendo-se de forma semelhante ao que foi feito na seção (5.2.1-b), vem:

$$[M] = \frac{I_d}{L^3} \int_{L^e}^L [-6Lz + 6z^2, L^3 - 4zL^2 + 3z^2L, 6Lz - 6z^2, -2zL^2 + 3z^2L] \begin{bmatrix} -6Lz + 6z^2 \\ L^3 - 4zL^2 + 3z^2L \\ 6Lz - 6z^2 \\ -2zL^2 + 3z^2L \end{bmatrix} dz \quad (5.101)$$

$$a_{11} = I_d \int_0^L (36 \frac{z^2}{L^4} + 36 \frac{z^4}{L^6} - 72 \frac{z^3}{L^5}) dz \Rightarrow \frac{36}{L^6} (\frac{z^3 L^2}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^4 L}{2}) \Big|_0^L = \frac{36}{30L} \quad (5.102)$$

$$q_1 a_{11} q_1 = q_1 \frac{36 I_d}{30L} q_1 \Rightarrow m_{,11} = \frac{36 I_d}{30L} \quad (5.103)$$

$$a_{12} = \frac{I_d}{L^6} \int_0^L (-6L^4 z + 30L^3 z^2 - 42L^2 z^3 + 18Lz^4) dz = \frac{3L}{30L} \quad (5.104)$$

$$a_{13} = I_d \int_0^L (-36 \frac{z^2}{L^4} - 36 \frac{z^4}{L^6} + 72 \frac{z^3}{L^5}) dz \Rightarrow \frac{36}{L^6} (\frac{z^3 L^2}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^4 L}{2}) \Big|_0^L = \frac{36}{30L} \quad (5.105)$$

$$a_{14} = \frac{I_d}{L^6} \int_0^L (12L^3 z^2 - 30L^2 z^3 + 18Lz^4) dz \Rightarrow \frac{1}{L^6} (\frac{120L^6}{30} - \frac{225L^6}{30} + \frac{108L^6}{30}) \Big|_0^L = \frac{3L}{30L} \quad (5.106)$$

$$a_{22} = \frac{I_d}{L^4} \int_0^L (L^4 - 8zL^3 + 22z^2L^2 - 24Lz^3 + 9z^4) dz = \frac{4L^2}{30L} \quad (5.107)$$

$$a_{23} = \frac{I_d}{L^6} \int_0^L (6L^4 z - 30L^3 z^2 + 42L^2 z^3 - 18Lz^4) dz \Rightarrow \frac{1}{L^6} (\frac{90L^6}{30} - \frac{300L^6}{30} + \frac{315L^6}{30} - \frac{108L^6}{30}) \Big|_0^L = \frac{-3L}{30L} \quad (5.108)$$

$$a_{24} = \frac{I_d}{L^4} \int_0^L (-2zL^3 + 12z^2L^2 - 18Lz^3 + 9z^4) dz \Rightarrow \frac{1}{60L^4} (-60z^2L^3 + 220z^3L^2 - 270Lz^4 + 108z^5) \Big|_0^L = \frac{-L^2}{30L} \quad (5.109)$$

$$a_{34} = \frac{I_d}{L^6} \int_0^L (-12L^3 z^2 + 30L^2 z^3 - 18Lz^4) dz \Rightarrow \frac{1}{L^6} (-\frac{120L^6}{30} + \frac{225L^6}{30} - \frac{108L^6}{30}) \Big|_0^L = \frac{-3L}{30L} \quad (5.110)$$

$$a_{44} = \frac{I_d}{L^4} \int_0^L (4z^2L^2 - 12Lz^3 + 9z^4) dz \Rightarrow (\dots) \Big|_0^L \Rightarrow \frac{4L^2}{30L} \quad (5.111)$$

Sendo a matriz simétrica, podemos escrever:

$$[M_{Ryz}^{..e}] \{ \ddot{Q}_{yz}^{..e} \} = \frac{I_d}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xi} \\ \ddot{\theta}_{yi} \\ \ddot{u}_{xj} \\ \ddot{\theta}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (5.112)$$

Existem somente quatro termos diferentes na matriz:

$$m_{R,1} = 36b, m_{R,2} = 3lb, m_{R,3} = 4l^2b, m_{R,4} = l^2 \Rightarrow b = \frac{I_d}{30l} = \frac{\rho A r^2}{120l} \quad (5.113)$$

As matrizes consistentes de inércia rotatória multiplicadas pela aceleração são:

$$[M_{RXYZ}^e][\ddot{Q}^e] = \begin{bmatrix} m_{R1} & m_{R2} & -m_{R1} & m_{R2} \\ m_{R2} & m_{R3} & -m_{R2} & -m_{R4} \\ -m_{R1} & -m_{R2} & m_{R1} & -m_{R2} \\ m_{R2} & -m_{R4} & -m_{R2} & m_{R3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xi} \\ \ddot{\theta}_{yi} \\ \ddot{u}_{xj} \\ \ddot{\theta}_{yj} \end{Bmatrix}^e ; [M_{RYXZ}^e][\ddot{Q}^e] = \begin{bmatrix} m_{R1} & -m_{R2} & -m_{R1} & -m_{R2} \\ -m_{R2} & m_{R3} & m_{R2} & -m_{R4} \\ -m_{R1} & m_{R2} & m_{R1} & m_{R2} \\ -m_{R2} & -m_{R4} & m_{R2} & m_{R3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xi} \\ \ddot{\theta}_{yi} \\ \ddot{u}_{xj} \\ \ddot{\theta}_{yj} \end{Bmatrix}^e \quad (5.114)$$

d - Matriz 3D de Inércia de Rotação

A matriz 3D abaixo é a matriz consistente de inércia rotatória. É simétrica e positiva definida. Também aqui os dois planos são desacoplados.

Uma deformação angular infinitesimal na direção X não provoca nenhuma deformação em Y.

$$M_{R}^e \cdot \ddot{Q}_R^e = \frac{\rho A r^2}{120.l} \begin{bmatrix} +36 & ..0 & 0 & 3l & -36 & 0 & 0 & .3l \\ .0 & +36 & -3l & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 \\ 0 & -3l & .+4l^2 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 \\ +3l & 0 & 0 & +4l^2 & -3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 36 & 3l & 0 \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & +4l^2 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \\ \ddot{q}_7 \\ \ddot{q}_8 \end{Bmatrix} (XYZ) \quad (5.115)$$

Após a aplicação da transformada de Lagrange às parcelas de energia potencial e cinética, a equação homogênea de movimento do rotor toma a forma:

$$([M_{eT}] + [M_{eR}])\{\ddot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.116)$$

e → eixo ; eT → eixo/Translação ; eR → eixo/Rotação

A mesma equação de movimento é escrita abaixo, em 3D (coordenadas cartesianas), que para um sistema contínuo será:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} - I_d \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} = 0 \quad (5.117)$$

É importante relembrar que, no universo da rotodinâmica, as matrizes de inércia de translação e rotação do eixo sempre são reais simétricas definidas positivas.

e - Energia Cinética de Rotação do Eixo (Giroscópica)

A energia cinética associada ao efeito giroscópico dada por T_1 na equação (5.5)

é:

$$EC_G = T_1 = \sum_{j=1}^n f(q_1, q_2, \dots) \dot{q}_j \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ 2\Omega I_d \left(\omega_y \frac{\partial Y}{\partial Z} - \omega_x \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \right\} dz = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \Omega I_p \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \frac{\partial Y}{\partial Z} - \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \frac{\partial X}{\partial Z} \right) \right\} dz \quad (5.118)$$

Em coordenadas generalizadas podemos dizer que para um elemento de eixo

$$EC_G = \sum_{e=1}^N (\Omega) \int_l \frac{1}{2} I_p \dot{Q}^T [N']^T [N'] Q dl = (\Omega) \dot{Q}_{xz}^T [G] Q_{yz} \quad (5.119)$$

Aplicando-se Lagrange a esta energia cinética T_1 surge a matriz giroscópica:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_1}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{T_1}{\partial Q} = |g^e|^T - |g^e| = -|g^e| - |g^e| = G = \left(\int_l I_p [N']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [N'] dl \right) \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned} G = |g^e|^T - |g^e| &= \left(\int_l \frac{1}{2} I_p [N']^T [N'] dl \right)^T - \left(\int_l \frac{1}{2} I_p [N']^T [N'] dl \right) = \left(\int_l \frac{-2}{2} I_p [N']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [N'] dl \right) \rightarrow \\ &\rightarrow G = \left(\int_l I_p [N']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [N'] dl \right) \rightarrow \text{matriz giroscópica} \quad (5.121) \end{aligned}$$

A notação mostrada nas equações (5.120) e (5.121) nos permite a pronta montagem da matriz giroscópica 3D a partir da matriz de inércia de rotação 3D (GUNTER, E. J., WEN, J.C., 2005).

É interessante observar que a integral $\int_l \frac{1}{2} I_p [N']^T [N'] dl$ se repete nas duas matrizes.

Aplicando-se Lagrange a energia cinética (Ω constante), surge a matriz giroscópica:

$$G = \frac{d}{dt} \left(\frac{T_1}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{T_1}{\partial Q} = |g^e|^T - |g^e| = -2|g^e| = \left(\int_l I_p [N']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [N'] dl \right) \rightarrow \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned} (\Omega) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\dot{Q}_{xz}^T \left(\int_l \frac{1}{2} I_p [N']^T [N'] dl \right) Q_{yz} \right)}{\partial \dot{Q}_{xz}} \right) - \frac{\partial \left(\dot{Q}_{xz}^T \left(\int_l \frac{1}{2} I_p [N']^T [N'] dl \right) Q_{yz} \right)}{\partial Q} &\rightarrow \\ \rightarrow \Omega [G] \dot{Q} = \Omega \cdot \left(\int_l I_p [N']^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [N'] dl \right) \dot{Q} &\quad (5.123) \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\left(\int_{l/2}^L [N']^T [N'] dl \right) = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

e, portanto temos

$$a_{11} = I_p \int_0^L \left(36 \frac{z^2}{L^4} + 36 \frac{z^4}{L^6} - 72 \frac{z^3}{L^5} \right) dz \Rightarrow \frac{36}{L^6} \left(\frac{z^3 L^2}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^4 L}{2} \right) \Big|_0^L = \frac{36}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

Cálculo dos coeficientes da Matriz Giroscópica:

$$\dot{q}_1 a_{11} q_1 = \dot{q}_1 \frac{36I_p}{30l} \cdot q_1 = \left[\begin{array}{cc} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 0 & -36 \\ 36 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}, \quad (5.126)$$

$$\dot{q}_1 a_{13} q_3 = \dot{q}_1 \frac{3I_p}{30l} \cdot q_3 \left[\begin{array}{cc} 0 & -3l \\ -3l & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 3l & 0 \\ 0 & -3l \end{array} \right] \Rightarrow g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}, \quad (5.127)$$

$$\dot{q}_1 a_{15} q_5 = \dot{q}_1 \frac{-36I_p}{30l} \cdot q_5 \left[\begin{array}{cc} -36 & 0 \\ 0 & -36 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 0 & 36 \\ -36 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow g_{15}, g_{16}, g_{25}, g_{26} \quad (5.128)$$

$$\dot{q}_1 a_{17} q_7 = \dot{q}_1 \frac{3lI_p}{30l} \cdot q_7 \left[\begin{array}{cc} 0 & 3l \\ -3l & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 3l & 0 \\ 0 & 3l \end{array} \right] \Rightarrow g_{17}, g_{18}, g_{27}, g_{28} \quad (5.129)$$

$$\dot{q}_3 a_{33} q_3 = \dot{q}_3 \frac{4l^2 \cdot I_p}{30l} \cdot q_3 \left[\begin{array}{cc} 4l^2 & 0 \\ 0 & 4l^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 0 & -4l^2 \\ 4l^2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow g_{33}, g_{34}, g_{43}, g_{44} \quad (5.130)$$

$$\dot{q}_3 a_{35} q_5 = \dot{q}_3 \frac{-3lI_p}{30l} \cdot q_5 \left[\begin{array}{cc} 0 & 3l \\ -3l & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 3l & 0 \\ 0 & 3l \end{array} \right] \Rightarrow g_{35}, g_{36}, g_{45}, g_{46} \quad (5.131)$$

$$\dot{q}_5 a_{55} q_5 = \dot{q}_5 \frac{-l^2 \cdot I_p}{30l} \cdot q_5 \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -l^2 & 0 \\ 0 & -l^2 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 0 & -36 \\ 36 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow g_{55}, g_{56}, g_{65}, g_{66} \quad (5.132)$$

$$\dot{q}_5 a_{57} q_7 = \dot{q}_5 \frac{36I_p}{30l} \cdot q_7 \left[\begin{array}{cc} 0 & -3L \\ -3L & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} -3L & 0 \\ 0 & -3L \end{array} \right] \Rightarrow g_{57}, g_{58}, g_{67}, g_{68} \quad (5.133)$$

$$\dot{q}_7 a_{77} q_7 = \dot{q}_7 \frac{-3lI_p}{30l} \cdot q_7 \left[\begin{array}{cc} 4l^2 & 0 \\ 0 & 4l^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{I_p}{30L} \left[\begin{array}{cc} 0 & -4l^2 \\ 4l^2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow g_{77}, g_{78}, g_{87}, g_{88} \quad (5.134)$$

f - Matriz 3D Giroscópica

A matriz 3D abaixo é a matriz giroscópica consistente, sendo anti-simétrica.

Nesta expressão matricial vemos o vetor velocidade nodal multiplicando a matriz giroscópica. No caso da matriz de inércia de rotação, a mesma está multiplicada pelo vetor aceleração nodal.

$$[G_G^e] \dot{Q}_G^e = \frac{2\rho AR^2}{120l} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3l & 0 & .0 & +36 & 3l & 0 \\ \dots+36 & 0 & 0 & 3l & -36\dots & 0 & 0 & 3l \\ -3l & 0 & 0 & -4l^2 & 3l\dots & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & -3l & +4l^2 & 0 & 0\dots & 3l\dots & -l^2 & 0 \\ 0 & +36 & +3l & ..0 & ..0 & -36 & -3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & ..+36 & 00 & ..00 & -3l \\ -3l & 0 & 0 & .l^2 & ..+3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & -3l & -l^2 & ..0 & ..0 & +3l & +4l^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_{G1} = 36b, m_{G2} = 3lb, m_{G3} = 4l^2b, m_{G4} = l^2b \text{ e } b = \frac{2\rho AR^2}{120l} \quad (5.135)$$

Após a aplicação da transformada de Lagrange às parcelas de energia potencial e cinética, a equação homogênea de movimento do rotor se conformandoc

$$([M_{eT}] + [M_{eR}])\{\ddot{q}_e(t)\} + (\Omega [G_e])\{\dot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.136)$$

A matriz giroscópica é anti-simétrica e tem a forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & -m_{G1} & m_{G2} & 0 & 0 & m_{G1} & m_{G2} & 0 \\ m_{G1} & 0 & 0 & m_{G2} & -m_{G1} & 0 & 0 & m_{G2} \\ -m_{G2} & 0 & 0 & -m_{G3} & m_{G2} & 0 & 0 & m_{G4} \\ 0 & -m_{G2} & m_{G3} & 0 & 0 & m_{G2} & -m_{G4} & 0 \\ 0 & m_{G1} & m_{G2} & 0 & 0 & -m_{G1} & -m_{G2} & 0 \\ -m_{G1} & 0 & 0 & -m_{G2} & m_{G1} & 0 & 0 & -m_{G2} \\ -m_{G2} & 0 & 0 & m_{G4} & m_{G2} & 0 & 0 & -m_{G3} \\ 0 & -m_{G2} & -m_{G4} & 0 & 0 & m_{G2} & m_{G3} & 0 \end{bmatrix} \frac{2\rho Ar^2}{120l} = [G_e] \quad (5.137)$$

A mesma equação 3D de movimento do eixo contínuo é escrita abaixo em coordenadas cartesianas:

$$-EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m\ddot{\eta} + I_d \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2j\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) = 0 \quad (5.138)$$

A seguir mostraremos que o efeito giroscópico parece acoplar, num certo sentido, o movimento das coordenadas X e Y, usando, para isso a similaridade desta abordagem com a teoria do modelo contínuo

Sendo $\eta = X + jY$, conforme apresentado no Capítulo III, pode-se re-escrever

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m \ddot{\eta} - \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial^2 Z} + 2i\Omega \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} = 0 \quad (5.139)$$

substituindo $\eta = X + jY$, vem:

$$-EI \frac{\partial^4 (X + jY)}{\partial Z^4} - m(\ddot{X} + j\ddot{Y}) + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{\partial^2 (\ddot{X} + j\ddot{Y})}{\partial^2 Z} - 2i\Omega \frac{\partial^2 (\dot{X} + j\dot{Y})}{\partial Z^2} \right) = 0 \quad (5.140)$$

que pode ser dividida em duas equações diferenciais intrinsecamente acopladas:

$$\begin{cases} -EI \frac{\partial^4 (X)}{\partial Z^4} - m(\ddot{X}) + I_d \left(\frac{\partial^2 (\ddot{X})}{\partial^2 Z} + 2\Omega \frac{\partial^2 (\dot{Y})}{\partial Z^2} \right) = 0 \\ j \left(-EI \frac{\partial^4 (Y)}{\partial Z^4} - m(\ddot{Y}) + I_d \left(\frac{\partial^2 (\ddot{Y})}{\partial^2 Z} - 2\Omega \frac{\partial^2 (\dot{X})}{\partial Z^2} \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (5.141)$$

Podemos ver que as duas equações parecem ser acopladas nas variáveis X e Y

$$\begin{cases} -EI \frac{\partial^4 (X)}{\partial Z^4} - m(\ddot{X}) + I_d \left(\frac{\partial^2 (\ddot{X})}{\partial^2 Z} + 2\Omega \frac{\partial^2 (\dot{Y})}{\partial Z^2} \right) = 0 \\ -EI \frac{\partial^4 (Y)}{\partial Z^4} - m(\ddot{Y}) + I_d \left(\frac{\partial^2 (\ddot{Y})}{\partial^2 Z} - 2\Omega \frac{\partial^2 (\dot{X})}{\partial Z^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.142)$$

Este acoplamento no entanto está associado a um fenômeno dinâmico, o qual se desfaz quando eliminamos a variável tempo da equação diferencial.

Este assunto será discutido posteriormente. Nesta oportunidade mostra-se que o efeito giroscópico, por si só, não acopla os modos de vibração de um rotor, sendo possível o completo desacoplamento das equações de movimento que simulam o movimento.

5.3 Equação de Movimento do Rotor (Rotação Constante)

5.3.1 Equação de Movimento do Eixo

Aplicando-se a Equação de energia de Lagrange. Rao, 1999, p.351

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ; \quad \text{onde } j = 1,2,3,J; \quad (5.143)$$

Obtemos a equação Homogênea equação (5.136):

$$([M_{eT}] + [M_{eR}])\{\ddot{q}_e(t)\} + (\Omega [G_e])\{\dot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.144)$$

$$-EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m\ddot{\eta} + I_d \left(\frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} - 2j\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^{L_1} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m\ddot{\eta} + I_d \left(\frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} - 2j\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) \delta X \right\} \delta t \delta Z = 0 \quad (5.145)$$

Montando a matriz global do eixo, temos a equação de resposta dinâmica:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\}, \quad \text{onde:} \quad (5.146)$$

- [M] - matriz global de massa do eixo (simétrica/def/pos)
- [K] - matriz global de rigidez do eixo (simétrica/def)
- [G] - matriz giroscópica do eixo (anti- Simétrica)
- {Q(t)} - vetor de carga associado ao desbalanceamento

5.3.2 Equação de Movimento do Eixo/Disco

A energia total do disco (impelidor) é apresentada na Seção 4.3.2. É dada por:

$$\sum_{i=1}^b \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -M_i \ddot{X}_i \Delta(Z - Z_i) \delta X - M_i \ddot{Y}_i \Delta(Z - Z_i) \delta Y \right\} \delta Z \delta t$$

$$\sum_{i=1}^b I_{di} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\Delta'(Z - Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{X}}{\partial Z} \right) \delta X + \Delta'(Z - Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{Y}}{\partial Z} \right) \delta Y \right) \delta Z \delta t$$

$$2I_{di} \Omega \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Z} \delta X - \Delta'(Z - Z_i) \frac{\partial \dot{X}}{\partial Z} \delta Y \right) \delta Z \delta t \quad (5.147)$$

A energia do impelidor, em coordenadas generalizadas, é apresentada em GUNTER, E.J., WEN, J.C., 2005.

Matriz de energia cinética do disco (Impelidor)

$$EC = \frac{1}{2} \{\dot{q}_d\}^T \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \{\dot{q}_d\} + \frac{1}{2} \Omega I_p \{q_d\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \{q_d\} \rightarrow (5.148)$$

O impelidor não agrega nenhuma rigidez ao eixo, na medida em que a espessura do disco é considerada muito pequena. O elemento é representado por um ponto onde se introduz o efeito, giroscópico a inércia rotativa e a inércia de translação. Este elemento tem quatro graus de liberdade. O vetor $\{\dot{q}_d(t)\}$ define as velocidades generalizadas dos nós do impelidor. Aplicando-se Lagrange à energia cinética tem-se:

$$([M_{dT}] + [M_{dR}])\{\ddot{q}_d(t)\} + \Omega [G_d] \{\dot{q}_d(t)\} = \{Q_d(t)\} \quad (5.149)$$

Matriz associada ao disco rígido (Impelidor)

$$[M_{dT}] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [M_{dR}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}; [G_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

Equação matricial 3D do conjunto (eixo + disco)

Para rotação constante e aplicando-se a equação de Lagrange (energia cinética e potencial do conjunto), obtém-se a equação matricial seguinte:

$$([M_{eT}] + [M_{eR}] + [M_{dT}] + [M_{dR}])\{\ddot{q}_e(t)\} + (\Omega [G_e + G_d]) \{\dot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.151)$$

Asumindo-se: e → eixo, eT → eixo/Translação, eR → eixo/Rotação, d → disco, dT → disco/Translação, dR → disco/Rotação

A mesma equação de movimento é escrita, abaixo, aplicada a sistema contínuo:

$$- EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m \ddot{\eta} - \sum_1^b M_i \ddot{\eta}_i \Delta(Z - Z_i) + I_d \left(\frac{\partial^2 \ddot{\eta}}{\partial Z^2} - 2i\Omega \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} \right) + \sum_1^b I_{di} \Delta'(Z - Z_i) \left(\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \eta}{\partial Z} \right) = 0 \quad (5.152)$$

Na Seção (5.6.1) é analisada a ortogonalidade do efeito giroscópico. Cabe registrar que o método de elementos finitos não facilita esta discussão, por ser abstrato. Este fato pode induzir o usuário do método a pensar que o efeito giroscópico acopla as equações de movimento (modos de vibração) de um rotor.

Sendo Z o eixo de rotação, um momento aplicado em Y produzirá uma reação em X, ou vice-versa (reação é um acoplamento dinâmico). Isto não quer dizer que haja modos naturais acoplados, pois eles são independentes, com já foi demonstrado.

Em termos de sistema discreto mostraremos que “só pode” haver acoplamento das equações diferenciais em pares de autovalores conjugados $\lambda = \pm i\omega$.

As matrizes globais de resposta dinâmica ao desbalanceamento são:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\}, \text{ onde:} \quad (5.153)$$

- $[M]$ - matriz global de massa do eixo (simétrica/def/pos)
- $[K]$ - matriz global de rigidez do eixo (simétrica/def/pos)
- $[G]$ - matriz giroscópica do eixo (anti- Simétrica)
- $\{Q(t)\}$ - vetor de carga associado ao desbalanceamento

As matrizes do disco são colocadas em um único nó nos programas de computador.

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} = [M_{dT}] + [M_{dR}] \quad (5.154)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega I_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega I_p & 0 \end{bmatrix} = [G_d] \quad (5.155)$$

5.3.3) Equação de Movimento do Eixo/Disco/Mancais

O elemento mancal é considerado como uma associação mola amortecedor, em dois planos ortogonais. É modelado como um ponto que deverá estar conectado à extremidade de um elemento de eixo.

Os mancais não consideram os efeitos torsionais, e apresentam apenas dois graus de liberdade relativos aos deslocamentos dos pontos nas direções ortogonais ao eixo, descrevendo círculos ou elipses. Os mancais limitam-se a obedecer equação de governo

$$\{u_b(t)\} \rightarrow [C_b] \{\dot{q}_b(t)\} + [K_b] \{q_b(t)\} = \{Q_b(t)\} \quad b \rightarrow \text{bearing} \quad (5.156)$$

$$[C_b] = \begin{bmatrix} C_{i,i} & C_{i,j} \\ C_{j,i} & C_{j,j} \end{bmatrix}; [K_b] = \begin{bmatrix} K_{i,i} & K_{i,j} \\ K_{j,i} & K_{j,j} \end{bmatrix}; \{Q(t)\} \quad (5.157)$$

As matrizes dos dois mancais podem ser divididas em dois nós ou não, para efeito dos programas rotodinâmicos. Deve ainda ser considerada a rotação constante.

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{matriz de rigidez do mancal} \quad (5.158)$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{matriz de amortecimento do mancal} \quad (5.159)$$

Para rotação constante, aplicando-se a equação de Lagrange às energias cinética e potencial do conjunto, obtém-se a equação matricial seguinte:

$$([M_{eT}] + [M_{eR}] + [M_{dT}] + [M_{dR}])\{\ddot{q}_e(t)\} + ([C_b] + \Omega[G_e + G_d])\{\dot{q}_e(t)\} + [K_b + K_e]\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.160)$$

Após a montagem das matrizes globais, temos a equação de resposta dinâmica:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (5.161)$$

$[M] = ([M_{eT}] + [M_{eR}] + [M_{dT}] + [M_{dR}])$	matriz G. de Massa
$[K] = ([K_b] + [K_e])$	matriz G. de Rigidez
$[G] = ([C_b] + \Omega[G_e + G_d])$	matriz G. Giroscópica
$[C_b]$	matriz G. de Amortecimento
$\{Q(t)\}$	vetor de carga associado ao desbalanceamento

Esta última equação pode tornar-se mais geral com a introdução das forças circulatorias, (conforme MEIROVITCH, L.,1997), que são usadas para representar o acoplamento cruzado dos mancais (discutido na Seção 5.6.4.c):

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K + H]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (5.162)$$

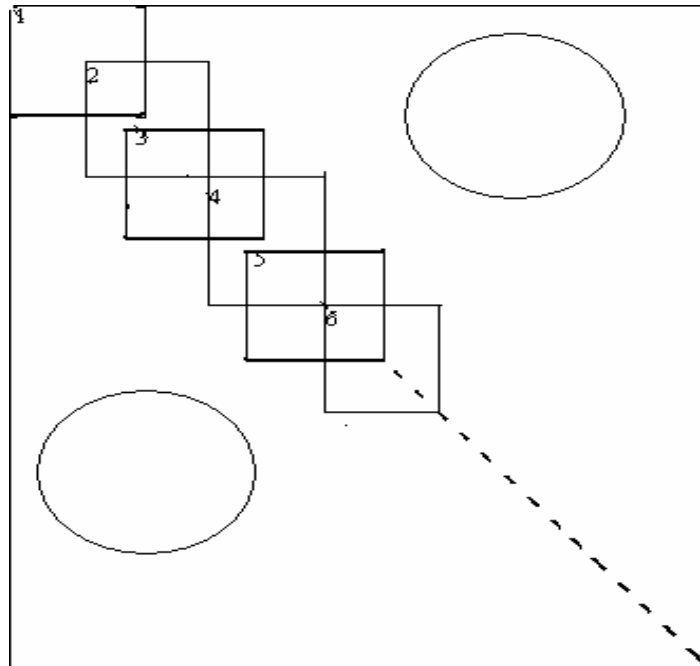


FIG 5.6 MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL

5.4 Discussão sobre a Rigidez dos Mancais

No caso de mancais isotrópicos (mancais que possuem as mesmas propriedades nas direções ortogonais X e Y, $K_{xx}=K_{yy}$), os termos cruzados são considerados nulos ($K_{xy}, K_{yx} = 0$)

A modelação dos mancais, juntamente com matriz de rigidez do eixo, incorpora aos “modos de corpo rígido do sistema” as condições de contorno associadas à sua suportação. “Modos de corpo rígido do sistema” não são necessariamente os modos de corpo rígido do eixo e não implicam em autovalores nulos, os quais somente ocorrem quando o modelo for livre livre “free free” ($K=0$). Sendo o eixo rígido com mancais flexíveis, os autovalores de corpo rígido do sistema, serão de acordo com PRODONOFF, V. , 1990, p68: $(\omega_1)^2 = \frac{2K}{m}$ e $(\omega_2)^2 = \frac{6K}{m}$, conforme ilustrado na figura 1.5.

Sendo o eixo rígido com mancais flexíveis, podemos dizer que os autovalores de corpo rígido do sistema, serão: $(\omega_1)^2 = \frac{2K}{m}$ e $(\omega_2)^2 = \frac{6K}{m}$ conforme ilustrado na figura 5.7.

Quando os mancais são isotrópicos as órbitas de todos os elementos do eixo se configuram como círculos no espaço e a solução do problema de autovalor está contida no plano. (Solução no Plano YZ é idêntica a solução no plano XZ desde que $(K_{xx} = K_{yy})$).

Quando os mancais são ortotrópicos (possuem termos cruzados e as propriedades são distintas nas direções ortogonais, planos YZ e XZ), as órbitas de todos os elementos do eixo se configuram como elipses no espaço e a solução do problema de autovalor não estará mais contida em um plano, assumindo a elástica forma reversa no espaço, conforme pode ser visto na figura 5.7.

A assimetria da rigidez dos mancais pode ainda causar dois outros efeitos inesperados, que serão apenas referidos nesta fase do trabalho.

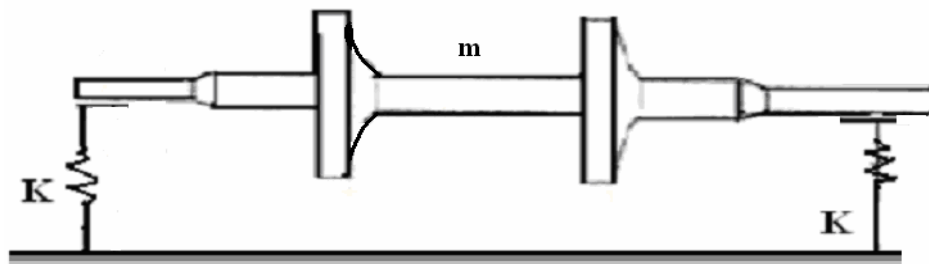


FIG 5.7 - ROTOR REAL SUPORTADO ENTRE MANCAIS.

O primeiro efeito indesejável é a possibilidade de uma resposta dinâmica com precessão no sentido inverso da rotação (*backward*). LALANNE, M., F. G.,1998 discute este fenômeno, o qual poderá ser observado na prática, somente nos casos em que os níveis de amortecimento forem tão baixos que permitam a sua manifestação.

A precessão reversa pode ocorrer em frequências próximas a uma das críticas do mancal, quando as mesmas são diferentes (as rigidezes nas direções X e Y são diferentes). A vibração reversa pode também estar associada à frequência natural *backward* do diagrama de Campbell, estando, neste caso, associada ao efeito giroscópico e a algum mecanismo de rotação reversa *backward* como o roçamento (*rubbing*) ou a alguma excitação eletromagnética.

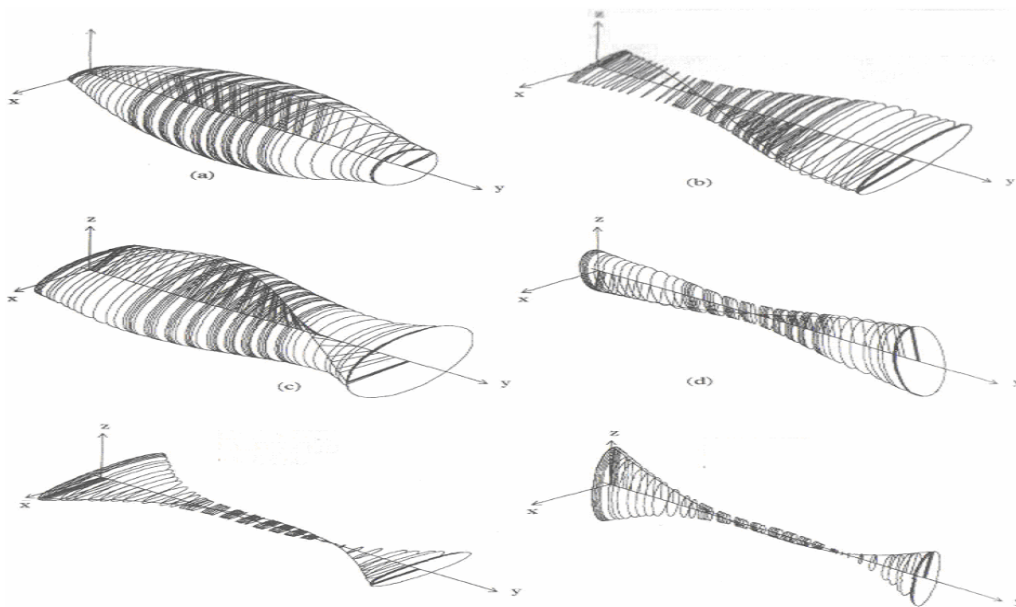


FIG 5. 8 ÓRBITAS ELÍPTICAS DE UM ROTOR REAL

O segundo efeito indesejável em mancais ortotrópicos é a instabilidade rotodinâmica (sendo ainda mais nocivo que o primeiro). Este fenômeno torna-se muito mais importante do que o primeiro por ser extremamente prejudicial ao funcionamento das turbomáquinas.

A instabilidade rotodinâmica produzida pelos mancais está associada fundamentalmente ao acoplamento cruzado (forças circulatórias referidas em MEIROVITCH, L.,1997), que tem sua principal origem nos termos cruzados de rigidez dos mancais. Este tipo de instabilidade será bastante discutida no CapítuloVI, com a apresentação de múltiplas abordagens.

5.5 Discussão sobre o Amortecimento dos Mancais

O amortecimento da vibração das turbomáquinas é um tópico da maior importância no projeto das mesmas, sendo esta uma das principais razões que tornam os mancais hidrodinâmicos a solução ideal para suspensão dos rotores de máquinas.

A matriz de amortecimento, utilizada na simulação dos mancais hidrodinâmicos, é normalmente assimétrica. Por este motivo ela se torna em um dos tópicos responsáveis pela complicação da solução do problema de autovalor. O amortecimento não permite que o problema de autovalor possa ser projetado em uma única base ortogonal.

O acoplamento físico introduzido pelo amortecimento permite que a vibração de um modo se superponha a vibração do outro modo. (Os autovetores não são ortogonais, no sentido amplo e a solução da elástica está fora do plano).

Objetivando a apresentação didática do processo de solução do problema de autovalor em sistemas amortecidos, são apresentadas algumas hipóteses para a simplificação do equacionamento antes de se partir para a solução do geral (assimétrico).

1) Amortecimento muito pequeno (de ordem inferior). Nestes casos o sistema é considerado desacoplado. Assume-se que os elementos fora da diagonal são pequenos (segunda ordem) e podem ser ignorados.

2) Na hipótese de amortecimento viscoso proporcional ambos os sistemas (amortecido e não amortecido) possuem os mesmos autovetores. Na prática esta hipótese aplica-se a estruturas de suporte de rotores $C_{rr} = (\alpha M + \beta K)$

A parcela de amortecimento da equação de movimento do eixo será:

$$[C]\{\dot{q}(t)\} = (\alpha M + \beta K)\{\dot{q}(t)\} \quad (5.161)$$

O amortecimento toma a forma acima, onde M e K são simétricas.

Sendo $\{\dot{q}(t)\} = [\Phi]\{\dot{\eta}\}$, pré-multiplicando-se a equação por Φ^T , tem-se (5.162) que é a projeção do amortecimento proporcional na base modal do sistema não amortecido, como segue:

$$\begin{aligned}
 & (\Phi^T \alpha [M] \Phi + \Phi^T \beta [K] \Phi) \{\dot{\eta}(t)\} \rightarrow \\
 & \rightarrow \Phi^T (\alpha [M] + \beta [K]) \Phi \{\dot{\eta}(t)\} \rightarrow [C] \dot{\eta}_r(t) \quad (5.162)
 \end{aligned}$$

$$[M] \ddot{\eta}_r(t) + [C] \dot{\eta}_r(t) + [K] \eta_r(t) = 0 ; \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.163)$$

[M] Matriz de Massa Diagonalizada - matriz modal de massa

[K] Matriz de Rigidez Diagonalizada - matriz modal de rigidez

[C] Matriz de Amortecimento Diagonalizada - matriz modal de amortecimento

O amortecimento viscoso proporcional pode também tomar a forma de amortecimento modal, conforme item 3.

3) Em alguns casos, onde o amortecimento dos mancais é suficientemente pequeno, o problema pode ser resolvido pelo método da superposição modal. Nestes casos podemos tirar vantagem do conceito de amortecimento proporcional, que simetriza a matriz de amortecimento. ($C_{rr} = 2 \cdot \xi_{rr} \cdot M_{rr}$). Na prática esta hipótese aplica-se a mancais de rolamento.

Fazendo-se $\beta = 0$ e $\alpha = 2 \cdot \xi_{rr}$ na equação (5.163):

$$[C] \dot{\eta}_r(t) \rightarrow C_{rr} = 2 \cdot \xi_{rr} \cdot M_{rr} \cdot \omega_{rr}; \quad \beta = 0 \quad \text{e} \quad \alpha = 2 \cdot \xi_{rr} \quad (5.164)$$

A equação de movimento será:

$$\ddot{\eta}_r + 2 \xi_{rr} M_{rr} \dot{\eta}_r + \eta_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad \text{e} \quad (5.165)$$

O fator de amortecimento modal ξ_{rr} representa o percentual do amortecimento crítico contido em cada modo e o seu valor será diferente em cada um destes modos, e seu valor é dado por:

$$\xi_{rr} = \frac{C_{rr}}{2M_{rr}\omega_{rr}} = \frac{C_{rr}}{C_c} \approx 1\% \rightarrow C_{rr} = 2 \cdot \xi_{rr} \cdot M_{rr} \cdot \omega_{rr} \quad (\text{amort. modal}), r = 1, 2, \dots, n \quad (5.166)$$

O amortecimento crítico C_c , medido em cada modo do rotor, pode ser calculado

$$\text{por:} \quad C_c \approx \frac{1}{2 \times FA}, \quad FA = \frac{\omega_{pico}}{\omega_1 - \omega_2} \quad (5.167)$$

onde FA é o fator de amplificação (fator de qualidade),

O fator de amortecimento modal pode ser calculado a partir do conceito do decremento logarítmico, conforme CLOUD,C.H,BARRETT,L.E, MASLEM,E.H,2004, por:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (5.168)$$

onde,

$$\delta = \ln\left(\frac{q.(t)}{q.(t+T)}\right) \text{ é o decremento logarítmico,} \quad (5.169)$$

O decremento logarítmico, que representa o logaritmo da taxa da redução do valor do pico de amplitude máxima modal decorrido um período de oscilação do sistema vibratório, também pode ser calculado a partir do autovalor de cada modo.

$$\text{Sendo } \lambda = a \pm i\omega_d \Rightarrow \quad (5.170)$$

onde:

$$a = -\xi\omega_n; \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \text{ e } \omega_d \rightarrow \text{freqüência natural amortecida} \quad (5.171)$$

N_d freqüência natural amortecida em (cpm)

$$\delta \approx -\frac{60a}{N_d} \quad (5.172)$$

4) No caso geral, entretanto, o amortecimento impede uma solução simplificada do problema. Nestes casos, o desacoplamento pode ser alcançado com a ajuda da transformação bi-ortogonal (MEIROVITCH, L.,1997, Seção 5.6.2.d). Ou ainda no caso mais geral, com a ajuda da teoria de controle, como veremos nas Seções (5.6.4) e (5.6.5).

Tendo discutido as questões trazidas pelo amortecimento e pela rigidez dos mancais, os quais podem acoplar os modos de vibração do sistema, podemos agora começar a discutir a resolução da equação diferencial de movimento do sistema.

5.6 Solução da Equação de Movimento (Autovalor)

O processo de solução da equação diferencial de movimento passa pela determinação das frequências naturais de vibração e de seus modos normais (solução do problema de autovalor). A solução da equação de movimento fica muito facilitada quando estamos diante de um sistema pouco giroscópico e de baixo amortecimento.

Solução das Equações Diferenciais Lineares Ordinárias (Base Modal):

Esta discussão sobre a solução da equação de movimento pode ter início com a apresentação da análise tradicional de sistemas elásticos, não amortecidos e sem efeito giroscópico.

$$[M_{eT}]\{\ddot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.173)$$

Nestes sistemas, as matrizes $[M]$ e $[K]$ são reais e simétricas. Aplicando-se a solução harmônica usual, $\{q(t)\} = \{Q\} e^{i\omega t}$, à equação de movimento, revela-se o problema de autovalor:

$$-\omega^2 [M]\{Q\} + [K]\{Q\} = 0 \rightarrow \quad (5.174)$$

$$\lambda [M]\{Q\} = [K]\{Q\} \rightarrow \text{Problema de Autovalor onde } \lambda = \omega^2 \quad (5.175)$$

Podemos calcular os autovalores e os autovetores, com a ajuda de algum solucionador de problemas de autovalor “eigensolvers”. Dessa forma tem-se:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \\ & & & & \omega_n \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de autovalor} \quad (5.176)$$

$$[\Phi] = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \quad \text{matriz de auto-vetor} \quad (5.177)$$

Toda vez que um problema de vibração (autovalor) puder ser equacionado (apresentado) na forma mostrada acima, onde $[K]$ e $[M]$ são matrizes reais, simétrica positivas definidas, estamos diante de um problema de autovalor no seu estado padrão

(“standard state”) e poderá ser resolvido seguindo-se a metodologia usualmente empregada na solução de problemas de vibração, conforme mostrado abaixo.

A solução usual passa pela separação das variáveis z , t e em seguida tem-se que resolver o problema apresentado na equação (5.175) e definir seus autovalores e seus auto-vetores para uma rotação constante (“eigensolvers”).

Fazendo $\{Q(t)\} = \{Q\} e^{i\omega t} = \Phi\{\eta\} = \sum_1^N \{\phi_r \eta_r\}$ e substituindo-se na equação(5.175), tem-se:

$$[M] \Phi\{\ddot{\eta}\} e^{i\omega t} + [K] \Phi\{\eta\} e^{i\omega t} = 0 \quad (5.178)$$

Pré-multiplicando por Φ^T , ou seja, projetando-se o sistema em sua base modal (trocando de sistema de coordenadas):

$$\Phi^T [M] \Phi\{\ddot{\eta}\} + \Phi^T [K] \Phi\{\eta\} = 0 ; \quad (5.179)$$

$$[M] \{\ddot{\eta}\} + [K] \{\eta\} = 0 \quad (5.180)$$

onde $[M]$ e $[K]$ são mtrizes diagonais

Equacionado-se o problema de autovalor (solução da equação homogênea) podemos resolver a equação associada ao problema de resposta dinâmica (solução particular), dada por:

$$[M] \Phi\{\ddot{\eta}\} + [K] \Phi\{\eta\} = \{P(t)\}; \quad (5.181)$$

Pré-multiplicando-se por Φ^T , vem::

$$\Phi^T [M] \Phi\{\ddot{\eta}\} + \Phi^T [K] \Phi\{\eta\} = \Phi^T \{P(t)\} ; \quad (5.182)$$

onde:

$$\Phi^T \{P(t)\} = F_r = F_r(t) \quad (5.183)$$

não necessita ser harmônica.

Obtem-se desta forma, a equação da resposta dinâmica sem amortecimento:

$$[M] \{\ddot{\eta}\} + [K] \{\eta\} = F_r \quad (5.184)$$

Se o sistema de equações torna-se desacoplado, isto equivale a dizer que $[M]$ e $[K]$ podem ser diagonalizadas e possuem inversa (simétricas positivas definidas)

O sistema de equações diferenciais será, portanto, constituído de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem independentes, que podem ser resolvidas uma a uma, explicitando, desta forma, as frequências naturais e a resposta dinâmica associadas a cada modo de vibração.

Resolvendo a equação de movimento:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \left(\frac{1}{M_r} \right) \Phi^T \{P_r(t)\} = \left(\frac{1}{M_r} \right) F_r = \omega_r^2 \left(\frac{1}{K_r} \right) F_r(t); \quad (5.185)$$

e sendo $F_r(t) = 1 \cdot \text{sen} \Omega t$, tem-se:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \omega_r^2 \left(\frac{1}{K_r} \right) F_r \Rightarrow \left(\frac{\omega_r^2 - \Omega^2}{\omega_r^2} \right) \eta_r = \left(\frac{1}{K_r} \right) F_r \Rightarrow \eta_r = \left(\frac{F_r}{K_r} \right) \left[\frac{1}{1 - (\Omega^2 / \omega_r^2)} \right] \quad (5.186)$$

Em concordância com o CRAIG Jr., R. R., 1981, e considerando-se $r = 1, 2, \dots, N$ a Função de Resposta em Frequência (FRF), de regime deste sistema é dada por:

$$\{\eta(t)\} = \frac{F_r}{K_r} \left[\frac{1}{1 - (\Omega / \omega_r)^2} \right] e^{i\Omega t}; \quad \{q(t)\} = \sum_1^N \{\phi_r\} \cdot \left| \frac{F_r}{K_r} \right| \left[\frac{1}{1 - (\Omega / \omega_r)^2} \right] e^{i\Omega t} \quad (5.187)$$

$$\begin{aligned} [M] \text{- Matriz de massa modal} & , \quad M_r = \phi_r^T [M] \phi_r \quad \Rightarrow M_r \\ [K] \text{- Matriz de rigidez modal} & , \quad K_r = \phi_r^T [K] \phi_r \quad \Rightarrow \omega_r^2 M_r \\ \{P\} \text{- Carregamento modal} & , \quad P_r(t) = \Phi^T \{P(t)\} \quad \Rightarrow F_r \end{aligned}$$

5.6.1) Transformações em Sistemas Lineares: Propriedades

Antes de prosseguirmos no processo de cálculo dos sistemas lineares, que são conseqüência natural do processo de resolução das equações de movimento, torna-se imperativo a implementação de novas ferramentas matemáticas para o desenvolvimento da solução dos sistemas dinâmicos. As propriedades inerentes aos sistemas lineares podem ser encontradas em MEIROVITCH, L, 1997. Estamos registrando, entretanto, a propriedade de ortogonalidade das bases modais em sistemas giroscópicos conservativos, conforme abaixo (propriedade inédita)

Ortogonalidade das Bases Modais em Sistemas Giroscópicos

Neste ponto é conveniente uma breve reflexão sobre a ortogonalidade em sistemas lineares. Na equação homogênea abaixo, temos a resolver um sistema giroscópico, o qual possui uma matriz anti-simétrica $[G]$, dada por

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0 \quad (5.188)$$

Sabemos da teoria do contínuo, que a equação acima é representada na referida teoria pela equação (5.189) mostrada abaixo.

Aplicando-se a separação de variáveis mostrada no Capítulo IV, a equação de derivadas parciais de quarta ordem torna-se em uma equação diferencial ordinária de quarta ordem, com coeficientes constantes e reais

$$-EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} - m\ddot{\eta} - \sum_1^b M_i \ddot{\eta}_i \Delta(Z - Z_i) + \sum_1^b I_{di} \Delta'(Z - Z_i) \left(\frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial Z} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Z} \right) = 0 \quad (5.189)$$

$$Q^{iv} + \alpha Q'' + \sum_1^b \bar{\alpha}_i \Delta'(z - z_i) Q' - \beta^4 Q - \sum_1^b \bar{\beta}_i^4 \Delta(z - z_i) Q = 0 \quad (5.190)$$

onde $\Delta(z - z_i)$ - delta de Dirac. A separação da variável “t” equivale a projeção da elástica no plano giratório.

Portanto, as soluções oriundas deste sistema são linearmente independentes ou, em outras palavras, os efeitos inerciais (entre eles o giroscópico) e de rigidez do eixo não acoplam as soluções (autovetores). Logo, os seus autovetores são linearmente independentes no sentido mais amplo (constituem uma base ortogonal).

Outra observação pertinente se refere à inexistência de condições de contorno nas referidas equações. Isto sugere que a vibração do conjunto rotativo pode ser decomposta através dos autovetores de sua base modal, independentemente da contribuição dos modos de corpo rígido, os quais estão associados às condições de contorno impostas ao rotor pelo sistema.

Os modos de corpo rígido de um rotor estão relacionados à posição média de equilíbrio do movimento vibratório.

Nós sabemos da teoria das equações diferenciais ordinárias de ordem n (com coeficientes constantes e reais), que a sua solução é linearmente independente e pertence a um plano. Portanto, podemos afirmar que o efeito giroscópico não acopla os autovetores de sua base ortogonal.

Infelizmente, o problema de autovalor relacionado à solução da equação de movimento do modelo giroscópico discreto não é simétrico.

Dentro da formulação de elementos finitos, torna-se difícil caracterizar a independência linear dos modos naturais de vibração dos sistemas giroscópicos, mesmo sabendo que os seus autovetores são linearmente independentes.

Nas seções (5.6.3, a e b) mostra-se que o problema de autovalor giroscópico conservativo pode tornar-se simétrico positivo definido, após a separação da variável “tempo”. Mostra-se ainda que é possível o desacoplamento das equações de movimento do modelo de elementos finitos (consistente) do rotor, empregando-se a base dos autovetores bi-ortogonais da matriz giroscópica $[G]$.

5.6.2) Solução da Equação de Movimento com Amortecimento Puro

Após o fortalecimento das ferramentas matemáticas, indispensáveis para o desenvolvimento dos sistemas dinâmicos e o estabelecimento das propriedades fundamentais do processo de solução dos sistemas lineares, estamos preparados para aplicação dos diversos métodos.

a - Solução Simplificada, Sistema com Amortecido Proporcional

A equação de movimento do sistema amortecido é apresentada abaixo:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (5.191)$$

O método de solução proposto para resolver esta equação é válido para casos em que o amortecimento é pequeno. Requer-se a definição inicial de uma base não amortecida para o sistema (problema de autovalor).

Este sistema, constituído somente pelas matrizes $[M]$ e $[K]$, foi resolvido na Seção (5.6). Aplicando-se a solução harmônica usual, $\{q(t)\} = Q.e^{i.w.t}$, à equação de movimento representativa deste movimento, em:

$$-\omega^2[M]\{Q\}e^{\omega.t} + [K]\{Q\}e^{\omega.t} = 0 \Rightarrow \lambda[M]\{Q\} = [K]\{Q\} \Rightarrow \text{(Autovalor)} \quad (5.192)$$

Calculando os autovalores e os autovetores, vem:

$$[\Phi] = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{i+1}\} \quad \text{matriz de autovetor} \quad (5.193)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \omega_{i+1}^2 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de autovalor} \quad (5.194)$$

Fazendo-se $\{q(t)\} = Q.e^{i.w.t} = \Phi\{\eta\} = \sum_1^N \{\phi_r \eta_r\}$ e pré-multiplicando-se por Φ^T , estamos projetando o sistema em sua base modal (trocando as bases do sistema de coordenadas generalizadas q pelas coordenadas modais η)

$$\Phi^T [M] \Phi \{\ddot{\eta}\} + \Phi^T [C] \Phi \{\dot{\eta}\} + \Phi^T [K] \Phi \{\eta\} = 0 ; \quad (5.195)$$

$$[M] \{\ddot{\eta}\} + [C] \{\dot{\eta}\} + [K] \{\eta\} = 0 \quad \text{(sistema homogêneo)} \quad (5.196)$$

Para resolver o problema de resposta dinâmica com amortecimento, o sistema deverá ser re-escrito em sua base modal como:

$$[M] \{\ddot{\eta}\} + [C] \{\dot{\eta}\} + [K] \{\eta\} = \Phi^T \{P(t)\} = F_r \quad (5.231^*)$$

$$F_r - \text{carga modal} \quad \Rightarrow \quad \{P(t)\} \Rightarrow \Phi_r^T \{P(t)\} = F_r(t)$$

onde:

$$[M] - \text{matriz de Massa Modal} \quad \Rightarrow \quad M_r = \phi_r^T [M] \phi_r$$

$$[C] - \text{matriz de amortecimento Modal} \quad \Rightarrow \quad C_r = \phi_r^T [C] \phi_r \Rightarrow 2M_{rr} \omega_{rr} \xi_{rr} \quad \text{(aproximação)}$$

$$[K] - \text{matriz de rigidez Modal} \quad \Rightarrow \quad K_r = \phi_r^T [K] \phi_r \quad \Rightarrow \quad \omega_r^2 M_r$$

Escrevendo-se as equações desacopladas e sendo $F_r = 1 \times e^{\Omega.t}$ uma função harmônica,

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \left(\frac{1}{M_{rr}} \right) \Phi^T P_r(t) = \left(\frac{1}{M_{rr}} \right) F_r(t) = \omega_r^2 \left(\frac{1}{K_r} \right) e^{\Omega t} \quad (5.196)$$

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \omega_r^2 \left(\frac{1}{K_r} \right) e^{\Omega t}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad e \quad (5.197)$$

$$\xi_r = \frac{C_{rr}}{2M_{rr}\omega_r} \rightarrow \xi_{rr} = \xi_r \Rightarrow \text{fator de amortecimento modal.} \quad (5.198)$$

Em concordância com o CRAIG Jr., R. R., 1981, e considerando-se $r = 1, 2, \dots, N$, pode-se escrever a Função de Resposta em Frequência deste sistema (FRF):

Sendo $r_r = \frac{\Omega}{\omega_r}$ e $\xi_r = \frac{C_{rr}}{2M_{rr}\omega_r}$, a solução de regime é dada por:

$$\eta_r(t) = \frac{F_r / K_r}{\sqrt{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2}} \cos(\Omega t - \alpha_r) \quad (5.199)$$

$$\tan \alpha_r = \frac{2r_r \xi_r}{1 - r_r^2}, \quad \text{ângulo de fase } \alpha \quad (5.200)$$

Função de transferência do sistema é dada por:

$$\text{Parte Imaginária } I(\bar{H}_{ij}) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{K_r} \right) \left[\frac{(1 - r_r^2)^2}{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2} \right] \quad (5.201)$$

$$\text{Parte Real (FRF) } R(\bar{H}_{ij}) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{K_r} \right) \left[\frac{-2\xi_r r_r}{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2} \right] \quad (5.202)$$

b - Solução Simplificada Para o Problema de Resposta Dinâmica (Truncamento)

Normalmente, estamos interessados em conhecer as três ou quatro primeiras frequências naturais do rotor e usamos estes resultados para resolver o problema de resposta dinâmica ao desbalanceamento.

O Diagrama “Bode” de uma máquina é caracterizado pela função de resposta em frequência, obtida a partir de uma massa desbalanceada que percorre a faixa de

varredura, sendo que os cálculos são realizados para cada rotação da máquina (rigidez dos mancais).

Seja: $[M]$ ($n \times n$); $[C]$ ($n \times n$); $[K]$ ($n \times n$) e $[\bar{\Phi}]$ ($n \times 3$)

Projetando-se estas matrizes em sua base modal, tem-se as n equações independentes abaixo.

$$\Phi^T [M] \Phi \{\ddot{\eta}(z)\} + \Phi^T [C] \Phi \{\dot{\eta}(z)\} + \Phi^T [K] \Phi \{\eta(z)\} = \{P\} \rightarrow n \text{ equações} \quad (5.203)$$

Seja $[\bar{\Phi}] \Rightarrow (3 \times 3)$, obtido de $[\Phi] \Rightarrow (n \times n)$, pela eliminação das últimas $(n-3)$ colunas.

A solução truncada surge quando aplicamos $[\bar{\Phi}]$ às matrizes originais, fazendo:

$$Q.e^{i\Omega t} = \bar{\Phi} \{\eta\} e^{i\Omega t} = \sum_1^3 \{\bar{\phi}_j \eta_j\} e^{i\Omega t} \quad (5.204)$$

$$\bar{\Phi}^T [M] \bar{\Phi} \{\ddot{\eta}(t)\} + \bar{\Phi}^T [C] \bar{\Phi} \{\dot{\eta}(t)\} + \bar{\Phi}^T [K] \bar{\Phi} \{\eta(t)\} = \bar{\Phi}^T \{P\} \Rightarrow 3 \text{ equações} \quad (5.205)$$

Esta transformação produzirá três equações independentes, como segue:

$$[M^*] \{\ddot{\eta}(t)\} + [G^*] \{\dot{\eta}(t)\} + [K^*] \{\eta(t)\} = [P^*] \cos \varphi \quad (5.206)$$

onde:

$$[M^*](3 \times 3) ; [G^*](3 \times 3) ; [K^*](3 \times 3) ; [P^*] (3 \times 3) \quad (5.207)$$

Em muitos casos o erro introduzido pelo truncamento pode ser considerado aceitável.

c - Solução Simplificada do Sistema com Amortecimento

Em alguns casos podemos obter melhores resultados com a hipótese de amortecimento viscoso, ou através da sua expansão $([\alpha M + \beta K])$, em uma série finita de matrizes simétricas:

$$M\ddot{q}_r(t) + C\dot{q}_r(t) + Kq_r(t) = Q; \sum_r q_r(t)_r = [\phi] \eta_r(t) \quad r=1,2,\dots,n \quad (5.208)$$

$$[\phi]^T M [\phi] \ddot{\eta}_r(t) + [\phi]^T C [\phi] \dot{\eta}_r(t) + [\phi]^T K [\phi] \eta_r(t) = [\phi]^T Q = \bar{Q} \quad (5.209)$$

$$[M] \ddot{\eta}_r(t) + [C] \dot{\eta}_r(t) + [K] \eta_r(t) = \bar{Q} \quad (5.210)$$

Na superposição modal havia sido suposto que $C_{rr} = 2 \cdot \xi_{rr} \cdot M_{rr} \cdot \omega_{rr}$.

Uma abordagem mais precisa pode ser formulada quando precisamos interpolar valores de amortecimento modal, sendo apresentada em LIMA, E. C. P., 1997. Considera-se que a matriz de amortecimento pode ser dada por dada por:

$$[C] = [M] \sum_{j=-s}^s a_j [D]^j ; \quad (5.211)$$

onde $[D] = [M]^{-1} [K]$ é não simétrica.

Nesta formula, a constante a_j reflete o maior ou menor grau de amortecimento imposto ao sistema em cada modo (frequência natural).

Variando-se s de -2 a 2 e conforme a equação (5.211) a expressão do amortecimento terá os termos seguintes:

$$C(-2) = [C] = M a_{-2} [D]^{-2} ; C(-1) = [C] = M a_{-1} [D]^{-1} ;$$

$$C(0) = [C] = M a_0 [D]^0 = a_0 [M] ;$$

$$C(1) = [D]^{-2} [C] = M a_1 \left(\frac{K}{M} \right) = a_1 [K] ;$$

$$C(2) = [C] = M a_2 [D]^2$$

$$[C] = M \sum_{j=-s}^s a_j [D]^j = a_{-2} M [D]^{-2} + a_{-1} M [D]^{-1} + a_0 M + a_1 K + M a_2 [D]^2 \quad (5.212)$$

Pré-multiplicando-se a equação (5.212) por $[M]^{-1}$, tem-se:

$$[I] \ddot{q}_r + [M]^{-1} [C] \dot{q}_r + [M]^{-1} [K] q_r = [M]^{-1} Q ; \quad (5.213)$$

Sendo $[U]$ e $[V]$ autovetores adjuntos da matriz assimétrica $[D] = [M]^{-1} [K]$, substituindo-se $\{q_r(t)\} = [U] \eta(t)$ e pré-multiplicando-se por $[V]^T$ a equação (5.213) tem-se:

$$[U] \ddot{\eta}_r + [M]^{-1} [C] [U] \dot{\eta}_r + [M]^{-1} [K] [U] \eta_r = [M]^{-1} Q ; [D] = [M]^{-1} [K] \quad (5.214)$$

$$[V]^T [U] \{\ddot{\eta}\} + [V]^T [M]^{-1} [C] [U] \{\dot{\eta}\} + [V]^T [M]^{-1} [K] [U] \{\eta\} = [V]^T [M]^{-1} Q \quad (5.215)$$

e substituindo-se, vem:

$$\ddot{\eta}_r + [V]^T [M]^{-1} [C] [U] \dot{\eta}_r + [V]^T [D] [U] \eta_r = [V]^T [M]^{-1} Q \quad (5.216)$$

$$\ddot{\eta}_r + \sum_{j=-r}^s a_j [\lambda]^j \dot{\eta}_r + [\lambda] \eta_r = \hat{Q} \quad (5.217)$$

Como a matriz espectral somente possui termos na diagonal, podemos desacoplar as equações do sistema da forma seguinte:

$$\ddot{\eta}_r + \left(\sum_{j=-s}^r a_j \omega_r^{2j} \right) \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = V^T [M]^{-1} Q \quad (5.218)$$

onde o termo escalar

$$C = \sum_{j=-s}^r a_j \omega_r^{2j} = a_{-2} M \left(\frac{1}{\omega_r^2} \right)^2 + a_{-1} M \left(\frac{1}{\omega_r^2} \right) + a_0 M + M a_1 K \omega_r^2 + M a_2 (\omega_r^2)^2 \quad (5.212^*)$$

deverá ser calculado para cada equação independente e leva à contribuição não apenas da frequência natural do modo de vibração, como no caso da superposição modal, mas também à contribuição de uma série formada a partir da frequência natural de interesse. O amortecimento proporcional é um caso particular desta abordagem, pois

$$(\alpha M + \beta K) \{\dot{q}(t)\} \quad \text{onde} \quad r=0 \quad \text{e} \quad s=1 \quad (5.219)$$

d - Solução Geral da Equação do Sistema Amortecido Puro

Seja: $[M]$ (nxn) ; $[C]$ (nxn) ; $[K]$ (nxn) na equação seguinte:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (5.220)$$

De maneira geral, a solução desta equação complexa, demandará um esforço computacional adicional, pois trata-se de um problema de autovalor complexo.

No mundo das turbomáquinas com mancais hidrodinâmicos, o amortecimento não é considerado pequeno e é responsável pelo acoplamento dos modos normais (autovetores).

O amortecimento é um dos elementos responsáveis pela distorção da elástica, fazendo com que ela se torne uma curva reversa no espaço. Re-escrevendo-se a equação(5.256) na forma de equação de estado e considerando $[I]\{\dot{q}(t)\} - [I]\{\dot{q}(t)\} = 0$, obtem-se:

$$[I]\{\dot{q}(t)\} + [M]\{\ddot{q}(t)\} + ([C])\{\dot{q}(t)\} - [I]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F\} \quad (5.221)$$

$$\dot{\eta}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \{F\} \rightarrow \quad (5.222)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}; \quad \eta(z) = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \text{ e } \dot{\eta}(z) = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} \quad (5.222a)$$

$$\dot{\eta}(t) = A \eta(t) + Bu(t) \rightarrow \text{(Equação } (2n \times 2n)) \quad (5.223)$$

Considerando-se que o problema de autovalor de primeira ordem admite solução da forma harmônica $\{\eta(t)\} = \{\eta\}e^{\lambda t}$, tem-se:

$$\lambda \eta(t) = [A]\eta(t) \quad ; \quad \lambda \eta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \eta \quad (5.224)$$

$$([A] - \lambda I)\eta = 0 \quad (5.225)$$

$$\det([A] - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} - \lambda I\right) = 0 \quad (5.226)$$

O maior esforço de um problema de cálculo modal reside em se achar os autovalores. Quando estes são encontrados, uma simples substituição dos seus valores no sistema homogêneo fornece os autovetores. O cálculo dos autovalores de um sistema $(2n \times 2n)$ é um esforço bem maior do que um sistema $(n \times n)$, podendo tornar o método inoperante. Para que este sistema tenha solução diferente da trivial é preciso que o determinante acima se anule. Anulando o determinante obtém-se os autovalores do sistema.

Este problema pode também ser abordado usando-se a teoria de controle, na qual é feita a integração, no domínio do tempo, das equações de estado (matriz não simétrica). Com a ajuda da teoria de controle nós podemos resolver este sistema de I/O (input/output) para identificar as suas variáveis de saída pela “integração no tempo”.

As saídas deste sistema rotodinâmico são deslocamentos nodais e velocidades nodais do sistema global original (não reduzido) e podem ser escritas na forma de variáveis de estado (resposta dinâmica):

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A \eta(t) + Bu(t) \\ Y = D \eta(t) \end{cases} \quad (5.227)$$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias típico da teoria de controle.

$$A = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} F \quad (5.228)$$

- $\eta(t) = \{q\}$ variável de estado (resposta no tempo da posição do nó) ;
- B vetor de “input”
- D matriz de saída (seleciona o nó de saída) ;
- $Y = D \eta(t)$ out-put conforme a teoria de controle;
- u variável de entrada, input do sistema de controle ;
- y saídas do sistema global não reduzido.

Para calcular as saídas do sistema, a equação acima é integrada nas bases da teoria de controle. Após a definição dos estados, a equação de saída $y = Dx$ é usada para determinar-se a resposta em cada nó do sistema global.

Uma vez definida a variável de estado, nós podemos definir a transformação que determina a resposta no tempo, em cada nó do sistema global. Esta transformação algébrica será detalhada em sua forma mais ampla na Seção (5.6.4.c).

5.6.3) Solução da Equação do Sistema Giroscópico Puro (Forma Padrão)

Nesta seção será apresentado um método original, desenvolvido na pesquisa de tese, para solução de sistemas giroscópicos puros.

Este método baseia-se na independência linear dos modos de vibração de um sistema giroscópico puro, o qual não acopla por si só os diversos autovetores do sistema rotodinâmico.

5.6.3.a) Problema de Autovalor: Sistema Giroscópico (Forma Padrão)

Resolvendo-se o problema de vibração, em sua forma padrão, tem-se:

$$[M]\{\ddot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (5.229)$$

A equação acima é transformada e assume a forma abaixo, após a separação de variáveis: $\{q\} = \{u\}e^{i\omega t}$; $\{\dot{q}\} = i\omega\{u\}e^{i\omega t}$; $\{\ddot{q}\} = -\omega^2\{u\}e^{i\omega t}$:

$$[-\omega^2 M + i\omega\Omega G + K]\{u\} = 0 \quad (5.230)$$

que é um problema de autovalor complexo.

As frequências naturais do sistema devem satisfazer a equação característica

$$\det [-\omega^2 M + i\omega\Omega G + K] = 0 \quad (5.231)$$

Sabemos que o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta. Sendo $[M]$ e $[K]$ simétricas e $[G]$ anti-simétrica, logo tem-se:

$$\det [-\omega^2 M + i\omega\Omega G + K]^T = \det [-\omega^2 M - i\omega\Omega G + K] = 0 \quad (5.232)$$

Portanto se $i\omega$ é solução para a equação característica (autovalor), $-i\omega$ também o será. Desta forma, os autovalores do sistema giroscópico conservativo ocorrem em pares de complexos conjugados puros $\pm i\omega$. Os autovetores adjuntos, associados aos autovalores $\pm i\omega$, são complexos conjugados.

O problema de autovalor acima é complexo e contém as variáveis ω em $\Omega[G]$ e ω^2 em $[K]$. Deverá ser resolvido para cada rotação Ω (variante com a rotação).

5.6.3.a-1) Exercício Giroscópico 1 (Roda de Bicicleta 1):

A investigação da solução de um problema giroscópico puro, em sua forma padrão, será feita através da apresentação de diversos exemplos, que incorporem as propriedades giroscópicas ao modelo físico, de forma independente.

Dentro desta metodologia, vamos introduzir os conceitos desenvolvidos nesta pesquisa de tese. Esta abordagem será útil para o estabelecimento de conceitos associados ao efeito giroscópico.

Calculemos a matriz giroscópica representativa do sistema da figura 5.8: (roda de bicicleta).

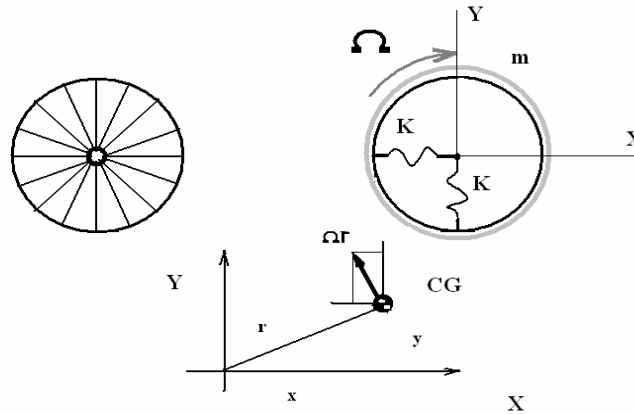


FIG 5.9 EXERCÍCIO GIROSCÓPICO 1

Energia Cinética

$$EC = \frac{1}{2} m [(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2] = T \quad (5.233)$$

Sendo x e y coordenadas do sistema xy móvel girando com a roda

Energia Potencial

$$EP = \frac{1}{2} [Kx^2 + Ky^2] = U \quad (5.234)$$

Aplicando-se o Princípio de Hamilton obtém-se as equações diferenciais:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (5.235)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y} - m\Omega^2x + Kx = 0 \\ m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} - m\Omega^2y + Ky = 0 \end{cases} \quad (5.236)$$

re-escrevendo esta equação em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.237)$$

trocando-se $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ por $\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$, vem:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + [G] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow [M] \{\ddot{q}\} + [G] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (5.238)$$

$$\text{sendo } M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K - m\Omega^2 \end{bmatrix}; \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

Pesquisa de Base Modal usando a Matriz de Autovetores Giroscópica e Solução:

Determinação de autovalores e autovetores da matriz giroscópica:

$$[[G] - \lambda I] \{u\} = \{0\} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0-\lambda & -2m\Omega-0 \\ 2m\Omega-0 & 0-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.239)$$

$$\text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & -2m\Omega \\ 2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\lambda u_1 - 2m\Omega u_2 = 0 \\ 2m\Omega u_1 - \lambda u_2 = 0 \end{cases} \quad (5.240)$$

$$\text{Equação característica} \rightarrow \lambda^2 + 4m^2\Omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -4m^2\Omega^2 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.2m\Omega \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}[G] = 0 \rightarrow \quad (5.241)$$

Podemos dizer que a matriz giroscópica possui duas frequências naturais: uma “*forward*” e outra “*backward*”. Considerando-se $\lambda_1 = +2im\Omega$ e substituindo-se na primeira equação \rightarrow “*forward whirl*” .

$$-\lambda_1 u_1 - 2m\Omega u_2 = 0 \rightarrow -i.2m\Omega u_1 - 2m\Omega u_2 = 0 \rightarrow u_2 = -iu_1 \quad (5.242)$$

$$\text{Fazendo } u_1 = a \rightarrow u_2 = -ia \rightarrow \lambda_1 = +2im\Omega \text{ e } \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} a \\ -ia \end{Bmatrix} \text{ (autovetor 1)}$$

Considerando $\lambda_2 = -2im\Omega$ na primeira equação tem-se $u_2 = iu_1$ “*backward whirl*”

Fazendo $u_1 = b \rightarrow u_2 = ib \rightarrow \lambda_1 = -2im\Omega$ e $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} b \\ ib \end{Bmatrix}$ (autovetor 2)

Os autovalores desta matriz são complexos puros conjugados: $\lambda_{1,2} = \pm 2im\Omega$

Os autovetores desta matriz são complexos conjugados.

O autovetor $\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} a \\ -ia \end{Bmatrix}$ mostra que, estando o sistema girando em sua frequência natural ($\lambda_1 = +2im\Omega$, em movimento “forward”), um movimento cíclico do anel na direção $x = a$, produz um movimento de mesma amplitude na direção $y = -ia$, sendo que este movimento estará defasado no tempo de um intervalo de equivalente a um giro de fase de 90 graus.

O CG do anel percorre órbita circular (“forward whirl”).

Por outro lado, o autovetor $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} b \\ ib \end{Bmatrix}$ mostra que, estando o sistema operando em sua frequência natural “backward”, um movimento cíclico do anel na direção $y = b$, produz um movimento de mesma amplitude na direção $x = ib$, sendo que este movimento estará defasado no tempo, de um giro de fase de 90 graus. “backward whirl”

Podemos mostrar que estes autovetores não são ortogonais:

$$\{u\}_1^T \{u\}_1 = \{a, -ia\} \begin{Bmatrix} a \\ -ia \end{Bmatrix} = a^2 + i^2 a^2 = 0 \quad (5.243)$$

$$\{u\}_2^T \{u\}_2 = \{b, ib\} \begin{Bmatrix} b \\ ib \end{Bmatrix} = b^2 + i^2 b^2 = 0 \quad (5.244)$$

$$\{u\}_1^T \{u\}_2 = \{u\}_2^T \{u\}_1 = \{b, ib\} \begin{Bmatrix} a \\ -ia \end{Bmatrix} = ab - i^2 ab = 2ab \quad (5.245)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} a & b \\ -ia & ib \end{bmatrix} \rightarrow [U]^T [U] = \begin{bmatrix} a & -ia \\ b & ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -ia & ib \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + i^2 a^2 & ab - i^2 ab \\ ab - i^2 ab & b^2 + i^2 b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2ab \\ 2ab & 0 \end{bmatrix} \quad (5.246)$$

A não ortogonalidade dos autovetores da matriz $[G]$ é plenamente esperada na medida em que a matriz $[G]$ é não simétrica (anti-simétrica).

É importante destacar que a operação $[U][U]^T$, não diagonaliza a matriz $[G]$. Arbitrando-se ($a = b = 1$; para $\rightarrow K_x = K_y = K$) tem-se:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \quad (5.247)$$

Determinação de autovalores e autovetores adjunto: Investigando-se a solução do problema de autovalor adjunto e a determinação dos autovetores adjuntos de $[G]^T = -[G]$, vem:

$$\begin{aligned} [[G]^T - \lambda[I]]\{v\} = \{0\} &\rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 2m\Omega \\ -2m\Omega & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 0-\lambda & 2m\Omega-0 \\ -2m\Omega-0 & 0-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & 2m\Omega \\ -2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.248)$$

$$\begin{cases} -\lambda v_1 + 2m\Omega v_2 = 0 \\ -2m\Omega v_1 - \lambda v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{equação característica} \rightarrow \lambda^2 + 4m^2\Omega^2 = 0 \quad (5.249)$$

$$\lambda^2 = -4m^2\Omega^2 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2im\Omega \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}[G] = 0 \rightarrow (\text{autovalor}) \quad (5.250)$$

Como já era esperado, constatamos que os autovalores da matriz transposta $[G]^T$ são os mesmos da matriz $[G]$. (frequências naturais “forward” e “backward”).

Considerando-se $\lambda_1 = +2im\Omega$ e substituindo-se na primeira equação \rightarrow “forward whirl”

$$-\lambda_1 v_1 + 2m\Omega v_2 = 0 \rightarrow -i.2m\Omega v_1 + 2m\Omega v_2 = 0 \rightarrow v_2 = i v_1 \quad (5.251)$$

$$\text{Fazendo-se } v_1 = c \rightarrow v_2 = ic \rightarrow \lambda_1 = +2im\Omega \text{ e } \{v_1\} = \begin{Bmatrix} c \\ ic \end{Bmatrix} \text{ (auto-vetor 1)}$$

Considerando-se $\lambda_2 = -2im\Omega$ e substituindo-se na primeira equação tem-se:

$$v_2 = -i v_1. \text{ Fazendo-se } v_1 = d \rightarrow v_2 = -id \rightarrow \lambda_2 = -2im\Omega \text{ e } \{v_2\} = \begin{Bmatrix} d \\ -id \end{Bmatrix} \text{ (auto-vetor 2)}$$

Os autovalores de $[G]^T$ são complexos puros conjugados: $\lambda_{1,2} = \pm 2im\Omega$, os autovetores de $[G]^T$ são complexos conjugados e são não ortogonais:

$$[V] = \begin{bmatrix} c & d \\ ic & -id \end{bmatrix} \rightarrow [V]^T [V] = \begin{bmatrix} c & ic \\ d & -id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ ic & -id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + i^2 c^2 & cd - i^2 cd \\ cd - i^2 cd & d^2 + i^2 d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2cd \\ 2cd & 0 \end{bmatrix} \quad (5.252)$$

Constatamos que os autovetores de $[G]^T$ também são não ortogonais na medida em que a matriz $[G]^T$ é não simétrica.

Caracterização da Base Bi-ortogonal: verificaremos agora propriedade de Bi-ortogonalidade, característica das matrizes não simétricas $[U]^T [G]^T [V] = \lambda [I]$:

$$[U]^T [V] = \begin{bmatrix} a & -ia \\ b & ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ ic & -id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - i^2 ac & ad + i^2 ad \\ bc + i^2 bc & bd - i^2 bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ac & 0 \\ 0 & 2bd \end{bmatrix} = [V]^T [U] \quad (5.253)$$

Logo, a matriz $[U]$ é linearmente independente da matriz $[V]$. \rightarrow (autovetores de $[G]$ são ortogonais (bi-ortogonalidade) aos autovetores de $[G]^T$).

Normalização dos Autovetores Biorrtogonais:

Primeiro auto-vetor e seu auto-adjunto

$$\{u\}_{j_1}^T \{v\}_{j_1} = \{a, -ia\} \begin{bmatrix} c \\ ic \end{bmatrix} = 2ac \rightarrow \{u\}_{j_1} = \frac{1}{\sqrt{2ac}} \begin{bmatrix} a \\ -ia \end{bmatrix}; \{v\}_{j_1} = \frac{1}{\sqrt{2ac}} \begin{bmatrix} c \\ ic \end{bmatrix} \quad (5.254)$$

Segundo auto-vetor com seu autovetor-adjunto

$$\{u\}_{j_2}^T \{v\}_{j_2} = \{b, ib\} \begin{bmatrix} d \\ -id \end{bmatrix} = 2bd \rightarrow \{v\}_{j_2} = \frac{1}{\sqrt{2bd}} \begin{bmatrix} b \\ ib \end{bmatrix}; \{u\}_{j_2} = \frac{1}{\sqrt{2bd}} \begin{bmatrix} d \\ -id \end{bmatrix} \quad (5.255)$$

$$[U]^T [V] = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{2ac}} & \frac{-ia}{\sqrt{2ac}} \\ \frac{b}{\sqrt{2bd}} & \frac{ib}{\sqrt{2bd}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{2ac}} & \frac{d}{\sqrt{2bd}} \\ \frac{ic}{\sqrt{2ac}} & \frac{-id}{\sqrt{2bd}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (5.256)$$

Como a, b, c, d são valores arbitrários, sejam $a=1$; $b=1$; $c=1$; $d=1$.

$$[U]_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = [U]; [V]_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = [V]; [U]_n^T [V]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.257)$$

Observando as matrizes normalizadas $[U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ e $[V] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$, vemos que o auto-vetor $\{u\}_{j_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \rightarrow x$ da base $[G]$ se transforma no auto-vetor

$\{v\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix} \rightarrow y$ da matriz transposta $[G]^T$, o que sugere que a operação de transposição da matriz giroscópica, equivale a uma rotação do referencial inercial.

Diagonalização das Matrizes $[M]$, $[G]$, $[K]$ Modais: $\{u\}_1 = 1$

Vamos agora utilizar as Matrizes $[U]$ e $[V]$ para diagonalizar a matriz $[G]$.

$$[V]^T [G] [U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2m\Omega \\ -2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i2m\Omega & 0 \\ 0 & i2m\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5.258)$$

Operando-se agora com as matrizes $[U]$ e $[V]$ para diagonalizar a matriz $[G]^T$, vem:

$$[U]^T [G]^T [V] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i2m\Omega & 0 \\ 0 & i2m\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5.259)$$

Nesta seção mostramos que a matriz giroscópica, segue as propriedades comuns de uma matriz não simétrica, bem como a sua transposta. Por ser a matriz $[G]$ anti-simétrica, seu traço é nulo, e, portanto, a soma de seus autovalores também será nula.

Diagonalização da matriz de massa $[M] = [V]^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} [U]$:

$$[V]^T [M] [U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & m \\ -im & im \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = [U]^T [M] [V] \quad (5.260)$$

Diagonalização da matriz de rigidez $[K] = [V]^T \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K - m\Omega^2 \end{bmatrix} [U]$

$$\begin{aligned} [V]^T [K] [U] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K - m\Omega^2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & K - m\Omega^2 \\ -i(K - m\Omega^2) & i(K - m\Omega^2) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(K - m\Omega^2) & 0 \\ 0 & 2(K - m\Omega^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K - m\Omega^2 \end{bmatrix} = [U]^T [K] [V] \quad (5.261) \end{aligned}$$

5.6.3.a-2) Prova do Desacoplamento do Sistema Giroscópico Puro

Tese:

“Os autovetores adjuntos da matriz Giroscópica $[G]$ (matriz anti-simétrica) são os mesmos autovetores do problema dinâmico representado pelo sistema $([M], [G], [K])$, sendo $[M]$ e $[K]$ matrizes simétricas. Os autovetores adjuntos

da matriz Giroscópica $[G]$ serão portanto empregados para desacoplar as equações diferenciais de movimento do sistema dinâmico $([M], [G], [K])$.

A demonstração desta propriedade é feita inicialmente para um modelo de dois graus de liberdade, através da demonstração da propriedade dos autovetores adjuntos da matriz giroscópica, de desacoplar as equações de movimento do sistema giroscópico conservativo.

Posteriormente será estendida na seção (5.6.3.a-4), para um sistema $(n \times n)$.

Os autovetores do sistema $[M], [G], [K]$ são deduzidos literalmente e comparados com os autovetores de $[G]$. Serão, então, discutidas as circunstâncias de igualdade dos autovetores. Posteriormente, prova-se que estes autovetores desacoplam as equações de movimento de um sistema $n \times n$, em $n/2$ sistemas independentes de equações duplas. Esta prova será posteriormente complementada (por analogia), fazendo-se uso da formulação da teoria do contínuo.

Esta demonstração dá ensejo a um método inédito de desacoplamento das equações de movimento de sistemas giroscópicos conservativos.

Equação diferencial do sistema livre: Seja o problema representado pela equação abaixo:

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G]) \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow [M] = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} = [M]^T; \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & g_{1,2} \\ g_{2,1} & 0 \end{bmatrix} = -[G]^T \quad \text{e} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} = [K]^T \quad (5.262)$$

Sendo: $g_{1,2} = -g_{2,1}$

Autovalores e Autovetores Adjuntos da Matriz $[G]$

Dando-se proceguimento à prova, e, quacionando-se o problema de autovalor tem-se:

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & g_{1,2} \\ g_{1,2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda u_1 + g_{1,2} u_2 = 0 \\ g_{1,2} u_1 - \lambda u_2 = 0 \end{cases} \quad (5.263)$$

Portanto, o determinante e a equação característicos são

$$Det \begin{bmatrix} -\lambda & g_{1,2} \\ -g_{1,2} & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + g_{1,2}g_{1,2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -ig_{12} ; \lambda_2 = +ig_{12} \quad (5.264)$$

Procedendo-se igualmente, sendo $\{u\}_2 = 1$ e $\{v\}_2 = 1$, tem-se que $[U]$ e $[V]$ de $[G]$ são:

$$[U] = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [V] = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sendo } [V]^T[U] = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.265)$$

Autovalores e Autovetores Adjuntos do Sistema $[M]$, $[G]$, $[K]$

Seja o sistema giroscópico representado por

$$(\lambda^2[M] + \lambda[G] + [K])\{u\} = 0 \quad (5.266)$$

substituindo-se $\{u\}$, $[M]$, $[G]$, $[K]$ teremos o determinante característico do sistema.

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 m_{1,1} + K_{1,1} & \lambda^2 m_{1,2} + \lambda g_{1,2} + K_{1,2} \\ \lambda^2 m_{1,2} - \lambda g_{1,2} + K_{1,2} & \lambda^2 m_{2,2} + K_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.267)$$

A equação característica do sistema dinâmico $([M]$, $[G]$, $[K])$ tem a forma seguinte:

$$m_{1,1}m_{2,2}\lambda^4 + (m_{1,1}K_{2,2} + m_{2,2}K_{1,1})\lambda^2 + k_{1,1}K_{2,2} - ((\lambda^2 m_{1,2} + K_{1,2})^2 - (\lambda g_{1,2})^2) = 0 \quad (5.268)$$

Os autovalores desta equação característica são complexos conjugados imaginários e têm a forma $\lambda_1 = -i\omega$ e $\lambda_2 = i\omega$, sendo $\lambda^2 = -\omega^2$ e $\lambda^4 = \omega^4$. Substituindo-se os valores de λ em (5.268) obtém-se a equação característica explicitada em função da frequência natural:

$$(m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}^2)\omega^4 + (-m_{1,1}K_{2,2} - m_{2,2}K_{1,1} + 2m_{1,2}K_{1,2} - g_{1,2}^2)\omega^2 + (k_{1,1}K_{2,2} - K_{1,2}^2) = 0 \quad (5.269)$$

Não calcularemos os autovalores deste sistema giroscópico, porém mostraremos que os seus autovetores são idênticos aos autovetores da matriz $[G]$, isoladamente.

A matriz da equação (5.267) é rerepresentada na forma de sistema de equações homogêneas.

$$(\lambda^2 m_{1,1} + k_{1,1})u_1 + (\lambda^2 m_{1,2} - \lambda g_{1,2} + k_{1,2})u_2 = 0 \quad (5.270)$$

$$(\lambda^2 m_{1,2} + \lambda g_{1,2} + k_{1,2})u_1 + (\lambda^2 m_{2,2} + k_{2,2})u_2 = 0 \quad (5.271)$$

Sabemos que os autovalores do sistema apresentado nas equações (5.270) e (5.271) são da forma $\lambda_1 = -i\omega$ e $\lambda_2 = i\omega$. Usaremos a equação (5.271) para determinação dos auto-vetores do sistema homogêneo. Fazendo $\lambda_1 = -i\omega$ podemos dizer:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \frac{-(\lambda_1^2 m_{2,2} + k_{2,2})}{(\lambda_1^2 m_{1,2} + \lambda_1 g_{1,2} + k_{1,2})} u_2^{(1)} \Rightarrow u_1 = \frac{-(k_{2,2} - \omega^2 m_{2,2})}{(-m_{1,2} \omega^2 - i g_{1,2} \omega + k_{1,2})} u_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_1 = \frac{-(k_{2,2} - m_{2,2} \omega^2) \times [(k_{1,2} - m_{1,2} \omega^2) + (i g_{1,2} \omega)]}{(k_{1,2} - m_{1,2} \omega^2)^2 + (g_{1,2} \omega)^2} u_2 \Rightarrow \\ u_1^{(1)} &= \frac{[-m_{2,2} m_{1,2} \omega^4 + (k_{2,2} m_{1,2} + k_{1,2} m_{2,2}) \omega^2 - k_{2,2} k_{1,2}] - i(k_{2,2} g_{1,2} \omega - m_{2,2} g_{1,2} \omega^3)}{(k_{1,2} - m_{1,2} \omega^2)^2 + (g_{1,2} \omega)^2} u_2^{(1)} \quad (5.272) \end{aligned}$$

Considerando-se a equação homogênea (5.271) e fazendo $\lambda_2 = i\omega$ podemos dizer que:

$$u_1^{(2)} = \frac{[-m_{2,2} m_{1,2} \omega^4 + (k_{2,2} m_{1,2} + k_{1,2} m_{2,2}) \omega^2 - k_{2,2} k_{1,2}] + i(k_{2,2} g_{1,2} \omega - m_{2,2} g_{1,2} \omega^3)}{(k_{1,2} - m_{1,2} \omega^2)^2 + (g_{1,2} \omega)^2} u_2^{(2)} \quad (5.273)$$

Substituindo-se nas equações (5.272) e (5.273) os valores abaixo.

$$A = (k_{1,2} - m_{1,2} \omega^2)^2 + g_{1,2}^2 \omega^2 \quad (5.274)$$

$$B = -m_{2,2} m_{1,2} \omega^4 + (k_{2,2} m_{1,2} + k_{1,2} m_{2,2}) \omega^2 - k_{2,2} k_{1,2} \quad (5.275)$$

$$C = k_{2,2} g_{1,2} \omega - m_{2,2} g_{1,2} \omega^3 \quad (5.276)$$

e fazendo-se $u_2^{(1)} = 1$ e $u_2^{(2)} = 1$, teremos:

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} \frac{B}{A} - i \frac{C}{A} \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{e } \{u_2\} = \begin{Bmatrix} \frac{B}{A} + i \frac{C}{A} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.277)$$

Fazendo-se $\rightarrow \frac{B}{A} = b$ e $\frac{C}{A} = c \rightarrow [U] = [\{u_1\}, \{u_2\}] = \begin{bmatrix} b-ic & b+ic \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5.278)

Podemos determinar os autovetores adjuntos de $[U]$, calculando-se os de $[G]^T$, como segue:

$$[G]^T = \begin{bmatrix} 0 & g_{1,2} \\ -g_{1,2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & -g_{1,2} \\ g_{1,2} & 0 \end{bmatrix}$$

Para tanto, substituem-se nas equações (5.274) a (5.276) o valor de $g_{1,2}$ por $-g_{1,2}$, para obter:

$$A' = A = (k_{1,2} - m_{1,2}\omega^2)^2 + g_{1,2}^2 \omega^2 \quad (5.279)$$

$$B' = B = -m_{2,2}m_{1,2}\omega^4 + (k_{2,2}m_{1,2} + k_{1,2}m_{2,2})\omega^2 - k_{2,2}k_{1,2} \quad (5.280)$$

$$C' = -C = -k_{2,2}g_{1,2}\omega + m_{2,2}g_{1,2}\omega^3 \quad (5.281)$$

Pode-se dizer que os autovetores do sistema $([M], [G]^T, [K])$ são dados por:

$$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} \frac{B'}{A'} + i\frac{C'}{A'} \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{e} \quad \{v_2\} = \begin{Bmatrix} \frac{B'}{A'} - i\frac{C'}{A'} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.282)$$

onde: A', B', C' dados pelas equações (5.279) a (5.281).

Fazendo-se $\frac{B'}{A'} = b$ e $\frac{C'}{A'} = -c \rightarrow [V] = [\{v_1\}, \{v_2\}] = [\bar{U}] = \begin{bmatrix} b+ic & b-ic \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5.283)

Depreende-se daí que $[V] = \begin{bmatrix} b+ic & b-ic \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é o complexo conjugado de $[U] = \begin{bmatrix} b-ic & b+ic \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Analisando-se a condição de bi-ortogonalidade constata-se que a condição suficiente e necessária para que as matrizes $[U]$ e $[V]$ sejam bi-ortogonais é que: $b = 0$ e $c = \pm 1$, conforme mostrado a seguir:

$$[V]^T[U] = \begin{bmatrix} b+ic & 1 \\ b-ic & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-ic & b+ic \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b^2+c^2+1 & b^2+2ibc-c^2+1 \\ b^2-2ibc-c^2+1 & b^2+c^2+1 \end{bmatrix} \quad (5.284)$$

Para atender à diagonalização precisamos impor que simultaneamente

$$\begin{aligned} b^2 + 2ibc - c^2 + 1 &= 0 \\ b^2 - 2ibc - c^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad b^2 - c^2 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad bc = 0 \quad (5.285)$$

A primeira possibilidade é $2ibc = 0 \rightarrow c = 0; b \neq 0$ e $b = \pm i$ (hipótese 1)

Esta hipótese é inadmissível, pois anula o produto matricial $[V]^T[U] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A outra possibilidade é $2ibc = 0 \rightarrow b = 0; c \neq 0$ e $c = \pm 1$ (hipótese 2).

Esta hipótese conduz a: $b = 0$ e $c = \pm 1 \rightarrow B = 0$ e $C = A$. (hipóteses equivalentes).

Substituindo-se $B = 0$ e $C = A$ na equação (5.277) reproduzimos os autovetores da base $[G]$. Portanto os autovetores adjuntos do sistema serão os mesmos da equação (5.264):

$$[U] = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [V] = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.286)$$

Vamos também mostrar que, no caso de $B = 0$ e $C = A$, os valores encontrados para ω , fornecidos através da relação $B + C - A = 0 \approx (5.269)$, são idênticos aos autovalores do sistema dinâmico fornecidos pela sua equação característica (5.269):

$$\begin{aligned} B + C - A = 0 \Rightarrow & \left(-m_{1,2}m_{2,2} - m_{1,2}^2\right)\omega^4 - m_{2,2}g_{1,2}\omega^3 + \\ & + \left(m_{1,2}k_{2,2} + m_{2,2}k_{1,2} + 2m_{1,2}k_{1,2} - g_{1,2}^2\right)\omega^2 + k_{2,2}g_{1,2}\omega - \left(k_{1,2}k_{2,2} + k_{1,2}^2\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.287)$$

Como esta equação não possui os termos $m_{1,1}$ e $k_{1,1}$, precisaremos usar a equação (5.270), para completar a prova e para explicitar a equação característica.

Sabemos que os autovalores da equação (5.267) são da forma: $\lambda_1 = -i\omega$ e $\lambda_2 = i\omega$.

Usando-se a equação (5.271) para cálculo dos autovetores do sistema,

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} \frac{B''}{A''} - i \frac{C''}{A''} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{u_2\} = \begin{Bmatrix} \frac{B''}{A''} + i \frac{C''}{A''} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.288)$$

$$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} \frac{B''}{A''} + i \frac{C''}{A''} \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ e } \{v_2\} = \begin{Bmatrix} \frac{B''}{A''} - i \frac{C''}{A''} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.289)$$

onde A'', B'', C'' são dados por:

$$A'' = -k_{1,1} + m_{1,1} \omega^2 \quad (5.290)$$

$$B'' = k_{1,2} - m_{1,2} \omega^2 \quad (5.291)$$

$$C'' = -g_{1,2} \omega \quad (5.292)$$

A bi-ortogonalidade obriga a $B'' = 0$ e $C'' = A''$ (analogamente)

Juntando A'', B'', C'' na expressão $B'' + C'' - A'' = 0$ encontramos a equação.

$$\begin{aligned} B'' + C'' - A'' = 0 &\rightarrow (-m_{1,2} - m_{1,1})\omega^2 - g_{1,2}\omega + (k_{1,1} + k_{1,2}) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow g_{1,2}\omega = (-m_{1,2} - m_{1,1})\omega^2 + (k_{1,1} + k_{1,2}) \end{aligned} \quad (5.293)$$

Substituindo-se a equação (5.293) na equação (5.287), obtemos a equação (5.269) e (5.294) são iguais. Fica então concluída a prova da tese proposta no início desta Seção .

$$(m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}^2)\omega^4 + (-m_{1,1}K_{2,2} - m_{2,2}K_{1,1} + 2m_{1,2}K_{1,2} - g_{1,2}^2)\omega^2 + (k_{1,1}K_{2,2} - K_{1,2}^2) = 0 \quad (5.294)$$

Conclusão da Prova:

Os autovetores adjuntos da matriz $[G]$ são idênticos aos autovetores de $([M], [G], [K])$, associados ao problema de autovalor do sistema giroscópico conservativo:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0 \quad (5.295)$$

são eles

$$[U] = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [V] = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ sendo } [V] = [\bar{U}] \text{ (conjugado) e } [V]^T [U] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.296)$$

Os autovetores $[U]$ e $[V]$ diagonalizam as matrizes $[M]$, $[G]$, $[K]$ conforme mostrado anteriormente.

Na seqüência mostraremos que as condições necessárias para a diagonalização das matrizes $[M]$, $[K]$ são também atendidas pela mesmas condições impostas anteriormente: $B = 0$, $C = A$, $B'' = 0$ e $C'' = A''$.

Pré e pós multiplicando $[M]$ e $[K]$ por seus autovetores adjuntos temos:

$$[V]^T [M] [U] \{\dot{\eta}\} + [V]^T [G] [U] \{\dot{\eta}\} + [V]^T [K] [U] \{\eta\} = \{0\} \quad (5.297)$$

A diagonalização da matriz $[M]$ genérica, com autovetores adjuntos de $[G]$ mostra que esta transformação está condicionada aos valores capazes de anular as expressões mostradas a seguir (anular os coeficientes da anti-diagonal) $[V]^T [M] [U]$.

$$\begin{aligned} [V]^T [M] [U] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{11}-im_{12} & m_{11}+im_{12} \\ m_{21}-im_{22} & m_{21}+im_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{11}+m_{22} & m_{11}-m_{22}+2im_{12} \\ m_{11}-m_{22}-2im_{12} & m_{11}+m_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.298)$$

$$m_{11}-m_{22}+2im_{12}=0; \quad m_{11}=m_{22}; k_{11}=k_{22}; \quad m_{12}=m_{21}=k_{12}=k_{21}=0; \quad g_{12}=-g_{21}=g \quad (5.299)$$

A diagonalização da matriz $[K]$ também requer as mesmas condições:

Substituindo-se a equação (5.299) nas equações (5.275)e(5.280) tem-se $B = 0$ e $B'' = 0$
Substituindo-se a equação (5.299) nas equações (5.274), (5.276), (5.290) e (5.292) e considerando-se que os autovetores deste problema só são definidos quando $(-m\omega^2 \pm g\omega + k\omega^2 = 0)$ tem-se:

$$B = 0 \quad \text{e} \quad B'' = 0 \quad (5.300)$$

$$A - C = g^2\omega^2 - (k - m\omega^2)g\omega = (-m\omega^2 - g\omega + k\omega^2)g\omega = 0 \rightarrow A = C \quad (5.300)$$

$$A'' - C'' = -(k - m\omega^2) - g\omega = (-m\omega^2 + g\omega + k) = 0 \rightarrow A'' = C'' \quad (5.301)$$

Vemos claramente que o efeito giroscópico não acopla os modos de vibração de um sistema giroscópico conservativo, o qual é aqui caracterizado por equações linearmente independentes, as quais podem ser desacopladas por uma simples transformação linear.

Este é, portanto, um contra-exemplo concreto para a afirmativa corrente, que diz:
O efeito giroscópico acopla os modos de vibração de um sistema rotodinâmico.

Solução da Equação Diferencial de Movimento

Tomando a equação abaixo e fazendo $\{q\} = [U]_n \{\eta\}$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (5.302)$$

e fazendo $\{q\} = [U]_n \{\eta\}$ pode-se escrever:

$$[M][U]_n \{\ddot{\eta}\} + [G][U]_n \{\dot{\eta}\} + [K][U]_n \{\eta\} = \{Q\} \quad (5.303);$$

Premultiplicando por $[V]_n^T$, vem: ,

$$[V]_n^T [M][U]_n \{\ddot{\eta}\} + [V]_n^T [G][U]_n \{\dot{\eta}\} + [V]_n^T [K][U]_n \{\eta\} = [V]_n^T \{Q\} = \{\bar{Q}\} \quad (5.304)$$

Após a diagonalização das três matrizes $[M]$, $[G]$ e $[K]$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + \begin{bmatrix} 2im\Omega & 0 \\ 0 & -2im\Omega \end{bmatrix} \{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} k-m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k-m\Omega^2 \end{bmatrix} \{\eta\} = [V]_n^T \{Q\} = \{\bar{Q}\} = \begin{Bmatrix} Q \\ Q \end{Bmatrix} \quad (5.305)$$

Comparando-se as equações (5.305) e (5.306), vê-se que a ação giroscópica no eixo Y da equação (5.306) é substituída em (5.305) pela ação giroscópica na direção X, com um avanço de 90 graus que é representado pelo complexo (i), levando a:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K-m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K-m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.306)$$

Re-escrevendo-se a equação(5.305), sob a forma de um sistema dinâmico desacoplado tem-se:

$$\ddot{\eta}_1 + 2i\Omega \dot{\eta}_1 + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) \eta_1 \Rightarrow r^2 + 2i\Omega.r + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = Q_1 \quad (5.307)$$

$$\ddot{\eta}_2 - 2i\Omega\dot{\eta}_2 + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\eta_2 \Rightarrow r^2 - 2i\Omega.r + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = Q_2 \quad (5.308)$$

ou,

$$\dot{\eta}_1 + \frac{\lambda_1}{m}\dot{\eta}_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)\eta_1 = 0 \quad (5.307^*)$$

$$\ddot{\eta}_2 + \frac{\lambda_2}{m}\dot{\eta}_2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)\eta_2 = 0 \quad (5.308^*)$$

A solução da equação homogênea é do tipo $\eta_1 = e^{rt}$; $\dot{\eta}_1 = re^{rt}$; $\ddot{\eta}_1 = r^2e^{rt}$.

Substituindo-se estes valores na equação homogênea (5.307), teremos os autovalores esperados (diferentes dos autovalores da matriz giroscópica):

$$r_{1,2} = -i\left(\Omega \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad (5.309)$$

O valor de η_1 será portanto:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \Rightarrow C_1e^{-i\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t} \text{ (forward)} + C_2e^{-i\left(\Omega - \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t} \text{ (backward)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \eta_1 = C_1\left[\cos\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t - i\text{sen}\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right] + C_2\left[\cos\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t + i\text{sen}\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right] \end{aligned} \quad (5.310)$$

Substituindo-se os valores $\eta_2 = e^{rt}$; $\dot{\eta}_2 = re^{rt}$; $\ddot{\eta}_2 = r^2e^{rt}$ na equação (5.308), tem-se:

$$\eta_2 = D_1e^{r_1t} + D_2e^{r_2t} \Rightarrow D_1e^{i\left(\Omega - \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t} + D_2e^{i\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t} \rightarrow r_{1,2} = i\left(\Omega \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad (5.311)$$

$$\eta_2 = D_1\left[\cos\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t - i\text{sen}\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right] + D_2\left[\cos\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t + i\text{sen}\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right] \quad (5.312)$$

As variáveis nodais η_1 e η_2 podem ser re-convertidas na variável original $\{q\}$, através do procedimento abaixo.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [U]_n \{\eta\} \rightarrow [U]_n \{\eta\} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.313)$$

logo:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} -i\eta_1 & i\eta_2 \\ \eta_1 & +\eta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.314)$$

Processando-se algebricamente esta equação tem-se:

$$\begin{aligned} X(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} & \left[E_1 \cos \left(\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t + F_1 \cdot \text{sen} \left(\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t \right) \right] + \\ & + \left[G_1 \cos \left(\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t + H_1 \cdot \text{sen} \left(\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.315)$$

onde E_1 , F_1 , G_1 e H_1 são as constantes de integração (valores iniciais) mostradas a seguir: $E_1 = iC_1 - iD_2$; $F_1 = C_1 + D_2$; $G_1 = iC_2 - iD_1$; $H_1 = -C_2 - D_1$

As frequências naturais também são conhecidas e dadas por: $\omega = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} - \Omega \right)$ e $\omega_2 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \Omega \right)$. Da mesma forma a variável $Y(t)$ será definida conforme abaixo:

$$\begin{aligned} Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} & \left[E_2 \cos \left(\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t + F_2 \cdot \text{sen} \left(\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t \right) \right] + \\ & + \left[G_2 \cos \left(\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t + H_2 \cdot \text{sen} \left(\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \cdot t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.316)$$

onde E_2 , F_2 , G_2 e H_2 são as constantes arbitrárias de integração (valores iniciais) mostradas a seguir: $E_2 = C_1 + D_2$; $F_2 = -iC_1 + iD_2$; $G_2 = C_2 + D_1$; $H_2 = iC_2 - iD_1$

Observamos que $E_2 = F_1$; $F_2 = -E_1$; $G_2 = -H_1$; $H_2 = G_1$

Tem-se, portanto, quatro constantes arbitrárias de integração que devem ser determinadas a partir das quatro condições iniciais $X(0)$; $\dot{X}(0)$; $Y(0)$; $\dot{Y}(0)$

5.6.3.a-3) Exercício Giroscópico 2 (Roda de Bicicleta 2):

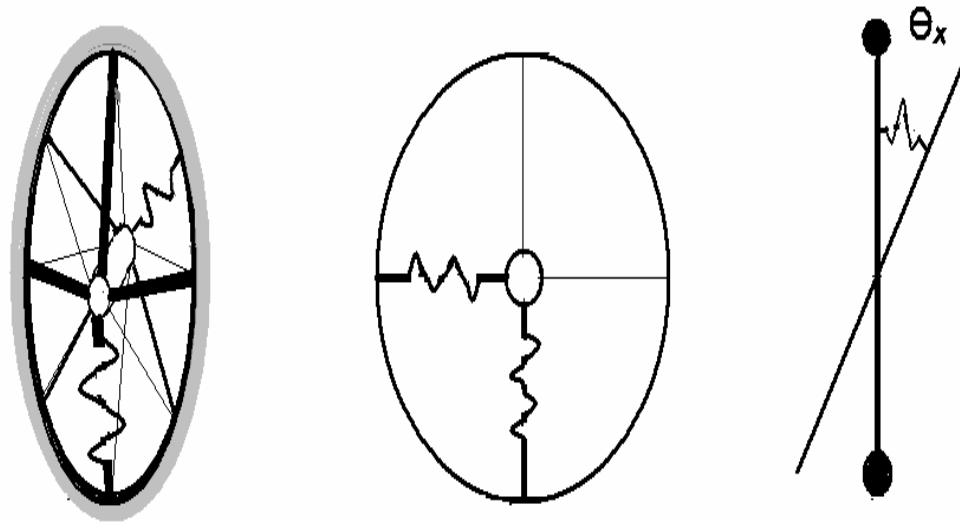


FIG 5.10 EXERCÍCIO GIROSCÓPICO 2

A equação de movimento deste sistema dinâmico é dada por:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \{\dot{\eta}_j\} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -2m & 0 & 0 \\ 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I \\ 0 & 0 & 2I & 0 \end{bmatrix} \{\dot{\eta}_j\} + \begin{bmatrix} K - m\Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K - m\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \end{bmatrix} \{\eta_j\} = 0 \rightarrow$$

onde: $\{\eta_j\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$; $m \Rightarrow$ massa da roda; $I \Rightarrow$ inércia da roda (5.317)

Pesquisa de Base Modal com Matriz de Autovetores Giroscópica [G]:

Os autovalores e autovetores da matriz [G] podem ser calculados como abaixo:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega & 0 & 0 \\ 2m\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I\Omega \\ 0 & 0 & 2I\Omega & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [G] - \lambda[I] \{u\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & -2m\Omega & 0 & 0 \\ 2m\Omega & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2I\Omega \\ 0 & 0 & 2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} \{u\} = \{0\} \quad (5.318)$$

$$\text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & -2m\Omega & 0 & 0 \\ 2m\Omega & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2I\Omega \\ 0 & 0 & 2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & -2m\Omega \\ 2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} \times \text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & -2I\Omega \\ 2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (5.319)$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & -2m\Omega \\ 2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4m^2\Omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2im\Omega \quad (5.320)$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & -2I\Omega \\ 2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4I^2\Omega^2 \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm 2iI\Omega \quad (5.321)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 2im\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2im\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2iI\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2iI\Omega \end{bmatrix}; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{Tr}[G] = 0 \quad (5.322)$$

Como no exemplo anterior, pode-se pré e pós-multiplicar a equação pelos autovetores adjuntos [U] e [V]^T da matriz [G], diagonalizando-se as matrizes [M], [G] e [K]

Determinação da matriz de autovetores [U], da matriz giroscópica [G]

Considerando-se $\lambda_1 = -2im\Omega$ e substituindo-se na equação ($-\lambda u_1 - 2m\Omega u_2 = 0$), vem:

$$-\lambda_1 u_1 - 2m\Omega u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = i u_2 \quad (5.323)$$

$$\text{Fazendo } u_1 = 1 \text{ e } u_2 = -i \Rightarrow \lambda_1 = -2im\Omega \text{ e } \{u_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (autovetor 1)}$$

$$\text{Considerando-se } \lambda_2 = i2m\Omega, \text{ teremos } u_1 = -i u_2 \quad (5.323a)$$

Fazendo-se $u_1 = 1$ e $u_2 = i \rightarrow \lambda_2 = 2im\Omega$ e $\{u_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (autovetor 2)

Considerando-se $\lambda_3 = -2iI.\Omega$ e substituindo na equação ($-\lambda_3 - 2I\Omega u_4 = 0$)

$$-\lambda_3 u_3 - 2I.\Omega..u_4 = 0 \rightarrow 2iI.\Omega u_3 - 2I.\Omega u_4 = 0 \rightarrow u_3 = i..u_4 \quad (5.324)$$

Fazendo-se $u_3 = 1$ e $u_4 = -i \rightarrow \lambda_3 = -2iI.I.\Omega$ e $\{u_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{Bmatrix}$ (autovetor 3)

Considerando-se $\lambda_4 = i2I\Omega$, teremos $u_3 = -i.u_4$ (5.324a)

Fazendo-se $u_3 = 1$ e $u_4 = i \rightarrow \lambda_3 = 2i.I.I.\Omega$ e $\{u_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{Bmatrix}$ (autovetor 4)

Os autovalores são complexos puros conjugados:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2.im\Omega ; \lambda_{3,4} = \pm 2.i.I.\Omega \quad (5.325)$$

Os autovetores da matriz $[G]$ são pares complexos conjugados. Podemos mostrar que estes autovetores não são ortogonais:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix} \rightarrow [U]^T [U] = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.326)$$

A ortogonalidade dos autovetores $[U]$ da matriz $[G]$ não era esperada na medida em que a matriz $[G]$ é não simétrica (anti-simétrica).

É importante destacar que a operação $[U][G][U]^T$ não diagonaliza a matriz $[G]$.

Determinação de autovalores e autovetores Adjunto $[G]^T$:

Investigando-se a solução do problema de autovalor adjunto e a determinação dos auto-vetores adjuntos da matriz transposta $[G]^T = -[G]$

$$[[G]^T - \lambda[I]]\{u\} \rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 2m\Omega & 0 & 0 \\ -2m\Omega & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 2I\Omega \\ 0 & 0 & -2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \{u\} = \{0\} \quad (5.327)$$

$$\text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & 2m\Omega & 0 & 0 \\ -2m\Omega & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 2I\Omega \\ 0 & 0 & -2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & 2m\Omega \\ -2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} \times \text{Det.} \begin{bmatrix} -\lambda & 2I\Omega \\ -2I\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (5.328)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2im\Omega \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm 2iI\Omega \quad (5.329)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 2im\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2im\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2iI\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2iI\Omega \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{Tr}[G] = 0 \quad (5.330)$$

Como já era esperado, constata-se que os autovalores da matriz transposta $[G]^T$ são os mesmos da matriz $[G]$.

Determinação da Matriz de Autovetores Adjuntos $[V]$ da Matriz Giroscópica $[G]$

Considerando-se $\lambda_1 = -2im\Omega$ e procedendo-se de forma semelhante, vem:

$$-\lambda_1.v_1 + 2.m.\Omega.v_2 = 0 \rightarrow \text{Considerando-se } \lambda_1 = -2im\Omega \rightarrow .v_1 = -i.v_2 \quad (5.331)$$

$$\text{Fazendo-se } v_1 = 1 \quad \text{e} \quad .v_2 = i \quad \rightarrow \quad \{v_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{autovetor 1})$$

Considerando-se $\lambda_2 = i2m\Omega$ na primeira equação tem-se $v_1 = i.v_2$

Fazendo-se $v_1 = 1$ e $v_2 = -i \rightarrow \{v_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (autovetor 2)

$-\lambda_3 v_3 + 2I\Omega v_4 = 0 \rightarrow$ Considerando-se $\lambda_3 = -2iI\Omega \rightarrow v_3 = -i v_4$ (5.332)

Fazendo-se $v_3 = 1$ e $v_4 = i \rightarrow \{v_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{Bmatrix}$ (autovetor 3)

Considerando-se $\lambda_4 = i2I\Omega$ na terceira equação termos $v_3 = i v_4$

Fazendo-se $v_3 = 1$ e $v_4 = -i \rightarrow \{v_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{Bmatrix}$ (autovetor 4)

Assim: $[U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix}$; $[V] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix}$ (5.333)

Observando $[U]$ e $[V]$, vemos que $[V]$ é a matriz complexa conjugada de $[U]$.

Identificação da Base Bi-ortogonal:

Constatamos que os autovetores de $[G]^T$ são não ortogonais, ($[G]^T$ é não simétrica).

Verificaremos, agora, propriedade de Bi-ortogonalidade, característica das matrizes não simétricas $[U]^T [G]^T [V] = \lambda [I] \rightarrow (\varphi_j^T . A . \eta_i = \lambda_i \delta_{ij} = [\Lambda])$

$$[U]^T [G]^T [V] = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2m\Omega & 0 & 0 \\ -2m\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2I\Omega \\ 0 & 0 & -2I\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow [U]^T [G]^T [V] = \begin{bmatrix} -4im\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4im\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4iI\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4iI\Omega \end{bmatrix} \quad (5.334)$$

Logo a matriz $[U]$ é linearmente independente da matriz $[V]$ e os autovetores de $[G]$ são ortogonais (bi-ortogonalidade) aos autovetores de $[G]^T$ (bi-ortogonalidade).

Normalização dos Autovetores da Base Bi-ortogonal:

$$\{u_1\}^T \{v_1\} = \{1, -i, 0, 0\} \begin{Bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2 \rightarrow \{u_1\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{v_1\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.335)$$

$$\{u_2\}^T \{v_2\} = \{1, i, 0, 0\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2 \rightarrow \{u_2\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{v_2\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.336)$$

$$\{u_3\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{Bmatrix}; \{v_3\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{Bmatrix}; \{u_4\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{Bmatrix}; \{v_4\}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{Bmatrix} \quad (5.337)$$

$$[U]^T_n [V]_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow [U]^T_n [V]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (5.338)$$

(orto-normal) ;

$$[U]_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix}, [V]_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix} \quad (5.339)$$

Nos problemas de dinâmica é usual normalizarem-se os autovetores $[U]$ e $[V]$, em relação a $[M]$: $[V]^T [M] [U] = \{I\}$, como veremos a seguir.

Diagonalização das Matrizes $[M]$, $[G]$, $[K]$ Modais:

Vamos agora utilizar as matrizes $[U]$ (autovetor de $[G]$) e $[V]$ (autovetor de $[G]^T$), para diagonalizar a matriz $[G]$:

$$[V]^T [G] [U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega & 0 & 0 \\ 2m\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I\Omega \\ 0 & 0 & 2I\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow [\lambda] = \begin{bmatrix} 2.im\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.im\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.iI\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.iI\Omega \end{bmatrix}. \quad (5.340)$$

Operando, agora, as matrizes $[U]$ e $[V]$ para diagonalizar a matriz $[G]^T$ vem:

$$[U]^T [G]^T [V] = \begin{bmatrix} 2.im\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.im\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.iI\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.iI\Omega \end{bmatrix}. \quad (5.341)$$

Nesta Seção, mostra-se que a matriz giroscópica possui as propriedades comuns de uma matriz não simétrica, bem como a sua transposta, e que os autovalores são imaginários puros, cuja soma é zero.

Diagonalização da matriz de massa $[M] = [V]^T [M] [U]$:

$$[V]^T [M] [U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (5.342)$$

Diagonalização da matriz de rigidez $[K] = [V]^T [K] [U]$

$$[V]^T [K] [U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K-m\Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K-m\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} K-m\Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K-m\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix}. \quad (5.343)$$

Solução da Equação Diferencial de Movimento

Tomando-se a equação

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (5.344)$$

e fazendo-se $\{q\} = [U]_n \{\eta\} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \end{Bmatrix} \eta_1 + \dots + \begin{Bmatrix} u_{1,4} \\ u_{2,4} \\ u_{3,4} \\ u_{4,4} \end{Bmatrix} \eta_4$, podemos escrever:

$$[M][U]_n \{\ddot{\eta}\} + [G][U]_n \{\dot{\eta}\} + [K][U]_n \{\eta\} = \{Q\} \quad (5.345)$$

Pré-multiplicando por $[V]_n^T$, vem:

$$[V]_n^T [M] [U]_n \{\ddot{\eta}\} + [V]_n^T [G] [U]_n \{\dot{\eta}\} + [V]_n^T [K] [U]_n \{\eta\} = [V]_n^T \{Q\} \quad (5.346)$$

Após a diagonalização das três matrizes $[M]$, $[G]$ e $[K]$, substitui-se a equação

$$[V]_n^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} [U]_n \{\ddot{\eta}\} + \Omega [V]_n^T \begin{bmatrix} 0 & -2m & 0 & 0 \\ 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I \\ 0 & 0 & 2I & 0 \end{bmatrix} [U]_n \{\dot{\eta}\} + [V]_n^T \begin{bmatrix} k-m\Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-m\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} [U]_n \{\eta\} = [V]_n^T \{Q\} \quad (5.347)$$

pela equação homogênea desacoplada.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + \Omega \begin{bmatrix} 2im & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2im & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2iI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2iI \end{bmatrix} \{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} k-m\Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-m\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \{\eta\} = [V]_n^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (5.348)$$

Dividindo 1 e 2 por m e 3 e 4 por I tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + \Omega \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} k/m - \Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k/m - \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K/I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K/I \end{bmatrix} \{\eta\} = [V]_n^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (5.349)$$

Fica claro que as quatro equações estão desacopladas. Fazendo-se uso do método mostrado, podemos escrever diretamente as equações características do sistema:

$$\ddot{\eta}_1 + 2i\Omega\dot{\eta}_1 + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\eta_1 = \{V_n\}_1^T \{Q_1\} \quad (\text{primeiro autovetor}) \quad (5.350)$$

$$\ddot{\eta}_2 - 2i\Omega\dot{\eta}_2 + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\eta_2 = \{V_n\}_2^T \{Q_2\} \quad (\text{segundo autovetor}) \quad (5.351)$$

$$\ddot{\eta}_3 + 2i\Omega\dot{\eta}_3 + \frac{K}{I}\eta_3 = \{V_n\}_3^T \{Q_3\} \quad (\text{terceiro autovetor}) \quad (5.352)$$

$$\ddot{\eta}_4 - 2i\Omega\dot{\eta}_4 + \frac{K}{I}\eta_4 = \{V_n\}_4^T \{Q_4\}; (1 \times 4) \otimes (4 \times 1) = (1 \times 1) \quad (\text{quarto autovetor}) \quad (5.353)$$

A solução é do tipo $\eta_j = e^{rt}$; $\dot{\eta}_j = re^{rt}$; $\ddot{\eta}_j = r^2 e^{rt}$. Substituindo-se estes valores nas equações (5.350) a (5.353) tem-se:

$$r_{1,2} = -i \left(\Omega \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \quad (5.354)$$

como já era perfeitamente esperado. O valor de η_1 será, portanto, dado por:

$$\eta_1 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \Rightarrow C_1 e^{-i \left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t} (\text{forward}) + C_2 e^{i \left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t} (\text{backward}) \Rightarrow \quad (5.355)$$

o que leva a:

$$\eta_1 = C_1 \left[\cos \left(\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t \right) - i \cdot \text{sen} \left(\left(\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t \right) \right] + \\ + C_2 \left[\cos \left(\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t \right) + i \cdot \text{sen} \left(\left(-\Omega + \sqrt{\frac{k}{m}} \right) t \right) \right] \quad (5.356)$$

Substituindo-se os valores de $\eta_2 = e^{rt}$; $r_{1,2} = i \left(\Omega \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \Rightarrow \eta_2$ será dado por:

$$\eta_2 = D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{r_2 t} \Rightarrow D_1 e^{i(\Omega - \sqrt{k/m})t} (\text{forward}) + D_2 e^{i(\Omega + \sqrt{k/m})t} (\text{backward}) \rightarrow (5.357)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = D_1 \left[\cos \left(-\Omega + \sqrt{k/m} \right) t - i \operatorname{sen} \left(-\Omega + \sqrt{k/m} \right) t \right] + \\ + D_2 \left[\cos \left(\Omega + \sqrt{k/m} \right) t + i \operatorname{sen} \left(\Omega + \sqrt{k/m} \right) t \right] \end{aligned} \quad (5.358)$$

Substituindo-se os valores de $\eta_B = e^{rt}$; $r_{3,4} = -i \left(\Omega \pm \sqrt{K/I} \right)$ e como esperado, vem:

$$\eta_3 = E_1 e^{r_3 t} + E_2 e^{r_4 t} \Rightarrow E_1 e^{-i(\Omega + \sqrt{K/I})t} + E_2 e^{-i(\Omega - \sqrt{K/I})t} \Rightarrow (5.359)$$

$$\begin{aligned} \eta_3 = E_1 \left[\cos \left(\Omega + \sqrt{K/I} \right) t - i \operatorname{sen} \left(\Omega + \sqrt{K/I} \right) t \right] + \\ + E_2 \left[\cos \left(-\Omega + \sqrt{k/I} \right) t + i \operatorname{sen} \left(-\Omega + \sqrt{k/I} \right) t \right] \end{aligned} \quad (5.360)$$

Substituindo-se os valores de $\eta_4 = e^{rt}$; $r_{3,4} = i \left(\Omega \pm \sqrt{K/I} \right)$, obtem-se:

$$\eta_4 = F_1 e^{r_3 t} + F_2 e^{r_4 t} \Rightarrow F_1 e^{i(\Omega - \sqrt{k/I})t} + F_2 e^{i(\Omega + \sqrt{k/I})t} \quad (5.361)$$

$$\begin{aligned} \eta_4 = F_1 \left[\cos \left(-\Omega + \sqrt{k/I} \right) t - i \operatorname{sen} \left(-\Omega + \sqrt{k/I} \right) t \right] + \\ + F_2 \left[\cos \left(\Omega + \sqrt{k/I} \right) t + i \operatorname{sen} \left(\Omega + \sqrt{k/I} \right) t \right] \end{aligned} \quad (5.362)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = [U]_n \{\eta\} \rightarrow \text{podemos calcular } \{q\} \text{ conforme} \quad (5.363)$$

$$\begin{aligned} X = q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\eta_1 + \eta_2]; \quad Y = q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-i\eta_1 + i\eta_2]; \\ \theta_x = q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\eta_3 + \eta_4]; \quad \theta_y = q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-i\eta_3 + i\eta_4] \end{aligned} \quad (5.364)$$

5.6.3.a-4) Prova do Desacoplamento das Equações do Sistema Giroscópico Puro N G.L.

(Extensão da Prova 5.6.3a-2):

A prova desta propriedade é feita inicialmente para um modelo de dois (GL).

Prova-se que estes autovetores desacoplam matrizes de massa e de rigidez de um sistema $(n \times n)$, em $\frac{n}{2}$ sistemas independentes de equações duplas (irmãs). Esta prova é posteriormente complementada (por analogia), fazendo-se uso da formulação da teoria do contínuo, como será ser visto nesta seção.

A utilização dos autovetores giroscópicos para desacoplar as equações de movimento do problema giroscópico é uma iniciativa inédita.

Sabemos que a solução harmônica para o problema giroscópico puro, sem amortecimento, $[M]\{\ddot{q}\} + ([G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0$, é da forma: $\{q\} = \{u\}e^{i\omega t}$ e que:

$$-\omega^2[M]\{u\} + i\omega[G]\{u\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad \text{e} \quad -\omega^2[M]\{v\} + i\omega[G]^T\{v\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (5.365)$$

Sendo $\{u\}$ o autovetor de $[G]$ e $\{v\}$ o autovetor adjunto, obtido de $[G]^T$, e

Considerando-se duas soluções distintas: i, j , sendo $i \neq j$, vem:

$$\{v_j\}^T \Rightarrow -\omega_i^2[M]\{u_i\} + i\omega_i[G]\{u_i\} + [K]\{u_i\} = \{0\} \quad (5.366-a1)$$

$$\{u_i\}^T \Rightarrow -\omega_j^2[M]\{v_j\} + i\omega_j[G]^T\{v_j\} + [K]\{v_j\} = \{0\} \quad (5.366-a2)$$

Pré-multiplicando-se por $\{v_j\}^T$ e $\{u_i\}^T$, sendo $[M] = [M]^T$ e $[K] = [K]^T$, obtém-se:

$$-\omega_i^2\{v_j\}^T[M]\{u_i\} + i\omega_i\{v_j\}^T[G]\{u_i\} + \{v_j\}^T[K]\{u_i\} = 0 \quad (5.367-a1)$$

$$-\omega_j^2\{u_i\}^T[M]\{v_j\} + i\omega_j\{u_i\}^T[G]^T\{v_j\} + \{u_i\}^T[K]\{v_j\} = 0 \quad (5.367-a2)$$

Considerando-se que $\{u_i\}^T[M]\{v_j\} = \{v_j\}^T[M]^T\{u_i\}$; $\{u_i\}^T[K]\{v_j\} = \{v_j\}^T[K]^T\{u_i\}$ e subtraindo-se esta equação (5.367) de (5.367), obtém-se:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{v_j\}^T [M] \{u_i\} - i(\omega_i - \omega_j) \{v_j\}^T [G] \{u_i\} + \{0\} = \{0\} \quad (5.368)$$

Sendo ω_i e ω_j imaginários conjugado puros, tais que $\omega_i = -i\omega_a$ e $\omega_j = i\omega_a$, então $(\omega_j - \omega_i) = 2i\omega_a \neq 0$, logo podemos dividir por $\omega_i - \omega_j \neq 0$ e tem-se:

$$(\omega_i + \omega_j) \{v_j\}^T [M] \{u_i\} - i \{v_j\}^T [G] \{u_i\} + \{0\} = \{0\} \quad (5.369)$$

onde: $\{v_j\}$ e $\{u_i\}$ são autovetores $[G]$, portanto, $\{v_j\}^T [G] \{u_i\} = \{0\}$, logo:

$$(\omega_i + \omega_j) \{v_j\}^T [M] \{u_i\} = 0 \quad (5.370)$$

Não podemos entretanto garantir, no primeiro momento, que $\{v_j\}^T [M] \{u_i\} = \{0\}$, já que sabemos que $(\omega_i + \omega_j)$ pode se anular em alguns casos. Entretanto, $(\omega_i + \omega_j)$ somente será igual a zero nos casos em que seus autovalores ω_i e ω_j sejam complexos conjugados, isto é, nos casos em que:

$$j = [i_{(2.n+1)}] + 1; \text{ Exemplos: } \omega_1 + \omega_2 = 0; \omega_3 + \omega_8 = 0 \text{ ou ainda } \omega_{2n+1} + \omega_{2n+2} = 0. \quad (5.371)$$

Para todos os modos i e j , os valores de $(\omega_i + \omega_j) \neq 0$, serão diferentes de zero e, nestes casos, pode-se assegurar que $\{v_j\}^T [M] \{u_i\} = \{0\}$. Conseqüentemente $[M]$ poderá ser diagonalizada.

Retornando a equação (5.367-a1), mostrada anteriormente, vemos que, para todos os casos nos quais os autovetores $\{v_j\}$ e $\{u_i\}$ não sejam complexos conjugados, os produtos $\{v_j\}^T [M] \{u_i\}$ e $\{v_j\}^T [G] \{u_i\}$ serão nulos.

$$\text{Observando à equação: } -\omega_i^2 \{v_j\}^T [M] \{u_i\} + i\omega_i \{v_j\}^T [G] \{u_i\} + \{v_j\}^T [K] \{u_i\} = 0 \quad (5.372)$$

Pode-se, desta forma, concluir que, baseado na equação (5.372), que $\{v_j\}^T [K] \{u_i\}$, também será igual a zero, dentro das mesmas considerações.

Mostramos que os autovetores $\{u_i\}$ da matriz $[G]$ e os autovetores $\{v_j\}$ de $[G]^T$, desacoplam as equações do sistema giroscópico puro, em $n/2$ sistemas independentes formados por pares de equações cujos autovalores são $\lambda_i = -\lambda_j$.

Para quaisquer outras combinações de ω_i e ω_j as equações serão desacopladas e os coeficientes da matriz transformada serão nulos fora da diagonal.

O resultado final desta transformação será um sistema conjunto de $n/2$ sistemas de duas equações independentes, acopladas aos pares.

Vamos agora analisar a natureza destes $n/2$ sistemas de equações duplas

$$[V]^T [M][U]\{\ddot{\eta}\} + [V]^T [G][U]\{\dot{\eta}\} + [V]^T [K][U]\{\eta\} = [V]^T \{Q\} \quad (5.373)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{1,1} \end{bmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_{i,i} & 0 \\ 0 & -\lambda_{i,i} \end{bmatrix} \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \lambda_{m,m} & 0 \\ 0 & -\lambda_{m,m} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = [V]^T [G][U], \text{M.Espectral} \quad (5.374)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & im_2 \\ -im_1 & m_2 \end{bmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \begin{bmatrix} m_i & im_{i+1} \\ -im_{i+1,i} & m_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \begin{bmatrix} m_{n-1,n-1} & im_{n-1,n} \\ -im_{n-1} & m_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = [V]^T [M][U] \quad (5.375)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & iK_{12} \\ -iK_{21} & K_{22} \end{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \begin{bmatrix} K_{i,i} & K_{i,i+1} \\ K_{i+1,i} & K_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \\ & & & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} K_{n-1,n-1} & iK_{n-1,n} \\ -iK_{n,n-1} & K_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = [V]^T [M][U] \quad (5.376)$$

Os termos da diagonal, das sub-matrizes irão compor sistemas independentes com duas equações desacopladas cada, conforme mostrado em:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (\Omega [G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0 \quad (5.377)$$

onde:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,i+1} \\ m_{i+1,i} & m_{i+1,i+1} \end{bmatrix} = [M]^T; [G] = \begin{bmatrix} \lambda_{i,i} & 0 \\ 0 & -\lambda_{i,i} \end{bmatrix} = -[G]^T \text{ e } [K] = \begin{bmatrix} k_{i,i} & k_{i,i+1} \\ k_{i+1,i} & k_{i+1,i+1} \end{bmatrix} = [K]^T \quad (5.378)$$

Sendo: $g_{i,j} = -g_{j,i}$; $m_{i,j} = m_{j,i}$; $K_{i,j} = K_{j,i}$

Como já é sabido, os autovalores da matriz giroscópica serão diferentes dos autovalores da matriz dinâmica $[M] [G] [K]$, conforme mostrado nas equações (5.241) e (5.309), porém, os seus autovetores serão iguais.

Mostraremos que, no caso particular de sistemas giroscópicos puros, estas duas equações são desacopladas, já em que os termos fora da diagonal de cada uma destas sub-matrizes que formam os sistemas acoplados dois a dois, são nulos.

Antes, porém, convém lembrar que da teoria do contínuo, a equação, produz autovetores linearmente independentes.

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial Z^4} + m\ddot{\eta} - \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} + 2i\Omega \frac{mR^2}{4} \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial Z^2} = 0, \quad \eta(Z,t) = X(Z,t) + iY(Z,t) \quad (5.379)$$

produz autovetores linearmente independentes.

Fazendo-se $\eta(z,t) = F(z).e^{i\omega t}$, a equação acoplada complexa de derivadas parciais de quarta ordem, torna-se em uma equação diferencial ordinária linear de quarta ordem com coeficientes constantes e reais, dada por:

$$F^{iv} + \frac{mR^2 l^2}{4EI} (\omega^2 - 2\Omega\omega) F'' - \frac{m\omega^2 l^4}{EI} F = 0 \rightarrow F^{iv} + \alpha F'' - \beta^4 F = 0 \rightarrow F(z) = X(z) + iY(z) \quad (5.380)$$

Portanto, as soluções oriundas de um sistema rotodinâmico são linearmente independentes, ou, em outras palavras, os efeitos inerciais (entre eles o giroscópico) e de rigidez do eixo não acoplam as suas soluções (autovetores).

Semelhantemente podemos mostrar que após a transformação linear (pré e pós multiplicação pelos autovetores adjuntos) efetuada em cada uma das matrizes consistentes $[M_{eT}]$, $[M_{eR}]$ e $[K_e]$, os termos da diagonal oposta das matrizes apresentadas, $m_{i,i+1}$ e $m_{i+1,i}$, $k_{i,i+1}$ e $k_{i+1,i}$ se anulam, sendo esta a condição necessária e suficiente para a caracterização da identidade dos autovetores de $[G]$, $[M]$ e $[K]$ (de forma semelhante ao que foi mostrada na equação (5.380), como segue:

$$[V]^T [M] [U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,i+1} \\ m_{i+1,i} & m_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{i,i} - m_{i,i+1} & m_{i,i} + m_{i,i+1} \\ m_{i+1,i} - m_{i+1,i+1} & m_{i+1,i} + m_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \rightarrow (5.381)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{i,i} + m_{i+1,i+1} & m_{i,i} - m_{i+1,i+1} + 2m_{i,i+1} \\ m_{i+1,i} - m_{i+1,i+1} - 2m_{i,i+1} & m_{i,i} + m_{i+1,i+1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (5.382)$$

As condições necessárias e suficiente para que os termos da diagonal oposta das matrizes $\begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,i+1} \\ m_{i+1,i} & m_{i+1,i+1} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} k_{i,i} & k_{i,i+1} \\ k_{i+1,i} & k_{i+1,i+1} \end{bmatrix}$ se anulem, são: $m_{i,i} = m_{i+1,i+1}$ e $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 0$.

Estas duas condições, $m_{i,i} = m_{i+1,i+1}$ e $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 0$ são atendidas pelas matrizes de massa e rigidez consistentes.

5.6.3.a-5) Exercício Giroscópico 3 (8×8 - Rotor em balanço)

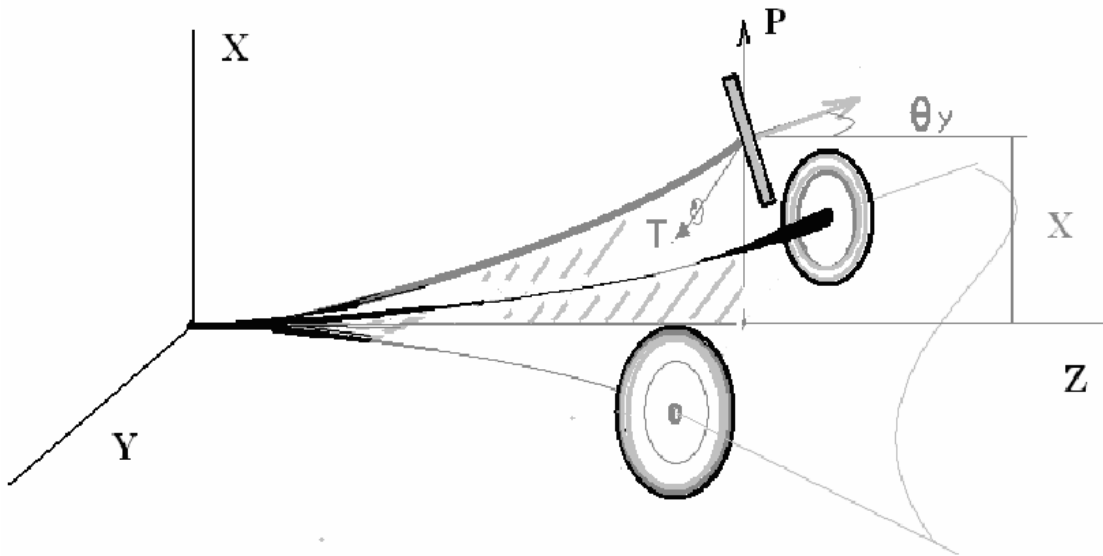


FIG 5.11 EXERCÍCIO GIROSCÓPICO 3

Neste exemplo, temos um acoplamento elástico entre a coordenada generalizada X e a coordenada generalizada θ_y . Isto ocorre porque a viga elástica que sustenta o rotor obriga o disco a se deformar angularmente de θ_y sempre que o mesmo é deslocado na direção X .

Seguindo-se o método desenvolvido anteriormente vamos escrever a equação de movimento do eixo constituído de um elemento que possui rigidez e inércia distribuídas. Este problema foi tratado de forma simplificada no Capítulo II.

Reescrevendo a equação (5.151), vem:

$$([M_{eT}] + [M_{eR}] + [M_{dT}] + [M_{dR}])\{\ddot{q}_e(t)\} + \Omega ([G_e] + [G_d])\{\dot{q}_e(t)\} + ([K_e])\{q_e(t)\} = 0 \quad (5.383)$$

Sejam: $M \Rightarrow$ massa da roda $I \Rightarrow$ inércia da roda

ROTOR EM BALANÇO

Diâmetro do eixo = 0,05 m

Área do eixo = 0,00196 m²

E.I = 0,307 Kg*.m²

$$I = I_d = \frac{mR^2}{4} = 0,50$$

Inércia de rotação do disco

$$I_p = 2I_d = 1,0$$

Inércia de massa polar disco

$$\frac{\rho A l}{420} = 0,0365 \text{ Kg.m}$$

inércia de massa de translação eixo

$$I_e = \frac{\rho A R^2}{120l} \rightarrow \frac{I_e}{30l} = 0,00032 \text{ kg.m}$$

Inércia de massa em rotação do eixo

$$I_p = 2I_d = \frac{2\rho A R^2}{120l} = \frac{2\rho A R^2}{4 \times 30l} = 0,00064 \text{ kg.m} \quad \text{Inércia polar do eixo}$$

$$l = 1 \rightarrow \frac{E.I}{l^3} = 0,307 \text{ Kg}^* / \text{m}$$

$$[M_d] \Rightarrow \text{Massa do disco} = 49,01 \text{ kg} \rightarrow m = 0,0365 \times 1341 = 49,01 \text{ Kg}$$

$$\text{Inércia de rotação do disco} = 0,50 \text{ Kg} \times \text{m}^2 \rightarrow m = 0,00032 \times 1562 = 0,50 \text{ Kg} \times \text{m}^2$$

$$\text{Inércia de massa polar disco} = 1,0 \text{ Kg} \times \text{m}^2 \rightarrow m = 0,00064 \times 1566 = 1,0 \text{ Kg} \times \text{m}^2$$

Diâmetro do disco = 0,40 m

Material do disco = AÇO

Comprimento do eixo flexível = 1 m

Inércia de flexão do eixo (EI) = 0,307 kg*.m

Pesquisa de Base Modal com Matriz de Autovetores Giroscópica $[G]$:

Os autovalores e autovetores da matriz $[G]$ são apresentados abaixo, conforme resultados obtidos com o programa MAT-LAB mostrado no APÊNDICE C:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 4.8.i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.8.i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17.i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.17.i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33.i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33.i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{Tr}[G] = 0 \quad (5.384)$$

Como no exemplo anterior, pode-se pré e pós-multiplicar a equação pelos autovetores adjuntos $[U]$ e $[V]^T$ da matriz $[G]$, diagonalizando-se as matrizes $[M][G][K]$

Apresentação dos autovetores adjuntos normalizados $[U]$, $[V]$ da matriz $[G]$:

$$[U]_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ autovetor de } [G_e] \quad (5.385)$$

$$[v]_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ autovetor } [G_e]^T \quad (5.386)$$

Observando-se $[U]$ e $[V]$, vemos que $[V]$ é a matriz complexa conjugada de $[U]$.

Diagonalização das matrizes $[M]$, $[G]$ e $[K]$ modais:

$$[M_{eT}] + [M_{dT}] \rightarrow \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22 & 54 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 156 & 22 & 0 & 0 & 54 & -13 & 0 \\ 0 & 22 & 4 & 0 & 0 & 13 & -3 & 0 \\ -22 & 0 & 0 & 4 & -13 & 0 & 0 & -3 \\ 54 & 0 & 0 & -13 & 1497 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 54 & 13 & 0 & 0 & 1497 & -22 & 0 \\ 0 & -13 & -3 & 0 & 0 & -22 & 4 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -3 & 22 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 226 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 226 \end{bmatrix} \quad (5.387)$$

$$[M_{eR}] + [M_{dR}] \rightarrow \begin{bmatrix} +36 & ..0 & 0 & -3 & -36 & 0 & 0 & -3 \\ .0 & +36 & +3. & 0 & 0 & -36 & +3 & 0 \\ 0 & +3 & .+4 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & +4 & +3 & 0 & 0 & -1 \\ -36 & 0 & 0 & +3 & 36 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -36 & -3 & 0 & 0 & 36 & -3 & 0 \\ 0 & +3 & -1 & 0 & 0 & -3 & 1566 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1566 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} .09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.388)$$

$$[G_e] + [G_d] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3 & 0 & .0 & +36 & -3 & 0 \\ +36 & 0 & 0 & -3 & -36 & 0 & 0 & -3 \\ +3 & 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +3 & +4 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & +36 & +3 & 0 & 0 & -36 & +3 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & +3 & +36 & 0 & 0 & +3 \\ +3 & 0 & 0 & +1 & -3 & 0 & 0 & -1570. \\ 0 & +3 & -1 & 0 & 0 & -3 & +1570 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} .18i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.18i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 201i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -201i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 202i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -202i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.389)$$

$$[K_e] \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & +12 & 6 & 0 & 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & +4 & 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & +4 & 6 & 0 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 & +6 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & +12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 29.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.390)$$

Solução da Equação Diferencial de Movimento

Fazendo $\{q\} = [U]_n \{\eta\}$, pode-se escrever a equação:

$$([M_{e.}] + [M_d] + [M_{Re.}] + [M_{Rd}])[U]_n \{\ddot{\eta}\} + \Omega([G_e] + [G_d])[U]_n \{\dot{\eta}\} + [K][U]_n \{\eta\} = 0 \quad (5.391)$$

Pré-multiplicando-se por $[V]_n^T$, vem:

$$[V]_n^T ([M_{e.}] + [M_d] + [M_{Re.}] + [M_{Rd}])[U]_n \{\ddot{\eta}\} + \Omega [V]_n^T ([G_e] + [G_d])[U]_n \{\dot{\eta}\} + [V]_n^T [K][U]_n \{\eta\} = [V]_n^T \{Q\} \quad (5.392)$$

Após a diagonalização das três matrizes $[M]$, $[G]$ e $[K]$ pode-se substituir a equação (5.383) pela equação desacoplada (5.393). É interessante observar que o sistema 8×8 da origem a seis equações independentes. Isto acontece porque não estamos considerando os modos de corpo rígido, os quais serão considerados posteriormente.

Então:

$$\begin{bmatrix} 1061 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1061 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.15 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.02 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.02 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 226 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 226 \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + i.\Omega. \times \begin{bmatrix} .184 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.184 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 201 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -201 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 202 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -202 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} 29.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.5 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\eta\} = [V]_n^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} \quad (5.393)$$

Fica claro, neste momento, que as equações estão desacopladas. Fazendo-se uso do método, pode-se escrever diretamente as equações características do sistema vibratório. Dividindo-se cada linha por sua massa modal e resolvendo a equação homogênea, vem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + \frac{i.\Omega}{10^3} \times \begin{bmatrix} 1.73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1747 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1747 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} 0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\eta\} = [V]_m^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (5.394)$$

Re-escrevendo-se as equações de forma desacoplada, vem

$$\ddot{\eta}_1 + \frac{1.73.i.\Omega}{10^3} \dot{\eta}_1 + .28.\eta_1 = 0 \quad (5.395)$$

$$\ddot{\eta}_2 - \frac{1.73.i.\Omega}{10^3} \dot{\eta}_2 + .28.\eta_2 = 0 \quad (5.396)$$

$$\ddot{\eta}_3 + 1.747.i.\Omega.\dot{\eta}_3 + 6.43.\eta_3 = 0 \quad (5.397)$$

$$\ddot{\eta}_4 - 1.747.i.\Omega.\dot{\eta}_4 + 6.43.\eta_4 = 0 \quad (5.398)$$

$$\ddot{\eta}_5 + i.\Omega.\dot{\eta}_5 + 1.24.\eta_5 = 0 \quad (5.399)$$

$$\ddot{\eta}_6 - i.\Omega.\dot{\eta}_6 + 1.24.\eta_6 = 0 \quad (5.400)$$

Os modos de corpo rígido, relativos à sétima e à oitava equação, apresentam frequência natural nula e a sua resposta dinâmica pode ser facilmente determinada.

A solução destas equações homogêneas é do tipo $\eta_j = e^{rt}$; $\dot{\eta}_j = re^{rt}$; $\ddot{\eta}_j = r^2 e^{rt}$

Fazendo-se $\Omega = 0$ as equações desacopladas terão a forma seguinte:

$$r^2 + 0.28 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = .084 \text{ Hz} = 5,04 \text{ rpm} \quad (5.401)$$

Fazendo-se $\Omega = \pm 100$ as frequências naturais são:

$$r^2 - 0.173.i.r + 0.28 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{i}{2}(-0.173 \pm 1,072) \rightarrow \quad (5.402)$$

$$r_1 = 0.099 \text{ Hz} = 5.94 \text{ rpm}(\text{forward}) \Rightarrow r_2 = 0.071 \text{ Hz} = 4.29 \text{ rpm}(\text{backward}) \quad (5.402a)$$

Fazendo-se $\Omega = 0$ tem-se:

$$r^2 + 6.43 = 0 \Rightarrow r_{3,4} = 0.4 \text{ Hz} = 24.2 \text{ rpm} \quad (5.403)$$

Fazendo-se $\Omega = \pm 100$ as frequências naturais são:

$$r^2 - 174.7.i.r + 6.43 = 0 \rightarrow r_{3,4} = \frac{i}{2}(-174.7 \pm 174.8) \rightarrow \quad (5.403a)$$

$$r_3 = 27.8 \text{ Hz} = 1670 \text{ rpm}(\text{forward}) \Rightarrow r_4 \approx 0 \text{ Hz}(\text{backward}) \quad (5.403b)$$

Fazendo-se $\Omega = 0$ tem-se:

$$r^2 + 1.24 = 0 \Rightarrow r_{5,6} = 0.18 \text{ Hz} = 10.63 \text{ rpm} \quad (5.404)$$

Fazendo-se $\Omega = \pm 100$ as frequências naturais são:

$$r^2 - 100.i.r + 1.24 = 0 \rightarrow r_{5,6} = \frac{i}{2}(-100 \pm 100.02) \rightarrow \quad (5.405)$$

$$r_5 = 15.91 \text{ Hz} = 954 \text{ rpm}(\text{forward}) \Rightarrow r_6 \approx 0 \text{ Hz}(\text{backward}) \quad (5.406)$$

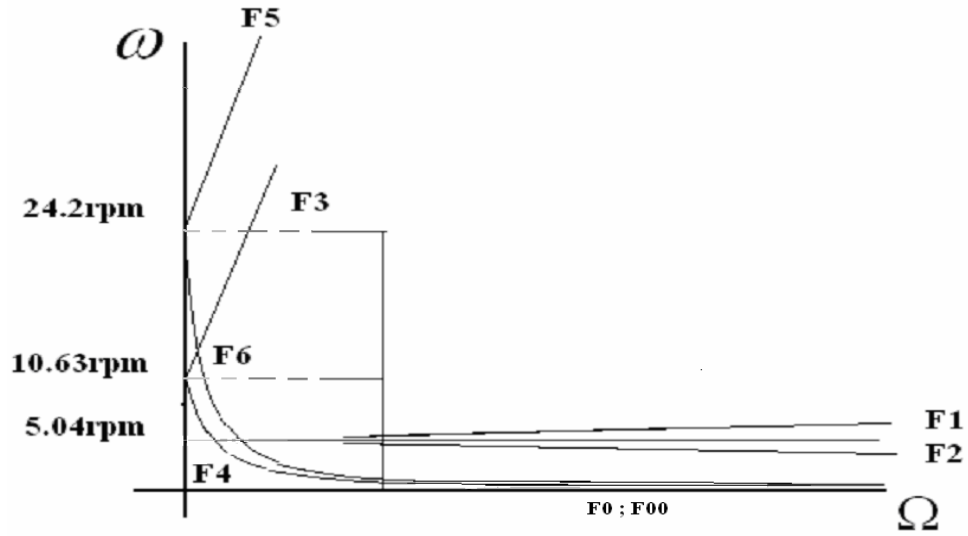


FIG 5.12 RESULTADO ESQUEMÁTICO (CAMPBEL)

A variação da frequência natural com a rotação é apresentada esquematicamente na FIG-5.11. Seguindo o procedimento mostrado na seção anterior e resolvendo-se o sistema para as condições homogêneas, $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=Q_5=Q_6=0$, pode-se calcular os modos naturais de vibração deste eixo como:

$$\eta_1 = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \Rightarrow A_1 e^{(-\omega_{f1}) \times t} + A_2 e^{(\omega_{b2}) \times t} \Rightarrow A_1 e^{-i \omega_{f1} t} \text{ forward} + A_2 e^{i \omega_{b2} t} \text{ backward} \quad (5.407)$$

$$\eta_1 = A_1 [\cos(\omega_{f1})t - i \text{sen}(\omega_{f1})t] + A_2 [\cos(\omega_{b2})t + i \text{sen}(\omega_{b2})t] \quad (5.408)$$

$$\eta_2 = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{-r_2 t} \Rightarrow B_1 e^{(\omega_{f1}) \times t} (\text{forward}) + B_2 e^{(-\omega_{b2}) \times t} (\text{backward}) \quad (5.409)$$

$$\eta_{1,2} = C_1 [\cos(\omega_{b2})t - i \text{sen}(\omega_{b2})t] + C_2 [\cos(\omega_{f1})t + i \text{sen}(\omega_{f1})t] \quad (5.410)$$

Substituindo os valores $\eta_{3,4} = e^{r t}$;

$$\eta_3 = D_1 e^{-r_3 \cdot t} + D_2 e^{r_4 \cdot t} \Rightarrow D_1 e^{(-\omega_{f3}) \times t} + D_2 e^{(\omega_{b4}) \times t} \Rightarrow \quad (5.411)$$

$$\eta_4 = E_1 e^{r_3 \cdot t} + E_2 e^{-r_4 \cdot t} \Rightarrow E_1 e^{(\omega_{f3}) \times t} + E_2 e^{(-\omega_{b4}) \times t} \Rightarrow \quad (5.412)$$

$$\eta_{3,4} = F_1 [\cos .(\omega_{b4})t - i \text{sen} .(\omega_{b4})t] + F_2 [\cos .(\omega_{f3})t + i \text{sen} .(\omega_{f3})t] \quad (5.413)$$

Substituindo os valores $\eta_{5,6} = e^{rt}$;

$$\eta_5 = G_1 e^{-r_5 t} + G_2 e^{r_6 t} \Rightarrow G_1 e^{(-\omega_{f5}) \times t} + G_2 e^{(\omega_{b6}) \times t} \Rightarrow \quad (5.414)$$

$$\eta_6 = H_1 e^{r_5 t} + H_2 e^{-r_6 t} \Rightarrow H_1 e^{(\omega_{f5}) \times t} + H_2 e^{(-\omega_{b6}) \times t} \Rightarrow \quad (5.415)$$

$$\eta_{5,6} = I_1 [\cos(\omega_{b6})t - i \cdot \text{sen}(\omega_{b6})t] + I_2 [\cos(\omega_{f5})t + i \cdot \text{sen}(\omega_{f5})t] \quad (5.416)$$

Substituindo os valores $\eta_{7,8} = J_1 + J_2 t$ já que $\ddot{\eta}_{7,8} = 0$;

$$\eta_7 = J_1 + J_2 t \Rightarrow \text{sendo } J_2 = 0 \Rightarrow \eta_7 = J_1 \Rightarrow \quad (5.417)$$

$$\eta_8 = \hat{J}_1 + \hat{J}_2 t \Rightarrow \text{sendo } \hat{J}_2 = 0 \Rightarrow \eta_8 = \hat{J}_1 \Rightarrow \quad (5.418)$$

A solução completa será então:

$$\{q\} = [U]_n [\eta] = \left\{ \begin{array}{cccc} -\eta_1 & -\eta_2 & -\sqrt{2}\eta_7 & \\ i\eta_1 & -i\eta_2 & \sqrt{2}\eta_8 & \\ -\eta_3 & -\eta_4 & -i\eta_5 & i\eta_6 \\ i\eta_3 & -i\eta_4 & -\eta_5 & -\eta_6 \\ \eta_1 & \eta_2 & -\sqrt{2}\eta_7 & \\ -i\eta_1 & i\eta_2 & \sqrt{2}\eta_8 & \\ -\eta_3 & -\eta_4 & i\eta_5 & -i\eta_6 \\ i\eta_3 & -i\eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \end{array} \right\} \rightarrow \text{podendo assim calcular-se } \{q\} \quad (5.419)$$

5.6.4) Autovalores do Sistema Giroscópico Puro (Equação de Estado)

Existe uma outra forma para se resolver este problema de autovalor, conforme proposto por MEIROVITCH, L, 1997, no caso de sistemas giroscópicos conservativos. Esta abordagem também confirma o desacoplamento dos modos naturais de vibração dos sistemas giroscópicos conservativos. (Desacoplamento dos modos)

Este problema pode ser tratado re-escrevendo-se o sistema na sua forma de equação de estado (sistema de primeira ordem), porém, o sistema continua complexo, conforme mostrado na sequência.

Para transformar este sistema em real, tiraremos vantagem do conhecimento adquirido na Seção (5.6.1.c), oportunidade em que mostraremos que a separação da variável tempo projeta o sistema giroscópico puro em seu plano giratório, o qual roda com velocidade igual à velocidade de precessão do eixo.

Inicialmente transforma-se este sistema de segunda ordem em um outro associado de primeira ordem, conforme segue:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (5.420)$$

Sendo $[K]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} = 0$; pode-se re-escrever a equação de movimento da forma abaixo (constante Ω):

$$[K]\{\dot{q}(t)\} + [M]\{\ddot{q}(t)\} + ([G])\{\dot{q}(t)\} - [K]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q\} \quad (5.421)$$

$$\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} + \begin{bmatrix} [0] & [-K] \\ [K] & [G] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix}_{2n \times 1} ; \eta = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (5.422)$$

$$\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \cdot \dot{\eta} + \begin{bmatrix} [0] & [-K] \\ [K] & [G] \end{bmatrix} \cdot \eta = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \rightarrow \quad (5.423)$$

Novo Problema de autovalor

$$[M^*]\dot{\eta} + [G^*]\eta = [B]\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix}_{2n \times 1} ; [B]\{u\} = \{Q\}_{2n \times 1} \rightarrow \quad (5.424)$$

Resposta Dinâmica

Toda vez que um problema de vibração (autovalor) precisa ser transformado, como apresentado acima, (re-editado na forma de matrizes $2n \times 2n$), tem-se um problema de autovalor em sua forma de “equação de estado”.

Todavia a matriz $[G^*]$ não é simétrica nem positiva definida, não permitindo uma pronta solução para o problema de autovalor (a matriz giroscópica torna o sistema não simétrico). Assim:

$$M^* = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} = [M^*]^T \quad \text{simétrica positiva definida} \quad (5.425)$$

$$G^* = \begin{bmatrix} [0] & -[K] \\ [K] & [G] \end{bmatrix} = -[G^*]^T \quad \text{anti-simétrica} \quad (5.426)$$

Re-escrevendo-se esta equação na forma de “equação de estado”, vem:

$$[M^*]\dot{\eta} = -[G^*]\eta + [B]\{u\} \Rightarrow -\frac{[G^*]}{[M^*]}\eta = \lambda\eta \text{ (matriz } 2n \times 2n \text{)} \quad (5.427)$$

$$M^* = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} = [M^*]^T, \quad G^* = \begin{bmatrix} [0] & -[K] \\ [K] & [G] \end{bmatrix} = -[G^*]^T \quad (5.428)$$

onde:

$$\{\eta(t)\} = [q^T(t)\dot{q}^T(t)]^T_{2n} \quad (5.429)$$

Considerando-se que a solução do problema homogêneo tem a forma $\{\eta(t)\} = \{\eta\}e^{i\omega t}$, (pois já sabemos da equação (5.230) que os autovalores de um sistema giroscópico puro são puramente imaginários), podemos derivar a equação matricial complexa do sistema homogênea mostrada abaixo:

$$i.\omega.[M^*]\{\eta(z)\} = -[G^*]\{\eta(z)\} \quad (5.430)$$

Fazendo-se $\eta = X + jY$ e transformando-se algebricamente o sistema com o objetivo de reduzir o problema a sua forma real, obtem-se o desacoplamento esperado, da forma:

$$K^*X = \lambda M^*X; \quad K^*Y = \lambda M^*Y; \quad K^* = [G^*]^T [M^*]^{-1} [G^*]; \quad \omega^2 = \lambda \rightarrow \quad (5.431)$$

onde o operador \mathbf{j} é definido pelas propriedades apresentadas no Capítulo III.

$$\text{Então: } j.X = Y, \quad j.Y = -X \quad (5.432)$$

Sendo os valores de K^* e M^* dados por:

$$M^* = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ 0 & [M] \end{bmatrix} = M^{*T} \rightarrow \text{Simétrica positiva definida} \quad (5.433)$$

$$K^* = G^{*T} M^* G^* = \begin{bmatrix} KM^1K & KM^1G \\ G^T M^1K & K + G^T M^1G \end{bmatrix} = (K^*)^T \rightarrow \text{Simétrica positiva definida} \quad (5.434)$$

$$KM^1G \Rightarrow (KM^1G)^T = G^T (M^1)^T K^T = G^T (M^1)K = G^T M^1K \quad (5.435)$$

As matrizes $K^* e...M^*$ agora são reais, simétricas, positivas e definidas.

Tem-se assim, dois sistemas de equações de estado, ($2n \times 2n$ equações de primeira ordem) com coeficientes reais, constantes e idênticos, que podem ser diagonalizadas, conforme equações apresentada na sequência

É oportuno destacar que transformamos um problema de autovalor originalmente assimétrico e complexo, em dois outros problemas de auto-valor (idênticos), representados por matrizes reais simétricas positivas definidas, estando as soluções, projetada nos planos (YZ) e (XZ) respectivamente

O resultado mostrado por Meirovitch é muito interessante, na medida em que o novo sistema a ser mostrado tem duas soluções iguais.

A bi-ortogonalidade se torna em mono-ortogonalidade, já que as duas soluções, nos planos XZ e YZ são idênticas e iguais à solução encontrada no plano móvel, plano este que gira com o eixo. O conjunto de autovetores projetados nos planos XZ e YZ, pode ser montado em um plano móvel com a ajuda do operador j ($\eta = X + jY$). O plano móvel (que gira com o tempo) é congelado quando extraímos a variável “t” tempo.

Os dois conjuntos de autovetores estão colocados de tal forma que um conjunto de soluções está avançada de 90 graus uma em relação a outra. As soluções observadas no plano XZ, são idênticas às soluções que serão observadas no plano YZ, δT segundos após a passagem por XZ. (posicionado 90 graus avante, no sentido trigonométrico de rotação do eixo). Resolvendo o problema de autovalor, vem :

$$K^* X = \lambda M^* X, \text{ que pode ser escrita na forma } \rightarrow K^*/M^* X = \lambda X \quad (5.436)$$

Na Seção (5.6.1.a) foi mostrado que existe uma matriz [A] real e simétrica que permite escrever-se a equação acima na forma apresentada na equação (5.200), sempre que $K^* e...M^*$ forem reais simétricas positivas definidas. Então:

$$K^*/M^* X = \lambda X; K^*/M^* Y = \lambda Y \rightarrow [A]\{P\} = \lambda\{P\} \text{ problema de autovalor re-editado} \quad (5.437)$$

$$[A] = K^*/M^* = (Q^{*T})^{-1} K^* (Q^*)^{-1} = (Q^{*-1})^T K^* (Q^*)^{-1} = [A]^T; M^* = (Q^*)^T \cdot Q^* \quad (5.438)$$

onde:

$[A]$ é a matriz dos autovalores giroscópicos;

$[P]$ é a matriz dos autovetores giroscópicos.

A contribuição científica deste trabalho é apresentada através da interpretação física do conceito de bi-ortogonalidade aplicado à rotodinâmica e através da caracterização do desacoplamento das equações de movimento dos sistemas giroscópico conservativo. Esta realidade é evidenciada na Seção (5.6.3.a), com a resolução de alguns sistemas giroscópicos, através do desacoplamento das equações de movimento, as quais podem ser resolvidas de forma independente.

O acoplamento aparente dos modos de vibração de sistemas giroscópicos puros, é um fenômeno dinâmico que tem sua manifestação associada à variável tempo. A eliminação da variável tempo permite uma clara percepção da independência linear de seus autovetores, conforme mostrado no desenvolvimento sub-sequente, o que evidencia o desacoplamento destas bases.

A base ortogonal $[P]$ é linearmente independente em relação a matriz $[A]=K^*/M^*$, constituindo-se, portanto, em uma base modal plena do sistema giroscópico. A base $[P]$ é uma transformação linear das bases $[X]$ e $[Y]$ (veja a diante)

Para um sistema giroscópico puro a solução do problema de autovalor está contida no plano. Trata-se de um caso particular de bi-ortogonalidade de autovetores de matrizes anti-simétricas.

Neste caso particular, os dois conjuntos de autovetores adjuntos $[X]$ e $[Y]$ da matriz anti-simétrica que caracterizam este problema de autovalor, equação (5.427), são perfeitamente representados por um único conjunto $[P]$ após a separação da variável tempo “ t ” e da transformação linear.

Isto equivale a dizer que a solução do problema está contida em um único plano e este problema de autovalor é, então, resolvido utilizando-se a mesma simplificação apresentada no Capítulo III.

A equação (5.439),

$$K^* X = \lambda M^* X, \text{ onde } K^* \text{ e } M^* \text{ reais simétricas positivas definidas} \quad (5.439)$$

que representa a projeção do movimento (problema de autovalor não simétrico) no plano girante, pode ser apresentada como um problema de autovalor clássico, conforme mostrado abaixo.

Seja Q^* uma matriz não singular.

Sabe-se da teoria de sistemas lineares que existe Q^* tal que $M^* = (Q^*)^T \cdot Q^*$.

Seja $P = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_n]^T$ um vetor tal que $P = Q^* \cdot X \Rightarrow X = (Q^*)^{-1} P$.

Pode-se transformar linearmente a equação (5.439), conforme mostrado a seguir:

$$K^* X = \lambda M^* X \Rightarrow K^* (Q^*)^{-1} P = \lambda \cdot (Q^*)^T \cdot Q^* (Q^*)^{-1} P \Rightarrow (Q^{*T})^{-1} K^* (Q^*)^{-1} P = \lambda P \quad (5.440)$$

sendo:

$$\begin{aligned} [A]\{P\} &= (Q^{*T})^{-1} K^* (Q^*)^{-1} P = -\frac{1}{[Q^{*T}]} K^* \frac{1}{[Q^*]} P = (Q^{*-1})^T K^* (Q^*)^{-1} P = [A]^T \{P\} = \lambda P \Rightarrow \\ &\Rightarrow [A]\{P\} = \lambda \{P\} \Rightarrow [A]\{P\} = \lambda \{P\} \Rightarrow ([A] - \lambda [I])\{P\} = 0 \quad (5.441) \end{aligned}$$

que é um problema de autovalor simétrico, sendo $[A]$ a matriz dos autovalores giroscópicos e $[P] \Rightarrow$ a matriz dos autovetores giroscópicos.

5.6.4.a) Problema de Resposta Dinâmica em Sistema Giroscópico Puro

O problema geral de desbalanceamento giroscópico, é apresentado em

$$[M]\{\ddot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (5.442)$$

“É fácil verificar que, neste caso, a análise modal clássica falha em sua capacidade de produzir uma solução significativa para o problema, na medida em que $[U]^T [G][U]$ é uma matriz nula”.

Esta afirmativa feita em MEIROVITCH, L., 1997 página 204 quinto parágrafo, não parece precisa e foi substancialmente discutida na seção (5.6.3.a).

Imaginaremos, por simplicidade, um carregamento modal plano contido em um plano que gira com a frequência igual à rotação do eixo e analisemos a projeção de sua solução em um plano que roda com a mesma frequência de rotação do eixo.

Re-editando-se a equação (5.461) em sua forma de equação de estado e considerando-se que:

$$[M^*]\dot{\eta} = -[G^*]\eta + B.(t) \quad (\text{Matriz } 2n \times 2n) \quad (5.443)$$

$$M^* = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ 0 & M \end{bmatrix} = M^{*T}, \quad G^* = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ K & G \end{bmatrix} = -G^{*T} \quad (5.444)$$

sendo

$$\{\eta(t)\} = [q^T(t) \dot{q}^T(t)]^T_{2n} \text{ e } B.(t) = [0^T, Q(t)]^T \quad (5.445)$$

Considerando-se que a solução tem a forma $\{\eta(t)\} = \{\eta\}.e^{i\omega t}$, obtem-se a equação matricial complexa homogênea mostrada abaixo:

$$i.\omega[M^*]\{\eta(z)\} = -[G^*]\{\eta(z)\} \quad (5.446)$$

[P] Fazendo-se $\eta = X + jY$, esta equação se desdobra em:

$$.\omega_r.[M^*]\{X_r\} = -[G^*]\{Y_r\}; \quad .\omega_r.[M^*]\{Y_r\} = [G^*]\{X_r\} \quad (5.447)$$

Seja $[M^*]$ matriz real, simétrica positiva definida e $[Q^*]$ matriz não singular.

Seja $[P] = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_n]^T$ uma matriz tal que $[P] = [Q^*].X \Rightarrow X = (Q^*)^{-1}P$.

Seja $X \Rightarrow X = (Q^*)^{-1}[P]$.

Seja $B(t) = [B]\{u(t)\} \rightarrow$ input (carregamento)

A solução geral da equação (5.446) é obtida com a ajuda da matriz $[P] = [Q^*].X$ (giroscópica modal), que satisfaça as condições de ortonormalidade.

Assim:

$$X_i^T \cdot M_i^* \cdot X_i \Rightarrow \frac{P_i^T}{[Q^*]^T} M_i^* \frac{P_i}{[Q^*]} \Rightarrow P_i^T \frac{M_i^*}{[Q^*]^T [Q^*]} P_i = I \quad (5.448)$$

$$X_i^T \cdot G_i^* \cdot X_i \Rightarrow \frac{P_i^T}{[Q^*]^T} G_i^* \frac{P_i}{[Q^*]} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{P_i^T}{[Q^*]^T} K_i \frac{P_i}{[Q^*]} \\ \frac{P_i^T}{[Q^*]^T} K_i \frac{P_i}{[Q^*]} & \frac{P_i^T}{[Q^*]^T} G_i \frac{P_i}{[Q^*]} \end{bmatrix} = \Delta \quad (5.449)$$

A transformação linear abaixo projeta $\eta(t)$ em sua base ortonormal P (plano YZ)

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^n p_i n_i(t) = P \{n\} \quad (5.450^*)$$

A transformação linear abaixo projeta $\eta(t)$ em sua base ortonormal (3D):

Sendo $\xi_i(t)$ e $n_i(t)$ Coordenadas generalizadas nos planos XZ e YZ. Define-se

$$\xi_i(t), \text{ como sendo } \xi_i(t) = \frac{\tilde{\xi}_i(t)}{Q_i^{*T}} Q_i^{*T} Q_i^* = \hat{\xi}_i(t) M^* \text{ e } n_i(t), \text{ como } n_i(t) = \hat{n}_i(t) \cdot M^*,$$

$$\eta(t) = [P]n(t) = \sum_{i=1}^n (\xi_i(t) \cdot x_i + n_i(t) \cdot y_i) \Rightarrow n(t) = [\xi_1(t)n_1(t) \xi_2(t)n_2(t) \dots \xi_n(t)n_n(t)]$$

$$[P]n(t) = \sum_{i=1}^n (\xi_i(t) \cdot x_i + n_i(t) \cdot y_i) \Rightarrow \xi_i(0) = M^* x_i^T \cdot \eta(0) \text{ e}$$

$$n_i(0) = M^* y_i^T \cdot \eta(0) \Rightarrow \quad (5.450)$$

O vetor $n(t)$ é a projeção do autovetor $\eta(t)$ na base ortonormal $[P]$. Substituindo a equação (5.450) na equação (5.443) e considerando-se $B(t) \rightarrow$ o carregamento modal, vem:

$$[M^*] \dot{\eta} = -[G^*] \eta + B(t) \quad (5.451)$$

$$M^* [P] \dot{n}(t) = -G^* [P] n(t) + B(t) \quad (5.452)$$

Pré-multiplicando-se por $[P]^T$, obtem-se:

$$[P]^T M^* [P] \dot{n}(t) = -[P]^T [G^*] [P] n(t) + P^T B(t); N(t) = [P]^T \cdot B(t) \quad (5.453)$$

$$\dot{n}_i(t) = -[A]_i n_i(t) + N_i(t) \quad (5.454)$$

A projeção de $\eta(t)$ em sua base ortonormal $[P]$ fica sendo dada por:

$$\begin{aligned} \eta(t) = n(t).[P] &\rightarrow [P] = [Q^{*T}_1 x_1, Q^{*T}_1 y_1, Q^{*T}_2 x_2, Q^{*T}_2 y_2, \dots, Q^{*T}_n x_n, Q^{*T}_n y_n]^T \rightarrow \\ \eta_i &= \frac{\tilde{\xi}_i}{Q^{*T}_i} Q^{*T}_i x_i + \frac{\tilde{n}_i}{Q^{*T}_i} Q^{*T}_i y_i \rightarrow \eta_i(t) = \hat{\xi}_i(t) M^* x_i + \hat{n}_i(t) M^* y_i = n_i(t) [P] \rightarrow \\ \eta(t) &= \sum_{i=1}^n (\hat{\xi}_i(t) x_i + \hat{n}_i(t) y_i) = n(t).[P] \\ &\rightarrow n(t) = [\hat{\xi}_1(t) n_1(t) \hat{\xi}_2(t) n_2(t) \dots \hat{\xi}_n(t) n_n(t)] \quad (5.455) \end{aligned}$$

Portanto $\hat{\xi}_i(t) = \frac{\tilde{\xi}_i(t)}{Q^{*T}_i} Q^{*T}_i = \hat{\xi}_i(t) M^*$; $n_{i,i}(t) = \hat{n}_{i,i}(t) M^*$,

sendo as Condições iniciais dadas por:

$$\begin{aligned} \eta_i(t) = \hat{\xi}_i(t) x_i + \hat{n}_i(t) y_i &\rightarrow M^* \eta_i(t) = \hat{\xi}_i(t) M^* x_i + \hat{n}_i(t) M^* y_i \rightarrow \\ x_i^T M^* \eta_i(t) &= \hat{\xi}_i(t) x_i^T M^* x_i + \hat{n}_i(t) x_i^T M^* y_i \rightarrow x_i^T M^* \eta_i(t) = \hat{\xi}_i(t) \rightarrow \hat{\xi}_i(0) = x_i^T M^* \eta_i(0) \\ &\rightarrow \hat{\xi}_i(0) = M^* x_i^T \eta(0) \quad \text{e} \quad \hat{n}_i(0) = M^* y_i^T \eta(0) \quad (5.456) \end{aligned}$$

O desbalanceamento modal plano e a projeção do carregamento na base modal são expressos por:

$$N(t) = [P]^T . B(t) = [X_1(t), Y_1(t), X_2(t), Y_2(t), \dots, X_n(t), Y_n(t)]$$

$$X_1(t) = x^T_{1,i}(t) . B(t) \quad \text{e} \quad Y_1(t) = y^T_{1,i}(t) B(t)$$

Como já vimos, a matriz $[A]$ permite a representação de duas equações diferenciais interligadas através uma única equação.

Sua eficácia de desacoplamento assegura a transformação de um sistema de equações $n_i(t)$ em outro sistema, nas variáveis $\hat{\xi}_i(t)$ e $\hat{n}_i(t)$, como segue:.

$$\begin{aligned} \dot{n}_i(t) = -[A]n_i(t) + N_i(t) &\rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{n}_i \end{Bmatrix} = -[A] \begin{Bmatrix} \xi_i \\ n_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_i(t) \\ Y_i(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\xi}_i(t) = \omega_i n_i(t) + X_i(t) ; \quad \dot{n}_i(t) = -\omega_i \xi_i(t) + Y_i(t) \end{aligned} \quad (5.457)$$

$$n = \begin{Bmatrix} \xi \\ n \end{Bmatrix} ; A = [P]G^*[P] \text{ e } \begin{Bmatrix} G^* \\ M^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & -\frac{P_i^T}{[Q^*]^T} K_i \frac{P_i}{[Q^*]} \\ \frac{P_i^T}{[Q^*]^T} K_i \frac{P_i}{[Q^*]} & \frac{P_i^T}{[Q^*]^T} G_i \frac{P_i}{[Q^*]} \end{bmatrix} \quad (5.458)$$

Mostrado desta forma a soma vetorial das equações (5.457) recompõe a projeção das equações na base bi-ortonormal, onde $\xi_i(t)$ representa a projeção do movimento no plano inercial XZ e $n_i(t)$ representa a projeção do movimento no plano YZ, sendo idênticas as soluções, podendo o problema ser resolvido independentemente, como já demonstrado na Seção (5.6.3.a). A solução do sistema interligado, pode ser obtida pela integração da variável de estado, no domínio do tempo, através de Laplace:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = \omega_i(t)n_i(t) + X_i(t) \\ \dot{n}_i(t) = -\omega_i(t)\xi_i(t) + Y_i(t) \end{cases} : \quad \text{para } i = 1,2,3,\dots,n: \quad (5.459)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace ao sistema, $i=1,2,\dots,n$, vem:

E sendo $\bar{\xi}_i(s) = L\xi_i(t)$; $\bar{n}_i(s) = Ln_i(t)$; $\bar{Y}_i(s) = LY_i(t)$; $\bar{X}_i(s) = LX_i(t)$, chega-se a:

$$\begin{cases} s\bar{\xi}_i(s) - \xi_i(0) - \omega_i \bar{n}_i(s) = \bar{X}_i(s) \\ s\bar{n}_i(s) - n_i(0) + \omega_i \bar{\xi}_i(s) = \bar{Y}_i(s) \end{cases} \quad (5.460)$$

Resolvendo-se o sistema no domínio s tem-se:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_i(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_i^2} [s\bar{X}_i(s) + \omega_i \bar{Y}_i(s) + s\xi_i(0) + \omega_i n_i(0)] \\ \bar{n}_i(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_i^2} [s\bar{Y}_i(s) - \omega_i \bar{X}_i(s) + sn_i(0) - \omega_i \xi_i(0)] \end{cases} \quad (5.461)$$

As coordenadas modais iniciais são: $\xi_i(0) = x^T_{i.} M^* \eta(0)$ e $n_i(0) = y^T_{i.} M^* \eta(0)$

Usando-se a tabela de Laplace, contida no APÊNDICE B, e aplicando-se a Transformada de Laplace inversa, tem-se a solução na forma de integral de convolução.

$$\begin{aligned} \xi_i(t) = & \int_0^t [x^T_{i.}(t)B(\tau) \cos \omega_i.(t-\tau) + y^T_{i.}(t)B(\tau) \text{sen} \omega_i.(t-\tau)] dt + \\ & + x^T_{i.}(t)M^* \eta(0) \cos \omega_i.(t) + y^T_{i.}(t)M^* \eta(0) \text{sen} \omega_i.(t) \end{aligned} \quad (5.462)$$

$$\begin{aligned} n_i(t) = & \int_0^t [y^T_{i.}(t)B(\tau) \cos \omega_i.(t-\tau) - x^T_{i.}(t)B(\tau) \text{sen} \omega_i.(t-\tau)] dt + \\ & + y^T_{i.}(t)M^* \eta(0) \cos \omega_i.(t) - x^T_{i.}(t)M^* \eta(0) \text{sen} \omega_i.(t) \end{aligned} \quad (5.463)$$

Consideremos um sistema rotor com matrizes de massa e rigidez simétricas, positiva definidas, sem amortecimento, excitado em um único plano e na frequência de rotação do eixo, com mancais de idêntica rigidez nas direções X e Y.

Sabendo-se ainda que: $\cos.(\theta - \pi/2) = \text{sen}(\theta)$; $\text{sen}(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta)$;

E sendo dt um intervalo de tempo, tal que seja equivalente a um ângulo de giro do eixo de 90 graus no sentido trigonométrico, de tal sorte que a resposta dinâmica encontrada no plano XZ, $\xi_i(t)$ seja idêntica à resposta encontrado no plano YZ, em $n_i(t-dt)$

$$x^T_{i.}(t-dt)B(\tau) = y^T_{i.}(t)B(\tau) = x^T_{i.}(t)B(\tau) \quad \text{e} \quad y^T_{i.}(t-dt)M^* = y^T_{i.}(t)M^* = x^T_{i.}(t)M^* \quad (5.464)$$

$$\begin{aligned} \xi_i(t) = & \int_0^t [x^T_{i.}(t)B(\tau) \cos \omega_i.(t-\tau) + y^T_{i.}(t)B(\tau) \text{sen} \omega_i.(t-\tau)] dt + \\ & + x^T_{i.}(t)M^* \eta(0) \cos \omega_i.(t) + y^T_{i.}(t)M^* \eta(0) \text{sen} \omega_i.(t) \quad = \rightarrow \\ \rightarrow = & \int_0^t [y^T_{i.}(t-dt)B(\tau) \cos \omega_i.(t-dt-\tau) - x^T_{i.}(t-dt)B(\tau) \text{sen} \omega_i.(t-dt-\tau)] dt + \\ & + y^T_{i.}(t-dt)M^* \eta(0) \cos \omega_i.(t-dt) - x^T_{i.}(t-dt)M^* \eta(0) \text{sen} \omega_i.(t-dt) = n_i(t-dt) \end{aligned} \quad (5.465)$$

Constata-se desta forma, que:

Para cada variável estado, sua resposta dinâmica permanece idêntica após rotação de 90 graus do eixo rotativo (o plano da elástica gira com rotação igual à do eixo).

Isto equivale a dizer que o efeito giroscópico mantém a resposta dinâmica no plano original de deformação, sendo o conjunto de autovetores adjuntos idênticos, estando desacopladas as bases bi-ortogonais.

No caso geral, todavia (com amortecimento; “cross coupling”; com distribuição espacial do desbalanceamento e com rigidez dos mancais diferentes nas direções X e Y), a elástica torna-se reversa no espaço e precisa de duas bases bi-ortogonais para sua definição da elástica reversa no espaço 3D (mancais ortotrópicos).

Nestes casos, a caracterização tridimensional da elástica é dada pela soma da equação (5.462) com a equação (5.461), conforme apresentado na equação abaixo:

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \sum_1^n \int_0^t \left[(x_i x_i^T + y_i y_i^T)(t) B(\tau) \cos \omega_i(t-\tau) + (x_i y_i^T - y_i x_i^T)(t) B(\tau) \operatorname{sen} \omega_i(t-\tau) \right] dt + \\ & + \sum_1^n (x_i x_i^T + y_i y_i^T)(t) M^* \eta(0) \cos \omega_i(t) + (x_i y_i^T - y_i x_i^T)(t) M^* \eta(0) \operatorname{sen} \omega_i(t) \end{aligned} \quad (5.466)$$

Esta equação representa a resposta transiente do vetor de estado $\eta(t)$ de um sistema rotor giroscópico puro, associada a uma carregamento inicial definido a partir de $t \geq 0$, sendo o mesmo nulo para $t < 0$.

5.6.5) Solução Equação do Sistema Giroscópico Amortecido

Falando-se, genericamente, pode-se dizer que, para sistemas giroscópicos não conservativos, o objetivo do desacoplamento pode ser alcançado com a ajuda da transformação bi-ortogonal já apresentada.

A solução mais genérica para problemas com amortecimento e com efeito giroscópico é apresentada na Seção (5.6.4.c).

Inicialmente discutiremos um caso particular e muito comum na prática.

5.6.5.a) Sistema Giroscópico Amortecido Simplificado

Nos casos em que o amortecimento é realmente baixo, como no caso de rotores de máquinas suportados por rolamentos, nós podemos simplificar a solução do problema de autovalor e de resposta dinâmica com a ajuda do conceito do amortecimento proporcional. Esta abordagem é pertinente para mancais de rolamento

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([\alpha M + \beta K])\{\dot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q(t)\} \quad (5.467)$$

Conforme discutido na Seção (5.6.3) pode-se dizer que, no caso de baixos níveis de amortecimento, as bases modais do problema de autovalor são ortogonais, tanto para valores baixos como para valores elevados de efeito giroscópico.

Estas bases entretanto, serão diferentes para rotores fortemente giroscópicos (resultam da solução do problema de autovalor giroscópico) e para rotores pouco giroscópicos (solução do problema de autovalor de $[M]$ e $[K]$). Nos dois casos, estas equações podem ser desacopladas e estarão contidas em um único plano rotativo.

Na medida em que o efeito giroscópico cresce, as bases se tornam diferentes, sendo ainda ortogonais. Existe um nível de efeito giroscópico a partir do qual não devemos mais empregar a base não giroscópica.

Outro aspecto importante a se considerar diz respeito à independência do sistema da rotação, em outras palavras, se o sistema é invariante com o tempo ou não.

Para sistemas com baixo efeito giroscópico, a base modal pode ser considerada independente da rotação, já no outro caso, o sistema somente deverá ser considerado, independente da rotação, no entorno de cada rotação.

É importante ainda destacar que, no caso de turbo-máquinas, a rigidez e o amortecimento dos mancais também devem ser considerados, variáveis com a rotação.

A solução de sistemas com baixo amortecimento e baixo efeito giroscópico pode, em alguns, casos ser resolvida projetando-se o sistema na base modal não amortecida, conforme já foi apresentado na Seção (5.6.2.a).

5.6.5.b) Sistema Giroscópico Amortecido

A esta altura já sabemos que o problema de autovalor associado a um sistema giroscópico amortecido é equacionado através da projeção de sua matriz assimétrica

em suas bases bi-ortogonais. Para se resolver este problema de resposta dinâmica, apresentado na equação (5.468), devemos, inicialmente, identificar os autovalores e os autovetores de sua base bi-ortogonal, resolvendo-se a equação homogênea:

$$\dot{\eta}(t) = -[A]\eta(t) + N(t) \quad (5.468)$$

$$\dot{\eta}(t) = A \eta(t) \quad (5.468^*)$$

onde,

$\eta(t) = [q, \dot{q}]^T$ é o vetor de estado no espaço $2n \times 2n$ e $[A]$ é a matriz real e não simétrica dos coeficientes do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}[C + G] \end{bmatrix} \quad (5.469)$$

Após a separação de variáveis a equação toma a forma abaixo:

$$A \eta = \lambda \eta \rightarrow (A - I\lambda)\eta = 0 \quad \text{problema de autovalor não simétrico} \quad (5.470)$$

Sendo λ_i os autovalores que satisfazem ao sistema de equações.

Sabendo-se que $[A]$ é não simétrica e que seus autovetores a direita e a esquerda são respectivamente X e Y, vem:

$$AX = \lambda X \rightarrow (A - I\lambda).X = 0 \quad \text{autovetor a direita} \quad (5.471)$$

$$A^T Y = \lambda Y \rightarrow (A - I\lambda).Y = 0 \quad \text{autovetor a esquerda} \quad (5.472)$$

Sabe-se da Seção (5.6.1.e) que: $y_j^T . x_i = \delta_{ij}$ e $y_j^T A x_i = \lambda_i \delta_{ij}$; $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Sendo V um vetor genérico a ser projetado na base bi-ortogonal, tal que:

$$V = \sum a_i . x_i \quad (5.473)$$

podemos dizer, pelo teorema da expansão, que:

$$a_i = y_i^T V_i \quad \text{e} \quad \lambda_i . a_i = y_i^T . A V \quad (5.474)$$

da mesma forma, considerando-se o vetor à esquerda, podemos dizer que:

$$V = \sum b_j \cdot y_j \quad (5.475)$$

por conseguinte:

$$b_j = x_j^T V_j \quad \text{e} \quad \lambda_j \cdot b_j = x_j^T \cdot A \cdot V \quad (5.476)$$

Re-escrevendo-se as equações anteriores em sua forma matricial tem-se:

$$\text{diag} [\Lambda] = (\lambda_i); \quad X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T; \quad Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n]^T \quad (5.477)$$

$$Y^T X = I; \quad Y^T A X = \Lambda \quad \Rightarrow \quad Y^T = X^{-1} \quad \text{e} \quad X^{-1} A X = \Lambda \quad (5.478)$$

Portanto, o problema de autovalor, nos casos de bi-ortogonalidade, deverá ser resolvido uma única vez, já que os autovalores dos dois problemas são idênticos e os autovetores são um o inverso do outro, conforme mostrado na equação (5.478).

Podemos também registrar que as matrizes A e Λ são similares e estão associadas através da transformação linear apresentada na equação (5.478) ou (5.479).

Em MEIROVITCH, L., 1997, encontramos que a solução da equação homogênea (5.468*); $\dot{\eta}(t) = A \eta(t)$ pode ser encontrada através da matriz de transição:

$$\eta(t) = e^{[\Lambda]t} \eta(0) = e^{[A]t} \eta(0) = \phi(t) \eta(0) \quad \Rightarrow \quad (\text{matriz de transição}) \quad (5.479)$$

$$\eta(t) = \sum_1^{2n} x_i e^{\lambda_i t} \cdot a_i \quad \text{para } t=0 \quad \Rightarrow \quad y^T \eta(0) = \sum_1^{2n} y^T x_i a_i \quad \text{e} \quad a_i = y^T \eta(0) \quad \Rightarrow \quad (5.480)$$

$$\eta(t) = \sum_1^{2n} x_i e^{\lambda_i t} \cdot y^T_i(t) \eta(0) \quad (5.481)$$

A resposta do sistema a uma excitação inicial (posição inicial do vetor de estado) será:

$$\eta(t) = X e^{[\Lambda]t} \cdot Y^T \eta(0) \quad (5.482)$$

$$\text{onde:} \quad e^{[\Lambda]t} = I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \frac{t^4}{4!} \Lambda^4 + \dots \quad (5.483)$$

A convergência da série é garantida e depende do produto $(t \times \max[\lambda_i])$, sendo $\max[\lambda_i]$ a magnitude do maior autovalor de $[A]$.

A equação (5.482) fornece a posição de qualquer um dos vetores de estado do sistema vibratório ao longo do tempo (variação da posição do nó no tempo).

Esta solução da equação homogênea $\eta(t) = X e^{[A]t} Y^T \eta(0)$, é apresentada no domínio do tempo e é dada a partir da identificação dos autovetores adjuntos da base bi-ortogonal (X;Y). A posição dos vetores de estado, em função do tempo, pode também ser estabelecida sem a necessidade da resolução do problema de autovalor, conforme demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} \phi(t) &\Rightarrow X e^{[A]t} Y^T = X \left(I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \frac{t^3}{3!} \Lambda^3 + \frac{t^4}{4!} \Lambda^4 + \dots \right) Y^T \rightarrow \\ &\rightarrow XY^T + t.X\Lambda Y^T + \frac{t^2}{2!} .X\Lambda^2 Y^T + \frac{t^3}{3!} .X\Lambda^3 Y^T + \frac{t^4}{4!} .X\Lambda^4 Y^T + \dots \rightarrow \\ &\rightarrow XY^T + t.X\Lambda Y^T + \frac{t^2}{2!} X\Lambda Y^T X\Lambda Y^T + \frac{t^3}{3!} .X\Lambda Y^T X\Lambda Y^T X\Lambda Y^T + \dots = e^{[A]t} \end{aligned} \quad (5.484)$$

$$\text{Considerando-se (5.225) e sabendo-se que } Y^T X = I ; A = X . \Lambda . Y^T \rightarrow \quad (5.485)$$

$$I + t.A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots = e^{[A]t} = \Phi(t) \quad \text{matriz de transição} \quad (5.486)$$

$$\eta(t) = e^{[A]t} \eta(0) = \Phi(t) \eta(0) \rightarrow \quad (5.487)$$

é a solução da equação homogênea.

5.6.6) Resposta Dinâmica do Sistema Giroscópico Amortecido

A equação abaixo é derivada a partir da equação (5.162)

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + ([C] + [G]) \{\dot{q}(t)\} + ([K] + [H]) \{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (5.488)$$

onde:

$[M] =$	matriz global de massa	(SIMÉTRICA/DEF/POS)
$[K_e] =$	rigidez global do eixo	(SIMÉTRICA/DEF/POS)
$[H] \rightarrow [K_b]$	rigidez cruzada do mancal	(K_{xy}, K_{yx})
$[G] = (\Omega[G_e + G_d])$	matriz global giroscópica	(ANTI-SIMÉTRICA)
$[C] = [C_b]$	amortecimento global	($C_{xx}, C_{xy}, C_{yy}, C_{yx}$)

$\{Q(t)\}$ vetor de carga associado ao desbalanceamento

De maneira geral, a solução desta equação requer um esforço adicional para se resolver computacionalmente um problema de autovalor assimétrico.

No mundo das turbomáquinas, com mancais hidrodinâmicos, o amortecimento não pode ser considerado pequeno e é responsável pelo acoplamento dos modos normais exigindo projeção da solução nos planos XZ e YZ.

A rigidez cruzada $[H]$ (forças cruzadas ou de circulação), bem como o amortecimento viscoso $[C]$, tornam o problema de autovalor não simétrico, também contribuindo para que a elástica se torne uma curva reversa no espaço.

Um método de cálculo proposto para resolver esta equação, quando existe assimetria no problema de autovalor, é discutido a seguir. Re-escrevendo-se a equação (5.227), a mesma expressão anteriormente apresentada em:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A\eta(t) + Bu(t) \\ Y = D\eta(t) \end{cases} \quad (5.489)$$

Este problema de autovalor está apresentado em sua forma de “equação de estado” e não pode ser descrito por uma única matriz $[A]$ real e simétrica, sendo que as suas soluções são complexas.

$$A = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}([K] + [H]) & -[M]^{-1}([C] + [G]) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} F \quad (5.490)$$

Trata-se de um sistema de equações diferenciais ordinárias linear típico, similar aos sistemas encontrados na teoria de controle, onde:

$\eta(z) = T \{q\}$ → variável de estado (resposta no tempo da posição de um nó $2n \times 2n$)

D → matriz de saída ;

$Y = D\eta(z)$ → “output” conforme a teoria de controle;

u → variável de entrada, input do sistema de controle ;

y → saídas do sistema global não reduzido.

Para calcular as saídas do sistema acima, estas equações devem ser integradas no domínio do tempo, nas bases da teoria de controle.

Após a definição dos estados, solução da equação homogênea, o problema de I/O é analisado em sistema fechado, sendo a equação de saída $y = Dx$ usada para determinar a resposta em cada nó do sistema global ao longo do tempo.

Para definir uma formula geral que resolva o sistema apresentado na equação (5.468*), com soluções para o sistema homogênea e para as soluções particulares, multiplicaremos à esquerda os dois lados desta equação pela matriz, não singular, $K(t)$.

$$K(t)\dot{\eta}(t) = K(t)A\eta(t) + K(t)Bu(t) \rightarrow \frac{d}{dt}[K(t)\eta(t)] = \dot{K}(t)\eta(t) + K(t)\dot{\eta}(t) \quad (5.491)$$

$$\frac{d}{dt}[K(t)\eta(t)] - \dot{K}(t)\eta(t) = K(t)A\eta(t) + K(t)Bu(t) \quad (5.492)$$

sendo:

$$\dot{K}(t) = -AK(t) \rightarrow K(t) = e^{-At} \cdot K(0) \rightarrow e^{[A]t} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \quad (5.493)$$

Fazendo-se (por simplicidade) $K(0) = I$; $AK(t) = K(t)A$ e $\dot{K}(t) = -K(t)A$ tem-se:

$$\frac{d}{dt}[K(t)\eta(t)] = K(t)Bu(t) \quad (5.494)$$

Integrando se a equação (5.494), vem:

$$K(t)\eta(t) = K(0)\eta(0) + \int_0^t K(\tau)Bu(\tau)d\tau \rightarrow K(t)\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t K(\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (5.495)$$

Pré-multiplicando-se os dois lados por $K^{-1}(t)$ e considerando-se $K^{-1}(t) = e^{At} = \Phi(t)$, obtem-se:

$$\eta(t) = K^{-1}(t)\eta(0) + K^{-1}(t)\int_0^t K(\tau)Bu(\tau)d\tau \rightarrow \eta(t) = \Phi(t)\eta(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (5.496)$$

onde: $\eta(0)$ é o estado inicial e $\Phi(t)$ é a matriz de transição.

$$\Phi(t)\eta(0) \tag{5.497}$$

A solução da equação homogênea ou de “loop aberto” é dada por:

$$\int_0^t \Phi.(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \rightarrow \tag{5.498}$$

e a solução da equação particular ou de “loop fechado”, é dada por:

$$\Phi.(t-\tau) = \Phi.(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} = I + (t-\tau)A + \frac{(t-\tau)^2}{2}A^2 + \frac{(t-\tau)^3}{3}A^3 + \dots \tag{5.499}$$

Computacionalmente pode-se calcular eficientemente a matriz de transição utilizando-se a transformação algébrica apresentada a seguir

$$\Phi.(t) = e^{[A].(t)} = I + (t)A + \frac{(t)^2}{2!}A^2 + \frac{(t)^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{(t)^n}{n!}A^n \rightarrow \tag{5.500}$$

$$\rightarrow \Phi.(t) = I + tA \left(I + \frac{t}{2}A \left(I + \frac{t}{3}A \left(I + \dots + \frac{t}{n-1}A \left(I + \frac{t}{n}A \right) \right) \right) \right) \tag{5.501}$$

$$\eta(t) = \Phi.(t).\eta(0) + \int_0^t \Phi.(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \tag{5.502}$$

VI INSTABILIDADE EM ROTORES FLEXÍVEIS .

A instabilidade em sistemas dinâmicos tem sido observada por várias décadas, sem que o fenômeno tenha sido completamente compreendido, ainda hoje.

As vibrações auto-excitadas estão presentes em todas as áreas de atuação de sistemas físicos onde exista movimento. Dentre estes sistemas, pode-se destacar os seguintes:

- sistemas aeromecânicos (*flutter*, dinâmica de vôo);
- sistemas aerodinâmicos (*stall*, separação da camada limite);
- sistemas termodinâmicos (instabilidade de chama);
- sistemas mecânicos (instabilidade rotodinâmica, máquinas ferramentas);
- sistemas de controle retro-alimentados (instabilidade de controle).

A instabilidade rotodinâmica, objeto de nossa reflexão neste Capítulo, apresenta-se sob a forma de vibrações auto-excitadas, com o surgimento espontâneo e crescente dos níveis de vibração, sem que haja uma fonte externa responsável.

É uma forma de perturbação do movimento do rotor associada a condições peculiares de solução do problema de autovalor (discutido nos Capítulos III, IV e V).

A ocorrência de vibrações auto-excitadas está intimamente associada ao afastamento do conjunto rotativo de sua posição de equilíbrio.

Sempre que isto acontece, aparecem forças restauradoras que recompõem o equilíbrio estável, sendo este o universo das vibrações forçadas, que é retratado na discussão do problema da resposta dinâmica ao desbalanceamento.

Existe, porém, alguns casos particulares em que surgem forças adicionais que rompem este equilíbrio estável, tornando-o instável. Algumas incertezas ainda recaem sobre as origens das forças responsáveis pela instabilidade.

Existe hoje, no entanto, uma considerável compreensão dos mecanismos de evolução das vibrações auto-excitadas, notadamente nos sistemas lineares.

O objetivo deste capítulo é discutir alguns dos mecanismos de instabilidade em turbomáquinas que são hoje plenamente compreendidos e dominados, objetivando elevar o nível total de compreensão do fenômeno de vibração em turbo-máquinas

A instabilidade rotodinâmica se estabelece quando algumas condições particulares se fazem presentes e, nestes casos, os níveis de vibração crescem até o surgimento de algum efeito não-linear que limite o seu desenvolvimento.

Na simulação matemática com um grau de liberdade, o fenômeno da vibração auto-excitada pode ser interpretado ou compreendido como sendo a resposta dinâmica de um sistema físico provido de amortecimento negativo (pouco comum no universo mecânico). Simplificadamente este sistema pode ser descrito por um modelo linear massa/mola/amortecedor de coeficientes constantes.

No universo da Rotodinâmica, as vibrações auto-excitadas tomam a forma de precessão do eixo fletido em uma frequência inferior à da rotação da máquina. Por este motivo, é chamada de vibração sub-síncrona e conduz o nível de vibrações a amplitudes muito elevadas, obrigando a uma imediata redução da rotação do equipamento para evitar danos irreparáveis.

Esta classe de vibração, com a precessão diferente da rotação do eixo, é particularmente destrutiva por ocasionar tensões de flexão alternativas no eixo responsáveis pela fadiga.

Três casos clássicos, citados na literatura especializada, mostram os grandes prejuízos ocasionados pela instabilidade das turbomáquinas:

A) Compressor centrífugo de re-injeção, da Phillips Petroleum Company, em operação próximo ao campo de Ekofisk, no Mar do Norte atrasou o início da produção em seis meses;

B) Compressor centrífugo, da Chevron, instalado na planta de gás natural em Kaybob-instável na condição de operação, atrasou o início da produção em sete meses;

C) Turbo-bomba de alta pressão, do Space Shuttle Main Engine (SSME) projetada para 39.000 rpm, e não podendo operar além das 20.000 rpm, atrasou em mais de seis meses o lançamento do ônibus espacial, incorrendo numa perda diária de US\$ 500.000,00.

Mecanismos mais freqüentes de instabilidade de vibração:

O esforço moderno de desenvolvimento em turbo máquinas, caminha na direção de equipamentos mais leves, de rotações mais elevadas, com maiores potências e com menores folgas entre as partes fixas e móveis (estator e rotor). Infelizmente, todas estas características tendem a agravar e a ampliar o campo das instabilidades do rotor e, conseqüentemente, costumam aumentar as vibrações das máquinas, pois são exatamente estes os parâmetros que mais comprometem a estabilidade rotodinâmica.

O fenômeno da instabilidade é uma contínua restrição ao desenvolvimento das turbomáquinas de alto desempenho e, sem que se tenha uma boa compreensão dos mecanismos associados à instabilidade rotodinâmica, é impossível progredir no desenvolvimento de turbomáquinas. As principais fontes de vibrações auto-excitadas em turbomáquinas podem ser agrupadas em três grandes classes, de acordo com os seus mecanismos:

- 1) Precessão ou chicoteamento;
- 2) Instabilidade paramétrica;
- 3) Atrito variável, prende-solta

6.1 Precessão ou Chicoteamento

Este é o mecanismo de instabilização mais freqüentemente encontrado no universo das turbo máquinas que produz o movimento de precessão dos eixos. Também é sobre este mecanismo que se tem o melhor nível de compreensão.

Na seqüência, será feita uma abordagem global dessa classe de fenômenos, descrevendo-os fisicamente e procurando explicá-los através de modelos matemáticos lineares. Quanto aos outros fenômenos mais complexos, tais como a instabilidade paramétrica e o atrito variável, estes serão tratados de maneira mais superficial.

6.1.1 Diferentes Formas do Mecanismo de Precessão

Nesta mais importante classe de vibrações auto-excitadas, o mecanismo de excitação é uma força tangencial fixa ao rotor. A força provém do fluido comprimido ou de algum mecanismo de atrito interno do rotor. Esta força propulsora do movimento de precessão do eixo possui características bem definidas.

Esta classe de fenômenos de instabilidade rotodinâmica pode ser simulada por um sistema linear que nos permite uma fácil percepção das implicações físicas deste distúrbio.

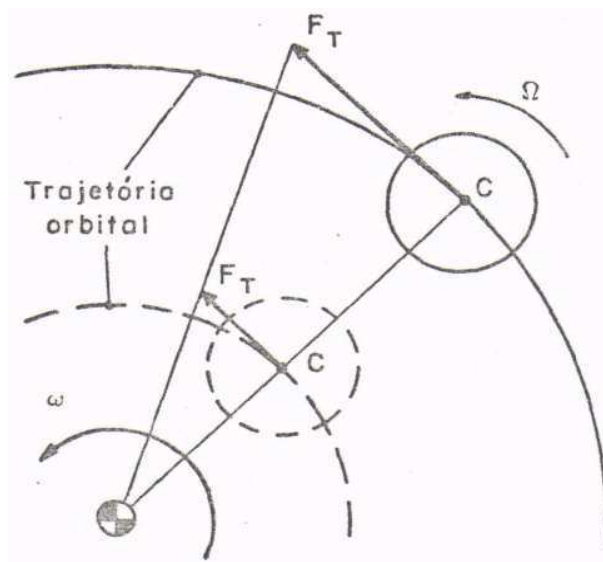


FIG 6.1 FORÇA PROPULSORA F_T DA PRECESSÃO DO ROTOR

A força propulsora é uma força tangencial à trajetória descrita pelo centro de gravidade do rotor. Esta força tem ainda a característica de ser proporcional à deflexão do eixo, relativamente à linha de centro dos mancais, conforme a figura 6.1

Este mecanismo consiste em que, havendo deslocamento do eixo em uma certa direção (X, por exemplo), o mesmo eixo experimenta uma força de reação com componentes nas direções X e Y.

Conseqüentemente, um deslocamento não esperado surge na direção perpendicular à primeira. Esta força tangencial pode ter a sua origem em diversos mecanismos físicos diferentes, que são o foco desta nossa análise e são apresentados a seguir:

- 1) Instabilidade histerética (histeretic whirl);
- 2) Instabilidade hidrodinâmica (oil whirl);
- 3) Folga da selagem no topo da palheta – (Alford force);
- 4) Precessão devido ao atrito seco (rubbing);
- 5) Fluido aprisionado no rotor (fluid trapped in the rotor);
- 6) Instabilidade de compressores de alta pressão (compressor whirl).

O acoplamento cruzado é o denominador comum deste tipo de instabilidade.

Com esta abordagem simples, podemos analisar adequadamente os mecanismos de instabilidade rotodinâmica referidos anteriormente.

6.1.1.1 Instabilidade Histerética

Identificado em 1924 por Kimball e Newkirk, da General Electric Co., este mecanismo de instabilidade tem como fonte o atrito interno do material do eixo, o qual acaba por produzir uma força tangencial de origem histerética.

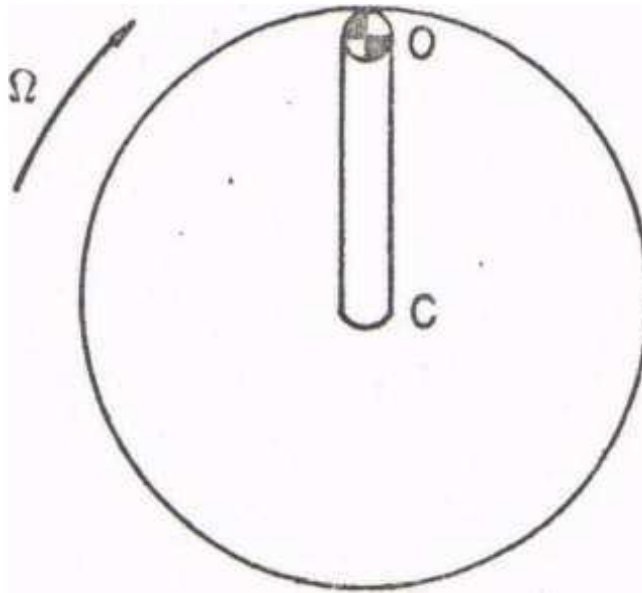


FIG 6.2 DEFLEXÃO ESTÁTICA DEVIDO AO PESO PRÓPRIO

Na figura 6.2 a deflexão estática do eixo é devida ao peso próprio do disco e do eixo. No caso de movimento, em ausência de histerese, teremos que a linha neutra de deformação (LND) da seção coincidente com a linha neutra de tensão (LNT).

Em conseqüência, a força de reação elástica do eixo, que é perpendicular à linha neutra de tensões, é orientada para a linha de centro dos mancais, como mostra a figura 6.3. Neste caso, a reação elástica não produz nenhuma componente perpendicular ao deslocamento do eixo.

Em oposição a este quadro, quando o material do eixo apresenta histerese, as linhas neutras de deformação e tensão não são mais coincidentes, havendo um ângulo de fase entre elas, como pode ser observado na figura 6.3.

A reação elástica à deflexão do eixo, sendo perpendicular à linha neutra de tensões, terá uma componente, F_R , dirigida para a linha de centro dos mancais, e outra componente, F_T , perpendicular a esta direção. Esta última componente é a responsável pelo movimento de precessão, ao qual o eixo fica submetido.

Os diagramas tensão-deformação dos pontos da periferia da seção do eixo são também mostrados. À medida que se eleva a velocidade de rotação Ω (“spin”) do eixo, a força tangencial, F_T , e o ângulo de defasagem vão crescendo, aumentando a área marcada, sendo maior a energia dissipada por histerese.

É importante observar que só haverá força tangencial quando houver o efeito alternado de tração e compressão das fibras longitudinais do eixo.

Esta condição existe quando a rotação Ω é diferente da precessão ω (“whirl”) ou quando a deformação estática do eixo (“bow”) do eixo é grande. A força histerética será desestabilizante quando $\Omega > \omega$ (sub-harmônica), e estabilizante quando $\Omega < \omega$, na vibração super-harmônica.

Conseqüentemente, a precessão devido à histerese pode produzir uma vibração sub-harmônica, sendo freqüentemente $\Omega > \omega$. Para entendimento desta assertiva, desestabilizante ou estabilizante, devemos considerar as fibras do eixo como trabalhando sob a influência de amortecedores do tipo viscoso, conforme visto na figura 6.4

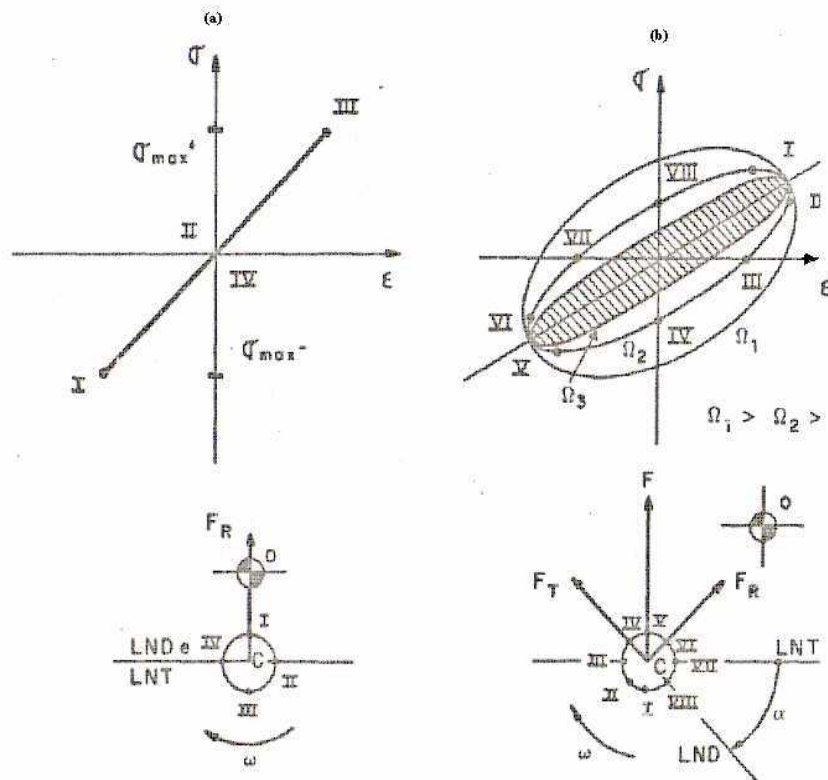


FIG 6.3 FORÇAS ELÁSTICAS DE DEFLEXÃO DO EIXO
 a) Sem histerese
 b) com histerese

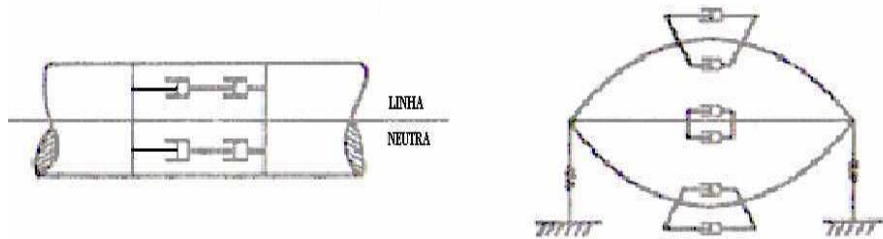


FIG 6.4 FORÇAS DE AMORTECIMENTO DAS FIBRAS DO EIXO

Os amortecedores simulam o efeito de retardamento da LN de deformação em relação à tensão, devido a histerese. Em um sistema como este, o deslocamento está sempre em atraso em relação à força aplicada. Isto significa que somente alguns instantes após a força ter atingido um máximo é que ocorrerá o máximo de deslocamento. A figura 6.5a mostra o caso em que $\Omega > \omega$.

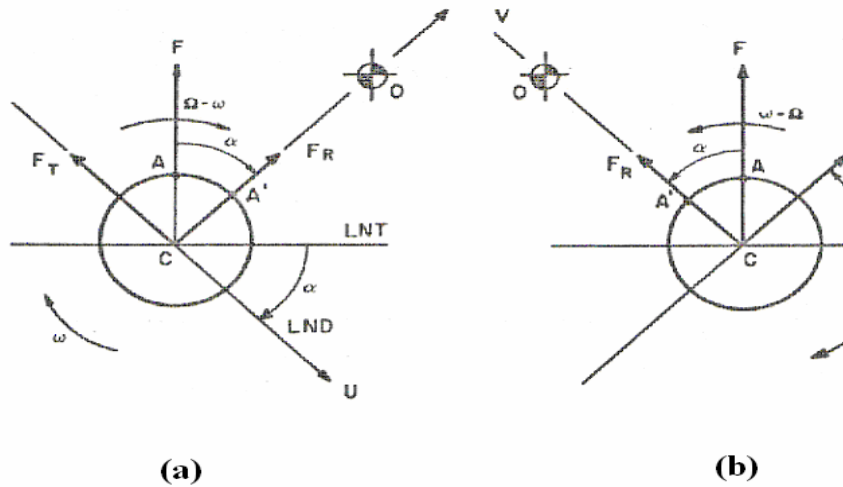


FIG 6.5 ATRASO ENTRE LNT E LND LIGADO AO AMORTECIMENTO

Em relação ao sistema cartesiano UVZ, sentido horário, o ponto A do eixo, sob influência da força (tensão) máxima, levará algum tempo para atingir a deformação máxima, (ponto A'). As linhas neutras de tensão e deformação são, portanto, as mostradas. Em consequência, a força tangencial, F_T , tem o mesmo sentido da precessão do eixo, sendo, portanto, uma força destabilizante (cross coupling).

Já a figura 6.5b mostra o outro caso, em que $\Omega < \omega$. Em relação ao sistema UVZ, o eixo gira no sentido trigonométrico. O ponto A passa primeiro pela condição de máxima força (tensão), para pouco depois, em atraso, passar ao ponto A', de máxima deformação. Em consequência das posições relativas das linhas neutras, a força, F_T , tem o sentido contrário ao da precessão, sendo uma força estabilizante, desfavorecendo a auto-excitação.

6.1.1.2 Instabilidade Hidrodinâmica (Oil Whirl)

Este fenômeno também é caracterizado pelo aparecimento de forças desestabilizantes, que são tangenciais à trajetória do centro de gravidade do eixo. A origem da força desestabilizante pode ser entendida com o auxílio da figura 6.6. Observe-se que o eixo está deslocado radialmente em relação ao centro do mancal. Em relação à linha que une os dois centros, o perfil de pressão desenvolvido no fluido será assimétrico ao longo da parede do mancal.

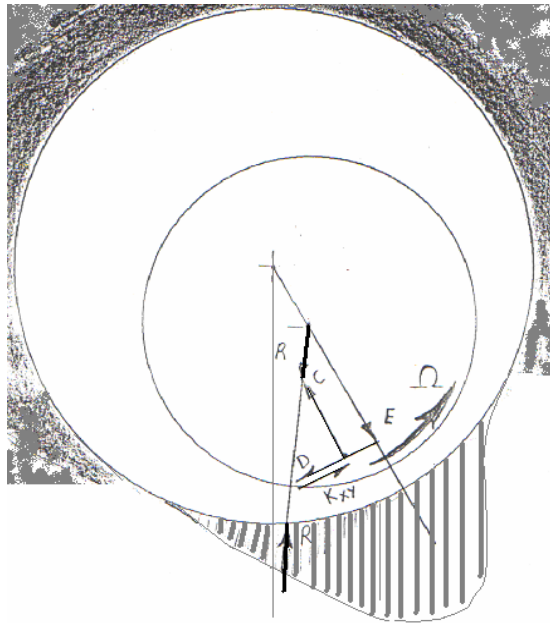


FIG 6.6 “CROSS COUPLING “ HIDRO-DINÂMICO

A pressão do lado de entrada do óleo será superior à pressão do lado de fuga. Como resultado desta assimetria vertical, o centro de pressão fica fora do ponto de simetria geométrica. Desta forma, a resultante de pressão do mancal inclui uma componente tangencial na direção da rotação do eixo, K_{xy} . Esta força tangencial, quando excede as forças de reação devido ao amortecimento viscoso, induz à instabilidade.

A tendência fica evidente: a precessão induzida aumenta a força centrífuga; a folga é diminuída, porém ainda há um aumento da força tangencial. O processo se repete com a força desestabilizante crescente "sem limite".

6.1.1.3 Força de Alford (Folga no Topo de Palhetas)

Máquinas de fluxo axiais, como turbinas a vapor, estão sujeitas a um efeito destabilizante adicional, causado pela influência da folga do topo da palheta na eficiência da turbina.

Conforme mostrado na figura 6.7, uma pequena deflexão radial do eixo da turbina produz uma melhor vedação da selagem (no topo) das palhetas, de um lado da máquina, e um vazamento acentuado, no lado oposto, a 180°. A região melhor selada operará de forma mais eficiente, extraindo mais trabalho e absorvendo um empuxo tangencial superior ao absorvido no lado oposto, de menor eficiência.

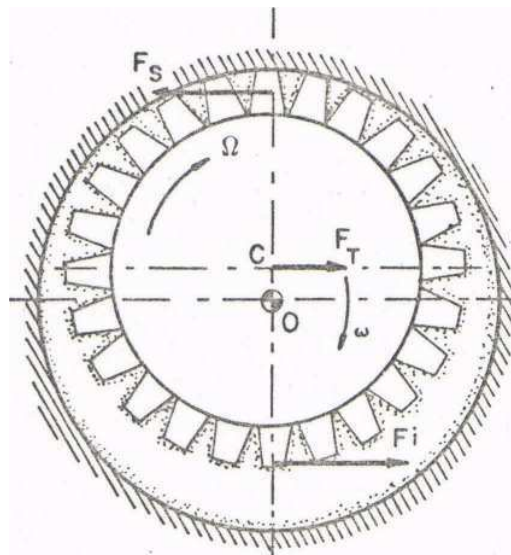


FIG 6.7 “CROSS COUPLING “ CAUSADO PELA FORÇA DE ALFORD

A resultante do empuxo em todas as palhetas é uma força tangencial no sentido da rotação do eixo, denominada "força de Alford", que produz uma precessão.

Esta força sempre tem o sentido da rotação e, portanto, tem a tendência de instabilizar o movimento. Empiricamente a força pode ser calculada pela expressão:

$$F_{alford} = \frac{63000 \times HP \times \beta}{D_p \times H \times rpm} \quad (6.1)$$

β = coeficiente de ajuste; H = altura da palheta; D = diâmetro da palheta; HP = potência

6.1.1.4 Instabilidade por Atrito Seco (Rubbing dry frictionwhip)

O mecanismo de instabilidade dinâmica desenvolvido, neste caso, é característico das forças de atrito seco entre duas superfícies, e induz a uma precessão de sentido oposto ao da rotação. De acordo com a ilustração da figura 6.8, o eixo mantém atrito com alguma parte estacionária e não lubrificada da carcaça, dando origem a forças tangenciais.

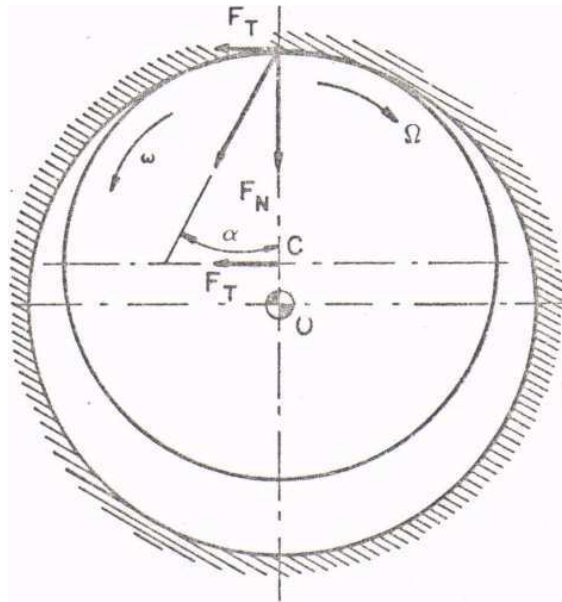


FIG 6.8 “CROSS COUPLING “ CAUSADO PELO ATRITO SECO

Quando o contato radial é estabelecido entre as duas superfícies (rotor/estator), a força de atrito de Coulomb, de direção tangencial, induz no eixo uma precessão no sentido contrário à rotação do eixo Ω .

O movimento circular seguinte age através da força centrífuga, tendendo a flexionar ainda mais o eixo. A força é normal à direção do impacto das duas superfícies. A força de atrito, aumenta progressivamente, em relação ao impacto anterior. A repetição encadeada deste processo tende a aumentar a vibração, até que o sistema limite o fenômeno a um valor máximo da força tangencial.

6.1.1.5 Instabilidade por Fluido Aprisionado no Rotor

Este mecanismo de instabilidade é produzido quando existe a possibilidade de retenção líquida no interior de um “eixo oco”, por exemplo, turbinas a gás figura 6.9.

Com o eixo fletido e em movimento de precessão, a força centrífuga joga o líquido contra a parede interna do cilindro oco. Quando as velocidades de rotação e precessão são idênticas, o C.G. do líquido fica aprisionado no mesmo plano da deflexão do eixo. Entretanto, tal não acontece quando rotação e a precessão são diferentes.

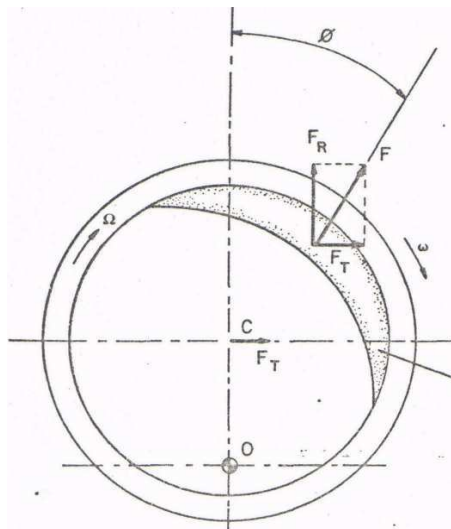


FIG 6.9 “CROSS COUPLING” CAUSADO POR LÍQUIDO NO ROTOR

Nesta circunstancia, a força de atrito viscoso, entre o fluido e a parede, desloca o centro de gravidade da massa líquida, da posição de deformação máxima do eixo para outra com um ângulo de avanço ou atraso.

Em ambos os casos, a força centrífuga sobre o fluido cria uma componente tangencial. Quando a precessão é menor do que a rotação ($\Omega > \omega$), a força tangencial é desestabilizante, por ter o mesmo sentido da precessão. No caso contrário, a precessão maior do que rotação ($\Omega < \omega$), a componente tangencial é estabilizante, com sentido contrário à precessão. Este efeito é semelhante ao da instabilidade histerética, quanto à relação de magnitude entre precessão e rotação.

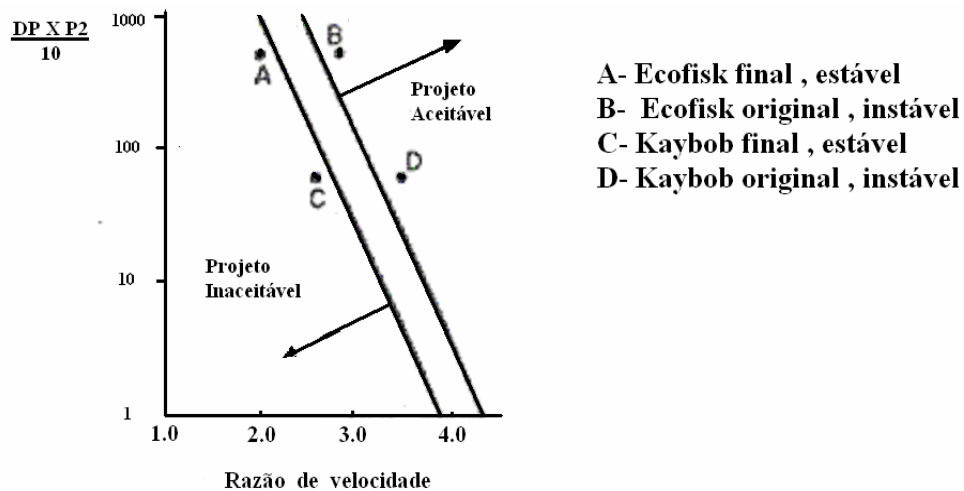
6.1.1.6 Instabilidade de Compressores de Alta Pressão

O modelo proposto por Alford, com uma força de excitação relacionada às folgas, explica razoavelmente o mecanismo de instabilidade aerodinâmica nas turbinas e compressores axiais. Entretanto, torna-se inadequado quando se pretende explicar o fenômeno de instabilidade em compressores centrífugos.

Testes realizados no Californian Institute of Technology acusaram a existência de um elevado efeito cruzado, quando existe a deflexão do eixo.

Surge, então, o movimento instável, sendo aparentemente insensível ao amortecimento. Objetivando administrar e superar estas incertezas quanto à origem das forças desestabilizadoras do impelidor, Kirk e Donald propuseram um tratamento empírico para prever a estabilidade dos compressores centrífugos multi-estágios.

O tratamento baseia-se na observação de que o funcionamento das máquinas se torna instável com o aumento da relação $\Omega / \Omega_{\text{critica}}$ (rotação do eixo/primeira velocidade crítica), bem como aumento da densidade do gás e da potência consumida (figura 6.10).



Critério de Estabilidade para Compressores Centrifugos Baseado na Rotação e na Potência

FIG 6.10 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE COMPRESSORES

O efeito de precessão que ocorre é atribuído à existência de pré-rotação do fluido no interior de labirintos e tambores de balanceamento, passando os mesmos a operar como mancais hidrodinâmicos. Outro componente que muito contribui bastrante para a instabilização de rotores de compressores são os selos a óleo.

Um dos recursos atualmente empregados pela indústria é a utilização de labirintos que impedem a pré-rotação do gás na selagem, como os selos *honey comb*,

Como já foi dito na Seção 6.1.1, existem diversas famílias de fenômenos físicos capazes de desenvolver, dentro das turbomáquinas forças de acoplamento cruzado, forças estas responsáveis pela principal e mais freqüente causa de instabilidade rotodinâmica.

6.1.2 Diagnóstico e Vibrações Auto-Excitadas

6.1.2.1 Diferenças Entre Chicoteamento e Outras Vibrações

As duas principais e mais importantes causas de vibrações em turbomáquinas são o chicoteamento (whirling) e a vibração síncrona (ressonância). As duas, apresentam como consequência, o movimento de precessão do eixo fletido. Entretanto diferem muito, quanto à origem das vibrações, e, conseqüentemente, requerem medidas diferenciadas para a sua eliminação ou minimização.

O chicoteamento, como visto acima é uma vibração auto-excitada, resultante de um equilíbrio instável do eixo. É um fenômeno que acontece mesmo existindo perfeita simetria radial do eixo, rotores e demais componentes (balanceamento perfeito).

Já a ressonância é o resultado da proximidade da rotação de operação do rotor com sua freqüência natural. Ocorre quando o eixo tem sua freqüência natural próxima a uma de suas freqüências de operação. Neste casos a força excitadora é proveniente do desbalanceamento. Trata-se portanto de uma vibração com excitação "externa" proveniente da força centrífuga das massas excêntricas.

6.1.2.2 Identificação, Diagnose e Solução

Obviamente, o primeiro passo para a solução de um problema de instabilidade rotodinâmica é a sua correta identificação. Um diagnóstico errado acarreta grande perda de tempo, produção e, conseqüentemente, dinheiro.

Para detecção de uma vibração nociva logo no seu início, é importante que as turbomáquinas sejam equipadas com sensores de deslocamento radial. Esta providência possibilita o acompanhamento e a identificação dos distúrbios. Possibilita ainda, o desarme da máquina no caso da ocorrência de vibrações excessivas.

Ao se evidenciar um problema de vibração, faz-se necessária a utilização de uma quantidade maior de instrumentos para diagnose. Entre os mais úteis, destacam-se os analisadores de freqüência, osciloscópios, filtros, gravadores de sinais FM, além de outros. O diagrama em cascata, apresentado na figura 6.11, é uma ferramenta extremamente útil na identificação das causas de vibrações.

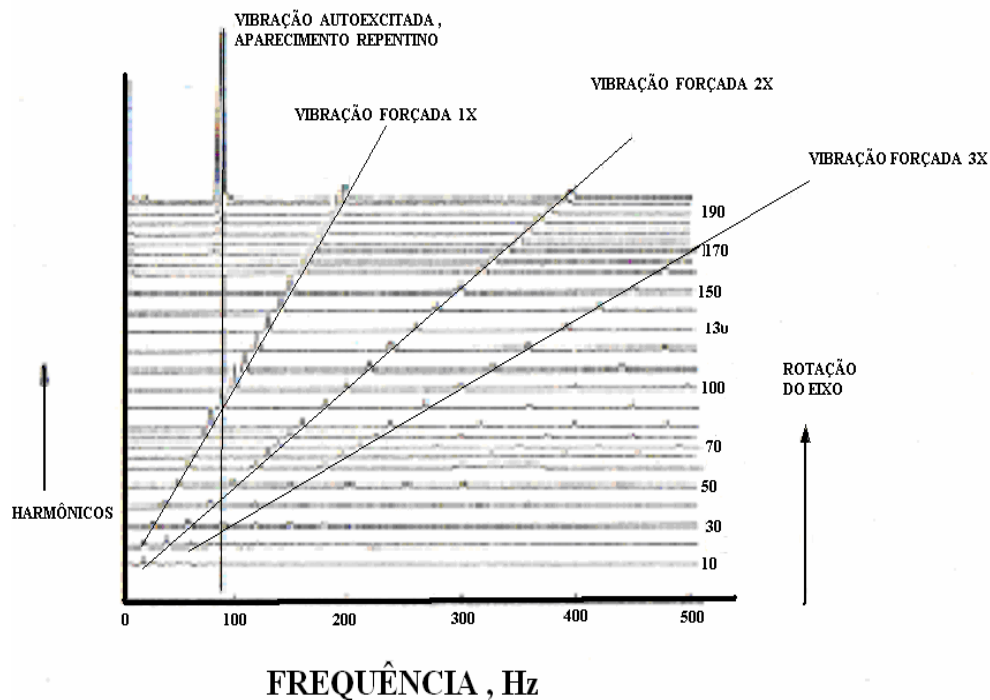


FIG 6.11 DIAGRAMA DE CASCATA PARA DIAGNÓSTICO DE INSTABILIDADE

No exemplo ilustrado, percebe-se uma resposta dinâmica com frequência idêntica à rotação da máquina, bem como mais dois harmônicos, em frequências iguais a duas ou três vezes a rotação da máquina.

O mesmo diagrama mostra o aparecimento repentino de uma vibração sub-síncrona no instante em que a rotação da máquina atinge 170 Hz. Este comportamento é uma forte evidência de que existe instabilidade. Embora existam diversos outros fenômenos geradores de vibrações sub-harmônica, nenhum deles costuma aparecer tão subitamente com os da instabilidade.

6.1.3 Simulação dos Fenômenos de Instabilidade

A descrição física dos vários casos de instabilidade apresentados anteriormente são suficientes para o entendimento do fenômeno. Entretanto, o aparecimento súbito da instabilidade acima de uma determinada rotação, chamada de velocidade limite da estabilidade (threshold limit), pode melhor ser entendido através de uma simulação matemática que permita retratar e analisar o problema.

Nesta seção procuraremos mostrar o aparecimento da instabilidade através de modelos simples que incluam fatores ou características de interesse especial. Abordagens mais complexas serão apresentadas ao final desta seção.

A solução completa deste problema pode ser gerada por um código computacional, com todos os fatores incluídos, o que é feito no exemplo apresentado no Capítulo VII. Entretanto, esta análise inicial se mostra muito útil para o entendimento desta questão e para efeito de diagnose.

6.1.3.1 Simulação Simplificada com Um Grau de Liberdade

Este modelo prevê o movimento do centro geométrico do rotor ao longo de uma linha reta, a qual associamos o eixo de coordenadas X (sistema massa mola). Em equilíbrio dinâmico, o movimento deste ponto se processa segundo a equação:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0, \quad (6.2)$$

onde: M = massa do rotor, C = coeficiente amortecimento, K = coeficiente de mola.

O deslocamento do centro do rotor em função do tempo, tem a forma:

$$X = X_0 e^{st} \quad (6.3)$$

A substituição da equação (6.2) na equação (6.1) fornece um problema de autovalor. A oscilação se dará quando o parâmetro s adquire os valores imaginários

$$s_{1,2} = -\frac{C}{2M} \pm i \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} = -\frac{C}{2M} \pm i\omega_d = \lambda \pm i\omega_d, \text{ onde} \quad (6.4)$$

onde: ω_d = frequência natural amortecida

A combinação das equações (6.3) e (6.2) fornece uma solução equivalente, composta de dois fatores, um exponencial e um movimento harmônico:

$$X = X_0 e^{C/2M t} (A \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) \quad (6.5)$$

Se $C > 0$, o movimento vibratório é dito estável e consiste em uma oscilação harmônica amortecida e se extinguirá ao longo do tempo, devido a $e^{-(C/2M)t}$, conforme mostra a figura 6.12. Se, no entanto, tivermos $C < 0$, o movimento vibratório é instável, visto que a amplitude da vibração terá uma tendência ao crescimento como tempo. Desta forma a simulação matemática simplificada do fenômeno de vibração auto-excitada pode ser entendida através do conceito de amortecimento negativo



FIG 6.12 MOVIMENTO VIBRATÓRIO ESTÁVEL E INSTÁVEL

6.1.3.2 Simulação com Dois Graus de Liberdade

O modelo com um grau de liberdade permite à massa executar um movimento de translação somente em uma direção. Entretanto, um rotor pode executar movimentos orbitais de precessão. Desta forma, seu movimento é melhor descrito por um modelo de dois graus de liberdade. O centro do rotor descreve uma trajetória em um plano perpendicular à linha dos mancais.

Vimos, anteriormente, que as instabilidades que produzem a precessão são causadas por uma força tangencial, como consequência de um deslocamento radial do eixo. Generalizando, denominamos de forças de acoplamento cruzado (cross coupling) àquelas que aparecem devido ao deslocamento da massa na direção ortogonal (figura 6.13).

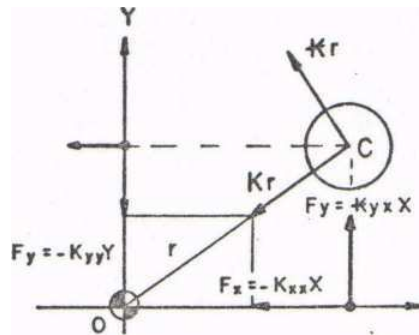


FIG 6.13 EFEITO DO ACOPLAMENTO CRUZADO

6.1.3.2.1 Exercício de Estabilidade 1 (Instabilidade Histerética)

A hipótese de instabilidade histerética pode ser explicada através do atrito interno, responsável pelo acoplamento cruzado devido aos deslocamentos X e Y do rotor, ou seja:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 \\ 0 & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.6)$$

Seguindo o modelo de instabilidade histerética proposto no livro do VANCE, J. M., 1987, vem:

$$K_{XY} = C_i \Omega; \quad K_{YX} = -C_i \Omega; \quad C_{XY} \dot{Y} \quad e \quad C_{YX} \dot{X} \quad - \text{Força Dinâmica}; \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow K_{XY} Y \quad e \quad K_{YX} X \quad C_{YX} \dot{X} \quad - \text{Força estática.} \quad (6.7)$$

Onde C_i é o coeficiente de amortecimento e Ω é a velocidade de rotação do eixo (spin), sendo nulos os coeficientes C_{XY} e $C_{YX} = 0$ da equação matricial seguinte

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX + K_{\kappa}Y = 0 \quad (6.8)$$

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} - K_{\kappa}X + KY = 0$$

$$K_{XY} \text{ e } K_{YX} = K; \quad C_{XY} \text{ e } C_{YX} = 0; \quad K_{\kappa} = K_{XY} = K_{YX} = C_i \Omega; \quad C_{\kappa} = C_{XY} = C_{YX} = 0$$

A solução geral do sistema pode ser pesquisada sob a forma:

$$X = A_1 e^{st}; \quad Y = A_2 e^{st} \quad (6.9)$$

A substituindo-se a equação (6.9) na equação (6.8), obtém-se um problema de autovalor, cuja solução só existe para alguns valores específicos do parâmetro s , que anulam o determinante característico, devendo satisfazer a equação característica, como segue:

$$\begin{bmatrix} K + Cs + Ms^2 & K_{\kappa} \\ K_{\kappa} & K + Cs + Ms^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (Ms^2 + Cs + K)^2 + K_{\kappa}^2 = 0; \quad (6.10)$$

cujas raízes podem abreviadamente, ser escritas, como:

$$s = \lambda \pm i\omega_d \quad (6.11)$$

Resolvendo-se a equação (6.10), obtém-se:

$$M^2s^4 + 2MCs^3 + 2MKC^2s^2 + 2CKs + K^2 + K_{\kappa}^2 = 0 \Rightarrow \text{ou seja} \quad (6.12)$$

No computador fazemos s variar de $-\infty$ a $+\infty$ e procuramos quatro valores de s onde $y = f(s) = 0$. Caso não exista $y = f(s) = 0$, todas as raízes serão complexas.

SOLUÇÃO ALGÉBRICA

$$(Ms^2 + Cs + K)^2 + K_{\kappa}^2 = 0 \Rightarrow (Ms^2 + Cs + K)^2 - (jK_{\kappa})^2 = 0 \quad (6.13)$$

$$(Ms^2 + Cs + (K \oplus jK_{\kappa}))(Ms^2 + Cs + (K(-)jK_{\kappa})) = 0 \quad \text{ou} \quad (6.14)$$

$$(Ms^2 + Cs + T).(Ms^2 + Cs + T') = 0 \quad (6.15)$$

Onde: K_{κ} (acoplamento cruzado); $(T = K(+jK_{\kappa}))$; \rightarrow
 $\rightarrow (T' = K(-)jK_{\kappa}) \rightarrow$ Complexos conjugados

Esta equação apresenta quatro raízes:

$$S_1 = -\frac{C}{2M} + \sqrt{\frac{C^2 - 4MT}{4M^2}} \quad S_3 = -\frac{C}{2M} - \sqrt{\frac{C^2 - 4MT'}{4M^2}}$$

$$S_2 = -\frac{C}{2M} - \sqrt{\frac{C^2 - 4MT}{4M^2}} \quad S_4 = -\frac{C}{2M} + \sqrt{\frac{C^2 - 4MT'}{4M^2}} \quad (6.16)$$

As raízes podem ser re-agrupadas de forma simétrica $S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$:

Sempre que $K \gg K_{\kappa} \Rightarrow (T \cong T')$

$$S_1 \times S_3 = \left(-\frac{C}{2M}\right)^2 - \sqrt{\frac{C^2 - 4MT}{4M^2}} \times \sqrt{\frac{C^2 - 4MT'}{4M^2}} = \quad (6.17)$$

$$\left(-\frac{C}{2M}\right)^2 - \sqrt{\frac{C^4 - 4C^2MT - 4C^2MT' + 16M^2TT'}{16M^4}} = \quad (6.17^*)$$

$$S_1 \times S_3 = \left(-\frac{C}{2M} \right)^2 - \sqrt{\frac{(C^2 - 4MK)^2}{16M^4} + \frac{16M^2 K^2 \kappa}{16M^4}} \quad (6.17^{**})$$

Sendo: $\omega_d^2 = -\frac{4MK - C^2}{4M^2}$ a frequência natural amortecida sem cross coupling

$$\lambda = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2M} \right)^2 + \left(\omega_d^2 - \frac{K}{M} \right)} \text{ coeficiente de amortecimento s/ cross coupling}$$

Considerando-se o “cross coupling” e indo para o limite da estabilidade, vem:

$$S_1 \times S_3 = \left(-\frac{C}{2M} \right)^2 - \sqrt{\frac{(C^2 - 4MK)^2}{16M^4} + \frac{16M^2 K^2 \kappa}{16M^4}} \quad (6.18)$$

que no limite de estabilidade $\lambda = 0$, fornece:

$$S = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\frac{(C^2 - 4MK)^2}{16M^4} + \frac{16M^2 K^2 \kappa}{16M^4}} = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2M} \right)^2 + \left(\omega_d^2 - \frac{K}{M} \right)} = \lambda = 0 \quad (6.19)$$

$$\sqrt{\frac{(C^2 - 4MK)^2}{16M^4} + \frac{16M^2 K^2 \kappa}{16M^4}} = \left(\frac{C}{2M} \right)^2 + \left(\omega_d^2 - \frac{K}{M} \right) = \left(\omega_d^2 - \frac{4KM}{4M^2} \right) + \frac{C^2}{4M^2} \quad (6.20)$$

VANCE, J. M., 1987, propôs que a variação $\bar{\omega}_d^2 = \Delta\omega_d^2$ varia com K_κ conforme mostrado a seguir:

$$\bar{\omega}_d^2 = \frac{4KM - C^2}{4M^2} + \frac{\sqrt{(C^2 - 4MK)^2 + 16M^2 K^2 \kappa}}{4M^2},$$

$$\omega_d^2 = -\frac{4MK - C^2}{4M^2}, \quad \omega_n^2 = K/M \quad (6.21)$$

A equação (6.11), nos permite escrever:

$$X(t) = A_1 e^{\lambda t} (\cos \omega_d t + i \operatorname{sen} \omega_d t); \quad Y(t) = A_2 e^{\lambda t} (\cos \omega_d t + i \operatorname{sen} \omega_d t) \quad (6.22)$$

Vemos que a frequência natural em sistemas com “cross coupling”, K_{κ} depende do coeficiente de acoplamento cruzado, K_{κ} . Esta observação ajuda a entender porque, em máquinas violentamente instáveis, a frequência medida de precessão é usualmente maior do que a velocidade crítica amortecida.

Resumindo:

- a) a instabilidade histerética é causada pelas forças internas de atrito;
- b) as forças de efeito cruzado são função do amortecimento interno e da de rotação;
- c) aumentando-se a rotação, haverá tendência à instabilidade;

6.1.3.2.2 Exercício de Estabilidade 2 (Instabilidade Hidrodinâmica)

Ao contrário dos outros temas discutidos neste Capítulo, esta abordagem foi apresentada no artigo PRODONOFF, V., CASTILHO, A., 1990, e constitui-se em um ensaio teórico para uma melhor compreensão deste tema.

O modelo matemático que permite a análise deste tipo de instabilidade, pode ser idealizado conforme o esquema mostrado na figura 6.14:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.23)$$

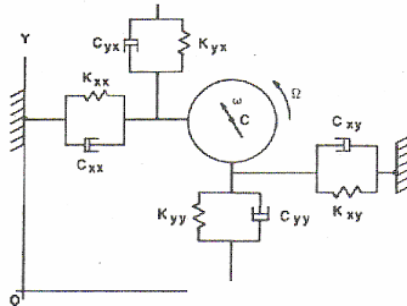


FIG 6.14 MODELO MATEMÁTICO PARA 2.D.O.F.

Neste modelo fazem-se presentes os dois tipos de forças de efeito cruzado: tanto as forças "estáticas", proporcionais ao deslocamento do eixo, como as forças "dinâmicas", proporcionais à sua velocidade

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + C_{\kappa}\dot{Y} + KX + K_{\kappa}Y = 0 \quad (6.24)$$

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + C_{\kappa}\dot{X} - K_{\kappa}X + KY = 0$$

$$\begin{bmatrix} K + Cs + Ms^2 & K_{\kappa} + C_{\kappa}s \\ -K_{\kappa} + C_{\kappa}s & K + Cs + Ms^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad (6.25)$$

$$(Ms^2 + Cs + K)^2 - (C_{\kappa}^2s - K_{\kappa}^2) = 0$$

$$M^2s^4 + 2MCs^3 + 2MKCs^3 + C^2s^2 - C_{\kappa}^2s^2 + 2CKs + K^2 + K_{\kappa}^2 = 0 \Rightarrow \quad (6.26)$$

No computador fazemos s variar de $-\infty$ a $+\infty$ e procuramos quatro valores de s onde $y = f(s) = 0$. Caso não exista $y = f(s) = 0$, todas as raízes serão complexas

A abordagem acima é um pouco mais complexa que a anterior.

Embora seja viável a utilização do mesmo sistema inercial fixo no espaço, optaremos agora por trabalhar em um sistema cilíndrico, com coordenadas (r, θ, z) .

Este outro caminho simplifica o problema e permitirá uma melhor compreensão de alguns outros aspectos do problema da instabilidade, ainda não abordados até o momento.

MUDANÇA DE VARIÁVEIS. (CARTESIANAS X CILÍNDRICAS)

Considere-se um rotor em movimento de precessão, conforme mostrado na figura 6.15. O centro geométrico C do rotor executa uma trajetória orbital com uma velocidade angular ω , não necessariamente constante.

Este modelo idealiza o rotor como uma massa m concentrada em seu centro geométrico, ou centro de massa. Este centro está sempre sobre o eixo U do sistema auxiliar móvel UVZ, sistema este que, gira com a mesma velocidade ω em torno do eixo Z.

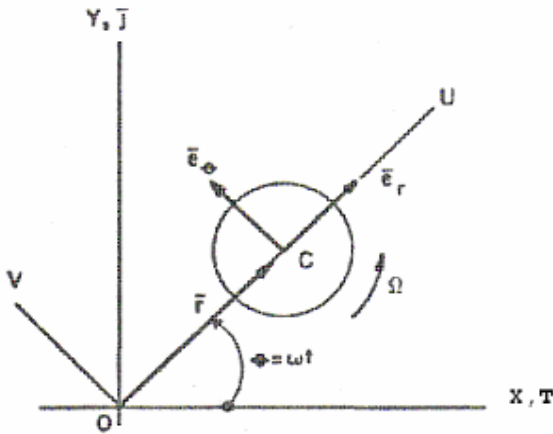


FIG 6.15 ROTOR EM MOVIMENTO DE ROTAÇÃO E PRECESSÃO

Em coordenadas cilíndricas o raio vetor de C tem por expressão:

$$\bar{r} = r\bar{e}_e \quad (6.27)$$

A velocidade e a aceleração absoluta do centro de massa, em termos de (r, θ, z) , tem a forma:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + \omega r\bar{e}_\theta; \quad (6.28)$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\bar{e}_r + (2\omega\dot{r} + r\dot{\omega})\bar{e}_\theta \quad (6.29)$$

onde $\omega = \dot{\theta}; \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ e $e_r; e_\theta; e_z$ são os vetores unitários cilíndricos.

As forças externas que atuam sobre o rotor são de dois tipos: as devidas ao deslocamento ($F_{Estática}$) e as devidas à velocidade ($F_{Dinâmica}$) do rotor.

Cada uma delas, por sua vez, tem duas componentes: uma na direção do deslocamento, ou da velocidade, e a outra perpendicular à primeira direção.

De acordo com a figura 6.16 pode-se escrever:

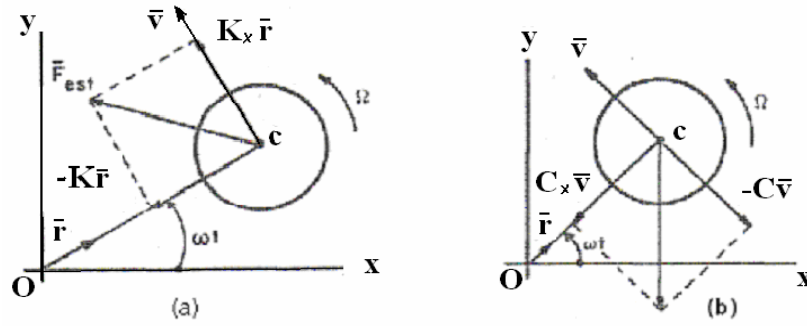


FIG 6.16 EQUILÍBRIO DINÂMICO DO ROTOR:

(a) ESTÁTICAS (b) DINÂMICAS

$$F_{est} = -K\bar{r} + \bar{e}_z \times K_{\kappa}\bar{r} \quad (6.30)$$

$$F_{din} = -C\bar{v} + \bar{e}_z \times C_{\kappa}\bar{v} \quad (6.31)$$

Fazendo-se agora o equilíbrio e separando-se as componentes radial e tangencial, obtêm-se as duas equações diferenciais (escritas em r):

$$m\ddot{r} + c\dot{r} + (C_{\kappa}\omega + K - m\omega^2)r = 0 \quad (\text{radial em } r) \quad (6.32)$$

$$(2m\omega - C_{\kappa})\dot{r} + (m\dot{\omega})r + (C\omega - K_{\kappa})r = 0 \quad (\text{tangencial em } r) \quad (6.33)$$

Rigorosamente, as equações acima são não lineares, pois já havíamos ressaltado a liberdade de ω não ser necessariamente constante. Entretanto, em nosso modelo vamos torná-la constante, uma vez que tal suposição encontra respaldo nas observações do modelo físico real. Impomos, então:

$$\omega = \omega_0 ; \quad \text{onde } \omega_0 \text{ é uma constante a se determinar.} \quad (6.34)$$

Com a restrição acima, as equações (6.32) e (6.33) passam a ser de coeficientes constantes. Desta forma, pode-se supor para o deslocamento do centro do rotor:

$$r(t) = \text{Re}^{-st} \quad (6.35)$$

Substituindo-se a equação (6.35) nas equações (6.32 e 33), encontram-se dois valores possíveis para o expoente s

$$s_{1,2} = -\frac{C}{2m} \pm i \sqrt{\left(\frac{C_{\kappa}\omega_0 + K - m\omega_0^2}{m}\right) - \left(\frac{C}{2m}\right)^2} \quad (6.36)$$

$$s_{1,2} = \lambda \pm i\omega_d \quad (6.37)$$

A rigor, não há necessidade de se resolver a equação (6.33), uma vez que a outra variável já foi assumida como $\omega = \omega_0 = \text{constante}$.

Entretanto, para se saber os efeitos desta suposição, vamos integrar a equação (6.33) e comparar seu resultado com o da equação (6.32), como segue:

$$(2m\omega_0 - C_{\kappa})\dot{r} + (C\omega_0 - K_{\kappa})r = 0 \quad (6.38)$$

A equação de primeira ordem acima admite como solução:

$$r(t) = \text{Re} \left[\left(\frac{C\omega_0 - K_{\kappa}}{2m\omega_0 - C_{\kappa}} \right)^{\times t} \right], \quad (6.39)$$

onde a constante R continua arbitrária. Compatibilizando-se,

$$r(t) = \text{Re} \left[\left(\frac{C\omega_0 - K_{\kappa}}{2m\omega_0 - C_{\kappa}} \right)^{\times t} \right] \quad r(t) = \text{Re}^{(\lambda \pm i\omega_d) \times t} \quad (6.40)$$

e igualando-se a parte real e a parte imaginária das duas soluções concluímos que:

$$R = (\text{arbitrário}), \quad (6.41)$$

$$\omega_d = 0 \quad \text{e} \quad (6.42)$$

$$\lambda = -\frac{C}{2m} = -\frac{C\omega_0 - K_{\kappa}}{2m\omega_0 - C_{\kappa}} \quad (6.43)$$

A primeira das equações mostra que o raio inicial é arbitrário, dependendo das condições iniciais do movimento.

A segunda equação indica uma informação importantíssima: não há oscilação no módulo do raio (deslocamento do eixo $K_x = K_y$). Sua variação é estritamente exponencial e, como veremos, desta informação pode-se calcular a precessão ω_0 (como K é constante a órbita é circular, $R = \text{constante}$).

A terceira equação estabelece um compromisso entre os diversos parâmetros envolvidos (m, C, K_x e C_x). Servirá de discussão para o problema da estabilidade mais adiante.

Usando-se a equação (6.42), anula-se o radicando de (6.36), fornecendo a seguinte equação quadrática em ω_0 :

$$\omega_0^2 - \frac{C_x}{m} \omega_0 + \left(\frac{C^2}{4m^2} - \frac{K}{m} \right) = 0 \quad (6.44)$$

Cujas as raízes, obtêm-se:

$$\omega_0 = -\frac{C_x}{2m} \pm \sqrt{\frac{K}{m} + \left(\frac{C_x}{2m} \right)^2 - \frac{C^2}{4m^2}} \quad (6.45)$$

Introduzindo-se, a notação de amortecimento relativo, vem::

$$\xi = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{C}{C_c} \quad (\text{amortecimento externo relativo}) \quad (6.46)$$

$$\eta = \frac{C_x}{2m\omega_n} = \frac{C_x}{C_c} \quad (\text{amortecimento cruzado relativo}) \quad (6.47)$$

A equação (6.45) pode ser colocada sob a forma seguinte (para a única frequência com sentido físico, a frequência positiva), como abaixo:

$$\omega_0 = \left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2 + \xi^2} \right) \omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{K/m} \quad (6.48)$$

$$\eta = \frac{C_x}{2m\omega_n} = \frac{C_x}{C_c} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{C}{2m\omega_n} = \frac{C}{C_c} \quad (6.49)$$

Comparando-se com a equação (6.21) do problema anterior, constata-se a simplificação trazida pela mudança de sistema de coordenadas:

$$\bar{\omega}_d^2 = \frac{4KM - C^2}{8M^2} \pm \frac{\sqrt{(C^2 - 4MK)^2 + 16M^2 K^2 \kappa}}{8M^2}, \omega_d^2 = -\frac{4MK - C^2}{4M^2}, \omega_n^2 = K/M \quad (6.50)$$

A equação (6.48) fornece o valor da velocidade de precessão do rotor em função da frequência natural. Para amortecimento nos mancais ou pelo fluido no qual está imerso o rotor, valores típicos conduzem a ω_0 pouco maior que ω_n .

Voltemos agora a nossa atenção para a igualdade (6.43). Esta condição, que deverá sempre ser satisfeita, implica no decréscimo do raio R, visto que, em decorrência de $\omega_d = 0$ a expressão do deslocamento se simplifica para

$$r(t) = \text{Re} \left[\left(\frac{C\omega_0 - K_\kappa}{2m\omega_0 - C_\kappa} \right)^{\times t} \right]. \quad (6.51)$$

Para que o sistema seja estável, isto é, para que o raio seja decrescente com o tempo, o expoente da equação (6.51) terá que ser necessariamente negativo.

$$\frac{C\omega_0 - K_\kappa}{2m\omega_0 - C_\kappa} \geq 0 \quad (6.52)$$

Nas duas possibilidades matemáticas sugeridas pela equação (6.52), todavia, o denominador será sempre positivo, visto que, de acordo com (6.48), este denominador fica sendo dado por:

$$2m\omega_0 - C_\kappa = 2m\omega_n \left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2 + \xi^2} \right) - 2m\omega_n \eta = 2m\omega_n \sqrt{1 + \eta^2 + \xi^2}.$$

$$\text{Portanto, devemos ter } C\omega_0 - K_\kappa \geq 0 \quad (6.53)$$

Pode-se então concluir que o sistema será estável quando for verdadeiro $C\omega_0 \geq K_\kappa$.

O rotor fará uma trajetória em forma de espiral decrescente ou, no mínimo, um movimento circular uniforme.

Convém observar que, na condição de instabilidade histerética, em que o coeficiente de rigidez cruzado é proporcional à rotação Ω do eixo, $K_\kappa = C_i \Omega$, a equação (6.53) fornece a velocidade limite de estabilidade.

Usando-se este valor de $K_\kappa = C_i \Omega$, na equação (6.53) com o sinal de igualdade, tem-se:

$$K_{\kappa} = C_i \Omega \rightarrow \Omega_{\text{lim}} = \frac{C}{C_i} \omega_0 = \frac{C}{C_i} \left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2 + \xi^2} \right) \omega_n \quad (6.54)$$

Este valor de Ω é a velocidade limite de estabilidade, acima da qual o rotor iniciará uma trajetória ascendente.

Ao se elevar a rotação Ω da máquina, K_{κ} vai aumentando e, em determinado instante, aparecerá a precessão instável. Quando Ω exceder o limite referido na equação (6.54). Portanto, para elevar-se a velocidade limite da máquina para além de sua velocidade de operação, precisamos trabalhar com todas as possibilidades, e em particular aumentando-se C e reduzindo-se C_i .

Usualmente, isto é conseguido com um fluido mais viscoso nos mancais e com um material de menor histerese, respectivamente. Para finalizar esta parte, voltemos a igualdade (6.43). Eliminando-se o denominador, encontra-se:

$$-\frac{C}{2m} = -\frac{C \omega_0 - K_{\kappa}}{2m \omega_0 - C_{\kappa}} \dots \Rightarrow 2Cm \omega_0 - CC_{\kappa} = 2mC \omega_0 - 2mK_{\kappa} \quad (6.55)$$

$$CC_{\kappa} = 2m K_{\kappa} \equiv \quad (6.56)$$

Esta condição deverá existir entre as diversas grandezas envolvidas para que ω_0 possa ser considerada como constante. Pode-se concluir, pelas considerações acima, que o crescimento do amortecimento externo torna o sistema mais estável, aumentando a velocidade limite de estabilidade.

6.1.4 Ampliação do Conceito de Instabilidade

Existe uma abordagem geral do conceito de instabilidade, que vem da teoria das equações diferenciais lineares ordinárias de ordem n , a qual será rapidamente apresentada nesta seção, objetivando a extensão de algumas das idéias apresentadas até aqui. A estabilidade de um sistema físico, que pode matematicamente ser representado pela equação característica de seu determinante, pode ser determinada através do critério de ROUTH-HURWITZ.

Sendo dada a equação característica de ordem n seguinte ,

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + a_3 r^{n-3} \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (6.57)$$

Construímos então a Matriz H de ROUTH-HURWITZ, como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \dots \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \mathbf{H} \quad (6.58)$$

Pode-se obter $H_1; H_2; H_3 \dots H_n$,

Os coeficientes de expressão são:

$$\begin{aligned} H_1 &= \det[H_1] = a_1 \\ H_2 &= \det[H_2] = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_3 \\ H_n &= \det[H_n] \end{aligned} \quad (6.59)$$

O critério de ROUTH-HURWITZ demonstra que o sistema será estável se todas as quantidades $H_1; H_2; H_3 \dots H_n$ forem positivas.

6.1.4.1 Exercício de Estabilidade 3 (Routh Hurwitz)

Considerando-se o sistema rotodinâmico da figura 6.14, onde a rigidez dos mancais esteja representada por $K_{XX}, K_{XY}, K_{YX}, K_{YY}$,

Onde: $K_{XY} = K_{YX} = a\Omega$, $C_{XY} = C_{YX} = 0$ e $C_{XX} = C_{YY}$.

A equação diferencial que descreve o movimento, incluindo o efeito giroscópico e sem amortecimento cruzado, será portanto:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} - a\Omega\dot{Y} + C\dot{X} + K_{XX}X + K_{XY}Y &= 0 \\ m\ddot{Y} + a\Omega\dot{X} + C\dot{Y} + K_{YX}X + K_{YY}Y &= 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

A solução do movimento livre será fornecida por:

$$\begin{bmatrix} mr^2 + Cr + K_{XX} & -a\Omega r + K_{XY} \\ a\Omega r + K_{YX} & mr^2 + Cr + K_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.61)$$

A equação característica obtida será, portanto:

$$\begin{aligned} r^4 + \frac{2C}{m}r^3 + \left(\frac{K_{XX}}{m} + \frac{K_{YY}}{m} + \frac{C^2}{m^2} + \frac{(a\Omega)^2}{m^2} \right) r^2 + \\ + \left(\frac{CK_{XX}}{m^2} + \frac{CK_{YY}}{m^2} + \frac{a}{m^2} (K_{KY} - K_{YX}) \Omega \right) r + \frac{K_{KK}K_{YY} - K_{KY}K_{YK}}{m^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{2C}{m}; \quad a_2 = \left(\frac{K_{XX}}{m} + \frac{K_{YY}}{m} + \frac{C^2}{m^2} + \frac{(a\Omega)^2}{m^2} \right); \\ 6.42.c) \quad a_3 = \left(\frac{CK_{XX}}{m^2} + \frac{CK_{YY}}{m^2} + \frac{a}{m^2} (K_{KY} - K_{YX}) \Omega \right), \\ a_4 = \frac{K_{KK}K_{YY} - K_{KY}K_{YK}}{m^2} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Sendo o amortecimento C do mancal for muito pequeno e igual a ε , tem-se:

$$\begin{aligned} H_1 = \frac{2\varepsilon}{m}; \quad H_2 = \frac{a\Omega}{m^2} (K_{KY} - K_{YX}); \quad H_3 = -\frac{(a\Omega)^2}{m^4} (K_{KY} - K_{YX})^2 \\ H_4 = \frac{(K_{KK}K_{YY} - K_{KY}K_{YK})a^2\Omega^2 (K_{KY} - K_{YX})^2}{m^6} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Observa-se que o sistema é instável, já que $H_3 = -\frac{(a\Omega)^2}{m^4} (K_{KY} - K_{YX})^2$ é

obviamente, negativa, não ficando, todavia, caracterizada a rotação limite de estabilidade. Caso o amortecimento do mancal se mostre significativo tem-se:

$$\begin{aligned} H_1 = \frac{2C}{m}; \\ H_2 = \left(\frac{CK_{XX}}{m^2} + \frac{CK_{YY}}{m^2} + \frac{2C^3}{m^3} - \frac{a}{m^2} (K_{KY} - K_{YX}) \Omega + \frac{2Ca^2\Omega^2}{m^3} \right) \frac{a\Omega}{m^2} (K_{KY} - K_{YX}) \end{aligned}$$

$$H_3 = \left(\frac{CK_{XX}}{m^2} + \frac{CK_{YY}}{m^2} + \frac{a}{m^2} (K_{KY} - K_{YX}) \Omega \right); \quad H_2 = \frac{4C^2}{m^4} (K_{KK}K_{YY} - K_{KY}K_{YK})$$

$$H_4 = \frac{K_{KK}K_{YY} - K_{KY}K_{YK}}{m^2} H_3 \quad (6.65)$$

No caso de mancais com amortecimento expressivo, a discussão do sinal dos coeficientes pode ser uma tarefa bem mais complicada.

A esta altura podemos perceber que o problema da instabilidade pode se apresentar de forma bem mais complexa do que anteriormente proposto, sendo todavia o primeiro enfoque perfeitamente adequado e pertinente.

6.1.5 Generalização do Conceito de Instabilidade em Sistemas

Lineares

Uma abordagem ainda mais ampla, mais abrangente e ainda mais abstrata do conceito de instabilidade, vem da teoria geral de controle e se aplica a sistemas de equações diferenciais, lineares e de primeira ordem (equações de estado).

Os conceitos aqui apresentados em caráter informativo, não serão acompanhados das respectivas demonstrações, já que as mesmas fogem ao escopo da discussão apresentada neste Capítulo e encontram-se em MEIROVITCH, L., 1997.

Como já foi mostrado, a análise de estabilidade pode estar baseada na solução da equação de movimento, muito embora, nem sempre existe uma solução fechada.

O método de Liapunov representa uma forma de tratamento do problema de estabilidade dinâmica que não requer a solução da equação diferencial de movimento.

O método consiste em submeter o sistema dinâmico a uma função escalar de teste, que seja definida no espaço estado e cuja derivada total no tempo ajude a investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio. Caso exista tal função de teste, ela será chamada de função de Liapunov. Conclusões sobre a estabilidade do sistema são tomadas com base nas propriedades do sinal desta função e de sua derivada total.

Se $[M_{ij}]$ e $[K_{ij}]$ são reais simétricas positivas definidas demonstra-se que os inversos de $[K_{ij}]$ e de $[M_{ij}]$ existem e são diferentes de zero, $\neq 0$, e que $[K_{ij}]$ e $[M_{ij}]$ são também matrizes estáveis, segundo o critério de estabilidade de Liapunov.

É importante registrar que a avaliação realizada sobre a trajetória (metodologia aplicada para definir a estabilidade) não garante a existência de solução fechada para o problema dinâmico. A função de Liapunov não é única.

Considerando-se como exemplo o sistema dinâmico descrito por $2n \times 2n$ equações de estado, escrito em sua forma vetorial (espaço estado), como:

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.66)$$

Para investigar a estabilidade da trajetória deste sistema, considere-se a função de teste arbitrária $\eta(x)$ real, contínua e com a primeira derivada parcial contínua em relação a cada uma das suas variáveis de estado x_i , onde ($i \Rightarrow 1,2,3\dots$), sendo tal que se anule na origem do espaço estado $\eta(0) = 0$. sejam consideradas as definições:

- 1) A função ($\eta(x)$ ou $-\eta(x)$) é definida positiva se $\eta(x) > 0$ para $x \neq 0, \in$
- 2) A função ($\eta(x)$ ou $-\eta(x)$) é semi-definida positiva se $\eta(x) \geq 0$ para $x \neq 0, \in$
- 3) A função $\eta(x)$ é positiva-negativa se $\eta(x) \geq < 0$ para $x \neq 0, \in$

O teorema de estabilidade de Liapunov estabelece que:

1) Caso, no sistema dado pela equação (6.66), exista uma função de teste $\eta(x)$ positiva definida, cuja derivada total no tempo, $\dot{\eta}(x) \leq 0$, negativa semi-definida através de qualquer trajetória, então a solução trivial é **assintoticamente estável**.

2) Caso, no sistema dado pela equação (6.66), exista uma função de teste $\eta(x)$ positiva definida, cuja derivada total no tempo, $\dot{\eta}(x) < 0$, seja negativa definida através de qualquer trajetória, então a solução trivial é **estável**.

3) Caso, no sistema dado pela equação (6.6), exista uma função de teste $\eta(x)$ positiva definida, cuja derivada total no tempo, $\dot{\eta}(x) > 0$, seja positiva definida através de qualquer trajetória, então a solução trivial é **instável**.

Considerando, como exemplo, uma função de teste $\eta(x)$, quadrática tal que:

$$\eta(x) = x^T [A]x \quad (6.67)$$

onde $[A]$ é uma matriz real e simétrica, como no caso dos sistemas dinâmicos conservativos, homogêneos e naturais. Nestes caso pode-se dizer que o sinal de $\eta(x)$, é ditado pela matriz $[A]$, a qual pode ser diagonalizada.

A derivada total de $\eta(x)$, com relação ao tempo e avaliada ao longo da trajetória do sistema, é dada a partir da equação (6.66), que leva a:

$$\dot{\eta}(x) = \frac{d\eta}{dt} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}^T \Lambda \eta = f^T \Lambda \eta \quad (6.68)$$

onde $\Lambda \eta =$ gradiente de η .

Consideremos, neste ponto, que o Hamiltoniano H , (independente do tempo) do nosso sistema dinâmico e sua derivada \dot{H} podem fazer o papel da função de teste de Liapunov, dentro de um cenário de conservação de energia. Então:

$$L = (EC_2 + EC_1) - (EC_0 + V) = (EC_2 + EC_1) - EP \rightarrow \text{Lagrangeano} \quad (6.69)$$

$$L = EC - EP \rightarrow \text{Lagrangeano} \quad (6.70)$$

Sabe-se de MEIROVITCH, L.,1997

$$H = \sum_{K=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \dot{q}_K - L \quad (6.71)$$

$$H = \sum_{K=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \dot{q}_K - L = 2EC_2 + EC_1 - (EC_2 + EC_1 - EP_0) = EC_2 + EP_0 \rightarrow \text{Hamiltoniano} \quad (6.72)$$

$EC_{0,1,2}$ – energia cinética; V – energia potencial; \rightarrow

$$\rightarrow EP_0 = EC_0 - V \quad \text{energia potencial dinâmica}$$

Sabe-se, da Física, que a energia cinética é sempre positiva definida ($EC \geq 0$), logo, a natureza do sinal de H dependerá da natureza do sinal da energia potencial dinâmica ($EP_0 = V - EC_0$). Sendo:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} = \dot{q}^T \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] = \dot{q}^T (Q - C\dot{q} + h.q) = -\dot{q}^T (C\dot{q} - \dot{q}^T h.q) \quad (6.73)$$

onde: C \rightarrow amortecimento viscoso;
h \rightarrow forças circulatorias;
Q \rightarrow carga externa nula \rightarrow
 $\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right]$ \rightarrow trabalho das forças não conservativas

No caso particular, onde haja um subdomínio do espaço-estado, $H = EC_2 + (EC_0 - V) \rightarrow H$ pode ser negativa (mancais magnéticos).

Sendo também $\dot{H} < 0$, estaremos diante de um ponto de equilíbrio instável

No caso normal de rotores com mancais hidrodinâmicos, $H > 0$ é sempre positivo definido. A existência de forças circulatorias torna possível a ocorrência de $\dot{H} = (-\dot{q}^T (C.\dot{q} - \dot{q}^T h.q)) = (-\dot{q}^T C.\dot{q} + \dot{q}^T h^T .\dot{q}) > 0$ e, nestes casos, estaremos diante de um ponto de equilíbrio instável ($h = -h^T$) \rightarrow anti-simétrica. O mecanismo de instabilidade é mostrado na figura 6.17.

A inexistência de forças circulatorias (h) torna impossível a ocorrência de $\dot{H} < 0$ $\dot{H} > 0$, na medida em que o amortecimento viscoso garante $\dot{H} = -(\dot{q}^T C.\dot{q}) < 0$ e nestes casos estaremos sempre diante de um de equilíbrio estável.

No caso de sistemas conservativos, sem amortecimento viscoso, forças externas ou circulatorias, o Hamiltoniano se conserva $H > 0 = Constante$.

Tem-se então $\dot{H} = 0$ e, nestes casos estaremos diante de um equilíbrio estável. O efeito giroscópico não interfere com a estabilidade do sistema conforme (6.72)

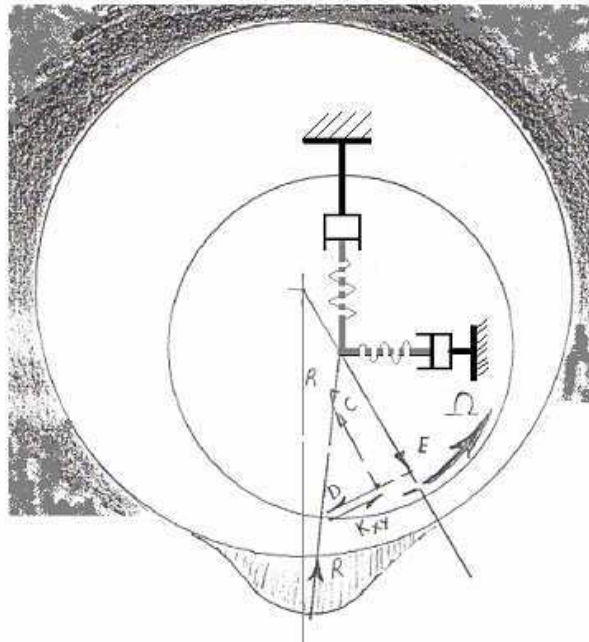


FIG 6.17 FORÇAS EM UM MANCAL NORMAL

6.2 Instabilidade Paramétrica

Este tipo de instabilidade é de natureza bastante distinta das anteriores até aqui apresentadas. A diferença consiste em que as instabilidades analisadas se apresentavam com todas as características do rotor se mantendo constantes no tempo.

Por exemplo, a reação elástica, os coeficientes de amortecimento e os coeficientes de rigidez, as forças axiais do eixo, etc, são constantes no tempo.

Em nossa simulação linear isto era caracterizado pelos coeficientes constantes das equações diferenciais. Entretanto, existem muitos sistemas de engenharia que podem ser modelados por equações diferenciais lineares, mas contendo coeficientes periódicos, como a equação (6.74), onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções periódicas de z , não constantes, como vimos em casos precedentes.

$$\frac{d^2Y}{dZ^2} + P(Z) \cdot \frac{dY}{dZ} + Q(Z) \cdot Y = 0 \quad (6.74)$$

Tais sistemas, simulados pela equação (6.74), podem também apresentar vibrações auto-excitadas. Mas, neste caso, a sua estabilidade não pode ser

simplesmente analisada pelas raízes de uma equação característica, típicas de um problema de autovalor.

Um caso clássico de instabilidade paramétrica em turbo-máquinas ocorre quando o eixo apresenta rigidez a flexão diferente nas duas direções principais da seção, $EI_1 \neq EI_2$.

Nestes casos, o centro de gravidade do rotor, em órbita sobre um plano perpendicular a linha de centro dos mancais, tem o seu movimento descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\ddot{y} + (a - b \cos 2\Omega t)y + (b \sin 2\Omega t)x = -g; \text{ onde: } g = \text{gravidade}; \Omega = (\text{spin}) \quad (6.75)$$

$$\ddot{x} + (a + b \cos 2\Omega t)x + (b \sin 2\Omega t)y = 0$$

Com:

$$a = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}; \quad b = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}; \quad \omega_1^2 = \frac{K_{xx}}{m}; \dots; \omega_2^2 = \frac{K_{yy}}{m} \quad (6.76)$$

sendo ω_1 e ω_2 as frequências naturais de vibração, em torno das duas direções principais da seção transversal do sistema.

A solução da equação (6.74), pode ser do tipo $y(t) = e^{\mu \times t} \phi(t)$, onde: $\phi(t)$ é uma função periódica e $\mu = \alpha + i\beta$.

Dependendo dos valores de a e b , o eixo pode sofrer violentas vibrações auto-excitadas, quando em operação, na velocidade crítica N_c , ou seus sub-harmônicos $N_c/2$, $N_c/4$, etc....

Estes mecanismos de instabilidade são freqüentemente estudados através das equações de Mathieu e Hill.

Um rasgo de chaveta pronunciado, uma peça solta, e um roçamento (rubbing) podem ser causas que dão origem a este tipo de instabilidade.

Cumpra observar no entanto, que não são comuns estes problemas no atual estágio de desenvolvimento das turbo- máquinas. Outro exemplo que conduz à instabilidade paramétrica é a de uma viga ou eixo uniforme submetidos a uma força axial periódica P com o tempo.

O movimento lateral tem a expressão:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} - P(1 - 2\gamma \cos 2\omega t) \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (6.77)$$

Uma carga axial pulsante causa uma variação periódica na rigidez a flexão, sendo capaz de induzir uma instabilidade paramétrica, tanto na viga (eixo estacionário), como no eixo girante. Se a viga for bi-apoiada, a solução pode ser dada, por meio de separação de variáveis, como:

$$y(z, t) = f(t) \operatorname{Sen} \frac{N\pi z}{l} \quad (6.78)$$

que, uma vez substituída na equação (6.77), conduz à equação de Mathieu,. Igualmente, dependendo de a e q , o movimento será instável e ado por:

$$\ddot{y} + (a - 2qb \cos 2t)y = 0 \quad (6.79)$$

6.3 Atrito Variável, Prende-Solta (Stick–Slip, Chattering)

Este mecanismo de instabilidade está associado ao atrito seco no ponto de roçamento entre o rotor e o estator. Não deve, entretanto, ser confundido com o mecanismo de precessão devido ao atrito seco, já discutido anteriormente.

Este mecanismo tem uma força excitadora, em forma de um pulso, ou seja, aplicada em um curtíssimo tempo, a intervalos regulares. É causado pela natureza irregular da força de atrito desenvolvida em baixíssima velocidade (força de amplitude variável).

Esta força de atrito pode ser comparada à de um bloco que desliza, com atrito, sobre uma superfície rugosa, com trechos alternados de coeficientes de atrito μ_1 e μ_2 , com $\mu_1 \gg \mu_2$. Ao deslizar sobre o trecho com μ_1 ele adquire uma velocidade que supomos constante. Ao entrar no trecho de μ_2 , o bloco é liberado de uma certa resistência, aumentando sua velocidade como se fosse adicionado um coeficiente negativo de amortecimento.

Com a alternância dos trechos, cria-se uma variação cíclica da velocidade relativa, gerando forças de contato periódicas. Este é o mecanismo que ocorre com o roçamento do rotor sobre o estator, com forças de atrito variáveis, alternando fases de STICK (alto coeficiente de atrito) com fases de SLIP (baixo coeficiente de atrito).

A conseqüência é um movimento auto-excitado. A freqüência de vibração deste movimento é bem maior do que aquela associada à rotação. As vibrações associadas a este efeito prende-solta são de natureza torcional embora vibrações planas laterais possam também ocorrer.

Cumprе notar que este tipo de instabilidade não é comum em turbo-máquinas, sendo mais freqüente em máquinas ferramentas.

6.4 Comentários Finais

Para evitar problemas de instabilidade, foram sugeridos três procedimentos:

- a) Introduzir amortecimento para elevar a velocidade limite de estabilidade, Ω_n ;
- b) Aumentar a freqüência natural do conjunto, ω_n ;
- c) Atacar ou eliminar o mecanismo de instabilidade.

Os dois primeiros são de natureza geral, enquanto que o último encerra medidas particulares para cada fenômeno de instabilidade. A introdução de amortecimento externo adicional é uma medida eficaz para a elevar o limite de estabilidade Ω_{lim} .

É possível mostrar que a relação entre a freqüência limite de estabilidade e a freqüência natural aumenta com o acrescimento do amortecimento externo, possibilitando elevar a primeira freqüência natural para um valor superior à freqüência de trabalho.

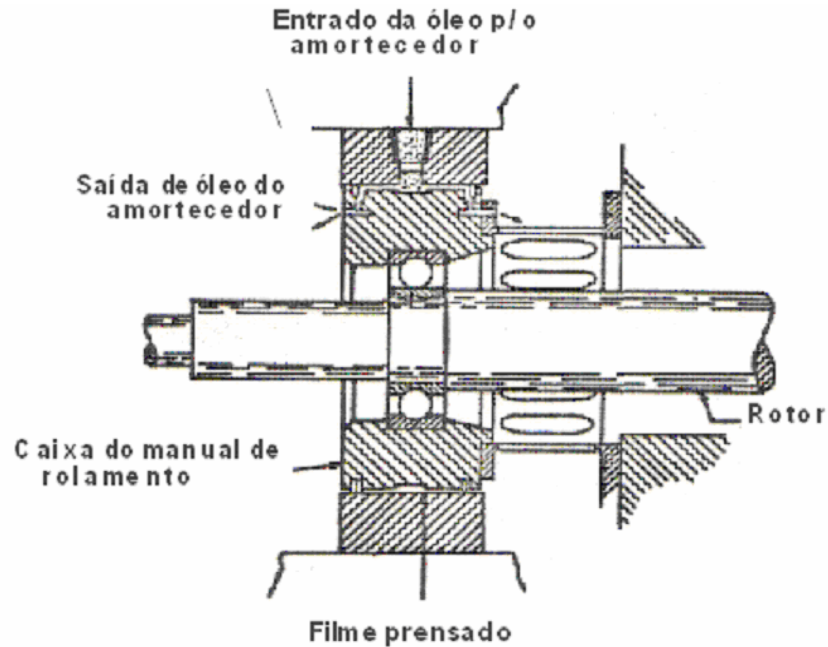


FIG 6.18 AMORTECEDOR DE ÓLEO PRENSADO

Nas turbomáquinas, este efeito pode ser conseguido com a instalação de amortecedores de óleo prensado “squeeze film dampers” nos suportes dos mancais, conforme mostrado nas figuras 6.18 e figura 6.19 . (solução proprietária da G.E.)

A elevação da frequência natural do rotor tem, como consequência, a possibilidade de aumento da velocidade de operação, pois é constante a relação

$$\frac{\omega}{\Omega_{lim}}$$

Este recurso deve ser usado nos casos em que não seja prática a elevação do amortecimento, pois requer uma mudança complexa no projeto.

A minimização dos mecanismos de instabilidade, evitando-se o surgimento do acoplamento cruzado, requer uma ação diferenciada para cada caso (figura 6.19).

Todas as três classes de ação preventiva, acima mencionadas, visam a eliminação das instabilidades que induzem a precessão.

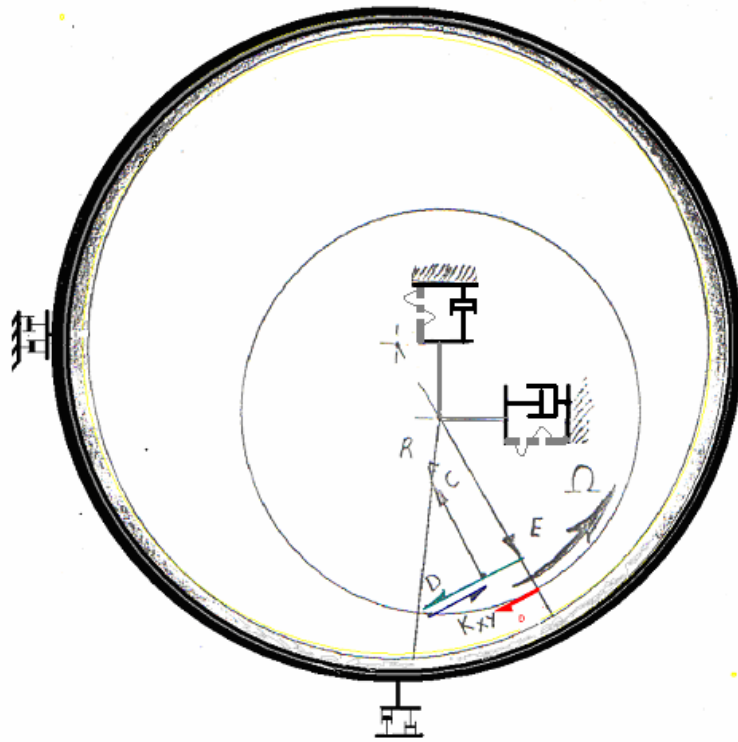


FIG 6.19 FORÇAS EM MANCAL COM ÓLEO PRENSADO

Quanto aos demais mecanismos referidos neste trabalho (instabilidade paramétrica e atrito prende solta), considera-se os mesmos pouco frequentes no domínio das turbomáquinas.

VII EXEMPLO ROTODINÂMICO-1 (SUPORTE RÍGIDO):

Estudo de Caso Real, com Aplicação de Nova Tecnologia, desenvolvida pela Universidade de Virgínia /USA

Nos Capítulos iniciais discutiram-se diversos aspectos relativos à teoria rotodinâmica. Neste capítulo, será usado o conhecimento discutido para a análise rotodinâmica de uma turbina real, responsável pelo acionamento de um compressor de propano, utilizado na planta de lubrificantes da Refinaria Duque de Caxias REDUC/PETROBRAS.

Trata-se de um exemplo real de aplicação da rotodinâmica na solução de um problema concreto, de turbomáquinas. Nesta análise, considera-se a turbina apoiada em base rígida (referencial inercial), condição bastante freqüente nos estudos rotodinâmicos normalmente disponibilizados pelos fabricantes.

Esta análise será executada com a ajuda de programas desenvolvidos na Universidade de Virgínia e que estão em uso na PETROBRAS há mais de 20 anos.

No Capítulo VIII, será apresentado um relatório relativo ao emprego dessa tecnologia, usada para resolver um problema real de vibração em um compressor de amônia. Esse problema está associado ao projeto inadequado do sistema de suportaçãõ da máquina, tendo sido necessário o desenvolvimento de uma metodologia particular para tratamento do mesmo, que surge como conseqüência de uma iteraçãõ inadequada do rotor com a sua estrutura de suporte.

Este enfoque particular produz resultados precisos, quando associado ao uso do pacote de programas ROMAC.

7.1 Modelaçãõ do Rotor

O conjunto rotor da turbina é mostrados na figura 7.1 e na tabela 7.1

O comprimento total do rotor é de 1570 mm e pesa 288.4 kg. A modelaçãõ do rotor é geralmente feita pelo método de elementos finitos, ou pelo método da matriz de transferência. Os resultados serão idênticos se for usado o elemento de barra normalmente empregado em simulações rotodinâmicas.

Nesta análise, é feita uma simulaçãõ do esquema mostrado, sendo a rigidez à flexãõ calculada conforme esta geometria.

O modelo “free-free” deste rotor foi inicialmente montado considerando-se 53 nós. A tabela de entrada de dados do programa é mostrada a seguir:

TAB 7.1 GEOMETRIA DO ROTOR

Nó	L	M	D_e	D_i	L_T
1	0.159	1.180	1.100	0.000	0.000
2	0.267	0.310	1.770	0.000	1.180
3	1.540	0.830	3.940	0.000	1.490
4	1.649	0.870	1.500	0.000	2.320
5	0.435	0.870	1.500	0.000	3.190
6	1.649	0.830	3.940	0.000	4.060
7	2.291	0.590	3.620	0.000	4.890
8	1.264	1.260	1.700	0.000	5.480
9	0.856	0.310	3.620	0.000	6.740
10	1.880	1.300	3.145	0.000	7.050
11	2.858	1.300	3.145	0.000	8.350 <B
12	2.092	0.350	4.130	0.000	9.650
13	4.037	1.000	5.510	0.000	10.000
14	6.748	1.000	5.510	0.000	11.000
15	7.217	0.980	5.940	0.000	12.000
16	9.475	1.380	6.060	0.000	12.980
17	11.264	1.380	6.060	0.000	14.360
18	11.264	1.380	6.060	0.000	15.740
19	6.897	0.310	6.060	0.000	17.120
20	13.630	1.470	8.700	0.000	17.430
21	24.730	1.470	8.700	0.000	18.900
22	24.730	1.470	8.700	0.000	20.370
23	31.366	0.890	13.860	0.000	21.840
24	44.901	0.890	13.860	0.000	22.730
25	34.254	2.150	7.990	0.000	23.620
26	22.778	1.210	7.480	0.000	25.770
27	21.150	1.450	7.480	0.000	26.980
28	22.772	1.450	7.480	0.000	28.430
29	22.872	1.450	7.480	0.000	29.880
30	22.952	1.450	7.480	0.000	31.330
31	23.072	1.450	7.480	0.000	32.780
32	23.119	1.480	7.480	0.000	34.230
33	24.007	1.490	7.480	0.000	35.710
34	24.107	1.480	7.480	0.000	37.200
35	23.709	1.450	7.480	0.000	38.680
36	23.862	1.450	7.480	0.000	40.130
37	24.042	1.450	7.480	0.000	41.580
38	16.385	0.180	7.480	0.000	43.030
39	7.363	0.880	7.990	0.000	43.210
40	11.847	1.410	5.980	0.000	44.090
41	11.207	1.410	5.980	0.000	45.500
42	11.207	1.410	5.980	0.000	46.910
43	9.446	0.980	5.940	0.000	48.320
44	10.760	2.050	5.510	0.000	49.300
45	7.580	0.350	4.130	0.000	51.350
46	2.092	1.300	3.145	0.000	51.700
47	3.265	1.670	3.145	0.000	53.000 <B
48	2.648	0.390	4.330	0.000	54.670
49	3.578	1.540	4.020	0.000	55.060
50	3.977	0.870	3.540	0.000	56.600
51	5.667	3.530	3.370	0.000	57.470
52	4.978	0.790	2.440	0.000	61.000
53	0.523	0.000	2.440	0.000	61.790

	638.423	61.790			

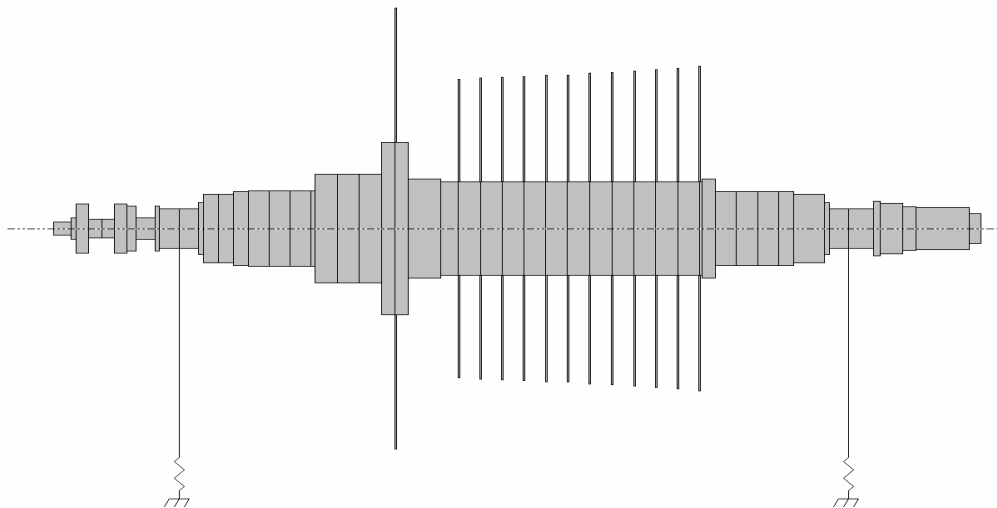


FIG 7.1 DESENHO ESQUEMÁTICO DO ROTOR DA TURBINA

7.2 Resultados Obtidos com a Análise das Velocidades Críticas

Rodando o programa CRITSPD2 do ROMAC, podem-se obter algumas informações importantes.

Na figura 7.2 são apresentados os modos de vibração do rotor do TC-5302, para uma rigidez de mancal da ordem de $2.10^5 lb/in$. Os dois primeiros modos são os modos cilíndricos e cônicos dos mancais, oriundos dos modos de corpo rígido, enquanto que o terceiro modo é derivado do primeiro modo “free free”.

A figura 7.3 apresentado o mapa das velocidades críticas do rotor onde podemos ver o valor das freqüências naturais do rotor quando se mudamos a rigidez dos mancais. Éste mapa mostra também a evolução da rigidez dos mancais com a rotação do eixo, Ω (“spin”).

A intercessão das curvas de freqüências naturais com as curvas dos mancais mostra as freqüências naturais do eixo, (sem amortecimento).

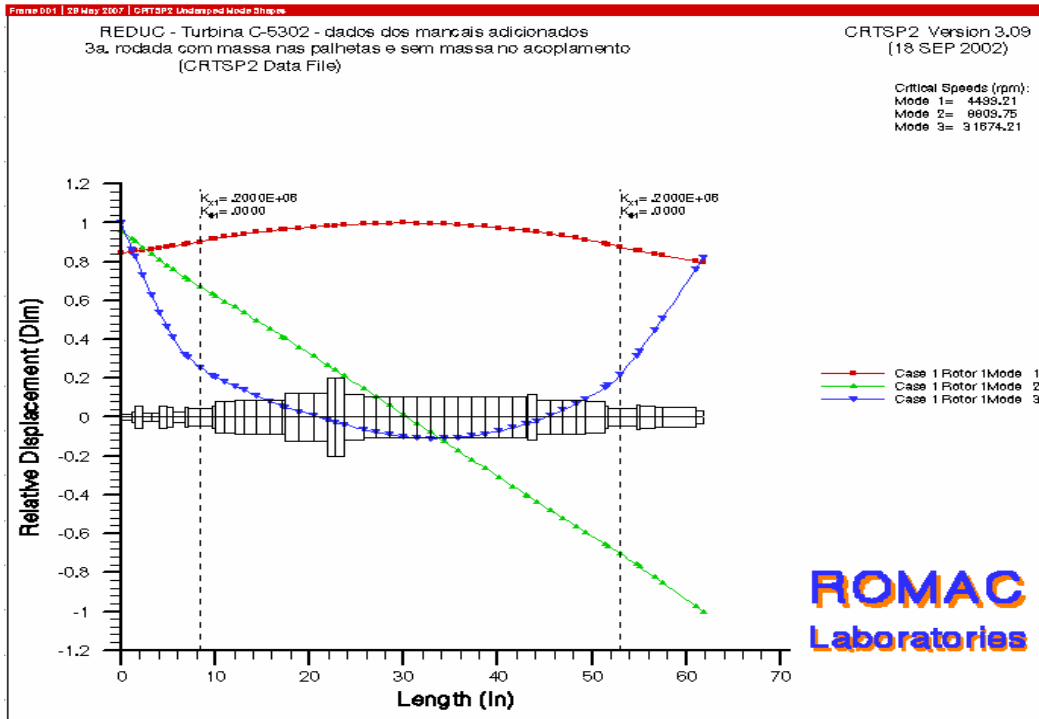


FIG 7.2 DESENHO ESQUEMÁTICO DO ROTOR DA TURBINA

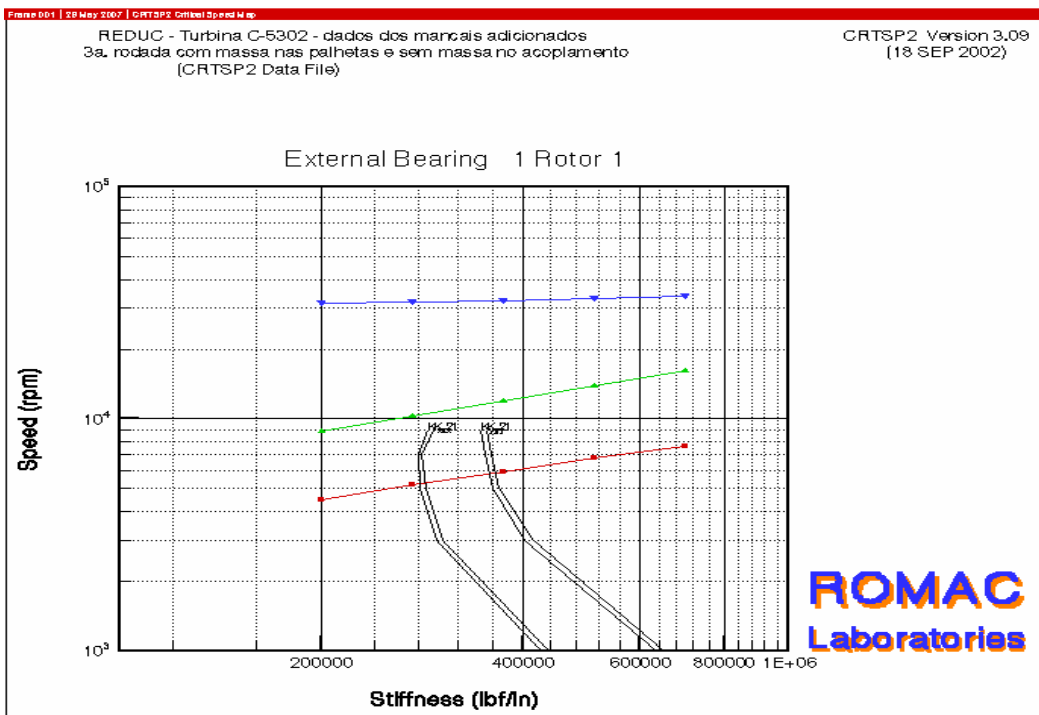


FIG 7.3 MAPA DAS CRÍTICAS DO ROTOR DA TURBINA

7.3 Cálculo da Rigidez e Amortecimento dos Mancais

O programa de computador utilizado para cálculo dos mancais é o MAXBRG. Entrando neste programa com os dados apresentados abaixo, podem-se calcular os coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais da turbina TC-5302.

É importante lembrar que a ciência hidrodinâmica está fora do escopo da tese.

As curvas de rigidez dos mancais contra a rotação da máquina, estão mostradas na figura 7.3. Os dois mancais da turbina são geometricamente iguais, embora as suas cargas sejam diferentes. Os dados de entrada e de saída do programa de computador, são apresentados abaixo:

MANCAL EXTERNO QUADRILOBULAR com precarga: 01 V/H

Kxx/Cxx Rigidez e amortecimento na direção X
 Kxy/Cxy Rigidez e amortecimento cruzado XY
 Kyx/Cyx Rigidez e amortecimento cruzado YX
 Kyy/Cyy Rigidez e amortecimento na direção Y

	Kxx/Cxx	Kxy/Cxy	Kyx/Cyx	Kyy/Cyy
1000.00	0.7048282E+05	0.4736215E+05	-0.1029420E+06	0.9268936E+06
0.4192310E+03	0.1762931E+02	0.1762932E+02	0.3245094E+04	
2 3000.00	0.1090375E+06	0.6688932E+05	-0.7442970E+05	0.5351077E+06
0.2617631E+03	0.1914175E+02	0.1914179E+02	0.8182084E+03	
3 5000.00	0.1371294E+06	0.7651290E+05	-0.7589770E+05	0.4621853E+06
0.2096977E+03	0.1190017E+02	0.1190017E+02	0.4708342E+03	
4 7000.00	0.1603969E+06	0.8370887E+05	-0.8080352E+05	0.4366580E+06
0.1781819E+03	0.8382038E+01	0.8382000E+01	0.3384501E+03	
5 9000.00	0.1803074E+06	0.8907575E+05	-0.8610120E+05	0.4274160E+06
0.1549268E+03	0.6298881E+01	0.6298883E+01	0.2682822E+03	

Os resultados obtidos da simulação dos mancais é utilizado nos programas de rotodinâmica, coma introdução dos valores de rigidez/amortecimento dos mancais nas direções horizontais e verticais (Kxx, Kyy, Kxy, Kyx, Cxx, Cyy, Cxy, Cyx).

Com os dados validados, a partir da simulação rotodinâmica do rotor e da simulação dos mancais, podem-se rodar testes de resposta dinâmica do sistema rotor aos desbalanceamentos padrão, requeridos pelo API 612. (Standard para Turbinas de Refinarias). Podem-se também proceder as análises de estabilidade do rotor.

MANCAL INTERNO QUADRILOBULAR com precarga: 02 V/H

	Kxx/Cxx	Kxy/Cxy	Kyx/Cyx	Kyy/Cyy
1 1000.00	0.6966853E+05	0.4692057E+05	-0.9990323E+05	0.8984960E+06
	0.4155434E+03	0.1884308E+02	0.1884309E+02	0.3161546E+04
2 3000.00	0.1080025E+06	0.6594598E+05	-0.7294751E+05	0.5208885E+06
	0.2597311E+03	0.1894435E+02	0.1894436E+02	0.8011061E+03
3 5000.00	0.1361477E+06	0.7608693E+05	-0.7474667E+05	0.4509929E+06
	0.2108033E+03	0.1152061E+02	0.1152062E+02	0.4623459E+03
4 6550.00	0.1543310E+06	0.8124643E+05	-0.7858748E+05	0.4306703E+06
	0.1831830E+03	0.8818687E+01	0.8818710E+01	0.3547018E+03
5 9000.00	0.1791188E+06	0.8808676E+05	-0.8515368E+05	0.4187048E+06
	0.1541093E+03	0.6181808E+01	0.6181826E+01	0.2643521E+03

7.4 Resposta do Rotor ao Desbalanceamento

O programa de computador utilizado para o cálculo da resposta ao desbalanceamento do conjunto rotor, é o RESP2V3.

Entrando no programa com os dados da geometria do rotor, pode-se calcular a resposta dinâmica desta turbina (TC-5302) à diversos tipos de desbalanceamento.

As figuras 7.4 a 7.6 mostram diversas primeiras críticas amortecidas diferentes do rotor em 6800 rpm, 6400, 6200 e 5500 rpm.

Isto ocorre por que os diferentes sensores instalados observam o fenômeno vibratória de forma diferente (conforme a sua posição) e esta propriedade é denominada de “observabilidade” do sensor.

Nestas figuras, o rotor está sendo excitado por um desbalanceamento colocado no centro do rotor, o qual, e excita o rotor preferencialmente, no primeiro modo cilíndrico do mancal. Entretanto é possível observar-se na figura 7.4, a ocorrência de um pico de vibração em 9000 rpm, o qual está associado a segunda frequência natural do rotor

O eixo pode ser excitado em sua segunda frequência natural. Para isto basta que se coloquem pesos desbalanceados no rotor fora de fase (180 graus separados) e localizados o mais próximo possível das extremidades do rotor.

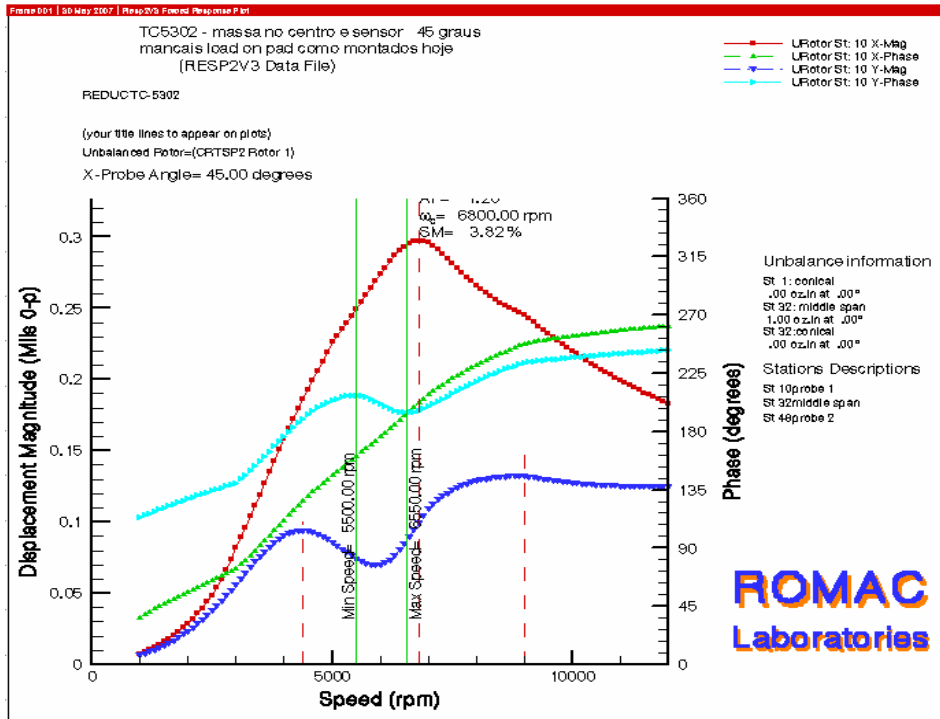


FIG 7.4 RESPOSTA DINÂMICA NO MANCAL EX., PESO NO CENTRO

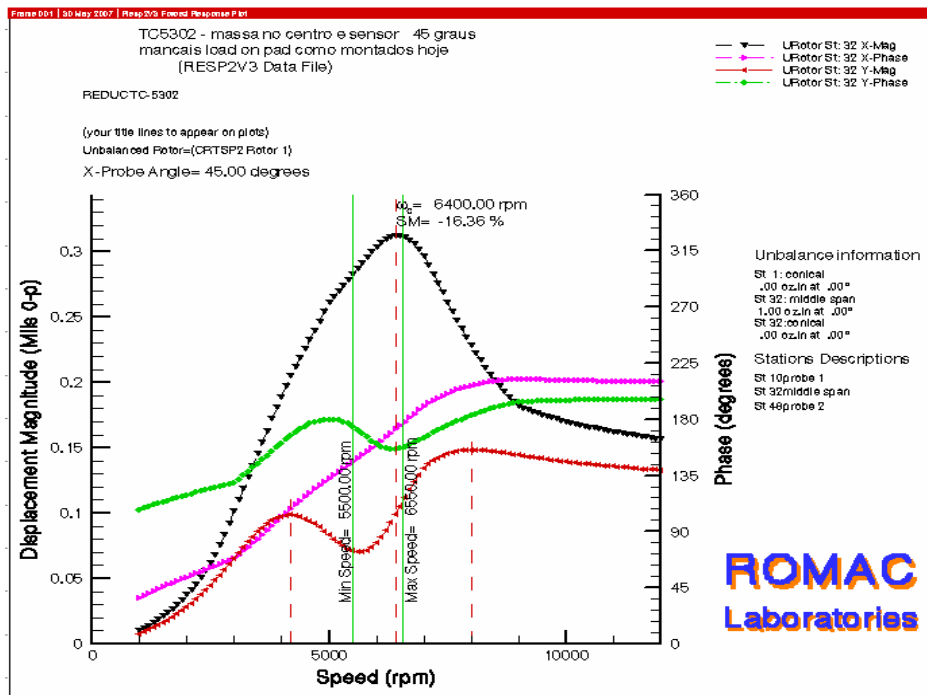


FIG 7.5 RESPOSTA DINÂMICA NO CENTRO, PESO NO CENTRO

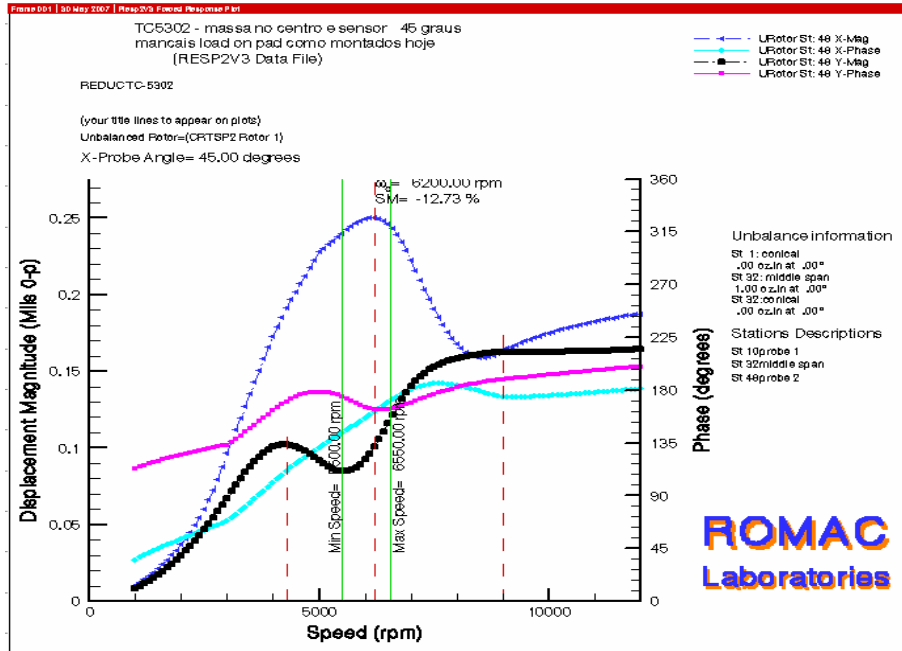


FIG 7.6 RESPOSTA DINÂMICA NO MANCAL INT., PESO NO CENTRO

As figuras 7.7 a 7.9 apresentam os diagramas de “Bode” da resposta dinâmica do rotor, excitado em seu segundo modo normal, mostrando a sua segunda frequência natural. As figuras 7.7 a 7.9.

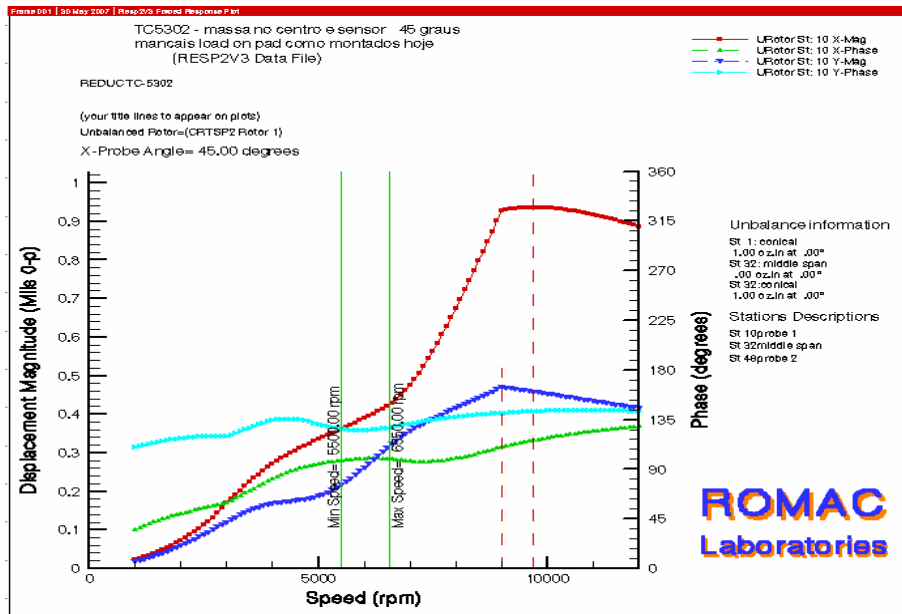


FIG 7.7 RESPOSTA DINÂMICA NO MANCAL EXT., PESO NAS PONTAS

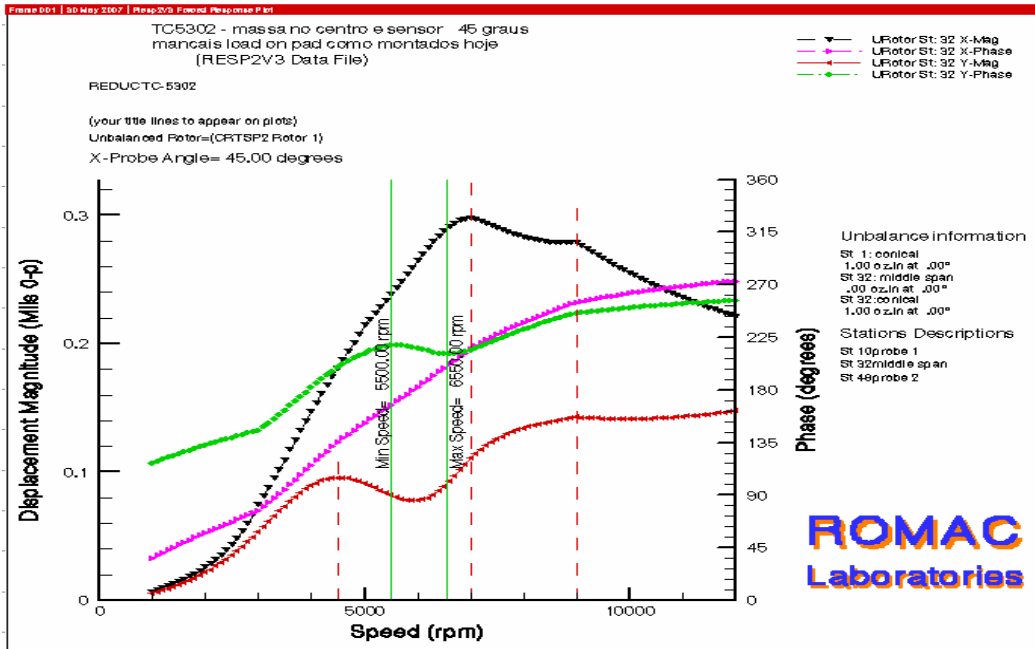


FIG 7.8 RESPOSTA DINÂMICA NO CENTRO, PESO NAS PONTAS

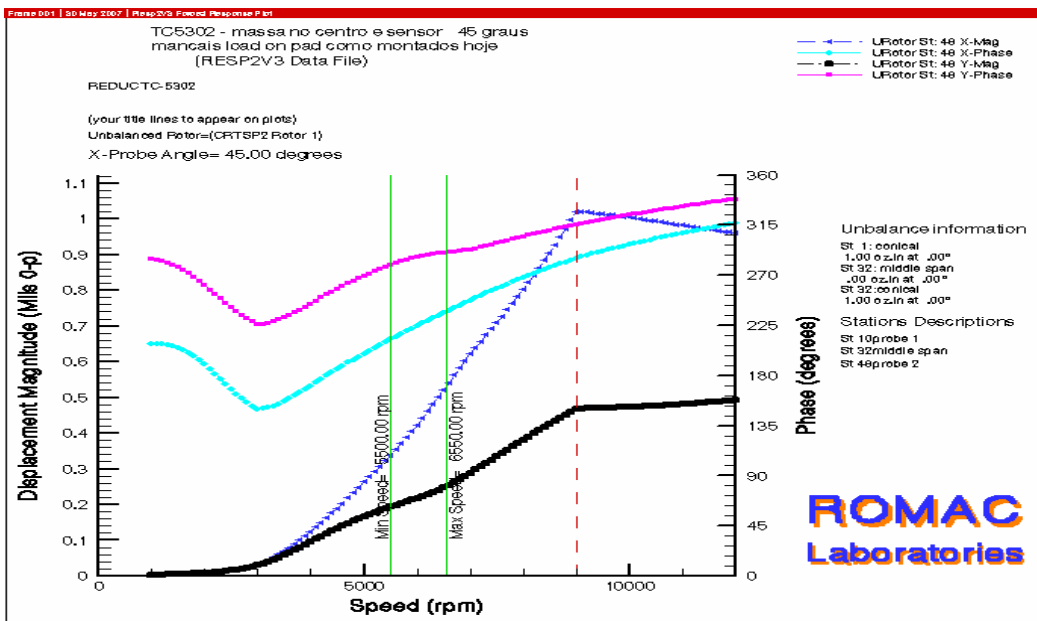


FIG 7.9 RESPOSTA DINÂMICA NO MANCAL INT., PESO NAS PONTAS

Estas figuras mostram também diversos picos de segundas críticas amortecidas do rotor em 7000, 9000 e 9700 rpm.

Isto ocorre porque os diferentes sensores observam o fenômeno vibratório, de forma diferente (conforme a sua posição).

De maneira geral, também podemos destacar que a excitação no segundo modo praticamente não excita a primeira frequência natural, com exceção para a figura 7.8, na qual é possível identificar a primeira crítica no diagrama “Bode”

7.5 Estudo de Estabilidade do Rotor

O programa de computador, utilizado para o estudo de estabilidade do rotor, apresentado nesta seção, é o ROTSTAB. Entrando-se neste programa com os dados apresentados abaixo, pode-se calcular o decremento logarítmico de cada um dos autovetores do sistema giroscópico amortecido (parte real dos autovalores associados aos modos normais de vibração da turbina).

As figuras 7.10 a 7.17 mostram as frequências naturais amortecidas do sistema rotor no primeiro modo a 2739, 3040... rpm e no segundo 7240, 8940,... rpm para diversas rotações diferentes do rotor.

Os decrementos logaritmo dos diversos modos estão apresentados em cada um dos diagramas conforme mostrado nas figuras abaixo

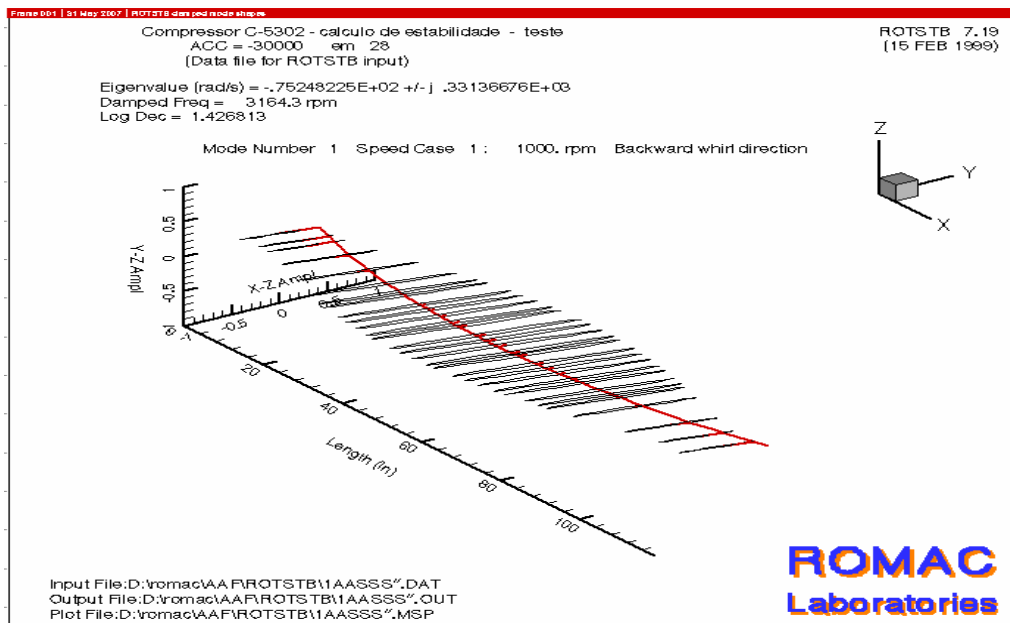


FIG 7.10 PRIMEIRO MODO AMORTECIDO A 1000RPM

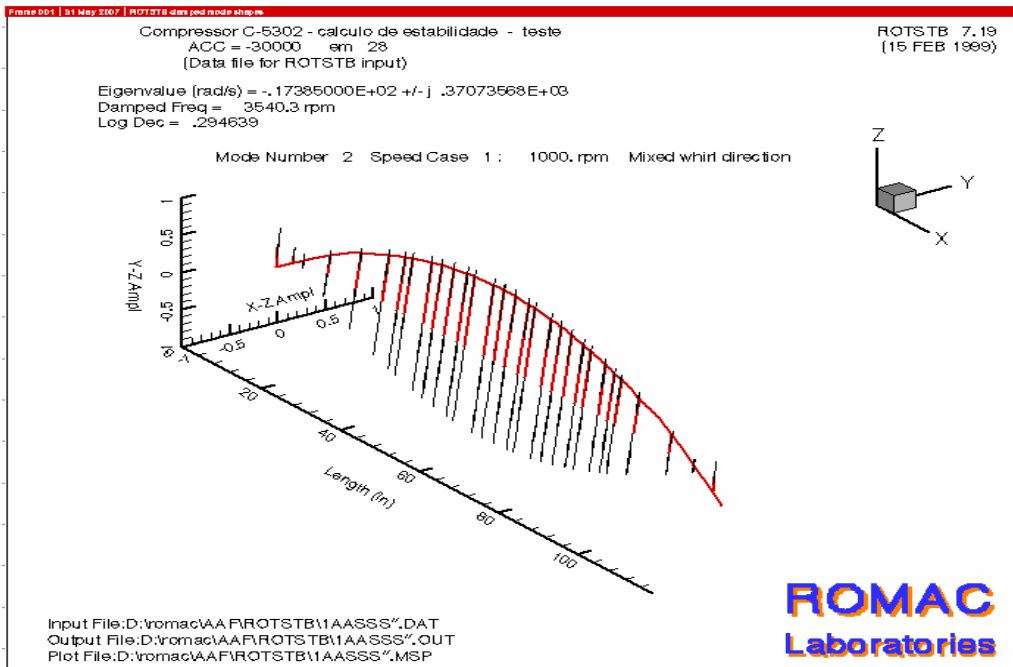


FIG 7.11 SEGUNDO MODO AMORTECIDO A 1000 RPM

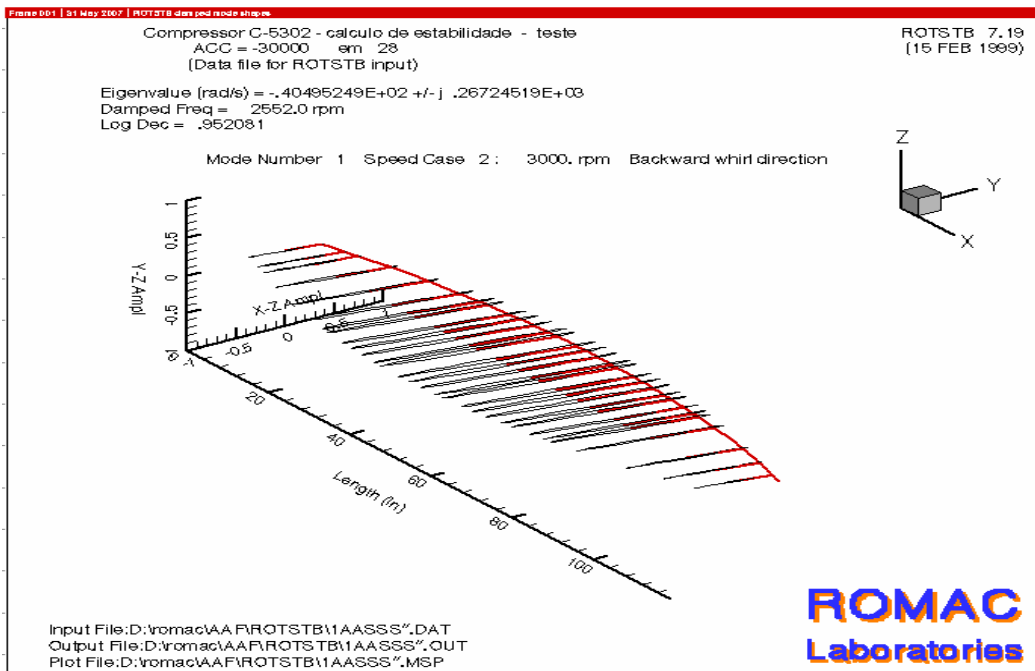


FIG 7.12 PRIMEIRO MODO AMORTECIDO A 3000 RPM

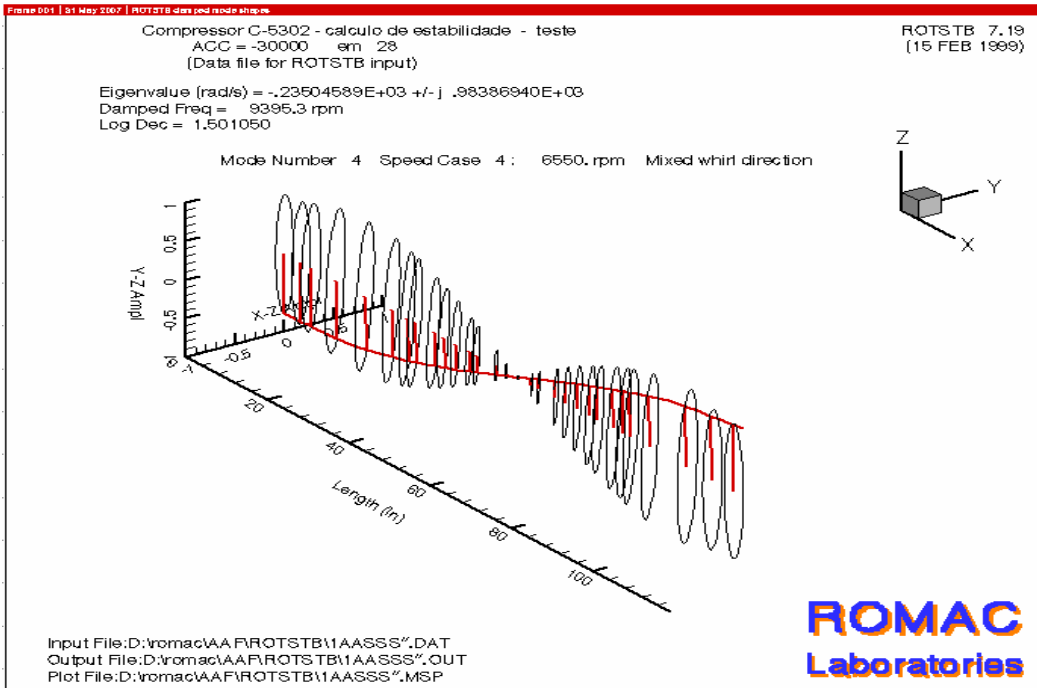


FIG 7.13 QUARTO MODO AMORTECIDO A 6550 RPM

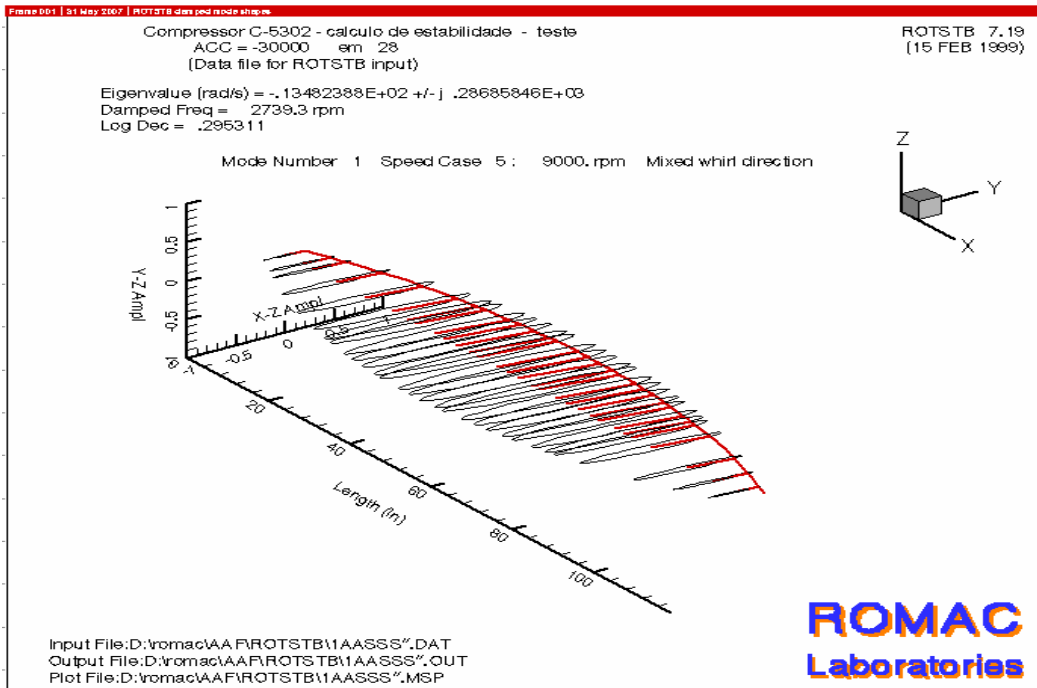


FIG 7.14 PRIMEIRO MODO AMORTECIDO A 9000 RPM

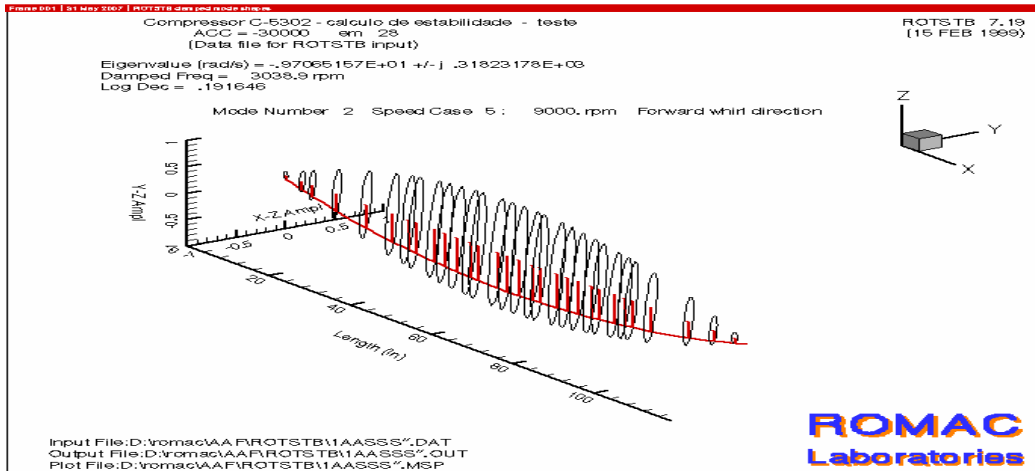


FIG 7.15 SEGUNDO MODO AMORTECIDO A 9000 RPM

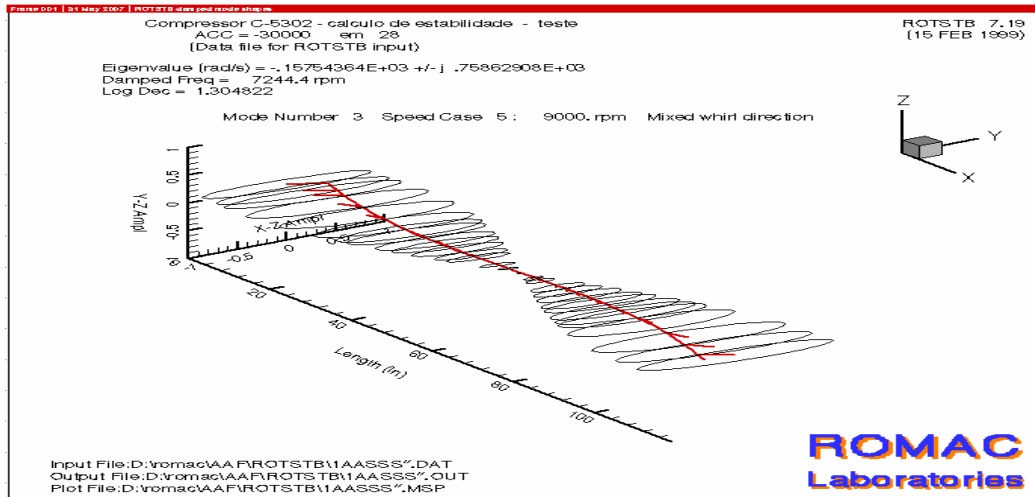


FIG 7.16 TERCEIRO MODO AMORTECIDO A 9000 RPM

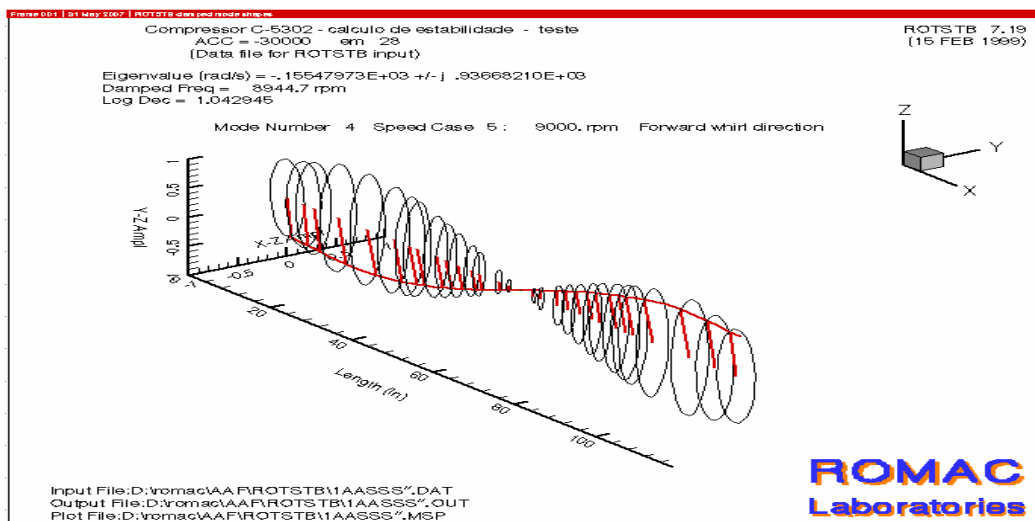


FIG 7.17 QUARTO MODO AMORTECIDO A 9000 RPM

7.6 Conclusões Finais do Relatório Rotodinâmico

Resumo das informações importantes registradas durante o estudo do C-5302:

Esta máquina opera na rotação de 6380 rpm e, portanto, em rotação próxima a sua segunda crítica lateral 6800, rpm (primeiro modo-Y), com fator de amplificação $AF=1,2$.

Esta Turbina tem sua primeira crítica lateral aproximadamente em 4200 rpm (primeiro modo-X), com $AF=1.78$.

O diagrama tipo cascata apresentado na figura 7.18, mostra um pico de vibração lateral próximo ao primeiro harmônico do compressor. Este pico foi medido no mancal acoplado, sendo sua frequência 4463 rpm. Este pico identifica a primeira crítica do eixo, a qual está sendo excitada por ruídos aerodinâmicos interno ao compressor.

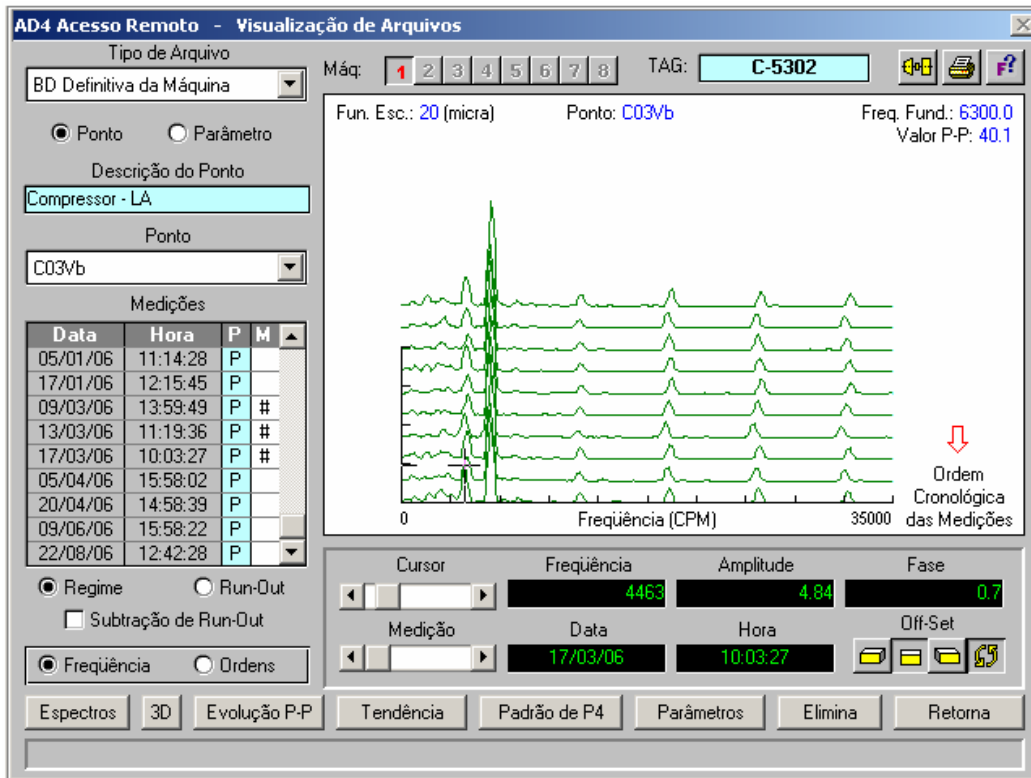


FIG 7.18 DIAGRAMA CASCATA PRODUZIDO PELO AD-4

O diagrama cascata apresentado na figura 7.18 foi obtido no programa DA-4, programa este desenvolvido pelo laboratório LEDAV/COPPE/UFRJ através do trabalho dos professores TIAGO E TROYMAN.

Pode-se também dizer que o desbalanceamento provocado por uma engrenagem colocada na extremidade do rotor, (para efeito de monitoração da rotação), acarreta um aumento na vibração do eixo da turbina, pelo menos três vezes superior ao aumento de vibração provocado por um mesmo desbalanceamento modal equivalente, de primeira ordem.

É portanto desejável que esta engrenagem seja perfeitamente centrada e balanceada na rotação de operação, em câmara de vácuo.

Caso o balanceamento desta engrenagem não atenda os requisitos de balanceamento de elevada qualidade, para 6550 rpm, esta máquina retornará de manutenção com elevados níveis de vibração.

Este rotor reduzirá sua vibração substancialmente se balanceado em câmara de vácuo a 6550 rpm. As duas primeiras críticas são bem amortecidas, o rotor é bem robusto ao desbalanceamento e o eixo deforma pouco.

Faixa operacional 5500 rpm a 6550 rpm

Mínima do governados - aproximadamente 4800 rpm.

MCS – “Maximun Continuous Speed” Rotação Maxima Contínua 6550 rpm.

Embora os documentos do Fabricante digam ser possível elevar a rotação máxima contínua desta máquina (MCS), para 7200 rpm, o estudo de performance feito pelo Consultor MARCO ANTÔNIO sugere ser possível aumentar 20% o frio desta unidade (carga térmica da U-1530), sem que seja necessário ultrapassar a rotação de 6550 rpm do compressor (MCS atual), tornando desnecessária a contratação do projeto de aumento da rotação, proposta pelo Fabricante.

VIII EXEMPLO ROTODINÂMICO – 2 (SUPORTE FLEXÍVEL):

Estudo de Caso Real: Este trabalho é apresentado em detalhes no Apêndice A.

Neste capítulo será apresentada tecnologia inédita e extremamente precisa, usada para resolver complexo problema de vibração ocorrido em um compressor de amônia (105-J, Plantas de Fertilizantes da Petrobras FAFEN/SE), problema este associado ao projeto inadequado de seu sistema de suportaçãO. O ator principal desta performance é o motor elétrico do conjunto motor/compressor 105-J da planta de fertilizante da Petrobras, que vinha de longa data sendo prejudicado por vibrações excessivas.

Este capítulo é subdividido em cinco partes distintas. Cada uma destas partes será apresentada independentemente, conforme mostrado abaixo:

- 8.1) Modelação da estrutura por elementos finitos (ANSYS).
- 8.2) Modelação rotodinâmica com os programas do ROMAC
- 8.3) Redução dinâmica da estrutura e correção dos coeficientes dos mancais
- 8.4) Análise das diversas propostas de modificação da estrutura e dos mancais.
- 8.5) Solução de compromisso (compromisso: eficácia X simplicidade)
- 8.6) Comentários finais

8.1 Modelação da Estrutura por Elementos Finitos (ANSYS).

O motor do compressor 105-J vinha experimentando elevados níveis de vibração (no primeiro e no segundo harmônicos).

Analisadas todas as possibilidades, este problema foi diagnosticado como tendo sua causa básica no projeto inadequado de seu mezanino. Na figura 8.1 é apresentado um desenho do conjunto motor/redutor/compressores.

Na literatura especializada, a flexibilidade do suportes das turbomáquinas vem sendo considerada como uma causa provável (sempre presente) de problemas de vibrações já há muitos anos, notadamente em equipamentos pesados e que operam em baixas rotações, tais como motores elétricos de grande porte.

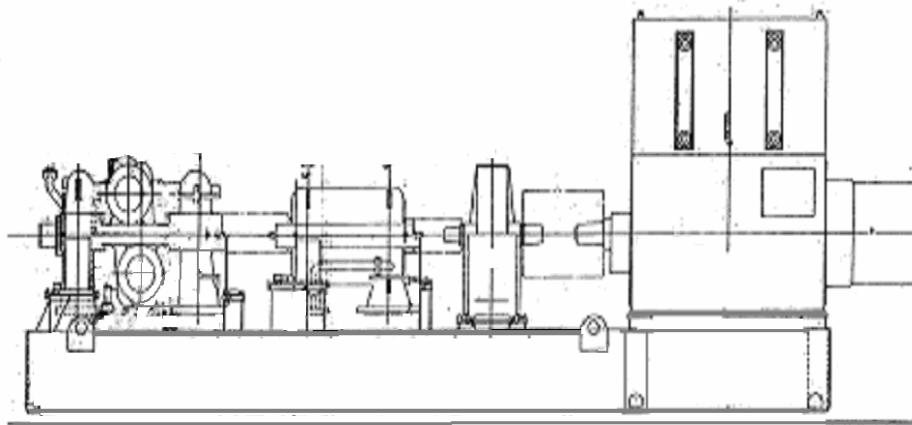


FIG. 8.1 - CONJUNTO COMPRESSOR 105-J

Geralmente, a fundação flexível de uma turbomáquina reduz a rigidez e o amortecimento fornecidos pelos seus mancais, trazendo como provável consequência o crescimento do primeiro e do segundo harmônicos da vibração da máquina. Estes dois efeitos foram encontrados no compressor 105-J.

O diagnóstico inicial apontava para um sistema flexível com frequências naturais dentro da faixa de operação da máquina. Estava evidente que um modelo de elementos finitos seria necessário para permitir a compreensão das verdadeiras causas do mau funcionamento desta máquina e para explorar as soluções possíveis.

8.1.1 Modelo Completo da Estrutura de Suportação

Foi desenvolvido um modelo completo em elementos finitos, envolvendo todo o conjunto plataforma e máquinas. Este modelo revelou a existência de duas frequências naturais, uma perto de 60 Hz e outra perto de 30 Hz. Quando o mesmo foi acoplado ao sistema rotodinâmico, os efeitos no rotor ficaram evidentes.

A análise rotodinâmica mostrou que a segunda crítica do conjunto estava muito próxima do segundo harmônico do rotor. A simulação mostrou ainda que o suporte tinha grande responsabilidade no mau desempenho rotodinâmico do conjunto.

Esta impropriedade tornou a máquina susceptível a problemas como desbalanceamento elétrico do motor, desbalanceamento do rotor e desalinhamento.

A representação total desta plataforma exigiu uma modelagem pesada, com mais de 80.000 graus de liberdade, a qual precisou ser reduzida significativamente para tornar-se compatível com os modelos do rotor e dos mancais.

O modelo completo revelou duas frequências naturais pouco amortecidas próximo a 2N (frequência que é excitada pelo desalinhamento).

Além disto, estavam associadas a movimentos verticais nos mancais, desqualificando todos os trabalhos de contraventamento anteriormente realizados e que estão mostrados na figura 8.2.

Os dados reportados pelo campo, fundamentais para o processo de identificação e aferição do modelo, estavam incompletos sendo impossível a realização de um levantamento mais detalhado, nos moldes de uma análise modal.

A identificação modal é aplicada em sistemas lineares, causais, estáveis e invariantes no tempo, VAN DEN ENDEN e VERHOECKX, (1989).

Os dados obtidos em testes de campo, revelaram a existência de diversas frequências naturais, dentro da faixa de frequência de 0Hz a 75Hz.

8.1.2 Frequências e Modos Naturais de Vibração

A tabela 8.1 mostra os valores de frequências naturais do sistema, levantados no campo com teste de impacto e as frequências naturais do modelo completo.

Os valores medidos e calculados das frequências naturais mostram uma boa concordância entre o sistema real e o modelo.

Considerando-se o ponto de vista estrutural, a resposta forçada da estrutura a 30 Hz (a frequência natural é próxima a 30 Hz) é bem amortecida. Portanto, o quarto modo, não caracteriza uma ameaça concreta ao bom funcionamento da estrutura.

Sabe-se, entretanto, que esta estrutura contribui de forma indesejável para a dinâmica do conjunto quando é excitada pelo segundo harmônico do motor (desbalanceamento elétrico ou desalinhamento).

Os modos 9 e 10, mostrados na figura 8.3, possuem frequências naturais próximas a 60 Hz(2N). No nono modo de vibração, as vigas transversais que suportam o motor assumem um movimento vertical significativo, levando a caixa de mancais a vibrar com elevadas amplitudes.

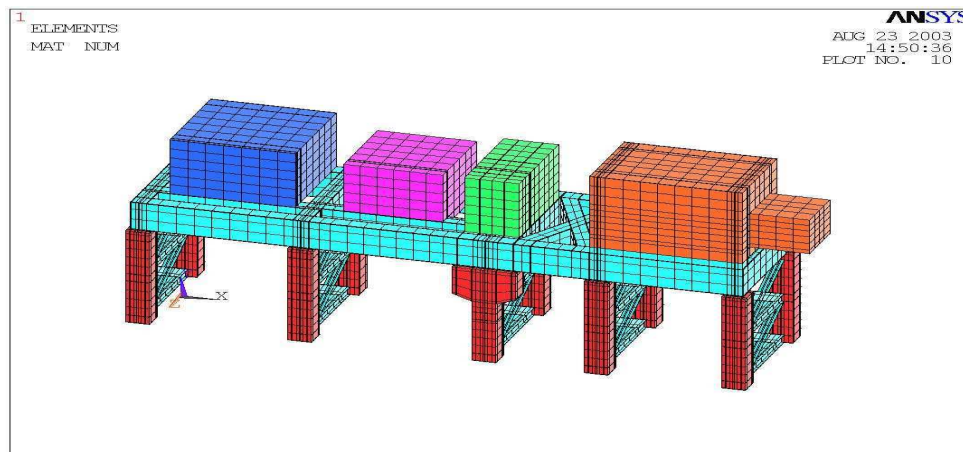


FIG. 8.2 - SAÍDA DO ANSYS MODELO COMPLETO

TAB 8.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA DE SUPORTE

Modo	Medida	Modelo Integral
1	9.9	10.4
2	12.7	19.7
3	24.6	21.8
4	27.7	31.9
5	34.5	Perdido
6	38.3	39.1
7	49.5	50.0
8	54.5	51.7
9	57.8	57.3
10	62.2	60.3
11	66.7	66.6
12	71.3	71.6

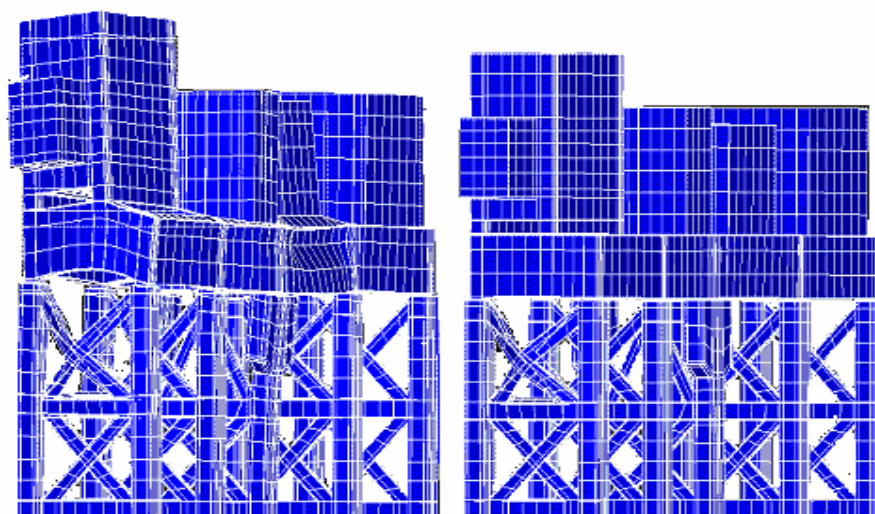


FIG. 8.3 NONO MODO E DÉCIMO MODO

8.1.3 Função de Resposta em Frequência

As Funções de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura, são calculadas com a ajuda do ANSYS e representam a resposta de um nó do modelo quando o sistema é excitado por uma força senoidal de frequência variável no mesmo nó. Os cálculos realizados consideram uma taxa de amortecimento de 1%.

As FRF's são calculadas para quatro condições de excitação diferentes. A figura 8.4 mostra as FRF's vertical, horizontal e axial (no mancal próximo ao redutor). A FRF é resultado de uma excitação senoidal com varredura de frequência (no mesmo lugar), sendo sua amplitude igual a 1 Newton na direção vertical.

Estas FRF's são imprecisas em seu conteúdo de amplitude e fase, na medida em que não existe limite teórico para os erros associados a esta modelação (truncamento).

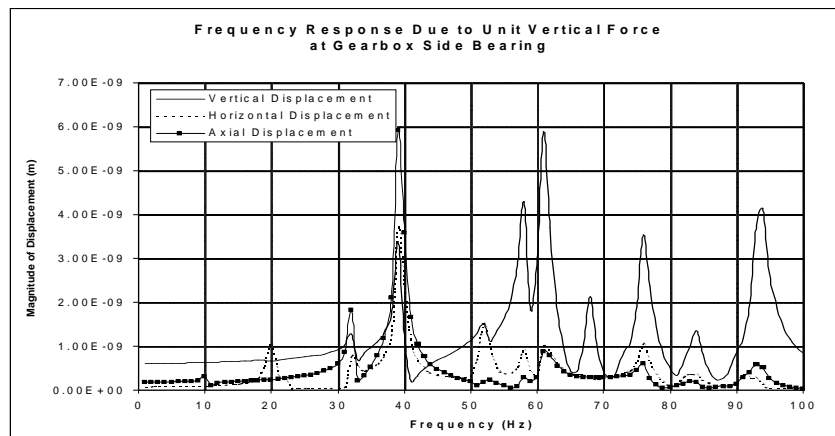


FIG. 8.4 FRF DO MANCAL DO MOTOR NA DIREÇÃO VERTICAL

8.2 Modelação Rotodinâmica pelos programas do ROMAC

Foi necessária uma análise rotodinâmica global do conjunto para identificação da real causa do problema. A primeira fase dessa análise inclui a modelação da estrutura, do rotor e dos mancais, a identificação das frequências naturais e os respectivos modos de vibração. Estes modelos foram desenvolvidos conforme dados levantados na FAFEN-SE e foram validados, experimentalmente, para os mancais analisados (nas condições “flooded and starved” afogado e faminto). O modelo mostrou-se adequado para permitir toda a análise.

Para simular o desbalanceamento mecânico e elétrico, foi aplicada a análise de resposta dinâmica síncrona(segundo API 617) e assíncrona, respectivamente. Pode-se sumarizar a análise dizendo que o rotor opera entre a primeira e a segunda críticas.

8.2.1 Modelação do Rotor

O conjunto rotor do motor está mostrados nas figuras 8.5e 8.5A.

O modelo “free-free” (livre livre) deste rotor foi, inicialmente, realizado considerando-se 57 nós.

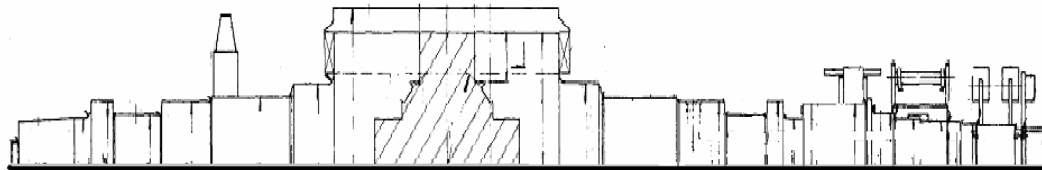


FIG 8.5 DESENHO DO ROTOR DO MOTOR

FREE FREE
Petrobras Motor Rotor Analysis
(CRTSP2 Data File)

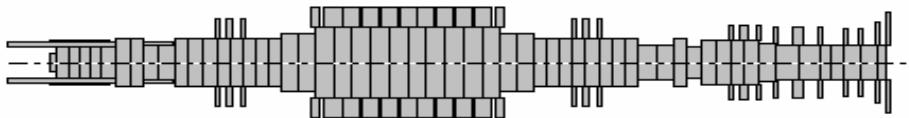


FIG. 8.5A GEOMETRIA DO ROTOR

A figura 8.6 mostra os primeiros modos “undamped free free” e as frequências naturais a eles associadas.

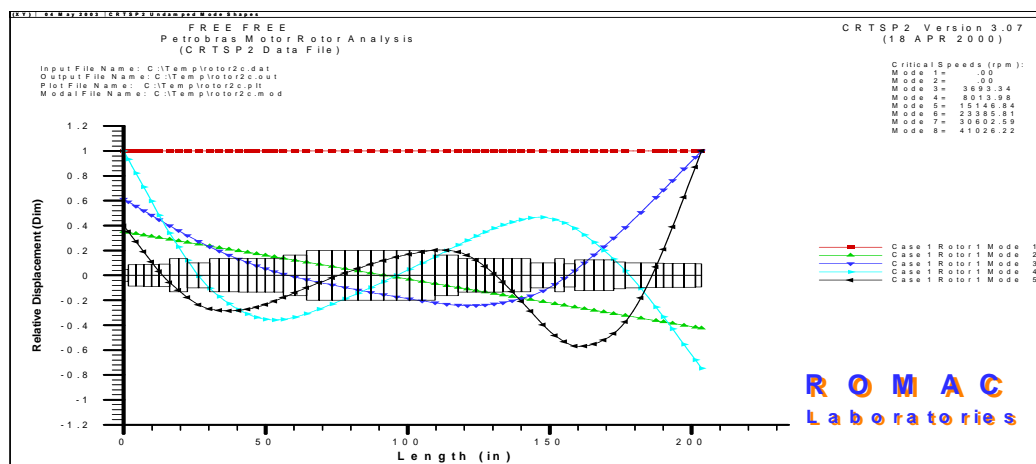


FIG 8.6 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODE SHAPE DO ROTOR

8.2.2 Análise dos Mancais Hidrodinâmicos

8.2.2.1 Análise dos Mancais (Velhos).

Os coeficientes dinâmicos dos mancais precisam ser conhecidos para possibilitar a introdução das molas e dos amortecimentos na análise rotodinâmica, entretanto este assunto está fora do escopo desta tese. Os mancais interno e externo deste motor são idênticos, tendo geometria fixa, todavia as suas cargas são diferentes pelo fato do rotor ser assimétrico. O eixo gira a 1800 rpm. A geometria do mancal está mostrada na figura 8.7 e seus dados geométricos estão mostrados na tabela 8.2.

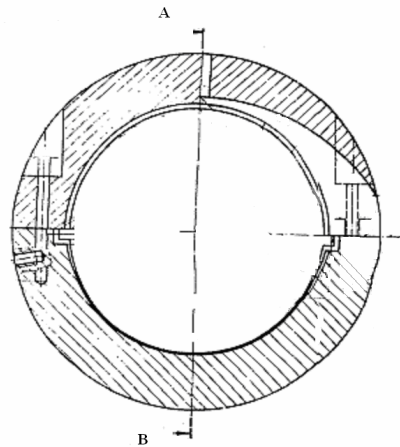


FIG 8.7 ESQUEMA DO MANCAL LUBRIFICADO POR ANEL - ARCO PARCIAL

Todos os coeficientes dinâmicos foram calculados da mesma forma, para três folgas diferentes, através dos programas do ROMAC.

TAB 8.2 GEOMETRIA DOS MANCAL

	mm	in
Diametro do mancal	280	11
Folga Diametral	0.42-0.56	0.0166-0.022
Comprimento Axial	195	7.68
Angulo da Sapata	130°	
Preload	0.0	
Espessura da Sapata	65	2.5

8.2.2.2 Análise dos Mancais (Novos)

Para resolver o problema de vibração do novo mancal, necessitamos de mais amortecimento, para reduzir sua resposta dinâmica.

A filosofia de projeto será manter a rigidez próxima da atual e aumentar o amortecimento ao máximo. Para tanto, precisamos garantir uma alimentação de óleo satisfatória para os novos mancais, bem como aumentar o comprimento do mancal.

Estes mancais e seus desempenhos estão sumarizados nas tabelas 8.3 e 8.4.

TAB 8.3 PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DOS MANCAIS VELHO/NOVOS

	Existente	Soft Short	Soft Long	Zollern Sleeve	Zollern Elliptical
Diametro	11	11	11	11	11
Comprimento	7.68	7.68	9.64	6.9	6.9
Folga Diametral	0.019	0.02	0.02	0.015	0.012
Arco da Dapata	130	150	150	161	161
Precarga	0	0	0	0	0.66

TAB 8.4 PARÂMETROS OPERACIONAIS DOS MANCAIS VELHO/NOVOS

	Existing*	Soft Short	Soft Long	Zollern Sleeve	Zollern Elliptical
K_{xx}	1.18	1.39	1.38	2.10	0.75
K_{yy}	4.68	3.21	2.31	3.42	5.17
C_{xx}	4.77	7.14	8.92	13.82	5.24
C_{yy}	39.83	33.14	34.92	44.26	29.37
h		0.0037	0.0049	0.0036	0.0033
T		155	150	164	157

8.3 Redução Dinâmica da Estrutura: (Coeficientes dos Mancais)

Este capítulo introduz uma nova maneira de tratar esta questão, com uma tecnologia capaz de representar, integralmente, a estrutura de suporte, os mancais e a rotodinâmica, fornecendo a resposta dinâmica exata, tanto do rotor, como da estrutura, viabilizando o protótipo virtual.

8.3.1 Redução da Matriz Original para 155 Máster GL's Principais

Inicialmente, precisamos construir um modelo de elementos finitos capaz de representar a estrutura existente no campo, identificando as frequências naturais e os modos naturais de vibração da estrutura conforme avaliação de campo, em uma faixa de frequência capaz de cobrir os harmônicos de interesse de nosso estudo.

Esta é uma tarefa gerou, em nosso caso, uma matriz de 82.872 graus de liberdade. O programa ANSYS é muito útil nesta tarefa, todavia, um modelo deste tamanho é inaceitável. Numa segunda etapa, esta matriz é reduzida cerca de 1000

vezes. Os melhores resultados são obtidos pela escolha manual da maioria dos GL's principais, realizando a chamada Síntese Modal dos Componentes da Estrutura (SCM). Foi escolhido um conjunto com 155 GL's principais, de tal forma que o modelo reduzido e o original tenham as mesmas frequências naturais e modos normais de vibração, até 75 Hz, conforme mostrado na tabela 8.1.a

TAB 8.1.A FREQUÊNCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA DE SUPORTE

Mode	Medido	Model Completo	Modelo Reduzido
1	9.9	10.4	10.75
2	12.7	19.7	17.57
3	24.6	21.8	21.9
4	27.7	31.9	32.33
5	34.5	Missing	Missing
6	38.3	39.1	39.53
7	49.5	50.0	47.14
8	54.5	51.7	52.18
9	57.8	57.3	58.93
10	62.2	60.3	61.66
11	66.7	66.6	61.74
12	71.3	71.6	72.5

8.3.2 Redução da Matriz de 155 GL's para 14 GL's

As FRF's do ANSYS são imprecisas em seu conteúdo de amplitude e fase, sendo que esta imprecisão impede a utilização destes valores nos cálculos de correção dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais.

O grau de precisão de amplitude e fase da FRF do modelo, pode ser substancialmente melhorado com o emprego de técnicas utilizadas em teoria de controle (entre elas a Redução Balanceada de Modelos), as quais racionalizam a solução do problema de autovalor. A redução balanceada deste modelo é feita com a ajuda da técnica "Hankel Singular Value", sendo o truncamento da matriz $[A]$ orientado pela mesma.

8.3.2.1 Problema de Autovalor: Solução Usando Hankel Singular Value

Uma solução precisa para o problema de autovalor, pode ser atingida reescrevendo-se a equação do movimento nas bases da teoria de controle "input/output", como segue:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\} \rightarrow \quad (8.1)$$

$$\dot{\eta}(t) = A \eta(t) \rightarrow \text{“Laço Aberto”} \quad (8.2)$$

Após processamento da transformação Hankel Singular Value Decomposition o sistema foi truncado. Foram levados em consideração os 42 primeiros Modos Naturais mais importantes, tendo sido aproveitados somente os 14 primeiros.

8.3.2.2 Construção das FRF's dos Mancais para 14 GL's (GDL)

Neste ponto já conhecemos os quatorze primeiros autovalores e autovetores. Utilizando-se os recursos do MAT-LAB a FRF pode ser construída para quatro diferentes condições de excitação, considerando-se 10% da taxa de amortecimento.

A comparação entre as FRF's das figuras 8.8 e 8.9, mostra a diferença entre a FRF do ANSYS (155 GL's) e a FRF do modelo reduzido (14 GL's).

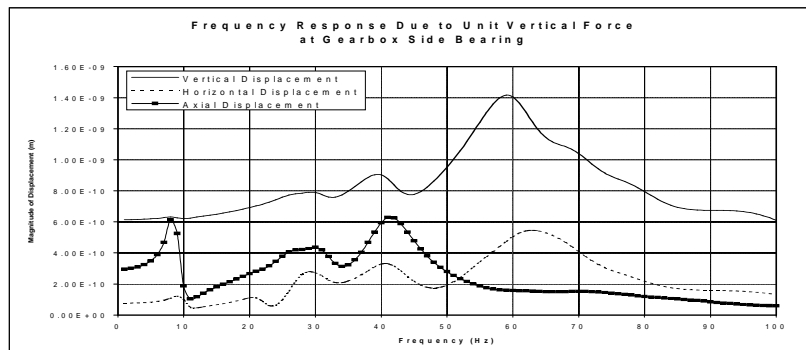


FIG. 8.8 FRF DO MANCAL LA EXCITAÇÃO VERTICAL (14 GL'')

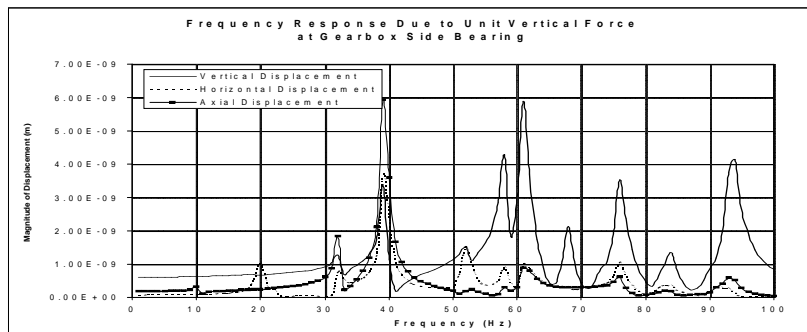


FIG. 8.9 FRF DO MANCAL LA DIREÇÃO VERTICAL (155 GL'')

Nos dois casos foi aplicada a mesma excitação senoidal, no mesmo local, com magnitude de 1Newton na direção vertical.

8.4 Análise das Propostas de Modificação da Estrutura e Mancais

Depois do truncamento do modelo e da construção das FRF's das caixas de mancais do motor, pode-se discutir a alteração dos coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais a partir da colocação desta máquina em uma estrutura de suporte que permita o movimento dos mancais em operação (não inercial).

VAZQUEZ, (2001), estudou este fenômeno e propôs um método exato para quantificação da redução dos coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais, levando-se em consideração a sua flexibilidade (FRF do movimento).

8.4.1 Modificação dos coeficientes dos Mancais K_{eq} e C_{eq}

A correção dos coeficientes de rigidez/amortecimento é feita por programas de computador do ROMAC.

8.4.2 Solução do Modelo: Frequências Naturais Amortecidas e Modos de Vibração Acoplados

Os coeficientes , corrigidos, são utilizados para cálculo das frequências naturais amortecidas tabela 8.5 e na análise de resposta ao desbalanceamento.

TAB 8.5 COMPARAÇÃO DAS CRÍTICAS DO ROTOR COM AS CRÍTICAS DA ESTRUTURA

Velocidade Crítica	Mínimo	Media	Maximo
Modos do Rotor (rpm)	1668	1612	1552
	1829	1972	1935
	3105	3109	3111
	3444	3517	3598
	5726	5721	5714
Modos da Fundação (rpm)	517.4	517.4	517.4
	1206		1203
	1284	1284	1283
	2068	2068	2067
	3329	3254	3226
	3579	3578	3577
	4672	4692	4702

Para o caso de folga máxima, há uma crítica do rotor perto de 3600 rpm e, ainda pior, existe um modo de vibração da subestrutura perto deste valor. Em qualquer destes casos o primeiro harmônico será amplificado. Pode-se dizer que não é um bom projeto. Os dois primeiros modos são translacionais e cônicos.

8.5 Solução de Compromisso:

8.5.1 Modificações da Estrutura (Filosofia)

A FRF da caixa de mancais revela que o principal movimento dos mancais ocorre em 60 Hz e na direção vertical.

Diversas modificações de projeto foram testadas na estrutura, procurando-se sempre mudanças de maior simplicidade com a introdução de vigas metálicas. Estas modificações mostraram-se incapazes de alterar significativamente as ressonâncias próximas a 60 Hz. Os melhores resultados foram obtidos com a implantação de colunas verticais. A melhor alternativa analisada é apresentada a seguir.

8.5.2 Primeira Proposta (Compromisso Resultado Simplicidade)

A proposta implementada recomendou a colocação de uma coluna de concreto vertical no centro da viga colocada abaixo do mancal acoplado do motor, como mostra a figura 8.10. A FRF desta estrutura é mostrada na figura 8.11.

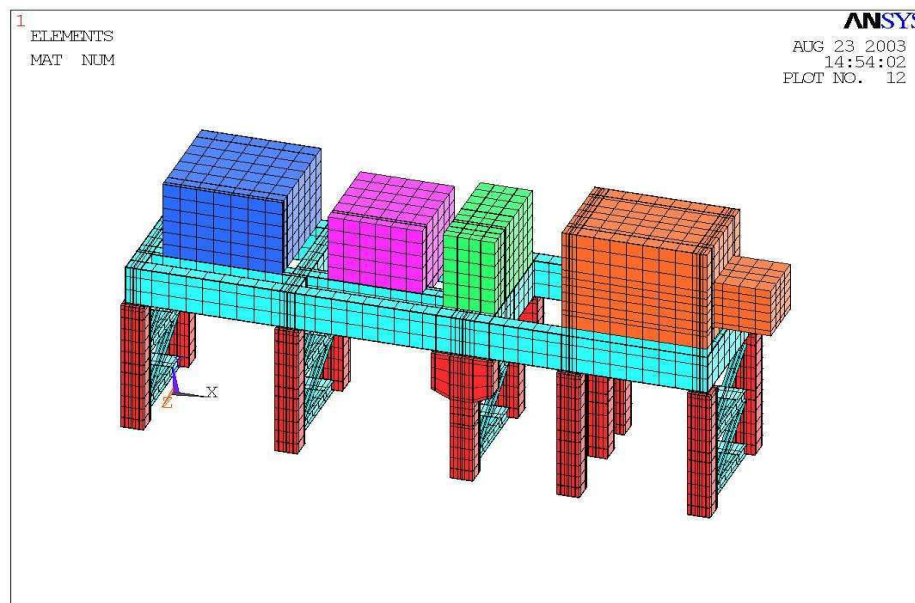


FIG 8.10 MODIFICAÇÃO IMPLEMENT

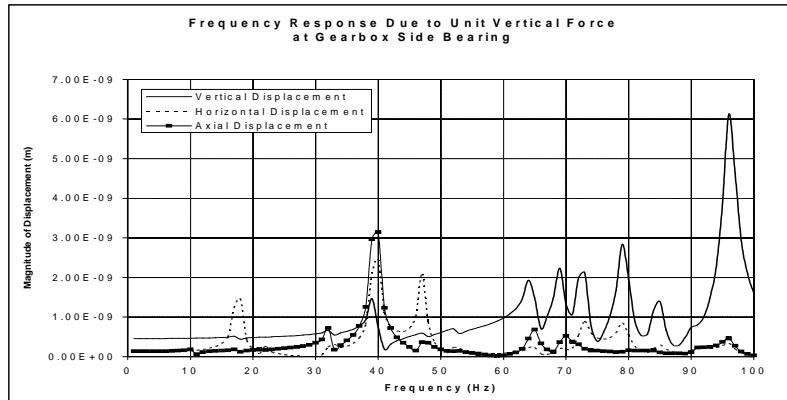


FIG 8.11 FRF's DA SOLUÇÃO APRESENTADA NA SEÇÃO 8.5.1.1

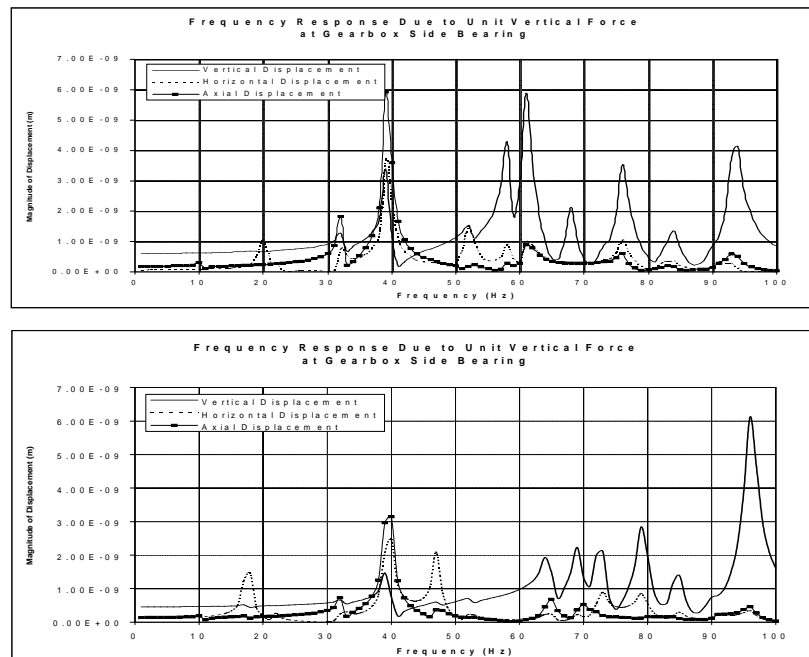


FIG. 8.12 COMPARAÇÃO DAS FRF'S DO MANCAL LA ANTES/DEPOIS

A figura 8.12 mostra que a aplicação do novo contraventamento deslocou um pouco o valor da frequência natural e, também, reduziu a sua amplitude da ordem de 6 vezes, conforme pode ser visto no modelo teórico apresentado acima.

8.5.3 Interação Rotor/Mancais/Estrutura (Análise Assíncrona) Estudo Comparativo: Com e Sem Pedestal (Fundação)

Para investigar o efeito da fundação na resposta dinâmica à excitação não síncrona, a mesma é aplicada ao sistema rotor/mancais com e sem o efeito da fundação (referencial inercial). Somente o mancal original.

Geralmente, as diferenças não são muito grandes na maioria dos casos. Neste caso particular, são muito importantes, como pode ser visto nas figuras 8.13 à 8.16

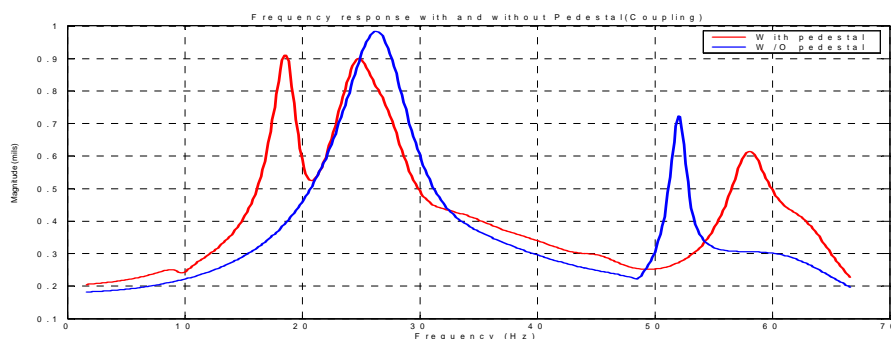


FIG 8.13 RESPOSTA NO ACOPLAMENTO COM/SEM FUNDAÇÃO

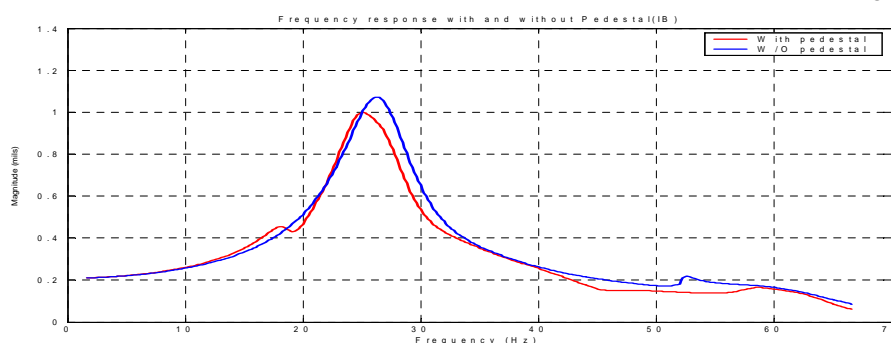


FIG 8.14 RESPOSTA MANCAL LA COM/SEM FUNDAÇÃO

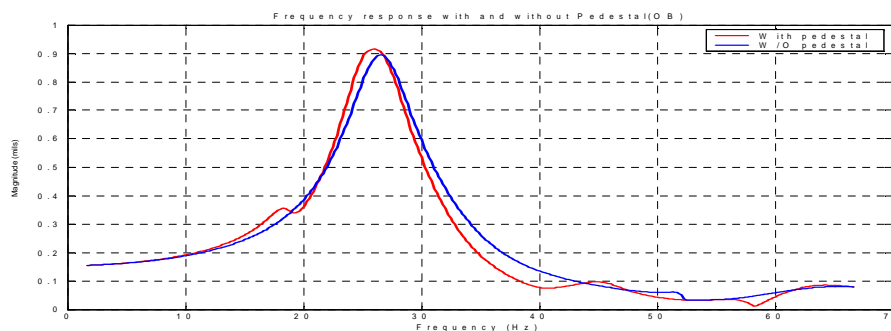


FIG 8.15 RESPOSTA NO MANCAL LOA COM/SEM FUNDAÇÃO

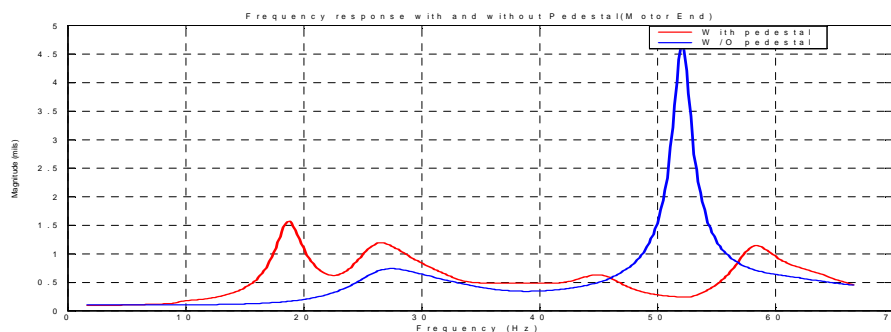


FIG 8.16 RESPOSTA NA EXCITATRIZ COM/SEM FUNDAÇÃO

8.6 Comentários finais

8.6.1 A Melhor Opção: Coluna de Concreto Conforme Modelo

A proposta de solução que se mostrou mais vantajosa foi a colocação de uma viga de concreto abaixo do mancal acoplado do motor.

8.6.2 Resultado de Campo

O modelo de elementos finitos mostrou-se adequado para capturar as particularidades dinâmicas desta complexa estrutura de suportação, mostrando-se uma ferramenta valiosa na diagn ose e solução do problema. Após a redução dos graus de liberdade, as propriedades dinâmicas da estrutura foram preservadas na faixa de interesse, o que ficou caracterizado através de suas matrizes de massa e rigidez. O acoplamento desta matriz com os mancais permitiu uma completa descrição do sistema.

A colocação de uma coluna mostrou-se eficaz para ampliar a margem em rela o   frequência natural da estrutura que apresentava-se em sintonia com o segundo harmônico 2N, sem prejudicar os resultados j é obtidos em 1N, com a troca do mancal. A solução proposta para este problema foi implementada parcialmente.

A figura 8.17 mostra que o primeiro harmônico encontra-se com uma amplitude exagerada. Isto acontece porque os mancais da m  quina ainda n  o foram substituídos e a coluna vertical, por si s  , n  o   eficaz para reduzir 1N.

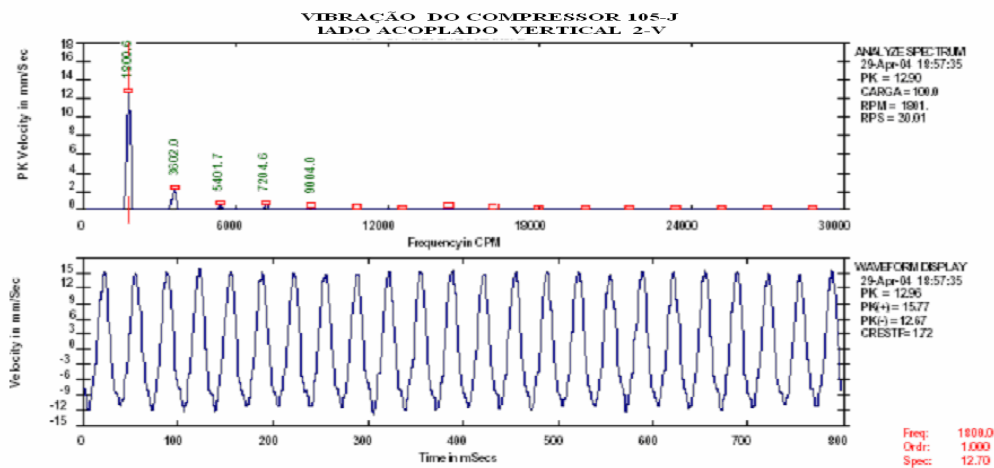


FIG 8.17 ESPECTRO DE VIBRAÇÃO VERTICAL DO MOTOR LADO ACOPLADO

IX CONCLUSÃO

O mau funcionamento rotodinâmico de uma turbomáquina é geralmente caracterizado por um elevado nível de vibração do eixo, o qual precisa ser contido dentro de valores pré-estabelecidos , para garantir um funcionamento adequado.

Vibração elevada é sinônimo de:

- 1) Elevado ruído , inadmissível em submarinos e navios de Guerra,
- 2) Baixa confiabilidade dos equipamentos (baixo tempo médio entre falhas),
- 3) Desgaste excessivo dos componentes das máquinas (mancais, acoplamentos),
- 4) Custos elevados de manutenção ,
- 5) Perdas elevadas por lucro cessante

A análise dinâmica tem se mostrado fundamental no papel de minimizar os riscos inerentes ao projeto de uma turbomáquina. A identificação tardia de um problema, é mais custosa do que a sua identificação na fase de projeto . Analogamente, podemos dizer que a identificação de um problema na fase de partida da planta também é mais cara do que a sua identificação na fase de fabricação. Se o problema for identificado na fase de produção, a perda por lucros cessantes é ainda maior. Em alguns casos a planta fica condenada a conviver com os prejuízos decorrentes do mau funcionamento das turbomáquinas mal projetadas , mal montadas ou mantidas inadequadamente.

Esta Dissertação tem seu foco principal na discussão de problemas dinâmicos, associados à compreensão, estabelecimento e solução das equações de movimento do rotor. Embora este conhecimento esteja difundido na literatura, de forma pulverizada, neste trabalho é feito um esforço inédito de compilação deste conhecimento, no sentido da aderência dos modelos matemáticos à realidade física do rotor real .

O método utilizado nesta tese para o esclarecimento das questões associadas a Rotodinâmica, é a sucessiva apresentação, equacionamento e solução destes modelos, em ordem crescente de complexidade .

Inicialmente, o nível de abstração dos modelos matemáticos apresentados é pequeno. Este nível de abstração vai sendo ampliado através de sucessivas abordagens, sem a perda de seu significado físico , importante aspecto deste trabalho, o qual é constantemente trazido para a discussão .

Nos capítulos II, III e IV são discutidas, até ao limite, as possibilidades de representação da ciência Rotodinâmica, dentro de uma modelação da teoria do contínuo. É também deixado muito claro que, independentemente da complexidade retratada nestes modelos contínuos, a existência da ortogonalidade, (propriedade característica), dos autovetores giroscópicos é assegurada em todos estes modelos.

O capítulo II mostra um modelo discreto excessivamente simplificado, com apenas dois graus de liberdade. Por este motivo apresenta uma distorção muito grande, pois está substituindo uma infinidade de curvas de frequência natural por apenas duas curvas. A curva inferior, entretanto, pode ser considerada como uma boa aproximação da curva de primeira frequência natural.

As hipóteses teóricas demandadas pelo modelo contínuo (explicitamente) e também do modelo discreto (implicitamente), são lembradas a seguir.

- a) O material homogêneo e isotrópico, comportamento linear HOOKE ;
- b) Consideradas apenas deflexões laterais pequenas EULER ;
- c) Diâmetro pequeno em relação ao comprimento EULER-BERNOULLI ;
- d) Inclusão da inércia de rotação , cisalhamento desprezado TIMOSHENKO ;
- e) Seções planas permanecem planas após a deflexão; EULER ;
- f) Deformação inicial causada pelo peso próprio desprezível TIMOSHENKO ;
- g) Carregamento no plano do CG, deformações contidas no plano EULER ;
- h) Acoplamento do disco com o eixo em ângulo reto EULER ;
- i) O eixo balanceado AUTOVALOR .

Na prática todavia , estas restrições não representam nenhuma limitação real aos métodos de modelação rotodinâmica de turbomáquinas.

O método discutido nos Capítulos III e IV, permite o cálculo das frequências naturais de rotores com múltiplos discos e com a representação da rigidez dos mancais , conforme resultados apresentados.É todavia limitado, não permitindo a simulação de rotores reais , os quais possuem uma geometria mais complexa .No Capítulo V este mesmo problema é apresentado através do método de elementos finitos, que possui ilimitadas possibilidades de representação do rotor real.

No Capítulo V é feito um trabalho cuidadoso de dedução das matrizes de rigidez, inércia e giroscópica, dentro da teoria de elementos finitos, usando para isto a

equação de Lagrange. É ainda apresentado grande conjunto de métodos para solução das equações de movimento, dos sistemas dinâmicos, em diversos cenários reais.

Ainda neste capítulo é desenvolvido um método novo para solução de sistemas giroscópicos conservativos, método este que viabiliza o desacoplamento das equações diferenciais do movimento destes sistemas, com o emprego dos autovetores da matriz giroscópica. Este método para solução de sistemas de equações de movimento é fundamentado em uma propriedade particular dos autovetores da matriz giroscópica, segundo a qual estes autovetores são capazes de desacoplar as equações de movimento de um sistema giroscópico conservativo, propriedade esta já anteriormente demonstrada, nos capítulos III e IV para sistemas contínuos.

Portanto podemos concluir que, as soluções oriundas de um sistema rotodinâmico giroscópico conservativo (discreto ou contínuo), são linearmente independentes, ou, em outras palavras, os efeitos inerciais (entre eles o giroscópico) e de rigidez do eixo não acoplam as suas soluções (autovetores). Esta nova idéia permite a introdução do efeito giroscópico e da inércia de rotação, nos mapas das críticas (anteriormente restrito a massa e rigidez).

No Capítulo VI é discutido o problema conhecido como “instabilidade rotodinâmica” de uma forma precisa, abrangente e profunda. Neste capítulo são sugeridos três procedimentos para a minimização dos riscos de instabilidade:

- a) Introduzir amortecimento para elevação da velocidade limite de estabilidade, Ω_n ;
- b) Aumentar a frequência natural do conjunto rotativo, ω_n ;
- c) Atacar ou eliminar o mecanismo de instabilidade.

Os dois primeiros são de natureza geral, enquanto que o último encerra medidas particulares para cada fenômeno de instabilidade. A introdução de amortecimento externo adicional é uma medida eficaz para a elevar o limite de estabilidade Ω_{lim} .

É possível mostrar que a relação entre a frequência limite de estabilidade e a frequência natural aumenta com o aumento do amortecimento externo, possibilitando elevar a primeira frequência natural para um valor superior à frequência de trabalho.

Nas turbomáquinas, este efeito pode ser conseguido com a instalação de amortecedores de óleo prensado “squeeze film dampers” nos suportes dos mancais, conforme mostrado no capítulo VI.

A elevação da frequência natural tem, como consequência, a possibilidade de aumento da velocidade de operação, pois é constante a relação ω/Ω_{lim} .

Todo o esforço feito na fase de projeto para garantir o bom desempenho rotodinâmico de uma turbomáquina, pode ser perdido no caso em que os aspectos relacionados à montagem e suportaçãõ das mesmas, sejam negligenciados.

Especial atenção deve ser dedicada à estrutura de suportaçãõ da máquina. É muito importante registrar que um bom projeto rotodinâmico de uma turbomáquina, não é garantia real de que este equipamento vá funcionar bem no campo, quando o mesmo for instalado em seu berço de trabalho.

Este problema é ainda mais sério, na medida em que sabemos que as engenharias de construção civil, aeronáutica e naval não dominam a tecnologia de (modelagem dos protótipos virtuais) instalação de turbomáquinas.

Em termos mais específicos, podemos afirmar que as frequências naturais do rotor serão distintas para configurações diferentes do suporte (variações superiores a 10% são possíveis conforme as condições de rigidez do suporte). Como se trata de um problema acoplado, também as frequências naturais do suporte são alteradas quando o rotor é acoplado à estrutura (menores variações são observadas).

Desta forma, a simulação da interação rotor/estrutura/mancais é necessária e essencial para uma representação correta do modelo físico.

Em alguns sistemas, onde são instaladas múltiplas máquinas sobre uma única estrutura de suportaçãõ, a estrutura de suporte pode ser excitada por uma grande gama de harmônicos e sub-harmônicos das máquinas, elevando bastante o risco do projeto desta estrutura.

As estruturas de suportaçãõ acima discutidas podem ser, por exemplo:

- 1) Um mezanino em uma planta industrial,
- 2) O casco de um submarino ou de um navio de Guerra,
- 3) Uma plataforma marítima de petróleo “off shore”,
- 4) A asa de um avião responsável pela suportaçãõ de suas turbinas a gás.

Bibliografia

ALFORD, J. S., 1965, "Protecting turbomachinery from self excited rotor whirl," Journal of Engineering for Power, (Oct), pp. 333-344

ALLAIRE, P. E., FLACK, R. D., 1980, "Journal bearing design for high speed turbomachinery," ASME Century 2 – Emerging Technology conferences, San Francisco, California, USA, August 18-21 1980

ALLAIRE, P. E., CASTILHO, A., BIELK, J., ET ALL, 1988, "Case History of a Multistage Steam Turbine Vibration Problem", Romac Annual Meeting, Charlottesville, Virginia, USA,

ALLAIRE, P. E., ROCKWELL, D.R., CASTILHO, A., ET ALL, 2005, "Finite Element Analysis of a Petrobras Motor/Compressor 105-J and Supported Pedestal with Proposed Pedestal Modification", XI International Symposium on Dynamic Problems of Mechanic, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil, 28-March.

ATAYDE, J.P., WEBER, H.I., 2006, "Dinâmica de Máquinas Rotativas em Mancais Hidrodinâmicos". Tese de MsC, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC, R.J., Brasil

BANNISTER, R. L., THOMAN, R. J., 1967, "Experimental impedance technique applied to turbomachinery bearing supports," A.S.M.E. Paper 67-VIBR-61

BANSAL, P. N., KIRK, R. G., 1975, "Stability and damped critical speeds of rotor-bearing systems," Journal of Engineering for Industry, (Nov), pp. 1325-1332.

BARRETT, L. E., ALLAIRE, P. E., WILSON, B. W., 1988, "The eigenvalue dependence of reduced tilting pad bearing stiffness and damping coefficients," Tribology Transactions, v. 31, n. 4, pp. 411-419.

BARRETT, L. E., GUNTER, E. J., ALLAIRE, P. E., 1978, "Optimum bearing and support damping for unbalance response and stability of rotating machinery," Journal of Engineering for Power, v. 100, pp. 89-94.

BARRETT, L. E., NICHOLAS, J. C., DHAR, D., 1986, "The dynamic analysis of rotor-bearing systems using experimental bearing support compliance data," Proceeding of the fourth international modal analysis conference 1531-1535, Union College, Schenectady, New York, USA.

BLACK, H. F., 1976, "The stabilizing capacity of bearings for flexible rotors with hysteresis," Journal of Engineering for Industry, 9 Feb, pp. 87-91.

BOHM, R. T.,1964, "Designing complex turbo rotor systems with controlled vibration characteristics," SAE paper 928 B.

CASTILHO, A., 1983,Influência da Rotação no Comportamento Dinâmico de Rotores Flexíveis”Tese de MsC, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro ,R.J., Brasil

CASTILHO, A., GJIKA, K. , LALANNE, M. ,1997, ”Dynamic Behavior of a Turbine Blower Assembly : Behavior of Rotors”, 7th Diname, Angra dos Reis, Brasil , March .

CASTILHO, A., BERLIOZ, A. , JACQUET , G., LALANNE , M. , 1997 , ”Dynamic Behavior of a Turbine Blower Assembly : Behavior of Blade ”, 7th Diname, Angra dos Reis, Brasil , March .

CASTILHO, A., JACQUET, G. R. , LALANNE, M. ,1998, ”Dynamic Problems Concerning the Speed of Rotation Increase of a Turbine Blower Assembly”, Journal of Sound and Vibration, (1998),215(1), pp. 47-62.

CAVALCA, KL e LINS, HQ, Dynamic analysis of horizontal rotating mahinery, In: Sae Technical Papers, USA, v. 1, n. 1, p. 1-10, 1999

CAVALCA, KL e CAVALCANTE, PF, Estudo da Interação entre rotores e estrutura de suporte, In: 9o Congreso Chileno de Engenharia Mecanica, COCIM-CONAE, Valparaiso, Chile, v. 1. p. 1-7, 2000

CAVALCA, KL e SBRAVATI, A, Dynamic Analysis of Flexible Gear Coupling Efforts in Rotating Machinery, SAE Technical Papers, USA, v. 1, n. 1, p. 1-12, 2002

CAVALCA, KL, CAVALCANTE, PF e OKABE, EP, An experimental analysis of rotors on flexible structure, In: Sixth IFToMM 2002 - International Conference on Rotor Dynamics, Sydney, Australia, v. 1. p. 531-538, 2002

CAVALCA, KL, CAVALCANTE, PF e OKABE, EP, An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system, In: Mechanical Systems And Signal Processing, UK, v. 19, n. 1, p. 157-174, 2006.

CAVALCA, KL, CASTRO, HF e NORDMANN, R, Rotor-bearing system instabilities considering a non-linear hydrodynamic model. In: IFToMM2006 - Proceedings 7th International Conference on Rotordynamics, Vienna, v. 1. p. 1-10, 2006

CAVALCA, KL, OKABE, EP, Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting-pad bearings. In: IFToMM2006- Proceedings 7th International Conference on Rotor Dynamics, Vienna, v. 1. p. 21-30, 2006

CHILD , D., 1993, ”Turbomachinery Rotordynamics”, John Wiley & Sons, Inc., TJ267.C46.

CHIVENS , R. D. , 1973 , “The Natural Frequency and Critical speed of a Rotating , Flexible Shaft-Disk System” , Ph. D Dissertatin , Arizona State University , 154 p.

CHOUDHURY, P. D., ZSOLCSAK, S. J., BARTH, E. W.,1976, “Effect of damping on the lateral critical speeds of rotor-bearing systems,” Journal of Engineering for Industry, May , pp. 505-513.

CLOUD, C. H.,FOILES, W. C.,LI , G,2003,”Pratical Applicationof Singular Value Decomposition in Rotodynamics”, ROMAC Laboratories Annual Meeting, Charlottesville, Virginia , Report 486/2003 .

CLOUD,C.H,BARRETT,L.E, MASLEM,E.H,2004,”Evaluation of Damping Ratio Estimulation Techniques for Rotordynamics Stability Measurements”, ROMAC Laboratories, Charlottesville, Virginia , Report 504/2004 .

CRAIG Jr., R. R., 1995,“Substructure methods in vibration,” Special 50th Anniversary Design Issue, Transaction of ASME, v. 117, (Jun), pp. 207-213.

CRAIG Jr., R. R., BAMPTON, M. C. C., 1968,“Coupling of substructures for dynamic analyses,” AIAA Journal, v. 6, n. 7, (Jul) , pp. 1313-1319.

CRAIG Jr., R. R., 1981,,” Structural Dynamics, John Wiley & Sons”, TA654.C72.

DEN HARTOG, J. P., 1972, Editora da Universidade de Sao Paulo ,Vibrações nos Sitemos Mecanicos, 1 – edição , São Paulo , Brasil ,

DOPKIN, J. A., SHOUP, T. E., 1974, “Rotor resonant speed reduction caused by flexibility of disks,” Journal of Engineering for Industry, (Nov) , pp. 1328-1333.

EARLES, L. L., PALAZZOLO, A. B., LEE, C-K,ET ALL, 1988,“Hybrid finite element—boundary element simulation of rotating machinery supported on flexible foundation and soil,” Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, v. 110 , (Jul) , pp. 300-306.

ECKART, C. YOUNG, G. (1939) A Principal Axis Transformation for Non - Hermitian Matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45, 118-121.

EHRISH, F. F.,1992,Handbook of Rotordynamics, McGraw-Hill, Inc., ISBN 0-07-019330-4, TJ1058.R673.

EWINS,D.J,1984,Modal Testing:Theory and Practice’,ResearchStudies Press,

FAN, U-J, NOAH, S. T.,1989, "Vibration analysis of rotor systems using reduced subsystem models," Journal of Propulsion and Power, Vol. 5, No. 5, September-October 1989, pp.602-609.

FENG, N. S., HAHN, E. J.,1998, "On the identification of a flexibly supported rigid foundation with unknown location of the principal axes of inertia," Proceedings of ISROMAC-7, the 7th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Honolulu, Hawaii, February 1998, pp. 705-714.

FOILES WF, ALLAIRE PE , GUNTER EJ (1999) Advanced Techniques for Balancing and Forced Response of Rotor

GASH, R.,1976, "Vibration of larger turbo-rotors in fluid-film bearings on an elastic foundation," Journal of Sound and Vibration, (1976),47(1), pp. 53-73.

GLASGOW, D. A., NELSON, H. D., 1980,'Stability analysis of rotor-bearing systems using component mode synthesis," Journal of Mechanical Design, April 1980, Vol. 102, pp. 352-359.

GLOVER, K. , 1984,' "All Optimal Hankel-Norm approximations of Linear Multivariable Systems and Their L_∞ Error Bounds," Instrumentation Journal Control , Vol. 39, pp.1115-1193.

GREEN , R. B. , 1958 , "Gyroscopic Effect on the Critical Speed of Flexible Rotors" , Transactions of ASME , 70 : pp. 369-376

GUNTER, E. J., HUMPHRIS, R. R., SRINGER, H.,1983, "A rapid approach for calculating the damped eigenvalues of a gas turbine on a microcomputer, part I – theory," ASME paper 83-DET-83.(1983)

GUNTER, E. J., TRUMPLER, P. R.,1969, "The influence of internal friction on the stability of high speed rotors with anisotropic supports," Journal of Engineering for Industry, November1969, pp. 1105-1113.

GUNTER, E. J., WEN, J.C., 2005,Trafford Publishing Ltd , Interprise House, Wistaston Road Business Center ,Introduction to Dynamics of Rotor-Bearing Systems ,Victoria, B.C. , Canada.,

GUOXIN, L. , ALLAIRE, P. E., LIN , Z. ,2005, " Case Studies of Rotor and Substructure Coupling" , 25TH Romac Annual Meeting , Charleston, SC. , USA ,

GUYAN, R. J., 1965, "Reduction of stiffness and mass matrices," AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, pp.380-381.

HARRIS, C. M., Shock & Vibration Handbook, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, TA355.S5164 1987.

HASHISH, E., SANKAR, T. S.,1984, "Finite element and modal analyses under stochastic loading conditions," Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, January 1984, Vol. 106, pp. 81-89.

HASSELMAN , T. K., KAPLAN, A., 1974, "Dynamic analysis of large systems by complex mode synthesis," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, September 1974, pp. 327-333.

HASSENPFKUG, H. L.,1988, Transient analysis of coupled rotor-structure systems, Ph.D. Dissertation, University of Virginia, May 1988.

HENSHELL, R. D., ONG, J. H.,1975 "Automatic masters for eigenvalue economization," Earthquake, Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, No. 4, pp. 375-383. (1975)

HENNING,R. ,INGOLSTAD,A.G.,2005, A Pratical Investigation to Solve the Inverse Problem of Crack Identification Through Vibration Measurements , International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, Vol 23 .N1 , 2006 , pp32-56 .

HU, W., FENG,N.S., HAHN,E.J/,2004, " A Comparison Techniques for Identifying ConfigurationState ofStatically Independent Rotor Bearing Systems", Tribology International (2004) , 37, 149-157 .

IRONS, B.,1965, "Structural eigenvalue problems: elimination unwanted variables," AIAA Journal, Vol. 3, No. 5, pp. 961-962. (1965)

IRONS , B.,1981, "Dynamic reduction of structural models," Journal of the Structural Division, proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 107, No. ST5, pp. 1023-1024.(1981)

JEFFCOTT, H. H.,1919 "The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed – the effect of want of balance," Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 37, p. 304., 1919.

JOHNSON, C. P., CRAIG Jr., R. R., YARGICOGLU, A.,ET ALL, R.,1980, "Quadratic reduction for the eigenproblem," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 911-923 (1980).

HENNING,R. ,INGOLSTAD,A.G.,2005, A Pratical Investigation to Solve the Inverse Problem of Crack Identification Through Vibration Measurements ,

International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, Vol 23 .N1 , 2006 , pp32-56 .

KASARDA, M.E.F., MENDONZA, H. , KIRK , G.R. , ETALL ,2003, Reduction fo Subsynchronous Vibration in a Single Disk-Rotor Using Active Magnetic Damper , Mechanical Research Communication , 31 , 689 - 695 , Virginia Tech Blacksburg .

KAZAO , Y., GUNTER, E. J.,1987 “Dynamics of multi-spool gas turbines using the matrix transfer method – applications,” Proceedings of International Conference on Mechanical Dynamics, August 3-6, 1987, Shenyang, China.

KIDDER, R. L.,1973, “Reduction of structural frequency equations,” AIAA Journal, Vol. 11, No. 6, p. 892,(1973).

KIKUCHI, K., KOBAYASHI, S.,1977, “Stability analysis of rotating shaft system with many bearings and disks,” Bulletin of the JSME, Vol. 20, No. 150, December 1977, paper No. 150-11, pp. 1592-1600.

KIRK, R. G., GUNTER , E. J.,1976, “Stability and transient motion of a plain journal mounted in flexible damped supports,” Journal of Engineering for Industry, May 1976, pp. 576-592.

KIRK , R. G., GUNTER, E. J.,1972, “The effect of support flexibility and damping on the synchronous response of a single-mass flexible rotor,” Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp. 221-232.

KRÄMER, E.,1993 Dynamics of Rotors and Foundations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993.

LALANNE, M. , FERRARIS, G. ,1998 ,” Rotordynamic Predictions in Engineering” , 2 – edition , John Wiley and Sons, INSA , Lion , France

LANES , R. F., FLACK , R. D., LEWIS, D. W.,1981, “Experiments on the stability and response of a flexible rotor in three types of journal bearings,” ASLE Transactions, Vol. 25, No. 3, pp. 289-298. (1981)

LAWREN, J. L. Jr., FLOWERS, G. T.,1997, “Synchronous dynamics of a coupled shaft/bearing/housing system with auxiliary support from a clearance bearing: analysis and experiment,” Journal for Gas and Power, April 1997, Vol. 119, pp. 430-435.

LEES, A. W., FRISWHEEL, M. I., SMART, M. G., PRELLS, U., 1998, "The identification of foundation vibration parameters from running machine data," Proceedings of ISROMAC-7, the 7th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Honolulu, Hawaii, February 1998, pp. 715-724.

LIMA, E., C. P., 1977 "Lorane-Dina, Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas", Tese de Doutorado, Universidade do Rio de Janeiro, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, R.J.

LUND, J. W., 1965, "The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible, damped supports," Journal of Applied Mechanics, December 1965, pp. 911-920.

LUND, J. W., ORCUTT, F. K., 1967, "Calculations and experiments on the unbalance response of a flexible rotor," Journal of Engineering for Industry, paper No.67-Vibr-27. (1967).

LUND, J. W., 1974, "Stability and damped critical speeds of a flexible rotor in fluid-film bearings," Journal of Engineering for Industry, May 1974, pp. 509-517. 151

LUND, J. W., WANG, Z., 1986, "Application of the Ricatti Method to rotor dynamic analysis of long shafts on a flexible foundation," Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, April 1986, Vol. 108, pp. 177-181.

LUND, J. W., 1994, "Application of modal methods in rotor dynamics," Proceedings of the fourth international conference on rotor dynamics, September 1994, pp. 317-320.

MADEIRA, I. M., ZINDELUK, M., 1996, "Modelagem em elementos finitos de máquinas rotativas com efeitos não lineares", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.

MAIA, NMM. (1991) Fundamentals of Singular Value Decomposition. *Proceedings of the Ninth International Modal Analysis Conference*, 2, 1515-1521.

MARCIO, F. B., ZINDELUK, M., 1996, "Estudo analítico e experimental de identificação modal em rotores usando excitação rotativa assíncrona", Tese de Doutorado Ph.D, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.

MASLEN, E. H., BIELK, J. R., 1992, "A stability model for flexible rotors with magnetic bearings," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, March 1992, Vol. 114, pp. 172-175.

MCELANEY, J. M., PALAZZOLO, A., KASCAK, A., 1997, "Modeling and simulation methods for MDOF structures and rotating machinery with impact dampers," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, April 1997, Vol. 119, pp. 436-445.

MEIROVITCH, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co., Inc., 1967.

MEIROVITCH, L., 2000, *Principles and Technics of Vibrations*, Prentice-Hall International (UK) Limited, London.

MICHAEL, L. L., WILLIAM, L. L., 1997, "Essentials of Process Control", McGraw-Hill Companies incorporated, International Edition, Library of congress Cataloging-in-Publication Data

MILLER, D. F., 1958, "Forced lateral vibration of beams on damped flexible end supports", *Journal of Applied Mechanical*, n. 20, pp. 167-172.

MOHAMME, A. S., WEBER, H.I., 2000, "Análise do processo de contato entre o rotor e o estator em uma máquina rotativa", Tese de Doutorado Ph.D, Programa de Pos-graduação em Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC, R.J., Brasil.

MOORE, B. C., 1981, "Principal Component Analysis in Linear systems: Controlability, Observability and Model Reduction," *IEEE transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 17-31.

MURPHY, B. T., VANCE, J. M., 1983, "An improved method for calculating critical speeds and rotordynamic stability of turbomachinery," *Journal of Engineering for Power*, July 1983, Vol. 105, pp. 591-595.

MURTA, M.S., 2000, "Projeto, Construção e Avaliação Dinâmica de Um Rotor Vertical Suportado em Mancais Hidrodinâmicos", Tese de MsC, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil

MULKESTAD, N. O., 1944, "A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibrations of airplane wings and other types of beams," *Journal of the aeronautical sciences*, April 1944, pp. 153-162.

NELSON, H. D.,1985, "Rotor Dynamics Equations in Complex Form," Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, October 1985, Vol. 107, No. 4, pp. 460-461.

NELSON , H. D., McVAUGH, J.,M.,1976, "The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements," Journal of Engineering for Industry, May 1976, pp. 593-600.

NICHOLAS, J. C., BARRETT, L. E.,1986, "The effect of bearing support flexibility on critical speed prediction," ASLE Transactions, vol. 29, No. 3, pp. 329-338.(1986).

NICHOLAS , J. C., WHAREN, J. K., FRANKLIN, S. D.,2000, "Improving critical speed calculations using flexible bearing support FRF compliance data," Proceedings of the 15th Turbomachinery Symposium, Texas A&M University, College Station, Texas 2000.

NOWACKI , W.,1963, "Dinamic of Elastic Systems,"London, Chapman& Hall Ltda, p.396

OJALVO, I. U., NEWMAN, M.,1990, "Vibration modes of large structures by an automatic matrix-reduction method,"AIAA Journal, July1990, pp.1234-1239.

OTA, H., KANBE, Y.,1976, "Effects of flexible mounting and damping on the synchronous response of a rotorshaft system," Journal of Applied Mechanics, March 1976, pp. 144-149.

PAZ, M.,1984, "Dynamic Condensation," AIAA Journal, Vol. 22, No. 3, pp. 724-727.(1984).

PINHEIRO, B. J., 1990 , "Estratégias computacionais para análise não linear dinâmica de estruturas complacentes para águas profundas" , Tese de Doutorado, D. Sc.,Eng. Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro ,R.J., Brasil.

PRODONOFF, V. , 1990, Maity Comunicação e Editora Ltda, Vibrações Mecanicas Simulações e Análise, 1 – edição , Rio de Janeiro , Brasil ,

PRODONOFF, V. , CASTILHO , A., 1989 , " Influência da Rotação e dos Mancais nas Freqüências Naturais de Rotores Flexíveis Multi-estágios ", Boletim Técnico Petrobras, v. 32 , n. 3 , pp. 111-118 ,Rio de Janeiro , R. J. , BRASIL

PRODONOFF, V. , CASTILHO , A. , 1990 , " Instabilidade em Turbomáquinas – Uma Visão Global do Problema das Vibrações Auto-excitadas ", 4 - Congresso Brasileiro de Petróleo ,Rio de Janeiro , R. J. , BRASIL

PROHL, M. A., 1944, "A general method for calculating critical speeds of flexible rotors," *Journal of Applied Mechanics*, September 1944, pp. A-142A-148.

QUEITZSCH, G. K., 1985, *Forced response analysis of multi-level rotor systems with substructure*, Ph.D. Dissertation, University of Virginia, 1985.

RANKINE, W.J.M., 1869, "On the centrifugal forces of rotating shaft", *Engineer*, Ap. 1869

RAYLEIGH, LORD, 1945, "theory of sound", Dover Publication, New York.

RAUL, R.L., 1970. *Dynamic of distributed parameters rotor system; Transfer matrix and finite elements techniques*, PhD These, Cornell University, USA .

REDMOND, I., 1996 "Rotordynamic Modelling Utilizing Dynamic Support Data Obtained From Field Impact Tests", Paper C500/055/96, Proc of Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Oxford Sept. 1996.

RIEGER, N. F., ZHOU, S., 1998, "An instability analysis procedure for three-level multi-bearing rotor-foundation systems," *Journal of Vibration and Acoustics*, July 1998 Vol. 120, pp. 753-762.

RENATO, O. R., ZINDELUK, M., 1992, "Estudo analítico experimental da interação dinâmico rotor /estator", MsC, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.

RENATO, O. R., ZINDELUK, M., 1996, "Modelagem e simulação computacional em dinâmica de rotores via método de elementos finitos", Tese de Doutorado Ph.D, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.

ROUCH, K. E., McMAINS, T. H., STEPHENSON, R. W., 1989 "Modeling of rotor-foundation systems using frequency-response functions in a finite element approach," 1989 ASME Design Technical Conference 12th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Montreal, Canada, 1989.

RUHL, R. L., BOOKER, J. F., 1992, "A finite element model for distributed parameter turborotor systems," *Journal of Engineering for Industry*, February 1992, pp. 126-132.

RUHL, R. L., CONRY, T. F., STEGER, R. L., 1980, "Unbalanced response of a large rotor-pedestal-foundation system using an elastic half-space soil model," *Journal of Mechanical Design*, April 1980, vol. 102, pp. 311-319.

SALDARRIAGA, MRV e STEFFEN JR, V, *Modelagem de Rotores flexíveis montados sobre Suportes Viscoelásticos*, In: III National Congress of Mechanical Engineering – CONEM – Belém, Brasil, 2004

SAWICKI, J.T. , GENTA ,G. ,2001 ,“Modal Uncoupling of Damped Gyroscopic Systems” , Journal of Sound and Vibration, (2001), vol. 244, No. 3, pp. 431-451 .

STEPHENSON, R. W., ROUCH, K. E.,1992, “Generating Matrices of the foundation structure of a rotor system from test data,” Journal of Sound and Vibration, (1992), vol. 154, No. 3, pp. 467-484.

SMITTH, D.M., 1933”The Motion os a Rotor carried by a Flexible shaft and Flexible bearings” ,Proc., R. Soc. London Ser. A, 142 :92.

SOUTHWELL,R.V., GOUGH ,B.S., 1921, “Complex Stress distribution in Engineering Materials”, London Britain A. Science, pp.345

TIMOSHENKO,T., 1945, “Collected Papers”, Mc Graw – Hill Book , p. XI.

TIMOSHENKO,T., 1955, Vibration Problems in Engineering , Van Nostrand Co. , 3 - edition,Princeton , New Jersey , USA , pp. 468 .

TESSARKIT, J. M., CHIANG, T., BADGLEY, R. H.,1976, “Suppression of rotor-bearing system vibrations through flexible bearing support damping,” Journal of Engineering for Industry, August 1976, pp. 1053-1061.

TEUKOLSKY, W.H.VETERLING,SA, W. T. & FLANNERY, B. P. (1992) “*Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*”. New York, NY: Cambridge University Press.

THOMSON ,W. T. , 1977 ,“ Whirl Stability of the Pendoulosly Supported Flywheel System ”, Transactions of ASME , (jun) ,pp. 322-328

VANCE, J. M., 1987,Rotordynamics of Turbomachinery, John Wiley & Sons, Inc., TJ267.V26. (1988). 106.

VANCE, J.M., MURPHY, B. T., and TRIPP, H. A.,1987 , “Critical Speeds of Turbomachinery: Computer predictions vs. experimental measurements – Part I: the rotor mass – elastic model”, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 109(1), pp. 1-7.

VANCE , J.M., MURPHY, B. T., and TRIPP, H. A.,1987, “Critical Speeds of Turbomachinery: Computer predictions vs. experimental measurements – Part II: Effect of tilt-pad bearings and foundations dynamics”, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1987, Vol. 109(1), pp. 8- 1

VAZQUEZ, J. A., BARRETT , L. E., 1998a, “Modeling of tilting-pad journal bearings with transfer functions”, Proceedings of ISROMAC-7, the 7th International

Symposium of Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Honolulu, Hawaii, February 1998.

VAZQUEZ, J. A., BARRETT, L. E., 1998b, "Representing Flexible Supports by Polynomial Transfer Functions", ASME Paper 98-GT-27, June 1998.

VAZQUEZ, J.A., BARRETT, L.E., 1998c, "Comparison between calculated and measured free-free modes for a flexible rotor", ASME Paper 98-GT-51, June 1998.

VAZQUEZ, J. A., BARRETT, L. E., FLACK, R. D., 2001, "Flexible rotor on flexible bearing supports stability and unbalance response", *Journal of Vibration and Acoustic*, 123, pp. 137-144

WANG, J. H., TSAI, M. T., 1989, "Instability due to fluid leakage of a rotor system with anisotropic support," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, January 1989, Vol. 111, pp. 27-34.

WARNER, R. E., SOLER, A. I., 1975, "Stability of rotor-bearing systems with generalized support flexibility and damping and aerodynamic cross-coupling," *Journal of Lubrication Technology*, July 1975, pp. 461-471.

WYGANT, K., 1993, *Dynamic reduction of rotor supports*, Master Thesis, University of Virginia, May 1993.

ZACHARIADIS, DC, *Critical Speeds and Unbalance Response of a Jeffcott Rotor on Angular Misaligned Hydrodynamic Bearings*, In: SAE Brasil International Mobility Congress and Exhibition, 2001, São Paulo, Brasil

ZACHARIADIS, DC, *Stability versus unbalance response of statically indeterminate rotors supported on hydrodynamic journal bearings*, In: IFToMM Sixth International Conference on Rotor Dynamics, 2002, Sydney, Australia

ZACHARIADIS, DC, *Unbalance Response of Statically Indeterminate Rotors Supported on Hydrodynamic Journal Bearings: Use of the 32 Dynamic Coefficients Bearing Model*, In: International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2006, Leuven, Bélgica

ZACHARIADIS, DC, *Unbalance Response of Rotors Supported on Hydrodynamic Bearings Placed Close to Nodal Points of Excited Vibration Modes*, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, USA, v. 128, n. 3, p. 661-669, 2006.

ZUCK, C.J., FLACK R.D., "Experiments on the stability of an overhung rotor in pressure-dam and multilobe bearings", *ASLE Transactions*, Vol 30, No.2, pp. 225-232.

APÊNDICE A

Relatório Relativo a Estudo de Caso Real

COMPRESSOR 105-J da FAFEN/SE

(SUPORTE FLEXÍVEL)

Neste Relatório será apresentada uma tecnologia inédita e extremamente precisa, usada para resolver um complexo problema de vibração ocorrido em um compressor de amônia (105-J, Plantas de Fertilizantes da Petrobras FAFEN/SE), problema este associado ao projeto inadequado de seu sistema de suportação.

Este trabalho foi discutido no artigo ALLAIRE, P. E., ROCKWELL, D.R., CASTILHO, A., ET ALL, (2005).

Esta metodologia de análise foi desenvolvida sob supervisão do Professor Paul E. Allaire, da Universidade de Virgínia.

A Petrobras faz parte deste consórcio desde 1986 e participou deste projeto, sendo representada pelo autor da tese. Esta solução foi apresentada em dezembro de 2003 e ainda não foi totalmente implementada, até esta data.

O pioneirismo desta tecnologia fica claramente evidenciado a partir de reunião realizada em 17 de agosto de 2006, entre os consultores da Universidade de Virginia com os consultores da Boeing, assessorados por consultores do NASTRAN (consórcio Boeing/NASTRAN).

No referido encontro, a Boeing apresentou seu desenvolvimento conjunto Boeing/NASTRAN para simulação da interaço rotodinâmica de suas turbinas a gás com a estrutura da asa de seus aviões. Nesta apresenta o evidenciou-se a dificuldade de uma precisa representa o dos efeitos de “cross coupling” e de amortecimento reais dos mancais, sendo este o foco da reunião.

Esta reunião objetivou a implementa o dessa nova tecnologia, aqui apresentada, nos códigos desenvolvidos pelo consórcio Boeing/Nastran.

Esse trabalho representa o ponto alto de todo um esforço pessoal de pesquisa (durante mais vinte anos), objetivando a compreensão global dos fenômenos vibratórios em turbomáquinas, notadamente aqueles comportamentos anormais que surgem

quando colocamos uma turbomáquina em suportes flexíveis tais como: asas de aviões, submarinos, navios, plataformas “off shore” e mezaninos industriais.

Tal tecnologia se apóia em um tripé tecnológico, compreendido por:

- uma boa capacidade de simulação de mancais hidrodinâmicos,
- uma boa capacidade de simulação rotodinâmica e
- a ajuda de programas comerciais como o ANSYS ou NASTRAN para simulação do comportamento da estrutura de suportaço.

O ator principal desta performance é o motor elétrico do conjunto motor/compressor 105-J da planta de fertilizante da Petrobras, que vinha de longa data sendo prejudicado por vibrações excessivas.

Este Relatório é subdividido em cinco partes distintas. Cada uma destas partes será discutida independentemente, conforme apresentado abaixo:

- A.1) Modelação da estrutura por elementos finitos (ANSYS).
- A.2) Modelação rotodinâmica com os programas do ROMAC
- A.3) Redução dinâmica da estrutura e correção dos coeficientes dos mancais
- A.4) Análise das diversas propostas de modificação da estrutura e dos mancais.
- A.5) Solução de compromisso (compromisso: eficácia X simplicidade)

A.1 Modelação da Estrutura por Elementos Finitos (ANSYS).

O motor do compressor 105-J vinha experimentando elevados níveis de vibração (no primeiro e no segundo harmônicos).

Analizadas todas as possibilidades, este problema foi diagnosticado como tendo sua causa básica no projeto inadequado de seu mezanino. Na figura A.1 é apresentado um desenho do conjunto motor/redutor/compressores.

Na literatura especializada, a flexibilidade do suportes das turbomáquinas vem sendo considerada como uma causa provável (sempre presente) de problemas de vibrações já há muitos anos, notadamente em equipamentos pesados e que operam em baixas rotações, tais como motores elétricos de grande porte.

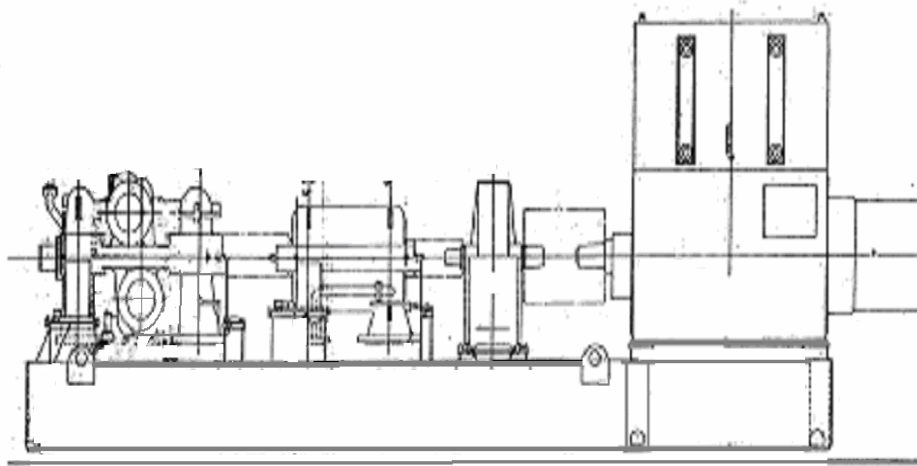


FIG. A.1 - CONJUNTO COMPRESSOR 105-J

Geralmente, a fundação flexível de uma turbomáquina reduz a rigidez e o amortecimento fornecidos pelos seus mancais, trazendo como provável conseqüência o crescimento do primeiro e do segundo harmônicos da vibração da máquina. Estes dois efeitos foram encontrados no compressor 105-J.

Este compressor está instalado a uma altura aproximada de três metros acima do piso, sustentado por 10 colunas de concreto reforçadas. Este motor aciona dois compressores através de uma redutora. As colunas têm seção quadrada de 0.45 metros de lado e são espaçadas de 2 e 3 metros de distância.

Esta combinação, de colunas delgadas com máquina pesada e de baixa rotação, pode levar a uma dinâmica com elevadas amplitudes de movimento.

O diagnóstico inicial apontava para um sistema flexível com frequências naturais dentro da faixa de operação da máquina. Estava evidente que um modelo de elementos finitos seria necessário para permitir a compreensão das verdadeiras causas do mau funcionamento desta máquina e para explorar as soluções possíveis.

A.1.1 Modelo Simplificado da Estrutura de Suportação

Foi, então, construído um modelo que permitisse a interação do rotor com o mancal e com a estrutura, para simulação deste fenômeno. Inicialmente, foi feito um modelo simplificado do pedestal em torno do motor elétrico como mostra a figura A.2.

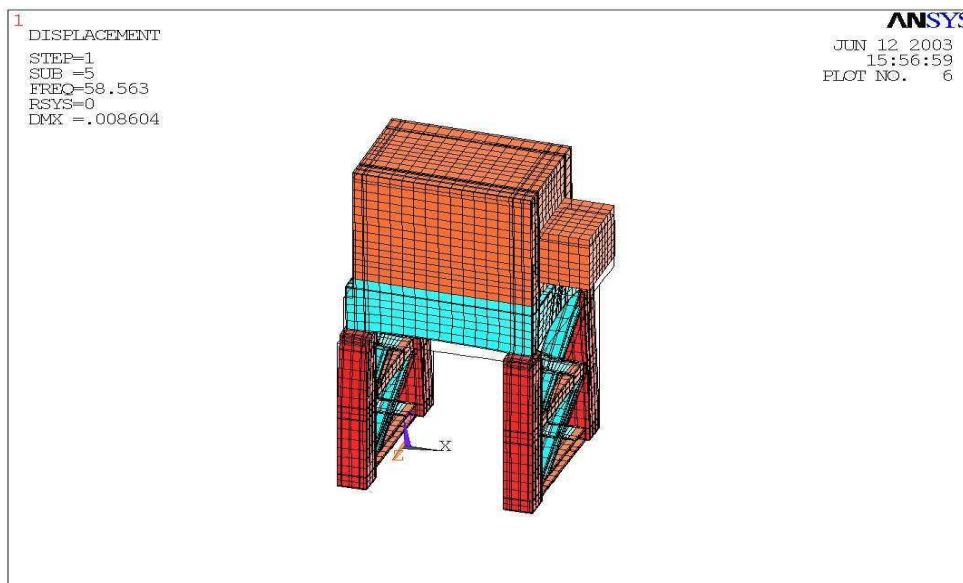


FIG. A.2 - SAÍDA DO ANSYS PRIMEIRA TENTATIVA

Este primeiro modelo tentativa mostrou uma frequência natural com baixo amortecimento, próxima a 60 HZ (o motor trabalha a 1800 rpm – 1N, e, portanto, 2N corresponde 3600 rpm ou 60 Hz), todavia quando este sistema foi acoplado com o modelo rotodinâmico, estas expectativas não se confirmaram, mostrando que tais modo de vibração não afetavam o comportamento do rotor.

Foi, então, desenvolvido um modelo mais completo em elementos finitos, envolvendo todo o conjunto plataforma e máquinas. Este novo modelo revelou a existência de duas frequências naturais, uma perto de 60 Hz e outra perto de 30 Hz. Quando o mesmo foi acoplado ao sistema rotodinâmico, os efeitos no rotor ficaram evidentes.

A análise rotodinâmica mostrou que a segunda crítica do conjunto estava muito próxima do segundo harmônico do rotor. A simulação mostrou ainda que o suporte tinha grande responsabilidade no mau desempenho rotodinâmico do conjunto.

Esta impropriedade tornou a máquina susceptível a problemas como desbalanceamento elétrico do motor, desbalanceamento do rotor e desalinhamento.

A representação total desta plataforma exigiu uma modelagem pesada, com mais de 80.000 graus de liberdade, a qual precisou ser reduzida significativamente para tornar-se compatível com os modelos do rotor e dos mancais.

O modelo completo revelou duas frequências naturais pouco amortecidas próximo a 2N (frequência que é excitada pelo desalinhamento).

Além disto, estavam associadas a movimentos verticais nos mancais, desqualificando todos os trabalhos de contraventamento anteriormente realizados e que estão mostrados na figura A.2.

A modelação completa mostrou-se crucial para a eficácia deste trabalho.

Os dados reportados pelo campo, fundamentais para o processo de identificação e aferição do modelo, estavam incompletos sendo impossível a realização de um levantamento mais detalhado, nos moldes de uma análise modal.

A identificação modal só pode ser aplicada em sistemas lineares, causais, estáveis e invariantes com o tempo, conforme VAN DEN ENDEN, A.W.M., VERHOECKX, N. A. M., (1989).

Entre os dados de campo, encontravam-se alguns espectros do tipo “peak-hold” (retém maior valor), realizados durante o processo de partidas e paradas da máquina.

Alguns dados obtidos em testes de impacto, no campo, revelaram a existência de diversas frequências naturais na faixa operacional, dentro da faixa de frequência de 0Hz a 75Hz.

A.1.2 Modelo Completo da Estrutura de Suportação

A.1.2.1 Descrição do Modelo Completo

O modelo real é constituído por dez colunas de concreto que suportam o conjunto motor compressor. As máquinas repousam sobre uma grande caixa de aço construída de vigas laterais e transversais de aço, colocadas entre as colunas para enrijecimento do sistema.

O modelo constituído tem 19.064 elementos e 27.424 nós com um total de 82.272 graus de liberdade (3 por nó). O modelo foi desenvolvido usando ANSYS. A tabela A.1 mostra as principais dimensões usadas e a tabela A.2 mostra as propriedades do material. A coluna de concreto reforçado foi modelada usando-se o elemento 65 do ANSYS, que é um elemento sólido com 8 nós e tem opção de colocação das propriedades da armação. As vigas de suporte entre as colunas são do tipo caixão.

Por simplicidade, a caixa de redução, o motor e os compressores são modelados como objeto sólido homogêneo e a densidade foi escolhida em função do peso e do centro de gravidade.

TAB A.1 DIMENSÕES DA ESTRUTURA DE SUPORTE DO MODELO

Colunas de Concreto

Seção:	0.45 m x 0.45 m
Altura:	3.1 m
Vigas de Suporte	
Seção:	0.3 m x 0.9 m
Espessura de Parede:	2 cm
Viga do Motor:	
Seção:	0.3 m x 0.2 m
Viga - I	
Seção:	0.26 m x 0.3 m
Espessura do Flange:	2 cm
Espessura da alma:	3 cm
Viga Caixaão	
Seção:	0.26 m x 0.3 m
Espessura de Parede:	2 cm

As máquinas são tratadas como massa discreta, as colunas, vigas e máquinas são rigidamente conectadas entre si e as colunas são rigidamente conectadas ao solo.

Na modelação do conjunto, mostrou ser pouco importante a geometria detalhada de cada uma das máquinas, as quais foram modeladas como paralelepípedos de densidade constante.

O posicionamento de cada uma das máquinas na estrutura está rigorosamente de acordo com os desenhos. A densidade e a altura de cada máquina foram estabelecidas de modo a garantir o correto posicionamento do C.G. delas (tabela A.3).

A figura A.3 mostra o modelo da estrutura de suportação do compressor 105-J.

O mancal externo do motor, bem como seu mancal interno, estão corretamente posicionados na estrutura, embora estejam escondidos.

A.1.2.2 Freq ncias e Modos Naturais de Vibra o

A matriz integral é muito grande e cada rodada do programa de computador demanda várias horas de computa o, não sendo adequada para o intenso processo de avalia o da estrutura. Esta estrutura pode, todavia, ser representada através de uma

matriz aproximada formada a partir de um conjunto limitado de graus de liberdade, conforme será visto na Seção (A.2).

A tabela A.4 mostra os valores de frequências naturais do sistema, levantados no campo com ajuda de teste de impacto e as frequências naturais do modelo completo.

TAB A.2 PROPRIEDADES DO MATERIAL DA ESTRUTURA DE SUPORTE

Concreto *	
Módulo de Young:	23 GN/m ²
Densidade:	2400 kg/m ³
Poisson:	0.18
Steel Beams, Rebar (typical values for steel)	
Módulo de Young:	200 GN/m ²
Densidade:	7860 kg/m ³
Poisson:	0.33
Motor	
Massa Total:	26760 kg
Mass without Rotor:	17837 kg
Módulo de Young:	200 GN/m ²
Densidade:	1355 kg/m ³
Poisson:	0.33
Caixa de Engrenagem	
Massa:	6900 kg
Módulo de Young:	200 GN/m ²
Densidade:	5690 kg/m ³
Poisson:	0.33
Compressor Radial 1	
Massa:	9200 kg
Módulo de Young:	200 GN/m ²
Densidade:	2700 kg/m ³
Poisson:	0.33
Compressor Radial 2	
Massa:	13800 kg
Módulo de Young:	200 GN/m ²
Densidade:	2270 kg/m ³
Poisson:	0.33

Propriedades dos Materiais de Suporte em Estruturas
 *Hassoun, M.N., Structural Concrete: Theory and Design, 2nd ed.,
 Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.

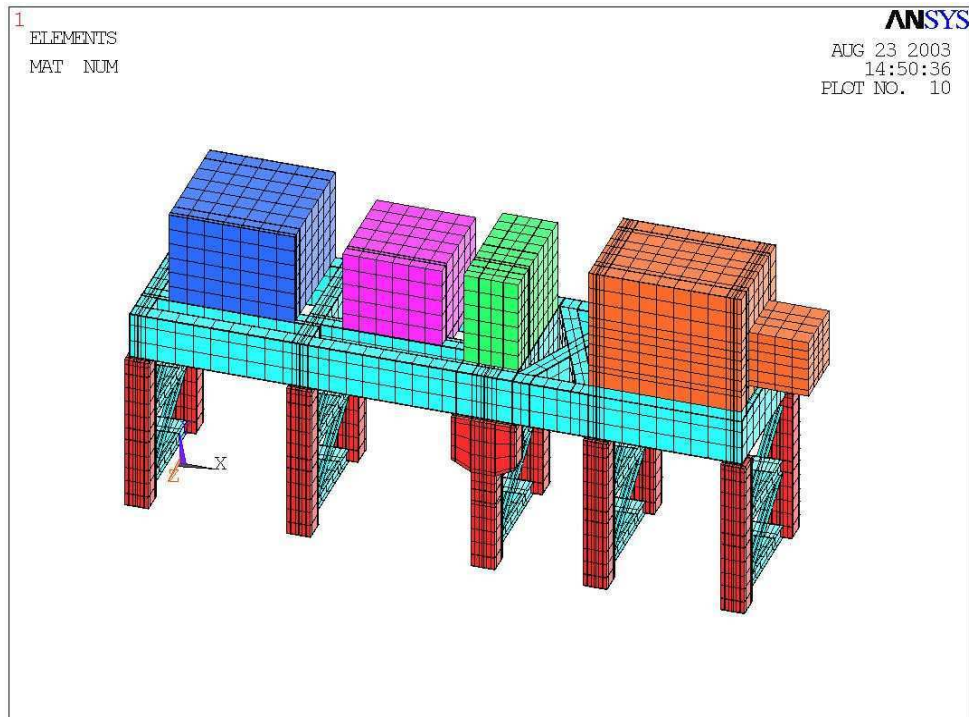


FIG. A.3 - SAÍDA DO ANSYS MODELO COMPLETO

TAB A.3 TABELA COM AS MASSAS DOS EQUIPAMENTOS

Componente	Massa (kg)
Motor	17,837
Rotor do Motor	8,923
Multiplicadora	4,536
Compressor 1	10,614
Compressor 2	14,134

TAB A.4 FREQUÊNCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA DE SUPORTE

Modo	Medida	Modelo Integral
1	9.9	10.4
2	12.7	19.7
3	24.6	21.8
4	27.7	31.9
5	34.5	Perdido
6	38.3	39.1
7	49.5	50.0
8	54.5	51.7
9	57.8	57.3
10	62.2	60.3
11	66.7	66.6
12	71.3	71.6

Os valores medidos e calculados das frequências naturais mostram uma boa concordância entre o sistema real e o modelo. Há, entretanto, alguns modos que apresentam elevada distorção como consequência das limitações do modelo.

Os modos 2, 3 e 4 são modos de vibração lateral e estão associados à dificuldade de simulação dos contraventamentos introduzidos no projeto inicial. Entretanto, estes modos não modificam o comportamento dos mancais nas frequências de interesse.

Neste caso, estamos interessados no movimento dos mancais e em frequências até 60Hz (associados ao primeiro e ao segundo harmônicos do motor).

O quinto modo (perdido no processo de modelação da estrutura), está associado à vibração da excitatriz do motor e, portanto, não poderia aparecer em nossa simulação, já que o motor foi modelado como uma massa de densidade constante.

A quinta frequência natural não é excitada quando a máquina está em operação.

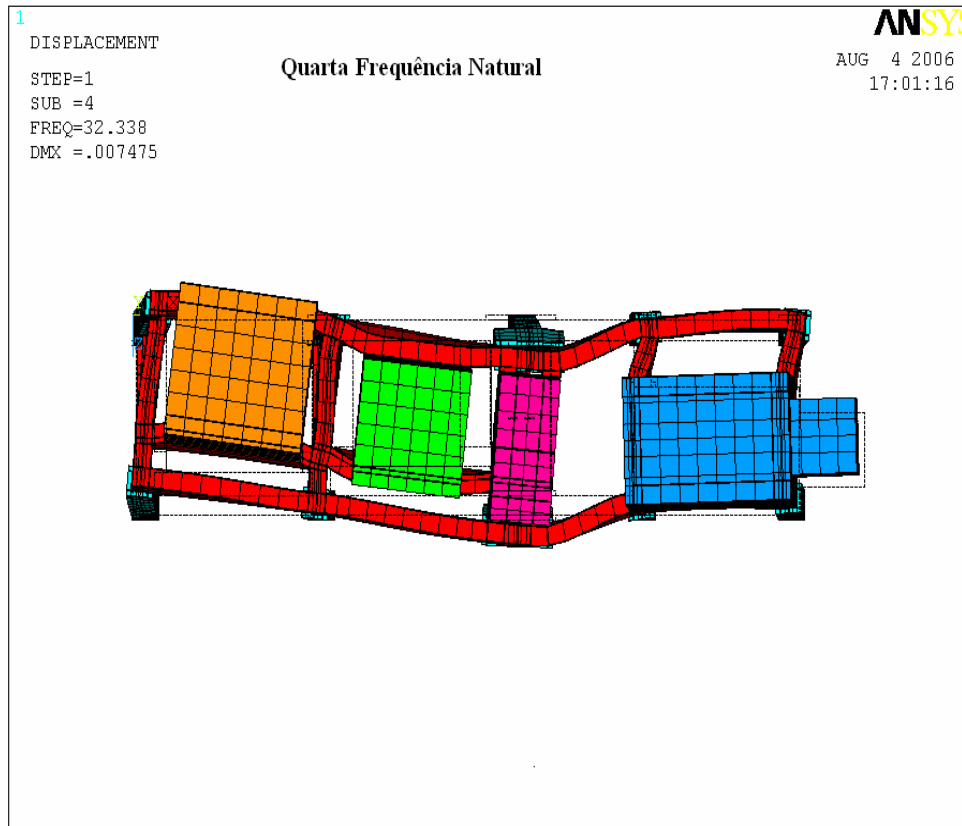


FIG. A.4 - QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA

Considerando-se o ponto de vista estrutural, a resposta forçada da estrutura a 30 Hz (a frequência natural da estrutura é próxima a 30 Hz) é bem amortecida. Portanto, o quarto modo, apresentado na figura A.4, não caracteriza uma ameaça concreta ao bom funcionamento da estrutura.

Considerando-se que a rotação de operação é muito próxima da frequência natural da estrutura, precisamos analisar a resposta dinâmica do sistema integrado (rotor/mancais/estrutura) à excitação de 30 Hz. Esta análise é feita na Seção (A.3)

Sabe-se, entretanto, que esta estrutura contribui de forma indesejável para a dinâmica do conjunto quando é excitada pelo segundo harmônico do motor (desbalanceamento elétrico ou desalinhamento).

Os modos 9 e 10, mostrados na figura A.5, possuem frequências naturais próximas a 60 Hz (2 N).

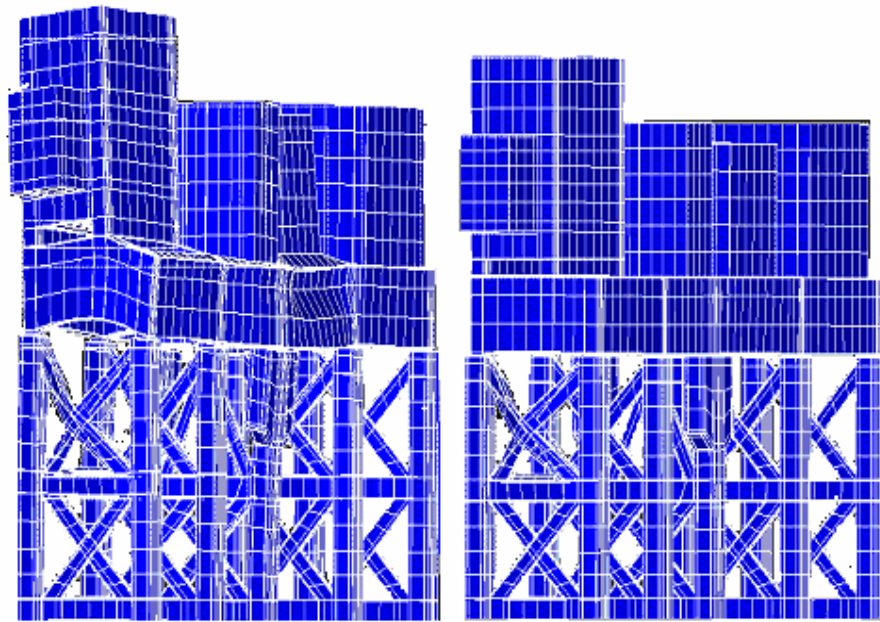


FIG. A.5 NONO MODO E DÉCIMO MODO

No nono modo de vibração, as vigas transversais que suportam o motor (posicionadas diretamente a baixo da caixa dos mancais) assumem um movimento vertical significativo, levando a caixa de mancais a vibrar com elevadas amplitudes.

A.1.2.3 Função de Resposta em Frequência

As Funções de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura, são calculadas com a ajuda do ANSYS e representam a resposta de um nó do modelo quando o sistema é excitado por uma força senoidal de frequência variável no mesmo nó. Os cálculos realizados consideram uma taxa de amortecimento de 1%.

As FRF's são calculadas para quatro condições de excitação diferentes. A figura A.6 mostra as FRF's vertical, horizontal e axial (no mancal próximo ao redutor). A FRF é resultado de uma excitação senoidal com varredura de frequência (no mesmo lugar), sendo sua amplitude igual a 1 Newton na direção vertical.

A figura A.7 mostra as FRF's vertical, horizontal e axial no mancal próximo ao redutor devido à excitação senoidal (no mesmo lugar), provocada por um sinal de magnitude igual a 1 Newton, na direção horizontal.

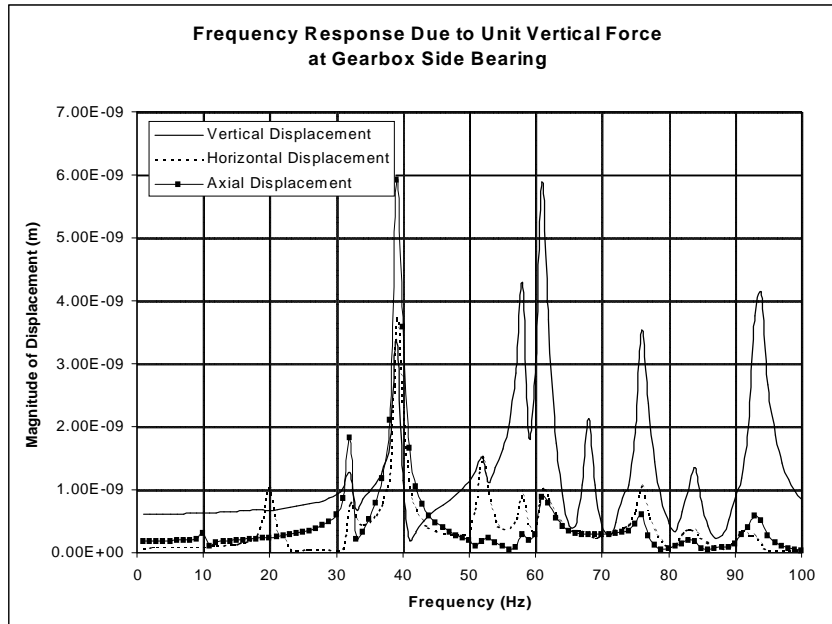


FIG. A.6 FRF DO MANCAL DO MOTOR LA DIREÇÃO VERTICAL

Duas observações podem ser feitas a partir destas funções de frequência:

1) A resposta em 30 Hz é bem menor do que em 60 Hz, portanto, a estrutura está contribuindo para os problemas de vibração mais em 60 Hz do que em 30 Hz.

2) Em 60 Hz, a estrutura é mais flexível na direção vertical do que na horizontal. Por esta razão, usaremos na solução final uma coluna de concreto para restringir o movimento vertical da viga posicionada abaixo deste mancal.

As FRF's do ANSYS são adequadas em seu conteúdo de frequência, já que erros da ordem de 5% são comuns e aceitáveis (modelação muito bem feita).

Entretanto, estas mesmas FRF's são imprecisas em seu conteúdo de amplitude e fase, na medida em que não existe limite teórico para os erros associados a esta modelação (truncamento).

Estes erros se somam aos erros oriundos da imprecisão numérica do computador, produzindo níveis de imprecisão elevados. Esta imprecisão impede a utilização destas amplitudes nos cálculos de correção dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais discutidos na Seção A.3.

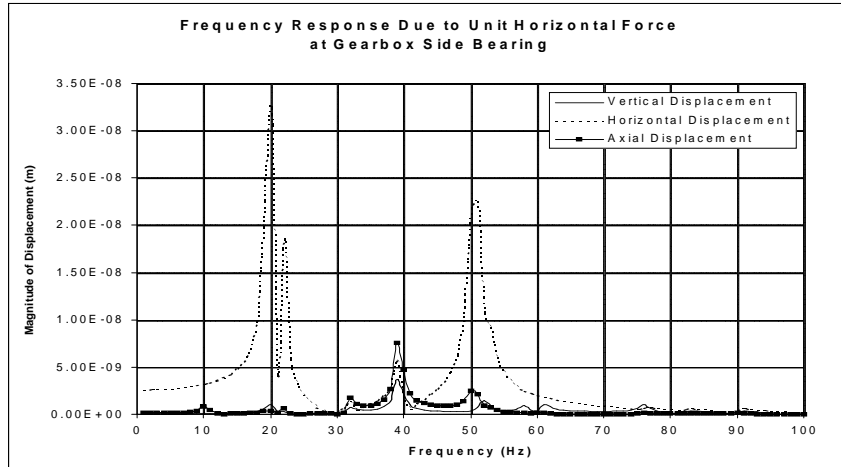


FIG. A.7 FRF DO MANCAL DO MOTOR LA DIREÇÃO HORIZONTAL

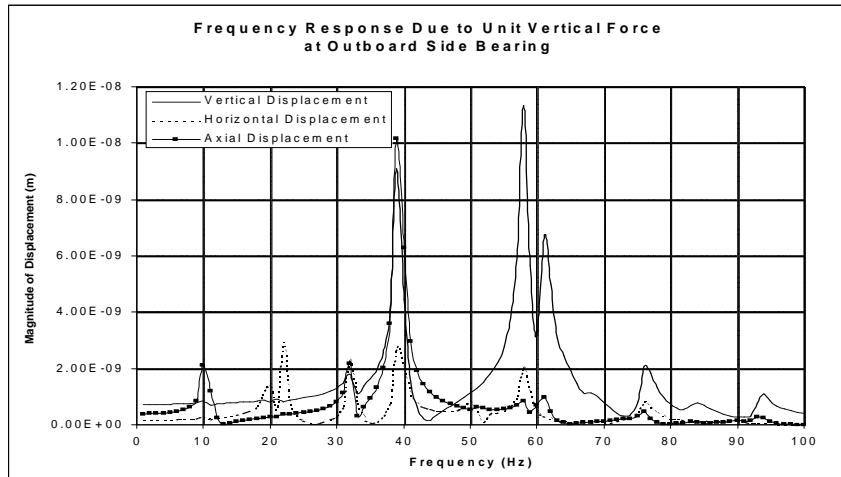


FIG. A.8 FRF DO MANCAL DO MOTOR LOA DIREÇÃO VERTICAL

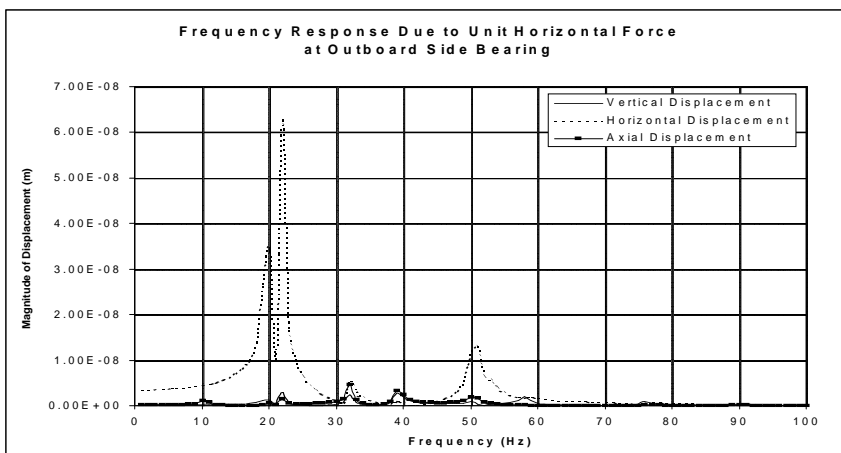


FIG A.9 FRF DO MANCAL DO MOTOR LOA DIREÇÃO HORIZONTAL

A.2 Modelação Rotodinâmica pelos programas do ROMAC

Após a parada programada de manutenção de 2001, o motor do compressor 105-J da FAFEN-SE apresentou elevados níveis de vibração, notadamente no primeiro e no segundo harmônicos.

O nível elevado de vibração, percebido no motor elétrico junto ao redutor, poderia ter uma ou mais das seguintes causas:

- Desbalanceamento do rotor do motor,
- Desbalanceamento elétrico do rotor do motor,
- Ressonância da Estrutura,
- Acoplamento desalinhado,
- Ressonância do motor.

Foi necessária uma análise rotodinâmica global do conjunto para identificação da real causa do problema. A primeira fase dessa análise inclui a modelação da estrutura, do rotor e dos mancais, a identificação das frequências naturais e os respectivos modos de vibração.

Estes modelos foram desenvolvidos conforme dados levantados na FAFEN-SE e foram validados, experimentalmente, para os mancais analisados (nas condições “flooded and starved” afogado e faminto). O modelo mostrou-se adequado para permitir toda a análise.

Para simular o desbalanceamento mecânico e elétrico, foi aplicada a análise de resposta dinâmica síncrona (segundo o API 617) e assíncrona, respectivamente. Esta análise foi conduzida para três folgas diferentes dos mancais, conforme Seção (A.2.2).

Pode-se sumarizar esta análise dizendo que o rotor opera entre a primeira e a segunda críticas.

Não há margem de separação suficiente para operar a 1800 rpm. Pode-se também dizer que a resposta ao desbalanceamento atende ao API 617.

A.2.1 Modelação do Rotor

O conjunto rotor do motor está mostrados na figura A.10. O rotor pesa 5738 kg, sendo o rotor de 4-pólos, bobinas e armadura, dois ventiladores, um acoplamento e ainda outras partes, conforme mostrado na figura A.10.

O comprimento total do rotor é 5.168 mm. O peso total do conjunto é 8.923 kg mais acoplamento, totalizando 9392.9 kg.

A modelação do rotor é, geralmente, feita pelo Método de Elementos Finitos ou por Matriz de Transferência. Os resultados serão os mesmos se usado o elemento de barra normalmente empregado em simulações rotodinâmicas.

Nesta análise, é feita a simulação do esquema mostrado, sendo a rigidez à flexão calculada conforme esta geometria. O modelo “free-free” (livre livre) deste rotor foi, inicialmente, realizado considerando-se 57 nós.

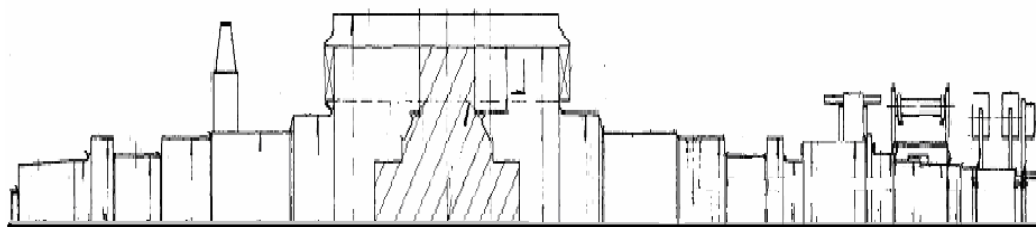


FIG A.10 DESENHO DO ROTOR DO MOTOR

A tabela de entrada de dados do programa é mostrada a seguir.

TAB A.5 GEOMETRIA DO ROTOR

NÓ	M	L	D_e	D_i	L_t
1	4.996	1.620	5.240	.000	.000
2	32.011	2.719	9.406	.000	1.620
3	55.015	2.719	9.576	.000	4.339
4	347.001	2.719	9.745	.000	7.058
5	804.021	2.719	9.915	.000	9.776
6	71.142	3.661	10.000	.000	12.495
7	118.275	3.152	14.764	.000	16.157
8	154.306	3.152	14.764	.000	19.308
9	130.833	3.933	11.024	.000	22.460
10	107.359	3.933	11.024	.000	26.393
11	136.598	3.387	14.764	.000	30.326
12	165.837	3.387	14.764	.000	33.713

13	165.837	3.387	14.764	.000	37.100
14	260.110	3.150	14.961	.000	40.487
15	354.382	3.150	14.961	.000	43.637
16	256.365	3.150	14.961	.000	46.787
17	158.347	3.150	14.961	.000	49.936
18	158.347	3.150	14.961	.000	53.086
19	229.273	4.075	18.110	.000	56.235
20	300.199	4.075	18.110	.000	60.310
21	722.816	4.528	22.165	.000	64.385
22	1145.433	4.528	22.165	.000	68.912
23	1145.433	4.528	22.165	.000	73.440
24	1145.433	4.528	22.165	.000	77.968
25	1145.433	4.528	22.165	.000	82.495
26	1145.433	4.528	22.165	.000	87.023
27	1145.433	4.528	22.165	.000	91.551
28	1145.433	4.528	22.165	.000	96.078
29	1145.433	4.528	22.165	.000	100.606
30	1145.433	4.528	22.165	.000	105.133
31	722.816	4.075	18.110	.000	109.661
32	300.199	4.075	18.110	.000	113.736
33	229.273	3.150	14.961	.000	117.811
34	158.347	3.150	14.961	.000	120.960
35	158.347	3.150	14.961	.000	124.110
36	256.365	3.150	14.961	.000	127.259
37	354.382	3.150	14.961	.000	130.409
38	256.545	3.241	14.764	.000	133.559
39	158.708	3.241	14.764	.000	136.800
40	158.708	3.241	14.764	.000	140.042
41	138.998	4.370	11.024	.000	143.283
42	116.600	4.173	11.024	.000	147.653
43	138.881	3.346	14.764	.000	151.826
44	125.012	3.661	10.236	.000	155.173
45	114.678	3.415	13.661	.000	158.834
46	143.182	3.415	13.661	.000	162.250
47	234.041	3.415	13.661	.000	165.665
48	324.900	3.415	13.661	.000	169.080
49	227.218	4.134	11.811	.000	172.496
50	239.113	5.512	11.024	.000	176.630
51	345.487	5.315	10.984	.000	182.142
52	205.870	2.638	10.827	.000	187.457
53	74.899	3.189	10.591	.000	190.094
54	126.175	4.016	10.551	.000	193.283
55	172.006	4.016	10.551	.000	197.299
56	131.197	2.165	10.433	.000	201.315
57	45.194	.000	10.433	.000	203.480

20699.095 203.48

FREE FREE
 Petrobras Motor Rotor Analysis
 (CRTSP2 Data File)

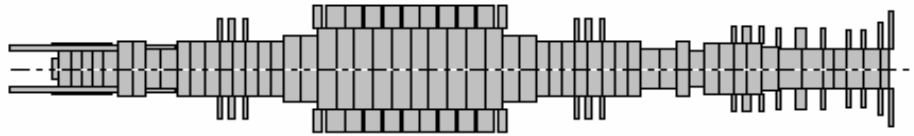


FIG. A.10A GEOMETRIA DO ROTOR

O peso real do rotor é 9397.4 kg. As três primeiras frequências naturais do conjunto são 3693.34 rpm, 8013.98 rpm e 15146.84 rpm. A figura A.11 mostra os primeiros modos “undamped free free” e as frequências naturais a eles associadas. A figura A.12 mostra o mapa das críticas.

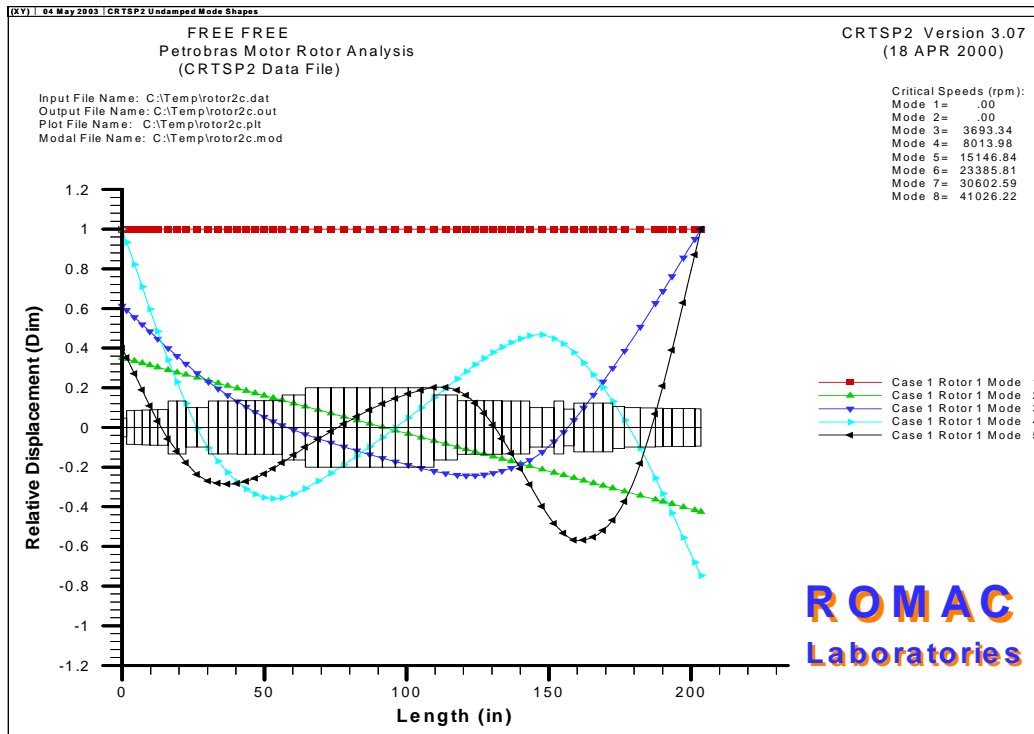


FIG A.11 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODE SHAPE DO ROTOR

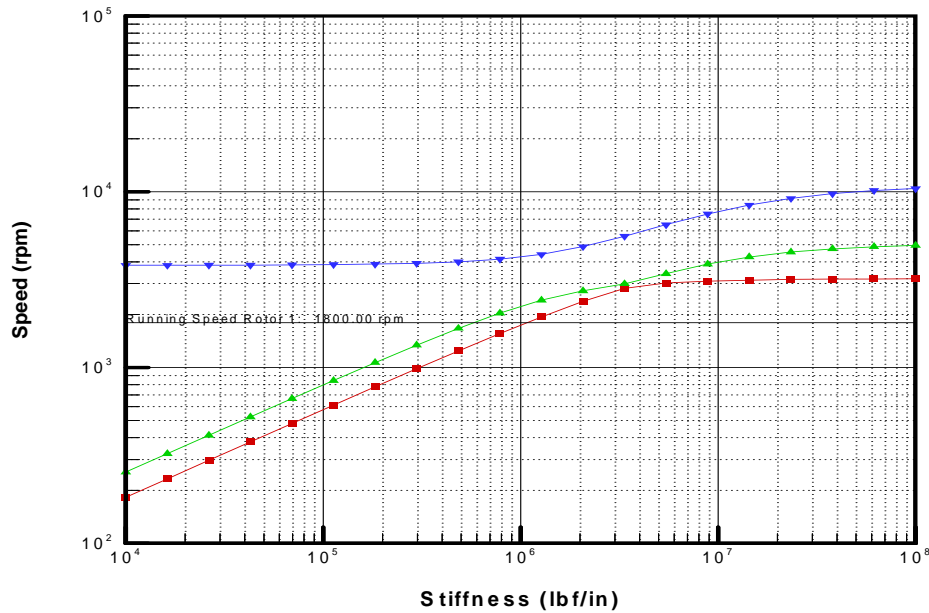


FIG A.12 MAPA DAS CRÍTICAS

A.2.2 Análise dos Mancais Hidrodinâmicos

A.2.2.1 Análise dos Mancais Antigos

O conjunto rotor/mancais é um sistema integrado conforme discutido em ATAYDE, J.P., WEBER, H.I. (2006).

Os coeficientes dinâmicos dos mancais precisam ser conhecidos para possibilitar a introdução das molas e dos amortecimentos na análise rotodinâmica, entretanto este assunto está fora do escopo desta tese. Os mancais interno e externo deste motor são idênticos, tendo geometria fixa, todavia as suas cargas são diferentes pelo fato do rotor ser assimétrico.

O eixo a 1800 rpm. A geometria do mancal está mostrada na figura A.13 e seus dados geométricos estão mostrados na tabela A.6.

Como os mancais são do tipo com lubrificação por anel, a falta de óleo “starvation” é inevitável e o fluxo de óleo não pode ser identificado. Diversas simulações realizadas permitiram concluir os resultados apresentados nas figuras figura A.14 a figura A.16, que mostram os coeficientes dinâmicos em função da vazão de óleo, da velocidade do eixo e da folga dos mancais.

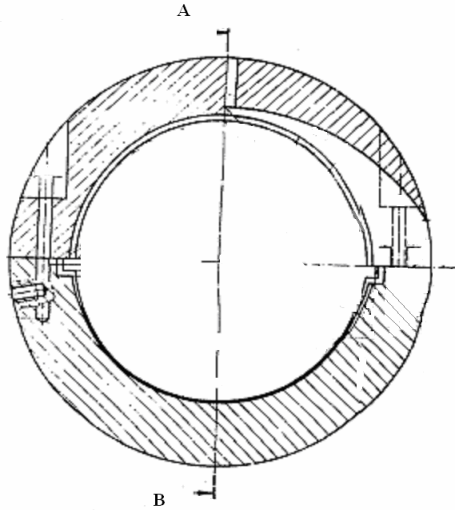


FIG A.13 ESQUEMA DO MANCAL LUBRIFICADO
POR ANEL - ARCO PARCIAL

Para as três folgas diferentes a redução da vazão prejudica mais a rigidez e o amortecimento verticais K_{yy} e C_{yy} . Ambos K_{yy} e C_{yy} crescem quando o mancal se torna mais e mais faminto de óleo. O fato de a rigidez crescer mais rápido que o amortecimento nos permite dizer que o mancal é menos efetivo quando a falta de óleo se agrava, e isto ocorre nos dois mancais.

As tabelas A.7 a A.16 listam os principais coeficientes dinâmicos como função da rotação e do fluxo de óleo. As tabelas A.7 a A.12 mostram o grau de “starvation” em função da relação fluxo real /fluxo mínimo de afogamento.

Os coeficientes dinâmicos cruzados também foram calculados da mesma forma, embora não tenham sido mostrados.

TAB A.6 GEOMETRIA DOS MANCAL (IDÊNTICOS)

	mm	in
Diametro do mancal	280	11
Folga Diametral	0.42-0.56	0.0166-0.022
Comprimento Axial	195	7.68
Angulo da Sapata	130°	
Preload	0.0	
Espessura da Sapate	65	2.5

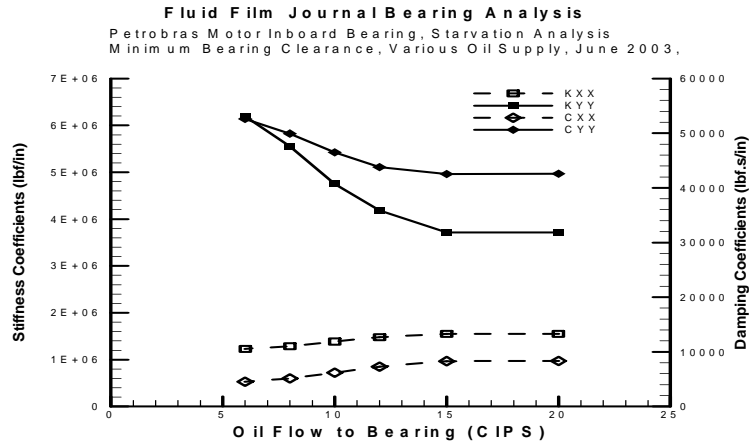


FIG A.14 FOLGA MÍNIMA: (Coef. Principais, 1800 rpm LOA)

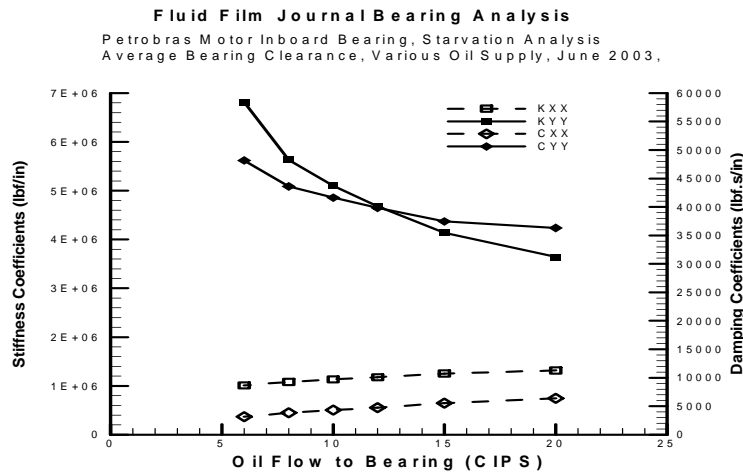


FIG A.15 FOLGA MÉDIA: (Coef. Principais, 1800 rpm, LOA)

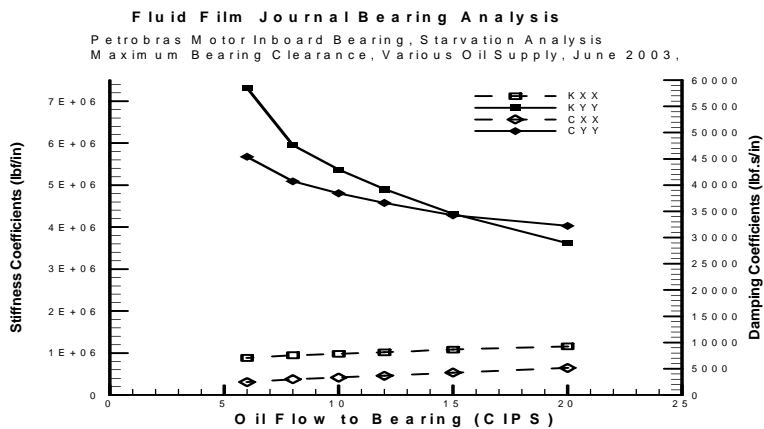


FIG A.16: FOLGA MÁXIMA (Coef. Principais, 1800 rpm, LOA)

TAB A.7 NIVEL DE BAIXA ALIMENTAÇÃO LA: Nível de ausência de óleo para várias rotações e vazões, mancal interno.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	8.95	100%	100%	100%	100%	89%	67%
1400 (rpm)	12.66	100%	100%	95%	79%	63%	47%
<u>1800 (rpm)</u>	<u>16.29</u>	<u>100%</u>	<u>92%</u>	<u>74%</u>	<u>61%</u>	<u>49%</u>	<u>37%</u>
2200 (rpm)	19.84	100%	76%	60%	50%	40%	30%
2800 (rpm)	24.88	80%	60%	48%	40%	32%	24%
3600 (rpm)	32.04	62%	47%	37%	31%	25%*	19%*
4200 (rpm)	36.91	54%	41%	33%*	27%*	22%*	16%*

* Não calculada por ser faminto

K_{xx}:

TAB A.8 LA COEFICIENTE K_{xx}: Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal interno.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.27	1.18
1400 (rpm)	1.31	1.31	1.31	1.30	1.23	1.15	1.10
<u>1800 (rpm)</u>	<u>1.32</u>	<u>1.32</u>	<u>1.26</u>	<u>1.18</u>	<u>1.16</u>	<u>1.07</u>	<u>1.02</u>
2200 (rpm)	1.31	1.31	1.21	1.13	1.06	1.02	0.96
2800 (rpm)	1.33	1.23	1.13	1.04	1.01	0.96	0.90
3600 (rpm)	1.33	1.10	1.04	0.99	0.95		
4200 (rpm)	1.29	1.05	0.99				

K_{yy}:

TAB A.9 COEFICIENTE K_{yy}: Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal interno.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q= 6
1000 (rpm)	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	5.31	5.99
1400 (rpm)	4.09	4.09	4.09	4.47	4.85	5.47	6.12
<u>1800</u> <u>(rpm)</u>	<u>3.70</u>	<u>3.70</u>	<u>4.21</u>	<u>4.73</u>	<u>5.00</u>	<u>5.87</u>	<u>6.81</u>
2200 (rpm)	3.38	3.38	4.14	4.78	5.49	6.18	7.41
2800 (rpm)	3.04	3.64	4.35	5.16	5.64	6.54	8.22
3600 (rpm)	2.72	4.07	4.81	5.57	6.21		
4200 (rpm)	2.62	4.40	5.36				

C_{xx}:

TAB A.10 LA COEFICIENTE C_{xx}: Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal interno .

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	9.61	9.61	9.61	9.61	9.61	8.71	7.33
1400 (rpm)	7.55	7.55	7.55	7.05	6.28	5.39	4.76
<u>1800</u> <u>(rpm)</u>	<u>6.30</u>	<u>6.30</u>	<u>5.48</u>	<u>4.74</u>	<u>4.47</u>	<u>3.70</u>	<u>3.19</u>
2200 (rpm)	5.40	5.40	4.37	3.64	3.13	2.74	2.32
2800 (rpm)	4.70	3.82	3.09	2.55	2.33	1.99	1.60
3600 (rpm)	4.12	2.47	2.07	1.77	1.58		
4200 (rpm)	3.50	1.92	1.56				

C_{yy} :

TAB A.11 LA COEFICIENTE C_{yy} : Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal interno.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	68.82	68.82	68.82	68.82	68.82	72.09	76.75
1400 (rpm)	47.71	47.71	47.71	48.91	50.87	54.17	57.77
<u>1800 (rpm)</u>	<u>36.53</u>	<u>36.53</u>	<u>38.00</u>	<u>40.44</u>	<u>41.66</u>	<u>45.02</u>	<u>48.88</u>
2200 (rpm)	29.55	29.55	31.91	34.04	36.36	38.43	42.30
2800 (rpm)	23.43	24.62	26.54	28.20	29.34	31.29	34.80
3600 (rpm)	18.01	20.15	21.50	22.77	23.75		
4200 (rpm)	15.27	17.97	19.30				

TAB A.12 NIVEL DE BAIXA ALIMENTAÇÃO LOA: Nível de ausência de óleo para várias rotações e vazões, mancal externo.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	8.88	100%	100%	100%	100%	90%	68%
1400 (rpm)	12.65	100%	100%	95%	79%	63%	47%
<u>1800 (rpm)</u>	<u>16.39</u>	<u>100%</u>	<u>92%</u>	<u>73%</u>	<u>61%</u>	<u>49%</u>	<u>37%</u>
2200 (rpm)	20.07	100%	75%	60%	50%	40%	30%
2800 (rpm)	25.39	79%	59%	47%	39%	32%	24%
3600 (rpm)	33.14	60%	45%	36%	30%	24%*	18%*
4200 (rpm)	38.36	52%	39%	31%*	26%*	21%*	16%*

* Não calculada por ser faminto

K_{xx}:

TAB A.13 LOA COEFICIENTE K_{xx}: Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal externo.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	1 Q=0	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.52	1.42
1400 (rpm)	1.56	1.56	1.56	1.53	1.47	1.38	1.32
<u>1800 (rpm)</u>	<u>1.56</u>	<u>1.56</u>	<u>1.50</u>	<u>1.40</u>	<u>1.37</u>	<u>1.28</u>	<u>1.20</u>
2200 (rpm)	1.56	1.56	1.44	1.35	1.27	1.22	1.15
2800 (rpm)	1.56	1.44	1.33	1.24	1.20	1.15	1.08
3600 (rpm)	1.56	1.31	1.23	1.18	1.14		
4200 (rpm)	1.56	1.24	1.17				

K_{yy}:

TAB A.14 LOA COEFICIENTE K_{yy}: Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal externo.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	6.27	6.27	6.27	6.27	6.27	7.06	7.90
1400 (rpm)	5.37	5.37	5.37	5.97	6.45	7.25	8.09
<u>1800 (rpm)</u>	<u>4.81</u>	<u>4.81</u>	<u>5.60</u>	<u>6.31</u>	<u>6.66</u>	<u>7.78</u>	<u>9.02</u>
2200 (rpm)	4.41	4.41	5.49	6.33	7.26	8.15	9.73
2800 (rpm)	3.96	4.83	5.73	6.79	7.41	8.56	10.70
3600 (rpm)	3.51	5.35	6.32	7.30	8.12		
4200 (rpm)	3.32	5.79	7.03				

C_{xx} :

TAB A.15 LOA COEFICIENTE C_{xx} : Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal exrno.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	10.68	10.68	10.68	10.68	10.68	9.63	8.37
1400 (rpm)	8.32	8.32	8.32	7.66	6.99	6.06	5.38
<u>1800 (rpm)</u>	<u>6.93</u>	<u>6.93</u>	<u>6.06</u>	<u>5.12</u>	<u>4.88</u>	<u>4.11</u>	<u>3.50</u>
2200 (rpm)	5.98	5.98	4.81	4.10	3.50	3.13	2.63
2800 (rpm)	5.16	4.11	3.39	2.81	2.59	2.26	1.79
3600 (rpm)	4.52	2.75	2.30	1.99	1.79		
4200 (rpm)	4.06	2.10	1.74				

C_{yy} :

TAB A.16 LOA COEFICIENTE C_{yy} : Para diversas rotações do eixo e vazão no mancal exrno.

	Afogado	Q=20	Q=15	Q=12	Q=10	Q=8	Q=6
1000 (rpm)	82.96	82.96	82.96	82.96	82.96	87.18	93.46
1400 (rpm)	57.04	57.04	57.04	58.69	61.43	65.44	69.76
<u>1800 (rpm)</u>	<u>43.37</u>	<u>43.37</u>	<u>45.63</u>	<u>48.34</u>	<u>49.70</u>	<u>53.85</u>	<u>58.08</u>
2200 (rpm)	34.99	34.99	38.05	40.83	43.46	46.23	50.61
2800 (rpm)	27.45	28.91	31.21	33.31	34.73	37.30	41.31
3600 (rpm)	20.87	23.69	25.34	26.92	28.16		
4200 (rpm)	17.84	20.97	22.73				

A.2.2.2 Análise dos Mancais Novos

Para resolver o problema de vibração do novo mancal, necessitamos de mais amortecimento, para reduzir sua resposta dinâmica.

A filosofia de projeto será manter a rigidez próxima da atual e aumentar o amortecimento ao máximo. Para tanto, precisamos garantir uma alimentação de óleo satisfatória para os novos mancais, bem como aumentar o comprimento do mancal.

Dois novos mancais foram propostos: “soft short” de mesmo comprimento e o “soft long”, com 50 mm a mais no comprimento. O fabricante do motor propôs dois outros mancais que são referidos como “Zollern Sleeve” e “Zollern Elliptical”. Estes mancais e seus desenhos estão sumarizados nas tabelas A.17 e A.18.

TAB A.17 PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DOS MANCAIS VELHO/NOVOS

	Existente	Soft Short	Soft Long	Zollern Sleeve	Zollern Elliptical
Diametro	11	11	11	11	11
Comprimento	7.68	7.68	9.64	6.9	6.9
Folga Diametral	0.019	0.02	0.02	0.015	0.012
Arco da Dapata	130	150	150	161	161
Precarga	0	0	0	0	0.66

TAB A.18 PARÂMETROS OPERACIONAIS DOS MANCAIS VELHO/NOVOS

	Existing*	Soft Short	Soft Long	Zollern Sleeve	Zollern Elliptical
K_{xx}	1.18	1.39	1.38	2.10	0.75
K_{yy}	4.68	3.21	2.31	3.42	5.17
C_{xx}	4.77	7.14	8.92	13.82	5.24
C_{yy}	39.83	33.14	34.92	44.26	29.37
h		0.0037	0.0049	0.0036	0.0033
T		155	150	164	157

Embora a tabela A.18 liste apenas os coeficientes dinâmicos principais, os coeficientes cruzados também foram calculados e serão usados na análise dinâmica.

A.3 Redução Dinâmica da Estrutura: (Coeficientes dos Mancais)

Sabe-se ser muito grande o tamanho da matriz integrada rotor/mancais/ estrutura, para permitir a solução com os recursos computacionais disponíveis

As técnicas de redução de matriz podem ser agrupadas em três categorias: estática, modal e dinâmica ou exata.

Os dois primeiros grupos de técnicas de redução levam a soluções aproximadas que satisfazem a maioria dos casos, enquanto que o terceiro grupo conserva o exato comportamento dinâmico do sistema. A tecnologia de hardware necessária para permitir a solução destes complexos problemas somente tornou-se disponível nos últimos cinco anos. Desde então, novas tentativas têm sido realizadas.

Este Relatório introduz uma nova maneira de tratar esta questão, com uma tecnologia capaz de representar, integralmente, a estrutura de suporte, os mancais e a rotodinâmica, fornecendo a resposta dinâmica exata, tanto do rotor, como da estrutura, viabilizando o protótipo virtual.

A.3.1 Redução da Matriz Original para 155 Máster GL's Principais

Inicialmente, precisamos construir um modelo de elementos finitos capaz de representar a estrutura existente no campo, identificando as frequências naturais e os modos naturais de vibração da estrutura conforme avaliação de campo, em uma faixa de frequência capaz de cobrir os harmônicos de interesse de nosso estudo.

Esta é uma tarefa possível de ser executada por um bom especialista em modelação por elementos finitos, tendo gerado, em nosso caso, uma matriz de 82. 872 graus de liberdade, conforme mostrado na Seção A.1.2.1. O programa ANSYS é muito útil nesta tarefa, todavia, um modelo deste tamanho é inaceitável.

Numa segunda etapa, esta matriz deverá ser reduzida cerca de 1000 vezes, sendo esta uma tarefa realmente desafiadora para um especialista muito bom em modelação por elementos finitos.

O programa ANSYS permite a utilização de uma redução do tamanho da matriz original, a partir de graus de liberdade eleitos como principais (“máster”), os quais são considerados capazes de capturar a dinâmica de interesse do problema. Em nosso caso particular, são considerados mais importantes aqueles movimentos associados à

dinâmica dos mancais do motor. Os outros graus de liberdade “slaves” ficam subordinados aos principais.

Os melhores resultados são obtidos pela escolha manual da maioria dos GL's principais, elegendo-se a maioria nas colunas e vigas mais afetadas pelos modos de vibração de nosso interesse, realizando desta forma a chamada Síntese Modal dos Componentes da Estrutura (SCM).

Foi escolhido um conjunto com 155 GL's principais, de tal forma que o modelo reduzido e o original tenham as mesmas frequências naturais e modos normais de vibração, até 75 Hz, conforme mostrado na tabela A.4.a

TAB A.4.a FREQUÊNCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA DE SUPORTE

Mode	Medido	Model Completo	Modelo Reduzido
1	9.9	10.4	10.75
2	12.7	19.7	17.57
3	24.6	21.8	21.9
4	27.7	31.9	32.33
5	34.5	Missing	Missing
6	38.3	39.1	39.53
7	49.5	50.0	47.14
8	54.5	51.7	52.18
9	57.8	57.3	58.93
10	62.2	60.3	61.66
11	66.7	66.6	61.74
12	71.3	71.6	72.5

A.3.2 Redução da Matriz de 155 GL's para 14 GL's

As FRF's do ANSYS são imprecisas em seu conteúdo de amplitude e fase, sendo que esta imprecisão impede a utilização destes valores nos cálculos de correção dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais.

O grau de precisão de amplitude e fase da FRF do modelo, pode ser substancialmente melhorado com o emprego de técnicas utilizadas em teoria de controle (entre elas a Redução Balanceada de Modelos), as quais racionalizam a

solução do problema de autovalor, viabilizando a redução do número de graus de liberdade do modelo de forma objetiva e focada na resposta dinâmica desejada, conforme apresentado a seguir .

Seja a equação vetorial do movimento vibratório mostrada abaixo, onde F é uma excitação senoidal direcionada.

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F\} \quad (\text{A.1})$$

Considerando-se que a matriz de amortecimento tem amortecimento proporcional, tem-se:

$$[C]\{\dot{q}(t)\} \rightarrow (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{q}(t)\}; \quad \alpha \approx \beta \approx 10\% \quad (\text{A.2})$$

Escrevendo-se a equação (A.1) na forma de equação de estado, associada ao problema, vem:

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) + Bu(t) ; \quad \{\eta\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\dot{\eta}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{A.4) } \dot{\eta}(t) = A\eta(t) \quad (\text{equação homogênea}) \quad (\text{A.4})$$

A redução balanceada deste modelo será feita com a ajuda da técnica “Hankel Singular Value”, sendo o truncamento da matriz $[A]$ orientado pela mesma.

O grupo de automação do ROMAC é responsável pelo desenvolvimento do controle de mancais magnéticos. Esta junção das duas disciplinas (Rotodinâmica X Controle) permitiu um grande avanço nas técnicas de redução de matrizes e solução dos problemas de autovalor.

MORE, B.C., (1981) discutiu a técnica Redução Balanceada de Modelos e GLOVER, K. (1984) discutiu a técnica Hankel Norm Approximation. Estas são duas das técnicas mais efetivas nesta área. Embora os objetivos da redução de modelos não sejam exatamente os mesmos nas disciplinas Controle e Rotodinâmica, eles têm bases comuns.

A.3.2.1 Problema de Autovalor: Solução Usando Hankel Singular Value

Uma solução precisa para o problema de autovalor, pode ser atingida reescrevendo-se a equação do movimento nas bases da teoria de controle “input/output”, como segue:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\} \rightarrow \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{\eta}(t) = A \eta(t) \rightarrow \text{“Laço Aberto”} \quad (\text{A.6})$$

Esta transformação nos deixa diante de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com $2n$ variáveis (sistema anterior $n \times n$), nos moldes de um sistema de equações convencionais de controle, em “laço” aberto (solução da homogênea) ou em “laço” fechado, semelhante a um sistema de controle com “feedback” (solução particular)

Pode-se resolver o sistema de I/O para suas variáveis de saída, através da aplicação da transformada de Laplace e a resolução do sistema algébrico resultante, através da pesquisa dos valores singulares - autovalores.

As saídas do sistema são velocidades e deslocamentos nodais do sistema global não reduzido, podendo ser escritas na forma de variáveis de estado.

Re-escrevendo-se o sistema de I/O em sua forma de equações de estado, vem:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A \eta(t) + B u(t) \\ Y = C \eta(t) \end{cases} ; A = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$Y = C \cdot \eta(x)$ \rightarrow Saídas que prioriza a posição particular do I/O, em detrimento de outras posições.

$[C]$ \rightarrow Matriz que enfatiza o deslocamento vertical na posição dos mancais $\eta(t) = \{\dot{q}, q\} \rightarrow$ variáveis de estado;

B \rightarrow Matriz de Carregamento;

u \rightarrow Vetor input;

Aplicando-se a Transformada de Laplace ao sinal de saída $Y = C\eta(x)$, vem:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \rightarrow \quad (A.8)$$

De acordo com GLOVER, K., 1984 sabe-se que:

Sendo $[P]$ e $[Q]$ matrizes que satisfazem as equações (A.9) e (A.10), pode-se dizer que a transformação “Hankel Singular Value” de $[G(s)]$, coincide com os seus valores singulares e será igual à raiz quadrada dos autovalores da matriz $[PQ]$, tal que:

$$AP + PA^T + B^T B = 0; \quad P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (\text{gramian de controlabilidade}) \quad (A.9)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0; \quad Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (\text{gramian de observabilidade}) \quad (A.10)$$

pode-se ainda dizer que:

$$\sigma_i(G(s)) = \{\lambda_i[PQ]\}^{1/2} \quad (A.11)$$

$$\sigma_i(G(s)) \geq \sigma_{i+1}(G(s)) \quad (A.12)$$

Aplicando-se “Hankel Singular Value Transformation” a $G(s)$, pode-se calcular os autovalores de $G(s)$. O número de modos naturais e a importância de cada um deles no processo de truncamento podem ser definidos, sendo que o erro possui um limite superior, fornecido pela transformação:

$$\text{Hankel Singular value de } H(s) \rightarrow \sigma_i(H(s)) \cong \{\lambda_i(P.Q)\}^{1/2} \quad \text{e} \quad \sigma_i(H(s)) \geq \sigma_{i+1}(H(s))$$

O erro desta transformação é limitado pelo valor singular dos modos truncados, conforme mostrado a baixo:

$$E = \|G_0 - G_r\| \leq 2(\sigma_{15} + \sigma_{16} + \sigma_{17} \dots + \sigma_n) \quad (A.13)$$

Após processamento da transformação Hankel Singular Value Decomposition o sistema foi truncado.

Foram levados em consideração os 42 primeiros modos de vibração mais importantes, tendo sido aproveitados somente os 14 primeiros modos Naturais.

A FRF pode agora ser construída com os 14 modos que mais contribuem para a formação da vibração da caixa de mancais.

A.3.2.2 Construção das FRF'S dos Mancais para 14 GL's (GDL)

Neste ponto já conhecemos os quatorze primeiros autovalores e autovetores e estamos em condições de construir a função de transferência dos mancais.

Utilizando-se os recursos do MAT-LAB a FRF pode ser construída para quatro diferentes condições de excitação, considerando-se 10% da taxa de amortecimento.

A figura A.17 mostra a FRF nas direções vertical, horizontal e axial do mancal (LA) para força senoidal, de 1Newton aplicada no mesmo local e na direção vertical.

A comparação entre as FRF's das figuras A.17 e A.6, mostra a diferença entre a FRF do ANSYS (155 GL's) e a FRF do modelo reduzido (14 GL's).

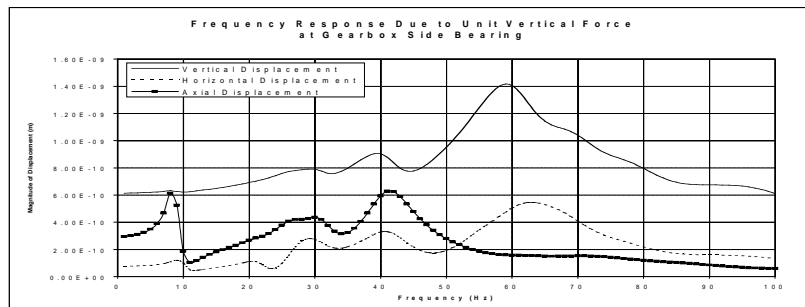


FIG. A.17 FRF DO MANCAL LA EXCITAÇÃO VERTICAL (14 GL'')

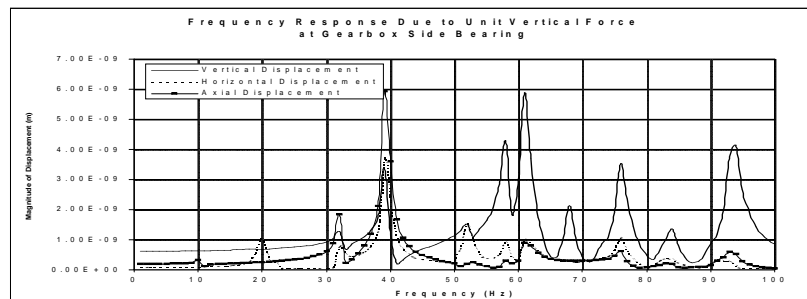


FIG. A.6 FRF DO MANCAL LA DIREÇÃO VERTICAL (155 GL'')

A expressão matemática da função de transferência, GL's é dada por $G(s)$:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (A.14)$$

Nos dois casos foi aplicada a mesma excitação senoidal, no mesmo local, com magnitude de 1Newton na direção vertical.

De forma análoga, as figuras de A.18 a A.20, mostram as FRFs vertical, horizontal e axial devidas à excitação de força senoidal, de 1 Newton nas direções horizontal e vertical, aplicadas no mesmo local, para o modelo com (14 GL's).

Depois da Redução Modal Balanceada (truncamento) do modelo, as FRFs dos mancais do motor tornam-se conhecidas e podem ser usadas na Seção A.4.1 para modificação dos coeficientes de rigidez e amortecimento destes mancais.

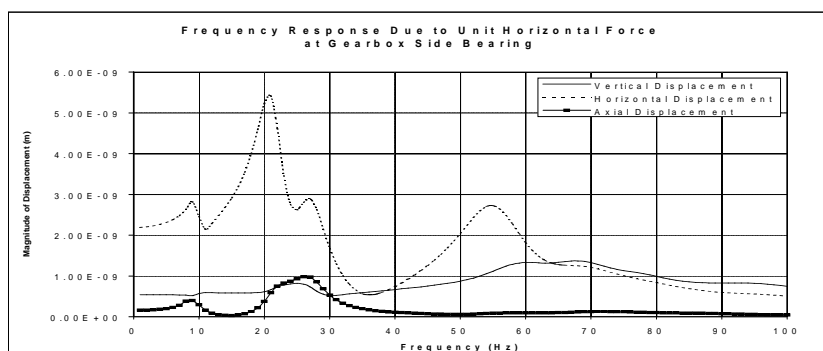


FIG A.18 FRF DO MANCAL LA EXCITAÇÃO HORIZONTAL(14 GL'')

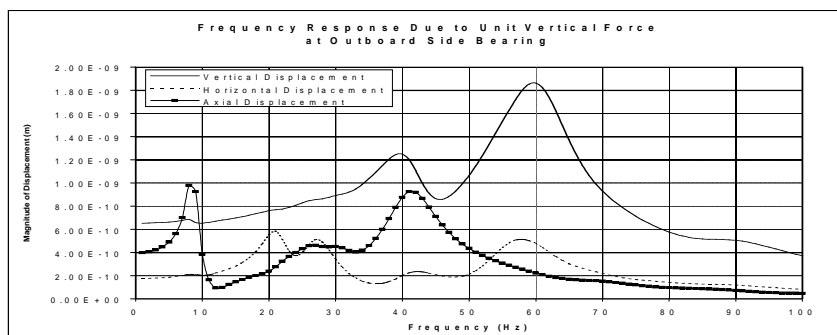


FIG A.19 FRF DO MANCAL LOA EXCITAÇÃO VERTICAL(14 GL'')

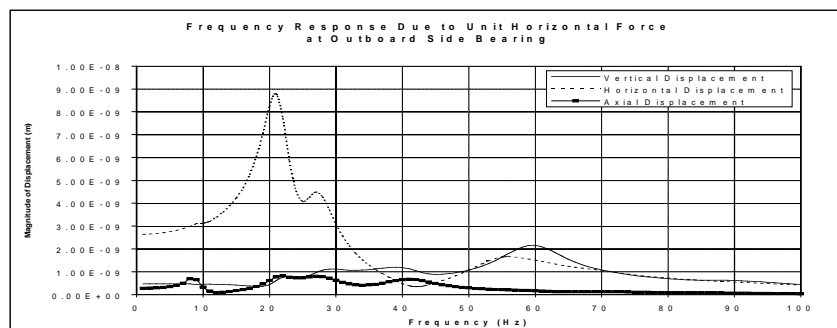


FIG A.20 FRF DO MANCAL LOA EXCITAÇÃO HORIZONTAL (14 GL'')

A.4 Análise das Diversas Propostas de Modificação da Estrutura e dos Mancais

Depois do truncamento do modelo e da construção das FRF's das caixas de mancais do motor, pode-se discutir a alteração dos coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais a partir da colocação desta máquina em uma estrutura de suporte que permita o movimento dos mancais em operação (não inercial).

Na literatura encontram-se muitas referências qualitativas a este respeito. O API-617 exige que a rigidez do suporte seja, pelo menos, 3,5 vezes maior que a rigidez dos mancais para evitar alterações nas frequências naturais (inerciais).

Sabe-se, também, que o amortecimento dos mancais é rapidamente deteriorado no caso de movimento das caixas de mancais. Alguns estudos revelam ser necessário que a rigidez do suporte seja pelo menos 10 vezes superior à rigidez do mancal para que não haja comprometimento do amortecimento.

VAZQUEZ, (2001), estudou este fenômeno e propôs um método exato para quantificação da redução dos coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais, levando-se em consideração a sua flexibilidade (FRF do movimento), Seção A.2.2

A.4.1 Modificação dos coeficientes dos Mancais K_{eq} e C_{eq}

A correção dos coeficientes de rigidez/amortecimento dos mancais consiste em:

1) Para cada frequência complexa, s , deve-se calcular os coeficientes da matriz das funções de transferência. Valores são obtidos a partir da FRF do mancal.

As funções de transferência, (nome dado à FRF complexa), são usadas na determinação das características de vibração, obtidas a partir de dados experimentais.

A função de transferência $[G(s)]$ também pode ser obtida através da FRF gerada analiticamente, desde que seja confiável, através do procedimento desenvolvido em VASQUEZ, (2001).

Sendo: $s = p + i\omega_d$ e $i\omega_d \neq 0$;

$$[G(s)] = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} \rightarrow \text{matriz das funções de transferência} \quad (\text{A.15})$$

2) Calcular a rigidez dinâmica equivalente do suporte.

O coeficiente dinâmico equivalente do suporte flexível na posição do mancal é:

$$[K_{seq}(s)] = [G(s)]^{-1} \quad (\text{A.16})$$

A inversão da matriz da função de transferência $[K_{seq}(s)] = [G(s)]^{-1}$ é realizada em um programa de computador, desenvolvido no ROMAC, que também calcula os coeficientes equivalentes da estrutura $K_{sxx}, K_{sxy}, K_{syx}, K_{syy}, C_{sxx}, C_{sxy}, C_{syx}, C_{syy}$.

3) Calcular os coeficientes dinâmicos equivalentes dos mancais.

O cálculo dos coeficientes equivalentes dos mancais é feito no mesmo programa, que também calcula os coeficientes $K_{xx}, K_{xy}, K_{yx}, K_{yy}, C_{xx}, C_{xy}, C_{yx}, C_{yy}$ dos mancais.

Calcula-se a rigidez equivalente dos mancais, conforme abaixo:

$$[Kb_{EQ}(s)] = s[C_b] + [K_b] - (s[C_b] + [K_b]) \{s[C_b] + [K_b] + [K_{seq}(s)]\}^{-1} (s[C_b] + [K_b]) \quad (\text{A.17})$$

Posteriormente, podem-se calcular os coeficientes corrigidos dos mancais.

A.4.2 Solução do Modelo: Frequências Naturais Amortecidas e Modos de Vibração Acoplados

Usando-se a análise modal truncada, o modelo foi reduzido de 155 graus de liberdade para 14 modos normais. Após a redução modal, foi gerada uma matriz para representar a função de transferência dos mancais.

Esta matriz foi, então, empregada na correção dos coeficientes gerados a partir dos programas de cálculo dos coeficientes dos mancais do ROMAC. Estes coeficientes dos mancais, corrigidos, são utilizados para o cálculo das frequências naturais amortecidas e na análise de resposta ao desbalanceamento.

TAB A.19 COMPARAÇÃO DAS CRÍTICAS DO ROTOR COM AS CRÍTICAS DA ESTRUTURA

Velocidade Crítica	Mínimo	Media	Maximo
Modos do Rotor (rpm)	1668	1612	1552
	1829	1972	1935
	3105	3109	3111
	3444	3517	3598
	5726	5721	5714
Modos da Fundação (rpm)	517.4	517.4	517.4
	1206		1203
	1284	1284	1283
	2068	2068	2067
	3329	3254	3226
	3579	3578	3577
	4672	4692	4702

Inicialmente, calcularam-se as frequências críticas do sistema acoplado.

As velocidades críticas do rotor e as frequências naturais da estrutura foram listadas na tabela A.19, para três folgas diferentes do mancal analisado.

Como pode ser visto, este rotor trabalha entre a primeira e a segunda críticas, nos três casos, e não existe margem de separação suficiente para atender ao API 617.

Para o caso de folga máxima, há uma crítica do rotor perto de 3600 rpm e, ainda pior, existe um modo de vibração da subestrutura perto deste valor.

Em qualquer destes casos o primeiro harmônico será amplificado.

Pode-se dizer que não é um bom projeto.

Os dois primeiros modos (para folga média) são translacionais e cônicos.

O modo de vibração 3D para a folga média é mostrado nas figuras A.21 e A.22.

A.4.3 Resposta de Varredura no Sistema Acoplado (Assíncrona)

Existem muitas formas diferentes de excitação vibratória em motores elétricos (elétricas e mecânicas).

A princípio, o motor acopla o sistema rotor mancais, ao campo elétrico.

Para obtenção de um modelo preciso, este acoplamento precisa ser investigado, entretanto, esta abordagem é muito complexa e não dispomos dos dados necessários para a mesma.

Alternativamente, as forças elétricas podem ser tratadas como uma perturbação rotodinâmica no sistema.

A resposta dinâmica assíncrona é um bom critério para diferentes opções de projeto, pois existem muitas forças de interação que são responsáveis pela potência elétrica transmitida ao rotor pelo estator e não são síncronas.

Neste caso particular, as forças, com frequência $1N$ e $2N$ são as mais importantes (uma e duas vezes a rpm do motor).

Excitações de $1N$ e $2N$ estão associadas a: excentricidade do rotor, empeno do rotor, empeno térmico, barras quebradas do rotor, barras soltas e outros ruídos elétricos. A simulação dos distúrbios elétricos será implementada através da análise assíncrona enquanto o rotor opera a 1800 rpm.

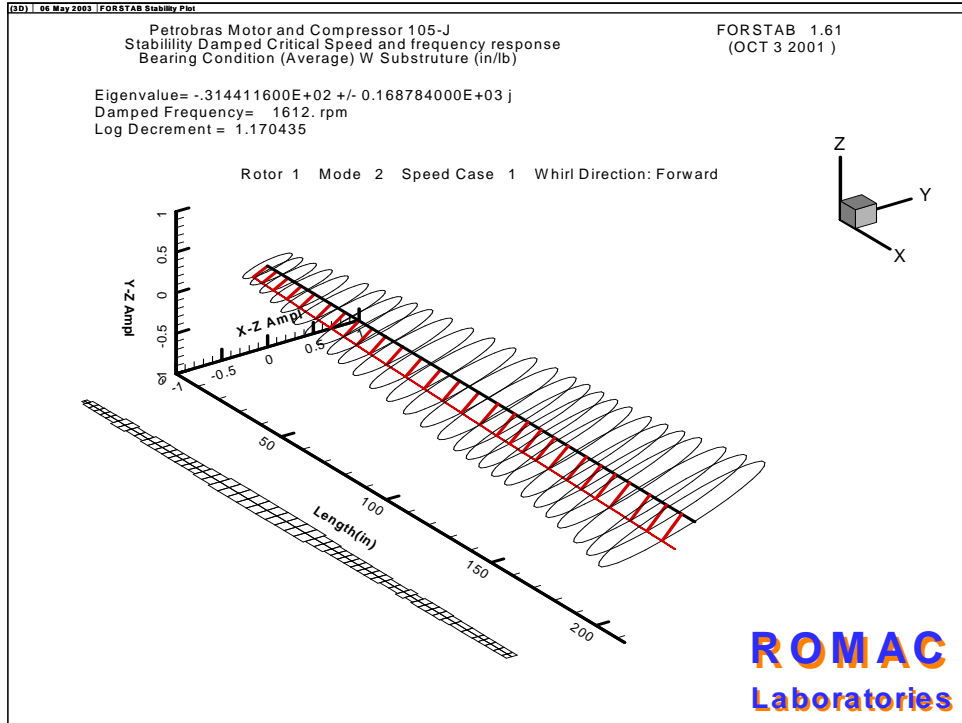


FIG A.21 PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO TRANSLACIONAL (1612 rpm)

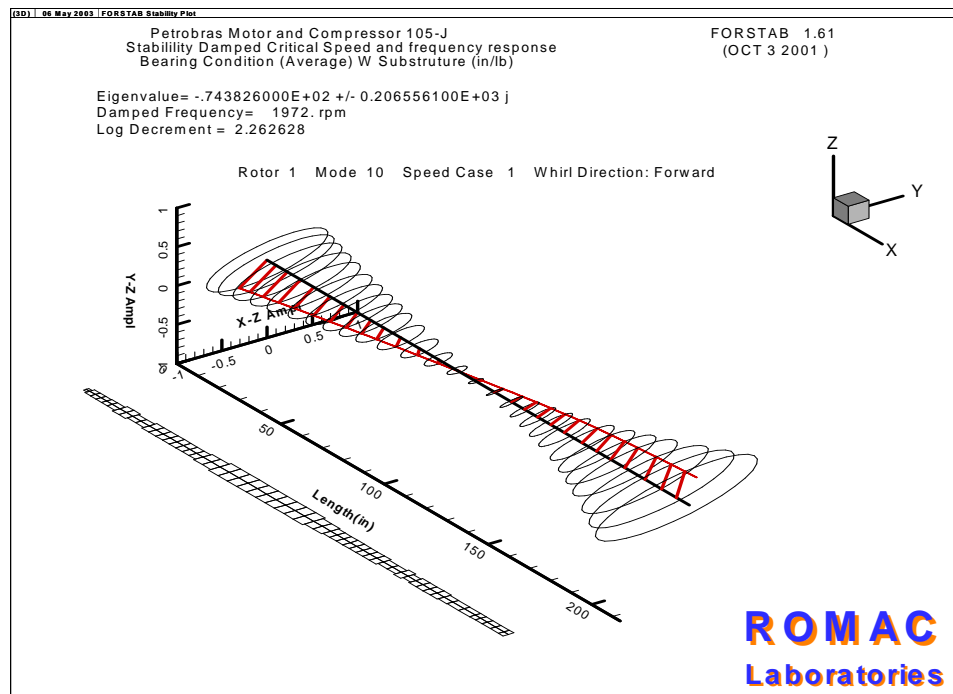


FIG A.22 SEGUNDO MODO DE Vibração CÔNICO (1972 rpm)

Foram analisados muitos casos diferentes de acordo com as folgas dos mancais e seus diferentes tipos.

A força desbalanceadora está colocada no rotor, em fase e fora de fase, para excitar diferentes modos. O valor das massas é o mesmo utilizado no API-617.

Os sensores foram colocados no acoplamento com a redutora, no mancal interno, no mancal externo e no final da excitatriz.

Existe um grande número de casos para análise. As figuras A.23 e A.24 mostram a análise assíncrona para um de vários destes casos de cálculo.

A resposta da excitação no mancal acoplado mostra que as frequências de 1800 e 3600 rpm podem ser excitadas.

A.4.4 Resposta ao Desbalanceamento, Sistema Acoplado (Síncrona)

A resposta ao desbalanceamento foi conduzida para três folgas diferentes de mancais e duas posições diferentes para os pesos de desbalanceamento.

Um dos pesos é colocado no centro do rotor para excitar o primeiro modo natural. No segundo carregamento, os pesos são colocados nos ventiladores de forma a excitar o segundo modo. Quatro sensores são posicionados, um em cada mancal, um no acoplamento e outro na excitatriz. Foram analisados 18 casos diferentes.

O peso de desbalanceamento utilizado foi o recomendado pelo API-617 Standard (duas vezes $4w/N$). Nesta seção, serão analisados somente os casos com folga média no mancal.

As figuras de A.25 à A.27 mostram a resposta dinâmica com o peso no centro. para três diferentes posições dos sensores.

As figuras de A.28 à A.30 mostram a resposta dinâmica com o peso nas pontas, para três diferentes posições dos sensores. O nível das vibrações mostra-se aceitável pelo padrão API.

O resultado das análises mostra que este rotor opera entre a primeira e a segunda críticas e que não há margem de separação suficiente da rotação de operação (1800 rpm). Embora a resposta ao desbalanceamento esteja dentro do recomendado pelo padrão API- 617, este rotor é sensível a excitações com 1N e 2N. Um novo mancal é, portanto, recomendado.

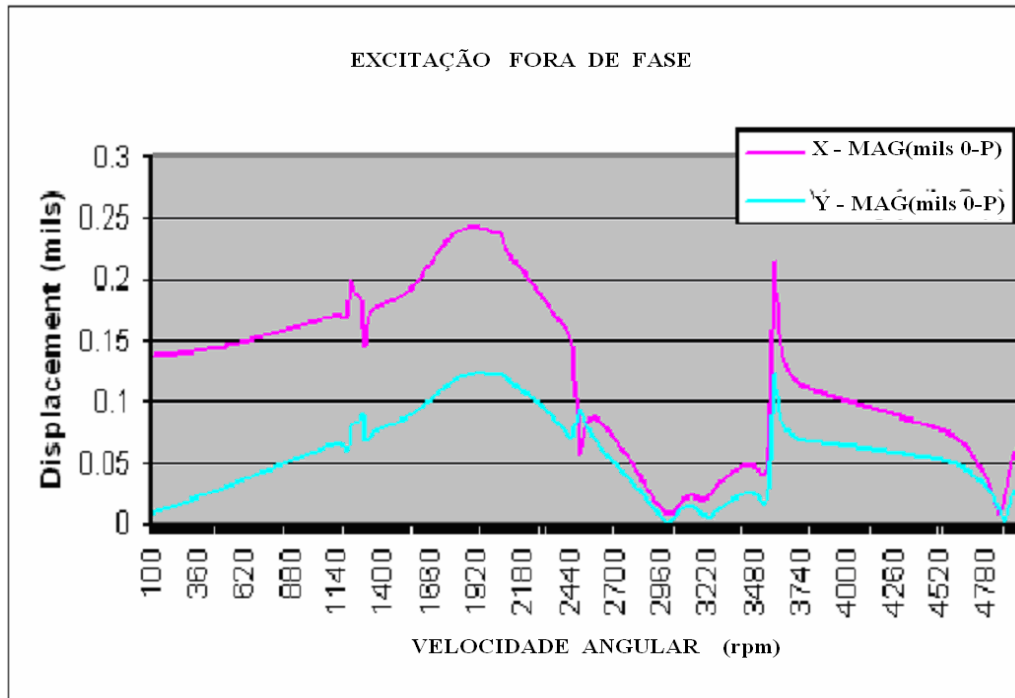


FIG A.23 MANCAL ACOPLADO EXCITAÇÃO DO SEGUNDO MODO

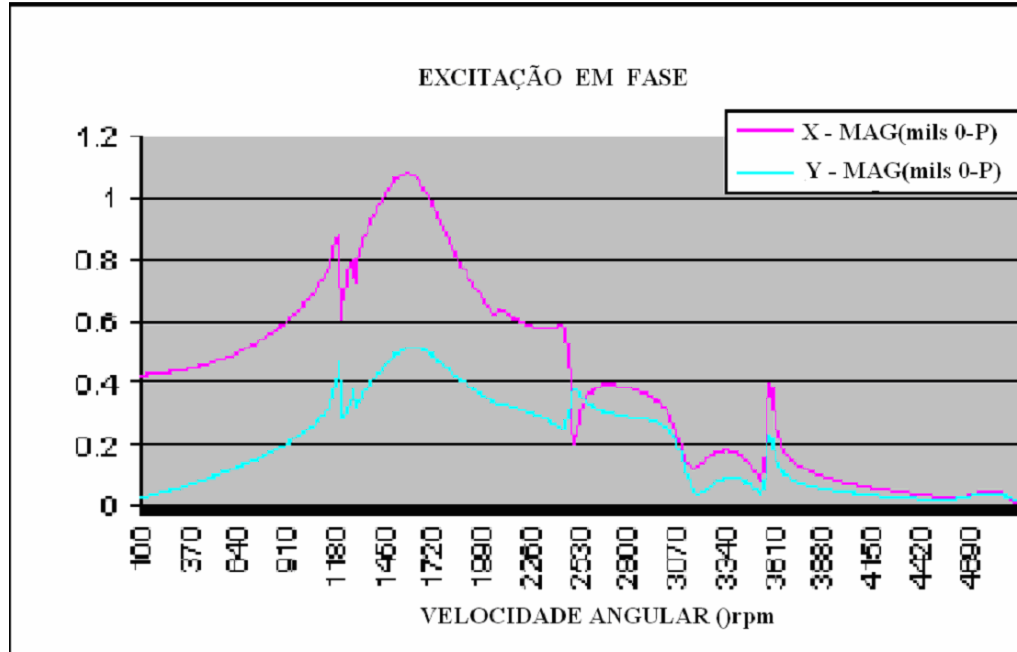


FIG A.24 MANCAL ACOPLADO EXCITAÇÃO DO PRIMEIRO MODO

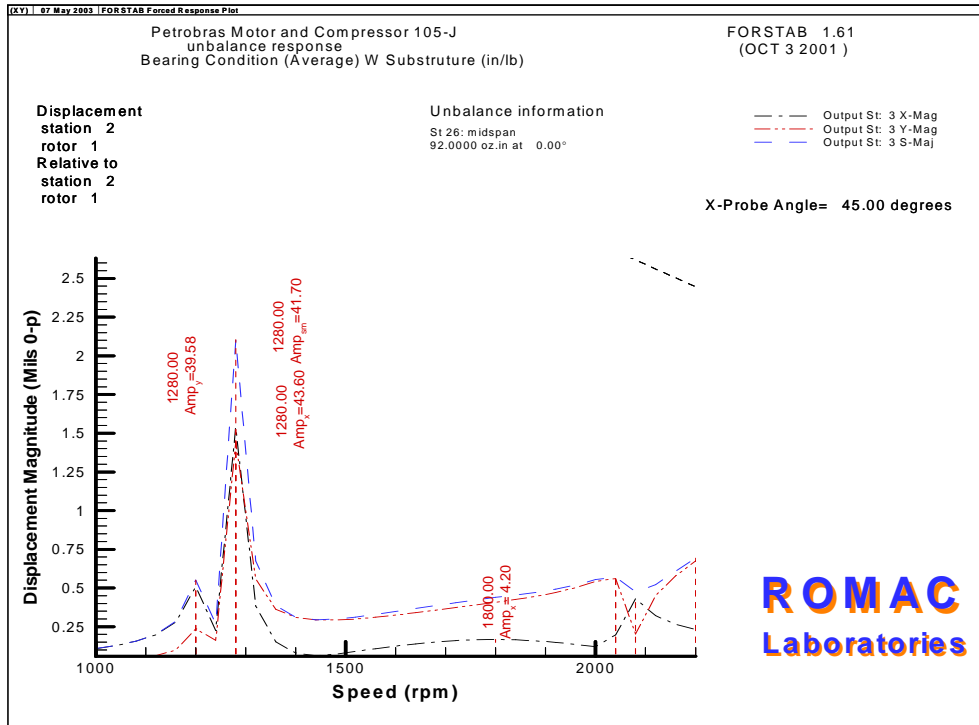


FIG A.25 BODÉ NO ACOPLAMENTO COM PESO NO CENTRO

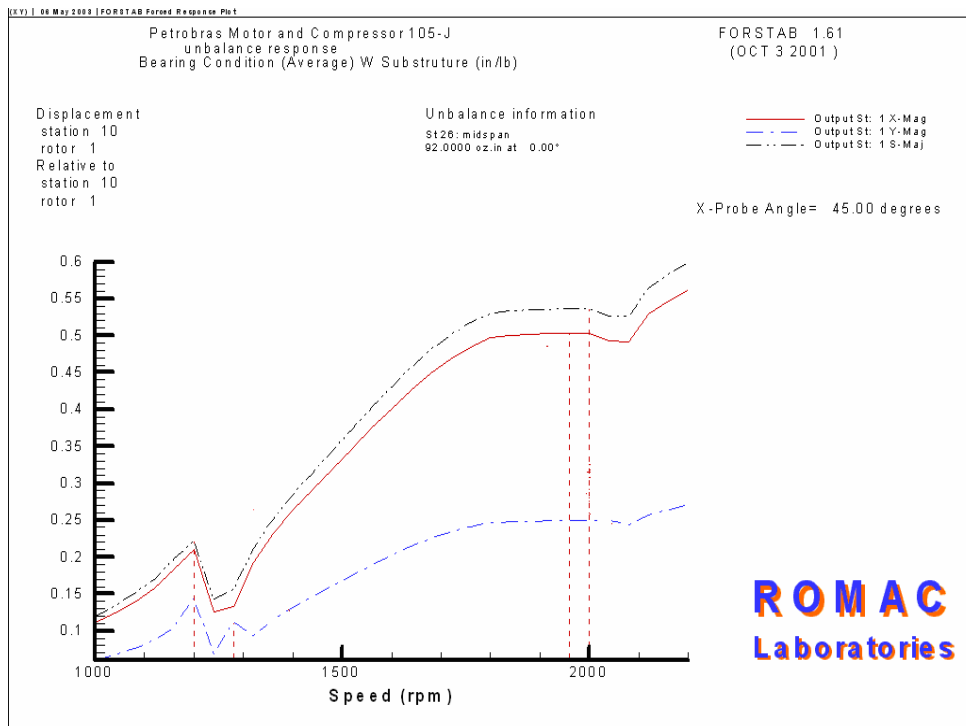


FIG A.26 BODE NO MANCAL LA COM PESO NO CENTRO

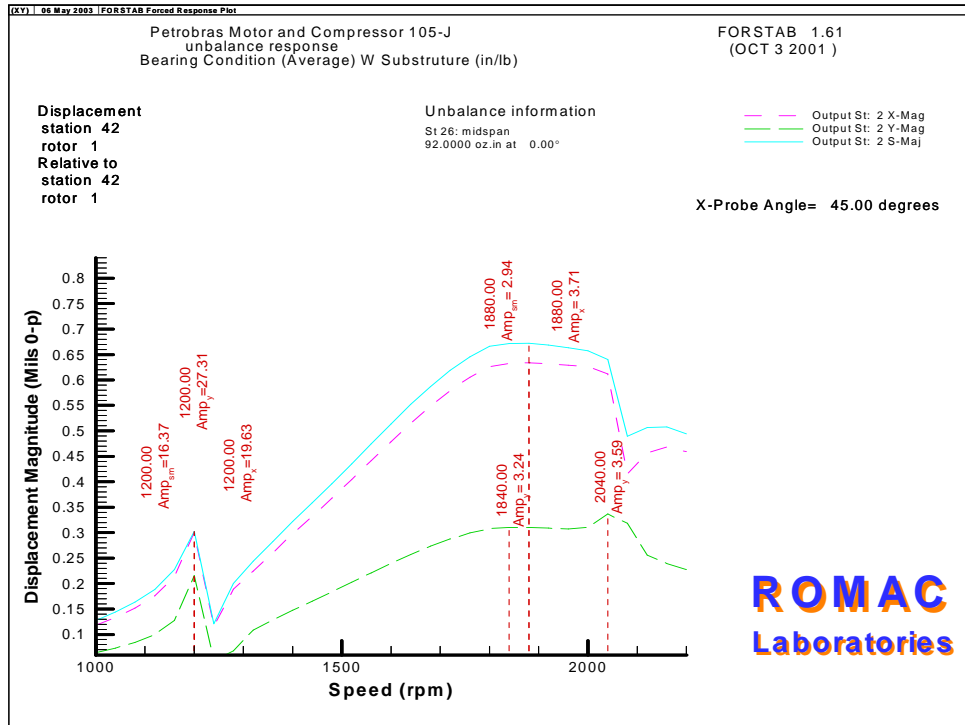


FIG A.27 BODE NO MANCAL LOA COM PESO NO CENTRO

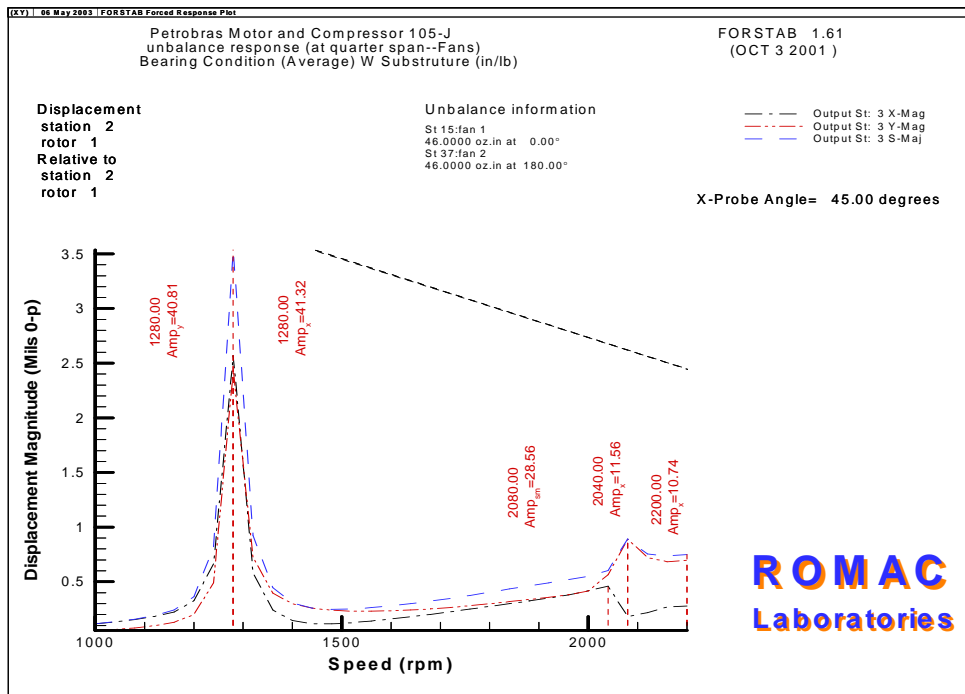


FIG A.28 BODE DO ACOPLAMENTO COM PESO NAS PONTAS

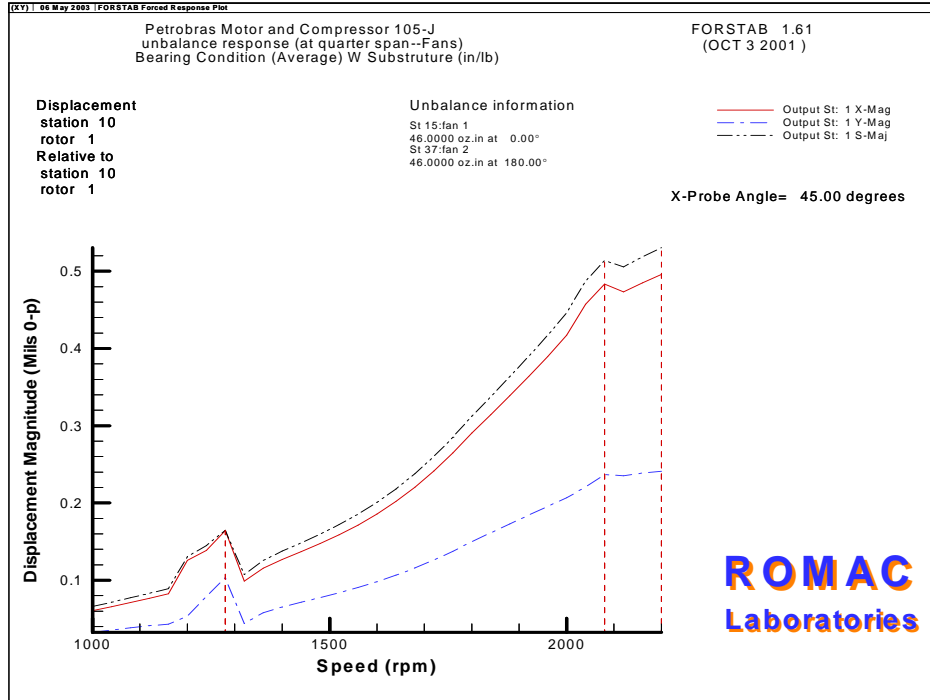


FIG A.29 BODE NO MANCAL LA COM PESO NAS PONTAS

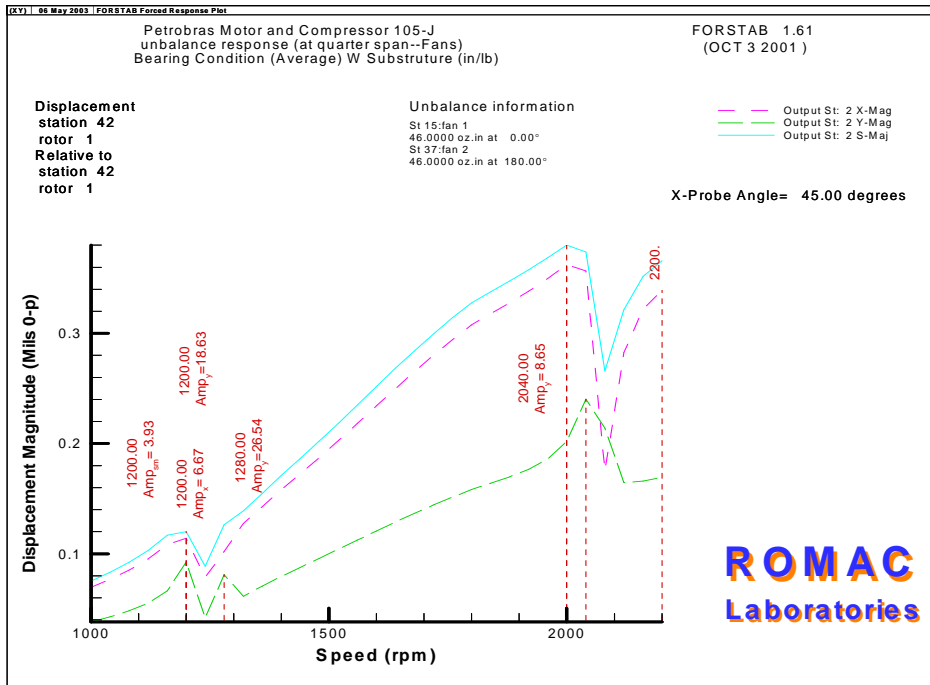


FIG A.30 BODE DO MANCAL LOA COM PESO NAS PONTAS

A.5 Solução de Compromisso:

A.5.1 Modificações da Estrutura (Filosofia)

A FRF da caixa de mancais revela que o principal movimento dos mancais ocorre em 60 Hz e na direção vertical. Isto explica a completa inoperância das soluções anteriores onde o contraventamento tinha como objetivo impedir a movimentação horizontal. Pode-se, também, observar uma frequência natural próxima a 30 Hz, entretanto, este modo é bem amortecido.

Diversas modificações de projeto foram testadas na estrutura, procurando-se sempre mudanças de maior simplicidade com a introdução de vigas metálicas. Estas modificações mostraram-se incapazes de alterar as ressonâncias próximas a 60 Hz. Os melhores resultados foram obtidos com a implantação de colunas verticais.

Algumas das diversas alternativas analisadas são apresentadas a seguir.

A.5.1.1 Primeira Proposta (Compromisso Resultado Simplicidade)

A proposta implementada recomendou a colocação de uma coluna de concreto vertical no centro da viga colocada abaixo do mancal acoplado do motor, como mostra a figura A.31.

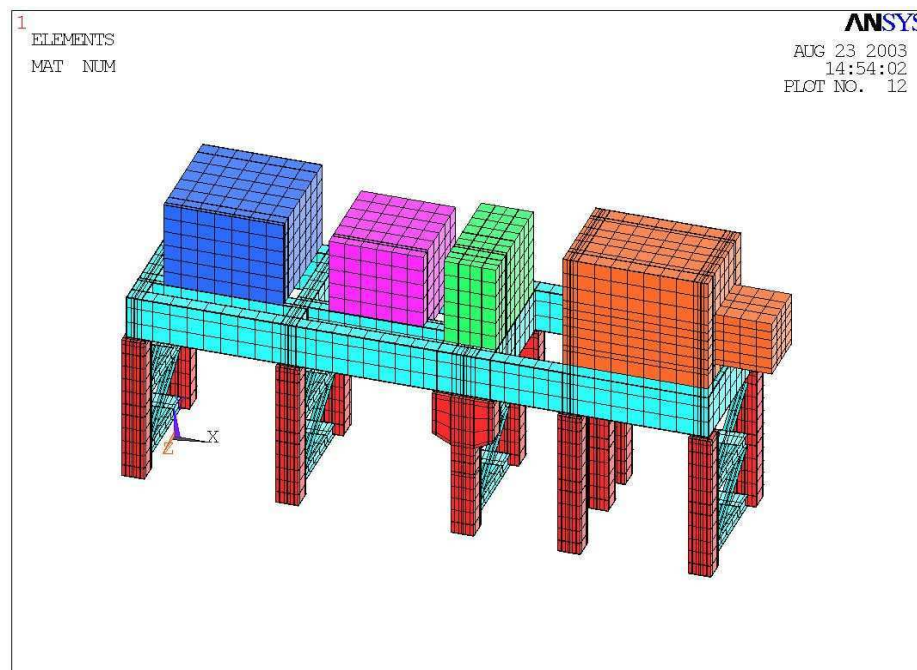


FIG A.31 MODIFICAÇÃO IMPLEMENTADA

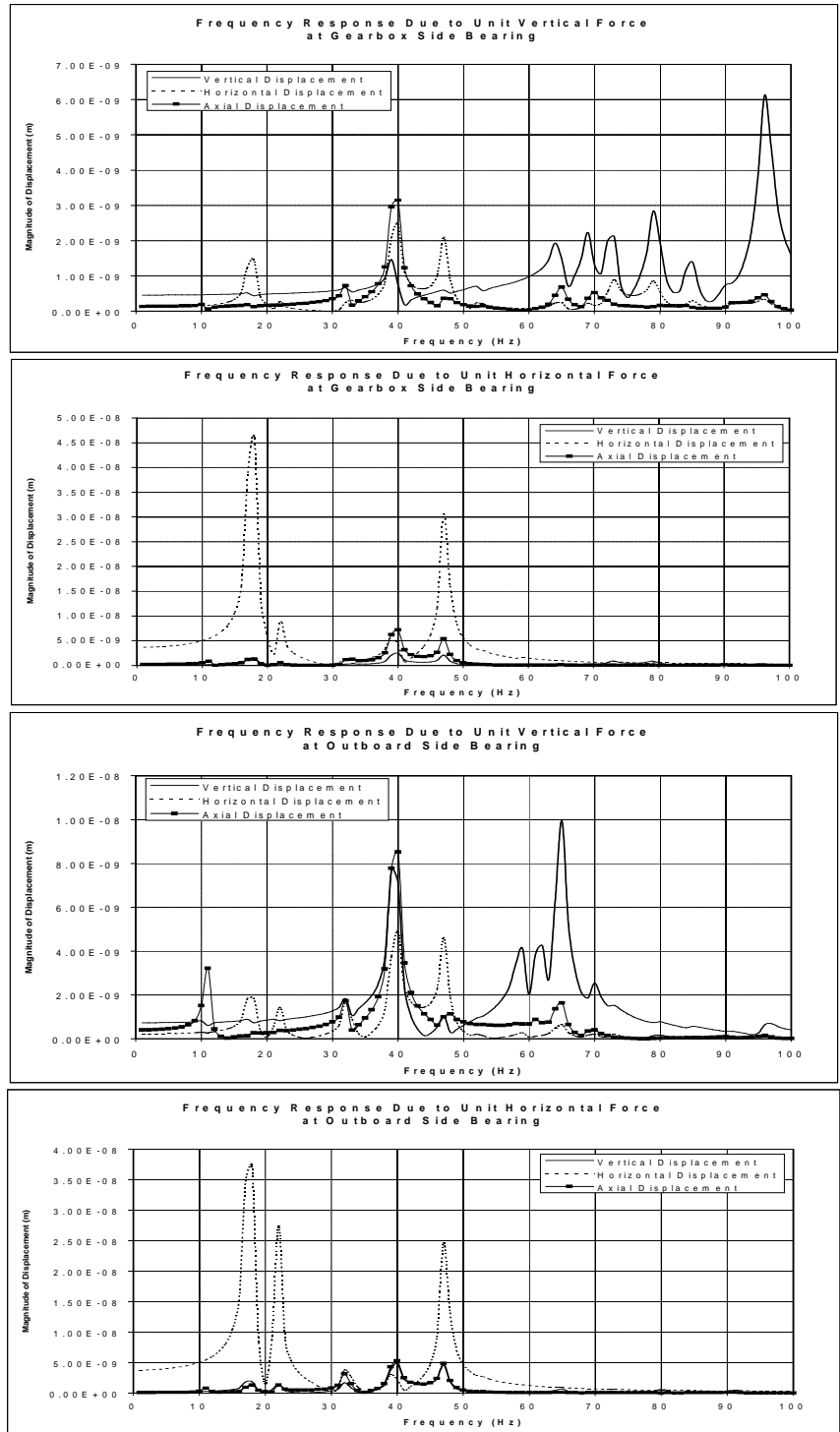


FIG A.32 FRF's DA SOLUÇÃO APRESENTADA NA SEÇÃO A.5.1.1

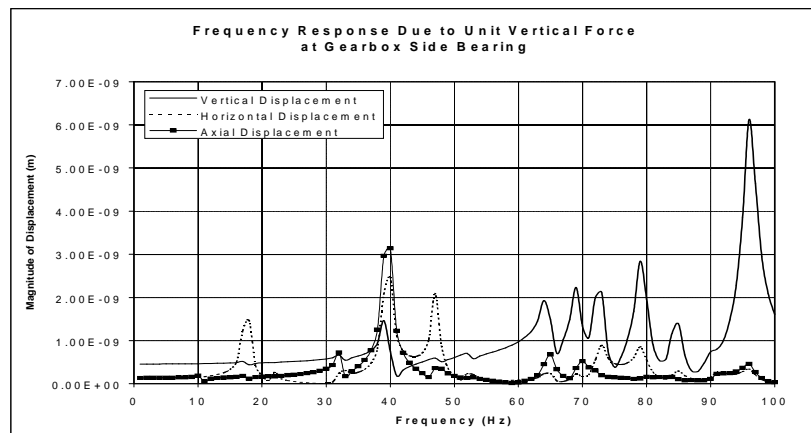
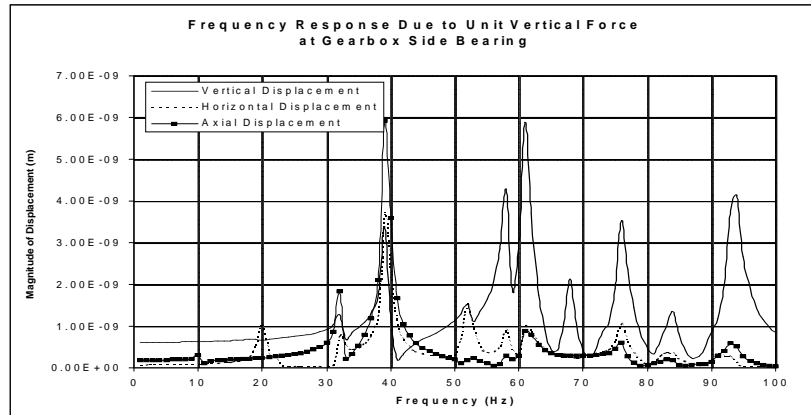


FIG. A.32* COMPARAÇÃO DAS FRF'S DO MANCAL LA ANTES/DEPOIS

A FIG A.32* mostra que a aplicação do novo contraventamento deslocou um pouco o valor da frequência natural e, também, reduziu a sua amplitude da ordem de 6 vezes, conforme pode ser visto no modelo teórico apresentado acima.

Esta solução apresenta as mesmas vantagens da segunda melhor proposta, sendo de execução mais simples (Seção A.5.1.2). Nos dois casos, os picos de 60 Hz na direção vertical das FRF's são reduzidos de seu valor original com a mudança de 5% no valor da frequência deste pico (dessintonização). As FRF's estão apresentadas na figura A.32

A.5.1.2 Segunda Melhor Proposta

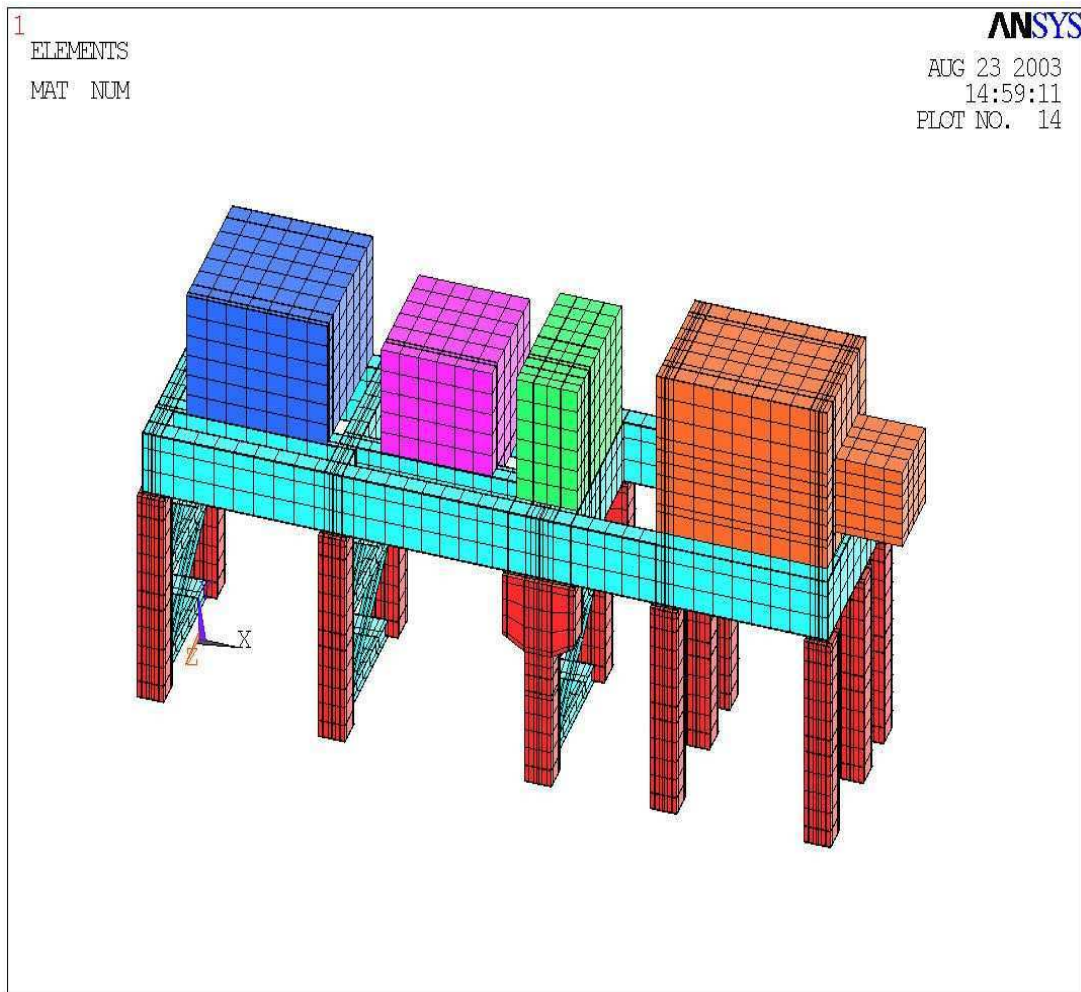


FIG A.33 BONS RESULTADOS (MENOS SIMPLES)

A figura A.33 mostra a solução com duas colunas.
As suas FRF's estão apresentadas na figura A.34

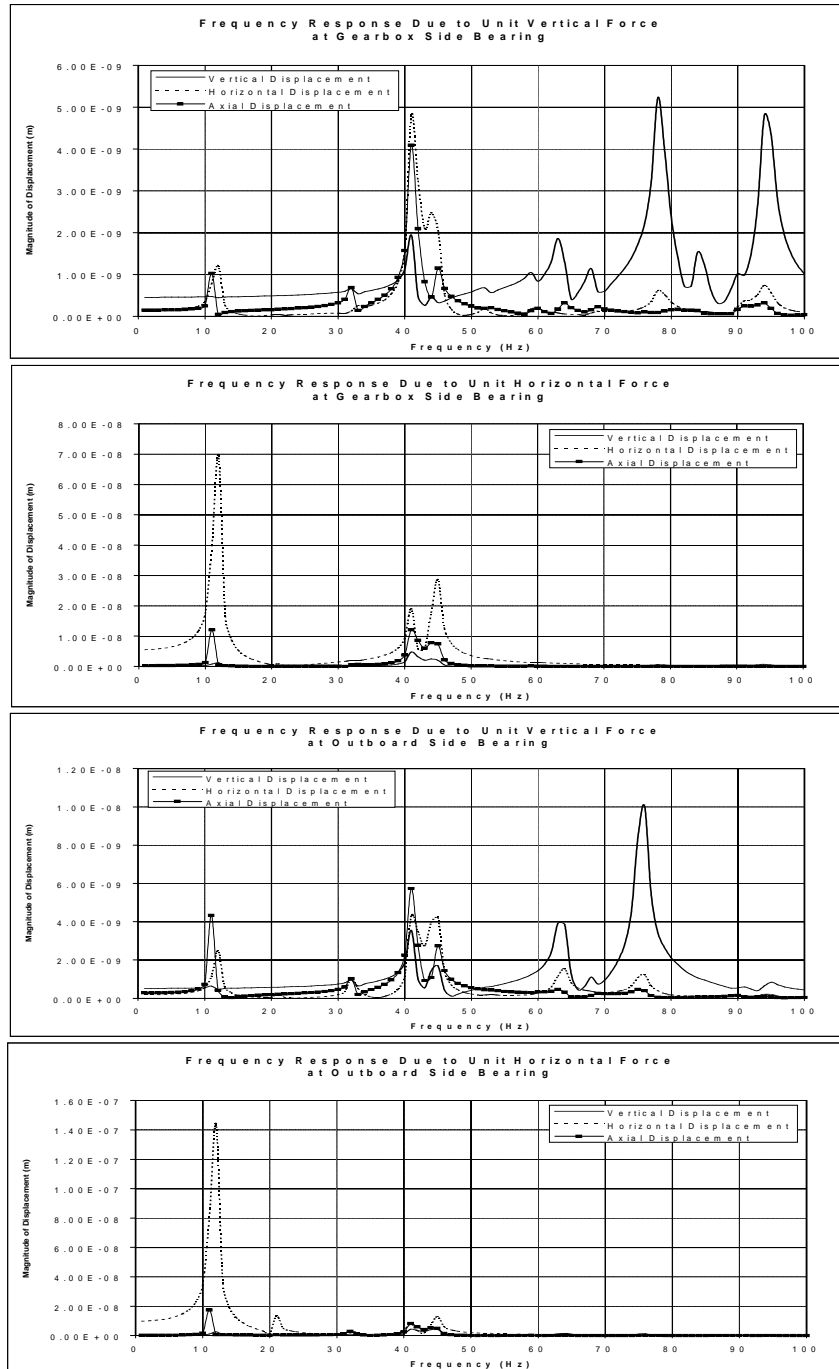


FIG A.34 FRF's DA SOLUÇÃO APRESENTADA NA SEÇÃO A.5.1.2

A.5.1.3 Proposta Com Vigas Laterais Adicionais

A figura A.35 mostra a solução com duas vigas laterais. Esta mudança teve pequeno efeito na FRF dos mancais. As suas FRF's estão apresentadas na figura A.36

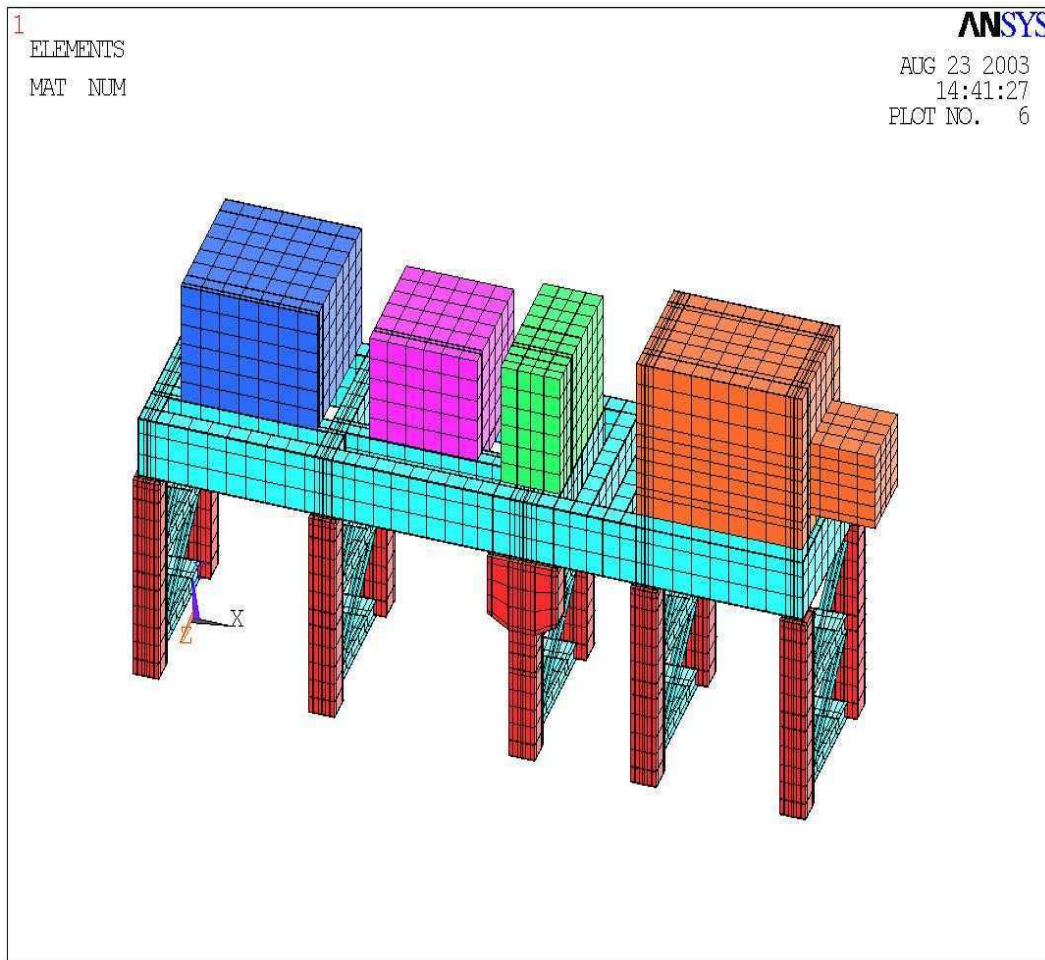


FIG A.35 PROPOSTA COM DUAS VIGAS LATERAIS

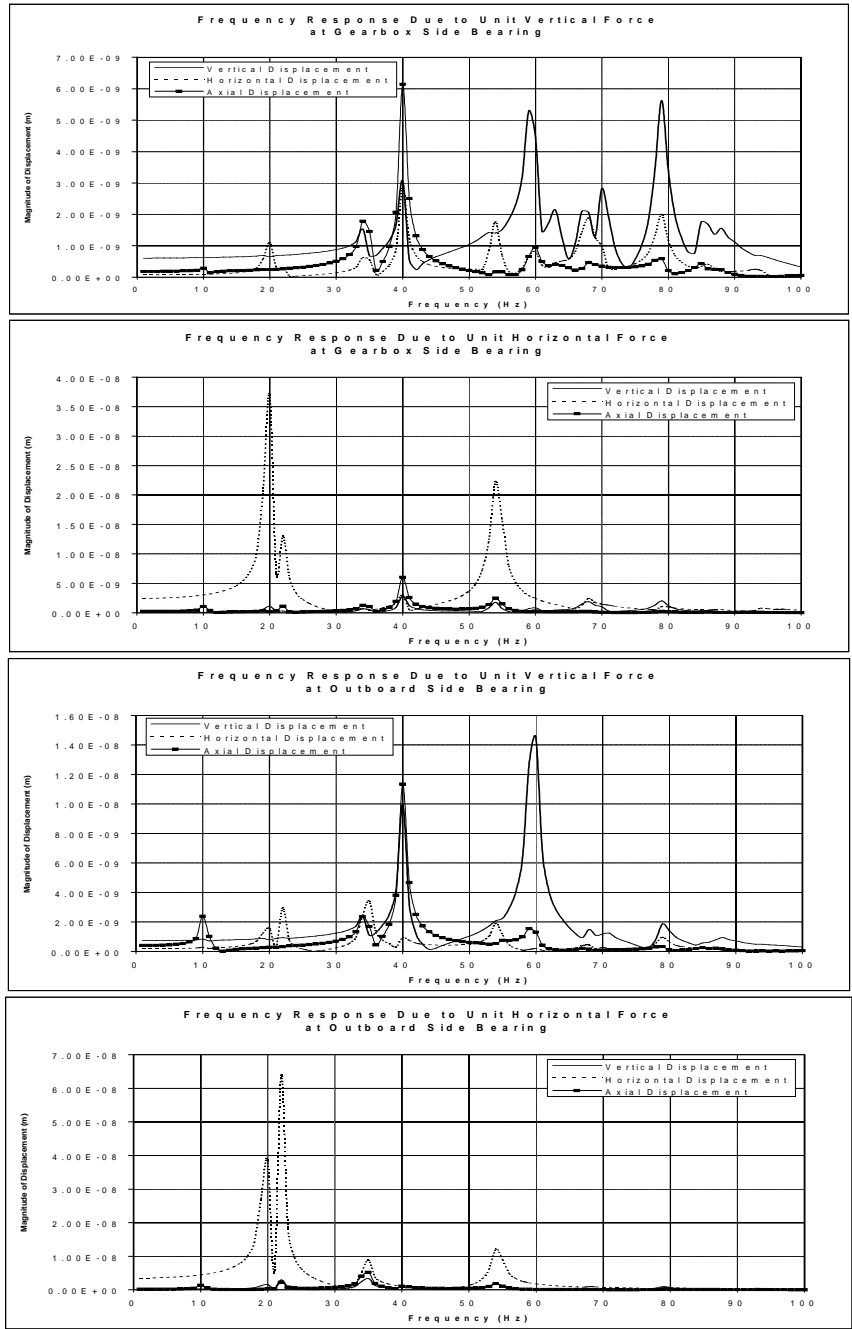


FIG A.36 FRF's DA SOLUÇÃO APRESENTADA NA SEÇÃO A.5.1.3

A.5.1.4 Proposta Com Vigas Transversais Adicionais

A figura A.37 mostra a solução com duas vigas laterais. Esta mudança teve pequeno efeito na FRF dos mancais. As suas FRF's estão apresentadas na figura A.38

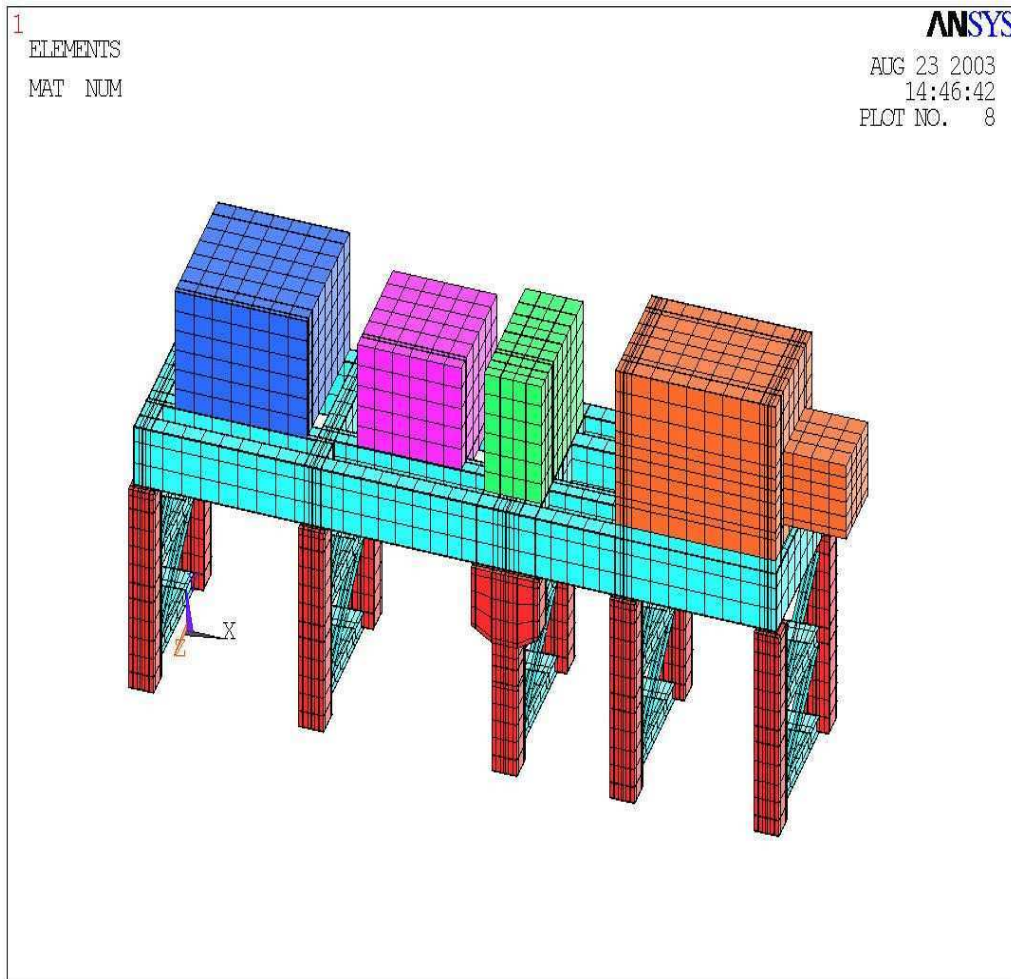


FIG A.37 PROPOSTA COM DUAS VIGAS TRANSVERSAIS

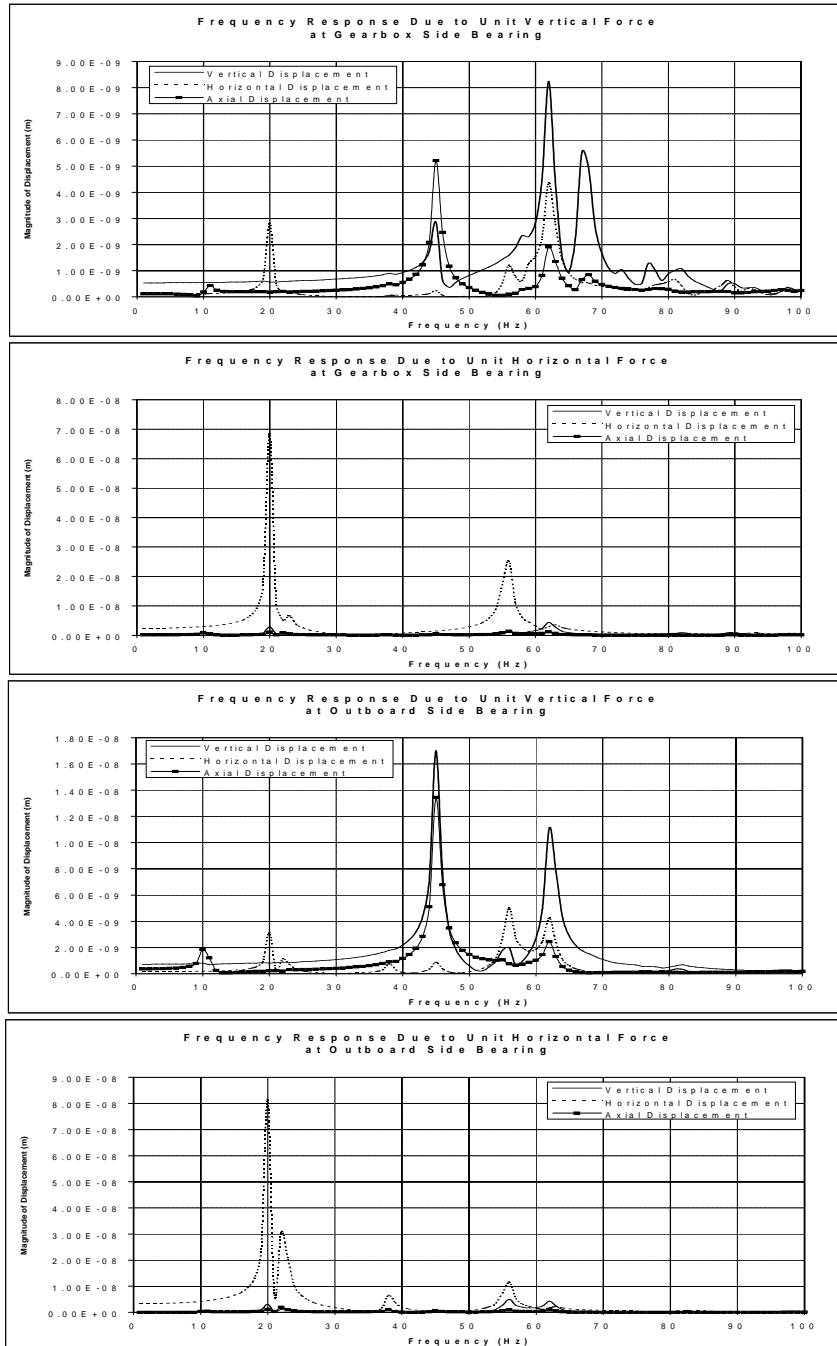


FIG A.38 FRF's DA SOLUÇÃO APRESENTADA NA SEÇÃO A.5.1.4

A.5.2 Interação Rotor/Mancais/Estrutura (Análise Assíncrona)

A.5.2.1 Estudo Comparativo: Excitação em Fase/Fora de Fase

Forças de varredura não síncronas são aplicadas no conjunto rotor/ mancal/ estrutura e comparadas na condição de mancal faminto.

Na figura A.39, o primeiro modo natural é excitado (em fase). Na figura A.40 o segundo modo é excitado (fora de fase).

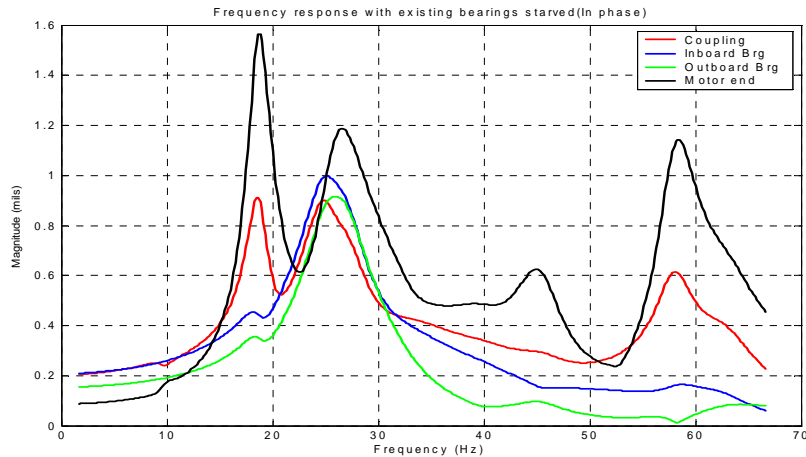


FIG A.39 RESPOSTA PARA EXCITAÇÃO EM FASE (vertical)

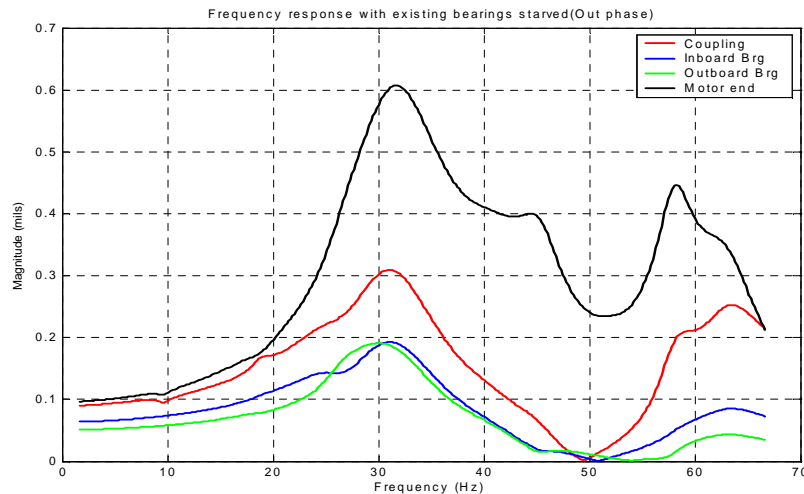


FIG A.40 RESPOSTA PARA EXCITAÇÃO FORA DE FASE (vertical)

Quatro sensores dos mancais estão plotados em cada figura e mostram picos em 1X e 2X, o que é preocupante. As forças/excitações em fase (primeiro modo) são mais importantes que as fora de fase (segundo modo). Por esta razão, daremos mais atenção às excitações em fase.

A.5.2.2 Estudo Comparativo: Mancal Afogado/Faminto

Inicialmente, é analisada a vibração do rotor à excitações não síncronas (operando a 1800 rpm), para o conjunto mancal existente/fundação, nas condições faminto e afogado, obtendo-se os seguintes resultados, que estão apresentados nas figuras de A.41 a A.45.

Os mancais afogados mostram uma grande redução das vibrações, nos dois mancais e nas pontas. Os resultados são melhores, para 1X, e iguais, para 2X.

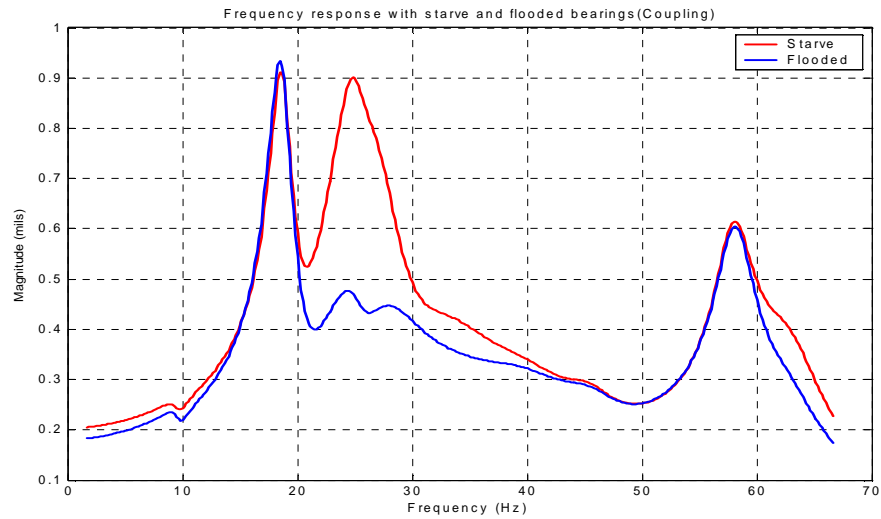


FIG A.41 RESPOSTA NÃO SÍNCRONA NO ACOPLAMENTO (vertical)

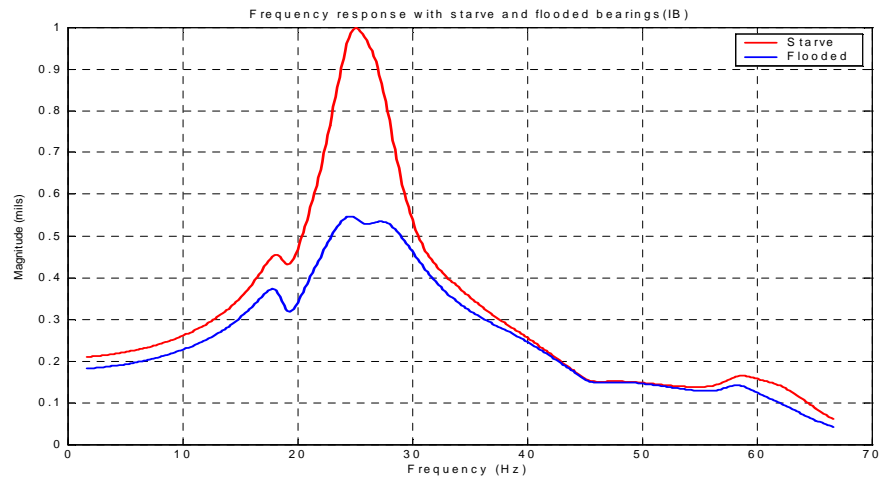


FIG A.42 RESPOSTA NÃO SÍNCRONA NO MANCAL ACOPLADO

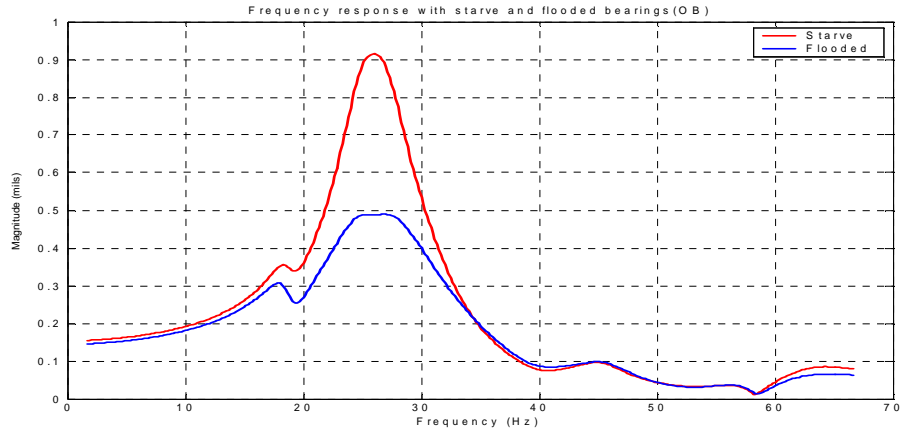


FIG A.43 RESPOSTA NÃO SÍNCRONA NO MANCAL EXTERNO

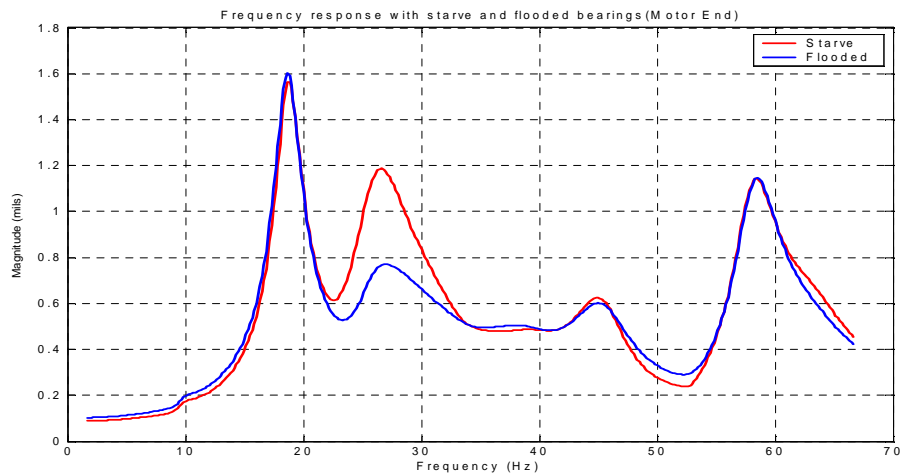


FIG A.44 RESPOSTA NÃO SÍNCRONA PONTA DA EXCITATRIZ

A.5.2.3 Estudo Comparativo: Com e Sem Pedestal (Fundação)

Para investigar o efeito da fundação na resposta dinâmica à excitação não síncrona, a mesma é aplicada ao sistema rotor/mancais com e sem o efeito da fundação (referencial inercial). Somente o mancal original, e na condição faminto, é apresentado para esta comparação (excitação em fase).

Geralmente, as diferenças não são muito grandes na maioria dos casos, porém, neste caso particular, são muito importantes, como pode ser visto nas figuras A.45 à A.48

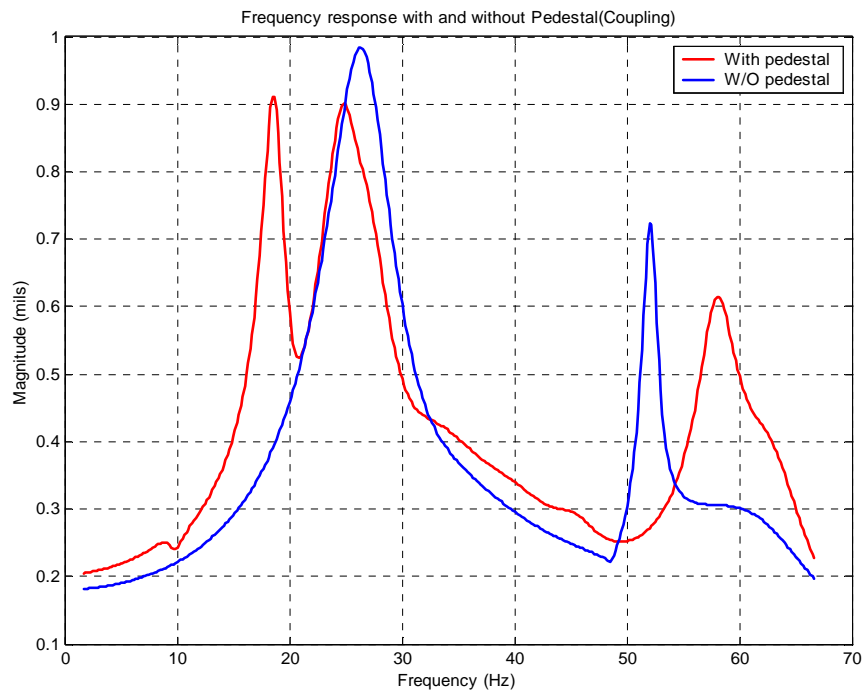


FIG A.45 RESPOSTA NO ACOPLAMENTO COM/SEM FUNDAÇÃO

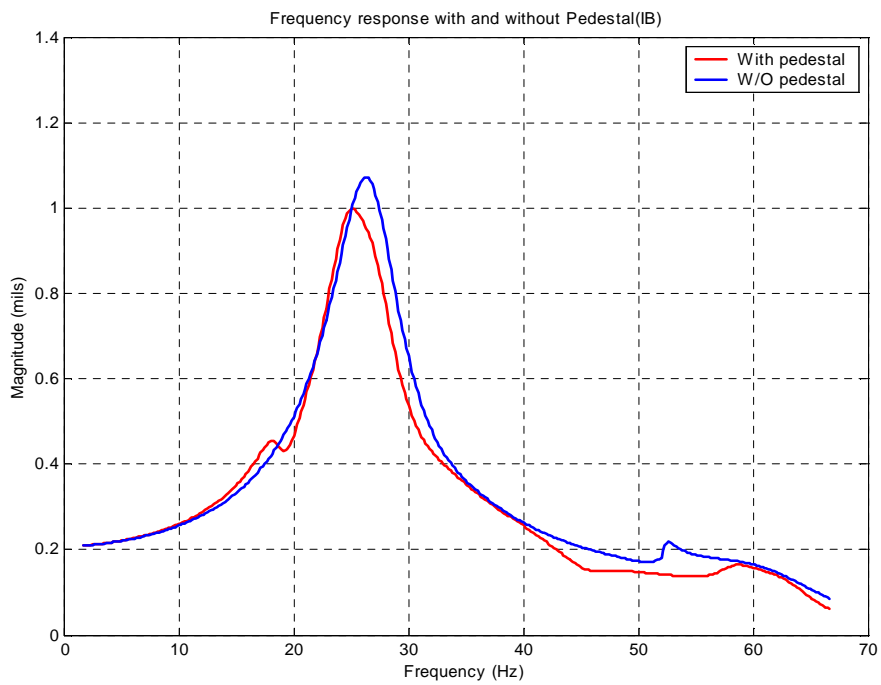


FIG A.46 RESPOSTA MANCAL LA COM/SEM FUNDAÇÃO

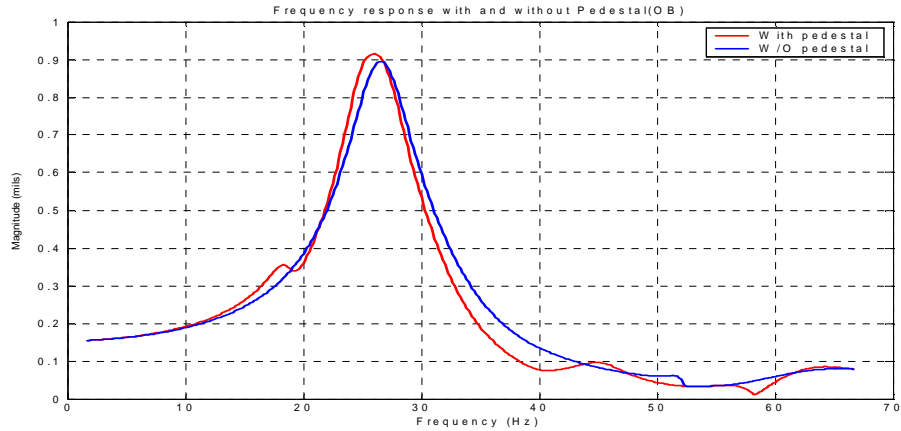


FIG A.47 RESPOSTA NO MANCAL LOA COM/SEM FUNDAÇÃO

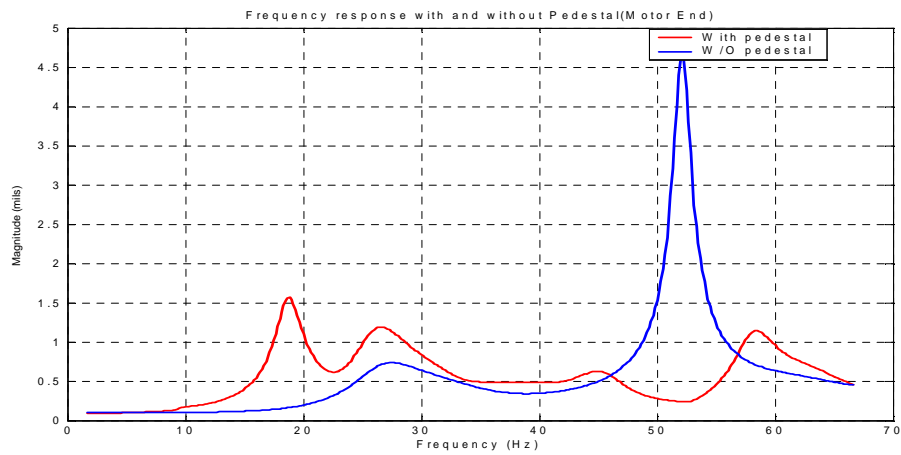


FIG A.48 RESPOSTA NA EXCITATRIZ COM/SEM FUNDAÇÃO

A.5.2.4 Estudo Comparativo: Mancal Velho e Novo

Finalmente, comparamos os resultados de um mancal novo (proposto), com os resultados dos mancais originais (famintos). Os resultados estão apresentados nas figuras de A.49 à A.52. O resultado deste estudo mostra que este novo mancal é eficaz para reduzir a vibração de 1N em ambos os mancais, porém, pouco ajuda na eliminação da vibração em 2N. No caso da extremidade do motor (excitatriz) esta solução amplifica a vibração. O modo próximo a 2N, (3497 rpm) tem elevado fator de amplificação (35). Este resultado é consistente com a resposta amortecida. A solução para 2N deve ser procurada na estrutura e não no mancal.

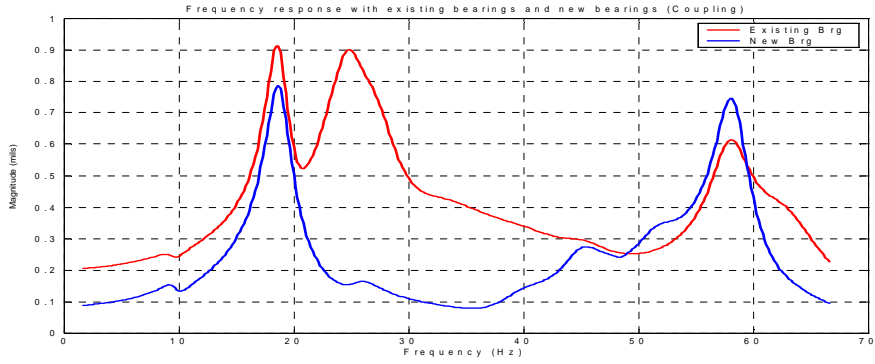


FIG A.49 MANCAL NOVO X VELHO NO ACOPLAMENTO

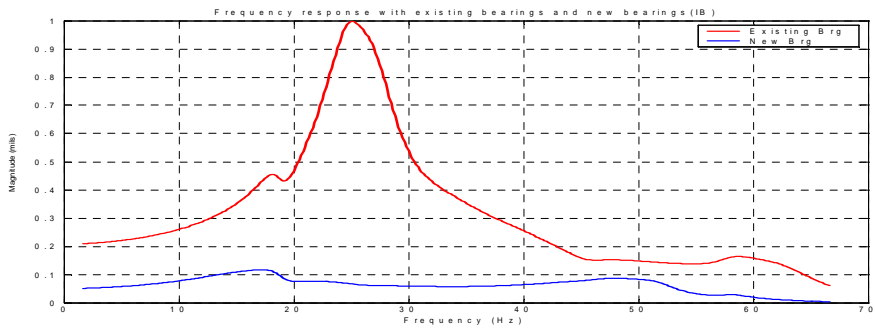


FIG A.50 MANCAL NOVO X VELHO NO MANCAL LA

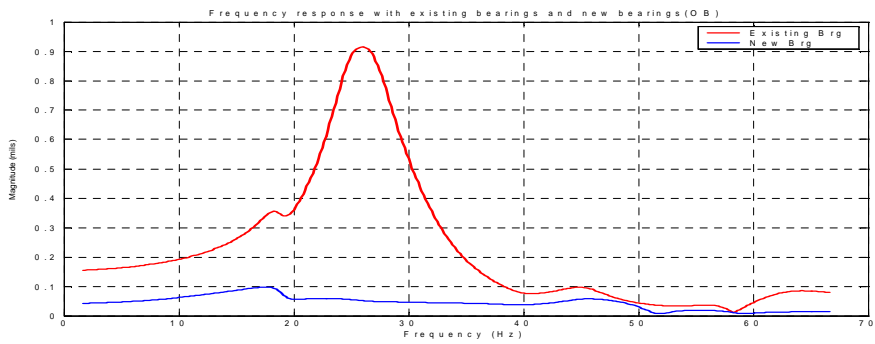


FIG A.51 MANCAL NOVO X VELHO NO MANCAL LOA.

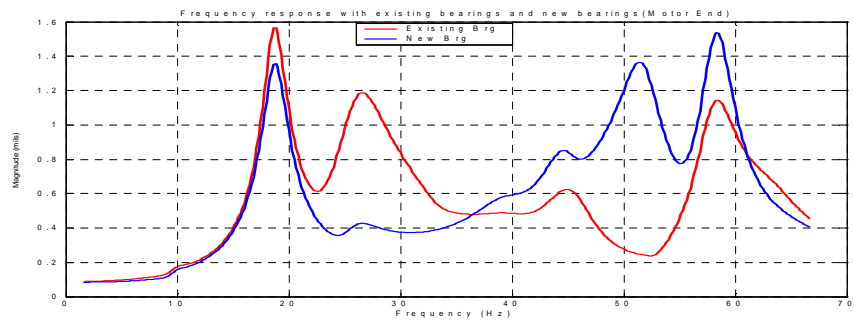


FIG A.52 MANCAL NOVO X VELHO NA EXCITATRIZ

A.6 Consolidação

A.6.1 A Melhor Opção: Coluna de Concreto Conforme Modelo

A proposta de solução que se mostrou mais vantajosa foi a colocação de uma viga de concreto abaixo do mancal acoplado do motor. A figura A.31 mostra a modificação da geometria e a figura A.32 mostra as FRF's desta modificação.

O pico vertical grande, próximo de 60 Hz, localizado no mancal LA, foi reduzido em 80% com a adição da coluna, sendo que este pico foi deslocado para 63 Hz.

A resposta do mancal externo (LOA) foi reduzida a 65%. As FRF's estão apresentadas na figura A.32.

A.6.2 Resultado de Campo

O modelo de elementos finitos mostrou-se adequado para capturar as particularidades dinâmicas desta complexa estrutura de suportação, mostrando-se uma ferramenta valiosa na diagnose e solução do problema.

Após a redução dos graus de liberdade, as propriedades dinâmicas da estrutura foram preservadas na faixa de interesse, o que ficou caracterizado através de suas matrizes de massa e rigidez. O acoplamento desta matriz com os mancais permitiu uma completa descrição do sistema.

A colocação de uma coluna mostrou-se eficaz para ampliar a margem em relação   frequência natural da estrutura que apresentava-se em sintonia com o segundo harmônico 2N, sem prejudicar os resultados j  obtidos em 1N, com a troca do mancal.

A solução proposta para este problema foi implementada parcialmente.

Os mancais novos, propostos pelo estudo, ainda n o foram implementados, entretanto a nova coluna j  foi levantada no local.

Conforme mostrado anteriormente, a troca dos mancais é fundamental para redução da vibração do primeiro harmônico. A colocação da nova coluna é eficaz apenas na eliminação do segundo harmônico, em nada contribuindo para a redução da vibração em 1N. Os resultados obtidos com a colocação da nova coluna mostraram-se surpreendentes e foram respons veis por uma grande redução da vibração no segundo harmônico.

A figura A.53 mostra o espectro das vibrações verticais do lado acoplado do motor, após a partida da máquina realizada com a nova coluna. Neste espectro pode-se ver claramente que o segundo harmônico da vibração do motor, medido no mancal interno, foi praticamente eliminado pela colocação da nova coluna.

A figura A.53 mostra, ainda, que o primeiro harmônico encontra-se com uma amplitude exagerada. Isto acontece porque os mancais da máquina ainda não foram substituídos e a coluna vertical, por si só, não é eficaz para reduzir 1N.

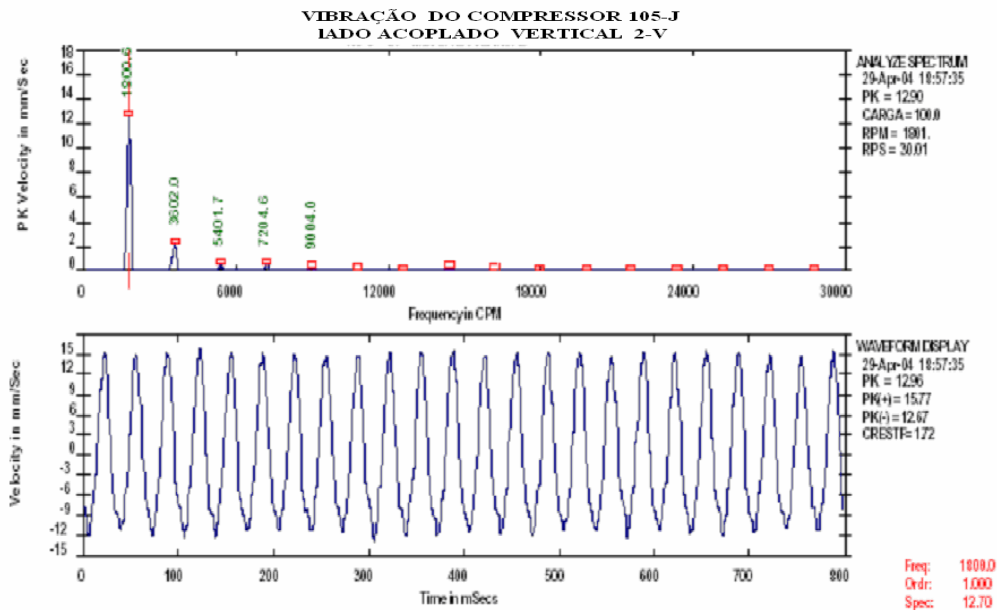


FIG A.53 ESPECTRO DE VIBRAÇÃO VERTICAL DO MOTOR LADO ACOPLADO

A.6.3 Comentários Finais

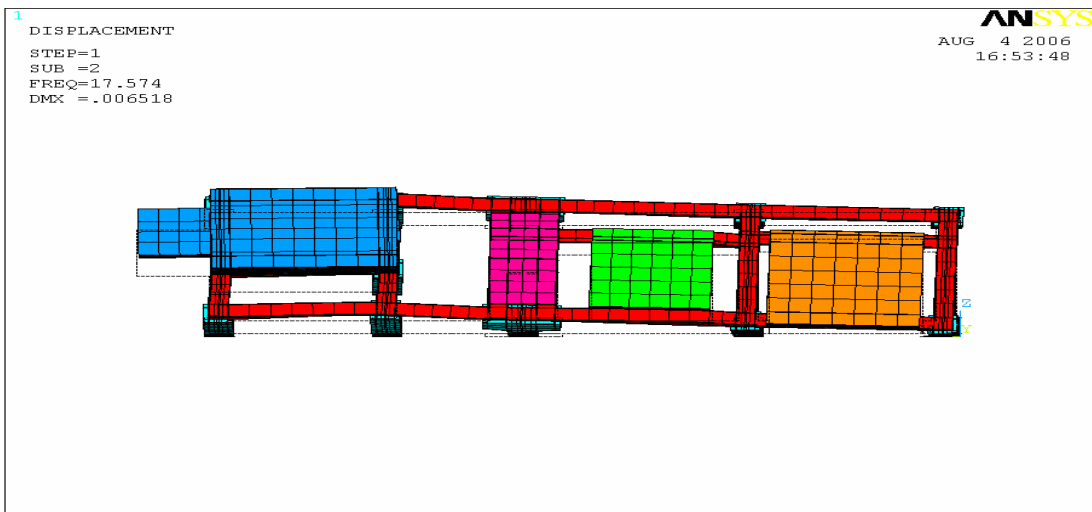
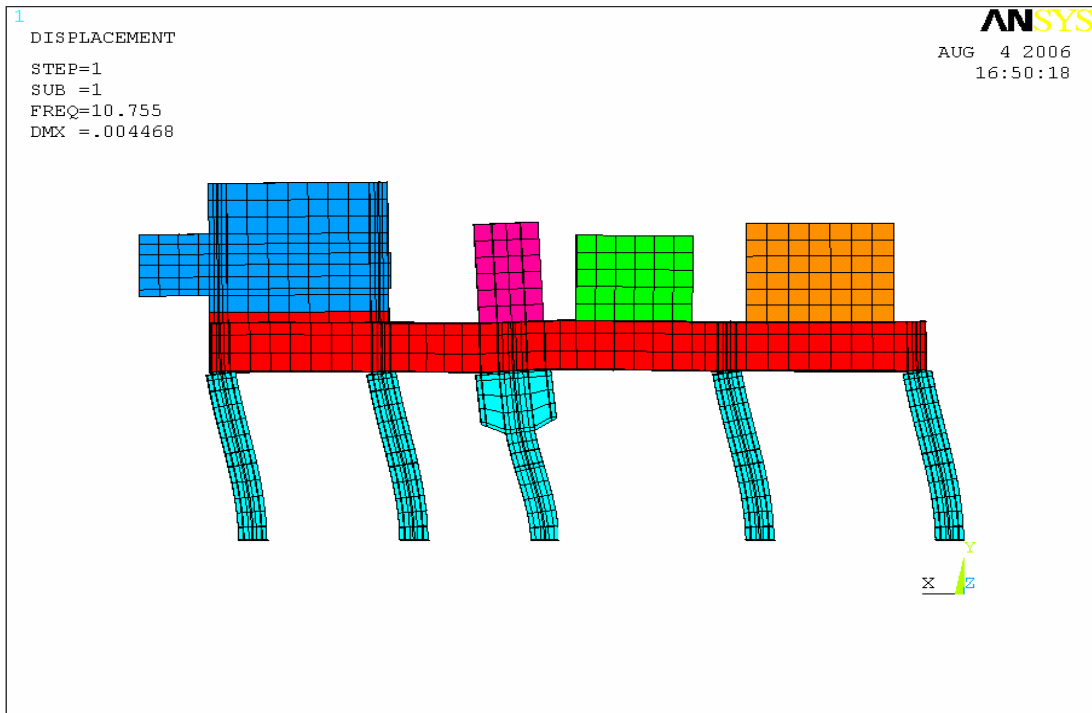
A modificação da estrutura tinha como principal objetivo reduzir 2N.

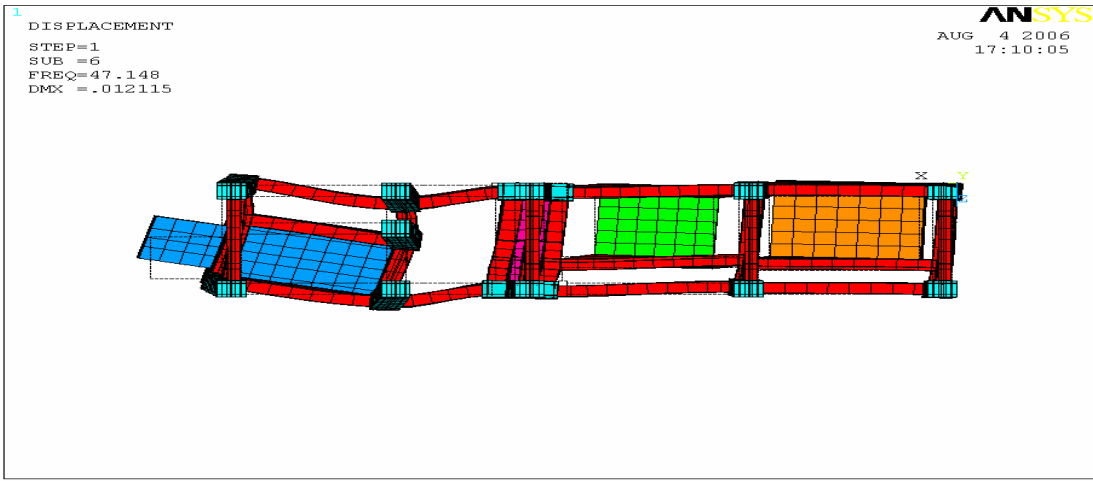
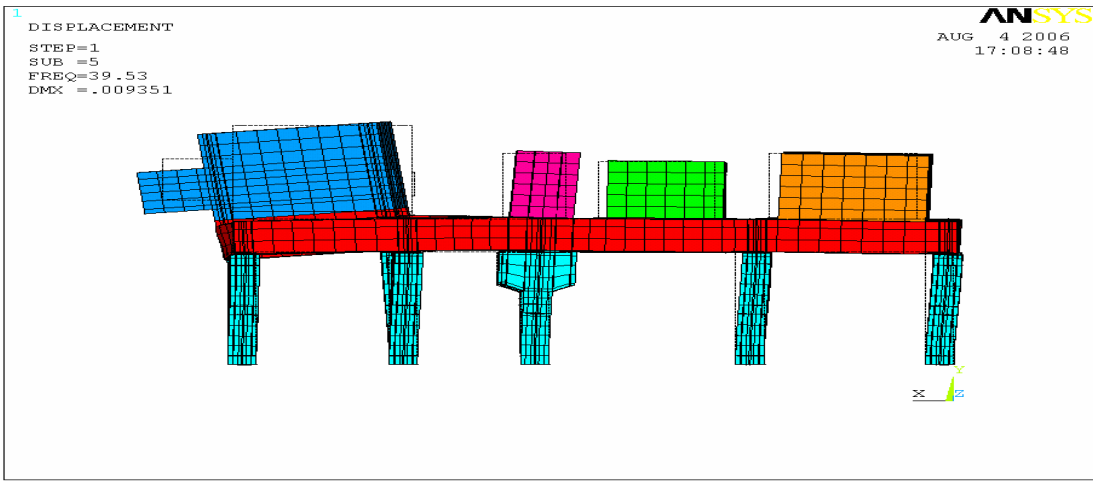
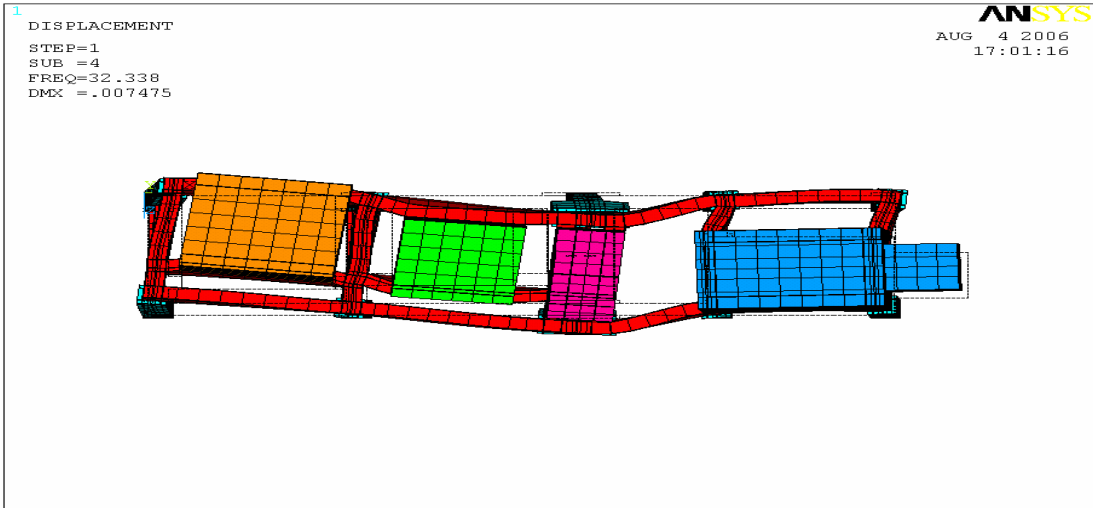
A colocação de uma viga de concreto envolve um esforço muito grande e, por esta razão, foram tentadas muitas outras modificações. Infelizmente, nenhuma destas modificações mais simples mostrou-se eficaz em mudar a resposta dinâmica da estrutura próxima a 60 Hz. Desta forma, a colocação da nova coluna foi o melhor compromisso efetividade \times simplicidade.

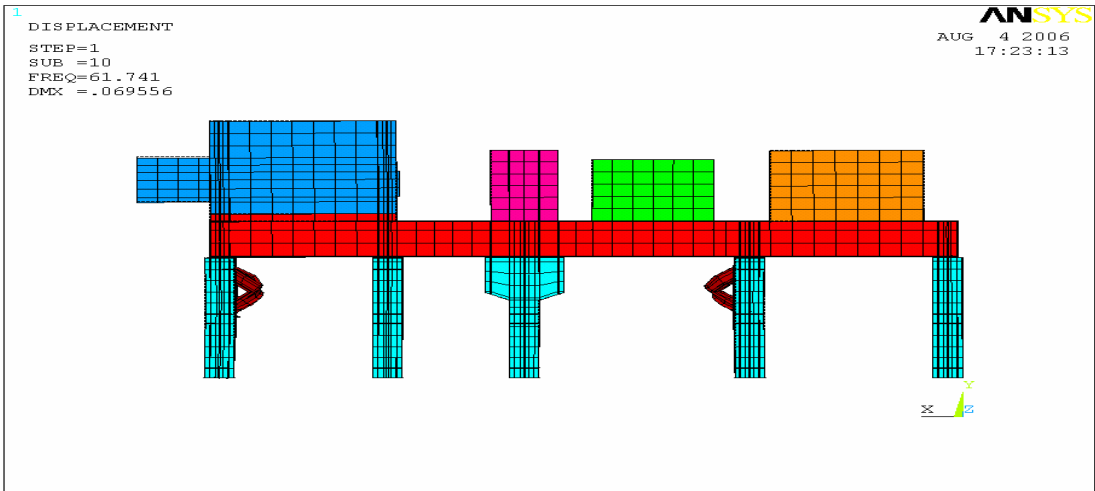
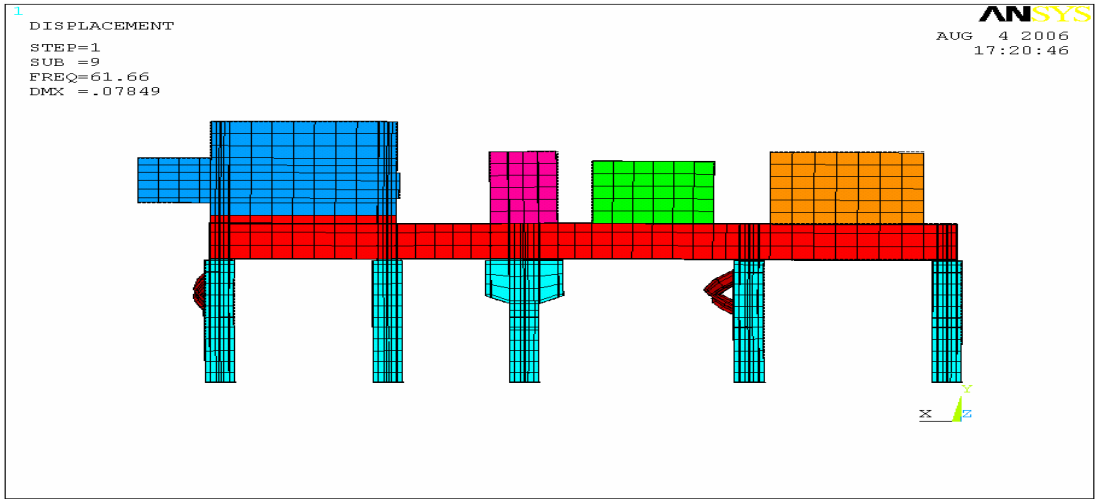
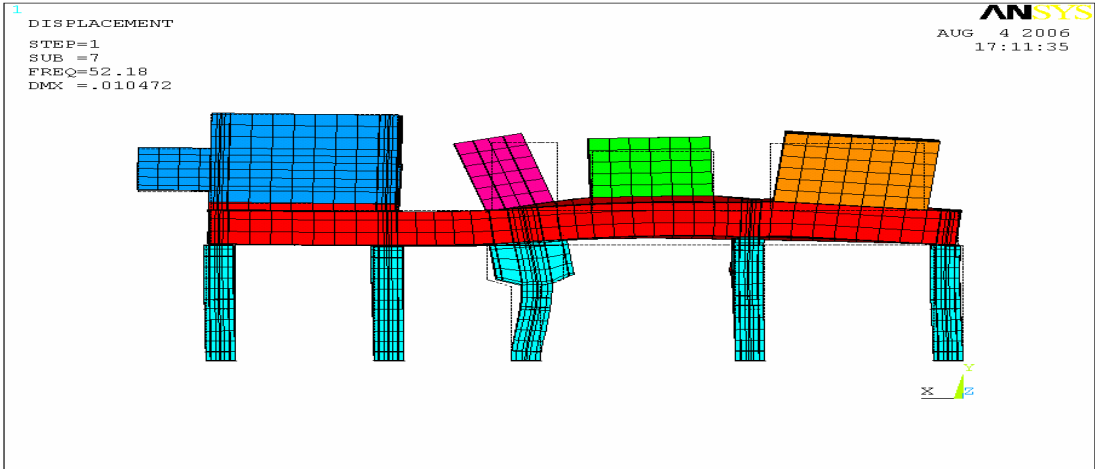
A solução com a aplicação de duas colunas verticais produziria resultados levemente superiores aos encontrados, ao mesmo tempo em que exigiria uma modificação da estrutura, no campo, pelo menos duas vezes maior.

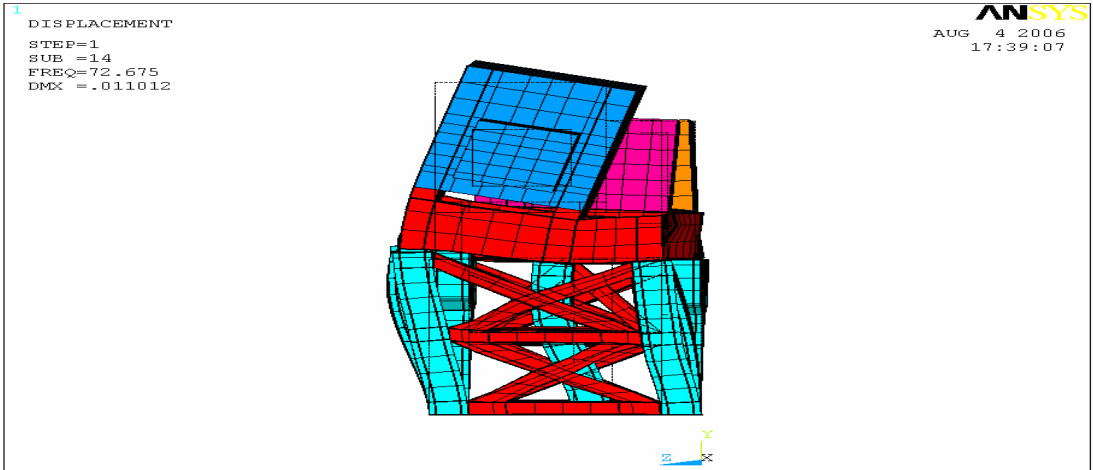
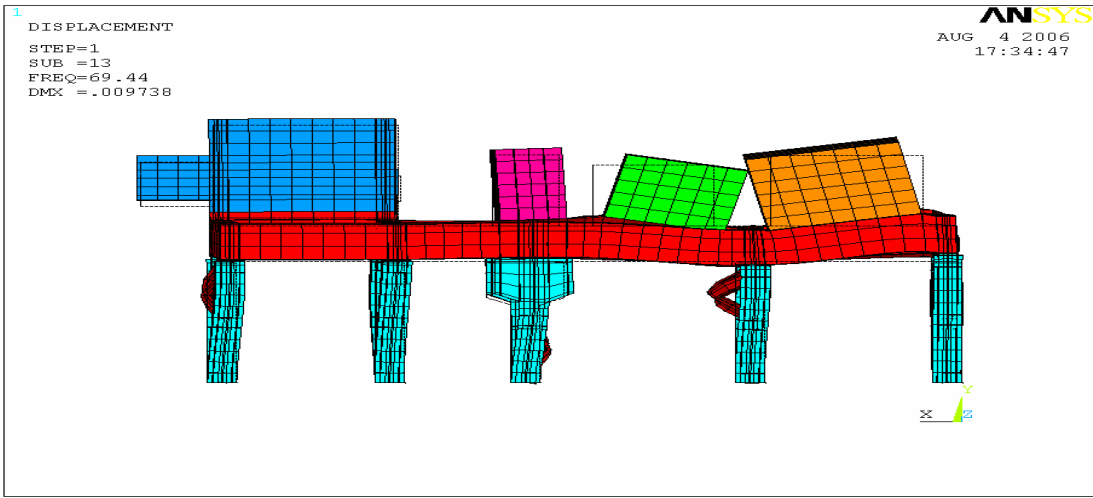
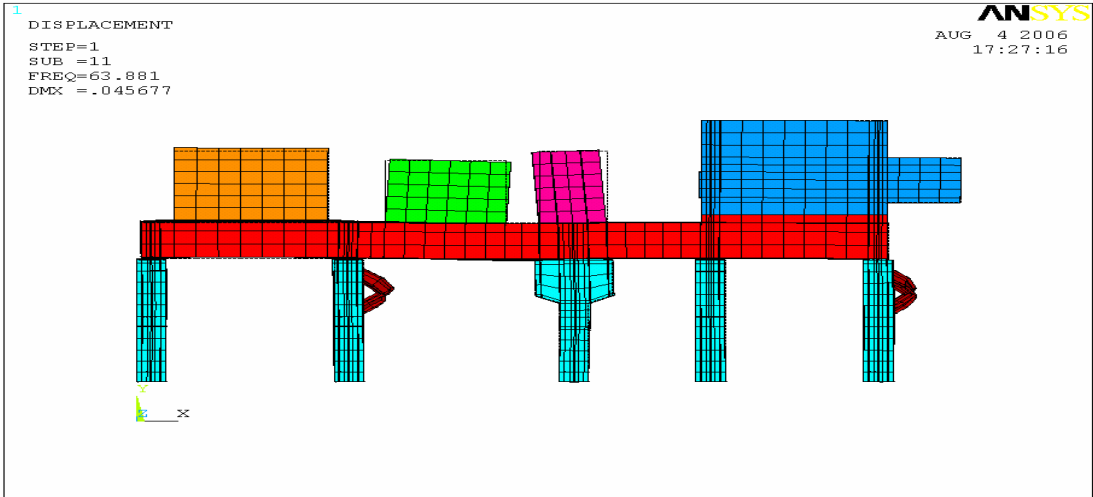
APÊNDICE B

MODOS DE VIBRAR DA ESTRUTURA









Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)