UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES

JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

MANAUS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2007

JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 15 de setembro de 2007.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. José Kennedy Martins, Membro
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. Levi Lopes de Lima, Membro
Universidade Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida.

A minha esposa e filha por existirem em minha vida.

Ao meu pai e minha mãe pela minha existência e confiança em meu trabalho.

Aos meus irmãos mesmo que tão distantes ainda fazem parte da minha vida.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Aos meus amigos de mestrado, pelo apoio, pela troca de conhecimentos e pela excelente convivência.

Aos professores do mestrado pela experiência transmitida durante o curso. Em especial aos professores: Cícero Mota, pela confiança em meu trabalho; Renato Tribuzy, pela dedicada orientação; e Ivan Tribuzy, pelo apoio e motivação.

RESUMO

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES

Considere uma imersão C^∞ $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ de uma variedade n-dimensional M^n em uma variedade de curvatura seccional constante c. Seja $N(x)$ o primeiro espaço normal de f em $x \in M$, isto é, o subespaço do espaço normal que é gerado pela imagem da segunda forma fundamental de f em x. Diz-se que se pode reduzir a codimensão de f para k, com $0 \leq k < p$, se existe uma subvariedade $(n+k)$-dimensional L de Q_c totalmente geodésica e tal que $f(M) \subset L$; e que f é 1-1-regular se o primeiro espaço normal tem dimensão constante 1.

O objetivo deste trabalho é dar uma exposição detalhada de resultados obtidos por Lúcio Rodriguez e Renato Tribuzy em "Redução de Codimensão de Imersões Regulares", publicado em Mathematische Zeitschrift no ano de 1984, que permitem reduzir a codimensão de imersões 1-1-regulares.

ABSTRACT

REDUCTION OF CODIMENSION OF REGULAR IMMERSIONS

Consider immersion C^∞ $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+p}$ of a n-dimensional manifold M^n in a manifold of constant secctional curvature c. Let $N(x)$ be the first normal space of f in $x \in M$, that is the subspace of the normal space that is generate to image of second form fundamental of f in x. We say that we can reduce the codimension of f to k, with $0 \leq k < p$, if exists a submanifold L of Q_c $(n+k)$-dimensional totally geodesic such that $f(M) \subset L$, and f is 1-1-regular if the first normal space have constant dimension 1.

The objective of this work is to give a detailed exhibition of results obtained by Lúcio Rodriguez and Renato Tribuzy in "Reduction of Codimension of Regular Immersions", published in Mathematische Zeitschrift in the year of 1984, that permit to reduce the codimension of 1-1-regular immersions.

Sumário

Introdução

Considere uma imersão C^∞ $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ de uma variedade n-dimensional M^n em um espaço $(n+p)$-dimensional Q_c^{n+p} de curvatura seccional constante c. Seja $N(x)$ o primeiro espaço normal de f em $x \in M$, isto é, o subespaço do espaço normal $T_xM^\perp$ que é gerado pelos vetores $\alpha(X,Y)$, com $X, Y \in T_xM$, onde α é a segunda forma fundamental da imersão. Diz-se que tal imersão é 1-k-regular se $N(x)$ tem dimensão constante k.

Um problema importante em geometria, quando temos uma imersão isométrica como a citada acima, consiste em saber que parte do espaço ambiente pode ser desprezada sem afetar a imersão. A codimensão de f pode ser reduzida para k, com $0 \leq k < p$, se existe uma subvariedade $(n+k)$-dimensional L de Q_c totalmente geodésica e tal que $f(M) \subset L$.

Em [6], J. Erbacher, através de uma condição geométrica simples, provou o seguinte resultado:

Teorema 3.1.2. Considere $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana $(n+p)$-dimensional $\overline{M}_c^{n+p}$ de curvatura seccional constante c. Se o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão do fibrado normal e a dimensão de N_1 é constante igual a l, então existe uma subvariedade $(n+l)$-dimensional L^{n+l} totalmente geodésica de $\overline{M}_c^{n+p}$, tal que $\psi(M^n) \subset L^{n+l}$.

Demonstraremos este teorema devido a sua importância para o problema de redução da codimensão. Entretanto, em geral, é uma tarefa difícil provar que um subfibrado é paralelo.

Podemos encontrar na literatura vários trabalhos sobre redução de codimensão, como exemplo apresentaremos alguns resultados abaixo.

Em [5], G. Colares e M. do Carmo, provaram que o problema de redução da codimensão está intimamente relacionado com o tensor curvatura da conexão normal, ou seja,

Teorema. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão mínima de uma variedade conexa n-dimensional M^n em um espaço $(n+p)$-dimensional de curvatura seccional constante c. Suponhamos que o tensor curvatura da conexão normal seja paralelo em relação à conexão normal e que o primeiro espaço normal da imersão tenha dimensão constante k. Então existe uma subvariedade L^{n+k} totalmente geodésica de Q_c^{n+p} de dimensão $n+k$, tal que $f(M^n) \subset L^{n+k}$.

Estes autores conjecturaram também resultado análogo para imersões m-regulares (isto é, o k-ésimo espaço normal N_k da imersão tem dimensão constante k, para $k = 1, ..., m$), onde definimos o k-ésimo espaço normal de f em x como

$$N_k(x) = ger\{\alpha(X,Y)(x), \nabla^{\perp}_{W_1}\alpha(X,Y)(x), ..., \nabla^{\perp}_{W_{k-1}}...\nabla^{\perp}_{W_1}\alpha(X,Y)(x)\}$$

para $k = 2, 3, ...$, e $X, Y, W_1, ..., W_{k-1}$ são campos vetoriais tangentes a M^n.

Marcos Dajczer em sua tese de doutorado, substituiu a condição de minimalidade por outra condição geométrica mais fraca, conforme o teorema abaixo:

Teorema. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica m-regular de uma variedade conexa n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana Q_c^{n+p} com curvatura constante c. Suponhamos que $(\nabla^{\perp})^m R^{\perp} |_{N_m^{\perp}} = 0$ e que $(\nabla^{\perp})^m H \subset N_m$, onde H é o vetor curvatura média da imersão. Então existe uma subvariedade totalmente geodésica L^{n+k} de Q_c^{n+p} de dimensão $n+k$, onde $k = dim\ N_m$, e tal que $f(M^n) \subset L^{n+k}$.

O objetivo deste trabalho é dar uma exposição detalhada de resultados obtidos por Lúcio Rodriguez e Renato Tribuzy em [9], que trata de redução de codimensão de imersões 1-1-regulares.

O trabalho está dividido em três capítulos: o primeiro com as definições e os resultados básicos sobre variedades riemannianas; o segundo consta de algumas considerações sobre os espaços de curvatura constante e uma abordagem sobre a segunda forma fundamental associada a uma imersão isométrica, com as definições e os resultados que serão fundamentais ao entendimento dos resultados apresentados no capítulo principal.

No terceiro capítulo trataremos o problema de redução da codimensão de uma imersão isométrica em um espaço de curvatura constante. Na primeira seção deste capítulo mostraremos alguns lemas básicos e utilizaremos o teorema de Frobenius para mostrarmos que: se o índice de nulidade relativa $\nu(x)$ (isto é, a dimensão do subespaço $B_x = \{X \in T_xM : \ \alpha(X,Y) = 0\ \forall\ Y \in T_xM\}$) é igual a uma constante l num aberto de M, então esses subespaços formam uma distribuição integrável, cujas folhas são l-subvariedades totalmente geodésicas. Utilizaremos este resultado para mostrar que se $N(x)$ é paralelo em $\gamma(a)$, onde $\gamma : [0, a] \to M$ é um segmento de geodésica contido em uma folha da folheação de nulidade relativa, então $N(x)$ é paralelo em $\gamma(t)$ para todo t em $[0, a]$.

Nosso primeiro teorema principal é notável no sentido de que nenhuma condição é necessária se M é compacta e f é 1-1-regular.

Teorema 3.2.2. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana compacta e conexa em um espaço $(n+p)$-dimensional Q_c^{n+p} de curvatura seccional constante c, simplesmente conexo se $c \leq 0$. Se f é 1-1-regular, então podemos reduzir a codimensão para 1.

A prova consiste em mostrar que, em cada ponto x de M o primeiro espaço normal é paralelo com respeito a conexão do fibrado normal $\nabla^{\perp}$, o resultado segue pelo teorema de Erbacher. Para isso faremos uso de alguns lemas da primeira seção e de um teorema auxiliar demonstrado por Lúcio Rodriguez em [8].

Se for esquecida a condição de compacidade então, como o próximo exemplo mostra é necessária alguma condição extra na métrica induzida pela imersão em M; qualquer condição sobre a curvatura sempre irá se referir a esta métrica.

Exemplo 10. Seja $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+p-1}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco que é substancial em $\mathbb{R}^{n+p-1}$, isto é, que não está contida em algum hiperplano afim de $\mathbb{R}^{n+p-1}$. Se γ tem curvatura não nula em todos os pontos, então o cilindro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+p}$ definido por $f(s,t) = (\gamma(s), t)$, é 1-1-regular, mas sua codimensão não pode ser reduzida.

Esta situação não pode ocorrer se o espaço ambiente tem curvatura positiva, como veremos no próximo teorema.

Teorema 3.2.3. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana completa e conexa em um espaço $(n+p)$-dimensional Q_c^{n+p} de curvatura seccional constante $c > 0$. Se f é 1-1-regular, então podemos reduzir a codimensão para 1.

Analogamente a prova do teorema anterior o fato da curvatura do espaço ambiente ser positiva exclui a hipótese de M ser compacta, bastando apenas que a mesma seja completa.

Finalizaremos este capítulo mostrando que, se o espaço ambiente é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+p}$, com curvaturas de Ricci não-negativas, então o caso do exemplo 10 é a única outra alternativa de reduzir a codimensão.

Teorema 3.2.7. Seja M^n completa e conexa com curvaturas de Ricci não-negativas. Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica 1-1-regular, então:

$i)$ Podemos reduzir a codimensão de f para 1 e $f(M)$ é a fronteira de um conjunto convexo em um subespaço afim $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+p}$; ou

$ii)$ f é um $(n-1)-$cilindro gerado por uma curva.

Capítulo 1

Generalidades

Neste capítulo apresentaremos as definições e os resultados da teoria de variedades riemannianas, necessários ao desenvolvimento deste trabalho, e fixaremos a notação a ser utilizada nos capítulos posteriores. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [1].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. Um conjunto N é chamado uma variedade diferenciável n-dimensional se existe uma família de aplicações diferenciáveis e biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to N$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em N, tais que:

1. $N = \displaystyle\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$;
2. Para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = V \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(V)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ aí definidas são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições 1 e 2.

Indicaremos que N tem dimensão n por N^n. O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ ou a aplicação $\mathbf{x}_\alpha$ é chamado uma parametrização ou sistema de coordenadas de N em p, com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, e $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma vizinhança coordenada em p.

Definição 1.1.2. Seja $\phi : N^n \to M^m$ uma aplicação entre as variedades diferenciáveis N e M, ϕ é dita diferenciável em $p \in N$, se dada uma parametrização $\mathbf{y} : W \subset \mathbb{R}^m \to M$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to N$ em p tal que $\phi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(W)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. A aplicação ϕ é diferenciável num aberto de N se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.1.3. Uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável N é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to N$. Suponha que $\alpha(0) = p \in N$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de N diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.1.4. O conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a uma variedade diferenciável N^n passando por p, representado por T_pN, é chamado espaço tangente a N^n em p . Mostra-se que o conjunto T_pN é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x} : U \to N$ em p determina uma base associada $\left\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\right\}$ em T_pN, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização $\mathbf{x}$.

Definição 1.1.5. (O Fibrado Tangente) Seja N^n uma variedade diferenciável. O conjunto $TN = \{(p, v); p \in N, v \in T_pN\}$, munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)\}$ sendo $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TN$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = (\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, é chamado fibrado tangente de N.

Proposição 1.1.1. Seja $\phi : N^n \to M^m$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis N^n e M^m. Para cada $p \in N$ e cada $v \in T_pN$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ tal que $\alpha(0) = p,\ \alpha'(0) = v$. A aplicação $d\phi_p : T_pN \to T_{\phi(p)}M$ dada por $d\phi_p(v) = (\phi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α (esta aplicação é chamada diferencial de ϕ em p).

Definição 1.1.6. Uma aplicação diferenciável $\phi : N \to M$, entre as variedades diferenciáveis N e M, é um difeomorfismo se ela é bijetiva e sua inversa ϕ^{-1} é diferenciável. ϕ é um difeomorfismo local em $p \in N$ se existem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi : U \to V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.1.7. Um caminho em uma variedade N é uma aplicação contínua $f : [0,1] \to N$. Se $f(0) = f(1) = p$, f é chamado caminho fechado em $p \in N$. Em particular o caminho constante $c_p : [0,1] \to N$ definido por $c_p(s) = p$ para todo $s \in [0,1]$, é um caminho fechado.

Definição 1.1.8. Uma variedade N é chamada conexa quando, dados dois pontos quaisquer $p, q \in N$, existe sempre um caminho ligando p e q, isto é, existe uma aplicação contínua $f : [0,1] \to N$, tal que $f(0) = p$ e $f(1) = q$.

Definição 1.1.9. Sejam $f : [0,1] \to N$ e $g : [0,1] \to N$ dois caminhos com o mesmo ponto inicial $p \in N$ e o mesmo ponto final $q \in N$. Diz-se que f é homotópico a g se existe uma função contínua $h : [0,1] \times [0,1] \to N$ tal que

$$h(s,0) = f(s) \text{ e } h(0,t) = p,$$
$$h(s,1) = g(s) \text{ e } h(1,t) = q.$$

Se um caminho $f : [0,1] \to N$ é homotópico ao caminho constante, então ele é dito contrátil a um ponto.

Definição 1.1.10. Uma variedade N é chamada simplesmente conexa se N é conexa e se todo caminho fechado em N é contrátil a um ponto. Em outras palavras N é simplesmente conexa se toda curva fechada em N puder ser continuamente deformada em um ponto.

1.2 Campos de Vetores

Definição 1.2.1. Seja N^n uma variedade diferenciável e TN o seu fibrado tangente. A aplicação $X : N \to TN$, que associa a cada ponto $p \in N$ um vetor $X(p) \in T_pN$ é chamada um campo de vetores em N. O campo é diferenciável se a aplicação X é diferenciável. Note que é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U. Basta considerar uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to N$ e pegar a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ de T_pN associada a esta parametrização. Então X será diferenciável se e só se as funções a_i forem diferenciáveis para qualquer parametrização $\mathbf{x}$.

Com essa idéia é possível pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, do anel $\mathcal{D}(N)$ das funções diferenciáveis em N no anel $\mathcal{F}(N)$ das funções em N, definida por

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização $\mathbf{x}$. Neste caso é imediato verificar que X é diferenciável se e só se $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

Lema 1.2.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável N. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}(N)$, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 1.2.2. O campo vetorial Z dado pelo lema anterior é chamado colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 1.2.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em N, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$(anticomutatividade),

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade),

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi),

(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

O colchete [X,Y] pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias"de X.

1.3 Métricas Riemannianas

Definição 1.3.1. Para cada ponto p de uma variedade diferenciável M associe um produto interno $\langle , \rangle_p$ definido no espaço tangente T_pM, de modo que ao tomarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ de M em p, a função $g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$ é diferenciável em U, onde $q = \mathbf{x}(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, ..., 1, ..., 0)$. A função g_{ij} é chamada uma métrica riemanniana (ou estrutura riemanniana) em M.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica riemanniana é dizer que a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V, para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M. Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica riemanniana é denominada variedade riemanniana.

Exemplo 1. Seja $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. $\mathbb{R}^n$ é chamado espaço euclidiano de dimensão n e sua métrica é chamada métrica euclidiana.

Definição 1.3.2. Um difeomorfismo $f : M \to N$, entre as variedades riemannianas M e N, é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ para\ todo\ p \in M,\ u, v \in T_pM.$$

Definição 1.3.3. Uma aplicação diferenciável $c : I \to M$, de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M, chama-se uma curva (parametrizada).

Definição 1.3.4. Sejam $\langle,\rangle$ e $\langle\langle,\rangle\rangle$ duas métricas em uma variedade diferenciável M, diz-se que essas métricas são conformes se existe uma função positiva diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$ se tenha

$$\langle u, v\rangle_p = f(p)\langle\langle u, v\rangle\rangle_p.$$

Definição 1.3.5. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M, a função $t \to V(t)f$ é uma função diferenciável em I.

Proposição 1.3.1. Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica riemanniana.

1.4 Conexões Afins e Riemannianas

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim ∇ em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, e que para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)\ e\ f, g \in \mathcal{D}(M)$, satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$

Proposição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c,

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I,

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Esta última parte faz sentido, pois $\nabla_X Y(p)$ só depende do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p. De fato seja $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas em torno de p, então podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i \ , \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j \ ,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^{n} x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j X_j \right) = \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j + \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j \\ &= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \end{aligned}$$

onde $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ *e* Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis em U. Portanto $\nabla_X Y(p)$ só depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X.

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.4.2. Sejam $c : I \to M$ uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.

Definição 1.4.3. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos V e W ao longo de c, tivermos $\langle V, W\rangle = constante$.

Proposição 1.4.3. Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Definição 1.4.4. Seja M uma variedade riemanniana. Diz-se que uma conexão afim ∇ em M é:

$a)$ simétrica, se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

$b)$ compatível com a métrica riemanniana, se $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$, a simetria de ∇ implica que $[X_i, X_j] = 0$, $\forall\, i, j = 1, ..., n$, onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Teorema 1.4.1. (Levi-Civita). Dada uma variedade riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

$i)$ ∇ é simétrica.

$ii)$ ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

Tal conexão é chamada conexão de Levi-Civita ou conexão riemanniana de M.

Demonstração: Suponhamos que ∇ satisfazendo $i)$ e $ii)$ acima existe. Então

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \end{aligned}$$

Somando as duas primeiras, adicionando $\langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle$, subtraindo a terceira e usando a simetria de ∇, teremos

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle =$$

$$= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z,\nabla_Y X\rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle Z,\nabla_Y X\rangle &= \tfrac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle \\ &\quad -\langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

A equação (1.1) mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle , \rangle$. Logo, caso exista, ela será única.

Para mostrar a existência, defina ∇ pela equação (1.1), claramente ∇ está bem definida e satisfaz às propriedades desejadas.

□

Agora, para uso posterior, obteremos um resultado escrevendo parte do que foi feito acima em um sistema de coordenadas.

As funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão. Pela equação (1.1) e pela simetria da conexão, temos que

$$\langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l\rangle = \frac{1}{2}\{X_j\langle X_i,X_k\rangle + X_i\langle X_k,X_j\rangle - X_k\langle X_j,X_i\rangle\}$$

Logo

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$ e lembrando que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa que denotaremos por (g^{km}), teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\} g^{km}, \tag{1.2}$$

que é a equação dos símbolos de Christoffel da conexão riemanniana em termos dos g_{ij}. Observe que no caso do $\mathbb{R}^n$, teremos $\Gamma_{ij}^k = 0$.

1.5 Geodésicas

Para o que se segue, M será uma variedade riemanniana munida de sua conexão riemanniana.

Definição 1.5.1. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0. Diz-se que γ é uma geodésica se γ for geodésica para todo $t \in I$.

O comprimento do vetor tangente de uma geodésica $\gamma : I \to M$ é constante, pois

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Assim podemos supor que $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$(isto é, estamos excluindo as geodésicas que se reduzem a pontos). O comprimento de arco s de γ de $t_0 \in I$ a $t \in I$ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que γ está normalizada.

Proposição 1.5.1. Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M,\ \ \mathcal{U} = \{(q, v);\ q \in V,\ v \in T_qM,\ |v| < \varepsilon\},$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v),\ t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon$.

Exemplo 2. Todas as geodésicas do $\mathbb{R}^n$ são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, pois o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p é identificado com $\mathbb{R}^n$ e neste caso a derivada covariante coincide com a derivada usual.

Exemplo 3. Todas as geodésicas da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são os círculos máximos parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco. Com efeito, dados $p \in S^n$ e um vetor unitário $v \in T_pS^n$, a intersecção com S^n do plano que contém a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, o ponto p e o vetor v é um círculo máximo que pode ser parametrizado como a geodésica por p com velocidade v. A unicidade segue-se da proposição anterior.

Proposição 1.5.2. Se uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de arco de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular γ é regular.

Exemplo 4. Seja H^2 o semi-plano superior, isto é, $H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ com a métrica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{y^2}$, onde $\delta_{ij} = 0,\ se\ i \neq j$ ou $\delta_{ij} = 1\ se\ i = j$. Então o segmento $\gamma : [a,b] \to H^2,\ a > 0$, do eixo dos y, dado por $\gamma(t) = (0,t)$ é a imagem de uma geodésica. De fato, para qualquer arco $c : [a,b] \to H^2$ dado por $c(t) = (x(t), y(t))$ com $c(a) = (0,a)$ e $c(b) = (0,b)$, temos que

$$\begin{aligned} l(c) = \int_a^b \left|\frac{dc}{dt}\right| dt &= \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + g_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\frac{dt}{y} \geq \int_a^b \left|\frac{dy}{dt}\right| \frac{dt}{y} \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = l(\gamma), \end{aligned}$$

logo γ minimiza arcos diferenciáveis por partes e pela proposição anterior γ é uma geodésica.

É possível mostrar que as isometrias de H^2

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad z = x + iy, \quad ad - bc = 1,$$

transformam o eixo $0y$ em semi-círculos superiores ou em semi-retas $x = x_0,\ y > 0$. Estas curvas são, portanto, geodésicas de H^2. Em verdade estas são todas as geodésicas de H^2, pois por cada $p \in H^2$ e cada direção de T_pH^2 passa um tal círculo com centro no eixo $0x$ (no caso em que a direção é normal a $0x$, o círculo degenera em uma reta normal a $0x$).

Definição 1.5.2. Uma variedade riemanniana M é (geodesicamente) completa se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.5.1. É possível provar que toda variedade riemanniana conexa e compacta é completa (cf. teorema de Hopf e Rinow em [1]).

1.6 Curvatura

Definição 1.6.1. Seja M uma variedade riemanniana. A curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Exemplo 5. Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $Z = (z_1, ..., z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n)$ *e* $\nabla_Y Z = (Yz_1, ..., Yz_n)$. Logo

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n), \ \nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, ..., XYz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, ..., [X,Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Proposição 1.6.1. A curvatura R de uma variedade riemanniana M satifaz:

$i)$ R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M), \ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M).$

$ii)$ Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M), \ Z, W \in \mathcal{X}(M).$

Proposição 1.6.2. (Primeira Identidade de Bianchi) Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ é válida a relação

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Proposição 1.6.3. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ são válidas as relações

$a)$ $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0.$
$b)$ $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle.$
$c)$ $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle.$
$d)$ $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle.$

Novamente, para uso posterior, obteremos outro resultado escrevendo parte do que foi feito acima em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ em torno do ponto p de M. Podemos escrever

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l,$$

onde R^l_{ijk} são as componentes da curvatura R em $(U, \mathbf{x})$. Assim teremos

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle = \langle \sum_l R^l_{ijk} X_l, X_s\rangle = \sum_l R^l_{ijk} g_{ls} = R_{ijks}$$

Agora vamos obter a expressão de R^l_{ijk} em termos dos coeficientes Γ^k_{ij} da conexão riemanniana.

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k \\ &= \nabla_{X_j}(\sum_l \Gamma^l_{ik}X_l) - \nabla_{X_i}(\sum_l \Gamma^l_{jk}X_l) \\ &= \sum_l \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik}X_l + \sum_l \Gamma^l_{ik}\nabla_{X_j}X_l - \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}X_l \\ &\quad -\sum_l \Gamma^l_{jk}\nabla_{X_i}X_l \end{aligned}$$

donde, obtemos

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}. \tag{1.3}$$

1.7 Curvatura Seccional

Definição 1.7.1. Sejam M uma variedade riemanniana, $p \in M$, $\beta \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $\{x, y\}$ uma base qualquer de β. A curvatura seccional de β em p, $K(\beta) = K(x, y)$, é por definição

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in \beta$. Esta definição não depende

da escolha dos vetores $x, y \in \beta$. De fato, observemos inicialmente que podemos passar da base $\{x, y\}$ de β para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações elementares:
a) $\{x, y\} \longrightarrow \{y, x\}$,
b) $\{x, y\} \longrightarrow \{\lambda x, y\}$,
c) $\{x, y\} \longrightarrow \{x + \lambda y, y\}$.

Agora veremos que $K(x, y)$ é invariante por tais transformações, o que demonstra o afirmado. Para o que se segue denotaremos $\langle K(x, y)x,\ y\rangle$ por (x, y, x, y).

$a) K(y, x) = \frac{(y,x,y,x)}{|y\wedge x|^2} = \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} = K(x, y)$

$b) K(\lambda x, y) = \frac{(\lambda x,y,\lambda x,y)}{|\lambda x\wedge y|^2} = \frac{\lambda^2(x,y,x,y)}{\lambda^2|x\wedge y|^2} = K(x, y)$

$$\begin{aligned} c) K(x + \lambda y, y) &= \tfrac{(x+\lambda y,y,x+\lambda y,y)}{|(x+\lambda y)\wedge y|^2} \\ &= \tfrac{(x,y,x,y)+(x,y,\lambda y,y)+(\lambda y,y,x,y)+(\lambda y,y,\lambda y,y)}{|x\wedge y+\lambda y\wedge y|^2} \\ &= \tfrac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} \\ &= K(x, y). \end{aligned}$$

□

A importância da curvatura seccional é que o conhecimento de $K(\beta)$, para todo β, determina completamente a curvatura R de M.

A partir de agora, escreveremos por simplicidade, $\langle R(x, y)z, t\rangle = (x, y, z, t)$.

Lema 1.7.1. Seja W um espaço vetorial n-dimensional ($n \geq 2$), munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Sejam $R : W \times W \times W \to W$ e $T : W \times W \times W \to W$ aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.6.3 sejam satisfeitas para R e T. Se $\{x, y\}$ é uma base de β, escrevamos

$$K(\beta) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\beta) = \frac{\langle T(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Se para todo $\beta \subset W$, $\ K(\beta) = K'(\beta)$, então R=T.

Demonstração: Basta provar que $\langle R(x, y)z, t\rangle = \langle T(x, y)z, t\rangle$ para quaisquer $x, y, z, t \in W$. Escrevendo $(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t\rangle$ e $(x, y, z, t)' = \langle T(x, y)z, t\rangle$, tem-se, por hipótese, $(x, y, x, y) = (x, y, x, y)'\ \ \forall x, y \in W$, logo

$$(x + z, y, x + z, y) = (x + z, y, x + z, y)'$$

o que implica

$$(x,y,x,y)+2(x,y,z,y)+(z,y,z,y)=(x,y,x,y)'+2(x,y,z,y)'+(z,y,z,y)'$$

e, portanto

$$(x,y,z,y)=(x,y,z,y)' \quad \forall x,y,z\in W.$$

Assim

$$(x,y+t,z,y+t)=(x,y+t,z,y+t)',$$

o que implica

$$(x,y,z,t)-(x,y,z,t)'=(y,z,x,t)-(y,z,x,t)',$$

e a expressão $(x,y,z,t)-(x,y,z,t)'$ é invariante por permutações cíclicas dos três primeiros elementos. Portanto

$$\begin{aligned}
3[(x,y,z,t)-(x,y,z,t)'] &= (x,y,z,t)-(x,y,z,t)'+(x,y,z,t)\\
&\quad -(x,y,z,t)'+(x,y,z,t)-(x,y,z,t)'\\
&= (x,y,z,t)-(x,y,z,t)'+(y,z,x,t)\\
&\quad -(y,z,x,t)'+(z,x,y,t)-(z,x,y,t)'\\
&= (x,y,z,t)+(y,z,x,t)+(z,x,y,t)\\
&\quad -[(x,y,z,t)'+(y,z,x,t)'+(z,x,y,t)']\\
&= 0 \ \ (por\ (a)\ da \text{ proposição 1.6.3}),
\end{aligned}$$

logo

$$(x,y,z,t)=(x,y,z,t)'$$

para todo $x,y,z,t\in W$.

□

Proposição 1.7.1. Sejam M uma variedade riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $T: T_pM\times T_pM\times T_pM\longrightarrow T_pM$ por

$$\langle T(X,Y)Z,W\rangle=\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle-\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle,$$

para todo $X,Y,Z,W\in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a c se e somente se $R=cT$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração: Suponha que $K(p,\beta)=c\ \ \forall\ \beta\subset T_pM$, então

$$c=K(p,\beta)=\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}$$

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)X,Y\rangle &= c(|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2)\\ &= c(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle Y,X\rangle\langle X,Y\rangle)\\ &= c\langle T(X,Y)X,Y\rangle\end{aligned}$$

e como T satisfaz as propriedades (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.6.3 podemos utilizar o lema 1.7.1 para concluir que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle T(X,Y)Z,W\rangle$$

para todo $X,Y,Z,W\in T_pM$. A reciproca é imediata. □

Corolário 1.7.1. Seja M uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante c e seja R a curvatura de M, então podemos escrever

$$R(X,Y)Z = c(\langle X,Z\rangle Y-\langle Y,Z\rangle X)$$

Demonstração: Pela proposição anterior

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c\langle T(X,Y)Z,W\rangle\\ &= c(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)-\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle),\end{aligned}$$

logo

$$\langle R(X,Y)Z-c\langle X,Z\rangle Y+c\langle Y,Z\rangle X\ ,\ W\rangle=0,$$

portanto

$$R(X,Y)Z=c\langle X,Z\rangle Y-c\langle Y,Z\rangle X.$$

□

Corolário 1.7.2. Sejam M^n uma variedade riemanniana n-dimensional, p um ponto de M e $\{e_1,...,e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Escreva $R_{ijkl} = \langle R(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle,\quad i,j,k,l=1,...,n$. Então $K(p,\beta)=c$ para todo $\beta\subset T_pM$, se e somente se

$$R_{ijkl}=c(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde $\delta_{ij}=0$, se $i\neq j$ ou $\delta_{ij}=1$, se $i=j$. Em outras palavras, $K(p,\beta)=c$ para todo $\beta\subset T_pM$ se e somente se $R_{ijij}=-R_{ijji}=c$ para todo $i\neq j$, e $R_{ijkl}=0$ nos outros casos.

Seja $X=Y_n$ um vetor unitário em T_pM e seja $\{Y_1,Y_2,...,Y_{n-1}\}$ uma base ortonormal do hiperplano de T_pM ortogonal a X. A expressão

$$Ric_p(X)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(X,Y_i)X,Y_i\rangle,$$

não depende da escolha da base ortonormal e é chamada curvatura de Ricci na direção X em p.

1.8 Tensores em Variedades Riemannianas

Definição 1.8.1. Um tensor T em uma variedade riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M)}_{r-fatores} \to \mathcal{D}(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, ..., Y_r \in \mathcal{X}(M),\ T(Y_1, ..., Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, ..., fX + gY, ..., Y_r) = fT(Y_1, ..., X, ..., Y_r) + gT(Y_1, ..., Y, ..., Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M),\ f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.8.2. Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r + 1)$ dada por

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z).$$

1.9 Fibrados Vetoriais

Definição 1.9.1. Uma aplicação diferenciável $\pi : E \to M$, onde E e M são variedades diferenciáveis, é dita um fibrado vetorial de dimensão k se em cada ponto p de M, ocorre que:

$i)$ $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k; e

$ii)$ existe uma vizinhança aberta U de p em M e um difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\pi^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, para cada $q \in U$.

Por abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\pi : E \to M$ quando trabalhamos com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades E e M.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ e um subconjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\pi|_F : F \to M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão $i : F \to E$ leva $(\pi|_F)^{-1}(p)$ linearmente sobre $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Definição 1.9.2. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra de π sobre p. Uma seção de um espaço fibrado é uma aplicação $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_M$.

Exemplo 6. Seja $TM = \{(p, v_p)| \ p \in M, \ v_p \in T_pM\}$. A aplicação $\pi : TM \to M$, dada por $\pi(p, v_p) = p$, é um espaço fibrado vetorial de classe C^∞, chamado o espaço fibrado tangente a M.

Uma seção do espaço fibrado tangente TM é um campo de vetores em M. Assim, um campo de vetores X, é para todos os efeitos, uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.

Exemplo 7. Sejam $\langle , \rangle$ uma métrica riemanniana em M^m e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^\perp \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_pN; definimos $\omega(N) = \{(p, v_p)| \ p \in N, \ v_p \in T_pN^\perp\}$. A aplicação $\pi : \omega(N) \to N$, dada por $\pi(p, v_p) = p$ é um espaço fibrado vetorial, chamado o espaço fibrado normal.

Definição 1.9.3. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇ e $\Gamma(\pi)$ o conjunto das seções de π. Dizemos que a seção $\sigma \in \Gamma(\pi)$ é paralela quando $\nabla_X \sigma = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo se, para toda seção η de F e todo $X \in \mathcal{X}(M)$, tivermos que $\nabla_X \eta$ é uma seção de F.

Capítulo 2

Imersões Isométricas; O Espaço Hiperbólico

2.1 A Segunda Forma Fundamental

Definição 2.1.1. Sejam M^n e $\overline{M}^{\,n+m}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado a codimensão de f. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, diz-se que f é um mergulho. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de $\overline{M}$.

Definição 2.1.2. Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+m}$ entre duas variedades riemannianas com as métricas $\langle\ ,\ \rangle_M$ e $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente, é chamada imersão isométrica (ou riemanniana) se:

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{\overline{M}}$$

para todo $p \in M$, e todo par $X, Y \in T_pM$.

A métrica riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica riemanniana em M: se $X, Y \in T_pM$, define-se $\langle X,\ Y\rangle_M = \langle df_p(X),\ df_p(Y)\rangle_{\overline{M}}$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$ e a métrica de M é então chamada a métrica induzida por f. Em outras palavras, f é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original.

Um caso interessante é quando $h : \overline{M}^{\,n+k} \to M^k$ é diferenciável e $q \in M$ é um valor regular de h (isto é, $dh_p : T_p\overline{M} \to T_{h(p)}M$ é sobrejetiva para todo

$p \in h^{-1}(q)$); é sabido que $h^{-1}(q) \subset \overline{M}$ é então uma subvariedade de $\overline{M}$ de dimensão n; logo podemos dar-lhe a métrica induzida pela imersão.

Por exemplo, seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$. Note que h é diferenciável e que 0 é um valor regular de h; e $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}$ é a esfera unitária do $\mathbb{R}^n$. A métrica induzida por $\mathbb{R}^n$ em S^{n-1} é chamada a métrica canônica de S^{n-1}.

Proposição 2.1.1. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+m}$ uma imersão. Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$.

De acordo com a proposição anterior, podemos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos essas identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$ e também podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p e escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

onde, $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^{\perp} = \cup_{p \in M} T_pM^{\perp}$, chamado fibrado normal a M.

Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\overline{M}|_{f(M)} = \{X \in T\overline{M} : \pi(X) \in f(M), \text{ onde } \pi : T\overline{M} \to \overline{M} \text{ é a projeção}\}$$

é a soma direta do fibrado tangente TM com $TM^{\perp}$, isto é

$$T\overline{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^{\perp}.$$

Logo podemos considerar as seguintes projeções:

$i)$ Tangencial $(\ )^T : T\overline{M} \mid_{f(M)} \to TM$; e

$ii)$ Normal $(\ )^{\perp} : T\overline{M} \mid_{f(M)} \to TM^{\perp}$.

Seja ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. Se X,Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, temos que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}$$

onde, pela unicidade da conexão riemanniana, $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T = \nabla_X Y$.

Para o que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Definição 2.1.3. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+m}$ uma imersão isométrica. A aplicação $\alpha : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ definida por

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

onde para todo X,Y,Z em $\mathcal{X}(U)$ e g em $\mathcal{D}(U)$, tem as seguintes propriedades:

i) $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$;
ii) $\alpha(X+Z,Y) = \alpha(X,Y) + \alpha(Z,Y)$;
iii) $\alpha(gX,Y) = g\alpha(X,Y)$.

Isto é, α é simétrica e bilinear sobre $\mathcal{D}(U)$.

Demonstração: Para o que se segue considere $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{g}$, extensões locais a $\overline{M}$. E observe que em M, $\overline{g} = g$ e $[\overline{X},\overline{Y}] = [X,Y]$.

$$\begin{aligned} i)\ \alpha(X,Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \\ &= [\overline{X},\overline{Y}] + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - [X,Y] - \nabla_Y X \\ &= \alpha(Y,X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ \alpha(X+Z,Y) &= \overline{\nabla}_{(\overline{X}+\overline{Z})}\overline{Y} - \nabla_{(X+Z)} Y \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{Y} - \nabla_X Y - \nabla_Z Y \\ &= \alpha(X,Y) + \alpha(Z,Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii)\ \alpha(gX,Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{g}\,\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_{gX} Y \\ &= \overline{g}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - g\nabla_X Y \\ &= g\alpha(X,Y). \end{aligned}$$

$\square$

Essa aplicação será chamada a segunda forma fundamental de f, onde a equação

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$$

é denominada *Fórmula de Gauss.*

Note que $\alpha(X,Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M, pois

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}$$

Agora veremos que a aplicação α está bem definida, isto é que $\alpha(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X},\overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{W}$ é uma outra extensão de X (então $\overline{X}-\overline{W}=0$ em M) e $\overline{V}$ é uma outra extensão de Y (então $\overline{Y}-\overline{V}=0$ ao longo de uma trajetória de X), teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}-\nabla_X Y)-(\overline{\nabla}_{\overline{W}}\overline{Y}-\nabla_X Y)=\overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{W}}\overline{Y}=0, \ \ e$$

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}-\nabla_X Y)-(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{V}-\nabla_X Y)=\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y}-\overline{V})=0.$$

Portanto α está bem definida.

Exprimindo α em um sistema de coordenadas, concluímos que, como α é bilinear, o valor de $\alpha(X,Y)(p)$ depende apenas de X(p) e Y(p).

Consideremos agora campos de vetores X de TM e ξ de $TM^{\perp}$, e denotemos por $\mathcal{A}_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X\xi$, isto é

$$\mathcal{A}_\xi X=-(\overline{\nabla}_X\xi)^T.$$

Observe que para todo $Y\in TM$ temos

$$\begin{array}{rcl} X\langle\xi,Y\rangle & = & \langle\overline{\nabla}_X\xi,Y\rangle+\langle\xi,\overline{\nabla}_X Y\rangle \\ 0 & = & \langle(\overline{\nabla}_X\xi)^T+(\overline{\nabla}_X\xi)^{\perp},Y\rangle+\langle\xi,\nabla_X Y+\alpha(X,Y)\rangle \\ 0 & = & \langle-\mathcal{A}_\xi X,Y\rangle+\langle\xi,\alpha(X,Y)\rangle. \end{array}$$

Assim,

$$\langle\mathcal{A}_\xi X,Y\rangle=\langle\alpha(X,Y),\xi\rangle.$$

Portanto fica bem definida a aplicação $\mathcal{A}:TM\times TM^{\perp}\to TM$ dada por $\mathcal{A}(X,\xi)=\mathcal{A}_\xi X$, que é bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$, pois a aplicação α e a métrica são bilineares sobre $\mathcal{D}(M)$. Como α é simétrica a aplicação $\mathcal{A}_\xi:TM\to TM$ também é simétrica (isto é, $\langle\mathcal{A}_\xi X,Y\rangle=\langle X,\mathcal{A}_\xi Y\rangle$ para todo $X,Y\in TM$) e linear sobre $\mathcal{D}(M)$. A aplicação $\mathcal{A}_\xi$ é chamada *Operador de Weingarten* ou, por um abuso de linguagem, segunda forma fundamental na direção de ξ.

Exemplo 8. No caso particular de imersões $f:M^n\to\overline{M}^{n+1}$, isto é com codimenção 1, $f(M)\subset\overline{M}$ é chamada uma hipersuperfície.

Seja $p\in M$ e $\xi\in T_pM^{\perp},|\xi|=1$. Já que $\mathcal{A}_\xi:T_pM\to T_pM$ é simétrica, pelo teorema espectral existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1,...,e_n\}$ de T_pM com valores próprios $\lambda_1,...,\lambda_n$, ou seja $\mathcal{A}_\xi(e_i)=\lambda_i e_i,\ i=1,...,n$. Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis, podemos escolher orientações para M e $\overline{M}$, então o vetor ξ fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, ..., e_n\}$ seja uma base na orientação de M e $\{e_1, ..., e_n, \xi\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f. As funções simétricas de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $det(\mathcal{A}_\xi) = \lambda_1 ... \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de f.

No caso em que o espaço ambiente $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{A}_\xi$ tem uma interpretação geométrica interessante. Sejam N uma extensão local de ξ, unitária e normal a M; S^n a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$; e defina a *aplicação normal de Gauss*, $g : M^n \to S^n$ transladando a origem do campo N para a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ e fazendo $g(q) =$ ponto final do transladado de $N(q)$. Como T_qM e $T_{g(q)}S^n$ são paralelos, podemos identificá-los, então $dg_q : T_qM \to T_qM$ é dada por

$$dg_q(X) = \frac{d}{dt}(N \circ \gamma(t))\Big|_{t=0} = \overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^T = -\mathcal{A}_\xi X,$$

onde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável com $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = X$, e onde usamos o fato que $\langle N, N \rangle = 1$ para garantir que $\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^T$. Segue-se que $-\mathcal{A}_\xi$ é a derivada da aplicação norma Gauss.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, que denotamos por $\nabla^\perp_X \xi$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal $TM^\perp$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de f e assim obtemos a *Fórmula de Weingarten*

$$\overline{\nabla}_X \xi = -\mathcal{A}_\xi X + \nabla^\perp_X \xi.$$

Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em um ponto $p \in M$ se para todo $\xi \in T_pM^\perp$ a segunda forma fundamental $\mathcal{A}_\xi$ é identicamente nula em p. A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica em todo $p \in M$.

Proposição 2.1.2. Uma imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e somente se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

Demonstração: Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam ξ uma extensão local, normal a M, de um vetor normal e em p e X uma extensão local, tangente a M de $\gamma'(t)$. Assim tem-se em p

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_e x, x \rangle &= \langle \alpha(X, X), \xi \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X X - \nabla_X X, \xi \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X X, \xi \rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X X)^T + (\overline{\nabla}_X X)^\perp, \xi \rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X X)^\perp, \xi \rangle, \end{aligned}$$

logo f é geodésica em p se e somente se, para todo $X \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a X em p satisfaz a condição: $\overline{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto f é geodésica em p se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

$\square$

O vetor curvatura média de uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+p}$ no ponto p de M é o vetor normal a M em p, definido por $H_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i, X_i)$, onde $\{X_1, ..., X_n\}$ é um referencial ortonormal tangente a M em p e α é a segunda forma fundamental de f. Dizemos que uma subvariedade é mínima se $H_p \equiv 0$ para todo ponto p da subvariedade.

2.2 As Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica

Proposição 2.2.1. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+p}$ uma imersão isométrica, são válidas as seguintes equações:
i) Equação de Gauss

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle - \langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle,$$

onde $K(X,Y)$ e $\overline{K}(X,Y)$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$.

ii) Equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z),$$

para todo $X, Y, Z \in TM$.

iii) Equação de Ricci

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle \;=\; \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle + \langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y\rangle,$$

$\forall X, Y \in TM \;\; e \;\; \xi, \eta \in TM^{\perp}$, onde $[\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi$; e $R, \overline{R}$ e $R^{\perp}$ são os tensores curvatura de $M, \overline{M}$ e $TM^{\perp}$, respectivamente.

Demonstração: Sejam $X, Y, Z \in TM$, então

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\alpha(Y,Z)+\nabla_Y Z)\\ &= \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)+\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z\end{aligned}$$

Pelas fórmulas de Gauss e Weingarten, temos

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = -\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z).$$

Analogamente,

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = -\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) + \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z).$$

Novamente pela fórmula de Gauss, temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Substituindo esses resultados em

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z.\ \ Fica$$

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha([X,Y],Z) + \mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X\\ -\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde R e $\overline{R}$ são os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente.

Tomando a componente tangencial, de $\overline{R}$ em (2.1), temos

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle,$$

obtendo assim, a *Equação de Gauss*,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle - \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle + \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)X,Y\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \langle\overline{R}(X,Y)X,Y\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$, a equação de Gauss torna-se

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle.$$

Agora tomando a componente normal de $\overline{R}$ em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= (R(X,Y)Z)^{\perp} - \alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha([X,Y],Z) \\
&\quad -\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&= -\alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&\quad -\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&= -\alpha(X,\nabla_Y Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z) + \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) \\
&\quad -\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&= -(\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&\quad -\alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z),
\end{aligned}$$

o que implica na *Equação de Codazzi*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z),$$

onde por definição

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z).$$

Observe que $\nabla^{\perp}\alpha$ é multilinear sobre $\mathcal{D}(M)$. $\nabla^{\perp}$ pode ser vista como uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{L}_2(TM \times TM, TM^{\perp})$.

Denotaremos por $R^{\perp}$o tensor curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$, que é

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$.

Novamente, utilizando as fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\xi &= \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi + \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi \\
&= \overline{\nabla}_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \overline{\nabla}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \overline{\nabla}_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \overline{\nabla}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \mathcal{A}_\xi [X,Y] \\
&\quad +\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi \\
&= \alpha(Y, -\mathcal{A}_\xi X) + \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y + \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi + \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y) \\
&\quad +\nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X - \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \mathcal{A}_\xi [X,Y] + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\xi &= R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y) + \nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X \\
&\quad -\alpha(Y,\mathcal{A}_\xi X) - \nabla_Y(\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y - \mathcal{A}_\xi [X,Y] \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Tomando a componente normal de $\overline{R}(X,Y)\xi$ em (2.2) temos, a *Equação de Ricci*

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y) - \alpha(Y,\mathcal{A}_\xi X).$$

Agora tomando em (2.2) o produto interno por $\eta \in TM^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle &= \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle \alpha(X,\mathcal{A}_{\xi}Y),\eta\rangle - \langle \alpha(Y,\mathcal{A}_{\xi}X),\eta\rangle \\
&= \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle \mathcal{A}_{\eta}X,\mathcal{A}_{\xi}Y\rangle - \langle \mathcal{A}_{\eta}Y,\mathcal{A}_{\xi}X\rangle \\
&= \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle \mathcal{A}_{\xi}\mathcal{A}_{\eta}X,Y\rangle - \langle Y,\mathcal{A}_{\eta}\mathcal{A}_{\xi}X\rangle \\
&= \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]X,Y\rangle,
\end{aligned}$$

e a equação de Ricci pode ser escrita na forma

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]X,Y\rangle,$$

onde $[\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}] = \mathcal{A}_{\xi}\mathcal{A}_{\eta} - \mathcal{A}_{\eta}\mathcal{A}_{\xi}$.

Observação 2.2.1. No caso em que o espaço ambiente $\overline{M}$, tem curvatura seccional constante, para $X,Y,Z \in TM$ e $\xi,\eta \in TM^{\perp}$, as equações de Codazzi e Ricci se resumem, respectivamente, a:

i) $(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z)$;

ii) $\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = -\langle [\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]X,Y\rangle$.

Segue-se de (ii) que $R^{\perp} = 0$ se, e somente se $[\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}] = 0$ para todo ξ,η, isto é, se e só se para todo $p \in M$ existe uma base ortogonal de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os $\mathcal{A}_{\xi},\ \xi \in T_pM^{\perp}$.

Observação 2.2.2. No caso de hipersuperfícies $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+1}$, a equação de Gauss se expressa de forma mais simples. Sejam $p \in M$ e $\xi \in T_pM^{\perp},\ |\xi| = 1$, e $\{e_1,...,e_n\}$ a base ortonormal de T_pM^n que diagonaliza o operador de Weingarten $\mathcal{A}_{\xi} = \mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i,\ i = 1,...,n$, onde $\lambda_1,...,\lambda_n$ são os valores próprios de $\mathcal{A}$. Então se $i \neq j$

$$K(e_i,e_j) - \overline{K}(e_i,e_j) = \lambda_i\lambda_j.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}(e_i),e_j\rangle &= \langle \alpha(e_i,e_j),\xi\rangle \\
\langle \lambda_i e_i,e_j\rangle &= \langle \alpha(e_i,e_j),\xi\rangle \\
0 &= \langle \alpha(e_i,e_j),\xi\rangle, \ \text{ logo } \ \alpha(e_i,e_j) = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(e_i,e_i),\alpha(e_j,e_j)\rangle &= \langle \langle \alpha(e_i,e_i),\xi\rangle\xi,\ \langle \alpha(e_j,e_j),\xi\rangle\xi\rangle \\
&= \langle \alpha(e_i,e_i),\xi\rangle\langle \alpha(e_j,e_j),\xi\rangle\langle \xi,\xi\rangle \\
&= \lambda_i\lambda_j.
\end{aligned}$$

Exemplo 9. Vamos utlilizar este resultado para provar que a curvatura seccional da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante 1.

Orientando S^n pelo campo normal unitário $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$, teremos que a aplicação normal de Gauss é então igual a $(-I)$, onde I é a identidade de S^n. Decorre daí que $\mathcal{A}$ tem todos os seus valores próprios iguais a 1. Isto significa que para todo $p \in S^n$, todo $v \in T_pS^n$ é um vetor próprio. Usando a equação de Gauss, conclui-se que qualquer curvatura seccional de S^n é igual a 1, como havíamos afirmado.

Dado uma base ortonormal $\xi_1, ..., \xi_p$ de $T_xM^{\perp}$ escrevemos $\mathcal{A}_\gamma = \mathcal{A}_{\xi_\gamma}$ e chamaremos os $\mathcal{A}_\gamma{}'s$ as segundas formas fundamentais associadas aos $\xi_1, ..., \xi_p$. Se $\xi_1, ..., \xi_p$ são agora campos de vetores ortonormais normais em uma vizinhança U de x, então determinamos as formas de conexões $s_{\gamma\beta}$ em U por

$$\nabla^{\perp}_X \xi_\gamma = \sum_\beta s_{\gamma\beta}(X)\xi_\beta$$

para $X \in T_xM$. Assim teremos as seguintes relações

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X,Y) = \sum_{\gamma=1}^{p} \langle \alpha(X,Y), \xi_\gamma \rangle \xi_\gamma \quad \text{e como}$$

$$\langle \alpha(X,Y), \xi_\gamma \rangle = \langle \mathcal{A}_{\xi_\gamma} X, Y \rangle, \quad \text{tem-se} \tag{2.3}$$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_\gamma \langle \mathcal{A}_\gamma X, Y \rangle \xi_\gamma \ , \tag{2.4}$$

$$\langle \mathcal{A}_\gamma X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{A}_\gamma Y \rangle \ ,$$

$$\overline{\nabla}_X \xi_\gamma = -\mathcal{A}_\gamma X + \nabla^{\perp}_X \xi_\gamma = -\mathcal{A}_\gamma X + \sum_\beta s_{\gamma\beta}(X)\xi_\beta \ , \tag{2.5}$$

$$s_{\gamma\beta} = -s_{\beta\gamma},$$

pela equação de Ricci

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi_\gamma, \eta \rangle = -\langle [\mathcal{A}_{\xi_\gamma}, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle$$

e como

$$R^{\perp}(X,Y)\xi_\gamma = \sum_\beta \langle R^{\perp}(X,Y)\xi_\gamma \ , \ \xi_\beta \rangle \xi_\beta,$$

logo

$$R^{\perp}(X,Y)\xi_\gamma = -\sum_\beta \langle [\mathcal{A}_\gamma, \mathcal{A}_\beta]X, Y \rangle \xi_\beta, \tag{2.6}$$

onde X e Y são tangentes a M^n.

2.3 O Espaço Hiperbólico

As variedades riemannianas mais simples são aquelas de curvatura seccional constante, as quais são conhecidas como os espaços de curvatura constante. A propriedade importante desses espaços é que eles possuem um número suficientemente grande de isometrias locais (Cf. Teorema de E. Cartan em [1]).

Analisando a definição de curvatura seccional podemos verificar que quando multiplicamos uma métrica riemanniana por uma constante positiva c, então a sua curvatura seccional é multiplicada por $\frac{1}{c}$. Logo, a menos de uma semelhança, podemos supor que a curvatura seccional K de uma variedade é 1, 0, ou -1.

Os exemplos 5 ($\mathbb{R}^n,\ K \equiv 0$) e 9 ($S^n,\ K \equiv 1$) vistos anteriormente, são exemplos de espaços de curvatura constante. Agora veremos uma variedade riemanniana, o espaço hiperbólico H^n de dimensão n, que tem curvatura seccional constante -1. As variedades $\mathbb{R}^n,\ S^n,\ H^n$ são completas e simplesmente conexas. É possível provar que estas são essencialmente as únicas variedades riemannianas completas, simplesmente conexas e com curvatura seccional constante.

Considere o semi-espaço do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e introduza em H^n a métrica

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

Note que H^n é simplesmente conexo. Mostraremos que com esta métrica H^n tem curvatura seccional constante -1.

Para isso utilizaremos o caso mais geral seguinte: considere em H^n a métrica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}$, onde F é uma função positiva diferenciável em H^n; tal métrica é conforme à métrica usual do $\mathbb{R}^n$. A matriz g_{ij} é invertível e tem inversa $g^{ij} = F^2\delta_{ij}$. Derivando $g_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{F^2}$ com respeito a x_j, teremos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} = -2\frac{\delta_{ik}}{F^3}\frac{\partial F}{\partial x_j}\ ,$$

fazendo $log\ F = f$, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$, $\frac{\partial F}{\partial x_j} = F_j$, fica $\frac{F_j}{F} = f_j$, logo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} = -2\frac{\delta_{ik}}{F^2} f_j.$$

Agora pela equação (1.2), temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \tfrac{1}{2}\sum_m \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m}g_{ij}\right\} g^{mk} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \tfrac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \tfrac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\} F^2\end{aligned}$$

(pois $g^{mk} = F^2\delta_{mk}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jm}\delta_{mk} = \frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}$). Assim

$$\Gamma_{ij}^k = -\delta_{jk}f_i - \delta_{ki}f_j + \delta_{ij}f_k.$$

Analizando esta equação observamos que:
- Se os três índices são distintos, então $\Gamma_{ij}^k = 0$.
- Se dois índices são iguais, então

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j\ ,\ \ \Gamma_{ij}^j = -f_i\ ,\ \ \Gamma_{ii}^i = -f_i\ ,\ \ \Gamma_{ii}^j = f_j\ .$$

Lembrando que $R_{ijks} = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls}$, logo

$$\begin{aligned}R_{ijij} &= \sum_l R_{iji}^l g_{lj} = R_{iji}^j g_{jj} = R_{iji}^j \frac{1}{F^2}\ , \text{ que pela equação (1.3), fica} \\ &= \tfrac{1}{F^2}\left\{\sum_l \Gamma_{ii}^l\Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l\Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j\right\}.\end{aligned}$$

Mas $\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$, logo

$$\begin{aligned}F^2R_{ijij} &= -\sum_{l\ (l\neq i, l\neq j)} f_lf_l + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\ &= -\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}\ .\end{aligned}$$

Além disto, $R_{ijkl} = 0$ se os quatro índices são distintos, e se três índices são distintos, temos

$$R_{ijk}^i = -f_kf_j - f_{kj}\ ,\ \ R_{ijk}^j = f_if_k + f_{ki}\ ,\ \ R_{ijk}^k = 0. \tag{3.1}$$

Agora vamos calcular a curvatura seccional K do plano gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$

$$K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij}F^4 = \left(-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}\right)F^2,$$

que em particular para o caso $F^2 = x_n^2$, o que implica $f = log\ x_n$, teremos:
- Se $i \neq n$ e $j \neq n$

$$K_{ij} = \left(-\frac{1}{x_n^2}\right) x_n^2 = -1;$$

- Se $i = n$ e $j \neq n$

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn})F^2 = \left(-\frac{1}{x_n^2}\right) x_n^2 = -1;$$

- Finalmenete se $i \neq j$ e $j = n$, teremos ainda $K_{in} = -1$. Usando as expressões em (3.1) e o Corolário 1.7.2, concluímos que a curvatura seccional de H^n é constante e igual a -1.

Agora vamos provar que H^n é completo, para isso precizaremos da proposição abaixo.

Proposição 2.3.1. As retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$, e os círculos de H^n cujos planos são perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e cujos centros estão neste hiperplano são geodésicas de H^n.

Demonstração: Note inicialmente que uma isometria de $\mathbb{R}^n$ que só envolve as variáveis $x_1, ..., x_{n-1}$ não altera a métrica g_{ij} descrita acima e é, portanto, uma isometria de H^n. Sendo assim basta considerar retas e círculos no plano $x_1 x_n$. O resultado segue do exemplo 4 do capítulo 1.

□

Agora note que, pelo teorema de existência e unicidade de geodésicas, todas as geodésicas de H^n são do tipo descrito acima. Isto implica que todas as geodésicas de H^n estão contidas em planos perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$. Como tais planos são evidentemente isométricos ao plano hiperbólico, o fato de H^n ser completo é uma consequência de ser o plano hiperbólico completo.

Capítulo 3

Redução de Codimensão de Imersões Regulares

Vamos estudar agora o problema de redução da codimensão de uma imersão isométrica, o que só fará sentido se o espaço ambiente possuir um número razoavelmente grande de subvariedades totalmente geodésicas. Como mencionamos na Sec 2.3, os espaços de curvatura constante satisfazem a esta condição.

3.1 Lemas Básicos

Considere uma imersão C^∞ $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ de uma variedade n-dimensional M^n em uma forma espacial (n+p)-dimensional Q_c^{n+p} de curvatura seccional c, simplesmente conexa se $c \leq 0$. Seja $N(x)$ o primeiro espaço normal de f em $x \in M$, isto é, o subespaço do espaço normal $T_xM^\perp$ que é gerado pelos vetores $\alpha(X,Y)$, com $X, Y \in T_xM$ e $\alpha : TM \times TM \to TM^\perp$ é a segunda forma fundamental da imersão.

O segundo espaço osculador de f em um ponto $x \in M$, ou seja, o subespaço de TQ gerado pela primeira e segunda derivadas de f, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, em coordenadas locais, coincide com a soma direta do espaço tangente T_xM e o primeiro espaço normal $N(x)$. Diz-se que a imersão é 1-k-regular se $N(x)$ tem dimensão constante k, ou equivalentemente, se o segundo espaço osculador tem dimensão constante $n+k$; e que a codimensão de f pode ser reduzida para k, com $0 \leq k < p$, se existe uma subvariedade $(n+k)$-dimensional L^{n+k} de Q_c totalmente geodésica e tal que $f(M) \subset L$. Nossa meta é dar condições que permitirão reduzir a codimensão de imersões 1-1-regulares.

Considere M^n com a métrica induzida pela imersão f. Sejam $\overline{\nabla}$ *e* ∇

as conexões riemannianas de Q_c^{n+p} e M^n, respectivamente, e $\nabla^\perp$ a conexão do fibrado normal $TM^\perp$. Para uma direção normal ξ em $T_qM^\perp$, defina o automorfismo simétrico $\mathcal{A}_\xi$ de T_qM, pela equação $\langle \mathcal{A}_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$, onde $\langle , \rangle$ é o produto interno dado pela métrica de Q_c^{n+p}. Note que o primeiro espaço normal $N(x)$ também pode ser visto como o complemento em $T_xM^\perp$ do subespaço vetorial $N_0(x) = \{\xi \in T_xM^\perp : \mathcal{A}_\xi = 0\}$ de $T_xM^\perp$.

Observação 3.1.1. Segue da definição 1.9.1 que um subfibrado normal de dimensão l de f é uma família $N(x)$, $x \in M$, de subespaços vetoriais de dimensão l de $T_xM^\perp$, com a propriedade de que para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U e campos normais diferenciáveis $\xi_1, ..., \xi_l$, definidos em U, tal que para todo $y \in U$, $\xi_1(y), ..., \xi_l(y)$, geram $N(y)$.

Lema 3.1.1. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana $(n+p)$-dimensional $\overline{M}^{n+p}$. Se N é um subfibrado paralelo de $TM^\perp$ e $N^\perp$ é o seu complemento ortogonal em $TM^\perp$, então $N^\perp$ é um subfibrado paralelo de $TM^\perp$.

Demonstração: Sejam $\xi \in N$ e $\eta \in N^\perp$ campos quaisquer, então

$$\langle \xi, \eta\rangle = 0$$

$$0 = X\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta\rangle,$$

como N é um subfibrado paralelo de $TM^\perp$, $\nabla_X^\perp \xi \in N$, para todo $\xi \in N$, isto é, $\nabla_X^\perp \xi$ não tem componente em $N^\perp$. Assim

$$\langle \nabla_X^\perp \xi, \eta\rangle = 0 \Rightarrow \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta\rangle = 0,$$

logo $\nabla_X^\perp \eta$ não tem componente em N, isto é, $\nabla_X^\perp \eta \in N^\perp$ para todo $\eta \in N^\perp$. Portanto $N^\perp$ é um subfibrado paralelo de $TM^\perp$.

$\square$

Um passo básico na demonstração de redução da codimensão consiste em mostrar que o primeiro espaço normal N é paralelo com respeito a conexão do fibrado normal $\nabla^\perp$, isto é, $\nabla_X^\perp N \subset N$, para todo X em TM. Seja $N^\perp$ o complemento ortogonal de N no espaço normal $TM^\perp$. Se v é uma seção de $N^\perp$ na vizinhança U de M e $\{X_1, ..., X_n\}$ é uma base de campos tangentes em x, tome $B_i = (\nabla_{X_i}^\perp v)^N$, a projeção de $\nabla_{X_i}^\perp v$ em N. Já que v é arbitrário, ao invés de provar que N é paralelo, é suficiente mostrar que $B_i = 0,\ i = 1, ..., n$.

Lema 3.1.2. Para qualquer base de campos tangentes $\{X_1, ..., X_n\}$, tem-se

$$\langle B_i\ , \alpha_{jk}\rangle = \langle B_j\ , \alpha_{ik}\rangle, \quad \text{onde } \ \alpha_{ik} = \alpha(X_i\ , X_k).$$

Demonstração:

$$\langle B_i\ , \alpha_{jk}\rangle = \langle (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N,\ \alpha_{jk}\rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \langle \nabla^{\perp}_{X_i} v,\ \alpha_{jk}\rangle &= \langle (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N + (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^{N^{\perp}},\ \alpha_{jk}\rangle \\ &= \langle (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N,\ \alpha_{jk}\rangle + \langle (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^{N^{\perp}},\ \alpha_{jk}\rangle \\ &= \langle (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N,\ \alpha_{jk}\rangle, \ \text{ já que } \ \langle (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^{N^{\perp}},\ \alpha_{jk}\rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \ \langle B_i\ , \alpha_{jk}\rangle = \langle \nabla^{\perp}_{X_i} v,\ \alpha_{jk}\rangle = -\langle\ v\ , \nabla^{\perp}_{X_i} \alpha_{jk}\rangle, \ \text{ pois } \ \langle v, \alpha_{jk}\rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Assim } \ \langle B_i\ , \alpha_{jk}\rangle &= -\langle v\ ,\ (\nabla^{\perp}_{X_i} \alpha)_{jk} + \alpha(\nabla_{X_i} X_j, X_k) + \alpha(X_j\ , \nabla_{X_i} X_k)\rangle \\ &= -\langle\ v\ , (\nabla^{\perp}_{X_i} \alpha)_{jk}\rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, $\langle B_j\ , \alpha_{ik}\rangle = -\langle\ v\ ,\ (\nabla^{\perp}_{X_j} \alpha)_{ik}\rangle$.

Pela equação de Codazzi, já que Q_c tem curvatura constante, tem-se que

$$(\nabla^{\perp}_{X_i} \alpha)_{jk} = (\nabla^{\perp}_{X_i} \alpha)(X_j\ , X_k) = (\nabla^{\perp}_{X_j} \alpha)(X_i\ , X_k) = (\nabla^{\perp}_{X_j} \alpha)_{ik}.$$

Portanto $\langle B_i\ , \alpha_{jk}\rangle = \langle B_j\ , \alpha_{ik}\rangle$.

□

Lema 3.1.3. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+k}$ uma imersão e U um conjunto aberto de M tal que $f|_U$ é 1-1-regular. Se em cada ponto de U existir alguma curvatura seccional $K \neq c$, então N é paralelo em U.

Demonstração: Na vizinhança de um ponto p em U escolha um referencial de campos normais $\{e_{n+1}, ..., e_{n+k}\}$ tal que e_{n+1} gera N. Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ a base ortonormal de campos tangentes que diagonaliza o operador de Weingarten $\mathcal{A}_{e_{n+1}}$. É suficiente mostrar que para todo $s = n+2, ..., n+k$

$$B_i = (\nabla^{\perp}_{X_i} e_s)^N = 0, \ \ i = 1, ..., n.$$

Como o operador de Weingarten é diagonalizável temos que $\mathcal{A}_{e_{n+1}}(X_i) = \lambda_i X_i$, mas

$$\begin{array}{rcl}\langle \mathcal{A}_{e_{n+1}}(X_i)\ ,X_j\rangle & = & \langle \alpha(X_i\ ,X_j), e_{n+1}\rangle \\ \langle \lambda_i X_i\ ,X_j\rangle & = & \langle \alpha_{ij}\ ,e_{n+1}\rangle \\ \lambda_i\langle X_i\ ,X_j\rangle & = & \langle \alpha_{ij}\ ,e_{n+1}\rangle \\ 0 & = & \langle \alpha_{ij}\ ,e_{n+1}\rangle, \quad \text{logo} \quad \alpha_{ij}=0, \quad \text{para todo } \ i\neq j.\end{array}$$

Pela equação de Gauss

$$\begin{array}{rcl}K(X_j\ ,X_l) & = & \overline{K}(X_j\ ,X_l)+\langle \alpha_{jj}\ ,\alpha_{ll}\rangle-\langle \alpha_{jl}\ ,\alpha_{jl}\rangle \\ K & = & c+\langle \alpha_{jj}\ ,\alpha_{ll}\rangle.\end{array}$$

Como em U, K é identicamente diferente de c, existem índices j e l, $j\neq l$, tal que $\alpha_{jj}\neq 0$ e $\alpha_{ll}\neq 0$. Um dos dois digamos j é diferente de i. Então, pelo lema 3.1.2, $\langle B_i\ ,\alpha_{jj}\rangle=\langle B_j\ ,\alpha_{ij}\rangle=0$, donde $B_i=0$, $\ i=1,...,n$. $\square$

Definição 3.1.1. (índice de nulidade relativa)

Dada uma imersão isométrica $f: M^n \to \overline{M}^{n+p}$ definimos em cada ponto $x\in M$ o índice de nulidade relativa $\nu(x)$ como a dimensão do subespaço $B_x=\{X\in T_xM : \alpha(X,Y)=0, \text{ para todo } Y\in T_xM\}$ de T_xM.

Para imersões 1-1-regulares, como N é gerado por uma única direção normal ξ, o subespaço de nulidade relativa coincide com o núcleo do operador de Weingarten $\mathcal{A}_\xi$. Agora pela análise do que foi feito no lema anteior, temos:
1º) $K\not\equiv c \Leftrightarrow \nu(p)<n-1$, $\forall p\in M$; e
2º) $K\equiv c \Leftrightarrow \nu(p)\geq n-1$, $\forall p\in M$.

Definição 3.1.2. Um campo de l-planos numa variedade M é uma aplicação $\mathcal{B}$ que associa a cada ponto $q\in M$ um subespaço vetorial de dimensão l de T_qM.

Definição 3.1.3. Dado um campo de l-planos $\mathcal{B}$ em uma variedade diferenciável M, diz-se que um campo de vetores X é tangente a $\mathcal{B}$ se $X(p)\in\mathcal{B}_p$ para todo p no domínio de X. Um campo de l-planos $\mathcal{B}$ de classe C^r $(r\geq 1)$ é chamado involutivo, se dados X e Y campos de vetores de classe C^1 tangentes a $\mathcal{B}$, então $[X,Y]$ é tangente a $\mathcal{B}$.

Dizemos que $\mathcal{B}$ é completamente integrável se existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão l e classe C^r em M tal que $T\mathcal{F}=\mathcal{B}$, onde $T\mathcal{F}$ é o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$. Uma folheação de dimensão l de M é, a grosso modo, uma decomposição de M numa união disjunta de subvariedades conexas de dimensão l chamadas folhas. Os planos tangentes às folhas definem um campo de l-planos, o qual é dito completamente integrável.

Para o próximo lema necessitaremos do teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [2].

Teorema 3.1.1. (Frobenius) Seja $\mathcal{B}$ um campo de l-planos de classe C^r $(r \geq 1)$ definido em M. Então $\mathcal{B}$ é completamente integrável se, e somente se é involutivo. Além disto, se alguma destas condições se verificar, a folheação tangente a $\mathcal{B}$ é única.

Lema 3.1.4. Seja $f : M^n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M numa variedade riemanniana $\overline{M}$ de curvatura constante c. Se a dimensão do subespaço B_x (isto é, o índice de nulidade relativa $\nu(x)$) é igual a uma constante l num aberto U de M, então esses subespaços formam uma distribuição integrável (involutiva) cujas folhas são l-subvariedades totalmente geodésicas.

Demonstração: O fato de $B_x = \{X \in T_xM : \ \alpha(X,Y) = 0, \ \forall Y \in T_xM\}$ ter dimensão constante l para todo $x \in U$, implica que B é um campo de l-planos em U, logo para mostrar que B é completamente integrável basta provar que: se X e Y são campos vetoriais diferenciáveis em U, tangentes a distribuição B, então $[X,Y]_x \in B_x$ para todo $x \in U$. Para isso é suficiente provar que $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$ e $\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X$ estão em B_x, pois

$$\begin{aligned}
\alpha([X,Y]_x, Z) &= \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&= \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) \\
&= 0 \ \ \forall Z \in T_xM,
\end{aligned}$$

onde α é a segunda forma fundamental de M com relação a $\overline{M}$. Assim

$$(\nabla_Y^{\perp}\alpha)(Z,X) = \nabla_Y^{\perp}\alpha(Z,X) - \alpha(\nabla_Y Z, X) - \alpha(Z, \nabla_Y X)$$

$$(\nabla_Y^{\perp}\alpha)(Z,X) = -\alpha(Z, \nabla_Y X) \quad (\text{pois } \ X \in B_x)$$

$$(\nabla_Z^{\perp}\alpha)(Y,X) = -\alpha(Z, \nabla_Y X) \quad (\text{por Codazzi})$$

$$\nabla_Z^{\perp}\alpha(Y,X) - \alpha(\nabla_Z Y, X) - \alpha(Y, \nabla_Z X) = -\alpha(Z, \nabla_Y X)$$
$$0 = \alpha(Z, \nabla_Y X), \ \ \forall \ Z \in T_xM, \ \text{pois } X, Y \in B_x,$$

o que implica $\nabla_Y X$(analogamente $\nabla_X Y$) está em B_x. Segue-se que a distribuição B é integrável e pelo teorema de Frobenius, temos que por cada ponto x de U passa uma única variedade maximal P_x de dimensão l, uma folha da distribuição, tal que $(TP_x)_y = B_y$, para todo $y \in U$.

Agora analisando a segunda forma fundamental β de P_x com relação a $\overline{M}$, temos que: se $X, Y \in (TP_x)_y = B_y$, então $\beta(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{B_y^{\perp}} = 0$, onde $(\ )^{B_y^{\perp}}$ denota projeção ortogonal em $B_y^{\perp}$. Portanto P_x é totalmente geodésica em $\overline{M}$. $\square$

Lema 3.1.5. Seja F um conjunto aberto de M onde o índice de nulidade relativa ν da imersão $f : M^n \to Q_c^{n+k}$ é igual a uma constante $l > 0$. Seja $\gamma : [0, a] \to M$ um segmento de geodésica contido em uma folha L da folheação de nulidade relativa. Se o primeiro espaço normal N é paralelo em $\gamma(a)$, então este é paralelo em $\gamma(t)$ para todo t em $[0, a)$.

Demonstração: Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ um referencial de campos tangentes definido em uma vizinhança de um ponto $\gamma(t)$ em F com a propriedade que $\{X_1, ..., X_l\}$ gere o espaço de nulidade relativa D em todos os pontos e tal que $X_1 = \gamma'(t)$ seja o vetor tangente da curva. Pelo lema 3.1.4 a folha L que contém γ é totalmente geodésica, então podemos assumir que os vetores $X_i,\ i = 1, ..., n$, são paralelos ao longo de γ, isto é $\nabla_{\gamma'(t)} X_i = 0,\ \ i = 1, ..., n$.

Primeiramente vamos mostrar que $\nabla^{\perp}_{Y} N \subset N$ para todo Y na distribuição de nulidade relativa D_x, para todo x em F. Suponhamos que v é qualquer campo de vetores normais, definido em uma vizinhança de x que é ortogonal a N, e seja $B_i = (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N$; já que v é arbitrário, é suficiente mostrar que $B_i = 0,\ i = 1, ..., l$. Se $i \leq l$, então pela definição de D_x, $\alpha_{ik} = 0$ para todo k; consequentemente pelo lema 3.1.2 $\langle B_i, \alpha_{jk}\rangle = \langle B_j, \alpha_{ik}\rangle = 0$, para todo j e k, como N é gerado pelos $\alpha_{jk}{}'s,\ j, k = 1, ..., n$, deveremos ter $B_i = 0$.

Agora seja $\{e_1, ..., e_k\}$ um referencial ortonormal de campos normais definido em uma vizinhança de $\gamma([0, a))$ com a propriedade que $\{e_1, ..., e_s\}$ gere o primeiro espaço normal N. Já que $\nabla^{\perp}_{X_i} N \subset N$, então podemos assumir que $\{e_1, ..., e_k\}$ são paralelos ao longo do segmento de geodésica γ. Para um δ fixado, $\delta > s$, e $r,\ r \leq s$, considere as funções

$$f_i(t) = \langle \nabla^{\perp}_{X_i} e_r\ ,\ e_\delta \rangle,\ \ i = l + 1, ..., n.$$

derivando ao longo de γ, obtém-se que

$$\begin{aligned}
f_i'(t) &= X_1 \langle \nabla^{\perp}_{X_i} e_r\ ,\ e_\delta \rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_{X_1} \nabla^{\perp}_{X_i} e_r\ ,\ e_\delta \rangle + \langle \nabla^{\perp}_{X_i} e_r\ ,\ \nabla^{\perp}_{X_1} e_\delta \rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_{X_1} \nabla^{\perp}_{X_i} e_r\ ,\ e_\delta \rangle, \ \text{ pois } \nabla^{\perp}_{X_1} e_\delta = 0 \ \text{ ao longo de } \ \gamma, \\
&= \langle -R^{\perp}(X_1, X_i) e_r, e_\delta \rangle + \langle \nabla^{\perp}_{X_i} \nabla^{\perp}_{X_1} e_r, e_\delta \rangle + \langle \nabla^{\perp}_{[X_1, X_i]} e_r, e_\delta \rangle \\
&= \langle [\mathcal{A}_{e_r}, \mathcal{A}_{e_\delta}] X_1, X_i \rangle + \langle \nabla^{\perp}_{[X_1, X_i]} e_r, e_\delta \rangle + \langle \nabla^{\perp}_{X_i} \nabla^{\perp}_{X_1} e_r, e_\delta \rangle
\end{aligned}$$

(pela equação de Ricci para imersões com espaço ambiente tendo curvatura seccional constante)

$$= \langle [\mathcal{A}_{e_r}, \mathcal{A}_{e_\delta}]X_1, X_i\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{[X_1,X_i]}e_r, e_\delta\rangle + X_i\langle \nabla^{\perp}_{X_1}e_r, e_\delta\rangle - \langle \nabla^{\perp}_{X_1}e_r, \nabla^{\perp}_{X_i}e_\delta\rangle$$

$$= \langle [\mathcal{A}_{e_r}, \mathcal{A}_{e_\delta}]X_1, X_i\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{[X_1,X_i]}e_r, e_\delta\rangle,$$

pois $\nabla^{\perp}_{X_1}e_r$ está sempre em N e $(\nabla^{\perp}_{X_1}e_r)_{\gamma(t)} = \nabla^{\perp}_{\gamma'}e_r = 0$

$= \langle \nabla^{\perp}_{[X_1,X_i]}e_r, e_\delta\rangle$, já que $\mathcal{A}_{e_\delta} = 0$, pois e_δ é perpendicular a N

$= \langle \nabla^{\perp}_{(\nabla_{X_1}X_i - \nabla_{X_i}X_1)}e_r, e_\delta\rangle$

$= -\langle \nabla^{\perp}_{\nabla_{X_i}X_1}e_r, e_\delta\rangle$, pois X_i é paralelo ao longo de γ

$$= -\sum_{j=1}^{n}\langle \nabla_{X_i}X_1, X_j\rangle\langle \nabla^{\perp}_{X_j}e_r, e_\delta\rangle$$

$= -\sum_{j=l+1}^{n}\langle \nabla_{X_i}X_1, X_j\rangle\langle \nabla^{\perp}_{X_j}e_r, e_\delta\rangle$, pois $\nabla^{\perp}_{X_j}e_r$ está em N se $j \leq l$

$$= \sum_{j=l+1}^{n}\langle C(X_i), X_j\rangle f_j(t),$$

onde $C : D^{\perp}_{\gamma(t)} \longrightarrow D^{\perp}_{\gamma(t)}$ é uma aplicação linear definida por $C(Z) = -(\nabla_Z X_1)^{D^{\perp}}$, $D^{\perp}$ é o complemento ortogonal, no espaço normal de D, e $(\ )^{D^{\perp}}$ denota, como é usual, projeção ortogonal em $D^{\perp}$. Se $F(t) = (f_{l+1}(t), ..., f_n(t))$ e $\widetilde{C}_{\gamma(t)}$ é a matriz com coeficientes $\widetilde{C}_{ij} = \langle C(X_i), X_j\rangle_{\gamma(t)}$, então da equação anterior resulta a seguinte equação diferencial

$$F'(t) = \widetilde{C}_{\gamma(t)}F(t).$$

A solução desta equação diferencial é da forma

$$F(t) = exp\left(\int_0^t \widetilde{C}_{\gamma(u)}du\right)F(0).$$

Consequentemente se $F(0) \neq 0$, então $F(a) \neq 0$. Como $F(t) = 0$ para $r \leq s$ arbitrário e $\delta > s$ se, e somente se $\nabla^{\perp}_{X_i}N \subset N,\ i = l+1, ..., n$, tem-se que se N é paralelo em $\gamma(a)$ isto implica que

$$F(a) = 0 \Longrightarrow F(0) = 0 \Longrightarrow F(t) \equiv 0 \Longrightarrow \nabla^{\perp}_{X_i\gamma(t)}N_{\gamma(t)} \subset N_{\gamma(t)},$$

e portanto N é paralelo em $\gamma(t)$, para todo t em $[0, a)$. $\square$

Lema 3.1.6. Seja $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemannian n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana $(n+p)$-dimensional de curvatura seccional constante c. Suponha que o primeiro espaço normal N_1 é invariante por transporte paralelo, com respeito a conexão normal e a dimensão de N_1 é constante l. Seja $N_2(x) = N_1^{\perp}(x)$, onde o complemento ortogonal é tomado em $T_xM^{\perp}$, e para $x \in M^n$ seja $\mathcal{L}(x) = T_xM^n + N_1(x)$. Então para todo $x \in M^n$ existem campos de vetores ortonormais diferenciáveis e normais $\xi_1, ..., \xi_p$, definidos em uma vizinhança U de x, tal que:
a) Para qualquer $y \in U$, $\xi_1(y), ..., \xi_l(y)$ geram $N_1(y)$ e $\xi_{l+1}(y), ..., \xi_p(y)$ geram $N_2(y)$;

b) $\overline{\nabla}_X \xi_\gamma = 0$ em U para $\gamma \geq l+1$ e X tangente a M^n;

c) A família $\mathcal{L}(y)$, $y \in U$, é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão de $\overline{M}^{n+p}$ ao longo de qualquer curva em U.

Demonstração: Como N_1 é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão normal, tem-se que N_2 também o é. Seja $x \in M^n$ e escolha vetores ortonormais normais em x, $\xi_1(x), ..., \xi_p(x)$ tais que $\xi_1(x), ..., \xi_l(x)$ geram $N_1(x)$ e $\xi_{l+1}(x), ..., \xi_p(x)$ geram $N_2(x)$. Estenda $\xi_1, ..., \xi_p$ para campos de vetores ortonormais diferenciáveis e normais definidos em uma vizinhança normal U de x, por transporte paralelo com respeito a conexão normal ao longo das geodésicas que partem de x em M^n. Isto prova (a).

Como N_1 e N_2 são invariantes por transporte paralelo com respeito a conexão normal, tem-se $\nabla_X^{\perp}\xi \in N_1$ (respectivamente N_2) para todo $\xi \in N_1$ (respectivamente N_2) e X em TM. Seja $\xi_1, ..., \xi_p$ como em (a). Lembrando que

$$\nabla_X^{\perp}\xi_\gamma = \sum_\beta s_{\gamma\beta}(X)\xi_\beta,$$

então $s_{\gamma\beta} = 0$ em U para $1 \leq \gamma \leq l$, $l+1 \leq \beta \leq p$ e $1 \leq \beta \leq l$, $l+1 \leq \gamma \leq p$. As equações (2.3) e (2.6) implicam que $R^{\perp}(X,Y)\xi = 0$ para $\xi \in N_2$, e como N_2 é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão normal concluímos que para $\xi \in N_2(y)$, $y \in U$, a translação paralela para ξ com respeito a conexão normal é independente da trajetória em U. Assim $\nabla^{\perp}\xi_\gamma = 0$ em U para $\gamma \geq l+1$, e $s_{\gamma\beta} = 0$ em U para $l+1 \leq \gamma \leq p$, $l+1 \leq \beta \leq p$. Pela equação (2.5), tem-se $\overline{\nabla}_X \xi_\gamma = 0$ para $\gamma \geq l+1$ e X tangente a M^n, provando (b).

Para provar (c) é suficiente mostrar que $\overline{\nabla}_X Z \in \mathcal{L}$ sempre que $Z \in \mathcal{L}$ e X é tangente a M^n. Isto segue de (2.4), (2.5), (a) e (b) acima. $\square$

Teorema 3.1.2. (Erbacher) Considere $\psi : M^n \longrightarrow \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana $(n+p)$-dimensional $\overline{M}_c^{n+p}$ de curvatura seccional constante c. Se o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão do fibrado normal e a dimensão de N_1 é constante igual a l, então existe uma subvariedade $(n+l)$-dimensional L^{n+l} totalmente geodésica de $\overline{M}_c^{n+p}$, tal que $\psi(M^n) \subset L^{n+l}$.

Demonstração: Esta demonstração será dividida em três casos
1º) Caso: $\overline{M}^{n+p} = \mathbb{R}^{n+p}$.

Sejam $x \in M^n$, $\xi_1, ..., \xi_p$ e U como no lema 3.1.6. Defina funções f_γ sobre U por $f_\gamma = \langle \vec{x}, \xi_\gamma \rangle$, onde $\vec{x}$ é o vetor posição. Então

$$X.f_\gamma = \overline{\nabla}_X f_\gamma = \langle X, \xi_\gamma \rangle + \langle \vec{x}, \overline{\nabla}_X \xi_\gamma \rangle = 0$$

para $\gamma \geq l+1$ e X tangente a U. Portanto U está na intersecção de $(p-l)$-hiperplanos, onde os vetores normais são linearmente independentes e o resultado desejado é verdadeiro localmente; isto é, se $x \in M^n$ então existe uma vizinhança U de x e um subespaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+l}$ tal que $\psi(U) \subset \mathbb{R}^{n+l}$. Para encontrar o resultado global usa-se a conexidade de M^n. Seja $x, y \in M^n$ com vizinhanças U e V respectivamente tal que $U \cap V \neq \varnothing$ e $\psi(U) \subset \mathbb{R}_1^{n+l}$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}_2^{n+l}$. Então $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}_1^{n+l} \cap \mathbb{R}_2^{n+l}$. Se $\mathbb{R}_1^{n+l} \neq \mathbb{R}_2^{n+l}$ então $\mathbb{R}_1^{n+l} \cap \mathbb{R}_2^{n+l} = \mathbb{R}^{n+k}$, $k < l$, e isto implica que $dim\ N_1(z) < l$ para $z \in U \cap V$. Como $dim\ N_1 = constante = l$, deve-se ter $\mathbb{R}_1^{n+l} = \mathbb{R}_2^{n+l}$. Isto prova o resultado global.

2º) Caso: $\overline{M}^{n+p} = S^{n+p}$.

Considere S^{n+p} uma esfera unitária com centro na origem de $\mathbb{R}^{n+p+1}$. Seja ξ normal unitário apontando para o interior de S^{n+p}, seja $\widetilde{N}_1(x)$ o primeiro espaço normal para M^n, considerada como uma imersão em $\mathbb{R}^{n+p+1}$, sejam $\widetilde{\nabla}$ a conexão euclidiana de $\mathbb{R}^{n+p+1}$, $\overline{\nabla}$ a conexão de S^{n+p}, e $\xi_1, ..., \xi_p$ escolhido como no lema 3.1.6. Então $\widetilde{\nabla}_X \xi = -X$ e $\overline{\nabla}_X \xi_\gamma = \widetilde{\nabla}_X \xi_\gamma$ para X tangente a M^n. Segue-se de imediato que $\widetilde{N}_1(x) = N_1(x) + [\xi(x)]$ (onde $[\xi(x)]$ representa o espaço gerado por $\xi(x)$) e que $\widetilde{N}_1$ é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão normal para M^n, considerada como uma imersão em $\mathbb{R}^{n+p+1}$. Assim, pelo caso anterior existe uma subvariedade $\mathbb{R}^{n+l+1}$ de $\mathbb{R}^{n+p+1}$ tal que $\psi(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+l+1}$ e

$$\mathbb{R}^{n+l+1} = T_x M^n + N_1(x) + [\xi(x)],$$

para todo $x \in M^n$. Consequentemente $\mathbb{R}^{n+l+1}$ contém ξ e portanto passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+p+1}$. Assim

$$\psi(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+l+1} \cap S^{n+p} = S^{n+l}.$$

3º) Caso: $\overline{M}^{n+p} = H^{n+p}$.

É conveniente considerar H^{n+p} em um espaço de Minkowski $\mathbb{E}^{n+p+1}$. Seja $\mathbb{E}^{n+p+1}$ um espaço de Minkowski com coordenadas globais $x^0, ..., x^{n+p}$ e métrica pseudo-riemanniana g determinada pela forma quadrática

$$g(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + ... + x_{n+p} y_{n+p}$$

Considere a subvariedade H^{n+p} definida por

$$-x_0^2 + x_1^2 + ... + x_{n+p}^2 = -1, \quad x_0 > 0.$$

A métrica pseudo-riemanniana $g(,)$ em $\mathbb{E}^{n+p+1}$ induz uma métrica riemanniana em H^{n+p} tal que H^{n+p} torna-se uma variedade riemanniana simplesmente conexa de curvatura seccional constante -1. Seja $\xi = \vec{x}$, o vetor posição. Então para $x \in H^{n+p}$, $\xi(x)$ é normal a H^{n+p} e $g(\xi(x), \xi(x)) = -1$. Seja $\widetilde{\nabla}$ a conexão euclidiana de $\mathbb{E}^{n+p+1}$, isto é a conexão que é obtida a partir de g; e defina $\mathcal{A}$ por $\widetilde{\nabla}_X \xi = -\mathcal{A}X$ para X tangente a H^{n+p}. Então $\mathcal{A} = -I$ e

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - g(\mathcal{A}X, Y)\xi$$

para X tangente a H^{n+p}. O sinal negativo, diferentemente do sinal positivo como em (2.4), ocorre na última equação pois g é indefinida. Seja $\xi_1, ..., \xi_p$ como no lema 3.1.6 e considere M^n isometricamente imersa em $\mathbb{E}^{n+p+1}$. Então $\overline{\nabla}_X \xi_\gamma = \widetilde{\nabla}_X \xi_\gamma$ para X tangente a M^n. De maneira similar ao argumento no 2º)caso pode-se mostrar que

$$W(x) = \mathcal{L}(x) + [\xi(x)] = T_x M^n + N_1(x) + [\xi(x)]$$

é invariante por transporte paralelo com respeito a conexão euclidiana de $\mathbb{E}^{n+p+1}$. Assim, de maneira similar ao argumento no 1º)caso existe um plano $(n+l+1)$-dimensional $\mathbb{E}^{n+l+1}(= W(x)\ \forall x \in M^n)$ tal que $\psi(M^n) \subset \mathbb{E}^{n+l+1}$. Podemos supor que o ponto $x_0 = 1,\ x_k = 0$ para $k \geq 1$ está em $\psi(M^n)$. Então, como $\mathbb{E}^{n+l+1}$ contém ξ e passa pelo ponto $x_0 = 1,\ x_k = 0$ para $k \geq 1$, concluímos que $\mathbb{E}^{n+l+1}$ é perpendicular ao plano $x_0 = 0$ e passa pela origem de $\mathbb{E}^{n+p+1}$. Assim $H^{n+p} \cap \mathbb{E}^{n+l+1}$ é totalmente geodésica em H^{n+p}, e $\psi(M^n) \subset H^{n+l} = H^{n+p} \cap \mathbb{E}^{n+l+1}$.

Claramente a completude não é essencial nos casos 1, 2 e 3 no sentido que se $\overline{M}^{n+p}$ é um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^{n+p}$, S^{n+p}, *ou* H^{n+p} então os casos 1, 2 e 3 permanecem verdadeiros. Assim quando $\overline{M}_c^{n+p}$

nem é simplesmente conexa, nem completa obtém-se o resultado local: se $x \in M^n$, então existe uma vizinhança U de x tal que $\psi(U)$ está contido em uma subvariedade L_U^{n+l} totalmente geodésica de $\overline{M}^{n+p}$. Obtém-se o resultado global pela conexidade de M^n, por um argumento similar ao utilizado no 1º) caso.

$\square$

3.2 Resultados Principais

Para a prova de nosso primeiro teorema principal necessitaremos do teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [8].

Teorema 3.2.1. Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana completa $(n+k)$-dimensional com curvatura constante $c > 0$, e seja M uma variedade completa n-dimensional com cuvaturas de Ricci maiores ou iguais a c. Se $f : M \to \overline{M}$ é uma imersão isométrica tal que para cada $x \in M$ o índice de nulidade relativa $\nu(x) > 0$, então f é totalmente geodésica.

Teorema 3.2.2. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana compacta e conexa em um espaço $(n+p)$-dimensional Q_c^{n+p} de curvatura seccional constante c, simplesmente conexo se $c \leq 0$. Se f é 1-1-regular, então podemos reduzir a codimensão para 1.

Demonstração: Basta mostrar que em cada ponto x de M, $\nabla_X^{\perp} N \subset N$, para todo X em T_xM, isto implica que o primeiro espaço normal N é paralelo com respeito a conexão do fibrado normal $\nabla^{\perp}$, então usa-se o teorema 3.1.2.

Se um ponto p está no fecho de A= $\{p \in M$; existe um plano β em T_pM, com $K(\beta) \neq c\}$, então pelo lema 3.1.3, tem-se $\nabla_X^{\perp} N \subset N$ para todo X em T_pM.

Como N é gerado por uma única direção normal ξ, o subespaço de nulidade relativa coincide com o núcleo do operador de Weingarten $\mathcal{A}_\xi$. Em um ponto de $B = M - A$ este núcleo tem dimensão $\geq n-1$, já que $K \equiv c$; por outro lado, deve-se ter dimensão exatamente igual a $n-1$, pois a dimensão de N é sempre igual a 1. Isto implica, pelo lema 3.1.4, que o interior de B é folheado por subvariedades $(n-1)$-dimensionais totalmente geodésicas.

Agora de algum ponto q no interior de B caminha-se ao longo de uma geodésica na folheação totalmente geodésica de nulidade relativa; esta geodésica também é uma geodésica do espaço ambiente Q_c^{n+p}. Existem duas possibilidades: a primeira é que a geodésica toca em um ponto do fecho de A, e a segunda é que a geodésica continua indefinidamente no interior de B. A segunda possibilidade nunca pode ocorrer. De fato:

1º) Se $c \leq 0$, a geodésica não pode ser extendida indefinidamente, pois M é compacta e a geodésica de Q_c^{n+p} não é limitada;

2º) Se $c > 0$, então obtém-se uma geodésica fechada inteiramente contida no interior de B, isto implica que existe uma vizinhança onde $K \equiv c$ e onde o índice de nulidade relativa $\nu = n - 1 > 0$. Agora esta é a situação que aparece na demonstração do teorema 3.2.1, donde conclui-se que o índice de nulidade relativa $\nu \equiv n$; contudo, isso não pode ocorrer, pois na nossa imersão N tem dimensão identicamente 1 em todos os pontos, o que implica $\nu \equiv n - 1$.

Consequentemente a geodésica deve passar por um ponto no fecho de A, onde N é paralelo. Finalmente, aplica-se o lema 3.1.5 para concluir que N é paralelo em q, consequentemente em toda parte, isto implica que, pelo teorema de Erbacher, existe uma subvariedade $(n + 1)$-dimensional totalmente geodésica L^{n+1} de Q_c tal que $f(M) \subset L^{n+1}$, isto é, podemos reduzir a codimensão de f para 1.

$\square$

Se for esquecida a condição de compacidade então, como o próximo exemplo mostra é necessária alguma condição extra na métrica induzida pela imersão em M; qualquer condição sobre a curvatura sempre irá se referir a esta métrica.

Exemplo 10. Seja $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+p-1}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco que é substancial em $\mathbb{R}^{n+p-1}$, isto é, que não está contida em algum hiperplano afim de $\mathbb{R}^{n+p-1}$. Se γ tem curvatura não nula em todos os pontos, então o cilindro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+p}$ definido por $f(s,t) = (\gamma(s), t)$, é 1-1-regular, mas sua codimensão não pode ser reduzida.

Esta situação não pode ocorrer se o espaço ambiente tem curvatura positiva, como veremos no próximo teorema.

Teorema 3.2.3. Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana completa e conexa em um espaço $(n+p)$-dimensional Q_c^{n+p} de curvatura seccional constante $c > 0$. Se f é 1-1-regular, então podemos reduzir a codimensão para 1.

Demonstração: Como no teorema 3.2.2, se um ponto p está no fecho de $A = \{p \in M;$ existe um plano β em T_pM, com $K(\beta) \neq c\}$, então pelo lema 3.1.3, tem-se $\nabla_X^\perp N \subset N$ para todo X em T_pM. Já foi visto que o interior de $B = M - A$ é folheado por subvariedades $(n-1)$-dimensionais totalmente geodésicas e que ao caminhar a partir de um ponto q no interior de B, ao longo de uma geodésica na folheação totalmente geodésica de nulidade relativa, no caso de ser $c > 0$ essa geodésica passa por um ponto no fecho de A, onde N é paralelo. Agora, pelo lema 3.1.5, N é paralelo em q, consequentemente em toda parte. O resultado segue pelo teorema de Erbacher.

$\square$

Se o espaço ambiente é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+p}$, com curvaturas de Ricci não-negativas, então pode-se mostrar que o caso do exemplo 10 é a única outra alternativa de reduzir a codimensão. Para isso apresentaremos a seguir alguns teoremas. As demonstrações omitidas podem ser vistas nas respectivas referências.

Teorema 3.2.4. Seja M uma variedade completa com curvaturas de Ricci não-negativas. Então M é isométrica ao produto $\overline{M}\times\mathbb{R}^k$, onde $\overline{M}$ não contém retas e $\mathbb{R}^k$ tem seu tensor métrico padrão.
Demonstração: ver [3].

Teorema 3.2.5. Assuma que:
i) M^n é uma variedade riemanniana completa n-dimensional ($n \geq 2$) de classe C^k ($k \geq 2$), com curvaturas seccionais não-negativas;

ii) $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+e}$, $e > 0$, é uma imersão isométrica C^k;

iii) $\nu(p) > 0 \;\; \forall p \in M$. Seja m=min $\nu(p)$ para $p \in M$.

Então $f(M)$ é um m-cilindro C^{k-1}; isto é, existe uma variedade riemanniana completa M^{n-m} de classe C^{k-1} tal que M^n, $\mathbb{R}^{n+e}$ e f têm fatorizações $M^n = \mathbb{R}^m \times M^{n-m}$, $\mathbb{R}^{n+e} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+e-m}$, $f = i \times g$, onde $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a aplicação identidade e $g : M^{n-m} \to \mathbb{R}^{n+e-m}$ é uma imersão isométrica. Também $f(M^n)$ não é um $(m+1)$-cilindro.
Demonstração: ver [7].

Definição 3.2.1. Seja M uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa de dimensão $n+1$, ($n \geqslant 2$). Um conjunto $\mathcal{C} \subset M$ é fortemente convexo se para quaisquer dois pontos p, q do fecho $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ existe uma única geodésica minimizante de M ligando p a q cujo interior está contido em $\mathcal{C}$.

Definição 3.2.2. Um conjunto conexo $\mathcal{C}$ de M é convexo se para todo ponto p do fecho $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ existe um número $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ tal que $\mathcal{C} \cap B_\epsilon(p)$ é fortemente convexo, onde $B_\epsilon(p)$ é uma bola aberta de centro em p e raio ϵ. Se o interior de $\mathcal{C}$ é não-vazio, dizemos que $\mathcal{C}$ é um corpo convexo de M.

Teorema 3.2.6. (Sacksteder) Seja M uma variedade riemanniana completa n-dimensional ($n \geq 2$) e $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de classe C^{n+1}. Suponha que qualquer curvatura seccional de M seja não-negativa e que pelo menos uma seja positiva. Então a imagem $f(M)$ é a fronteira de um corpo convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Demonstração: ver [10].

Teorema 3.2.7. Seja M^n completa e conexa com curvaturas de Ricci não-negativas. Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica 1-1-regular, então:

$i)$ Podemos reduzir a codimensão de f para 1 e $f(M)$ é a fronteira de um conjunto convexo em um subespaço afim $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+p}$; ou

$ii)$ f é um $(n-1)-$cilindro gerado por uma curva.

Demonstração: Como na demonstração do último teorema, suponha que:

1º) Se algum ponto do interior de $B = M - A$ pode ser ligado ao fecho de A, por uma geodésica contida em uma das folhas da folheação totalmente geodésica de nulidade relativa, então é possível reduzir a codimensão de f para 1.

Observa-se que em codimensão 1 com curvaturas de Ricci positiva, implica curvatura seccional positiva. De fato: seja X em T_qM arbitrário, complete X para uma base ortonormal $\{X, X_2, ..., X_n\}$ de T_qM; tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(X,X), H\rangle &= \langle \alpha(X,X), \tfrac{1}{n}\alpha(X,X) + \tfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\alpha(X_i,X_i)\rangle \\
&= \tfrac{1}{n}\|\alpha(X,X)\|^2 + \tfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\langle \alpha(X,X), \alpha(X_i,X_i)\rangle \\
&\geq \tfrac{1}{n}\|\alpha(X,X)\|^2 + \tfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(\langle \alpha(X,X), \alpha(X_i,X_i)\rangle - \|\alpha(X,X_i)\|^2)
\end{aligned}$$

pela equação de Gauss $K(X,X_i) = \langle \alpha(X,X), \alpha(X_i,X_i)\rangle - \|\alpha(X,X_i)\|^2$,

por outro lado $K(X,X_i) = \frac{\langle R(X,X_i)X,X_i\rangle}{\|X \wedge X_i\|^2} = \langle R(X,X_i)X,X_i\rangle$, logo

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(X,X), H\rangle &\geq \tfrac{1}{n}\|\alpha(X,X)\|^2 + \tfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\langle R(X,X_i)X,X_i\rangle \\
&= \tfrac{1}{n}\|\alpha(X,X)\|^2 + \tfrac{n-1}{n}Ric(X) \geq 0,
\end{aligned}$$

onde $Ric(X)$ é a curvatura de Ricci na direção de X. Consequentemente, $\mathcal{A}_H$ é semi-positiva definida e a curvatura seccional é não-negativa. Finalmente, o teorema 3.2.6 garante que $f(M)$ é a fronteira de um conjunto convexo em um subespaço afim $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+p}$.

2^o) Se nenhum ponto do interior de B pode ser ligado ao fecho de A. Neste caso, existe um ponto p no interior de B tal que toda geodésica partindo de p em alguma direção de uma folha da folheação de nulidade relativa passando por p pode ser extendida indefinidamente. Isto implica que essa folha é um plano afim $(n-1)$-dimensional em $\mathbb{R}^n$. Portanto, geodésicas neste plano minimizam distâncias em M. Consequentemente, pelo teorema 3.2.4, M é localmente isométrica a $\mathbb{R}^n$. Isto, junto com o fato que $dimN = 1$, implica que o índice de nulidade relativa $\nu \equiv n-1 > 0$ em M. Finalmente, pode-se aplicar o teorema 3.2.5, para concluir que a imersão é um $(n-1)-$cilindro gerado por uma curva.

□

O exemplo seguinte mostra a necessidade da condição sobre a curvatura no teorema anterior.

Exemplo 11. Considere uma curva $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^{2+p}$ parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura não identicamente nula; suponha que $\gamma((-\infty, 0])$ está contido num subespaço P de dimensão 2, enquanto que $\gamma((0, +\infty))$ é substancial em $\mathbb{R}^{2+p}$. Seja M uma superfície regrada com as linhas perpendiculares a γ, tal que em $\gamma([-1, \infty))$ as linhas são paralelas e que em $\gamma((-\infty, -1))$ as linhas giram em um espaço tridimensional que contenha P. Esta última porção da superfície terá $K < 0$. A superfície M é 1-1-regular mas nem é um cilindro, nem podemos reduzir sua codimensão .

Para imersões 1-k-regulares com $k > 1$, não podemos esperar resultados muitos gerais em redução de codimensão, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 12. Seja $S_c^2 \to S_1^{2n}$ uma das imersões mínimas da 2-esfera na $2n$-esfera estudada por do Carmo e Wallach em [4]. Elas são 1-2-regulares mas sua codimensão não pode ser reduzida.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - terceira edição.(Projeto Euclides)

[2] Camacho, César, *Teoria geométrica das folheações*, Alcides Lins Neto e César Camacho, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[3] Cheeger, J., Gromoll, D.*The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Differential Geometry 6, 119 – 128, 1971.

[4] do Carmo, M., Wallach, N., *Minimal immersions of spheres into spheres.* Ann. of Math. 93, 43 – 62, 1971.

[5] do Carmo, M., Colares, G., *On minimal immersions with parallel normal curvature tensor*. Geometry and Topology, Lecture Notes in Mathematics 597. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977.

[6] Erbacher, J.A., *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J.Differential Geometry 5, 333 – 340, 1971.

[7] Hartman, P., *On the isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvatures II*, Trans. Amer. Math. Soc. 147, 529 – 540, 1970.

[8] Rodriguez, L.L., *Immersions of non-zero relative nullity in manifolds of constant positive curvature*, Arch. Math.(Basel) 32, 181 – 184, 1979.

[9] Rodriguez, L. and Tribuzy, R., *Reduction of Codimension of Regular Immersions*, Math. Z. 185, 321 – 331, 1984.

[10] Sacksteder, R., *On hypersurfaces with non-negative sectional curvatures*, Amer. J. Math. 82, 609 – 630, 1960.