

João Batista Ponciano

*Toros com curvatura média constante imersos no
Espaço Euclidiano*

Manaus - AM

Dez / 2004

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

João Batista Ponciano

*Toros com curvatura média constante imersos no
Espaço Euclidiano*

Dissertação apresentada à Coordenação do
Mestrado em Matemática da Universidade
Federal do Amazonas para a obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzzy

MESTRADO EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

Manaus - AM

Dez / 2004

Dissertação de Mestrado sob o título "*Toros com curvatura média constante imersos no Espaço Euclidiano*", defendida por João Batista Ponciano e aprovada em 28 de dezembro de 2004, em Manaus, Amazonas, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzzy
Orientador - UFAM

Prof. Dr. José Kenedy Martins
Membro - UFAM

Prof. Dr. Gregório Pacelli Bessa
Membro - UFC

*A Dona Ana, Ana Elisa e Daniela
peço desculpas por não ter querido brilhar.*

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos aos professores e colegas do mestrado.

De maneira especial, gostaria de agradecer:

- ao Professor Dr. Ivan Tribuzzy, por mostrar que eu deveria tentar;
- ao coordenador do curso Professor Dr. Renato Tribuzzy, por achar que eu iria conseguir;
- a DEUS, Senhor de todo o Conhecimento; criador da Geometria do Universo; que atendendo às minhas preces, permitiu que eu cumprisse mais essa etapa!

Resumo

Em 1951 Heinz Hopf [9] conjecturou que "todas as superfícies compactas imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante, eram esferas redondas. "

Em 1986 Henry C. Wente [15] mostrou, através de um contra-exemplo, que existem superfícies compactas imersas em \mathbb{R}^3 , com curvatura média constante, que não são esferas redondas, ou seja, que a conjectura de Hopf não era verdadeira. Nesta dissertação será mostrada a "mais simples" destas superfícies: o toro de Wente com três lóbulos.

Abstract

In 1951 Heinz Hopf [9] conjectured that "all compact surfaces immersed in \mathbb{R}^3 with constant mean curvature, were round spheres. "

In 1986 Henry C. Wente [15] showed, through an counterexample, the existence of compact constant mean curvature surfaces embedded in \mathbb{R}^3 besides the round spheres, that is to say, that Hopf's conjecture was not true. In this Master's thesis it will be shown the simplest of these surfaces: the Wente tori with three lobes.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 11
2	Preliminares	p. 14
2.1	Introdução	p. 14
2.2	Geometria Diferencial de curvas e superfícies	p. 14
2.2.1	Curvas Parametrizadas	p. 14
2.2.2	Curvatura e Torção	p. 15
2.2.3	Movimentos no \mathbb{R}^3	p. 15
2.2.4	Teoria básica das Superfícies	p. 16
2.3	Análise Complexa	p. 21
2.3.1	Funções Analíticas	p. 21
2.3.2	Singularidades	p. 21
2.3.3	Classificação das singularidades isoladas	p. 22
2.3.4	Função Elíptica	p. 22
2.4	Conceitos Gerais	p. 23
3	Geometria Diferencial Clássica	p. 24
3.1	A equação senh-Gordon	p. 24
3.1.1	Pontos não umbílicos em H-superfícies	p. 25

3.1.2	Determinação de uma imersão através de ω	p.25
3.1.3	Condição para ω descrever um toro	p.28
3.1.4	O ângulo θ_j e a distância ϱ_j	p.28
4	Soluções explícitas da equação senh-Gordon	p.29
4.1	Introdução	p.29
4.2	Um sistema auxiliar	p.29
4.3	Uma família de funções elípticas	p.33
4.4	O espaço paramétrico	p.35
4.4.1	Existência de soluções	p.35
5	Interpretação Geométrica das soluções ω	p.39
5.1	Introdução	p.39
5.2	Descrição das H -superfícies com λ_1 -linhas de curvatura planares	p.42
5.2.1	Condição para as λ_1 -linhas de curvatura serem fechadas	p.44
5.2.2	Condição para as λ_2 -linhas de curvatura serem fechadas	p.45
5.2.3	Teorema Principal	p.47
6	Apêndice A	p.48
	Referências	p.51

Lista de Figuras

1	Superfícies de Delaunay	p. 11
2	O retângulo R_{ab}	p. 27
3	As diferentes peças do espaço paramétrico \mathfrak{B}	p. 37
4	O espaço \mathfrak{B} e a discussão de "ser fechado" em termos de $\theta_1, \varrho_1, \theta_2, e \varrho_2$	p. 46
5	O Toro de Wente...	p. 48
6	... com três lóbulos	p. 48
7	O interior do...	p. 49
8	... toro visto...	p. 49
9	...através de cortes	p. 49
10	Imagem do <i>toro transparente</i>	p. 50
11	Interior do toro visto através de corte nos lóbulos	p. 50
12	Imagem da intersecção do toro com um plano escolhido adequadamente	p. 50

Lista de Tabelas

1 Introdução

As superfícies com curvatura média constante têm sido, historicamente, o ponto de chegada em várias pesquisas da Geometria Diferencial Clássica. A solução do problema isoperimétrico; problemas de capilaridade; etc., são alguns exemplos cujas soluções são superfícies com curvatura média constante.

As mais simples destas superfícies são o **plano**, o **cilindro** e a **esfera**. Todas elas são invariantes por rotações. Com esta mesma propriedades incluem-se o **catenóide**, o **nodóide** e o **ondulóide**; superfícies cujo perfil é gerado por um foco de uma seção cônica (para o catenóide, parábolas; para o nodóide, hipérbolas e para o ondulóide, elipses). Coube a Delaunay, em 1841 [7], a observação dessa propriedade para tais superfícies. Por isso, elas são conhecidas nos dias atuais como "*superfícies de Delaunay*".

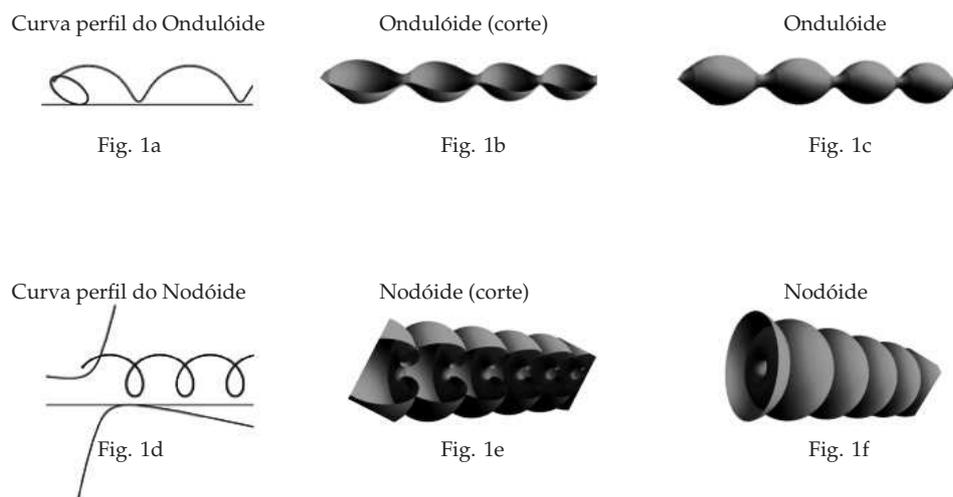


Figura 1: Superfícies de Delaunay

Manfredo do Carmo e Dajczer descreveram uma série de superfícies com curvatura média constante, invariantes por movimentos helicoidais.

Muitos outros pesquisadores têm publicado resultados de pesquisas sobre as descobertas de novas características dessas superfícies.

Observando os exemplos acima, nota-se que a única superfície compacta com curvatura média constante, dentre os exemplos, é a esfera. Os pesquisadores matemáticos já haviam observado este fato há bastante tempo.

Em 1951 Heinz Hopf [9], demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Se $\Sigma : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **imersão** com curvatura média constante. Então $\Sigma(\mathbf{S}^2)$ é uma esfera redonda.*

Atribuiu-se a Hopf, então, uma intrigante questão:

“Todas as superfícies compactas imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante H , são esferas redondas?”

Essa questão passou aos anais da matemática sob a denominação de “*Conjectura de Hopf*”.

O teorema de Hopf responde a questão afirmativamente, desde que a superfície seja homeomorfa à esfera.

Alguns anos depois, em 1958 A.D. Alexandrov [2] mostrou que eram esferas redondas todas as superfícies compactas com curvatura média constante, **mergulhadas** em \mathbb{R}^3 . Aliás, o trabalho seminal de Alexandrov, no que diz respeito à técnica utilizada nas demonstrações, iniciou uma nova abordagem em pesquisa matemática.

Em 1984, J.L. Barbosa e Manfredo do Carmo [3], impondo a condição de **estabilidade** para tais superfícies, chegaram à conclusão que eram redondas.

No ano anterior Hsiang, Teng e Yu mostraram exemplos de hipersuperfícies compactas, não esféricas, imersas em \mathbb{R}^{2k} , com curvatura média constante.

Mas, para a questão atribuída a Hopf, as evidências conduziam a uma resposta afirmativa.

Entretanto, em 1984, Henry C. Wente mostrou [15], com base em soluções especiais da equação **senh-Gordon**, que estas soluções formavam uma superfície fechada. Na verdade, a imersão de um toro com curvatura média constante; respondendo negativamente, à “*Conjectura de Hopf*”.

Baseado em uma aproximação numérica desta solução, **Uwe Abresch** produziu a plotagem de um H -toro. Ou seja, um toro com curvatura média constante H , e observou, nas imagens geradas por computador, que as linhas de curvatura para a *menor* curvatura principal pareciam planares. Então ele decidiu fazer um estudo restrito aos

H -toros com uma família de linhas de curvatura planares.

Em Abril de 1986, *Abresch* em [1], mostrou como obteve uma classificação de todos os H -toros em \mathbb{R}^3 com uma família de linhas de curvatura planares.

No ano seguinte R. Walter [14], obteve de forma explícita as equações que possibilitaram gerar em computador, usando softwares "comuns" como o *Mathematica* imagens do toro descrito por Wente.

O objetivo deste trabalho é exibir o "mais simples" dos toros de Wente. Para isso, o artigo de *Abresch* [1] serviu de base matemática para mostrar a existência de tal toro e o artigo de Walter [14], através das referências [10] e [13] forneceu as equações que levaram à plotagem do toro no *Mathematica*. Vários sites, artigos e softwares foram pesquisados. Além disso, em [8] foi obtido um vídeo sobre o toro. Em [11] e [12] foram obtidos várias imagens e códigos em realidade virtual para a exploração do toro.

A dissertação está dividida em cinco partes. Na primeira parte, estão as definições e dados importantes de Geometria Diferencial, Álgebra, Análise Complexa e conceitos gerais da Matemática, necessários para a compreensão do que será abordado. Na segunda parte, será mostrado como conseguir a imersão de um toro com curvatura média constante no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , usando para isso a teoria de Frenet para as superfícies. Na terceira parte, será exibida uma família de soluções explícitas da equação **senh-Gordon**, definidas em um espaço paramétrico apropriado. Significa dizer: com os parâmetros que pertencem a este espaço paramétrico, as linhas de curvatura que têm, em cada ponto da superfície, o menor valor para uma das curvaturas principais, são curvas fechadas. Finalmente, será dada a interpretação geométrica destas soluções e a consequente classificação das superfícies obtidas a partir delas. No Apêndice A, serão mostradas várias imagens do toro.

2 Preliminares

2.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos a notação que será utilizada no texto, e relacionaremos alguns resultados básicos da Teoria das Curvas e Superfícies em \mathbb{R}^3 . Além disso, recordaremos conceitos em Análise Complexa, Álgebra e demais ramos da matemática que serão necessários para a compreensão do que será abordado.

2.2 Geometria Diferencial de curvas e superfícies

Os detalhes de todas as afirmações feitas nesta seção podem ser obtidos em [5].

2.2.1 Curvas Parametrizadas

Definição 2.1. *Uma curva diferenciável parametrizada, é uma aplicação diferenciável $\alpha : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $\mathbf{I} = (a, b)$ da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^3*

Uma curva diferenciável $\alpha : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{R}^3$ é *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbf{I}$. Onde $t \in \mathbf{I}$ é o *parâmetro* da curva e $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ é o *vetor velocidade* (ou *vetor tangente*) de α em t .

Dado $t \in \mathbf{I}$, o *comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular $\alpha : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0 , é definido por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, o comprimento de arco s é uma função

diferenciável de t e $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$.

Uma *curva plana fechada* é uma curva parametrizada regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que α e todas as suas derivadas coincidem em a e b ; isto é

$$\alpha(a) = \alpha(b), \quad \alpha'(a) = \alpha'(b), \quad \alpha''(a) = \alpha''(b), \dots$$

2.2.2 Curvatura e Torção

Definição 2.2 (Curvatura). Seja $\alpha : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in \mathbf{I}$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ é chamado a curvatura de α em s .

Definição 2.3 (Torção). Seja $\alpha : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in \mathbf{I}$, tal que $\alpha''(s) \neq 0$. O número $\tau(s)$ dado por

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{|k(s)|^2}$$

é chamado a torção de α em s .

Mostra-se facilmente na teoria local das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco que se α é uma curva *plana* (isto é, $\alpha(\mathbf{I})$ está contida em um plano) então $\tau \equiv 0$. Reciprocamente, se $\tau \equiv 0$ e $k \neq 0$ então $\alpha(s)$ está contida em um plano.

2.2.3 Movimentos no \mathbb{R}^3

Definição 2.4 (Translação no \mathbb{R}^3). Uma *translação* por um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ é a aplicação $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ que é dada por

$$A(p) = p + v, \quad p \in \mathbb{R}^3$$

Definição 2.5. Um *movimento* é uma translação, uma rotação, uma inversão ou qualquer combinação das três.

A aplicação linear $\rho : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é uma **transformação ortogonal** quando $\rho u \cdot \rho v = u \cdot v$ para todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Um **movimento rígido** em \mathbb{R}^3 é o resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal com determinante positivo.

Mostra-se que o *comprimento de arco*, a *curvatura* e a *torção* de uma curva parametrizada são invariantes sob movimentos rígidos.

2.2.4 Teoria básica das Superfícies

Definição 2.6 (Superfície Regular). *Um subconjunto $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in \mathbf{S}$, existe uma vizinhança V em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap \mathbf{S}$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. \mathbf{x} é diferenciável. Ou seja, se escrevermos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$, terão derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. \mathbf{x} é um homeomorfismo. Como \mathbf{x} é contínua, pela condição 1, isto significa que \mathbf{x} tem uma inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap \mathbf{S} \rightarrow U$ que é contínua; isto é, \mathbf{x}^{-1} é a restrição de uma aplicação contínua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um aberto W contendo $V \cap \mathbf{S}$.

3. (A condição de regularidade) Para cada $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação \mathbf{x} é chamada uma *parametrização local* ou um *sistema de coordenadas local* em p . A vizinhança $V \cap \mathbf{S}$ de p é chamada *vizinhança coordenada*.

Seja \mathbf{S} uma superfície regular em \mathbb{R}^3 e $p \in \mathbf{S}$ um ponto arbitrário. O *vetor tangente* a \mathbf{S} em p , é o vetor $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{S}$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de vetores tangentes a \mathbf{S} em $p \in \mathbf{S}$ é chamado de *plano tangente* a \mathbf{S} em p e é denotado por $T_p\mathbf{S}$. Observe que $T_p\mathbf{S}$ é o plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $\mathbf{x}(q) = p$, como consequência da

Proposição 2.7. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}$ uma parametrização de uma superfície regular \mathbf{S} e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a \mathbf{S} em $\mathbf{x}(q)$

Demonstração. Ver [5] página 83. □

Uma parametrização local \mathbf{x} determina uma base

$$\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$$

de $T_p\mathbf{S}$ chamada uma base associada a \mathbf{x} .

No plano tangente temos a métrica induzida do "espaço ambiente" \mathbb{R}^3 com a forma quadrática $I_p : T_p\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$, chamada a *primeira forma fundamental* de \mathbf{S} em $p \in \mathbf{S}$. Dada uma parametrização local \mathbf{x} de \mathbf{S} e uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ com $p = \alpha(0)$, então

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde os valores de E , F e G são calculados em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p\mathbf{S}$.

Pela condição 3., da definição de uma superfície regular (2.6), dada uma parametrização local \mathbf{x} de uma superfície \mathbf{S} em \mathbb{R}^3 em um ponto $p \in \mathbf{S}$, a aplicação $N : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p)$$

está bem definida. Esta aplicação é conhecida como *aplicação de Gauss* de \mathbf{S} .

Definição 2.8 (Segunda forma fundamental). *A forma quadrática Π_p , definida em $T_p\mathbf{S}$ por $\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de \mathbf{S} em p .*

Dada uma parametrização local \mathbf{x} em \mathbf{S} em um ponto $p \in \mathbf{S}$ e, considerando uma curva parametrizada α tal que $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ com $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$, temos

$$dN_p(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$$

Como $\langle N, N \rangle = 1$ temos que $N_u, N_v \in T_p\mathbf{S}$ e, portanto

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{aligned} \quad (2.2)$$

para algumas funções a_{ij} .

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

pois, $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$.

A partir de (2.1), (2.2) e (2.3) chegamos nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

As equações (2.2) com os valores acima são conhecidas como *equações de Weingarten*.

Como N é ortogonal aos vetores da base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p\mathbf{S}$, então $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 . Escrevendo as derivadas dos vetores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ e N com relação a esta base, obteremos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados os *símbolos de Christoffel* de \mathbf{S} na parametrização \mathbf{x} . Um fato muito importante é que todos os conceitos geométricos e as propriedades expressas em termos dos *símbolos de Christoffel* são *invariantes por isometrias* (isto é, podem ser calculados a partir da primeira forma fundamental).

Usando o fato que

$$(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0,$$

$$(\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{uv})_v = 0,$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0,$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

que são conhecidas como *equações de Mainardi-Codazzi*.

Definição 2.9 (Curvatura Gaussiana e Curvatura Média). *Seja \mathbf{S} uma superfície em \mathbb{R}^3 e $p \in \mathbf{S}$ um ponto arbitrário. Seja $dN_p : T_p\mathbf{S} \rightarrow T_p\mathbf{S}$ a aplicação diferencial de Gauss. Então o determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de \mathbf{S} em p . O simétrico da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média H de \mathbf{S} em p .*

Em termos da primeira e segunda formas fundamentais K e H são dadas por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.6)$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \quad (2.7)$$

Definição 2.10. *Seja C uma curva regular em \mathbf{S} passando por $p \in \mathbf{S}$, κ a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a \mathbf{S} em p . O número $\kappa_n = \kappa \cos \theta$ é chamado a curvatura normal de $C \subset \mathbf{S}$ em p .*

Verifica-se que o valor da segunda forma fundamental II_p para um vetor unitário $v \in T_p\mathbf{S}$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v . E que para cada $p \in \mathbf{S}$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p\mathbf{S}$ tal que $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$. Além disso, κ_1 e κ_2 são os valores extremos da curvatura normal em p .

Definição 2.11. *A curvatura normal máxima κ_1 e a curvatura normal mínima κ_2 são as curvaturas principais em p ; as direções correspondentes, ou seja, as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são as direções principais em p .*

Definição 2.12 (Linha de curvatura). *Se uma curva regular conexa C em \mathbf{S} é tal que para todo $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p , então C é uma linha de curvatura de \mathbf{S} .*

Em termos das curvaturas principais κ_1, κ_2 , podemos escrever

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Definição 2.13 (Ponto umbílico). *Se, em $p \in \mathbf{S}$, $\kappa_1 = \kappa_2$, então p é um ponto umbílico de \mathbf{S} .*

Para finalizar esta seção, recordemos as definições de *aplicação conforme*, *imersão* e *geodésica*:

Definição 2.14 (Aplicação conforme). *Um difeomorfismo $\varphi : \mathbf{S} \rightarrow \bar{\mathbf{S}}$ é uma aplicação conforme se para todo $p \in \mathbf{S}$ e todos $v_1, v_2 \in T_p \mathbf{S}$ tivermos*

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

onde λ^2 é uma aplicação diferenciável em \mathbf{S} , diferente de zero em todos os pontos. Neste caso, as superfícies \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$ são ditas conformes.

Definição 2.15 (Imersão). *Uma aplicação diferenciável $\varphi : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de \mathbf{S} em \mathbb{R}^3 é uma imersão se a diferencial $d\varphi_p : T_p \mathbf{S} \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

Se, além disso, \mathbf{S} tem a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v, w \rangle_p, \quad v, w \in T_p \mathbf{S},$$

φ é uma imersão isométrica.

Definição 2.16 (Derivada covariante). *Seja w um campo vetorial diferenciável em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Considere a curva parametrizada*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U,$$

com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$. Seja $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a restrição do campo vetorial w à curva α . O vetor obtido pela projeção normal de $\left(\frac{dw}{dt}\right)(0)$ no plano $T_p S$ é chamada a derivada covariante em p do campo vetorial w relativo ao vetor y . Esta derivada covariante é denotada por $\left(\frac{Dw}{dt}\right)(0)$.

Um campo vetorial w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é dito *paralelo* se $\frac{Dw}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

Definição 2.17 (Geodésica). *Uma curva parametrizada (não constante) $\gamma : I \rightarrow S$ é uma geodésica em $t \in I$ se o campo de seus vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t ; isto é,*

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

γ é uma geodésica parametrizada se ela é geodésica para todo $t \in I$.

2.3 Análise Complexa

Os detalhes de todas as afirmações feitas nesta seção podem ser obtidos em [6].

2.3.1 Funções Analíticas

Definição 2.18. Uma função $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica se f é continuamente diferenciável em G .

Exemplo 2.1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ é analítica em \mathbb{C} .

Uma função que, em cada ponto da reta real, pode ser expressa por uma série de potências convergente é chamada *analítica real*.

Se uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida em um subconjunto aberto $G \subset \mathbb{C}$ possui, no ponto $z_0 \in G$, uma derivada com respeito à variável complexa, ou seja: se para cada ponto $z_0 \in G$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{existe;}$$

ela é chamada *função holomorfa*.

Toda função analítica $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ admite uma *expansão em série de potências*:

Se um disco $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\}$ está contido em G , então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Definição 2.19 (Zeros de uma função analítica). Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica e $z_0 \in G$ satisfaz $f(z_0) = 0$, então z_0 é um zero de f , de ordem $m \geq 1$, se existe uma função analítica $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, com $g(z_0) \neq 0$.

2.3.2 Singularidades

Uma função f tem uma *singularidade isolada* em $z = z_0 \in \mathbb{C}$ se existir $R > 0$ tal que f está definida e é analítica em $B(z_0; R) - \{z_0\}$, mas não em $B(z_0; R)$. O ponto z_0 é chamado uma *singularidade removível* se existir uma função analítica $g : B(z_0; R) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para $0 < |z - z_0| < R$.

Exemplo 2.2. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$

Definição 2.20 (Polo). Se $z = z_0 \in \mathbb{C}$ é uma singularidade isolada de f então z_0 é um **polo** de f se $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. Isto é, para qualquer $M > 0$ existe um número $\epsilon > 0$ tal que $|f(z)| \geq M$ sempre que $0 < |z - z_0| < \epsilon$.

Uma singularidade isolada que não é nem um polo, nem uma singularidade removível é chamada *singularidade essencial*.

2.3.3 Classificação das singularidades isoladas

O comportamento de f em uma vizinhança de um ponto singular isolado z_0 pode ser precisamente determinado ao considerarmos a série de Laurent de f em $0 < |z - z_0| < \epsilon$. Como z_0 é um ponto singular isolado, deve existir um $\epsilon > 0$ tal que z_0 é o único ponto singular de f em $0 < |z - z_0| < \epsilon$. A série de Laurent de f em $0 < |z - z_0| < \epsilon$ é:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$$

Se fizermos $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ e $f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} b_k(z - z_0)^k$, $f_2(z)$ é chamada a *parte principal* de f em z_0 .

Teorema 2.21. $f(z)$ tem um polo de ordem m em z_0 se, e somente se, $\frac{1}{f(z)}$ tem um zero de ordem m em z_0 .

2.3.4 Função Elíptica

Se $G \subset \mathbb{C}$ é um aberto e f é uma função definida e analítica em G exceto nos polos, então f é uma *função meromorfa* em G .

Uma função f em \mathbb{C} tem período $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se $f(z + w) = f(z)$. Se f tem períodos w_1, w_2 com $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$ ela é chamada *duplamente periódica*.

Definição 2.22 (Função Elíptica). Uma *função elíptica* é uma função definida no plano complexo que é periódica em duas direções. Formalmente:

é uma função meromorfa f definida em \mathbb{C} para a qual existem dois números complexos w_1 e w_2 tais que $f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Ou seja $f(z + mw_1 + nw_2) = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$.

2.4 Conceitos Gerais

Definição 2.23 (Reticulado). *Sejam $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ vetores linearmente independentes. O conjunto*

$$\Lambda = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n : a_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}$$

é chamado um reticulado. O conjunto dos vetores geradores $\{b_1, \dots, b_n\}$ é uma base de Λ . Um elemento $b \in \Lambda$ é um ponto de Λ .

Observação 2.1.

1. Os vetores unitários $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$ formam uma base de $\mathbb{Z}^n = \{a \in \mathbb{R}^n; a_i \in \mathbb{Z}\}$
2. Λ é um subgrupo de \mathbb{R}^n , isto é, se $b, \bar{b} \in \Lambda$ então $b - \bar{b} \in \Lambda$

Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *um conjunto discreto* se existir um $\epsilon > 0$ tal que $|s_1 - s_2| \geq \epsilon$ para todos $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$.

Teorema 2.24. *$S \subset \mathbb{R}^n$ é um reticulado se, e somente se, S é um subgrupo discreto de \mathbb{R}^n contendo n vetores linearmente independentes.*

Definição 2.25 (Homomorfismo de grupos). *Sejam (G, \cdot) e (\mathcal{G}, \times) dois grupos. Uma função $f : G \mapsto \mathcal{G}$ é um homomorfismo se ela é compatível com as estruturas dos grupos, isto é, se $f(a \cdot b) = f(a) \times f(b)$, $\forall a, b \in G$*

Definição 2.26 (Espaço quociente). *Uma classe de equivalência é o conjunto de todos os pontos que são equivalentes por alguma relação de equivalência. Chamamos espaço quociente ao conjunto das classes de equivalência.*

Exemplo 2.3. Considere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com a relação $(x, y) \sim (u, v)$ se, e somente se, $x - u$ e $y - v$ são inteiros. O espaço quociente obtido a partir desta relação de equivalência será um toro.

Definição 2.27 (Ação de um grupo). *O grupo G age sobre o conjunto X se para cada $g \in G$ existe uma aplicação $x \mapsto gx$ de X em X , tal que*

$$h(gx) = (hg)x \quad \text{para todo } g, h \in G \text{ e } x \in X$$

3 *Geometria Diferencial Clássica*

Nesta seção será mostrado como imergir um toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$ com curvatura média constante no espaço euclidiano tri-dimensional \mathbb{R}^3 . A tarefa de encontrar \mathbb{H} -toros será reduzida a um problema analítico sobre a equação **senh-Gordon** e será desenvolvida através da teoria de Frenet para as superfícies.

Recordemos, inicialmente, o:

Teorema 3.1 (Hopf). *Uma superfície compacta imersa $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura média constante H ou é totalmente umbílica, logo uma esfera redonda, ou terá apenas pontos umbílicos isolados, cada um com índice estritamente negativo.*

A soma destes índices é exatamente a característica de Euler $\chi(M^2)$. Portanto, um \mathbb{H} -toro não pode possuir pontos umbílicos.

3.1 A equação senh-Gordon

A dimensão e a orientação serão normalizados, de forma que $H \equiv \frac{1}{2}$. Além disso, serão indexadas as curvaturas principais λ_1 e λ_2 tal que $\lambda_1 < \lambda_2$. Finalmente, será introduzida a função $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $e^{2\omega}(\lambda_2 - \lambda_1) = 1$.

3.1.1 Pontos não umbílicos em H -superfícies

Proposição 3.2. *Em qualquer H -superfície $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (normalizada para $H \equiv \frac{1}{2}$) uma pequena vizinhança em torno de qualquer ponto p que não é umbílico, pode ser descrita por uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:*

1. $F(0) = p$
2. as curvas $s \mapsto F(s, t)$ e $t \mapsto F(s, t)$ são as λ_1 - e λ_2 linhas de curvatura, respectivamente; isto é, a aplicação de Weingarten nestas coordenadas é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\omega} \sinh \omega & 0 \\ 0 & e^{-\omega} \cosh \omega \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

3. $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ são coordenadas conformes que preservam orientação; mais precisamente:

$$F' \perp \dot{F} \text{ e } |F'| = |\dot{F}| = e^\omega = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-\frac{1}{2}};$$

Aqui $'$ e $\dot{}$ denotam a derivada com respeito às coordenadas s e t em $U \subset \mathbb{R}^2$, ou seja $\frac{\partial}{\partial s}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, respectivamente.

Nestas coordenadas a equação de Gauss torna-se a equação **senh-Gordon**:

$$\Delta \omega + \sinh \omega \cdot \cosh \omega = 0, \quad (3.2)$$

onde $\Delta \omega = \omega'' + \ddot{\omega}$.

3.1.2 Determinação de uma imersão através de ω

Proposição 3.3. *Qualquer solução ω da equação (3.2) definida em uma vizinhança conexa aberta $U \subset \mathbb{R}^2$ de $0 = (0, 0)$ determina uma única imersão $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, com curvatura média $H \equiv \frac{1}{2}$, através de (3.1) uma vez que os seguintes dados iniciais sejam especificados:*

1. O ponto $p = F(0)$ e
2. O referencial orientado e ortogonal $\{e^{-\omega} \cdot F'(0), e^{-\omega} \cdot \dot{F}(0)\}$.

Como esta proposição será a base da construção do H -toro, serão mostradas as equações de Frenet que determinam explicitamente F em termos de ω nas coordenadas

(s, t):

$$\begin{aligned}
F'' &= \omega' F' - \dot{\omega} \dot{F} + e^{\omega} \sinh \omega \cdot N, \\
\dot{F}' &= \dot{\omega} F' + \omega' \dot{F}, \\
\ddot{F} &= -\omega' F' + \dot{\omega} \dot{F} + e^{\omega} \cosh \omega \cdot N, \\
N' &= -e^{-\omega} \sinh \omega \cdot F', \\
\dot{N} &= -e^{-\omega} \cosh \omega \cdot \dot{F},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Onde N denota o campo vetorial unitário associado com a aplicação de Weingarten A . Posteriormente serão usadas também a curvatura κ_i e a torsão τ_i das λ_i -linhas de curvatura ($i = 1, 2$) vistas como curvas em \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}
\kappa_1^2 &= e^{-2\omega} \cdot (\dot{\omega}^2 + \sinh^2 \omega), & \kappa_1^{\text{geod}} &= -e^{-\omega} \cdot \dot{\omega}, \\
\kappa_2^2 &= e^{-2\omega} \cdot (\omega'^2 + \cosh^2 \omega), & \kappa_2^{\text{geod}} &= e^{-\omega} \cdot \omega', \\
\kappa_1^2 \cdot \tau_1 &= e^{-3\omega} \cdot (\sinh \omega \cdot \dot{\omega}' - \cosh \omega \cdot \dot{\omega} \omega') \\
\kappa_2^2 \cdot \tau_2 &= e^{-3\omega} \cdot (\cosh \omega \cdot \dot{\omega}' - \sinh \omega \cdot \dot{\omega} \omega').
\end{aligned} \tag{3.4}$$

O próximo teorema torna as descrições locais em um resultado global.

Teorema 3.4. *As proposições (3.2) e (3.3) determinam as seguintes aplicações injetivas:*

$$\left\{ H \equiv \frac{1}{2} - \text{toro } T^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ com ponto base } p_0 \right\} / \left\{ \text{movimentos em } \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mapsto \mathfrak{M} &= \left\{ \omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ é solução de (3.2) e é invariante com respeito a algum reticulado } \Lambda \subset \mathbb{R}^2 \right\} \\
&\xrightarrow{i_2} \left\{ H \equiv \frac{1}{2} - \text{imersões } F : \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \mid F(0) = p_0, e^{-\omega} \cdot F'(0) = b_1, e^{-\omega} \cdot \dot{F}(0) = b_2 \right\},
\end{aligned}$$

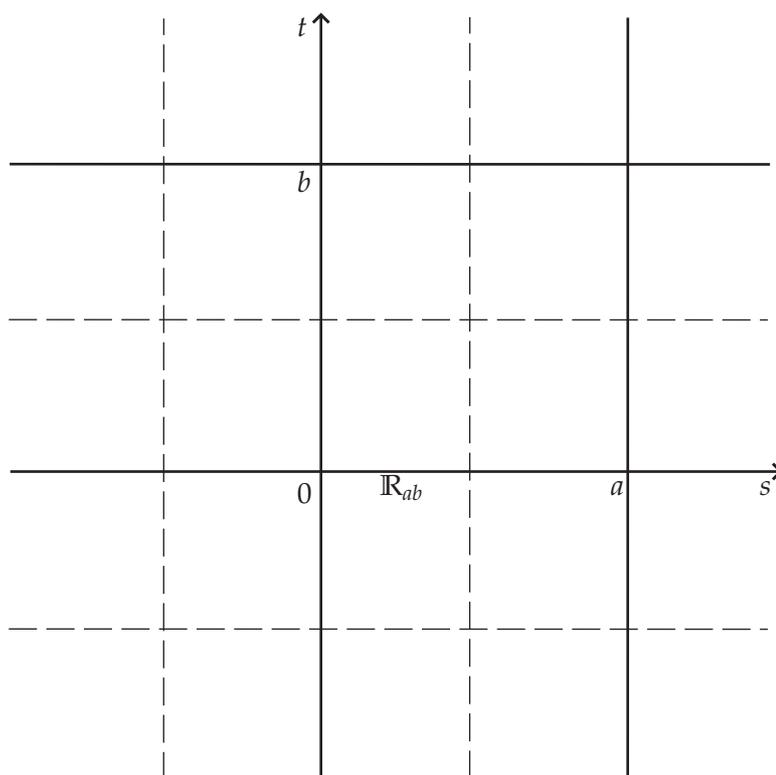
Onde b_1, b_2, b_3 formam a base canônica do \mathbb{R}^3 . Reciprocamente, a aplicação i_2 determina um homomorfismo $\mathcal{X}_\omega : \Lambda_\omega = \{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid \omega(\lambda(x)) = \omega(\lambda + x) = \omega(x), \forall x \in \mathbb{R}^2 \} \rightarrow \{ \text{movimentos em } \mathbb{R}^3 \}$, e a imersão $F = i_2(\omega)$ é equinvariante sob Λ_ω com respeito a \mathcal{X}_ω , isto é: $\mathcal{X}_\omega(\lambda) \circ F = F \circ \lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda_\omega$

Para $\omega \in \mathfrak{M}$, de um modo geral, o grupo de simetrias translacionais é um *reticulado* em \mathbb{R}^2 . Porém, este grupo pode não ser discreto em casos especiais.

Definição 3.5. *Dados $a, b > 0$, dizemos que uma solução de $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da equação *senh-Gordon*(3.2) pertence a:*

i) \mathfrak{M}_{ab}^Γ se, e somente se, ela for invariante pela ação do grupo Γ_{ab} , gerado pelas reflexões das quatro linha $s = 0, s = a, t = 0$ e $t = b$

ii) \mathfrak{M}_{ab}^D , se, e somente se, o retângulo $R_{ab} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ é uma componente conexa de $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \omega(s, t) > 0\}$.

Figura 2: O retângulo R_{ab}

Observação 3.1. 1. As soluções $\omega \in \mathfrak{M}_{ab}^D$ anulam-se na fronteira do retângulo R_{ab} e podem ser reobtidas a partir de sua restrição $\omega|_{R_{ab}}$ quando extendidas naturalmente como uma função ímpar com respeito a todas as extremidades da fronteira.

2. Observe que $\mathfrak{M}_{ab}^D \subset \mathfrak{M}_{ab}^\Gamma$ para todos a e b positivos.

Considerando que $\omega \in \mathfrak{M}_{ab}^\Gamma$ para $a, b > 0$, o conjunto de ponto fixos de uma reflexão $\tau \in \Gamma_{ab}$ é uma linha horizontal ou vertical em \mathbb{R}^2 , e portanto não é apenas uma geodésica, mas também uma linha de curvatura. Sob F ela é, portanto, aplicada sobre uma curva plana c_τ em \mathbb{R}^3 . Pelo teorema fundamental da existência e unicidade, a superfície imersa é simétrica com respeito ao plano que contém c_τ e é perpendicular à superfície. Logo obtem-se um homomorfismo $\Psi_{ab} : \Gamma_{ab} \rightarrow Isom(\mathbb{R}^3)$ que coincide com \mathcal{X}_ω no subgrupo de índice finito $\Gamma_{ab} \cap \Lambda_\omega$, e a imersão F é equivariante sob Γ_{ab} com respeito a Ψ_{ab} . Como Γ_{ab} preserva linhas de curvatura, foi provada a seguinte:

3.1.3 Condição para ω descrever um toro

Proposição 3.6. ω descreve um toro se, e somente se, todas as λ_1 - e todas as λ_2 -linhas de curvatura fecharem-se. Ou, equivalentemente, se, e somente se, a λ_1 -linha de curvatura planar $c_1: s \mapsto F(s, 0)$ e a λ_2 -linha de curvatura planar $c_2: t \mapsto F(0, t)$ ambas fecharem-se.

O que foi dito na Proposição (3.6) pode ser interpretado da seguinte forma: a curva planar c_j fecha-se, se, e somente se, $\theta_j \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \cdot \pi$ ou

$$\theta_j \in \mathbb{Z} \cdot \pi \quad e \quad \varrho_j = 0; \quad j = 1, 2.$$

Aqui utilizou-se as seguintes quantidades:

3.1.4 O ângulo θ_j e a distância ϱ_j

1. o ângulo θ_j entre dois planos simétricos consecutivos perpendiculares a c_j , isto é, os ângulos:

$$\theta_1 = \angle(F'(0, 0), F'(a, 0)) = \int_0^a \sinh \omega(s, 0) ds, \tag{3.5}$$

$$\theta_2 = \angle(\dot{F}(0, 0), \dot{F}(0, b)) = \int_0^b \cosh \omega(0, t) dt,$$

e

2. a *função distância orientada* ϱ_j entre tal par de planos, que é definida no caso dos planos serem paralelos, e será dada por:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= e^{-\omega(0,0)} \cdot \langle F'(0, 0), F(a, 0) - F(0, 0) \rangle, \\ \varrho_2 &= e^{-\omega(0,0)} \cdot \langle \dot{F}(0, 0), F(0, b) - F(0, 0) \rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observação 3.2. 1. O fato de ser usado um grupo de reflexão Γ_{ab} e um homomorfismo Ψ_{ab} em $Isom(\mathbb{R}^3)$ implica diretamente que $\theta_1 \in \mathbb{Z} \cdot \pi$ ou $\theta_2 \in \mathbb{Z} \cdot \pi$, isto é, que no mínimo um par de planos simétricos é paralelo.

2. No caso em que $\omega \in \mathfrak{M}_{ab}^D \subset \mathfrak{M}_{ab}^\Gamma$, é claro, a partir da fórmula acima, que $\theta_1 = 0$

4 Soluções explícitas da equação *senh-Gordon*

4.1 Introdução

Neste capítulo serão classificadas todas as soluções real analíticas $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \Delta \omega + \sinh \omega \cdot \cosh \omega &= 0 \\ \sinh \omega \cdot \dot{\omega}' - \cosh \omega \cdot \dot{\omega} \omega' &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

De fato, pela regularidade elíptica, ω é automaticamente real analítica, uma vez que ela é assumida como sendo localmente limitada e mensurável.

A segunda equação surgiu, basicamente, por razões geométricas; ela é precisamente a condição que todas as λ_1 -linhas de curvatura da H -superfície correspondente sejam planares (conforme (1.4)) e conduzirá às soluções explícitas da equação *senh-Gordon*; além disso ela induzirá uma separação de variáveis e reduzirá o sistema (4.1) a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

4.2 Um sistema auxiliar

Para analisar o sistema (4.1) considere, inicialmente, a função $W = \cosh \omega$ e as respectivas soluções, real analíticas, do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} (W^2 - 1) \cdot \Delta W - W \cdot |\nabla W|^2 + W \cdot (W^2 - 1)^2 &= 0 \\ (W^2 - 1) \cdot \dot{W}' - 2W \cdot \dot{W} \cdot W' &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Teorema 4.1. *As soluções real analíticas $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ do sistema (4.2) são precisamente as*

funções dadas por

$$W = (1 + f^2 + g^2)^{-1} \cdot (f' + \dot{g}), \quad (4.3)$$

onde $s \mapsto f(s)$ e $t \mapsto g(t)$ são funções meromorfas de uma variável que são soluções de

$$\begin{aligned} f'^2 &= f^4 + (1 + c - d)f^2 + c, \\ f'' &= 2f^3 + (1 + c - d)f, \\ \dot{g}^2 &= g^4 + (1 - c + d)g^2 + d, \\ \ddot{g} &= 2g^3 + (1 - c + d)g. \end{aligned} \quad (4.4)$$

para algumas constantes $c, d \in \mathbb{R}$

Além disso, f e g podem ser reobtidas a partir de W por

$$\begin{aligned} W' &= -f(s) \cdot (W^2 - 1), \\ \dot{W} &= -g(t) \cdot (W^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

exceto quando $W^2 \equiv 1$.

Observação 4.1. 1. Quando $W^2 \equiv 1$, então, claramente $(1+c-d)^2 - 4c = (1-c+d)^2 - 4d = 0$.

2. As equações de segunda ordem para f e g em (4.4), não podem ser retiradas, uma vez que elas excluem certas soluções envolvendo as equações de primeira ordem.

3. Mostramos que $W = \pm 1$ nos polos de f e g .

Demonstração. - **Passo 1**

Uma função $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, real analítica, é solução do sistema (4.2) se, e somente se, existem funções meromorfas f e g de uma variável tais que as equações (4.3) e (4.5), são verificadas.

Considerando, inicialmente, o caso em que $W \not\equiv 1$, tem-se, a partir de (4.5):
 $W'(W^2 - 1)^{-1} = -f(s) \Rightarrow (W'(W^2 - 1)^{-1})' = 0$ e $\dot{W}(W^2 - 1)^{-1} = -g(t) \Rightarrow (\dot{W}(W^2 - 1)^{-1})' = 0$.
 Como $(W'(W^2 - 1)^{-1})' = \dot{W}'(W^2 - 1)^{-1} - W'(W^2 - 1)^{-2} \cdot 2W\dot{W} = 0$, obtem-se

$$\dot{W}'(W^2 - 1) - 2W\dot{W}W' = 0.$$

A equação $(W^2 - 1)\nabla W - W \cdot |\nabla W|^2 + W(W^2 - 1)^2 = 0$ será obtida de $W = (1 + f^2 + g^2)^{-1}(f' + \dot{g})$ através de (4.5). De fato, de (4.5) tem-se que

$$W'' = -f'(W^2 - 1) - 2fWW' \text{ e } \ddot{W} = -\dot{g}(W^2(W^2 - 1) - 2gW\dot{W}).$$

Como $\Delta W = W'' + \ddot{W}$,

$$\begin{aligned}\Delta W &= -(W^2 - 1)(f' + \dot{g}) - 2fW(-f(W^2 - 1)) - 2gW(-g(W^2 - 1)) \\ &= -(W^2 - 1)(f' + \dot{g}) + 2f^2W(W^2 - 1) + 2g^2W(W^2 - 1),\end{aligned}$$

e como $f' + \dot{g} = W(1 + f^2 + g^2)$,

$$\begin{aligned}\Delta W &= -W(W^2 - 1)(1 + f^2 + g^2) + 2f^2W(W^2 - 1) + 2g^2W(W^2 - 1), \\ &= -W(W^2 - 1) - f^2W(W^2 - 1) - g^2W(W^2 - 1) + 2f^2W(W^2 - 1) + 2g^2W(W^2 - 1), \\ &= -W(W^2 - 1) + f^2W(W^2 - 1) + g^2W(W^2 - 1) \\ &= -W(W^2 - 1) + W(W^2 - 1)(f^2 + g^2).\end{aligned}$$

Assim, $(W^2 - 1)\Delta W = -W(W^2 - 1)^2 + W(W^2 - 1)^2(f^2 + g^2)$.

Mas, de (4.5), tem-se:

$$|\nabla W|^2 = f^2(|W^2 - 1|^2) + g^2(W^2 - 1)^2 \Rightarrow |\nabla W|^2 = f^2(|W^2 - 1|^2)(f^2 + g^2)$$

Portanto, $(W^2 - 1)\Delta W = -W(W^2 - 1)^2 + W|\nabla W|^2$. Ou seja,

$$(W^2 - 1)\Delta W - W|\nabla W|^2 + W(W^2 - 1)^2 = 0$$

Se $W^2 \equiv 1$, a única condição que não é *a priori*, nula é a equação

$$W = (1 + f^2 + g^2)^{-1}(f' + \dot{g}).$$

Como, $f' + \dot{g} = W(1 + f^2 + g^2) = W(\alpha + f^2) + W(\beta + g^2)$, com $\alpha + \beta = 1$, pode-se considerar as equações diferenciais ordinárias $f' = W(\alpha + f^2)$ e $\dot{g} = W(\beta + g^2)$.

Passo 2

As equações (4.3) e (4.5) implicam que com constantes apropriadas \bar{c} e \bar{d} teremos:

$$\begin{aligned}f'' &= 2f^3 + \bar{c} \cdot f \\ \ddot{g} &= 2g^3 + \bar{d} \cdot g\end{aligned}\tag{4.6}$$

Logo, f e g são funções elípticas.

Derivando a equação (4.3) com respeito a s ,

$$W' = -(1 + f^2 + g^2)^{-2}(2ff')(f' + \dot{g}) + (1 + f^2 + g^2)^{-1} \cdot f''$$

Por outro lado, $-f(W^2 - 1) = -f((1 + f^2 + g^2)^{-2}(f' + \dot{g})^2 - 1)$, de onde obtem-se

$$-f(W^2 - 1) = -f(1 + f^2 + g^2)^{-2} \cdot (f' + \dot{g})^2 + f$$

Como $W' = -f(W^2 - 1)$, então

$$-(1 + f^2 + g^2)^{-2}(2ff')(f' + \dot{g}) + (1 + f^2 + g^2)^{-1} = -f(1 + f^2 + g^2)^{-2}(f' + \dot{g})^2 + f$$

Ou seja,

$$-\frac{2ff'(f' + \dot{g})}{(1 + f^2 + g^2)^2} + \frac{f''}{(1 + f^2 + g^2)} = -f\frac{(f' + \dot{g})^2}{(1 + f^2 + g^2)^2} + f. \quad \text{E assim,}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{f''}{1 + f^2 + g^2} + \frac{f(f' + \dot{g})^2}{(1 + f^2 + g^2)^2} - \frac{2ff'(f' + \dot{g})}{(1 + f^2 + g^2)^2} \\ &= \frac{f''}{1 + f^2 + g^2} + \frac{f(f' + \dot{g})}{(1 + f^2 + g^2)^2} \cdot ((f' + \dot{g}) - 2f') \\ &= \frac{f''}{1 + f^2 + g^2} - \frac{f(f' + \dot{g})}{(1 + f^2 + g^2)^2} \cdot (-\dot{g} + f') \\ &= \frac{f''}{1 + f^2 + g^2} - f\frac{f'^2 - \dot{g}^2}{(1 + f^2 + g^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Multiplicando por $2f'$ os dois membros dessa igualdade, resulta em

$$2ff' = \frac{2f'f''}{1 + f^2 + g^2} - 2ff'\frac{f'^2 - \dot{g}^2}{(1 + f^2 + g^2)^2}.$$

Observando que

$$\frac{2f'f''}{1 + f^2 + g^2} - \frac{2ff'(f'^2 - \dot{g}^2)}{(1 + f^2 + g^2)^2} = \left(\frac{f'^2 - \dot{g}^2}{1 + f^2 + g^2} \right)',$$

e integrando esta expressão com respeito a s , obtém-se $\frac{f'^2 - \dot{g}^2}{1 + f^2 + g^2} = f^2 + k(t)$. Multiplicando por f esta igualdade e por $(1 + f^2 + g^2)$ a equação (4.7), obtém-se

$$f\frac{f'^2 - \dot{g}^2}{1 + f^2 + g^2} = f^3 + fk(t) \quad \text{e} \quad f'' - f\frac{f'^2 - \dot{g}^2}{1 + f^2 + g^2} = f + f^3 + fg^2, \quad \text{respectivamente.}$$

Somando estas duas equações, $f'' = 2f^3 + f(1 + g^2 + k(t))$. Como f não depende de t , pode-se considerar $1 + g(t)^2 + k(t) = \bar{c}$, de onde conclui-se que

$$f'' = 2f^3 + \bar{c}f.$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\ddot{g} = 2g^3 + \bar{d}g.$$

Passo 3

Observe que as equações (4.6) têm como integrais

$$\begin{aligned} f'^2 &= f^4 + \bar{c}f^2 + c \\ \dot{g}^2 &= g^4 + \bar{d}g^2 + d \end{aligned} \quad (4.8)$$

Além disso, qualquer solução de (4.6) e (4.8), define funções $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $W = (1 + f^2 + g^2)^{-1}(f' + \dot{g})$.

Afirmção: As funções f , g , e W satisfazem as equações (4.5) se f e g forem soluções das equações (4.4).

Demonstração da afirmação:

Substituindo $\frac{f''}{1 + f^2 + g^2} - f \cdot \frac{f'^2 - \dot{g}^2}{(1 + f^2 + g^2)^2} = f$ em (4.6) e (4.8), obtem-se a equação equivalente a $W' = -f(s)(W^2 - 1)$ dada por

$$0 = (\bar{c} + \bar{d} - 2)fg^2 + (d - c + \bar{c} - 1)f \quad (4.9)$$

De forma similar, encontra-se uma equação equivalente a $\dot{W} = -g(t)(W^2 - 1)$ que será dada por

$$0 = (\bar{c} + \bar{d} - 2)f^2g + (c - d + \bar{d} - 1)g \quad (4.10)$$

Isso demonstra a direção "se" da afirmação.

Para obter o "somente se", considere, inicialmente, que $W \neq 0$. Sem perda de generalidade, pode-se supor que g não é constante. Se, além disso, f não é identicamente nula, então segue-se da equação (4.9) que $\bar{c} = 1 + c - d$ e $\bar{d} = 1 - c + d$.

Se $f \equiv 0$, então a equação (4.10) implica em $\bar{d} = 1 - c + d$. Como \bar{c} pode ser modificada arbitrariamente, a afirmação está provada.

O caso em que $W \equiv 0$ é mais simples, pois as equações (4.5) implicam diretamente que $f \equiv g \equiv 0$. Logo $c = d = 0$, e tanto \bar{c} como \bar{d} poderão ser escolhidas arbitrariamente. \square

4.3 Uma família de funções elípticas

As funções $s \mapsto W(s, t)$ podem ser vistas como uma família de funções elípticas parametrizadas pela curva elíptica determinada por g .

Proposição 4.2. *Sejam f , g e W como no Teorema (4.1). Então W é uma solução das seguintes*

equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} W'^2 &= (W^2 - 1) \left(\frac{c}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right) \\ \dot{W}^2 &= (W^2 - 1) \left(\frac{d}{1 + f^2} - (1 + f^2) \left(W - \frac{f'}{1 + f^2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Demonstração. Será provado apenas (4.11)i, pois a demonstração de (4.11)ii é inteiramente análoga.

Como $W' = -f(s)(W^2 - 1)$, $W^2 \neq 1$. Então $W'^2 = f^2(W^2 - 1)^2$. Assim, para provar (4.11)i basta mostrar que

$$f^2(W^2 - 1) = \frac{c}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \quad (4.12)$$

Para isto, observe que, a partir da equação

$$W = (1 + f^2 + g^2)^{-1}(f' + \dot{g})$$

obtem-se,

$$(1 + f^2 + g^2)W = f' + \dot{g}$$

Adicionando $-2\dot{g}$ aos dois membros dessa equação, resulta em,

$$(1 + f^2 + g^2)W - 2\dot{g} = f' - \dot{g}$$

Multiplicando a equação acima por (4.3),

$$\begin{aligned} ((1 + f^2 + g^2)W - 2\dot{g})W &= (1 + f^2 + g^2)^{-1}(f' + \dot{g})(f' - \dot{g}) \\ (W^2 + f^2W^2 + g^2W^2 - 2\dot{g}W) &= \frac{f'^2 - \dot{g}^2}{1 + f^2 + g^2} \\ f^2W^2 + W((1 + g^2)W - 2\dot{g}) &= f^2 - g^2 + c - d \end{aligned} \quad (4.13)$$

pois, de (2.4),

$$\begin{aligned} f'^2 - \dot{g}^2 &= f^4 + (1 + c - d)f^2 + c - (g^4 + (1 - c + d)g^2 + d) \\ &= f^4 + f^2 + cf^2 - df^2 + c - g^4 - g^2 + cg^2 - dg^2 - d \\ &= f^4 + f^2g^2 + f^2 + cf^2 - df^2 + c - g^4 - f^2g^2 - g^2 + cg^2 - dg^2 - d \\ &= (1 + f^2 + g^2)f^2 - (1 + f^2 + g^2)g^2 + (1 + f^2 + g^2)c - (1 + f^2 + g^2)d \\ &= (1 + f^2 + g^2)(f^2 - g^2 + c - d) \end{aligned}$$

Continuando, de (4.13),

$$\begin{aligned} f^2W^2 - f^2 &= -W((1 + g^2)W - 2\dot{g}) - g^2 + c - d \\ f^2(W^2 - 1) &= -W^2(1 + g^2) + 2W\dot{g} - g^2 + c - d \end{aligned} \quad (4.14)$$

De (4.4)iii $\dot{g}^2 = g^4 + (1 - c + d)g^2 + d$. Portanto

$$\begin{aligned} -\dot{g}^2 + c &= -g^4 - g^2 + cg^2 + c - dg^2 - d = (1 + g^2)(-g^2 + c - d), \text{ ou seja,} \\ -g^2 + c - d &= -\frac{\dot{g}^2}{1 + g^2} + \frac{c}{1 + g^2} \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo em (4.14),

$$\begin{aligned} f^2(W^2 - 1) &= -W^2(1 + g^2) + 2W\dot{g} - \frac{\dot{g}^2}{1 + g^2} + \frac{c}{1 + g^2} \\ &= \frac{c}{1 + g^2} - \left(W^2 - \frac{2W\dot{g}}{1 + g^2} + \frac{\dot{g}^2}{1 + g^2} \right) (1 + g^2) \\ &= \frac{c}{1 + g^2} - \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 (1 + g^2) \end{aligned}$$

□

4.4 O espaço paramétrico

Resta caracterizar as soluções W que surgem como $\cosh\omega$ para alguma solução real analítica ω do sistema (4.1). Como $W \geq 1$ e, portanto, $c = \alpha^2 \geq 0$ e $d = \beta^2 \geq 0$ (cf.4.11).

4.4.1 Existência de soluções

Teorema 4.3. *O sistema (4.1), admite uma família de soluções ω real analíticas, com dois parâmetros, que está definida em $\mathfrak{B} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | \alpha, \beta \geq 0 \text{ e } \alpha + \beta \geq 1\}$ pelas equações:*

$$\cosh\omega = W = (1 + f^2 + g^2)^{-1} \cdot (f' + \dot{g}), \quad \omega(0, 0) \geq 0 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \omega' &= -f(s) \cdot \operatorname{senh}\omega, \\ \dot{\omega} &= -g(t) \cdot \operatorname{senh}\omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $f(s)$ e $g(t)$ são as funções elípticas determinadas por:

$$\begin{aligned} f'^2 &= f^4 + (1 + \alpha^2 - \beta^2)f^2 + \alpha^2, & f(0) &= 0, & f'(0) &= \alpha, \\ \dot{g}^2 &= g^4 + (1 - \alpha^2 + \beta^2)g^2 + \beta^2, & g(0) &= 0, & \dot{g}(0) &= \beta \end{aligned} \quad (4.17)$$

Reciprocamente, se ω é uma solução real analítica do sistema (4.1), então ω é limitada globalmente, $|\omega|$ alcança seu máximo, e, a menos de translação, ω ou $-\omega$ está contida na família acima.

Observe que a ambiguidade de $\operatorname{arccosh}$ em uma vizinhança de um zero de ω é solucionada pelas equações (4.16).

Discutiremos rapidamente as soluções especiais na fronteira $\partial\mathfrak{B}$ do espaço paramétrico. Verifica-se facilmente, que a solução trivial $\omega \equiv 0$ corresponde a todo o segmento $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ em $\partial\mathfrak{B}$. Os raios $\alpha = 0, \beta \geq 1$ e $\beta = 0, \alpha \geq 1$ parametrizam soluções ω que são unidimensionais no sentido em que dependem apenas de t ou apenas de s . Elas descrevem os dois tipos de equações de Delaunay mencionadas na seção inicial.

Por simplicidade, assumiremos agora que $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha + \beta > 1$. O comportamento qualitativo de f depende de forma crucial, se $f^4 + (1 + \alpha^2 - \beta^2)f^2 + \alpha^2$ tem zeros reais ou não. De fato, sobre o eixo real, qualitativamente f assemelha-se às funções tangente, tangente hiperbólica ou seno, quando $\beta < \alpha + 1, \beta = \alpha + 1$ ou $\beta > \alpha + 1$, respectivamente. Outra forma de expressar esta diferença é a seguinte: Como $\alpha \neq 0$, podemos falar do menor zero positivo $a = a(\alpha, \beta)$, de f . Quando $\beta > \alpha + 1$ ($\beta < \alpha + 1$), então $a(\alpha, \beta)$ é um meio período (respectivamente, um período) de f . Sobre a linha do bordo $\beta = \alpha + 1$ a função f não tem zero positivo e $a = +\infty$. Uma afirmação similar é válida para o menor zero positivo $b = b(\alpha, \beta)$ de g .

Demonstração. i) Recordemos que o sistema (4.2) foi obtido a partir do sistema (4.1) quando substituímos W por $\cosh\omega$. Reciprocamente, uma solução real analítica W do sistema (4.2) que é ≥ 1 define uma solução ω do sistema original.

Devemos ter um pouco de cuidado nos lugares onde $W = 1$. Como, no teorema (4.3) as funções f e g possuem apenas polos simples com partes principais $(s_\infty - s)^{-1}$ e $(t_\infty - t)^{-1}$, segue-se das equações (4.5) que a solução W pode assumir o valor $+1$ apenas com multiplicidade 2, exceto quando $W \equiv 1$. Logo, uma solução W que é > 1 em algum ponto, é ≥ 1 em todos os pontos. Vemos que ω pode ter apenas zeros simples, contanto que $\omega \neq 0$. E, que as equações (4.16) são uma mera forma de reobtermos (4.5) na variável ω . Como $W(0,0) = \alpha + \beta \geq 1$ e $W \equiv 1$ para $\alpha + \beta = 1$, a afirmação do item i)

está provada.

ii) Basta mostrar que para qualquer solução real analítica $W \geq 1$ que não é identicamente 1, as funções f e g terão zeros s_0 e t_0 tais que $\alpha = f'(s_0)$ e $\beta = \dot{g}(t_0) \geq 0$. Uma vez que $W \geq 1$ então

$$f' + \dot{g} \geq 1 + f^2 + g^2 \Rightarrow f'(s_0) + \dot{g}(t_0) \geq 1 \Rightarrow \alpha + \beta \geq 1$$

Será mostrado, inicialmente, que f terá um zero s_0 . Se olharmos a equação (4.5)i como uma equação de Riccati, ou seja $W' = -f(s)W^2(W^2 - 1)$, para as funções limitadas $s \mapsto W(s, t)$, segue-se que f não pode ser, longe de zero, uniformemente limitada em \mathbb{R} .

Passando ao limite $f \rightarrow 0$ a condição $W \geq 1$ implica em $\dot{g} \geq 1 + g^2$. Pois, como $W = (1 + f^2 + g^2)^{-1} \cdot (f' + \dot{g})$, quando $f \rightarrow 0$, $W = \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \geq 1$. Assim, por $\dot{g}^2 = g^4 + (1 - c + d)g^2 + d$, tem-se $d \geq 1$. Combinando essas desigualdades, $f' = f^2$ e $\dot{g} = 1 + g^2$. Logo $W \equiv 1$. Uma contradição. \square

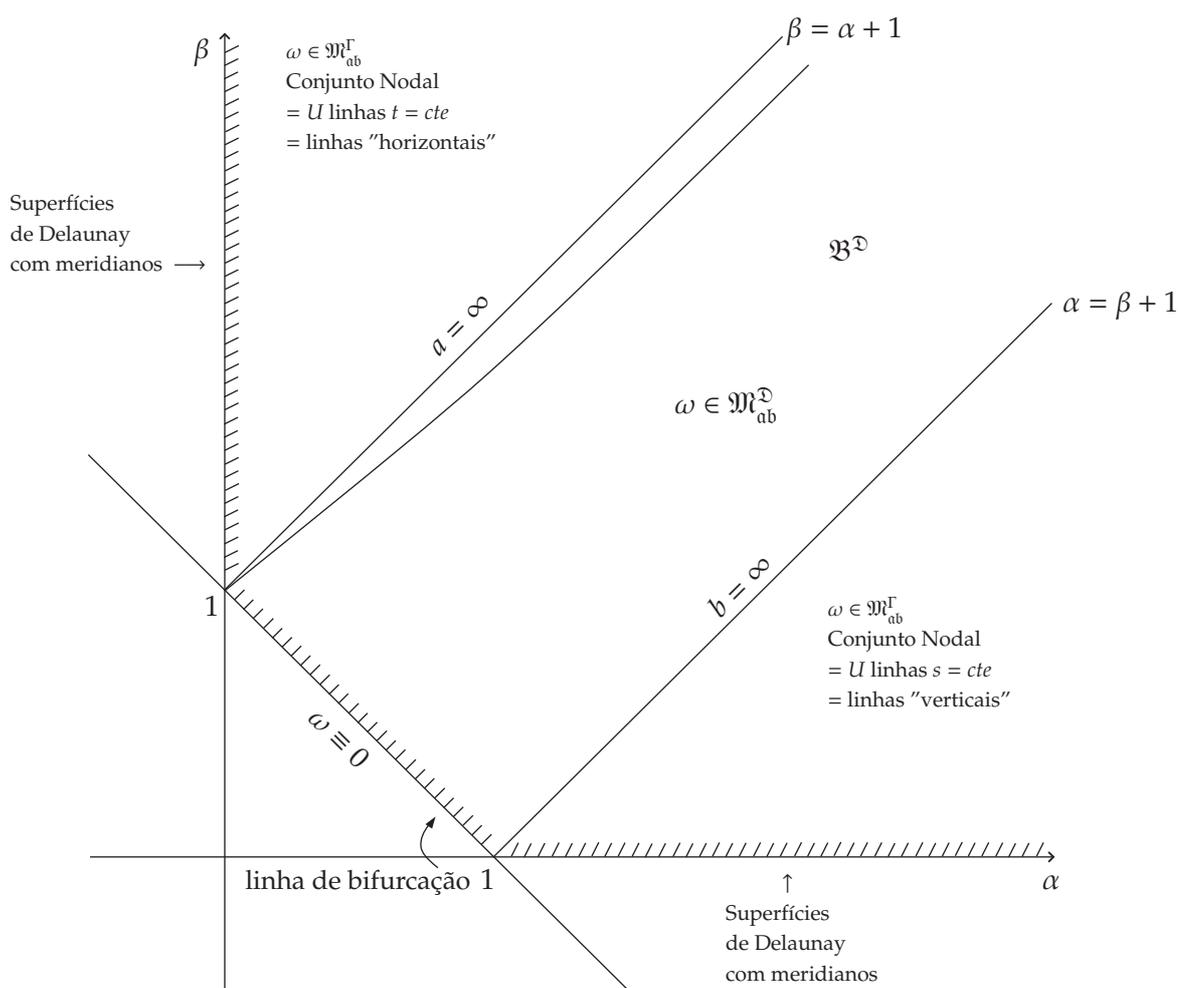


Figura 3: As diferentes peças do espaço paramétrico \mathfrak{B}

Proposição 4.4. (ver Figura3:). *Suponha que $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha + \beta > 1$.*

i) Exceto quando $|\alpha - \beta| = 1$, a solução ω é invariante pela reflexão do grupo Γ_{ab} com a e b como acima (notação como introduzida na seção 1),

ii) Se $|\alpha - \beta| < 1$, então as componentes conexas de $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \omega(s, t) \neq 0\}$ são retângulos; mais precisamente $\omega \in \mathfrak{M}_{ab}^D$ com a e b como acima. Caso contrário $\beta \geq \alpha + 1$ ou $\alpha \geq \beta + 1$, e o complemento do conjunto nodal de ω consiste de faixas horizontais ou verticais, respectivamente.

*iii) A faixa $\mathfrak{B}^D = \{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B} \mid |\alpha - \beta| < 1\}$ em torno da diagonal no espaço paramétrico é aplicada difeomorficamente sobre o conjunto $\mathfrak{R}^D = \{(a_0, b_0) \in \mathbb{R}_+^2 \mid a_0^{-2} + b_0^{-2} > \pi^{-2}\}$. Este conjunto contém as extensões de todos os retângulos $R_{a_0 b_0}$ que possam surgir como uma componente conexa do complemento do conjunto nodal para uma solução ω da equação **senh-Gordon**(3.2)*

A parte iii) desta preposição assegura que não foi perdido nenhum retângulo quando da imposição da condição adicional (4.1)ii no início deste capítulo.

Demonstração. Para verificar os itens i) e ii) da Proposição, basta olhar nas equações (4.16) que ω é par em todos os zeros de f e g e ímpar em todos os pólos dessas funções. □

5 Interpretação Geométrica das soluções ω

5.1 Introdução

No capítulo anterior foi mostrada a existência de uma família real analítica, com dois parâmetros, de soluções $\omega = \arccos W$, do sistema

$$\begin{aligned}\Delta\omega + \sinh \omega \cdot \cosh \omega &= 0 \\ \sinh \omega \cdot \dot{\omega}' - \cosh \omega \cdot \omega' \dot{\omega} &= 0\end{aligned}$$

De agora em diante, será usado \mathcal{U} para denominar esta família de soluções. É natural supor, que se houver uma simples troca de \cosh por \sinh , é claro, com a consequente mudança em um par de sinais, também vai existir uma família de soluções $\omega = \operatorname{arcsenh} W$, real analítica, com dois parâmetros, para o sistema

$$\begin{aligned}\Delta\omega + \sinh \omega \cdot \cosh \omega &= 0 \\ \cosh \omega \cdot \dot{\omega}' - \sinh \omega \cdot \omega' \dot{\omega} &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

De fato, tal família existe, e será denominada \mathcal{V} , definida em um espaço paramétrico apropriado. Entretanto, alguns dos resultados que serão obtidos para as H -superfícies ao usarmos as soluções pertencentes à família \mathcal{U} , não poderiam ser obtidos através da família \mathcal{V} . Por exemplo, a família \mathcal{V} não contém H -toro fechado, enquanto que a família \mathcal{U} contém! E é exatamente a avaliação do critério de "ser fechado" a principal meta deste capítulo.

Considerando as funções

$$\varphi(s, t) = \angle(F'(s, t), F'(0, t)) \quad \text{e}\tag{5.2}$$

$$U(s, t) = \cos \varphi(s, t) = e^{-\omega(s, t) - \omega(0, t)} \cdot \langle F'(s, t), F'(0, t) \rangle.\tag{5.3}$$

Lema 5.1.

$$\alpha \cdot U = (1 + g^2) \cdot W - \dot{g} = f' \cdot \frac{1 + g^2}{1 + f^2 + g^2} - f^2 \cdot \frac{\dot{g}}{1 + f^2 + g^2}. \quad (5.4)$$

$$U^2 = (1 + g^2)^{-1} \cdot (1 - U^2) \cdot ((\alpha U + \dot{g})^2 - (1 + g^2)^2), \quad (5.5)$$

$$\dot{U}^2 = (1 + f^2)^{-1} \cdot (1 - U^2) \cdot ((\beta U + f')^2 - (1 + f^2)^2) \quad (5.6)$$

Demonstração. Podemos verificar que $\varphi' = |F'| \cdot \kappa_1 = e^\omega \sqrt{e^{-2\omega}(\dot{\omega}^2 + \sinh^2 \omega)} = e^\omega \cdot e^{-\omega} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \sinh^2 \omega}$. Como $\dot{\omega} = -g \sinh \omega$, então $\dot{\omega}^2 = g^2 \sinh^2 \omega$.

Portanto $\varphi' = \sqrt{(g^2 + 1) \sinh^2 \omega} = \sqrt{g^2 + 1} \sinh \omega$. Como $W = \cosh \omega$, então $\sinh^2 \omega = W^2 - 1$ ou seja $\sinh \omega = (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Assim $\varphi' = (1 + g^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Por outro lado, da expressão (4.11) têm-se

$$W' = (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dW} = \frac{\varphi'}{W'} &= \frac{(1 + g^2)^{\frac{1}{2}} (W^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(W^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= (1 + g^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{1 + g^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{c}{(1 + g^2)^2} - \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d\varphi}{dW} = - \left(\frac{\alpha^2}{(1 + g^2)^2} - \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto,

$$\varphi = - \int \left(\frac{\alpha^2}{(1 + g^2)^2} - \left(W - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW$$

Fazendo $A = \frac{\alpha}{1 + g^2}$ e $B = \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \Rightarrow \varphi = - \int (A^2 - (W - B)^2)^{-\frac{1}{2}} dW$

$$\begin{aligned}\varphi &= - \int \left(A^2 \left(1 - \left(\frac{W-B}{A} \right)^2 \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dW \\ &= -\frac{1}{A} \int \left(1 - \left(\frac{W-B}{A} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dW\end{aligned}$$

Considerando $\frac{W-B}{A} = \cos \phi \Rightarrow dW = -A \operatorname{sen} \phi d\phi$. Logo,

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{A} \int (1 - \cos^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} (-A \operatorname{sen} \phi) d\phi \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= \int (\operatorname{sen} \phi)^{-1} \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= \int d\phi \\ &= \phi\end{aligned}$$

Como,

$$\phi = \arccos \left(\frac{W-B}{A} \right)$$

Então

$$\varphi = \arccos \left(\frac{W-B}{A} \right)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}U = \cos \varphi &= \cos \left(\arccos \left(\frac{W-B}{A} \right) \right) = \frac{W-B}{A} = \frac{W - \frac{\dot{g}}{1+g^2}}{\frac{\alpha}{1+g^2}} = \frac{(1+g^2)W - \dot{g}}{\alpha} \Rightarrow \\ \alpha U &= (1+g^2)W - \dot{g} = (1+g^2)(1+f^2+g^2)^{-1}(f' + \dot{g}) - \dot{g} = \frac{f' + \dot{g} + f'g^2 + \dot{g}g^2}{1+f^2+g^2} - \dot{g}\end{aligned}$$

De onde se conclui que,

$$\alpha U = f' \frac{1+g^2}{1+f^2+g^2} - f^2 \frac{\dot{g}}{1+f^2+g^2}$$

Para verificar (5.5) observe que $\alpha U = (1+g^2)W - \dot{g}$. Portanto, $W^2 = \left(\frac{\alpha U + \dot{g}}{1+g^2} \right)^2$ e

$$(\alpha U)' = (1 + g^2)W' \Rightarrow W' = \frac{\alpha U'}{1 + g^2} \Rightarrow W'^2 = \frac{\alpha^2 U'^2}{(1 + g^2)^2}. \text{ Substituindo em (5.5)i,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha U'}{1 + g^2} &= \left(\left(\frac{(\alpha U + g)^2 - (1 + g^2)^2}{(1 + g^2)^2} \right) \left(\frac{\alpha^2}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(\frac{\alpha U + \dot{g}}{1 + g^2} - \frac{\dot{g}}{1 + g^2} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\frac{(\alpha U + g)^2 - (1 + g^2)^2}{(1 + g^2)^2} \right) \left(\frac{\alpha^2}{1 + g^2} - (1 + g^2) \left(\frac{\alpha U}{1 + g^2} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\frac{(\alpha U + g)^2 - (1 + g^2)^2}{(1 + g^2)^2} \right) \left(\frac{\alpha^2}{1 + g^2} - \frac{\alpha^2 U^2}{1 + g^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 U'^2}{(1 + g^2)^2} &= \left(\frac{(\alpha U + g)^2 - (1 + g^2)^2}{(1 + g^2)^2} \right) \left(\frac{\alpha^2 (1 - U^2)}{1 + g^2} \right) \\ U'^2 &= \left((\alpha U + g)^2 - (1 + g^2)^2 \right) (1 - U^2) (1 + g^2)^{-1} \end{aligned}$$

A verificação de (5.5)ii é análoga! □

5.2 Descrição das H -superfícies com λ_1 -linhas de curvatura planares

Proposição 5.2. 1. O ângulo entre o vetor N , normal à superfície, e qualquer plano contendo uma λ_1 -linha de curvatura é constante ao longo desta curva: A tangente deste ângulo é a função g que foi introduzida na seção 2 por motivos puramente analíticos.

2. Quando $\beta > \alpha + 1$, então $\theta_1 = \pi$ e $\rho < 0$ (ver (1.6)) exceto quando $\alpha = 0$. As λ_1 -linhas de curvatura parecem uma sequência de letras l ; deve-se imaginar que os círculos das superfícies de Delaunay estourem, se tentarmos dobrar a superfície.
3. Quando $\beta < \alpha + 1$, então $\theta_1 = 0$ e o vetor tangente de uma λ_1 -linha de curvatura, oscila em torno da normal sobre um plano de simetria, interceptado perpendicularmente pela linha de curvatura. A amplitude do ângulo é menor que π . A única curva plana fechada tem a forma de uma figura 8.
4. Quando $\beta < \alpha - 1$, então o vetor tangente das λ_1 -linhas de curvatura $\mapsto F\left(s, \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot b\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, permanecem em um semi-espaco aberto fixo; sua projeção sobre $F'\left(0, \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot b\right)$ é positiva em todos os pontos. Portanto, nenhuma λ_1 -linha de curvatura planar pode ser fechada.

5. Para obter-se uma imersão com λ_1 -linhas de curvatura planares, é necessário que $\alpha = 0$ (\rightarrow superfícies de Delaunay), ou que (α, β) estejam na faixa diagonal aberta $\mathfrak{B}^D = \{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}; |\alpha - \beta| < 1\}$.

Demonstração. O item 1) da Proposição segue diretamente das equações (3.4) e (4.16)

Para a demonstração dos itens 2) e 3) será usado o Lema. Por um argumento homotópico, basta considerar aquelas λ_1 -linhas de curvatura $s \mapsto f(s, t)$ para as quais $g(t) = 0$ e $\dot{g}(t) = \beta$. Então, a expressão no lado direito de (5.5), no Lema (5.1) tem zeros em

$$(1 - U^2)((\alpha U + \beta)^2 - 1)^2 = 0,$$

ou seja $-1, 1, \frac{-\beta - 1}{\alpha}, -\frac{1 + \beta}{\alpha}$. Portanto, para $\beta < \alpha + 1$, $\frac{1 - \beta}{\alpha} = -\frac{\beta - 1}{\alpha} > \frac{1 - \alpha + 1}{\alpha} = -1$. Como $\frac{1 - \beta}{\alpha} > -\frac{1 + \beta}{\alpha}$, logo, para $\beta < \alpha + 1$, a função $U = \cos \varphi$ oscila entre $\frac{1 - \beta}{\alpha}$ e 1. Provando o item 3) da Proposição.

Quando $\beta > \alpha + 1$, temos que $\theta_1 = \pi$ e U oscila entre -1 e 1. Para verificar que $\varrho_1 < 0$, calculamos:

$$\left| \frac{dF}{d\varphi} \right| = \left| \frac{F'}{\varphi'} \right| = \frac{1}{\kappa_1}.$$

Agora é suficiente observar $\kappa_1 = \sqrt{1 + g^2} \cdot \frac{1}{2}(1 - e^{-2\omega})$ é positiva e monótona decrescente para $s \in [0, a]$

A hipótese $\beta < \alpha - 1$ implica que $G^2 + (1 - \alpha^2 + \beta^2) \cdot G + \beta^2$ tem uma menor raiz positiva G no intervalo $(0, \alpha - 1)$. Logo a função g deve oscilar entre $-\sqrt{G}$ e $+\sqrt{G}$ levando seus valores extremos para $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot b$, $n \in \mathbb{Z}$. Levando estas informações para a equação (5.5), vemos que U' anula-se se, e somente se $U = \pm 1$ ou $U = \pm \frac{1}{\alpha} \cdot (G + 1)$. Como $U(0) = 1$, U oscila no intervalo $\left[\frac{1}{\alpha} \cdot (G + 1), 1 \right]$. A afirmação segue da definição de U e da Proposição (3.6)

O item v) é obtido a partir das informações contidas nos itens anteriores.

□

Para $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}^D$, a função g tem polos, e portanto, existem λ_1 -linhas de curvatura especiais, que estão em planos tangente à superfície. Isto quer dizer que a condição para que uma λ_1 -linha de curvatura seja fechada, isto é, $\varrho_1 = 0$, pode ser verificada facilmente para esta λ_1 -linhas de curvatura "singulares". É um cálculo direto, usando

a fórmula (2.9) para passar ao limite $g \rightarrow \infty$ nas equações (4.2) e (4.3.i):

$$U_\infty = f' - f^2, \quad (5.7)$$

$$U_\infty'^2 = 2\alpha \cdot (U_\infty + q)(1 - U_\infty^2), \quad (5.8)$$

onde $1 + q = \frac{1}{2\alpha}(\beta^2 - (\alpha - 1)^2)$. Recorde que $|F'| = 1$ ao longo destas linhas de curvatura especiais. Assim elas são, a menos de congruência, univocamente determinadas pela função $U_\infty = \cos \varphi_\infty$. Observe que $q \in (-1, 1)$ pois nos restringimos a $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}^D$

5.2.1 Condição para as λ_1 -linhas de curvatura serem fechadas

Lema 5.3. *A condição das λ_1 -linhas de curvatura "serem fechadas" é uma condição em q , isto é:*

$$0 = \int_{-q}^1 \frac{U dU}{\sqrt{(1 - U^2)(U + q)}}. \quad (5.9)$$

Esta equação determina um único $q \in (0, 1)$, que é aproximadamente $0,652229\dots$

Onde $q = \frac{1}{2\alpha}(\beta^2 - (\alpha - 1)^2) - 1$. O argumento acima mostra que o lado direito de (5.9) é exatamente $\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}$ vezes a quantidade ϱ_1 introduzida em (3.6). Isso explica o lema.

De fato, as λ_1 -linhas de curvatura especiais possuem uma interessante propriedade geométrica:

Proposição 5.4. *Todas as λ_1 -linhas de curvatura (da família \mathfrak{U}) que estão em um plano que tangencia a H -superfície são elásticas, isto é, pontos críticos de*

$$\mathcal{F}(c) = \int_c |\kappa(s)|^2 ds.$$

Demonstração. Mostraremos que

$$\kappa_1'^2 = -\frac{1}{4}(\kappa_1^2 - 2\alpha(1 + q))(\kappa_1^2 + 2\alpha(1 - q)). \quad (5.10)$$

Como $\kappa_1 = \varphi'$, temos:

$$\kappa_1^2 = (1 - U_\infty^2)^{-1} \cdot U_\infty'^2 = 2\alpha(U_\infty + q),$$

e a expressão (5.10) será obtida a partir da equação (5.7) □

Resta-nos investigar quando as λ_2 -linhas de curvatura também são fechadas. Usando a Proposição (4.2) e o Teorema (4.3), vemos que θ_2 , introduzida em (3.5),

torna-se:

$$\theta_2 = \int_0^b (W, 0) dt = \int_0^b \frac{\alpha + \dot{g}}{1 + g^2} dt,$$

ou seja,

$$\theta_2 = \begin{cases} \pi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cdot dg}{(1 + g^2) \sqrt{g^4 + (1 - \alpha^2 + \beta^2)g^2 + \beta^2}} & \text{para } \alpha < \beta + 1, \\ \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \frac{W dW}{\sqrt{(W^2 - 1)(\alpha + \beta - W)(\beta - \alpha + W)}} & \text{para } \alpha > \beta + 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Recordemos que no interior do espaço paramétrico \mathfrak{B} o conjunto $\varrho_1 = 0$ é dado pela hipérbole:

$$\beta^2 = (\alpha + q)^2 + 1 - q^2, \quad (5.12)$$

onde q é como no Lema 4.3. Esta curva claramente está na faixa $\alpha < \beta < \alpha + 1$; iniciando no ponto $(\alpha, \beta) = (0, 1)$.

5.2.2 Condição para as λ_2 -linhas de curvatura serem fechadas

Lema 5.5. 1. θ_2 é monótona crescente ao longo da curva $\beta^2 = (\alpha + q)^2 + 1 - q^2$.

2. $\theta_2(0, 1) = \pi$

3. $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \theta_2(\alpha, \alpha + \epsilon) = 2\pi$, uniformemente para $\epsilon \in [0, 1]$

Demonstração. 1) A partir da expressão (5.11), para $\beta > \alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \theta_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(g^2 + \beta^2) dg}{\sqrt{g^4 + (1 - \alpha^2 + \beta^2)g^2 + \beta^2}} > 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \theta_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(g^2 + \beta \cdot (\beta - \alpha)) dg}{\sqrt{g^4 + (1 - \alpha^2 + \beta^2)g^2 + \beta^2}} > 0 \end{aligned}$$

O vetor tangente da curva $\varrho_1 = 0$ é a combinação convexa de $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}$.

3) Como o fator

$$\frac{\alpha}{\sqrt{g^4 + (1 + 2\alpha\epsilon + \epsilon^2)g^2 + (\alpha + \epsilon)^2}}$$

na expressão (5.11) converge monotonicamente para 1 quando $\alpha \rightarrow \infty$, temos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \theta_2(\alpha, \alpha + \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg}{1 + g^2}.$$

A uniformidade em ϵ segue da desigualdade:

$$\theta_2(\alpha, \alpha + 1) \leq \theta_2(\alpha, \alpha + \epsilon) \leq \theta_2(\alpha, \alpha)$$

□

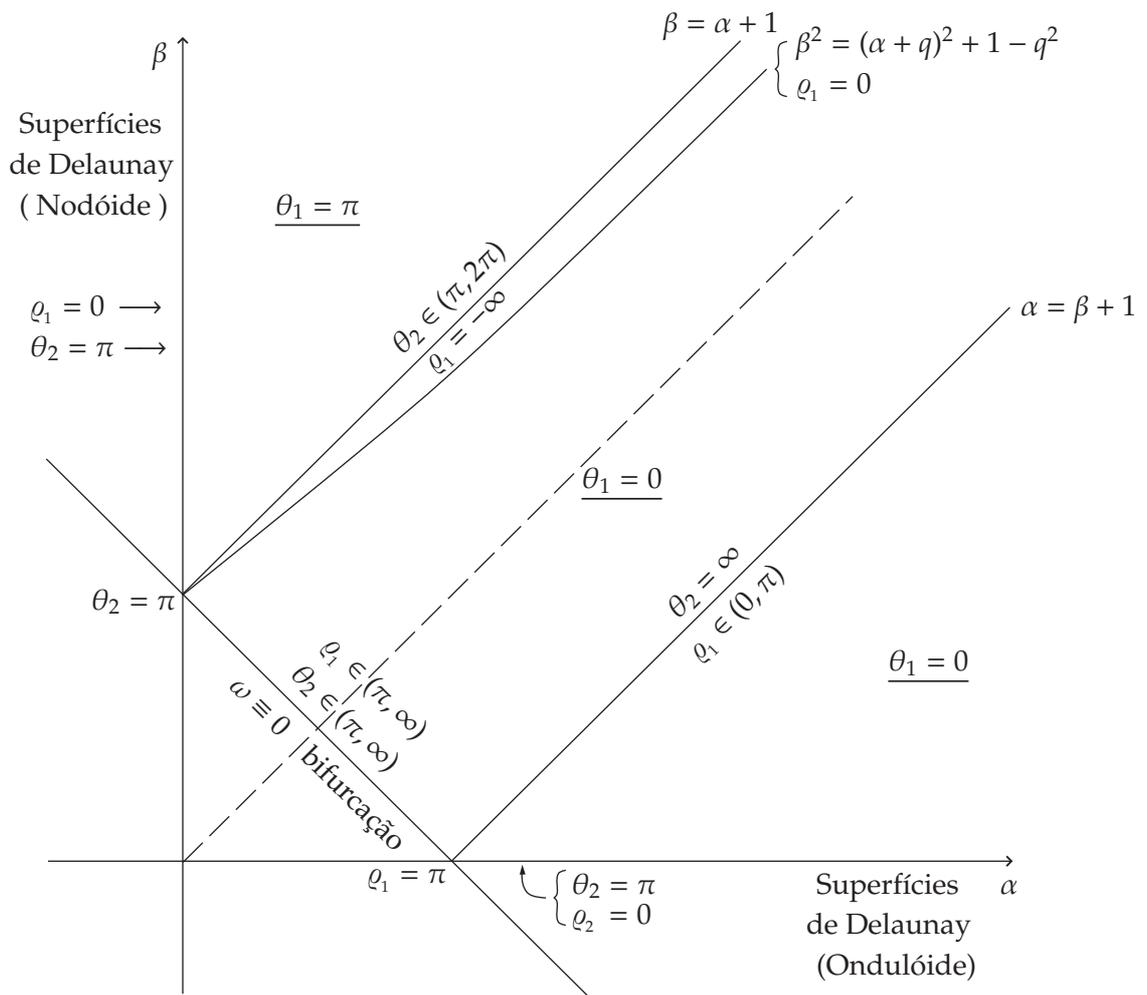


Figura 4: O espaço \mathfrak{B} e a discussão de "ser fechado" em termos de θ_1 , q_1 , θ_2 , e q_2

Recordando que, por convenção, $\lambda_1 < \lambda_2$, a discussão acima está sintetizada no teorema:

5.2.3 Teorema Principal

Teorema 5.6. *Dado um $\theta \in (\pi, 2\pi)$ tal que $\frac{1}{2\pi} \cdot \theta$ é racional, existe precisamente um toro com $H \equiv \frac{1}{2}$, as λ_1 -linhas de curvatura planares, e $\theta_2 = \theta$.*

6 *Apêndice A*

As imagens desta e da próxima página, foram obtidas em [11]. As imagens seguintes foram conseguidas através do software *javaview* obtido em [12]

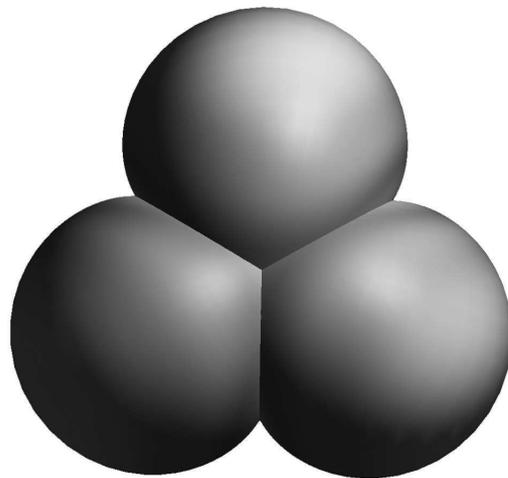


Figura 5: O Toro de Wente...

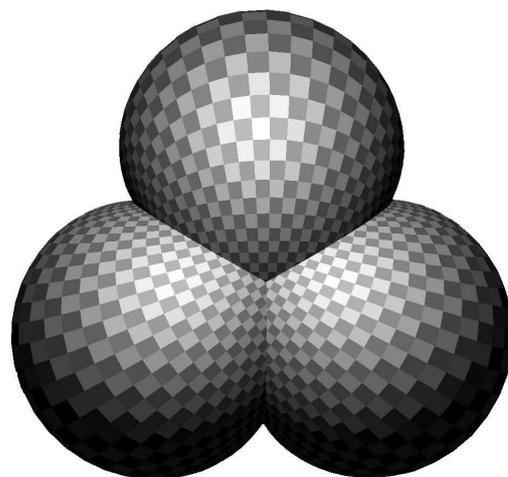


Figura 6: ... com três lóbulos

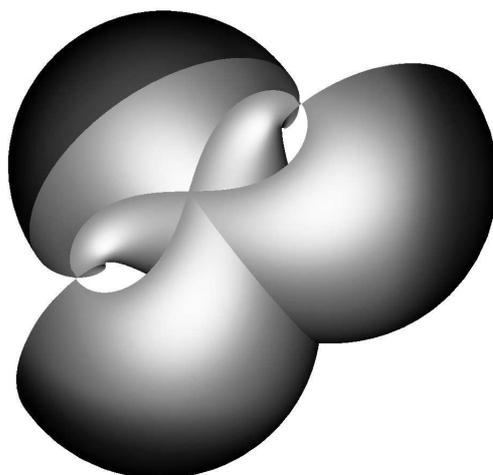


Figura 7: O interior do...

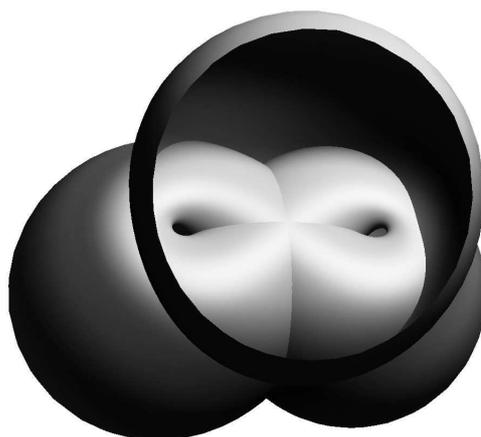


Figura 8: ... toro visto...

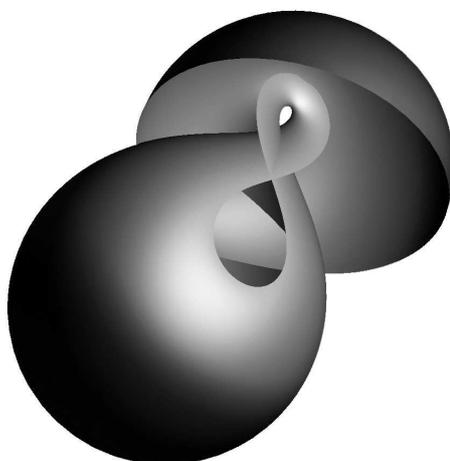


Figura 9: ...através de cortes

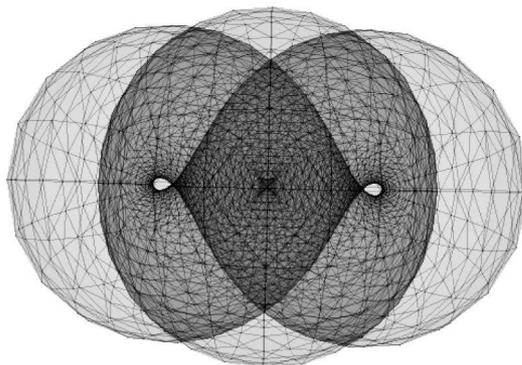


Figura 10: Imagem do *toro transparente*.

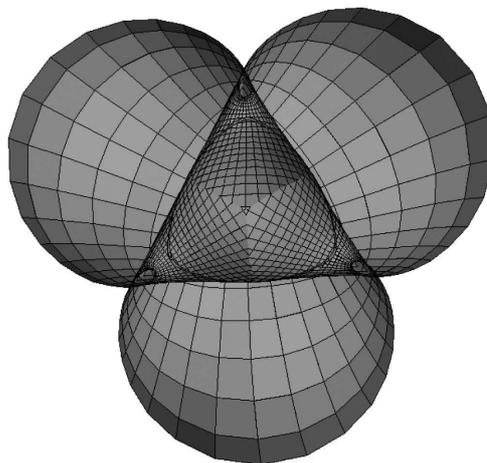


Figura 11: Interior do toro visto através de corte nos lóbulos

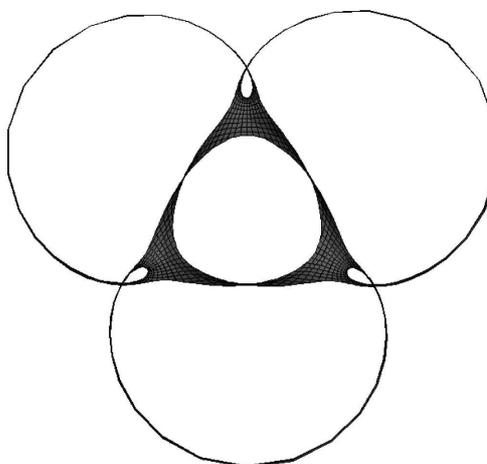


Figura 12: Imagem da intersecção do toro com um plano escolhido adequadamente

Referências

- [1] Abresch, U., *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions* , J. Reine Angew. Math 374, 169-192, (1987).
- [2] Alexandrov, A. D., *Uniqueness theorem for surfaces in the large* , V. Vestnik, Leningrad University (1958). Amer. Math. Soc. Trnas. (Series 2) **21**, 412-416.
- [3] Barbosa, L. e Carmo, M. do, *Stability of hypersurfaces with mean curvature* , Math. Z. 185, 339-353, (1984).
- [4] Carmo, M. do, *Geometria Riemanniana* , Projeto Euclides, Rio de Janeiro (1988).
- [5] Carmo, M. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* , Prentice-Hall, New Jersey (1976).
- [6] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable* , Springer-Verlag.
- [7] Delaunay, C., *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constant* , J. Math. Pures Appl., (1) 6 (1841), 309-320.
- [8] Heil, M., *CMC Pictures of constant mean curvature tori* , <http://www-sfb288.math.tu-berlin.de>
- [9] Hopf, H., *Differential Geometry in the large* , Lectures Notes in Math., 1000 Springer-Verlag, (1983).
- [10] Lima L. L. de, Neto, V. F. de e Rossmann, W., *Lower index of Wente tori* , Hiroshima Math. J., 31, 183-199. (2001).
- [11] N. Schmit, CMCLab Software, Center for Geometry, Analysis, Numerics and Graphics (GANG), University of Massachusetts at Amherst. <http://www.umass.edu/cmc/>
- [12] Polthier, K., Hildebrandt, K., Preuss, E., Reitebuch, U., JavaView Software Ver. 3.6.001 <http://www.javaview.de>
- [13] Toyama, K., *Self-Parallel Constant Mean Curvature Surfaces* , (2004).
- [14] Walter, R., *Explicit examples to the H-problem of Heinz-Hopf*, Geom. Dedicata 23, (1987).
- [15] Wente, H., *Counterexample of a conjecture of H. Hopf* , Pacific J. Math. 121, 193-243, (1986).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)