ANTONIO JOSÉ BORGES

POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO:

UMA INVESTIGAÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

ANTONIO JOSÉ BORGES

POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO:

UMA INVESTIGAÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª. Drª. Sônia Pitta Coelho***

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ **Local e Data:** ________________

Vê, estão voltando as flores

Vê nesta manhã tão linda

Vê como é bonita a vida

Vê, há esperança ainda.

Vê, as nuvens vão passando

Vê um novo céu se abrindo

Vê o sol iluminando

Por onde nós vamos indo.

Paulo Soledade

Dedico este trabalho

à Mirtes, a mulher da minha vida e companheira de sempre;

a meus pais Hilda e Antonio, pela vida;

a meus filhos Gerusa, Cauê e Caio, como exemplo;

aos que se tornaram a minha família, por todo o carinho que me dão:

ao Marcelo,

à Maira e ao Marco,

à Patrícia e ao Kwong,

ao Thomas, meu neto mais jovem que já amo tanto

e, em especial, com todo o meu amor,

à Marcela, neta querida, que nasceu junto com este projeto, que desde pequenina, ainda não sabendo nada, me ensinou tanto e que, do seu jeito, esteve ao meu lado em TODAS as horas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à **Professora Doutora Sônia Pitta Coelho** pela competência e elevado espírito profissional com que me orientou e pela compreensão nas horas mais difíceis;

à **Professora Doutora Lourdes de La Rosa Onuchic** e ao **Professor Doutor Ruy César Pietropaolo**, que muito me honraram ao aceitarem participar da Banca Examinadora, e que enriqueceram sobremaneira este trabalho com suas críticas e sugestões;

aos **Professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**, pelo ensinamento e experiência que transmitiram e pelos novos horizontes que mostraram;

a todos os **amigos**, sem necessidade de nomear um a um, por todo o incentivo que me deram, de todas as formas, de perto ou de longe.

O autor

RESUMO

Nosso trabalho investiga se os tópicos polinômios e funções são articulados, em livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio brasileiro. Para tanto, pesquisamos o tema na literatura didática disponível, em documentos oficiais, em dissertações e teses defendidas no Brasil e em artigos de congressos internacionais. Nossa análise investigou três das onze coleções de Matemática aprovadas em 2005 pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio do Ministério da Educação e Cultura. Examinamos o tratamento expositivo e o corpo de exercícios dessas três coleções. Quanto ao tratamento expositivo, investigamos como os assuntos polinômios e função polinomial são tratados, e como são relacionados, se este for o caso. Quanto ao corpo de exercícios, buscamos observar se as coleções dão a cada exercício o tratamento de polinômio ou de função polinomial. Concluímos que duas das coleções não articulam os temas no tratamento expositivo nem no corpo de exercícios, enquanto que a terceira coleção esboça tal articulação no plano expositivo e desenvolve-a com algum detalhe em seu corpo de exercícios.

Palavras-Chave: polinômio, função, livro didático, ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

Our research investigates if the topics polynomials and functions are articulated, in Brazilian high school mathematics textbooks. We study the subject in the available literature, official documents, thesis defended in Brazil and international congress' articles. Our analysis examines three among eleven Mathematics' collections approved in 2005 by the National Textbook Program to High School of the Brazilian Ministry of Education and Culture. We take a nearer view of the expositive treatment and the set of exercises of these three collections. For the expositive treatment, we research how the topics polynomials and polynomial function are explained and related, if so. For the exercises, we seek to find if the collections give to each of them a polynomial or, instead, a polynomial-function treatment. We conclude that two of the three collections don't relate the topics neither in the expositive treatment nor in the set of exercises, while the third collection sketches such articulation in the expositive plane and slightly develops it in the exercise set.

Keywords: polynomial, function, mathematics textbook, teaching and learning.

S U M Á R I O

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

A P R E S E N T A Ç Ã O

Nosso trabalho, organizado em 6 capítulos, investiga, fundamentalmente, se o tema polinômios é articulado ao tema funções em livros didáticos do Ensino Médio.

Iniciamos com uma investigação sobre o tema Polinômios na literatura disponível na Educação Matemática, pesquisando e consultando documentos oficiais, dissertações e teses defendidas no Brasil, a literatura para-didática, artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM), de congressos internacionais recentes; os resultados dessa investigação estão descritos no capítulo 1.

No capítulo 2 relatamos alguns resultados de duas análises já existentes sobre livros didáticos brasileiros do Ensino Médio: a do livro “Exame de Textos – Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, trabalho coordenado por Elon Lages Lima, publicado em 2001 e o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM): Matemática, na versão 2005 do Ministério da Educação e Cultura (MEC). Da primeira análise, coordenada pelo professor Elon Lages Lima, comentamos as principais conclusões sobre o tratamento de polinômios nos livros didáticos brasileiros. Da segunda, expomos os critérios de avaliação do livro didático de Matemática, adotados pelos pareceristas do PNLEM, e apresentamos a análise geral de 3 das 11 coleções examinadas nesse documento.

A seguir, passamos a relatar a nossa própria análise das possíveis articulações entre os temas polinômios e funções, nessas mesmas 3 coleções do PNLEM, nos seus livros 1 (primeiros volumes), nos quais são abordadas as funções afim e quadrática e nos seus livros 3 (terceiros volumes), que tratam dos temas polinômios, funções polinomiais e equações algébricas. Examinamos dois aspectos dos livros: **o tratamento expositivo** e **o corpo de exercícios**. O tratamento expositivo dos livros 1 é analisado no capítulo 3 e o dos livros 3, no capítulo 4. O capítulo 5 destina-se ao exame do corpo de exercícios dos livros 1 e dos livros 3.

Por fim, nossas conclusões são apresentadas no capítulo 6.

CAPÍTULO 1

PANORAMA DO TEMA POLINÔMIOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nosso trabalho investiga o tratamento dado a polinômios em livros didáticos recentes, detendo-se nas possíveis relações explicitadas com funções.

Iniciamos expondo o resultado de nossa investigação na literatura disponível sobre o tema na Educação Matemática.

Do ponto de vista de **documentos oficiais**, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio 2000 do Ministério da Educação e Cultura (MEC), que por simplicidade denominaremos PCNEM-2000, recomendam que "aspectos do estudo de **polinômios** e **equações algébricas podem ser incluídos** no estudo de **funções polinomiais**, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente". (PCNEM, 2000, p. 43, grifo nosso).

Consultamos também a Proposta Curricular para o Ensino de

Matemática do 2º grau da Secretaria da Educação do estado de São Paulo, em sua terceira edição, de 1995, que doravante, por simplicidade, denominaremos PROPOSTA.

A PROPOSTA foi elaborada visando auxiliar as escolas da rede oficial do estado de São Paulo, bem como os seus professores, na organização dos planos de ensino referentes à disciplina Matemática. Assim, consideramos apropriado consultar as recomendações contidas nesse documento, do qual, a seguir, passamos a destacar as principais indicações relacionadas ao tema polinômios.

Na p. 18, a PROPOSTA sugere para os cursos com 4 ou 5 aulas por semana a seguinte distribuição de conteúdo [grifos nossos]:

1ª série: Função (com Progressão Aritmética). Trigonometria no triângulo. Potências e Expoentes com Exponencial e Logaritmo.

2ª série: Trigonometria (1ª volta). Análise Combinatória. Probabilidade. Geometria. Prismas. Sistemas Lineares com Matriz e Determinante.

3ª série: Geometria Analítica. Matemática Financeira ou Estatística. Geometria. **Polinômios e Equações Polinomiais**. Números Complexos.

Observamos, entretanto, que o tema polinômios não figura na distribuição sugerida de conteúdos para os cursos com 2 ou 3 aulas por semana.

Portanto, a PROPOSTA considera que os temas polinômios e equações polinomiais devam figurar na grade curricular do Ensino Médio das escolas públicas do estado de São Paulo, embora apenas quando o número de aulas semanais de matemática é máximo. Consideramos que a própria sugestão de inclusão desses temas confere-lhes a devida importância, corroborada mais adiante, nas p. 42-43, na seção *Conteúdos, Objetivos e Comentários*, em que a PROPOSTA sugere sobre os temas polinômios e equações polinomiais os seguintes conteúdos e objetivos:

> Conteúdo: Estudo dos polinômios e seus elementos. Raízes de polinômios. Objetivos: Determinar polinômios a partir de informações sobre seu grau e seus coeficientes; operar com polinômios dando ênfase à divisão de polinômios; conceituar raízes de polinômios.
> Conteúdo: Resolução de Equações Polinomiais. Objetivos: Achar as raízes de uma equação polinomial; estudar relações entre co-eficientes e raízes; pesquisar raízes racionais, raízes inteiras e raí-zes complexas.

Vale destacar que, ao contrário dos PCNEM-2000, a PROPOSTA não faz menção à articulação entre polinômios e funções polinomiais, o que talvez possa ser atribuido à diferença de datas entre os documentos.

Procuramos também elencar e consultar as **dissertações e teses que tratam do nosso tema**. Pesquisando os volumes: v. 7 (n. 11/12), v. 9 (n. 15/16) e v. 12 (n.21) da revista *Zetetiké*, que trazem a relação de teses e dissertações de mestrado e doutorado em Educação Matemática produzidas e defendidas na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (FE/UNICAMP), no período de 1995 a 1997, e no Brasil, no período de 1998 a 2003, não encontramos nenhuma tese ou dissertação sobre o tema polinômios. Uma dissertação cujo assunto se aproxima do nosso se ocupa do ensino-aprendizagem de *Equações Polinomiais*. Trata-se do texto *Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução* *de problemas,* de Elizabeth Quirino de Azevedo (2002).

Como existe uma articulação natural entre equações algébricas (ou polinomiais) e polinômios, examinamos detidamente essa dissertação, em cujo resumo a autora destaca:

> Este trabalho tem como tema central de investigação o ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas. [...] Os tópicos de análise foram: a importância do ensino-aprendizagem das equações algébricas no final do terceiro ano do Ensino Médio, a utilização das equações algébricas em cursos universitários e como o ensino das equações algébricas no final do Ensino Médio é visto por alguns autores de livros didáticos e pesquisadores em Educação Matemática. Ainda, o tema equações algébricas assume o papel de enfeixar um programa de ensino de matemática ao longo de doze anos de estudo. [...] (AZEVEDO, 2002, p. do resumo).

Embora os enfoques sejam diferentes, há, sem dúvida, uma estreita relação entre os dois trabalhos e muitas das observações de Azevedo aplicam-se à nossa pesquisa. A seguir destacamos as principais dessas observações.

Na dissertação de Azevedo, lê-se que autores nacionais pesquisados falam sobre equações algébricas como “um tópico que deve ser explorado no Ensino Médio” [Carneiro (1998); Dante (1999) e Lima (1996), apud Azevedo, 2002, p.45] e que “[...] quanto aos métodos numéricos para resolução de equações [do 3º e 4º graus] estamos absolutamente convictos de que devam ser introduzidos no curso secundário [atual ensino médio]” (Carneiro, 1999, apud Azevedo, 2002, p. 45).

Sobre a análise de documentos legais, Azevedo (2002, p.54) conta que, em junho de 2000, recebeu da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEESP) um documento com as Matrizes Curriculares de referência para o Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB), contendo uma relação dos conteúdos de Matemática para a 3ª série do Ensino Médio, na qual polinômios e equações polinomiais aparecem como **último tópico**, após os números complexos, **fechando, assim, o programa curricular projetado para o Ensino Médio** (grifo nosso). Portanto, a autora defende que "**equações algébricas** é um tópico que **faz parte do currículo** e é o **arremate de um programa inteiro**" (Azevedo, 2002, p. 55, grifo nosso).

Na conclusão de sua dissertação, Azevedo (2002, p. 170) reitera a importância do ensino de equações algébricas:

> Na possibilidade de mudanças no currículo do Ensino Médio, tirando-se dele os Números Complexos, como desejado por alguns, conseqüentemente seria retirado o tópico Equações Algébricas. Com isso, o trabalho de equações algébricas se encerraria nas equações do 2º grau, sem que se trabalhasse o caso de discriminante negativo. Nossa defesa é de que o programa do Ensino Médio, projetado para os três anos, ficaria inacabado, uma vez que todo o estudo sobre números se completa com os Números Complexos e as Equações Algébricas não só fecham um estudo algébrico como também todo um programa de ensino, uma vez que, para trabalhar bem Equações Algébricas, os alunos precisam de todos os Conjuntos Numéricos de N a C, da Álgebra do Ensino Fundamental e Médio, da Geometria e da Trigonometria.

Da literatura paradidática, destacamos que no Brasil foi publicado em 1995 um importante livro que se ocupa do ensino de Álgebra, com 33 artigos de estudiosos estrangeiros da área de Educação Matemática. Trata-se da tradução por Hygino H. Domingues de "As Idéias da Álgebra", o livro do ano do *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* de 1988, organizado por Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte. No prefácio dessa obra, seu tradutor colocava:

> [...] O que ocorre no ensino da álgebra em nível médio talvez seja uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos, e isso, se de um lado pode produzir uma falsa sensação de facilidade, de outro pode produzir uma impressão muito forte de inutilidade, além de dar apenas uma idéia muito pálida e parcial da natureza e do alcance dessa matéria. Na verdade, vários dilemas sérios se apresentam no ensino da álgebra em nível elementar e somente os conhecendo a fundo se podem evitar as concepções erradas de que está pontilhado. Esses dilemas e essas concepções erradas, entre muitas outras coisas, são tratados neste livro [...]

A respeito da expressão “nível médio”, usada por DOMINGUES, cumpre observar, por oportuno, que no Brasil a educação básica é formada pelas oito séries do Ensino Fundamental, para idades de 7 a 14 anos e pelas três séries do Ensino Médio, para idades de 15 a 17 anos. Nos Estados Unidos esse período escolar corresponde às cinco séries da *Elementary School*, para idades de 6 a 10 anos, seguidas das três séries dos *Middle Grades* (Graus Médios), para idades de 11 a 13 anos, mais as quatro séries da *High School*, para idades de 14 a 17 anos. Assim, a expressão “nível médio”, empregada por Domingues no parágrafo acima, sendo de uma tradução, refere-se ao ensino da álgebra no respectivo nível de escolaridade nos Estados Unidos. Acrescente-se ainda que, em conseqüência das sucessivas reformas do ensino que ocorreram no Brasil, em lugar da expressão Ensino Médio usaram-se outras como Ensino de Segundo Grau, Ensino Secundário, Curso Científico (área de ciências exatas e biológicas), Curso Clássico (área de ciências humanas), Curso Colegial.

No mesmo livro acima citado, há vários artigos que demonstram preocupação ou oferecem sugestões para o ensino de polinômios. Comentaremos um deles, que apresenta argumentos para aumentar o espaço dedicado a polinômios na álgebra escolar. Trata-se do artigo *Os* *polinômios no currículo da escola média* que objetiva, segundo seus autores, Theodore Eisenberg e Tommy Dreyfus, *“dar uma idéia de como e por que os polinômios devem fazer parte da escola média”*. Observamos, por oportuno, que a Escola Média americana corresponde à 6ª, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental brasileiro; assim, a expressão “escola média”, empregada diversas vezes no artigo, tem essa acepção. No artigo, Eisenberg & Dreyfus (1988?, apud Coxford & Shulte, 1995, p. 127-134) assinalavam que, nos últimos vinte anos, parece ter havido uma redução da ênfase sobre *polinômios* no currículo da escola média. Relatam que em Israel, por exemplo, os alunos primeiro aprendem a fatorar o polinômio associado à equação do segundo grau [equação quadrática] e igualam cada fator a zero para obter as raízes. Nesse momento, mesmo sem saber, estão aplicando o *teorema da decomposição*, conseqüência do *teorema fundamental da álgebra*, ainda que para o caso particular de um polinômio de grau 2, de coeficientes e raízes reais, fazendo $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Estão também aplicando os *conceitos de raiz* e de *divisor ou fator* de um polinômio, bem como a *propriedade do anulamento do produto* de números reais, ou seja: **sendo a e b números reais, se a.b=0, então a=0 ou b=0**, resultado que vale também para mais de dois fatores. Porém, logo depois, o professor introduz a fórmula resolutiva usual $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que é de tal forma incorporada pelos alunos, especialmente pelos de menor capacidade em Matemática, que sua aplicação na resolução de equações do segundo grau se torna um procedimento mecânico, cujo significado vai se esvaziando com a repetição de sua aplicação.

Ainda segundo o artigo, numa turma de introdução ao cálculo de alunos da Universidade Ben-Gurion, que não se destinavam à área de Ciências Exatas, 50% dos alunos resolveram equações como $x^2 + 5x = 0$ e $10x - x^2 = 0$ pela fórmula resolutiva; não usaram o eficiente recurso da fatoração $x(x+5) = 0$ e $x(10-x) = 0$, que seria muito mais simples para obter as raízes. Para equações como $x^2 - 5x + 4 = 0$, que também poderia ser resolvida por fatoração $[(x-1)(x-4) = 0]$, a porcentagem de alunos que a resolveram pela fórmula subiu para 70%. Além disso, a maioria dos alunos revelou não ter idéia de como abordar o problema de achar as raízes de uma equação de grau superior a dois e nem do que significa *achar as raízes de uma equação*. Na verdade, para esses alunos, resolver uma equação quadrática é substituir números numa fórmula, sem ter muita consciência do que está acontecendo.

O levantamento acima evidencia a tendência a enfatizar *procedimentos*, em prejuízo do desenvolvimento dos *conceitos* e de *estruturas* ligadas ao tema, o que pode levar a se considerar a Matemática como um simples elenco de algoritmos, além dessa tendência pouco contribuir para que os alunos apliquem e generalizem o que aprenderam. Segundo o artigo, para que o ensino de polinômios não caminhe nessa direção, a ênfase no uso da fórmula resolutiva, por exemplo, deve diminuir, *as equações quadráticas devem ser tratadas como equações polinomiais de grau dois e, como tais, casos particulares de polinômios mais gerais*. Concluem os autores do artigo:

> A solução de problemas que, à primeira vista, parecem não ter qualquer ligação com polinômios acaba dependendo muito deles. Os polinômios são onipresentes em matemática, e é importante que os alunos os dominem com segurança.

Buscamos também **artigos sobre polinômios na Revista do Professor de Matemática (RPM)**. Merece menção o artigo *Equações algébricas - um assunto para o ensino médio?* CARNEIRO (1999, p. 31-40), no qual o autor afirma que muitas oportunidades para motivar os temas da Matemática com problemas interessantes e realistas são perdidas, ao deixar fora dos programas do Ensino Médio a resolução de equações polinomiais de grau superior a dois. A seguir apresenta quatro problemas que recaem em equações algébricas de grau 3 e sugere métodos numéricos para a resolução.

Em congressos internacionais recentes, embora o tema polinômios seja pouco citado explicitamente, vê-se preocupação com o ensino da álgebra, especialmente em como dar-lhe significado. Destacamos o XII Congresso de Estudo da *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*, cujo tema foi: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, realizado em dezembro de 2001 na Universidade de Melbourne, Austrália. Em artigo apresentado nesse Congresso, escreveu MESA (2001, p. 454, tradução nossa):

> Como parte de um esforço para superar a falta de significado em álgebra [no ensino médio], várias abordagens têm sido sugeridas: resolução de problemas, abordagem funcional, generalização, [...] todas elas parecendo ajudar a dar significado à álgebra.

A abordagem funcional, mencionada por MESA, preconiza, entre outras coisas, privilegiar as funções como o veículo principal para a introdução de variáveis e da álgebra. Para nós, a citação é significativa, uma vez que nosso tema de investigação é a relação explicitada em livros didáticos entre polinômios e funções polinomiais.

Outro artigo do mesmo congresso adota ponto de vista semelhante: STUMP e BISHOP (2001, p. 567-568), em trabalho que propõe um curso de Álgebra para professores da educação básica, defendem que o tema funções polinomiais [e não polinômios] seja tratado com destaque, na seqüência do programa, entre os tópicos funções afins e funções exponenciais.

C A P Í T U L O 2

UMA ANÁLISE SOBRE LIVROS DIDÁTICOS E ESCOLHA DAS COLEÇÕES

Um dos indicadores de como os assuntos são abordados na prática de professores são os livros didáticos. Segundo MESA (2001, p.455, tradução nossa):

> [...] As razões de escolher livros didáticos estão enraizadas na convicção de que eles são um elemento crucial na educação escolar. Os livros didáticos sintetizam o que é conhecido sobre um conceito, sob múltiplas perspectivas: histórica, pedagógica e matemática. Como documentos, eles estabelecem informações valiosas sobre a aprendizagem potencial que poderia ocorrer numa sala de aula. [...] Uma investigação do conteúdo de livros didáticos é relevante não somente para complementar o conjunto de pontos de vista sobre um tópico particular, mas também para ajudar a explicar sua relação com a dificuldade de aprendizagem dos conceitos associados.

Em outro trabalho, MESA (2004, p. 255, tradução nossa) coloca que “os livros didáticos preenchem muitos propósitos” e completa com opiniões de vários outros autores: “eles são uma mídia poderosa para o ensino e a aprendizagem" (TANNER, 1988, p. 141, apud MESA, 2004, p.255); "determinam qual é a matemática escolar (e, analogamente, [qual deve ser a matemática] para programas de estudo e provas)" (DÖRFLER; MCLONE, 1986, p. 93, apud MESA, 2004, p. 255); "são essenciais para efetiva aprendizagem nas nações em desenvolvimento" (FARRELL; HEYNEMAN, 1994, p.6360, apud MESA, 2004, p. 255); "junto com provas e avaliações, cumprem uma função de responsabilidade e controle" (WOODWARD, 1994, p.6366, apud MESA, 2004, p. 255).

Assim, nosso corpo de dados será constituido de livros didáticos.

Já há um trabalho no Brasil analisando conteúdos de coleções recentes de livros didáticos para o Ensino Médio, e começaremos examinando o que esse trabalho diz a respeito do tema polinômios.

2.1. UMA ANÁLISE SOBRE LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS DO ENSINO MÉDIO: ALGUNS SUBSÍDIOS

De 1988, ano em que o artigo "*Os polinômios no currículo da escola média"* (EISENBERG; DREYFUS, 1995), comentado no capítulo 1, foi publicado, aos dias atuais, o tratamento do tema polinômios não parece ter sofrido grandes renovações no plano nacional, se tomarmos as abordagens sugeridas em livros didáticos como um indicador. Prova disso está na obra que, em 2001, alguns pesquisadores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), subvencionados pela fundação Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social (VITAE), publicaram: o livro "Exame de Textos – Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, trabalho de Elon Lages Lima (editor) e outros sete analistas (Augusto César Morgado, Edson Durão Júdice, Eduardo Wagner, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Paulo Quinhões Carneiro, Maria Laura Magalhães Gomes e Paulo Cezar Pinto Carvalho). Na apresentação do texto, afirma o editor que os analistas propuseram-se a “contribuir para a melhoria da qualidade dos livros-texto destinados ao ensino médio, complementando a ação do MEC, que até então avaliava os livros do ensino fundamental, da primeira à oitava série”. Por razões de praticidade, daqui em diante vamos nos referir a esse livro como “Exame de Textos” simplesmente. Nessa obra, os pesquisadores analisaram 12 coleções, de 3 volumes cada, dentre as principais obras didáticas de Matemática publicadas e adotadas no Ensino Médio das escolas brasileiras até então. Lamentavelmente, não podemos dar melhores referências sobre o ano de edição das coleções analisadas, pois o texto não faz menção a isso.

A seguir comentamos as principais conclusões sobre o tratamento de polinômios que extraímos dessa obra.

Segundo o livro “Exame de Textos”, p. 43, o estudo elementar dos polinômios [o que é feito no Ensino Médio] justifica-se por duas principais razões. Em primeiro lugar, por sua aplicação às **equações algébricas**, como as **de primeiro e segundo graus**, que são estudadas no livro 1 (primeira série), no qual são também estudadas as funções afim e quadrática ou **as equações algébricas de grau maior que dois**, que podem ser estudadas no livro 3 (terceira série). Entre estas, as de terceiro grau, que ocorrem na geometria, em problemas relativos a volumes ou as de graus arbitrários nas questões de Matemática Financeira (p. 345). Em segundo lugar, porque apresenta interessantes questões de divisibilidade, análogas às de números inteiros (p. 376 e 377).

Nas pp. 76 e 308, o livro afirma que os polinômios são funções de uma natureza particularmente simples, que podem [e devem] ser olhadas sob os pontos de vista [que se entrelaçam e se complementam]:

- **aritmético**, em que se consideram as propriedades de divisibilidade, análogas às dos números inteiros;
- **algébrico**, das operações algébricas e resolução de equações;
- **geométrico** ou **analítico**, em que os polinômios são vistos como uma importante categoria de funções de uma variável e na qual é possível estudar suas propriedades por meio dos seus gráficos;
- **numérico** no cálculo de suas raízes por métodos aproximados.

Vale ressaltar que o que os autores denominam o ponto de vista geométrico ou analítico é o que pretendemos investigar em livros didáticos.

Entretanto, os livros didáticos em geral não exploram essa riqueza de interpretações e articulações potenciais, como é possível concluir da leitura de “Exame de Textos”.

Ainda segundo o “Exame de Textos”, nos volumes destinados à terceira série, os autores, em geral, perdem a oportunidade de interligar os assuntos estudados durante todo o Ensino Médio utilizando o tópico polinômios, o que proporcionaria uma visão integrada da Matemática (p. 164, 344, 345), ponto de vista já expresso por AZEVEDO, conforme mencionamos no capítulo 1.

Ainda segundo o texto, em alguns livros didáticos, os polinômios nem sequer são considerados como funções (p. 76), sendo apresentados como objetos meramente formais e cujo significado situa-se fora do alcance do aluno. Alguns livros esclarecem, mas outros confundem os conceitos de polinômios e de funções e não estabelecem claramente as diferenças e as relações entre um e outro (p. 342, 377, 404, 453, 461). Novamente, observamos que este é nosso tema de investigação.

Há ainda outros que parecem "dar as costas às diretrizes curriculares para o ensino médio, constituindo-se num tipo de livro ultrapassado, cuja única função parece ser a de adestrar alunos para os exames vestibulares" (p. 143).

Em alguns outros livros didáticos, sempre segundo os autores da referida análise, não há um só gráfico de um polinômio de grau superior a 2 (p. 44, 220, 456). A apresentação de alguns gráficos de polinômios de graus baixos (3 ou 4) serve, pelo menos, para que o aluno perceba, em relação às raízes reais de um polinômio de coeficientes reais, a diferença entre os casos de grau ímpar e grau par (p. 308, 309); que veja **com clareza** que toda equação algébrica (ou polinômio) de grau ímpar e coeficientes reais possui ao menos uma raiz real (p. 376) ou um número ímpar de raízes reais; ou que o número de raízes reais é par, se o polinômio é de grau par. São aplicações do importante teorema de Bolzano, sobre raízes reais de um polinômio de coeficientes reais, que se tornam bem mais visíveis e compreensíveis para o aluno, quando mostradas graficamente (p. 342).

Poucos livros apresentam algum processo para a obtenção de valores aproximados para as raízes reais de uma equação de grau superior a 2, no ponto de vista dos analistas. Pelo menos o método da bissecção poderia ser apresentado, o que seria muito mais eficiente para o aluno do que a mecanização das fórmulas (p. 45, 220, 309, 342, 456). A maioria ignora completamente a tecnologia atual e não orienta nem incentiva o uso de uma boa calculadora ou computador, especialmente para o trabalho repetitivo de contas (p. 91, 143, 220, 266, 378).

Destacamos que, no posfácio da obra (p. 463), os analistas apresentam uma espécie de conclusão geral, resumindo-a sob a forma de um suposto “livro didático genérico”. A conclusão assim se inicia: “Tomemos quatorze assuntos dentre os mais relevantes que se estudam no Ensino Médio e vejamos rapidamente como o livro genérico os trata”. Sobre os assuntos **funções** e **polinômios** extraímos que o livro didático genérico:

- define **função** como relação binária, ponto de vista que nenhum matemático ou usuário da Matemática adota em seu dia-a-dia; as funções que surgem no livro são “bolinhas” e “flechinhas” ou então dadas por fórmulas;

- **não traz gráficos** de polinômios de grau superior a 2;

- **não traz exemplos** de problemas contextuais que requeiram a resolução de uma equação de grau superior ao segundo.

Segundo a análise dos pesquisadores do IMPA, no livro “Exame de Textos”, a idéia de articular o estudo de polinômios com funções é uma abordagem que dá sentido ao tema; por outro lado, a abordagem formal é considerada pelos pesquisadores como mecânica, desprovida de sentido, transmitindo uma imagem da Matemática como um mero conjunto de algoritmos.

2.2. PORQUE DEFENDEMOS A ARTICULAÇÃO ENTRE POLINÔMIOS E FUNÇÕES

A nosso ver a abordagem formal, que usualmente é feita nos livros didáticos, não tem sido eficaz na construção, nem no desenvolvimento do conceito de polinômio, que, dessa maneira, torna-se extremamente abstrato e sem sentido para o aluno do Ensino Médio. Além disso, tal construção do conceito não explora a existência de um caminho “natural” das funções afins e quadráticas, que o aluno já conhece, aos polinômios. Entendemos por caminho “natural” o percurso, pelo qual é possível definir as funções afim e quadrática como funções polinomiais do primeiro e segundo grau, respectivamente. A seguir, pode-se mostrar, sem dificuldades, que *o produto de duas funções polinomiais do 1º grau é uma função polinomial do 2º grau*. Depois, pode-se investigar a recíproca, ou seja, se toda função polinomial do segundo grau pode ser “fatorada” num produto de duas funções polinomiais do primeiro grau de raízes reais. Lembramos que a construção que estamos propondo pode e deve ser acompanhada de experiências gráficas, envolvendo a reta e a parábola, gráficos cartesianos das funções polinomiais do primeiro e do segundo grau, respectivamente, que o aluno, nesse momento, já conhece. E pode, ainda, ser enriquecida com aplicações práticas, contextualizando, por exemplo, com a função receita obtida na venda de x unidades de um determinado produto, cujo preço de venda unitário (em unidades monetárias $) seja dado, por exemplo, por -2x+6. Assim, a receita (quantidade X preço de venda) seria expressa pela função polinomial do segundo grau $x(-2x+6) = -2x^2 + 6x$, num determinado domínio de validade (da Álgebra e do mercado). Então, multiplicar essas funções é uma forma de obter outras. Além disso, vai-se construindo, também *naturalmente*, a compreensão do *teorema fundamental da Álgebra* e suas aplicações, num caminho mais eficaz e didático, ou seja, *dos fatores para o produto*, ainda que em alguns casos particulares. Tal seqüência de construção facilitará, no futuro, a aplicação desse teorema no sentido inverso, isto é, *do polinômio para os seus fatores*, como realmente será utilizado pelo aluno no tópico equações algébricas, na seqüência do programa. Evidentemente, antes de desenvolver o tópico equações algébricas, ou paralelamente, seriam introduzidos os números complexos, o que possibilitaria ampliar o universo das raízes para o conjunto dos complexos.

Em seguida, podem-se fazer experiências analíticas e gráficas com produtos de 3 funções polinomiais do primeiro grau, produtos de uma do primeiro por uma do segundo grau, pesquisar se todas as funções polinomiais do terceiro grau são obtidas dessa maneira, e assim por diante. No momento oportuno, pode-se passar para funções polinomiais de quarto grau, e justificar, a partir daí, o estudo das equações algébricas (gráficos, busca de raízes, relações entre os coeficientes e as raízes, etc.).

Por outro lado, avaliamos que o percurso acima descrito está em consonância tanto com os PCNEM-2000 (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio 2000 do Ministério da Educação e Cultura), como com a PROPOSTA (Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 2º grau), pois, como salientamos no capítulo 1, os PCNEM-2000 recomendam: “aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente” e a PROPOSTA na seção *Considerações sobre os conteúdos*, pp. 21-22, sugere (grifo nosso):

> E o que dizer do ensino de Polinômios e Equações Algébricas? [...] A sugestão é que não se faça no [ensino de] 2º grau um semestre de estudo sobre polinômios e equações algébricas, mas que eles sejam tratados à medida que haja necessidade e sempre que possível **recorrendo à fatoração e a casos já conhecidos**.

2.3. O CATÁLOGO DO PROGRAMA NACIONAL DE LIVROS DO ENSINO MÉDIO

Para obter subsídios sobre coleções dedicadas ao Ensino Médio, consultamos o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM): Matemática, na versão 2005 do Ministério da Educação e Cultura (MEC), texto ao qual, daqui em diante, em nome da simplicidade, vamos nos referir como Catálogo do PNLEM ou, simplesmente, Catálogo.

Nossa pesquisa analisou três das onze coleções de livros didáticos de Matemática, recentemente aprovadas pelo PNLEM, por nós escolhidas segundo critérios que estão explicitados mais adiante, no item 2.3.2, e que identificamos, respectivamente, por coleção A (Adilson), coleção B (Guelli) e coleção C (Ignez):

- **Coleção A (Adilson)**: Matemática: uma atividade humana, de Adilson Longen, Base Editora e Gerenciamento Pedagógico, 2003.
- **Coleção B (Guelli)**: Matemática, de Oscar Augusto Guelli Neto, Editora Ática, 2004.
- **Coleção C (Ignez)**: Matemática Ensino Médio, de Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz, Saraiva Livreiros Editores S/A, 2003.

2.3.1. UM POUCO DA HISTÓRIA DO PNLEM

O texto seguinte é baseado em dados obtidos no Catálogo do PNLEM, disponíveis em < www.mec.gov.br >.

Em 1985, o Ministério da Educação iniciou a distribuição de livros didáticos aos alunos matriculados no Ensino Fundamental da rede pública, através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), cujo objetivo é oferecer gratuitamente livros didáticos de qualidade a alunos e professores de escolas públicas do Ensino Fundamental, como apoio ao processo ensino-aprendizagem. O Programa Nacional do Livro Didático/PNLD, em sua proposta inicial, previa apenas a escolha dos livros pelo professor, com a conseqüente distribuição pelo MEC.

A partir de 1993, para garantir a qualidade desses livros e do ensino, evidenciou-se a necessidade de uma análise do material distribuído, de forma que, em 1995, pela primeira vez, a escolha dos livros pelos professores passou a ser feita com base no Guia de Livros Didáticos, no qual são publicadas, em forma de resenhas, as análises elaboradas por especialistas nas diversas áreas do conhecimento. Essa avaliação das obras didáticas por especialistas, promovida e coordenada pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), resultou em importantes reflexos, tanto no mercado editorial quanto na escola. Quanto ao mercado editorial, constatou-se melhora na qualidade do material enviado para a avaliação, aumento de coleções e de livros recomendados, redução de obras excluídas e uma renovação da produção didática brasileira com a inclusão de novas obras para avaliação. Quanto aos benefícios para a escola, os professores passaram a escolher livros didáticos melhor qualificados do que os que escolhiam antes das análises elaboradas por especialistas, melhorando a qualidade do material didático oferecido ao aluno.

Desde 1996, o processo de avaliação pedagógica sistemática das obras inscritas no PNLD é coordenado pela Secretaria de Educação Básica do MEC e é realizado em parceria com universidades públicas que se responsabilizam pela avaliação dos livros didáticos.

Dados os resultados positivos do PNLD, o MEC decidiu ampliar a distribuição de livros didáticos e as avaliações também para o Ensino Médio.

Desde 2004, por intermédio da Secretaria de Educação Média e Tecnológica – SEMTEC, em parceria com o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE, o MEC está implantando gradativamente o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM). Inicialmente, de forma experimental, até o início de 2005, 2,7 milhões de livros das disciplinas Português e Matemática foram distribuídos a 1,3 milhão de alunos da primeira série do Ensino Médio de 5.392 escolas das regiões Norte e Nordeste. Aos professores sugeriu-se que escolhessem, a partir das recomendações da edição 2005 do Catálogo, para Português, um livro único para os três anos letivos seguintes (2005, 2006 e 2007) e, para Matemática, uma coleção composta por três volumes, cada um dedicado ao conteúdo de um ano.

No início de 2006, 7,01 milhões de alunos das três séries do Ensino Médio de 13,2 mil escolas do país receberam livros de Matemática e Português.

2.3.2. RESENHAS E ESCOLHA DAS COLEÇÕES

Passemos aos critérios de avaliação do livro didático de Matemática, adotados pelos pareceristas do PNLEM e constantes do Catálogo, que recomenda (p. 71) (grifos nossos):

> Para ser compatível com os objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio, um livro didático deve abranger um amplo espectro de conteúdos nos campos da aritmética, da geometria, da álgebra, das grandezas e medidas, da estatística, das probabilidades e da combinatória.
>
> [...] Deve, igualmente, **afastar-se da compartimentalização** e procurar **ampliar as ocasiões de articulação** entre os diferentes temas, evitando o inconveniente de se limitar à apresentação de conteúdos de maneira concentrada em uma parte da coleção e desconectada de outros conteúdos. Por exemplo, é freqüente que sejam abordadas as funções apenas no primeiro volume da coleção e os conceitos de geometria analítica no último volume com pouquíssimas conexões com os demais conteúdos. É também importante que, no livro didático, atenda-se a requisitos de **diversidade**. Um mesmo conceito matemático pode ser abordado em mais de um dos campos temáticos acima referidos e, mesmo dentro de cada um deles, pode ser tratado de diferentes pontos de vista.

Atentando para essa orientação, entendemos que, embora os critérios não mencionem especificamente polinômios e funções polinomiais, eles recomendam articulações entre temas. Note-se, contudo, que o próprio Catálogo do PNLEM sugere outras articulações semelhantes (p. 71-72):

> [...] Além disso, a representação no plano cartesiano permite ligar as propriedades de uma função com as de seu gráfico e a geometria analítica pode aparecer, então, como um campo de confluência de vários conceitos — função, equação, figura geométrica, etc. — que deveriam ser desenvolvidos e integrados no decorrer de todo o ensino médio.
>
> [...] A função linear e sua estreita relação com o conceito de proporcionalidade entre grandezas é uma primeira dessas funções relevantes, que se amplia para o estudo da função linear afim e correlatas, e suas inúmeras aplicações.
>
> [...] A função quadrática é um tema propício para a ligação com o conhecimento adquirido sobre a equação do 2º grau, que deve ser retomada, com atenção à importante técnica de completar quadrados. A função quadrática articula-se bem com o estudo geométrico da parábola, além de ter papel relevante como modelo, por exemplo, para o movimento uniformemente acelerado.

Quanto aos nossos critérios de escolha das 3 coleções, duas foram selecionadas por terem *características opostas*, segundo critérios do Catálogo, com relação à *compartimentalização*: a coleção A (Adilson), que se caracteriza por *apresentar os conteúdos em grandes blocos*, e a coleção B

(Guelli) que representa o modelo que *distribui o conteúdo das várias áreas pelos três volumes da coleção*. A coleção C (Ignez) foi escolhida por *representar o modelo da diversidade de enfoques e representações matemáticas*.

Abaixo, resumimos do Catálogo os trechos das resenhas dessas três coleções relacionados à distribuição de conteúdos, diversidade de enfoques e outras considerações pertinentes à nossa investigação (grifos nossos).

Sobre a coleção A (Adilson)

- Em cada série, **os temas são tratados em grandes blocos**, o que contribui para a **fragmentação** do conhecimento matemático.
- Os conteúdos são introduzidos por meio de uma situação-problema interna ou externa à Matemática ou a partir de conhecimentos prévios, o que pode facilitar a atribuição de significados aos conceitos matemáticos.
- As demonstrações apresentadas na coleção são de fácil compreensão, embora seu número seja reduzido.
- O livro do professor contém vários subsídios que auxiliam o docente, sugere leituras complementares, atividades a serem desenvolvidas pelos alunos, propostas de avaliação e de **articulações** entre conteúdos matemáticos e, destes, com outras disciplinas.

- Na distribuição dos conteúdos, **adota-se o modelo de concentrar grandes blocos temáticos em determinadas séries**. Pode-se verificar **falta de articulação** em alguns conteúdos, como no estudo de **funções** e progressões ou na ligação entre probabilidade e estatística.

Sobre a coleção B (Guelli)

- Em sintonia com as novas tendências no ensino da Matemática, os conteúdos das várias áreas e subáreas da Matemática **distribuem-se em cada um dos três livros da coleção**.
- Persiste, no entanto, a opção por extensos blocos temáticos, em cada volume, e há pouca articulação entre os temas tratados em cada um deles.
- **O enfoque dado aos conteúdos é, essencialmente, algébrico**, com ênfase na simbologia matemática, em particular nos blocos temáticos relativos às **funções** e à trigonometria. Essa opção pode dificultar a aprendizagem do aluno.
- Com relação à abordagem dos conteúdos, pode-se observar, no livro de 1ª série que, no estudo das **funções**, as definições e as propriedades não recebem o devido tratamento, que é substituído pela ênfase nas equações e nas ine-

quações correspondentes a essas **funções**. Conexões importantes não são devidamente exploradas, tais como **função afim** e progressão aritmética. Quanto à diversidade de enfoques, constata-se que o ponto de vista algébrico é privilegiado em toda a coleção.

Sobre a coleção C (Ignez)

- A coleção apresenta uma boa seleção de conteúdos, **adequadamente distribuídos**, com destaque para a presença da estatística em seus três volumes, apesar de haver uma sobrecarga de conteúdos de trigonometria.
- A metodologia adotada caracteriza-se por uma **diversidade de enfoques e representações matemáticas**, articulando conhecimentos de modo a favorecer um processo de retomada e aprofundamento.
- Inúmeras **situações do cotidiano**, vinculadas à Matemática, **favorecem a compreensão dos conteúdos**.

Assim, optamos por centrar nossa investigação na questão: *O tema polinômios é articulado ao tema funções em livros didáticos?* Para respondê-la, examinamos dois aspectos dos livros: **o tratamento expositivo**, apresentado nos dois próximos capítulos, e **o corpo de exercícios**, tema do capítulo 5.

CAPÍTULO 3

O TRATAMENTO EXPOSITIVO–I: AS PRIMEIRAS IDÉIAS SOBRE POLINÔMIOS

Preliminarmente, observamos que os conteúdos polinômios, funções polinomiais e equações algébricas são usualmente abordados nos livros 3 (terceiros volumes) das coleções. Entretanto, como buscamos articulações entre polinômios e funções, examinamos também os livros 1 (primeiros volumes), pois as primeiras funções polinomiais estudadas no Ensino Médio – a função afim e a função quadrática – são abordadas nesses volumes.

3.1. DISTRIBUIÇÃO DOS CONTEÚDOS NAS COLEÇÕES ESCOLHIDAS

A partir de dados obtidos nas Resenhas de Matemática do Catálogo do PNLEM, organizamos os **quadros 1, 2** e **3**, apresentados a seguir, para dar uma idéia da distribuição geral de conteúdos nas 3 coleções escolhidas (grifos nossos).

Quadro 1: Conteúdo da coleção A (Adilson)		
Livro 1 - 1ª série	**Livro 2 - 2ª série**	**Livro 3 - 3ª série**
• Tópicos de Matemática do Ensino Fundamental: números reais; potenciação; radiciação; **expressões algébricas; equações e sistemas de equações**; medidas; números proporcionais; triângulo retângulo; círculo e circunferência; **equações do 2º grau**. • Conjuntos: noções importantes; subconjuntos; operações entre conjuntos. • **Funções: função; função afim; função quadrática**; conceito de módulo; função exponencial; logaritmos; composição e inversão de funções; função logarítmica. • Trigonometria: o sistema trigonométrico; seno e coseno de um arco; outras razões trigonométricas; operações com arcos; funções trigonométricas; fatoração de razões trigonométricas; trigonometria num triângulo qualquer.	• Seqüências numéricas: médias; seqüências; progressão aritmética; progressão geométrica; juros simples e compostos • Geometria no plano: ângulos; triângulos; polígonos; retas e ângulos na circunferência; polígonos regulares. • Análise combinatória e probabilidades: princípio fundamental da contagem; permutação; combinação simples; binômio de Newton; probabilidades. • Geometria espacial: pontos, retas e planos; perpendicularismo; poliedros; prismas; cilindros; pirâmides; cones; esfera.	• Introdução à estatística: noções de estatística; medidas estatísticas. • Matrizes, sistemas lineares e determinantes: sistemas de equações lineares; discussão de um sistema linear; matrizes; determinantes; teoremas sobre determinantes. • Geometria analítica: introdução; equações da reta; ângulos entre retas; equação da circunferência; distâncias; cônicas. • **Números complexos e equações polinomiais: polinômios; divisão de polinômios**; números complexos; plano complexo; operações com números complexos; **equações algébricas; relações de Girard.**

Quadro 2: Conteúdo da coleção B (Guelli)		
Livro 1 - 1ª série	**Livro 2 - 2ª série**	**Livro 3 - 3ª série**
• O plano de coordenadas: distância entre dois pontos; declividade de um segmento; estudo da reta. • **Funções: relação e função; funções polinomiais de 1º e 2º graus;** funções exponencial e logarítmica; equações e inequações; matemática financeira. • O espaço: retas e planos; projeções. • Seqüências, progressões aritmética e geométrica. • Estatística e probabilidade: gráficos e tabelas; média, mediana, moda, desvio padrão; probabilidade matemática. • Resolução de triângulos: razões trigonométricas; teoremas dos co-senos e dos senos.	• Funções trigonométricas: circunferência trigonométrica; seno; co-seno; tangente; equações e inequações; identidades trigonométricas; funções periódicas; funções inversas. • Matrizes, determinantes e sistemas lineares: operações com matrizes; transposta e inversa; cálculo de determinantes; resolução e discussão de sistemas lineares. • Áreas e volumes de prismas e pirâmides. • Métodos de contagem, organização e coleta de dados: princípio fundamental da contagem; permutações; combinações; desenvolvimento de um binômio; cálculo de probabilidades; noções de estatística.	• Geometria analítica: distância entre dois pontos; declividade de um segmento; estudo da reta; inequações; ângulos. • Geometria analítica e corpos redondos: circunferência; áreas e volumes de cilindros e cones; esfera e superfície esférica; parábolas; elipses e hipérboles. • **Números complexos, funções polinomiais** e cálculo informal: operações com complexos; forma trigonométrica; **resolução de equações polinomiais; teorema fundamental da álgebra**; limites; derivadas; regras de derivação. • Estatística, probabilidade e análise de informação: histogramas e polígonos de freqüência; medidas de centralização e dispersão, ajuste de retas.

Quadro 3: Conteúdo da coleção C (Ignez)		
Livro 1 - 1ª série	**Livro 2 - 2ª série**	**Livro 3 - 3ª série**
• Conjuntos numéricos e intervalos na reta real. • Estatística, Relações entre grandezas • **Funções**. • **Funções do 1o grau**. • **Funções do 2o grau**. • Seqüências, progressão aritmética e progressão geométrica. • Função exponencial, equação exponencial e inequação exponencial. • Logaritmo e função logarítmica. • Módulo de um número real e função modular. • Função composta e função inversa. • Trigonometria do triângulo retângulo. • Arcos de circunferência, ângulos e círculo trigonométrico. • Funções trigonométricas: definição, periodicidade e gráfico. • Relações trigonométricas num triângulo qualquer.	• Estatística. • Contagem. • Probabilidade. • Sistemas lineares. • Matrizes. • Determinantes. • Geometria de posição. • Sólidos geométricos: poliedros. • Sólidos geométricos: corpos redondos. • Geometria métrica espacial. • Funções trigonométricas: redução ao 1º quadrante. • Equações trigonométricas e inequações trigonométricas. • Funções trigonométricas da soma. • Funções trigonométricas inversas.	• Noções de matemática financeira. • Estudo analítico do ponto. • Estudo analítico da reta. • Estudo analítico da circunferência. • Estudo analítico das cônicas. • Probabilidade e estatística. • Funções trigonométricas: cotangente, secante e co-secante. • **Polinômios**. • **Números complexos**. • **Equações polinomiais**. • Taxa de variação de funções.

Examinamos a distribuição dos conteúdos diretamente relacionados com o tema de nossa dissertação, os quais, destacados em negrito nos quadros acima, são: equações do primeiro e do segundo grau, função afim, função quadrática, polinômios, função polinomial, números complexos, equações polinomiais ou algébricas, teorema fundamental da álgebra, relações de Girard, elementos de Cálculo, que se distribuem nos livros 1 e 3 das três coleções analisadas.

3.2. DISTRIBUIÇÃO DO CONTEÚDO NOS LIVROS 1

Os quadros 1, 2 e 3 registram os conteúdos das coleções em níveis mais gerais, de capítulos ou unidades. Paralelamente, analisando mais detidamente os próprios livros das coleções, registramos também os itens específicos de cada título mais geral.

Pelos quadros acima pode-se observar que, nos livros 1, as três coleções apresentam como conteúdo comum a *função afim* e a *função quadrática*, apenas dando nomes diferentes para essas funções: *funções afim* e *quadrática* na coleção A (Adilson), *funções polinomiais de 1º grau e de 2º grau* na coleção B (Guelli) e *funções do 1º e do 2º grau* na coleção C (Ignez). Em nosso texto, em nome da clareza, ao mencionarmos essas funções, usaremos respectivamente a terminologia *função afim* e *função quadrática*.

Por outro lado, pela análise mais detida dos próprios volumes das coleções, constata-se que, no livro 1, a coleção A apresenta:

- Na p. 41 e seguintes: uma revisão de equação do 1º grau e de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, vistos no ensino fundamental.
- Na p. 91 e seguintes: uma revisão de equações do 2º grau, equações completas, dedução da fórmula resolutiva, equações incompletas, relações entre raízes e coeficientes, fatoração da equação, assuntos também normalmente vistos no Ensino Fundamental.

- Na p. 160 e seguintes: a função afim, seu gráfico, o estudo do sinal da função pelo gráfico e a função linear, como caso particular da função afim.
- Na p. 169 e seguintes: a função quadrática, seu gráfico, o vértice da parábola, a imagem da função, algumas aplicações sobre o valor máximo, estudo do sinal pelo gráfico e a forma canônica.

Já a coleção B apresenta:

- Na p. 16 e seguintes: como descrever uma reta a partir de uma equação, aplicando o conceito de declividade e apresenta a equação da reta em três formas: ponto-declividade, reduzida e geral.
- Na p. 35 e seguintes: função polinomial de 1º grau, seu gráfico, uma revisão de desigualdades, inequação polinomial de 1º grau associada ao gráfico da função.
- Na p. 44: uma revisão dos métodos de resolução da equação polinomial de 2º grau.
- Na p.45 e seguintes: função polinomial de 2º grau, a parábola, o vértice, a imagem da função, a forma canônica, inequações polinomiais de 2º grau pela parábola, inequação produto e inequação quociente pelos gráficos das funções, pontos críticos (máximo e mínimo da função).

E a coleção C apresenta:

- Na p. 105 e seguintes: funções do 1º grau e seu gráfico cartesiano, função identidade, conceito de função crescente e função decrescente, inequação do 1º grau e estudo (algébrico) do sinal da função do 1º grau, inequação-produto e inequação-quociente (envolvendo apenas funções do 1º grau) pelo quadro de sinais.
- Na p. 131 e seguintes: funções do 2º grau e seu gráfico cartesiano, a fórmula da equação do 2º grau, raízes da função do 2º grau, ponto em que a parábola intercepta o eixo Oy, vértice da parábola, concavidade da parábola, valor máximo ou mínimo e conjunto imagem da função do 2º grau, estudo do sinal da função do 2º grau e estudo de inequações do 2º grau pelo gráfico.

A nossa investigação do livro 1 revelou que a coleção A apresenta uma revisão de alguns assuntos normalmente desenvolvidos no Ensino Fundamental, como equações do 1º grau e os principais métodos de resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, o que não ocorre nas coleções B e C. Entretanto, as três coleções apresentam uma revisão de equações do 2º grau, sendo a da coleção A a mais abrangente; a da coleção B se limita a métodos de resolução, enquanto que a coleção C revisa apenas a fórmula resolutiva.

Em relação à função afim, as diferenças começam, como já observamos, na nomenclatura. As três coleções apresentam uma definição, o gráfico (reta) e o estudo do sinal (pelo gráfico ou algebricamente). A coleção A apresenta ainda a função linear como caso particular da função afim e encerra o tema. As coleções B e C vão além disso e incluem a resolução de inequações do 1º grau, precedida de uma revisão sobre desigualdades no caso da coleção B. A coleção C acrescenta um pouco mais: função identidade, função crescente e função decrescente , inequação produto e inequação quociente (pelo quadro de sinais), envolvendo funções afins.

Quanto à função quadrática, além das já mencionadas diferenças de nomenclatura, as três coleções apresentam uma definição, gráfico (parábola), conceitos de vértice e imagem da função, estudo do sinal pelo gráfico, máximos e mínimos. A coleção A apresenta ainda a forma canônica, enquanto que a coleção B apresenta, além da forma canônica, inequação-produto e inequação-quociente (estudo pelo gráfico) e a coleção C destaca o ponto onde a parábola intercepta o eixo y e a concavidade da parábola.

3.3. POLINÔMIOS NOS LIVROS 1

Passemos agora a investigar se as coleções articulam os temas polinômios e funções, e como o fazem, em caso afirmativo. Para isso, iniciamos nossa análise investigando se as coleções mencionam as expressões **função polinomial e polinômio** e que relações são explicitadas entre esses termos nos livros 1. A **tabela 1** apresenta os resultados.

Tabela 1: Questões investigadas nos Livros 1

	Coleção		
Questão	**A (Adilson)**	**B (Guelli)**	**C (Ignez)**
Menciona função polinomial?	Não	Sim	Sim
Menciona polinômio?	Não	Não	Sim
Relaciona os termos?	Não se aplica	Não se aplica	Não

Na p. 160 do livro 1, a coleção A inicia a abordagem do tema **função afim** contextualizando com o exemplo de um vendedor de computadores e de programas de informática, cujo salário é composto de uma parte fixa de R$500,00 e uma parte variável correspondente à comissão de 4% sobre o total das vendas, o que é representado por $y = 500 + 0{,}04x$. Então, o autor afirma que a sentença $y = 500 + 0{,}04x$ "é uma função que relaciona o salário em função do total de vendas". Prossegue afirmando que é um exemplo de função afim e apresenta a seguinte definição:

> Uma função f: IR $\rightarrow$ IR é denominada função afim na variável independente **x**, quando for da forma $y = f(x) = ax + b$, onde **a** e **b** são números reais.

Mais adiante, na p. 169, repetindo o recurso da contextualização, inicia a abordagem da função quadrática, tomando o exemplo de um criador de galinhas que resolve construir um galinheiro retangular de área máxima, aproveitando um muro já existente no local. O criador dispõe de 60 metros de tela para fechar os outros três lados do retângulo. Representando por x e y as medidas dos lados, o autor mostra que a área do retângulo é dada por

$S = -2x^2 + 60x$ e destaca que essa igualdade representa a área em função da medida da largura do retângulo.

Acrescenta que "uma função que relaciona uma variável dependente em função de outra variável (dita independente), por meio de uma sentença de 2º grau, é dita função quadrática". O que seria *uma sentença de 2º grau*? O autor não explica, muito menos define, mas, logo após o exemplo, dá a seguinte definição de função quadrática:

> Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função [talvez o autor quisesse dizer *função do 2º grau*] ou função quadrática na variável independente **x**, quando for da forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, onde **a** e **b** são números reais, com $a \neq 0$.

Tanto no caso da função afim quanto no da função quadrática, o livro segue desenvolvendo os outros itens do conteúdo, tais como gráfico (reta ou parábola), sinal da função etc., mas não menciona a palavra polinômio nem a expressão função polinomial. Assim, não faz relação das funções afim e quadrática com nenhum tipo de polinômio.

Na coleção B, o autor inicia a apresentação da por ele denominada **função polinomial de 1º grau** na p. 35 do livro 1, indo diretamente à definição:

> Considere dois números reais **a** e **b**, com $a \neq 0$.
> Uma função cujos valores são dados por uma fórmula como $f(x) = ax + b$ chama-se **função polinomial de 1º grau**.

E acrescenta que “o domínio é o conjunto formado por todos os números reais **x** para os quais a fórmula tem significado” e que “a imagem é o conjunto formado por todos os números reais **f(x)** para os quais a fórmula tem significado”.

A seguir, o autor apresenta o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$, simplesmente como sendo a reta obtida a partir de 3 pontos, correspondentes aos valores de x: 0,1 e -1, registrados numa tabela como:

X	2x+1	F(x)
0	2.0 + 1	1
1	2.1 + 1	3
-1	2.(-1) + 1	-1

Apenas nos exercícios (pp. 36-37) aparece a oportunidade da contextualização, como no de número 12:

> Uma agência de aluguel de automóveis cobra R$40,00 por dia mais R$0,50 por quilômetro rodado.
> a) Expresse o custo do aluguel de um automóvel em função do número de quilômetros rodados e trace o gráfico.
> b) Quanto custa alugar um automóvel para uma viagem de um dia, percorrendo 200 km?
> c) Uma pessoa pagou R$89,00 pelo aluguel de um automóvel por um dia. Quantos quilômetros rodou?

De modo análogo, na p. 45, o autor inicia a apresentação da por ele denominada **função polinomial de 2º grau**, mais uma vez indo diretamente à definição:

Considere três números reais **a**, **b** e **c**, com $a \neq 0$. Uma função cujos valores são dados por uma fórmula como $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada **função polinomial de 2º grau** ou **função quadrática**.

Nas pp. 48 e 49, apresenta uma dedução correta da forma canônica, mas as coordenadas do vértice da parábola "aparecem" de modo não muito claro a partir dessa forma canônica. Mostra, como exemplo, o gráfico da função quadrática $y = -x^2 + 2x + 3$, a partir de 5 pontos, registrados numa tabela, na qual os valores de x são mais convenientes (simétricos aos do x do vértice):

x	**$-x^2+2x+3$**	**y**
1	$-1^2+2(1)+3$	4
0	$-0^2+2(0)+3$	3
-1	$-(-1)^2+2(-1)+3$	0
2	$-2^2+2(2)+3$	3
3	$-3^2+2(3)x+3$	0

Novamente, não há nenhuma tentativa de justificar a forma do gráfico.

Não apresenta nenhum exemplo de contextualização que faça aparecer a necessidade de aplicar a função quadrática.

Na p. 105 do livro 1, as autoras da coleção C iniciam a abordagem do tema **funções afins**, que chamam de **funções do 1º grau**, afirmando que "As funções do 1º grau correspondem a relações entre a variável dependente e a variável independente expressas por polinômios do 1º grau".

Louve-se a tentativa das autoras de relacionar função polinomial com o polinômio do 1º grau, embora não definam este último.

Na seqüência, o texto traz um exemplo que introduz a contextualização. As autoras colocam a situação de um carro de corrida, que já continha 8 litros de combustível, sendo abastecido durante 6 segundos por uma bomba que injetava 3 litros de gasolina por segundo; uma tabela (acompanhada da reta correspondente ao gráfico cartesiano) registra a cada segundo o volume em litros de gasolina contido no tanque de combustível do carro:

t (s)	**V (ℓ)**
2	V(2)=2.3+8=14
3	V(3)=3.3+8=17
4	V(4)=4.3+8=20
5	V(5)=5.3+8=23
6	V(6)=6.3+8=26

Logo após, vem a conclusão das autoras:

“Podemos expressar a relação entre **V** e **t** por $V = 3.t + 8$, $t \in [0, 6]$”

e a definição formal:

> Uma função **f**, de IR em IR, que a todo número **x** associa o número $ax + b$, com **a** e **b** reais, $a \neq 0$, é denominada **função do 1º grau**.

A seguir, passam a apresentar o item **Gráfico cartesiano da função do 1º grau**, escrevendo "Vamos esboçar o gráfico da **função polinomial do 1º grau** (grifo nosso) $y = 2x + 3$, ...". Merece menção a inconsistencia de terminologia, que consiste em chamar a função afim de função do primeiro grau, e depois referir-se a ela como função polinomial do 1^o grau. Seguem justificando que "o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta" (com argumentos geométricos) e desenvolvem o restante do conteúdo já relacionado anteriormente.

Destacamos a hesitação das autoras já quanto ao nome da função que estão apresentando. Mencionam, sem desenvolver, que existe uma relação entre função afim e polinômio do 1^o grau (que não definem); em seguida, definem função afim, nomeando-a como **função do 1º grau**; na seqüência, mencionam sem definir a expressão **função polinomial do 1º grau**.

Na p. 131, as autoras da coleção C iniciam a abordagem do tema **funções quadráticas**, contextualizando de imediato com o exemplo do gráfico (já pronto no livro) da altura **y** alcançada por um foguete, que fora lançado, mas caiu devido a uma pane do sistema, em função do tempo **t**. Comentam que, a partir do gráfico, podemos obter informações sobre a altura máxima atingida pelo foguete, o tempo que levou para atingir o ponto mais alto etc. No final, observam que o gráfico foi obtido a partir da função $y = 12{,}5 + 30t - 2{,}5t^2$, $t \in [0,12]$, com **t** medido em segundos e **y**, em metros, fórmula essa que o aluno aprenderá em Física, no estudo do movimento de projéteis. Chamam-na de **função do 2º grau** ou **quadrática** e apresentam a seguinte definição:

> Uma função **f**, de IR em IR, que a todo número **x** associa o número $ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$, é denominada **função do 2º grau** ou **função quadrática**.

Estranhamente, as mesmas autoras que, ao apresentarem a definição de **funções do 1º grau**, escreveram “As funções do 1º grau correspondem a relações entre a variável dependente e a variável independente expressas por polinômios do 1º grau”, não fazem nenhum tipo de associação com **polinômios do 2º grau**, quando definem a **função quadrática**.

Assim, em relação à questão “O tema polinômios é articulado ao tema funções em livros didáticos?”, objeto de nossa investigação, podemos dizer que, nos livros 1, a coleção C é a única que faz menção à função polinomial associada a polinômio. Entretanto, não é clara a relação entre os vários termos empregados por ela: função do 1º grau, polinômio do 1º grau, função polinomial do 1º grau, função do 2º grau. Como já dissemos anteriormente, suas autoras mencionam que existe uma relação entre função afim e polinômio do 1º grau, mas não chegam a desenvolver essa relação.

C A P Í T U L O 4

O TRATAMENTO EXPOSITIVO–II: POLINÔMIOS, EQUAÇÕES E GRÁFICOS

4.1. DISTRIBUIÇÃO DO CONTEÚDO NOS LIVROS 3

Analisando os livros 3, observamos a apresentação dos seguintes conteúdos relativos ao tema de nosso trabalho:

Na coleção A:

- p. 196 e seguintes: polinômios, grau, valor numérico, igualdade, polinômio nulo, adição e multiplicação de polinômios.
- p. 203 e seguintes: divisão de polinômios, dispositivo de Briot-Ruffini no caso do divisor $x \pm a$, teorema do resto, teorema de D'Alembert, divisão pelo produto (x-a)(x-b).
- p. 211 e seguintes: números complexos, o plano complexo.

- p. 239 e seguintes: equações algébricas, teorema fundamental da álgebra, teorema da decomposição, multiplicidade de uma raiz, raízes racionais, raízes imaginárias, relações de Girard.
- pp. 254 a 256: gráfico de uma função polinomial [apenas uma idéia geral].

Na coleção B:

- p. 92 e seguintes: Números complexos
- p. 102 e seguintes: Um algoritmo especial [sem nomear como Briot-Ruffini] para o valor numérico de funções polinomiais e para o teorema do resto, teorema do fator (sem dizer que é o de D'Alembert), raízes racionais, resolução de equações polinomiais, teorema fundamental da Álgebra, raízes conjugadas (complexas).
- p. 111 e seguintes: Noção intuitiva de limite, limite no infinito para uma função polinomial, a derivada [como limite] e equação da reta tangente, regras de derivação, máximos e mínimos relativos de funções polinomiais pelo sinal da derivada e sua relação com os intervalos onde a função é crescente ou decrescente.

Na coleção C:

- p. 193 e seguintes: polinômio como soma algébrica de monômios e respectivo grau, valor numérico, função polinomial, operações com polinômios [adição, subtração, multiplicação e divisão], método da chave, método de Descartes [dos coeficientes a determinar], divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau, divisão sintética [ou algoritmo de Briot-Ruffini], divisibilidade por x-a (teorema do resto e raiz de um polinômio P(x)), decomposição em fatores e resolução de equações e inequações.

- p. 218 e seguintes: números complexos.
- p. 255 e seguintes: equação polinomial, teorema fundamental da Álgebra e teorema da decomposição, multiplicidade de uma raiz, relações de Girard [para equações de grau 2, 3 e 4], raízes imaginárias [conjugadas], pesquisa de raízes racionais, gráficos de funções polinomiais [apenas uma idéia, num exemplo] na sessão denominada Flash Matemático.
- p. 277 e seguintes: taxa de variação média [de uma função], variação instantânea de uma função e noção de derivada, noção intuitiva de limite de uma função, taxa de variação instantânea de uma função, derivada e reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, interpretação cinemática da derivada (velocidade escalar e aceleração escalar), função derivada, derivada de algumas funções, sinal da derivada relacionado a intervalos onde a função é crescente ou decrescente, pontos de máximo e de mínimo de uma função.

O assunto polinômios é desenvolvido de modo semelhante nas coleções A e C, que apresentam definição, grau, valor numérico e operações. A coleção B trabalha alguns conteúdos de uma forma diferente das demais: os assuntos vão sendo introduzidos e desenvolvidos uns em seguida aos outros, sem uma separação clara em capítulos específicos por temas. Assim, logo em seguida ao item *Potências de números complexos*, a coleção B apresenta e justifica o algoritmo de Briot-Ruffini, usando-o inicialmente como um *algoritmo* especial para calcular o valor numérico de funções polinomiais e, mais adiante, utiliza esse algoritmo, mais o teorema do resto e o que chama de "teorema do fator" [sem dizer que é o teorema de D'Alembert] para o caso específico da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo x-a; contudo, não apresenta o caso geral da divisão de polinômios, diferentemente das coleções A e C. Na seqüência, as coleções A e C focam o caso particular da divisão por binômio do 1º grau e também apresentam o algoritmo de Briot-Ruffini, o teorema do resto e o teorema de D'Alembert. A coleção A apresenta ainda a divisão pelo produto (x-a)(x-b). Já a coleção C relaciona o teorema do resto com raiz de um polinômio P(x) e apresenta a decomposição em fatores, associada à resolução de equações e inequações.

Quanto ao item *números complexos,* as três coleções desenvolvem o conteúdo previsto para o Ensino Médio, variando a ordem em que o fazem: nas coleções A e C, depois de polinômios e na B, antes.

O tema equações algébricas é desenvolvido de modo semelhante pelas coleções A e C, que apresentam a definição de equação algébrica (na coleção A) ou equação polinomial (na coleção C), o teorema fundamental da

Álgebra, o teorema da decomposição, a multiplicidade de uma raiz, o teorema das raízes racionais, o teorema das raízes imaginárias (conjugadas) e as relações de Girard para equações de grau 2, 3, 4 e n, na coleção A, e grau 2, 3 e 4, na coleção C. A coleção B não define equação polinomial, mas associa o teorema do resto com raiz da equação P(x)=0, onde P(x) é o mesmo polinômio que aparece como exemplo no teorema do resto. Apresenta ainda o teorema das raízes racionais, a resolução de equações polinomiais, o teorema fundamental da Álgebra e a propriedade das raízes conjugadas.

No texto final da unidade, a coleção A apresenta uma definição de polinômio como função e algumas considerações gerais sobre o *gráfico de uma função polinomial*, relacionando-o com continuidade, raízes reais, multiplicidade, número de pontos em que "corta" o eixo x e o teorema de Bolzano [sem enunciá-lo formalmente]. Além disso, faz ilustrações geométricas genéricas, mas não apresenta nenhum exemplo de gráfico de polinômio em particular. A coleção C faz algo semelhante na sessão chamada *Flash Matemático*, na qual apresenta dois exemplos de gráfico de função polinomial, um de grau 5 e outro de grau 6, a partir de uma investigação de suas raízes racionais.

Quanto a relações com cálculo diferencial, a coleção A nada apresenta. A coleção B apresenta, como já relacionamos anteriormente, uma noção intuitiva de limite, limite no infinito para uma função polinomial, a derivada [como limite] e a equação da reta tangente, [algumas] regras de derivação, máximos e mínimos relativos de funções polinomiais pelo sinal da derivada e sua relação com os intervalos onde a função é crescente ou decrescente e, aí sim, comenta o esboço do gráfico de uma função polinomial (de grau 3) a partir dos seus pontos de máximo e de mínimo relativos. Já a coleção C apresenta o conceito de taxa de variação média de uma função e usa a noção intuitiva de limite para introduzir a taxa de variação instantânea de uma função e, a partir daí, como também já relacionamos anteriormente, seguem: a noção de derivada, reta tangente, interpretação cinemática, função derivada, derivada de algumas funções, sinal da derivada, pontos de máximo local e de mínimo local, e, como aplicação desses conceitos, a construção do gráfico de uma função (polinomial de grau 3).

4.2. POLINÔMIOS NOS LIVROS 3

Investiguemos agora como o tema é abordado nos livros 3. Para tanto, elaboramos dez questões, numeradas de 1 a 10, que estão distribuídas nas tabelas 2, 4 e 5, comentadas nas seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, respectivamente. As tabelas apresentam os resultados de nossa investigação e examinam também as eventuais articulações com as funções polinomiais afim e quadrática, bem como com elementos do cálculo diferencial.

4.2.1. POLINÔMIOS, FUNÇÕES POLINOMIAIS E AS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Iniciamos pela tabela 2, cujas questões (de 1 a 5) examinam as relações entre polinômios, função afim, função quadrática e funções polinomiais.

Tabela 2: Questões investigadas nos Livros 3 – primeiro bloco

	Coleção		
Questão	**A(Adilson)**	**B(Guelli)**	**C(Ignez)**
1) Menciona polinômio?	Sim	Sim	Sim
2) Define grau de polinômio?	Sim	Não	Sim
3) Menciona função polinomial?	Sim	Sim	Sim
4) Relaciona as expressões função polinomial e polinômio?	Não	Não	Sim
5) Identifica como funções polinomiais as funções afim e quadrática?	Não	Não	Sim

Quanto às questões da tabela 2, as coleções A e C definem polinômio e grau de polinômio, enquanto a coleção B só menciona. Quanto ao item função polinomial, a coleção C define-a e as coleções A e B mencionam, mas não a definem. A relação entre os conceitos de função polinomial e de polinômio é, em geral, apresentada de forma confusa, como exporemos no decorrer da análise. No que diz respeito a reconhecer as funções afim e quadrática (já apresentadas nos livros 1) como polinomiais, apenas a coleção C o faz.

A coleção A, na p. 196 do livro 3, apresenta polinômios como “as expressões que representam a área de um retângulo de dimensões x e x+5 ou a área total de um cubo de aresta x” [a expressão área do cubo se refere à área da superfície do cubo], articulando-os com o assunto **área,** da geometria. Em seguida, define *formalmente:* “polinômio na variável x é toda expressão P(x) que pode ser reduzida à forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, onde:

- $a_n, a_{n-1}, ... a_0$ são números reais denominados coeficientes do polinômio;
- as parcelas $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_0 são os termos do polinômio;
- os expoentes n, n-1, ... são números naturais.

A seguir, define grau de um polinômio como sendo “o maior expoente da variável tal que o coeficiente do termo correspondente seja diferente de zero”.

Na p. 197, há um “recado” para o leitor: “Observe que todo polinômio na variável x é também uma função”, sem justificativa ou explicação desse fato. Além disso, o autor não utiliza o nome *função polinomial*, nesse momento de seu texto. Introduz o valor numérico de um polinômio, associando o do polinômio ao da função correspondente, baseado no que já afirmara antes (“todo polinômio é uma função, ...”), ainda sem explicar como se faz tal associação. E, apesar de citar, durante todo o capítulo, mais algumas vezes o fato de que todo polinômio é uma função, jamais explica *como* o leitor pode constatar a associação de polinômio com esse tipo de função, à qual não dá nenhum nome específico nesse ponto de seu texto. Menciona, sem definir propriamente, a expressão "função polinomial" apenas no final, na seção denominada *Gráfico de uma função polinomial* (pp. 254-256). Comentaremos essa abordagem mais à frente.

A coleção B, no livro 3, introduz, na p. 102, o termo funções polinomiais – antes de introduzir o termo polinômio – através de exemplos, quando faz a apresentação informal do conhecido algoritmo de Briot-Ruffini, como podemos observar no quadro abaixo:

> As funções cujos valores são dados por fórmulas tais como:
>
> $f(x) = 4x + 5 \qquad g(x) = 2x^2 - 5x + 4 \qquad h(x) = x^3 + ix^2 - 2x + 5i$
>
> são chamadas de **funções polinomiais**.

No entanto, essa afirmação não pode ser considerada como uma definição. No restante da seção, não menciona mais a expressão função polinomial.

Na p. 104, apresenta o teorema do resto, no enunciado do qual aparece o termo polinômio, sem definição. Detalhamos abaixo o trecho correspondente:

> Para todo polinômio P(x) de grau **n** diferente de zero e para cada número complexo **a** existe um polinômio Q(x) de grau n-1 tal que:
>
> $$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$$

Não relaciona os conceitos, nem os termos polinômio e função polinomial, nem reconhece como polinomiais as funções afim e quadrática. Como conseqüência de sua abordagem, naturalmente não define grau de polinômio.

A coleção C, nas pp. 193-194 do livro 3, define formalmente polinômio e grau de um polinômio, após definir monômio (e grau de monômio), binômio e trinômio, como segue:

> Um **monômio** de uma variável é o produto de uma constante não nula **a** por uma variável **x** elevada a um número natural **n**.
>
> Um monômio é da forma $\mathbf{ax^n}$, onde **a** é o coeficiente do monômio, $a \in IR$, **n** é o grau do monômio e $\mathbf{x^n}$ é a parte literal, $n \in N$.

Após definir monômios semelhantes, acrescenta:

> A soma algébrica de **dois monômios** não-semelhantes chama-se **binômio**; a de **três monômios** não-semelhantes entre si chama-se **trinômio**.

> A expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + ... + a_1 x + a_0$, com $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ números reais, $n \in N$ e $a_n \neq 0$, é chamada de **polinômio** de grau **n** na variável **x**.
>
> Os monômios $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, ...$a_1 x$, a_0 são os **termos** do polinômio.

Na p. 197, define formalmente “função polinomial”, da seguinte forma:

Dados os números reais $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$, $n \in N$, a função **P**, de IR em IR, definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 ,$$

é denominada **função polinomial** ou simplesmente **polinômio**.

Os monômios $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, $...a_1 x$, a_0 são os **termos** ou **monômios**; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ são os **coeficientes** de **P**, e **x** é a **variável real** dessa função.

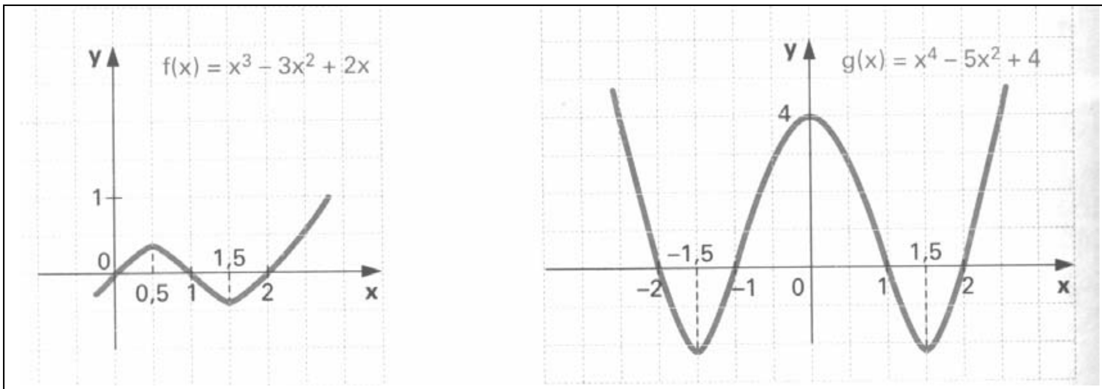
Portanto, a coleção C explicita uma relação entre polinômios e funções polinomiais de IR em IR. Além disso, ao identificar os termos polinômio e função polinomial, procura introduzir o leitor ao costume disseminado de chamar as funções polinomiais de polinômios. Nos exemplos que acompanham a definição de função polinomial, retoma as funções afim e quadrática. Na p. 198, acrescenta: “O estudo dos polinômios nos permite aprofundar o conceito de funções para aquelas de grau maior que 2 ...”. E prossegue “... observe, por exemplo, os esboços dos gráficos cartesianos das funções $f(x) = x^3-3x^2+2x$ e $g(x) = x^4-5x^2+4$:

Tabela 3: Valores para a construção de gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 na coleção C

x	-1	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-6	0	0,375	0	-0,375	0

x	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
g(x)	0	-2,1875	0	4	0	-2,1875	0

Figura 1: Gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 na coleção C



Analisando esses gráficos, podemos verificar que os zeros ou raízes de f são 0, 1 e 2 e de g são -2, -1, 1 e 2" . Depois de relembrar algumas definições sobre funções, faz uma relação superficial com os conceitos básicos do estudo de gráficos: raiz, função crescente, decrescente, ponto de máximo (mínimo) local. Portanto, esboça, mas não explora, a articulação investigada.

4.2.2. RAÍZES, EQUAÇÕES E FUNÇÕES POLINOMIAIS

As questões da tabela 4 (de 6 a 8) servem para exame do tratamento de equações polinomiais e suas relações com os polinômios e com funções polinomiais.

Tabela 4: Questões investigadas nos Livros 3 – segundo bloco

	Coleção		
Questão	**A(Adilson)**	**B(Guelli)**	**C(Ignez)**
6) Menciona raiz de polinômio?	Sim	Sim	Sim
7) Menciona equação polinomial (ou algébrica)?	Sim	Sim	Sim
8) Relaciona raiz do polinômio e raiz da equação com ZERO da função polinomial?	Não	Não	Sim

Todos os livros 3 mencionam as expressões raiz de polinômio e equação polinomial, além de relacionar as raízes das equações às raízes dos polinômios correspondentes. Detalhamos isso abaixo, na análise.

Comecemos com a coleção A. Lembremos que, conforme a seção anterior, essa coleção **define** polinômio e grau e menciona - sem definir - função polinomial, preferindo trabalhar com o conceito local de valor numérico de um polinômio.

O autor define raiz de polinômio numa observação, na p. 198, assim:

> Observação:
>
> Se o valor numérico de um polinômio para $x=\alpha$ é igual a zero, dizemos que α é raiz (ou zero) do polinômio, isto é $P(\alpha)=0$.

Na p. 239, introduz o assunto equações algébricas, articulando-o à geometria através do exemplo de uma caixa de papelão de altura **x**, largura **2x** e comprimento **3x**, e propõe o problema de como determinar o valor de **x**, sabendo que a área total [da superfície do papelão] deverá ser 726 cm^2. O desenvolvimento leva à equação $x^2 - 33 = 0$, que o texto denomina equação algébrica do 2º grau. A seguir, define formalmente:

> Uma equação algébrica, ou equação polinomial, é uma equação do tipo
>
> $$P(x)=0,$$
>
> onde P(x) é um polinômio não-nulo. Caso o polinômio tenha grau igual a n, dizemos que a equação tem grau n.
>
> Podemos dizer que uma equação polinomial ou equação algébrica, na incógnita x, é uma equação que pode ser escrita na forma
>
> $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + (...) + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$
>
> onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, ..., a_1$ e a_0 são os coeficientes da equação.

Note-se o desaparecimento da condição “polinômio não nulo” na segunda formulação.

Prossegue o desenvolvimento do assunto equações algébricas, dando ênfase aos casos de obtenção de raízes racionais (para uma equação algébrica de coeficientes inteiros) e imaginárias [complexas conjugadas] (para uma equação algébrica de coeficientes reais).

Retomamos o que constatamos sobre a coleção B: esta introduz a expressão função polinomial através de exemplos, faz uso do termo polinômio – sem definir – e, conseqüentemente, não define grau de polinômio.

Na p. 105, o autor enuncia e demonstra o que chama de teorema do fator: “No conjunto dos números complexos, x-a é um fator de um polinômio P(x) se, e somente se, **a** é uma raiz de P(x)=0”. Observe-se o uso das expressões **polinômio** (novamente), **raiz** e **P(x)=0**, que não são definidos no texto em parte alguma.

Nas pp. 105-106, ao introduzir o conhecido teorema das raízes racionais, o autor usa um exemplo, que leva à pergunta “A equação $x^2 = 5$ tem raízes racionais?”, na qual usa a expressão equação. Prosseguindo, escreve: “Para responder a esta questão, em primeiro lugar observe as condições que deve satisfazer um número racional para que seja raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, por exemplo, $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$”. Vê-se, portanto, que o autor, de maneira confusa, menciona, mas não define, a expressão raiz de um polinômio.

Mais adiante, o autor coloca o seguinte [grifos nossos]: “Isto nos conduz ao teorema acerca das **raízes de uma equação polinomial** na forma comum, ou seja, uma **equação em que um membro é 0 e o outro membro é um polinômio** na forma ‘simplificada’...”, em que menciona a expressão **equação polinomial**, definida de maneira confusa, já que não explica o que é um polinômio na forma simplificada.

Passemos à coleção C, lembrando que ela, no livro 1, faz uso dos termos função do primeiro e do segundo grau, no lugar de funções afim e quadrática. Além disso, menciona, sem definir, polinômio do 1º grau e função polinomial do 1º grau. No livro 3, primeiro define formalmente polinômio e grau de polinômio, depois define função polinomial e, em seguida, identifica as duas expressões (polinômio e função polinomial).

A **coleção C**, na p. 198, define formalmente raiz de uma função polinomial ou de um polinômio como segue:

> A **raiz** ou **zero** de uma função polinomial, ou polinômio, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, é o número real **c**, tal que P(c)=0.

Na p. 255, introduz o assunto equações polinomiais, também contextualizando com a geometria, com o exemplo de uma caixa sem tampa, cujo volume deve ser 2 m^3 e que se pretende fazer recortando quadrados de lados **x** dos quatro cantos de uma folha retangular de papelão, o que leva à equação $4x^3 - 14x^2 + 10x = 2$. Na p. 256, logo depois, apresenta a definição formal, como segue:

> **Equação polinomial** (ou algébrica) de grau n≥1 é toda equação da forma:
>
> $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad ①$$
>
> onde a variável **x** e os coeficientes $a_n \neq 0, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ pertencem ao conjunto dos números complexos e $n \in N^*$.
>
> Um número complexo **r** é raiz (ou solução) de ① se, e somente se, $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$.

As autoras não observam no texto que essa definição é a generalização, para os números complexos, da definição de raiz de função polinomial, que já havia sido dada no conjunto dos números reais.

Na seqüência, apresentam os casos conhecidos de pesquisa e obtenção de raízes de uma equação polinomial – os mesmos apresentados na coleção B.

4.2.3. GRÁFICOS E ELEMENTOS DE CÁLCULO

Finalmente, vamos analisar as questões da tabela 5 (9 e 10), que se referem a gráficos de funções polinomiais e relações com o cálculo diferencial.

Tabela 5: Questões investigadas nos Livros 3 – terceiro bloco

	Coleção		
Questão	**A(Adilson)**	**B(Guelli)**	**C(Ignez)**
9) Apresenta gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2?	Sim	Sim	Sim
10) Menciona termos do Cálculo Diferencial, como limites, derivadas, máximos e mínimos etc?	Não	Sim	Sim

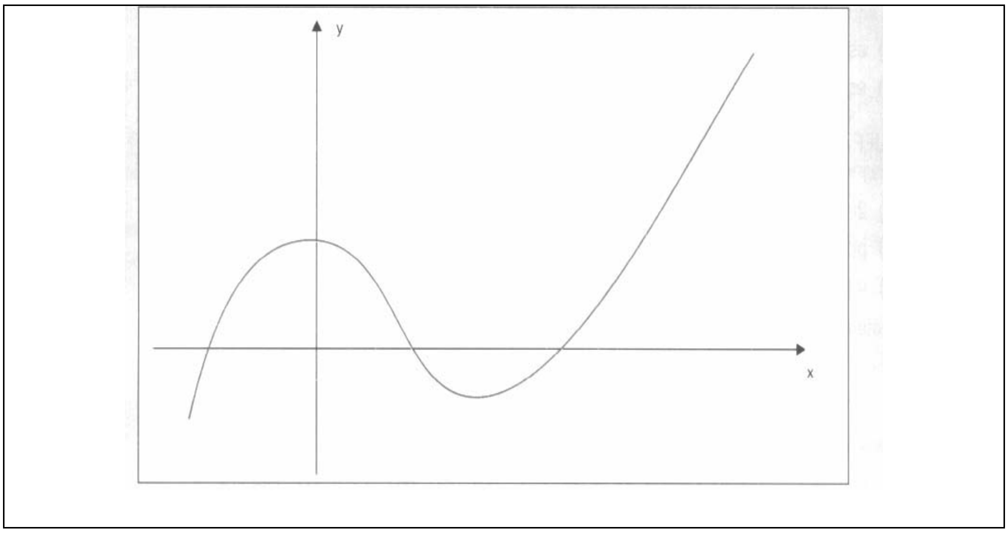
Observamos inicialmente que todas as coleções apresentam gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2. A coleção A é a única que não apresenta elementos de cálculo diferencial, limitando-se a mencionar “função polinomial" [sem definir] apenas no final (pp. 254 a 256), onde apresenta algumas observações sob o título **Gráfico de uma função polinomial**. O objetivo, segundo o próprio autor, é "observar alguns fatos [...] para estabelecer algumas relações entre equações algébricas, polinômios e funções [...] e responder uma questão: como é o comportamento gráfico de uma função polinomial?". Esse texto é desenvolvido como segue:

Começa afirmando: "um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ é uma função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, isto é, uma função com domínio no conjunto dos reais e contradomínio também no conjunto dos reais".

Em seguida, **apresenta** (sem nenhuma explicação) os seguintes fatos:

1º) "O gráfico de uma função polinomial é sempre uma **linha contínua**", [...] "**não apresenta bicos**", e ilustra com as figuras:

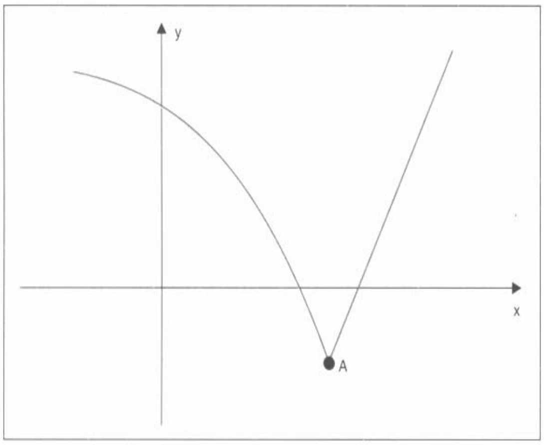
Figura 2: Ilustração do gráfico de função polinomial como linha contínua na coleção A



Na figura 2, não se especifica de qual polinômio é o gráfico.

Figura 3: Ilustração do gráfico de uma função que
apresenta bicos na coleção A

Além disso, é possível ainda demonstrar que o gráfico de tal função não pode apresentar bicos com o que está representado a seguir.

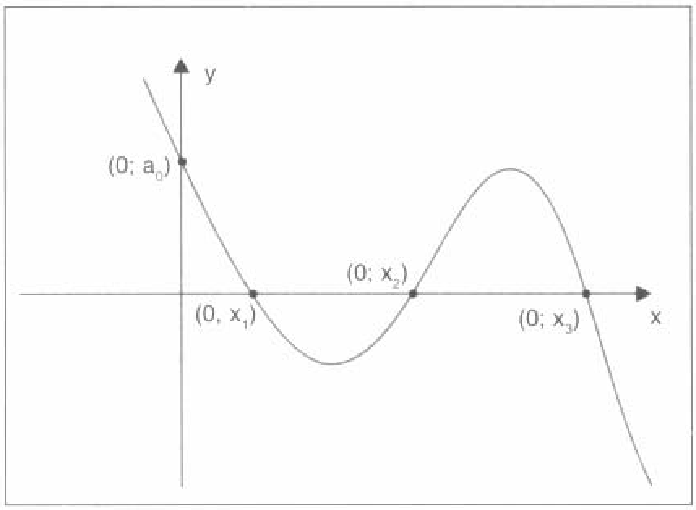


O gráfico de uma função polinomial não apresenta "bicos" como o ponto A, ao lado representado.

Observe-se que, até esse momento do texto, ao leitor só foram apresentados os gráficos das funções afim e quadrática. Entretanto, o autor não recorre a esses gráficos (reta e parábola, respectivamente) para levar o leitor a compreender, no nível intuitivo, a "continuidade" da função polinomial. Também não se preocupa em apresentar algum recurso prático (uma tabela de valores de x e y, por exemplo), que possibilite ao leitor intuir o aspecto das curvas em questão.

2º) "A intersecção [...] com o eixo das ordenadas é o ponto (0; a_0) e a intersecção [...] com o eixo das abscissas é o ponto (ou são os pontos, quando houver mais de um) (x_i, 0), onde x_i é raiz de equação [cremos que o correto seria **da** equação] P(x) = 0". Ilustra com a figura:

Figura 4: Ilustração das intersecções do gráfico de uma
função polinomial com os eixos na coleção A

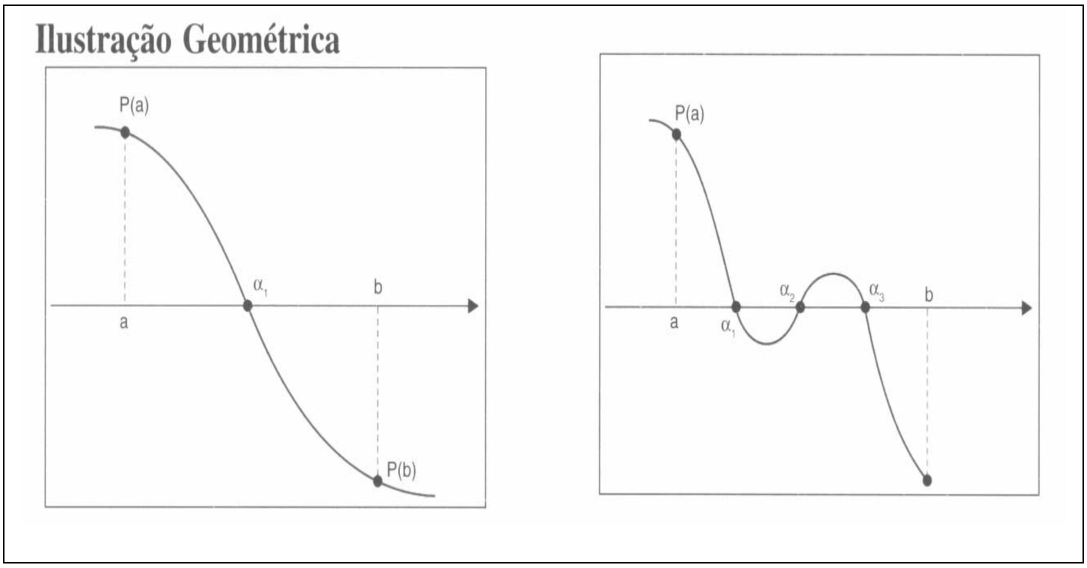


O autor registra, junto à figura reproduzida acima, que “a_0 é o termo independente de x”. Em nome da correção e da clareza, observamos que ao contrário da apresentada na figura 3, a notação correta para os pontos onde o gráfico da função intercepta o eixo x seria: (x_1, 0), (x_2, 0) e (x_3, 0).

3º) Cita o teorema de Bolzano, sem deixar claro qual é o seu enunciado, em trecho que reproduzimos a seguir (p. 255):

“Sejam P(x)=0 uma equação polinomial com coeficientes reais e o intervalo real (a;b). Se P(a) e P(b) têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação entre a e b”. Na p. 256, faz *a ilustração geométrica* desse fato (figura 4), porém *não afirma claramente no texto* que o enunciado acima é o do teorema de Bolzano.

Figura 5: Ilustração geométrica do teorema de Bolzano na coleção A



Aplica o teorema, num exemplo, na forma de exercício resolvido: “Verificar, sem resolver a equação, a existência de raízes reais no intervalo (0; 2) da equação algébrica x^3-5=0”. Para resolver, observa que P(0).P(2)<0 e, portanto, a equação admite ao menos uma raiz real no intervalo (0;2), mas nada afirma sobre o valor dessa raiz nem mesmo um valor aproximado. Propõe, para discussão pelo leitor, sem apresentar as respostas nem comentários, outros dois exemplos: no primeiro, afirma que a equação $x^3 + x^2 + x + k = 0$ tem uma raiz real entre 1 e 2 e pergunta os possíveis valores que **k** pode assumir e, no segundo, pergunta se a equação $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ admite raiz real no intervalo (1;2).

Concluímos que nesse texto o autor ensaia, mas não consegue efetivamente “estabelecer algumas relações entre equações algébricas, polinômios e funções” nem mostrar “como é o comportamento gráfico de uma função polinomial”, como pretendia.

A coleção B prefere tratar dos gráficos de funções polinomiais nas páginas dedicadas ao Cálculo. Vejamos como o faz:

Na p.111, apresenta uma noção **intuitiva** de limite, apoiada, num primeiro momento, numa função afim [definida por f(x)=2x+3], seu correspondente gráfico (reta) e duas tabelas de valores numéricos. Mostra que à medida em que a variável **x** assume valores "muito próximos" de 0 (zero), os valores correspondentes de **f(x)** ficam "muito próximos" de 3 e conclui da seguinte forma:

"Dizemos neste caso que o limite de f(x) quando x tende a 0 é 3 e escrevemos: $\underbrace{\lim}_{x \to 0} f(x) = 3$"

Apresenta, também intuitivamente, a noção de **continuidade** de uma função, apoiando-se em ocorrências ou não ocorrências de "saltos" e "buracos", em gráficos de funções genéricas, e explicita a relação usual entre limite e continuidade, como segue (p. 113):

> "De modo geral, uma função é *contínua* se pudermos traçar seu gráfico completo sem levantar o lápis do papel, ou seja, o gráfico é uma curva sem buracos ou saltos.
>
> Mais exatamente, uma função f(x) é contínua em x=b se satisfizer estas três condições:
>
> a) f(b) está definida; b) $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe; c) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$

Na p. 115, apresenta, mais uma vez intuitivamente, o item **Limite no infinito de uma função polinomial**, apoiando-se na idéia sugerida pelo comportamento dos gráficos de uma função quadrática e outra afim.

Na p. 117, introduz o conceito de **derivada**, inicialmente associado ao valor da declividade da reta tangente à curva num ponto, tomando como exemplo uma função quadrática para, depois, num outro exemplo de função do mesmo tipo, apresentar o conceito de derivada como o conhecido limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Na p. 121, há, ainda, uma sessão chamada **máximos e mínimos relativos de funções polinomiais**, onde apresenta - especificamente para funções polinomiais - os clássicos resultados para funções quaisquer, que relacionam:

a) o sinal das derivadas primeira e segunda com os intervalos onde a função é crescente ou decrescente;

b) os pontos onde se anula a derivada primeira e a ocorrência de ponto de máximo ou de mínimo relativo.

A coleção C apresenta gráficos de funções polinomiais definidas a partir de polinômios de grau maior que 2 em três momentos:

a) na p. 198, como já citamos, logo após a definição de função polinomial, para as funções definidas por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ e

$g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, respectivamente, cujos gráficos são obtidos pelas respectivas tabelas de valores para **x** e **f(x)**;

b) na pág. 273, após ter desenvolvido a unidade Equações Polinomiais, na seção Flash Matemático. Aborda aí o tópico **Gráficos de funções polinomiais**, começando com um exemplo de uma função definida a partir do polinômio $P(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$. O gráfico é esboçado apoiando-se na pesquisa de suas raízes racionais (-2, -1 e 1) e no fato (apenas citado) de o gráfico de uma função polinomial ser contínuo. Faz um estudo essencialmente qualitativo do gráfico dessa função polinomial de 5º grau, com 3 raízes racionais. Mostra como se pode achar essas raízes; em seguida, usa o algoritmo para dividir pelos binômios do 1º grau correspondentes e explora isso exaustivamente, decompondo o polinômio em fatores irredutíveis em IR [sem usar essa terminologia]. Assinala, então, as raízes no eixo x e esboça o gráfico, apenas estudando o sinal da imagem da função para um determinado valor da variável independente, “escolhido” no intervalo das raízes. Depois, sugere que o leitor tente fazer o mesmo para $Q(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 6x^2$;

c) na unidade 11 (última do livro), denominada **Taxa de variação de funções**, em que trata de parte do cálculo diferencial. Fazemos abaixo um breve resumo dessa abordagem:

Na p. 277, introduz o conceito de taxa de variação média, contextualizando com a situação da “curva de crescimento de Diogo (trata-se da altura de um menino) de 1997 a 2003”, propondo a questão: “...qual foi o crescimento anual médio nos períodos [1997, 1999], [1997, 2000], ..., [1997, 2003]?”. Depois, na p. 281, define derivada ou taxa de variação instantânea de uma função num ponto, relacionando-a com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto e apoiando-se na noção intuitiva de limite de uma função num ponto. Mais adiante, na p. 291, conceitua a função derivada (definição formal) e apresenta as derivadas das funções definidas por f(x)=c (constante), $f(x)=x^n$ e $f(x)=\sqrt{x}$. Em seguida, na p. 296, apresenta informalmente os resultados que relacionam o sinal da derivada de uma função f com os intervalos em que f é crescente ou decrescente e, na p. 298, os resultados que relacionam a derivada com os pontos de máximo e de mínimo locais de uma função f, ilustrando com trechos de gráficos cartesianos de funções genéricas. Finalmente, nas pp. 300-301, mostra a aplicação de todos esses resultados em dois exercícios resolvidos: o primeiro, pede os pontos de máximo ou de mínimo locais, os intervalos em que é crescente ou decrescente e o esboço do gráfico da função polinomial, definida por $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$; o segundo, pede os intervalos de crescimento e decrescimento e os valores máximos e mínimos, locais e absolutos, da função polinomial definida por $f(x)=-x^4+x^3$.

4.3. CONCLUSÕES SOBRE O TRATAMENTO EXPOSITIVO

Nossa investigação sobre a articulação entre Polinômios e Funções em livros didáticos revelou quanto aos livros 1, que a Coleção A não menciona a palavra polinômio, nem a expressão função polinomial e, conseqüentemente, não faz relação das funções afim e quadrática com nenhum tipo de polinômio.

Já a Coleção B apresenta as funções afim e quadrática com os nomes de função polinomial de 1º grau e função polinomial de 2º grau, respectivamente e, assim, menciona a expressão função polinomial, ainda que só para nomear as funções afim e quadrática. Porém, não cita o termo polinômio e, portanto, não relaciona as expressões e muito menos os conceitos de função polinomial e polinômio.

Ainda quanto aos livros 1, a coleção C é a única que menciona função polinomial associada a polinômio. Entretanto, é confusa a relação entre os vários termos empregados por ela: função do 1º grau, polinômio do 1º grau, função polinomial do 1º grau, função do 2º grau. Suas autoras mencionam que existe uma relação entre função afim e polinômio do 1º grau, mas não chegam a desenvolver essa relação.

Quanto aos livros 3, nossa investigação revelou que as coleções A e C mencionam e definem o termo *polinômio* formalmente e utilizam-no em todo o desenvolvimento do assunto Polinômios. Já a coleção B, na seção destinada ao assunto, menciona o termo *polinômio* várias vezes, sem contudo definí-lo em nenhuma delas.

A coleção C define formalmente a expressão *função polinomial* e as coleções A e B mencionam, mas não a definem.

A coleção A, durante o desenvolvimento do assunto, em seu capítulo 14 - Polinômios, utiliza freqüentemente o termo *polinômio* e, apesar de citar várias vezes que "todo polinômio é uma função", não usa nenhuma vez a expressão *função polinomial* nesse momento e também não explica como fazer a associação entre polinômio e função. A expressão *função polinomial* ocorre, de modo isolado, apenas no final do livro, após já terem sido desenvolvidos os assuntos Polinômios, Números Complexos e Equações Algébricas, na seção *Gráfico de uma função polinomial*, que ocupa somente três páginas (pp. 254-256); nestas, finalmente afirma que (grifos nossos) "**Um polinômio** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ **é uma função** de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, isto é, uma função com domínio no conjunto dos reais e contradomínio também no conjunto dos reais", depois "O gráfico de uma **função polinomial** é sempre uma linha contínua ...", e mais adiante: "Na **função polinomial** da forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ o termo a_0 é denominado termo independente de x."

Quanto à coleção B, é oportuno esclarecer que desenvolve o assunto em sua UNIDADE 3 – NÚMEROS COMPLEXOS, **FUNÇÕES POLINOMIAIS** E CÁLCULO INFORMAL (grifo nosso), sugerindo explicitamente que pretende tratar com o nome de Funções Polinomiais o tema que usualmente é denominado Polinômios, dando a entender a intenção de promover a articulação dos dois conceitos, destacando-a já logo no título, para conferir-lhe maior importância. Porém, o que se observa é que essa coleção faz um uso isolado da expressão *funções polinomiais*. De fato, inicia o desenvolvimento do assunto pela seção denominada *AULA 8 - Um algoritmo especial*, na qual faz uma apresentação informal do algoritmo de Briot-Ruffini; ali, utiliza pela primeira vez a expressão *funções polinomiais* apenas em exemplos, sem definí-la. A partir daí, passa a usar o termo *polinômio*, que é introduzido (também sem definição) na seção imediatamente seguinte denominada *AULA 9 – Teorema do resto*, quando enuncia esse teorema para polinômios; só volta a usar o termo *função polinomial* na seção *AULA 16 – Limite no infinito de uma função polinomial*, quando já está apresentando elementos de Cálculo Informal.

A coleção C define formalmente a expressão *função polinomial* na seção *2 – Função polinomial* da unidade 8, logo após ter definido (também formalmente) o termo *polinômio* e, nessa definição, identifica as expressões *polinômio* e *função polinomial*. Porém, também faz uso isolado da expressão *função polinomial* nessa seção do texto, pois, a seguir, afirma que o estudo dos polinômios permite aprofundar o conceito de **função** para as de grau maior que 2 (embora não tenha definido **grau de uma função**, utilizou, no livro 1, a terminologia **função do primeiro grau** e **função do segundo grau** para se referir às funções afim e quadrática, respectivamente). Mas limita-se a apresentar como exemplos os esboços dos gráficos cartesianos de uma função polinomial de grau 3 e de outra de grau 4. Encerra a seção com comentário superficial sobre a relação entre os conceitos de raiz, função crescente, decrescente, ponto de máximo (mínimo) local. Prossegue no desenvolvimento do assunto Polinômios, nomeando-os sempre como *polinômios*, até o final. Só volta a usar a expressão *função polinomial* bem mais tarde, após já ter desenvolvido os temas Números Complexos e Equações Polinomiais, na seção *Flash Matemático* (pp. 273-274). Nessa seção, sob o título *Gráficos de funções polinomiais* afirma (grifo nosso): “Com o que estudamos até aqui vamos tentar esboçar o gráfico de uma **função polinomial** a partir de suas raízes...” e o faz tomando como exemplo a função definida por $P(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$. Aí, utiliza apenas pesquisa de raízes racionais e algoritmo de Briot-Ruffini para fatorar o polinômio, seguida de valores do polinômio em pontos entre as raízes. Encerra a seção, propondo ao leitor: “Tente fazer o mesmo para $Q(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 6x^2$.”

Apenas a coleção C reconhece as **funções afim** e **quadrática** como **funções polinomiais**, embora num único momento do texto, ao definir *função polinomial* (p. 197). Após a definição (formal), acrescenta:

> “Já conhecemos várias funções polinomiais e todas elas têm domínio IR:
> f(x)=0 é função nula;
> f(x)=k é função constante;
> $f(x) = a_1x + a_0,\ a_1 \neq 0,$ é função do 1º grau ou afim;
> $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2 \neq 0,$ é função do 2º grau ou quadrática .”

Mesmo assim, observe-se que as autoras da coleção C não chegam a usar as expressões completas *função **polinomial** do 1º grau* e *função **polinomial** do 2º grau* para nomear as funções afim e quadrática, respectivamente, embora o façam esporadicamente no livro 1. Já as coleções A e B não fazem nenhuma menção a respeito.

A coleção A relaciona Equações Algébricas com Polinômios de forma explícita já na própria definição (pp. 239-240), onde coloca: “Uma equação algébrica, ou equação polinomial, é uma equação do tipo $P(x)=0$, onde P(x) é um polinômio não nulo....” Tal relação estende-se às aplicações do Teorema Fundamental da Álgebra (“Toda equação algébrica de grau n, $n\geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa”, p.241), utilizado para demonstrar (e o autor demonstra-o, de fato), na mesma página, o Teorema da Decomposição (“Toda equação algébrica de grau n, $n\geq 1$, pode ser decomposta em n fatores do 1º grau, isto é: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$ pode ser escrita na forma $a_n.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2).(...).(x-\alpha_n)=0$, em que $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ são as raízes da equação”. O autor inicia a demonstração, afirmando: “Vamos considerar o polinômio $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, onde $a_n \neq 0$...” E prossegue: “Pelo Teorema Fundamental da Álgebra P(x) possui pelo menos uma raiz complexa α_1, isto é $P(\alpha_1)=0$. Logo P(x) pode ser escrito na forma $P(x)=(x-\alpha_1).Q_1(x)$...” Em seguida, afirma que $Q_1(x)$ tem grau n-1 e faz indução informal sobre o grau de P.

Na coleção B a relação entre Equações Polinomiais e Polinômios é confusa, uma vez que, como já vimos anteriormente, o autor não define nenhum dos dois conceitos. Fica a cargo do leitor perceber que essa relação está “subentendida” no desenvolvimento do texto. Por outro lado, a relação entre as raízes do polinômio e as raízes da equação polinomial correspondente fica um pouco mais clara na seção *AULA 10 – Teorema do fator* do que na seção *AULA 13 – Teorema fundamental da Álgebra*. De fato, na primeira o autor enuncia (p. 105): “No conjunto dos números complexos, $x - a$ é um fator de um polinômio P(x) se, e somente se, **a** é uma raiz de $P(x) = 0$” e, na segunda, afirma (p. 108): “Toda equação polinomial de grau **n** diferente de 0, com coeficientes complexos, tem exatamente **n** raízes complexas”, não usando nenhuma vez o termo *polinômio* em toda esta seção, preferindo sempre as expressões *equação* ou *equação polinomial*.

Já na coleção C, embora as relações entre Equações Polinomiais e Polinômios e as destes dois conceitos com os Teoremas Fundamental da Álgebra e da Decomposição não sejam tão explícitas quanto na coleção A, acreditamos que não se exige do leitor grande esforço para percebê-las. Ocorre que, no texto da coleção C, suas autoras referem-se ora a **equação polinomial**, ora a **polinômio**, como é possível perceber nos enunciados do Teorema Fundamental da Álgebra (p. 257, grifo nosso): “Toda **equação polinomial** de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa” e do Teorema da Decomposição (p. 258, grifo nosso): “Todo **polinômio** de grau **n**, com $n \geq 1$, pode ser fatorado em **n** fatores do 1º grau com coeficientes complexos.”, complementado pelas autoras com a frase (grifos nossos): “O teorema nos assegura que o número de **raízes** complexas **de um polinômio** de grau $n \geq 1$ é exatamente **n**.”

A coleção A é a única que não apresenta elementos de cálculo diferencial e, quanto às funções polinomiais de grau maior que 2, exibe apenas gráficos genéricos, sem especificar o grau da função; isso é feito numa única seção, denominada *Gráfico de uma função polinomial* (p. 254), como já comentamos anteriormente.

A coleção B apresenta apenas um gráfico de função polinomial de grau maior que 2, para a função definida por $f(x) = -x^3 + 27x$ (p. 124), aplicando recursos de cálculo diferencial, tais como: derivadas primeira e segunda, obtenção de máximos e mínimos relativos da função.

Já a coleção C, como vimos anteriormente, apresenta gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2 em três momentos:

a) Na p. 198, constroem-se dois gráficos, para as funções definidas por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ e $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, respectivamente, usando a tabela de valores para **x** e **f(x)**;

b) na p. 273, constrói-se um gráfico, para função definida por $P(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$, a partir de suas raízes (racionais) e usando o valor numérico P(0);

c) Na unidade 11, pp.301-302, em dois exercícios resolvidos, aplica elementos de cálculo diferencial: o primeiro, pede os pontos de máximo ou de mínimo locais, os intervalos em que é crescente ou decrescente e o esboço do gráfico da função polinomial, definida por $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; o segundo pede os intervalos de crescimento e decrescimento e os valores máximos e mínimos, locais e absolutos, da função polinomial definida por $f(x) = -x^4 + x^3$, cujo gráfico não é pedido, mas é exibido como ilustração.

Quanto ao algoritmo de Briot-Ruffini, só a coleção B explora seu uso para obter o valor numérico de polinômios, enquanto as coleções A e C mostram apenas o emprego usual do processo para obter o quociente e o resto.

CAPÍTULO 5

O CORPO DE EXERCÍCIOS

Neste capítulo, relatamos os resultados de nossa análise sobre o **corpo de exercícios** das seções destinadas ao tema Polinômios nas coleções analisadas, lembrando que este é o segundo aspecto dos livros didáticos que estudamos para responder a nossa questão objeto, ou seja: O tema polinômios é articulado ao tema funções em livros didáticos? Assim, para investigar também nos exercícios se e como ocorre a articulação entre os temas, examinamos se o tratamento dado a cada exercício é de polinômio ou de função polinomial.

Conforme nossas conclusões sobre o tratamento expositivo, relatadas no capítulo anterior, observamos que, nos livros 1, nenhuma das três coleções faz a articulação das funções afim e quadrática com polinômios. Assim sendo, decidimos investigar no presente capítulo apenas o corpo de exercícios dos livros 3, nos quais tal articulação é pelo menos esboçada.

5.1. O CORPO DE EXERCÍCIOS DA COLEÇÃO A

Na seção em que é tratado o tema Polinômios, a coleção A apresenta 28 exercícios distribuídos nas pp. 201-202 e nas pp. 209-210, sendo que **todos eles têm o tratamento de polinômio**; portanto, a coleção não traz **nenhum exercício com o tratamento de função polinomial**. Para ilustrar, apresentamos dois desses exercícios:

● Exercício 12 (p. 202): "Os polinômios $P(x) = -2x + m$ e $Q(x) = x + n$ são tais que $P(x).Q(x) = -2x^2 - 3x - 1$. Obtenha os valores de m e de n."

● Exercício 7 (p. 209): "Obtenha o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^{100} + x^{99} + 1$ por $x^2 - 1$."

5.2. O CORPO DE EXERCÍCIOS DA COLEÇÃO B

A coleção B, na seção em que trata do tema Polinômios, traz um total de 12 exercícios nas páginas 103, 104 e 105. **Onze deles têm o tratamento de polinômios e apenas um de função polinomial**:

● Exercício 36 (p. 103): "Considere a função cujos valores são dados por $P(x) = x^3 + 4ix^2 + x + 4$. Calcule $P(1+i)$". É um exercício sobre o valor numérico de uma função polinomial do terceiro grau, envolvendo números complexos. Os demais são do tipo seguinte:

● Exercício 41 (p. 105): "Encontre **m** para que $x - 3$ seja um fator de $P(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + m$".

5.3. O CORPO DE EXERCÍCIOS DA COLEÇÃO C

A coleção C dá um tratamento mais completo ao corpo de exercícios, como pode ser observado na tabela 6 abaixo:

Tabela 6: Corpo de exercícios nos Livros 3 – coleção C

Identificação dos exercícios			Identificação do tema	
Página	**Seção**	**Número**	**Polinômio**	**Função polinomial**
195	Exercícios Resolvidos	ER1, ER2	X	
196	Problemas e Exercícios	1-8, 10	X	
		9		X
197	Invente Você	1	X	
199	Exercício Resolvido	ER3		X
200	Problemas e Exercícios	11		X
		12		X
		13		X
		14		X
		15-17	X	
	Invente Você	2		X
206-207	Exercícios Resolvidos	ER4-ER6	X	
207-208	Problemas e Exercícios	18-33	X	
208	Invente Você	3, 4	X	
209	Problemas e Exercícios	34, 35	X	
210-212	Exercícios Resolvidos	ER7-ER10	X	
		ER11		X
213	Problemas e Exercícios	36-41	X	
		42		X
	Invente Você	5		X
214	Calculadora	2		X
TOTAIS		**59**	**48**	**11**
		100%	**81,4%**	**18,6%**

Pode-se observar, quanto aos exercícios, que a coleção C apresenta maior variedade não só de seções, como de temas abordados. São apresentados 59 exercícios, distribuídos em 5 tipos diferentes de seções, denominadas *Exercícios Resolvidos*, *Problemas e Exercícios*, *Invente Você*, *Saia Dessa* e *Calculadora*, que se sucedem, em vários blocos, acompanhando o desenvolvimento do texto da *Unidade 8 – Polinômios*.

Ao contrário das coleções A e B que, em sua quase totalidade, exploram apenas o tema *polinômios*, a coleção C apresenta também vários exercícios sobre *função polinomial*. De fato, do total de 59 exercícios apresentados na coleção C, 48 têm o tratamento de *polinômios* (cerca de 81,4%) e outros 11 são de *função polinomial* (representando cerca de 18,6% do total).

Por oportuno e dada a pertinência à questão que investigamos, passamos a relatar a seguir nossa análise dos 11 exercícios sobre função polinomial da coleção C.

● 1) p. 196, seção *Problemas e Exercícios*, exercício 9: apresenta o desenho de uma pista de atletismo e fornece o perímetro interior da pista em metros.

Pede:

a) o raio das semicircunferências, que são as cabeceiras da pista, o que leva à resolução da equação do primeiro grau $240 + 2\pi r = 400$, onde r é o raio das semicircunferências;

b) a área da pista, em função de sua largura **x**, o que leva à obtenção de um polinômio (função polinomial) do segundo grau em **x**, ou seja $A(x) = \pi x^2 + 400x$, onde A(x) denota a área da pista.

● 2) p. 199, seção *Exercício Resolvido*, exercício ER3: “De um prisma quadrangular regular, em que a aresta da base mede **x** e a altura mede 3, foi cortado um cubo de aresta **x** [...]”

Pede:

a) a expressão do volume **V** da parte restante do prisma, em função de **x**, que resulta no polinômio (função polinomial) do terceiro grau $V(x) = 3x^2 - x^3$;

b) as raízes, o domínio e o gráfico dessa função;

c) para que valores de x o volume é maior que 2 e menor que 4 e o que significa V(x)=0 e V(x)=4.

● 3) p. 200, seção *Problemas e Exercícios*, exercício 11: “Um campo retangular tem comprimento 2x-1 e largura x+5, em metros [...]”

Pede:

a) as expressões do perímetro e da área [do retângulo], que resultam, respectivamente, no polinômio do primeiro grau $6x + 8$ e no polinômio do segundo grau $2x^2 + 9x - 5$;

b) os graus dos polinômios obtidos;

c) calcular e interpretar os zeros das funções [correspondentes aos polinômios obtidos, ou seja: $p(x) = 6x + 8$ e $A(x) = 2x^2 + 9x - 5$, onde p(x) e A(x) denotam, o perímetro e a área, respectivamente].

● 4) p. 200, seção *Problemas e Exercícios*, exercício 12: “O sr. João gastou R$ 100,00 em **x** caixas de sabão em pó num supermercado. Ele quer vender todas as caixas em seu mercadinho e obter um lucro de R$ 2,50 por caixa. [...]” Pede:

a) a expressão do preço de cada caixa, o que dá a expressão algébrica $\frac{100}{x} + 2{,}5$;

b) a receita quando o sr. João vendeu todas as caixas, o que dá o polinômio de primeiro grau $100 + 2{,}5x$;

c) justificar por que uma das expressões obtidas em **a** ou **b** não é um polinômio, para o que as autoras dão a seguinte resposta: “A expressão em **a** não é um polinômio pois há variável no denominador.”

● 5) p. 200, seção *Problemas e Exercícios*, exercício 13: “Luiz e Cristina fizeram uma viagem de carro de 500 km e revezaram-se na direção. Cristina guiou **x** km e Luiz, o dobro; depois, Cristina guiou mais 100 km e Luiz dirigiu o resto da viagem. Expresse, em função de **x**, a última etapa do trajeto feito por Luiz.” A reposta é o polinômio do primeiro grau $400 - 3x$.

● 6) p. 200, seção *Problemas e Exercícios*, exercício 14: “Uma arquiteta está projetando um móvel em forma de paralelepípedo. Pelos seus cálculos, a medida da área da base, em cm^2, é dada por $x^2 + 5x$, e as medidas, em cm, dos comprimentos da base e da altura do móvel são, respectivamente, $x + 5$ e $2x - 40$. Sabendo que o móvel será em madeira, responda:

a) os valores que **x** pode assumir [domínio de funções]”, o que leva à resolução do sistema composto pelas inequações (polinomiais) do primeiro grau

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 5 > 0 \\ 2x - 40 > 0 \end{cases}$$ e cuja solução é x>20;

“b) a expressão que dá o perímetro da face da frente do móvel, em função de **x**”, que é o polinômio do primeiro grau $6x - 70$;

“c) as expressões que dão, em função de **x**, a largura e o volume do móvel”, que são, respectivamente, o polinômio do primeiro grau **x** e o polinômio [função polinomial] do terceiro grau $2x^3 - 30x^2 - 200x$;

“d) as dimensões do móvel para que a área do tampo seja de 1800 cm^2”, o que leva à resolução da equação [polinomial] do segundo grau $x^2 + 5x - 1800 = 0$.

● 7) p. 200, seção *Invente Você*, exercício 2: Pede que o leitor imagine um monumento em forma de cilindro e elabore um problema que envolva o volume (**V**) e o raio (**r**) em uma função, além do domínio e da seguinte tabela:

r	0	1	1,5	2	10
V					

Evidentemente, a resposta é pessoal, mas parece-nos que a intenção das autoras é a de que o leitor obtenha uma função polinomial do primeiro grau, que relacione o volume e o raio, em função da altura do cilindro.

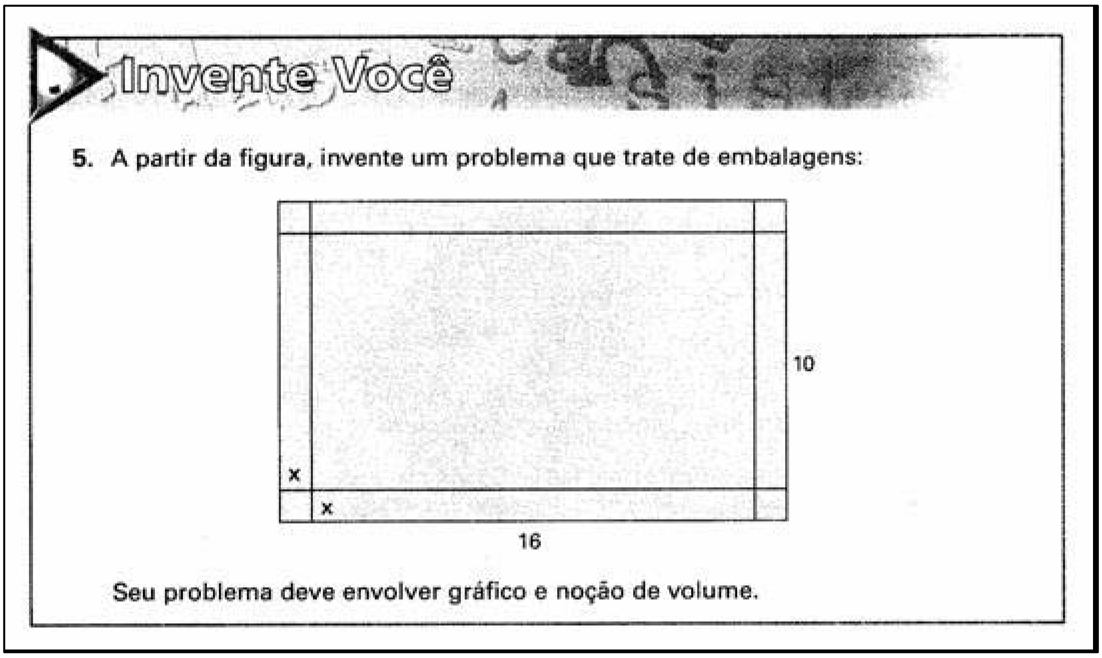
● 8) p. 212, seção *Exercícios Resolvidos*, Exercício ER11: Apresenta a figura de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, x+1 e 3x+1, em metros e pede a equação que dá os valores de **x** quando o volume for 42 m^3, que é a equação polinomial do terceiro grau $3x^3 + 4x^2 + x - 42 = 0$. Sabendo que 2 é uma solução, pede que o leitor investigue se há outras raízes positivas dessa equação.

● 9) p. 213, seção *Problemas e Exercícios*, exercício 42: “Uma empresa de *marketing* estima que, **n** meses após o lançamento de um novo produto no mercado, o número de famílias que irão comprá-lo é, em milhares, dado pela expressão $f(n) = \frac{10}{9}n(12 - n)$, com $0 \leq n \leq 12$. [...]” Pede:

a) o esboço do gráfico de **f**, que é uma função polinomial do segundo grau em **n**, cuja resolução leva á construção de um arco de parábola com concavidade para cima;

b) após quantos meses será máximo o número de pessoas que poderão comprar o produto, o que leva ao cálculo do ponto de máximo de **f**, ou seja a abscissa do vértice da parábola citada em **a**.

● 10) p. 213, seção *Invente Você*, Exercício 5:


Invente Você

5. A partir da figura, invente um problema que trate de embalagens:

Seu problema deve envolver gráfico e noção de volume.

Embora a resposta seja pessoal, quer nos parecer que a intenção das autoras é a de que o leitor represente o volume da embalagem por uma função polinomial do terceiro grau em **x**, como $V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)x$.

● 11) p. 214, na seção *Calculadora*, Exercício 2: “Um depósito de combustível tem a forma de um cilindro, cujo diâmetro da base, em metros, é dado por $2x - 4$. A altura é dada por $x^2 + 2$. [...]”. Pede:

a) os valores de **x** que tornam o problema possível, o que leva à resolução da inequação (polinomial) do primeiro grau $2x - 4 > 0$;

b) a expressão para a capacidade do reservatório, que dá o polinômio (função polinomial) do terceiro grau $V = \pi(x - 2)^2(x^2 + 2)$;

c) o número de latas de tintas necessárias para pintar o reservatório por fora, que é um problema de geometria métrica, envolvendo cálculo de áreas.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES FINAIS

Passemos então a relatar as conclusões finais de nossa investigação.

Conforme mencionamos no início do capítulo 1, nosso trabalho investiga o tratamento dado a polinômios em livros didáticos recentes, dando especial atenção às possíveis relações explicitadas com funções. Nesse capítulo expusemos os resultados que observamos na literatura disponível e nas orientações governamentais sobre o tema do nosso trabalho.

Analisamos dois documentos oficiais: os PCNEM-2000 (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio 2000 do Ministério da Educação e Cultura) e a PROPOSTA (Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2º grau da Secretaria da Educação do estado de São Paulo, terceira edição, 1995). Os PCNEM-2000 recomendam que “aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente”. Já a PROPOSTA considera que os temas polinômios e equações polinomiais devam figurar na grade curricular do Ensino Médio das escolas públicas do estado de São Paulo, embora apenas quando o número de aulas semanais de matemática é máximo (4 ou 5 aulas por semana). Ao contrário da PROPOSTA, os PCNEM-2000 recomendam a articulação entre polinômios e funções polinomiais. Entretanto, como vimos no capítulo 2, a PROPOSTA, sugere que "...não se faça no [ensino de] 2º grau um semestre de estudo sobre polinômios e equações algébricas, mas que eles sejam tratados sempre que possível recorrendo à fatoração e a casos já conhecidos".

Entre dissertações e teses publicadas no Brasil, encontramos apenas o texto Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas, de Elizabeth Quirino de Azevedo (2002), de tema semelhante ao nosso, cuja autora defende que "equações algébricas é um tópico que faz parte do currículo e é o arremate de um programa inteiro".

Da literatura paradidática, destacamos alguns artigos de "As Idéias da Álgebra", tradução do livro do ano do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de 1988, organizado por Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte; estes demonstram preocupação ou oferecem sugestões para o ensino de polinômios. Num deles, cujo título é Os polinômios no currículo da escola média, seus autores, Theodore Eisenberg e Tommy Dreyfus, propõem que as equações quadráticas devem ser tratadas como equações polinomiais de grau dois, privilegiando portanto a conexão com polinômios que investigamos.

Dos artigos sobre polinômios na Revista do Professor de Matemática (RPM), destacamos o de título Equações algébricas - um assunto para o ensino médio?, de CARNEIRO (1999). O autor afirma que muitas oportunidades para motivar os temas da Matemática com problemas interessantes e realistas são perdidas, ao deixar fora dos programas do Ensino Médio a resolução de equações polinomiais de grau superior a dois.

De congressos internacionais recentes, destacamos o XII Congresso da International Commission on Mathematical Instruction (XII ICMI). Neste, em artigos distintos, temos: MESA (2001) sugere a abordagem funcional, que preconiza privilegiar as funções como o veículo principal para a introdução de variáveis e da álgebra; STUMP e BISHOP (2001) propõem um curso de Álgebra para professores da educação básica e defendem que o tema funções polinomiais [e não polinômios] seja tratado com destaque, na seqüência do programa, entre os tópicos funções afins e funções exponenciais.

No capítulo 2 explicamos as razões de tomarmos como nosso campo de investigação livros didáticos, pois acreditamos que um dos indicadores de como os assuntos são abordados na prática de professores são justamente os livros didáticos.

Buscando análises já existentes de livros didáticos do Ensino Médio no Brasil, encontramos duas dignas de nota: identificamos uma por Exame de Textos (“Exame de Textos – Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”), publicada em 2001, e a outra por Catálogo ou Catálogo do PNLEM (Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM: Matemática) na versão 2005 do Ministério da Educação e Cultura.

No “Exame de Textos”, Elon Lages Lima (editor) e outros sete pesquisadores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), analisam 12 coleções, de 3 volumes cada, dentre as principais obras didáticas de Matemática publicadas e adotadas no Ensino Médio das escolas brasileiras até então. Observamos que seus autores colocam que os polinômios são funções de natureza simples, que devem ser olhadas sob alguns pontos de vista que se entrelaçam e se complementam: aritmético (em que se consideram as propriedades de divisibilidade, análogas às dos números inteiros), algébrico (das operações algébricas e resolução de equações), geométrico ou analítico (em que os polinômios são vistos como uma importante categoria de funções de uma variável e na qual é possível estudar suas propriedades por meio dos seus gráficos) e numérico (no cálculo de suas raízes por métodos aproximados). Nossa investigação centrou-se sobre o que os autores dessa obra denominam o ponto de vista geométrico ou analítico. Da leitura de “Exame de Textos”, concluímos, entretanto, que os livros didáticos em geral não exploram essa riqueza de interpretações e articulações potenciais. Por outro lado, a análise dos pesquisadores do IMPA concluiu que a idéia de articular o estudo de polinômios com funções é uma abordagem que dá sentido ao tema, enquanto que abordagem formal é considerada pelos pesquisadores como mecânica, desprovida de sentido, transmitindo uma imagem da Matemática como um mero conjunto de algoritmos.

O Catálogo, por outro lado, é um documento oficial que contem as análises de onze coleções de livros didáticos de Matemática, aprovadas pelos pareceristas do PNLEM. No capítulo 2, resumimos os trechos das resenhas sobre as coleções analisadas pelo Catálogo, relacionados à distribuição de conteúdos, diversidade de enfoques e outras considerações pertinentes à nossa investigação. Apoiados nessas análises, escolhemos três das onze coleções aprovadas pelo PNLEM. Duas delas, por terem características o-postas, segundo critérios do Catálogo, com relação à compartimentalização: a coleção A (Adilson), que se caracteriza por apresentar os conteúdos em grandes blocos e a coleção B (Guelli) que representa o modelo que distribui o conteúdo das várias áreas pelos três volumes da coleção. A terceira coleção C (Ignez) foi escolhida por representar o modelo da diversidade de enfoques e representações matemáticas. Centramos nossa investigação na questão ”O tema polinômios é articulado ao tema funções em livros didáticos?” Para respondê-la, optamos por examinar dois aspectos das três coleções que escolhemos: o tratamento expositivo e o corpo de exercícios. Nos capítulos 3 e 4 registramos nossas observações sobre o tratamento expositivo dos livros 1 e 3 das três coleções (os livros 2 não abordam o conteúdo polinômios).

Nossa investigação revelou que nos livros 1 não se faz a articulação entre polinômios e funções. De fato, a coleção A não faz relação das funções afim e quadrática com nenhum tipo de polinômio, não menciona a palavra polinômio, nem a expressão função polinomial; a coleção B não cita o termo polinômio e menciona a expressão função polinomial só para nomear as funções afim e quadrática, que são apresentadas como função polinomial de 1º grau e função polinomial de 2º grau, respectivamente; a coleção C é a única que esboça uma tentativa de articulação, que no entanto é marginal. Suas autoras mencionam que existe uma relação entre função afim e polinômio do 1º grau, mas não chegam a desenvolver essa relação e fazem uso confuso das expressões função do 1º grau, polinômio do 1º grau, função polinomial do 1º grau, função do 2º grau.

Passemos aos livros 3. A coleção A utiliza freqüentemente o termo polinômio e, apesar de citar várias vezes que "todo polinômio é uma função", não explica como fazer a associação entre polinômio e função; a expressão função polinomial ocorre, de modo isolado, no final do livro, na seção Gráfico de uma função polinomial, que ocupa somente três páginas; apenas nesse momento a expressão é definida. A coleção B desenvolve o assunto em sua UNIDADE 3 – NÚMEROS COMPLEXOS, FUNÇÕES POLINOMIAIS E CÁLCULO INFORMAL (grifo nosso), sugerindo no titulo a intenção de promover a articulação dos dois conceitos. Porém, acaba fazendo um uso isolado da expressão funções polinomiais, pois utiliza-a pela primeira vez no início do assunto e a partir daí, passa a usar o termo polinômio; nesse momento do texto, a relação com as funções é explicitada apenas para o cálculo de valores particulares de polinômios com o auxílio do algoritmo da divisão de polinômios. O termo função polinomial so ressurge no final do livro 3, na seção AULA 16 – Limite no infinito de uma função polinomial, no contexto do Cálculo Informal. A coleção C faz uma articulação parcial dos temas polinômios e funções, pois, como vimos, identifica as expressões polinômio e função polinomial de início, quando define esses dois conceitos. Porém, também faz uso isolado da expressão função polinomial. De fato, na seqüência, afirma que o estudo dos polinômios permite aprofundar o conceito de função para as de grau maior que 2 (sic), mas limita-se a apresentar os esboços dos gráficos de apenas uma função polinomial de grau 3 e de outra de grau 4. Só volta a usar a expressão função polinomial após ter desenvolvido os temas Números Complexos e Equações Polinomiais, na seção Flash Matemático. Lá, apresenta o esboço, a partir de suas raízes, do gráfico da função $P(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$, que denomina função polinomial. Entretanto, é digno de nota que apenas essa coleção reconheça as funções afim e quadrática como funções polinomiais, ainda que num único momento do texto, ao definir função polinomial.

Portanto, as coleções A e B não relacionam os termos nem articulam os conceitos de polinômio e função polinomial. A coleção C explicita tal relação, ao identificar as expressões polinômio e função polinomial, quando define função polinomial e esboça a articulação que investigamos – embora a explore pouco.

No capítulo 5 registramos nossa investigação sobre o corpo de exercícios das coleções. Optamos por fazê-lo apenas para os livros 3, já que a análise do tratamento expositivo revelou que nos livros 1 não se faz a articulação entre polinômios e funções e, nos livros 3, tal articulação é pelo menos esboçada.

Nossa pesquisa revelou que, se quanto ao tratamento expositivo as coleções A e B não fazem a articulação entre polinômios e funções, muito menos o fazem em seus respectivos corpos de exercícios. De fato, a coleção A apresenta 28 exercícios, todos eles com o tratamento de polinômio (nenhum com o tratamento de função polinomial) e a coleção B traz um total de

12 exercícios, sendo onze deles com o tratamento de polinômios e apenas um de função polinomial. Se a coleção C em seu tratamento expositivo esboça, mas não explora a articulação entre polinômios e funções, já no corpo de exercícios destaca-se bastante das coleções A e B, pois do total de 59 exercícios apresentados, 48 têm o tratamento de polinômios (cerca de 81,4%) e outros 11 são de função polinomial (representando cerca de 18,6% do total). A investigação revelou também os exercícios da coleção C que envolvem funções polinomiais trazem como contexto: cálculo de perímetro, áreas, volumes, preço, receita, lucro, os quais certamente contribuem para dar um sentido prático ao ensino dos polinômios.

Assim, concluímos que as coleções A e B não articulam os temas polinômios e funções no tratamento expositivo e nem no corpo de exercícios. A coleção C esboça tal articulação no plano expositivo e explora-a com algum detalhe em seu corpo de exercícios.

Ao encerrar, manifestamos aqui o desejo de que este trabalho possa servir de ponto de partida e incentivo a outros estudiosos, que certamente desenvolverão mais a fundo o tema e esperamos ter contribuido de alguma forma com o ensino de matemática em nosso país.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. 2000.

_____. Ministério da Educação e Cultura. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio : PNLEM/2005** : Matemática / [coordenação Paulo Figueiredo Lima]. – Brasília : MEC, SEMTEC, FNDE, 2004.

CARNEIRO, José Paulo Quinhões. Equações algébricas de grau maior que dois: um assunto para o ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n. 40, p. 31-40, 1999.

_____. Resolução de Equações Algébricas. Rio de Janeiro : Universidade Santa Úrsula, 1998, apud AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP Rio Claro, SP, 2002, p. 45.

_____. Equações algébricas de grau maior que 2: Assunto para o ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo : IME-USP, 1999, n. 40, p. 31-40 apud AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP Rio Claro, SP, 2002, p. 45.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert.P. (org.). **As Idéias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo : Atual, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. v. 3. São Paulo: Ática, 1999, apud AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP Rio Claro, SP, 2002, p. 45.

EISENBERG, Theodore; DREYFUS, Tommy. Os polinômios no currículo da escola média. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). **As Idéias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo : Atual, 1995. p. 127-134.

KÖCHE, José Carlos. **Fundamentos da Metodologia Científica: Teoria da ciência e prática da pesquisa**. Petrópolis, RJ : Vozes, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro : SBM, 2001.

_____. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro : SBM, 1996 apud AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP Rio Claro, SP, 2002, p. 45.

MESA, Vilma. Functions in middle school mathematics textbooks: Implications for a Functional Approach to Álgebra. In: **STUDY CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI)**, 12, 2001, Melbourne. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Melbourne : Helen Chick et al. - Universidade de Melbourne, 2001. v. 1. p. 454-461.

_____. Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: an empirical approach. In: **Educacional Studies in Mathematics 56**: 255-286, 2004. Netherlands, Kluwer Academic Publishers: 2004.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau**. 3 ed. São Paulo : SE/CENP, 1995.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo : Sociedade Brasileira de Matemática, 1982-

STUMP, Sheryl.; BISHOP, Joyce. Framing the Future: Inventing an Algebra Course for Preservice Elementary and Middle School Teachers. In: **STUDY CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI)**, 12, 2001, Melbourne. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Melbourne : Helen Chick et al. - Universidade de Melbourne, 2001. v. 1. p. 564-569.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Faculdade de Educação. Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. **Zetetiké** (1993-). Campinas, SP : UNICAMP, FE, CEMPEM. v. 7, n. 11/12. v. 9, n. 15/16. v. 12, n.21.