**APARECIDA DE LOURDES BONANNO**

# UM ESTUDO SOBRE O CÁLCULO OPERATÓRIO NO CAMPO MULTIPLICATIVO COM ALUNOS DE 5ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

**Mestrado Profissional em Ensino de Matemática**

**PUC/SP**
**São Paulo**
**2007**

APARECIDA DE LOURDES BONANNO

# UM ESTUDO SOBRE O CÁLCULO OPERATÓRIO NO CAMPO MULTIPLICATIVO COM ALUNOS DE 5ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires.**

**PUC/SP**
**São Paulo**
**2007**

**Banca Examinadora**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a produção total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura_________________________ Local e Data___________________

*Dedico esse trabalho especialmente:*

*Ao meu filho Felipe Bonanno Menezes, pelos momentos de alegria e motivação.*

*À minha mãe Maria Carneiro Bonanno, pelo exemplo de Educação.*

*À memória de meu pai Vito Bonanno, pelo exemplo de vida.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS, acima de tudo, por me guiar nessa difícil jornada.

Muitas pessoas fizeram parte dessa caminhada, direta ou indiretamente, a todos meu especial carinho e agradecimento:

À minha família pelo carinho e incentivo constantes.

À querida Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires, por sua grande dedicação, que com todo rigor científico me acompanhou durante o trabalho com muito carinho, amizade, serenidade e motivação.

À professora Celi Aparecida Espasandin Lopes, por aceitar fazer parte da banca examinadora e às valiosas sugestões, no Exame de Qualificação.

Ao professor Saddo Ag Almouloud, que além das contribuições no Exame de Qualificação, orientou-me na utilização do *software* CHIC.

À amiga Denise Coutinho Tokunaga, pelo incentivo ao meu ingresso no Curso.

Aos amigos do Grupo Central do Projeto Números em Ação, em especial Nely, Idalise, Celso, Walquíria, Braz, Laura, Edílson e Fátima, pela batalha de três anos de aprendizagem e trocas. Virgínia e Luciana, minhas mentoras em tantos momentos.

À querida Dirigente Regional de Ensino, Maria Aparecida do Nascimento Barreto pela amizade sincera.

Ao amigo Claudemir Félix Ferreira, por ter segurado a barra durante todo o tempo e ainda pelo tempo dispensado à revisão desse trabalho, obrigada.

Ao amigo Saturnino Bandeira que também ajudou na revisão.

Luciana e Emily, companheiras firmes de jornada.

Braz Magri Júnior, pela amizade e por disponibilizar um computador para o término do trabalho.

Valdete Rinaldi, pelo auxílio na confecção do abstract.

Aos amigos da Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino Guarulhos Sul, por agüentarem minhas crises e me apoiarem em todos os momentos.

Aos colegas Curso, em especial Ivan, Renata, Margarete, Lucimara, Mut, Icléa, Cris, Helena e tantos outros que contribuíram para o meu crescimento.

Ao amigo Sebastião Correa Sanches, por abrir as portas da escola com carinho e confiança.

Aos alunos participantes desta pesquisa, por permitirem sua realização.

À equipe do Programa Bolsa Mestrado da Diretoria de Ensino Guarulhos Sul, em especial Professores Luiz e Ângela, os quais esclareceram minhas dúvidas sempre que solicitados, com muito carinho e paciência.

A Secretaria de Estado da Educação de São Paulo pelo Programa Bolsa Mestrado.

# RESUMO

Esta pesquisa tem o objetivo de investigar o cálculo operatório no campo multiplicativo com um grupo de alunos de 5ª série do Ensino Fundamental, buscando identificar o conhecimento desses alunos a respeito de duas grandes expectativas de aprendizagem para essa etapa da escolaridade: a primeira engloba a análise, a interpretação, e a resolução de situações-problema com os diferentes significados da multiplicação e divisão e a segunda o desempenho do grupo de alunos em cálculos – mentais e escritos, exatos ou aproximados - por meio de estratégias variadas. Apóia-se nas contribuições de diferentes autores, em especial, Gerard Vergnaud, Constance Kamii e Irma Saiz. Para realizar este estudo, primeiramente fizemos um levantamento bibliográfico e analisamos documentos curriculares oficiais e definimos nosso problemas de pesquisa. Depois organizamos instrumentos de coleta de dados, contendo tarefas a serem propostas a um grupo de 21 alunos de 5ª série, de uma escola pública estadual. Após desenvolver o tratamento dos dados coletados e de elaborar nossas análises, realizamos entrevistas com alguns alunos para ampliar nossa compreensão sobre o assunto. De modo geral, observamos que os algoritmos convencionais ainda são os procedimentos mais utilizados pelos alunos nas situações problema e cálculo escrito, mas um fato interessante e positivo é o de que muitos alunos usam procedimentos não convencionais para resolver as situações problema. Constatamos ainda a importância de se considerar e explorar, no ensino, as diversas estratégias não convencionais estabelecidas pelos alunos em situações-problema diversas.

**Palavras-chave**: Operações. Campo multiplicativo. Cálculos.

# ABSTRACT

This research has the objective of investigating the operative calculation in the multiplicative field with a group of students of 5th series of the Fundamental Teaching, trying identify those students' knowledge about two great learning expectations: the first one includes the analysis, the interpretation, and the resolution of problem's situation with the different meanings of the multiplication and division and the second one is the acting of the students' group in mental-calculations and written, exact or approximate - through varied strategies. It leans on the contributions of different authors' , especially, Gerard Vergnaud, Constance Kamii and Irma Saiz.To accomplish this study, firstly we made a bibliographical rising and the analysis of an official curricular document and later we organized data collection instruments, containing activities and calculations to be proposed for a one group with 21 students of 5th series, of a state public school, allowing a diagnostic study with that group. After developing the treatment of the collected data and of elaborating our analyses, we accomplished interviews with some students to enlarge our understanding on the subject. In general, we observed that the conventional algorithms are still the procedures more used by the students in the situations problem and written calculation, but an interesting and positive fact is what many students use procedures don't stipulate to solve the situations problem. We still verified the importance of to consider and to explore, in the teaching, the several strategies don't stipulate established by the students in several situation-problem.

**key-words :** Operations - Multiplicative Field - Calculations

# SUMÁRIO

# LISTA DE QUADROS

# APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

## I. Justificativa da escolha do tema

A escolha do tema deste trabalho tem relação estreita com minha atuação como professora de Matemática na rede pública estadual de São Paulo e, mais recentemente, como Assistente Técnica Pedagógica de Matemática em uma Diretoria de Ensino jurisdicionada à Secretaria de Estado da Educação de São Paulo.

Nessa trajetória foi observado que um dos aspectos mais comumente destacados em relação ao desempenho dos alunos em Matemática é o chamado "domínio das quatro operações". As discussões sobre o assunto acontecem principalmente na passagem da 4ª para a 5ª série, em função de uma expectativa dos professores de Matemática, no sentido de que seria razoável que os alunos soubessem as quatro operações. É bastante freqüente que esses professores se dirijam aos professores polivalentes que trabalharam com as crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental, dizendo: "se os alunos vierem sabendo as técnicas das quatro operações, está ótimo; não precisamos ensinar mais nada".

Evidentemente, essa solicitação não leva em conta o fato de que o ensino das técnicas de cálculo escrito não é simples, pois envolve outros conhecimentos e, por melhor que seja o trabalho realizado nos anos iniciais, ele pressupõe uma continuidade natural nas séries subseqüentes, particularmente na 5ª série do Ensino Fundamental.

Esta compreensão é explicitada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - PCNEF (1998), área de Matemática, terceiro e quarto Ciclos (5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental):

> ... os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, seja ele exato ou aproximado, mental ou escrito, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais ou convencionais, com ou sem uso de calculadoras. Certamente, eles ainda não têm domínio total de algumas técnicas operatórias, como da multiplicação e da divisão envolvendo números naturais, compostos de várias ordens, ou aquelas com números decimais, e isso precisa ser trabalhado sistematicamente. O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo. (p.67)

Em outro trecho desse documento, ao explicitar as expectativas sobre o desenvolvimento do pensamento numérico, indica-se a importância de situações de aprendizagem que permitam aos estudantes:

- Ampliar e construir novos significados para os números — naturais, inteiros e racionais — a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;

- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros e racionais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;

- Selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta.

Nos anos de 2004 a 2006, nossa preocupação com o chamado “domínio das quatro operações” ampliou-se em função do envolvimento em um projeto da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, denominado “Números em Ação". Esse projeto atende alunos de 5ª e 6ª séries que apresentam dificuldades no que se refere à realização de cálculos, compreensão e aplicação das operações matemáticas fundamentais e é composto por duas fases: I - Adição e Subtração e II - Multiplicação – Divisão - Quatro Operações.

Ao participar do projeto, engajamo-nos em suas várias etapas - elaboração de material, acompanhamento do projeto de capacitação de professores -, e fomos percebendo as grandes dificuldades que surgem quando se pretende superar dificuldades de aprendizagem.

Na etapa de elaboração do material, buscamos identificar algumas prioridades. Assim, consideramos importante abordar os vários significados da multiplicação e da divisão, pois sabíamos que a abordagem mais freqüente da multiplicação é apresentada como um caso particular da adição em que as parcelas envolvidas são todas iguais e que diferentes autores como Vergnaud (1996; 2003), Franchi (1995; 2002) e Kamii (1995), entre outros, mostram que esse tipo de abordagem é insuficiente para que os alunos resolvam situações que não são essencialmente aditivas. No caso da multiplicação e divisão, decidimos então explorar um campo mais amplo de significados: multiplicação comparativa, idéia de proporcionalidade, configuração retangular e idéia de combinatória. Além do trabalho com as situações-problema, verificamos que seria importante trabalhar com o cálculo mental e escrito, exato e aproximado, explorando regularidades nas tabuadas, com a finalidade de agilizar os cálculos e memorizar compreensivamente os resultados. No projeto procurou-se buscar aulas multimídia, animações e jogos e propor aos alunos que trabalhassem em duplas.

O acompanhamento do Projeto foi proposto por capacitações realizadas mensalmente aos professores, visitas às escolas participantes e, participando desse acompanhamento, levantamos a hipótese de que, de modo geral, ao longo dos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos não estão tendo oportunidades de construir conhecimentos que lhes possibilitem melhorar suas competências numéricas e de cálculo, em particular, as que envolvem o cálculo operatório no campo multiplicativo, ou seja, a multiplicação e a divisão. Ao que parece, o treino mecânico de procedimentos, sem que os alunos possam compreendê-los de fato, ainda predomina na escola.

Essas vivências motivaram a realização deste trabalho que tem por finalidade contribuir para a reflexão sobre o ensino e a aprendizagem das operações.

## II. Relevância do tema de pesquisa

Ao construir argumentos para destacar a relevância do tema que decidimos pesquisar, destacam-se alguns trechos, extraídos de um material de formação de professores elaborado por Pires (2001), em que esta procura expor as ênfases conferidas ao ensino da multiplicação e divisão, ao longo das últimas décadas.

> Desde pequenas as crianças se envolvem em situações em que fazem divisões e multiplicações. Dividem doces e brinquedos com seus irmãos e colegas. Outras sabem quanto devem cobrar por três pacotes de doce, especialmente aquelas que comercializam nas esquinas das cidades. No entanto, na escola, muitos professores indicam que a aprendizagem dessas operações pelas crianças parece ser difícil e complicada. Por que isso acontece? Uma via para compreendermos essa problemática é conhecer um pouco sobre a história do ensino dessas operações.
>
> Nas décadas de 50 e 60, o ensino da multiplicação e da divisão centrava-se no "decorar" resultados. As tabuadas de multiplicação e de divisão eram muito importantes e os professores passavam um grande tempo fazendo com que os alunos decorassem esses resultados sem compreensão. Usavam muitas vezes métodos para

> que os alunos decorassem, alguns deles que ainda hoje estão na lembrança de muitas pessoas, que sofreram castigos pelo fato de não conseguirem memorizar as tabuadas.
> A aprendizagem da multiplicação e da divisão seguia diversos passos que levavam em conta a grandeza dos números envolvidos e a hierarquização das prováveis dificuldades. Os problemas apareciam apenas após o estudo dessas operações e os significados trabalhados eram restritos à multiplicação como adição de parcelas iguais e à divisão como repartição em partes iguais. Nessa época não era comum justificar procedimentos usados nas técnicas operatórias. Mas enfatizava-se a prova real e a prova dos nove como formas de verificação de resultados.
> A partir de meados da década de 60, com a influência da “Matemática Moderna” a ênfase no ensino de Matemática era a da teoria dos conjuntos. A multiplicação era geralmente estudada na seqüência da adição, antes da subtração, pois se considerava uma operação “próxima” da adição, ou seja, uma adição de parcelas iguais. A memorização de tabuadas, sem compreensão, passou a ser criticada.
> Nos anos 80 e 90 começou-se a enfatizar os diferentes significados das operações, tais como a idéia de medir na divisão e de combinatória na multiplicação.
> O trabalho com a multiplicação e divisão destacava o uso de materiais como Material Dourado (Montessori), o uso de tabelas, esquemas como recursos para representar essas operações.
> Buscava-se a compreensão das técnicas operatórias, trabalhava-se o processo americano da divisão e a distributividade na multiplicação.
> Incentivava-se o uso de jogos, materiais, e alguns problemas “não convencionais”. No entanto, pouca atenção ainda era dada aos diferentes significados dessas operações e aos procedimentos de cálculo que as crianças criam.
> Sabendo-se que grande parte dos problemas no interior da Matemática e fora dela são resolvidos pelas operações fundamentais, seria natural, portanto, que as atividades para o estudo das operações se iniciasse e se desenvolvesse num contexto de resolução de problemas.
> No entanto, ainda nas décadas de 80/90 é que o trabalho é quase sempre iniciado pela obtenção de resultados básicos, seguido imediatamente pelo ensino de técnicas operatórias convencionais e finalizado pela utilização das técnicas em “problemas-modelo”, muitas vezes ligados a uma única idéia das várias que podem ser associadas a uma dada operação.(p.10-12)

Essa retrospectiva mostra que as dificuldades referentes ao ensino e à aprendizagem da multiplicação e da divisão permanecem e, sendo esse assunto muito importante para a formação dos alunos, justifica-se ampliar as investigações sobre o tema.

Essa importância aparece claramente posta nos documentos curriculares. “Números e Operações” é um dos blocos de conteúdo selecionados pelos PCNEF (1998), presente em todos os anos do Ensino Fundamental, em função da importância que os conhecimentos numéricos e operatórios desempenham na formação matemática dos alunos. O documento prescreve:

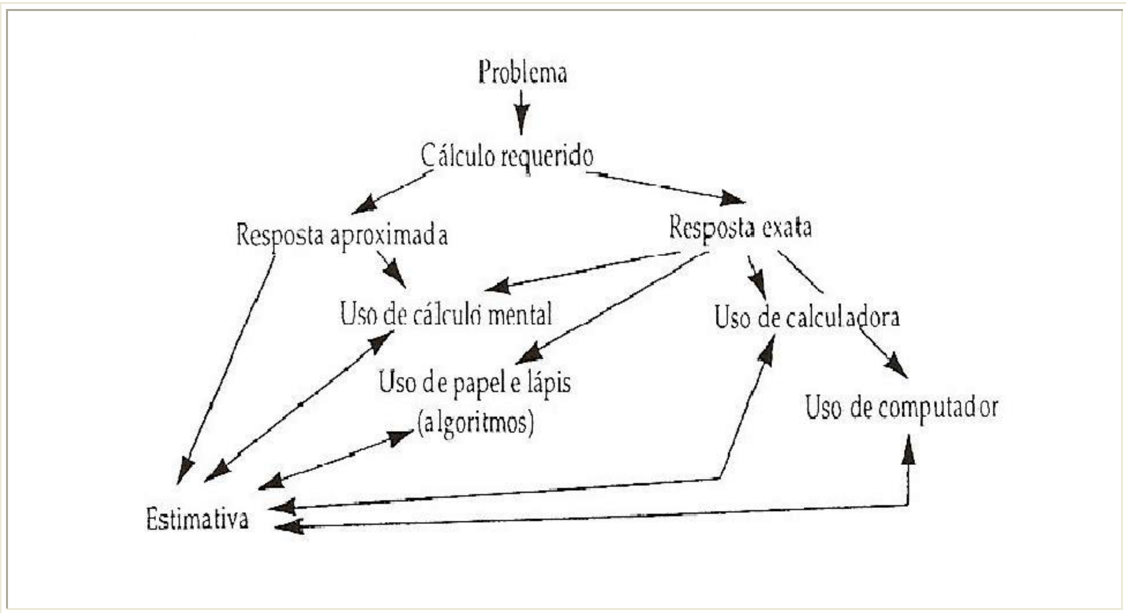
> [...]ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos. Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversas tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.
>
> Com relação às operações, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos — exato e aproximado, mental e escrito. (p.50)

No entanto, na prática, particularmente da multiplicação, sabemos que uma abordagem freqüente é o estabelecimento da relação entre ela e a adição, ou seja, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais. A partir dessa interpretação, definem-se papéis diferentes para o multiplicando (o número que se repete) e para o multiplicador (o número de repetições), não sendo possível tomar um pelo outro. O que se constata é que essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas.

Em função disso, estudos destacam a importância de se trabalhar um conjunto de problemas que explorem a multiplicação e a divisão, com base em um campo mais amplo de significados do que tem sido usualmente realizado; esses estudos apóiam-se, geralmente, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996). Mas os resultados de investigações no campo da educação matemática ainda são pouco conhecidos pela maioria dos professores.

Além das questões de significado relativos aos contextos das operações, há ainda as questões a serem enfrentadas no processo de ensino e aprendizagem, referentes ao papel do cálculo na escola hoje e as articulações entre cálculos mentais e escritos, bem como sobre a necessidade de explorar cálculos exatos ou aproximados.

Um esquema instigador sobre essas relações foi apresentado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1989):




**Quadro 1** - Esquema de Cálculo – NTCM (1989)

O quadro mostra que, tomando como ponto de partida um problema, o cálculo requerido depende da necessidade de resposta exata ou aproximada.

Se a resposta desejada é exata, a depender da complexidade do cálculo, ela pode ser obtida por cálculo mental, cálculo com papel e lápis, cálculo com calculadora ou computador, mas o controle e a validação dessa resposta dependerão sempre da estimativa.

Se a resposta desejada é exata, ela pode ser obtida por cálculo mental ou diretamente por estimativa, sendo que o controle e a validação da resposta obtida por cálculo mental dependerão também da estimativa.

Em resumo, o trabalho com estimativas tem fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem que envolve o campo multiplicativo.

## III. Questão central da pesquisa e/ou seus objetivos

Nosso trabalho faz parte do Projeto “Inovações Curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio”, que reúne mestrandos e doutorandos do Programa de Estudos Pós - Graduados em Educação Matemática e que tem como finalidade investigar os processos de desenvolvimento curricular dos Ensinos Fundamental e Médio. Esse projeto inclui análises sobre a trajetória da Matemática na organização curricular brasileira para estas etapas da escolaridade e as atuais propostas de ensino de Matemática. Focaliza as variáveis que intervêm na formulação de propostas curriculares e discute como as diretrizes veiculadas por documentos oficiais são traduzidas na prática dos professores em sala de aula e nos livros didáticos e analisa o currículo como “práxis”. Investiga também a relação entre processos de formação de professores e os processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular.

Considerando que os PCNEF fazem referência direta ao campo multiplicativo e aos cálculos que devem ser trabalhados na escola (mental, escrito, exato e aproximado), nosso propósito é trazer elementos para a reflexão se (e como) essas diretrizes veiculadas por documentos oficiais são traduzidas na prática de professores em sala de aula (currículo como "práxis"), pela análise dos conhecimentos revelados por alunos da 5ª série do Ensino Fundamental.

Para orientar nosso trabalho formulamos questões norteadoras, que são as seguintes:

- O que alunos de 5ª série revelam conhecer, relativamente à análise, interpretação e resolução de situações-problema, com compreensão de diferentes significados da multiplicação e divisão?

- Como esses alunos se desempenham em cálculos - mentais ou escritos, exatos ou aproximados - envolvendo multiplicação e divisão com números naturais?

## IV. Procedimentos de coleta e de organização dos dados

Realizamos a pesquisa em uma escola da Rede Pública Estadual, localizada em Guarulhos, na Grande São Paulo, que funciona em tempo integral, das 7h às 16h. A escola conta com aproximadamente 1200 alunos distribuídos em 30 salas e atende ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio Regular e Suplência (EJA), nos períodos manhã, tarde e noite.

O projeto Escola de Tempo Integral teve início no ano de 2006, onde os alunos de 1ª à 8ª séries do Ensino Fundamental II têm uma jornada escolar de 9 aulas diárias de 50 minutos cada. Em função desse projeto e da acolhida pela direção da escola, foi feita a escolha.

Participaram de nossa pesquisa 21 alunos de uma classe de 5ª série.

Esses alunos têm 06 aulas semanais de Matemática e 03 aulas de oficinas extracurriculares da mesma disciplina. A professora dessa classe é efetiva na escola e trabalha, também, com as oficinas extracurriculares.

Os dados foram coletados pela pesquisadora em sala de aula, com o professor presente, em quatro momentos distintos. De posse dos dados coletados, realizamos a análise das respostas e procedemos à organização de tabelas para posterior análise. Entrevistamos alguns alunos para compreender melhor seus procedimentos e identificar possíveis intervenções.

Para a categorização e posterior análise dos dados coletados, utilizamos o *software* CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva), com a finalidade de priorizar o entendimento das inter-relações dos dados, cruzando indivíduos e variáveis.

A escolha da análise com o *software* CHIC se deu pela possibilidade de utilizar ferramentas estatísticas que evidenciam a dinâmica do comportamento dos alunos em cada situação de resolução de problemas no campo multiplicativo. Segundo Almouloud (2002), “a análise implicativa, como todos os métodos de análise estatística de dados multidimensionais permite visualizar, organizar, construir modelos e explicar fenômenos associados aos dados.”.

Para análise geral dos dados, buscamos distinguir os procedimentos escolhidos pelos alunos e optamos por cinco categorias de solução em função do algoritmo e dos esquemas escolhidos por eles para resolver as situações-problema e cálculo escrito. A primeira categoria de solução na construção da operação corresponde apenas ao uso do algoritmo convencional. A segunda corresponde ao não reconhecimento da operação com uso do algoritmo convencional inadequado. A terceira é evidenciada pelos alunos que apresentam apenas a resposta, sem registro de cálculos. A quarta corresponde ao uso de esquemas sem utilização do algoritmo convencional. Denominamos a quinta categoria a não resolução.

Essas categorias foram codificadas de tal modo que obtivemos 8 variáveis para cada questão, a saber:

| **Código** | **Categorias de Solução** |
|---|---|
| ACRC – Algoritmo Convencional e Resposta correta | Categoria 1 – Uso do algoritmo convencional |
| ACRI – Algoritmo Convencional e Resposta Incorreta. | Categoria 1 – Uso do algoritmo convencional. |
| AIRI – Algoritmo Convencional Inadequado e Resposta Incorreta | Categoria 2 – Uso de algoritmo convencional inadequado. |
| SRC – Registro, apenas, da resposta correta. | Categoria 3 – Esboço da resposta, sem registro de cálculos. |
| SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta. | Categoria 3 – Esboço da resposta, sem registro de cálculos. |
| OOPC - Outros esquemas e procedimentos corretos. | Categoria 4 – Utilização de outros esquemas e procedimentos. |
| OOPI - Outros esquemas e procedimentos incorretos. | Categoria 4 – Utilização de outros esquemas e procedimentos. |
| BR – Brancos | Categoria 5 – Não resolução do problema |

**Quadro 2** – Tabela de Categorias

Para a análise do desempenho em cálculo mental, elaboramos dois quadros com as opções de alternativas, onde constam a alternativa e a quantidade de alunos que optaram por ela. Por essas opções analisamos duas situações de cálculo mental, a primeira envolvendo multiplicação e a segunda, divisão.

## V. Estruturação do texto

Os próximos capítulos do nosso trabalho estão assim organizados:

No Capítulo 1, apresentaremos uma revisão bibliográfica, destacando o cálculo na escola hoje, a importância do calculo mental e estratégias pessoais, as estratégias pessoais de cálculo escrito e os cálculos de multiplicação e divisão.

No Capítulo 2, apresentaremos o planejamento da pesquisa de campo, a caracterização dos sujeitos de pesquisa, o processo de categorização dos dados coletados.

O Capítulo 3 apresenta a análise dos dados coletados, dados sobre o desempenho geral dos alunos e análise de similaridade das situações-problema.

A análise das entrevistas e algumas intervenções compõem o capítulo 4.

Por fim, o capítulo 5 apresenta as considerações finais.

# CAPÍTULO 1
# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As investigações sobre as operações de multiplicação e divisão foram impulsionadas pelos trabalhos de Gerard Vergnaud consolidados em sua Teoria dos Campos Conceituais. Neste capítulo, buscaremos elaborar uma síntese sobre os trabalhos desse e de outros pesquisadores.

## 1.1 As contribuições da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud

Segundo Vergnaud (1996), sua Teoria dos Campos Conceituais tem como finalidade fornecer um quadro que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, nas crianças e adolescentes, entendendo por "conhecimento", tanto o saber fazer como os saberes expressos e os efeitos da aprendizagem e desenvolvimento, nessa faixa etária, intervêm conjuntamente.

A Teoria dos Campos Conceituais começou a ser elaborada para explicar o processo de conceitualização das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço, da álgebra, porém não é específica da Matemática.

Vergnaud (2003) reconhece ainda a importância da Teoria de Piaget em sua teoria, quando destaca as idéias de adaptação, desequilibração e reequilibração como eixo para a investigação em didática da Matemática.

Ressalta ainda, a idéia proposta por Vygotsky chamada de consciência anterior, ou seja, aquele que permite dar conta de determinada tarefa, e a consciência posterior que possibilita refletir sobre o processo de resolução de certa tarefa.

No livro *Réussir et Comprendre*, de Piaget, citado por Vergnaud (2003), o autor diz que sem um mínimo de conceitualização é impossível extrair os objetos e propriedades de determinadas situações.

> Dou muita importância à reflexão nas aprendizagens matemáticas. Tento verificar, nas competências dos sujeitos, as que estão relacionadas com conceitos implícitos. Em Vygotsky e em Piaget, apesar de uma metodologia diferente, encontramos a idéia de que a conceitualização implica em um retorno reflexivo sobre a própria atividade, enfatiza a relação entre as propriedades do objeto e as propriedades da ação. Uma atividade que, há trinta anos, denomina-se de metacognição. É a idéia de que devemos ser cognitivos, para dar conta de uma tarefa, e metacognitivos, para compreender o que fizemos. A palavra réussir, em francês, é mais do que fazer. Em português é ter sucesso, é fazer com sucesso. Para fazer bem alguma coisa é preciso que haja uma cognição e também uma reflexão sobre esse sucesso que devemos obter. De fato, essa oposição entre cognição e metacognição é um pouco abusiva, porque as duas estão interconectadas na aprendizagem. (p.25)

### 1.1.1 Conceitos e Esquemas

Vergnaud (1996) afirma que quando nos interessamos pelo ensino e aprendizagem de um conceito, este não pode ser reduzido à sua definição. Um conceito adquire sentido para a criança por meio de situações e problemas a resolver, tanto teóricos como práticos.

O autor referido classifica as situações de aprendizagem da criança em duas classes:

> 1 – classes de situações para as quais o sujeito dispõe, em seu repertório, num dado momento de seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
>
> 2 – classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (VERGNAUD, 1996, p.156)

O conceito de esquema não funciona da mesma maneira nas duas classes de situações, mas é interessante às duas. No primeiro caso, segundo Vergnaud (1996), para uma mesma classe de situações aparecem comportamentos automatizados, organizados por um esquema único. No segundo caso observa-se o desencadeamento sucessivo de diversos esquemas, é um processo necessariamente acompanhado por descobertas.

Os esquemas são os elementos cognitivos responsáveis para que a ação do sujeito seja operatória, isto é, explicitam os conhecimentos em ação do sujeito, mas não funciona da mesma maneira nos dois casos, ou seja, conforme Moro, citado por Taxa (2001) “os esquemas são possíveis inconscientes que se compõem e recompõem a cada nova situação”p.39.

Vergnaud (2003) relata um fato acontecido na França, o qual exemplifica esquema de pensamento apoiado na resolução de problemas.

Em 1997, na França, época de preparação para a Copa do Mundo, procurava-se um estádio de futebol que pudesse acolher um grande número de pessoas. Quando a comissão organizadora chegou ao diretor do estádio escolhido solicitando a quantidade de lugares, o diretor respondeu não saber e contratou dois adultos, por dois dias, para contar os lugares do estádio.

Vergnaud (2003) afirma, em seu relato, que se essas pessoas só dispusessem de recursos elementares de contagem, não dariam conta de tal tarefa em tão curto espaço de tempo e ainda questiona “Como esse esquema de contagem se enriqueceu para essas duas pessoas que contaram os lugares no estádio de Nantes? Qual a interferência dos conhecimentos suplementares que teriam?” Em seguida, o autor acima, descreve como fizeram: - Em primeiro lugar dividiram as tarefas; cada um conta uma parte do estádio e depois somam, aplicam o Teorema da Adição: “O cardinal do todo é igual à soma dos cardinais das duas partes”. (p.29/30)

Em segundo lugar, acreditam que a adição fica mais fácil de fazer, se tiverem lápis e papel, o que implica em um conhecimento acerca da escrita de números.

Como os assentos estão dispostos num bloco retangular, combinam de contar o número de pessoas em cada fila e o número de filas, depois multiplicam os dois valores, o que também caracteriza um conhecimento suplementar.

Porém, se houvesse uma situação com uma fila menor e outra maior e os dois adultos com competências diferentes do ponto de vista matemático, um deles poderia sugerir que enquanto um conta a fileira menor o outro conta a maior, fazem a média e a multiplicam pelo número de fileiras. Se a outra pessoa não se convencer que isso será uma boa resolução para o problema, por não ter as mesmas competências matemáticas, contará um a um.

Com esse exemplo, Vergnaud (2003) mostra que uma atividade aparentemente simples de contagem pode dar lugar a uma atividade de conceituação razoavelmente sofisticada, o que chama de Esquema de Pensamento que apóia as ações de resolução de problemas e faz a seguinte citação, a respeito:

> Campo Conceitual é um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações. Para fazer face a essas situações, é preciso um conjunto de esquemas de conceituações e representações simbólicas. Em geral, a escola busca uma organização hierárquica das formas de organização da atividade. É também corrente tomar-se campo conceitual como apenas o conjunto de conceitos que permitem dar conta de uma situação ou de um conjunto de situações. (p.30-31)

Alguns esquemas organizadores do comportamento também sustentam as competências matemáticas. Entre os exemplos elementares, citados por Vergnaud (1996), destaca-se o algoritmo da adição dos números inteiros, que normalmente é apresentado sob a forma de um conjunto de regras:

- Começar pela coluna da direita a das unidades;
- Continuar pela coluna das dezenas, centenas etc.;
- Somar os números de cada coluna, caso o resultado seja menor que dez, escrever esse valor na linha de baixo. Se for igual ou superior a dez, escrever o algarismo das unidades dessa soma e segurar o algarismo das dezenas, transportando-o para o alto da coluna imediatamente à esquerda, somando aos demais números desta última coluna;
- e assim, sucessivamente, indo da direita para a esquerda até esgotar as colunas.

Embora as crianças sejam capazes de exercitar as seqüências das operações, é muito difícil explicitarem essas regras. E, ao considerarmos os erros dos alunos na operação de subtração, percebemos que os mais comuns são: omitir o resto, subtrair o número menor do maior independente de sua posição, em cima ou embaixo.

De maneira análoga, no algoritmo da multiplicação e divisão, que os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico, isto é, falta-lhes (aos alunos) a propriedade de chegar ao fim com segurança em um número finito de passos.

Ao considerarmos, segundo Vergnaud (1996), os erros mais comuns nas quatro operações fundamentais verifica-se que são causados, além do conceito insuficiente do Sistema de Numeração Decimal, também da falta das propriedades de cada operação, execução automatizada de um esquema, falta de entendimento da operação inversa, porém não explicam os principais erros.

Os conhecimentos contidos nos esquemas são chamados de “conceito-em-ato” e ”teorema-em-ato” e podemos, igualmente, designá-los pela expressão “invariantes operatórias”.

Vergnaud (1996) denomina conhecimentos-em-ato aos elementos cognitivos que permite à ação do sujeito ser operatória e embora os conceitos sejam construídos pelos alunos na ação, raramente são explicitados por eles.

Em suma, segundo Vergnaud citado por Taxa (2001):

> [...] o conceito de esquema pode ser definido como uma forma de organização invariante do comportamento com base em uma classe de situações. Os esquemas explicitam os conhecimentos em ação dos sujeitos, e são os elementos cognitivos responsáveis para que a ação do sujeito seja operatória.” (p. 39)

Vergnaud (1996) afirma que as competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores da conduta, os quais envolvem: objetivos e antecipações, regras de ação, com a função de gerar a conduta, invariantes operatórias (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato), a quais permitem ao sujeito selecionar as informações pertinentes, tratá-las e inferenciá-las .Dentre os quatro tipos mencionados, são as invariantes operatórias que ocupam papel decisivo no processo de aquisição de conhecimentos.

Vergnaud citado por Taxa (2001) comenta que:

> [...]nos primeiros anos de vida, a criança adquire invariantes que lhe permitem organizar o mundo quanto a objetos, classes e relações e

> aponta a construção da noção de objeto permanente, relações classificatórias, de equivalência, de ordem, entre outras.
> As inferências possibilitam aos esquemas considerar as variáveis de uma dada situação e adaptar-se a outras novas. Dessa forma, as regras de ação envolvem cada vez mais a seqüência de ações do sujeito.
> Com base nisto, destacamos que o real é conceituado com base na formação de teoremas-em-ação e conceitos-em-ação e que os conhecimentos matemáticos podem ser identificados em nível de conceitos e teoremas-em-ato. (p.42)

Segundo o autor referido (1996), as invariantes operatórias merecem uma explicação complementar, destacadas como:

- Invariantes do tipo “Proposições”, as quais se referem às proposições verdadeiras ou falsas, nomeadas “Teoremas-em-ato”. Vergnaud afirma que a ausência de quantificador dá a entender que esse teorema não tem uma validade universal para as crianças, mas apenas um alcance local para as pequenas coleções. Por exemplo: Entre os 8 e 10 anos, muitos alunos compreendem que, se uma quantidade de objetos vendáveis for multiplicada por 2, por 3, por 4, por 5, por 10, por 100 ou por um número simples, o seu preço será 2, 3, 4, 5, 10 ou 100 vezes superior. Este conhecimento pode ser expresso através de um teorema-em-ato: f(nx) = nf(x) para n inteiro e simples

- Invariantes do tipo “Função Proposicional” - apresentam aspectos indispensáveis à construção das proposições, porém não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas. Vergnaud cita, como exemplo, que os conceitos de cardinal, de estado inicial, transformação e estado final, são indispensáveis ao processo de conceitualização das estruturas aditivas, mas não são proposições.

O tipo lógico dos conceitos-em-ato é diferente do tipo lógico dos teoremas-em-ato: são as funções proposicionais. Há uma relação dialética entre funções proposicionais e proposições, isto é, uma não existe sem a outra. De maneira análoga, os conceitos-em-ato e os teoremas-em-ato se constroem em estreita interação.

Vergnaud (1996) destaca que:

> Entre as funções proposicionais, convém considerar que existem funções com um argumento (as propriedades), funções com dois argumentos (as relações binárias), funções com três argumentos (as relações ternárias, entre as quais se incluem as leis de composição binária), funções com quatro argumentos, como a proporcionalidade e funções com mais de quatro argumentos. (p.164)

- Invariantes do tipo "Argumento" – ao falarmos de proposições e função proposicional, falamos de argumento. Referem-se a uma proposição resultante da atribuição de valores particulares aos argumentos da função proposicional. Segundo Vergnaud(1996), os argumentos podem ser objetos materiais (o barco está à direita do farol), personagens (Paulo é mais alto que João), números (4 + 3 = 7), relações ("maior que" é uma relação assimétrica), e mesmo proposições ("8 é um divisor de 24" é a recíproca de "24 é múltiplo de 8").

O autor afirma que estas distinções são indispensáveis à dialética, porque a transformação dos conceitos-ferramentas em conceitos-objetos é um processo decisivo na conceitualização do real e significa, entre outras coisas que funções proposicionais podem transformar-se em argumentos.

Essa afirmação pode ser parecer absurda num parágrafo dedicado às invariantes operatórias contidas nos esquemas. Mas a principal razão dessa menção é que as invariantes operatórias não são de um tipo lógico único, havendo a necessidade de analisar o “regulamento” de cada uma delas.

E, um conceito-em-ação não é propriamente um conceito e nem um teorema-em-ação um teorema. Na ciência, conceitos e teoremas são explícitos e pode se discutir a sua pertinência e a sua verdade. Logo, só podemos falar das invariantes operatórias integradas nos esquemas com o auxílio das categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais e objetos-argumentos.

Vergnaud (1996), ainda nos relata que:

> A operacionalidade de um conceito deve ser experimentada através de situações variadas, e o investigador deve analisar uma grande variedade de condutas e de esquemas para compreender em que consiste do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito; por exemplo, o conceito de relação só pode ser compreendido através de uma diversidade de problemas práticos e teóricos; o mesmo acontece com os conceitos de funções ou de números. Efetivamente, cada um desses conceitos comporta diversas propriedades, cuja pertinência é variável conforme situações a tratar. Algumas delas podem ser compreendidas muito rapidamente, outras só bastante mais tarde, no decurso da aprendizagem. (VERGNAUD, 1996, p.166-167)

Na realização de operações matemáticas há a necessidade de compreender os conceitos matemáticos que lhes dão significados. Ou seja, as diferentes situações em que uma mesma operação serve como estratégia de solução são informações que precisam se relacionar entre si. Logo, saber planejar, tomar decisões e controlar a aplicação de uma operação matemática para resolver determinadas situações são procedimentos necessários na aprendizagem da operacionalidade de um conceito.

### 1.1.2 Campos Conceituais e Situações

Para Vergnaud citado por Taxa (2001) “Campos Conceituais referem-se a um conjunto de situações que remete o sujeito a muitos conceitos, por meio de invariantes operatórias e representações simbólicas, que possibilitam ao sujeito diferentes representações para entender as relações em questão".(p.34)

A conceitualização do real, o qual permite situar a análise das filiações e rupturas entre os conhecimentos, também é tratada pela Teoria dos Campos Conceituais. Além de envolver a análise de relação entre os conceitos como conhecimentos explícitos e as invariantes operatórias implícitas na conduta dos sujeitos em determinadas situações. Já citamos anteriormente que um conceito envolve diversas situações as quais, por sua vez, envolvem vários conceitos.

> Contudo, a ação operatória não é toda a conceitualização do real, longe disso. Não se debate a verdade ou a falsidade de um enunciado totalmente implícito, nem se identificam os aspectos do real aos quais se tem de prestar atenção, sem o auxílio de palavras, de enunciados, de símbolos e de signos.(VERGNAUD, 1996, p.166)

Vergnaud (1996) considera que um conceito é um tripé de conjuntos:

C = (S, I, s)

S – Conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I – Conjunto de invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);

s – Conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

O autor afirma que o estudo do desenvolvimento e do funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem é necessário considerar estes três conjuntos concomitantemente. Não existe, em geral, a bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações. Não se pode, pois, reduzir o significado, nem aos significantes e nem às situações.

Assim, o Campo Conceitual contempla, por exemplo, Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas. Ao analisarmos situações de divisão e multiplicação, por exemplo, recorremos a uma grande variedade de conceitos, ou seja, é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos que permite analisar estas situações: Múltiplo, divisor, quociente, relação, número racional, proporção simples e múltiplas etc. Situações estas que exigem uma grande variedade de simbolismos, tais como gráficos, tabelas, equações e esboços, além de diversas formulações possíveis.

Vergnaud citado por Taxa (2001) diz que as análises das relações multiplicativas mostram diversos tipos de multiplicações e várias classes desses problemas. A importância de distinguir tais classes e analisá-las é a de encontrar os procedimentos apropriados para a solução após a criança reconhecer as diferentes estruturas de problemas.

Vergnaud citado por Taxa (2001) ainda apresenta dois grandes tipos de problemas multiplicativos:

- Isomorfismo de Medidas em que há proporção simples entre medidas de quantidades de dois campos, é considerado a categoria mais elementar.

O autor assinala que, para a criança resolver um problema elementar de isomorfismo de medidas, ela não teria grandes dificuldades envolvidas, já que as quatro quantidades postas em relação são medidas de correspondência de dois tipos de quantidades, por exemplo: “Tenho 5 pacotes de chocolates. Há 5 chocolates em cada um. Quantos chocolates têm?”. Temos: a) número de pacotes e b) número de chocolates.

Taxa (2001) enfatiza que no ensino da multiplicação como somas sucessivas, o exemplo de um problema de soma repetida talvez seja para o professor a maneira mais clara de “explicar” a operação da multiplicação. Em uma situação de aprendizagem na qual o professor utilize a lousa e exposição verbal para explicar o conteúdo, a escolha por problemas do tipo isomorfismo de medidas com números inteiros é facilitadora, pois possibilita que a criança “resolva” o problema por meio de adições sucessivas, utilizando os códigos convencionais, como: “5 pacotes com 5 chocolates são: 5 chocolates mais 5 chocolates mais 5 chocolates mais 5 chocolates mais 5 chocolates”.

- Produtos de medidas em que existe uma composição cartesiana das medidas das quantidades em dois campos. Os problemas do tipo produto de medidas, de acordo com Vergnaud (1996), envolvem uma estrutura de problemas que remete para a composição cartesiana de dois espaços de medidas M1 e M2, em uma terceira medida M3. Essa estrutura revela duas classes de problemas:

A multiplicação – com o valor das medidas elementares, encontrar o valor do produto de medidas;

A divisão – com o valor do produto de medidas e o valor de uma das medidas elementares, encontrar o valor da outra medida.

Segundo Vergnaud (1996) os problemas mais simples do campo multiplicativo implicam a proporção simples de duas variáveis, uma relativa à outra. De acordo com os valores numéricos e de acordo com o domínio da experiência ao qual se faz referência, esses problemas apresentam dificuldades muito desiguais.

> [...] os procedimentos utilizados pelos alunos são também muito variáveis: mais de vinte categorias de tentativas, bem ou mal sucedidas, para a procura do quarto proporcional, por exemplo.
> Finalmente, é de notar que os conceitos de fração, de quociente, de número racional, de produto e de quociente de dimensões, de escalar, de função linear vão buscar o seu sentido primitivo aos problemas de proporção, e desenvolvem-se como ferramentas de pensamento através do domínio progressivo destas situações, muito antes de poderem ser introduzidos e tratados como objetos matemáticos.(VERGNAUD, 1996, 177)

Vergnaud destaca (1996) que ao observarmos a forma como as crianças abordam e tratam uma mesma situação, observamos regularidades impressionantes, nas concepções primitivas que fazem dos objetos, de suas propriedades e relações, e nas etapas pelas quais passam. Essas regularidades dizem respeito às distribuições de procedimentos ou seja, essas etapas não são inteiramente ordenadas. “Mas, apesar disso, o conjunto forma um todo coerente para um dado campo conceitual” (p.178).

### 1.1.3 Significados e Significantes

Vergnaud (1996) afirma que, “significado é uma relação do sujeito com as situações e os significantes.” Ou seja, são os esquemas criados ou evocados, no sujeito, por uma situação ou um significante que constituem o significado dessa situação ou desse significante para esse indivíduo.

> São as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações. Também, não está nas palavras nem nos símbolos matemáticos. Contudo, diz-se que uma representação simbólica, uma palavra ou um enunciado matemático têm sentido, ou vários sentidos, ou não têm sentido para este ou aquele indivíduo; diz-se igualmente que uma situação tem ou não sentido. O que é então o sentido? (VERGNAUD, 1996, p.179)

Um simbolismo ou situação específica não evocam, em um sujeito, todos os esquemas disponíveis. Por exemplo, quando se diz que uma palavra tem determinado significado, remete-nos, a um subconjunto de esquemas restritos ao conjunto de esquemas possíveis.

Segundo Vergnaud (1996) quando se pretende compreender o sentido das situações e dos símbolos a ação do sujeito e a organização de sua conduta devem ser consideradas.

Na teoria dos campos conceituais a função da linguagem e dos outros significantes ajuda à identificação das invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; ao raciocínio e à inferência e; à antecipação e controle das ações.

Vergnaud (1996) aponta para o fato de que a linguagem tem, antes de tudo, uma função de comunicação, e a aprendizagem da matemática é uma aprendizagem socializada. Porém a função de comunicação não será útil sem apoiar-se em sua função de representação, verificando-se outra função da linguagem: o auxílio ao pensamento e à organização da ação.

Ao focar a atenção nas diversas funções da linguagem, Vergnaud faz a seguintes observações sobre as informações pertinentes e operações de pensamentos, uma vez que considera que são essas que constituem os esboços da atividade intelectual:

- As informações pertinentes são expressas em termos de objetos (argumentos), de propriedades e de relações (funções proposicionais), de teoremas (proposições);
- As operações de pensamento em termos de seleção das informações, de inferência, de recusa ou aceitação das conseqüências, e também previsão das operações a fazer, dos resultados ou objetivos a atingir, de decomposição em etapas dos processos de tratamento: “se fizer isso e depois aquilo, obterei o outro” (p.181)

Os símbolos e a linguagem matemática desempenham um papel relevante na conceitualização e na ação.

## 1.2 As contribuições da pesquisadora Constance Kamii

Kamii (1995) analisa os efeitos dos algoritmos nas séries iniciais, no capítulo intitulado “Efeitos Nocivos dos Algoritmos” e considera o uso prejudicial por três motivos descritos a seguir: - Força o aluno a desistir de seu raciocínio numérico; - “Desensinam” o valor posicional e tornam a criança dependente do arranjo espacial dos números, do lápis e papel e de outras pessoas.

Para a autora, quando não ensinamos algoritmos às crianças das séries iniciais, mas motivamos a pensar e inventar procedimentos de cálculo, seu raciocínio segue um caminho diferente daquele dos algoritmos convencionais.

Em adição, subtração e multiplicação, por exemplo, os algoritmos operam da direita para a esquerda, enquanto as crianças inicialmente vão sempre da esquerda para a direita. Na divisão, ao contrário, os algoritmos ditam procedimentos da esquerda para a direita, enquanto o aluno da 3ª série segue sempre da direita para a esquerda. (Kamii, 1995, p.57)

Sendo assim, a criança abandona suas próprias idéias e acaba por se submeter ao professor, o que já é suficiente para justificar o mal causado pelo ensino dos algoritmos nas séries iniciais.

Kamii (1995) realizou uma importante investigação acerca da multiplicação em resolução de problemas com números de vários algarismos por crianças de 2ª e 3ª séries, através do uso das propriedades de nosso sistema de escrita e encorajando (os alunos) a pensar mais rapidamente e de forma mais simples para usar a menor quantidade de escrita possível.

O conhecimento lógico-matemático, isto é, as invenções das crianças que são justificadas e suas comparações, foram os focos principais do trabalho, depois relacionou as invenções dos alunos aos aspectos sociais (convencionais) de nosso Sistema de Numeração Decimal para que elas usem suas propriedades.

A autora revela que a forma vertical para escrever problemas de multiplicação é um conhecimento social que as crianças não inventaram. Em outros momentos a autora procurou revisar termos (conhecimento social) relacionados ao valor posicional e à multiplicação, como por exemplo: "12 centenas" e "1200 unidades", que é um conhecimento social muito útil para saber que 12 x 100 = 1200.

Kamii (1995) cita Westbrook e como a multiplicação com números de vários algarismos é abordada por ele, descrita a seguir: - Na abordagem do referido autor há muito conhecimento social, mas há também uma grande quantidade de raciocínio (conhecimento lógico matemático), pois para que as crianças não aprendam apenas truques, frequentemente lhes questiona como sabem.

Um exemplo das atividades desenvolvidas por Westbrook citado por Kamii (1995) é dividir 123 em dezenas e multiplicar o resultado por 10. Por saber que as crianças de 3ª série já possuem conhecimentos sobre combinações de fatores envolvendo 10 e 100, o referido autor formula questões que permitam usá-los e ir além do mesmo, tais como: - quantos "um" existem em 123, se os alunos responderem 3 ele diz, - Sim, existem três nas unidades e quantos existem no número inteiro? E assim faz até chegar em valores maiores, encorajando as crianças a trocarem pontos de vista.

Outro passo é trabalhar, da divisão para a multiplicação, escrevendo as respostas e pedindo explicações. O autor continua variando números iniciando com múltiplos de 10, (51 x 30, por exemplo) e termina com valores mais complicados, como 51 x 34. Os dois níveis produzidos por uma das crianças, por ele investigada, foram:

| **Nível Inicial** | **Nível mais alto** |
|---|---|
| 51 x 10 = 510 | 50 x 30 = 1.500 |
| 51 x 10 = 510 | 50 x 4 = 200 |
| 51 x 10 = 510 | 1 x 34 = 34 |
| 51 x 4 = 210 | **1.734** |
| 1.734 | |

Kamii (1995) finaliza o capítulo mostrando que é mais fácil iniciar a multiplicação com operações como 125 x 11, que contêm algarismos pequenos e fáceis de multiplicar do que com 59 x 60, por exemplo. Uma outra maneira seria deixar as crianças discutirem apenas procedimentos sem se preocuparem com o resultado exato. Se os alunos descobrem as regras sobre os zeros, eles próprios se propõem novos desafios, isto quando o professor não entrega essas regras de “mão beijada”.

Ao descobrirem novos procedimentos pensando sobre a maneira mais rápida de resolver esses tipos de operações trocam a adição repetida pela operação de multiplicação.

## 1.3 A contribuição dos trabalhos de Anna Franchi

A pesquisadora Franchi (1995) afirma que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é ao mesmo tempo o conjunto das situações cujo tratamento envolve uma ou mais multiplicações ou divisões, o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações, descritos anteriormente.

Uma simples multiplicação que está na origem desses conceitos envolve questões cruciais. Vergnaud exemplifica essas dificuldades com um problema envolvendo o custo de alguns objetos, sendo dado o custo unitário. Seja, por exemplo, calcular o preço de 5 carrinhos de plástico sabendo-se que um custa R$ 6,00:

- O produto 6,00 x 5 pode ser compreendido como a iteração de pagar 6 reais, 5 vezes; (6,00 + 6,00 + 6,00 + 6,00 + 6,00); a expressão “cinco vezes” é significativa, como uma relação escalar, e não tem dimensão;

- O produto 5 x 6,00 não pode ser visto como a iteração de 6 parcelas iguais a 5 em uma correspondência com a situação; só pode ser feita por meio de uma relação funcional entre o número de carros e seu preço; o coeficiente constante que relaciona essas variáveis não representa carro nem reais, mas reais por carro.

Estes diferentes conceitos e modos de operar são interpretados através de relações de proporcionalidade simples. Nesta perspectiva, a relação multiplicativa não se traduz por uma relação binária, ou seja, por um raciocínio que a um par de números de um dado campo numérico, faz corresponder um terceiro número desse campo; ao contrário, caracteriza-se por lidar com duas variáveis de espaços de medidas de naturezas diferentes, que assumem valores em uma razão dada. Os teoremas-em-ato implícitos aos diferentes raciocínios, aplicados para resolver problemas enquadrados na categoria acima, são tomados das propriedades do isomorfismo da função linear.

Para esclarecer essas afirmações, representemos relações estabelecidas entre objetos e custos (no problema acima, 1 carro custa 6, 5 carros custam 30) pelo esquema:


As setas, ligando pares de números de um mesmo espaço de medida, indicam relações escalares entre esses números. Por meio da primeira pode-se determinar o preço de 5 carros: 5 carros custam 5 vezes o preço de um carro. O teorema-em-ato implícito a esse raciocínio é entendido por Vergnaud como segue: $f(5.1) = 5.f(1)$ ou, genericamente: $f(n.1) = n.f(1)$

Isto é usualmente introduzido por meio da adição repetida e, conseqüentemente, baseia-se sobre propriedades do isomorfismo aditivo:

$$f(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = f(1) + f(1) + f(1) + ... + f(1)$$

Uma relação funcional consiste, no exemplo dado, em determinar o valor da função $f(x) = 6x$ para $x = 5$, ou seja, efetuar 6 x 5. o teorema-em-ato correspondente pode ser explicitado por: $f(x) = ax$, sendo "**a**" uma constante e "**x**" assumindo valores em um determinado domínio.

Observe que a relação escalar 5 vezes 1 estabelecida no espaço M1 e transposta para o espaço M2 incide sobre um caso particular, ou seja, em uma razão de antecedente ou conseqüente igual a 1. O estabelecimento dessa relação pelo aluno não garante sua extensão para proporções que não satisfaçam essa condição; como exemplo se 5/30 então 15/90, como colocado no esquema anterior. Neste e em outros casos análogos, o teorema-em-ato assume as formas: $F(nx)=nf(x)$ (já discutido anteriormente)

$$F(n_1x + n_2) = n_1f(x) + n_2f(x)$$

Para Vergnaud, a classificação hierárquica dos problemas de multiplicação e divisão deve servir como instrumento de estudo da complexidade cognitiva crescente desse campo. Para isso devem ser considerados aspectos como os acima discutidos relativos à estrutura conceitual, ao domínio de experiência usado, aos valores numéricos. Nessa direção, a primeira classe de situações é denominada "classe de situações simples", podendo ser decomposta em quatro subclasses, representadas por:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | 1 | $\square$ | 1 | a | a | b |
| b | $\square$ | b | c | $\square$ | c | c | $\square$ |
| Multiplicação | | Divisão 1 | | Divisão 2 | | Quarta proporcional | |

É na resolução dessas situações que se constituem os primeiros significados da multiplicação e da divisão$_2$ , ou seja, a aplicação escalar **b** a **a** ou do inverso de **b** a **c**, respectivamente. A divisão 2 exige outros dois degraus cognitivos: procurar o escalar que aplicado a **a** conduz a **c** ou aplicar a **c** o inverso do coeficiente funcional **a,** ou seja, 1/**a**.

A distinção entre multiplicação, divisão 1 (partição) e divisão 2(quota) têm sido comumente aceita para os elementos básicos do campo conceitual multiplicativo. Vergnaud considera, entretanto, que isso é verdadeiro somente para domínios de referência que incluem objetos conceitualmente simples, tais como, objetos discretos, mercadorias etc. e quando os valores numéricos são números inteiros.

Um exemplo de situação da divisão partição, no caso do problema discutido, é:

- Dado o preço de 5 carrinhos – R$ 30,00, determinar o preço de um carrinho, o que é pensado em termos de R$ 30,00 repartido, dividido igualmente em 5 partes.

Já para a divisão cotas temos:

Com R$ 30,00 quantos carrinhos de R$ 6,00 se pode comprar?

Nesse caso (30,00:6,00) seria lido em linguagem técnica como: trinta reais quantos seis reais têm? Essas diferentes interpretações levantam questões polêmicas.

As demais classes do Campo Conceitual Multiplicativo envolvem diferentes raciocínios de proporcionalidade em situações de concatenação de proporções simples, de dupla proporcionalidade, de comparação de razões para as quais é impossível analisar os procedimentos dos estudantes sem o modelo das funções lineares e bi lineares e a clara identificação das magnitudes envolvidas. Quanto a este último aspecto, deve-se observar que, no caso dos problemas multiplicativos, o domínio de experiência a que o problema se refere é particularmente importante: muitos problemas multiplicativos interpretam-se por meio de relações que, ao combinar duas medidas em diferentes unidades, produzem uma medida cuja unidade não é referencialmente a mesma nem do multiplicando, nem do multiplicador. Assim, se um carro percorre em 3 horas 240 km, em uma hora deverá percorrer 80 km/h, e não quilômetros ou horas. Além disso, as situações-problema envolvendo medidas de tempo, de velocidade, de densidade etc, podem ou não ser significativas para os alunos, conforme a experiência que tenham nesse campo.

O modelo multiplicativo adotado por Vergnaud ressalta uma relação matemática importante intrínseca ao pensamento multiplicativo, ou seja, a proporcionalidade, o que permite estender esse modelo para situações multiplicativas complexas e inclusive para diferentes campos numéricos. Entretanto, não abarca aspectos importantes constitutivos iniciais dessa relação, ou seja, componentes pré-multiplicativas: nas fases iniciais da aprendizagem das operações aritméticas faz-se necessária a coordenação de diferentes processos que levam ao significado dos elementos constitutivos de uma situação multiplicativa (adição repetida, constituição de seqüências, tabuada, cálculo de algoritmos). Tal coordenação se domina em um longo trabalho de elaboração em que diferentes significados locais se integram em uma complexa rede de relações.

O estudo da estrutura de uma operação envolve conforme Davidov(1991) uma análise das situações iniciais e dos níveis de sua execução a partir das transformações sobre objetos imediatos em que se fundamentam as transformações subseqüentes. A condição característica da multiplicação chamada trivial, ou seja, redutível à adição reiterada da mesma parcela – e as informações advindas do ato de ensinar essa operação – devem integrar-se ao exame teórico dos elementos que integram sua estrutura.

## 1.4 Contribuições de Parra e Saiz para o trabalho com cálculo

Parra e Saiz (1996), o cálculo mental é um conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para se obter resultados exatos ou aproximados. Os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números.

Parra e Saiz (1996) salientam a importância do cálculo mental na escola primária e descrevem as hipóteses didáticas:

1 - as aprendizagens no terreno do cálculo mental influenciam a capacidade de resolver problemas. É frente a um problema que os alunos constroem uma representação das relações que há entre os dados e de como

trabalhando com estes dados, poderão obter novas informações que respondam a uma pergunta já formulada ou formulável por eles mesmos. Os alunos precisam estabelecer relações e tirar conclusões a partir destas relações. O professor precisa propor atividades que levem os alunos a “raciocinar” acerca dos cálculos e analisar o que isto influi sobre as capacidades deles para resolver problemas, além de permitir que avancem em direção a aprendizagens matemáticas mais complexas.

2 - o cálculo mental aumenta o conhecimento no campo numérico. As atividades de cálculo mental propõem o cálculo como objetivo de reflexão, favorecendo o surgimento e o tratamento de relações estritamente matemáticas. Além de usar algoritmos e produzir resultados numéricos, os alunos podem estabelecer relações, tirar conclusões, fundamentar, provar o que se afirma de diversas maneiras, reconhecer as situações em que não funciona estabelecer os limites de validade dos resultados que encontrou.

3 – o trabalho de cálculo mental prepara para uma maneira de construção do conhecimento que favorece uma melhor relação do aluno com a matemática. O desafio central da didática da matemática é que os alunos podem articular o que sabem com o que têm que aprender. Os alunos devem buscar os procedimentos que lhes pareçam mais úteis e articulá-los com as situações de trabalho que lhes são propostas. O cálculo mental é uma forma pessoal de relação com o conhecimento, que facilita e favorece este conhecimento, eliminando a retórica de uma disciplina difícil e sem sentido.

4 – o trabalho de cálculo pensado deve ser acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático. Neste sentido, o cálculo mental,

que é uma via de acesso ao algoritmo, é ao mesmo tempo uma ferramenta de controle, pois determinado nível de cálculo considerado agora mais fácil, deve ter se tornado automático.

Cada educando tem o seu ritmo, alguns são mais rápidos do que outros. Cada aluno pode agir diferente para resolver um problema específico de cálculo, devem se levar em consideração o que cada um sabe e o que dispõe para buscar um procedimento eficaz.

A aprendizagem acontece quando houver a compreensão, mesmo que para uma mesma operação, determinados cálculos são mais simples do que outros. O desafio do professor é entender cada aluno, propor atividades e perceber a cada aula o avanço dos alunos, para isso, o professor precisa ter bem claro quais são os conhecimentos disponíveis para um grupo de alunos, os métodos que irá utilizar, para que haja uma construção e uma aquisição de novos conhecimentos.

Há alguns anos, o cálculo mental não era valorizado no currículo, atualmente é dada prioridade ao trabalho oral e prático, antecipadamente aprofundam os conhecimentos que os alunos já possuem para depois formalizar, sempre desenvolvendo atividades em equipe, através de círculos de debates e cooperação. É importante o professor diagnosticar o nível de domínio dos alunos para iniciar o seu trabalho a partir daí e propor atividades desafiadoras.

## 1.5 Considerações sobre o capítulo

As contribuições dessas e de outras pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem das operações no campo multiplicativo oferecem a nós professores, condições de desenvolver propostas de trabalho muito mais consistentes do que as que eram feitas anos atrás. Infelizmente, de modo geral, esses estudos não chegam aos professores, constituindo um grande paradoxo para a educação matemática: de um lado o grande avanço das investigações e de outro a pequena interferência que elas desempenham para melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos da escola básica.

# CAPÍTULO 2
# CONCEPÇÃO, DESENVOLVIMENTO E SISTEMATIZAÇÃO DO TRABALHO DE CAMPO

Neste capítulo apresentamos o planejamento da pesquisa, a caracterização dos alunos, o instrumento para coleta dados e descrição e objetivos de cada sessão, por fim o percurso metodológico para realização dessa pesquisa.

## 2.1 O planejamento da pesquisa de campo

Para a realização de nossa pesquisa que tem como objetivo principal a compreensão dos procedimentos dos alunos da 5ª série do Ensino Fundamental II sobre a construção do campo conceitual multiplicativo, percorremos a seguinte trajetória: após a revisão teórica, elaboramos o instrumento de coleta de dados para realização em quatro momentos distintos. Este instrumento apresenta quatro situações problema, quatro situações de cálculo mental e duas situações de cálculo escrito. Organizamos um pequeno questionário para a caracterização dos alunos e finalmente, fizemos entrevistas com eles.

## 2.2 – Caracterização dos alunos envolvidos na pesquisa

Os alunos que participaram da pesquisa pertencem a uma escola que foi incluída no projeto “Escola de Tempo Integral”, que teve início no ano de 2006 e que tem como finalidade oferecer aos alunos do Ensino Fundamental uma jornada escolar de 9 aulas diárias, de 50 minutos cada.

Conversamos com a professora da classe regular que indicou os alunos de 5ª série que, segundo ela tinham mais dificuldades no Campo Multiplicativo. Após conversa com os alunos, para explicar os objetivos das atividades, esclarecemos que nosso maior objetivo estava em compreender os procedimentos de solução, independente do acerto ou erro.

Providenciamos uma autorização (anexo II) para ser assinada pelo representante legal de cada aluno. Marcamos as datas para a coleta de dados e solicitamos que trouxessem lápis e borracha.

Participaram dessa coleta de dados 21 alunos, com idade entre 11 e 12 anos, com predominância do gênero masculino.

Optamos pela realização da pesquisa no horário das aulas de matemática, preservando assim o ambiente do aluno. Conforme combinado e de posse das autorizações, as atividades foram desenvolvidas de setembro a outubro de 2006.

O instrumento de coleta de dados foi fotocopiado (anexo I) e os alunos foram orientados a resolver as questões individualmente, sem consulta e, em caso de dúvidas, escreverem a pergunta no papel. Antes de iniciarem a resolução das atividades, fizemos a leitura das mesmas.

Iniciaram as resoluções num silêncio absoluto, algumas perguntas surgiram após, aproximadamente, dez minutos da aplicação. Dentre elas, merecem destaque: "*Tem certeza que não vai valer nota*?" "*E a questão que eu não souber responder, pode deixar em branco?*"

Mesmo orientados que não valeria nota, a perguntas ocorreram várias vezes no decorrer da aplicação, deixando clara a preocupação dos alunos em relação ao resultado.

Alguns fizeram contas na carteira. Então, solicitamos que transferissem todas as operações, esquemas de raciocínio que estavam nas carteiras para a folha, pois estavam colocando apenas as respostas finais.

O tempo disponível para a avaliação foi de uma aula e a maioria dos alunos entregou no tempo previsto, finalizando as atividades em aproximadamente 50 minutos.

## 2.3 Instrumento para coleta de dados

Foram previstos, para o desenvolvimento do trabalho, quatro momentos. Cada momento consistiu na proposição de quatro situações problema, de quatro atividades de cálculo mental ou estimativa e duas atividades de uso de técnica operatória.

As atividades foram elaboradas com base no aporte teórico dessa pesquisa. Para isso foram considerados aspectos à estrutura conceitual e aos valores numéricos. As atividades estão decompostas em quatro subclasses, representadas por: Multiplicação, Divisão por partição, Divisão por quotas e Proporcionalidade Simples. Segundo Vergnaud citado por Franchi (1995), essa classe é denominada “Classe de Situações Simples”.

Em relação ao campo multiplicativo Franchi (1995) afirma que nas fases iniciais de aprendizagem dessas operações aritméticas faz-se necessária a coordenação de diferentes processos que levam ao significado dos elementos característicos de uma situação multiplicativa (adição repetida, constituição de seqüências, tabuada, cálculo de algoritmos).

### 2.3.1 Momento 1

O primeiro momento foi composto por três situações problema de proporção simples, sendo duas envolvendo operação de multiplicação e uma envolvendo a operação de divisão, a quarta situação refere-se à divisão por quotas, com a idéia de configuração retangular.

As atividades de cálculo mental envolvem situações de multiplicação em que foram considerados valores numéricos que possibilitam o uso de estratégias particulares, por exemplo, o dobro, o quádruplo, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e multiplicação por potência de dez.

O cálculo escrito, com o uso de técnicas operatórias, apresenta uma situação de divisão e outra de multiplicação, em que o divisor e o multiplicador, respectivamente, têm um único algarismo.

<table>
<tr><td colspan="7">1.1 Numa festinha, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo, 48 crianças foram a essa festinha. Quantos refrigerantes havia?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de razão. Proporção Simples</td></tr>
<tr><td colspan="7">1.2 Num auditório há 450 cadeiras organizadas em fileiras com a mesma quantidade de cadeiras, ou seja, 15 cadeiras. Quantas são as fileiras?</td><td>Utilizar a divisão em situação problema que envolve a idéia de configuração retangular. Divisão por cotas</td></tr>
<tr><td colspan="7">1.3 Paulo comprou 3 cadernos e pagou R$14,00. Quanto pagaria se tivesse comprado 6 cadernos desse tipo?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de razão. Proporção Simples</td></tr>
<tr><td colspan="7">1.4 Tenho R$ 54,00 para dividir igualmente entre meus 5 filhos. Conseguirei dar a mesma quantia a cada um? Quanto?</td><td>Utilizar a divisão em situação problema que envolve a idéia de razão. Divisão por partição</td></tr>
<tr><td colspan="8">1.5 Sem fazer cálculo escrito circule, para cada operação, o resultado mais provável, dentre os cinco números apresentados:</td></tr>
<tr><td>A</td><td>345 X 2</td><td>770</td><td>790</td><td>700</td><td>680</td><td>690</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 2 (dobrar)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>236 X 4</td><td>472</td><td>872</td><td>844</td><td>944</td><td>1024</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 4 (quadruplicar ou dobrar duas vezes)</td></tr>
<tr><td>C</td><td>125 X 5</td><td>655</td><td>625</td><td>525</td><td>515</td><td>505</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 5 (podendo usar a distributividade, por exemplo)</td></tr>
<tr><td>D</td><td>247X 100</td><td>2470</td><td>24700</td><td>247000</td><td>247100</td><td>24710</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 100</td></tr>
<tr><td colspan="8">1.6 Utilizando uma técnica operatória, calcule o resultado de:</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) 315 : 5</td><td colspan="4">Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma divisão, em que o divisor tem um único algarismo.</td><td>b) 125 x 8</td><td>Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma multiplicação, em que o multiplicador tem um único algarismo.</td></tr>
</table>

**Quadro** 3 – Instrumento de Coleta de Dados e descritores – Momento 1

## 2.3.2. Momento 2

As situações problema que compõem o momento 2 apresentam duas situações de divisão, sendo uma por quotas e outra por partição; o terceiro problema tem como operação a multiplicação com idéia comparativa com um significado próximo da linguagem natural, em que “3 vezes mais”, significa, trivialmente “multiplicar por 3”. A quarta situação exige as operações de multiplicação e divisão para estimar o valor correspondente a três quartas partes.

Da mesma maneira que no momento anterior, a quinta situação envolve atividades com cálculo mental utilizando a multiplicação como operação. Há situações que possibilitam o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, do elemento neutro da multiplicação, além da utilização do zero como multiplicador.

A situação de cálculo escrito apresenta uma operação de divisão em que o divisor tem dois algarismos e outra de multiplicação com dois algarismos no multiplicador.

<table>
<tr><td colspan="7">2.1 Pedro comprou camisetas de R$ 6,00 e pagou R$ 24,00. Quantas camisetas ele comprou?</td><td>Utilizar a divisão em situação problema que envolve a idéia de razão. Divisão por cotas</td></tr>
<tr><td colspan="7">2.2 Vovó pagou R$ 46,50 por 5 jogos que ela comprou para seus netos. Os jogos tinham o mesmo preço. Quanto custou cada um?</td><td>Utilizar a divisão em situação problema que envolve a idéia de razão. Divisão por partição</td></tr>
<tr><td colspan="7">2.3 Marta tem 344 selos e João tem 3 vezes mais selos que ela. Quantos selos têm João?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de multiplicação comparativa</td></tr>
<tr><td colspan="7">2.4 O quilo da carne custa R$ 7,85. Três quartos de quilo de carne vai custar mais que R$ 4,00 ou menos que R$ 4,00. Justifique sua resposta.</td><td>Utilizar a multiplicação e a divisão para estimar o valor correspondente a três quartas partes.</td></tr>
<tr><td colspan="8">2.5 Sem fazer cálculo escrito circule, para cada operação, o resultado mais provável, dentre os cinco números apresentados:</td></tr>
<tr><td>A</td><td>208 X 12</td><td>1000</td><td>1080</td><td>1500</td><td>2080</td><td>2496</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 12 (podendo decompor 12 em 10 + 2 e usar propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>3456 X 1</td><td>0</td><td>1</td><td>3456</td><td>6543</td><td>Impossível</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 1 (propriedade do elemento neutro)</td></tr>
<tr><td>C</td><td>12 X 13</td><td>106</td><td>156</td><td>256</td><td>356</td><td>1000</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 13 (podendo usar a distributividade, por exemplo)</td></tr>
<tr><td>D</td><td>965 X 0</td><td>0</td><td>965</td><td>9650</td><td>96500</td><td>Impossível</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o multiplicador é 0</td></tr>
<tr><td colspan="8">2.6 Utilizando uma técnica operatória, calcule o resultado de:</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) 550 : 24</td><td colspan="4">Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma divisão, em que o divisor tem dois algarismos.</td><td>b) 987 X 35</td><td>Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma multiplicação, em que o multiplicador tem dois algarismos.</td></tr>
</table>

**Quadro** 4 – Instrumento de Coleta de Dados e descritores – Momento 2

### 2.3.3. Momento 3

Alguns conceitos requeridos nesse momento já foram contemplados nos anteriores, porém agora com valores mais expressivos. Novos conceitos são abordados para o desenvolvimento dessa sessão, entre eles a idéia de número como operador e múltiplo de um número.

As situações de cálculo mental, a partir desse momento, envolvem a operação de divisão, com significados diferentes. Na divisão por 5, a decomposição pode facilitar o cálculo do resultado. A divisão por dois pode ser associada à metade do número, enquanto que a divisão em que o divisor é maior que o dividendo pode ser considerada “duas quintas partes”. Também é explorada a divisão não exata.

<table>
<tr><td colspan="7">3.1 Jonas tem 222 figurinhas e seu primo André tem a terça parte dessa quantia. Quantas figurinhas tem André?</td><td>Utilizar a divisão em situação problema que envolve a idéia de multiplicação comparativa.</td></tr>
<tr><td colspan="7">3.2 Num salão há 15 fileiras com 14 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de configuração retangular</td></tr>
<tr><td colspan="7">3.3 Multipliquei um certo número por 18 e o resultado foi 2700. Que número é esse?</td><td>Utiliza a divisão em situação problema que envolve a idéia de número como operador</td></tr>
<tr><td colspan="7">3.4 Um número ímpar é múltiplo de 15 e está compreendido entre 40 e 50. Que número pode ser esse? Justifique sua resposta.</td><td>Utiliza a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de múltiplo de um número natural</td></tr>
<tr><td colspan="8">3.5 Sem fazer cálculo escrito circule, para cada operação, o resultado mais provável, dentre os cinco números apresentados:</td></tr>
<tr><td>A</td><td>85:5</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão em que o divisor é 5 (podendo decompor 85 em 80 + 5)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>5:2</td><td>5,2</td><td>2,5</td><td>2,25</td><td>1,5</td><td>1,25</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão em que o divisor é 2 (metade)</td></tr>
<tr><td>C</td><td>2 :5</td><td>2,5</td><td>1,5</td><td>1</td><td>0,5</td><td>0,4</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma multiplicação em que o dividendo é menor que o divisor.</td></tr>
<tr><td>D</td><td>45:6</td><td>7</td><td>7,5</td><td>7,6</td><td>7,8</td><td>8</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão não exata.</td></tr>
<tr><td colspan="8">3.6 Utilizando uma técnica operatória, calcule o resultado de:</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) 1000 : 250</td><td colspan="3">Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma divisão, em que o divisor tem três algarismos.</td><td colspan="2">b) 123 x 9</td><td>Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma multiplicação, em que o multiplicando tem três algarismos e multiplicador com um algarismo acima de 5.</td></tr>
</table>

**Quadro** 5 – Instrumento de Coleta de Dados e descritores – Momento 3

### 2.3.4. Momento 4

O conceito de produto de medidas no campo multiplicativo é requerido em duas situações: multiplicação e divisão. A idéia de operador, nesse momento, aparece na situação de divisão utilizando a multiplicação como operação inversa. A estimativa e divisão por quotas estão presentes em situação de multiplicação que também envolve o sistema monetário brasileiro.

A divisão por 5 e também, por 3 são situações de cálculo mental e duas situações de divisão com zero no dividendo e no divisor.

A técnica operatória de multiplicação é exigida em uma situação que tem o zero intercalado no multiplicando e divisão em que o divisor é maior que 10, com dois algarismos, além do zero no dividendo.

<table>
<tr><td colspan="7">4.1 Uma jovem tem 3 saias e 5 blusas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode se arrumar alternando essas saias com essas blusas?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de combinatória. Produto de Medidas.</td></tr>
<tr><td colspan="7">4.2 Na sorveteria da esquina você pode escolher 24 tipos de sorvete diferentes, pois há diferentes sabores e para cada sabor você pode escolher sorvete de palito ou de massa. Quantos são os sabores?</td><td>Utilizar a divisão em situação problema que envolve a idéia de combinatória. Produto de Medidas.</td></tr>
<tr><td colspan="7">4.3 Dividi um certo número por 35 e o quociente foi 17. Que número era esse?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de número como operador.</td></tr>
<tr><td colspan="7">4.4 Tenho R$ 10,00 e preciso prever o gasto de uma compra de supermercado para não ultrapassar essa quantia. Poderei comprar 3 caixas de um produto, sabendo que cada uma custa R$ 3,35?</td><td>Utilizar a multiplicação em situação problema que envolve a idéia de divisão por cotas e estimativa. (quantas vezes 3,35 cabem em 10)</td></tr>
<tr><td colspan="8">4.5 Sem fazer cálculo escrito circule, para cada operação, o resultado mais provável, dentre os cinco números apresentados:</td></tr>
<tr><td>A</td><td>315:3</td><td>15</td><td>105</td><td>155</td><td>130</td><td>945</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão em que o divisor é 3 (triplo)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1000 : 250</td><td>2</td><td>4</td><td>10</td><td>40</td><td>400</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão de 1000 por 250</td></tr>
<tr><td>C</td><td>325:5</td><td>50</td><td>60</td><td>65</td><td>70</td><td>75</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão em que o divisor é 5.</td></tr>
<tr><td>D</td><td>20000: 100</td><td>10</td><td>20</td><td>120</td><td>200</td><td>2000</td><td>Calcular mentalmente o resultado de uma divisão em que o divisor é 100.</td></tr>
<tr><td colspan="8">4.6 Utilizando uma técnica operatória, calcule o resultado de:</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) 104 x 9</td><td colspan="4">Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma multiplicação com zero intercalado no multiplicando.</td><td>b) 240 : 12</td><td>Calcular, por meio de uma técnica operatória, o resultado de uma divisão, em que o divisor tem dois algarismos.</td></tr>
</table>

**Quadro** 6 – Instrumento de Coleta de Dados e descritores – Momento 4

## 2.4 – Percurso metodológico para o tratamento dos dados coletados

Para um melhor entendimento de nossas análises, foi necessário construir um percurso metodológico, que permitisse fazer uma análise interpretativa dos procedimentos de solução realizados pelos alunos.

Após a correção dos instrumentos de coleta de dados, criamos um banco de dados, no qual apresentamos as respostas corretas, incorretas e em branco, por aluno e grupos de atividades, anexo I.

A partir desses dados brutos, passamos a elaborar uma análise individual a fim de verificar os procedimentos e esquemas presentes nas resoluções.

Esses momentos de análise individual e categorização exigiram muitas releituras dos procedimentos utilizados pelos alunos, para a compreensão das relações existentes entre eles.

O passo envolveu a análise interpretativa dos registros de procedimentos, anexo II, referentes às situações problema e ao cálculo escrito.

As categorias de procedimentos não foram elaboradas *a priori, mas* surgiram a partir dessa análise interpretativa individual dos procedimentos realizados, denominadas a seguir:

Categoria 1 – Reconhecimento da operação e utilização das técnicas operatórias adequadas ao tipo de problema.

Categoria 2 – Não reconhecimento da operação e utilização de algoritmo inadequado e resultado não correto.

Categoria 3 – Esboço da resposta sem registro de cálculos.

Categoria 4 – Utilização de outros procedimentos diferentes dos anteriores.

Categoria 5 – Não resolução do problema (Branco), não esboçou cálculos e nem respostas.

Essas categorias constituíram um novo quadro de análise, explicitado a seguir:

**SITUAÇÃO-PROBLEMAS E CÁLCULO ESCRITO**

| Código | Categorias de Solução |
|---|---|
| ACRC – Algoritmo Convencional e Resposta correta | Categoria 1 – Uso do algoritmo convencional |
| ACRI – Algoritmo Convencional e Resposta Incorreta. | Categoria 1 – Uso do algoritmo convencional. |
| AIRI – Algoritmo Convencional Inadequado e Resposta Incorreta | Categoria 2 – Uso de algoritmo convencional inadequado. |
| SRC – Registro, apenas, da resposta correta. | Categoria 3 – Esboço da resposta, sem registro de cálculos. |
| SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta. | Categoria 3 – Esboço da resposta, sem registro de cálculos. |
| OOPC - Outros esquemas e procedimentos corretos. | Categoria 4 – Utilização de outros esquemas e procedimentos. |
| OOPI - Outros esquemas e procedimentos incorretos. | Categoria 4 – Utilização de outros esquemas e procedimentos. |

| | |
|---|---|
| BR – Brancos | Categoria 5 – Não resolução do problema |

**Quadro 7 –** Categorias Emergentes de Procedimentos de solução das situações-problema e cálculo escrito

A categorização dos dados coletados para cálculo mental deu-se por acertos e erros dos resultados, por não existirem soluções em branco.

| **CÁLCULO MENTAL** |
|---|
| 1 – Resultado Correto |
| 2 – Resultado Incorreto |

**Quadro 8** – Categorias emergentes de resultados para cálculo mental

Para a organização dos dados, buscamos o apoio de um método estatístico multidimensional utilizado em estudos qualitativos de regras de associação. O *software* CHIC viabiliza esse método, pela análise hierárquica de similaridade, e permite visualizar semelhanças e classes de variáveis agrupadas em níveis de uma árvore hierárquica, fornecendo um índice de qualidade de associação e representação de uma estrutura das variáveis a partir de cálculos matemáticos.

Criamos uma planilha no Excel e nela inserimos os dados da análise interpretativa dos procedimentos, quadro 7, utilizados pelos alunos nas resoluções de situação problema, conforme anexo II, como variáveis binárias (0,1), em que **0** indica à ausência do fato e **1** à presença. Os alunos foram identificados por (A1, A2, A21), e as variáveis pelos códigos de procedimentos.

Esse tipo de análise permite-nos estudar e interpretar, em termos de tipicalidade e de semelhança (ou não) decrescente, classes de variáveis constituídas significativamente a certos níveis do gráfico, anexo III, denominado Árvore de similaridade.

O uso do *software* CHIC nos auxiliou no intuito de analisar o comportamento dos alunos na resolução de situações problemas, verificando quais são as semelhanças e diferenças de procedimentos, independente do sucesso ou fracasso de resolução. Para análise dos cálculos mentais e escritos contabilizamos acertos e erros e buscamos identificar algumas características dos erros.

# CAPÍTULO 3
# ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

Neste capítulo apresentamos a análise dos dados de procedimentos de resolução nas situações-problema, no cálculo escrito e desempenho global e individual dos alunos. Por fim a análise de similaridade, apenas das situações-problema por observarmos procedimentos mais diversificados nesse tipo de atividade.

## 3.1 – Dados sobre os procedimentos de resolução

| DISTRIBUIÇÃO DE QUESTÕES POR CATEGORIA ( N/%) – SITUAÇÃO PROBLEMA | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno** | **Categoria 1** | | **Categoria 2** | | **Categoria 3** | | **Categoria 4** | | **Categoria 5** | |
| A1 | 7 | 44% | 0 | 0% | 9 | 56% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A2 | 1 | 6% | 8 | 50% | 0 | 0% | 1 | 6% | 6 | 38% |
| A3 | 10 | 63% | 0 | 0% | 3 | 19% | 1 | 6% | 2 | 13% |
| A4 | 3 | 19% | 1 | 6% | 6 | 38% | 4 | 25% | 2 | 13% |
| A5 | 5 | 31% | 4 | 25% | 1 | 6% | 1 | 6% | 5 | 31% |
| A6 | 1 | 6% | 3 | 19% | 0 | 0% | 1 | 6% | 11 | 69% |
| A7 | 7 | 44% | 0 | 0% | 7 | 44% | 1 | 6% | 1 | 6% |
| A8 | 8 | 50% | 0 | 0% | 6 | 38% | 1 | 6% | 1 | 6% |
| A9 | 1 | 6% | 5 | 31% | 2 | 13% | 0 | 0% | 8 | 50% |
| A10 | 12 | 75% | 0 | 0% | 0 | 0% | 1 | 6% | 3 | 19% |
| A11 | 16 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A12 | 2 | 13% | 4 | 25% | 6 | 38% | 2 | 13% | 2 | 13% |
| A13 | 12 | 75% | 0 | 0% | 4 | 25% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A14 | 2 | 13% | 1 | 6% | 6 | 38% | 7 | 44% | 0 | 0% |
| A15 | 6 | 38% | 3 | 19% | 4 | 25% | 3 | 19% | 0 | 0% |
| A16 | 8 | 50% | 2 | 13% | 3 | 19% | 0 | 0% | 3 | 19% |
| A17 | 7 | 44% | 0 | 0% | 3 | 19% | 1 | 6% | 5 | 31% |
| A18 | 8 | 50% | 0 | 0% | 4 | 25% | 0 | 0% | 4 | 25% |
| A19 | 7 | 44% | 5 | 31% | 1 | 6% | 0 | 0% | 3 | 19% |
| A20 | 5 | 31% | 1 | 6% | 9 | 56% | 0 | 0% | 1 | 6% |
| A21 | 6 | 38% | 3 | 19% | 3 | 19% | 2 | 13% | 2 | 13% |

**Quadro 9** - Tabela de distribuição de questões por categorias individual – situações-problema

Consideramos alunos típicos da categoria aos que utilizaram o procedimento referente à mesma na maioria de suas resoluções, independente do desempenho.

O algoritmo convencional foi o procedimento mais utilizado por 13 alunos, com 7 alunos acima de 50%. Outro fato que nos chamou atenção foi que apenas um aluno (A11) utilizou esse procedimento em suas resoluções e outros dois alunos (A1 e A13) utilizaram apenas dois procedimentos, tendo como segunda categoria o registro apenas da resposta. Pelo menos 9 alunos deixaram de 3 a 11 questões em branco, outro fato preocupante. Os alunos A6 e A9 deixaram um número significativo de questões em branco.A seguir, apresentamos a distribuição de questões por categoria relativa ao cálculo escrito.

| DISTRIBUIÇÃO DE QUESTÕES POR CATEGORIA ( N/%) – CÁLCULO ESCRITO | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aluno | Categoria 1 | | Categoria 2 | | Categoria 3 | | Categoria 4 | | Categoria 5 | |
| A1 | 2 | 25% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 6 | 75% |
| A2 | 1 | 13% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 7 | 88% |
| A3 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A4 | 1 | 13% | 0 | 0% | 5 | 63% | 1 | 13% | 1 | 13% |
| A5 | 3 | 38% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 5 | 63% |
| A6 | 3 | 38% | 1 | 13% | 0 | 0% | 0 | 0% | 4 | 50% |
| A7 | 4 | 50% | 0 | 0% | 3 | 38% | 0 | 0% | 1 | 13% |
| A8 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A9 | 1 | 13% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 7 | 88% |
| A10 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A11 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A12 | 2 | 25% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 6 | 75% |
| A13 | 4 | 50% | 0 | 0% | 2 | 25% | 0 | 0% | 2 | 25% |
| A14 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A15 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A16 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |
| A17 | 6 | 75% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 2 | 25% |
| A18 | 6 | 75% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 2 | 25% |
| A19 | 6 | 75% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 2 | 25% |
| A20 | 4 | 50% | 0 | 0% | 1 | 13% | 0 | 0% | 3 | 38% |
| A21 | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% | 0 | 0% |

**Quadro 10 -** Tabela de distribuição de questões por categorias individual Cálculo Escrito

Analisamos o quadro 10 de maneira análoga ao 9 e observamos que 8 alunos identificam o algoritmo convencional como forma de procedimento do cálculo escrito. Das 8 situações de cálculo escrito, notamos 7 alunos que deixaram de 3 a 7 questões em branco, valor bastante considerável. Com interesse de identificarmos se os alunos destacados em algumas categorias são os mesmos em situações-problema e cálculo escrito, elaboramos a tabela a seguir, com valores relativos.

**DISTRIBUIÇÃO DE QUESTÕES POR CATEGORIA – SITUAÇÃO PROBLEMA E CÁLCULO ESCRITO**

| | Categoria 1 Situação Problema | Categoria 1 Cálculo Escrito | Categoria 2 Situação Problema | Categoria 2 Cálculo Escrito | Categoria 3 Situação Problema | Categoria 3 Cálculo Escrito | Categoria 4 Situação Problema | Categoria 4 Cálculo Escrito | Categoria 5 Situação Problema | Categori a 5 Cálculo Escrito |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 44% | 25% | 0% | 0% | 56% | 0% | 0% | 0% | 0% | 75% |
| A2 | 6% | 13% | 50% | 0% | 0% | 0% | 6% | 0% | 38% | 88% |
| A3 | 63% | 100% | 0% | 0% | 19% | 0% | 6% | 0% | 13% | 0% |
| A4 | 19% | 13% | 6% | 0% | 38% | 63% | 25% | 13% | 13% | 13% |
| A5 | 31% | 38% | 25% | 0% | 6% | 0% | 6% | 0% | 31% | 63% |
| A6 | 6% | 38% | 19% | 13% | 0% | 0% | 6% | 0% | 69% | 50% |
| A7 | 44% | 50% | 0% | 0% | 44% | 38% | 6% | 0% | 6% | 13% |
| A8 | 50% | 100% | 0% | 0% | 38% | 0% | 6% | 0% | 6% | 0% |
| A9 | 6% | 13% | 31% | 0% | 13% | 0% | 0% | 0% | 50% | 88% |
| A10 | 75% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 6% | 0% | 19% | 0% |
| A11 | 100% | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| A12 | 13% | 25% | 25% | 0% | 38% | 0% | 13% | 0% | 13% | 75% |
| A13 | 75% | 50% | 0% | 0% | 25% | 25% | 0% | 0% | 0% | 25% |
| A14 | 13% | 100% | 6% | 0% | 38% | 0% | 44% | 0% | 0% | 0% |
| A15 | 38% | 100% | 19% | 0% | 25% | 0% | 19% | 0% | 0% | 0% |
| A16 | 50% | 100% | 13% | 0% | 19% | 0% | 0% | 0% | 19% | 0% |
| A17 | 44% | 75% | 0% | 0% | 19% | 0% | 6% | 0% | 31% | 25% |
| A18 | 50% | 75% | 0% | 0% | 25% | 0% | 0% | 0% | 25% | 25% |
| A19 | 44% | 75% | 31% | 0% | 6% | 0% | 0% | 0% | 19% | 25% |
| A20 | 31% | 50% | 6% | 0% | 56% | 13% | 0% | 0% | 6% | 38% |
| A21 | 38% | 100% | 19% | 0% | 19% | 0% | 13% | 0% | 13% | 0% |

**Quadro 11** - Tabela de distribuição de questões por categorias individual Situação Problema e Cálculo Escrito

Observamos no quadro 11, que apenas o aluno A4 contribuiu para a categoria 4 e o aluno A6 para a categoria 8. Os demais cooperaram com as outras três categorias de procedimentos.

O aluno A1 não aparece como característico da categoria 5 (brancos) na situação problema, porém apresenta um alto índice de brancos no cálculo escrito o que pode demonstrar maior interesse pela língua natural.

Os alunos A10 e A11 são característicos da categoria 1, tanto em situações problema como em cálculo escrito. O aluno A13 apresenta uma homogeneidade entre as categorias 1 e 3, também na situação-problema e cálculo escrito.

## 3.2 - Dados sobre o desempenho geral dos alunos

Para análise global dos resultados, inicialmente organizamos os dados numa tabela, que mostra o desempenho geral dos alunos em termos de acertos e erros.

**DISTRIBUIÇÃO GLOBAL DO DESEMPENHO DOS ALUNOS**

| | SITUAÇÃO PROBLEMA | | | | | | CÁLCULO ESCRITO | | | | | | CÁLCULO MENTAL | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | CORRETOS | | INCORRETOS | | BRANCOS | | CORRETOS | | INCORRETOS | | BRANCOS | | CORRETOS | | INCORRETOS | |
| A1 | 8 | 50% | 8 | 50% | 0 | 0% | 2 | 25% | 0 | 0% | 6 | 75% | 6 | 38% | 10 | 62% |
| A2 | 2 | 13% | 9 | 56% | 6 | 38% | 0 | 0% | 1 | 13% | 7 | 88% | 7 | 44% | 9 | 56% |
| A3 | 12 | 74% | 2 | 13% | 2 | 13% | 6 | 75% | 2 | 25% | 0 | 0% | 13 | 81% | 3 | 19% |
| A4 | 4 | 25% | 11 | 69% | 2 | 13% | 2 | 25% | 6 | 75% | 0 | 0% | 2 | 13% | 14 | 87% |
| A5 | 3 | 19% | 8 | 50% | 5 | 31% | 2 | 25% | 1 | 13% | 5 | 63% | 8 | 50% | 8 | 50% |
| A6 | 2 | 13% | 3 | 19% | 11 | 69% | 1 | 13% | 2 | 25% | 5 | 63% | 6 | 38% | 10 | 63% |
| A7 | 11 | 69% | 4 | 25% | 1 | 6% | 7 | 88% | 1 | 13% | 0 | 0% | 8 | 50% | 8 | 50% |
| A8 | 12 | 75% | 3 | 19% | 1 | 6% | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 15 | 94% | 1 | 6% |
| A9 | 2 | 13% | 6 | 38% | 8 | 50% | 0 | 0% | 1 | 13% | 7 | 88% | 6 | 38% | 10 | 63% |
| A10 | 10 | 63% | 4 | 25% | 3 | 19% | 7 | 88% | 1 | 13% | 0 | 0% | 11 | 69% | 5 | 31% |
| A11 | 14 | 88% | 2 | 13% | 0 | 0% | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 16 | 100% | 0 | 0% |
| A12 | 6 | 38% | 9 | 56% | 2 | 13% | 1 | 13% | 1 | 13% | 6 | 75% | 8 | 50% | 8 | 50% |
| A13 | 11 | 69% | 5 | 31% | 0 | 0% | 4 | 50% | 3 | 38% | 1 | 13% | 15 | 94% | 1 | 6% |
| A14 | 8 | 50% | 9 | 56% | 0 | 0% | 4 | 50% | 2 | 25% | 2 | 25% | 9 | 56% | 7 | 44% |
| A15 | 9 | 56% | 7 | 44% | 0 | 0% | 8 | 100% | 0 | 0% | 0 | 0% | 5 | 31% | 11 | 69% |
| A16 | 6 | 38% | 6 | 38% | 3 | 19% | 4 | 50% | 4 | 50% | 0 | 0% | 8 | 50% | 8 | 50% |
| A17 | 6 | 38% | 3 | 19% | 5 | 31% | 3 | 38% | 3 | 38% | 2 | 25% | 11 | 69% | 5 | 31% |
| A18 | 7 | 44% | 5 | 31% | 4 | 25% | 5 | 63% | 0 | 0% | 2 | 25% | 9 | 56% | 7 | 44% |
| A19 | 4 | 25% | 9 | 56% | 3 | 19% | 4 | 50% | 2 | 25% | 2 | 25% | 8 | 50% | 8 | 50% |
| A20 | 5 | 31% | 9 | 56% | 1 | 6% | 1 | 13% | 4 | 50% | 3 | 38% | 5 | 31% | 11 | 69% |
| A21 | 4 | 25% | 10 | 63% | 2 | 13% | 4 | 50% | 4 | 50% | 0 | 0% | 11 | 69% | 5 | 31% |
| | **146** | **43%** | **131** | **39%** | **59** | **18%** | **81** | **48%** | **38** | **23%** | **48** | **29%** | **187** | **56%** | **149** | **44%** |

**Quadro 12** –Tabela de desempenho Global dos alunos

Esses números revelavam que para cada uma dessas categorias – situações-problema, cálculo escrito e cálculo mental – os percentuais de acertos estavam na faixa de 50%.

Analisando o desempenho individual dos alunos, fomos tendo uma primeira visão de que no grupo de 21 alunos, 11 deles (A1, A2, A4, A5, A6, A9, A12, A14, A17, A19 e A20) obtiveram mais de 50% de respostas incorretas e/ou brancos nas três situações. Alguns alunos tiveram um desempenho bastante preocupante nas situações-problema e cálculo, pois acertaram apenas 1 ou 2 questões na primeira situação (A2, A6 e A9) e 0, 1 ou 2 no cálculo escrito (A1, A2, A4, A5, A6, A9, A12 e A20). Com relação ao desempenho em cálculo mental, como as questões formuladas eram de múltipla escolha, identificamos os acertos e erros.

Os alunos A16, A17 e A21, apesar do baixo desempenho nas situações-problema e cálculo escrito apresentaram um bom desempenho no cálculo mental, enquanto o aluno A7 demonstrou melhor habilidade nas duas primeiras situações.

Por fim, verificamos que apenas os alunos A3, A11 e A13 tiveram um ótimo desempenho nas três situações.

De modo geral, pudemos observar que não há desempenhos diferenciados na resolução das situações-problema, do cálculo escrito e mental, o que reforça a hipótese de que a aprendizagem das operações, em particular as do campo multiplicativo, se dá num campo em que se articulam conceitos e procedimentos que se “ajudam” mutuamente.

## 3.3 Dados sobre o desempenho dos alunos por questão

| DISTRIBUIÇÃO DO DESEMPENHO DOS ALUNOS POR QUESTÃO | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SITUAÇÕES PROBLEMA | | | | | | CÁLCULO MENTAL | | | | | CÁLCULO ESCRITO | | | | | | |
| | CORRETO | | INCORRETO | | BRANCO | | | CORRETO | | INCORRETO | | | CORRETO | | INCORRETO | | BRANCO | |
| **1.1** | 17 | 81% | 4 | 19% | 0 | 0% | **1.5A** | 15 | 71% | 6 | 29% | **1.6A** | 14 | 67% | 4 | 19% | 3 | 14% |
| **1.2** | 7 | 33% | 12 | 57% | 2 | 10% | **1.5B** | 12 | 57% | 9 | 43% | | | | | | | |
| **1.3** | 10 | 48% | 11 | 52% | 0 | 0% | **1.5C** | 14 | 67% | 7 | 33% | **1.6B** | 15 | 71% | 1 | 5% | 5 | 24% |
| **1.4** | 5 | 24% | 14 | 67% | 2 | 10% | **1.5D** | 10 | 48% | 11 | 52% | | | | | | | |
| **2.1** | 15 | 71% | 3 | 14% | 3 | 14% | **2.5A** | 15 | 71% | 6 | 29% | **2.6A** | 3 | 14% | 10 | 48% | 8 | 38% |
| **2.2** | 11 | 52% | 4 | 19% | 6 | 29% | **2.5B** | 20 | 95% | 1 | 5% | | | | | | | |
| **2.3** | 11 | 52% | 5 | 24% | 5 | 24% | **2.5C** | 15 | 71% | 6 | 29% | **2.6B** | 9 | 43% | 5 | 24% | 7 | 33% |
| **2.4** | 4 | 19% | 10 | 48% | 7 | 33% | **2.5D** | 11 | 52% | 10 | 48% | | | | | | | |
| **3.1** | 7 | 33% | 10 | 48% | 4 | 19% | **3.5A** | 14 | 67% | 7 | 33% | **3.6A** | 8 | 38% | 3 | 14% | 10 | 48% |
| **3.2** | 14 | 67% | 7 | 33% | 0 | 0% | **3.5B** | 10 | 48% | 11 | 52% | | | | | | | |
| **3.3** | 2 | 10% | 12 | 57% | 7 | 33% | **3.5C** | 5 | 24% | 16 | 76% | **3.6B** | 12 | 57% | 4 | 19% | 5 | 24% |
| **3.4** | 7 | 33% | 6 | 29% | 8 | 38% | **3.5D** | 5 | 24% | 16 | 76% | | | | | | | |
| **4.1** | 13 | 62% | 7 | 33% | 1 | 5% | **4.5A** | 8 | 38% | 13 | 62% | **4.6A** | 8 | 38% | 6 | 29% | 7 | 33% |
| **4.2** | 10 | 48% | 9 | 42% | 2 | 10% | **4.5B** | 9 | 43% | 12 | 57% | | | | | | | |
| **4.3** | 3 | 14% | 11 | 52% | 7 | 33% | **4.5C** | 9 | 43% | 12 | 57% | **4.6B** | 12 | 57% | 5 | 24% | 4 | 19% |
| **4.4** | 10 | 48% | 6 | 28% | 5 | 24% | **4.5D** | 15 | 71% | 6 | 29% | | | | | | | |
| | **146** | **43%** | **131** | **39%** | **59** | 18% | | **187** | **56%** | **149** | **44%** | | **81** | **48%** | **38** | **23%** | **49** | **29%** |

**Quadro 13 – Tabela de d**esempenho dos alunos por questão

Analisando o quadro 13, observamos que, no caso das situações-problema, as duas questões com melhor desempenho foram a 1.1 e 3.2. A questão 1.1 envolvia proporção simples e a 3.2 envolvia configuração retangular.

As questões 3.3 e 4.3 foram as que apresentaram o pior desempenho. As duas questões envolvem a idéia de operador.

As questões relativas ao cálculo escrito, apresentadas no quadro xx, também têm desempenho menor nas operações de divisão (1.6 A, 2.6 A, 3.6 A e 4.6B).

Na multiplicação, o melhor desempenho ocorreu nas questões 1.6B (125 x 8) e 4.6A (104 x 9). O melhor desempenho na divisão foi 1.6 A (315: 5), que também envolve referência aos múltiplos de 5.

O pior desempenho relativamente à multiplicação foi o da questão 2.6B (987 X35), em que o multiplicador tinha dois dígitos e o pior desempenho na divisão foi na questão 2.6A (550:24), em que o divisor também era composto por dois dígitos.

Finalmente com relação ao cálculo mental, os alunos tiveram melhor desempenho nas questões que envolvem a multiplicação (questões 1.5 A a 2.5D) do que na divisão(3.5 A a 4.5D).

Entre as questões de multiplicação, a de melhor desempenho foi a 2.5 B, que envolvia a multiplicação por 1 (elemento neutro), No pólo oposto, o pior desempenho foi na questão 2.5 D (965 x 0), em que apenas 11 alunos resolveram corretamente ( 8 alunos responderam 965).

Nas questões de divisão o melhor desempenho ocorreu na questão 4.5 D (20000:100) que teve 15 acertos e que, geralmente, é bastante enfatizada no trabalho dos professores. Outra questão de bom desempenho foi a 3.5A (85:5), com 14 acertos, ratificando algo muito comum que é a identificação dos múltiplos de 5 que já se manifesta no processo de memorização da "tabuada do 5". O pior desempenho na divisão foi nas questões 3.5C (2:5) e 3.5D (45:6).

Uma observação interessante pôde ser observada na análise dos quadros 14 e 15, que consolidam as respostas dos alunos, por opção (5 alternativas), nos cálculos de multiplicação e divisão:

**DISTRIBUIÇÃO DAS OPÇÕES DE ALTERNATIVAS – CÁLCULO MENTAL**

**MULTIPLICAÇÃO**

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>1ª. opção</th><th>2ª. opção</th><th>3ª. opção</th><th>4ª. opção</th><th>5ª. opção</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.5A</td><td rowspan="2">345 X 2</td><td>770</td><td>790</td><td>700</td><td>680</td><td>690</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>15</td></tr>
</table>

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.5B** | 236 X 4 | 472 | 872 | 844 | **944** | 1024 |
| | | 0 | 1 | 4 | **12** | 3 |
| **1.5C** | 125 X 5 | 655 | **625** | 525 | 515 | 505 |
| | | 2 | **14** | 4 | 1 | 0 |
| **1.5D** | 247 X 100 | 2 470 | **24 700** | 247 000 | 247 100 | 24 710 |
| | | 6 | **10** | 1 | 3 | 1 |
| **2.5A** | 208 X 12 | 1 000 | 1 080 | 1 500 | 2 080 | **2 496** |
| | | 0 | 2 | 0 | 4 | **15** |
| **2.5B** | 3456 X 1 | 0 | 1 | **3 456** | 6 543 | Impossível |
| | | 0 | 1 | **20** | 0 | 0 |
| **2.5C** | 12 X 13 | 106 | **156** | 256 | 356 | 1 000 |
| | | 3 | **15** | 1 | 0 | 2 |
| **2.5D** | 965 X 0 | **0** | 965 | 256 | 356 | 1 000 |
| | | **11** | 8 | 0 | 1 | 1 |

**Quadro 14** – Opções de Alternativas – Cálculo Mental – Multiplicação

| **Legenda** | | Alternativa correta | | Opções Incorretas com grande número de escolhas |
|---|---|---|---|---|

Como podemos observar nas operações que aparecem multiplicação por 1, 2, 4 e 5, a quantidade de acertos é considerável. Kamii (1986) citada por Parra (1996) afirma que a combinação entre os dobros é a primeira a ser memorizada, principalmente quando se refere às somas: 1 + 1, 2 +2, 5 + 5. A multiplicação por 4 pode ser entendida como dobrar duas vezes.

Um fato observado na questão 1.5D foi que 3 alunos responderam a quarta alternativa, o que indica falta de conhecimento do Sistema de Numeração Decimal. Ainda nesta questão, verificamos um grande número de alunos que assinalaram a opção 1 e apenas 10 a correta. Esse tipo de ocorrência não é comum em multiplicação por 10, por 100, ou seja, por múltiplos de 10, pois é comum o professor mostrar a regularidade do zero em operações envolvendo esses valores.

**DISTRIBUIÇÃO DAS OPÇÕES DE ALTERNATIVAS – CÁLCULO MENTAL**

**DIVISÃO**

| | | **1ª. opção** | **2ª. opção** | **3ª. opção** | **4ª. opção** | **5ª. opção** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **3.5A** | 85 : 5 | 15 | 16 | **17** | 18 | 19 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 5 | 2 | **14** | 0 | 0 |
| **3.5B** | 5 : 2 | 5,2 | **2,5** | 2,25 | 1,5 | 1,25 |
| | | 0 | **10** | 5 | 6 | 0 |
| **3.5C** | 2: 5 | 2,5 | 1,5 | 1,0 | 0,5 | **0,4** |
| | | 4 | 6 | 3 | 3 | **5** |
| **3.5D** | 45 : 6 | 7 | 7,3 | **7,5** | 7,8 | 8 |
| | | 9 | 5 | **1** | 3 | 3 |
| **4.5A** | 315: 3 | 15 | **105** | 155 | 130 | 945 |
| | | 3 | **8** | 6 | 3 | 1 |
| **4.5B** | 1000: 250 | 2 | **4** | 10 | 40 | 400 |
| | | 0 | **9** | 3 | 5 | 4 |
| **4.5C** | 325 : 5 | 50 | 60 | **65** | 70 | 75 |
| | | 4 | 2 | **9** | 3 | 3 |
| **4.5D** | 20 000 : 100 | 10 | 20 | 120 | **200** | 2 000 |
| | | 0 | 0 | 0 | **15** | 6 |

**Quadro 15** – Opções de Alternativas – Cálculo Mental – Divisão

| **Legenda** | | Alternativa correta | | Opções Incorretas com grande número de escolhas |
|---|---|---|---|---|

No cálculo mental com operações de divisão observamos a quantidade de erros maior, em relação à multiplicação. Embora a divisão por 2, 5 e 100 apresente um bom desempenho, verificamos que há muitas escolhas de outra alternativa, por exemplo, na questão 3.5A a opção 1 foi escolhida por cinco alunos e uma das prováveis justificativas encontra-se na regularidade da tabuada do 5, quando o aluno "aprende" que qualquer número multiplicado por 5 termina em 0 e 5. A falta de compreensão dessa regularidade faz com que o aluno a traga para as operações de divisão.

A questão 3.5D trata de divisão de dois números naturais em que o quociente é um número racional, considerando-se a divisão exata. Apenas um aluno considerou essa forma de dividir, 9 alunos optaram pela alternativa 1, a qual apresenta o quociente inteiro dessa divisão. O mesmo ocorre com 3.5C, divisão de dois números naturais, porém com o dividendo menor que o divisor. Situações como essas não são familiares aos alunos que conhecem apenas o conjunto dos números naturais, fato confirmado na variedade de opções. Um erro comum é a divisão do “número maior pelo número menor”, 4 alunos optaram por essa alternativa.

Um dos problemas causados pelos zeros podemos observar na questão 4.5 A, quando o aluno pode considerar que o zero intercalado no quociente não tem valor, e assinalam o 15 como resultado correto para 315:3. Outra alternativa apresenta dificuldade semelhante, a 3ª opção, 6 alunos optaram por ela, apenas 8 alunos elegeram a opção correta.

Nas questões 4.5B e 4.5D, encontramos a regra sistematizada de “riscar” os zeros de 1000 e 250, e de 20 000 e 100. Na primeira, dos 21 alunos, 5 optaram pela 4ª opção (40), o que indica riscar o zero apenas de 250, 4 alunos optaram por 400 como alternativa correta, 3 alunos apontaram a 3ª opção como resultado e apenas 9 alunos encontraram a alternativa correta.

## 3.4 – Análise de similaridade das Situações Problema

Neste item, passamos a apresentar alguns resultados, nas situações-problema, a que chegamos pelo uso da árvore de similaridade ( anexo III) fornecida pelo *software* CHIC. As três grandes classes formadas, identificadas pelas letras A, B e C são as seguintes:

A – Utilização com sucesso das técnicas Operatórias

B – Utilização sem sucesso das técnicas operatórias

C – Procedimentos Inadequados ao campo multiplicativo

A primeira classe (**A**) - Utilização com sucesso das técnicas operatórias - apontou a análise do comportamento dos alunos que obtiveram sucesso ao utilizarem as técnicas operatórias convencionais, isto é, ao analisarem e interpretarem a situação, identificaram a operação e fizeram uso do algoritmo convencional adequado àquela situação.

A segunda classe (**B**) - Utilização sem sucesso das técnicas operatórias – mostrou o comportamento dos alunos, que ao mobilizarem seus conhecimentos identificando a operação, não chegaram ao final por utilizarem as técnicas operatórias convencionais, sem sucesso.

Por fim, a classe (**C**) agrupou as variáveis em relação ao comportamento dos alunos típicos da utilização de procedimentos totalmente inadequados.

Para verificarmos quem são os alunos típicos de cada variável, ou agrupamento de variáveis, recorremos ao anexo IV, Tabela de tipicalidades e contribuições dos indivíduos, geradas pelo *software* CHIC.

## A – Utilização com sucesso das técnicas Operatórias

Essa classe constitui-se pelas categorias emergentes - Reconhecimento da operação e utilização das técnicas operatórias adequadas ao tipo de problema (Categoria 1) e Esboço da resposta sem registro de cálculos (Categoria 3). Para facilitar nossa análise mostramos, a seguir, codificação das 10 variáveis presentes nessa classe:

1.1-ACRC – Resolução do problema 1.1 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;

3.2-ACRC – Resolução do problema 3.2 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;

1.3-ACRI – Resolução do problema 1.3 pelo Algoritmo Convencional com resposta incorreta

3.1 –SRI – Resolução do problema 3.1 com esboço da resposta, sem registro de cálculos e resposta incorreta.

1.1–SRC – Resolução do problema 1.1 com esboço da resposta , sem registro de cálculos e resposta correta.

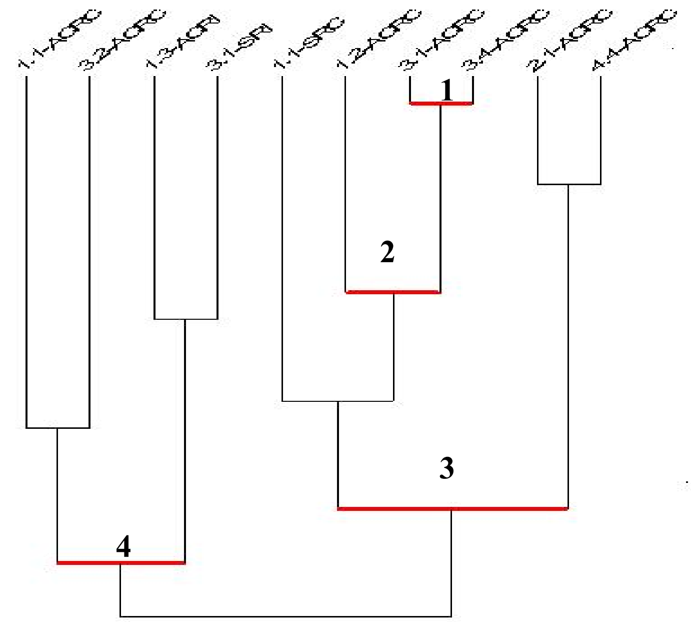
1.2-ACRC – Resolução do problema 1.2 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;

3.1-ACRC – Resolução do problema 3.1 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;

3.4-ACRC – Resolução do problema 3.4 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;

2.1-ACRC – Resolução do problema 2.1 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;

4.4-ACRC – Resolução do problema 4.4 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta;




**Quadro 16** – Árvore de Similaridade – Utilização das técnicas operatórias com sucesso

A árvore de similaridade (quadro 8) nos mostra que:

- existe uma grande probabilidade de que os alunos que resolveram as questões 3.1 e 3.4 utilizaram os mesmos procedimentos (nível 1).

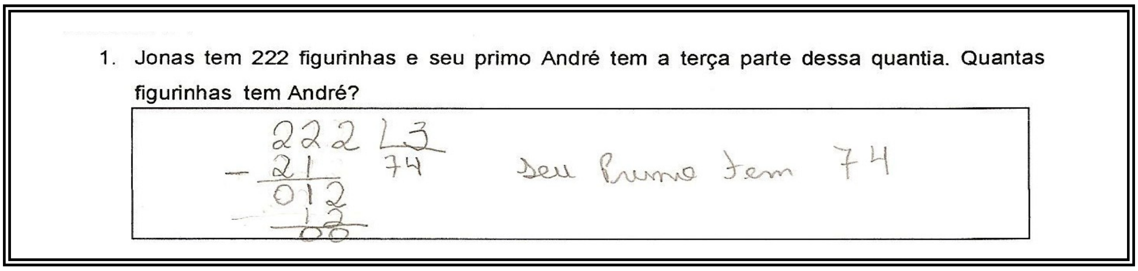
- existe uma probabilidade menor, mais ainda considerável, de que os mesmos alunos do grupo anterior resolvam a questão 1.2 utilizando os mesmos procedimentos (nível 2).

- existem ainda probabilidades, embora menores, de que alunos resolvam outras questões, utilizando os mesmos procedimentos (níveis 3 e 4).

O nível formado pelas variáveis 3.1-ACRC (Resolução do problema 3.1 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta) e 3.4-ACRC (Resolução do problema 3.4 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta), apresenta o nó de similaridade mais forte e têm os alunos A1, A11 e A13 como sujeitos típicos dessa relação de semelhança (informação obtida por meio da Tabela de Tipicalidade e contribuição – Anexo IV).

Com base nesses agrupamentos, iniciamos nossa análise pelos chamados nós significativos[1] (em vermelho), procurando estabelecer a relação entre estes e os demais níveis de classes de variáveis.

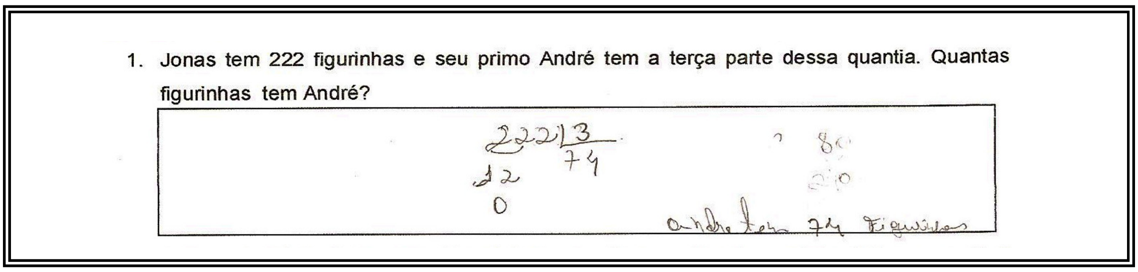
Os protocolos desses alunos evidenciaram que realmente pertencem à mesma categoria, embora tenham feito uso de procedimentos diferentes. A1 e A11 utilizaram o Algoritmo Convencional “armado na vertical”, porém o primeiro faz uso do método “longo” e o segundo do método “curto”, enquanto o aluno A13 mostra o resultado (74) e usa a multiplicação para mostrar que seu cálculo está correto.


1. Jonas tem 222 figurinhas e seu primo André tem a terça parte dessa quantia. Quantas figurinhas tem André?

222 |3
-21 74
012
-12
00

seu Primo tem 74

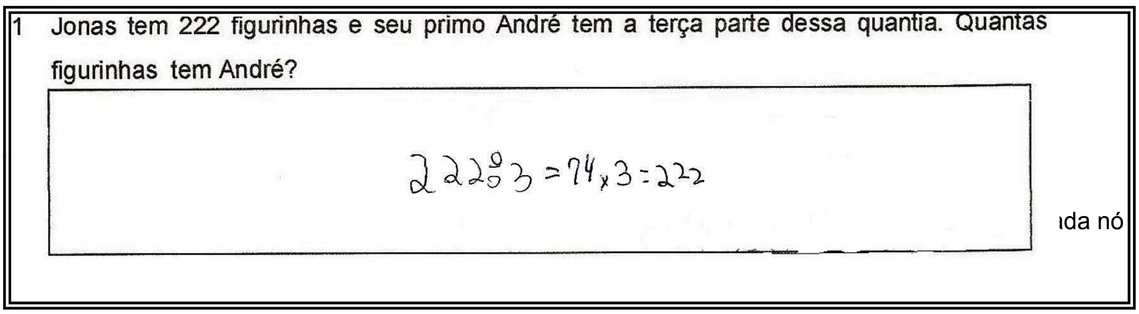
Protocolo A1 – Problema 3.1


1. Jonas tem 222 figurinhas e seu primo André tem a terça parte dessa quantia. Quantas figurinhas tem André?

222 |3
12 74
0

andre tem 74 figurinhas

Protocolo A11 – Problema 3.1


1 Jonas tem 222 figurinhas e seu primo André tem a terça parte dessa quantia. Quantas figurinhas tem André?

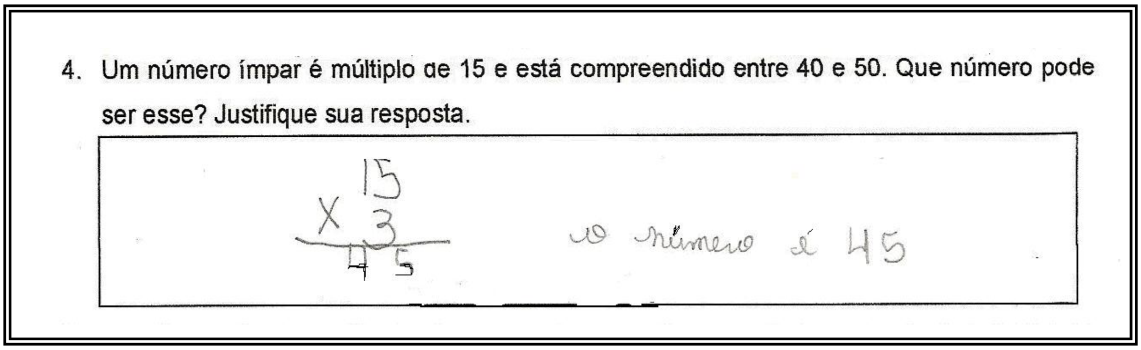
222÷3 = 74 x 3 = 222

ida nó

Protocolo A13 – Problema 3.1

**Figura 1** – Protocolos dos alunos típicos da variável 3.1-ACRC

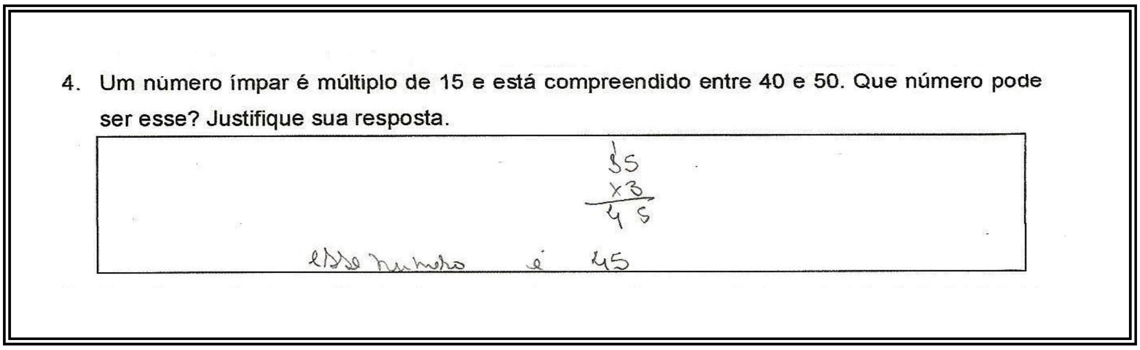
A seguir, apresentamos os protocolos, dos mesmos alunos, nos quais observamos a utilização de estratégias semelhantes na resolução do problema 3.4.


4. Um número ímpar é múltiplo de 15 e está compreendido entre 40 e 50. Que número pode ser esse? Justifique sua resposta.

15
x 3
45

o número é 45

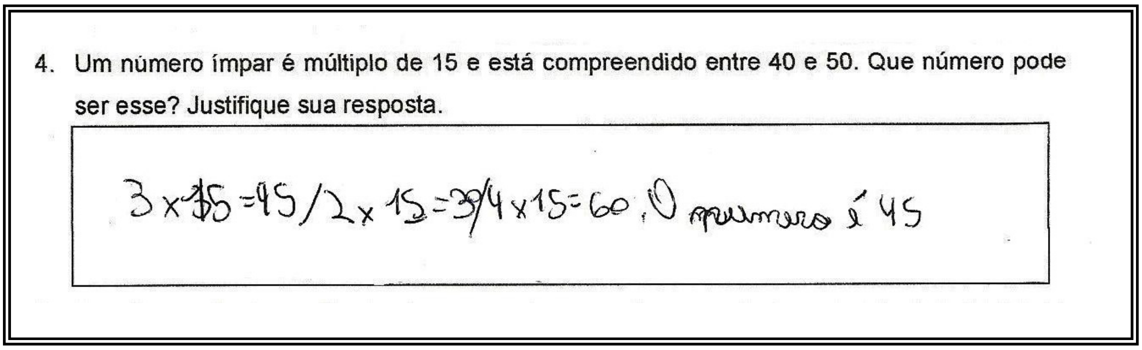
Protocolo A1 – Problema 3.4


4. Um número ímpar é múltiplo de 15 e está compreendido entre 40 e 50. Que número pode ser esse? Justifique sua resposta.

15
x3
45

esse número é 45

Protocolo A11 – Problema 3.4


4. Um número ímpar é múltiplo de 15 e está compreendido entre 40 e 50. Que número pode ser esse? Justifique sua resposta.

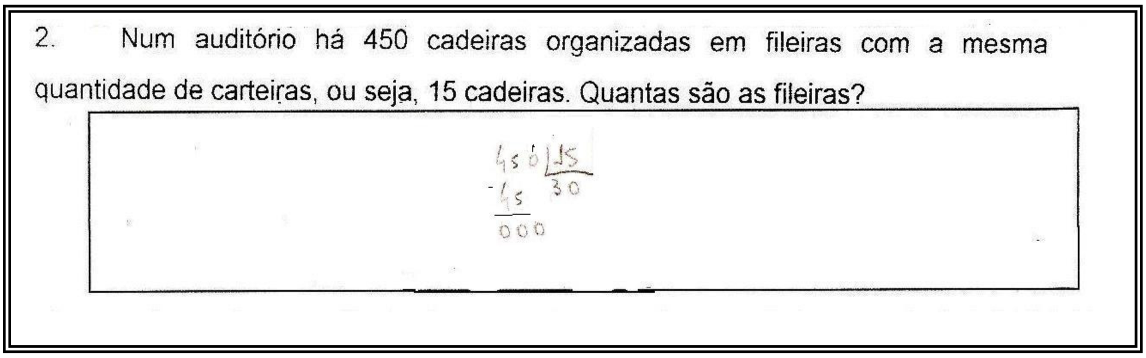
3x15=45/2x15=30/4x15=60, O numero é 45

Protocolo A13 – Problema 3.4

Figura 2 – Protocolos dos alunos típicos da variável 3.4-ACRC

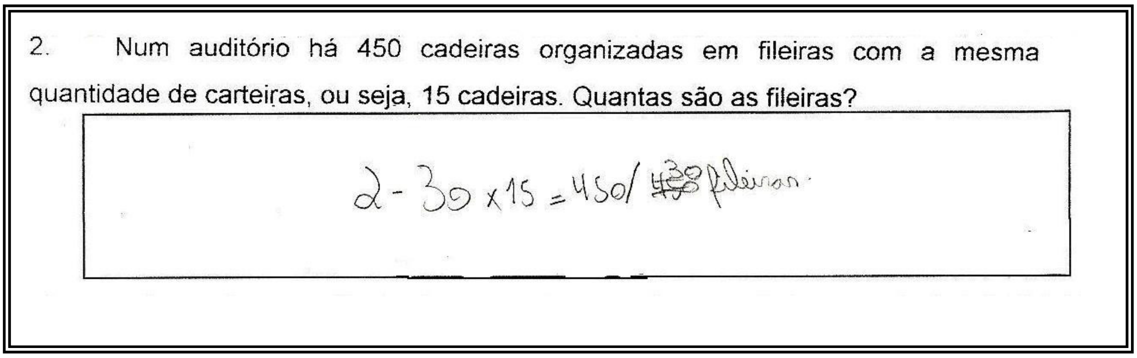
O procedimento do aluno A13, na resolução dos problemas 3.1 e 3.4 mostrou uma forma muito peculiar de resolução. Ele utilizou "registros horizontais" e mostrou uma preocupação de "convencer" que sua solução estava correta.

O segundo nó significativo dessa classe apresenta a relação da variável 1.2 ACRC (Resolução do problema 1.2 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta), com o nível anterior. Buscamos observar semelhanças e diferenças significativas entre as resoluções de A11 e A13 (por meio da Tabela de Tipicalidade e contribuição, anexo IV), visto que estes alunos também contribuíram para a significância desse nível constituído por essas variáveis.


2. Num auditório há 450 cadeiras organizadas em fileiras com a mesma quantidade de carteiras, ou seja, 15 cadeiras. Quantas são as fileiras?

450 | 15
-45   30
000

Protocolo A11 – Problema 1.2

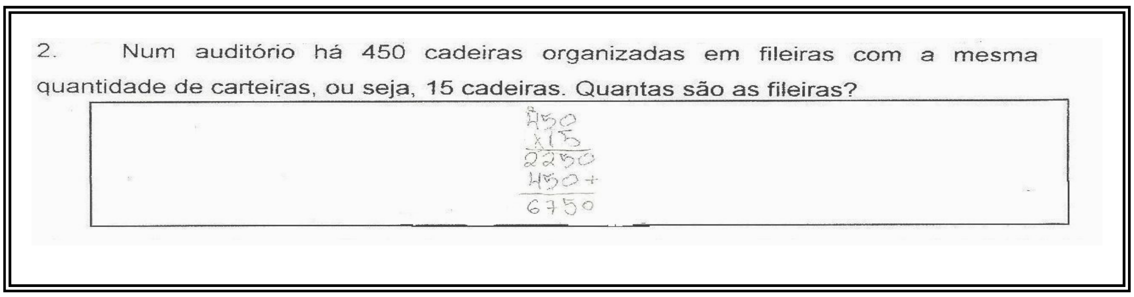

2. Num auditório há 450 cadeiras organizadas em fileiras com a mesma quantidade de carteiras, ou seja, 15 cadeiras. Quantas são as fileiras?

2- 30 x 15 = 450/ 30 fileiras.

Protocolo A13 – Problema 1.2

**Figura 3** – Protocolos dos alunos contribuintes da variável 1.2-ACRC

Já o aluno A1, embora típico dessa categoria, não contribuiu para essa subclasse por não identificar a operação adequada para a solução dessa situação, como podemos ver em seu protocolo.


2. Num auditório há 450 cadeiras organizadas em fileiras com a mesma quantidade de carteiras, ou seja, 15 cadeiras. Quantas são as fileiras?

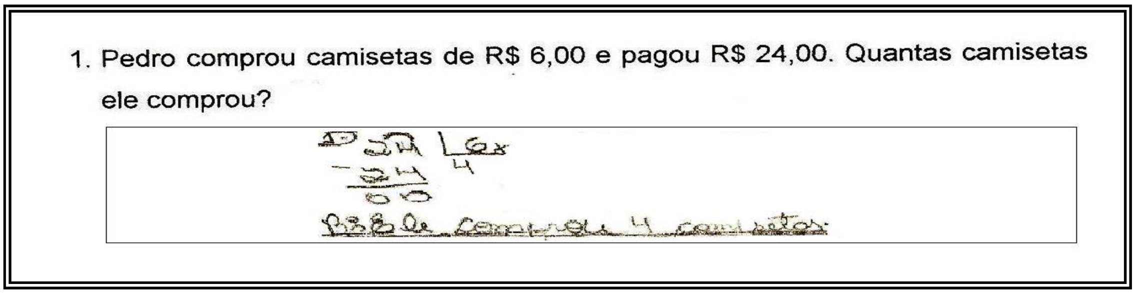
450
x15
2250
450+
6750

**Figura 4** – Resolução do Problema 1.2 pelo aluno A1

Uma quarta variável (1.1–SRC – Resolução do problema 1.1 com esboço da resposta, sem registro de cálculos e resposta correta - categoria 3) associa-se aos níveis anteriores.

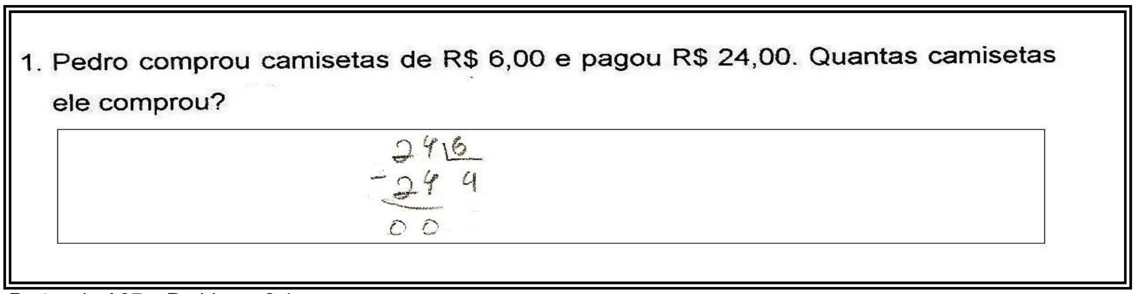
Os três níveis anteriores formam uma nova subclasse de variáveis: 2.1-ACRC – Resolução do problema 2.1 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta, categoria 1 e 4.4-ACRC – Resolução do problema 4.4 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta, (categoria 1), apresenta um grau significativo de similaridade.

Além dos alunos A11 e A13, cujos procedimentos já analisamos nas associações anteriores, os alunos A3, A7 e A18 foram os típicos dessa subclasse. Apresentamos a seguir os protocolos dos três últimos para analisarmos as relações entre as variáveis e esse grupo de alunos.


1. Pedro comprou camisetas de R$ 6,00 e pagou R$ 24,00. Quantas camisetas ele comprou?

24 | 6
-24   4
00
Ele comprou 4 camisetas

Protocolo A03 – Problema 2.1


1. Pedro comprou camisetas de R$ 6,00 e pagou R$ 24,00. Quantas camisetas ele comprou?

24 | 6
-24   4
00

Protocolo A07 – Problema 2.1


1. Pedro comprou camisetas de R$ 6,00 e pagou R$ 24,00. Quantas camisetas ele comprou?

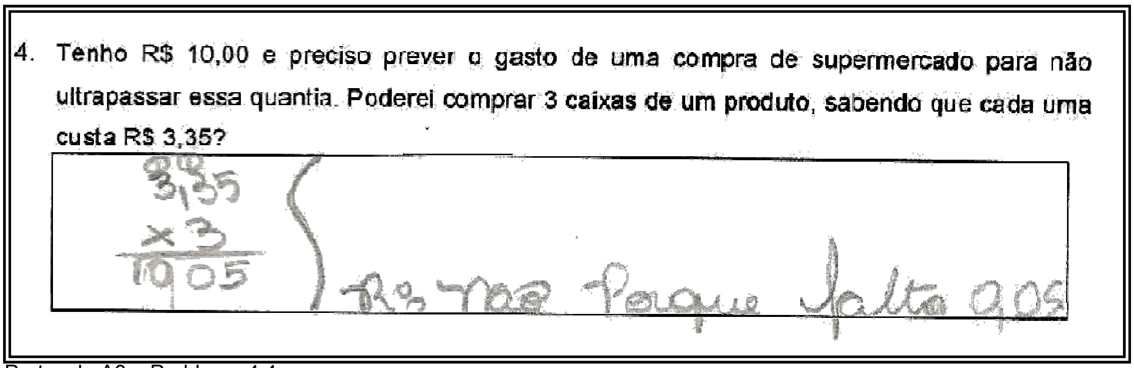
24 | 6
24   4
00
4 camisetas

Protocolo A18 – Problema 2.1

**Figura 5** – Exemplos de Resolução do problema 2.2 com reconhecimento da operação

Os alunos característicos desse tipo de resolução também contribuíram com o sucesso da variável 4.4-ACRC – Resolução do problema 4.4 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta, categoria 1.

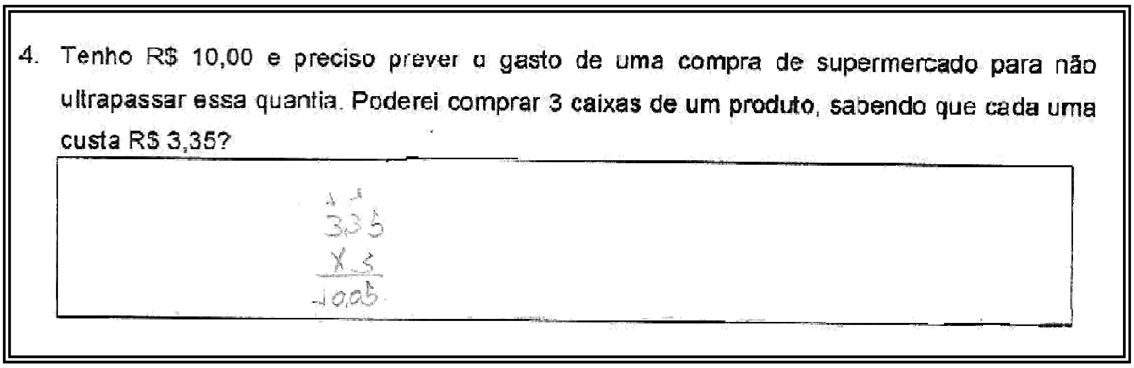
O problema 2.1 utiliza a divisão por quotas como proporção simples e de razão e o problema 4.4 utiliza a multiplicação com a mesma idéia. A seguir apresentamos os protocolos referentes ao problema 4.4, dos alunos A3, A7 e A18, característicos por utilizar as técnicas operatórias com sucesso.


4. Tenho R$ 10,00 e preciso prever o gasto de uma compra de supermercado para não ultrapassar essa quantia. Poderei comprar 3 caixas de um produto, sabendo que cada uma custa R$ 3,35?

3,35
x3
10,05

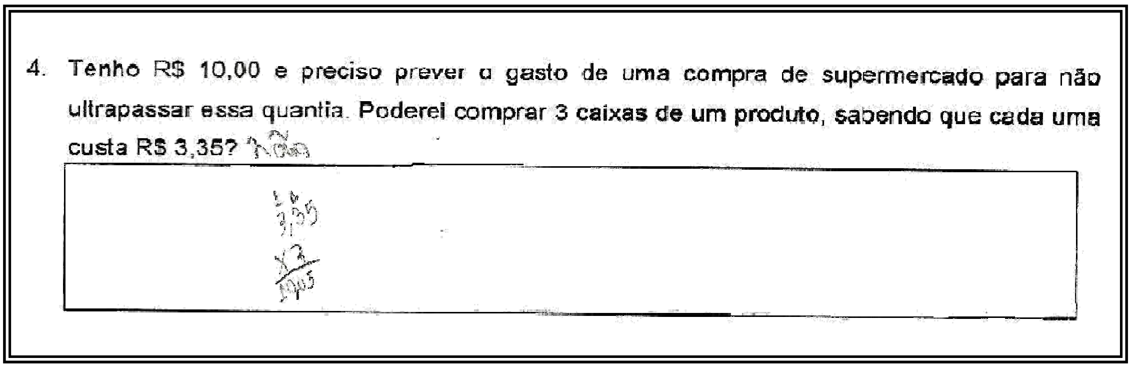
R: não porque falta 0,05

Protocolo A3 – Problema 4.4


4. Tenho R$ 10,00 e preciso prever o gasto de uma compra de supermercado para não ultrapassar essa quantia. Poderei comprar 3 caixas de um produto, sabendo que cada uma custa R$ 3,35?

3,35
X 3
10,05

Protocolo A7 – Problema 4.4


4. Tenho R$ 10,00 e preciso prever o gasto de uma compra de supermercado para não ultrapassar essa quantia. Poderei comprar 3 caixas de um produto, sabendo que cada uma custa R$ 3,35? não

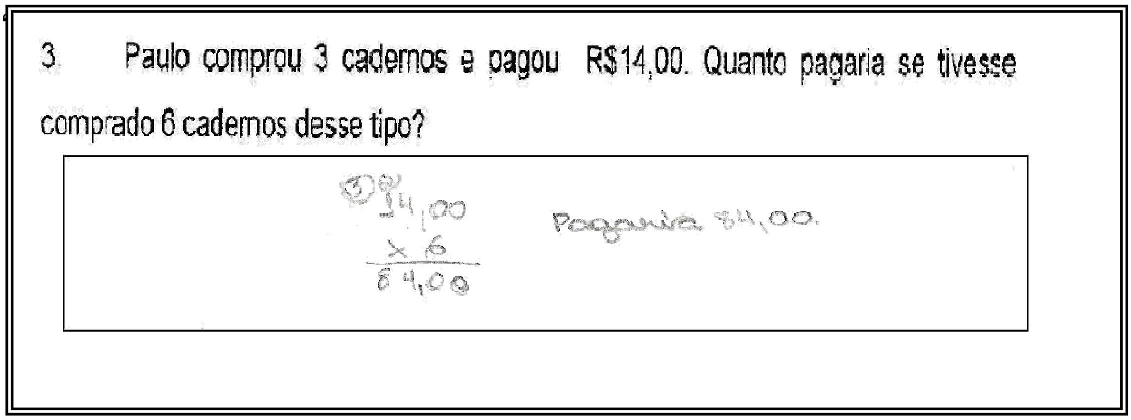
3,35
x3
10,05

Protocolo A18 – Problema 4.4

**Figura 06** - Exemplos de Resolução do problema 4.4 com reconhecimento da operação

O quarto nó significativo dessa classe formado por dois níveis nos chamou atenção, pois apesar das variáveis pertencerem à mesma categoria, verificamos um nível que remete ao sucesso e outro ao fracasso.

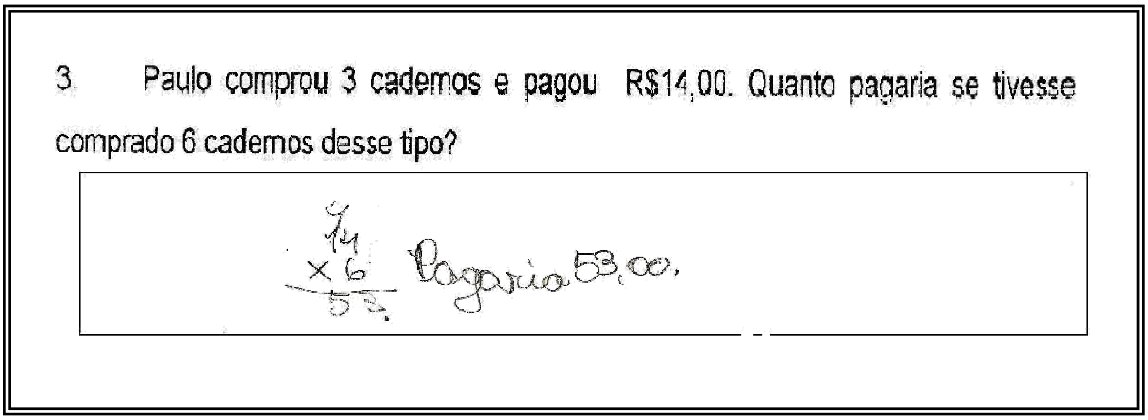
Procuramos analisar primeiro os protocolos dos alunos A3 e A20, os quais contribuíram para a relação entre as variáveis 1.3-ACRI – Resolução do problema 1.3 pelo Algoritmo Convencional e resposta incorreta e 3.1 –SRI – Resolução do problema 3.1 com esboço da resposta, sem registro de cálculos e resposta incorreta.


3 Paulo comprou 3 cadernos e pagou R$14,00. Quanto pagaria se tivesse comprado 6 cadernos desse tipo?

14,00
× 6
84,00

Pagaria 84,00.

Protocolo A3 – Problema 1.3


3 Paulo comprou 3 cadernos e pagou R$14,00. Quanto pagaria se tivesse comprado 6 cadernos desse tipo?

14
× 6
53

Pagaria 53,00.

Protocolo A20 – Problema 1.3

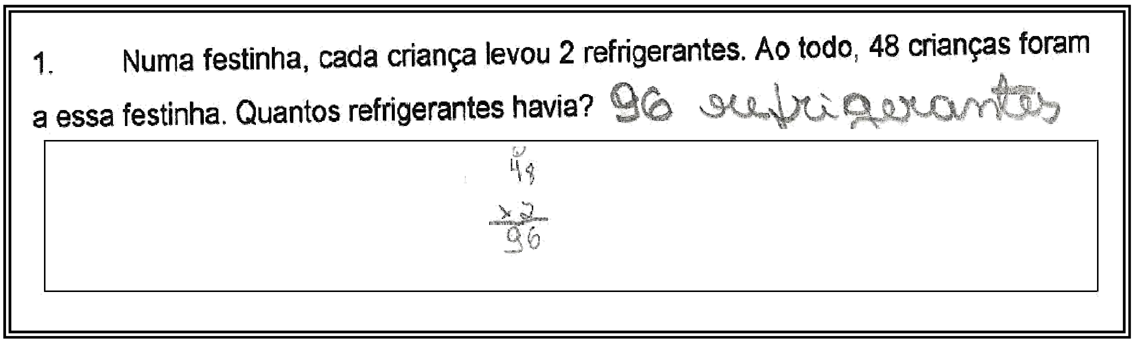
Figura 07 – Exemplos de soluções do problema 1.3 com Algoritmo Convencional e resposta incorreta

O reconhecimento da operação de multiplicação e utilização dos dados do problema são as relações de semelhança observadas nesses protocolos.

Os alunos típicos desse nível utilizaram a língua materna como solução ao problema 3.1, a aluna A3 escreveu “André tem 1/3 de figurinhas”, o que mostra que a aluna interpretou o problema, conhece a representação da terça parte, porém não encontra uma técnica operatória apropriada para a resolução da mesma, visto que essa aluna é típica da resolução por algoritmo convencional. O aluno A20, registrou apenas “180”, sem esboço de cálculos.

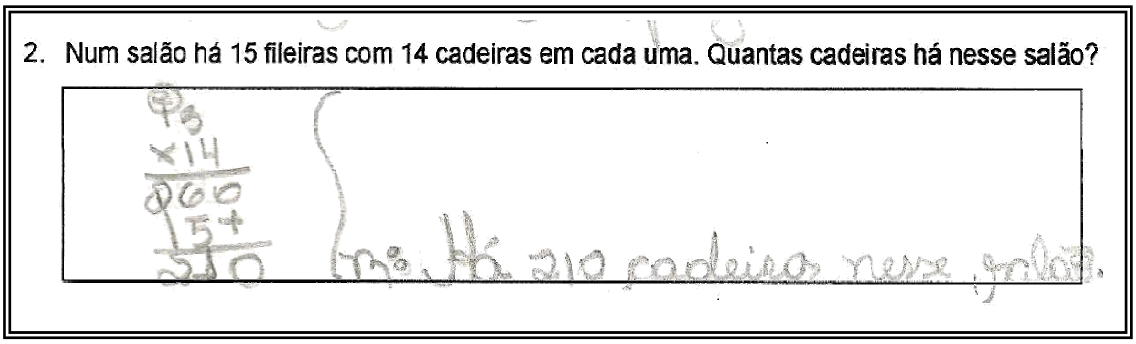
O agrupamento das variáveis 1.1-ACRC – Resolução do problema 1.1 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta e 3.2-ACRC – Resolução do problema 3.2 pelo Algoritmo Convencional com resposta correta, fecham a análise dessa classe, onde a resolução com algoritmos convencionais é predominante.

O problema 1.1 envolve a multiplicação em situação que envolve a idéia de razão e 3.2 a idéia de configuração regular. Na figura 8, mostramos a resolução dos dois problemas pelo aluno A3.


1. Numa festinha, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo, 48 crianças foram a essa festinha. Quantos refrigerantes havia? 96 refrigerantes

48
x 2
96

Protocolo A3 – Problema 1.1


2. Num salão há 15 fileiras com 14 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão?

15
x14
060
15+
210

R: Há 210 cadeiras nesse salão.

Protocolo A3 – 3.2

**Figura 08** – Exemplos de resolução do uso de técnicas operatórias corretas-problema 3.2

## B – Utilização das técnicas operatórias sem sucesso

A árvore de similaridade a seguir (quadro 9) apresenta 6 variáveis conforme codificação abaixo:

1.1-AIRI – Resolução do problema 1.1 pelo Algoritmo Convencional Inadequado e Resposta incorreta;

1.4-SRI – Resolução do problema 1.4 sem esboço de cálculos e resposta incorreta;

4.1 -ACRC – Resolução do problema 4.1 pelo Algoritmo Convencional e resposta correta

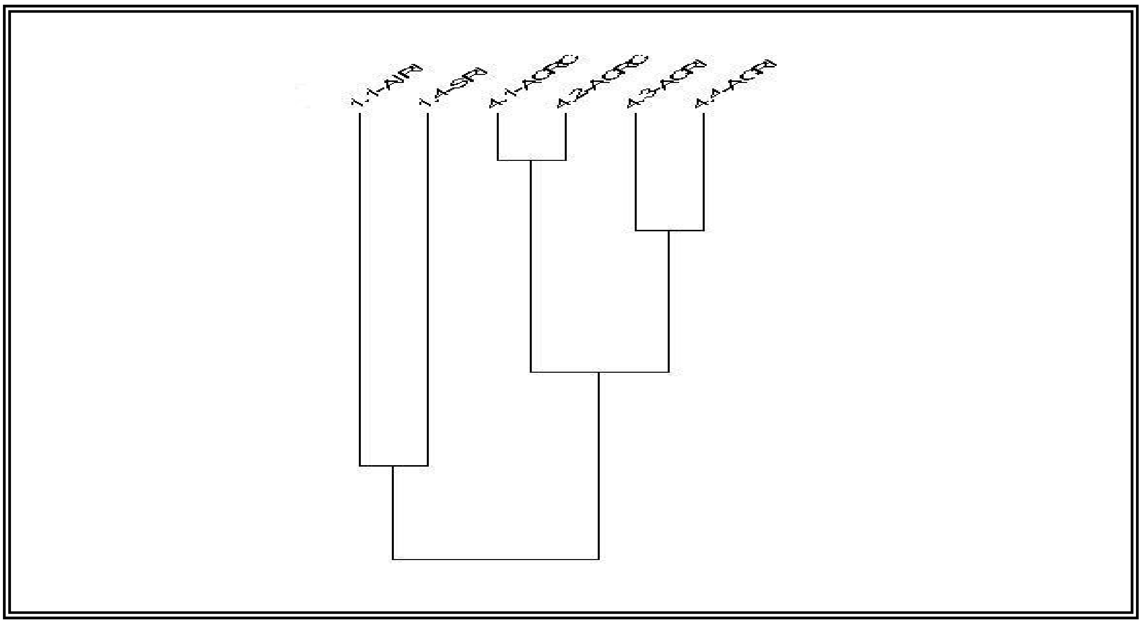
4.2 -ACRC – Resolução do problema 4.2 pelo Algoritmo Convencional e resposta correta

4.3 -ACRI – Resolução do problema 4.3 pelo Algoritmo Convencional e resposta incorreta

4.4 -ACRI – Resolução do problema 4.4 pelo Algoritmo Convencional e resposta incorreta

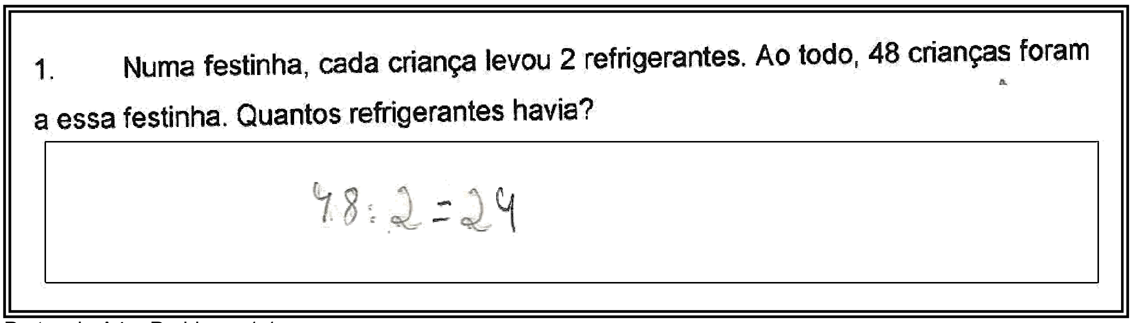
Observamos que essa classe é formada por variáveis em que a utilização do algoritmo convencional predomina, mas sobressaem as respostas incorretas e não aparecem níveis significativos.

A partir da árvore de similaridade da classe denominada Utilização das técnicas operatórias sem sucesso, apresentamos a análise das associações entre essas variáveis e o comportamento dos alunos contribuintes a essa classe.



Quadro 17 – Árvore de similaridade – Utilização das técnicas operatórias sem sucesso

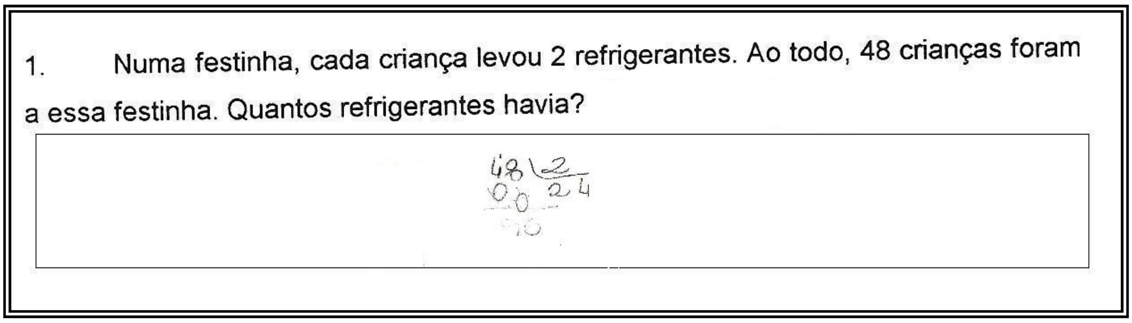
O primeiro grupo (da esquerda para a direita) refere-se à relação entre as variáveis 1.1-AIRI – Resolução do problema 1.1 pelo algoritmo convencional inadequado e resposta incorreta e 1.4-SRI – Resolução do problema 1.4 sem esboço de cálculos e resposta incorreta. Verificamos que os alunos A4 e A21 contribuíram para esse agrupamento de variáveis.



1. Numa festinha, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo, 48 crianças foram a essa festinha. Quantos refrigerantes havia?

48 : 2 = 24

Protocolo A4 – Problema 1.1

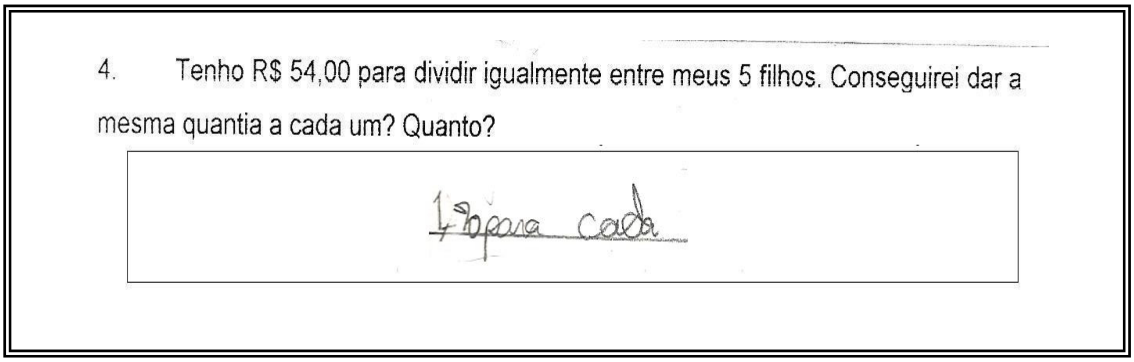


1. Numa festinha, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo, 48 crianças foram a essa festinha. Quantos refrigerantes havia?

Protocolo A21 – Problema 1.1

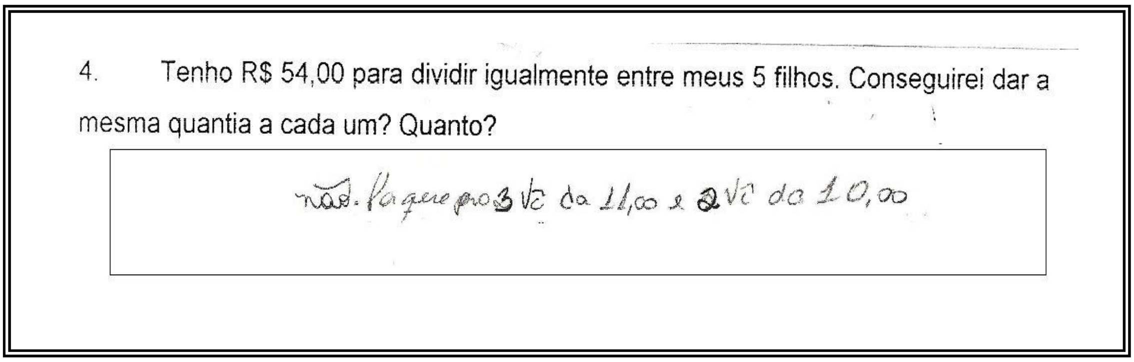
**Figura 09** – Exemplos de resolução pelo não reconhecimento da operação – Categoria 2

A seguir, apresentamos os protocolos dos mesmos alunos na resolução do problema 1.4, pois além da semelhança de resolução do problema 1.1, assemelham-se também na resolução desse problema.


4. Tenho R$ 54,00 para dividir igualmente entre meus 5 filhos. Conseguirei dar a mesma quantia a cada um? Quanto?

1,90 para cada

Protocolo A4 – Problema 1.4


4. Tenho R$ 54,00 para dividir igualmente entre meus 5 filhos. Conseguirei dar a mesma quantia a cada um? Quanto?

não. Porque pro 3 vc da 11,00 e 2 vc da 10,00

Protocolo A21 – Problema 1.4

Figura 10 – Exemplos de procedimentos de resolução problema 1.4 – Categoria 3

Ao analisar os protocolos notamos que, embora estejam classificados na mesma categoria de procedimentos de solução, os alunos mobilizaram ações diferentes.

Os exemplos de procedimentos do problema 1.1, figura 9, mostram que embora os alunos A4 e A21 mobilizem o algoritmo sem compreenderem a operação envolvida, seus conhecimentos são naturezas diferentes.

Verificamos que a falta de aptidão de mobilizar um algoritmo para a resolução do problema 1.4 é característica desse grupo de alunos. Mas, apesar da classificação na mesma categoria de solução, observamos que o aluno A4 mobiliza conhecimentos diferentes de A21, esse último reconhece a divisão por partição, porém não associa o termo “mesma quantia” a dividir em partes iguais. O aluno A4 apresenta a resposta “1,90 para cada”, o que representa dificuldade com o zero intercalado na divisão, já discutido anteriormente.

O segundo agrupamento dessa classe envolve quatro variáveis subgrupadas como a seguir: 4.1 -ACRC – Resolução do problema 4.1 pelo Algoritmo Convencional e resposta correta e 4.2 -ACRC – Resolução do problema 4.2 pelo Algoritmo Convencional e resposta correta; 4.3 -ACRI – Resolução do problema 4.3 pelo Algoritmo Convencional e resposta incorreta e 4.4 -ACRI – Resolução do problema 4.4 pelo Algoritmo Convencional e resposta incorreta.

Buscamos, primeiro, analisar a tipicalidade desses agrupamentos e acreditamos que a análise dos protocolos de um único aluno para os quatro problemas nos levará a conclusões em como essas subclasses foram geradas.

Optamos pelo aluno A17, pois já observamos na classe anterior que os alunos A1 e A11 pertencem à categoria 1, ou seja, identificam a operação e utilizam algoritmo convencional.

Os problemas 4.1 e 4.2 são do tipo produto de medidas e requerem a noção de uso da operação combinatória, ou seja, dispomos de duas quantidades iniciais e ambas devem ser consideradas simultaneamente para a resolução do problema.

O problema 4.3 já foi apontado como o que apresentou o menor desempenho e envolve a idéia de operador.

**MOMENTO 4**

1. Uma jovem tem 3 saias e 5 blusas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode se arrumar alternando essas saias com essas blusas?

   5
   x 3
   15

2. Na sorveteria da esquina você pode escolher 24 tipos de sorvete diferentes, pois há diferentes sabores e para cada sabor você pode escolher sorvete de palito ou de massa. Quantos são os sabores?

   24
   x 2
   48

3. Dividi um certo número por 35 e o quociente foi 17. Que número era esse?

   ³35
   x 17
   505
   35
   655

4. Tenho R$ 10,00 e preciso prever o gasto de uma compra de supermercado para não ultrapassar essa quantia. Poderei comprar 3 caixas de um produto, sabendo que cada uma custa R$ 3,35?

   3,35
   x 3

**Figura 11** – Procedimentos de resolução de problemas classificados na categoria 1 por A17

Verificamos, nos problemas 4.1 e 4.2, a utilização do algoritmo convencional como procedimento de solução correto. As duas situações são comuns em sala de aula e nos livros didáticos atuais, o que pode favorecer o tipo de resolução.

Nos problemas 4.3 e 4.4 o aluno identificou a operação de multiplicação como solução para os problemas, porém sem êxito no desenvolvimento do cálculo.

## C – Procedimentos Inadequados ao campo multiplicativo

A terceira e última classe refere-se ao não reconhecimento da operação como resolução para o problema.

O quadro 10 apresenta duas subclasses distintas; no da esquerda predomina o uso do algoritmo inadequado à situação e o da direita é formado pela influência do uso da linguagem natural sem representação de cálculo escrito. A seguir, apresentamos as codificações das variáveis que constituem a classe em análise:

1.2 AIRI – Resolução do problema 1.2 pelo algoritmo convencional inadequado com Resposta Incorreta.

3.3 AIRI – Resolução do problema 3.3 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta.

3.1 AIRI – Resolução do problema 3.1 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta.

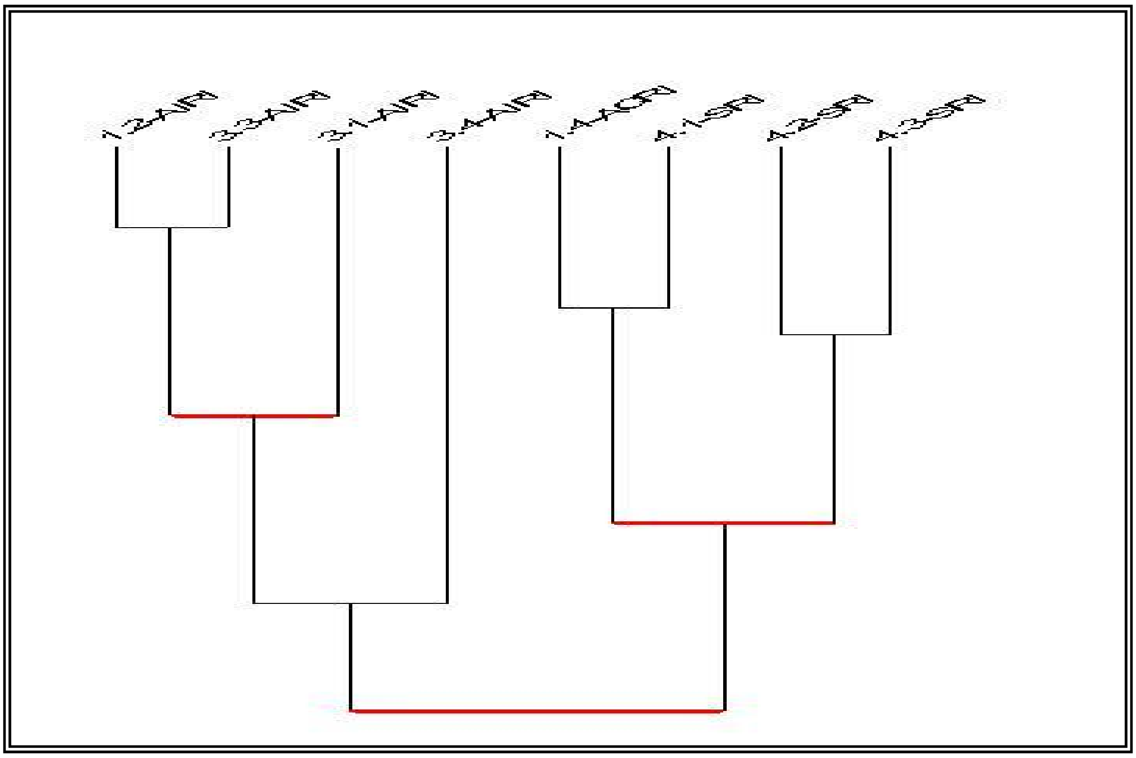
3.4 AIRI – Resolução do problema 3.4 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta.

1.4 ACRI – Resolução do problema 1.4 pelo algoritmo convencional Adequado com Resposta Incorreta.

4.1-SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta para o problema 4.1.

4.2-SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta para o problema 4.2.

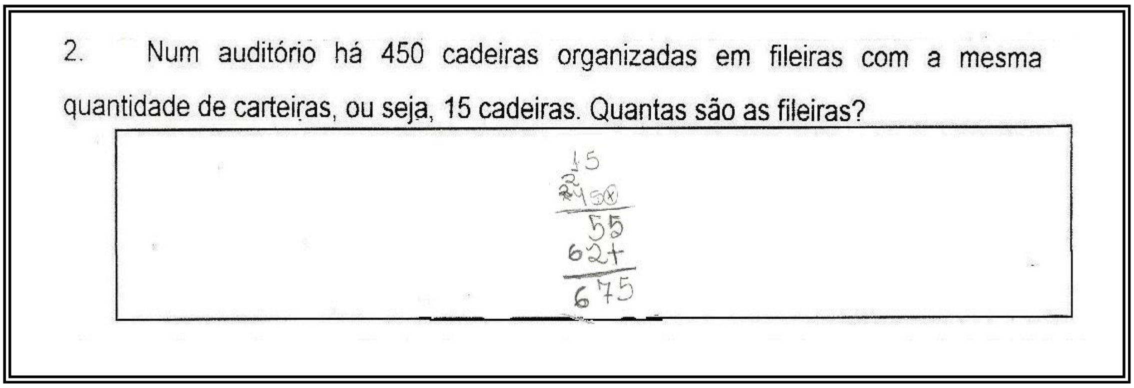
4.3-SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta para o problema 4.3




**Quadro 18** – Árvore de Similaridade – procedimentos inadequados ao campo multiplicativo

A classe formada pelas das variáveis 1.2 AIRI – Resolução do problema 1.2 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta, 3.3 AIRI – Resolução do problema 3.3 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta; 3.1 AIRI – Resolução do problema 3.1 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta e 3.4 AIRI – Resolução do problema 3.4 pelo algoritmo convencional Inadequado com Resposta Incorreta, constituem três níveis. Por encontrarem-se na mesma categoria de resolução, analisamos apenas o último agrupamento associado aos demais.

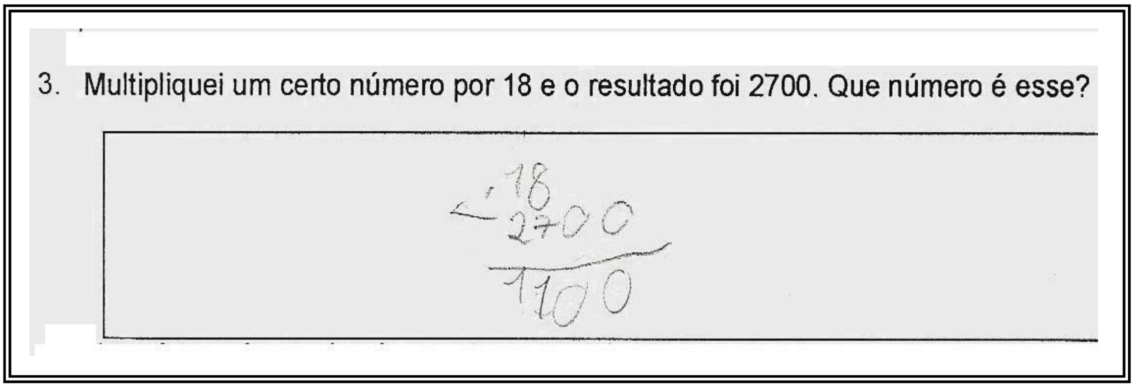
Buscamos os sujeitos que contribuíram para esse nível, anexo IV, para análise de alguns protocolos que nos chamaram atenção em cada situação problema, visto os demais erros serem similares.



2. Num auditório há 450 cadeiras organizadas em fileiras com a mesma quantidade de carteiras, ou seja, 15 cadeiras. Quantas são as fileiras?

15
450
55
62+
675

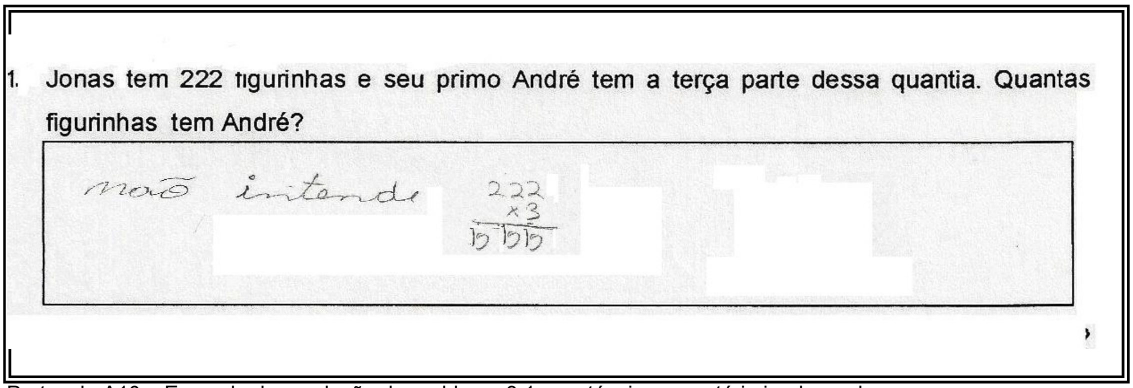
Protocolo A5 – Exemplo de resolução do problema 1.2 com técnica operatória inadequada



3. Multipliquei um certo número por 18 e o resultado foi 2700. Que número é esse?

18
2700
1100

Protocolo A 9– Exemplo de resolução do problema 3.3 com técnica operatória inadequada

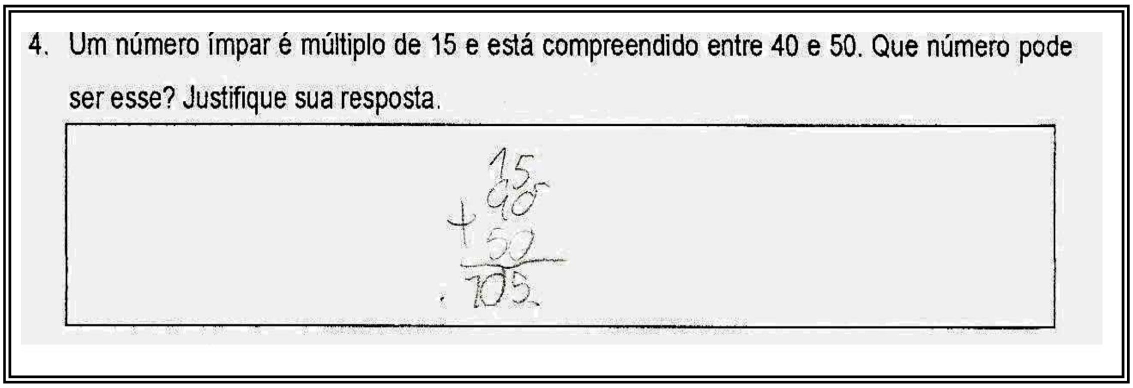


1. Jonas tem 222 figurinhas e seu primo André tem a terça parte dessa quantia. Quantas figurinhas tem André?

não intende

222
x3
555

Protocolo A10 – Exemplo de resolução do problema 3.1 com técnica operatória inadequada



4. Um número ímpar é múltiplo de 15 e está compreendido entre 40 e 50. Que número pode ser esse? Justifique sua resposta.

15
+ 40
50
105

Protocolo A9 – Exemplo de resolução do problema 3.4 com técnica operatória inadequada

**Figura 12** – Exemplos de resoluções de situação problemas técnica operatória inadequada

A seqüência da escrita efetuada pelos alunos mostra claramente uma organização invariante, que enfatiza simultaneamente nos hábitos aprendidos e em teoremas como o seguinte: “subtrair o valor menor do maior”.

A última subclasse, apresenta a relação entre as variáveis 1.4 ACRI – Resolução do problema 1.4 pelo algoritmo convencional com resposta incorreta, 4.1-SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta para o problema 4.1, 4.2-SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta para o problema 4.2 e 4.3-SRI – Registro, apenas, da resposta incorreta para o problema 4.3.

Na classe formada pelas variáveis 1.4ACRI e 4.1SRI observamos que os procedimentos semelhantes dos alunos se devem aos valores envolvidos e tipo de situação-problema, já discutidos no desempenho por questões.

Recorremos à tabela de ocorrências, anexo V, e verificamos que a questão 1.4 apresenta o maior número de soluções incorretas (14 alunos), dentre os quais 4 fazem uso das técnicas operatórias adequadas e 7 apenas a resposta, procuramos então identificar as respostas em língua natural, por exemplo, “Não dá pra dividir igualmente”, “Não. 10 pra cada e sobra 4”, “1,90 para cada”, “Não, eu não conseguiria dar a mesma quantidade, um deles teria que fica só com 10”, “Sim, cada um receberia 18”, foram as respostas mais comuns.

Ao analisarmos essas soluções, observamos que as crianças têm familiaridade com o sistema monetário nacional, o que facilita o cálculo mental; a ausência de registro de cálculos explicita isso. Porém, algumas respostas mostram alguns erros evidentes, dificuldades com o zero intercalado e, principalmente, divisão com números naturais em que o quociente é um número racional.

O último nível analisado apresenta similaridade entre as variáveis 4.2SRI e 4.3SRI, já descrito acima e tem como sujeitos típicos A13, A14 e A18.

Alguns exemplos de respostas, na língua natural, ao problema 4.2 “24 sabores”, “52 sabores” e um relacionou os sabores; ao problema 4.3 responderam valores que apareceram no problema.

**Considerações Parciais**

O estudo de similaridade entre os procedimentos de resolução permitiu-nos verificar três grupos de estratégias mobilizadas para a resolução de algumas situações-problema, apesar da complexidade do conceito de multiplicação. Porém, é bom ressaltar que a revisão teórica que instigou essa pesquisa permitiu analisar a abrangência e diversidade dos procedimentos.

Com essa análise multidimensional, verificamos que os alunos A3, A 10, A11 e A13 são característicos da utilização adequada do algoritmo convencional, independente do êxito ou não, logo típicos de duas classes, Técnicas Operatórias com sucesso e sem sucesso. Embora outros alunos sejam típicos dessa mesma categoria, não houve um grau significativo de similaridade entre eles.

Entre os procedimentos inadequados, sem sucesso, destacamos os alunos A2, A5, A9, A12 e A21 e por último, analisamos o grupo de alunos contribuintes para a Categoria 3 (Registro apenas da resposta, sem esboço de cálculos). A4, A13, A14 e A18 contribuiram para a falta de êxito nessa categoria, enquanto A1, A7 e A18 foram típicos da mesma categoria, com sucesso.

A análise nos auxiliou a identificar os sujeitos e os respectivos procedimentos de solução. A comparação dos protocolos nos permitiu verificar que, embora classificados na mesma categoria, muitas vezes os alunos mobilizaram diferentes conhecimentos.

Por tratar-se de problemas de enunciado verificamos, também, quais alunos têm habilidades de análise, interpretação e resolução de situações-problema, com os diferentes significados do campo multiplicativo.

O tamanho da amostra facilitou esse trabalho, pois possibilitou-nos verificar as estratégias diversas e compreensão dos processos envolvidos na resolução dos diversos tipos de situações.

# CAPÍTULO 4

# ANÁLISE DAS ENTREVISTAS E DE ALGUMAS INTERVENÇÕES

Neste capitulo descrevemos como foram escolhidos os alunos para as entrevistas e faremos uma análise das mesmas.

O objetivo dessas entrevistas, além do enriquecimento de nossas análises do capítulo 3, é verificar o que os alunos revelam conhecer sobre os diferentes significados do campo multiplicativo com compreensão e como explicitam seus conhecimentos e suas estratégias mediante possíveis intervenções da pesquisadora.

## 4.1 Análise entrevistas em Situações Problema

Ao realizar as análises de desempenhos dos alunos apresentadas nos capítulos anteriores, muitas dúvidas foram surgindo. Decidimos então procurar alguns desses alunos para fazer uma entrevista individual. O critério para a escolha dos entrevistados foi o de buscar um aluno típico de cada categoria significativa na resolução de problemas. Ao mesmo tempo, procuramos verificar a relação desses alunos nas situações de cálculo mental/estimativa e escrito. Quatro alunos foram entrevistados:

- A2 – Típico das categorias 2 - Não reconhecimento da operação e utilização de algoritmo inadequado  e 5 – Branco.
- A11 – Típico da categoria 1 – Reconhecimento da operação e utilização das técnicas operatórias adequadas ao tipo de problema.

- A1 – Típico da categoria 3 - Apresentação, apenas, da resposta sem registro de cálculos
- A4 – Típico da Categoria 4 - Utilização de outros procedimentos

Em nossas entrevistas procuramos obter mais elementos sobre como esse grupo de alunos planeja, decide e controla a aplicação de uma operação matemática para resolver determinadas situações.

Nas entrevistas utilizamos o gravador de áudio e disponibilizamos papel e lápis aos alunos. Para orientar nossas entrevistas, elaboramos um questionário semi-estruturado em que pretendíamos investigar:

- A identificação e conhecimento das operações de multiplicação e divisão e suas propriedades;

- O grau de dificuldade dos alunos sobre resolução de problemas com operações do Campo Multiplicativo;

- As estratégias utilizadas e o desempenho em cálculo mental e estimativas;

- O grau de dificuldade na utilização do Algoritmo Convencional.

Na seqüência, apresentamos uma síntese das conversas durante as entrevistas.

Para as perguntas: - "O que você entende por multiplicação? Dê exemplos e Como explicaria a multiplicação a alguém que não sabe?", as respostas foram semelhantes. Os alunos responderam "*Multiplicar*", "*Conta de vezes*" e nenhum deles utilizou-se de exemplos.

Porém, quando perguntados "O que você entende por divisão? Dê exemplos e Como explicaria a divisão a alguém que não sabe?", a maioria dos alunos respondeu: "*Ah!! É dividir*", por exemplo, "*Tenho cinqüenta alunos numa sala, eu quero dividir em duas classes, sei que vai dar 25 alunos em cada classe porque faço cinqüenta dividido por dois.*" Ou "*Dividir cinco balas para cinco alunos, eu explicaria assim*."

É interessante destacar que embora nossas análises apontaram que o pior desempenho foi em divisão, nessa pequena amostra percebemos que essa operação foi mais fácil de ser exemplificada pelos alunos.

Descreveremos as entrevistas com os alunos (A1, A2, A4 e A11), resolvendo uma situação problema de proporção simples, com razão 2:

Problema 1.3 - Paulo comprou 3 cadernos e pagou R$14,00. Quanto pagaria se tivesse comprado 6 cadernos desse tipo?

P: (A pesquisadora lê o problema em voz alta)

A11: *Cada caderno custou 14 reais?* (A pesquisadora relê o problema)

A11: *Ahhh! Cada caderno custou 14 reais, mais 3, 28. Isso custou R$ 28,00*.

P: Mais três 28? 14 mais três é 28?

A11: *Não, 3 cadernos custou 14 e mais três dá 28*.

P: Como chegou a essa conclusão?

A11: *Ahhh não sei. Se 3 cadernos é 24, então 6 é 28*.

P: O que percebe? Que cálculo fez em sua cabeça? Você respondeu sem escrever. (O aluno fica pensativo por alguns minutos e responde)

A11: *Eu faço “vezes 2”*

P: Você dobra os valores?

A11: Sim, eu dobro. Era 3 cadernos, foi para 6 então o preço também dobra.

Os alunos A1 e A4 também utilizaram a idéia de dobro como procedimento de cálculo mental para essa situação. Ao aluno A4 foi perguntado se saberia escrever o procedimento utilizando a multiplicação, ele respondeu que era só fazer “vezes 2”.

A seguir apresentamos trechos da entrevista com a aluna A2, ainda referente ao problema 1.3.

P: (Leitura do Problema)

A2: Não sei

P: Pense um pouco, nunca fez compras?

A2: Sim

P: Então tente responder (a aluna pede para repetir o problema e solicita lápis e papel).

A2: Eu pego 14 e faço vezes 6.

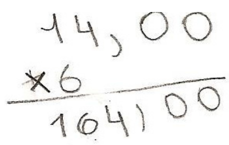



**Figura** ___ Solução escrita pelo aluno A2 do problema 1.3

P:Explique-me o que fez.

A2: *Pego esse 4 aqui (referindo-se ao 4 do 14 e coloco aqui embaixo: 4 do 164), faço 6 vezes 1 e coloco aqui (seis do 164) e depois trago esse 1 para baixo.*

A explicação da aluna mostra desconhecimento do Sistema de Numeração Decimal e consequentemente dificuldade com a operação de multiplicação. Os famosos “vai 1” e “desce 1” parece ter confundido a aluna que apesar de reconhecer a operação adequada à situação e aparentemente saber o valor de “6 x1”, não apresenta nenhuma familiaridade com os números e nem com as operações do campo multiplicativo, vem como suas operações.

Essa situação problema apresentou um desempenho de 48% (10 alunos) e 6 alunos utilizaram a adição como procedimento de cálculo. Percebemos que o primeiro impulso é o princípio aditivo, mesmo para o aluno característico da categoria 1 (Algoritmo Convencional), A11.

A aluna A2 apresentou um desempenho geral de 6% de acertos nas situações-problema (2 problemas), fez 9 tentativas de resolução sem êxito e deixou 5 questões em branco.

A seguir, apresentamos trechos das entrevistas referentes à situação problema 3.3 – Multipliquei um certo número por 18 e o resultado foi 27 000. Que número é esse?

P: Como resolveria esse problema?

A4: *Não sei.*

P: Vamos fazer uma brincadeira? - Que número eu multiplico por 2 para obter 8?

A4: *4*

P: Que número eu multiplico por 5 e encontro 500?

A4: *Não sei*

P: “Que número multiplico por 5 e obtenho 30?

A4: *6*

P: Como fez?

A4: *Pensei na tabuada do 5. 3 x 5 = 15, então 6 x 5 = 30.*

P: Então vamos voltar ao problema (repete o problema 3.3) Você acha que o número será maior ou menor que 27 000?

A4: *Maior*

P: Você conseguiria pensar em como fez com a tabuada do 5?

A4: *Não, porque não existe tabuada do 18*.

P: E se existisse a tabuada do 18, como escreveria?

A4:___ *x 18 = 27 000 (o aluno colocou um traço no lugar do multiplicando), acho que ficaria assim, mas não sei que número colocar.*

Mesmo após várias tentativas a pesquisadora não obteve sucesso e prosseguiu, agora com o problema 4.3 - Dividi um certo número por 35 e o quociente foi 17. Que número era esse? - que tem a mesma idéia.

As explicações são semelhantes, assim como a intervenção da pesquisadora, porém convém destacar que ao ser questionado se o número seria maior ou menor que 35, o aluno respondeu “maior” e à pergunta “maior ou menor que 17?”, o aluno expressa: “*Acho difícil a divisão com dois números, ainda não aprendi direito*”.

Entre os alunos entrevistados, apenas o aluno A11 fez a operação inversa, com lápis e papel, para chegar ao resultado do problema 3.3, mas não conseguiu explicitar os procedimentos para o problema 4.3.

As situações-problema referidas tiveram os piores desempenhos, ou seja, 2 e 3 acertos, respectivamente, e mesma quantidade de brancos (7), o que representa 52% do total (16 problemas).

Observamos algumas regularidades na forma como as crianças abordam e tratam as situações.

## 4.2 O cálculo mental nas entrevistas

Prosseguindo as entrevistas, pretendemos, agora, compreender os procedimentos de cálculo mental. As questões escolhidas para essas entrevistas também foram escolhidas pelo desempenho. A seguir, trechos de entrevistas com os alunos A1 e A2.

P: Gostaria que fizesse o cálculo das operações que passarei a você sem lápis e papel.  - Qual o resultado de 1000 divido por 250?

A1: *4*

P: Você fez rápido, como fez?

A1:*Fiz 250+250=500 + 500= 1000*

P: Pode explicar-me como pensou.

A1: *Sim, eu vi quantas vezes o 250 cabe no 1000, assim tenho 250 mais 250, já dá 500 e sei que mais 500 é 1000, então dá 4 vezes.*

P: Representaria esse cálculo no papel para mim?

(O aluno escreve, na forma vertical 1000:250, coloca o número 4 no quociente e nenhum outro procedimento).

A mesma situação foi colocada aos demais alunos, porém A11 e A4 fizeram semelhante ao A1.

P: Divida 1000 por 250, sem utilizar lápis e papel.

A2: *Eu não sei fazer "conta de cabeça".*

P: Gostaria que tentasse. (a aluna pede um momento para pensar e responde)

A2: *40*

P: Sabe dizer como fez para chegar a esse valor?

A2: *Não sei falar, mas posso escrever*.

(fez mil divididos por 250 no algoritmo convencional e riscou o zero de 250, colocou 40 no quociente e nada mais fez)

P: Quando eu falo divida 1000 por 250, o que entende?

A2: *Que quer dividir 1000 reais para 250 pessoas, algo assim.*

P: E dá quanto?

A2: *40 reais para cada pessoa.*

P: Acha que esse valor está correto.

A2: *Acho sim*

A questão envolve a divisão como operação e entre as alternativas de resultados estavam o 4 (2ª opção) e 40 (4ª opção). Dos 21 alunos, apenas 9 optaram por 4 e, 5 por 40.

Observamos que mais uma vez a idéia de dobro apareceu como procedimento de resolução.

A operação 965 x 0, também teve um número considerável de erros, 8 alunos escolheram a opção 2 (965), entre os entrevistados apenas os alunos A2 e A11 escolheram a opção correta.

P: Qual o valor de 965 x 0?

A2: *0*

P: Que rápido, como fez?

A2: *Eu lembrei da professora que fala "tudo que é vezes zero dá zero"*

O aluno A1 responde tão rapidamente quanto A2, "965", a pesquisadora faz outra pergunta:

P: E 965 x 1?

A1: *965*

P: Quer dizer que se multiplica por um ou por zero é a mesma coisa.

A1: *Sim, o zero não vale nada, dá no mesmo.*

P: Você acredita que multiplicar por zero é a mesma coisa de multiplicar por 1?

A1: *Acho que não...dá zero?* (em dúvida)

P: Não sei, vamos ver outros valores. O que entende por 2 x 1?

A1: *2*

P: Sim, mas o que quer dizer?

A1: Q*ue tenho "duas vezes o 1" 1 + 1.*

P: Muito bem! E 2 x 0.

A1: *"Duas vezes 0" 0 + 0, ah é zero. Então 965 x 0 é zero. Entendi.*

A questão que envolve o zero como multiplicador é bastante confundida pelas crianças. Alguns “aprendem” por um teorema determinado pelo professor: “Qualquer número multiplicado por zero é igual a zero”, como A2. E outros fazem mecanicamente acreditando que se o zero não “vale nada” o multiplicando permanece o mesmo, uma confusão com as propriedades de adição e multiplicação.

Foi solicitado que respondessem sem fazer cálculos escritos um valor aproximado para 46 dividido por 6, não precisando ser exato. Cada aluno obteve uma resposta.

A1: *6,6*
A2: *6*
A11: *7,5*
A4: *7*

O aluno A11 falou, “dá uns 7,5 mais ou menos”, apresentou a resposta exata. Ao ser questionado como fez tão rápido disse, “eu fiz pela tabuada do 6, sei que 7 x 6 = 42, sobrou 3, pensei se tiver 3 reais para dividir para 6 pessoas cada um recebe uma moeda de 50 centavos”.

A justificativa do aluno apresenta conhecimentos sobre a tabuada, divisão em partes iguais e decomposição de valores do sistema monetário brasileiro.

A última operação para realizarem por cálculo mental foi a questão 3.5C (2:5), a qual apresentou as cinco opções de alternativas como solução, (4 alunos escolheram a opção 1(2,5), 6 a opção 2(1,5), 3 a opção 3(1,0), 3 a opção 4(0,5) e 5 marcaram a opção correta (0,4). Entre os alunos entrevistados, apenas A1 e A11 escolheram a correta.

A seguir trechos das entrevistas:

P: Faça 2 dividido por 5, sem lápis e papel

A1: *40 centavos*

P: Você considerou 2 reais, foi isso?

A1: *Sim, eu acho mais fácil. Divido tudo em moedas de 10 centavos, ou de 50, ou de 25 e faço as contas de cabeça.*

Os alunos A2 e A4 afirmam que é impossível fazer tal divisão e não explicitam conhecimentos, mesmo com interferências da pesquisadora.

O aluno A11 demonstra a mesma habilidade do aluno A1, associa a um valor monetário, porém solicita papel para confirmar utilizando o algoritmo convencional. Demonstrou habilidade na operação com algoritmo.

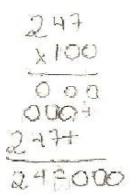
## 4.3 – Entrevistas com alunos sobre o cálculo escrito

Para esta sessão foi solicitado o uso de lápis e papel, pois temos como objetivo verificar a compreensão do aluno referente às técnicas operatórias. E só apresentaremos trechos das entrevistas nos momentos de intervenção.

As operações a serem realizadas foram:

- 247 x 100 (questão 1.5D)

O aluno A4 utilizou o algoritmo da multiplicação e fez o seguinte processo:



P: Você pode me explicar o porquê desse sinal de “mais” e porque desloca para a esquerda?

A4: *Se não fizer assim a conta não dá certo.*

P: Você sabe me explicar  o que é unidade, dezena e centena nesse número (100)? E porque esses três zeros no resultado?

A4: *Unidade fica aqui (aponta para o zero), a dezena (aponta para o outro zero) e centena é 1. É isso unidade, dezena e centena... acho que é isso. Os três zeros são esses aqui de cima, eu trago para baixo.*

Os alunos A1 e A2 fazem o algoritmo convencional, porém riscam os zeros e não desenvolvem o cálculo.

O aluno A11 demonstra conhecer o procedimento do algoritmo convencional da multiplicação.

- 550 : 24 (2.6A)

O aluno A11 também tem habilidade com as técnicas operatórias da divisão, porém sem explicitar os passos.

Os alunos A1, A2 e A4 não realizaram essa operação no dia da atividade, são 3 dos 8 alunos que deixaram em branco. Nas entrevistas demonstraram falta de habilidade com o algoritmo convencional, afirmando terem dificuldades com a divisão “com dois números”, não parecem familiarizados com as palavras “algarismo” ou “dígitos”.

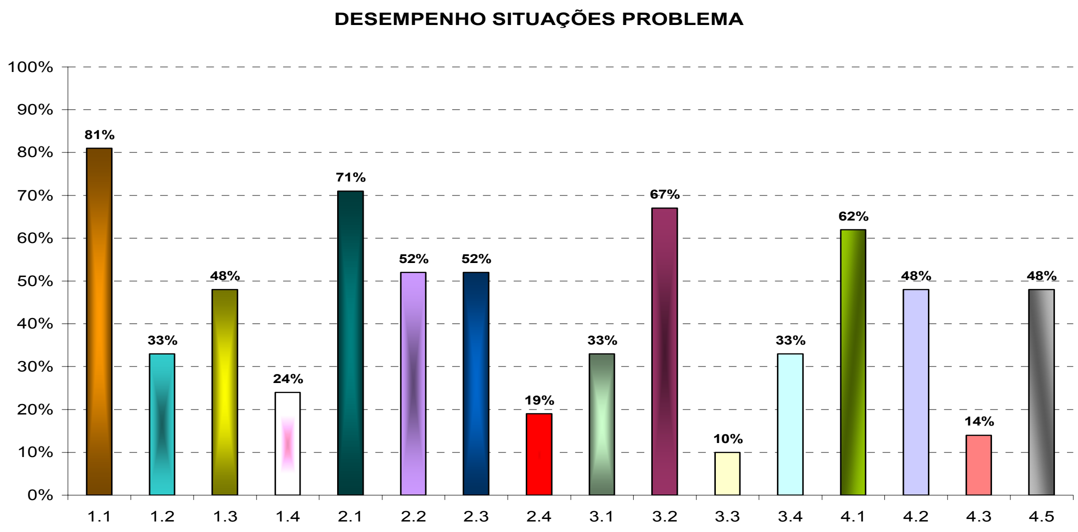
# CAPÍTULO 5
# CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, vamos retomar as questões que formulamos para orientar nosso trabalho e buscar em nossa pesquisa alguns elementos para respondê-las.

## 5.1 Sobre o que alunos de 5ª série revelam conhecer, relativamente à análise, interpretação e resolução de situações-problema, com compreensão de diferentes significados da multiplicação e divisão.

No caso particular do grupo pesquisado, verificamos que o desempenho na resolução de situações problema foi pouco satisfatório, muito provavelmente por não compreenderem a própria situação e, em decorrência, não saber escolher adequadamente a operação que poderia resolvê-la. Um número significativo de alunos sequer tentou resolvê-las, fato revelado pelas questões deixadas em branco. Um fato interessante e positivo é o de que muitos alunos usam procedimentos não convencionais para resolver as situações-problema e fazem registros de multiplicação, por exemplo, para mostrar como o resultado da divisão está correto.

Se considerarmos as contribuições de Vergnaud (1996; 2003), Franchi (1995; 2002) e outros autores, sobre o campo multiplicativo, neste grupo as situações-problema em que os alunos melhor se desempenharam estão representadas no gráfico a seguir:




**Quadro 19** - Desempenho nas Situações-Problema

A situação-problema 1.1 utiliza a multiplicação do tipo proporção simples com razão 2 e observamos, pelas análises, que as operações de multiplicação com os dobros foram mais facilmente memorizadas, 17 alunos perfazem o total de 81% de acertos.

A segunda situação-problema com melhor desempenho foi a 2.1, referente a divisão do tipo proporção simples de razão 4. A situação problema 3.2 foi de multiplicação com idéia de configuração retangular e, por fim, 4.1 foi multiplicação com idéia de combinatória.

O quadro mostra que as situações-problema com operações de multiplicação foram as de melhor desempenho e as situações de proporção simples apresentaram maior compreensão.

Entre as situações de divisão (1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 3.1, 3.3 e 4.2) o percentual de desempenho médio foi em torno de 30%.

Observamos ainda que as operações que envolveram a idéia de operador tiveram um desempenho em torno de 10%, fato preocupante e esperado.

Pelo que foi descrito, concluímos que os alunos de 5ª séries, do grupo pesquisado, revelaram conhecer com compreensão alguns significados da multiplicação, principalmente no que se refere aos problemas de proporção simples.

Segundo Vergnaud (1996), na resolução de problemas de aritmética dita elementar, as crianças deparam com diversas dificuldades conceituais. É em termos de esquemas que devemos analisar a escolha das operações e dos dados adequados à resolução de um problema para o qual existem diversas possibilidades de escolha.

Nossas análises apontaram três classes de categorias no que tange aos procedimentos de resolução de situação problema: Utilização de técnicas operatórias com sucesso, Utilização das técnicas operatórias sem sucesso e Procedimentos inadequados ao campo multiplicativo.

Na primeira classe destacamos o grupo de alunos que realizaram a análise, interpretação e resolução de situações problema, com compreensão de diferentes significados da multiplicação e divisão, além da utilização de técnicas operatórias como estratégias de cálculo. Apresentamos ainda, nessa classe, as semelhanças de procedimentos de resolução dos alunos típicos dessa categoria e que problemas de proporção simples com valores pequenos são propícios a esboço apenas da resposta, sem registro de cálculos e problemas relacionados ao cotidiano do aluno, que envolvem o sistema monetário nacional, tendem a resolução na língua natural.

Apesar de demonstrarem um nível de compreensão dos processos envolvidos nos cálculos que realizaram, esses alunos em algumas situações utilizaram as técnicas operatórias corretas com dados incorretos, o que pode demonstrar falta de interpretação do problema.

A segunda classe foi destacada pelos alunos típicos de resolução com técnicas operatórias por vezes incorretas e outras não. A análise dos protocolos mostrou a compreensão do desenvolvimento das técnicas operatórias, porém faltaram a análise e interpretação do problema. Verificamos que o problema 1.4 apresentou um alto índice de respostas na língua natural, o que, devido à situação de divisão entre números em que o quociente não fosse um número natural, poderia ter refletido esse tipo de procedimento. Em outros protocolos, dessa classe, observamos o reconhecimento da operação, mas sem nível de compreensão dos processos envolvidos, pois o aluno apresentava a “conta armada”, apenas.

A terceira classe foi composta pelos alunos que utilizaram as técnicas operatórias inadequadas, onde observamos falta de compreensão aos diferentes significados das operações do campo multiplicativo, além de também não compreenderem o Sistema de Numeração Decimal, o que gerou falta de percepção dos processos envolvidos nos cálculos que realizaram.

Essa última classe foi dividida em duas outras, aquelas descritas acima e as que utilizaram a língua natural como resposta, em que percebemos a dificuldade com o zero intercalado e com divisão com números decimais.

Diante das entrevistas verificamos que alguns alunos apresentaram dificuldades em interpretar a situação problema e assim, utilizaram os valores do problema como procedimento de solução. Por exemplo, no problema 1.3 apareceu a seguinte resolução: 14 x 6 = 84. Esse tipo de resolução demonstrou a interpretação errônea do aluno, porém durante a entrevista um dos alunos questionou: “Cada caderno custa R$ 14,00?”, e o simples fato da pesquisadora repetir o problema o levou à solução correta.

Um fato interessante, nas entrevistas, foi que os alunos, apesar das dificuldades com a operação, citam exemplos de divisão e explicitam conhecimentos de divisão por partes e por quotas. As intervenções da pesquisadora foram úteis para perceber regularidades em algumas situações, mas não suficientes para a apropriação do conhecimento, por exemplo, os problemas 3.3 e 4.3 que utilizaram a idéia de operador.

Observamos regularidades nas crianças, na maneira como abordam e tratam uma mesma situação, porém, segundo Vergnaud (1996), essas regularidades não obedecem a uma ordem, nem um calendário estrito, mas dizem respeito às distribuições de procedimentos e não são univocamente determinados.

Porém, o conjunto forma um todo coerente para um dado campo conceitual, "... é possível, nomeadamente, observar as principais filiações e as principais rupturas, o que constitui a principal justificativa da teoria dos campos conceituais".

Embora com menor freqüência, vários procedimentos não operatórios foram usados pelos três grupos descritos no início deste capitulo.

Neste estudo, verificamos que alguns alunos podiam entender as relações multiplicativas mesmo não chegando à solução quantitativa correta.

## 5.2 Sobre como esses alunos se desempenham em cálculos mentais envolvendo multiplicação e divisão com números naturais.

Com relação ao cálculo mental, o grupo pesquisado mostrou um desempenho bem razoável, especialmente no caso da multiplicação.

Ao analisarmos as situações de cálculo mental observamos que, no caso da multiplicação, os alunos tiveram melhor desempenho nas questões que envolveram multiplicação por 1, 2, 4 e 5. Segundo Parra (1996), diversas pesquisas afirmam que os dobros e as combinações nas que se acrescenta 1 a uma quantidade são mais facilmente memorizadas que outras combinações. A autora aponta estudos de Kamii a esse respeito:

> Kamii assinala que entre os dobros, 2 + 2 é a primeira a ser memorizada, seguida de 5 + 5. Esta última, apesar de ser uma soma maior, é mais fácil de lembrar do que 3 + 3 ou 4 + 4. Igualmente, 10 + 10 é mais fácil de lembrar do que 9 + 9. Por outro lado, 2, 5 e 10 são apoios fundamentais na organização do repertório e no tratamento das quantidades. Os dobros, além de serem fáceis de memorizar, se convertem na base para resolver outros cálculos. Assim 5 + 6 pode ser pensado como 5 + 5 + 1. (p. 214)

Outra consideração em relação ao cálculo mental refere-se à apropriação de regras explicitadas por professores, por exemplo, ao explicitarem por que "965 x 0 = 0", alguns alunos responderam "*A professora falou que qualquer número vezes zero é zero*". A seqüência de justificativas efetuada pelos alunos "apresenta claramente uma organização invariante, que assenta simultaneamente nos hábitos aprendidos (como o citado) e em teoremas como: "conserva-se a igualdade dividindo os dois lados por a" (VERGNAUD, 1996, p.158)".

Ainda nas situações de cálculo mental, convém destacar que foi senso comum a dificuldade com a divisão entre os alunos entrevistados, quando um dos alunos afirmou ter dificuldades com a divisão, principalmente quando o divisor possui dois algarismos. O aluno A11 teve o melhor desempenho em cálculo mental (acertou os 16 propostos) e mostrou conhecimento sobre o Sistema de Numeração Decimal, além das propriedades do campo multiplicativo para resolução do cálculo mental.

## 5.3 Sobre como esses alunos se desempenham em cálculos escritos envolvendo multiplicação e divisão com números naturais.

Antes de considerar a análise dos procedimentos e desempenho dos alunos no cálculo escrito é interessante mencionarmos que muitas vezes o aluno não atribui significado ao algoritmo que aplica, assim não pôde interpretar o que obteve nas diferentes etapas do cálculo escrito.

A afirmação pôde ser confirmada quando solicitamos, nas entrevistas, aos alunos para que resolvessem e explicitassem seus cálculos. Em algumas situações, observamos que, mesmo em cálculos considerados fáceis por esses alunos, é difícil a explicitação das etapas.

Vergnaud (1996) afirma que em relação aos algoritmos falta aos alunos a propriedade de chegar ao fim com segurança num número finito de passos e quase impossível explicitarem esses passos, embora sejam capazes de executar a seqüência das operações.

Kamii (1995) afirma  que o algoritmo é interessante quando o valor posicional dos números já está apropriado pelos alunos.

Nas entrevistas, ao serem solicitados a explicarem a solução da operação pelo algoritmo, explicaram os famosos "vai um" como números isolados.

A análise do desempenho apontou um grande índice de brancos, o que, já discutido nas situações-problema, mostra que nem ao menos mobilizaram ações para resolução.

A análise dos procedimentos indicou que o aluno não utilizou estratégias diferenciadas em cálculo escrito.

Saiz (1996) afirma que os algoritmos ensinados aparecem como um puro trabalho sobre os números, independentes dos dados da situação enunciada. Segundo a autora, os algoritmos apresentam uma relação superficial com o conhecimento. As crianças necessitam de recursos para reconhecer se a solução é correta ou não. “Tudo isso é provocado por um ensino de resolução de problemas reduzido a adivinhar qual é a operação adequada e aplicar o algoritmo correspondente”.(p. 170)

Convém mencionar que entre os que utilizaram o algoritmo convencional escreveram a conta na disposição clássica (vertical) para resolver as operações de cálculo escrito.

Enfim, o objetivo desse trabalho, além dos citados anteriormente, é oferecer aos professores interessados recursos para analisar as produções de seus alunos e possíveis intervenções. Também apresentar situações que permitam dar apoio sobre o que cada aluno sabe realizar no início da aprendizagem com operações do campo multiplicativo.

Cabe ao professor mostrar ao aluno que compreender o enunciado de uma situação problema não é só “interpretar” as palavras que estão lá escritas, mas também analisar e buscar conhecimentos pertinentes à solução.

O aperfeiçoamento das estratégias de cálculo mental também pode ajudar os alunos a contar com a utilização de propriedades das operações, além da estimativa. Normalmente, se os alunos têm dificuldades com cálculo mental, não podem ter idéia da ordem de grandeza dos números que operam.

Sobre as dificuldades com algoritmos, as pesquisas apontam os principais erros que se constituem em obstáculos para a aprendizagem, que nem sempre são superados com mais exercícios.

# REFERÊNCIAS

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Ministério da Educação: Secretaria da Educação Fundamental, 3. ed. Brasília: 2001.

FRANCHI, A *Considerações sobre a teoria dos campos conceituais*. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999. p. 155-195.

______ **Compreensão das situações multiplicativas elementares**. Tese de doutoramento,São Paulo: PUC-SP, 1995.

KAMII, C. ; Livingston, S. J. **Desvendando a Aritmética – Implicações na Teoria de Piaget**. Trad. Marta Rabiogio e Camilo F.Ghorayeb. Campinas: Papirus, 1995.

_____. **A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos**. Campinas: Papirus, 1990.

_____. **Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget. Campinas:** Papirus, 1996.

LUDKE, M. **A pesquisa qualitativa e o estudo da escola**. Caderno de Pesquisa, 49, maio 84, p. 43-44.

MAZA, C. **Enseñanza de la multiplicación y división**. Madrid: Editorial Sínteses, 1991

PARRA, C. *Cálculo Mental na escola primária*. In: PARRA,C & SAIZ,I. (Org.) **Didática da Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética.** Piaget. Coleção Os Pensadores. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983, p. 104-112.

PIRES, C.M.C. *Breve retrospectiva do ensino das operações com naturais*. In: CAMPOS, T.M.M (Org.) **Transformando a prática das aulas de Matemática: textos preliminares**. . São Paulo: PROEM Editora 2001. p.10-13

SAIZ, I. *Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir*. In: PARRA,C & SAIZ,I. (Org.) **Didática da Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

TAXA, F. de O. S. **Problemas multiplicativos e processos de abstração em crianças na 3ª série do ensino fundamental.** Tese de Doutoramento em Psiccologia Educacional – Campinas:Faculdade de Educação da Unicamp,2001.

VERGNAUD, G. *A teoria dos campos conceituais*. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Horizontes Pedagógicos - Instituto Jean Piaget, 1996, p. 155-191.

_____. *A gênese dos campos conceituais*. In: GROSSI, E.P. **Por que ainda há quem não aprende?** Petrópolis : Editora Vozes ,2003. p. 20-60.

ZUNINO, D. L. **A matemática na escola:** aqui e agora. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.

# ANEXOS

## ANEXO I

### DESEMPENHO INDIVIDUAL GERAL

| ALUNO | SITUAÇÕES PROBLEMA | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 | 4.1 | 4.2 | 4.3 | 4.4 |
| A1 | C | I | C | C | C | I | C | I | C | I | I | C | C | C | I | I |
| A2 | I | I | I | I | I | BR | BR | BR | BR | I | I | BR | C | C | I | BR |
| A3 | C | C | I | C | C | C | C | BR | I | C | BR | C | C | C | C | C |
| A4 | I | I | C | I | C | I | I | I | BR | C | I | I | I | I | BR | C |
| A5 | C | I | I | I | BR | BR | BR | BR | I | C | I | BR | I | C | I | I |
| A6 | C | BR | C | BR | BR | BR | BR | BR | I | I | BR | I | BR | BR | BR | BR |
| A7 | C | C | I | I | C | C | I | I | C | C | BR | C | C | C | C | C |
| A8 | C | C | C | I | C | C | C | C | I | C | C | C | C | C | BR | I |
| A9 | C | I | I | BR | BR | BR | BR | BR | I | I | I | I | C | BR | BR | BR |
| A10 | C | C | I | C | I | C | C | C | BR | C | I | BR | C | C | C | BR |
| A11 | C | C | C | C | C | C | C | I | C | C | C | C | C | C | I | C |
| A12 | C | I | I | I | C | I | C | C | I | C | I | BR | C | I | BR | I |
| A13 | C | C | C | C | C | C | C | I | C | I | I | C | C | I | I | C |
| A14 | C | I | C | I | C | C | C | I | C | C | I | I | I | I | I | C |
| A15 | C | I | I | I | C | C | C | C | C | C | I | I | I | C | I | C |
| A16 | C | I | I | I | C | C | C | BR | BR | C | I | BR | C | I | BR | I |
| A17 | C | C | C | I | BR | BR | BR | BR | I | C | BR | BR | C | C | I | I |
| A18 | C | BR | I | I | C | C | C | BR | C | C | BR | BR | I | I | I | C |
| A19 | C | I | C | I | C | BR | I | I | I | C | I | I | I | I | BR | BR |
| A20 | I | I | I | I | C | C | I | I | I | I | BR | C | I | C | I | C |
| A21 | I | I | C | I | C | I | I | I | I | I | BR | BR | C | I | I | C |

| ALUNO | ESTIMATIVA - MULTIPLICAÇÃO | | | | | | | | ESTIMATIVA - DIVISÃO | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1.5 A** | **1.5 B** | **1.5 C** | **1.5 D** | **2.5 A** | **2.5 B** | **2.5 C** | **2.5 D** | **3.5 A** | **3.5 B** | **3.5 C** | **3.5 D** | **4.5 A** | **4.5 B** | **4.5 C** | **4.5 D** |
| A01 | I | I | I | I | C | C | I | C | I | I | C | I | C | I | C | I |
| A02 | I | I | I | I | I | C | I | C | I | C | I | C | I | I | C | C |
| A03 | C | C | C | C | C | C | C | C | C | I | I | I | C | C | C | C |
| A04 | C | I | I | I | I | C | I | I | I | I | I | I | I | I | I | C |
| A05 | C | C | C | C | I | C | C | C | I | I | I | I | I | I | I | C |
| A06 | C | C | C | I | I | C | I | I | C | I | I | I | I | I | I | I |
| A07 | C | C | C | I | C | C | C | I | C | I | I | I | I | I | I | C |
| A08 | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | I | C | C | C |
| A09 | BR | BR | BR | BR | I | C | I | I | C | I | I | I | C | C | I | C |
| A10 | I | C | C | I | C | C | C | I | C | C | I | I | C | C | C | C |
| A11 | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C |
| A12 | C | C | I | I | C | C | C | C | I | C | C | I | I | I | I | I |
| A13 | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | BR | C |

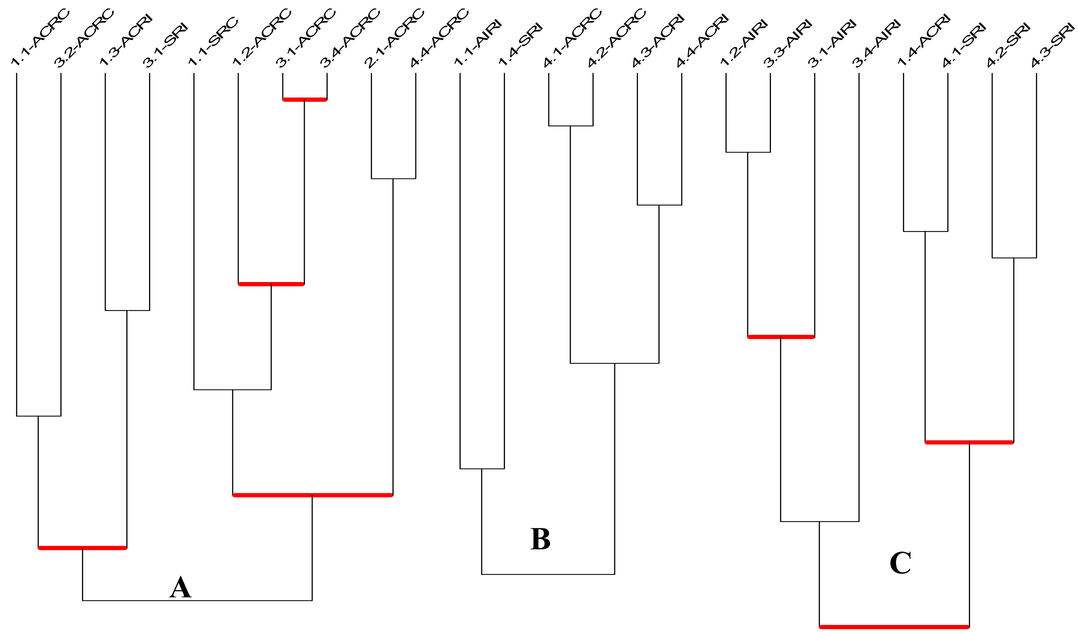
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A14 | C | I | C | C | C | C | C | I | C | C | I | I | I | I | I | C |
| A15 | C | I | I | I | I | C | C | I | I | I | C | I | I | I | I | C |
| A16 | C | C | C | C | C | C | C | I | C | C | I | I | C | I | I | C |
| A17 | C | C | C | C | C | C | C | C | C | I | I | I | I | I | I | C |
| A18 | C | I | C | C | C | C | C | C | C | C | I | I | I | I | C | I |
| A19 | I | I | C | C | C | C | C | I | C | I | I | C | C | I | I | I |
| A20 | I | C | C | C | I | I | C | C | I | I | I | C | I | I | I | I |
| A21 | C | C | C | I | C | C | C | C | C | I | I | I | I | I | C | C |

| ALUNO | **CÁLCULO ESCRITO** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1.6 A** | **1.6 B** | **2.6 A** | **2.6 B** | **3.6 A** | **3.6 B** | **4.6 A** | **4.6 B** |
| A01 | BR | BR | BR | BR | BR | C | C | BR |
| A02 | BR | BR | BR | BR | BR | BR | I | BR |
| A03 | C | C | I | C | I | C | C | C |
| A04 | I | I | I | I | C | I | C | I |
| A05 | BR | BR | BR | BR | BR | I | C | C |
| A06 | I | C | BR | BR | BR | I | BR | BR |
| A07 | C | C | I | C | C | C | C | C |
| A08 | C | C | C | C | C | C | C | C |
| A09 | BR | BR | BR | BR | BR | I | BR | BR |
| A10 | C | C | I | C | C | C | C | C |
| A11 | C | C | C | C | C | C | C | C |
| A12 | BR | BR | BR | BR | BR | BR | C | I |
| A13 | I | C | I | C | C | I | BR | C |
| A14 | C | C | BR | BR | I | C | C | I |
| A15 | C | C | C | C | C | C | C | C |
| A16 | C | C | I | I | I | C | C | I |
| A17 | C | C | I | I | I | C | BR | BR |
| A18 | C | C | I | C | BR | C | C | BR |
| A19 | C | C | I | C | I | C | BR | BR |
| A20 | I | C | I | I | I | BR | BR | BR |
| A21 | C | C | I | I | C | I | C | I |

## ANEXO II

| TABELA PARCIAL ANÁLISE INTERPRETATIVA DOS PROCEDIMENTOS | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1.1** | **1.2** | **1.3** | **1.4** | **2.1** | **2.2** | **2.3** | **2.4** |
| Aluno 01 | SRC | SRI | SRC | SRC | **SRI** | SRI | SRC | SRI |
| Aluno 02 | AIRI | AIRI | AIRI | AIRI | AIRI | BR | BR | BR |
| Aluno 03 | ACRC | ACRC | ACRI | SRC | ACRC | ACRC | ACRC | BR |
| Aluno 04 | ACRI | SRI | OOPC | SRI | OOPC | OOPI | SRI | SRI |
| Aluno 05 | ACRC | AIRI | ACRI | AIRI | BR | BR | BR | BR |

**ANEXO III**




Árvore de similaridades : C:\Documents and Settings\Administrador\Meus documentos\DISSERTAÇÃO_2007\dados chic\nova análise sem zerados\analise_problemas_sem_zerados1.csv

## ANEXO IV

Classificação ao nível: 1 : (3.1-ACRC 3.4-ACRC) similaridade : 0.994827
Classificação ao nível: 2 : (4.1-ACRC 4.2-ACRC) similaridade : 0.974519
Classificação ao nível: 3 : (1.2-AIRI 3.3-AIRI) similaridade : 0.9637
Classificação ao nível: 4 : (2.1-ACRC 4.4-ACRC) similaridade : 0.9637
Classificação ao nível: 5 : (4.3-ACRI 4.4-ACRI) similaridade : 0.951387
Classificação ao nível: 6 : (1.4-ACRI 4.1-SRI) similaridade : 0.925543
Classificação ao nível: 7 : (4.2-SRI 4.3-SRI) similaridade : 0.925543
Classificação ao nível: 8 : (1.2-ACRC (3.1-ACRC 3.4-ACRC)) similaridade : 0.919343
Classificação ao nível: 9 : (1.3-ACRI 3.1-SRI) similaridade : 0.891478
Classificação ao nível: 10 : ((1.2-AIRI 3.3-AIRI) 3.1-AIRI) similaridade : 0.875181
Classificação ao nível: 11 : ((4.1-ACRC 4.2-ACRC) (4.3-ACRI 4.4-ACRI)) similaridade : .819274
Classificação ao nível: 12 : (1.1-SRC (1.2-ACRC (3.1-ACRC 3.4-ACRC))) similaridade : 0.783689
Classificação ao nível: 13 : (1.1-ACRC 3.2-ACRC) similaridade : 0.752938
Classificação ao nível: 14 : ((1.4-ACRI 4.1-SRI) (4.2-SRI 4.3-SRI)) similaridade : 0.733813
Classificação ao nível: 15 : (1.1-AIRI 1.4-SRI) similaridade : 0.718149
Classificação ao nível: 16 : ((1.1-SRC (1.2-ACRC (3.1-ACRC 3.4-ACRC))) (2.1-ACRC 4.4-ACRC)) similaridade : 0.71435
Classificação ao nível: 17 : (((1.2-AIRI 3.3-AIRI) 3.1-AIRI) 3.4-AIRI) similaridade : 0.632677
Classificação ao nível: 18 : ((1.1-ACRC 3.2-ACRC) (1.3-ACRI 3.1-SRI)) similaridade : 0.528377
Classificação ao nível: 19 : ((1.1-AIRI 1.4-SRI) ((4.1-ACRC 4.2-ACRC) (4.3-ACRI 4.4-ACRI))) similaridade : 0.270319
Classificação ao nível: 20 : (((1.1-ACRC 3.2-ACRC) (1.3-ACRI 3.1-SRI)) ((1.1-SRC (1.2-ACRC (3.1-ACRC 3.4-ACRC))) (2.1-ACRC 4.4-ACRC))) similaridade : 0.0634826
Classificação ao nível: 21 : ((((1.2-AIRI 3.3-AIRI) 3.1-AIRI) 3.4-AIRI) ((1.4-ACRI 4.1-SRI) (4.2-SRI 4.3-SRI))) similaridade : 0.0244019
O nó mais significativo está no nível : 1

Nós significativos
ao nível : 1
ao nível : 8
ao nível : 10
ao nível : 14
ao nível : 16
ao nível : 18
ao nível : 21

Tipicalidade à classe : 3.1-ACRC,3.4-ACRC ( 1 )

Tipicalidade dos indivíduos: A1 : 0.995 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.995 A12 : 0.000 A13 : 0.995 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.0 A19 : 0.0 A20 : 0.0A21 : 0.000

Grupo ótima : A1 A11 A13

Tipicalidade à classe : 4.1-ACRC,4.2-ACRC ( 2 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.974 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.0 A7 : 0.974 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.974 A11 : 0.974 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.974 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A17 A1 A7 A10 A11

Tipicalidade à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI ( 3 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.962 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.962 A6 : 0.000
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.962 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.962
A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.962 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000
A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A9 A2 A12 A15 A5

Tipicalidade à classe : 2.1-ACRC,4.4-ACRC ( 4 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.962 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000
A7 : 0.962 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.962 A12 : 0.000
A13 : 0.962 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.962
A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A18 A3 A7 A11 A13

Tipicalidade à classe : 4.3-ACRI,4.4-ACRI ( 5 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.949 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.949 A6 : 0.000
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000
A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.949 A18 : 0.000
A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A1 A17 A5

Tipicalidade à classe : 1.4-ACRI,4.1-SRI ( 6 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000
A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.920 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.920
A19 : 0.000 A20 : 0.920 A21 : 0.000

Grupo ótima : A20 A18 A15

Tipicalidade à classe : 4.2-SRI,4.3-SRI ( 7 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.920 A14 : 0.920 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.920 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A14 A13 A18

Tipicalidade à classe : 1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC ( 1,8 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.677 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.054 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.985 A12 : 0.000 A13 : 0.985 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A1 A13 A11

Tipicalidade à classe :
1.3-ACRI,3.1-SRI ( 9 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.878 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.878 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A20 A3

Tipicalidade à classe :
1.2-AIRI,3.3-AIRI,3.1-AIRI ( 3,10 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.410 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.949 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.949 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.949 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.410 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.191 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A9 A12 A5

Tipicalidade à classe : 4.1-ACRC,4.2-ACRC,4.3-ACRI,4.4-ACRI ( 2,5,11 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.959 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.134 A6 : 0.000 A7 : 0.293 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.293 A11 : 0.499 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.959 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A11 A17 A1

Tipicalidade à classe :
1.1-SRC,1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC ( 1,8,12 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.684 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.077 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.779 A12 : 0.000 A13 : 0.779 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A1 A13 A11

Tipicalidade à classe : 1.1-ACRC,3.2-ACRC ( 13 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.672 A4 : 0.000 A5 : 0.672 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.672 A11 : 0.672 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.672 A17 : 0.672 A18 : 0.672 A19 : 0.672 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A17 A18 A19 A3 A5 A10 A11 A16

Tipicalidade à classe : 1.4-ACRI,4.1-SRI,4.2-SRI,4.3-SRI ( 6,7,14 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.182 A14 : 0.419
A15 : 0.182 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.920 A19 : 0.000 A20 : 0.419 A21 : 0.000

Grupo ótima : A20 A14 A18

Tipicalidade à classe : 1.1-AIRI,1.4-SRI ( 15 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.608 A5 : 0.000 A6 : 0.000
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000
A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000
A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.608

Grupo ótima : A4 A21

Tipicalidade à classe : 1.1-SRC,1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC,2.1-ACRC,4.4-ACRC ( 1,4,8,12,16 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.492 A2 : 0.000 A3 : 0.048 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.048 A8 : 0.063 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.799 A12 : 0.000 A13 : 0.799 A14 : 0.000 A15 : 0.042 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.048 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A1 A13 A11

Tipicalidade à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI,3.1-AIRI,3.4-AIRI ( 3,10,17 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.349 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.654 A6 : 0.059 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.926 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.654 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.349 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.166 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A12 A5 A9

Tipicalidade à classe : 1.1-ACRC,3.2-ACRC,1.3-ACRI,3.1-SRI ( 9,13,18 )

Tipicalidade dos indivíduos:
A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.814 A4 : 0.000 A5 : 0.272 A6 : 0.000
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.272 A11 : 0.073 A12 : 0.000
A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.272 A17 : 0.073 A18 : 0.272
A19 : 0.073 A20 : 0.290 A21 : 0.000

Grupo ótima : A3

Tipicalidade à classe :1.1-AIRI,1.4-SRI,4.1-ACRC,4.2-ACRC,4.3-ACRI,4.4-ACRI (2,5,11,15,19 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.712 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.010 A5 : 0.122 A6 : 0.000 A7 : 0.265
A8 : 0.029 A9 : 0.000 A10 : 0.265 A11 : 0.441 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.029 A17 : 0.839 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.010

Grupo ótima : A11 A1 A17

Tipicalidade à classe : 1.1-ACRC,3.2-ACRC,1.3-ACRI,3.1-SRI,1.1-SRC,1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC,2.1-ACRC,4.4-ACRC ( 1,4,8,9,12,13,16,18,20 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.440 A2 : 0.000 A3 : 0.083 A4 : 0.000 A5 : 0.012 A6 : 0.000
A7 : 0.044 A8 : 0.071 A9 : 0.000 A10 : 0.012 A11 : 0.676 A12 : 0.000
A13 : 0.666 A14 : 0.000 A15 : 0.039 A16 : 0.012 A17 : 0.003 A18 : 0.057
A19 : 0.003 A20 : 0.012 A21 : 0.000

Grupo ótima : A1 A13 A11

Tipicalidade à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI,3.1-AIRI,3.4-AIRI,1.4-ACRI,4.1-SRI,4.2-SRI, 4.3-SRI ( 3,6,7,10,14,17,21 )

Tipicalidade dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.170 A3 : 0.000 A4 : 0.017 A5 : 0.301 A6 : 0.031 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.321 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.301 A13 : 0.072 A14 : 0.151
A15 : 0.283 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.238 A19 : 0.086 A20 : 0.151 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A20 A14 A2 A18 A15 A5 A12 A9

Contribuição à classe : 3.1-ACRC,3.4-ACRC ( 1 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 1.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 1.000 A12 : 0.000 A13 : 1.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A1 A11 A13

Contribuição à classe : 4.1-ACRC,4.2-ACRC ( 2 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 1.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 1.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 1.000 A11 : 1.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 1.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A17 A1 A7 A10 A11

Contribuição à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI ( 3 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 1.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 1.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 1.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 1.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 1.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A9 A2 A12 A15 A5

Contribuição à classe : 2.1-ACRC,4.4-ACRC ( 4 )

Contribuição dos indivíduos:
A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 1.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 1.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 1.000 A12 : 0.000 A13 : 1.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 1.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A18 A3 A7 A11 A13

Contribuição à classe : 4.3-ACRI,4.4-ACRI ( 5 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 1.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 1.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 1.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A1 A17 A5

Contribuição à classe : 1.4-ACRI,4.1-SRI ( 6 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000 A15 : 1.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 1.000 A19 : 0.000 A20 : 1.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A20 A18 A15

Contribuição à classe : 4.2-SRI,4.3-SRI ( 7 )
Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 1.000 A14 : 1.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 1.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A14 A13 A18

Contribuição à classe : 1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC ( 1,8 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.293 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000 A8 : 0.293 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 1.000 A12 : 0.000 A13 : 1.000 A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A13 A11

Contribuição à classe : 1.3-ACRI,3.1-SRI ( 9 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 1.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000
A14 : 0.000 A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 1.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A20 A3

Contribuição à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI,3.1-AIRI ( 3,10 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.293 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 1.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 1.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 1.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.293 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.293 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A9 A12 A5

Contribuição à classe : 4.1-ACRC,4.2-ACRC,4.3-ACRI,4.4-ACRI ( 2,5,11 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 1.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.184 A6 : 0.000 A7 : 0.184
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.184 A11 : 0.423 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 1.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A17 A1

Contribuição à classe : 1.1-SRC,1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC ( 1,8,12 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.423 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.423 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.423 A12 : 0.000 A13 : 0.423 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima :
A1 A8 A11 A13

Contribuição à classe : 1.1-ACRC,3.2-ACRC ( 13 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 1.000 A4 : 0.000 A5 : 1.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 1.000 A11 : 1.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 1.000 A17 : 1.000 A18 : 1.000 A19 : 1.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A17 A18 A19 A3 A5 A10 A11 A16

Contribuição à classe : 1.4-ACRI,4.1-SRI,4.2-SRI,4.3-SRI ( 6,7,14 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.184 A14 : 0.423
A15 : 0.184 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 1.000 A19 : 0.000 A20 : 0.423 A21 : 0.000

Grupo ótima : A18

Contribuição à classe : 1.1-AIRI,1.4-SRI ( 15 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 1.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 1.000

Grupo ótima : A4 A21

Contribuição à classe : 1.1-SRC,1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC,2.1-ACRC,4.4-ACRC ( 1,4,8,12,16 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.225 A2 : 0.000 A3 : 0.106 A4 : 0.000 A5 : 0.000 A6 : 0.000 A7 : 0.106
A8 : 0.225 A9 : 0.000 A10 : 0.000 A11 : 0.553 A12 : 0.000 A13 : 0.553 A14 : 0.000
A15 : 0.106 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.106 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.000
Grupo ótima : A13 A11

Contribuição à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI,3.1-AIRI,3.4-AIRI ( 3,10,17 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.184 A3 : 0.000 A4 : 0.000 A5 : 0.423 A6 : 0.184 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 1.000 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.423 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.184 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.000 A19 : 0.184 A20 : 0.000 A21 : 0.000

Grupo ótima : A9

Contribuição à classe : 1.1-ACRC,3.2-ACRC,1.3-ACRI,3.1-SRI ( 9,13,18 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.000 A3 : 1.000 A4 : 0.000 A5 : 0.423 A6 : 0.000 A7 : 0.000
A8 : 0.000 A9 : 0.000 A10 : 0.423 A11 : 0.184 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.423 A17 : 0.184 A18 : 0.423 A19 : 0.184 A20 : 0.184 A21 : 0.000

Grupo ótima : A3

Contribuição à classe : 1.1-AIRI,1.4-SRI,4.1-ACRC,4.2-ACRC,4.3-ACRI,4.4-ACRI ( 2,5,11,15,19 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.368 A2 : 0.000 A3 : 0.000 A4 : 0.106 A5 : 0.106 A6 : 0.000 A7 : 0.106
A8 : 0.106 A9 : 0.000 A10 : 0.106 A11 : 0.225 A12 : 0.000 A13 : 0.000 A14 : 0.000
A15 : 0.000 A16 : 0.106 A17 : 0.553 A18 : 0.000 A19 : 0.000 A20 : 0.000 A21 : 0.106

Grupo ótima : A1 A17

Contribuição à classe : 1.1-ACRC,3.2-ACRC,1.3-ACRI,3.1-SRI,1.1-SRC,1.2-ACRC,3.1-ACRC,3.4-ACRC,2.1-ACRC,4.4-ACRC ( 1,4,8,9,12,13,16,18,20 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.118 A2 : 0.000 A3 : 0.333 A4 : 0.000 A5 : 0.118 A6 : 0.000
A7 : 0.057 A8 : 0.184 A9 : 0.000 A10 : 0.118 A11 : 0.333 A12 : 0.000
A13 : 0.255 A14 : 0.000 A15 : 0.057 A16 : 0.118 A17 : 0.057 A18 : 0.184
A19 : 0.057 A20 : 0.057 A21 : 0.000

Grupo ótima : A18 A8 A13 A11 A3

Contribuição à classe : 1.2-AIRI,3.3-AIRI,3.1-AIRI,3.4-AIRI,1.4-ACRI,4.1-SRI,4.2-SRI,4.3-SRI ( 3,6,7,10,14,17,21 )

Contribuição dos indivíduos:

A1 : 0.000 A2 : 0.074 A3 : 0.000 A4 : 0.074 A5 : 0.244 A6 : 0.074
A7 : 0.000 A8 : 0.000 A9 : 0.244 A10 : 0.000 A11 : 0.000 A12 : 0.244
A13 : 0.074 A14 : 0.155 A15 : 0.244 A16 : 0.000 A17 : 0.000 A18 : 0.244
A19 : 0.074 A20 : 0.155 A21 : 0.000

Grupo ótima : A20 A14 A9 A5 A12 A18 A15

**V – Autorização**

Eu, ______________________________________, RG, autorizo o aluno ___________ a participar das atividades que compõem o Instrumento de Coleta de Dados para o Projeto de Pesquisa da professora Aparecida de Lourdes Bonanno.

Guarulhos, ____/____/_____

______________________________
Assinatura do responsável legal