LUCIANA SIMONETI FERREIRA CARDIA

INTEGRANDO A GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2007

LUCIANA SIMONETI FERREIRA CARDIA

INTEGRANDO A GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do(a)* **Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud**

PUC/SP
São Paulo
2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ Local e Data: _______________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais

Antonio Irani Franco Ferreira Cardia e

Neide Adélia Simoneti Ferreira Cardia

*e ao meu irmão **Fernando Simoneti Ferreira Cardia**,*

pelo incentivo, apoio, colaboração, preocupação constante e carinho.

AGRADECIMENTO

A DEUS, por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Aos professores-doutores Saddo Ag Almouloud e Anna Franchi, pelo trabalho de orientação, desenvolvido com muita competência, dedicação, amizade e paciência.

Aos professores-doutores da Banca Examinadora, Ana Paula Jahn, Maria do Carmo Domiti e Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução dessa dissertação.

À coordenação e ao corpo docente do programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio, sugestões, apoio e compreensão.

Às professoras Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Silvia Dias Alcântara Machado, pelo incentivo, carinho e dedicação para comigo durante o curso e essa caminhada.

Às amigas Ana Paula Silva, Irina, Yumi, Renato, Elza, Márcia, Denise, e demais colegas do mestrado pelo apoio, carinho e dedicação durante a trajetória deste trabalho.

À Direção, Coordenação e Corpo Docente de Matemática e amigos da Escola Estadual na qual aplicamos o projeto, pela confiança, incentivo e companheirismo em todos os momentos.

A todos que, de algum modo, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Agradeço em especial aos meus pais, irmãos e familiares, pela paciência, compreensão, cooperação e apoio.

RESUMO

INTEGRANDO A GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

O objetivo dessa pesquisa é o estudo dos fenômenos que interferem no sistema de ensino-aprendizagem do conceito de expressões algébricas no Ensino Fundamental. Além disso, apresenta uma proposta de ensino do conceito de expressão algébrica, utilizando a Geometria como instrumento de construção e proporciona uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo por meio de uma seqüência didática envolvendo o conceito de área como instrumento principal de construção do conhecimento matemático, assim como os processos de decomposição e composição de figuras planas, eqüicomposição de figuras, equivalência de áreas. As seguintes hipóteses nortearam o desenvolvimento das diferentes atividades propostas:

- a escolha de situações-problema envolvendo determinação de áreas de figuras geométricas, em particular área de retângulos, possibilitando as comparações dessas figuras em termos de área como grandeza.
- estudar a área como grandeza, levando à construção das expressões algébricas generalizadas.
- uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de expressão algébrica, utilizando-se dos conceitos geométricos, como o conceito de área, os processos de decomposição e composição de figuras planas, possibilitando ao aluno condições favoráveis à aprendizagem deste conceito.

Esta pesquisa está fundamentada principalmente em duas teorias: a Dialética Ferramenta-Objeto e a Mudança de Quadros de Régine Douady (1986) e na teoria de Registros de representação Semiótica de Raymond Duval (1993,1994,1995). A metodologia adotada seguiu os princípios da Engenharia Didática. A pesquisa envolveu professores do Ensino Fundamental e Médio e foi aplicada numa turma de alunos da 7ª série do Ensino Fundamental.

Palavras-Chave: expressões algébricas, conceito de área, conceitos geométricos, ferramentas, eqüicomposição, decomposição, composição, perímetro, ensino-aprendizagem, grandeza, generalização, quadro e registro.

ABSTRACT

INTEGRATION OF GEOMETRY WITH ALGEBRA IN THE CONSTRUCTION OF ALGEBRAICS EXPRESSIONS.

The objective of this research is to study phenomena that influence the teaching and learning of the concept of algebraic expressions in Elementary Education (students aged 7-15). It presents a teaching proposal for the conception of Algebraic Expressions; uses the Geometry as a tool of construction and provide a reflection about the learning of this concept through a teaching didactic sequence involving the concept of area as principal tool to construction of mathematic knowledge, as well as, the processes of decomposition and composition of planes figures, equicomposition of figures and area equivalents. The following hypothesis guided the development of the different activities proposed:

- choose of problem situations involving determinate on of the areas of geometrical figures, in particular the area of rectangle, allowing comparisons these of figures using, area as magnitude
- to study area as a magnitude and leading to the construction of generalized algebraic expressions.
- a proposal for teaching and learning the concept of algebraic expressions, making use of the geometric concepts, like area concept, decomposing and composing processes of plan figures, this allows the student favorable conditions to learning this concept.

This research is based mainly on two theories: the Tool-Object Dialectic and the Change of Pictures of Régine Douady (1987) and Registries of Semiotic Representation of Raymond Duval (1993). The adopted methodology follows the principles of the Didactical Engineering. The research involved teachers and students of the 7th grade of Elementary Education.

Key-words: algebraics expressions, area concept, geometrics concepts, tool, equicomposition, decomposition, composition, perimeter, teaching-learning, magnitude, generalization, picture and register**.**

SUMÁRIO

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, procuramos investigar os procedimentos utilizados pelos alunos da 7ª série do Ensino Fundamental na aprendizagem dos objetos matemáticos contidos no campo da Álgebra, sabendo-se que o campo algébrico é composto por diversos conceitos matemáticos.

Para selecionarmos nosso objeto de estudo nesta pesquisa, realizamos uma longa análise sobre os métodos de ensino utilizados na Álgebra, a minha experiência docente e discussões com outros docentes da área de matemática a respeito dos conceitos algébricos, nos quais os alunos apresentam muita dificuldade. Além disso consideramos, também, as pesquisas realizadas a respeito dos conceitos algébricos.

Sendo assim, escolhemos, como objeto de estudo de nossa pesquisa, as "Expressões Algébricas". Este objeto matemático vem sendo tema de estudo freqüente das pesquisas científicas no campo da Educação Matemática, por ser considerado um dos conceitos no qual os alunos apresentam maior dificuldade .

Este trabalho procura analisar e propor uma proposta de ensino – aprendizagem para os conceitos algébricos, através da integração da Álgebra como os demais ramos da Matemática. No caso do nosso projeto, procuramos integrar a Geometria com a Álgebra por meio da utilização de algumas ferramentas, tais como: o conceito de Área de figuras planas, processo de decomposição e composição de figuras planas, equivalência entre as expressões, e entre outros recursos; levando os alunos a construírem a noção de expressão algébrica.

Nosso objetivo foi buscar um modelo de ensino para as expressões algébricas, de maneira que esta noção seja construída de forma significativa pelo aluno, considerando e valorizando os seus conhecimentos matemáticos anteriores, além de procurar compreender os erros dos alunos cometidos durante o processo de aprendizagem deste conceito e tentar propor novas alternativas que amenizem estas situações.

As motivações que nos levaram a adotar este tema e que nortearam nossa pesquisa foram as dificuldades que os alunos enfrentam para compreender as noções algébricas e os erros cometidos pelos alunos durante a resolução de problemas propostos, tais como: o erro de concatenação, ausência de parênteses, a dificuldade em transformar o pensamento aritmético em algébrico, e a manipulação das expressões algébricas.

Para buscarmos alternativas para solucionar estes problemas no campo da Álgebra e desenvolvermos um modelo de ensino adequado, adotamos como referencial teórico a “Dialética Ferramenta-Objeto” e o “Jogo de Quadros” desenvolvidos por Régine Douady (1989) nas pesquisas realizadas no sistema de ensino francês, no qual os alunos apresentavam dificuldades semelhantes aos nossos alunos brasileiros.

Privilegiamos as pesquisas de Booth (1984,1988), Kieran (1989, 1992), Mason (1996), Douady-Perrin-Glorian (1989), Baltar (2000), Nakamura (2003), Facco (2003), Rico (1994), Lemonyne, Conne e Brun (1993), que consideram a hipótese de que os erros dos alunos em Álgebra estão diretamente relacionados aos hábitos dos alunos desenvolvidos ao longo dos estudos primários.

A escolha do tema deu-se através de um longo estudo e análise das pesquisas realizadas na área de Álgebra e pelas dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o processo de aprendizagem das noções algébricas, além dos outros fatores apresentados anteriormente na fundamentação teórica desta pesquisa.

Nossa pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual do Estado de São Paulo, localizada na região sul da cidade de São Paulo. O público alvo de estudo foi uma classe de 7ª série do Ensino Fundamental, composta por 45 alunos de 12 a 15 anos na qual aplicamos e desenvolvemos a seqüência didática, composta por 12 atividades, buscando construir uma metodologia de ensino para a noção de expressão algébrica, através da Geometria, procurando dar significado a este conhecimento matemático.

Nosso trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo que no **Capítulo 1** abordamos: **A Pesquisa: um plano em perspectiva**, no qual apresentamos os seguintes tópicos: **Antecedentes e Motivações**, **Justificativa, Fundamentação Teórica**, **Metodologia de ensino e procedimentos metodológicos**; no **Capítulo 2 Integrando a Geometria e a Álgebra**, apresentando um panorama histórico sobre esta relação entre os ramos da Matemática; no **Capítulo 3** fazemos referências **à noção de Grandeza**; no **Capítulo 4 o Erro como uma possibilidade de aprendizagem**, tratando e discutindo os Erros e dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra; no Capítulo 5 **A pesquisa: um plano em ação** apresentamos a seqüência didática, análise a priori, análise a posteriori, e análise dos resultados à luz das teorias da "Dialética Ferramenta-Objeto", o "Jogo de Quadros", teorias desenvolvidas por Régine Douady (1989) e a "Teoria de Registros de Representações" desenvolvida por Raymond Duval (1993). Além disso, comparamos os erros dos alunos mostrados nas pesquisas científicas, como aqui apresentados.

Ao final, apresentamos as **Considerações Finais**, seguida por **Referências Bibliográficas** e pelos **Anexos** referentes ao instrumento piloto, ficha de atividades da seqüência didática, e os protocolos dos alunos.

CAPÍTULO 1. A PESQUISA: UM PLANO EM PERSPECTIVA

1.1 Antecedentes e Motivação

Na trajetória da vida escolar, a aprendizagem da Matemática é, para muitas pessoas, motivo de lembranças algumas vezes agradáveis e outras vezes nem tanto. Cada indivíduo que tem experiências com esta disciplina, pode ter sentimentos que vão desde a paixão até o ódio declarado a ela. Somente através desse relato, já justificaria uma investigação sobre as causas de comportamentos tão variados com relação a esta disciplina que, para muitos, é conhecida como a rainha das ciências.

Muitos pesquisadores têm-se empenhado em buscar explicações para os sucessos e insucessos dos que se aventuram pelos caminhos da aprendizagem da Matemática.

Minha relação com as questões sobre o ensino-aprendizagem da Matemática vem se consolidando ao longo da minha trajetória docente. As primeiras reflexões sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem da Matemática surgiram quando estava cursando o terceiro ano de Engenharia Química na Universidade Mackenzie, em 1992, quando comecei a lecionar Matemática e Química para o Ensino Fundamental e Médio. Percebi, nesta época, a necessidade de desenvolver novas metodologias para o ensino-aprendizagem da Matemática. Após concluir o curso de Engenharia Química, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na PUC-SP e, tive a oportunidade de aprofundar meus estudos sobre os conceitos matemáticos nas áreas de Geometria, Álgebra, Estatística, História da

Matemática, Trigonometria, Informática, entre outras. Os conteúdos desenvolvidos durante o curso tornaram-se ferramentas essenciais para entender o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e buscar meios para melhorar o meu desempenho profissional junto aos alunos.

Durante minha trajetória no campo Matemático, descobri que duas áreas despertaram a minha atenção: uma delas, a Álgebra, interesse originado na época escolar e, a Geometria, que durante o curso mudou o meu ponto de vista na questão de ensino e aprendizagem dos alunos. Essa mudança de visão a respeito da Geometria ocorreu, pois, durante a licenciatura, quando aprofundei os conhecimentos matemáticos através de leituras de livros, artigos que relacionavam e utilizavam a Geometria como ferramenta de construção de outros conhecimentos matemáticos, além de conhecer as biografias dos matemáticos como: Tales, Euler, Arquimedes, Platão, entre outros. Outros fatos, que me despertaram o interesse pela Geometria foram as diversas aplicações do teorema de Pitágoras para solucionar os problemas matemáticos, e desenvolver outras fórmulas algébricas, assim como, a distância entre dois pontos, que é utilizado na Geometria Analítica.

Concluída a graduação e desejando aprimorar meus conhecimentos, decidi ingressar no Mestrado Acadêmico em Educação Matemática na PUC-SP. Durante as reuniões realizadas nos grupos de pesquisas dos quais participei, percebei que as dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos algébricos eram comuns tanto nos cursos de Ensino Médio, como do Ensino Fundamental, através dos relatos e observações feitos pelos docentes e pelos pesquisadores da comunidade científica de Educação Matemática. Além disso, realizei um longo estudo a respeito das pesquisas feitas no campo da Álgebra e várias discussões com meus orientadores sobre os conceitos abordados nas pesquisas, para decidirmos qual seria o objeto de estudo de nossa pesquisa.

1.2 Justificativa

Como o campo da Álgebra é composto por diversos conceitos algébricos, tivemos que selecionar um deles para ser nosso objeto de estudo. Para isso, recorremos a nossa experiência docente e as conversas informais realizadas com os demais docentes da rede pública estadual e da rede privada da cidade de São Paulo, coletando informações sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a aprendizagem dos conceitos algébricos. Dentre as dificuldades apontadas por estes docentes, destacaram-se as dificuldades na compreensão da formação da expressão algébrica e na manipulação das quatro operações. Estas dificuldades ocorrem porque, o aluno não compreende bem a passagem do pensamento aritmético para o algébrico e, depois não consegue desenvolver e efetuar os cálculos entre as expressões. Esses fatos são apontados com freqüência nas pesquisas realizadas sobre o tema “Expressões Algébricas”, tais como: Kieran (1989), Kuchemann (1985), Nakamura (2003), Booth (1984), Baltar (2000), entre outros da comunidade científica de Educação Matemática, levando-nos a escolher como tema de pesquisa “As Expressões Algébricas”.

O tema “Expressões Algébricas” tem sido objeto de estudo freqüente dos pesquisadores devido aos erros cometidos pelos alunos em sala de aula. Isto pode ser comprovado através da análise dos resultados obtidos com as pesquisas, gerando uma necessidade de buscar novas alternativas para melhorar este processo, de forma que contribua para a construção deste conceito algébrico e, assim melhorando sua compreensão.

Nas pesquisas de Nakamura (2003), Lemoyne, Conne e Brunn (1993), nota-se a seguinte abordagem para os erros em Álgebra:

Segundo Lemoyne, Conne e Brunn:

> *... se os erros nos tratamentos das escritas literais fossem atributo exclusivo dos alunos principiantes em álgebra, não teriam merecido tanta atenção dos pesquisadores em Didática que, há muitos anos, buscam nos vários níveis de escolaridade a origem e a natureza dos erros que cometem*. (LEMOYNE, CONNE e BRUNN,1993, p.335)

As pesquisadoras acima apontam as dificuldades que os alunos encontram para transitarem da Aritmética para a Álgebra, desse modo, constatamos que elas não se limitam ao período, mas acompanham os alunos em toda a sua vida escolar. Portanto, é válido discutirmos e apresentarmos alguns desses erros.

Na trajetória escolar dos alunos, os erros cometidos por estes, como a substituição do valor literal pelo valor numérico, e vice-versa, são causados porque os alunos não sabem interpretar o significado da linguagem algébrica, bem como a manipulação de expressões algébricas envolvendo as regras formais. Vejamos agora, alguns dos exemplos discutidos nas pesquisas e que são comuns em sala de aula. Analisando os tipos de expressões $2x = x + x$ e x^2. Podemos observar que na visão dos alunos elas são compreendidas como se fossem a mesma coisa. Esta confusão ocorre porque, eles não sabem interpretar o significado algébrico das expressões, bem como a manipulação de expressões algébricas, porque seus conhecimentos matemáticos não são bem estruturados, como por exemplo: as propriedades aritméticas, as propriedades das potências, que são ferramentas importantes nas operações da multiplicação e divisão entre expressões; não sabem diferenciar as operações de adição e multiplicação ocasionando os erros na interpretação das expressões algébricas. Essas dificuldades de interpretação das expressões também são tratadas nas pesquisas de Kieran (1989), Bernadz (1996) e Lee assumindo a seguinte visão:

> *... estudos sobre os significados que os alunos atribuem aos símbolos e notações algébricas mostram que, em grande parte, as concepções algébricas desenvolvidas por eles e a relação que continuam a manter com a Álgebra nos vários anos após terem sido introduzidos a ela, são determinadas pela forma como esses símbolos e notações são introduzidos.* (BEDNARZ, 1996, p.3)

As autoras acima citadas procuram compreender melhor como o conhecimento é construído pelo aluno e, de que maneira o ensino e a aprendizagem da Álgebra vem merecendo destaque, despertando assim o interesse dos pesquisadores da comunidade internacional. Essas pesquisas têm dado suas contribuições para construir novas modelagens matemáticas, utilizando fundamentações teóricas que auxiliem o ensino da Álgebra e levantando algumas questões relacionadas ao processo de aprendizagem algébrica. Desta maneira é lançada uma questão inicial, que levou-nos a levantar outras hipóteses a respeito do ensino da Álgebra .

> *Quais são os tipos de situações que conduzem à emergência e ao desenvolvimento do pensamento algébrico tornando significativos para o aluno os conceitos algébricos fundamentais bem como favorecendo o seu uso?* (BEDNARZ et all, 1996, p.3)

Partindo-se da questão proposta por Bednarz (1996) e buscando respostas para esta, por meio da análise dos resultados das experiências obtidas durante a minha docência nas séries do Ensino Fundamental e Médio e das observações feitas sobre as dificuldades dos alunos na compreensão das expressões algébricas, procuramos instrumentos didáticos para construir este conhecimento matemático de forma significativa. Uma vez que este processo de ensino e aprendizagem das expressões algébricas é introduzido no inicio da 7ª série do Ensino Fundamental, e será exigido nas demais séries do Ensino Médio.

Desse modo, considerando minha experiência docente e os relatos das pesquisas sobre o assunto, levantamos algumas questões relativas ao processo de ensino e aprendizagem das expressões algébricas, que poderão buscar meios para que possamos diminuir ou evitar a ocorrência dos erros dos alunos. Assim, elaboramos as seguintes questões:

1) Quais são as dificuldades dos alunos enfrentadas na construção e manipulação das expressões algébricas?
2) Quais são as estratégias utilizadas pelos alunos para chegarem as expressões algébricas?
3) Quais são as concepções dos alunos sobre a equivalência das expressões algébricas?
4) Quais os recursos que podemos utilizar para torná-las mais significativas para o aluno?
5) Como podemos utilizar a Geometria como instrumento para a compreensão das expressões algébricas ?
6) Qual é a importância das expressões algébricas como instrumento de resolução de problemas?

Após apresentarmos as questões referentes às dificuldades enfrentadas pelos alunos, durante a aprendizagem da Álgebra. Escolhemos responder a seguinte questão: Como podemos utilizar a Geometria como instrumento para o ensino e a aprendizagem das expressões algébricas?

Partindo-se da questão escolhida, adotamos a Geometria como ferramenta de construção de alguns conceitos algébricos. Desse modo, selecionamos alguns dos recursos geométricos, que serão usados para a construção do conceito de expressão algébrica. Assim, para desenvolver nosso projeto, adotamos os seguintes conceitos geométricos: o conceito de área, que será nossa ferramenta principal e estará presente em todas as nossas atividades, procurando dar significado às expressões algébricas, a noção e reconhecimento das figuras planas, dando ênfase aos quadriláteros (quadrados, retângulos, trapézios) e triângulos; unidades de medidas padronizadas (centímetro e metro), noções de grandezas (comprimento e largura), a linguagem matemática (base, altura como sinônimos de comprimento e largura), o processo de decomposição e composição de polígonos, entre outros conceitos.

Escolhemos o método de ensino e aprendizagem, baseado na Geometria como instrumento de construção de conceitos algébricos, após termos realizados um longo estudo no campo Matemático, a partir dos fatos encontrados na História da Matemática como os trabalhos e aplicações matemáticas realizadas pelos Gregos como: Euclides (c.300 a.C.), Diofante (c.250 a.C.) e os Pitagóricos (c.540 a.C.), os quais já utilizavam os conceitos geométricos, como no caso as áreas de figuras planas para desenvolverem o ensino da Álgebra. Além disso, levamos em consideração os métodos adotados nas pesquisas científicas na Educação Matemática, que utilizaram a Geometria como ferramenta de construção das noções algébricas, tais como: as pesquisas de Kuchemann (1982), Booth (1984), Nakamura (2003), Baltar (2000), Kieran (1989), entre outros. Após, termos justificado nossas escolhas, acreditamos, que estes métodos podem ajudar na aprendizagem da Álgebra, melhorando a compreensão dos alunos a respeito das expressões algébricas, pois o conceito de área faz parte do cotidiano do aluno, além do mais é um instrumento que vem sendo trabalhado e exigido ao longo do sua vida escolar. Contudo, existem outros fatores que contribuíram para a nossa escolha, como os estudos realizados nos PCNs (1998), no qual apresentamos a seguir.

Baseado nos estudos realizados sobre os PCNs (1998), encontramos a seguinte justificativa para a nossa escolha:

> *a geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações problemas e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças diferentes, identificar regularidades e vice-versa.* (PCNs,1998, p.39)

Nota-se que a Geometria é considerada um campo fértil para a aplicação em diversos ramos da Matemática. Além disso, é válido lembrar que os livros didáticos atuais procuram seguir as orientações dos PCNs (1998) para elaborar, criar as situações matemáticas propostas através de problemas, situações envolvendo a lógica e padrões geométricos. Constatamos estas situações em alguns livros didáticos tais como: Imenes e Lellis (2002), Lopes (2000), entre outros.

Para compreender a passagem do pensamento aritmético do aluno para o pensamento algébrico, utilizando a Geometria como recurso, devemos compreender os seus elos com a Aritmética, conforme os relatos de Aleksandrov (1991) em sua pesquisa:

> *A Aritmética e a Geometria, não só se aplicam, uma a outra como também são fontes de outros métodos, idéias e teorias gerais. A Aritmética e a Geometria são as raízes sobre as quais tem crescido toda a matemática. A influência entre as duas se faz sentir desde o momento do seu nascimento.*
> *Para o comprimento de um objeto aplica-se a ele uma certa unidade de comprimento e se calcula quantas vezes é possível repetir essa operação; o primeiro passo (aplicação) é de caráter geométrico, o segundo (cálculo), de caráter aritmético. Quem conta seus passos ao andar já está unindo as duas.* (ALEKSANDROV, 1991, p.43)

Analisando a pesquisa de Aleksandrov (1991), notamos que a Geometria também pode ser considerada uma ferramenta essencial para a construção de outros conceitos matemáticos que encontramos nos demais ramos da Matemática, diferentes da Álgebra, neste caso o da Aritmética.

Considerando outras informações sobre as demais pesquisas realizadas no campo da Álgebra e que contribuíram e tiveram influências na construção deste projeto, destacamos as idéias apresentadas por Bell (1982) referentes aos processos de ensino e aprendizagem da Álgebra. Os estudos de Bell (1982) mostram que existe uma necessidade de buscar alternativas para melhorar a compreensão dos alunos a respeito dos conceitos algébricos. A pesquisadora considera a Álgebra como um campo complexo para os alunos, por este motivo eles apresentam muitas dificuldades em sua aprendizagem, conforme os relatos abaixo:

> *Os processos algébricos precisam ser desenvolvidos:*
> 1) *Utilizando a linguagem algébrica para expressar as relações e trabalhar com as representações;*
> 2) *Para a manipulação das expressões simbólicas dentro de diferentes formas expondo os aspectos claros destas relações;*
> 3) *E, finalmente, fazendo um processo com que muitos caminhos característicos, dos quais as mais importantes são as formas e a solução de equações, generalizando e trabalhando com funções e fórmulas.* (BELL, 1982, pp.174-5)

Segundo as idéias apresentadas por Bell (1982), podemos identificar e analisar quatro aspectos contidos no campo da Álgebra. O primeiro aspecto deve ser possível para a manipulação das expressões algébricas. Os alunos pré-algébricos podem resolver os problemas aritméticos mais complexos com bastante sucesso, por estar trabalhando com números relacionados nisto; encontrando a solução desejada, já nas soluções numéricas eles são incapazes ou relutantes para adotarem uma via algébrica, fazendo a primeira representação simbólica da situação e, então, fazer a transformação sintática, em seguida reinterpretando na situação original. Nota-se que estes sabem descrever o que eles fazem com o numeral simbólico e com o algoritmo; o passo algébrico é feito para tratar as quantidades as quais não são especificados numericamente (números generalizados) ou são como já não especificas (não generalizados). O segundo aspecto é a da aprendizagem do aspecto lingüístico da álgebra aprendida para escrever e ler a notação correta e significativa. O terceiro aspecto é aprender a manipular as operações de forma correta e fluente. O quarto aspecto consiste em adquirir a estratégia e a experiência realmente necessária para desdobrar esta linguagem nas atividades, assim como, a generalização, formando e resolvendo equações e, trabalhando funções e fórmulas.

Alguns dos quatro aspectos citados por Bell (1982), foram também estudados nas pesquisas de Malone e Taylor (1988).

Ao lermos a pesquisa de Bell (1982), e os quatro aspectos apontados pelo pesquisador, podem ser considerados as dificuldades enfrentadas pelos alunos, não somente no âmbito nacional como também, no internacional, ou seja, elas são comuns, independentes do País. Sendo assim, estes fatores levam-nos a aprofundar cada vez mais nossos estudos a respeito deste conceito algébrico.

Na pesquisa de Bell (1982), encontramos a aplicação da Geometria como instrumento dos conceitos algébricos através de uma atividade na qual ela utiliza-se de figuras planas, tais como o triângulo, para chegar à expressão algébrica desejada, utilizando as transformações geométricas.

Além da pesquisa desenvolvida por Bell (1982), destacamos outros trabalhos realizados na área que contribuíram para a escolha do método a ser desenvolvido durante a aplicação deste projeto de pesquisa. Os trabalhos realizados por Nakamura (2003), mostram a importância do uso da Geometria como um instrumento de construção através da generalização dos padrões numéricos para o geométrico, proposto por John Maison (1996). Além disso, a pesquisadora aponta em seu trabalho que existem diferentes abordagens que vêm sendo propostas no campo científico, tais como: generalização de padrões numéricos/geométricos e das leis que regem as relações numéricas, resolução de problemas, resolução de equações com auxílio do uso de modelos concretos, introdução de situações funcionais e a modelagem de fenômenos físicos e matemáticos. Outro aspecto abordado pela pesquisadora é o ensino da Álgebra Escolar em outros países, no qual a característica principal é a manifestação da Álgebra como uma generalização sobre números, sendo que em alguns deles o estudo e a descrição de padrões geométricos e regras gerais foram incluídos no currículo escolar. Um bom exemplo disto é a Austrália, cujo sistema de ensino e aprendizagem da Álgebra é promovido da seguinte forma: padrões geométricos, seqüências numéricas e tabelas de função. Esse exemplo mostra que o currículo de matemática vem se modificando e que este tema de padrões geométricos e a utilização de novos recursos para o processo de ensino e aprendizado da Álgebra vem sendo temas constantemente discutidos nos últimos congressos internacionais.

Outro fator que contribuiu para que adotássemos a Geometria como ferramenta de construção do conceito de expressão algébrica foram os relatos feitos pelo Grupo Azarquiel (1993).

> *Em um conjunto de figuras geométricas, é com freqüência, mais fácil manipular a informação, reordenando, comparando partes equivalentes, reconhecendo figuras similares, etc.As figuras geométricas permitem mobilizar capacidades de visualização e de organização espacial, que podem facilitar a construção que conduz a solução.* (GRUPO AZARQUIEL, 1993, p.31)

As idéias apresentadas pelo Grupo Azarquiel, evidenciam o uso de figuras geométricas como ferramenta para a construção de novos conhecimentos matemáticos, levando os alunos a mobilizarem seus conhecimentos geométricos que ajudam na formação do conceito e na sua visualização, além de contribuir para a compreensão do aluno a respeito do objeto matemático a ser ensinado. Em nosso projeto, buscamos articular a construção das expressões algébricas com o conceito de área, e tratando-a como grandeza, já que este conceito é familiar aos alunos. As expressões familiares podem ser definidas como as pré-noções que os alunos trazem consigo durante toda a sua vida escolar e que são mobilizadas quando estes são colocados a resolverem determinadas situações-problema.

Outras pesquisas que também contribuíram para a escolha do objeto a ser estudado foram os trabalhos de Küchemann (1981), Booth (1984), Collins (1974,1975), Chalouh e Herscovics (1988), Kieran (1989), Baltar (2000).

O trabalho realizado por Collins (1974, 1975) apontou e discutiu as dificuldades que os alunos apresentam em trabalhar com números grandes, números pequenos e letras, como também os problemas ocorridos durante a manipulação dos números aplicando as propriedades aritméticas. Nos estudos realizados por Collins (1974), foram estudados as seguintes questões abordadas no campo Aritmético como "3 + 2" que pode ser substituído pelo número "5", comparando com o campo da Álgebra através da expressão "x + 3" que não pode ser substituída por outro número. Esse estudo constatou que os alunos não sabiam aplicar a propriedade de fechamento quando manipulavam as expressões. Além do mais, outros pesquisadores como Davis (1975), também discute a questão levantada por Collis (1974), sendo "2 + 3" o problema e "5" a resposta, enquanto a expressão "x + 3" tanto descreve o processo (somar 3 com x), como dá nome a resposta. Dessa forma, os pesquisadores apresentam e discutem as dificuldades dos alunos na compreensão e manipulação das expressões algébricas, pois, eles não entendem a representação do x nas expressões construídas.

Já na pesquisa realizada por Booth (1981.a, 1981.b, 1984 e 1988), foram investigadas as bases intuitivas dos alunos para o simbolismo e estrutura em Álgebra. Através de um teste aplicado aos alunos utilizando a pesquisa de Küchemman (1981), que será estudado no próximo parágrafo, podemos observar as dificuldades que os alunos possuem em construir uma expressão algébrica que determine a área de um retângulo. Booth (1984) partiu do seguinte pressuposto utilizado por Küchemann (1981) Como podemos determinar a área do retângulo da figura 1 a seguir.

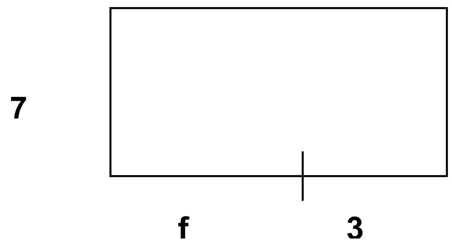


Figura 1. Adaptado do teste do CSMS (Conceitos em Matemática e Ciências Secundárias) pedindo aos estudantes para determinar a área do retângulo indicado (KÜCHEMANN, 1981, p.115)

Os resultados obtidos por Booth (1984) nesta pesquisa mostraram que 42% dos estudantes de 13 anos do CSMS[1] responderam 7f3 ou f21 ou f + 21. Em seguida, a pesquisadora realizou entrevistas com este grupo de alunos para questionar as respostas obtidas, levando-a a detectar que uma das dificuldades dos alunos estava relacionada com a compreensão das convenções do simbolismo algébrico. Dessa forma, a pesquisadora concluiu que a habilidade para descrever o método verbalmente não significa necessariamente a habilidade de reconhecer a simbolização correta daquele método. Outro foco, de estudo que iremos analisar

[1] CSMS (Conceitos em Matemática e Ciências Secundárias).

será o significado atribuído às letras, partindo da experiência realizada por Küchemann (1978, 1981). Em 1976, o pesquisador efetuou um estudo sobre as interpretações das formas literais dos estudantes como parte do projeto desenvolvido na CSMS[1]. O estudo foi feito em um grupo composto por 3000 alunos britânicos de 13 a 15 anos de idade. Partindo-se dos estudos realizados por Collins (1975), Küchemann pode categorizar cada item em seis níveis de interpretação de letras, de acordo com o nível mínimo requerido para um desempenho bem sucedido, conforme apresentamos a seguir:

> *(a) Letra avaliada: A letra recebe um valor numérico desde o princípio;*
> *(b) Letra não considerada: A letra é ignorada ou sua existência é reconhecida sem dar a ela significado;*
> *(c) Letra considerada como um objeto concreto: A letra é vista como uma abreviação para um objeto concreto ou vista como um objeto concreto de si mesma;*
> *(d) Letra considerada como uma incógnita específica: A letra é vista como um número específico mas desconhecido;*
> *(e) Letra considerada como um número generalizado: A letra é vista como representando, ou pelo menos sendo capaz de assumir, vários valores, ao invés de apenas um;*
> *(f) Letra considerada como variável: A letra é vista como representando um domínio de valores não específicos e uma relação sistemática é percebida existir, entre tais, dos conjuntos de valores.* (Apud KIERAN, 1989, p.13)

Segundo os resultados obtidos por Küchemann (1976), percebemos, que uma quantidade menor de estudantes foi capaz de considerar as letras como números generalizados[2]. Em nossa pesquisa, utilizaremos as concepções adquiridas nas pesquisas realizadas por Küchemann (1976) em relação aos termos literais, tais como: os fatos das letras serem consideradas variáveis e a questão de serem utilizadas como números generalizados. Além disso, as experiências utilizando-se da questão de determinação da área de retângulo, servem para verificar e comparar os

---

[2] **Letras como números generalizados**: esta expressão matemática, na qual as letras podem assumir e representar um conjunto de números e não somente um único. Utilizado-se, portanto, para generalizar os números.

resultados obtidos por Küchemann (1981) e Booth (1984), buscando meios que amenizem as dificuldades dos alunos neste campo.

O trabalho desenvolvido por Kieran (1989) baseado nas pesquisas de Küchemman (1981), Booth (1984), entre outros, discute profundamente as dificuldades dos alunos na compreensão das expressões algébricas, apontando as dificuldades que os alunos possuem em trabalhar com os números, por meio da aplicação das propriedades aritméticas, nas quais a pesquisadora denominou como termos processuais, ou seja, refere-se a operações aritméticas realizadas sobre números para produzir números, como exemplo temos uma expressão algébrica $3x + y$ sendo $x = 5$ e $y = 3$ respectivamente, substituindo na expressão obteremos o resultado igual a 18. Já o termo estrutural é definido por Kieran (1989), como sendo um conjunto diferente de operações que são levadas a efeito, não sobre os números mas sobre as expressões algébricas. Como por exemplo, $4x + 5y + 11x$, pode ser simplificada por $15x + 5y$, ou quando igualamos duas equações algébricas $7x + 4 = 4x + 6$, obtemos a expressão reduzida $3x + 4 = 6$, sendo que neste processo os objetos trabalhados são as expressões algébricas e não os números. As operações realizadas não são computacionais, pois resultam em novas expressões algébricas.

A pesquisa realizada por Cholouh e Herscivics (1988), no qual discutiam o ensino e aprendizagem da Álgebra utilizando problemas que envolviam retângulos de pontos, linhas divididas em segmentos e áreas de terrenos retangulares, em todos os problemas existiam uma dimensão escondida, em que os alunos deveriam determinar seu valor. Um dos problemas proposto, era semelhante à pesquisa de Kuchemann (1981), na qual era apresentada a seguinte questão: “Você pode escrever a área deste retângulo?” (ver figura 2).

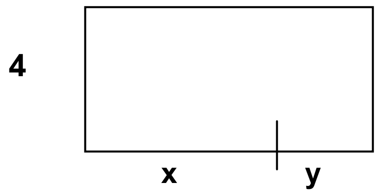


Figura 2. Adaptada da figura retangular apresentada para os sujeitos no estudo de Chalouh e Herscovics (1988, p.40)

Considerando a seqüência de ensino apresentada pelas pesquisadoras Chalouh e Herscovics (1988), pode-se observar que esta permitia aos alunos construírem um significado estrutural para as expressões algébricas da forma 4x + 4y. Mas, apontam um erro freqüente dos alunos, o problema da igualdade, no qual os alunos acham que toda expressão algébrica tem que ser igual a algum valor numérico, como por exemplo 4x + 4y = “alguma coisa”. Na pesquisa de Wagner, Rachlin e Jesen (1984), foi constatado, que muitos estudantes levavam a igualdade das expressões a zero. Nos estudos de Kieran (1983), também foram descobertos que alguns alunos não conseguiam dar qualquer sentido a letra “a” na expressão a + 3, porque faltava na expressão o sinal da igualdade e o membro do lado direito. Como os resultados obtidos nas pesquisas relacionadas às expressões algébricas, comprovaram ainda que os alunos apresentam dificuldades nesta área, que necessita de novas pesquisas que conduzam os alunos a construírem este conceito algébrico.

1.3 Objetivos do projeto de pesquisa

Partindo dos aspectos mostrados anteriormente, procuramos determinar os objetivos específicos de nosso trabalho, visando elaborar e construir uma seqüência didática, que possa contribuir para o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Para o desenvolvimento desta seqüência apoiamo-nos nos seguintes objetivos específicos enumerados de 1 a 7, apresentados abaixo:

1 Identificar e analisar os fenômenos didáticos ocorridos na área da Álgebra, ligados ao conceito de expressões algébricas;

2 Procurar meios para solucionar ou amenizar as dificuldades algébricas apresentadas pelos alunos durante o ensino e aprendizagem das expressões algébricas;

3 Analisar os fenômenos didáticos que incidem sobre as características dos sistemas aritméticos e algébricos, que ocorrem no processo de generalização dos padrões geométricos levando a construção dos conceitos algébricos;

4 Utilizar o conceito de área como instrumento fundamental para a construção das expressões algébricas, levando os alunos a atribuírem significado à expressão algébrica;

5 Discutir com os alunos o conceito de área como grandeza, procurando mostrar as diferenças entre os conceitos de área e de perímetro, por meio das diferenças entre as unidades unidimensionais e bidimensionais;

6 Trabalhar com o processo de decomposição e composição de polígonos, levando à construção de áreas equivalentes, que conduzirão à construção de expressões equivalentes;

7 Desenvolver, analisar e avaliar os registros e formas de representações dos alunos referentes às expressões algébricas, baseado na teoria de Raymond Duval (1995).

A seguir apresentaremos e discutiremos os aspectos da fundamentação teórica deste projeto.

1.4 Fundamentação Teórica

Nosso estudo sobre o conceito de expressões algébricas baseia-se na linha da Didática Francesa, que estuda os fenômenos de ensino-aprendizagem, no qual destacaremos os trabalhos de Régine Douady (1986), "Dialética Ferramenta – Objeto" e "O Jogo de Quadros", como também no trabalho de Raymond Duval (1993) através da "Teoria dos Registros de Representação Semiótica".

Douady aborda em seus trabalhos a Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros da seguinte forma:

> *Elaboramos hipóteses cognitivas e didáticas sobre aprendizagem de um conteúdo matemático preciso, cujo essencial é que: Podemos construir realmente os conhecimentos matemáticos usando a dialética ferramenta-objeto, de acordo com o jogo de quadros apropriado, graças aos problemas que atendem certas condições.* (DOUADY, 1986, p.7)

Além desta importância da aplicação da Dialética ferramenta-objeto e do Jogo de Quadros na construção do saber matemático, Douady também destaca a importância desses instrumentos na Didática da Matemática, mostrando os aspectos de ferramenta e objeto nas concepções de professores e alunos.

Segundo Douady, o aspecto ferramenta-objeto pode ser visto de diferentes formas:

> *- Saber matemático reveste um duplo aspecto. De uma parte é ter disponibilidade funcional de certas noções e teoremas matemáticos para resolver problema, interpretar novas questões(...).Num tratamento funcional científico, as noções e teoremas matemáticos têm um estatuto de ferramenta.(...)*
> *Saber matemático é também identificar as noções e teoremas como elementos de um corpo cientificamente e socialmente reconhecido. É também formular definições, enunciar teoremas desse corpo e demonstrá-los. Dizemos então que esses saberes têm estatuto de objeto.*
> *- Ensinar, para um professor, é criar as condições que produzirão um saber entre os alunos. E, aprender, para um aluno, é se engajar numa atividade intelectual, pela qual produza a disponibilidade de um saber com o seu duplo estatuto de ferramenta e objeto.* (DOUADY, 1993, p.4)

Enquanto que, para a prática do professor a ferramenta-objeto estaria ligada ao conhecimento científico, para o aluno a ferramenta-objeto é um instrumento prático para a construção do saber matemático. Sendo assim, para o professor, a ferramenta é um objeto em seu funcionamento científico, enquanto para o aluno o uso da ferramenta é sempre prático.

Para desenvolver o raciocínio dos alunos e construir o conhecimento matemático, o professor dispõe de muitas variáveis didáticas que vão transformar a situação de aprendizagem. Suas escolhas terão conseqüências sobre a percepção do saber que os alunos irão desenvolver e sobre as concepções que eles forjarão. Sendo assim, o saber ensinado é originado dessas escolhas didáticas.

Já o saber escolar, está ligado a um certo tipo de saber que contribui para a instauração de uma cultura particular dos alunos de uma mesma época, ressaltada por meio dos livros didáticos, que se baseiam na Proposta Curricular de Matemática e nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Para Douady (1986), a Dialética ferramenta-objeto é formada por dois pólos: o da ferramenta e o do objeto, que podem ser utilizados nas resoluções de problemas.

> *Assim, dizemos que um conceito é ferramenta quando focalizamos nosso interesse no uso que está sendo feito dele para resolver um problema. Uma mesma ferramenta pode ser adaptada para diferentes problemas. Por objeto, entendemos o objeto cultural colocado num edifício mais amplo que é o saber sábio, num dado momento reconhecido socialmente.* (DOUADY,1986, p.4)[3]

Assim, a pesquisadora evidencia o papel da ferramenta na resolução de problemas, e que esta pode ser adaptada para diferentes problemas.

Além disso, o papel da ferramenta está relacionado a um conceito e ligado aos problemas dos quais este conceito é utilizado, dessa maneira ela também servirá de instrumento para a construção de novos conhecimentos. Para Douady (1986), os problemas matemáticos podem ser resolvidos de diversas maneiras, utilizando-se para isso a integração entre os diversos ramos da matemática, e essa integração é analisada pela pesquisadora por meio da utilização do Jogo de Quadros e da Dialética ferramenta-objeto.

Baseados nas concepções formuladas por Douady (1986), e definidas nas pesquisas que utilizam estas concepções, procuramos apresentá-las a seguir.

Para Douady, o Jogo de Quadros põe em evidência as diversas maneiras que podemos utilizá-lo para resolver um problema, por meio do uso de ferramentas explícitas. Desse modo, a pesquisadora caracteriza um quadro como:

> *Um quadro, é constituído de ferramentas de diversos ramos da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e*

---
[3] A citação acima é uma tradução nossa.

> *de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros, podem ter os mesmos objetos e serem diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida.* (DOUADY, 1986, p.389)[4]

Dessa maneira, nota-se que a pesquisadora admite que as imagens mentais desempenham um papel importante no funcionamento como ferramenta dos objetos do quadro. Mostrando que dois quadros podem comportar os mesmos objetos e serem diferentes pelas imagens mentais e pela problemática desenvolvida. No entanto a familiaridade, e a experiência podem conduzir aos conflitos entre o que o sujeito espera e o que se produz efetivamente.

Nas teorias de Douady, encontramos dois conceitos: **o Jogo de quadros e a Mudança de quadros**. Sendo definidos do seguinte modo: **o Jogo de quadros** como mudanças de quadros provocadas pela iniciativa do professor na ocasião de problemas convenientemente escolhidos, para fazer avançar as fases de pesquisa e evoluir as concepções dos alunos. Já, a **Mudança de quadros** é um meio de se obter formulações diferentes de um problema sem que sejam necessariamente equivalentes, permitindo um novo acesso às dificuldades encontradas e o desenvolvimento de ferramentas e técnicas que não surgem nas primeiras formulações.

Em nossa pesquisa é muito importante que o professor leve os alunos a provocar a passagem do quadro geométrico para o quadro algébrico e vice-versa, além do quadro numérico para o algébrico, para melhor compreensão do conceito de expressão algébrica. Dessa forma tentamos propor em nossa seqüência didática, situações que favoreçam o jogo de quadros e a dialética ferramenta-objeto.

---

[4] Nossa tradução.

Assim, notamos que a Dialética ferramenta-objeto e o Jogo de quadros são considerados instrumentos fundamentais para a construção dos conhecimentos matemáticos, pois, por meio deles os alunos conseguem desenvolver diversas estratégias para solucionar um mesmo problema proposto pelo professor e permitem ao professor analisar as diferentes formas de raciocínio dos alunos.

Antes de apresentamos o desenvolvimento da Dialética ferramenta-objeto através da descrição de suas etapas, na qual utilizaremos este recurso como meio de desenvolvimento de nossas atividades e de análise dos resultados obtidos na pesquisa, faremos um breve histórico dos trabalhos científicos que utilizaram esta teoria.

1.4.1 Trabalhos científicos adotando as teorias de Douady e o conceito de Área

Nesta etapa, apresentamos algumas pesquisas que se fundamentaram em Douady, e que também, utilizaram-se do conceito de área como instrumento de construção do conhecimento; entre elas destacamos os trabalhos de Perrin-Glorian (1989) relacionando "*O Conceito de Aprendizagem de Áreas de Superfícies Planas",* que foi desenvolvido em parceria com Douady; Baltar (2000) **"***Conceito de Área",* entre outros.

Os trabalhos de Baltar (2000)**,** Perrin-Glorian (1989) utilizam o Jogo de Quadros, relacionando o quadro numérico com o quadro geométrico, proporcionando ao aluno condições de construir o conceito de área. Além disso, mostra o conceito de área como uma grandeza.

Segundo Perrin-Glorian:

> *Para a nossa proposta, nós utilizaremos este termo de "grandeza" num sentido muito simples que nós não procuraremos definir. Nos é suficiente saber que a área pode ser definida como uma classe de equivalência a partir de uma função medida. Nós não definiremos a área mas somente a expressão 'ter a mesma área' a partir de recorte e colagem ou da medida. É este aspecto que chamamos de área na qualidade de grandeza. Um número seguido de uma unidade é o meio de representar uma área.* (PERRIN GLORIAN, 1992, p.12)

Baseado nas idéias de Douady e Perrin-Glorian (1992), adotamos trabalhar com o conceito de área, utilizando a definição dada por elas, considerando a área na qualidade de grandeza. Sendo um número seguido de uma unidade de medida, essa idéia estará presente em todas as nossas atividades.

No entanto, devemos também destacar porque optamos pelo conceito de área como instrumento de construção do conhecimento, partindo-se das idéias de Douady e Perrin-Glorian (1989). O desenvolvimento do ensino do conceito de área considerado como grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os dois quadros (geométrico e numérico). Como também, devemos considerar o trabalho realizado por Baltar (2000) em sua pesquisa sobre área de figuras planas, fundamentou as atividades propostas através da interação, entre os quadros geométrico, numérico e algébrico na perspectiva teórica do "Jogo de Quadros" proposta por Douady (1986).

Desse modo a pesquisadora, através do Jogo de Quadros, mostra a equivalência entre as áreas, por meio do processo de decomposição, processo de recorte-composição, além disso utiliza-se do quadro numérico, geométrico e algébrico para chegar no conceito de área e suas fórmulas generalizadas .

Baseando-se nas pesquisas de Douady (1989), Baltar (2000), Perrin-Glorian (1992), Facco (2003), entre outros, decidimos utilizar como instrumentos de construção e desenvolvimento do conceito de expressões algébricas, o Jogo de Quadros e a Dialética ferramenta-objeto.

Para aplicarmos esta pesquisa, usaremos como ferramenta, o conceito de área inserido no quadro geométrico, relacionando-o com o numérico e algébrico.

Durante o desenvolvimento da pesquisa estudaremos as relações entre a Geometria e a Álgebra, nos quais usaremos o conceito de área de figuras planas como instrumento para a construção de expressões numéricas e algébricas. Nesta perspectiva, e segundo as pesquisas desenvolvidas por Baltar (2000) e Perrin-Glorian (1989) que consideram área como grandeza.

Dessa forma, escolhemos a Geometria com recurso para a construção do conhecimento algébrico. Assim, as atividades que propomos aos alunos utilizando-se das áreas das figuras planas, que compõem o quadro geométrico será um dos recursos pelo qual nós poderemos representar a expressão algébrica, integrando desta maneira a Geometria à Álgebra.

A Dialética Ferramenta-Objeto será utilizada nas atividades aplicadas com os alunos, com o intuito de construir o conceito de expressão algébrica partindo-se de um conhecimento implícito (unidades de medidas, equivalência entre figuras, linguagem matemática, entre outros).

Durante este capítulo, faremos algumas relações da Dialética Ferramenta-Objeto com outras teorias que estão presentes durante o desenvolvimento desta. Entre elas destacamos a Teoria das Situações desenvolvida por Brousseau (1975), Teoria de Registros e Representações de Duval (1993), teorias de Piaget, entre outros.

Na seqüência destacamos a Teoria das Situações, definida por Brousseau (1975) da seguinte forma:

> *um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (si não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo freqüentemente a modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos.* (BROUSSEAU, 1975, p.6)

A Teoria das Situações tem como objetivo caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis conduzindo freqüentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos e também determinar modelos (de alunos, do professor, das concepções da matéria a ensinar), na medida em que o processo é conhecido nos seus princípios e não na sua materialidade, e as leis que regem esses modelos, ou seja, caracterizar a organização do meio que permite a aprendizagem de um dado saber matemático.

Esta teoria das situações apóia-se em três hipóteses:

1) O papel do aluno*:*

> *O aluno aprende adaptando-se a um meio, fator de dificuldades, de contradições, um pouco como o faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas novas respostas que são a prova da aprendizagem*". (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 1990, p.2)

Ainda nesta primeira hipótese referente ao aluno podemos encontrar referência de Brousseau a teoria de Piaget

> *as variações das condições do meio envolvem comportamentos do aprendiz, tendo como efeito modificar o meio e o aprendiz para, finalmente, obter certos equilíbrios internos ou a otimização de certos parâmetros".* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 1990, p.2)

Para finalizar este tópico, faremos uma comparação entre a teoria de Brousseau e a Dialética ferramenta-objeto.

Na primeira hipótese apresentada por Brousseau em sua teoria, observa uma relação com a teoria de Douady, onde os pontos comuns são o aluno, o meio e o conhecimento matemático. Sendo assim, na teoria de Douady o aluno e o meio, representado pelos recursos utilizados como as ferramentas escolhidas para a atividade e o jogo de quadros proporcionam aos alunos a construção de um novo conhecimento matemático.

Nota-se que Brousseau, Douady e Duval baseiam-se nas idéias que compõem a teoria de Piaget**,** que está relacionada com o lado cognitivo do aluno e nos efeitos provocados pelas situações didáticas gerando desequilíbrio, para que o aluno procure as ferramentas necessárias para adaptá-lo ao meio e, para que retome o equilíbrio da situação.

A segunda hipótese da teoria está ligada ao “meio”, onde o professor deve criar e organizar um meio e situações suscetíveis de provocar as aprendizagens.

A terceira hipótese da teoria também está ligada ao meio e que essas situações devem engajar de modo significativo os saberes matemáticos cuja aquisição é visada pelos alunos.

Na teoria das situações podemos trabalhar com as seguintes situações: a situação didática, a situação adidática, e a situação-problema.

A situação-problema é a interligação da teoria das situações com a dialética ferramenta-objeto criada por Douady, pois através da aplicação da dialética para encontrar a solução do problema proposto o aluno escolhe suas ferramentas implícitas e explícitas para construir o conceito e assim adaptar-se a situação proposta.

Para esclarecer as diferenças entre situação didática, situação adidática, e a situação-problema apresentamos suas definições:

Brousseau:

> *A situação didática é definida como o conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou grupos de alunos, um certo meio (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para fazer adquirir por esses alunos um saber constituído ou em constituição.* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD,1990, p.2)
> *A situação adidática é a parte essencial da situação didática. A situação adidática é uma situação na qual a intenção de ensinar é velada para o sujeito, mas especÍfica do saber.* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 1990, p.3)

Segundo Brousseau (1986) ela se caracteriza pelos seguintes fatos:

> – *O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, evoluir por sua iniciativa própria;*
> – *O professor recusa intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele gostaria de provocar;*
> – *O problema é escolhido para fazer adquirir pelo aluno novos conhecimentos inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que ele pode construir sem apelo as razões didáticas.* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD,1990, p.3-4)

Já a situação-problema pode ser caracterizada da seguinte forma:

> *Uma situação-problema é a escolha de questões abertas ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados num ou vários quadros.* (M. HENRY apud ALMOULOUD, 1990, p.108)

Na situação apresentada na citação acima, podemos notar a importância do Jogo de quadros, no processo de construção do conhecimento destacado pelo pesquisador na resolução de problemas. Além disso, podemos observar que uma situação-problema tem como função principal à utilização implícita, depois explicita, de novas ferramentas matemáticas, por meio das questões que os alunos colocam durante a aplicação das atividades da pesquisa.

Para Almouloud (1990) e outros pesquisadores em Didática, que observaram e definiram as condições para que a situação-problema conduza à aquisição de novas ferramentas:

> *1- Os alunos compreendem facilmente os dados e podem engajar-se na exploração desses dados com os conhecimentos disponíveis. Podem conceber claramente o que é uma resposta possível e pertinente a questão colocada.*
> *2- A situação-problema envolve um campo conceitual que desejamos efetivamente explorar e no qual se situam as aprendizagens visadas.*
> *3- Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução imediata do problema.*
> *4- Os conhecimentos, objetos de aprendizagem, fornecem as ferramentas mais bem adaptadas para obter a solução.*
> *5- A questão pode ser formulada nos vários quadros: quadro algébrico, geométrico, numérico, etc.* (ALMOULOUD, 1990, p.108)

Analisando as condições enumeradas, pelo pesquisador acima, notamos alguns pontos comuns com as etapas da dialética ferramenta-objeto que apresentaremos a seguir; assim como também a valorização do uso do jogo de quadros, conforme o item 5 da citação do autor, justificando deste modo a teoria de Douady.

Na seqüência, apresentamos e discutimos as fases que compõe a Dialética Ferramenta-Objeto.

1.4.2 Dialética Ferramenta – Objeto e suas etapas de desenvolvimento

Nesta etapa, apresentamos como é definida e desenvolvida a teoria da Dialética ferramenta-objeto, descrevendo e apontando as fases de seu desenvolvimento.

A **Dialética Ferramenta-Objeto** pode ser definida como um processo cíclico que organiza os respectivos papéis do docente e dos alunos, durante o qual os conceitos têm o papel, ora de ferramenta para resolver um problema, ora de objeto, tomando lugar na construção de um certo saber organizado. Ela é composta por seis fases: O conhecimento antigo, a pesquisa-novo implícito, a explicitação e institucionalização locais, institucionalização-status de objeto, familiarização, reinvestimento tornando a tarefa complexa ou novo problema. Este é o ciclo completo da dialética desenvolvida por Douady (1986). Ela acredita que às vezes é necessário utilizar mais de um ciclo composto pelas quatro primeiras fases antes de desenvolvermos o ciclo completo.

Em seguida, apresentamos a descrição das seis fases da **Dialética Ferramenta–Objeto** no quadro[5] a seguir.

---

[5] Quadro – foi desenvolvido pela pesquisadora e seu orientador baseado nos textos de Régine Douady (1986)

1.4.3 Dialética Ferramenta-Objeto, uma organização de ensino em várias etapas

Quadro 1 – Fases da Dialética Ferramenta-Objeto

1) Conhecimento Antigo: Nesta etapa, os alunos têm o primeiro contato com o problema proposto, e procuram mobilizar os conhecimentos matemáticos anteriores, como ferramentas explícitas para utilizá-las no processo de resolução do problema. Eles poderão resolver parcialmente o problema.
2) Pesquisa, novo implícito: Os alunos encontram dificuldades para resolver completamente o problema. Isso acontece se a estratégia primitiva torna-se muito dispendiosa. Então os alunos são levados a procurarem novos caminhos para solucionarem completamente o problema. Dessa forma, o professor pode utilizar-se do Jogo de quadros como ferramenta para que os alunos construam o novo conhecimento matemático.
3) Explicitação e Institucionalização locais: Os elementos precedentes da fase anterior são apropriados pelos alunos. Eles são formulados, seja por termos de objetos, seja por termos de prática com suas condições de emprego no momento. Ela também pode ser feita através da discussão coletiva, por meio de comunicações entre os alunos, nos quais eles apresentam as várias formas de saber, e as diferentes ferramentas utilizadas para a construção destes saberes, levando os alunos a situarem seus conhecimentos em relação ao conhecimento da classe, promovendo assim seu progresso.
4) Institucionalização-status de objeto : Nesta etapa, o professor seleciona alguns dos conhecimentos explicitados pelos alunos na fase anterior e, desse modo, vai descontextualizando até que os alunos retenham o objeto de estudo e possam utilizá-los na resolução de outros problemas.
5) Familiarização, reinvestimento: Para que o novo objeto matemático seja incorporado ao conhecimento do aluno e seja utilizado por ele no desenvolvimento de um novo ciclo da dialética. O professor deve propor aos alunos diversos exercícios, pedindo como ferramenta explícita, o que foi institucionalizado. Dessa forma o novo se torna antigo, originando um novo ciclo da dialética. Além disso, os alunos terão a necessidade de colocar a prova, sozinhos, os conhecimentos que acreditam terem adquirido, fazendo

um balanço do que sabe.

6) **Complexificação da tarefa ou novo problema**: Nesta fase são propostas situações mais complexas, nas quais os alunos poderão testar ou aplicar os novos conhecimentos adquiridos. O professor propõe uma série de problemas mais complexos, de modo que o aluno os novos conhecimentos adquiridos. Concluída esta fase, o objeto novo assume o lugar do antigo, dando origem a um novo ciclo da dialética.

Após termos descritos o processo de desenvolvimento de cada fase da Dialética Ferramenta-Objeto desenvolvida por Douady (1986), faremos um paralelo entre a teoria de Raymond Duval (1993) “Teoria de Registros de Representações Semiótica” e “O Jogo de Quadros” de Douady (1986), partindo-se do seguinte pressuposto: um quadro pode comportar uma ou mais formas diferentes de representação de um mesmo objeto matemático? Assim, a teoria de Duval (1993) se enquadra nesta, através das formas de representações presentes nos quadros, por meio das representações semióticas que os compõem. Segundo Duval (1993), o registro de representação é um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais em nível do funcionamento cognitivo consciente, ou seja, é a maneira típica de representar um objeto matemático ou um problema ou uma técnica. Desse modo, para Duval, os diferentes registros de representação por si só, não levam a compreensão do objeto científico. Pois, para que a aprendizagem na matemática se realize é necessário que o indivíduo utilize diferentes registros de representação de um mesmo objeto. Assim, a conceituação só será alcançada no momento o qual o aluno consegue articular os distintos registros de representação de um determinado conceito, coordenado por semiósis[6] e a nóésis[7].

[6] Produção de uma representação semiótica.
[7] Apreensão conceitual do objeto.

Para que ocorra tal coordenação entre os signos e seus conceitos, o sujeito que aprende precisa contatar com diferentes tipos de registros de representações semióticas e ser capaz de passar de um para o outro, naturalmente, pois dependendo da situação-problema proposta, um determinado registro pode tornar-se mais eficiente do que o outro. Na diversidade das representações e sua coordenação, o aluno tem em suas mãos mais elementos para elaborar e construir suas relações mentais. Quando por exemplo o aluno realiza a passagem entre diferentes registros, são criadas condições para que ele construa o objeto matemático em questão. Esta passagem torna-se fundamental para que haja clareza de que o registro não é “o objeto de estudo e o mesmo não pode dar conta de todas as suas particularidades”. Isso é comprovado através das idéias do pesquisador “[...] *o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo de representação que o torne acessível” (*DUVAL, 2003, p.21). Neste caso, a multiplicidade de registros de representações semióticas tem caráter complementar, sendo que, muitas vezes, as representações diferenciadas de um mesmo objeto podem apresentar conteúdos diferentes, por isso há necessidade de duas ou mais representações, e a transição e coordenação entre as mesmas.

Existem dois tipos de transformações semióticas ou coordenações entre registros que encontramos na teoria de Duval (1993), e estes estão presentes nos quadros de Douady (1986), os quais são considerados totalmente diferentes: os tratamentos e as conversões. O tratamento é a transformação da representação no próprio registro em que foi formada inicialmente, ou seja, é interna.

A conversão é um tipo de transformação que ocorre entre registros, mudando a forma ou o sistema de representação pelo qual o objeto é representado, mas conservando totalmente, ou em parte o objeto matemático da representação inicial.

Como exemplos de conversões podemos considerar: as ilustrações (conversão lingüísticas para a figural), traduções (conversões lingüísticas de uma língua para outra) e descrições (conversões de representações não verbais para representações lingüísticas); para esses tipos de conversões não existem regras. A mudança de representação implica na mudança de sentido, mas é possível usarmos várias representações sem mudar a referência. As mudanças de sentido de representação semiótica levam a um custo cognitivo maior ou menor da representação, ou seja para o funcionamento do pensamento, sendo assim o tratamento pode ser mais econômico, levando a compreensão ou resolução mais fácil.

Segundo Damm (2002, p.137), a Matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão, o uso de representação. Nesse caso, as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos e desenhos são bastante significativos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação. Notamos que neste exemplo dado pela pesquisadora, existem vários tipos de registros de representação presentes em um mesmo quadro como no caso do quadro algébrico, mostrando desta forma um paralelismo entre as teorias de Duval (1993) e Douady (1986).

A seguir, destacamos os pontos importantes da teoria de Duval, aprofundando nossos estudos sobre os tratamentos e conversões.

1.4.4 A importância da Teoria de Registros de Representações Semiótica de Duval, na pesquisa científica

Em Matemática, toda comunicação se estabelece com base nas representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto para o seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Para Duval (1993) a representação semiótica não é apenas um instrumento de comunicação no âmbito matemático, mas sim trata-se de um instrumento de construção do pensamento cognitivo. Conforme destacamos a seguir:

> *(...) as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas*. (DUVAL apud DAMM, 2002, p.143)

Analisando o pensamento de Duval, percebe-se que as representações semióticas têm uma função essencial para a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende, pois ela é responsável pelo desenvolvimento cognitivo do aluno. É através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas do pensamento humano. Na teoria desenvolvida por Duval, ele define os seguintes aspectos: *semiósis* como um aspecto de apreensão ou produção de uma representação semiótica, e *noésis* que é a apreensão conceitual de um objeto. (DUVAL, 1993, p.39). Dessa forma para que ocorra a apreensão do objeto matemático, é necessário que a noésis (conceitualização) ocorra através de significativas semiósis (representações). Assim, a apreensão conceitual de um objeto matemático somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que aprende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com os *registros de representações diferentes* do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. Isto é, válido quando associamos ao jogo de quadros, pois existem diferentes tipos de registros que compõem um mesmo quadro, como o numérico no qual podemos representar o número decimal na forma fracionária sem sair do quadro numérico, ou outro exemplo quando ocorre a mudança de quadro, por exemplo uma representação de função pode ser feita através de uma expressão algébrica, passando para o quadro numérico, quando transformamos esta para uma tabela de valores numéricos, ou fazemos a sua representação no quadro geométrico.

Segundo Duval (1995), as representações semióticas são externas e conscientes do sujeito, sendo que seu papel pode ser fundamental conforme a afirmação abaixo:

> *elas são relativas à um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático (...). De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado)*. (DUVAL, 1995a, p.3)

Dessa forma o pesquisador mostra que o tratamento dos conhecimentos depende da *forma* e não do *conteúdo* envolvido.

Almouloud (1997, p.6) citando Duval, afirma existir nas representações semióticas dois aspectos: forma (ou representante) e o conteúdo (ou representado), explicitando que a forma muda de acordo com o sistema semiótico usado. Assim, ocorrem vários registros possíveis de representação para um mesmo objeto de estudo, com diferente tratamento cognitivo para cada registro.

No entanto, Almouloud (2000, p.40) ressalta que não se deve confundir o conteúdo de representação e o objeto representado, pois, “o conteúdo de uma representação não é o objeto representado, mas o registro permite explícitar ou revelar as propriedades do objeto representado”.

Para Duval (1993, p.39) as representações são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, porque tornam possível a construção do conhecimento.

Para Duval (1984) as representações semióticas podem ser *convertidas* em representações “equivalentes” num outro sistema semiótico, mas podendo ter diferentes significados para as pessoas que a utilizam. *Converter* uma representação é “mudar a forma pela qual o objeto matemático é representado”. Por exemplo, no caso dos números racionais, podemos representar de duas maneiras diferentes o mesmo objeto matemático, $\frac{1}{2} = 0{,}5$, percebendo que as duas formas são utilizadas para representar o mesmo objeto. Nota-se que a conversão não é uma coisa tão simples para a compreensão do aluno, exige a interferência do professor como mediador desse processo.

Para fazermos relações entre a teoria de Duval com a de Douady, selecionamos alguns instrumentos fundamentais para o desenvolvimento da teoria de Duval, que são presentes na teoria do Jogo de Quadros. Na primeira etapa, iremos destacar o sistema de representação semiótica composta pelas formas de representações produzidas através de: Tratamento e Conversão.

Duval (1993) define essas duas formas de representação da seguinte forma:

> *Tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada. É pois uma transformação interna a um registro. O cálculo é uma forma de tratamento próprio às estruturas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional,...). Há, naturalmente, regras de tratamento próprias a cada registro, sua*

> *natureza e número variam consideravelmente de um registro a outro.*(DUVAL, 1993, pp.41-2)
> *A Conversão de uma representação é a transformação dessa representação em uma representação para outro registro, conservando a totalidade ou uma pequena parte somente do conteúdo do representante inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida (o registro da representação a ser convertida). A ilustração é a conversão de uma representação lingüística em uma representação figural. A tradução de conversão de uma representação lingüística numa língua dada em uma representação lingüística em uma outra língua ou de outro tipo de linguagem. A descrição é a conversão de uma representação não-verbal, esquemas,figuras, gráficos, em uma representação lingüística. É importante a esse propósito não confundir essa situação com o desenho de um objeto ou uma situação que não esta ainda semioticamente representada.* (DUVAL, 1993, p.42).

Observa-se que conforme as definições apresentadas pelo pesquisador, acima referentes aos conceitos de Tratamentos e Conversões, que estes, também estarão presentes durante o desenvolvimento das atividades de nosso projeto, através do uso da Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros.

Outros aspectos, que destacamos da teoria de Duval (1993) relacionado ao eixo central de sua teoria são:

1) **As representações mentais** que, segundo Piaget, são “crenças, convicções, idéias, explicações e concepções das pessoas sobre fenômenos naturais e físicos”, são internas e conscientes e ocorrem no nível de pensamento.

2) **As representações computacionais** também são internas, porém, não são conscientes. Com essas representações, o sujeito faz tratamentos automáticos e quase instantâneos, executando certas tarefas sem pensar em cada passo a ser dado para isso, como quando uma **palavra** é pronunciada e não se identifica a letra.

3) **As representações semióticas** não são nem mentais, nem materiais. As representações semióticas "*... são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem especificidade própria de significância e de funcionamento",* tais com linguagem natural, linguagem formal, escrita formal, escrita algébrica, gráficos cartesianos e figuras geométricas. Os sistemas semióticos, instrumentos fundamentais para o desenvolvimento das capacidades do pensamento, são conquistas culturais e, portanto, devem ser aprendidos.

A partir desses elementos, entre outros, Duval (1999) define a noção de registro de representação semiótica, diferenciando-a da noção de código.

> *Para que um sistema semiótico possa funcionar como registro de representação deve exercer outras funções além da de comunicação. As duas funções importantes do ponto de vista cognitivo são a objetivação e as de tratamento.* (DUVAL, 1999, p.21)

Para o autor, os sistemas que preenchem essas duas funções são: os registros, os outros são os códigos.

As representações semióticas, as representações computacionais e as representações mentais não são espécies diferentes de representação, mas sim, representações que realizam funções diferentes. As representações mentais têm uma função de objetivação. As representações computacionais realizam funções de tratamento.

As representações semióticas realizam, de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Elas realizam, de alguma maneira uma função de tratamento, porém, um tratamento intencional, função fundamental para a aprendizagem humana. Dessa maneira, podemos citar como exemplo as representações gráficas, que são representações semióticas, como são as figuras geométricas, as escritas algébricas e as línguas.

Outro aspecto importante a ser considerado da teoria de Duval (1994, p.125), que também contribuíram para esse trabalho, foram as apreensões observadas pelo pesquisador, conforme apresentamos a seguir :

(a) Seqüencial: possível nas tarefas de construção ou de descrição como objeto de reproduzir uma figura;

(b) Perceptiva: interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;

(c) Discursiva: compreensão dos elementos da figura geométrica, por meio da articulação dos enunciados relacionados às propriedades do objeto;

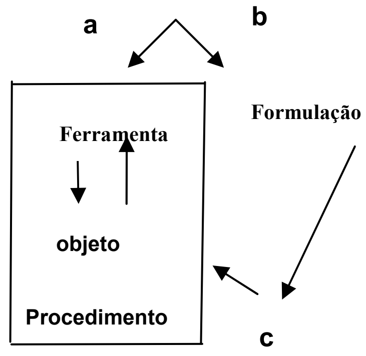
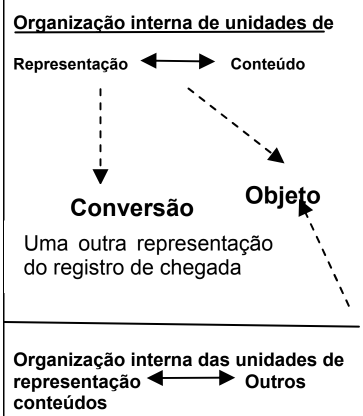
(d) Operatória: apreensão sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e as reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem.

Consideramos que estas apreensões apresentadas pelo pesquisador, também, estarão presentes durante o desenvolvimento da Dialética Ferramenta-Objeto e no Jogo de quadros, pois, são elementos essenciais para o desenvolvimento estratégico do aluno ao solucionar a situação-problema proposta.

A seguir apresentaremos um quadro no qual relacionamos as representações semióticas com o Jogo de Quadros.

1.4.4.1 Relação entre Quadro e Registro[8]

Tabela 1. Relação entre Quadros e Registros.

Questões direcionadas para a análise da atividade matemática	QUADRO	REGISTRO
1- Como podemos distinguir os diferentes quadros e os diferentes registros?	Um conjunto de conceitos suscetíveis de serem organizados em uma progressão teórica. Um termo da matemática.	Um sistema semiótico produtor de um tipo de representações, cuja produção pode responder à funções cognitivas diferentes.
2.1 De que maneira descrevemos a operação de mudança? 2.2 O que fornece a mudança? 2.3-Qual transparência das correspondências entre os dados antes e os posteriores apresentados? 2.4- Quais as condições para compreender o processo de mudança?	- Uma reintrepretação apoiando sobre a formulação dos problemas a resolver. -Uma criação dos objetos matemáticos novos da “aplicação das ferramentas e as técnicas não são impostas”.(1986,p.11) - “Correspondências imperfeitas” -”utilidade dos recursos para “um quadro auxiliar de representação”	- Uma conversão baseando sobre as unidades de representação, mas conservando a referência da representação de partida. -Tornar explícitos as outras propriedades do objeto. -permitir tratamentos impossíveis ou muito dispendiosos dos registros de partida. - Congruência ou não congruência entre as unidades respectivas das representações de partida e de chegada. - Discriminação entre as variações de representação em um registro que liga uma variação de representação no outro registro e aqueles que não mudam nada.
3 Quais são as distinções operatórias utilizadas para analisar o funciona-mento da atividade matemática?	Cada Conceito 	Uma representação dos registros iniciais. 

[8] **Fonte:** Quadro retirado da pesquisa: Comment décrire et analyzer l’activité mathematique?Cadres et registresUnicwesité du Littoral, IUFM Nord Pás Calais, França, realizada por Duval em 2001.

Neste quadro, Duval (2001) mostra os questionamentos realizados sobre quadro e os registros existentes em uma atividade matemática. Evidenciando que em um quadro existem diversos tipos de registros, como discutimos anteriormente neste capítulo.

Após concluirmos os estudos sobre a teoria de Duval, colocando em evidência os principais aspectos desta teoria com nosso referencial teórico, passaremos a discutir outros elementos que também consideramos importantes para o desenvolvimento deste projeto, como o Contrato Didático. O Contrato Didático é um instrumento primordial e essencial para todo o processo de desenvolvimento de uma seqüência didática, pois estabelece relações entre o professor- aluno, proporcionando a formação do tripé destacado por Brousseau, professor-conhecimento-aluno. Esta relação professor-aluno-conhecimento também é apontada por outros pesquisadores no Contrato didático, como Chevallard (1988).

> *O contrato didático reúne (criando-os como tal) três termos (três instâncias) e não duas como se acredita algumas vezes. O aluno (o sujeito a que se ensina), o professor(o sujeito que ensina) e o saber, considerando como o " saber ensinado". O contrato rege, portanto, a interação didática entre o professor e alunos a propósito do saber – isto é o que chamo de relação didática (que não é a tão famosa "relação professor-aluno")(...) as cláusulas do contrato organizam as relações que os alunos e professores mantêm com o saber. O contrato rege até os detalhes do processo. Cada noção ensinada, cada tarefa proposta esta submetida à sua legislação.* (CHEVALLARD apud SILVA, 2002, pp.60-1)

Dessa maneira, o Contrato didático se torna um instrumento essencial para a construção de um sistema de ensino- aprendizagem nas pesquisas que utilizem a seqüência didática como forma de estudo de um fenômeno didático. Podemos, também, considerar o contrato didático como um conjunto de condições que determinam, quase sempre implicitamente, aquilo que cada um os dois parceiros (professor e aluno) da relação didática tem uma responsabilidade de gerenciar e, do que tem que prestar conta ao outro. Isto irá depender da estratégia de ensino adotada pelo professor, adaptando diferentes contextos, tais como: as escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho proposto, os objetivos de formação envolvidos, a história do professor, entre outros.

Dessa forma, notamos que o contrato didático estabelece as atribuições dos parceiros da relação didática no processo de aquisição do conhecimento.

1.4.5 O Papel do Contrato Didático no sistema de ensino-aprendizagem

Conforme descrevemos no parágrafo anterior, justificando a importância do Contrato Didático no sistema de ensino- aprendizagem, notamos que este instrumento estabelece relações entre duas partes (professor e aluno) e que, também, é um dos elementos destacado em diversas pesquisas científicas, conforme mostraremos e discutiremos neste tópico.

O Contrato Didático é considerado um instrumento pedagógico, que é essencial para o desenvolvimento de uma pesquisa; é a relação professor-aluno. Para diversos pesquisadores, este instrumento didático pode ser definido de diversas maneiras. Em nossa pesquisa adotamos as definições apresentadas por Brousseau (1986) e por Douady (1991), que discutimos a seguir.

Conforme Brousseau apud ALMOULOUD (1990, p.81), define-se o *Contrato Didático* como um conjunto de comportamentos específicos do professor, esperado pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos, esperado pelo professor. Assim para o autor o Contrato é:

> *o conjunto das regras que determinam explicitamente, para uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática vai ter que gerenciar e o que cada um, de uma maneira ou outra, terá que computar frente ao outro.* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 1990, p.81).

O Contrato Didático é o que condiciona a significação do problema e do conceito para o aluno; é o que permitirá a negociação do sentido das atividades em jogo.

De acordo com a definição dada acima, o contrato didático está relacionado conforme a situação dada. Porém, este é utilizado também, em uma série de situações, de um nível de ensino sendo um meio utilizado pelo docente para controlar o tempo didático na sala de aula.

Para Brousseau:

> *O contrato fixa o papel convencional do conhecimento, da aprendizagem, da memória e transmite uma espécie de "teoria" do conhecimento, "teoria" que se chama "epistemologia escolar" e que a função permitir a comunicação didática.* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 1990, p.81)

Além deste aspecto apresentado por Brousseau (1990), na citação acima, podemos considerar outros aspectos em relação ao contrato didático, que podem contribuir para a coleta de fatores que impedem ou favorecem o acesso dos alunos ao conhecimento. Isto é justificado por meio do pensamento deste pesquisador:

> *o que impede ou favorece o acesso dos alunos ao conhecimento, o que bloqueia a entrada de certas crianças no processo de aprendizagem. Pois os contratos, suas realizações e seus sucessos revelam a idéia que os professores e os alunos têm da matemática e de seu funcionamento, das condições de sua criação e, portanto, de seu interesse. São as circunstâncias nas quais a matemática está empregada que lhe dá sua significação.* (BROUSSEAU apud ALMOULOUD, 1990, pp.81-2)

No entanto, entendemos que o contrato didático é uma espécie de pacto entre o aluno e o professor em relação ao conhecimento, ou seja, estes são os elementos participantes de uma situação didática.

Douady apresenta a seguinte visão a respeito do contrato didático: contrato didático está relacionado com as estratégias de ensino adotadas; as escolhas feitas pelo professor, as responsabilidades atribuídas aos alunos, os objetivos de ensino. Todos esses pontos são determinantes essenciais do contrato didático que, geralmente, é o reflexo da concepção de aprendizagem do professor, da escola, etc.

Desse modo, devemos considerar que o contrato é um ponto essencial para a construção do conhecimento, pois, envolve as relações entre professor e aluno, que é importante no sistema de ensino-aprendizagem. No entanto, para que o contrato tenha um bom funcionamento ele dependerá dos diferentes contextos de ensino e da aprendizagem, como também, das escolhas pedagógicas, do tipo de trabalho proposto aos alunos, dos objetivos de formação, da epistemologia do professor, das condições de avaliação, etc, buscando, sempre, a aquisição dos saberes pelos alunos.

Encerramos a fundamentação teórica através da discussão e apresentação das funções desempenhadas pelo contrato didático no sistema de ensino-aprendizagem.

Em seguida, apresentamos e discutimos a metodologia e os procedimentos adotados para o desenvolvimento desta pesquisa.

1.5 Metodologia e Procedimentos Metodológicos

1.5.1 Introdução

O desenvolvimento desta pesquisa teve como elemento norteador a elaboração, a aplicação e discussão de uma seqüência didática voltada para desenvolver um processo de ensino e aprendizagem, buscando propor atividades utilizando o ramo da Geometria como instrumento de construção do conhecimento, com o propósito de auxiliar os professores no ensino da álgebra e os alunos na aprendizagem do conceito de expressões algébricas, de maneira mais significativa.

Como instrumento de construção do conhecimento, utilizaremos as teorias de Douady "O Jogo de Quadros" e a "Dialética Ferramenta-Objeto", que estão presentes em nossas atividades, para que os alunos as utilizem como forma de construir suas estratégias de resolução das situações propostas.

Nossas atividades estão relacionadas à integração da Geometria com a Álgebra, na qual a noção de área será utilizada como ferramenta para a construção do conceito da expressão algébrica.

Adotamos como linha metodológica para a nossa pesquisa a Engenharia Didática, que é composta por quatro fases: análises preliminares, análise a priori, experimentação e análise a posteriori. Segundo Douady, esta metodologia se enquadra no desenvolvimento de suas teorias, pois, contribui para a construção de uma seqüência didática, coerente com a realidade dos alunos.

Para Douady (1993), o termo Engenharia Didática é entendido como sendo uma metodologia específica, conforme os relatos abaixo:

> *(...) uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor- engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professores e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor*. (DOUADY, 1993, p.2)

Além disso, a pesquisadora também complementa que esta Engenharia pode ter diferentes objetivos, como por exemplo:

> *(....) pesquisas que visam um estudo de processos de aprendizagem de um certo conceito, daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de um domínio preciso.* (DOUADY, 1987, p.224)

Outros pesquisadores, como Michele Artigue (1988) caracteriza esta metodologia de maneiras diferentes, conforme apresentamos a seguir:

> *(...) como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre, a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino*. (ARTIGÜE, 1988, p.285)

Partindo desta caracterização de Artigüe, é válido também, comentar que a Engenharia Didática é formada por dois níveis: a microengenharia e a macroengenharia. As pesquisas de microengenharia são aquelas que têm por objetivo o estudo de um determinado assunto; elas são localizadas e levam em conta, principalmente, a complexidade dos fenômenos de sala de aula. Por outro lado, temos as pesquisas de macroengenharia, que permitem compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com a dos fenômenos ligados a duração nas relações ensino/aprendizagem. Sendo assim, estes tipos de pesquisas se complementam e, por isso, são necessárias que trabalhem em conjunto, apesar das pesquisas de macroengenharia serem mais difíceis. Conforme os relatos de Artigüe (1988, p.286*) "incontornáveis a despeito de todas as dificuldades metodológicas e institucionais que apresentam".*

Além disso, é importante ressaltar que a Engenharia Didática apresenta uma dupla função na Didática da Matemática, na qual ela pode ser compreendida como um produto resultante de uma análise a priori, caso da metodologia de pesquisa, ou como uma produção de ensino.

Na seqüência, apresentamos e descrevemos as fases da metodologia da Engenharia Didática e em seguida discorremos sobre a construção da seqüência didática deste projeto, utilizando-se desta metodologia.

O processo experimental da Engenharia Didática se compõe de quatro fases:

a) **1ª Fase – Análises Preliminares**: são feitas através das considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, bem como sobre a análise: epistemológica (conteúdos contemplados pelo ensino), do ensino atual e seus efeitos, da concepção dos alunos das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução, do campo dos entraves do qual vai se situar a efetiva realização didática. Tudo isso deve levar em consideração os objetivos específicos da pesquisa. As análises preliminares são feitas, principalmente, para embasar a concepção da engenharia, porém, elas são retomadas e aprofundadas durante todo o desenvolvimento do projeto.

b) **2ª Fase – Concepção e Análise a priori das situações didáticas:** Nesta etapa, o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, as quais são denominadas de variáveis de comando.

Para Artigue (1988), esta fase pode ser caracterizada da seguinte maneira:

> *A análise a priori deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve como referência à metodologia da engenharia didática teve desde a sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre o sentido e situações.*
> *(...) o objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio,indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise à priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase. (*ARTIGÜE, 1988, p.293)

Sendo assim, a análise a priori comporta uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação a-didática que se pode criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação.

Em uma análise a priori devemos considerar: 1) descrever cada escolha local feita (eventualmente relacionada às escolhas globais) e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha; 2) analisar qual é o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação; 3) prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

A análise a priori tem como objetivo a consideração do aluno em dois aspectos; o descritivo e o previsivo. Sendo assim, o aluno é considerado o ator principal e o papel do professor é recuperado por meio do contrato didático, além de atuar como mediador da situação e, ao final da situação proposta, é o institucionalizador do conhecimento.

c) **3ª Fase: Experimentação:** é a fase da realização da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observadores com a população de alunos-objeto de investigação.

A experimentação supõe os seguintes objetivos: 1) a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; 2) o estabelecimento do contrato didático; a aplicação dos instrumentos de pesquisa; 3) os registros das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição de registros audiovisuais, etc).

d) **4ª Fase: Análise a posteriori e validação:** esta fase está apoiada nos dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como, das produções dos alunos em classe ou fora dela. Para compreendemos melhor os resultados coletados, faz se necessário a utilização de alguns instrumentos auxiliares, tais como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados durante a experimentação. Assim, podemos considerar as 3ª e 4ª fases complementares.

A validação ocorre, quando comparamos os resultados da análise a priori com os resultados da posteriori.

Ao finalizarmos as descrições das fases desta metodologia, faremos uma breve descrição da escola escolhida e, em seguida, apresentamos a elaboração e desenvolvimento da seqüência didática do nosso projeto aplicando esta metodologia.

1.5.2 Escolha da Escola e sua caracterização

Escolhemos como local para aplicação de nossa pesquisa uma Escola Estadual, localizada na região Sul da cidade de São Paulo. Por ser uma região que possui uma diversidade em sua clientela, podemos encontrar alunos tanto do ensino público como de escolas particulares.

O nosso grupo de estudo é composto de alunos de 12 a 15 anos da 7ª série do ensino fundamental. Este grupo é formado por 45 alunos, sendo 20 meninos e 25 meninas.

A Escola funciona em três períodos: matutino, no qual temos 8ª séries e Ensino Médio; vespertino, com Ensino Fundamental de 5ª série a 7ª série e noturno somente com o Ensino Médio.

O corpo docente desta escola é formado por 60 professores, dos quais 12 são da área de matemática. Conversei diariamente com esse grupo de professores, no qual constatei que estão sempre buscando novos métodos de ensino, visando proporcionar um ensino de qualidade.

A comunidade escolar é composta por classe média e classe baixa da periferia que procuram um ensino de melhor qualidade, em escolas bem localizadas.

1.5.3 Elaboração e Seleção das atividades da Seqüência Didática

Para desenvolvermos a seqüência didática do projeto, procuramos analisar os trabalhos realizados na comunidade científica, que relacionam a Geometria com a Álgebra e as atividades propostas pelos pesquisadores, como também, as atividades propostas nos livros didáticos, entre outras fontes consultadas.

A seqüência didática compreendeu quatro fases: estudos preliminares, elaboração das atividades para a seqüência e uma análise a priori, experimentação e uma análise a posteriori.

Os estudos preliminares serviram de base para a construção e elaboração das atividades da seqüência, levando em consideração alguns pontos importantes adquiridos durante os estudos realizados, que destacamos a seguir:

a) Adoção do conceito de área como instrumento de construção da expressão algébrica;

b) As concepções dos alunos, professores e das dificuldades e obstáculos que surgem durante o processo de ensino- aprendizagem das expressões algébricas;

c) O estudo e análise da Proposta Curricular para o Ensino da Matemática do Ensino Fundamental;

d) O estudo e análise dos livros didáticos utilizados pelos docentes no sistema de ensino;

e) Análise das questões propostas no Saresp[9] e nas Olimpíadas Estaduais de Matemática do Estado de São Paulo, com o intuito de verificar como vem sendo cobrado o ensino da álgebra nestes tipos de avaliações. A Saresp tem o propósito de obter indicadores educacionais que possam subsidiar a elaboração de propostas de intervenção técnico-pedagógica no sistema de ensino visando melhorar a sua qualidade e corrigir eventuais distorções detectadas. Esta avaliação é considerada uma "Bússola" para a reorientação das ações da SEE/SP[10] no que diz respeito à capacitação dos recursos humanos do magistério e, do trabalho das escolas participantes,procurando envolver diretamente professores, alunos e pais nas atividades propostas, visando melhorar a qualidade de ensino no Estado de São Paulo.

Para realizarmos o levantamento das concepções dos alunos a respeito dos conceitos de área e de expressões algébricas, fizemos observações durante as aulas ministradas pelo docente da classe e em um outro momento foi aplicado um teste piloto procurando avaliar as seguintes noções dos alunos: área, perímetro, diferenciação entre as figuras planas (triângulos, quadrados, retângulos, losangos, entre outros), visando detectar as dificuldades da turma e os seus conhecimentos a respeito destes objetos matemáticos.

Este teste piloto consistia em quatro questões nas quais os alunos deveriam definir o conceito de uma figura plana utilizando suas próprias palavras, e dar

[9] SARESP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.
[10] SEE/S:- Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

exemplos. Em seguida deveria calcular a área e o perímetro das figuras dadas (retângulo, quadrado, triângulo), e responder o que era área e perímetro, para eles.

Com os resultados obtidos no teste pudemos traçar o perfil da turma e assim elaborarmos as atividades para nossa seqüência. Constatou-se que a turma tinha uma boa noção em diferenciar uma figura plana da outra; sabiam definir uma figura plana, mas o problema apontado por Douady (1986) e Baltar (2000) em suas pesquisas associadas às noções de área e perímetro foi uma das dificuldades que mais apareceram nesta turma. Porém eles tinham um conceito bem formado quanto às unidades métricas, pois sabiam que a área era medida em metros quadrados (m^2) ou centímetros quadrados (cm^2), e o perímetro em unidades lineares (m ou cm). Também sabiam diferenciar as grandezas e podiam associar o comprimento como base da figura e a largura como altura.

Após a aplicação do teste e a análise dos resultados, realizamos uma discussão entre o corpo docente de matemática a respeito das dificuldades enfrentadas por eles durante o ensino do conceito de área e de expressões algébricas e, quais eram as dificuldades mais comuns entre os alunos.

Foi constatado que os erros apontados nas pesquisas científicas realmente ainda estavam presentes na aprendizagem dos alunos.

A partir dos resultados do piloto, pudemos aprimorar nossa análise e traçar um perfil mais detalhado do grupo analisado, com as contribuições dos professores sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos e por eles mesmos durante o ensino destes conteúdos. Dessa forma, pudemos elaborar as atividades da seqüência didática, procurando meios para melhorar o ensino destes conteúdos e tornando-os mais significativos para os alunos.

Fizemos uma análise prévia das atividades propostas, enumerando os objetivos gerais e os objetivos específicos de cada atividade. Além disso descrevemos o roteiro de desenvolvimento das atividades, que são os procedimentos que esperamos que os alunos utilizem para resolverem as atividades propostas e, descrevemos os processos que o docente deve seguir para debater com os alunos os resultados obtidos.

Na fase de experimentação, trabalhamos com um grupo de 45 alunos, contando com a participação de um observador. Estipulamos 40 sessões para a aplicação da seqüência didática composta por 12 atividades. Como o período de experimentação de nossa seqüência era composto por alguns feriados, não conseguimos aplicar todas as atividades da seqüência; sendo assim, aplicamos as atividades 1 a 9, utilizando 34 sessões. Cada sessão é composta por 50 minutos e, nossos encontros com a turma eram realizados duas vezes por semana. Dessa forma, acreditamos que seriam necessárias realmente mais de 40 sessões, devido ao ritmo de aprendizagem deste grupo estudado. Além disso, o número de sessões necessárias para o desenvolvimento desta seqüência dependerá do ritmo de aprendizagem do grupo a ser aplicado, variando entre 32 a 42 sessões.

Durante o desenvolvimento das atividades foram observados pela pesquisadora e o observador, os seguintes aspectos:

a) desenvolvimento das atividades em sala de aula com a presença da pesquisadora e do observador;

b) postura do professor frente à classe e em relação à seqüência e as possíveis dificuldades encontradas pelos alunos durante a resolução dos problemas propostos;

c) A compreensão dos alunos sobre os conteúdos expostos;

d) Os erros apresentados pelos alunos durante a execução das atividades;

e) As diferentes estratégias de resoluções dos alunos;

f) A validação da proposta didática.

Após citarmos alguns dos aspectos que observamos durante o desenvolvimento das atividades, apresentamos alguns dos instrumentos que utilizamos para avaliar os resultados obtidos.

Como instrumentos de análise dos resultados utilizamos as estratégias usadas pelos alunos na resolução das atividades através dos registros obtidos durante as observações feitas em sala de aula e dos registros feitos nas fichas das atividades. Além disso, utilizamos a dialética ferramenta-objeto como instrumento de análise para verificar quais as etapas estiveram presentes no desenvolvimento da seqüência.

1.6 Uma seqüência didática com os alunos da 7ª série

Neste projeto, elaboramos e construímos uma seqüência didática composta por 12 atividades para ser desenvolvida com alunos da 7ªsérie do ensino fundamental.

Essas atividades visam trabalhar a integração da Geometria com Álgebra para construção do conceito de expressões algébricas, utilizando a Dialética ferramenta-objeto e o Jogo de Quadros.

Em seguida, apresentamos uma síntese dos fatores qualitativos de análise.

1.7 Fatores qualitativos de análise

Na análise de resultados da seqüência didática servimo-nos das fichas de atividade dos alunos, das observações realizadas em sala de aula por meio dos relatórios, dos tipos de erros cometidos pelos alunos, e das estratégias utilizadas nas resoluções das atividades. Nossos instrumentos de análise são a Dialética ferramenta-objeto, os registros e representações dos alunos, os quadros envolvidos e as apreensões utilizadas pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade. Estes recursos serão discutidos no final do capítulo 5, no qual apresentaremos a análise dos resultados das atividades da seqüência didática.

CAPÍTULO 2. INTEGRANDO A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA

2.1 Introdução

Ao iniciarmos este capítulo, apresentamos um breve estudo sobre a História da Matemática, relacionando os diversos campos da Matemática que contribuíram para a escolha das ferramentas que foram utilizadas para a construção de nossa pesquisa cujo objeto matemático são as Expressões Algébricas.

Nossa pesquisa no campo da História da Matemática inicia-se por meio do estudo das histórias dos povos babilônicos, egípcios, gregos, hindus até chegar aos árabes, todos inseridos nos três estágios da Álgebra: o retórico, sincopado e o simbólico, procurando sempre os métodos que tratam a Geometria como instrumento de construção da Álgebra, relatados por diversos autores, tais como: Boyer (1974) que em seu livro "História da Matemática" relata alguns aspectos interessantes, relacionando a Geometria com a Álgebra, outros autores como Baumgart (1995), também, valorizam estes aspectos históricos da matemática e não somente ligados a Geometria com a Álgebra, como, também, com os demais campos da matemática, como no caso a Aritmética. É válido citar as duas fases da Álgebra: 1) Álgebra antiga (elementar) definida como sendo o estudo das equações e métodos de resolução dos problemas; 2) Álgebra moderna (abstrata), sendo o estudo das estruturas matemáticas, tais como: grupos, anéis, corpos, entre outros.

Também faremos uma breve referência ao criador da Álgebra Al-Khwarizmi (780 d.C. a 850 d.C.), que escreveu os tratados de Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e sobre o calendário. Os tratados de Aritmética e Álgebra serão discutidos no tópico referente ao autor.

No entanto, não podemos esquecer dos famosos matemáticos como Diofanto, Euclides, Pitágoras, Viéte, Descartes, Cardano entre outros, que contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra.

2.2 Uma Análise Histórica no campo da Álgebra

A nossa trajetória na história da Álgebra começa através do estudo da origem da palavra Álgebra, que hoje é utilizada dentro do campo matemático; ela não está sujeita a uma etimologia nítida como o campo da Aritmética, que é derivada do grego *arithmos* (“número”).

A Álgebra é considerada uma variante latina da palavra árabe *al-jabr* (às vezes usada como *al-jebar*), utilizada como título de um livro, Hisab al-jabar w’al-muqabalah (Ciência da Restauração e Redução), escrito em Bagdá por volta de 825 a.C. pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi.

2.2.1 Conhecendo um pouco mais sobre Mohammed al-Khwarizmi, o pai da Álgebra

Sabe-se muito pouco da vida de Abu Abdullah Mohammed ibn – Musa al-Khwarizmi. Não se sabe ao certo quando nasceu, provavelmente por volta de 780 d.C. e teria morrido entre 830 e 850 d.C. Seu nome significa Mohammed, pai de Abdullah e filho de Moíses, de Khwarizmi. Viveu em Khowarezm, localizado na região sul do mar de Aral, na altura da parte da Pérsia ocupada pelos Árabes, que atualmente, faz parte do Uzbequistão. Certo é que foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar na Casa da Sabedoria, em Bagda, durante o reinado do califa, árabe al-Mamum (813-883 d.C). Esta região está localizada atualmente no Uzbequistão, conforme o mapa abaixo.

Figura 3: Fonte :Iraq_map.png (12KB, MIME type: image/png) Wikipedia, 25/01/2007

O maior escritor árabe no campo da matemática foi provavelmente, al-Khwarizmi (c.825 d.C.), ainda que para muitos sua álgebra revele pouca originalidade. Além disso, al-Khwarizmi escreveu tratados sobre Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e sobre o calendário. Tanto o tratado sobre Aritmética como o sobre Álgebra constituíram o ponto de partida para trabalhos posteriores e exerceram uma forte influência no desenvolvimento da matemática, nos campos da Aritmética e da Álgebra.

A versão do tratado de Aritmética de al-Khwarizmi encontra-se perdida, mas este chegou à Espanha e existem traduções, do século XII, para o latim. Neste texto, al-Khwarizmi introduz os nove símbolos indianos para representar os algarismos e um círculo para representar o zero. Depois, explica como escrever um número no sistema decimal de posição utilizando os 10 símbolos. Descreve as operações de cálculo (adição, subtração, multiplicação e divisão) segundo o método indiano e explica a extração da raiz quadrada. Em seguida, explica o cálculo com os números inteiros, e depois trabalha com as frações utilizando o método dos egípcios como soma de frações unitárias.

Figura 4. Foto de al-Khwarizmi

O tratado de Álgebra escrito data de cerca de 830 d.C. tendo o titulo Hisab al-jabr w'al-muqabala. Uma provável tradução seria o cálculo por completação (ou restauração) e redução. Al-jabr é a operação que consiste em adicionar termos iguais a ambos os membros da equação de forma a eliminar um dos termos com coeficiente negativo e al-muqabala é a operação que se faz em seguida e que consiste em adicionar os termos semelhantes.

Nesta obra de al-Khwarizmi, que é composta por três partes, nas quais a primeira trata da área da Álgebra, que precede um breve capítulo sobre as transações comerciais; na segunda é discutida a Geometria e a terceira parte sobre as questões de heranças. No seu livro o autor não utiliza qualquer símbolo, nem sequer os símbolos que descreverá posteriormente na sua aritmética.

Este livro, também, foi traduzido para o latim, no século XII, mas estas traduções não incluíram a segunda e a terceira partes. Encontramos alguns relatos do livro árabe na obra de Robert Chester, traduzido para o latim, conforme apresentamos a seguir:

علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ
ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد
اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو
خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره
والمال تسعة وهذه صورته

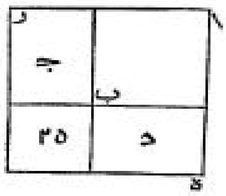


Figura 5: Representação Algébrica utilizando a Geometria.
Fonte: Excerto de uma página da Álgebra, da Edição de Rosen, 1831.

Além dos relatos sobre as obras de al-Khwarizmi, a Álgebra árabe proveio da Álgebra dos Hindus e Gregos, que serão discutidos neste capítulo, e que nos levaram a utilizá-los em nosso projeto. É importante ressaltar que o autor utilizava um tipo de “transposição” que não é encontrado nos trabalhos hindus e gregos, e parece ser o primeiro a reunir potências iguais da incógnita, que é considerada uma idéia original. Ele resolvia as equações lineares e quadráticas, numericamente e geometricamente. Reconhecia a existência de raízes negativas (como os hindus) mas conscientemente as rejeitava.

A seguir apresentamos as duas resoluções de al-Khwarizmi, utilizando o método de transposição ou cancelamento e o geométrico utilizando o “completar quadrados”.

a) Método de transposição:

Tabela 2. Método de transposição

Procedimentos	Resolução Numérica	Resolução Algébrica (generalização)
1) Reparta ao meio o número de raízes, o que no presente exemplo é cinco.	$x^2+10x=39$ $\frac{1}{2}(10)=5$	$x^2+px=q$ $\frac{p}{2}$
2) Este você multiplique por ele mesmo; o produto é vinte e cinco.	$5\cdot 5=25$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
3) Some isto a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro.	25 + 39 = 64	$\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$
4) Agora tome a raiz disto, que é oito, e subtraia metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três.	$\sqrt{64}=8$ $8-\frac{10}{2}=3$	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2}+\sqrt{q^2}$ $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2}+\sqrt{q^2}-\frac{p}{2}=x$
5) Esta é a raiz do quadrado que você procura; o quadrado mesmo é nove.		ou $x=\frac{-p+\sqrt{p^2+4p}}{2}$

Fonte: BAUMGART, 1995, p.77.

b) Método Geométrico: “Completar Quadrados”

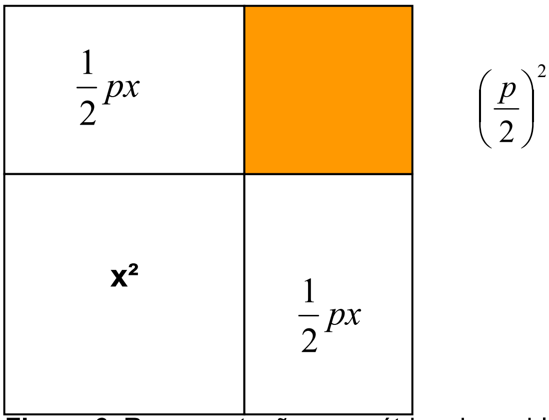


Figura 6. Representação geométrica do problema.

Nota-se na resolução geométrica, que a área sombreada representava a parte negativa a ser extraída do quadrado, representada no método de cancelamento. Para a determinação da raiz quadrada, os árabes adotavam uma concepção diferente dos gregos, aproximando-se dos hindus. Os gregos consideravam o número 5 como lado de um quadrado de área 25, já os árabes utilizavam apenas as concepções dos hindus, que concebiam o 25 como sendo uma árvore que crescia a partir do número 5, sua raiz. Outros matemáticos árabes também, utilizavam a geometria para resolução de problemas algébricos como Omar Khayyam (c.1100 d.C.), conhecido pela obra Rubayat. Ele utilizava a álgebra geométrica, para resolver equações cúbicas através da determinação da intersecção das cônicas. Foi considerado o maior feito da álgebra arábica.

Outros autores, como Boyer (1974) considera que o livro de al-Khwarizmi deveria receber o titulo de “ciência da transposição e cancelamento” segundo a definição: “a transposição de termos subtraídos para outro membro de uma equação” e “o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação.” (BOYER, 1974, pp.252-3).

Partindo-se dos relatos feitos na citação acima, podemos fazer uma comparação da equação algébrica na visão da al-jabr. Considerando a equação :

$$x^2 + 4x + 6 = 6 - 2x + 5x^3 \quad \textbf{(1)}$$

teremos como resultado final segundo al-jabr :

$$x^2 + 6x = 5x^3 \quad \textbf{(2)}$$

Considerando a demonstração dada acima, constatamos que a Álgebra pode ser considerada a "ciência das equações". Ainda baseados nos estudos etimológicos podemos destacar a palavra "algorismo" ou (algoritmo), que significa qualquer processo especial para calcular, que também tem origem árabe e de origem do matemático al-Khwarizmi, pois em sua obra Líber algorismo (1143 d.C.), ele descreveu o processo de cálculo com números indo-arábicos.

Outro aspecto que é válido ressaltar na cultura árabe é a utilização da palavra algebrista (restaurador de ossos quebrados), conhecido na Espanha moura, pois era utilizado pelos árabes marroquinos. Além disso, este povo valorizava seus algebristas considerando-os como sábios na sociedade árabe, por solucionarem diferentes problemas matemáticos. Alguns dos problemas propostos encontram-se na obra "O homem que calculava" (MALBA TAHAN, 1995).

Atualmente, a "Álgebra" não é apenas a ciência das equações, mas sim adquiriu um significado mais amplo e uma definição mais satisfatória que foi devida a duas fases dentro da história da Álgebra: (1) Álgebra antiga conhecida como elementar, onde estudamos as equações e métodos de resolução, (2) Álgebra moderna (abstrata) onde estudamos as estruturas matemáticas, como os grupos, anéis, corpos. Em nosso trabalho estudaremos apenas a fase da Álgebra antiga.

2.2.2 Origem das Equações Algébricas e Notações

As equações algébricas surgiram aproximadamente no período de 1700 a.C a 1700 d.C. Foi caracterizada através da invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações (utilizando-se coeficientes numéricos) através do uso de diversos métodos, que foram se desenvolvendo até chegarem à resolução de equações cúbicas e quárticas (c.1545) e o inspirado tratamento das equações polinomiais que foi estudado por François Viéte (1540-1603). (BAUMGART, 1995, p.3)

Já o desenvolvimento da notação algébrica ocorreu ao longo dos três estágios da Álgebra: o Retórico (ou verbal), o Sincopado (no qual utilizavam as abreviações de palavras) e o Simbólico. Constatou-se que o último estágio, foi o período no qual a notação passou por várias modificações e mudanças, até tornar-se razoavelmente estável ao tempo de Isaac Newton (c.1700 d.C.).

Como exemplo de notação, podemos considerar o caso do número π, que é utilizado em vários paises, mas é representado de diferentes maneiras, no sistema americano escrevem "3.1416" com a aproximação de π, já os europeus convencionam o símbolo da seguinte forma: "3,1416". Outra curiosidade a respeito dos símbolos e notações é o símbolo da divisão ($\div$) que representa para nós a operação da divisão; já nos países europeus este símbolo representa a operação de menos.

2.3 Álgebra Babilônica – Estilo Retórico

De acordo com Kieran (1989), o estágio retórico, que surgiu no período antes de Diofanto (c.250 a.C), foi caracterizado pelo uso de descrições em linguagem comum para resolver tipos particulares de problemas e pela falta de símbolos ou sinais especiais para representar incógnitas.

Já, Baumgart (1995) nos apresenta a ligação do estilo retórico com a civilização babilônica, que supostamente deu origem à Álgebra, e que se utilizava deste estilo para solucionar seus problemas, conforme os relatos da resolução demonstrada a seguir:

O problema mostra o relativo grau de sofisticação da Álgebra babilônica. É um exemplo típico dos problemas encontrados na escrita cuneiforme em tábuas de argila que representam o tempo do Rei Hammurabi (c.1700 a.C). A exposição é feita em português, utilizando o sistema decimal indo-arábica em vez da notação sexagesimal cuneiforme.

A coluna paralela à direita fornece as passagens correspondentes em notação moderna.

Problema:[1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área :252. Somei comprimento e largura :32. Pede-se : comprimento e largura

Tabela 3. Resolução do problema proposto

[2] [Dado] 32 soma ; 252 área.	$\left.\begin{array}{l} x+y=k \\ xy=P \end{array}\right\}$...(A)
[3] [Resposta] 18 de comprimento, 14 de largura.	
[4] Segue-se este método: Tome metade de 32 [que é 16]	$\frac{k}{2}$
16 x 16 =256	$\left(\frac{k}{2}\right)^2$
256 – 252 = 4	$\left.\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P = t^2\right\}...(B)$
A raiz quadrada de 4 é 2	$\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P} = t$
16 + 2 =18 comprimento	$\frac{k}{2}+t=x$
16 – 2 = 14 largura	$\frac{k}{2}-t=y$
[5] [Prova] Multipliquei 18 de comprimento por 14 de largura. 18 x 14 = 252 área	$\left(\frac{k}{2}+t\right)\times\left(\frac{k}{2}-t\right)=\frac{k^2}{4}-t^2=P=xy$

Fonte: BAUMGART. 1995, pp.4-5.

Nota-se que na resolução do problema proposto, encontramos a seguinte explicação: (1) o problema é formulado, (2) os dados são apresentados, (3) a resposta é dada; (4) o método de resolução é explicado com números e finalmente, (5) a resposta é testada.

O desenvolvimento da resolução descrita acima, é conhecido como método de solução, denominado pela pesquisadora B.L. Van der Waerden (1965), sendo utilizado em diversas resoluções de problemas semelhantes.

Ao analisarmos o sistema (A) formado na resolução proposta, notamos que nos dias atuais utilizamos o sistema de substituição para resolver a questão proposta, partindo-se da seguinte hipótese, escrevendo uma expressão de y em função de x e, em seguida substituindo na próxima equação e, então, resolver a equação quadrática. Já, os Babilônios também sabiam resolver pelo método de substituição, mas, preferiam usar o método paramétrico, ou seja, utilizando-se da notação moderna, eles concebiam x e y em termos de uma nova incógnita (ou parâmetro) t fazendo x = $\left(\frac{k}{2}\right)+t$ e y = $\left(\frac{k}{2}\right)-t$.

Então o produto xy = $\left(\frac{k}{2}+t\right)\cdot\left(\frac{k}{2}-t\right)$ = $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ - t^2 = P

Levando-os à relação (B): temos $\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P = t^2$

É válido notar que o problema proposto acima tem um significado histórico porque a Álgebra grega (geométrica) dos pitagóricos e de Euclides seguia o mesmo método de resolução, porém, em termos de segmento de retas e áreas e ilustrado por figuras geométricas. Outro matemático Grego, conhecido pelos seus feitos matemáticos, Diofanto, também utilizou-se da abordagem paramétrica em seu trabalho com as equações “diofantinas”. Ele deu, assim, o início ao simbolismo moderno, introduzindo abreviações de palavras e evitando o estilo um tanto intrigado da álgebra geométrica.(que será estudada mais adiante).

Por outro lado, os matemáticos árabes não usavam o método empregado no problema acima; preferiam eliminar uma das incógnitas por substituição e expressar tudo em termos de palavras e números. (Conforme o método de transposição descrito anteriormente no item 2.2.1).

Ao finalizarmos a discussão sobre os feitos dos babilônicos e sua álgebra, notamos que este povo teve uma grande importância na construção da Álgebra, através dos métodos desenvolvidos para os diversos tipos de equações algébricas, destacando-se entre elas as equações cúbicas e quárticas.

2.4 Álgebra no Egito

A Álgebra egípcia apareceu quase na mesma época que na Babilônia. Comparando-se as duas álgebras desenvolvidas notava-se que a álgebra dos egípcios era deficiente pois, a ela falta o uso dos métodos mais sofisticados da álgebra babilônica, assim como a variedade de equações resolvidas, observadas através dos estudos e análises do Papiro de Moscou e do Papiro de Rhind – documentos egípcios que datam de cerca de 1850 a.C e 1650 a.C, Eles nos mostram métodos matemáticos de um período anterior ao citado.

Para resolverem as equações lineares, os egípcios usavam um método de resolução no qual utilizavam-se da estimativa inicial, seguida de uma correção final.

Este método foi chamado pelos europeus como “regra de falsa posição”. (BAUMGART, 1995, p.6).

Nota-se que o ponto comum entre a álgebra egípcia e a babilônica é apenas o estilo retórico, pois, o sistema de numeração dos egípcios era relativamente primitivo em comparação ao babilônico, justificando a dificuldade na resolução das equações.

2.5 Álgebra Geométrica Grega

A Álgebra Grega, conforme foi criada pelos pitagóricos (c.540 a.C) e por Euclides (c.300 a.C) era geométrica. Quando os gregos queriam escrever o produto notável : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eram utilizados os termos do diagrama apresentado a seguir no diagrama na Figura 7.

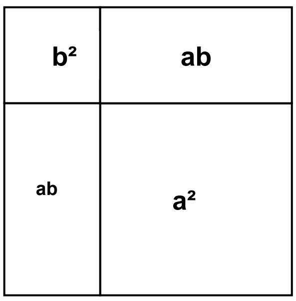


Figura 7

Esta figura 7 era um tipo de diagrama utilizado pelos gregos, onde o a^2 era representado pelo quadrado de lado a, e o produto ab pelo retângulo de lados a e b.

No entanto, a descrição dada por Euclides, em sua obra Os Elementos livro II, proposição 4, temos a seguinte explicação:

> *Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as contém.[Isto é, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab+b^2$]* (EUCLIDES, Os Elementos, livro II, proposição 4)

Em seguida, apresentamos um dos problemas propostos e discutidos por Euclides, no seu livro VI em Os Elementos, na proposição 28:

> *Dada uma linha reta AB isto é, [$x + y = k$], construir ao longo dessa linha um retângulo com uma dada área [$x y = P$], admitindo que o retângulo "fique aquém" em AB por uma quantidade"preenchida" por outro retângulo[o quadrado BF na figura 2], semelhante a um dado retângulo [que aqui nós admitimos ser qualquer quadrado]*. (EUCLIDES, Os Elementos livro VI, proposição 28)

Logo abaixo apresentamos a resolução do problema utilizando a álgebra grega conforme a Figura 8.

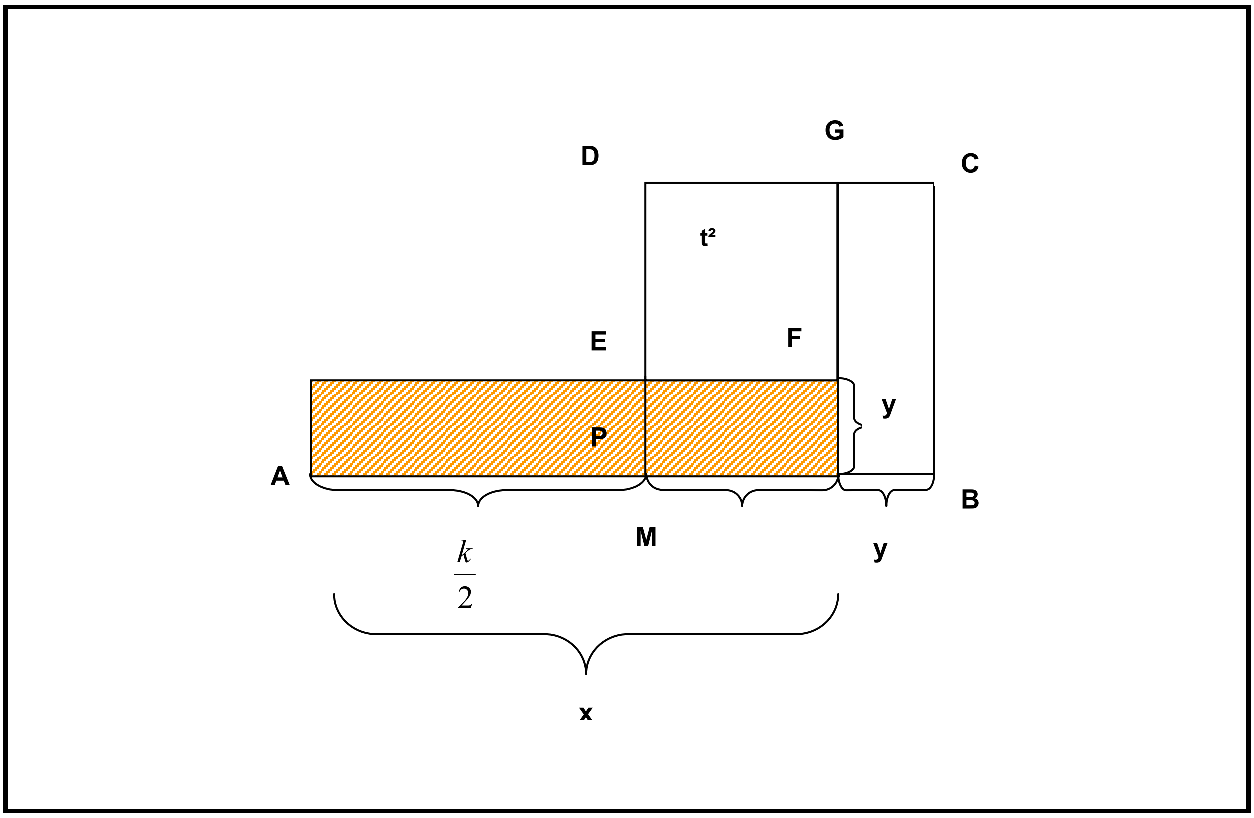


Figura 8. Representação do Problema de Euclides
Fonte: BAUMGART, 1995, p.7.

Nota-se nesta resolução, dada por Euclides (Ver. Fig.8), é quase paralela à resolução babilônica de um problema equivalente. A seguir apresentamos a resolução algébrica do problema conforme a visão de Euclides no seu livro II, p.263, que apresentamos abaixo:(vide tabela 3)

Tabela 4. Procedimento da resolução do problema por Euclides

Procedimento	Representação Algébrica
Bissetriz AB em M	$\frac{k}{2}$
Construa o quadrado MBCD;	$\left(\frac{k}{2}\right)^2$
Usando VI, 25, construa o quadrado DEFG com a área igual ao excesso de MBCD sobre a área dada P:	$t^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - P$
Então é claro que:	$y = \frac{k}{2} - t$

Por meio da resolução dada por Euclides, nos relatos acima, percebeu-se que ele propôs um problema semelhante para o seu aluno, como no exemplo: x $=\left(\frac{k}{2}\right)+t$, para que este tentasse encontrar a solução aplicando este método. Além disso, constata-se, que todos os problemas resolvidos pelos babilônicos foram refeitos por Euclides, utilizando a geometria grega e depois constatando com o método babilônico.

Notamos que apesar dos matemáticos gregos, tivessem a capacidade em contornar as frações, tratando-as com razões entre inteiros, eles tinha dificuldades nos números irracionais do tipo $\sqrt{2}$. Isto é comprovado por meio das reações geradas quando os pitagóricos descobrem que a diagonal do quadrado unitário é um número incomensurável com o lado.

Não podemos esquecer de outro matemático grego, Apolônio (c.225 a.C), que aplicou métodos geométricos ao estudo das Secções Cônicas, onde foram registrados em seu tratado Secções Cônicas, que é trabalhado dentro da Geometria Analítica nos cursos secundários e nos cursos universitários.

2.6 Notação Algébrica Sincopada

Segundo Kieran (1989), o segundo estágio da Álgebra é a sincopada, que surgiu alguns séculos mais tarde, com o matemático grego Diofante, que deu um novo impulso no caminho da Álgebra.

A Álgebra sincopada foi iniciada por Diofante, que introduziu o usou das letras para as quantidades incógnitas. A fama de Diofante é baseada em sua Arithmética, na qual ele apresenta um engenhoso tratamento das equações indeterminadas, geralmente duas ou mais equações com diversas variáveis com uma infinidade de soluções racionais, as quais são conhecidas como equações diofantinas, embora Diofante não tinha sido o primeiro a solucioná-las. Sua abordagem é considerada inteligente, mas ele não criou um método sistemático para encontrar as soluções gerais. Além disso, segue as linhas babilônicas no sentido de utilizar o método paramétrico, para expressar suas equações.

Notamos através de relatos de Kieran (1989), que alguns matemáticos como Haper analisaram o trabalho de Diofante e de outros algebristas do século terceiro até o décimo sexto, que consistiu em descobrir a identidade das letras, ao invés de tentar expressar o seu significado geral. No entanto, quando a pesquisadora observa os estudos realizados por Diofante constata, que apesar dos 189 problemas resolvidos por este, os seus métodos utilizados eram sempre um diferente do outro. Já Klien (1972), em seus estudos sobre a obra de Diofante, constatou que a leitura realizada por Diofante era similar os processos dos egípcios e babilônicos.

Nos anos de 1500 d.C, a obra de Diofante foi traduzida e levada para a Europa onde vários matemáticos tiveram sua influência para o desenvolvimento da álgebra na matemática européia, principalmente com François Viéte (1540-1603 d.C). Assim, Viéte utilizou a letra para significar um dado, como também, para as quantidades de incógnitas e, desta forma, introduzir o terceiro estágio do desenvolvimento da Álgebra simbólica.

Após termos mostrado como era a Álgebra sincopada, da qual o seu maior representante foi Diofanto, discutiremos agora alguns aspectos da Álgebra simbólica, que é o terceiro estágio da história da Álgebra.

2.7 Álgebra Simbólica, conhecida como Álgebra Hindu-Arábica

Nossos estudos realizados sobre o terceiro estágio da Álgebra, conhecido como Álgebra simbólica ou Álgebra Hindu-Arábica, que recebeu este título, pois, teve influências deste dois povos.

Fatores históricos nos mostram que a matemática hindu, antes dos séculos IV ou V d.C., apresentou uma carência de registros matemáticos, porém, as contribuições para a construção da matemática hindu vieram juntamente como os seus invasores, que trouxeram consigo as influências dos povos babilônicos e gregos. Isso é verificado através da expansão do Império romano, que contribuiu para o intercâmbio das idéias. Nota-se que os matemáticos hindus absorveram as realizações babilônicas e gregas, quando estudamos os trabalhos de dois matemáticos hindus que contribuíram para a construção de alguns métodos da álgebra, como os trabalhos de Brahmagupta (c.628 d.C), que trabalhou num estilo sincopado no qual a equação 5xy $\sqrt{35}$ + -12 seria escrita da seguinte forma :

ya	*ka*	*5*	*bha*	*k(a)35*	*ru*	*12*
x	*y*	*5*	*produto*	*irracional puro*	*número*	*- 12*

Fonte: BAUMGART, 1995, Tópicos da Matemática para uso em sala de aula, p.10.

Além da resolução de Brahmagupta (c.628 d.C), outro matemático hindu também teve destaque na Álgebra, como o método desenvolvido por Bhaskara (c.1150 d.C) para a resolução de equações quadráticas (ou equações de segundo grau). Uma curiosidade em relação a este método de Bhaskara, é que no Brasil, os alunos aprendem este método de resolução de equações de segundo grau como fórmula de Bhaskara ao invés de fórmula de resolução de Equação de segundo grau, que é utilizado no ensino de outros países. Além destes métodos dos hindus, foi observado, por diversos pesquisadores, que os hindus resolviam as equações quadradas, completando os quadrados, e aceitavam os números negativos e raízes irracionais; também tinham o conhecimento de que uma equação quadrática (com raízes reais) tem duas raízes.

Outro aspecto importante a ressaltar é que o método de resolução utilizado pelos hindus para equações indeterminadas era superior ao método grego, desenvolvido por Diofanto. Nesta resolução, eles tentavam achar todas as soluções inteiras possíveis e foram, talvez, os primeiros a dar métodos gerais de solução. Um dos trabalhos desenvolvidos por Brahmagupta e Bhaskara foi o método de Pell, representado pela equação abaixo:

$$y^2 = ax^2 + 1 \text{ (onde a é um inteiro não quadrado)}$$

É considerado um trabalho excelente, no qual os matemáticos apresentam inúmeras soluções a partir de uma dada solução x, y (desde que $xy \neq 0$).

O povo árabe também deu sua contribuição para este estágio, através dos seus matemáticos que destacamos no início deste capítulo sendo válido citar : al-Khwarizmi e Omar Khayyam (c.1000 d.C.), seu maior feito na Álgebra foi procurar utilizar métodos geométricos, como a intersecção de cônicas, para resolver certos tipos de equações cúbicas.

Na Europa, a Álgebra foi apresentada pelos trabalhos de Fibonacci em meados de 1500 d.C, conhecido por moderno simbolismo, no qual o matemático apresentou os trabalhos de Diofanto e Brahmagupta. Todos estes trabalhos serviram de influência, nos outros trabalhos desenvolvidos na Álgebra moderna como os trabalhos de Cardano (1545 d.C), Bombelli (1572 d.C), Viéte (1591 d.C), Descartes (1637 d.C) e Wallis (1693 d.C).

Ao estudarmos estes estágios da Álgebra constatamos que as mais importantes estratégias matemáticas para a resolução das equações algébricas foram desenvolvidas no estágio sincopado e no simbólico.

Partindo-se deste estudo pela História da Álgebra e seus estágios, pudemos justificar nossas escolhas para o desenvolvimento de um sistema de ensino-aprendizagem baseado na Álgebra-Grega, que integra a Geometria com a Álgebra, possibilitando aos alunos uma resolução diferenciada da Álgebra mecanizada e sem significado. Além disso, procuramos conciliar nossa fundamentação teórica utilizando a Dialética ferramenta-objeto e o Jogo de Quadros, que colaboraram para o desenvolvimento de uma seqüência didática adequada para a Álgebra Geométrica, conforme descrevemos no capitulo anterior.

CAPÍTULO 3. A NOÇÃO DE GRANDEZA

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos e discutimos a noção de Grandeza em diversos aspectos: lingüísticos através dos correlatos de linguagem, o tratamento dado a esta noção pelos PCNs e a sua importância nas pesquisas da comunidade científica em Educação Matemática.

Em nossa pesquisa, esta noção ocupa uma posição de destaque nas atividades que compõem a seqüência didática, pois, todos os aspectos citados anteriormente, contribuíram para que levássemos em consideração o conceito de área como uma grandeza, embasados também, nas pesquisas de Douady (1989) e Baltar (2000)

Um outro objetivo deste capítulo é fornecer um breve panorama de Grandeza, que forneça dados para que os leitores consigam compreender a importância desta quando utilizada conjuntamente com outros objetos matemáticos como Área e Volume, que são considerados grandezas sendo, a primeira bidimensional e a outra tridimensional.

Iniciamos nosso capítulo apresentando a noção de Grandeza e sua relação com a Linguagem.

3.2 O Termo Grandeza e sua relação com a Linguagem

Para compreendermos melhor o significado e a importância do termo Grandeza no campo matemático, recorrendo ao Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa, Século XXI, na sua versão eletrônica (versão 3), realizando um estudo lingüístico, e selecionando alguns significados para este termo, afim de que possamos aprofundar nossos estudos no campo matemático.

Segundo Aurélio, o termo grandeza é um substantivo feminino, tem sua origem na junção do radical “grande” com o sufixo “eza”. Pode ser compreendido como “Qualidade ou caráter de grande”, como também sendo” Tratamento honorífico dos antigos grandes reinos”, ou ainda representar “Nobreza de ânimo, generosidade, liberdade”. Já na astronomia, é sinônimo de “Magnitude”, no campo matemático corresponde a idéia de “entidade suscetível de medida”, na Física é utilizada como “Grandeza intensiva” e “Grandeza extensiva”.

Existem diversos aspectos do termo grandeza que podemos abordar. Assim, destacamos alguns aspectos: observando o radical do termo (grande) pode ser associado a alguns termos como: tamanho, comprimento, intensidade, volume, numeroso, entre outros. Outro destaque que a palavra grandeza é associada é com a noção de **quantidade.** Esta palavra que tem sua origem do latim (*quantitate*), tem a seguinte definição: é um substantivo feminino, ao qual atribuem, entre outros, os seguintes significados: “Números de unidades, ou medida, que determina um conjunto de coisas equivalentes e suscetíveis de aumento ou diminuição”, “Grandeza expressa em número”, “Grande porção de pessoas ou de coisas, grande número, grande quantidade, etc”.

Em outras áreas como a Filosofia, o termo grandeza no campo da metafísica recebe a seguinte definição: “é a categoria fundamental que designa o caráter do que pode ser medido”. Assim podemos também associar ao termo grandeza a palavra **medida**. Esta palavra no campo da análise matemática é considerada “Qualquer função aditiva de um conjunto que só é nula quando o argumento é um conjunto vazio”, na Física é definida como: “Ato ou processo de comparar uma grandeza com outra com o objetivo de associar a primeira a um número característico de seu valor de face da grandeza com a qual foi comparada; medição” ou ainda “o resultado de um processo de medida”. Já, o verbo transitivo direto medir, por sua vez, vem do latim (metre, por metiri) e significa, por exemplo, “Determinar ou verificar, tendo por base uma escala fixa, a extensão, medida, ou grandeza de comensurar”; “Avaliar, considerar, ponderar, calcular”.

Dessa maneira, associamos o termo grandeza aos seguintes significados: quantidade, medida e ao final como número, a qual daremos uma breve explicação.

O termo **número** [Do.lat.*numeru*.], substantivo masculino, que tem como várias acepções as que apresentamos a seguir:

1. A soma total dos elementos ou unidades de um conjunto, série, etc. 2. Porção ou parcela de um grupo, conjunto, etc. 3. Nome, símbolo ou representação de uma quantidade;entidade abstrata que corresponde a um aspecto ou uma característica mensurável de algo (quantidade, grandeza, intensidade,etc.) e, que é matematicamente definida como conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado.

4. Grande número; quantidade, abundância, cópia, classe, rol, categoria. [...] 6. Na expressão número adimensional, combinação multiplicativa de potências de grandezas físicas cuja dimensão, em termos de um conjunto de grandezas fundamentais, é igual a zero.[...]

Os significados não-matemáticos dos termos apresentados acima são colocados como fatores secundários no ponto de vista do ensino-aprendizagem desta ciência, mas não podem ser totalmente esquecidos, pois os alunos trazem esta bagagem cultural. Dessa maneira, construir um sistema de significados matemáticos com certa coerência interna torna-se uma difícil tarefa, na qual se dedica a Didática da Matemática.

Ao finalizarmos esta discussão a respeito do termo grandeza no aspecto lingüístico destacando os itens importantes para o campo matemático, apresentaremos agora um resumo da conceitual deste termo na literatura científica e nas pesquisas realizadas na comunidade científica de Educação Matemática.

3.3 A importância do estudo de Grandeza na Comunidade Científica de Educação Matemática.

Nesta etapa de nossos estudos apresentamos uma síntese das literaturas existentes no campo matemático e os trabalhos científicos apresentados a comunidade de Educação Matemática que relacionaram os estudos sobre grandeza.

Geralmente os autores procuram definir o termo de grandeza como, quantidade, magnitude e outras palavras chaves relativas ao tema. Ora, tais conceitos revelaram-se ao fim desse longo processo de evolução do pensamento científico, candidatos naturais a termos primitivos de um modelo abstrato.

Nossa discussão é iniciada destacando a obra de Euclides " Os Elementos", originada da matemática ocidental. Em seu livro V, no preâmbulo podemos ler:

> - *Uma **grandeza** (ou uma **magnitude**) é uma parte menor de uma grandeza que mede esta última.*
> - *A grandeza maior é um múltiplo da menor quando é medida por esta última.*
> - *Uma **razão** é um tipo de relação entre duas grandezas de mesma espécie com relação a tamanho.*
> - *Grandezas são ditas **terem uma razão entre si** quando é possível, multiplicando a primeira delas, obter uma grandeza que é maior do que a segunda e reciprocamente, multiplicando a segunda superar a primeira.*
> - *(Quatro) grandezas são ditas terem a mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, se os mesmos múltiplos da primeira e da terceira são correspondentemente maiores, iguais ou menores do que os mesmos múltiplos da segunda e da quarta.* (HEATH, 1956, Vol 3, p.133 e seguintes)

Nota-se através dos relatos de Euclides que a definição dada para grandeza é apresentada de forma circular, pois nela aparece o próprio termo grandeza. Mas nem este inconveniente lógico, nem os que se pode também notar na definição de razão afetam a definição do objeto central do Livro V, o conceito de proporção, definido no final do texto. A idéia subjacente ao conjunto de definições citadas, é a da construção da "medida de uma grandeza tomando outra de mesma espécie como unidade", sendo, para o conhecimento da época, apenas admissível que a medida fosse um número racional. Para a época de Euclides esta situação era impossível, em geral, em face da existência de grandezas cuja razão não é um número racional, as grandezas são incomensuráveis entre si. O que destacamos na definição de proporção do Livro V é que ela se aplica mesmo no caso em que a razão entre as grandezas não é um número racional. Health (1956, Vol.2, p.124) aponta que *"há uma exata correspondência, quase uma coincidência, entre a definição de Euclides* *de igualdade entre duas razões e a teoria moderna dos irracionais, devido a Dedekind".*

Analisando o pensamento da Grécia clássica, observamos como a palavra grandeza era utilizada no Livro V "$\mu \in' \gamma \in \theta o \zeta$ ", já a palavra "tamanho" é citado no Livro V desta forma "$\pi \eta \lambda \iota \kappa o \zeta$ " e "quantidade" é representada assim"$\pi o \sigma o' \zeta$ " na obra de Aristóteles como uma das categorias fundamentais do conhecimento:

As locuções desligadas ou designam essência ou quantidade, ou qualidade, ou relação. ou lugar, ou tempo, ou estado, ou ação permanente ou ação transeunte, ou paixão.

Essência para o dizer como exemplos é como: Homem, Cavalo.

> *Quantidade.Exemplo: de dois côvados, de três côvados.*
> *Qualidade. Exemplo: Branco,Gramático.*
> (ARISTÓTELES, 1994, p.57)

Os parágrafos retirados da obra de Health (1956, Vol.2, pp.116-7), procuram estabelecer uma distinção entre os termos chaves apresentados acima:

> *Nichomacus[...] distingue $\pi \eta \lambda \iota' \kappa o \zeta$, que se refere à grandeza, de $\pi o \sigma o' \zeta$ que é associado à idéia de multiplicidade. Da mesma forma pensa Iamblichus[...], que, ao lado disso, distingue $\pi \eta \lambda \iota' \kappa o \zeta$ como objeto da geometria, sendo contínuo, de $\pi o \sigma o' \zeta$, objeto da aritmética,sendo discreto..."*
>
> *[...]*
>
> *A idéia de tamanho parece-me permitir uma distinção adequada entre $\pi \eta \lambda \iota' \kappa o \zeta$, e $\mu \in' \gamma \in \theta o \zeta$, pois tamanho ($\pi \eta \lambda \iota' \kappa o \zeta$) é o atributo e grandeza ($\mu \in' \gamma \in \theta o \zeta$) é o objeto que possui o atributo de tamanho.*

Nota-se nas breves citações acima que, desde cedo na evolução do pensamento ocidental, surgem vários aspectos conceituais associados à idéia de grandeza. Observa-se também, que já estão presentes desde os primórdios as distinções, hoje mais nítidas, entre os três elementos básicos do campo conceitual das grandezas: *objetos físicos* ou *abstratos,* as *grandezas*, que são atributos associados a esses objetos e as *medidas* dessas grandezas,que são números.

Outra literatura fundamental que também destaca o termo grandeza como idéia de quantidade, no Século XVIII, é a obra de Kant, “Crítica da razão pura”, na qual o grande filósofo alemão inclui, a exemplo de Aristóteles, o conceito de quantidade na tábua de suas categorias de entendimento:

> *Desse modo, surgem precisamente tantos conceitos puros do entendimento, que se referem a priori a objetos da intuição em geral, quantas eram as tábuas anteriores às funções lógicas em todos os juízos possíveis. Com efeito, através de tais funções o entendimento é completamente exaurido e sua faculdade inteiramente medida. Seguindo Aristóteles se bem que se afaste bastante dele na execução.*
> *Tábuas das Categorias*
> *1-Da Quantidade:unidade, pluralidade, totalidade;*
> *2-Da Qualidade:realidade, negação, limitação;*
> *3-Da relação: inerência e subsistência (substantia et accidens): casualidade e dependência (causa e efeito); comunidade (ação recíproca entre agente e paciente);*
> *4- Da modalidade: possibilidade – impossibilidade: existência – não ser: necessidade – contingência.* (KANT, 1987, pp.69-70)

Após observarmos os relatos de Kant a respeito do conceito de grandeza, iremos dar um breve olhar no fim do Século XIX, tomando como referência à obra de Louis Couturat. Nas quais podemos destacar dois trabalhos que tratam da questão rigorosa do conceito de grandeza: *De L’Infini mathématique* (Couturat, 1973), publicada pela primeira vez em 1896, e *Les príncipes des mathématiques* (Couturat, 1980), cuja primeira edição data no início do Século XX.

A segunda obra de Couturat, mencionada acima é uma exposição baseada no famoso livro *The principles of mathematics* de Bertrand Russel, publicado em 1903. Nos relatos da obra de Couturat (1973), destacamos um capítulo no qual é dedicado à definição de grandeza, do qual destacamos alguns trechos:

> *A concepção tradicional da Matemática que predominou até o meio do Século XIX fazia da grandeza um objeto essencial dessa ciência; mesmo o número era considerado como uma espécie de grandeza,a grandeza discreta, por oposição à grandeza continua.Depois dessa época tornou-se um dogma universalmente aceito que a Matemática pura repousa inteira e unicamente sobre a idéia de número, e até mesmo de número inteiro.(p.98)*
> *De início, há uma distinção capital a estabelecer entre grandeza e quantidade.*
> *Grandeza é a quantidade abstrata, quantidade é a grandeza concreta;a primeira é o que chamamos um estado da grandeza, a segunda é o próprio objeto ao qual se atribui esse estado. Essas duas noções são constantemente confundidas na linguagem e no uso da mesma maneira que são confundidos, em geral, o sentido concreto e o sentido abstrato de um mesmo termo, É útil, no entanto, distingui-los cuidadosamente, pois essa distinção tem uma grande importância teórica. De fato, concebem-se as grandezas como podendo ser iguais ou desiguais (é mesmo um das maneiras banais de definir grandezas): ora do ponto de vista lógico, grandezas diferentes não podem ser iguais; o que chamamos de grandezas iguais são quantidades iguais de uma mesma grandeza. Só o empirismo pode recusar de admitir que se dois objetos são iguais, é que representam ou encarnam uma mesma grandeza abstrata.(p.99)*

O primeiro trecho selecionado da obra de Couturat *De L'Infini Mathématique,* baseia-se em um estudo sobre os conceitos fundamentais da matemática divididos em duas grandes partes: *Généralisation du nombre* e *Le nombre et la grandeur*. O autor também recorre a outras contribuições científicas do Século XIX, para definir o conceito de grandeza, que são os trabalhos de Helmholtz, e o de Narens (1985), apontado como um dos fundadores da teoria moderna da medição, ao lado de Hölder.

Dessa forma, a análise crítica feita pelo autor procura delimitar o conceito de grandeza marcada pelo insucesso do ponto de vista da lógica. A seguir destacamos alguns trechos:

- ***grandeza*** *é tudo que é capaz de aumento e diminuição*
- ***grandeza*** *é toda coisa que se pode ser dita igual ou desigual a outra.*
- *Todas as grandezas comparáveis a uma mesma grandeza formam um sistema de* ***grandeza de mesma espécie***
- ***grandezas*** *são objetos ou atributos de objetos, que podem ser comparados a outros semelhantes do ponto de vista da igualdade ou desigualdade.*
- ***grandezas de mesma espécie*** *são aquelas cuja igualdade ou desigualdade é constatas pelo mesmo método de comparação.* (COUTURAT apud LIMA, 2000, p.83)

Após apresentarmos uma análise das definições de grandeza, nas quais identificamos inúmeras deficiências lógicas e recorremos a Pascal em *De l'Esprit Géometrique*, Couturat defende a seguinte idéia "*[...] da discussão precedente, resulta que a idéia de grandeza é, verdadeiramente, indefinível:é uma noção primitiva e irredutível*". (1980, p.369)

Baseado nesta hipótese, Couturat, fundamenta-se, então, em *De L'Infini Mathemátique*, procurando discutir o conjunto de axiomas que permitem modelizar o conceito de grandeza. A seguir apresentamos os axiomas:

> ***Axioma 1:*** *Duas grandezas de mesma espécie são iguais ou desiguais.*
> ***Axioma 2:*** *Se a grandeza A é igual a grandeza B, então B é igual a A.*
> ***Axioma 3:*** *Duas grandezas iguais a uma terceira são iguais entre si.*
> ***Axioma 4:*** *Dadas duas grandezas desiguais, uma é maior que a outra, esta sendo menor do que a primeira.*
> ***Axioma 5:*** *Existe uma operação de adição de grandezas de mesma espécie, que produz outra grandeza de mesma espécie. Está operação é comutativa e associativa.*
> ***Axioma 6:*** *A soma de duas grandezas de mesma espécie é maior do que cada uma delas.*
> ***Axioma 7:*** *Se duas grandezas de mesma espécie são desiguais, existe uma terceira grandeza tal que uma delas é a soma da outra com a terceira.*
> ***Axioma 8:*** *Existe uma grandeza nula de mesma espécie, que somada a uma grandeza qualquer resulta numa grandeza igual à original.*
> ***Axioma 9:*** *(Divisibilidade):Dado uma grandeza A e um número n existe uma grandeza de mesma espécie que A, tal que B = A.*
> ***Axioma 10:*** *(Propriedade Arquimediana): Dadas duas grandezas A, B, com A< B, existe um número inteiro n tal que n A > B.*
> ***Axioma 11****: (Continuidade):Se se separam todas as grandezas de mesma espécie em duas classes tais que todas as da primeira classe são menores do que todas as da segunda, existe uma grandeza desta espécie que representa esta repartição e que é maior do que toda a grandeza da primeira, é menor do que todas as da segunda*. (COUTURAT, 1973, p.367)

Notamos que a análise do pesquisador a respeito do conceito de grandeza, demonstra uma visão mais ampla e bem teórica, através da apresentação das propriedades existentes para tal conceito, elucidando a matemática clássica e lógica. Em nossa pesquisa procuramos analisar a grandeza e sua utilização no aspecto didático, através de sua aplicação nas atividades que compõem a seqüência didática do projeto, enfatizando o conceito de área como uma grandeza, além das outras grandezas envolvidas durante o desenvolvimento das atividades, tais como: o comprimento e a largura. Desse modo, procuramos examinar, e selecionar os aspectos matemáticos mais importantes presentes nos manuais de educação matemática no Brasil no fim do Século XIX, e na primeira metade do Século XX, entre as quais enquadram-se algumas obras estrangeiras como possíveis influências em nosso país.

Começamos nossos estudos através da obra de Jules Tannery (1920), *Leçons d'Arithmétique Théorique et Pratique*. Nessa obra podemos encontrar as seguintes definições para grandeza:

Tratar da teoria das grandezas com algum rigor comporta enormes dificuldades.(p.345)[...]

> *[...] A definição bem conhecida "chamamos grandeza aquilo que é suscetível de aumento ou diminuição" é sem dúvida muito vaga por sua generalidade.(p.470)[...]*
> *[...] De fato, a noção de grandeza pelo menos em casos particulares, é que dá origem à noção de número, e isto se procurou mostrar nesta obra quando, por exemplo, foram introduzidas as frações;no entanto, foi visto também como esta noção de número podia ser separado de sua origem concreta, sendo construída por completo com a base em um único objeto, o número inteiro, conseguindo-se, dessa forma um elevado grau de simplicidade e abstração.(p.470) [...]*
> *Um objeto ou uma propriedade susceptível de estados distintos, mas que sob quaisquer desses estados distintos se reconhece como sendo de uma mesma espécie. Concebida dessa forma, grandeza é algo indeterminado [...] Em cada um de seus estados distintos, a grandeza é determinada [...] Há, talvez, algum inconveniente no emprego do mesmo termo, 'grandeza', para designar, ao mesmo tempo, por exemplo, um comprimento em geral e um comprimento particular.(p.470)*

Outra obra que influenciou o programa oficial dos liceus e foi utilizado nas escolas brasileiras, pelo menos até a década de 50, foi a obra de José Adelino Serrasqueiro, em sua 21ª edição, intitulado *"O Tratado Elementar de Arithmética",* publicado em Coimbra em 1921. Desse modo, podemos encontrar no capítulo 1 deste livro, intitulado "Cálculo dos números inteiros", as seguintes afirmações:

> ***Quantidade ou Grandeza** é tudo o que é capaz de aumento ou diminuição* (p.5)[...]
> *[...] **Medir** uma grandeza é compará-la com a outra conhecida e da mesma espécie, a que se dá o nome de **unidade** (p.5)*
> ***Unidade** é a quantidade, em geral arbitrária que serve de termo de comparação às quantidades da mesma espécie (p.5) [...]*
> *[...] **Número** é o resultado da comparação da quantidade com a unidade. O número diz-se abstrato, quando não designa a espécie de unidade a que se refere;e concreto no caso contrário.*
> *Advertimos,porém, que este último não é em rigor um número, mas sim uma quantidade. As expressões grandeza e quantidade tomam-se ordinariamente por sinônimas: mas dá-se mais particularmente o nome de quantidade à grandeza expressa em números. Assim, um monte de trigo, constitui propriamente uma grandeza, e vinte alqueires de trigo constitui uma quantidade (p.6)*

O autor acima discute a grandeza em vários aspectos, tais como quantidade, medida, unidade e número. Mais adiante iremos discutir o conceito de grandeza segundo a visão de Douady (1989) em relação ao conceito de área, considerando esta uma grandeza. No entanto, esta abordagem já antecipa a discussão a respeito do assunto e sobre os conceitos de grandeza e número.

Agora, destacaremos outras obras que também contribuíram para o ensino da matemática no Brasil. Dentre elas destacamos o livro de Euclides Roxo (1924), no qual destacamos o manual *"Lições de Arithimética" consultadas em sua 2ª edição, de 1924.*

No capítulo XV, dedicado a medida de grandezas e sistema métrico, após explorar alguns exemplos de grandezas geométricas e físicas, o autor baseado no autor anterior cita algumas de suas definições, tais como:

> *Apenas diremos que cada uma dessas grandezas pode ser mais ou menos rigorosamente definida e constitui"um objeto ou uma propriedade susceptível de estados distintos, mas que sob quaisquer desses estados distintos se reconhece como sendo de uma mesma espécie de unidade. (Tannery)*
> *Muitas vezes empregaremos a palavra grandeza para designar um estado um estado de uma certa grandeza; assim quando dizemos duas grandezas de mesma espécie, queremos dizer dois estados ou dois valores de mesma grandeza.*
> *Todas as grandezas a que acima nos referimos gozam das seguintes propriedades comuns:*
> *São suscetíveis de aumento ou de diminuição.*

> *Dadas duas grandezas, de mesma espécie,pode-se reconhecer se elas são iguais e, se não a forem, haverá uma que é maior que a outra.*
> *Duas grandezas iguais a uma terceira são iguais entre si.*
> *Se uma grandeza A é maior que uma grandeza A' da mesma espécie e se a grandeza A' é maior que uma grandeza A"da mesma espécie, a grandeza A é maior que a grandeza A". Em outras palavras, sendo A,B,C três estados de uma mesma grandeza, se A > B e B > C, A > C, (pp.257-8)*

Além do manual de Tannery, outros manuais também influenciaram o ensino da matemática no país, tais como a obra "*Cours de mathematiques à l'usage des candidats l'école polytechnique, à école normale supérieure, à école centrale des arts et manufactures et aux elèves de la classe de mathematique"* de Charles de Comberousse, consultado nestes projeto em sua 6ª edição, publicada em Paris em 1929. No primeiro volume desta obra, dedicada a Aritmética, podemos encontrar no primeiro capítulo as seguintes definições sobre grandeza:

> *Chamamos **grandeza** tudo que é suceptível de aumento ou diminuição.*
> *A **Matemática** é a ciência das grandezas. Adotando este ponto de vista, tudo seria do domínio da Matemática, pois tudo é susceptível de aumento ou diminuição;mas a Matemática trata apenas das grandezas mensuráveis . O gênio, a coragem, a bondade escapam, pela própria natureza, de qualquer procedimento exato de medição.*
> ***Medir** uma grandeza é compará-la com uma grandeza de mesma espécie tomada para unidade,é procurar quantas vezes ela contém essa unidade. (p.1)*

Percebe-se que as definições dadas para o conceito de grandeza, pelos autores apresentados em seus manuais se assemelham muito, diferindo apenas nos conceitos de medir e definição da unidade.

A seguir discutimos e apresentamos a obra de Julio Rey Pastor, renomado matemático argentino, que deu sua contribuição na produção de um repertório de manuais de matemática no Brasil. Em sua coleção "Biblioteca didática de matemática elementares", destinada aos programas de escola secundária, Rey Pastor publicou em Buenos Aires em 1938, uma Aritmética em dois volumes. No

Capítulo II do volume 2, cujo assunto abordado é “Medidas”, encontramos trechos interessantes para discutirmos o conceito de grandeza. O autor procura introduzir nesse capítulo, “*alguns exemplos vulgares que conduzem ao conceito abstrato de grandeza e quantidade”.* (p.47):

> *Sabemos que entre dois números inteiros quaisquer existe sempre uma relação de* ***igualdade*** *ou* ***desigualdade****, ou seja, um deles é igual, menor ou maior que o outro. Mas na vida real encontramos coisas bastante diversas que podem comparar, e assim dizemos: Luís é menor que Carlos; esta sala é maior que aquela, etc. Todas as coisas que se podem comparar estabelecendo entre elas as relações de igual, maior e menor, são chamadas de* ***grandezas****..*
> *Este conceito exige, no entanto, alguns esclarecimentos; quando se diz que Luís é menor que Carlos, é preciso saber se nos referimos à idade ou à altura: ou seja, as crianças não são grandezas, as grandezas são essas qualidades que chamamos de idade e altura, porque são suscetíveis de se estabelecer entre elas as relações de igual, maior ou menor;enquanto que a cor, por exemplo, não é grandeza, porque só se pode estabelecer a relação de igual ou desigual,mas não a de maior ou menor entre as duas cores. (p.48)[...]*
> *[...] A operação que consiste em comparar uma* ***grandeza*** *com a outra,* ***homogênea*** *com ela, que se chama* ***unidade,*** *determinando o maior múltiplo desta que não supera aquela, chama-se de* ***medição*** *da grandeza e o número obtido é a* ***medida****.[...]*
> *[...]* ***Medir*** *uma grandeza com uma unidade é determinar dois múltiplos consecutivos desta, que compreendem aquela.*
> *A medida só designa-se com o mesmo número que a quantidade, mas são conceitos muito diferentes; pois enquanto a* ***quantidade*** *é única,em cada caso, suas medidas podem ser muitas, em função da unidade escolhida. (p.49)*

Percebe-se que o autor, utilizando-se de exemplos simples, consegue chegar à definição de grandeza, além de debater outros conceitos envolvidos no campo das grandezas como medir uma grandeza e a determinação de uma unidade de medida. Em nossa pesquisa também, abordaremos este assunto através da mudança de quadros do geométrico para o numérico, que estão presentes no nosso referencial teórico, que são a Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros, teorias desenvolvidas por Douady (1989).

Dando seqüência aos nossos estudos finalizamos nosso trajeto no campo do ensino de matemática no Brasil, destacando-se além das obras de Euclides Roxo, a de Antonio Trajano, com a sua obra "Curso completo teórico e prático de Aritmética Superior", em sua 72ª edição, publicada no Rio de Janeiro, em 1941, no qual podemos destacar alguns pontos a serem refletidos:

> ***Unidade*** *quer dizer uma coisa ou uma grandeza por onde se começam a contar ou a medir as quantidades:assim em 25 livros, a unidade é um livro;em 18 moedas, a unidade é moeda; em 8 meninos, a unidade é um menino: em 20 metros de morim, a unidade é o metro, etc.[...]*
> *[...]* ***Quantidade*** *é uma porção de alguma coisa que se pode pesar, medir ou contar.Uma quantidade de café pode ser pesada: uma quantidade de vinho pode ser medida como o litro, uma quantidade de pano pode ser medida com o metro, e uma quantidade de laranjas pode ser contada. As quantidades são homogêneas. (p.6)[...]*
> *[...]* ***Quantidades homogêneas*** *são as da mesma espécie de coisas e que se pode reunir em um só número, como 8 livros,12 livros e 10 livros, que fazem 30 livros.*
> ***Quantidades heterogêneas*** *são as espécies diferentes, e que não se podem reunir em um só número, como 8 livros, 12 chapéus e casas.[...]*
> *[...] As quantidades dividem-se ainda em contínuas e descontínuas.*
> ***Quantidades Contínuas*** *são aquelas cujas unidades estão intimamente ligadas em um só todo e somente podem ser avaliadas pelo peso,ou pela medida. Assim uma barra de ferro, uma peça de pano, um tonel de vinho, a extensão de uma estrada são quantidades continuas.*
> ***Quantidades descontínuas*** *são as que constam de um agregado de pessoas ou coisas, distintamente separadas, sendo cada uma delas uma unidade. Assim, uma porção de laranjas, de chapéus, de meninos são quantidades descontínuas.*
> *Nota:A unidade tanto pode ser arbitrária nas quantidades contínuas como nas descontínuas. Nas quantidades continuas, medindo, por exemplo: no comprimento de uma corda podemos usar como unidade o metro, a jarda, a braça, o côvado, o pé, o palmo, a polegada, ou qualquer vara com que quisermos fazer a medição.Nas quantidades descontínuas, ainda que haja, a unidade natural, que é um objeto ou uma coisa, podemos também tomar uma unidade arbitrária;assim avaliando uma grande porção de laranjas, podemos contá-las uma a uma, que é a unidade natural, e podemos também contá-las às dúzias, aos centos, aos cestos ou um saco e está aí uma unidade para avaliar uma grande quantidade de laranjas.*
> ***Número*** *é o que exprime quantas unidades contém uma quantidade. Em 38 barricas de farinha, a quantidade é toda aquela farinha: a unidade é barrica, e o número das unidades ou barricas é 38. (p.7)*

Depois desse longo trajeto sobre a literatura ocidental, estudando o conceito de grandeza e seus correlatos, observam-se as imprecisões lógicas contidas nas definições apresentadas pelos autores, na maioria dos textos referidos. Destacamos, no entanto, a posição adotada por Couturat, que considera grandeza um conceito primitivo, sem definição. Portanto, com base nesse conceito e em outros conceitos primitivos e num conjunto de axiomas que são proposições aceitas sem demonstração, constrói-se um sistema de axiomas, que procuram organizar as definições dadas as grandezas. Além disso, notamos que os demais autores procuram se basear nas proposições apresentadas por Couturat, principalmente na definição da noção de grandeza.

A partir dos estudos realizados sobre a noção de grandeza e dos vários trabalhos científicos desenvolvidos no campo da Álgebra na comunidade de Educação Matemática, que utilizaram a noção de grandeza para o conceito de área, os quais citamos no capítulo um, levando-nos a adotar também essa noção como instrumento de construção do conhecimento, considerando a área como grandeza.

A seguir, apresentamos e discutimos o conceito de Área como grandeza, justificando nossas escolhas.

3.3.1 O conceito de Área como Grandeza

O conceito de área é um dos mais importantes temas no sistema de ensino aprendizagem da Matemática. Sua relevância é indiscutível para a formação do cidadão pleno, que necessita medir ou estimar a medida de regiões planas, terrenos, pisos, paredes, faces de objetos, etc., nas suas atividades cotidianas.

No âmbito científico e tecnológico são muitíssimo freqüentes as situações nas quais a área de superfície intervém como grandeza básica do processo ou fenômeno discutido. Área é, também, um conceito muito rico do ponto de vista da matemática escolar por ser um pólo de confluências dos grandes eixos temáticos dos números, da Geometria, das Grandezas e da Álgebra. Ao lado disso, o conceito de área é considerado um campo fértil para investigações no âmbito da Didática da

Matemática, não somente pela importância citadas no parágrafo anterior, mas também pelas dificuldades enfrentadas pelos alunos em sua aprendizagem. Como este conceito é um pólo de confluência entre os ramos da matemática, optamos em utilizá-lo como ferramenta principal em nossas atividades, a fim de construirmos um novo saber, neste caso as expressões algébricas.

Para saber os resultados que esta ferramenta poderia ocasionar durante a sua utilização no desenvolvimento de nossas atividades, recorremos a um profundo estudo e análise dos resultados obtidos nas pesquisas de ensino/ aprendizagem dos conceitos de área e perímetro que mostram a variedade, a profundidade e a resistência de algumas dificuldades conceituais na construção desses conceitos.

Por outro lado, pesquisas sobre as representações de professores de Matemática do Ensino Básico evidenciam uma tendência por parte dos docentes estudados, a enfatizar a exploração do caráter prático dos conteúdos área e perímetro e a considerar que estes conteúdos não são (relativamente a outros) fontes de dificuldades conceituais importantes.

Constata-se então uma contradição entre as representações dos professores e os resultados de pesquisas e avaliações acerca do ensino/aprendizagem das grandezas geométricas. Em seguida, analisamos uma pesquisa que aponta estas dificuldades e as razões destes conceitos serem tão discutidos na Comunidade Científica.

Ao analisar as avaliações do desempenho dos alunos franceses e dos resultados obtidos de pesquisa em Educação Matemática, destacando-se o trabalho de Moreira Baltar (1996), permite-nos identificar alguns erros mais freqüentes, assim como hipóteses explicativas das dificuldades conceituais que os alunos podem enfrentar durante a construção do conceito de área.

Este levantamento das avaliações francesas, no nível equivalente ao 2º ciclo e 3º ciclo do Ensino Fundamental aponta que as questões sobre os conceitos de área e perímetro têm, em geral, aproveitamento inferior a 50%. Além disso, segundo a avaliação da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público – APMEP no nível equivalente ao terceiro ciclo do Ensino Fundamental brasileiro, dois dos três conteúdos que apresentam maior índices de fracasso no currículo francês atual são relacionados à aprendizagem das grandezas geométricas: o cálculo sobre grandezas (destacando áreas e volumes, entre outros) e a utilização das unidades. Além disso, os autores desta pesquisa mostram que entre os principais erros cometidos pelos alunos avaliados, destacam-se as confusões entre área e perímetro, a utilização de fórmulas errôneas (tais como: área = perímetro x 2, ou área = a soma dos lados), (nota-se que daremos importância aos erros cometidos pelos alunos no capítulo 6, no qual destacaremos os erros mais freqüentes, tanto para o conceito de área, assim como para o da construção de expressões algébricas), além disso, destacamos o uso inadequado das unidades (tais como a unidade é dada em metros, e o resultado é apresentado pelo aluno com sendo metro, centímetro, ao invés de utilizar o metro quadrado e centímetro quadrado).

Apesar do estudo ter sido realizado no sistema educativo francês, notamos algumas semelhanças entre os erros cometidos pelos alunos franceses e os alunos brasileiros, relacionados com a aprendizagem, que destacamos a seguir:

> *... o cálculo de área é usualmente ensinado através de fórmulas de área, que são funções que fornecem a medida de área, em termos do comprimento de segmentos associados a figura. Esse procedimento é indispensável para o cálculo de áreas, mas, em sua utilização, têm sido verificadas persistentes dificuldades entre os alunos. Uma delas é a confusão entre área e perímetro: outra é a extensão indevida da validade das fórmulas de área: a área de um paralelogramo é o produto dos lados.* (LIMA, 1995)

Lima (1995) destaca ainda que o ensino do conceito de área vem sendo marcado pela ênfase na identificação da área com a medida de área, e muitas vezes, com a "fórmula da área", confundindo os alunos desta maneira, o conceito de grandeza e as várias etapas do processo de medição de grandezas.

Em relação à construção do conceito de área, um dos resultados importantes é a classificação das concepções de área em dois pólos – as concepções geométricas e as concepções numéricas propostas por Perrin-Glorian & Douady[11] (1988) e por Ballacheff (1988).

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), alguns alunos desenvolvem uma concepção forma (ligado ao quadro geométrico[12]) ou uma concepção número (ligado ao quadro numérico) ou a ambas, mas de forma isolada uma da outra. Para Douady as concepções numéricas seriam aquelas que os alunos relacionam os aspectos dos cálculos, por exemplo, as medidas de comprimento da figura, que são combinações mais ou menos fundamentadas. Neste caso, pode-se adicionar dois lados de um triângulo e multiplicar um terceiro lado para calcular a área.

Balacheff (1988), por sua vez, caracteriza as concepções geométricas da seguinte maneira: são aquelas em que os alunos confundem área e superfície, perímetro e contorno.

A forma sendo conservada, qualquer modificação da área corresponderia necessariamente a uma modificação do perímetro e assim, reciprocamente. Em nossa pesquisa teremos atividades que utilizaremos estes pressupostos, para mostrar aos alunos que existem figuras que conservam mesma área mas que os

[11]O leitor deve observar que estes pólos são encontrados no capítulo 1 deste trabalho, onde as pesquisadoras definem cada um deles.
[12] Referência à teoria do Jogo de Quadros e a Dialética Ferramenta–Objeto desenvolvida por Douady (1987).

perímetros são diferentes. Além disso, devemos estabelecer articulações entre os quadros numérico e geométrico, para construção do conceito de área.

O ponto de vista adotado por Douady & Perrin-Glorian (1989) relacionado com o conceito de área é o de que há três quadros a distinguir:

- **Quadro numérico**: consistindo nas medidas da área das superfícies, que pertencem ao conjunto de números reais não negativos.
- **Quadro geométrico**: constituído por superfícies planas;
- **Quadro das grandezas**: contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfície de mesma área.

Assim podemos distinguir que a área de uma superfície plana aparece como um objeto matemático distinto da superfície plana, pois superfícies diferentes podem ter a mesma área. Também distingue o número que está associado a essa superfície quando se escolhe uma superfície unitária para medi-la, pois mudando a superfície unitária altera-se a medida da área, mas esta permanece a mesma.

Partindo dos três quadros apresentados anteriormente, Douady & Perrin-Glorian (1989) elaboraram e experimentaram uma engenharia didática partindo-se das seguintes hipóteses:

- Desenvolvimento, no ensino, do conceito de área enquanto grandeza autônoma favorece o estabelecimento das relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico.

- Uma associação precoce da superfície a um número favorece o amálgama entre diferentes grandezas em jogo, ou seja à indissociabilidade entre a área e o perímetro.

As pesquisas desenvolvidas por Héraud (1989) também apontam para a construção do conceito de área enquanto grandeza, como um processo anterior à aprendizagem de sua medida. Por meio da realização de uma nova engenharia didática, Baltar (1996) confirma a pertinência de abordar a área como uma grandeza autônoma e aprofunda seus estudos do conceito como uma grandeza bidimensional com relação ao comprimento. Embasados nestes pesquisadores citados anteriormente, e tendo como fundamentação teórica, as teorias de Douady (1989), procuramos considerar o conceito de área como uma grandeza, e por meio dos resultados obtidos na pesquisa de Baltar (2000), consideraremos a área como uma grandeza bidimensional. Em nossa pesquisa também, abordaremos a diferenças entre grandezas unidimensionais como o comprimento, perímetro comparando com as grandezas bidimensionais como o caso da área, buscando mostrar as diferenças entre estes dois conceitos e dessa forma fazer com que o aluno seja capaz de diferenciar estes dois conceitos.

Partindo-se das discussões ocasionadas pelas pesquisas de Douady (1989), Baltar (1996), e outros, é válido ressaltar que a construção das relações pertinentes entre área e comprimento é um processo complexo e de longa duração. Segundo o trabalho de Rogalski (1982), nas relações entre essas duas grandezas geométricas intervém um processo duplo de diferenciação e de coordenação. Deve-se, ao mesmo tempo, diferenciar as propriedades simultaneamente presentes numa figura (o comprimento do contorno de uma superfície e a área desta, ou a área do contorno de um sólido e o volume deste) e coordenar essas mesmas propriedades na apropriação de fórmulas por exemplo.

Outro aspecto, discutido e apontado pelos pesquisadores em relações à área e o perímetro são as dificuldades dos alunos em dissociarem as noções entre área e perímetro. Em diversas investigações (Vinh Bang e Luzeer, 1965; Hirstein et al, 1978; Hart, 1981; Vergnaud et al,1983; Douady & Perrin-Glorian,1989; Moreira Baltar e Comiti, 1993) sobre a aprendizagem das grandezas geométricas evidenciando os tipos de erros variados e etiquetados sob a expressão "*o aluno não dissocia área e perímetro*". Partindo deste pressuposto, Baltar (1996) classificou então esta distinção entre área e perímetro em quatro pontos distintos:

- **topológico:** segundo o qual os conceitos de área e de perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, a área sendo associada a superfície e o perímetro ao contorno;
- **dimensional:** evidenciando que uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de natureza distintas no que diz respeito às dimensões, o que traz conseqüências imediatas sobre o uso de unidades adaptadas à expressão das medidas de área e perímetro;
- **computacional:** que corresponde à aquisição das fórmulas de área e perímetro usuais;
- **variacional:** que consiste na aceitação de que área e perímetro não variam necessariamente no mesmo sentido, de que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa.

Outra distinção importante proposta por Baltar (1996) concerne à natureza das figuras. Com efeito, as propriedades subjacentes à dissociação das variações de área e perímetro de superfícies quaisquer, de retângulos e de paralelogramos, por exemplo, não são as mesmas.

No caso de superfícies quaisquer, a propriedade de invariância de área por corte/colagem, sem perda nem superposição, é suficiente para construir superfícies de mesma área, tendo perímetros distintos.

No estudo realizado com retângulos, como evidenciam os trabalhos de Balacheff (1988) e Baltar e Comiti (1983), mostrando que as fórmulas relacionadas às medidas de perímetro e área como a soma e o produto de um par de números (a medidas dos comprimentos dos lados) permitindo desta maneira apenas um tratamento numérico dos problemas propostos com a variação destas duas grandezas.

É válido ressaltar, que um dos problemas apontados por Douady (1989) e Baltar (2000), mostram a confusão entre os dois conceitos (perímetro e área) realizado pelos alunos, pois muitos alunos invertem estes conceitos: somam os lados para encontrar a área e multiplicam as medidas dos lados para encontrar o perímetro.

Agora analisando o caso do paralelogramo, Vinh Bang e Luzeer (1965), Douady & Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996) observam que os alunos tendem a considerá-los como retângulo deformado, confundindo, conseqüentemente, as variações de área e perímetro.

Ademais, cabe registrar que as dificuldades em torno da dissociação das variações de área e perímetro de paralelogramos, no estudo das deformações descritas acima, mostram-se resistentes e parecem ser reforçados pelos teoremas em ação (Vergnaud, 1990), segundo o qual a área do paralelogramo é dada pelo produto das medidas dos seus lados (Baltar, 1996), que o conduz à necessidade de aprofundar o papel das fórmulas na aprendizagem do conceito de área.

Embora as fórmulas para cálculo de área e de perímetro, nas pesquisas, sejam inevitáveis partes para o ensino/aprendizagem desses conceitos, elas ora são evitadas, ora consideradas um mal necessário. Para Perrin-Glorian (1992a), o uso das fórmulas parece preponderante, desde a sua introdução e em geral não se observa um trabalho conceitual suficiente que permita aos alunos construir seu significado.

Algumas outras pesquisas tais como: Baltar (1996), Nunes et al (1993), Bessot (1997), Gemine e Bessot (1997), investigaram a apropriação e os usos possíveis das fórmulas na construção do conceito de área e na articulação com outros domínios matemáticos.

É válido ressaltar que as dificuldades de dissociação entre grandezas geométricas (comprimento, área e volume) podem ser extremamente resistentes à aprendizagem como mostra Schneider (1991), numa pesquisa realizada na Bélgica, sobre a introdução do cálculo integral no Ensino Médio (alunos de 15 a 18 anos). A pesquisadora interpreta alguns erros cometidos pelos alunos no cálculo de áreas e volumes, como conseqüência de um obstáculo de natureza epistemológica que é denominado pela pesquisadora como "obstáculo da heterogeneidade das dimensões".

A hipótese da existência de um obstáculo em torno da relação entre área e perímetro também é apontado por Perrin-Glorian (1992b), que sugere o estudo e classificação das situações nas quais o amálgama se produz, para poder decidir se trata-se de um obstáculo e de que natureza é ele.

Outras pesquisas anteriores, mostram que os próprios professores em formação utilizam teoremas em ação errôneos, segundo os quais área e perímetro variam no mesmo sentido. Desse modo, os resultados obtidos confirmam a resistência das dificuldades de aprendizagem nesse domínio e apontam para o seu reforço devido aos conhecimentos insuficientes dos professores, levando os cursos de formação universitária a rever os seus conceitos de ensino aprendizagem.

Após terminarmos o nosso estudo sobre o conceito de área como uma grandeza, prosseguiremos o estudo sobre Grandeza agora sobre a ótica dos PCNs, pois, consideramos importante o destaque dado, que dedicou um bloco exclusivo para tratar sobre a noção de Grandezas e Medidas para o Ensino Fundamental.

3.4 Abordagem de Grandezas e Medidas nos PCNs[13] para o Ensino Fundamental

Baseado no estudo proposto realizado sobre os PCNs (1998) para o Ensino Fundamental (5ª série a 8ª série), procuramos fazer uma breve síntese sobre o tema grandeza, procurado mostrar como é abordado este tema que tem seu estudo iniciado na 5ª série e o seu término na 7ª série.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os conteúdos matemáticos devem ser abordados nos quatro ciclos do Ensino Fundamental (1ª a 8ª série), sendo organizados em quatro grandes blocos, tais como: “Números e operações”; “Espaço e Forma”; “Grandezas e Medidas” e “Tratamento da informação”. O

[13] Parâmetros Curriculares Nacionais.

destaque dado ao bloco nomeado “às grandezas e medidas” revela que se atribui, nesse documento nacional de referência curricular, uma importância considerável ao tema, levando os pesquisadores a repensar sobre a reorganização dos currículos de Matemática no Ensino Fundamental, nos quais observa-se que a abordagem deste campo conceitual é muito insatisfatória. Desse modo, devemos procurar meios para que isso se torne mais freqüente nos currículos de Matemática no Ensino Fundamental.

O estudo dos PCNs mostra que o bloco das grandezas e medidas é caracterizado como um espaço privilegiado, por destacar a presença e a utilidade social do conhecimento matemático, segundo a citação a seguir:

> *Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático.* (Ministério da Educação e Desporto, 1997, p.56)

Percebe-se que os PCNs salientam também a importância da contextualização do conhecimento matemático com o cotidiano do aluno, por meio da aplicação deste conhecimento matemático, utilizando como instrumentos de construção do conhecimento situações-problema ligadas ao aluno, tornando o saber matemático mais significativo.

Além disso, os PCNs ressaltam que o bloco de grandezas e medidas é um campo fértil para explorar uma abordagem histórica de construção do conhecimento matemático, bem como utilizarmos a interdisciplinaridade como instrumento.

> *O trabalho com medidas dá a oportunidade para abordar aspectos históricos da construção do conhecimento, uma vez que,desde a Antiguidade, praticamente em todas as civilizações, a atividade matemática dedicou-se à comparação de grandezas*. (Ministério da Educação e Desporto,1997, p.129)

Outro aspecto marcante, que devemos destacar no bloco de grandezas e medidas nos PCNs é a indicação do mesmo enquanto um espaço privilegiado de articulação entre os campos da Aritmética, Álgebra e Geometria. Desse modo é válido fazer um paralelo com a Teoria de Douady em relação ao Jogo de Quadros, no qual podemos relacionar os três quadros presentes ao quadro numérico (Aritmética), o algébrico e o geométrico. Percebemos, desta forma, que os PCNs consideram a integração entre os diversos campos da matemática.

> *Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devem contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria), e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). (*Ministério da Educação e Desporto,1997, p.53)

Além disso, os PCNs procuram enfatizar a riqueza das articulações possíveis com os outros conteúdos, tais como: a construção do significado dos números e operações, de conceitos relativos à Geometria, das idéias de proporcionalidade e de escala, por exemplo.

Com o intuito de destacar que a construção do significado dos diversos tipos de números (naturais, inteiros, racionais e irracionais) apóia-se, entre outros fatores, em situações-problema envolvendo medidas de grandezas. Em nossas atividades utilizaremos os conjuntos numéricos dos naturais, inteiros e racionais como instrumentos auxiliares para a construção do conhecimento matemático (expressões algébricas), utilizando como ferramenta principal o conceito de área, que é considerada uma grandeza bidimensional.

Dessa maneira, procuramos articular os três ramos da matemática a Aritmética, a Geometria e a Álgebra.

Essas características refletem-se na designação dos objetos de ensino, contemplando os elementos de práticas sociais e estimulando as articulações dos conteúdos relativos as grandezas e medidas, com os conteúdos numéricos, geométricos e relativos ao tratamento da informação, como veremos na discussão dos objetivos, dos conteúdos e dos critérios de avaliação relativos às grandezas e medidas, em cada ciclo do ensino fundamental. Dando um destaque maior para o 4º ciclo (7ª série e 8ª série), pois nossa prática de ensino é voltada para as 7ª séries do ensino fundamental.

A seguir faremos uma síntese dos objetivos a serem atingidos nas séries anteriores que servirão de pré-requisitos para o desenvolvimento de nossa seqüência didática, envolvendo o conceito de grandeza.

3.4.1 Grandeza e Medidas no Primeiro Ciclo do Ensino Fundamental

Segundo as orientações dos PCNs, devemos partir de situações-problema que resgatem as experiências pessoais dos alunos. Além disso, devem ser exploradas comparações de grandezas, de modo que as crianças possam identificar atributos de um objeto passíveis de mensuração, construindo um conceito aproximado de medida e usando procedimentos da mesma .

A formalização do sistema de medida não é objetivo do primeiro ciclo. Mas sim, devemos enfatizar a compreensão do processo de medir, por meio da exploração das estratégias pessoais dos alunos e usos de instrumentos para aferição, tais como: balanças, fita métrica, recipientes de uso freqüente. Devemos também valorizar o currículo oculto[14] dos alunos. Sugere-se também que trabalhemos como o conceito de tempo e temperatura dando uma abordagem significativa, por meio da utilização de instrumentos adequados e fazendo relações com o cotidiano do aluno.

Em seguida, destacamos alguns dos objetivos visados para a aprendizagem do primeiro ciclo envolvendo o trabalho com grandezas e medidas e suas articulações com os outros blocos de conteúdos:

- a construção do número natural deve-se apoiar na exploração de situações-problema envolvendo contagens, medidas e códigos numéricos;
- o reconhecimento de grandezas mensuráveis, como comprimento, massa, capacidade;
- a elaboração de estratégias pessoais de medida, pelos alunos;
- o uso de instrumentos de medida, usuais ou não;
- a estimativa de resultados e sua expressão por meio de representações não necessariamente convencionais.

Os objetivos citados acima, que são considerados fundamentais para o 1º ciclo, são alguns dos pré-requisitos que os alunos devem trazer consigo para que eles consigam desenvolver as atividades do nosso projeto de pesquisa. As demais pré-noções estarão presentes nos objetivos dos próximos ciclos.

[14] Currículo Oculto: são as experiências pessoais dos alunos.

O papel social do bloco de grandezas e medidas articulado com o trabalho relativo aos números e operações e a geometria fica evidente na designação dos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais, sugeridos no primeiro ciclo.

Existem também outros aspectos importantes neste ciclo, que destacamos a seguir:

- Comparar coleções pela quantidade de elementos e ordenação de grandezas pelo aspecto de medida;
- Utilização de diferentes estratégias para identificar os números em situações envolvendo contagens e medidas;
- Dimensionar espaços, percebendo relações de tamanho e forma;
- Comparação de grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medidas conhecidos tais como: balança, fita métrica, etc.
- Valorização da importância das medidas e estimativas para resolver os problemas cotidianos.

Após apresentarmos os tópicos a serem trabalhados no primeiro ciclo, espera-se que ao final deste, os alunos sejam capazes de resolver as situações-problema e utilizar os conhecimentos construídos relacionados às medidas; medir utilizando unidades não-convencionais adequadas ao atributo que se quer medir, e realizar algumas estimativas de resultados de medição.

3.4.2 Grandeza e Medidas no Segundo Ciclo do Ensino Fundamental

Nesta etapa damos destaque aos objetivos e aspectos determinados pelos PCNs, em relação a este ciclo sobre o tema de Grandezas e Medidas, que também serão considerados instrumentos importantes para a construção do nosso objeto de estudo “as expressões algébricas”.

No segundo ciclo esperamos que os alunos ampliem seus conceitos trabalhados no ciclo anterior, estabelecendo novas relações que os levem a construir novos conhecimentos. Neste ponto é válido destacar a Dialética Ferramenta-Objeto, teoria de Douady (1989), onde na primeira fase os alunos mobilizam os conhecimentos anteriores para solucionarem as situações-problema propostas, que os levarão a construção de um novo saber. Esta fase é conhecida como antigo-novo.

Neste ciclo também, devem ser ampliados os conhecimentos referentes ao tempo e temperatura. Em relação às grandezas e as medidas neste ciclo podemos afirmar que:

> *Os alunos deste ciclo podem compreender melhor como se processa uma dada medição e que aspectos de processo de mediação são sempre válidos. Ou seja, percebem a necessidade de escolher uma certa “unidade”, de comparar essa unidade com o objeto que estão medindo e de contar o número de vezes que essa unidade foi utilizada.* (Ministério da Educação e Desporto, 1997, p.84)

Segundo as diretrizes dos PCNs indicam, neste processo, deve-se explorar mudanças de unidades, evidenciando que o resultado da mediação depende da unidade escolhida e esta escolha deve ser feita em função do que se deve medir. Deve-se abordar mudanças de unidades usuais (metro, centímetro, grama, quilograma) e evitar conversões desprovidas de significado prático (quilometro para milímetro, por exemplo). Observa-se ainda que, embora os alunos possam utilizar unidades não-convencionais, é importante que eles conheçam os sistemas convencionais argumentando-se que este facilita a comunicação. Outro aspecto destacado no segundo ciclo é as relações existentes entre os sistemas decimais de medida, sistema monetário e sistema de numeração decimal.

Nota-se que alguns dos objetivos de aprendizagem visados no segundo ciclo envolvem o trabalho com grandezas e medidas e suas articulações com os demais blocos.

Destacamos alguns dos objetivos importantes para nosso projeto, como apontamos a seguir:

- Comparação de grandezas de mesma natureza, com a escolha de uma unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado;
- Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade, área[15] etc.
- Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como: metro, centímetro, quilômetro, grama, miligrama, quilograma, litro, mililitro, metro quadrado, alqueire,etc.
- Estabelecimento das relações entre unidade usuais de medida de uma mesma grandeza;

[15] A leitura do texto dos PCNs revela que o termo usado neste ponto é “superfície” e não “área” como está aqui escrito. Ora a palavra empregada no referido documento não é compatível com o uso que se faz, em geral, do vocábulo ‘superfície’ na Matemática (que é definido neste projeto e no trabalho de Baltar). Na Matemática “superfície” designa um objeto geométrico e a área é um atributo desse objeto, uma grandeza associada à superfície. Essa escolha inadequada de termos se repete ao longo das demais partes dos PCNs.

- Reconhecimento dos sistemas de medida que são decimais e conversões usuais, utilizando-se as regras desse sistema;
- Utilização de procedimentos e instrumentos de medida, em função do problema e da precisão do resultado;
- Cálculo de perímetro e área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras, sem uso de fórmulas ;
- Curiosidade em conhecer a evolução histórica das medidas, unidades de medida e instrumentos utilizados por diferentes grupos culturais e reconhecimento da importância do uso adequado dos instrumentos e unidades de medidas convencionais.

Depois de destacarmos os conteúdos principais e elementares para o desenvolvimento do nosso projeto, que são ensinados no segundo ciclo e que serão ferramentas fundamentais para a construção do nosso objeto de estudo, gostaríamos de complementar o final desse ciclo apresentando os objetivos finais dos PCNs para o mesmo.

Segundo os PCNs, espera-se que ao final deste ciclo, os alunos sejam capazes de resolver situações-problema envolvendo medidas, saibam escolher a unidade de medida e o instrumento mais adequado para cada situação proposta; fazer previsões razoáveis (usando a estimativa) sobre os resultados de problemas envolvendo as grandezas de comprimento, capacidade e massa; ler, interpretar e produzir registros utilizando a notação convencional das medidas.

3.4.3 As Grandezas e Medidas no terceiro ciclo do ensino fundamental

Os PCNs sugerem que neste ciclo, os alunos vivenciem experiências que permitam ampliar sua compreensão sobre o processo de medição e perceber a utilidade das medidas para descrever e comparar fenômenos.

Além disso, o nosso projeto de pesquisa está voltado para a construção do objeto matemático de estudo, que compõem o currículo deste ciclo, ou seja, as expressões algébricas. Este novo saber será construído partindo-se da mobilização dos conhecimentos adquiridos nos ciclos anteriores (ciclo 1 e 2) relacionados às grandezas e medidas. Em nossas atividades serão utilizadas situações-problema relacionadas ao cotidiano do aluno, sempre procurando atingir os objetivos finais determinados pelos PCNs.

Retomando a discussão dos PCNs sobre as sugestões para este ciclo, devemos retomar e aprofundar o estudo de medidas relativas ao comprimento, massa, capacidade, área, tempo, temperatura, iniciada nos ciclos anteriores.

Nos PCNs argumenta-se que a exploração do caráter prático das medidas, de seu uso em contextos sociais e o resgate dos problemas históricos ligados as medidas, geralmente despertam o interesse dos alunos. Observa-se, então, uma ênfase clara para a exploração de situações práticas:

> *Por meio de situações-problema extraídas dos contextos práticos em que essas grandezas se encontram- como na arquitetura, nas artes, na culinária, nas atividades comerciais e na leitura de mapas, plantas e croquis evidenciam-se para os alunos as aplicações práticas da Matemática e a necessidade de contar com unidades padronizadas e com sistemas comuns de medida e também a necessidade de encontrar estimativas plausíveis*. (Ministério da Educação e do Desporto,1998, p.69)

Nota-se, desta maneira, que a abordagem de estimativas traz uma reflexão importante acerca da natureza aproximada das medidas. As orientações dos PCNs destacam que este aspecto numérico merece uma atenção especial.

> *Além de orientar os alunos para que desenvolvam estratégias de estimativas aprendam a julgar o grau de exatidão necessário para uma situação particular, é importante ensiná-los a utilizar adequadamente instrumentos como balanças, relógios, escalímetro, transferidor, esquadro, trenas, cronômetros e a selecionar os instrumentos e as unidades de medida adequadas à exatidão desejada*. (Ministério da Educação e Desporto, 1998, p.69)

Outra sugestão que é dada pelos PCNs é a possibilidade da articulação do bloco de grandezas e medidas com os demais blocos de conteúdos.

Neste ciclo sugere-se que o trabalho relativo ao desenvolvimento do pensamento algébrico enfatize a compreensão da noção de variável e o reconhecimento da expressão algébrica como *"uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas".* (Ministério de Educação e Desporto, 1998, p.68). Dentre as noções enfatizadas no desenvolvimento do pensamento geométrico podemos destacar também a noção de ângulo e a exploração das figuras planas, pela decomposição e recomposição, transformação (reflexão, rotação e translação), ampliação e redução. As atividades geométricas envolvem entre outros, o manuseio de instrumentos de medida (tais como: régua, transferidor, compasso, etc). Nota-se que durante o desenvolvimento de nossas atividades os alunos estarão utilizando constantemente os instrumentos de medida, assim como também mobilizarão os seus conhecimentos sobre os processos de decomposição e composição de figuras planas, reconhecimento das diferentes figuras planas, utilização de escalas e uso do raciocínio por estimativa, entre outros.

Vários objetivos de aprendizagem são visados para o terceiro ciclo envolvendo as grandezas e medidas e suas articulações com os demais blocos de conteúdos.

Desse modo selecionamos alguns destes objetivos, que apresentamos a seguir:

- Ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
- Selecionar e utilizar os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta;
- Resolver situações-problema, que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução;
- Ampliar e construir noções de medidas pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
- Resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida;
- Observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam proporcionalidade.

É importante destacar que as diretrizes dos PCNs apontam para o desenvolvimento do **pensamento**[16] numérico, do **pensamento** geométrico, do **pensamento** algébrico, da **competência** métrica, do **raciocínio** combinatório, estatístico e probabilístico. Podemos interpretar estas designações como indícios de

[16] Grifo nosso, para destacar um dos nossos pontos de estudo.

que a função das grandezas e medidas é prioritariamente considerada ferramenta[17] na resolução de problemas. Pois, essas ferramentas agem como meio facilitador para a construção do conhecimento matemático.

Neste terceiro ciclo, observam-se algumas referências às grandezas e medidas e suas articulações com os demais blocos, como apresentamos a seguir:

- Compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como determinação de um dos lados de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado;
- A Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação das grandezas;
- Composição e decomposição de figuras planas;
- Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, área, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria;
- Compreensão da noção de medida de área e de equivalência de figuras planas por meio de decomposição e composição de figuras;
- Cálculo da área de figuras planas pela decomposição/ou composição em figuras conhecidas, ou por meio de estimativas;
- Estabelecer conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações- problema.

[17] Para uma discussão dos conceitos matemáticos como ferramenta e objeto de ensino aprendizagem da Matemática, o leitor deve consultar a fundamentação teórica do projeto ou os artigos de Douady (1987).

Ao final deste ciclo espera-se que os alunos sejam capazes de :

- decidir sobre os procedimentos matemáticos mais adequados para construir as soluções dos problemas propostos, num contexto numérico, geométrico e algébrico;
- analisar, classificar e construir figuras geométricas bidimensionais, tridimensionais, utilizando as noções geométricas como ângulos, paralelismo, perpendicularismo, estabelecendo relações e identificando propriedades;
- obter e expressar resultados de medições, utilizando as principais unidades padronizadas de medida de comprimento, capacidade, massa, superfície, volume e tempo;

Ao final desta análise dos PCNs, pudemos verificar as principais diretrizes, objetivos nos ciclos estudados e que são de extrema importância para o nosso estudo.

Em nosso projeto, daremos ênfase aos seguintes aspectos; a área será considerada uma grandeza, conforme as pesquisas realizadas por Douady & Perrin-Glorian, envolvendo o quadro numérico com o quadro geométrico, ou seja, uma unidade numérica (inteiros positivos, estendendo aos racionais positivos) com sua respectiva unidade de medida (cm^2, m^2, etc); mobilizaremos alguns objetivos apontados no 1º ciclo dos PCNs, tais como o reconhecimento de grandezas mensuráveis, elaboração de estratégias pessoais de medida, uso de instrumentos de medidas, usuais ou não, a estimativa de resultados e sua expressão por representações não convencionais, revisão dos conjuntos numéricos (dos inteiros e dos racionais positivos), entre outros. Além dos conhecimentos mobilizados do 1ºciclo dos PCNs, também estaremos utilizando alguns dos conhecimentos construídos no 2º cicio dos PCNs, dando destaque às noções de perímetro e área, sistemas de medidas decimais, regras de transformações de unidades, utilização de escalas, áreas de figuras planas, entre outros. Todos estes conhecimentos serão utilizados em nosso projeto para construirmos o conceito de expressões algébricas e, também, alcançarmos os objetivos propostos para o 3º ciclo dos PCNs, pois, nosso objeto de estudo (expressões algébricas) integra o conteúdo programático do 3º ciclo dos PCNs, lembrando-se de outros conceitos deste ciclo tais como: equivalência de áreas, processo de decomposição e composição de figuras, levando a construção de expressões algébricas equivalentes, entre outros.

No próximo capítulo discutiremos os erros e dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra.

CAPÍTULO 4. O ERRO COMO UMA POSSIBILIDADE DE APRENDIZAGEM

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta e discute os principais erros cometidos pelos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos, que foram relatados nas pesquisas científicas no campo da Álgebra, citados nos capítulos anteriores.

Iniciamos nossos estudos sobre os erros e dificuldades dos alunos, encontrados no sistema de ensino-aprendizagem, recorrendo aos resultados obtidos nas pesquisas de Booth (1984,1988), Lemoyne, Conne e Brun (1993), Kieran (1989), Kuchemann (1981), Nakamura (2003), Bertoni (1998), entre outros. Estes pesquisadores destacam a importância do estudo dos erros dos alunos como sendo um foco para o desenvolvimento de uma pesquisa.

Segundo Booth (1984) *:*

> *o estudo dos erros é importante por causa da informação, que ele fornece relativa aos caminhos ou formas pelas quais a criança vê o problema e, os procedimentos usados na tentativa de resolver o problema. Essa informação é de interesse não somente porque ela pode sugerir caminhos que auxiliam as crianças a evitar esses erros mas, também porque ela pode explicar aparente a falta de progresso da criança em conseguir altos níveis de compreensão da álgebra.* (BOOTH,1984, p.29)

Booth (1988) afirma que a compreensão incompleta das transformações permitidas sobre as expressões numéricas não coloca o aluno em boa posição para a aprendizagem sobre as manipulações algébricas, conforme destacamos a seguir:

> *(...) a Álgebra não é isolada da Aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a Aritmética generalizada. E nisso esta a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro, que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não o forem reconhecidos ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em Álgebra poderá ser afetado. Neste caso, as dificuldades que o aluno tem em Álgebra não são tanto de Álgebra propriamente dita, mas, de problemas em Aritmética que não foram corrigidos.* (BOOTH, 1988, pp.32-3)

O quadro descrito pela pesquisadora no parágrafo acima, mostra um dos pontos responsáveis pelas dificuldades ocorridas no sistema de aprendizagem de Álgebra, principalmente no conceito de expressões algébricas. Diante, desta situação discutida por ela, observa-se que os alunos têm dificuldades em transformar o pensamento aritmético em algébrico e vice-versa, sendo assim constatamos, que os erros no campo da Aritmética, contribuem também, para os erros ocasionados na aprendizagem da Álgebra.

Lemoyne, Conne e Brun (1993), apontam a relação entre a Álgebra e a Aritmética e mostram que os alunos possuem um conhecimento parcial das regras formais, necessitando que estas sejam aprimoradas.

> *... os primeiros conceitos da Álgebra elementar apóiam-se nos aritméticos, mas diferenciam; a Álgebra é um domínio conceitual novo que prolonga o domínio da Aritmética que o aluno já domina parcialmente; em Álgebra, as regras formais de reescrita operam sobre as expressões algébricas e literais. Determinadas regras derivam das propriedades das operações e podem encontrar um fundamento no domínio próprio, aquele da Álgebra. A aplicação de regras não tem necessariamente por objetivo efetuar o cálculo.* (LEMOYNE, CONNE e BRUN, 1993, p.338)

Outras pesquisas também apontaram a dificuldade da compreensão dos procedimentos aritméticos formais, para os procedimentos formais algébricos que discutiremos a seguir. Kieran (1989), discute estas dificuldades por meio dos procedimentos processuais (relacionados à Aritmética) e os estruturais (relacionadas à Álgebra).

Já, Sfard (1991) discute as expressões algébricas no campo da álgebra como termos processuais-estruturais, desenvolvendo um modelo psicológico baseado em postular a necessidade de uma transição prolongada para mudar das concepções operacionais (processuais) para as estruturais, sugerindo uma organização das descobertas de pesquisa de acordo com a ordem com que os tópicos algébricos são tipicamente apresentados aos estudantes. Dessa forma podemos seguir o desenvolvimento da aprendizagem da Álgebra e olhar para a evolução do pensamento segundo as considerações processuais-estruturais.

Macgregor (1996), em estudos realizados com um grupo de alunos de escolas secundárias australianas, com idades entre 11 e 16 anos, aponta que uma das causas destas dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra consiste nos conhecimentos deficientes da Aritmética, ou seja, não compreendem de modo suficiente as propriedades operatórias dos números.

A pesquisadora ressalta alguns aspectos do conhecimento aritmético que são necessários para se adquirir uma aprendizagem algébrica, entre os quais: a capacidade de se concentrar no procedimento e não apenas na resposta; a compreensão das relações existentes entre as operações; o conhecimento das diversas interpretações do sinal de igual e o conhecimento das propriedades formais. O primeiro aspecto indica que os alunos preocupam-se muito mais em encontrar respostas diante de uma questão dada, em lugar de se interessar pelos procedimentos que conduzem a essa resposta. O segundo aspecto, que complementa o primeiro, refere-se a conhecer as operações básicas, além da adição.

Por exemplo: a diferença entre dois números **(z - w)**, a multiplicação é interpretada como soma repetida, **5 x 6** ou **5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5**, ocasionando uma dificuldade em expressar 5 vezes x como **5x** e a divisão, como **12** $\div$ **2 = 6** ou **6 + 6 =12**. Essa interpretação pode prejudicar a compreensão da expressão $\frac{x}{2}$.

Outro tópico discutido pela autora é a interpretação do sinal de igual; os alunos utilizam-no para indicar o resultado, usando o verbo **dar** para indicar um resultado. Como por exemplo: 7 + 5 = 12, então eles interpretam que **7 + 5 dá 12**, ou seja, entendem que o sinal (=) vincula a pergunta a uma resposta.

Lemoyne, Conne e Brun (1993), Matz (1980) realizam um estudo investigativo, demonstrando que certas classes de erros são resultados de uma adaptação sistemática de conhecimentos anteriores, que se têm generalizado e extrapolado de forma inadequada. Assim, dois tipos principais de erros são definidos:

1º) os erros correspondentes à ausência de mudanças conceituais e

2º) os erros ligados às técnicas de extrapolação.

Matz (MATZ apud ALMOULOUD, 1980) compreende os primeiros erros como sendo uma conseqüência das relações entre os saberes aritméticos e algébricos, sob o ponto de vista matemático, visando a passagem da Aritmética para a Álgebra. Considera que essa passagem efetua-se pela construção da noção do valor simbólico e pela extensão da relação de igualdade.

Segundo o pesquisador, **os erros de concatenação**, enquadram-se nessa primeira categoria, considerando-os como sendo de natureza sintática. Argumenta também, que a escrita dos números em Aritmética ocorre a concatenação dos algarismos, atribuindo a cada um desses algarismos um valor dependente de sua posição; além disso, na representação dos racionais, a justaposição de um número inteiro e uma fração implica em adição, ou seja, convenciona-se que $3 + \frac{1}{2}$ deve ser escrito como $3\frac{1}{2}$. Analisando as diversas respostas dadas pelos alunos à seguinte questão "se x = 6, calcule 4x" encontramos as seguintes respostas: "46 ou 10", a primeira resposta faz referência aos conhecimentos sobre o valor de posição e a segunda está relacionada aos conhecimentos sobre a soma.

Além dos erros anteriormente discutidos, não podemos esquecer de citar outros problemas que infringem as regras sintáticas do simbolismo algébrico. Referimo-nos neste caso as regras de cálculo, que regulam a ordem que os cálculos devem ser efetuados em uma determinada expressão, o que implica no uso dos parênteses.

Segundo Booth (1988), Kieran (1979) acredita-se que os alunos não usam parênteses porque geralmente acham que a seqüência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados; além de muitos considerar, que o valor da expressão permanece inalterada mesmo quando se muda a ordem dos cálculos.

Booth (1988) constatou este tipo de erro através da experiência que apresentamos a seguir:

*[Keith, 13 anos de idade, ao calcular **18 x 27 + 19**, logo depois de ter calculado **27 + 19 x 18** da esquerda para a direita].*

"Keith: Faço ... 27 mais 19, depois multiplico por 18. É a mesma coisa que o anterior, só que ao contrário.

E: Pois bem, suponha que eu resolvesse calcular e achasse que deveria multiplicar 18 por 27 e depois somar 19. Eu chegaria ao mesmo resultado ?

K: Sim.

E: E de que maneira você faria?

K: De qualquer uma! Depende do que passasse pela minha cabeça na hora !

E: Mas não importaria a maneira de fazer ?

K: Não, a resposta seria a mesma. (BOOTH,1984, p.55)

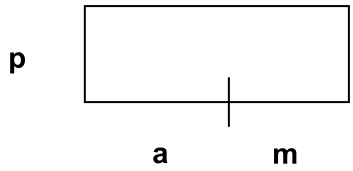
Neste exemplo dado acima, a pesquisadora evidência a concepção do aluno a respeito das expressões numéricas, que ocorre na Álgebra quando os alunos transformam o pensamento algébrico em numérico. Quando por exemplo temos uma expressão: (4x + 6y)$\bullet 7z$, sendo que os valores de x = 2, y = 3 e z = -1, neste caso os alunos não sabem a quais das operações deve ser dado prioridade para o cálculo.

Assim, Booth (1988) acredita que a ordem do cálculo depende do contexto a que a expressão está relacionada.

Um outro exemplo que destacamos na experiência de Booth (1984) e que serviu de instrumento de construção e estudo de nossa pesquisa, é a utilização de retângulos, na solução de problemas, onde a pesquisadora procura verificar se os erros apontados por Kuchemann (1981), ocorrem durante o desenvolvimento da questão. Em nossa pesquisa, também procuramos constatar se ainda este erro continua sendo cometido pelos alunos.

Dessa maneira ilustramos este exemplo citando os resultados obtidos pela pesquisadora, conforme o exemplo abaixo:

"O que você pode escrever como área deste retângulo?



Neil: ***p*** *vezes ...* ***a*** *mais* ***m*** *. [Escreve p x a + m]*

E: Muito bom, então, você escreveu p x a + m. E o que você faria realmente, o que você precisaria fazer primeiro ?

N : Não estou entendendo.

E: Muito bem, por que você disse p vezes a mais m?

N: Porque estou multiplicando este lado [p] por aquele lado [a e m], e não dá para fazer aquele lado [a e m], e assim, tenho de somar este [a] com aquele [m], para multiplicar os dois lados juntos.

E: Muito bem, então que parte você faria primeiro?

N : Eu somaria aqueles dois lados [a e m] e então multiplicaria por p.

E: E foi isso que você escreveu?

N: Foi.

E: Suponha que lhe diga que acho [p x a + m] significa ***p*** *vezes* ***a****. E depois mais* ***m****.*

N: Ah, não, não pode ser isso. Se você fizer ***p*** *vezes* ***a*** *só obterá uma parte dela [área].Você teria de fazer* ***a*** *mais* ***m*** *para obter toda a base e então multiplicar por* ***p****. Você tem de somar* ***a*** *com* ***m*** *primeiro.*"(BOOTH, 1984, p.22)

Por meio da análise destas duas entrevistas podemos observar que a necessidade do uso dos parênteses é ignorada. Conseqüentemente, as expressões algébricas que precisam do uso desses parênteses são escritas de modo incorreto, como por exemplo, tem-se **x . y + z,** em lugar de **x.(y+z)**, podendo ocasionar outros erros na simplificação dessa expressão, por exemplo: **x. y + z** sendo reescrito como **xy + z**.

Retornando as proposições de Matz (1980), passamos a analisar os erros da segunda categoria, ou seja, os erros ligados às técnicas de extrapolação. Esses erros são considerados usos inadequados, das regras corretas porém, aplicados a outros contextos matemáticos daqueles de sua validade. Observamos que uma forma de generalizar é ampliar o âmbito de aplicação de uma lei, estendendo-a para um campo em que não havia sido definida. Entretanto, essa extensão deve ser feita comprovando-se sua validade na nova situação. A preocupação parece estar ausente quando se dá a ocorrência desses erros pelo aluno.

Matz (1980) afirma que os erros desta segunda categoria tratam, essencialmente, da teorização psicológica sobre os processos de elaboração dos conhecimentos, fundamentada nos processos de assimilação e acomodação do modelo piagetiano de desenvolvimento dos conhecimentos*: "(...) confrontado a uma nova situação, o aluno dispõe de dois modos de tratá-la: se ele conhece a regra a ser aplicada, ele pode se contentar em aplicá-la; se ele a ignora, pode, então, recorrer às técnicas da extrapolação"* (MATZ apud LEMOYNE et al, 1993, p.337).

Artigüe (1990) analisa os erros dessa natureza relacionados a um processo presente no desenvolvimento histórico de vários domínios da Matemática, considerando-o como um produtor de obstáculos.[18] Os exemplos mais evidentes desse processo referem-se:

> *(...) a extensão inadequada de regras operatórias de naturais para, por exemplo, os decimais. No que se refere às regras formais de manipulação de expressões algébricas essa generalização abusiva situa-se na origem de erros tenazes dos alunos como* $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ *ou raiz quadrada* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. (ARTIGÜE, 1992, p.261)

Cauzinille, Mathiew e Resnick (1987), Lemoyne e outros (1993), concluíram a respeito da interpretação dos resultados de suas pesquisas, que os erros dos alunos em Álgebra ocorrem em razão das "lacunas" nos conhecimentos (exemplo: os

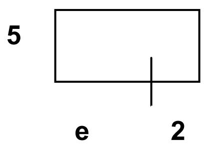
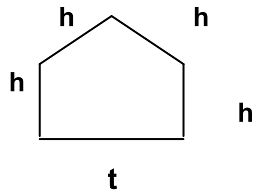
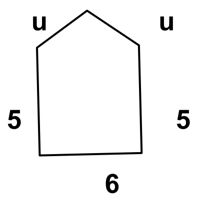
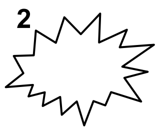
---

[18] Artigüe (1990) considera, neste artigo, os obstáculos citados como epistemológicos, baseando-se nas definições de Brousseau (1976).

cálculos relativos); às restrições na aplicação dos conhecimentos (por exemplo: procedimentos de reescrita de uma expressão com parênteses aplicados corretamente,só no que se trata de uma expressão numérica); a generalização das condições de aplicação dos conhecimentos (por exemplo:comutatividade da subtração). Para Lemoyne e outros (1993), os estudos e interpretações de Cauzinille e outros (1987) não divergem essencialmente dos relatos apresentados por Matz (1980).

Nesta etapa, iremos enfocar os aspectos conceituais a respeito do sistema conceitual algébrico. Um deles refere-se ao conceito de variável, considerado por Booth (1988) como um dos aspectos mais importantes no estudo da Álgebra. Além disso, apresentamos também os erros apontados em sua pesquisa através da tabela 1. É válido, também, destacar novamente os aspectos de variável encontrados na pesquisa de Kuchemmann (1981), que apresentamos no capítulo 1 desta pesquisa, que nos levou a escolher o tópico de expressões algébricas como foco de estudo. Observemos os erros encontrados na pesquisa de Booth (1984).

Tabela 5. Erros em Álgebra encontrados na pesquisa de Booth (1984, pp.3-4)

CSMS item	Erros das respostas	% dada de Erros das respostas	Habilidades[b]
1. Área de: 	5e2, e10, 10e, e +10	42	7
2.Perímetro: 	hhhht, 4ht,5ht	27	57
3. Perímetro : 	uu556, 2u16	20	28
4. Perímetro (n lados de comprimento 2) 	32 a 42	25	9
5. Some 4 com 3n	3n4,7n, 7,12	45 17	22
6.Multiplique por 4 n + 5	4n5,n45, n+20,n+9, 20, 9	12 39 16	8
7.Simplifique se for possível: 2 a + 5 b	7ab, 8ab	45	29
8. L + M + N = L + P + N Verdadeiro: Sempre/ nunca/ Às vezes	Nunca	55	11
9. c + d = 10 e c é menor que d c = ?	simples valor 0,1, 2,3,4, (ou 5)	43	7

Notamos que os erros em Álgebra, encontrados por Booth (1984) são freqüentes no ensino da Álgebra, independente do local de ensino. Podemos constatar estes erros nos alunos brasileiros, também. Em nossos estudos estaremos verificando qual é a freqüência que estes erros ocorrem em nossa pesquisa. Além disso, é importante ressaltar os resultados obtidos por Booth em sua pesquisa e as hipóteses apontadas por SESM[19] comprovados pelo projeto da CSMS[20] graduando dentro da estrutura de duas hipóteses: *1) Os erros observados dependem das crianças (em parte) sobre a interpretação das letras envolvidas; 2) O erro pode também aumentar em conseqüência das produções que as crianças usam para resolverem aritmeticamente problemas de tipos similares.*(BOOTH, 1984, p.6)

Após o levantamento das hipóteses, o pesquisador terminou suas análises a respeito dos resultados obtidos nesta tabela, levando-o a seguinte conclusão sobre os erros conforme apresentamos a seguir:

1) O Erro pode surgir como o resultado de maneira como a criança vê as letras na álgebra e as de particular importância dentro destas considerações são as seguintes:
    a) que existe uma confusão entre letra o representando número e letra representando objeto, a última ocorrendo mais freqüentemente em exemplos abstratos do tipo 5x + 8y;
    b) que letra como número é freqüentemente construído como letra como número específico, de maneira que a possibilidade da letra assumir uma série de valores não é tomada em consideração, acoplada com a

[19] SESM – Estratégias e Erros na Matemática Secundária.
[20] CSMS – Concepções na Matemática e Ciências Secundária.

idéia de que “a mesma letra corresponda o mesmo número, e que letra diferente representa número diferente”.

2) O Erro pode surgir como o resultado de concepções alternativas dos métodos apropriados e/ou a necessidade e ou habilidade para formalizar e simbolizar esse método e que este pode ser composto por vários aspectos:

   a) o uso de métodos corretos, mas mais primitivos os quais não levam facilmente à representação algébrica .

   b) não reconhecimento do modelo operacional formalizado no caso aritmético, e

   c) a má vontade para apresentar uma expressão algébrica do método, como uma resposta.

3) O Erro pode surgir com o resultado confuso sobre a notação e convenção algébrica, particularmente com respeito a:

   a) associando a adição algébrica, e ou a multiplicação

   b) a necessidade do uso dos parênteses para especificar a ordem das operações.

Percebe-se através dos resultados das hipóteses levantadas por Booth que, a maioria dos erros ocorridos na Álgebra são freqüentes em todos os trabalhos de pesquisas, e que são fundamentais para que busquemos novas alternativas para o ensino aprendizagem da Álgebra.

Para Booth (1988), uma das maiores diferenças entre a Aritmética e Álgebra reside na utilização de letras como indicadores de valores. As letras também aparecem em Aritmética, mas, de modo diferente. A letra **m**, por exemplo, pode ser utilizada com símbolo de representação do "metro", mas não para representar o número de metros, como em Álgebra.

Booth (1988) também aponta que os alunos têm uma forte tendência em considerar as letras como representação de valores específicos únicos, como em "**x + 3 = 8**", e não números genéricos ou variáveis como um **"x + y = y + x"**. Na Aritmética, os símbolos que representam quantidades significam, sempre, valores únicos.

Os diferentes usos das letras podem acarretar numa "falta de referencial numérico", por parte do aluno, na interpretação do significado das letras em Álgebra.

A discriminação realizada entre as diversas maneiras pelas quais as letras podem ser usadas na Álgebra, pode representar dificuldades para os alunos. Constatadas através dos estudos de Kuchemann[21] (1981), e comprovados por diversos pesquisadores como: Kieran (1992), Booth (1984), entre outros.

Depois de apresentarmos e discutirmos os principais erros que os alunos cometem na Álgebra, destacando dois pontos importantes para que possamos compreender as causas destes erros, durante o processo de aprendizagem dos domínios matemática.

---

[21] A pesquisa de Kuchemann (1981) está relatada no capítulo 1, juntamente com a fundamentação teórica.

4.2 Abordagem dos Erros na Aprendizagem da Matemática na Comunidade Científica

Inicialmente mostraremos como os erros cometidos pelos alunos são considerados dificuldades na matemática perante a comunidade científica através dos estudos de Rico (1994) em seu artigo "*Erros na aprendizagem de Matemática*".

Neste artigo o pesquisador faz referências aos trabalhos de Popper (1979), através do levantamento da questão a respeito dos erros *"Como podemos detectar e eliminar o erro?"*, levando os pesquisadores a refletirem sobre o assunto, utilizando o racionalismo crítico. Além disso, através dos estudos de algumas proposições, Popper nos mostra que o erro pode ser útil para a construção do conhecimento conforme apresentados a seguir:

> *7. Não há nenhum critério que permita reconhecer a verdade. Mas se possuímos critérios que, com sorte, permitem conhecer o erro e o engano. A clareza e distinção não são critérios do verdadeiro,mas o obscuro e a confusão indicam o erro.Analogamente,a coerência não basta para estabelecer a verdade mas a incoerência e a inconsistência permitem estabelecer o engano.* (POPPER apud RICO, 1994, p.72)

A reflexão de Popper refere-se ao conhecimento geral e de um modo mais explícito ao conhecimento na ciência experimental, no que seriam necessárias algumas combinações de referências matemáticas. Há algumas conclusões importantes a serem destacadas. Em primeiro lugar, distinguir que não há origem mais recente do conhecimento, admitindo que todo conhecimento é humano, que está mesclado com nossos erros e nossos prejuízos.

Isso nos leva a admitir que o erro faz parte constituinte de nossa aquisição de conhecimento. (RICO, 1994, p.73). As organizações insuficientes ou claramente deficientes, as hipóteses tentativas, os pensamentos incompletos são parte legítima de nosso acesso ao conhecimento, construindo parte do nosso modo de conhecer.

A idéia citada anteriormente, complementaria que a presença do erro é a necessidade de um exercício constante da crítica, submetendo à prova nossos conhecimentos e aproximando-se do correto.

Outro autor apresentado por Rico é Bachelard (1978), o qual discute o erro como um obstáculo epistemológico. Bachelard (1978) constrói a noção de obstáculo epistemológico, como explicação para essa aparição inevitável dos erros que temos visto, constituindo parte importante do nosso avanço no conhecimento. Assim, apresentamos alguns trechos do início da obra *"A formação do espírito científico":*

> *Quando se investigam as condições psicológicas do progresso da ciência há que estabelecer o problema do conhecimento científico em termos dos obstáculos; em seguida igual a conhecer,intimamente, aonde aparecem, pois uma espécie de necessidade funcional, as perturbações e confusões; é aí onde mostraremos as causas de estancamento e até de retrocesso; é ai, onde discernimos causas de inércia que chamaremos de obstáculos epistemológicos.*
>
> *O conhecimento do real é uma luz, que sempre projeta alguma sombra, jamais é imediata e plena. Ao retornar ao passado de erros, se encontra a verdade. Em efeito, se conhece o oposto de um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal adquiridos ou superando aquele que,no espírito mesmo, obstaculiza.* (BACHELARD apud RICO, 1994, p.73)

Analisando os trechos acima, temos uma noção de como Bachelard relaciona o erro com o obstáculo epistemológico no estudo científico. Além disso, o pesquisador baseado na noção de obstáculos epistemológico definido por Brousseau na Didática da Matemática, realiza uma aproximação sistemática dos processos de criação e construção do conhecimento dentro da comunidade científica,e ao mesmo tempo, os processos de transmissão e assimilação do conhecimento no sistema educativo, conforme apresentamos a seguir:

> *Para o científico o conhecimento surge da ignorância, como a luz surge das trevas. O científico não vê que a ignorância e uma trama de erros positivos, tenazes, solidários. Não adverte que as trevas espirituais possuem uma estrutura e que, nessas condições, toda experiência objetiva correta deve sempre determinar a correção do erro subjetivo. Mas os erros não se destroem um a um com facilidade. Estão coordenados. O espírito científico só pode ser construído destruindo o espírito não científico. Muitas vezes, o homem da ciência se confia uma pedagogia fracionada, enquanto que o espírito científico deveria tender a uma reforma subjetiva total. Todo o progresso real no pensamento científico necessita de conversão.* (BROUSSEAU apud RICO, 1994, p.74)

Percebemos que a noção de obstáculo epistemológico e as sucessivas tipificações e caracterização da mesma, se tem utilizado como chave para estudos, sistematizações, análises e explicações dos erros que se apresentam no pensamento científico.

4.3 Investigação sobre os Erros

As reflexões, sobre os estudos dos erros de aprendizagem de matemática são consideradas como parte normal do processo de ensino e aprendizagem, segundo os aspectos apontados por Brousseau, Davis e Werner (1986):

> *Observações feitas em sala de aula expostas em público:*
> *Os estudantes pensam freqüentemente a cerca de suas tarefas matemáticas de um modo original, bastante diferente do que esperam seus professores"*
> *Quando esta via de pensamento original se mostra inesperadamente útil, admiramos seu poder e decidimos que o estudante há de ter uma compreensão em desuso; no entanto quando, pelo contrário, este modo pessoal de pensamento omite algo que é essencial, dizemos que o estudante tinha cometido um erro. De fato. ambos os casos temos muito em comum, em particular o dado de que as idéias na mente do aluno não são as que o professor espera.* (BROUSSEAU, DAVIS e WERNER apud RICO, 1994, p.82)

Na pedagogia atual existe uma dimensão importante que considera os processos de ensino-aprendizagem como um processo de comunicação, entretanto esta comunicação deve fluir em ambas as direções: desde os estudantes para o professor e igualmente do professor para os alunos. Neste ponto de vista, notamos a importância do contrato didático que citamos no capítulo 1 tópico 1.4.5 desta pesquisa.

Cabe destacar, que o trabalho principal do professor consiste em dirigir e guiar o desenvolvimento das idéias nas mentes dos alunos, é importante para o professor conhecer o que os seus alunos estão pensando, e não limitá-se a fazer suposições sobre essas idéias. Em relação às observações citadas no trecho acima, Brousseau, Davis e Werner (1986), descrevem algumas das surpresas observadas pelos professores em sua pesquisa, como mostramos a seguir:

> *1) Se torna evidente rapidamente que os erros dos alunos são, com freqüência, o resultado de um procedimento sistemático que tem alguma imperfeição; no entanto o procedimento imperfeito utilizado pelo aluno de modo consistente e com confiança. Nestes casos, os erros mostram um padrão consistente.*
> *2) Os alunos têm com freqüência grandes concepções inadequadas ("misconcepções") a cerca dos aspectos fundamentais da matemática.*
> *3) Quando é possível observar os alunos e também trocar informação com seus professores usuais,se vê que os alunos empregam com freqüência procedimentos imperfeitos e tem concepções inadequadas que não são reconhecidas pelos professores.*
> 4) *Também se torna evidente que os alunos são com freqüência mais inteligentes para inventar seus próprios métodos originais do que deles se espera. Incluindo quando o método tenha sido mostrado pelo professor, o aluno pode desenvolver o seu próprio método original, chegando até a ignorar o método do professor.* (BROUSSEAU, DAVIS e WENER apud RICO, 1994, pp.82-3)

Ao estudar os erros, de acordo com as dificuldades encontradas pelos alunos, deve-se reconhecer que os erros também são função de outras variáveis do processo educativo tais como: o professor, o currículo, o contexto social na qual a escola esta envolvida, o meio cultural e suas relações com as possíveis variáveis.

Os erros na aprendizagem da matemática são em nossas considerações, o resultado de um processo muito complexo.

Para compreender as variáveis que levaram ao estudo dos erros apontados no parágrafo anterior, recorremos aos estudos de Radatz (1979) e na necessidade de um marco teórico da explicitação:

> *1. Em desacordo e descrença tanto a respeito dos testes com relação a norma como com os testes com relação ao critério para medir os ganhos na matemática tem aumenta a atenção pelos aspectos diagnósticos de ensino.*
> *2. As reformas sucessivas do currículo de matemática provavelmente não têm conduzido a novos erros e dificuldades, pois como seguridade têm surgido novos erros, devido aos conteúdos específicos.*
> *3. A individualização e diferenciação da instrução matemática requerio, como posteriormente a socialização e as relações de comunicação em aula. De uma grande destreza no diagnostico de dificuldades especificas; os professores necessitam de modelos de atuação para diagnosticar o ensino que nos aspectos do conteúdo matemático estão integrados com a ajuda da psicologia educativa e a psicologia social.* (RADATZ apud RICO, 1994, pp.83-4)

Por meio, dos relatos citados acima pelo pesquisador, compreende-se melhor quais são as variáveis que ocasionam os erros nos alunos. Dessa forma, mostramos mais detalhadamente algumas das principais características gerais dos erros cometidos pelos alunos:

> - *Os erros são surpreendentes. Com freqüência os erros cometidos pelos alunos surgem de maneira surpreendente, já que pelo geral se tem mantido ocultos para o professor durante algum tempo.*
> - *Os erros são muitas vezes persistentes, devido a que podem refletir o conhecimento dos alunos sobre o conceito do uso particular de regras nemotécnicas. São resistentes a trocar por si mesmo já que à correção dos erros podem necessitar de uma reorganização fundamental do conhecimento dos alunos.*
> - *Os erros podem ser bem sistemáticos ou por azar. Os primeiros são mais freqüentes e, pelo geral, mais efetivo para revelar os processos mentais subjacentes, que o estudante considera e utiliza como correto. Os erros por azar refletem falta de cuidado y lápso ocasionais, e tem relativamente pouca importância.*
> - *Os erros ignoram o significado; deste modo, respostas que são obviamente incorretas, não se põem em questão. Os alunos que cometem um erro não consideram o significado dos símbolos e conceitos com os que trabalham.* (MULHERN G apud RICO, 1994, p.84)

Além destes erros apontados pelo autor, não podemos desconsiderar as capacidades dos estudantes como tão pouco esquecer dos comentários sobre os erros de Brousseau, Davis e Werner mostrando as quatro vias nas quais os erros podem ser apresentados:

> *1. Os erros são às vezes resultado de grandes concepções inadequadas a cerca de aspectos fundamentais da matemática.*
> *2. Freqüentemente os erros se apresentam como resultado da aplicação correta e crédula de um procedimento imperfeito sistematizado, que pode identificar com facilidade pelo professor.*
> *3. Também os erros podem se apresentar quando o aluno utiliza procedimentos imperfeitos e possui concepções inadequadas que não são reconhecidas pelo professor.*
> *4. Os alunos com freqüência inventam seus próprios métodos, não formais porém altamente originais, para realização de tarefas que são a eles propostas e na resolução de problemas.* (BROUSSEAU, DAVIS e WERNER apud RICO, 1994, p.85)

Desta forma os relatos dos pesquisadores apontam que estudar e analisar os erros cometidos pelos alunos vem emergido recentemente como uma grande linha de estudos e pesquisa da Educação Matemática, com implicações consideráveis para os pesquisadores de nossa área.

Para finalizar este capítulo, discutiremos outros aspectos enfrentados pelos professores no sistema de ensino aprendizagem dos alunos, procurando compreender estes erros na aprendizagem escolar.

4.4 A produção dos Erros na aprendizagem escolar de Matemática

Atualmente, a análise de erros como forma de investigação dos problemas relacionados ao ensino e aprendizagem escolar de matemática, tem contribuído de forma significativa para compreender a natureza dos erros produzidos. Na realidade, muito recentemente os erros deixaram de ser vistos como algo negativo a ser evitado a todo custo.

A concepção do erro sofreu alterações a partir da mudança de paradigma ocorrido na segunda metade do século passado, quando o referencial epistemológico, tanto do ponto de vista da construção do conhecimento científico, quanto da construção do conhecimento pelo sujeito. A crença na existência de uma verdade absoluta, baseada no poder da razão ou advinda da observação de fatos empíricos, foi colocada em xeque por vários autores, entre os quais se destacam Popper (1980) e Bachelard (1967) e substituída por uma concepção relativista de ciência em que o conhecimento não é absoluto, mas sempre incompleto.

Além disso, outros pesquisadores também já evidenciavam este tipo de discussão ressaltando algumas discussões a respeito do assunto sobre erros.

A partir da comparação de dois paradigmas, o do tratamento dogmático e do tratamento científico das informações, Favre (1995) apontou alguns reflexos sobre as atitudes cognitivas frente ao erro, resumindo-as no seguinte quadro:(vide tabela 6)

Tabela 6. Concepções do Erro abordados na pesquisa de Favre.

Tratamento dogmático das informações	**Tratamento científico das informações**
Enunciado com formulação implícita **Erro pode ser mascarado**	Formulação explícita dos enunciados **Erro pode ser exposto**
Afirmações dogmáticas/ pré-juízos **Erro deve ser excluído**	Hipóteses/construção de modelos provisórios e aproximativos **Erro está potencialmente presente**
Fabricação de sistemáticas/ reforçamento de dogmas **Erro é evitado**	Busca de contra-evidências **Erro indica validade dos modelos**
Atitude projetiva baseada na objetividade pura **Erro é visto como falta**	Atitude reflexiva, incorpora e reflete sobre a subjetividade **Erro é sinal de informação incompleta, portanto, geradora de questionamentos**

Fonte: Pesquisa de Favre (1995)

Paralelamente, no que se refere à construção do conhecimento pelo sujeito, a abordagem psicogenética do desenvolvimento e da aprendizagem proposta por Piaget (1974, 1976), analisa o erro como expressão do processo de adaptação, ou seja, da tentativa de assimilação da realidade pelos esquemas de ação. Nesse sentido os erros não são casuais, mas constitutivos do mecanismo funcional do processo de construção do conhecimento. Essa abordagem tem sido aplicada à aprendizagem de conteúdos escolares de matemática por vários autores. Brousseau (1983) aponta vários obstáculos que podem interferir na aprendizagem de conceitos matemáticos. Para o autor os erros podem revelar certas concepções dos alunos em relação a um determinado conhecimento que, por serem muito estruturadas constituem um obstáculo de caráter epistemológico, conforme denominou Bachelard (1967). Os erros podem ainda advir de outros obstáculos relativos à forma de ensinar ou de estabelecer o contrato didático, tanto quanto das limitações que o desenvolvimento do aluno pode apresentar.

A teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990) mostra também que a aprendizagem de conceitos não é pontual, mas depende de desenvolvimento. Os esquemas, como organizadores invariantes da ação se constroem na medida em que se enfrentam situações problema, se abstraem e se incorporam as regras de ação para as diferentes classes de situações. Os erros resultam nesse caso da extensão dos esquemas a uma classe de situações não pertinente, quer porque o esquema se aplica a uma classe muito ampla, produzindo generalizações abusivas, quer porque se limita a situações muito específicas. Em qualquer dos casos, o erro não é casuístico, mas indicador do mecanismo próprio de construção dos esquemas que se constituem e ganham significado quando se enfrenta novas situações no meio.

Dessa maneira, o erro tem sido considerado como um aspecto constitutivo do processo de aquisição e consolidação do conhecimento, tanto no caso da ciência como do sujeito.Tal qual um termômetro, os erros produzidos pelas crianças ao aprenderem matemática devem ser encarados como indicadores da atuação dos processos subjacentes à construção de um conceito e das variáveis que influenciam externamente esses processos, sobretudo aquelas ligadas ao processo de ensino e aprendizagem (Charnay, 1992). Para entender os erros mais freqüentes no processo de ensino e aprendizagem escolar é necessário investigar a natureza e a produção de conceitos de um dado campo de investigação, no caso a matemática, explicitando as principais dificuldades associadas à construção dos mesmos.

Depois de apresentarmos e discutirmos os erros dos alunos na aprendizagem da matemática, através das pesquisas realizadas na comunidade científica, passaremos a destacar alguns aspectos citados anteriormente. Pretendemos estudar e verificar se esses erros ainda continuam ocorrendo durante o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, tais como: os erros de concatenação, apontados na pesquisa de Matz (1980); os erros registrados nas pesquisas de Booth (1984,1988), apresentados neste capítulo, por meio da tabela 1; os erros averiguados por Kuchemann (1981), referentes a representação da área de retângulos, e os erros estudados e questionados por Kieran (1989), durante o ensino e aprendizagem da álgebra, através das análises dos resultados obtidos durante a execução dos processos estruturais (algébricos) e dos processos processuais (aritméticos). Além disso, observaremos se os alunos sabem aplicar as propriedades formais, tais como a propriedade distributiva, que será utilizada durante o desenvolvimento de algumas de nossas atividades.

Para finalizar este capítulo referente aos erros e dificuldades dos alunos no sistema de aprendizagem do Campo da Álgebra, destacamos as noções das expressões algébricas e numéricas. Esperamos, que estes tópicos tenham tornado-se claros para o leitor, mostrando ao professor os diversos resultados obtidos nas pesquisas realizadas no campo científico e os vários caminhos que temos que investigar para compreender os erros e as dificuldades enfrentadas pelos alunos, buscando novas alternativas para corrigi-los.

CAPÍTULO 5. A PESQUISA: O PLANO EM AÇÃO

5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos a seqüência didática do nosso projeto de pesquisa, os objetivos e processos de desenvolvimento das atividades (análise a priori), a aplicação da seqüência e a análise de resultados de algumas das atividades selecionadas (análise a posterior).

A nossa seqüência didática foi aplicada para os alunos da 7ª série do Ensino Fundamental, com o objetivo de propor um processo de ensino e aprendizagem que torne o conceito de expressão algébrica mais significativo para os alunos, e que seja capaz de amenizar os erros cometidos em Álgebra. Dessa forma, propomos uma seqüência didática composta por 12 atividades, que apresentaremos no final deste capítulo.

Iniciamos este capítulo, apresentando um quadro sintetizado das 12 atividades que compõem nossa seqüência didática.

5.2 Quadro sintetizado das atividades da Seqüência Didática

Para iniciar este capítulo, apresentamos o quadro resumido das 12 atividades da nossa seqüência didática.

Tabela 7. Síntese das atividades da Seqüência Didática.

Atividades	Título	Objetivo	Proposta
1	**Medida de Superfície**	Reconhecer a forma geométrica e a noção de área (utilizando unidades de medidas não padronizadas).	Medir uma carteira retangular utilizando unidades não padronizadas.
2	**Variação de área**	Mostrar que existem áreas diferentes, mantendo uma das variáveis constantes.	Construir retângulos, que conservam a mesma altura.
3	**Área Constante**	Mostrar que podemos obter diferentes retângulos que conservam a mesma área.	Construir retângulos mantendo a mesma área.
4	**Diferenciando Área de Perímetro**	Reconhecer figuras com perímetros iguais e áreas diferentes. Evidenciar as diferenças existentes entre as duas noções, através da discussão sobre as unidades de medidas, a diferenciação entre unidimensional e bidimensional.	Construir retângulos utilizando perímetro constante. Determinar o valor da área dos retângulos, e observar que figuras com perímetros constantes possuem áreas diferentes e que as fórmulas para determinar perímetro e área são diferentes
5	**Trabalhando com Variáveis**	Mostrar que um segmento pode ser dividido em *n* partes. Apresentar a noção de variável. Trabalhar com a Linguagem algébrica, diferenciando a expressão: 2x de x^2, entre outros erros de interpretação dos alunos. Transformação algébrica em numérica.	**Atividade principal:** Exercício 1: Escrever uma expressão algébrica, que determine o comprimento do segmento. Exercício 2: Calcular os valores numéricos das expressões algébricas dadas. Exercício 3: Escrever as sentenças algébricas pedidas.
6	**Decomposição da Cruz e Equivalência de Área**	Mostrar que, uma figura plana pode ser decomposta em partes utilizando outros polígonos regulares (retângulos, quadrados, triângulos). Determinar a medida da área da figura através de dois modos diferentes: Somatória das medidas das áreas parciais e pela fórmula genérica da área (A= b.h). Equivalência entre áreas. (Equicomposição)	Atividade: Determinar a área da figura utilizando o processo de decomposição. Escrever as expressões que representam o cálculo da área. Atividade Complementar: Jogo do Desafio. Construção de figuras de áreas equivalentes (Equicomposição).

Atividades	Título	Objetivo	Proposta
7	**Propriedade Distributiva: Construindo Retângulos**	Aplicar a propriedade distributiva na construção das expressões numéricas levando às expressões algébricas do tipo: a . (b+c); Determinar a medida da área das figuras formadas utilizando esta propriedade. Utilizar o processo de composição de novas figuras.	Construir os retângulos pedidos utilizando as peças dadas. Determinar as expressões que determinam a área das figuras.
8	**Jogo dos Cartões**	Compor e decompor as figuras planas irregulares em retângulos e quadrados, para determinar sua medida de área.	Atividade: Determine as áreas das figuras recebidas em seus cartões. Determinar a área da figura formada pela união das duas figuras irregulares. Escrever as expressões correspondentes ao cálculo da área das figuras. Atividade complementar: Exercícios utilizando polígonos, e aplicação da propriedade distributiva.
9	**Pentaminós**	Compor e decompor retângulos utilizando as peças do pentaminó. Evidenciar a expressão algébrica do tipo: n.k, onde k é constante (k=5, no caso dado, pois, a área do pentaminó é 5). Para o cálculo das áreas das figuras. Estender esta fórmula para outros tipos de peças como hexaminós, heptaminós (6n,7n).	Construir retângulos utilizando as quantidades de pentaminós pedida. Calcular a área da figura formada. Escrever as expressões que determinam a área da figura.
10	**Construção da Cruz**	Trabalhar com composição e decomposição de polígonos, decompondo um polígono em partes, usando polígonos conhecidos (quadrados e retângulos). Verificar se a área do retângulo se conserva, pela decomposição e composição**.** Construir expressões algébricas equivalentes para a determinação da área da figura. Aplicação da propriedade distributiva.	Atividade: Construir uma Cruz em um retângulo obedecendo as medidas adotadas para x e y. Calcular a área da Cruz e escrever sua expressão algébrica. Determinar a área do retângulo que contém a Cruz.

Atividades	Título	Objetivo	Proposta
11	**Produto Notável**	Mostrar que a expressão $(a+b)^2$, pode ser representada pela expressão $a^2 + 2ab + b^2$, por meio do processo de decomposição de figuras. Apresentar a equivalência entre as expressões algébricas por meio do cálculo das áreas parciais das figuras, e depois pela soma destas, chegando a expressão equivalente. Demonstrar o produto notável através da fórmula geral da área.(A= b.h).	Atividade: Decomponha o quadrado recebido, dividindo um dos lados do quadrado. Em seguida seguindo as orientações do professor e decompondo a figura em quatro figuras diferentes. (dois quadrados e dois retângulos) Determinar as expressões para as áreas das figuras e para a área da figura maior. Comparar as expressões das áreas.
12	**Equivalência de expressões**	Verificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos no decorrer das atividades anteriores. Utilizar o processo de decomposição e composição de figuras, determinar as expressões algébricas das áreas parciais, para chegar a expressão da figura total. Aplicação da fórmula genérica da área (A= b.h).Verificar a equivalência entre as expressões através do cálculo numérico.	Atividade 1: Determinar as três expressões equivalentes para cada uma das figuras dadas.

Para que a seqüência de atividades obtenha bons resultados, adotamos alguns requisitos que deverão estar presentes durante a execução das atividades. A seguir, discutiremos as nossas escolhas didáticas para as atividades.

Em nossas atividades, optamos em trabalhar com os seguintes conjuntos numéricos: os naturais, os inteiros positivos e os racionais positivos. Os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros serão utilizados para calcular as áreas pedidas, excluímos os números negativos, pois, não existem áreas negativas. O conjunto dos números racionais será utilizado para ampliar o conhecimento do aluno quando levantarmos as hipóteses de uma das grandezas ser medida com os números racionais ou seja, 1/2, 3/4, 1/3, etc. Outra escolha adotada, foram as unidades de medidas a serem utilizadas durante a aplicação das atividades; na maioria delas estaremos utilizando as unidades padronizadas (adotando o centímetro e o metro) e em outras unidades não padronizadas (retângulos e quadrados). Escolhemos trabalhar com estas unidades de medidas para determinar a área das figuras, por estarem presentes no cotidiano do aluno e fazerem parte dos seus conhecimentos implícitos e explícitos para a resolução dos problemas matemáticos propostos.

Como escolhemos utilizar conceitos geométricos para construir a noção de expressão algébrica e elegemos como ferramenta principal de construção de nossas atividades o conceito de área, adotamos algumas definições e sinônimos a serem utilizados na linguagem matemática durante as atividades, dos quais colocamos em evidência neste momento: a) Base da figura : será sinônimo para o comprimento da figura; b) Altura da figura: será o sinônimo para definir largura; c) Área: como medida de superfície, é o produto entre a base e a altura, além disso, discutiremos este conceito como uma grandeza, segundo os pontos de vistas de Douady & Perrin-Glorian (1989), e Baltar (2000).

Em todas as discussões dos resultados das atividades, o professor irá utilizar como recurso os seguintes instrumentos: construções de painéis coletando as diferentes respostas apresentadas pela classe; o levantamento de hipóteses para despertar a curiosidade do aluno e desenvolver o seu raciocínio buscando a resposta, provocar o aluno para dar contra-exemplos para as situações propostas, analisando os dois lados da situação proposta.

Depois de levantarmos e apontarmos os objetivos e os principais aspectos para que esta seqüência se desenvolva, apresentamos os objetivos gerais e específicos das atividades.

5.3 Objetivos Gerais e Específicos das Atividades

Nesta etapa, apresentamos os objetivos gerais das atividades e na seqüência didática os objetivos específicos que acompanham cada atividade proposta.

5.3.1 Objetivos Gerais das Atividades

1- Relacionar o campo numérico com o campo geométrico, por meio das medidas representadas com número racionais positivos;

2- Estimular as estratégias de raciocínio do aluno levando a construir os diversos caminhos utilizando vários instrumentos para chegar na solução do problema proposto;

3- Propor a utilização dos recursos de composição e decomposição de figuras, como forma de aprendizagem e elaboração da solução do problema;

4- Fazer perceber que a área pode ser considerada uma relação entre duas grandezas;

5- Compreender área de um polígono como uma grandeza bidimensional, que se conserva por meio de composição e decomposição em um conjunto de partes;

6- Concluir que a relação de proporcionalidade entre a variação da área, e uma das dimensões mantendo-se a outra fixa;

7- A partir da compreensão do aluno da relação existente entre as duas dimensões como o conceito de área, que ele seja capaz de produzir expressões algébricas pela generalização das relações estabelecidas entre os conceitos geométricos envolvidos nos problemas referentes à área e perímetro de polígonos;

8- Trabalhar a equivalência entre as expressões algébricas por meio de comparações entre as áreas das figuras e suas expressões.

Nos objetivos apresentados acima, encontramos presente a teoria da Dialética Ferramenta-Objeto, que deve permitir aos alunos mobilizarem-se, nas diferentes atividades propostas, seus conhecimentos antigos, tais como: reconhecer figuras planas, o processo de composição e decomposição de figuras, conceito de área, unidades de medidas, razão e proporção entre grandezas, conjuntos numéricos, equivalência entre áreas, entre outros.

As atividades propostas envolvem vários quadros (numérico, geométrico, algébrico, entre outros), requerendo que os alunos passem de um quadro ao outro no momento de resolução das situações propostas, podendo por exemplo, perceber a conexão entre os vários campos do conhecimento: como a passagem do quadro numérico para o geométrico, através da representação das dimensões das figuras;

reconhecimento das figuras e, em seguida, passar para o quadro algébrico; passagem do quadro algébrico para o numérico, através da variação das dimensões e cálculo de área; construir expressões algébricas a partir da representação geométrica como, por exemplo, a determinação da medida de comprimento de um fio, a determinação da área de uma figura plana, levando o aluno à generalização, entre outros exemplos.

Notamos que a Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros, contribuem no processo de ensino-aprendizagem do aluno na área da Álgebra, pois, solicitando aos alunos a utilização de ferramentas de diferentes campos da matemática para a construção de um novo conhecimento, por meio da mobilização de conhecimentos anteriores que, dessa maneira, age como um instrumento de construção e compreensão de um determinado conhecimento matemático.

Após termos apresentados, alguns os objetivos gerais das atividades que compõe nossa seqüência didática, passamos a apresentar as 12 atividades da seqüência do projeto e seus objetivos específicos e seus processos de desenvolvimento (análise a priori).

5.4 Atividades da Seqüência Didática

5.4.1 Introdução

Nesta etapa do projeto, apresentamos os requisitos que os alunos deverão dominar para que possam ser aplicados na resolução das atividades que compõem a seqüência didática. Estes requisitos das atividades foram baseados nos resultados obtidos com a aplicação do pré-teste realizado com o grupo a ser estudado.

O pré-teste aplicado neste grupo encontra-se na parte dos anexos deste projeto, o qual consistiu em cinco questões abordando o reconhecimento das figuras planas, reconhecimento de formas geométricas, conhecimento dos conceitos de perímetro e área, cálculo do perímetro e área das figuras pedidas e diferenciação entre os conceitos, utilização de unidades de medidas tais como: m (metro), cm (centímetro), m² e cm². Os resultados obtidos neste teste, foram razoáveis 70% dos alunos conseguiram responder as situações propostas, e 30% apresentaram um pouco mais de dificuldades. Notamos que a maior dificuldade dos alunos foi diferenciar os conceitos entre perímetro e área, confirmando os resultados obtidos nas pesquisas de Douady (1989) e Baltar (2000).

Quando elaboramos as atividades desta seqüência, procuramos selecionar os pré-requisitos necessários que a turma da 7ª série do ensino fundamental deve dominar afim de que o desenvolvimento da seqüência didática atinja os objetivos propostos. A seguir, apresentamos estes pré-requisitos.

Os alunos deverão possuir os seguintes pré-requisitos (noções):

1) Reconhecer as figuras geométricas planas;
2) Identificar as diversas unidades de medidas, tais como: centímetro e metro;
3) Dominar as cinco operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação);
4) Conhecer como se calcula as áreas das diferentes figuras planas: área de quadrados, área de retângulos e área de triângulos, entre outros.

5) Conhecer os conjuntos numéricos a serem trabalhados; (Conjuntos dos Naturais, Inteiros e Racionais).

6) Conhecer a linguagem matemática, como as expressões; base e altura, como sinônimos de comprimento e largura. (Em nossas atividades adotamos a linguagem de base (comprimento) e altura (largura)).

7) Saber utilizar o processo de decomposição de figuras;

8) Reconhecer o significado da equivalência entre áreas e equivalência entre as expressões algébricas;

9) Identificar e saber aplicar as propriedades aritméticas, destacando-se a propriedade distributiva;

10) Diferenciar a noção de área da noção de perímetro.

Considerando estas noções como ferramentas essências para o desenvolvimento de nossa seqüência de atividades, elaboramos um quadro sinótico das atividades que apresentamos no início deste capítulo. Dando seqüência a este capítulo, apresentamos as 12 atividades que compõem a seqüência.

5.4.2 Apresentação das atividades da Seqüência Didática

As atividades são apresentadas da seguinte forma: A atividade proposta, o material para a atividade, e a descrição do processo de desenvolvimento. Optamos por este modelo, pois acreditamos que deste modo o leitor compreenda melhor o desenvolvimento de cada atividade, entendendo assim, a nossa seqüência didática.

Em seguida, apresentamos as 12 atividades que compõe a seqüência didática do projeto de pesquisa.

5.4.2.1 Atividade 1: Medida de Superfície

Atividade: Com o Kit que o grupo recebeu, execute as seguintes tarefas:

1) Recubra a superfície da carteira utilizando as peças do jogo que você recebeu;
2) Registre a quantidade de peças que serão necessárias para recobrir a carteira;
3) Ao finalizar o registro da medida da carteira, compare o resultado obtido com os resultados dos outros grupos.

Escreva suas respostas no espaço abaixo.

A) Material: Kits formados por retângulos de dimensões diferentes (5 x10 cm) e (3 x 5 cm), e quadrados (5 x 5 cm).

B) Objetivo:
1. Diferenciar área de superfície
2. Entender superfície como um conceito geométrico e a necessidade de expressar a área como grandeza.

C) Desenvolvimento da Atividade:

Os alunos são organizados em grupos de 4 a 5 alunos. Cada grupo recebe um kit com um determinado número de unidades.

Eles deverão recobrir uma carteira retangular utilizando as unidades recebidas. Ao final, cada grupo registra o resultado encontrado.

O professor fará um painel registrando os resultados de cada grupo e proporá a discussão dos diferentes resultados conseguidos. Lançando a seguinte questão: Como podemos explicar o fato de que os números de unidades foram diferentes para cada grupo, sendo que o objeto (a carteira retangular) é o mesmo?

Por meio de questões, procuraremos evidenciar que cada unidade institucionaliza uma maneira diferente para medir a superfície de um mesmo objeto (no caso de estudo a carteira retangular). Visando nesta atividade proporcionar condições para que o aluno compreenda a diferença entre superfície e área.

5.4.2.2 Atividade 2 – Variação da Área

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.
2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete a uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b) (cm)	Altura (h) (cm)	Área (A) (cm²)
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	

3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais?
4- Olhando a tabela a cima, como você calculou a área de cada retângulo?
5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual?
6- Sendo a área de um retângulo de altura 5 cm igual a 30 cm², qual é a medida da sua base ?
7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área?
8- E se a área fosse 50 cm² qual é a medida da base?
9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura 5 cm ?
10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

A) Material: Papel quadriculado

Régua de 40cm

B) Objetivo: 1. Verificar que a área do retângulo é o produto entre a base e a altura;

2. Perceber a variação de área, mantendo-se uma das grandezas lineares constante, e variando a outra;
3. Constatar a relação de proporcionalidade entre a variação da área e a variação da base.

C) Desenvolvimento da atividade:

Os alunos são divididos em duplas e recebem uma régua de 40 cm e duas folhas quadriculadas em centímetros. (cada quadradinho será considerado como unidade de medida de superfície).

Os alunos deverão construir retângulos diferentes, conservando a altura da figura em 5 cm. Após os alunos finalizarem os desenhos na malha quadriculada, utilizando medidas inteiras para a construção dos retângulos. Eles completarão uma tabela na qual registrarão os valores numéricos das dimensões das figuras e a seguir calcular as áreas das figuras.

Na etapa seguinte, cada dupla responderá as questões formuladas e analisará a variação da área das figuras resultantes, quando a base aumenta, ou quando diminui.

As duplas escreverão o que eles perceberem ao compararem as áreas com a medida da base, depois o professor construirá um painel para registrar os resultados das duplas, discutindo-os. A partir da observação da tabela devidamente explicitada, e as formulações dos alunos, serão ressaltadas à variação de uma dimensão linear e à área, proporcionando ao aluno uma compreensão da noção como variável.

5.4.2.3 Atividade 3 – Conservação da Área, relação entre as duas dimensões.

Atividade:

1. Construa alguns diferentes retângulos cuja área seja igual a 24 cm².
2. Registre os resultados na tabela abaixo:

Base (b) (cm)	**Altura (h) (cm)**	**Área (cm²)**
		24
		24
		24
		24
		24
		24
		24
		24
		24

3. Compare os valores da base e da altura, o que acontece com elas?
4. Se temos uma altura que vale 12cm, qual é o valor da base?
5. Você encontrou algum retângulo com medidas iguais?
6. Como você encontrou os valores da base e da altura dos retângulos?
7. Você consegue escrever uma expressão para encontrar os retângulos com área igual a 24 cm²?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

A) **Material:** Papel quadriculado, papel sulfite, régua de 40 cm

Atividade: Em grupo de 4 a 5 alunos

B) **Objetivos:**

1- Favorecer o desenvolvimento de habilidades que possibilitem ao aluno construir retângulos diferentes mantendo-se a área constante.

2- Atribuir diferentes valores à base e à altura, identificando seu campo de variação e as restrições colocadas para a execução da atividade.

3- Analisar a relação da área com a base e a altura, associando-as como divisores do número dado, no qual os divisores desse número (o valor da área dada) estarão restritos aos números naturais.

C) **Desenvolvimento da atividade:**

Os alunos serão divididos em grupos de 4 a 6 alunos, e receberão folhas quadriculadas, papel sulfite e uma régua.

Os alunos desenharão os possíveis retângulos na malha quadriculada, conservando a área previamente determinada. Depois, de registrar as figuras através de desenhos, eles transcreverão as medidas de cada figura na tabela dada, na qual observarão e compararão as dimensões das figuras construídas, relacionando os valores encontrados com a área constante.

Após as análises das dimensões, os alunos apresentarão os seus resultados obtidos para a classe e o professor discutirá os pontos comuns e diferentes encontrados.

Ao final da atividade, os alunos devem perceber que as dimensões podem ser consideradas variáveis, que podemos ter figuras diferentes que têm a mesma área, e que a área é o produto das duas dimensões.

5.4.2.4 Atividade 4 – Diferenciando Perímetro de Área

Atividade:

Situação-Problema: Mariana quer construir um galinheiro de forma retangular para suas galinhas usando 50 metros de cerca. Ajude-a, a encontrar as várias formas retangulares de maneira que ela possa construir o galinheiro.(Considerar o fio de arame de 50 cm utilizando a escala (1 m corresponde a 1 cm)).

Parte A:

1- Utilizando os fios que você recebeu, construir cinco retângulos diferentes.
2- Medir as dimensões dos retângulos utilizando valores inteiros, e registrar estes valores na tabela abaixo.

Tabela 1

Base (b)	Altura (h)	b + h	P= 2b + 2h

3- Completar as outras colunas da tabela 1, utilizando os valores de b (Comprimento) e h (altura).
4- Calcular os novos valores para completar as outras colunas.
5- Observar o que acontece com os valores da terceira coluna da tabela 1. Escreva sua conclusão.
6- Se a altura é 15 cm, quanto mede a base .
7- Se a base vale 20 cm, quanto mede a altura.
8- Escreva o cálculo que você fez para encontrar os valores dos lados do retângulo.
9- Com a expressão que você escreveu no item anterior, é possível calcular as dimensões dos outros retângulos?

10- Observar agora a coluna b+h da tabela 1 com a coluna P= 2b+2h, é possível escrever uma expressão para encontrar os valores da coluna 3, conhecendo-se os valores da coluna 4? Escreva esta expressão.

Parte B:

1- Transfira para a tabela abaixo as medidas dos retângulos construídos no item anterior.

Tabela 2

Base (b)	Altura (h)	Área

2- O que é área para você? Como você calcularia as áreas das figuras?
3- Se a base é 10 cm e a área 40 cm² qual é o valor da altura.
4- Se a altura é 30 cm e a área 90 cm², quanto mede a base.
5- Se a altura vale 8 cm e a base vale 15 cm, quanto mede a área.
6- Conhecendo a base e altura que operação você fez para encontrar a área?
7- Observando os cálculos que você fez para completar a tabela 2, escreva uma fórmula geral para encontrar a área.

Obs: Responda as questões na folha anexa.

A) Material: fios de arame de 50 cm, papel quadriculado, régua de 40 cm.

Aplicação da atividade: em grupos de 4 a 5 alunos

B) Objetivos da atividade:

1. Diferenciar Perímetro de Área;
2. Determinar as diferentes medidas dos lados dos retângulos tendo o perímetro constante;
3. Evidenciar que a Largura e o Comprimento são grandezas lineares;
4. Concluir que a Área do retângulo é o produto das medidas dos lados, obtidas através da expressão A= b x h;
5. Trabalhar com o conceito de variável, através da análise das dimensões dos retângulos obtidos;
6. Construir expressões algébricas que descrevam o perímetro como a soma das medidas dos lados do retângulo (base, altura);
7. Traduzir numericamente as relações simbólicas distinguindo as expressões do perímetro, semiperímetro e área;
8. Verificar que a área é uma grandeza bidimensional, pela análise da mudança de unidades, partindo-se das medidas dos lados que estão em cm, e chegando-se a unidade de área o cm^2.

C) Desenvolvimento da atividade:

A sala será dividida em grupos de 4 a 5 alunos; cada grupo irá receber dois fios de arame de 50 cm, duas réguas de 40cm e uma folha de papel quadriculado.

O professor dará algumas instruções sobre a manipulação do fio de arame, para a construção dos diferentes retângulos, que representarão as formas das cercas para construir o galinheiro, em uma escala menor, ou seja, 1 m corresponde a 1cm, então 50 m correspondem a 50 cm. O aluno deverá utilizar todo o comprimento do fio para a construção de cada retângulo.

Após o professor ter feito estas considerações, cada grupo irá iniciar a parte A da atividade, construindo os retângulos usando o fio de arame. Quando o grupo termina a construção, um dos alunos medirá os lados que compõem a figura, e em seguida o grupo registrará essas medidas na tabela 1. Este processo se repetirá até que cada grupo tenha construído cinco retângulos diferentes.

Registradas as medidas dos lados, deve-se completar a terceira coluna da tabela 1, calculando o valor de $b + h$, e analisando os resultados. Os alunos devem perceber que a soma dos lados dos diferentes retângulos é constante e igual a 25 cm, logo $b + h = 25$.

Dando continuidade a atividade, os alunos deverão calcular a expressão $P = 2b+2h$ completando a quarta coluna da tabela 1 com os valores obtidos, onde P assume um valor constante igual a 50 cm que representa o comprimento do fio.

Na próxima fase, serão propostas duas situações, nas quais deverão calcular o valor da base de um retângulo cuja altura é 15 cm e, logo após, a altura de um outro retângulo que tem base igual a 20 cm. Desta maneira, os alunos deverão chegar às seguintes expressões: b = 25- h, para determinar a base e h= 25 – b, para encontrar a altura. Depois de construírem as expressões para calcular os valores dos lados dos retângulos, os alunos poderão citar oralmente[22] outros exemplos de modo a expressar simbolicamente os cálculos dos valores dos lados dos retângulos, verificando que estas são válidas para os demais retângulos da tabela 1, levando-os as vias da generalização.

> *Dando continuidade à análise da tabela 1, os alunos devem observar os resultados obtidos para o semiperímetro registrados na 3ªcoluna e para o perímetro na 4ªcoluna, percebendo que os valores encontrados na 4ª coluna representam o dobro do valor encontrado na 3ªcoluna. Dessa forma, eles constroem uma nova expressão relacionando estas duas expressões, na qual adotam a letra W como forma de representação para a expressão b+h, ou seja, W=b+h que encontramos na coluna 3, e P para a expressão da coluna 4, escrevendo a expressão W = P/2.*

Após os alunos terem concluído as atividades propostas na parte A, o professor fará sua intervenção nos grupos, chamando a atenção sobre os resultados obtidos no preenchimento da tabela 1. O professor solicitará aos grupos alguns dos resultados obtidos no preenchimento da tabela e formará um painel, no qual levará à discussão desses resultados. Inicialmente ele abordará com os alunos, o que representa a soma dos valores das medidas dos dois lados dos retângulos construídos, levando-os a perceber que este valor corresponde à metade da medida do comprimento do fio, conforme os valores que eles registraram na coluna 3 da tabela 1 e, sabendo-se que o comprimento do fio é constante, então, os alunos perceberão que poderão escrever as seguintes expressões que determinam os valores dos dois lados do retângulo como: b = 25 –h e h= 25 – b .

[22] citar oralmente: representa que o aluno utiliza-se do cálculo mental, para chegar ao resultado sem ter que realizar o a representação simbólica,utilizando os registros.

Finalizada esta discussão, o professor solicitará aos alunos que iniciem as atividades propostas para a parte B. Ao iniciar a parte B, os alunos transferem os dados obtidos na tabela 1 da parte A, para a tabela 2 da parte B.

Na seqüência, eles deverão procurar a melhor maneira para determinar os valores das áreas dos retângulos construídos anteriormente, além de procurarem definir o conceito de área e, depois, escrever a expressão algébrica correspondente. Em outro momento, eles determinarão os valores das alturas dos retângulos propostos, sendo dado um retângulo na qual a medida da base é igual a 10 cm e conhecendo-se o valor da área igual a 40cm², baseados nos exemplos construídos para completar a tabela 2, que os levarão a expressar genericamente a fórmula: A = b x h para o cálculo da área.

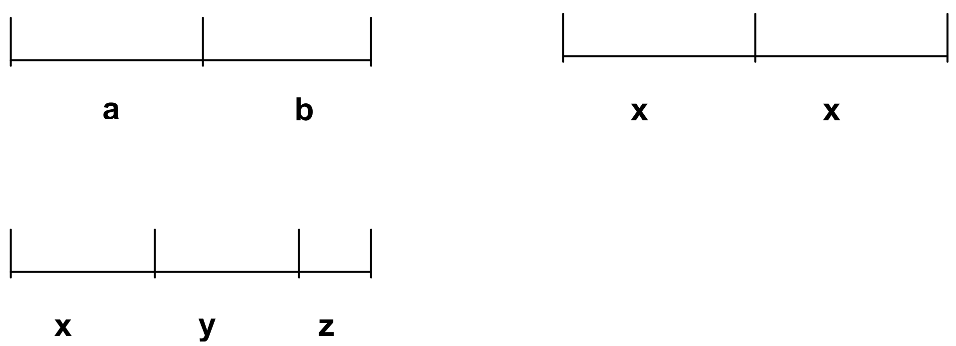
Concluída as tarefas da parte B, o professor discutirá os resultados obtidos pelos alunos ao calcularem as áreas das figuras, e quais foram os meios utilizados para o cálculo, chegando a expressão: A = b x h, e concluindo que a área é o produto das medidas dos lados do retângulo. Dando seqüência, a discussão o professor mostrará que quando calculamos o valor da área existe uma mudança de unidades do cm para o cm², demonstrada por meio da comparação das unidades de medidas dos lados do retângulo, que utilizam o centímetro (cm) e o metro como unidades padrões, e que o produto destas medidas dão origem às unidades de medidas de área como o centímetro quadrado (cm² = cm x cm), e o metro quadrado (m² = m x m).

Ao finalizarmos a discussão da atividade com os alunos, esperamos que eles sejam capazes de perceber as diferenças entre perímetro e área, da seguinte forma : a área é o produto entre duas grandezas, conforme foram apresentadas durante o desenvolvimento da atividade e na discussão entre o professor e a classe; e o perímetro como a soma dos lados de uma figura. Além disso, acreditamos que sejam capazes de diferenciar as unidades de medidas para cada um dos conceitos estudados, ou seja, a medida de área é uma grandeza bidimensional medida nas seguintes unidades (m^2, cm^2), e o perímetro em unidade linear (cm, m), e que utilizem o conceito de área como ferramenta de construção para as expressões algébricas, procurando que por meio deste modelo matemático, o aluno compreenda e atribua significado ao conceito de expressão algébrica, levando-o a generalizá-las.

5.4.2.5 Atividade 5 – Trabalhando com Variáveis: Comprimento de segmentos

Atividades:

1) Dado um segmento de comprimento C (Conforme os apresentados abaixo). Procure expressar C como soma das medidas dos segmentos dados.



2) Desenhe um segmento em seu caderno cuja medida seja 10 cm. Imagine que este segmento é um fio de arame que deve ser dividido em duas partes, uma parte de medida x e outra de medida y. Atribua a x e a y os valores determinados na tabela abaixo.

X(cm)	Y(cm)	2X	10 – X	X²	X+Y	X • Y
1,5						
2,5						
3						
5						
6						
8,5						
9						

Depois que você completou a tabela, responda:

a) O que aconteceu com os valores de x e y ?
b) Como podemos conseguir novamente o tamanho do comprimento do fio? Escreva uma expressão.
c) Como você calculou o valor x^2?

d) E como você calculou o valor 2x? Comparando com a expressão anterior, elas são diferentes?

e) Determine os novos resultados das expressões abaixo utilizando os valores de x e y da tabela anterior:

2 x + x	**2 x + 3y**	**4 x²**	**3 xy**	**5x – 3y**

3- Atividade complementar: Escreva as seguintes sentenças[7] algébricas:

a) Um número inteiro qualquer______________
b) O dobro desse número __________________
c) O triplo desse número __________________
d) Um número elevado ao quadrado__________
e) A soma de dois números quaisquer___________
f) O dobro de um número somado com o triplo do outro __________
g) A diferença entre os dois números quaisquer_______
h) O produto entre dois números___________________

[7] Esta atividade complementar baseada em Antonio José Lopes Bigode- Coleção: Matemática, Hoje é feita assim -vol.3(7ªsérie),2000-FTD- São Paulo-SP

A) Material: Folha contendo a atividade proposta, papel quadriculado, régua de 40 cm.

Aplicação da atividade: em duplas

B) Desenvolvimento da Atividade:

Cada dupla recebe uma folha contendo a atividade proposta e uma folha quadriculada e uma régua. No início da primeira parte da atividade, os alunos deverão escrever expressões que determinam o comprimento do segmento dado.

Ao finalizar esta etapa, os alunos procurarão solucionar a segunda parte da atividade, na qual deverão desenhar na folha quadriculada um segmento de 10 cm com a régua e procuraram dividir o segmento em duas partes, seguindo os valores determinados na tabela dada. Deverão marcar os valores de x e encontrar os valores de y, para obterem novamente o valor do segmento. Em seguida, calcularão as expressões da tabela.

Completada a tabela, os alunos analisarão os resultados obtidos na tabela, e responderão as questões propostas.

Em seguida, o professor discutirá e analisará conjuntamente com os alunos as respostas obtidas nesta atividade, e as expressões construídas, enfatizando o significado de variável, diferenciando as expressões propostas, das expressões numéricas e o valor correspondente por meio da identificação das operações algébricas envolvidas e o valor numérico.

Após, esta discussão pretendemos que os alunos sejam capazes de reconhecer as diferenças entre as expressões, a noção de variável, e que a medida de um segmento conhecido ou desconhecido pode ser obtido, através da soma de segmentos menores que representam as divisões deste segmento.

5.4.2.6 Atividade 6 – Decomposição da Cruz – Equivalência de área

Atividade de Equicomposição de Área- Transformar a Cruz em um polígono.

Com as cruzes desenhadas na folha que vocês acabam de receber, escolham uma delas e procurem construir a figura pedida. Em seguida, responda as questões de 1 a 4, antes de fazer a atividade 5

1- Decomponha a cruz em partes e componha essas partes a fim de obter um quadrado.
2- Mostre através do desenho, como você fez.
3- Com o desenho da outra cruz que é igual á primeira. Procure calcular o valor da área do quadrado.
4- Quanto vale a área da cruz? E a área do quadrado é igual ou diferente a da cruz?
5- Pensando na decomposição da cruz em partes, observe a figura abaixo e responda:

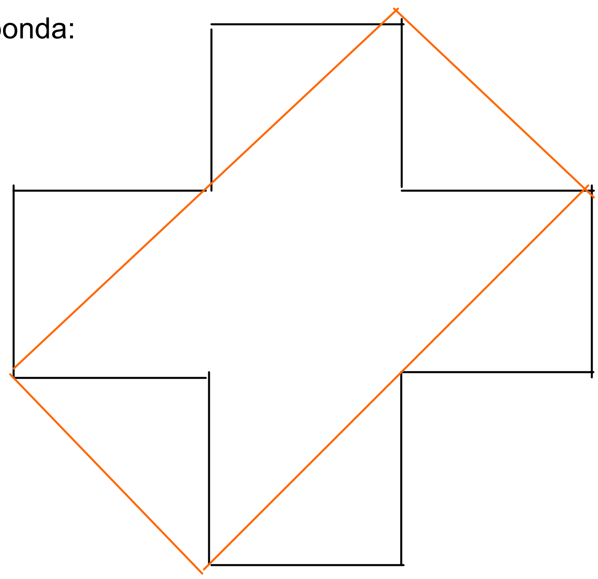


Fig.2

a. Compare a área do retângulo formado com a área da cruz. Elas são iguais? Registre suas observações.
b. Comparando o retângulo do desenho acima com o quadrado construído, as áreas são iguais? Por quê?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

Folha anexa: Com as figuras das Cruzes para serem decompostas

1) Figura A para decompor a Cruz em Quadrado

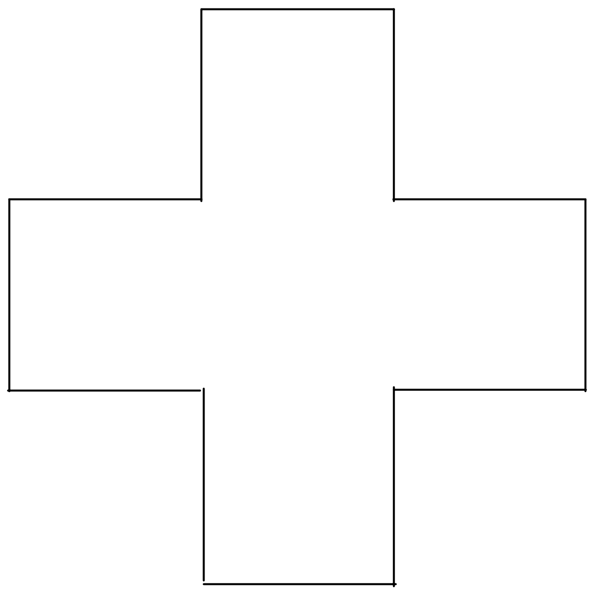


Figura. A (Figura 9.a)

Figura B – Para calcular a área do Quadrado

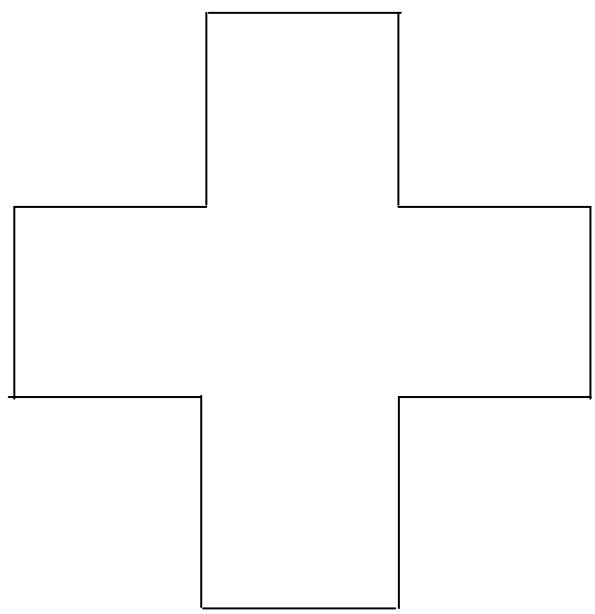


Figura B (Figura 9.b)

Ficha de atividade do aluno – Atividade de Fixação de Equivalência de Área

Atividade de Fixação: Jogo do Desafio: Você consegue construir as figuras pedidas, utilizando todas as peças do jogo?

1. Com o Kit de peças que você acaba de receber, execute as seguintes tarefas:
   a) Procure construir um quadrado utilizando todas as peças recebidas. Desenhe a figura formada.
   b) Determine a área do quadrado e escreva sua expressão.
   c) Pensando agora na figura do retângulo, você consegue construí-lo utilizando todas as peças? Desenhe a figura formada.
   d) Comparando a área do quadrado com a área do retângulo, qual é a maior?
   e) Podemos dizer que o quadrado e o retângulo são figuras equivalentes, por quê?
   f) Verifique se é possível construirmos uma cruz semelhante ao do exercício anterior, cuja área é equivalente a do quadrado e a do retângulo construídos nos itens anteriores.

Obs: Responda as questões na folha anexa.

A) Material: Figuras em papel quadriculado e um Kit com 8 peças.

Atividade: Em dupla

B) Objetivos:

1. Compor e decompor um polígono em partes, usando polígonos conhecidos (retângulos, triângulos);
2. Reconhecer que dois polígonos tema a mesma área (eqüivalência de polígonos) verificando se são eqücompostos;
3. Verificar a equivalência de polígonos pela análise da eqüicomposição;
4. Utilizar a "eqüicomposição de polígonos" para determinar a área de um polígono dado, conhecendo-se a área do outro polígono eqüicomposto (ver fig.1 e fig.2 da folha anexa);
5. Construção de expressões algébricas equivalentes através da comparação das expressões construídas para determinar a área de polígonos pela soma das áreas parciais da figura, compondo esses polígonos com outros polígonos de diferentes maneiras.

C) Desenvolvimento da atividade

Cada dupla receberá duas folhas contendo os desenhos das duas cruzes congruentes, desenhadas na malha quadriculada, uma régua e uma tesoura.

Os alunos escolherão uma das folhas que contém a cruz, para executarem a primeira atividade na qual deverão decompor a cruz, de maneira que se obtenha um quadrado. Construída a figura, eles registrarão por meio de desenho, como foram feitas estas construções.

Depois, eles utilizarão a outra folha que contém a outra cruz, para calcular sua área comparando com a área do quadrado formado.

Em seguida, os alunos irão analisar a figura da Cruz transformada em um retângulo (fig.2), e comparar as decomposições feitas na fig.1 e na fig.2; observando as áreas entre elas. Logo a seguir, eles deverão comparar a construção feita anteriormente com a cruz, transformando-a em um quadrado (fig.1) e comparar as áreas do quadrado com o retângulo, mostrado na figura dada, e registrar suas conclusões sobre a eqüicomposição de polígonos utilizados, escrevendo uma expressão numérica para cada uma dessas áreas. Caso os alunos apresentem dificuldades na resolução do problema proposto, o professor fará as intervenções necessárias, para que os alunos finalizem suas estratégias de resolução e atinja os objetivos propostos.

Concluída a atividade, o professor coletará alguns dos resultados das duplas e discutirá as estratégias dos alunos para resolverem os problemas propostos. Ele conduzirá a discussão a fim de obter as seguintes conclusões: como foi feita a decomposição para obter o quadrado e que esse processo se chama eqüicomposição, na qual a área da figura decomposta se conserva na composição da outra figura, como ocorreu com o quadrado. Desta forma podemos afirmar que as duas figuras possuem a mesma área. Já no caso da decomposição do retângulo, isso não ocorre, pois, não conseguiram formar o retângulo utilizando toda cruz, então o retângulo formado terá uma área menor que a da cruz.

Ao finalizar esta atividade, procuramos trabalhar com a decomposição de figuras para a composição de outras figuras, e comparar suas áreas e verificar se elas se conservam.

5.4.2.7 Atividade 7 - Construindo Retângulos - Aplicando a propriedade Distributiva

Atividade: Com o kit que você recebeu desenvolva as seguintes tarefas:

1) Construa dois novos retângulos utilizando:
   a) 2 peças;
   b) 3 peças;
   c) 4 peças.
2) Desenhe os novos retângulos na folha quadriculada e calcule suas áreas.
3) Registre em seu caderno como você calculou as áreas das figuras.
4) Construa alguns quadrados com as peças 3 x 3, 3 x 4, 4 x 3, 4 x 4 e desenhe as figuras formadas em seu caderno.
5) Utilizando as peças 5 x 6, 6 x 6, 6 x 5, 5 x 5, procure construir novos quadrados. Desenhe pelo menos três em seu caderno.

Com os quadrados construídos nos item 5, complete as tabelas a seguir:

Tabela 1

a	b	h	(a x h)	(b x h)	Área total

Tabela 2

(a+b)	h	Área total = (a+b)x h

6) Observando a tabela 1 responda:
   a) O que acontece com os valores da a, b, e h? Algum deles é constante?
   b) Como podemos calcular a área da figura formada? Registre seus cálculos.
   c) Compare as tabelas 1 e 2, observando os valores das áreas.Elas são iguais? Como foram calculadas?
   d) Verifique a igualdade entre as expressões : (a+b).h = a.h + b.h. se é verdadeira atribuindo as letras a, b, h valores numéricos inteiros. Podemos afirmar que elas são equivalentes? Explique sua resposta.
   e) Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras, e explique sua resposta.
      e.1) 5(a +2b) = 5 a + 10b
      e.2) (3 a + 2 b).4 = 7 a + 6b
      e.3) 3(a + 5b) = 3 a + 15 b
      e.4) z(2x +3y) = 2xz + 3zy
7) Componha um retângulo 3 x 9 utilizando duas peças e complete a sentença abaixo:
   3 x 9 = _____ +_____
8) Utilizando três peças 5 x 9 construa um retângulo e escreva sua sentença.
9) Construa um retângulo com duas peças 4 x 12.
10) Compare agora as sentenças escritas nos itens 7, 8, 9 com a maneira que foram calculadas as áreas das figuras na tabela 1. Registre suas observações.

A) Material: Kit contendo 5 retângulos de cada medida e 5 quadrados de cada medida

(2x2, 2x3, 2x4, 2x5, 2x6, 3x3, 3x4, 3x2, 3x5, 3x6, 4x4, 4x2, 4x3, 4x5, 4x6, 5x5, 5x2, 5x3, 5x4, 5x6, 6x6,6x2,6x3,6x4,6x5), papel quadriculado, régua .

Atividade: Em duplas

B) Desenvolvimento da atividade:

A sala será dividida em duplas. Cada dupla receberá um kit contendo retângulos e quadrados com medidas diferentes. Os alunos deverão construir alguns retângulos utilizando algumas das peças do kit e registrando estas figuras na malha quadriculada. Em seguida, eles calcularão as áreas das figuras formadas.

Concluída a primeira parte da atividade, os alunos deverão construir quadrados com peças determinadas (3 x 3, 3 x 4, 4 x 4, 4 x 3) e depois com (5 x 5, 5 x 6, 6 x 6, 6 x 5), registrando por meio de desenhos na folha quadriculada, transferindo os dados de duas ou três das figuras formadas para completar a tabela 1. As letras a, b, h representam as medidas das peças utilizadas na construção do novo retângulo, no qual a variável a representa a base de uma das peças, já a variável b representa a base da outra peça, e h representa a parte comum entre as duas peças, ou seja constante, como por exemplo 4 x 5 3 x 5, no qual temos a = 4, b= 3, h =5 parte comum entre as peças. Ao completar a tabela 1, os alunos deverão perceber a diferença entre variável (a e b), e constante (h), através da análise das dimensões das peças, encontrando as partes comuns entre elas, como o valor de h.

Em seguida eles calcularão as áreas parciais das figuras, e depois ao somar as duas áreas chegarão a área total da figura formada.

Na etapa seguinte, os alunos deverão completar a tabela 2, utilizando os valores de a, b e h escolhidos na tabela 1, e utilizarão a expressão (a+b) para encontrarem os valores da coluna 1 da tabela 2, e transferindo os valores da 2ª coluna da tabela 1, que representam os valores de h, para a respectiva coluna na tabela 2, dando continuidade à atividade os alunos deverão calcular a expressão: (a + b)x h, completando a 3ª coluna da tabela 2.

Terminado os cálculos, os alunos deverão comparar os resultados obtidos nas tabelas 1 e 2, comparando as duas expressões algébricas utilizadas para calcular a área total da figura.

Pela análise dos dados das tabelas, os alunos deverão concluir que as áreas dos retângulos construídos podem ser dados pelas expressões: 1) a x h + b x h ou seja a soma das áreas parciais das figuras que forma a nova figura, determinando a área total (tab.1); 2) (a +b) x h produto das medidas da base pela medida da altura.(tab.2).

Na terceira etapa da atividade, eles deverão responder as questões propostas, analisando os resultados obtidos. Depois deverão determinar como eles podem calcular a área da figura formada, observando os dados da tabela 1 e 2. Desse modo eles poderão perceber que as áreas determinadas possuem mesmo valor e que as expressões escritas podem ser consideradas equivalentes. Em seguida, os alunos deverão verificar se algumas das expressões algébricas propostas no item (e) são equivalentes ou não atribuindo a elas um valor numérico inteiro. Depois, as duplas irão resolver as demais atividades propostas, envolvendo a construção de retângulos com determinadas peças e em seguida procurarão construir uma expressão numérica, utilizando-se da soma das áreas parciais e observando que as figuras têm a mesma altura, levando-os assim a escreverem a expressão procurada, utilizando-se da propriedade distributiva tal como :(3 x 9 = 3 x 5 + 3 x 4 = 3 x(4+5)) .

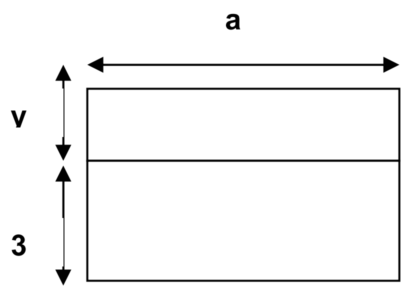
Ao final da atividade, o professor promoverá uma discussão coletiva a respeito dos resultados obtidos, que deve permitir evidenciar as produções dos alunos, selecionando as diferentes expressões numéricas construídas, comparando-as e evidenciando nessas comparações a utilização da propriedade distributiva. Em seguida, ele solicitará aos alunos outros exemplos cuja resolução envolve a utilização dessa propriedade.

Após terem finalizado a discussão coletiva, os alunos resolverão exercícios complementares, com o objetivo de verificar a aplicação do conhecimento aprendido.

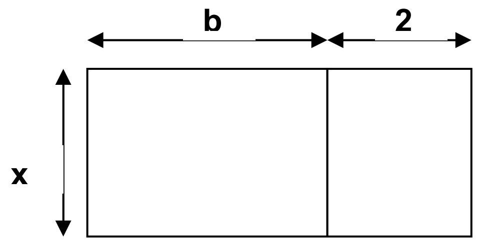
Ficha de atividade do Aluno – Complementar da Atividade 7

1) Escreva as expressões algébricas que representam as áreas das figuras[1] abaixo:

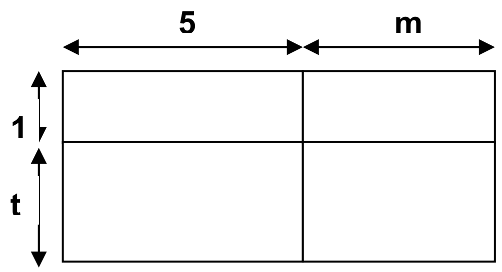
a)



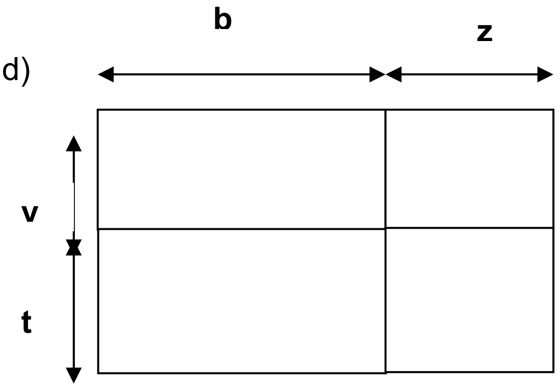
b)



c)

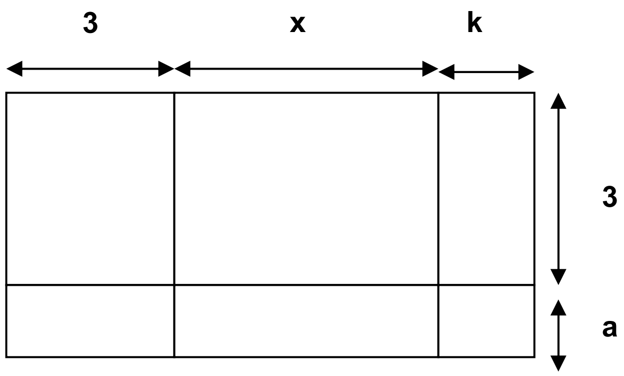


d)

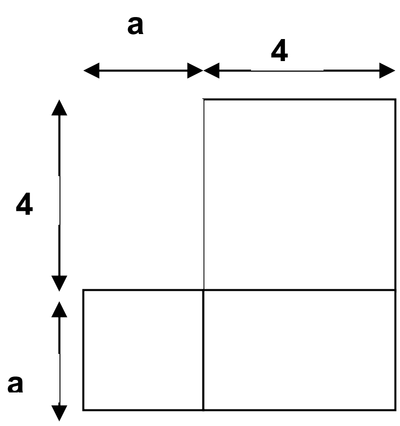


[1] Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode, Coleção :Matemática:Hoje é feita assim- vol.3(7ª série)-2000- FTD - São Paulo-SP

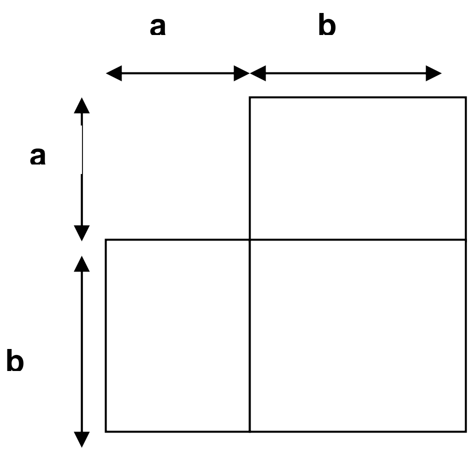
e)



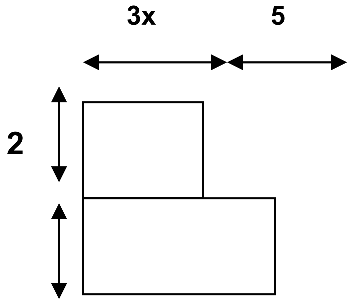
f)



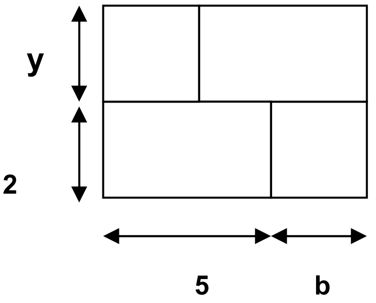
g)



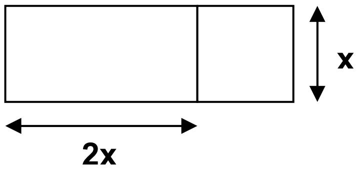
h)



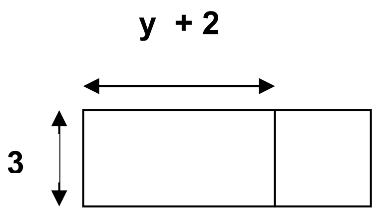
i)



j)



k)



2) Construa os retângulos cujas áreas são :(Considerando 0,5 cm como unidade de medida)

   a) (x +5) . (y + 3) b) (x + 8) .(b + 3) c) 2x.(3x + 4) d) 3y.(2x +7) e) 4x.(2x + y)

A) Desenvolvimento da atividade 7 complementar:

Os alunos recebem a folha da atividade, em seguida, eles deverão construir expressões algébricas correspondentes a área dos polígonos representados na folha 1, para isso poderão: a) decompor o polígono em partes e escrever as expressões que representam estas áreas, e depois somar estas expressões, ou aplicar a formula canônica (A = b.h) para determinar o valor da área do retângulo, utilizando para isso os conhecimentos anteriores adquiridos como determinar os valores da base e da altura, saber somar as medidas dos segmentos.

Construídas as expressões pelos dois processos, o professor proporá aos alunos que escolham valores numéricos inteiros para as letras variando entre 1 a 15, assim eles verificarão se as expressões são equivalentes ou não, através do cálculo numérico das expressões e a comparação dos resultados obtidos.

Verificada a equivalência entre as expressões, os alunos irão resolver o segundo exercício proposto na ficha 1, cuja resolução deve mobilizar o conhecimento construído no exercício 1, para construir retângulos cujas áreas estão sendo pedidas, como, por exemplo o retângulo de área (x+ 1) . (y +3). O objetivo deste exercício é verificar se o aluno é capaz de interpretar a expressão algébrica que calcula a área da figura construída.

Ao final da atividade, o professor faz um repertório das expressões encontradas pelos alunos, solicitando que verifiquem a equivalência entre essas expressões comparando da seguinte forma: a) por meio da aplicação das propriedades aritméticas; b) pela atribuição de valores numéricos.

5.4.2.8 Atividade 8 - Cálculo de área utilizando a decomposição - Jogo dos Cartões

Atividade: Com o par de cartões (contendo figuras diferentes) que vocês receberam, vamos calcular as áreas e compará-las segundo as instruções abaixo

1. Observe a figura colorida do seu cartão e determine sua área, registrando seus cálculos .
2. Mostre seu cartão e o resultado encontrado para o seu parceiro, compare os resultados encontrados para as duas figuras.
3. Unindo-se as duas figuras coloridas contidas nos cartões é possível construir uma nova figura?
4. Preencha a tabela abaixo com os dados dos itens anteriores;

Tabela

Área 1 (cartão 1)	Área 2 (cartão 2)	Área 1 + Área 2	Base x Altura

5. Analisando os dados da tabela preenchida acima, compare as áreas das figuras dos cartões com a área da nova figura formada. Registre a suas observações.
6. Escreva expressões que determinam os valores das áreas das figuras formadas.
7. Com as expressões que você escreveu compare elas com a expressão para o cálculo da área de retângulos (A= b x h). Elas são equivalentes?

A) **Material:** 20 pares de cartões

Atividade: Em dupla

B) **Objetivos:**

1) Determinar a área do retângulo pela sua composição e decomposição em polígonos;

2) Dominar procedimentos de comparação de expressões algébricas obtidas por meio de dois processos diferentes de cálculo de áreas de retângulos: a) cálculo da soma das áreas parciais dos polígonos que compõem o retângulo, b) cálculo da área pelo produto da medida da base pela medida da altura;

3) Construir expressões numéricas equivalentes através da comparação das expressões numéricas construídas para as áreas parciais da figura, com a expressão construída para a área total.

C) Desenvolvimento da Atividade:

A classe será dividida em duplas. Cada dupla receberá um par de cartões (contendo figuras coloridas), que contém um retângulo decomposto em partes complementares. (Conforme fig.10. a e 10.b)

Em seguida, cada aluno da dupla calcula a área da figura colorida de seu cartão registrando seus cálculos em uma folha de papel.

Dando seqüência à atividade o professor intervirá para solicitar aos alunos de cada dupla, que comparem os cartões recebidos observando como as partes coloridas das figuras apresentadas nos cartões foram construídas em cada um deles e lançando a seguinte questão: O que acontece se colocássemos sobrepostas as figuras contidas nos dois cartões? Em seguida, o professor coleta as respostas dos alunos e complementa dizendo que estas figuras contidas nos cartões se complementam formando um retângulo.

Na etapa seguinte, eles devem validar os resultados encontrados:

a) Determinando a soma das áreas parciais calculadas por cada elemento da dupla;

b) Calculando a área do retângulo formado pela composição das duas partes por meio da fórmula geral (A= b.h).

Nessa etapa utilizaremos o preenchimento de uma tabela, que servirá como meio de registro dos dados calculados pelos alunos. Em seguida, os alunos analisarão a tabela e compararão as diversas maneiras para se calcular a área do retângulo. (Conforme tabela abaixo)

Tabela

Área 1 (cartão 1)	**Área 2 (cartão 2)**	**Área 1 + Área 2**	**Base x Altura**

Desenho da atividade:

Cartão 1 – Figura 10.a

Cartão 2 – Figura 10.b

Obs: Unindo as partes contidas nas fig.10.a e 10.b, formará sempre um retângulo.

Ao final da atividade os alunos deverão concluir, que podem construir diferentes expressões numéricas, compará-las, transformá-las pela aplicação da propriedade distributiva. Dando seqüência a atividade, os alunos resolverão exercícios complementares referentes ao conhecimento construído.

5.4.2.9 Atividade 9 – Utilizando os Pentaminós – Decomposição e Composição de Área

Atividade: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó e desenhe na folha anexa.

1) Três retângulos utilizando duas peças. Quais são as peças que unidas não formam retângulos?
2) Quatro retângulos com três peças;
3) Dois retângulos com quatro peças;
   a) Determine as áreas das figuras formadas.Quais foram os valores encontrados?
   b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.
   c) Compare a expressão geral da área A= b x h, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.
   d) Pensando na expressão n x k, que valor numérico é atribuído a k?
   e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de k = 6 e k= 7, será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possível formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.
   f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa

A) Material : Kit de Peças do Pentaminó

Atividade : em duplas

B) Objetivo:

1) Construir retângulos utilizando as peças do pentaminó limitando-se o número de peças;
2) Conhecendo-se a área de uma peça, determinar a área desses retângulos em função do número de peças.
3) Verificar que a área do retângulo se conserva pela decomposição e composição de figuras; comprovado por meio da soma das áreas parciais das figuras, com o resultado da área total dada pelo produto da medida da base pela medida da altura;
4) Determinar expressões algébricas equivalentes através da comparação das expressões algébricas formadas para determinar as áreas parciais da figura, com a área total;
5) Expressar a área por meio da fórmula $n .k$ onde $k = 5$, generalizando para os outros valores de k.

C) Desenvolvimento da atividade:

A sala será dividida em duplas, e cada dupla receberá um kit com as peças do pentaminó.

Será proposto aos alunos que construam retângulos utilizando-se de duas (peças do pentaminó), três e quatro peças. Paralelamente, será pedido aos alunos responder a seguinte questão: Existe alguma peça que unida com outra não forme um retângulo? Os alunos serão levados a analisar as peças do kit e buscar uma resposta para esta questão.

Após montarem as figuras, cada dupla, utilizando as unidades não padronizadas, procurará determinar as áreas totais dos retângulos, por meio das expressões numéricas escritas para as áreas parciais que formam a figura total. Em seguida será proposto como escrever uma expressão algébrica que represente esta situação. (levando o aluno ao cálculo da área total)

Terminada a tarefa o professor analisa com a classe as respostas apresentadas, discutindo com os grupos a expressão algébrica 5x levando os alunos a construir a expressão genérica k.x, na qual k = 5, para os casos nos quais as áreas das figuras formadas sejam múltiplas de 5, dessa forma k é considerada uma constante, e x assume o seu papel de variável, sendo x o número de peças utilizadas para formar o retângulo maior. O professor propõe aos alunos situações, nas quais as áreas parciais assumem valores de 6 a 7 unidades, pedindo-lhes para que com essas peças eles montem alguns retângulos, e em caso afirmativo determinem suas áreas.

Ao final da atividade, o professor discutirá as situações propostas, mostrando uma outra forma de decomposição e composição de figuras. Além disso, eles transformarão as expressões algébricas genéricas (k.x = 5x, 6x, 7x) em expressões numéricas, utilizando-se das substituições das medidas das áreas parciais por valores numéricos, determinados por uma unidade não padronizada.

Em seguida o professor promoverá uma discussão sobre as possibilidades da variação do k, através da exposição de transparências apresentando os diferentes modelos de peças, tais como: triminós, tetraminós, hexaminós, heptaminós, entre outros. Serão propostas algumas atividades complementares com as peças destes jogos, levando os alunos a construírem novas expressões algébricas na fórmula geral n .k, onde k varia de 3 a 7. Ao termino da discussão com a classe o professor apresentará aos alunos através de transparências os modelos de construção de retângulos com as peças mencionadas durante o desenvolvimento da atividade.

5.4.2.10 Atividade 10 - Decomposição da Cruz – Utilizando a propriedade distributiva, para a construção de expressões algébricas

Atividade10 : Construindo Expressões Algébricas diferentes

Com o retângulo que você acaba de receber realize as seguintes tarefas:

1) Construa uma Cruz como a figura abaixo atribuindo os seguintes valores para x e y:

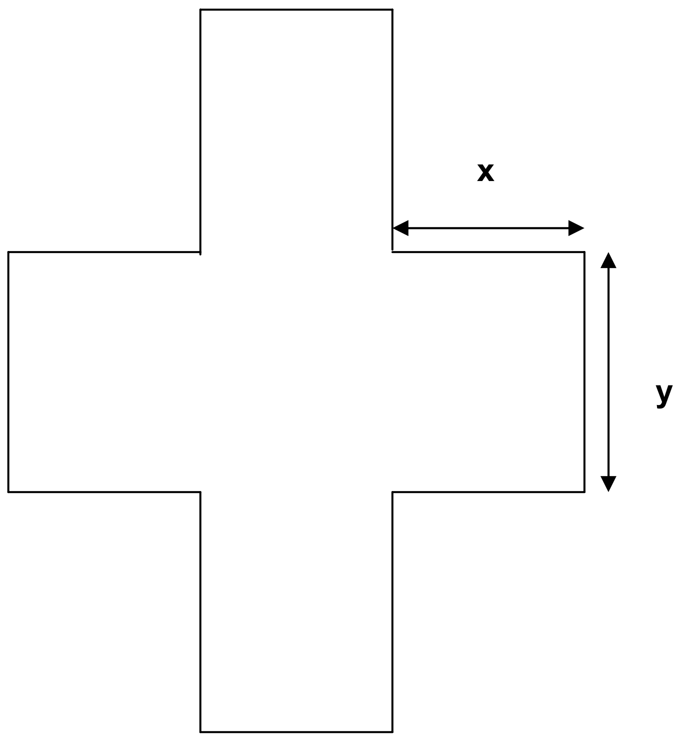


Figura 11

Conforme a cor do retângulo recebido, desenhe a cruz no seu interior:

a) x = 4 cm e y = 3 cm para o retângulo azul;
b) x = 4 cm e y = 6 cm para o retângulo vermelho;
c) x= 5 cm e y = 2 cm para o retângulo amarelo;
d) x = 5 cm e y = 4 cm para o retângulo verde;
e) x= 6 cm e y = 3 cm para o retângulo laranja

2) Calcule a área total da cruz construída.
3) Escreva as expressões algébricas que determinam a área da cruz. Quantas você encontrou? Elas são equivalentes?
4) Qual foi o valor encontrado para a área da Cruz?
5) Determine agora a área do retângulo recebido.

6) Escreva as expressões algébricas correspondentes a área do retângulo recebido.

7) Como podemos determinar os perímetros da Cruz e do Retângulo .

   a) Escreva as expressões algébricas;

   b) Calcule os seus valores numéricos;

8) Escolha três valores atribuídos para x e y, dados no item 1 desta atividade e calcule os valores das expressões algébricas dadas a seguir:

Tabela 1

Valor de X	**Valor de Y**	**2xy + 3xy**	**12 x – 4y**	**6.(x + y)**	**(x + 1)²**
		(x+2) .(x -2)	**(x +y). (x-y)**	**(x + y)²**	**2x² + 2y²**

Obs: Responder as questões na folha anexa

Ficha do aluno – Atividade Complementar da atividade 10

1) Determine os valores numéricos das expressões algébricas da tabela dada a seguir. Atribuindo para x e y valores numéricos entre 1 a 8.

X	**Y**	**$5.(x + y)$**	**$4x + 3y$**	**$6xy + 2y$**	**$2x^2$**	**$7.(xy)+ 4y$**
		$10x^2$	**$(y + 3)^2$**	**$(x+2).(y+3)$**	**$3x^2 – 8y^2$**	**$9x^2y^2$**

2) Determine os valores pedidos:
   a) Se $a + b = 4$, e $a + b + c = 15$, quanto vale c ____________________________
   b) Se $x = 15$ e $y = 3$, então qual é o valor da expressão $2.(x+y)$ _____________
   c) Se $m = 4$ e $z = 6$, então qual o valor de $7mz$ ___________________________
   d) Se $x = 8$ e $y = 3$, então qual é o valor de $(3x + 6y)$_____________________
   e) Se $a = 5$, então qual é o valor de $(a+ 2)^2$_______________________________
   f) Se $t = 7$, então qual é valor de $(t-4) .(t+ 4)$_____________________________
   g) Se $h = 9$, então qual é o valor de $2h^2$__________________________________
   h) Se $v = 12$, então qual é o valor de $2v$__________________________________
   i) Se $w = 45$, então qual é o valor de $(2 w – 5)$____________________________
   j) Se $m = 23$ e $n = 12$, então quanto vale $2m – n$ _________________________

A) Material: Retângulos de cinco medidas diferentes (12 x 9),(15 x 12), (12 x 18), (15 x 6), (18 x 9), régua (40cm).

Unidade de medida: centímetros.

Atividade: Em dupla

B) Objetivos:

1) Trabalhar com composição e decomposição de polígonos; decompondo um polígono em partes, usando polígonos conhecidos (quadrados, retângulos);

2) Verificar que a área do retângulo se conserva pela decomposição e

3) composição de figuras, mostrando que a soma das áreas parciais das figuras é igual a área total dada pelo produto da medida da base pela medida da altura;

4) Construir expressões algébricas equivalentes por meio da utilização das expressões formadas para determinar as áreas parciais da figura com a área total;

5) Aplicar a propriedade distributiva como instrumento para a construção das expressões que compõem a área total das figuras pedidas.

C) Desenvolvimento da atividade:

A sala será dividida em duplas. Cada dupla receberá um dos cinco retângulos cortados em folhas coloridas.

Os alunos deverão construir uma cruz de acordo com os valores determinados para x e y, de acordo com a cor do retângulo recebido. Em seguida, determinarão a área da cruz construída, utilizando o processo de decomposição da figura em retângulos e escrevendo as expressões algébricas que determinam a área da cruz em função de x e y. Na etapa seguinte, os alunos deverão observar o retângulo que contém a cruz e determinar a sua área. Durante o desenvolvimento da atividade esperamos, que eles usem o processo de decomposição para decompor a figura em retângulos, ou o processo de soma de áreas aplicada na área da cruz calculada, como também poderão utilizar-se da propriedade distributiva para solucionar o problema proposto.

Após escreverem as expressões para obter a área total da figura e a área do retângulo, os alunos deverão calcular o valor numérico das áreas determinadas. Após o cálculo, o professor intervirá, chamando os alunos para a discussão da atividade, coletando e discutindo algumas das expressões obtidas pelos alunos, e mostrando a importância da propriedade distributiva.

Quando as duplas terminam as tarefas o professor retoma a discussão, mostrando os resultados obtidos por cada dupla e discutindo a passagem ocorrida entre as expressões algébricas construídas no início da atividade para as expressões numéricas, e os resultados obtidos com as diferentes expressões apresentadas na tabela 1, que são dos tipos: $n(x.y)$ e $n(x+y)$. Depois, o professor pede para que eles observem as expressões algébricas encontradas para determinar as áreas e observarem as expressões contidas na tabela 1 para verem se existe alguma que se aproxima das construídas. Em seguida, será proposto aos alunos uma série de exercícios complementares envolvendo expressões algébricas determinadas durante as atividades anteriores.

Ao final da atividade, esperamos que os alunos sejam capazes de observar os diferentes tipos de expressões algébricas que podemos construir, além da importância da aplicação da propriedade distributiva para a construção de diferentes expressões numéricas, que podem ser transformadas em expressões algébricas.

5.4.2.11 Atividade 11 – Produto Notável

Atividade 11: Produto Notável

Com o quadrado que você acabou de receber, execute os seguintes procedimentos:

1. Escolha um valor inteiro entre 4cm a 8cm, marque este valor em um dos lados do quadrado. Trace um segmento que divida a figura. Aguarde as instruções de seu professor para terminar a dobradura.
2. Quantas figuras foram formadas? e quais são elas?
3. Calcule as áreas das figuras formadas e transfira os valores encontrados para a tabela 1

Tabela 1

a^2	2 a. b	b^2	Área Total

4. Calcule a área da figura total utilizando as expressões da tabela 2

Tabela 2

(a+b)	$(a + b)^2$

5. Observe as tabelas 1 e 2 e responda:
   a) Como você determinou a área total na tabela1? Explique
   b) Escreva a expressão que representa a área total na tabela 1.
   c) Observando a tabela 2, o que representa a expressão (a+b)?
   d) Como você determinou a área da figura maior. Escreva sua expressão.
   e) O que representa a expressão $(a+b)^2$?
   f) Compare as expressões obtidas para o cálculo das áreas totais da tabela 1 e tabela 2. Elas são equivalentes ? Explique sua resposta.
   g) Completa as tabelas 3, 4 com os resultados obtidos na discussão do professor e seus colegas.

Tabela 3

Resultados	**a²**	**2 ab**	**b²**	**Área Total**
Dupla1				
Dupla 2				
Dupla 3				
Dupla 4				
Dupla 5				
Dupla 6				
Dupla 7				

Tabela 4

Resultados	**(a+b)**	**(a+b)²**	**Área Total**
Dupla 1			
Dupla 2			
Dupla 3			
Dupla 4			
Dupla 5			
Dupla 6			
Dupla 7			

Analisando agora o seu resultado com os de seus colegas, responda:

a) Podemos considerar a e b como variáveis?
b) O que representam a e b para encontrar as áreas das figuras?
c) Se a e b forem iguais como podemos escrever as expressões encontradas?
d) Utilize os valores de a e b que você marcou no seu quadrado e calcule $a^2 + b^2$. Está expressão é equivalente a $(a+b)^2$?
e) O que representa $a^2 + b^2$?
f) Calcule a expressão $(2a + 2b)^2$. Ela é equivalente a $(a + b)^2$?

Obs: Responder as questões na folha anexa.

Atividade Complementar de Produto Notável

1) Como podemos representar as seguintes expressões algébricas através de desenhos abaixo:

a) (a+ 7) . (a - 7), para a > 7

b) (a + 3) . (a - 3), para a $\neq 3$ e a$\neq -3$

c) (a - 2) . (a - 2), para a > 2

d) (4 +b) . (4 - b), para b > 4

e) (5 + b) . (5 + b), para b > 5

A) Material: Um quadrado de lado igual a 21cm, uma régua de 40cm.

Atividade: Em dupla

B) Objetivo:

1) Decompor um quadrado em partes tais que sua área possa ser dada pelo o produto da expressão $(a+b)^2$, conhecida como produto notável;
2) Interpretar o produto das expressões $(a+b)$ por $(a+b)$, reconhecendo a expressão resultante $a^2 + 2ab + b^2$, como equivalente a expressão $(a+b)^2$, mostrando a equivalência entre estas expressões por meio das equivalências entre a área do quadrado de lado $(a+b)$ e da soma das áreas parciais das figuras.

C) Desenvolvimento da atividade:

A turma será dividida em duplas. Cada dupla receberá um quadrado de 21cm de lado, contido em uma folha e uma régua de 40 cm. Ao iniciar a atividade, cada dupla determinará como irá dividir um dos lados do quadrado em dois segmentos (escolhendo os valores de 4cm a 8cm), de modo a obter um quadrado de lado $(a+b) = 21$. (Ver processo de construção nas figuras abaixo).

O professor dará ordens orais para que os alunos decomponham o quadrado em retângulos de áreas, a^2, b^2, ab, ab, e executando estas ordens conjuntamente com os alunos.

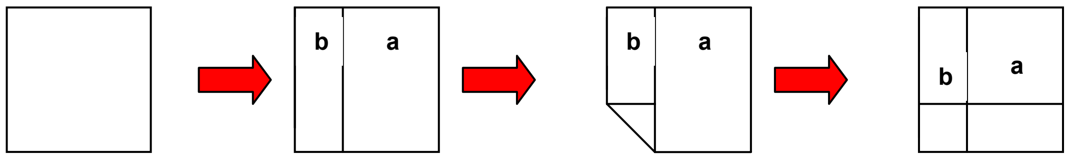


Fig.12. Quadrado de 21cm

Fig.13. Divisão do segmento

Fig.14. Determinação do 2ºsegmento

Fig.15. Decomposição do Quadrado

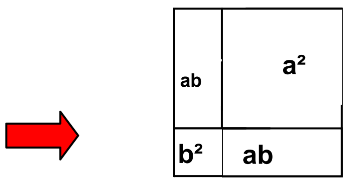


Fig.16. Quadrado decomposto

Terminado a decomposição do quadrado, os alunos irão calcular as áreas das figuras formadas e completar a tabela 1. Na seqüência da tabela 1 deverão calcular a área total, somando as áreas parciais da figura decomposta. Escrevendo a expressão algébrica $a^2 + 2ab + b^2$. Logo após, terminarem as áreas da tabela1, passarão para a tabela2, procurando calcular o valor das expressões $(a+b)$ e $(a+b)^2$.

Preenchidas as tabelas 1 e 2, os alunos deverão observar os resultados obtidos nas tabelas, comparar as expressões utilizadas e responder as questões propostas, tais como, o significado dos valores de a e b, saber interpretar os significados das expressões algébricas, $(a+b)$ que representa a medida do lado do quadrado maior, e $(a+b)^2$ representando a área total da figura. Depois os alunos verificarão se as expressões contidas nas duas tabelas são equivalentes, comparando os resultados obtidos pela área total (tab1), e na expressão $(a+b)^2$ (tab.2).

Após a análise das tabelas 1 e 2, o professor intervirá para discutir os resultados obtidos, coletando as respostas das duplas em um quadro. Cada dupla deverá registrar os resultados do quadro nas tabelas 3, 4. O professor discutirá as duas expressões utilizadas nas tabelas 1, 2 para encontrar as áreas pedidas, e fará a verificação com os alunos se as expressões são equivalentes. Na etapa seguinte, o professor colocará as seguintes questões: As letras a e b podem ser consideradas variáveis? O que representam a e b para encontrar as áreas das figuras? Nas situações nas quais os valores de a e b podem ser iguais, o que ocorre com as expressões? Além disso,o professor deve propor situações nas quais se pede aos alunos que verifiquem a equivalência entre as expressões pedidas.

Com a atividade complementar, o professor apresentará aos alunos um exercício, que solicita a representação de cada expressão pedida utilizando a decomposição de figuras e a interpretação dos produtos notáveis, do tipo (a+b).(a+b), (a+b). (a-b), ora variando o valor de a, ora variando o valor de b. Ex:: (a+3).(a-3); (5+b).(5+b).

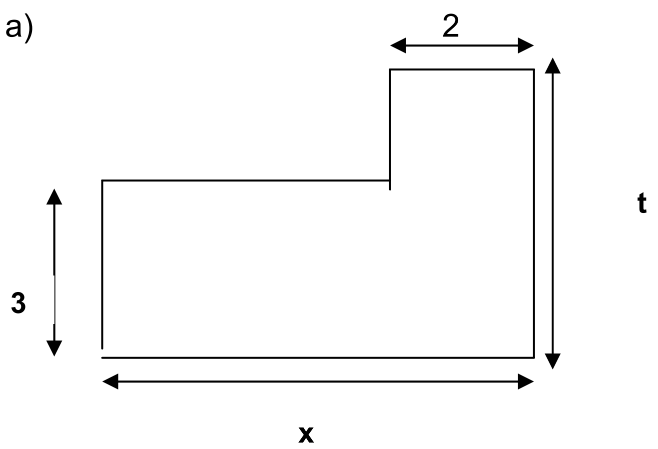
5.4.2.12 Atividade 12 – Construindo expressões algébricas equivalentes para a determinação da área.*1

Atividade 12: Atividades de Equivalência de Área

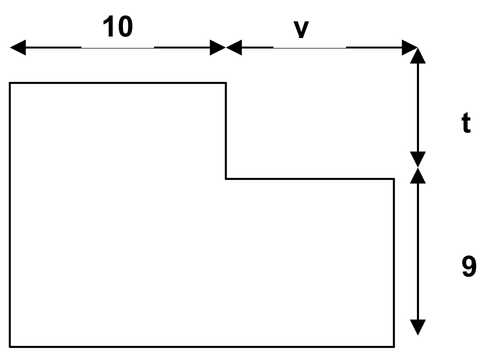
A seguinte situação foi proposta aos alunos no intuito de construir expressões algébricas equivalentes.

1) Para cada uma das figuras abaixo escreva três expressões algébricas correspondentes a sua área.[5]

a)

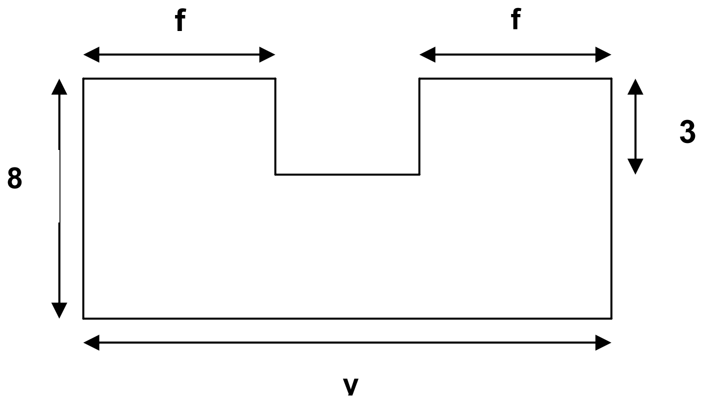


b)

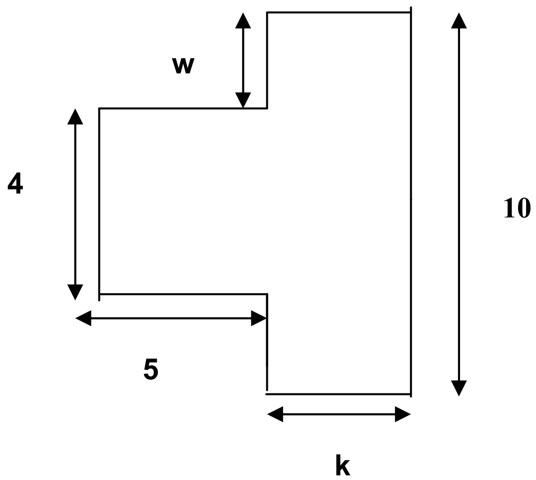


[1] Atividade baseada em Antonio José Lopes Bigode – Coleção :Matemática, Hoje é feita assim. vol. 3(7ªsérie). São Paulo: FTD, 2000.
[5] Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode, Coleção : Matemática:Hoje é feita assim - vol.3 (7ª série)-2000-FTD- São Paulo-SP

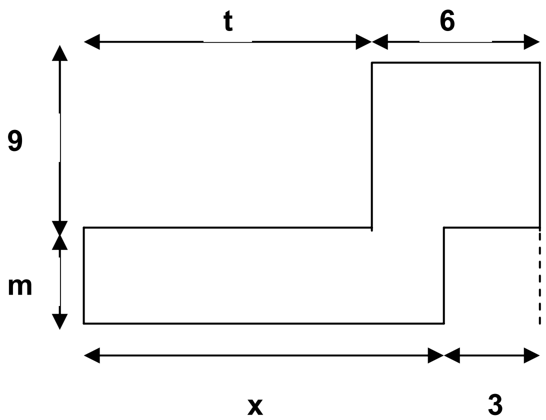
c)



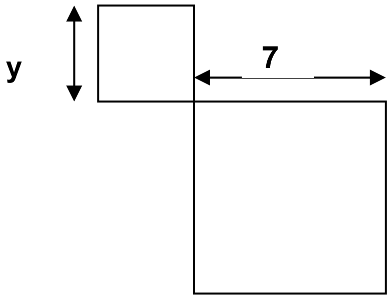
d)



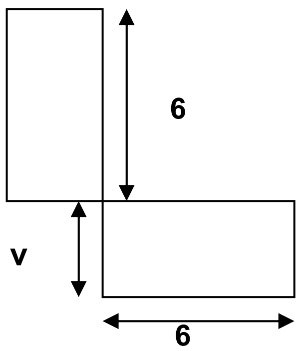
e)



f)



g)



2) Com as expressões algébricas que você escreveu para determinar a área de cada figura verifique se elas são equivalentes.

   a) Escolha valores inteiros variando de 1 a 10, e encontre os valores numéricos de cada expressão. Os resultados encontrados foram iguais?

   b) Podemos considerar estas expressões equivalentes?

3) Preencha as partes incompletas das figuras dadas: utilizando retângulos e quadrados, e escreva as novas expressões formadas para determinar as áreas das figuras.

   a) Compare as expressões que você obteve no item 1, com as expressões que você escreveu para o item 2 na folha anexa e responda: Elas são equivalentes?

4) Calcule agora os valores das áreas das figuras formadas.

A) Desenvolvimento da atividade

Os alunos recebem a folha da atividade conforme mostrada no anexo acima.

Em seguida, os alunos deverão determinar expressões algébricas correspondentes as áreas dos polígonos representados na folha. Para isso poderão: a) decompor o polígono em partes e escrever as expressões que representam estas áreas, depois ao somar estas expressões, eles determinarão uma expressão para área total do polígono; b) acrescentar partes ao polígono de modo a obter um retângulo e expressar a área desse polígono pela diferença entre a área do retângulo formado e a área das partes do polígono que compõem o retângulo.

Construídas as expressões para as áreas dos polígonos, eles deverão verificar se elas são equivalentes ou não, através do cálculo numérico atribuindo para as letras valores numéricos inteiros entre 1 a 10. (Optamos pelo conjunto dos números inteiros, limitando esses valores, para que o aluno não se atrapalhe nos cálculos, mas posteriormente será discutido pelo professor, que podemos utilizar outros valores numéricos no campo dos números reais positivos, e explicando que devemos excluir o conjunto dos números reais negativos, pois não existe área negativa). Cada aluno atribuirá valores numéricos para cada letra, e deverão substituí-las em cada expressão algébrica formada para determinar a área da figura por meio do cálculo em seguida compararão os resultados obtidos, se forem iguais serão consideradas equivalentes. Desse modo as expressões serão validadas pela via do cálculo numérico. Já, o conceito de equivalência entre as expressões algébricas será usada como ferramenta.

Ao final da atividade, o professor faz um repertório das expressões construídas pelos alunos, solicitando que verifiquem a equivalência das expressões comparando-as da seguinte forma: a) por meio da aplicação das propriedades formais; b) pela atribuição de valores numéricos. No primeiro caso nos limitaremos ao uso das propriedades formais das operações.

O professor também discutirá a utilização dos processos: a) de decomposição e composição de figuras, a somatória das áreas das figuras parciais para se chegar a área total, já utilizada nas atividades anteriores; b) os processos de soma e subtração de área, que foram utilizados como recursos de construção das expressões algébricas que determinam as áreas dos polígonos.

Com os resultados obtidos nesta atividade, podemos analisar quais foram os conhecimentos absorvidos e mobilizados pelos alunos durante todo o processo de aplicação e desenvolvimento da seqüência de atividades do nosso projeto, buscando novos caminhos que possam tornar a noção de expressão algébrica mais significativo para o aluno.

Após apresentarmos as atividades que compõem a nossa seqüência didática e seus respectivos processos de desenvolvimentos, apresentaremos os resultados das atividades da seqüência didática e a sua análise a luz da Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros.

5.5 Análise dos resultados obtidos na experimentação

5.5.1 Introdução

Nesta etapa analisaremos os resultados obtidos nas atividades de nossa seqüência didática, baseando-se nas teorias da Dialética Ferramenta-Objeto (DOUADY, 1987) e na teoria dos Registros de representações semióticas (DUVAL, 1993).

Nossa seqüência é composta por 12 atividades. Para nossa análise, selecionamos somente as atividades que consideramos fundamentais para a construção do conhecimento. Dentre as 12 atividades que compõem esta seqüência, escolhemos as seguintes: da primeira a quinta atividade e a sétima que consideramos o coração de nosso projeto, pois, trabalha com a construção de diferentes expressões algébricas até chegar as expressões algébricas equivalentes e, na nona atividade, que também, dá sua contribuição para a construção do conhecimento da noção da expressão algébrica generalizada, construída por meio dos conceitos geométricos, trabalhados nas atividades anteriores. É válido destacar que as atividades finais de nossa seqüência: 10, 11 e 12 podem ser consideradas complementares, pois, cada uma verifica um dos saberes construídos nas atividades anteriores. Como por exemplo: a atividade 10 seria a validação das atividades 5 e 6 de nossa seqüência. Esta relembra a atividade 6 que trabalhou com equicomposição, juntamente com a mobilização dos saberes construídos na atividade 5, construção de expressões algébricas e transformações numéricas . Na atividade 11 verifica-se os conhecimentos construídos nas atividades 7 e 9, onde trabalhamos com a decomposição e composição de figuras planas, no nosso caso retângulos e quadrados. A atividade 12 é considerada, por sua vez uma complementação geral dos saberes construídos na atividade 7.

Para compreender as formas de registros apresentados pelos alunos, adotamos a teoria dos registros de representação de Duval, considerando as apreensões apontadas por ele, as formas de registros, tratamento e conversões realizados pelos alunos durante o processo de desenvolvimento das atividades. Além disso, procuramos observar os quadros envolvidos em cada atividade, relacionando o jogo de quadros com os registros, mostrando assim, o paralelismo entre as duas teorias.

Segundo Duval (1993), o conhecimento é mobilizado por um sujeito por meio de uma representação. Assim, nos contextos das atividades da seqüência didática encontraremos diversas formas de registros de representações para o conceito de expressões algébricas, partindo-se do conceito de Área.

Também durante este processo de análise dos resultados, estaremos estudando os erros apontados na pesquisa de Booth (1984, 1988) e na de Kuchemann (1981) e Kieran (1989) a respeito dos erros dos alunos na resolução de problemas, verificando por meio da comparação dos resultados obtidos na pesquisa de Booth (1984), abordado na tabela 4 apresentada no capítulo 4, mostrando os erros dos alunos e comparamos com os resultados obtidos em nossa pesquisa. (vide tab.2 a cap.5) Construímos assim, um panorama das dificuldades apresentadas pelos alunos brasileiros, durante o processo de ensino e aprendizagem do conceito de expressões algébricas, que contribuirá para novos temas de pesquisa e que auxiliará os professores na elaboração de metodologias, as quais ajudem os alunos a superarem estas dificuldades.

O processo de análise das atividades está organizado da seguinte forma: Descrição do desenvolvimento da atividade, baseada nos relatórios de observações, análise dos resultados através dos referencias teóricos, incluindo alguns trechos das entrevistas semi-estruturada com o grupo de 20 alunos. Este grupo representa uma amostra do grupo que participou da pesquisa composto por 45 alunos. Adotamos o esquema de amostra, pois, nem todos os alunos participaram de todas as atividades propostas. Sendo assim, tivemos que utilizar o sistema de amostra, selecionando 20 alunos que participaram de todas as atividades da seqüência didática.

Durante o processo de aplicação da seqüência didática, utilizamos 35 sessões de 50 minutos cada. Tivemos que selecionar algumas das atividades de nossa seqüência devido a alguns fatores que ocorrem durante o processo de aplicação final das atividades, como os vários feriados que coincidiram com os nossos dias de encontro com a turma e a feira científica desenvolvida na escola. Mas estes fatores não afetaram nossos estudos, pois, já havíamos aplicado a seqüência até a atividade 9. No entanto, tivemos que descartar as atividades 10, 11 e 12.

Outro ponto, a ser apontado durante esta aplicação da seqüência, foi que levamos em consideração e respeitamos o ritmo de aprendizagem do grupo estudado. Sendo assim, o número de sessões para o desenvolvimento da seqüência didática pode ser estipulado em 40 sessões de 50 minutos, considerando a aplicação das 12 atividades.

Durante o desenvolvimento das atividades contamos com dois observadores, sendo um o professor da turma e o outro, a pesquisadora. Os observadores estavam atentos a todas as ações e estratégias que eram apresentadas pelos alunos durante o processo de resolução das atividades propostas, que eram registradas por eles nos relatórios de cada atividade.

A seguir, apresentamos as análises das atividades de nossa seqüência didática.

5.5.2 Análise da Atividade 1 – Medida de Superfície

O objetivo desta atividade é reconhecer a forma (a representação figural do retângulo) e trabalhar o conceito de área. (Utilizando-se, para isso, de unidades de medidas não padronizadas).

A atividade consistia em medir uma carteira escolar de forma retangular, utilizando unidades não padronizadas.(quadrados 5 x 5 cm, retângulos 3 x 5 cm, retângulos 10 x 5 cm).

5.5.2.1 Desenvolvimento da atividade

Ao iniciarmos a aplicação da atividade 1, dividimos a turma composta por 45 alunos em 9 grupos heterogêneos, formados por 4 a 5 alunos. Em seguida, nomeamos esses grupos utilizando-se as letras do alfabeto (A a I). Durante o desenvolvimento da atividade teremos a participação de dois observadores (a pesquisadora e o professor da turma). Ressaltamos que o professor da turma recebia as atividades a serem aplicadas uma semana antes, na qual a pesquisadora e o professor discutiam os procedimentos adequados para cada atividade e quais seriam os aspectos a serem observados nos alunos em cada atividade.

Nesta atividade participaram 44 alunos, sendo a turma composta por 45 alunos.

Cada grupo recebeu um kit diferente, composto por retângulos (10 x 5 cm), quadrados (5 x 5 cm) e retângulos menores (3 x 5 cm), e a ficha da atividade. Não foram mencionadas as dimensões das peças para os alunos.

Cada grupo escolheu uma das carteiras retangulares que teria sua superfície recoberta com as peças dos kits fornecidos. Os grupos começaram a recobrir a superfície das carteiras com as peças dadas, após terem executado as instruções pedidas e as orientações iniciais da pesquisadora. Durante este processo, o grupo A havia recoberto a superfície da carteira de um modo diferente dos demais grupos. Eles haviam posicionado as peças de uma outra forma, para recobrir a carteira, utilizando as peças na posição vertical ao invés da posição horizontal, diferente dos outros grupos.

O erro cometido pelo grupo foi reconhecido por eles mesmos quando tiveram que coletar os dados obtidos na medida da carteira pelos outros grupos. Notando a diferença entre os resultados obtidos pelos grupos que tinha o mesmo kit e o seu, eles perceberam que havia uma diferença de 4 peças em relação à medida obtida pelos demais grupos que usaram o mesmo kit (grupo B e C). O erro do grupo A foi discutido coletivamente quando a pesquisadora montou o painel com os dados de cada grupo.

Logo após os grupos terem recoberto as carteiras, os representantes de cada grupo foram trocando as informações entre si, anotando a quantidade de peças utilizadas por cada grupo para recobrir a carteira, construindo assim uma tabela com os registros e comparando os resultados entre os grupos que utilizaram o mesmo kit de peças do seu grupo. Ao final desse processo, a pesquisadora pediu para que alguns dos grupos informassem o número de peças utilizadas para cada kit, ajudando-a na construção do painel. Em seguida, ela discutiu os resultados obtidos com os grupos e apontou as diferenças existentes entre os grupos. Notou-se que dois dos grupos, que tinham recebido o mesmo kit, cometeram um erro na contagem das peças, obtendo resultados diferentes. Durante o processo de discussão dos resultados, a pesquisadora forneceu as medidas reais de cada peça dos kits e realizou com os alunos os cálculos que determinavam a área da carteira. Utilizando, para isso, o número de peças da tabela construída, multiplicando a área da peça pelo número de peças utilizadas para determinar a área do objeto medido, levando os alunos a perceberem que a área era a mesma e o que variava era apenas a unidade de medida.

Aplicamos esta atividade em duas sessões de 50 minutos.

5.5.2.2 Análise da atividade baseada no referencial teórico

Para analisarmos os resultados obtidos para esta atividade, decidimos utilizar o estudo de caso, na qual selecionamos 4 grupos (formando três de 6 alunos e um de 7) dentre nove grupos que participaram desta atividade. Sendo assim, analisamos a seguir o resultado de uma amostra composta por 25 alunos. Esta amostra selecionada, representa os resultados obtidos, nos quais consideramos os mais significativos, além do mais, estes alunos participaram de todas as atividades propostas para nossa seqüência.

Durante o processo de observação nos grupos na aplicação da atividade, registramos os principais conhecimentos mobilizados pelos alunos para resolverem a situação proposta, e em seguida elaboramos a tabela 8, contendo estes registros que apresentamos a seguir. (Vide Tab.8).

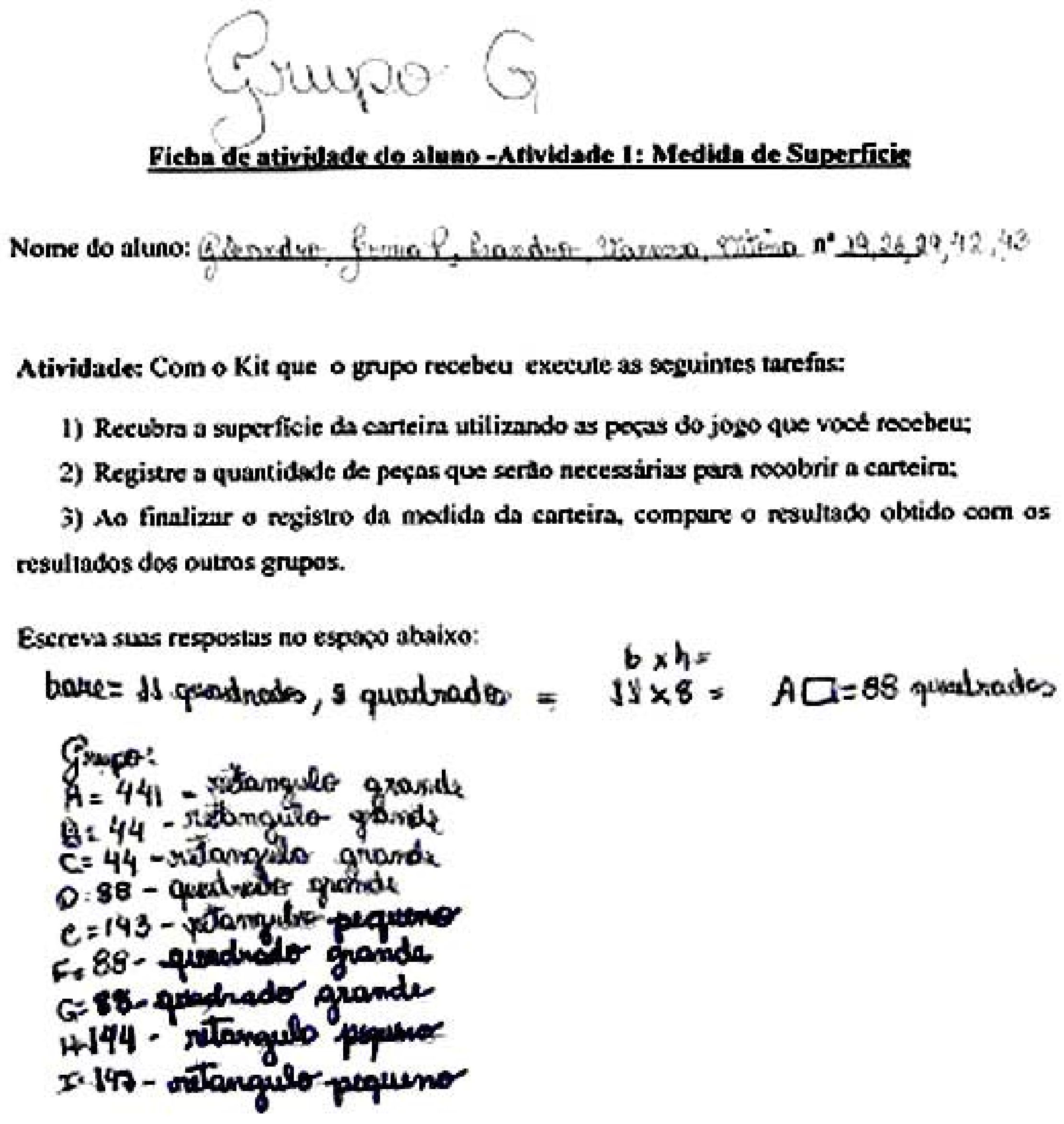
Tabela 8. Observações dos conhecimentos mobilizados pelos grupos na atividade 1

Conhecimentos Mobilizados	**Grupo A**	**Grupo B**	**Grupo E**	**Grupo F**
Reconhecimento das figuras planas	Todos os alunos ativaram este conhecimento.	Todos os alunos ativaram este conhecimento	Todos os alunos ativaram este conhecimento	Todos os alunos ativaram este conhecimento.
Identificar as dimensões da figura (Base = Comprimento e Altura = Largura)	Todos os alunos utilizaram este conhecimento.	Todos os alunos utilizam este conhecimento.	Apenas 3 alunos ativaram este conhecimento.	Todos os alunos utilizaram este conhecimento.
Utilização da expressão genérica da Área de retângulos (A = b x h) para determinar a Área da carteira.	Todos os alunos ativaram este conhecimento.	Todos os alunos ativaram este conhecimento.	Somente alguns alunos do grupo ativaram este conhecimento.	Todos os alunos ativaram este conhecimento.
Ativação dos conceitos de Área e Perímetro.	Somente ativaram o conceito de Área.	Ativaram apenas o conceito de Área.	Ativou os dois conceitos, dando a definição de Perímetro para Área.	Ativaram o conceito de Área.

Ao observarmos estes grupos, notamos que os grupos C e F foram os que mais apresentaram dificuldades em diferenciar os conceitos de área e de perímetro, através de sua descrição na ficha da atividade, “área é a soma dos lados”, por esse relato dos alunos constatamos os aspectos apontados nos estudos de Douady (1986) e Baltar (2000), percebendo-se então que os alunos ainda não conseguem diferenciar estes conceitos.

Nesta atividade os alunos trabalharam dentro de três quadros: no geométrico através da forma e reconhecimento das figuras planas como quadrados e retângulos e a noção de área, no numérico por meio da determinação do valor numérico da área da carteira contando a quantidade de peças utilizadas para recobrir a superfície da carteira, e no algébrico por meio da utilização da fórmula de área de retângulos (A = b x h).

Durante o desenvolvimento desta atividade constatou-se a mudança de quadro da seguinte maneira: os alunos iniciam a atividade no quadro geométrico, mobilizando seus conhecimentos geométricos descritos no parágrafo anterior e na tabela 6, em seguida registram o seu pensamento, utilizando-se das representações figurais em uma folha quadriculada (vide fig.18), conforme foi realizado por um dos grupos. Em seguida passam para o quadro numérico, registrando o número de peças utilizadas para medir o objeto, e em outro momento transitam para o quadro algébrico calculando a área da carteira, adotando duas formas: utilizando a fórmula geral para calcular a área de retângulo A= b x h, ou utilizando a fórmula: $A = n \times A_{\text{figura geométrica}}$. Sendo assim, o aluno transita do quadro algébrico para o numérico, do numérico para o algébrico, e do geométrico para o algébrico.



Grupo G

Ficha de atividade do aluno -Atividade 1: Medida de Superfície

Nome do aluno: [illegible] nº 19, 26, 29, 42, 43

Atividade: Com o Kit que o grupo recebeu execute as seguintes tarefas:

1) Recubra a superfície da carteira utilizando as peças do jogo que você recebeu;

2) Registre a quantidade de peças que serão necessárias para recobrir a carteira;

3) Ao finalizar o registro da medida da carteira, compare o resultado obtido com os resultados dos outros grupos.

Escreva suas respostas no espaço abaixo:

b x h =

base = 11 quadrados, 8 quadrados = 11 x 8 = A□ = 88 quadrados

Grupo:

A = 441 - retângulo grande

B = 44 - retângulo grande

C = 44 - retângulo grande

D = 88 - quadrado grande

E = 143 - retângulo pequeno

F = 88 - quadrado grande

G = 88 - quadrado grande

H = 144 - retângulo pequeno

I = 143 - retângulo pequeno

Figura 17. Protocolo do aluno da atividade 1

Na seqüência do processo de desenvolvimento da atividade e análise de resultados apresentamos as etapas da Dialética Ferramenta-Objeto que estiveram presentes no decorrer desta atividade, como descrevemos a seguir:

A) Antigo, Ferramenta explícita

Nesta fase os alunos mobilizaram seus conhecimentos antigos nos quadros geométrico e algébrico, através das noções de área, comprimento (base) e largura (altura), reconhecimento da forma de figuras planas, tais como retângulos, quadrados, e relembraram a expressão geral para determinar área do retângulo (A = b x h).

B) Pesquisa, novo implícito

Os alunos não tiveram muita dificuldade na resolução completa do problema proposto. Cada aluno (individualmente ou em grupo) sabe que, a partir daquilo que ele conhece, está encarregado de fazer proposições na qual ele deverá argumentar e confrontar com as dos outros alunos. Assim, a maioria dos grupos discutiu como poderia medir a área da carteira. Alguns grupos acharam melhor colocar primeiro as peças no contorno da carteira e determinar os valores das dimensões do objeto, outros preferiram preencher por completo a carteira e depois contar o número de peças utilizadas. Os grupos que adotaram definir as medidas da base e da altura já estavam utilizando seus conhecimentos algébricos por meio da expressão geral.

Durante o desenvolvimento desta fase de pesquisa e novo implícito, encontramos as fases de ação, na qual os alunos agem por meio dos seus instintos naturais ativando seus conhecimentos antigos, resgatados da etapa descrita anteriormente, como o reconhecimento da forma geométrica e suas características geométricas assim como formas retangulares e quadradas, noções de comprimento (base) e largura (altura), conduzindo-os à fase de formulação, mobilizando seus conhecimentos algébricos e aplicação da fórmula para calcular a área de retângulos (A = b x h).

Baseado nos relatos do parágrafo anterior, constatamos que estas etapas são muitas vezes fundamentais para o progresso eficaz do desenvolvimento do aluno, que através do uso da mudança de quadros (formulação numérica de um problema geométrico, a interpretação gráfica de forma numérica, entre outras), elabora novas estratégias para resolver as situações propostas e assim, levando-o à construção de um novo conhecimento. Além de ocasionar situações nas quais podemos desenvolver implicitamente novas ferramentas.

C) Explicitação e Institucionalização local

No desenvolvimento desta etapa do processo de aplicação desta atividade, deparamos com o problema apontado por Douady (1989) e Baltar (2000), referente a dificuldade dos alunos em diferenciar as noções entre Área e Perímetro. Este fato ocorreu quando observávamos o desenvolvimento do Grupo C, no qual os alunos deste grupo pensavam que a área era a soma dos lados da figura. Percebendo esta dificuldade a pesquisadora interveio no grupo. Inicialmente ela pergunta aos alunos a respeito da noção de Perímetro, (O que é perímetro para vocês? Como calculamos o Perímetro das figuras?) com o intuito de investigar se as idéias dos alunos sobre os dois conceitos geométricos eram semelhantes às dificuldades apontadas pelas pesquisadoras relatadas anteriormente. Para estes alunos, o Perímetro era o produto da base pela altura, ou seja, deparamos neste momento com esta dificuldade dos alunos em diferenciar ambos os conceitos. Sendo assim, a pesquisadora discute com eles que estas noções estão erradas e, mostra através de exemplos concretos e teóricos a diferenças entre eles. Além disso outros grupos contribuem para a discussão, lembrando a diferença entre as duas noções.

Podemos, assim, considerar que a discussão coletiva de um erro ou dificuldade dos alunos a respeito de conceitos matemáticos podem ser resgatados através deste instrumento.

Em seguida, os alunos trocaram informações entre si, construindo uma tabela, com os registros dos outros grupos, para determinar a área do objeto a ser medido, conforme apresentamos na tabela 9.

Tabela 9. Registros dos alunos para a atividade 1.

Grupo	Tipo de peça e quantidade
Grupo A	44 retângulos maiores (10 x 5 cm)
Grupo B	44 retângulos maiores (10 x 5 cm)
Grupo C	44 retângulos maiores (10 x 5 cm)
Grupo F	88 quadrados (5 x 5 cm)
Grupo G	88 quadrados (5 x 5 cm)
Grupo I	147 retângulos pequenos (3 x 5 cm)

D) Institucionalização, estatuto do objeto, novo explícito

Nesta etapa, a pesquisadora construiu um painel coletivo com os dados obtidos pelos grupos, que eram fornecidos pelos próprios alunos durante a discussão.

Esta discussão coletiva esclareceu algumas dúvidas dos alunos, fazendo com que eles notassem quais foram os erros cometidos por cada grupo. Em seguida, foram calculadas as áreas de cada peça (quadrado (A= 25cm²), retângulo maior (A= 50cm²), retângulo menor (A= 15 cm²)) e ao final multiplicada pelo número de peças de cada kit levando ao mesmo resultado para a área da carteira. O resultado que obtivemos dessa atividade foi um rendimento de 80% de acerto, contra 20% de erros.

Após terminarmos a discussão coletiva dos resultados, percebemos que os alunos conseguiram compreender que existem diferentes maneiras de medir um mesmo objeto (no nosso caso a carteira retangular) e que podemos adotar unidades padronizadas como centímetros, metros, milímetros, quilômetros, entre outros, como também, podemos adotar outras unidades de medidas não-padronizadas, como quadrados com dimensões diferentes, retângulos, pedaços de barbantes com uma determinada medida, tampinha de refrigerante, palito de fósforo, etc. Além disso, os alunos compreenderam o conceito de área como medida de superfície.

Durante este processo, notamos alguns aspectos apontados por Duval (1994, p.125) como as apreensões perceptivas, discursivas, operatórias e seqüencial.

Estas apreensões estiveram presentes da seguinte forma: a apreensão perceptiva fez se presente quando os alunos se depararam com a situação proposta, para determinar a área da carteira escolar, partindo-se do kit fornecido; a apreensão discursiva através da mobilização dos conhecimentos antigos, como as formas geométricas fornecidas como unidade de medida, tais como quadrados e retângulos; outras apreensões também foram observadas durante o processo cognitivo e apontados por Duval (1995) como a visualização, construção e raciocínio.

Além disso, Duval (1994) explicita a visualização como um processo que examina o espaço de representação, da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva.

Pela apreensão perceptiva, segundo Duval, o aluno interpretará a forma da figura em uma situação geométrica, chegando à resolução do problema em análise; no nosso caso os alunos devem perceber a diferença entre superfície e área de figuras planas, como também, a utilização de diferentes unidades de medidas não padronizadas.

Para Duval (1995), o conhecimento é mobilizado por um sujeito por meio de uma atividade de representação. Sendo assim, os conhecimentos foram mobilizados pelos alunos através do reconhecimento das formas geométricas utilizadas para a determinação da área do objeto estudado.

Ao final desta análise constatamos que a situação proposta não necessita de todo o ciclo da Dialética ferramenta-objeto. Ela foi escolhida para estabelecer o "*milieu*" do aluno, ou seja, prepará-lo para usar alguns objetos geométricos para a construção de conceitos relacionados com as expressões algébricas.

5.5.3 Análise da Atividade 2 – Variação de Área

Esta atividade tem o objetivo de mostrar que existem áreas diferentes, mantendo-se uma das variáveis constantes.

Cada dupla de alunos deverá construir retângulos que conservam a mesma altura e em seguida, calcular as áreas de cada figura, comparar os resultados obtidos e observar a proporcionalidade entre a variação da área em relação à variação da base.

5.5.3.1 Desenvolvimento da atividade

A classe foi dividida em duplas. Participaram desta atividade 39 alunos. Cada dupla recebeu a ficha da atividade 2, uma régua de 40cm e uma folha quadriculada.

Ao serem dadas as instruções iniciais pela pesquisadora, assim os alunos deveriam acompanhar as instruções fornecidas na ficha e desenhar os retângulos obtidos na folha quadriculada.

Eles iniciaram a atividade, completando a tabela adotando os números inteiros para os valores das bases dos retângulos e em seguida iam transportando essas medidas dos lados dos retângulos para a folha quadriculada, adotando uma escala para realizar sua representação (Cada dois quadradinhos representavam 1cm). Após terem concluído os desenhos das figuras, passaram a calcular o valor da área para cada uma das figuras. Esses cálculos eram geralmente feitos mentalmente. Todas as duplas associaram a tabela com a tabuada do 5, pelo motivo da altura ser constante. Todos os alunos escolheram valores de números inteiros para as bases dos retângulos. Algumas duplas cometeram alguns erros nos cálculos das áreas, cerca de 10%.(do grupo total de 39 alunos).

Em seguida, passaram a responder as questões propostas para a análise da tabela 1. Os alunos apresentaram maior dificuldade ao responderem a questão 3 e perceberem que a altura é constante.

Depois, responderam as demais questões, onde foram solicitados quais seriam os valores das bases dos retângulos cuja área era 30 cm² ou, qual seria o valor da área cuja base fosse 15 cm. A maior parte das duplas realizou os cálculos mentalmente, para depois registrarem suas respostas. Outros, preferiram apenas dar a resposta final. Mas, quando foram perguntados pela pesquisadora, eles explicavam o seu desenvolvimento: é que eu peguei o valor da área e dividi por 5 ou, em outros momentos, eu multipliquei o valor da base por 5 para determinar a área. Esses foram os comentários, em geral, de quase todas as duplas que participaram desta atividade.

Aplicamos esta atividade em três sessões de 50 minutos.

5.5.3.2 Análise da atividade baseada no referencial teórico.

Em nossos estudos analisamos os resultados de uma amostra de 20 alunos que selecionamos do grupo participante desta atividade que era composto por 39 alunos.

Nesta atividade eles mobilizaram as seguintes noções: (Ver tab.10)

Tabela 10. Conhecimentos mobilizados pelos alunos para a atividade 2.

Conhecimentos Mobilizados	Reconhecimento e identificação de figuras planas	Representação figural de quadriláteros.
Etapa inicial	Utilização de escala e unidades de medidas convencionais (cm, m, cm², m²).	Associar a linguagem matemática de base como comprimento e largura como altura.
Etapa inicial	Ativação dos conhecimentos prévios mobilizados na atividade 1.	Aplicação da expressão algébrica para a área de retângulos (A = b x h).
Etapa Final	Aplicação da proporcionalidade entre as grandezas de área e de comprimento (base)	Reconhecer o aumento e a diminuição da área e da base, associado com a noção de variável.
Etapa Final	Utilização do cálculo mental, para solucionar as questões propostas utilizando as operações envolvidas (multiplicação e divisão)	Generalização para situação proposta utilizando a fórmula geral para área de retângulo.

Durante o desenvolvimento desta atividade, notamos que os alunos não tiveram dificuldades para resolverem a situação proposta, pois, fizeram associações com a atividade 1. Dessa maneira percebemos que as características da quinta fase da Dialética ferramenta-objeto (Familiarização e reinvestimento) estiveram presentes durante esta atividade.

Além desta fase da Dialética ferramenta-objeto, apresentamos nossa análise utilizando as demais fases desta teoria de Douady.

A) Antigo, Ferramenta explícita

Nesta etapa os alunos mobilizaram os seus conhecimentos geométricos, trabalhados na atividade 1, conhecimentos aritméticos e algébricos para completarem a tabela pedida e responderem as questões propostas. (Ver tab.10 na página anterior).

Notamos uma facilidade dos alunos em mobilizarem estes conhecimentos trabalhados anteriormente e ainda associarem e aplicarem os conhecimentos aprendidos na atividade anterior. Citamos como exemplo uma das falas das duplas A e D: “Devemos calcular a área dos retângulos multiplicando a base pela altura assim como fizemos para determinar o número de peças necessárias para encontrar a área da carteira que era retangular da atividade anterior”.

Todas as duplas adotaram uma escala para fazer a representação geométrica dos retângulos (adotando dois quadradinhos para representar 1cm). Os alunos não apresentaram dificuldades nas representações geométricas.

Quando eles começaram a completar a tabela pedida, na qual deveriam escolher valores numéricos inteiros para a base e conservar o valor constante de 5 cm para a altura, eles ativaram outros conhecimentos prévios, no campo numérico e no campo algébrico, relacionando a tabela com valores da tabuada do número 5. Além disso, percebemos nos resultados analisados que 4 alunos grupo de 20 apresentaram erros nos cálculos das áreas dos retângulos. Esses 4 alunos encontravam valores não inteiros para as áreas dos retângulos multiplicando a base pela altura. Isso ocorreu porque esses alunos estavam realizando a seguinte operação: multiplicavam as duas dimensões e em seguida dividia por 2, ou seja, estavam aplicando a área de triângulo para calcular a área do retângulo. Foi perguntado para estes alunos, de onde eles haviam tirado esta idéia de multiplicar a base x altura e dividir por 2. Nenhum dos 4 alunos soube justificar sua resposta. A pesquisadora discutiu coletivamente esta resposta com os alunos, explicando que estas figuras são totalmente diferentes e não poderiam ser utilizadas para determinar a área do retângulo.

Na seqüência da atividade, os alunos mobilizaram os seus conhecimentos a respeito da proporcionalidade, variações de área e base, como também, a expressão geral para área de retângulos para responder as questões propostas, que solicitavam a determinação de outras dimensões utilizando esta fórmula.

Na tabela 11, apresentamos os resultados de cada questão proposta na atividade 2 – Variação de Área.

Tabela 11[6]. Índice de acertos e erros das questões propostas da atividade 2.

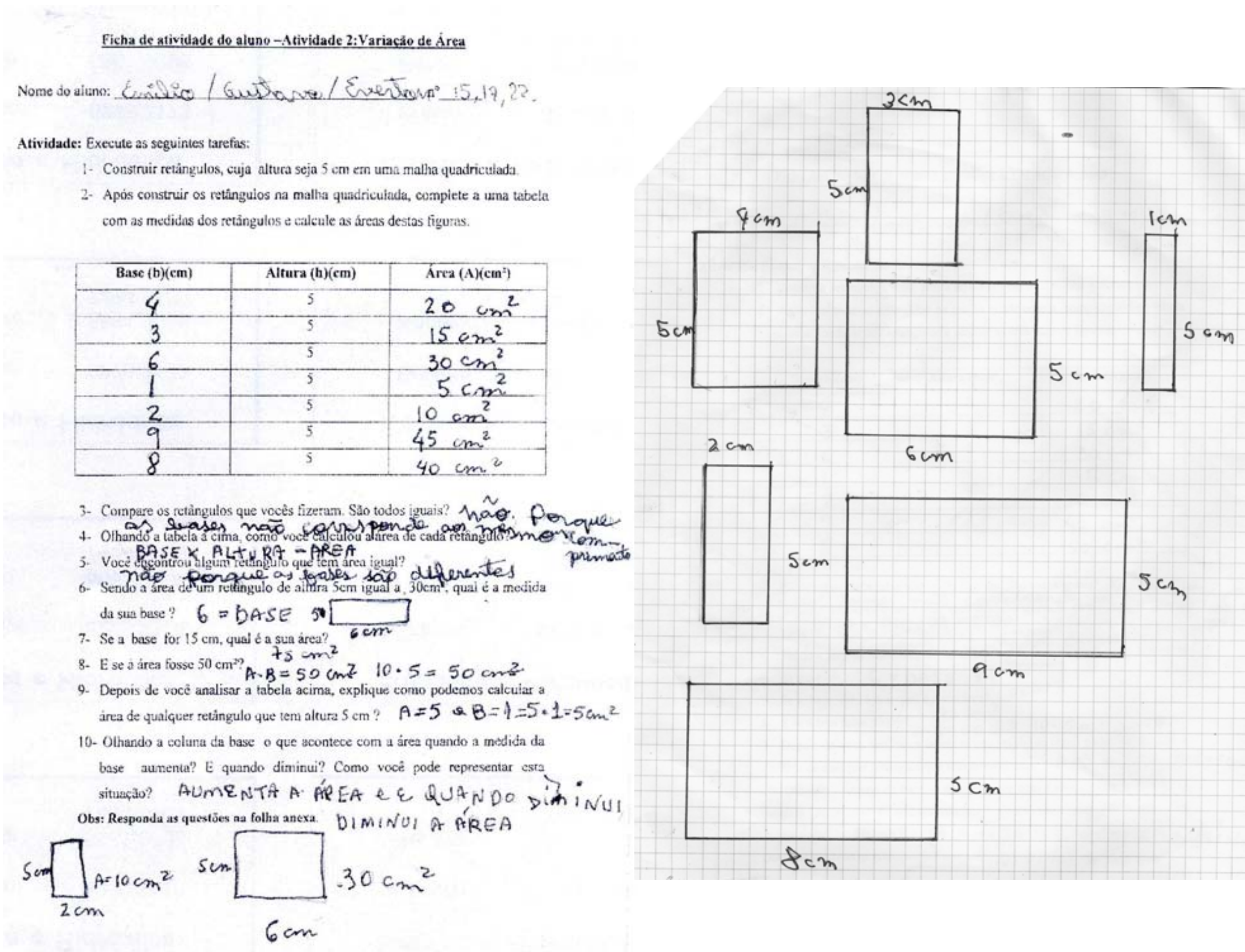
Situação proposta na Atividade 2 – Variação de Área	**Número de Alunos que responderam as questões**	**Porcentagem de acertos (%)**	**Porcentagem de erros (%)**
Construção de retângulos, cuja altura seja 5 cm. (questão 1)	20	100	-
Preenchimento da tabela e cálculo da área. (questão 2)	20	80	20
Comparação das dimensões dos retângulos. (questão 3)	20	70	30
Reconhecimento da fórmula da área de retângulo (questão 4)	20	70	30
Comparação das áreas dos retângulos. (questão 5)	20	85	15
Aplicação da fórmula da área para determinação do valor da base (questões 6, 8)	20	80	20
Generalização da fórmula da área para o caso estudado. (A = b x 5) (questão 9)	20	80	20
Perceber a noção de proporção existente entre a variação da Base e da Área (questão 10)	20	90	10

Baseando-se nos resultados apresentados na tabela 4, podemos fazer uma breve análise do grupo de alunos estudados, traçando um perfil dos conhecimentos matemáticos.

[6] FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: Foi analisada uma amostra de 20 alunos do grupo participante de 39 alunos.

Constatamos que os 20 alunos da amostra selecionada de 39 alunos, acertaram a resolução da questão 1, na qual os alunos deveriam construir os retângulos na malha quadriculada, mantendo a altura constante (h = 5 cm), conforme a Figura.1.

Ao analisarmos os resultados da questão 5, notamos que 85% dos alunos conseguiram observar a variação das áreas dos retângulos e justificar suas respostas através da variação das medidas das bases dos retângulos. Somente 15 dos alunos não conseguiram justificar a resposta, pois, não perceberam que variando a medida da base a área muda.



Ficha de atividade do aluno –Atividade 2:Variação de Área

Nome do aluno: Emílio / Gustavo / Everton nº 15, 17, 22.

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.

2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete a uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b)(cm)	Altura (h)(cm)	Área (A)(cm²)
4	5	20 cm²
3	5	15 cm²
6	5	30 cm²
1	5	5 cm²
2	5	10 cm²
9	5	45 cm²
8	5	40 cm²

3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais? não. Porque as bases não corresponde ao mesmo comprimento

4- Olhando a tabela a cima, como você calculou a área de cada retângulo? BASE X ALTURA = ÁREA

5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual? não porque as bases são diferentes

6- Sendo a área de um retângulo de altura 5cm igual a 30cm², qual é a medida da sua base? 6 = BASE 5 6 cm

7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área? 75 cm²

8- E se a área fosse 50 cm²? A·B = 50 cm² 10 · 5 = 50 cm²

9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura 5 cm? A = 5 e B = 1 = 5 · 1 = 5 cm²

10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação? AUMENTA A ÁREA E QUANDO DIMINUI DIMINUI A ÁREA

Obs: Responda as questões na folha anexa.

Figura 18. Protocolo de aluno para a representação dos retângulos da questão 1.

Percebemos que os alunos possuem uma boa noção de representação figural para figuras planas; sabem utilizar a idéia de escala para as dimensões das figuras e diferenciam as unidades convencionais de medidas (cm = centímetros, m = metros).

No preenchimento da tabela da atividade conforme apresentamos na figura 2, notamos que apenas 80% dos alunos conseguiram aplicar seus conhecimentos aritméticos por meio do cálculo mental. Isto foi possível reconhecer durante as observações feitas nas duplas participantes. Os alunos sempre utilizavam a expressão geral para a área de retângulos (A = b x h) para encontrarem os valores das áreas pedidas. Conforme nosso relato anterior apenas 4 alunos não atingiram os objetivos propostos para o cálculo da área dos retângulos, pois, utilizaram a fórmula errada para área de retângulos.

Nas questões 6 e 8, referentes aos cálculos das medidas da base ou da área dos retângulos, obtivemos dois tipos de estratégias de resolução: a utilização do cálculo mental, por meio da aplicação da fórmula geral da área de retângulos: A= b x h, ou dividir o número pedido por 5, para determinar o valor da base pedida, conhecendo-se a área da figura, ou determinar a medida da base, conhecendo-se a área por meio da multiplicação. Essas foram as maneiras utilizadas pelos alunos que discutiam entre si e realizavam esses cálculos mentalmente.

Notamos que os alunos não apresentaram dificuldades em solucionar as questões propostas, somente 4 alunos ainda não conseguiram aplicar a fórmula correta para resolver estas questões. Os objetivos propostos para esta atividade foram atingidos considerando os índices de acertos variando numa média entre 70% a 80% de acertos por questão, segundo a tabela 3, apresentada anteriormente.

Os resultados obtidos nas questões 9 e 10 apontam que 80% dos alunos conseguiram justificar suas respostas e perceberam que a área aumenta ou diminui em função da medida da base. E que podemos escrever expressões genéricas para o cálculo da área, quando uma das grandezas é constante, ou seja, em nosso caso A= b x 5, sendo a altura constante (h= 5).

Depois de discutirmos os resultados das questões propostas para esta atividade e também enumerarmos os conhecimentos mobilizados pelos alunos, mostraremos outras etapas da Dialética Ferramenta-Objeto que estiveram presentes no processo de ensino-aprendizagem desta atividade.

B) Pesquisa, novo implícito

Alguns alunos apresentaram dificuldades na resolução da atividade proposta, conforme relatamos na fase anterior, quando discutimos os conceitos mobilizados para a resolução da atividade.

Notou-se que cada dupla discutia e procurava resolver os problemas propostos através de uma discussão coletiva. Isto ocorreu, principalmente, na fase de preenchimento da tabela 1 da atividade. E, depois, para responder as demais questões.

Nestas fases de ação e de formulação, muitas vezes o progresso vem de uma mudança de quadro de trabalho (formulação numérica de problema de geometria, como também, a aplicação de uma formulação algébrica para a numérica, como no caso desta atividade).

Durante a aplicação desta atividade os alunos utilizaram os conhecimentos aprendidos anteriormente como o conceito de área de retângulos, o reconhecimento da forma geométrica, a distinção entre as grandezas de comprimento e largura, utilizando uma nova linguagem matemática, usando a palavra base para comprimento e altura para largura. Além desses saberes que foram empregados pelos alunos, notamos que eles conseguiram assimilar que para determinarem as medidas da área e da base, deveriam utilizar as operações aritméticas adequadas para solucionarem as situações propostas. Assim, adotaram a multiplicação e a divisão para encontrarem estes valores.

Os novos saberes a serem assimilados nesta atividade foram a variação da medida da área do retângulo em função da medida da base; a observação que uma das dimensões do retângulo era constante, como no caso da altura; e que a medida da área é o produto entre a medida da base e da altura.

Nesta atividade os alunos transitaram por diversos quadros (geométrico, numérico e algébrico). Iniciaram a atividade no quadro geométrico, passando para o algébrico através a aplicação da fórmula de área de retângulo, em seguida para o numérico e ao final retornam ao quadro algébrico por meio da generalização da expressão algébrica para retângulos com altura constante. Este processo de ensino descrito acima, mostra a importância da utilização do jogo de quadros desenvolvido por Douady, como um instrumento importante para a construção do conhecimento matemático, pois percebemos que estas passagens contribuíram para a aprendizagem do grupo estudado.

Em seguida, passamos para a terceira etapa da Dialética Ferramenta-Objeto, na qual apresentamos algumas observações importantes para que os alunos atinjam os objetivos específicos desta atividade.

C) Explicitação e Institucionalização local

Nesta fase os alunos aplicaram a fórmula geral para área de retângulo, procurando encontrar os valores solicitados pelas questões como: sendo a área de um retângulo de altura 5 cm igual a 30 cm², qual é a medida da base? Para que os alunos encontrassem a resposta, tiveram que acionar seus conhecimentos prévios no campo algébrico, relacionado à fórmula da área de retângulo (A = b x h), considerando h = 5 cm e a área igual a 30 cm² e, em seguida, mobilizaram o campo numérico montando as relações e aplicando seus conhecimentos operacionais utilizando as operações aritméticas (multiplicação e divisão). Durante o desenvolvimento desta atividade os alunos foram questionados como chegaram ao resultado. Vejamos alguns destes relatos:

Entrevistadora: *Como você chegou à medida da base medindo 6 cm?*

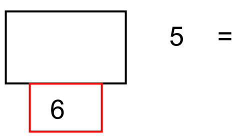
Dupla B: *Nós dividimos o valor da área do retângulo igual a 30 cm² pela altura que é 5 cm, chegando a base igual a 6 cm. b =* $\frac{30}{5}$ *= 6 cm*

Já, a dupla D quando foi questionada sobre o problema respondeu da seguinte forma:

Dupla D: *Dividimos 30 por 5 que é igual a 6. Registro da dupla D:* $30cm^2 \div 5cm$ *igual a* $6cm$

No entanto, a dupla E respondeu da seguinte maneira:

Dupla E: *Multiplicamos por 6 cm pois sabíamos que a altura media 5 cm e que 6 x 5 é igual á área dada (30 cm²). Forma de registro da dupla: A área da base é 6 pois*



Ao questionarmos os alunos a respeito dos valores encontrados para as dimensões pedidas, percebemos que esta turma utiliza-se muito do cálculo mental, ou seja, os alunos realizam as operações sem efetuar os registros no papel, colocando o resultado direto. Para analisarmos o raciocínio da turma durante os desenvolvimentos das atividades, solicitamos a estes que registrassem suas estratégias de resoluções para as questões propostas.

Conforme apresentamos os registros abaixo por meio dos protocolos dos alunos, para esta dupla não foi necessário solicitar que registrassem suas estratégias de resolução.

Ficha de atividade do aluno –Atividade 2:Variação de Área

Nome do aluno: Carlos William e Felipe Nedam nº 11 e 18

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.
2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete a uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b)(cm)	Altura (h)(cm)	Área (A)(cm²)
9 cm	5 cm	45 cm²
8 cm	5 cm	40 cm²
10 cm	5 cm	50 cm²
12 cm	5 cm	60 cm²
2 cm	5 cm	10 cm²
7 cm	5 cm	35 cm²
13 cm	5 cm	65 cm²

3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais?
4- Olhando a tabela a cima, como você calculou a área de cada retângulo?
5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual?
6- Sendo a área de um retângulo de altura 5cm igual a 30cm², qual é a medida da sua base ?
7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área?
8- E se á área fosse 50 cm²?
9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura 5 cm ?
10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

3-R- Nenhum retangulo e igual pois suas bases são diferentes mas, todas as alturas são iguais

4-R- Multiplicando a base pela altura

5-R- A área dos retangulos são todas diferentes

6-R- 6 : porque dividindo a altura do retangulo que é 5 pela sua área o resultado é 6 então sua base é 6

7R- Área e igual a base (15 cm) vezes a altura (5cm) que é igual a 75 cm.

8R- A ÷ A = B : 50 cm² ÷ 5 cm = 10 cm

A base é igual a altura que é 5cm dividida pela área 50cm² que é igual a 10. Sendo assim a base é 10cm

9R- Calcula-se a b . A = A exemplo:
3(b) . 5(A) = 15²(A)

10-R- Quando a medida da base aumenta a área tambem aumenta e quando a medida da base diminue a área tambem diminue

Ficha de atividade do aluno –Atividade 2: Variação de Área

Nome do aluno: Gilvandro de Jesus; Marco Antonio nº 19-31

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.

2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete a uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b)(cm)	Altura (h)(cm)	Área (A)(cm²)
7 cm	5	35 cm²
8 cm	5	40 cm²
15 cm	5	75 cm²
11 cm	5	55 cm²
[illegible] cm	5	45 cm²
12 cm	5	60 cm²
6 cm	5	30 cm²

3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais? Não porque eles tem medidas diferentes.

4- Olhando a tabela a cima, como você calculou a área de cada retângulo? Nós calculamos a regra base b·h=

5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual? Não porque todos tem área diferente

6- Sendo a área de um retângulo de altura 5cm igual a 30cm², qual é a medida da sua base? A área da base é 6 por 5 = 30

7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área?

8- E se á área fosse 50 cm²? 25 2 b.h = 50 cm² 2 6 = 30 b·h =

9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura 5 cm ? Usando a base · h = Ex: 6 · 5 = 30 cm²

10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação? Se a medida da altura aumenta a base também aumenta e se a altura diminui a base diminui, ou seja [illegible] [illegible] [illegible].

Obs: Responda as questões na folha anexa.

Figura 19. Protocolo de aluno da atividade 2

Percebemos que alguns alunos não têm o costume de registrar o processo de seu raciocínio. No grupo analisado, cerca de 30% das respostas mostraram que os alunos não têm o hábito de utilizar o registro matemático para justificar suas respostas, colocando apenas o resultado final, por julgarem que o cálculo mental[4], já seria suficiente para justificar a resposta. Os alunos que deram esta resposta foram questionados pela pesquisadora e pelo professor da turma, que mostraram a importância do registro matemático na resolução dos problemas propostos.

Nas questões 9 e 10, obtivemos 20% de erro nas respostas que representam os alunos que não conseguiram escrever a expressão para a área do retângulo A= b x 5 ou A = 5b e não souberam visualizar que ao aumentarmos o valor da medida da base, aumenta a medida da área ou, se diminuirmos a medida da base a área irá diminuir.

Nota-se a falta de algumas apreensões citadas por Duval (1994), segundo este pesquisador o aluno interpretará a forma da figura em uma situação geométrica, chegando à resolução do problema em análise. No grupo analisado foi constatado que 20% dos alunos tiveram dificuldade em reconhecer a forma para a situação geométrica apresentada, além de não perceberem as modificações existentes na forma da figura, quando foi perguntado se existe algum retângulo com medidas iguais, levando ao aluno a associar estas características citadas que esta figura poderia ser um quadrado.

No entanto, nota-se presente nos 80% dos alunos analisados, que as apreensões Seqüencial, Discursiva, Perceptiva e Operatória, observadas por Duval

---

[4] Cálculo mental: representa a habilidade dos alunos de realizarem as operações aritméticas utilizando o seu raciocínio mental, sem a utilização do registro matemático.

(1994), foram utilizadas pelos alunos durante todo o desenvolvimento da atividade, conforme foram descritas nas etapas anteriores.

Durante este desenvolvimento constamos que os alunos usavam diversas formas de tratamentos, tais como o cálculo numérico para determinar as áreas dos retângulos, o cálculo algébrico através da representação da expressão geral para área dos retângulos proposto no problema, assim como, também, na aplicação da fórmula geral (A = b x h), entre outros. Já as conversões estiveram presentes através da manipulação das operações aritméticas da divisão e as representações figurais.

Segundo Duval (1994), dado o enunciado de um problema, pode-se esboçar a figura geométrica, que é âncora das hipóteses (conversão da representação lingüística/ natural para a representação figural) e assim, realizar as operações matemáticas (conversão para registro algébrico ou aritmético) definidas pelo enunciado.

Na construção de um conhecimento, a representação semiótica dos registros matemáticos vincula-se às concepções prévias que o aluno tem sobre os conhecimentos em pauta. Para que este processo ocorra o professor deve ter como objetivo um sistema de ensino-aprendizagem que socialize este saber do aluno, transformando-o em um conhecimento universal sistematizado. Dessa maneira, entendemos que a partir das representações/concepções prévias dos alunos podemos transforma estes saberes prévios na construção do saber cientifico.

No parágrafo acima, mostramos a importância do registro matemático no processo de ensino-aprendizagem do aluno, como também, os pontos importantes destacados pela teoria de Duval, como as conversões e tratamentos realizados pelos alunos durante o desenvolvimento de cada atividade.

Finalizamos esta análise apresentando o desenvolvimento da quarta fase da Dialética Ferramenta-Objeto, na qual mostramos nossas discussões e conclusões sobre os resultados dos alunos obtidos na atividade e as idéias apresentadas na discussão coletiva.

D) Institucionalização, estatuto do objeto, novo implícito

Nesta etapa da Dialética Ferramenta-Objeto, a pesquisadora coletou algumas das respostas dadas pelas duplas e selecionou as principais dificuldades dos alunos enfrentadas nesta atividade e em seguida, discutiu-as coletivamente, através do painel construído com os resultados obtidos pelos alunos.

Durante a discussão das dificuldades dos alunos, deparamos com o erro cometido pelos 4 alunos da atividade anterior, que ainda estavam utilizando a fórmula de área de triângulos para o cálculo da área de retângulos. Percebendo que estes alunos não estavam conseguindo assimilar a diferença entre elas, a pesquisadora, partiu para a comparação geométricas entre as figuras, por meio das características físicas de cada figura. Em seguida discutiu com esses alunos e conjuntamente porque estas figuras são diferentes entre si, muitos alunos, que sabiam as diferenças entre as duas figuras, deram suas contribuições para esclarecer juntamente com a pesquisadora e o professor da turma, tornando mais claro para estes 4 alunos estes conceitos. Constatamos, também, que eles souberam aplicar corretamente as unidades de medidas para cada uma das grandezas pedidas, assim como, a aplicação das escalas para os desenhos e a utilização da régua. A noção de variável também esteve presente na maioria do grupo, cerca de 80% dos alunos responderam corretamente a questão proposta e participaram atentamente da discussão coletiva com a classe respondendo as questões levantadas pela pesquisadora durante o debate das respostas da atividade. Após a discussão coletiva, observamos que os alunos conseguiram institucionalizar os seguintes conhecimentos: a noção de variável, que o conceito de área é um produto entre a medida da base pela altura, as diferenças entre as unidades de medidas de comprimento e de área, noção de constante levando à construção da expressão genérica para este estudo de caso.

Percebemos que 80% dos alunos conseguiram atingir os três objetivos propostos previstos para esta atividade: verificar que a área do retângulo é o produto entre a medida da base e a medida da altura; perceber a variação da área, conservando-se uma das grandezas lineares constante e, variando a outra; constatar a relação de proporcionalidade entre a variação da área e a variação da base.

Assim, finalizamos nossos estudos a respeito dos resultados obtidos para a atividade 2 desta seqüência didática. A seguir, discutimos e analisamos os resultados da atividade 3.

5.5.4 Análise da Atividade 3 – Conservação da Área, relação entre as duas dimensões.

Esta atividade tem o objetivo de mostrar que podemos obter diferentes retângulos que conservam a mesma área.

Cada dupla de alunos deverá construir retângulos que conservam a mesma área e em seguida, comparar os valores da base e da altura identificando seu campo de variação e as restrições colocadas para o desenvolvimento da atividade; analisar a relação da área com a base e altura, associando-as como divisores do número dado, sendo que divisores desse número (corresponde ao valor da área dada), estavam restritos aos números naturais.

5.5.4.1 Desenvolvimento da Atividade

A classe foi dividida em duplas. Cada dupla recebeu um kit contendo a ficha da atividade, uma régua de 40 cm e uma folha quadriculada.

A pesquisadora deu as orientações iniciais para os alunos. Participaram desta atividade 40 alunos.

Os alunos iniciaram a atividade preenchendo a tabela 1, na qual deveriam determinar os valores para a base e a altura, cujo produto fosse igual a 24 cm^2.

Durante o preenchimento da tabela eles utilizaram todos os valores inteiros que fossem divisores do número 24. Ao se esgotarem as possibilidades com números inteiros cujo produto era 24, três das duplas A, B, D levantaram a seguinte questão para a pesquisadora: podemos agora utilizar números decimais? Já utilizamos todos os números inteiros da tabuada que multiplicados dão resultado 24. A pesquisadora, autorizou a utilização de um ou dois exemplos de números decimais ou racionais que eles conhecessem que resultassem no valor igual a 24. Então estas duplas pensaram no exemplo: 0, 5 x 48 = 24 que foi a resposta dada por 80% dos alunos que participaram desta atividade. Observou que todas as duplas utilizaram o registro na forma decimal (0,5) ao invés do fracionário $\left(\frac{1}{2}\right)$ e se restringiram apenas para a divisão pelo número 2, esquecendo-se dos outros divisores que poderiam ser utilizados $\left(\frac{72}{3}\right)$ = 24, ou seja, utilizaram poucas formas de registros para representar o resultado. Isso comprova, também, a dificuldade que os alunos tem em trabalhar com número racionais, esses resultados são comprovados nas pesquisas de Maria José Ferreira da Silva (1997), entre outros pesquisadores.

Depois, os alunos registraram os valores encontrados para a área igual a 24 cm². A pesquisadora interveio e fez uma discussão paralela relacionada à utilização de valores não inteiros, como os decimais e os racionais, já que esta questão seria levantada na discussão coletiva. A pesquisadora mostrou outros exemplos usando os números decimais e fracionários que resultavam no número pedido. Os alunos perceberam as diferentes formas de representar a área do retângulo. Além disso, fizeram relações e associações com a atividade 2, na qual eles deveriam determinar a área conservando a altura igual a 5 cm e, nesta atividade era a área que deveria ser constante e igual a 24 cm².

Os alunos completaram a tabela 1 e, na seqüência, responderam as questões sobre as variações entre as medidas da base e altura. Uma das situações proposta foi: qual seria o valor da medida da base de um retângulo cuja altura mede 12 cm? Para a questão proposta acima obtivemos as seguintes resoluções, algumas duplas responderam que o valor da base seria igual a 2 cm, pois, adotaram a seguinte estratégia, como sabemos que a área é constante e igual a 24 cm², realizamos a seguinte operação: 2 x 12 = 24 então, a base vale 2; outras duplas preferiram utilizar o processo de divisão: $24 \div 12$ = 2. Durante a execução desta atividade os alunos realizavam os cálculos mentalmente e, em seguida, registravam na folha da atividade.

Foi observado pela pesquisadora, que quando os alunos responderam as questões propostas 5, 6 e 7, eles não apresentaram muita dificuldade, por terem associado esta atividade com as atividades anteriores e assim mobilizaram a expressão algébrica para a área (A= b x h).

Finalizadas as questões propostas, a pesquisadora selecionou algumas das respostas dadas pelas duplas construindo um painel e discutindo esses resultados com a turma. Notou-se que a maioria dos alunos conseguiu responder as questões levantadas pela pesquisadora e que eles haviam percebido que nesta atividade a área era constante e que as variáveis eram a base e a altura. Todos sabiam a diferença entre múltiplo e divisor dos números o que contribuiu para o desenvolvimento da atividade e o preenchimento da tabela. A ocorrência dos erros foi muito baixa, mostrando que os conhecimentos aprendidos na atividade 2 foram absorvidos e que estes alunos perceberam a ligação entre as duas atividades.

Esta atividade foi desenvolvida em três sessões de 50 minutos.

5.5.4.2 Análise da atividade baseada na Fundamentação Teórica

A) Conhecimento antigo

Na análise dos resultados desta atividade 3, quando estamos na primeira fase da Dialética Ferramenta-Objeto, procuramos observar se os conhecimentos mobilizados pelos alunos nas atividades anteriores que contribuiriam para o desenvolvimento desta atividade. Ou seja, baseado na Dialética Ferramenta-Objeto de Douady, na 5ª fase, conhecida como Familiarização, na qual o aluno utiliza o novo conhecimento construído para resolver a questão proposta, notamos que isto ocorreu durante esta atividade, pois, a maioria das duplas fez associações entre as questões pedidas nesta atividade com a anterior e, por esse motivo, mobilizaram os seguintes conhecimentos. (Ver tabela 12)

Além disso, é válido lembrar que Douady (1986) enfatiza a necessidade da familiarização para constatar se o objeto anteriormente estudado seria reutilizado como ferramenta nas atividades propostas. Sendo assim, a construção de retângulos teve como finalidade possibilitar o desenvolvimento do raciocínio nessa atividade, por se tratar de uma figura já conhecida pelos alunos da 7ª série.

Tabela 12. Conhecimentos mobilizados pelos alunos para a atividade 3.

Conhecimentos Mobilizados	Reconhecimento e Identificação de figuras planas	Representação figural de quadriláteros.
Etapa inicial	Utilização de escala e unidades de medidas convencionais. (cm, m, cm² e m²)	Associar a linguagem matemática de base como comprimento e largura como altura.
Etapa inicial	Ativação dos conhecimentos prévios mobilizados na atividade 1.	Aplicação da expressão algébrica para a área de retângulos (A = b x h).
Etapa Final	Utilizar a noção de múltiplos e divisores do número 24 e fazer associações com a tabuada.	Reconhecer o aumento e a diminuição da base e da altura, associado com a noção de variável.
Etapa Final	Utilização do cálculo mental para solucionar as questões propostas utilizando as operações envolvidas. (multiplicação e divisão)	Observar que diferentes retângulos podem ter a mesma área.

Durante o desenvolvimento desta atividade 3, cada dupla mobilizou os conhecimentos utilizados na atividade anterior, na qual cada dupla teve que determinar as áreas dos retângulos com altura constante, além de outros conhecimentos necessários para esta atividade 3. Eles utilizaram a mesma estratégia de resolução da atividade 2, fazendo associações com as tabuadas dos números 3, 4, 6, 8, 12 e 24 que são os divisores da área constante (no caso adotamos o valor de 24 cm²).

Após os alunos terem esgotado as possibilidades com números inteiros, eles levantaram a seguinte questão: Podemos utilizar valores decimais ou fracionários para determinar outros retângulos com esta área? Muitos alunos pensaram automaticamente no valor 0,5, ao invés da sua representação fracionária $\frac{1}{2}$, para determinar a área pedida (24cm²).

Em seguida as duplas passaram a responder as questões propostas, iniciando a segunda fase da dialética.

B) Pesquisa, novo implícito

Nesta etapa, podemos constatar que os alunos não apresentaram muita dificuldade em resolver as situações propostas. Por este motivo apresentamos um quadro com os resultados obtidos e fazemos uma breve análise da atividade.

Tabela 13[6]. Índice de acertos para as questões proposta da atividade 3.

Situação proposta na Atividade 3- Variação de Área	**Número de Alunos que responderam as questões**	**Porcentagem de acertos (%)**	**Porcentagem de erros (%)**
Construção de retângulos, cuja área seja 24 cm².(questão 1)	20	100	-
Preenchimento da tabela e cálculo da área usando valores inteiros (questão 2)	20	90	10
Uso de números racionais[7] para determinação da área (questão 2 extra)	20	50	50
Comparação dos valores da base e da altura (questão 3)	20	70	30
Reconhecimento da fórmula da área de retângulo para determinação da base (questão 4)	20	100	-
Comparação entre os valores da base e da altura. (questão 5)	20	100	-
Utilização da fórmula da área para o caso estudado. (A = b x h) (questão 6)	20	80	20
Generalização da fórmula da área (b x h = 24)	20	90	10

Observa-se, pelos resultados obtidos, que os alunos apresentaram pouca dificuldade na resolução da atividade. Algumas dessas dificuldades, tais como na questão 6 na qual os alunos deveriam responder que eles utilizaram a fórmula geral da área (A = b x h) para determinar os valores da base e altura, 40% das duplas

[6] FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: Foi analisada uma amostra de 20 alunos do grupo participante de 40 alunos.
[7] Neste item foi observado o uso de valores decimais e fracionários para as medidas de base e altura, determinando a área de 24cm²

responderam que utilizaram a tabuada, outros 40% a fórmula geral e somente 20% responderam errado esta questão. Outra dificuldade apresentada pelos alunos foi quanto ao reconhecimento das medidas dos retângulos 30% não conseguiram visualizar estas grandezas como variáveis, na questão 2.

Constatamos que na questão 4, todas as duplas acertaram o resultado, utilizando três vias de resolução: utilizando a multiplicação 2 x 12 = 24, dividindo 24 por 12 = 2, ou através do cálculo mental. Quanto as respostas dadas à questão 5, notamos que os alunos tiveram maior dificuldades em justificar sua resposta, associando o retângulo de lados iguais com o quadrado, a maioria das duplas respondeu que não havia retângulos de medidas iguais e nem pensavam no caso se poderia haver. Apenas uma dupla conseguiu chegar na resposta esperada da nossa análise a priori, na qual esperávamos que eles pensassem no caso do retângulo ser um quadrado, por causa das medidas iguais. A maioria dos alunos respondeu que não havia retângulos de lados iguais e que eram todos diferentes, somente possuíam mesma área. Consideramos correto a interpretação da diferença entre os retângulos e a compreensão da área constante como corretas.

Na questão 6, obtivemos diferentes respostas que justificavam os valores encontrados para a base e a altura, 40% responderam que o método utilizado foi à tabuada e os outros 40% responderam que usaram a fórmula geral da área A= b x h. Apenas 20% não souberam responder corretamente esta questão.

Na questão 7, constatamos que 90% dos alunos conseguiram generalizar, chegando a expressão 24 = b x h, e deram diversos exemplos: 3 x 8 = 24, 4 base x 6 altura = 24, b x h = 24. Uma das duplas também generalizou as expressões para determinar o valor da base, como a dupla E, b = $\frac{24}{h}$ e h = $\frac{24}{b}$.

Dessa forma constatamos que os alunos conseguiram apresentar um rendimento de aprendizagem satisfatório com 85% de acertos, devido à seqüência didática elaborada, fazendo uma ligação entre as atividades 1, 2 e 3, que auxiliaram na aprendizagem dos alunos.

Notamos, também, que as características da 3ª fase da Dialética ferramenta–objeto estiveram presentes na 2ª fase sendo trabalhadas conjuntamente, como apresentamos nos parágrafos anteriores. Por isso não iremos descrever a 3ª fase, passando automaticamente para a 4ª fase.

C) Institucionalização – Status de objeto

Nesta etapa, a pesquisadora coletou algumas das respostas dadas pelas duplas, construindo um painel e discutindo os erros cometidos pelos alunos, levando-os a refletirem sobre as questões, como o caso da questão 5, na qual fez a comparação entre o quadrado e o retângulo, mostrando que todo quadrado é considerado um retângulo através das propriedades geométricas dos ângulos retos, pois todo retângulo tem quatro ângulos retos (ou seja 90º). Então, todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado, pois, para ser um quadrado a figura deve atender a duas condições: ter quatro ângulos retos e quatro lados de medidas iguais. Outro aspecto discutido foi sobre a questão 3, na qual alguns alunos não perceberam a questão de variável e que os valores da altura e base eram alternados, como no caso 3 para altura e 4 para base, representava um tipo de retângulo, e outro na qual 4 para altura e 3 para base era outro retângulos diferente.

Como os valores atribuídos para a base e altura ora aumentavam, ora diminuíam considerando assim, estes elementos como variáveis.

Ao final da discussão percebemos que conseguimos atingir alguns dos objetivos levantados na nossa análise a priori, que diferentes retângulos podem ter mesma área, conforme o caso estudado; que a maioria dos alunos conseguiu mobilizar conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores. Além disso, eles souberam aplicar a expressão geral para calcular a área dos retângulos e também conseguiram generalizá-la para o caso em estudo (24 = b x h). Outros aspectos, também foram observados como: os registros numéricos, algébricos e geométricos que estiveram presentes em todo o desenvolvimento da atividade, no qual percebemos os alunos transitarem pelos quadros envolvidos, do geométrico para o numérico na primeira fase, do algébrico para o numérico na segunda fase e na última fase do numérico para o algébrico.

5.5.5 Análise da Atividade 4 – Diferenciando Área de Perímetro

Esta atividade tem como objetivos: diferenciar Área de Perímetro; determinar as diferentes medidas dos lados dos retângulos tendo o perímetro constante, evidenciar que a Largura e o Comprimento são grandezas lineares; concluir que a medida da Área de retângulos é o produto das medidas dos lados, obtidos através da expressão $A = b \times h$; trabalhar com o conceito de variável, através da análise das dimensões dos retângulos formados, construir expressões algébricas que descrevam o perímetro como soma das medidas dos lados do retângulo (base, altura); traduzir numericamente as relações simbólicas distinguindo as expressões do perímetro, semiperímetro e área; verificar que a área é uma grandeza bidimensional, pela análise da mudança de unidades de medidas dos lados que estão em cm (centímetros), e chegando-se a unidade de área o cm² (centímetro quadrado).

Sabemos por meio das pesquisas de Douady (1986), Baltar (2002) e outros pesquisadores, que estes conceitos acima são considerados uma das grandes dificuldades dos alunos, pois, eles confundem estes dois objetos matemáticos.

Procuramos observar se os resultados apontados nas pesquisas citadas apareceriam nesta atividade. Além disso, estaremos observando os tipos de registros matemáticos realizados pelos alunos, baseados nas concepções da teoria de Duval e as fases da Dialética ferramenta-objeto, que fazem parte da nossa fundamentação teórica .

Na seqüência, descrevemos o desenvolvimento desta atividade.

5.5.5.1 Desenvolvimento da Atividade

A sala foi dividida em 8 grupos, totalizando 37 alunos. Cada grupo recebeu um kit contendo dois fios de arame de 50cm, uma régua de 40cm, uma folha quadriculada e a ficha da atividade.

Foi proposta aos alunos a seguinte situação-problema: deveriam construir um galinheiro retangular para suas galinhas usando 50 metros de cerca.

Esta atividade está dividida em duas partes (parte A e parte B). Na parte A os alunos devem construir cinco retângulos utilizando os fios de arame (50cm) conforme as instruções dadas pela pesquisadora no início da atividade. Os alunos devem utilizar todo o comprimento do fio para formarem os retângulos, adotando valores inteiros para as medidas da base e da altura.

Depois devem medir as dimensões dos retângulos com a régua e transferi-las para a folha quadriculada, adotando uma escala de representação, conforme as atividades anteriores e, em seguida preencher a tabela 1. Nesta parte trabalhamos com os seguintes conceitos: perímetro, semiperímetro, largura e comprimento.

Na parte B, os alunos estarão trabalhando os conceitos de área e comparando as diferenças entre área e perímetro, por meio da comparação entre as tabelas 1 e 2.

No desenvolvimento da parte A desta atividade, os grupos dividiram as tarefas entre si, dois alunos construíam os retângulos utilizando os dois fios, outros dois alunos mediam as dimensões das figuras, um aluno desenhava na folha quadriculada e o outro registrava os valores na tabela1, conforme apresentamos a seguir:

Tabela 14. Resultados retirados da tabela 1 da atividade 4 – parte A

Base (b)	**Altura (h)**	**b + h**	**C=2b+2h**
17,0	8,0	25,0	50,0
18,5	6,5	25,0	50,0
15,0	10,0	25,0	50,0
19,0	6,0	25,0	50,0
20,0	5,0	25,0	50,0

Fonte: Resultados retirados dos protocolos dos alunos da atividade 4

Para desenvolver a atividade os alunos construíam o retângulo, retiravam as medidas e registravam na tabela 1. Esse processo se repetiu durante a construção dos cinco retângulos. Após completarem as duas primeiras colunas da tabela 1, os alunos preencheram as colunas 3 e 4, utilizando as expressões fornecidas ($b+h, C=2b+2h$). Em seguida, analisaram os resultados obtidos nestas colunas, nas quais a 3ª coluna apresentava um valor constante igual a 25 cm, e a 4ª coluna um valor constante igual a 50 cm. Dessa forma os alunos fizeram associações com os fios utilizados, no qual a medida encontrada na coluna 4 representa o comprimento do fio e a coluna 3 a metade do comprimento do fio.

Para responderem as questões propostas para a tabela 1, os alunos utilizaram as seguintes estratégias: O grupo B e D utilizaram a subtração como meio para determinar os valores da base e da altura do retângulo, sabendo-se que a soma entre eles é igual a 25 cm; escrevendo a seguinte expressão h = 25 – b ou b = 25 – h. Já os grupos E e F, adotaram a estratégia da soma: se a base vale 14 cm, então a altura vale 11 cm. Notamos que todos os grupos ao analisarem os três retângulos formados, observaram que poderiam utilizar estas estratégias para encontrar os valores dos novos retângulos, assim como, para responderem as questões 6 e 7 propostas. Uma hipótese levantada pelos grupos foi à utilização de números não inteiros, com uma variação de 0,5 cm.

Os grupos A, B D e E levantaram esta hipótese da seguinte forma:

Grupo A: *Podemos também utilizar valores decimais para as medidas dos lados do retângulo?*

Entrevistadora: *Sim, poderíamos utilizar. Quais seriam os valores que vocês pensaram?*

Grupo A: *A base valendo 20, 5 cm e a altura 4,5 cm ou a altura valendo 18,5 cm e a base 6,5 cm. Variando de meio em meio.*

Os relatos do grupo A foram idênticos aos demais grupos citados, mudando apenas nos exemplos dados. A pesquisadora que pretendia discutir a hipótese de utilizar os números racionais positivos como unidade de medida, no final da atividade, teve que intervir na classe levantando essa discussão coletiva, durante o desenvolvimento da atividade, mostrando os exemplos dos outros grupos para esta situação e dando outros exemplos possíveis para as dimensões dos retângulos, utilizando os valores decimais e ampliando para os fracionários .

Depois desta discussão, os grupos retornaram à atividade respondendo as questões e terminando os desenhos na malha quadriculada.

Ao responderem a questão 10, da parte A desta atividade, os alunos apresentaram dificuldade em escrever uma nova expressão partindo-se das duas expressões dadas para o cálculo dos valores da coluna 3 e da coluna 4.(b + h, C = 2b + 2h). Apenas dois grupos conseguiram escrever a expressão: o Grupo B, que, aplicando a propriedade distributiva para relacionar as duas expressões C = 2 x (b+

h) e o Grupo D : b+ h = $\frac{C}{2}$. O grupo E somente percebeu que um representava a metade do outro, mas, não chegou a registrar a expressão. Apenas estes grupos conseguiram chegar à resposta correta. Os demais não conseguiram expressar esta idéia algebricamente.

Na seqüência, os alunos passaram a resolver as questões propostas para parte B da atividade, transferindo os valores da tabela 1 para a tabela 2 e calculando a área dos retângulos. Ao terminarem os cálculos, eles responderam as questões referentes à tabela 2.

Na primeira questão o grupo deveria definir o que era área para eles; sendo assim a maioria dos grupos respondeu que era uma região interna da figura e também fizeram uma relação com a fórmula geral da área de retângulos A = b x h e dando como exemplos as áreas do retângulo e do quadrado.

Os grupos calculavam os valores das áreas dos retângulos utilizando sua fórmula geral, aprendida nas atividades anteriores da seqüência didática. Para responder as demais questões propostas na parte B, os alunos utilizavam-se também do cálculo mental, colocando a resposta direta, quando eram questionados a respeito de suas respostas justificavam da seguinte forma: multiplicamos o valor da base pela altura e encontramos a área, ou dividimos o valor da área pela altura ou pela base. Outros grupos já escreviam a expressão que utilizavam para encontrar os valores pedidos, mobilizando os conhecimentos aprendidos nas atividades antecedentes a esta, que ajudaram na resolução do problema proposto. Sendo assim, os alunos utilizavam as seguintes expressões $b = \frac{A}{h}, h = \frac{A}{b}$ ou escreveram 12 = 6 x h, onde h = 2 cm, que dá doze.

Quando os alunos terminaram de responder a questões da parte B, a pesquisadora coletou alguns dos resultados obtidos da parte A da atividade e discutiu-as coletivamente. Depois, passou a recolher os resultados para as questões propostas na parte B, discutindo as dificuldades e os erros cometidos nesse trajeto. Analisando os resultados obtidos na parte A, percebemos que os alunos apresentaram maior dificuldade em escrever as expressões algébricas equivalentes para as duas expressões dadas nas colunas 3 e 4 da tabela 1. Dessa forma, a pesquisadora demonstrou como poderíamos escrever as expressões equivalentes para este caso e também ampliou esta discussão para outros casos da matemática. Além disso, destacou a importância da utilização da propriedade distributiva, que apesar da turma saber o que representava esta propriedade a maioria não conseguiu visualizá-la e aplicá-la para solucionar a questão proposta. Foram apresentadas as seguintes expressões algébricas para a discussão coletiva : $C = 2 \times (b + h)$, mostrando aos alunos a propriedade distributiva; em seguida foi discutida a utilização da letra W como variável a ser utilizada para representar a expressão b +h e, foi relatado aos alunos que eles poderiam ter escolhido outra letra do alfabeto diferente das já utilizadas. Sendo assim, podemos relacionar as duas expressões da seguinte forma: W = $\frac{C}{2}$ ou poderíamos escrever $C = 2 \times W$.

Após apresentarmos as expressões, levantamos a seguinte questão: o que seria perímetro para eles? E, como poderíamos calcular o perímetro desses retângulos? Alguns alunos responderam da seguinte maneira : somando os lados dos retângulos ($P = 2b + 2h$), 70% deram esta resposta e, 10% responderam, ($P = b \times h$), outros multiplicando a base pela altura ($P = b \times h$). Deram esta resposta 20% dos alunos, então os alunos que haviam respondido que o perímetro é a soma dos lados, corrigiram os colegas, dizendo que esta expressão estava errada, pois, era a fórmula da área. A pesquisadora explicou que os dois conceitos eram diferentes, pois, o perímetro é determinado pela soma de todos os lados da figura, dando exemplos dos retângulos, trapézios, triângulos, e outras figuras. Além disso, pediu oralmente para que a sala escrevesse uma expressão para o retângulo desenhado no quadro negro, tendo base igual v e altura igual a t, os alunos, oralmente responderam $P = 2v + 2t$ em seguida ela solicitou que eles comparassem com a expressão da coluna 4 da tabela 1. $C = 2b + 2h$.

Sendo assim, os alunos perceberam que as duas expressões eram iguais, e que eles haviam calculado o perímetro dos retângulos e que todos estes possuíam um perímetro igual. Depois, a pesquisadora perguntou aos alunos o que representaria a expressão b+h? Os alunos responderam que representa a metade do valor do perímetro.

Então a pesquisadora explicou que esta expressão representa o semiperímetro, ou seja a metade do valor do perímetro, e esclareceu as dúvidas dos 10% que responderam que o perímetro é a soma apenas de dois lados.

Em seguida, a pesquisadora coletou os resultados obtidos na tabela 2, da parte B da atividade, discutindo as respostas dadas para o que seria área para eles. Depois perguntou como eles calcularam os valores das áreas? E todos disseram que foi pela expressão geral. Em seguida levando a seguinte questão: Podemos ter retângulos com perímetros iguais e áreas iguais? Para que os alunos conseguissem responder esta questão a pesquisadora pediu que os alunos comparassem os valores encontrados nas tabelas 1 e 2 e, observassem os resultados obtidos. A maioria da sala respondeu que não; 70% dos alunos conseguiram relacionar os conhecimentos aprendidos na atividade 3 com área constante com esta questão verificando que nesta o perímetro era constante (50cm) e que, na atividade 3 a área era constante (24cm²); notando que no caso desta atividade todas as áreas eram diferentes. Por este motivo, não era possível conservar o perímetro constante e a área também. Somente 30% conseguiram fazer relações entre o perímetro constante e área diferente, através da análise das tabelas. Coletadas as respostas dos alunos, referentes à hipótese levantada, a pesquisadora discutiu os resultados com os alunos e deu alguns exemplos no quadro, mostrando que não é possível conservar os dois.

Ao final da discussão, a pesquisadora mostrou que os conceitos de Perímetro e Área são diferentes, e que suas unidades de medidas também. O Perímetro é obtido pela soma de lados da figura e utiliza as unidades de centímetros, metros entre outras que são consideradas lineares. Já o conceito de Área é o produto entre duas grandezas: o comprimento (Base) e a largura (Altura), utilizando-se como unidades de medidas o centímetro quadrado (cm²) e o metro quadrado (m²), podendo, assim, ser consideradas unidades bilineares. Assim, o Perímetro é uma grandeza unidimensional e a Área é uma grandeza bidimensional.

Para o desenvolvimento desta atividade foram utilizadas 6 sessões de 50 minutos.

5.5.5.2 Análise da atividade baseada na Fundamentação Teórica

Ao analisarmos os resultados obtidos nesta atividade procuramos descrever as fases da Dialética ferramenta-objeto, os quadros envolvidos no desenvolvimento da atividade, assim como, as formas de registros e representações dos alunos. Estudo do lado cognitivo dos alunos, estratégias de resolução e erros e dificuldades apresentadas pelos alunos durante o decorrer da atividade. Procurando assim, verificar se nossa fundamentação teórica composta pela Dialética Ferramenta-Objeto de Douady (1986) e a Teoria de Registros e Representação Semiótica de Duval (1993), estiveram presentes.

Nesta atividade notamos a presença das 4 fases da Dialética Ferramenta-Objeto: Conhecimento Antigo, Pesquisa do novo implícito, Explicitação e Institucionalização Local e Institucionalização Status objeto. Os quadros envolvidos nesta atividade: Geométrico, Algébrico e Numérico.

Apresentamos, a seguir, nossa análise dos resultados através das fases da Dialética.

A) Conhecimento Antigo

Nesta etapa os alunos mobilizaram os seguintes conhecimentos matemáticos (ferramentas) para resolverem a situação proposta, que apresentamos na tabela 14 a seguir:

Tabela 15. Conhecimentos mobilizados para a atividade 4

Conhecimentos Mobilizados	Reconhecimento e Identificação de figuras planas	Representação figural de quadriláteros.
Etapa inicial	Utilização de escala e unidades de medidas convencionais. (cm, m, cm² e m²)	Associar a linguagem matemática de base como comprimento e largura como altura.
Etapa inicial	Ativação dos conhecimentos prévios mobilizados nas atividades 2,3.	Aplicação das expressões algébricas dadas para o semiperímetro (b+h), e Perímetro (C = 2b+ 2h)
Etapa inicial (Parte A)	Ativar os conhecimentos no quadro numérico, para o algébrico, para determinar o valor numérico do Perímetro e Semiperímetro, proposto na parte A da atividade.	Reconhecer o aumento e a diminuição da base e da altura, associado com a noção de variável.
Etapa Final (Parte A)	Escrever uma expressão algébrica equivalente as duas expressões utilizadas (C = 2b+ 2h e b+h)	Escrever uma expressão algébrica que determine os valores da base e da altura. (b = 25 – h)
Etapa inicial (Parte B)	Ativar os conhecimentos matemáticos trabalhados nas atividades 2 e 3.	Utilizar a expressão geral para área de retângulos (A = b x h)
Etapa Final (Parte B)	Utilização do cálculo mental para solucionar as questões propostas utilizando as operações envolvidas. (multiplicação e divisão)	Observar que os diferentes retângulos podem ter áreas diferentes.

Através da tabela 14 da atividade, mostramos alguns dos conhecimentos mobilizados pelos alunos durante as etapas iniciais e finais das partes A e B, que os levaram a diferenciar os conceitos de Perímetro e Área e a escreverem novas expressões algébricas para resolverem as situações propostas.

Notamos que a utilização do material concreto auxilia os alunos na construção do conhecimento e tornando a aprendizagem mais significativa.

Durante o desenvolvimento da atividade, na qual os alunos manipulavam o material concreto (o fio), eles mobilizaram seus conhecimentos geométricos quanto à forma, características, dimensões e visualização do problema. Nesse caso encontramos os traços, tanto da teoria de Douady (1986) como das concepções apresentadas na teoria de Duval (1994).

Para resolverem a parte A da atividade percebemos que os alunos utilizaram como ferramentas para solucionar a questão, os conhecimento geométricos como a forma, reconhecendo a forma retangular, depois a interpretação da linguagem matemática no enunciado do problema. Dessa forma, eles foram construindo as figuras pedidas. Após construírem os retângulos pedidos, executaram sua representação figural acionando os seus conhecimentos em relação ao campo geométrico com o numérico, adotando o sistema de escala e a unidade de medida para representar a figura criada. Em seguida, eles ativaram seus conhecimentos geométricos identificando os conceitos de base e altura, passando para o campo algébrico por meio da interpretação da expressão algébrica; depois mobilizaram seus conhecimentos no campo numérico utilizando os seus conhecimentos aritméticos por meio dos cálculos dos valores numéricos das colunas da tabela 1. Esse processo de ativação de conhecimentos prévios também ocorreu durante o desenvolvimento da parte B, quando os alunos preenchiam a tabela 2, utilizando a expressão algébrica geral para área de retângulos.

Nesta etapa pudemos observar, tanto no desenvolvimento da parte A como na B, como funciona a transformação do pensamento algébrico em numérico e, quais foram as dificuldades dos alunos neste processo, além de verificarmos alguns dos aspectos e erros apontados nas pesquisas de Kieran (1989), Baltar (2000), Kuchemann (1981), Booth (1984), entre outros.

Podemos constatar que os alunos fizeram uma seleção de ferramentas para utilizarem na resolução da questão proposta, por meio dos conhecimentos matemáticos construídos anteriormente.

Percebemos, que durante a aplicação da seqüência didática, os alunos conseguiram elaborar suas estratégias de resolução para o problema proposto, utilizando os conceitos construídos nas atividades anteriores, isto nos mostra que estes saberes, de fato foram assimilados pelos alunos, contribuindo para o desenvolvimento do seu lado cognitivo.

Na próxima fase da Dialética, apresentamos a tabela 15 com os resultados obtidos com esta atividade, onde apontamos e discutimos as dificuldades dos alunos durante o seu desenvolvimento.

B) Pesquisa do Novo Implícito

Durante esta etapa, os alunos apresentaram algumas dificuldades no decorrer do processo de desenvolvimento da atividade, nas questões 9 e 10 da parte A, onde os alunos deveriam construir uma nova expressão equivalente as duas expressões dadas.

A seguir apresentamos os resultados desta atividade na tabela 15 e, logo após, abordamos quais foram os erros cometidos pelos alunos. Selecionamos para serem analisados os resultados de 4 grupos compostos por 5 alunos (numa amostra de 20 alunos).

Procuramos verificar alguns conceitos e noções que foram mobilizados durante a resolução dos problemas propostos aos alunos no decorrer desta atividade, como, também, os conceitos de Perímetro e Área.

Vejamos agora os resultados da atividade na tabela 15, a seguir:

Tabela 16. Análise dos resultados da atividade 4

Questões da Atividade 4	**Número de alunos analisados**	**Quantidade de acertos (%)**	**Quantidade de erros (%)**
Construção de Retângulos e suas representações geométricas. (questões 1 e 2 da parte A)	20	100	-
Aplicações numéricas nas expressões algébricas (b+ h, C = 2b + 2 h)	20	100	-
Diferenciar variável de constante, por meio da análise das colunas 1, 2, 3, 4 da tabela 1.	20	100	-
Determinação dos valores da base e da altura por meio da generalização de expressões algébricas. (b = 25 – h, h = 25 – h, b+ h =25)	20	100	-
Escrever expressões equivalentes para as expressões utilizadas nas colunas 3 e 4 da tabela 1, parte A	20	50	50
Mobilização da fórmula de área de retângulos (A= b x h) Tabela 2 – parte B	20	100	-
Aplicação da fórmula da área para a determinar a medida da base, altura e área.	20	90	10
Reconhecimento das operações aritméticas e generalização da expressão da área de retângulos	20	100	-
Reconhecer o conceito de Perímetro	20	80	20
Reconhecer o conceito de Área	20	80	20
Reconhecimento e aplicação da propriedade distributiva.	20	50	50

Através dos resultados apontados na tabela acima, constatamos que, apesar de termos obtido alguns resultados consideráveis para as questões propostas, notamos que os alunos ainda possuem dificuldades em diferenciar estes dois conceitos e, também, na aplicação e reconhecimento das propriedades aritméticas, tais como: a distributiva, que teve um índice baixo (50%). Além disso, também, os alunos apresentaram dificuldades em escrever novas expressões algébricas equivalentes às utilizadas, exigindo assim novos métodos de ensino para estes conceitos, a fim de que os alunos compreendam melhor.

C) Explicitação e Institucionalização Local

Durante o desenvolvimento desta atividade notamos que esta fase ocorreu conjuntamente com a fase anterior, pois, os alunos trocaram informações entre si, e levantaram hipóteses para as situações propostas, além de fazerem associações dos elementos pedidos nesta atividade com as atividades 1, 2 e 3. Essas características apresentaram-se da seguinte forma: todos os grupos mobilizaram os conhecimentos construídos nas atividades anteriores, como a expressão geral para área de retângulo, as formas retangulares, as grandezas comprimento (base), largura (altura), que contribuíram para a resolução do problema proposto como também, deixaram os alunos mais seguros para construir a estratégia que os levaria a encontrar a resolução do problema.

D) Institucionalização – status de objeto

No decorrer do desenvolvimento da atividade, a pesquisadora teve que antecipar alguns dos conceitos a serem discutidos na etapa coletiva, conforme citamos na etapa 2 da Dialética ferramenta-objeto, pois, os alunos levantaram uma das hipóteses: o uso dos números decimais e fracionários como medidas dos lados dos retângulos. Quando a pesquisadora fez a institucionalização, ela coletou outros resultados apresentados pelos grupos, oralmente, registrando em um painel. Em seguida, perguntou aos grupos o que seria perímetro para eles? Foram dadas três respostas: Perímetro é a soma de dois lados da figura; Perímetro é a soma de todos os lados da figura; Perímetro é a multiplicação da base pela altura. Após, apresentadas estas respostas, a pesquisadora perguntou quais delas estariam corretas?

Dos nove grupos formados, 6 responderam que a segunda resposta estaria correta, dois grupos acharam que a primeira estaria correta, e apenas 1 grupo achou que a terceira estaria correta. Neste momento, houve uma troca de opinião entre o Grupo A e B, em relação ao grupo F, que achava que o perímetro era a multiplicação entre a base e a altura. Os alunos corrigiram automaticamente os colegas dizendo, que a resposta do grupo estava incorreta, pois, isto era para determinar o valor da área e não do perímetro, como nós tínhamos resolvido a atividade 3 da aula anterior. A pesquisadora utilizou-se das idéias apontadas pelos alunos dos grupos A e B, que poderíamos definir o conceito de Perímetro como sendo a soma de todos os lados de uma figura, dando exemplos dos perímetros de outras figuras como triângulos, trapézios, quadrados e outras formas irregulares. Em seguida, aproveitou e discutiu o conceito de área e, o que seria área para eles e, porque eles estavam utilizando a área como sendo a multiplicação da medida da base pela altura.

Os alunos mobilizaram os conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores, como trabalhar com a medida da base e altura conservando a área, e sabendo-se que a área do retângulo é obtida pela multiplicação da medida da área pela medida da altura, conseguiram, dessa forma, resolver as questões propostas nessa atividade, onde, na parte A deveriam somar as duas dimensões chegando nos conceitos de perímetro e semiperímetro. Já, na parte B utilizaram o conceito direto de área, calculando o produto entre as duas dimensões. Além disso, quando representamos o retângulo, podemos constatar o valor obtido para a área pela quantidade de quadradinhos que há no interior da figura. Segundo a explicação dos alunos acima, notou-se que eles relacionaram o conceito de área através da expressão geral e também por meio da representação figural, que se tornaram ferramentas importantes para construírem novas estratégias de resolução para os problemas propostos.

Ao final da discussão, percebemos que a classe conseguiu atingir a maioria dos objetivos propostos para esta atividade, como diferenciar os conceitos de Perímetro e Área, e aplicar corretamente este conhecimento na resolução da atividade. Também, podemos constatar que realmente as dificuldades apontadas nas pesquisas de Douady (1986), Baltar (2000), Facco (2003), entre outros, ainda persistem, seja em países como o Brasil e a França. Essas dificuldades podem variar de acordo com a estrutura do grupo analisado. Em nosso caso, notamos algumas dessas dificuldades apontadas por elas, como confundir-se ao utilizar o conceito de área para determinar o valor do perímetro. Já o erro das unidades de medidas entre os dois conceitos não ocorreu, pois, todos sabiam quais eram as unidades para cada um dos conceitos.

Em relação aos registros, os alunos sabiam fazer suas representações corretamente, conforme solicitado na atividade. Somente ao responderem a questão 10, eles tiveram maior dificuldade na construção de uma expressão equivalente para as duas expressões utilizadas na tabela 1, da parte A, da atividade.

A seguir, apresentamos os resultados da atividade 5, analisamos essencialmente os conhecimentos mobilizados pelos alunos para resolver esta atividade, baseados nos objetos construídos nas atividades anteriores, como os alunos transitam do campo algébrico para o numérico e, como eles interpretam a linguagem matemática utilizando o simbolismo algébrico.

5.5.6 Análise da Atividade 5 – Trabalhando com Variáveis

Na análise dos resultados obtidos para esta atividade procuramos observar como se dá a passagem do pensamento algébrico para o numérico e vice-versa, procurando diferenciar as expressões algébricas entre si, como os problemas apontados nas pesquisas da comunidade científica, tais como: $2x$ da expressão x^2, que é apontado como uma das grandes dificuldades dos alunos e, também, como o aluno aplica e utiliza as propriedades aritméticas. Estamos interessados em observar como eles compreendem os registros matemáticos, baseados na teoria de registros e representações semióticas de Duval.

Apresentamos, a seguir, o desenvolvimento da atividade 5 e, também, comentamos os erros e as idéias apresentados pelos alunos durante a aplicação.

5.5.6.1 Desenvolvimento da Atividade

A turma foi dividida em duplas, das quais 18 delas (36 alunos) participaram desta atividade. Cada uma recebeu a ficha da atividade 5, contendo três exercícios.

A pesquisadora deu as instruções iniciais para os participantes, que em seguida, começaram a responder o exercício 1, o qual pedia que os alunos escrevessem as expressões algébricas que determinavam o comprimento C do fio. Todas as duplas fizeram associações com a atividade anterior, na qual tinham que somar a medida do comprimento com a medida da largura. Todos não apresentaram dificuldades na resolução deste exercício e escreveram as seguintes expressões: $a + b$; $x + x = 2x$; $x + y + z$, entre outros. Notamos que todos os alunos chegaram à conclusão que cada letra representava uma parte do fio C, podendo assumir valores iguais como x +x, ou diferentes com x +y + z.

Na seqüência, resolveram o exercício 2, no qual deveriam completar as duas tabelas com as expressões algébricas, onde deveriam aplicar seus conhecimentos algébricos e numéricos, ou seja, passar do quadro algébrico para o numérico, através das operações aritméticas. Os alunos partiam da concepção de que o comprimento do fio é 10 cm e estava dividido em duas partes X e Y, conhecendo-se o valor de X, eles deveriam encontrar o valor de Y (outro segmento).

Ao completarem a tabela 1, os alunos não apresentaram dificuldades, pois, todos utilizaram a expressão $Y = 10 - X$, para encontrarem o valor pedido. Depois passaram a calcular os valores numéricos das expressões dadas. Durante a execução dos cálculos aritméticos para completarem as colunas da tabela 1, os alunos não apresentaram dificuldades nas operações de adição e subtração, pois, associaram as expressões com a atividade 4, como a expressão x + y, com a expressão b + h, e aplicaram a multiplicação, por meio da expressão $X \bullet Y$, relacionando esta expressão com a da área de retângulos b x h. Também observamos que os alunos souberam interpretar as expressões 2x e x^2, na primeira os alunos dobravam o valor de x, e na segunda eles elevavam ao quadrado, ou seja, multiplicando o número por ele mesmo. A maioria conseguiu completar corretamente as colunas, apenas 6 alunos não conseguiram diferenciar as duas expressões, como os erros apontados nas pesquisas de Kieran (1989), Booth (1984), Baltar (2003), entre outros. Notamos que esta confusão entre a aplicação das duas expressões citadas acima, continuam ocorrendo, pois, os alunos continuam duplicando o valor de x, na expressão x^2, ao invés de multiplicar este valor por ele mesmo, ou seja, para estes alunos as expressões 2x e x^2 são a mesma coisa.

Durante o desenvolvimento da atividade constatamos o erro, comparando os resultados das duas colunas, como no exemplo citado x = 1, 5 para a coluna x^2 . Estes alunos colocavam como resposta 3, pois, realizavam a operação 2 x 1,5 =3, ao invés de 1,5 x 1,5 = 2,25. Vendo esta situação a pesquisadora interviu perguntado a estas duplas: Por que x^2 para este valor era igual a 3? Então as duplas responderam que era só pegar o expoente dois e multiplicar pelo número. Este tipo de resposta é comum de se encontrar para este tipo de aluno que ao invés de elevar o número ao quadrado, multiplica o expoente pela base. A pesquisadora retomou a questão dos valores obtidos e explicou o que representa a expressão x^2, utilizando como ferramenta a Geometria, através da área do quadrado. Ela levantou as seguintes questões com esses alunos, como se calcula a área do quadrado? Qual é a característica do quadrado? Qual é o valor do lado? E assim chegou a expressão $x^2 = x.x$. Em seguida, deu exemplos numéricos, mostrando o que representava esta expressão e a diferença dela com a outra. Além disso, ela relembrou a 5ª operação aritmética a potenciação com os alunos, como também estendeu isso para o caso do x^3, relacionando a questão do volume e suas unidades.

Após esta discussão os alunos terminaram o preenchimento da tabela 1, e passaram a responder as questões referentes às expressões algébricas trabalhadas na tabela. Percebemos que na questão referente à expressão x^2 os erros dos alunos diminuíram; apenas 3 alunos persistiram no erro ($x^2 = 2x$).

Em seguida, os alunos passaram a preencher a tabela 2, na qual trabalharam com expressões diferentes da tabela 1, mas, existia uma relação entre elas, tais como : a expressão 2x + x, tinha uma relação com as colunas 1 e 3 da tabela 1 ou, que aos alunos poderiam perceber que multiplicando o valor da coluna 1 por 3 obteriam o valor desejado. Durante a resolução desta questão proposta, os alunos optaram pelas seguintes estratégias de resolução: somar os valores de $x + 2x$, adotado por 80% da turma. No entanto, a opção de resolver a expressão dada chegando a resposta $3x$, e ver que multiplicando os valores da coluna 1 da tabela 1 por 3, encontramos os valores para a expressão $x + 2x$. Apenas 20% dos alunos conseguiram perceber esta equivalência entre as expressões. Através desta observação, podemos constatar que os alunos apresentam dificuldades em visualizar as equivalências entre as expressões e outros recursos que podemos aplicar para encontrar o resultado pedido.

Na tabela 2 notamos que as expressões nas quais os alunos apresentaram maiores dificuldades foram $4x^2$ e $2x + 3y$, pois, não perceberam que deveriam multiplicar a coluna 5 da tabela 1 (x^2) por 4, para determinar a coluna da tabela 2. Já na segunda expressão a dificuldade ocorreu na questão de triplicar os valores de y.

Porém, os alunos conseguiram resolver com maior facilidade as expressões $3xy$ e $5x - 3y$, associando os valores ao triplo do valor de xy e, depois multiplicando por 5 os valores de x e por 3 os de y e em seguida subtraindo os valores.

Ao completar a tabela 2, a pesquisadora discutiu os resultados obtidos nas tabelas 1 e 2, comparando as operações e as questões de equivalência entre as expressões, a questão de quadrado, dobro e triplo de um número. Além disso, perguntou oralmente aos alunos, como poderíamos escrever expressões que representassem o dobro de um número? Triplo? Diferença entre dois números, etc.

Em seguida, pediu aos alunos para que respondessem a atividade complementar, na qual deveriam escrever as expressões algébricas pedidas, de acordo com as sentenças dadas.

Notamos que os alunos tiveram dificuldades em responder estas sentenças, pois ativaram, provavelmente, os seus conhecimentos numéricos, ao invés de utilizarem letras para construírem as expressões algébricas. Isto ocorreu porque não prestaram atenção nas orientações para esta atividade, na qual a pesquisadora havia dito que para construir expressões algébricas utilizamos letras que podem assumir diferentes valores numéricos.

Acreditamos que esse tipo de erro, pode ter ocorrido, porque estes alunos durante algum tempo, estiveram submetidos a um sistema mecânico de ensino-aprendizagem, do estilo “siga o modelo”, deixando de interpretar o que era pedido.

Então, neste caso, quando eles leram o enunciado do exercício complementar: *escreva as expressões algébricas* não associaram o fato que deveriam utilizar letras a invés de números, dessa maneira, quando era pedido o dobro de um número, eles adotavam um valor numérico e determinavam o valor dobrado, dessa forma erravam as questões. Foi o que notamos em 60% da turma, que começou o exercício utilizando números. No momento constatamos que algumas duplas não tinham compreendido o enunciado do problema, ou seja, o termo sentença algébrica, sendo assim, deveriam utilizar letras ao invés de números. A pesquisadora salientou a diferença entre numérico e algébrico. Assim, os alunos puderam compreender as diferenças entre ambas.

Alguns dos alunos compreenderam que estavam dando respostas erradas para o exercício e procuraram escrever as expressões utilizando letras, de modo que o erro, que era de 60% dos alunos, foi reduzido para 20%. Somente 40% dos alunos conseguiram determinar as expressões algébricas utilizando as letras.

Ao final do exercício a pesquisadora retomou a discussão para esta atividade, mostrando, novamente, as diferenças e dando exemplos orais e questionando os alunos oralmente.

A atividade foi desenvolvida em 4 sessões de 50 minutos.

5.5.6.2 Análise dos resultados da atividade

Para analisarmos os resultados obtidos para esta atividade, escolhemos uma amostra maior para ser analisada sendo formada pelos 36 alunos, por terem apresentados algumas respostas interessantes para esta atividade.

Notamos que a teoria de Duval, esteve presente durante todo o processo de desenvolvimento da atividade, por meio da interpretação dos registros matemáticos realizados pelos alunos. A transformação do pensamento algébrico em numérico ocorreu de maneira adequada durante a aplicação das atividades propostas. Apenas na atividade 2, com as tabelas os alunos apresentaram mais dificuldades.

Já na atividade complementar, na qual os alunos deveriam fazer uma representação algébrica ao invés da numérica, deparamos com a dificuldade de interpretação da linguagem matemática, o que ocasionou um baixo rendimento nesta atividade.

Para apresentarmos os resultados obtidos desta atividade e discutirmos os erros dos alunos, montamos a tabela 17.

Tabela 17. Resultados dos exercícios propostos na atividade 5

Tipos de Expressões dadas na atividade 5	**Número de alunos analisados**	**% Acertos**	**% Erros**
Expressões do exercício 1: a +b ; x + x =2x; x + y + z	36	100	-
Expressões da Tabela 1.			
1) Valor de Y= 10 - X	36	100	-
2) 2 x	36	100	-
3) 10 - X	36	100	-
4) X^2	36	88	12
5) X + Y	36	100	-
6) X • Y	36	100	-
Questões referentes as diferenças entre as expressões: 2 X e X^2	36	72	28
a) Como você calculou o valor de X^2?			
Resposta: multiplicando x. x = X^2			
b) Como você calculou 2x?			
Resposta: x + x = 2x		57[6]	28
Resposta 2. x		15	
c) as expressões 2x e X^2 são diferentes?	36	72	28
Expressões da Tabela 2.	36		
a) 2x + x		100	-
b) 2x + 3y		100	-
c) $4x^2$		11	89
d) 3xy		100	-
e) 5x – 3y		100	
Resultados da atividade complementar	36	78	22

Fonte: resultados obtidos dos protocolos dos alunos

Constatamos, pelos resultados obtidos, que os alunos possuem uma grande dificuldade na compreensão da linguagem matemática, como também, na forma de interpretar as expressões algébricas. Segundo os resultados obtidos nas questões propostas na atividade complementar, percebemos que as expressões da tabela 2 ($4x^2$ e 5x - 3y) foram as que os alunos apresentaram maior dificuldade em interpretar e realizar as transformações numéricas. Tornando evidente que os alunos ainda apresentam certa dificuldade em transitar do campo algébrico para o numérico, ocasionadas, provavelmente, pela falta de estrutura de conhecimentos matemáticos nos campos da aritmética e no campo algébrico. Podemos dizer que alguns alunos

[6] A porcentagem de acerto continua sendo 72%, sendo dividida nas respostas (x+x =2x (57%) e 2. x (15%)

do grupo analisado não conseguem aplicar e reconhecer as propriedades aritméticas, como também, identificar as propriedades aplicadas nas operações que envolvem a potenciação e a multiplicação, como no caso das expressões algébricas apresentadas anteriormente e que tiveram um baixo índice de acertos.

Ao analisarmos a execução das questões propostas na atividade complementar na qual os alunos deveriam escrever as expressões algébricas correspondentes ao que se pedia, notamos que algumas duplas apresentaram facilidade em trabalhar com números ao responder as questões, ao invés de utilizarem as letras, ou seja, a linguagem simbólica. Vendo esta situação a pesquisadora propôs a estes alunos que procurassem utilizar letras para construir as expressões que respondiam as questões e, em seguida, deveriam verificar se esta era verdadeira, atribuindo um valor numérico para as letras utilizadas. Então, estes alunos, após terem escrito as expressões algébricas, substituíam as letras por um valor numérico e executavam os cálculos, verificando se a expressão escrita estava correta. Como exemplo: um número inteiro qualquer era representado pela letra A, depois, eles escreviam a expressão dobro deste número 2 A, atribuindo um valor numérico para esta letra, com A = 4, então eles poderiam chegar ao valor da expressão 2 A = 2 $\bullet$ 4 = 8, que representava o dobro do valor de A.

Esta idéia do aluno construir primeiro as expressões pedidas e, em seguida verificar se ela esta correta, contribuiu muito para a compreensão dos alunos ao transitarem do numérico para o algébrico e vice-versa.

Nesta atividade complementar, também, podemos notar que as expressões algébricas nos quais os alunos apresentaram maior dificuldade, foram as questões envolvendo: o dobro de um número somado com o triplo do outro ($2A+3B$). Constata-se também esta dificuldade quando eles resolveram a mesma expressão na tabela 2 ($2x+3y$); a diferença entre dois números ($A-B$), e o produto entre dois números ($A-B$). Essa dificuldade ocorreu porque os alunos desconhecem alguns sinônimos matemáticos para estas operações, tais como diferença é sinônimo de subtração, produto é sinônimo de multiplicação. Assim, devemos refletir e trabalharmos mais os sinônimos na linguagem matemática, para que os alunos reconheçam estas palavras quando estiverem resolvendo uma situação proposta.

Observamos que durante o desenvolvimento desta atividade, estiveram presentes as apreensões operatória, seqüencial e discursivas, conforme os aspectos apresentados por Duval.

A apreensão seqüencial ocorreu durante o desenvolvimento dos exercícios 1 e 2. No primeiro exercício todas as duplas conseguiram identificar a figura e determinar as expressões algébricas pedidas, ativando seus conhecimentos aritméticos, no segundo exercício todas as duplas quiseram representar o comprimento do fio nas diferentes divisões pedidas no papel quadriculado, melhorando a compreensão do problema proposto. A apreensão discursiva esteve presente ao longo de todo o desenvolvimento de atividade 5.

Ao final da análise dos resultados desta atividade, constatamos que devemos trabalhar mais a linguagem matemática e as propriedades de potência entre os alunos, para construírem conceitos adequados que os auxiliem para a construção de novos conhecimentos matemáticos.

A seguir, passaremos a analisar os resultados obtidos na atividade 7, a qual consideramos um dos pontos mais importantes de nossa seqüência e do nosso projeto, na qual estiveram presentes as ferramentas geométricas para a construção das expressões algébricas.

5.5.7 Análise da Atividade 7 – Propriedade Distributiva: Construindo Retângulos

Na análise dos resultados obtidos na atividade 7, consideramos, também, como pontos principais os resultados da atividade complementar, na qual mostram os conhecimentos construídos e absorvidos pelos alunos nas atividades anteriores da nossa seqüência didática, que serviram de alicerce para o desenvolvimento desta.

A seguir descrevemos os desenvolvimentos da atividade 7 e da atividade complementar.

5.5.7.1 Desenvolvimento da Atividade

A turma foi dividida em 18 duplas (36 alunos), onde apenas 35 alunos concluíram as atividades 7 e a complementar. Nesta descrição do desenvolvimento apresentamos primeiro o processo da atividade 7 e em seguida o da atividade complementar.

Cada dupla recebeu um kit formado por: diversos retângulos e quadrados, uma régua (40cm) e uma folha quadriculada.

No início da atividade, a pesquisadora deu as instruções para a utilização do kit. Os alunos deveriam escolher as peças dadas procurando formar novos retângulos e, em seguida, determinar o valor da área da figura formada.

Muitas duplas executaram corretamente este procedimento, mesmo sem a pesquisadora ter pedido. Isso foi um reflexo das estratégicas utilizadas e dos conhecimentos construídos nas atividades anteriores da seqüência didática, nas quais eles sempre calculavam as áreas das figuras.

Após os alunos terem construído os 3 retângulos diferentes para cada situação proposta, nas quais deveriam utilizar 2 peças, 3 peças e 4 peças do kit fornecido e, determinado suas áreas, passaram para a próxima situação proposta, na qual deveriam construir um retângulo utilizando peças do seguinte tamanho: 3x3, 3x4, 4x4 e 4x3, procurando formar retângulos diferentes ou quadrados. Eles adotaram o seguinte modelo: montavam os quadrados ou retângulos e, em seguida, registravam na forma de desenho a figura formada, escrevendo suas medidas e, depois, calculavam automaticamente as áreas das figuras.

Na situação seguinte da atividade, foi proposto que os alunos deveriam utilizar peças das seguintes medidas: 5x5, 5x6, 6x6 e 6x5, procurando construir um único quadrado. Após terem construído a figura, deveriam registrar suas medidas na tabela 1, composta por seis colunas : a coluna a representava a base da figura 1; b a base da figura 2; h a altura comum as duas figuras; o produto de a x h; o produto de b x h e em seguida a área total (a x h + b x h). Ao completarem a tabela 1, os alunos perceberam que as peças possuíam alturas em comum, que poderiam ser chamadas de constantes; que os valores de a e b eram alternados, ora valia 5, ora valia 6 e, que em algumas peças os valores de a e b eram iguais aos valores da altura.

Depois de terem calculado as áreas das figuras e completarem a tabela 1, passaram a completar a tabela 2, a qual era composta por 3 colunas: a primeira pedia que os alunos calculassem a expressão (a+b), na segunda que eles transportassem os valores das alturas encontrados na tabela 1, e na terceira coluna deveriam resolver a expressão (a+b)x h e, em seguida, comparar os valores encontrados na tabela 1, para a área total, com os valores determinados para a expressão da terceira coluna da tabela 2.

Durante o preenchimento das tabelas, percebemos que os alunos tiveram maior dificuldade ao completarem a tabela 1, pois, estavam confundindo os valores de b com a altura. Vendo isto, a pesquisadora chamou a atenção das duplas que estavam tendo esta dificuldade, perguntando: O que eles perceberam de igual e diferente em cada peça unida para formar o quadrado? E que eles poderiam pensar que esta figura poderia ser considerada um quebra-cabeça, no qual somente peças que possuem tamanhos iguais podem ser encaixadas. Como no caso, uma peça 5 x 4 e 4 x 4, somente poderão ser ligados pela parte comum, que nesta situação seria o 4, que representa na peça 1 a altura e na peça 2 a base e a altura por se tratar de um quadrado. Através deste exemplo, e outros que a pesquisadora discutiu com as duplas, os alunos puderam concluir o preenchimento da tabela 1.

Notamos que para a tabela 2, os alunos não tiveram problemas em preencher e calcular os valores pedidos. Também, pedimos que os alunos olhassem as duas expressões comparando os valores encontrados entre elas. Apenas 4 duplas não conseguiram perceber que os dois resultados eram iguais, pois, efetuaram os cálculos errados da tabela 1. Mas, 14 duplas conseguiram perceber que as duas levavam ao mesmo resultado e que o primeiro processo que utilizaram na tabela 1, eles haviam calculado parte por parte da figura e no segundo processo houve a união das duas bases das figuras e, em seguida, multiplicaram pelo valor da altura, chegando ao valor final da área da figura, verificando que as duas expressões são equivalentes.

Ao final das observações feitas pela pesquisadora e pelo professor a respeito das duplas estudadas, a pesquisadora chamou os alunos para uma discussão coletiva, pedindo que falassem quais eram as expressões utilizadas e formadas para este processo de preenchimento das tabelas 1 e 2. Na seqüência, discutiram o que seria uma expressão equivalente e que propriedades aritméticas eles reconheciam nas expressões. A maioria da sala respondeu que era a propriedade distributiva, pois, a parte comum entre elas era a altura. Para mostrar que as expressões são equivalentes a pesquisadora deu outros exemplos e pediu para que eles construíssem duas expressões equivalentes que eles conhecessem. Então eles apresentaram o exemplo da propriedade distributiva geral: a x (b+c) = ab + ac.

Para verificar se os alunos sabiam trabalhar a propriedade distributiva foi proposto um exercício no qual os alunos deveriam verificar quais das situações eram verdadeiras ou falsas. Durante a execução destes exercícios observamos que eles utilizavam o processo mecânico, ou seja, verificavam mentalmente sem desenvolver o processo escrito. Então, neste momento, a pesquisadora alertou que eles deveriam justificar as respostas através da aplicação da distributiva. Assim, os alunos começaram a se preocupar em justificar suas respostas aplicando a propriedade para depois dizer se as afirmativas eram verdadeiras ou falsas.

Constatamos, neste exercício que os alunos não apresentaram dificuldades. Na seqüência, os alunos resolveram questões que envolviam a aplicação da propriedade distributiva, como construir um retângulo 3 x 9 utilizando apenas duas peças. Notamos que muitos alunos tiveram dificuldade em responder e procurar resolver o problema. Vendo a situação a pesquisadora fez uma intervenção global para sala, perguntando : quais seriam os tipos de retângulos que poderíamos utilizar para construirmos um retângulo de base 4 e altura 7, aplicando a distributiva. Apenas três duplas responderam que poderiam utilizar um retângulo medindo 4 de base por 5 de altura e outro de 4 de base por 2 de altura, ou uma peça 4 x 1 e outra peça 4 x 6. Além dessas respostas dadas pelos alunos a pesquisadora complementou dando outros exemplos, mostrando que a parte fixa era a base e, o que variava era a altura, na qual deveríamos procurar duas peças cujas alturas somadas resultassem no valor 7. Em seguida discutiu o caso proposto 3 x 9 pedindo que eles resolvessem esta questão, baseando-se nos exemplos dados, e relembrando as construções anteriores dos retângulos.

Notamos que houve um desinteresse por parte dos alunos ao resolverem esta questão, mesmo dando exemplos orais coletivamente, a dificuldade deles em representar e construir a figura pedida foi grande. Somente 5 duplas conseguiram atingir o objetivo final desta atividade, chegando a expressão 3x (4 + 5) e ficaram apenas nesta resposta ao invés de procurar outras combinações para o número nove, tais como (3+6), (1+8), (2+7). Por meio destes exercícios 7, 8, 9 que envolviam a distributiva, notamos que os alunos não conseguem escrever um número por meio de uma operação, como no caso do 9, que na visão destes alunos apareceu uma forma mecanizada que a resposta só poderia ser dada pelos pares 4 e 5.

Constatada a dificuldade dos alunos em aplicar a distributiva, procuramos discutir coletivamente as questões 7, 8, 9 e 10, coletando algumas das respostas dadas apontando os erros e mostrando como podemos escrever os números pedidos utilizando diferentes números, cuja soma resultasse no número pedido. Por meio desta dificuldade dos alunos pudemos verificar que os resultados obtidos nas pesquisas científicas de Colins (1974), Kuchemann (1981), Kieran (1989), entre outros, ainda continuam ocorrendo, pois, os alunos não conseguem representar os números pedidos por meio das operações aritméticas e nem pela aplicação de suas propriedades, conforme a situação que propusemos.

A atividade 7 foi desenvolvida em 5 sessões de 50 minutos.

A seguir, iniciamos a aplicação da atividade complementar na qual contamos com 36 alunos, ou seja, 18 duplas.

Foram distribuídas as fichas para cada dupla. Em seguida, a pesquisadora deu as instruções iniciais para a atividade, onde os alunos deveriam escrever três expressões algébricas equivalentes para determinar as áreas das figuras pedidas.

Nesta atividade as duplas não tiveram muita dificuldade em escrever as expressões; algumas duplas adotaram como estratégia de resolução escrevendo as expressões separadas para cada figura e, em alguns casos os alunos, esqueciam de colocar os parênteses entre elas. Neste ponto vimos que os erros como a falta de uso dos parênteses apontado na pesquisa de Kieran (1989) e demais pesquisadores ocorreram neste grupo de alunos. Outro erro observado, era que os alunos ao invés de somar as áreas eles queriam multiplicar entre si as áreas encontradas, ao invés de somar os resultados. Percebendo essa dificuldade dos alunos, a pesquisadora interveio, perguntando o porquê da multiplicação, para as duplas que cometeram este erro. As duplas envolvidas pensaram que para encontrar a área da figura maior deveriam multiplicar os valores encontrados das áreas menores. Por meio deste pensamento dos alunos percebemos que eles não estiveram atentos às instruções iniciais, dadas pela pesquisadora, tais como: que eles deveriam escrever três expressões diferentes que os levariam ao cálculo do valor da área da figura total, utilizando as áreas das figuras menores. A partir das dificuldades encontradas pelos alunos, a pesquisadora percebeu que deveria retomar os conhecimentos construídos na atividade 7, na qual eles trabalharam com a composição de retângulos e quadrados maiores, utilizando áreas de retângulos e quadrados menores, cuja área total era obtida pela soma de áreas das figuras menores. Em seguida enfatizou aos alunos, que, para encontrar a área pedida, deveriam calcular as áreas menores primeiro, usando as fórmulas correspondentes e depois somar os valores encontrados. Depois de feitas estas observações, eles conseguiram compreender porque não deveriam utilizar a multiplicação para os resultados da área final pedida.

Após esta intervenção, as duplas compreenderam que o retângulo menor era uma das partes do retângulo maior e que somando as expressões das áreas dos retângulos determinamos a área do retângulo maior.

Algumas duplas enxergavam as figuras como uma só e, depois, escreviam as expressões para as áreas entre elas. Outras não conseguiam visualizar como sendo uma peça única e consideravam apenas os retângulos menores.

A maioria das duplas aplicou o processo de soma de área para todos os exercícios propostos. Apenas três duplas conseguiram utilizar os dois métodos: o da adição de áreas e o da subtração de áreas.

Determinadas as expressões para as figuras, a pesquisadora pediu para que os alunos escolhessem para cada letra que compunham as expressões construídas, um valor numérico, variando de 1 a 15 e, na seqüência, calculassem os valores das áreas das figuras utilizando estas expressões. O objetivo era comprovar a equivalência entre as expressões algébricas construídas.

Todas as duplas conseguiram atingir os objetivos desta atividade, comprovando que as expressões eram equivalentes.

Esta atividade complementar foi aplicada em 4 sessões de 50 minutos.

5.5.7.2 Análise dos resultados da Atividade 7 e complementar

Nas análises dos resultados obtidos nas atividades 7 e de sua atividade complementar, adotamos os seguintes procedimentos: analisarmos os resultados de uma amostra formada por 18 alunos, mostrando na primeira etapa do processo de análise os resultados da atividade 7; através de tabelas 8 e 9 de acertos e erros das questões propostas para as atividades 7 (vide tab.15) e a atividade complementar (vide tab.16).

Notamos que, em ambas as atividades, os alunos utilizam a Dialética ferramenta-objeto, passando-se pelas 4 etapas principais apontadas por Douady (1986), como também, as formas de registros estão presentes em todo o desenvolvimento das atividades.

As mudanças de quadros, ocorridas nesta atividade, na qual os alunos partem do quadro geométrico para o algébrico e na seqüência do quadro algébrico para o numérico, comprovam a equivalência das expressões algébricas construídas conforme os relatos que apresentamos abaixo.

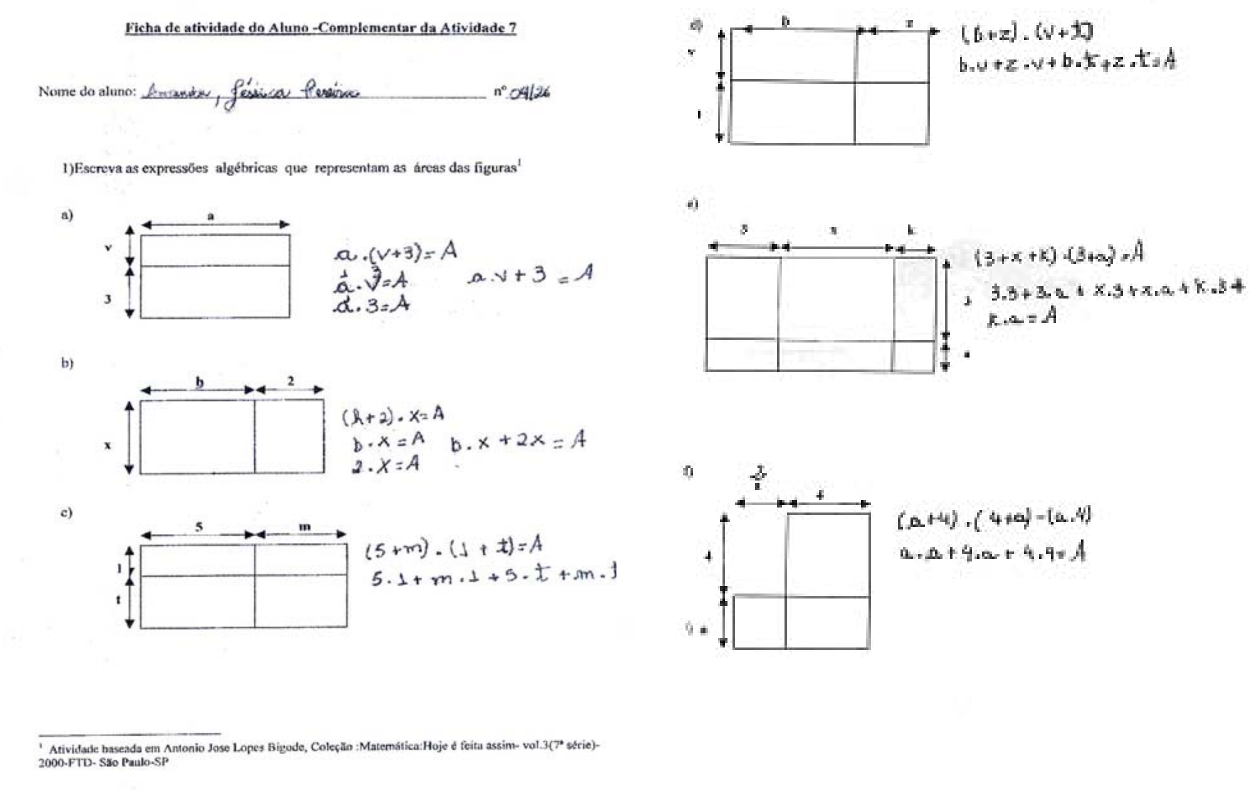


Figura 20. Protocolo do aluno referente à atividade 7 complementar

Analisando agora os resultados obtidos com os alunos, nestas atividades sob a ótica de Duval, observando os tipos de registros e representações envolvidas, notamos que esta amostra de alunos apresenta dificuldade na compreensão da linguagem matemática e nas formas de conversão e tratamentos dos objetos matemáticos. A seguir apresentamos os resultados obtidos através da tabela 18.

Tabela 18. Análise dos resultados obtidos na atividade 7.

Situações Propostas	**Total de alunos**	**% de Acertos**	**% de Erros**
1) Construção de retângulos utilizando 2, 3 e 4 peças do kit fornecido.	18	100	-
2) Representação figural e cálculo das áreas.	18	100	
3) Construção de quadrados com peças 3 x 3, 3 x 4, 4 x 4, 4 x 3.	18	22	78
4) Construir quadrados com as peças 5 x 5, 5 x 6, 6 x 6, 6 x 5.	18	72	28
Preenchimento da tabela 1, utilizando a figura formada no item 4.	18	78	22
Cálculo da área utilizando as fórmulas a x h, b x h.	18	100	-
Cálculo da área total, somando os resultados de a x h + b x h.	18	78	22
Preenchimento da tabela 2. Expressões envolvidas:(a+b), área total = (a+b)x h.	18	89	11
Reconhecimento de uma constante entre as variáveis a, b, h.	18	56	44
Reconhecimento e utilização da fórmula geral A= b x h	18	100	-
Comparação dos resultados da tabelas 1 e 2, análise das expressões utilizadas.	18	44	56
Verificação da equivalência entre as expressões dadas (a+b)x h = ah+ b.h	18	89	11
Aplicação da distributiva.	18	100	-
Construção do retângulo 3 x 9 por meio da distributiva.	18	22	78
Aplicação da distributiva na construção de outros retângulos	18	22	78

Fonte: protocolo dos alunos da atividade 7

Através dos resultados obtidos, notamos que estes alunos apresentaram muita dificuldade no aspecto da aplicação da propriedade distributiva para construção de retângulos, pois, não conseguiram realizar a representação numérica dos números pedidos para a altura dos retângulos com: 3x9 = 3x(4+5), 3x(3+6); 5x9 = 5 x(3+5+1), 5x(2+3+4), entre outros casos. Ou seja, os alunos não conseguem usar a conversão para os números pedidos. Por este motivo, obtivemos altos índices de erros nos resultados das questões que exigiam este conhecimento. No entanto, esta turma apresentou bons resultados para reconhecer e aplicar a propriedade distributiva nas questões mais simples, porém nas complexas, tais como o caso apresentado anteriormente, não conseguiram resolver as questões propostas.

Outro aspecto apontado nos resultados dos alunos foi a dificuldade na compreensão dos enunciados do problema e a falta de atenção na leitura e o uso do vocabulário matemático, ou seja, pedíamos para que os alunos construíssem um quadrado utilizando as peças pedidas. A maioria dos alunos errou esta questão, pois, partiu do princípio de unir apenas duas peças de cada vez, formando apenas retângulos e não o quadrado pedido. Sendo assim, a pesquisadora chamou a atenção dos alunos em relação ao enunciado do problema, que figura foi pedida?; as duplas que haviam montado corretamente a figura, responderam um quadrado. E as demais duplas, perceberam que haviam errado a questão, pois, construíram retângulos ao invés da figura pedida. Na situação seguinte foi proposto que os alunos construíssem um quadrado pedido utilizando as peças 5 x 5, 5 x 6, 6 x 6, 6 x 5. E em seguida, preenchessem as tabelas 1 e 2, calculando as áreas das figuras pedidas. Ao analisarmos a coluna que pedia a área total, percebemos que duas duplas não prestaram atenção nas orientações dadas para o preenchimento da tabela referentes a área total que seria a soma das áreas das figuras menores, ou seja, os resultados obtidos nas colunas a x h e b x h, errando esta coluna da tabela 1.

Já, ao completarem a tabela 2, notamos que os alunos não apresentaram tanta dificuldade. Mas, ao responderem as questões referentes às tabelas, apresentaram dificuldade na questão c, onde deveriam observar e concluir que as duas expressões podem ser consideradas equivalentes. Eles somente perceberam a equivalência entre elas quando fizeram a verificação pedida no item d, entre as expressões : $(a+b)x\ h = ah + b.h$

Após terem respondido o item d, os alunos responderam o exercício proposto para aplicação da propriedade distributiva, verificando quais delas eram verdadeiras ou falsas. E, logo em seguida, passaram a responder as questões propostas 7, 8, 9 e 10, as quais propunham situações mais complexas envolvendo a propriedade distributiva e a qual comentamos anteriormente.

Ao final da atividade a pesquisadora fez uma discussão coletiva a respeito dos resultados das duplas e explicou como podemos saber se uma expressão é equivalente ou não, dando exemplos utilizando expressões algébricas e verificando por meio dos resultados numéricos obtidos nas duas, na qual atribuímos valores numéricos às letras. Em seguida, foi explicado aos alunos que eles receberiam uma atividade complementar na qual deveriam escrever três expressões algébricas para calcular as áreas das figuras propostas e, logo após, verificar se elas eram equivalentes.

Os alunos iniciaram a atividade analisando as figuras dadas. Algumas duplas adotaram a seguinte estratégia de resolução: para cada figura menor que compunham a figura maior, escreviam uma expressão que determinava a área desta, e ao final somavam as expressões dadas. Como por exemplo: Área 1 = k x a, Área 2 = (f + g) x j então a área total = k x a + (f + g) x j. Em outros casos propostos, algumas duplas adotavam a soma entre as áreas, como o exemplo acima e outras. Calculavam a área total e em seguida subtraiam as áreas das figuras que não compunham a figura. Apenas 3 duplas conseguiram aplicar os dois modos de resolução. Participaram desta atividade complementar 43 alunos. Selecionamos uma amostra de 20 alunos para analisarmos os resultados obtidos para a atividade complementar, discutindo as dificuldades e os erros cometidos por eles.(Vide tabela 19)

Tabela 19. Análise dos resultados da atividade 7 complementar

Métodos e expressões utilizados	**Total de alunos analisados**	**% de Acertos**	**% de Erros**
Utilização do método da soma das expressões das áreas parciais.			
Exercício 1			
Figura A	20		
3 a + v.a = A_{total}		85	15
a.(3+v) = A_{total}		100	-
$A_{parcial}$ = 3. a		100	-
$A_{parcial}$= a . v		100	-
Figura B	20		
x.(h+2) = A_{total}		100	-
h. x + 2.x = A_{total}		90	10
$A_{parcial}$ = h.x		100	-
$A_{parcial}$ = 2.x		100	-
Figura C	20		
(1+t). (5+m) = A_{Total}		100	-
(5.1)+(m.1)+(5.t)+(m.t)=A_{Total}		70	30
5.(1+t) +m.(1+t) = A_{Total}		25	25
Figura D	20		
(v+t) . (b+z) = A_{Total}		95	5
(v.b)+(v.z)+(t.b)+(t.z)= A_{Total}		60	40
b.(v+t) +z.(v+t) = A_{Total}		25	75
Figura E	20		
(3+a).(3+x+k)= A_{Total}		95	5
(3.3)+(3.x)+(3.k)+(3.a)+(x.a)+(k.a)= A_{Total}		60	40
3.(3+a) + x. (3+a) + k.(3+a) = A_{Total}		-	100
Figura F	20		
(4.4) + (a. a) + (4.a) = A_{Total}		35	65
(a+4) .(a+4) – (4.a) = A_{Total}		40	60
a.(a+4) + (4.4) = A_{Total}		30	70
(a .a) + 4.(a+4) = A_{total}		35	65
Figura G	20		
(a+b) .(a+b) – (a. a) = A_{total}		40	60
(a . b)+ b.(a+b) = A_{total}		50	50
(a. b) + (a.b)+(b.b) = A_{total}		45	55
Figura H	20		
(3x + 5) . (2+x) – (5.2) = A_{total} (2.3x) + x.(3x+5) = A_{total}		55	45
3x.(2 +x) +(5.x) = A_{total}		10	90
Figura I	20		
(y+2). (5+b) = A_{total}		85	15
(y.y) +(5.2) +(b.b)+(5.y)= A_{total}		35	65
y.(5+b) + 2.(5+b) = A_{total}		40	60
Figura J	20		
(2x+x).x = A_{total}		20	80
(2x.x) + (x.x)= A_{total}		40	60
3x. x = A_{total}		50	50
Figura K	20		
(y+2 +3x).3x = A_{total}		45	55
3x.(y+2) +(3x. 3x) = A_{total}		85	15

Fonte: Protocolos dos alunos da atividade 7 complementar.

Analisando os resultados obtidos na atividade complementar, constatamos que os alunos apresentaram maior dificuldade na construção das expressões algébricas das figuras F, G, H, na qual deveriam construir expressões que utilizassem não somente a operação de adição, mas, a de subtração tais como : (a+b) . (a+b) – (b.b). Muitos alunos preferiram utilizar apenas a soma de áreas ao invés de calcular a área total da figura e, ao final, extrair a área pedida. Os índices de acertos foram baixos para estes problemas, pois, durante a execução da atividade, percebemos que algumas duplas estavam desatentas ao resolverem as situações propostas. Observamos, também, que muitas duplas ao escreverem as expressões cometiam os seguintes erros apontados por Kieran (1989), Kuchemann (1981), Booth (1984): a falta de utilização dos parênteses para separar as operações envolvidas como no caso, separar a multiplicação da adição. Para chegarem à expressão final, algumas duplas ao invés de somar as áreas parciais, escreviam expressões multiplicando as áreas. Outras duplas não reconheceram os termos semelhantes durante a construção das expressões, como no caso da expressão da figura J, (2x + x).x = 3x.x, que seriam expressões equivalentes. Porém, percebemos que o erro apontado por Kuchemann (1981), segundo o qual os alunos não sabem representar a área de um retângulo, conforme mostramos a seguir (Fig. A), não ocorreu nesta atividade complementar.

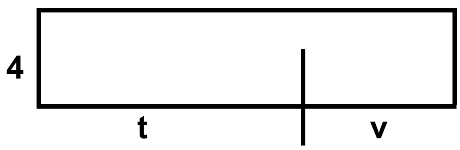


Figura. A. Modelo de Kuchemann

Apesar dos alunos conseguirem determinar as expressões para as áreas das figuras pedidas, notamos que eles não tiveram muita dificuldade em realizar a representação dos retângulos cujas expressões eram dadas no exercício 2.

Obtivemos um índice de 75% de acerto da amostra de 20 alunos analisados. Observamos, também, que os alunos não se empenharam tanto para encontrar a solução da situação proposta.

Ao final de nossa análise constatamos que os alunos ainda apresentam uma dificuldade na utilização dos registros matemáticos, tanto na questão numérica como na algébrica. Verificamos que esta situação ocorreu durante o desenvolvimento da atividade 7, na qual os alunos não conseguiam fazer conversões numéricas e na complementar onde estes alunos ainda apresentaram dificuldades na representação algébrica. Mas, percebemos que a utilização da Geometria como instrumento de construção das expressões algébricas, auxiliou os alunos na composição das expressões algébricas equivalentes para a determinação da área da figura pedida. já no exercício 2 propusemos aos alunos uma transformação do quadro algébrico para o geométrico. (Vide figura 5)

Conforme os resultados obtidos na resolução do exercício 2, no qual propusemos aos alunos uma transformação do quadro algébrico para o geométrico (vide figura 5), verificamos que os alunos conseguiram realizar as mudanças entre os quadros algébrico e geométrico.

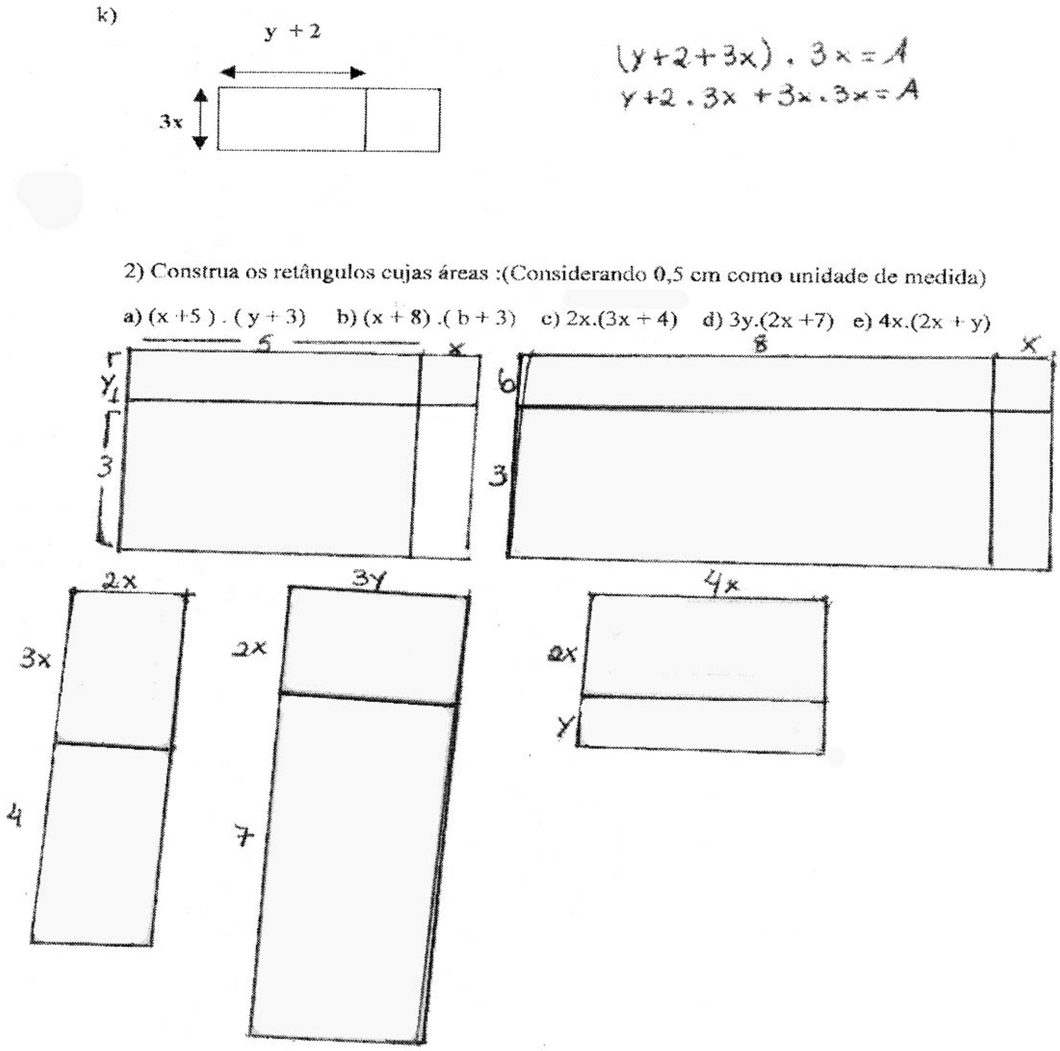
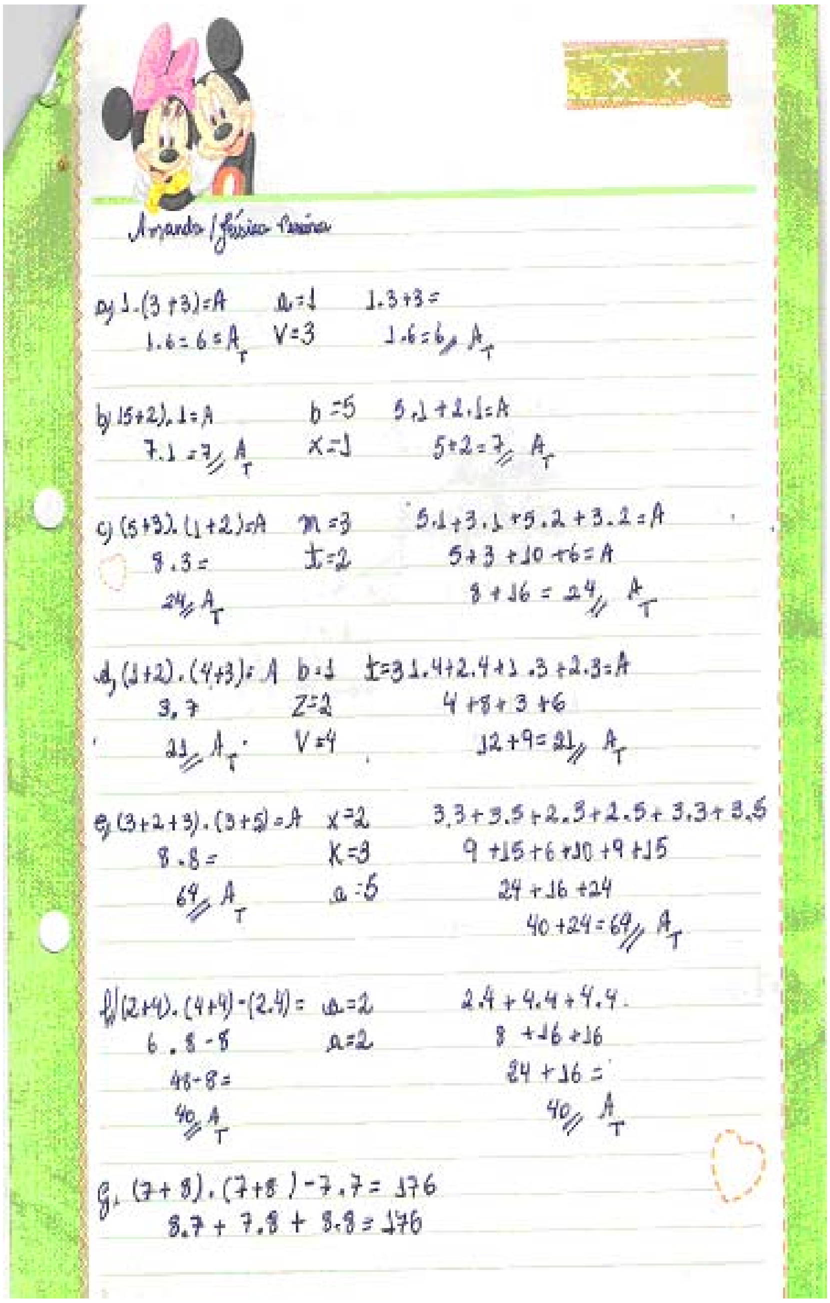


Figura 21: Protocolo do aluno representação das expressões algébricas na forma geométrica



a) 1.(3+3)=A a=1 1.3+3=
1.6=6=A_T V=3 1.6=6// A_T

b) (5+2).1=A b=5 5.1+2.1=A
7.1=7// A_T x=1 5+2=7// A_T

c) (5+3).(1+2)=A m=3 5.1+3.1+5.2+3.2=A
8.3= t=2 5+3+10+6=A
24// A_T 8+16=24// A_T

d) (1+2).(4+3)=A b=1 t=3 1.4+2.4+1.3+2.3=A
3.7 Z=2 4+8+3+6
21// A_T V=4 12+9=21// A_T

e) (3+2+3).(3+5)=A x=2 3.3+3.5+2.3+2.5+3.3+3.5
8.8= K=3 9+15+6+10+9+15
64// A_T a=5 24+16+24
40+24=64// A_T

f) (2+4).(4+4)-(2.4)= a=2 2.4+4.4+4.4
6.8-8 a=2 8+16+16
48-8= 24+16=
40// A_T 40// A_T

g) (7+8).(7+8)-7.7=176
8.7+7.8+8.8=176

Figura 22: Protocolo do aluno verificando a equivalência das expressões algébricas.

A seguir apresentamos a análise da última atividade aplicada da nossa seqüência didática, utilizando os pentaminós e trabalhando com os conceitos de constante e expressões algébricas genéricas.

5.5.8 Análise da Atividade 9 – Pentaminós

Para discutirmos os resultados da atividade 9, procuramos organizar esta atividade da seguinte forma: na primeira parte apresentamos o desenvolvimento da atividade, descrevendo seus pontos principais e, na segunda parte, mostramos e discutimos os resultados obtidos.

5.5.8.1 Desenvolvimento da Atividade

A turma foi dividida em duplas. Cada dupla recebeu a folha da atividade, um kit de pentaminós contendo 24 peças. Participaram desta atividade 33 alunos. Em seguida, foram dadas as instruções iniciais aos alunos pela pesquisadora.

Os alunos iniciaram a atividade observando e analisando as peças do kit fornecido, procurando formar três retângulos diferentes utilizando as peças dadas. Muitas duplas preferiram desenhar na folha as figuras formadas e observaram que todas as peças eram compostas por cinco quadradinhos. Algumas duplas, ao formarem os três retângulos pedidos utilizando 2 peças, 3 peças e 4 peças iam deixando os retângulos formados e comparando com os obtidos pelas outras duplas. Uma das duplas separou as peças que unidas não formavam um retângulo, e procuraram trabalhar somente com as que poderia formar a figura pedida. Nós registramos algumas das figuras formadas nas fotos (foto 1, 2, 3, 4) por algumas das duplas e também registramos os das peças, que unidas, não formavam a figura pedida (foto 5).

Além das fotos das representações feitas pelas duplas, apresentamos alguns dos registros dos protocolos dos alunos nas figuras 7, 8.

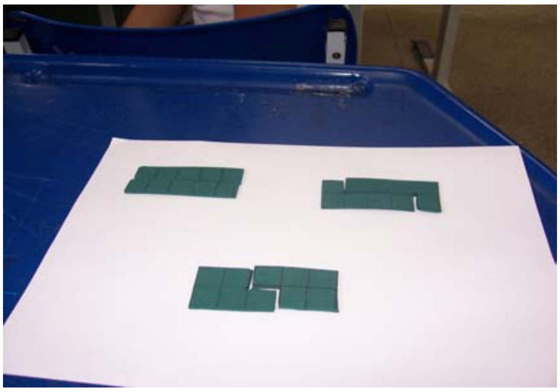


Figura 23. Retângulos com 2 peças – Atividade 9

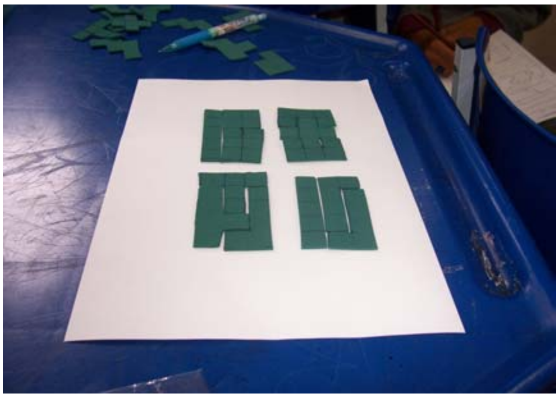


Figura 24. Retângulos com 3 peças - Atividade 9

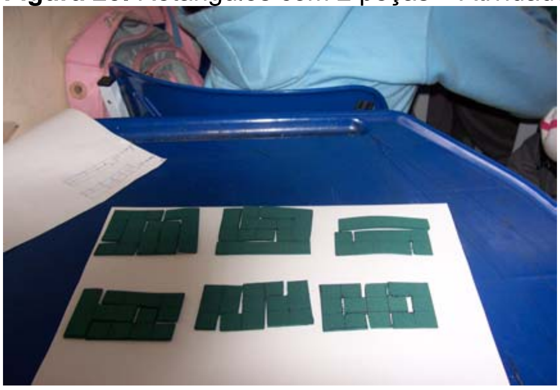


Figura 25. Retângulos com 3 peças – Atividade 9

Figura 26. Retângulos com 4 peças – Atividade 9

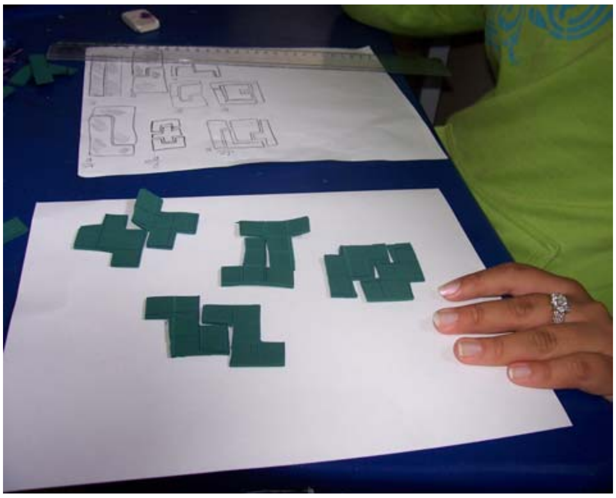
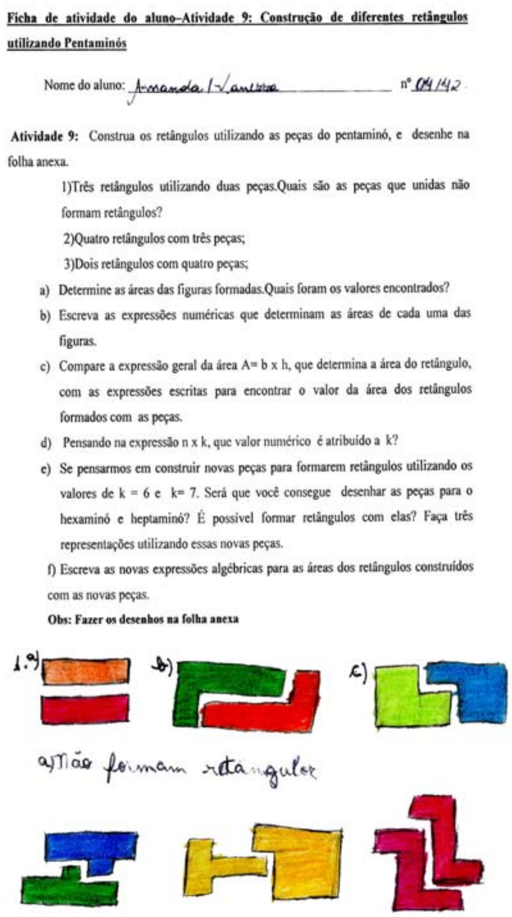


Figura 27. Peças que não formam retângulos – Atividade 9



<u>Ficha de atividade do aluno–Atividade 9: Construção de diferentes retângulos utilizando Pentaminós</u>

Nome do aluno: Amanda / Vanessa nº 04/42

Atividade 9: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó, e desenhe na folha anexa.

1)Três retângulos utilizando duas peças.Quais são as peças que unidas não formam retângulos?

2)Quatro retângulos com três peças;

3)Dois retângulos com quatro peças;

a) Determine as áreas das figuras formadas.Quais foram os valores encontrados?

b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.

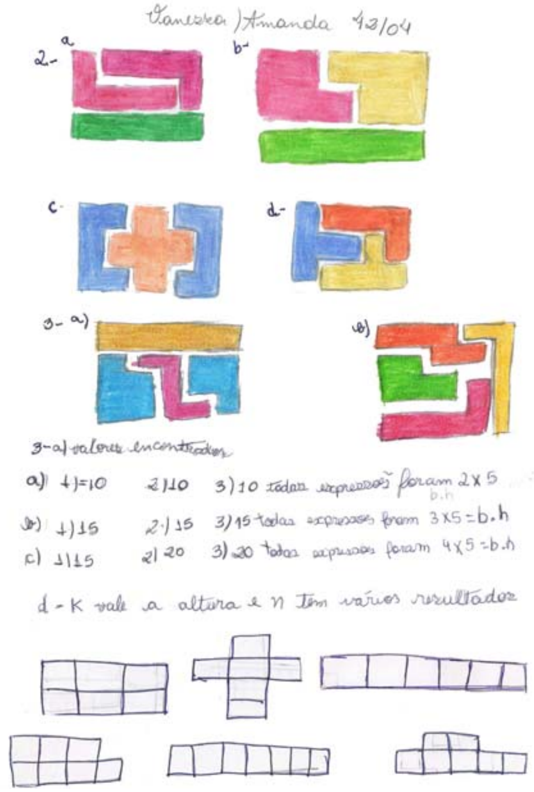
c) Compare a expressão geral da área A= b x h, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.

d) Pensando na expressão n x k, que valor numérico é atribuido a k?

e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de k = 6 e k= 7. Será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possivel formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.

f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa



Figuras 28 e 29. Representação das figuras formadas com pentaminó

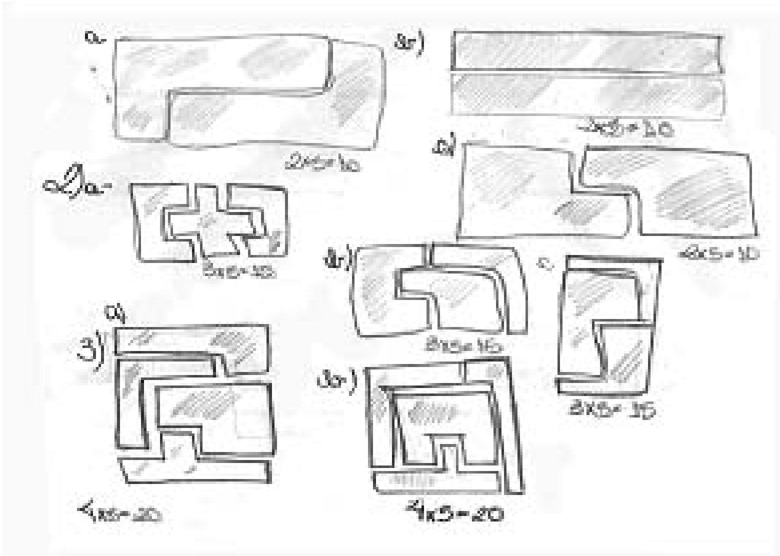
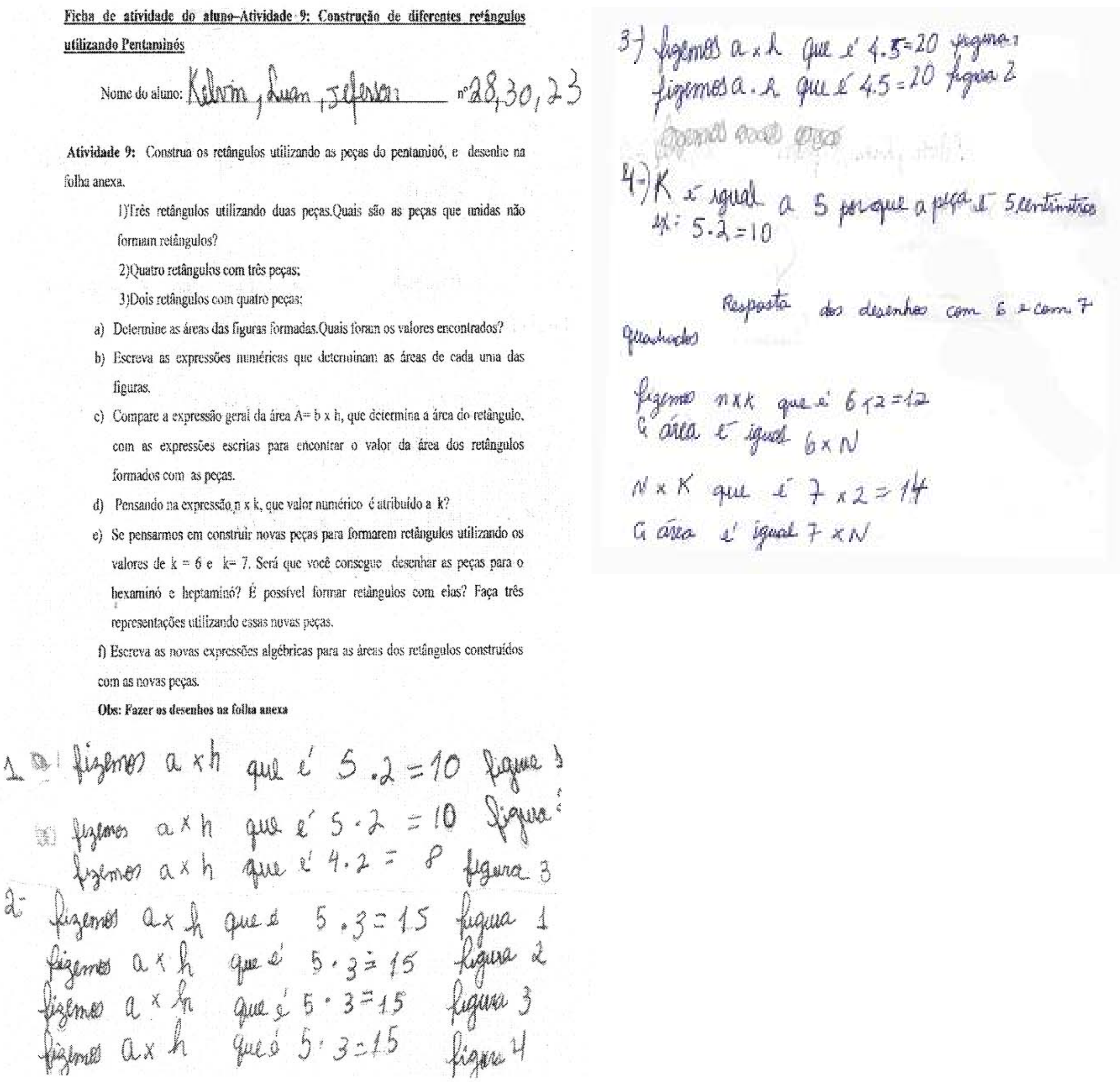


Figura 30. Registros dos cálculos das áreas das figuras formadas



Ficha de atividade do aluno-Atividade 9: Construção de diferentes retângulos utilizando Pentaminós

Nome do aluno: Kelvin, Luan, Jeferson n°28,30,23

Atividade 9: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó, e desenhe na folha anexa.

1)Três retângulos utilizando duas peças.Quais são as peças que unidas não formam retângulos?

2)Quatro retângulos com três peças;

3)Dois retângulos com quatro peças;

a) Determine as áreas das figuras formadas.Quais foram os valores encontrados?

b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.

c) Compare a expressão geral da área A= b x h, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.

d) Pensando na expressão n x k, que valor numérico é atribuído a k?

e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de k = 6 e k= 7. Será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possível formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.

f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa

1- fizemos a x h que é 5 . 2 = 10 figura 1
fizemos a x h que é 5 . 2 = 10 figura 2
fizemos a x h que é 4 . 2 = 8 figura 3
2- fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 1
fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 2
fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 3
fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 4

3-) fizemos a x h que é 4 . 5 = 20 figura 1
fizemos a . h que é 4.5 = 20 figura 2

4-) K é igual a 5 porque a peça é 5 centímetros
ex: 5 . 2 = 10

Resposta dos desenhos com 6 e com 7 quadrados

fizemos n x k que é 6 x 2 = 12
a área é igual 6 x N

N x K que é 7 x 2 = 14
a área é igual 7 x N

Figura 31. Respostas dos alunos para o cálculo das áreas.

A maioria das duplas achou interessante esta atividade, pois, associaram a um quebra-cabeça no qual deveriam formar retângulos. Após terem construído as figuras, calcularam as áreas delas, utilizando a fórmula geral da área $A = bxh$,na qual algumas duplas contavam a quantidade de quadrados para determinar o valor da base e da altura e, em seguida multiplicavam chegando ao valor da área. Outras preferiram contar o número de quadrados no interior da figura, relembrando das atividades iniciais da seqüência. Outros acharam que poderiam medir o tamanho do quadradinho e calcular numericamente. Para estas duplas, a pesquisadora chamou a atenção, informando que eles estavam calculando errado o valor da área, pois não necessitávamos do valor numérico medido pela régua. Houve apenas 2 duplas que cometeram este tipo de erro. As demais utilizaram os métodos trabalhados durante a seqüência didática.

Durante o desenvolvimento da atividade, perguntamos quais seriam as semelhanças entre as peças dadas. A maioria das duplas percebeu que as peças eram formadas por 5 quadrados e que a sua área era igual a 5. Ao compararem o resultado obtido das áreas das figuras pedidas, algumas duplas perceberam que poderiam escrever uma fórmula na qual o número de peças utilizadas multiplicadas por 5, levaria ao valor pedido para a área. Quando responderam o item c da atividade, perceberam que a letra k pode ser considerada constante e que no caso estudado valia 5, ou seja, $k = 5$, chegando a escrever a expressão $A = n \times k = n \times 5$. Além disso, eles escreveram alguns exemplos, tais como: $A = 2 \times 5 = 10$; $A = 3 \times 5 = 15$; entre outros.

Em seguida, foi proposto para que os alunos construíssem três peças com $k = 6$ e com $k = 7$. A maioria das duplas não utilizou muito, sua criatividade para as 3 peças pedidas. Apareceram algumas delas, as mais simples as tiras de 6 e 7 quadrados, um retângulo formado por 6 quadrados, as formas de U e L. Em seguida, perguntamos como poderíamos calcular a área destes retângulos que se formam. E algumas duplas, associando a fórmula geral dos pentaminós, disseram: se $k = 7$ então a $A = n \times 7$, para $k = 6$ $A = 6 \times n$.

Ao final, a pesquisadora apresentou os outros modelos de peças do hexaminó e heptaminó no retroprojetor, além de mostrar os outros modelos de retângulos que se pode construir utilizando as peças do pentaminó. Os alunos ficaram interessados e comentavam, entre si, sobre os modelos que eles haviam conseguido e os que nem haviam pensado. Em seguida buscaram o kit procurando construir alguns dos modelos apresentados, somente por curiosidade. Ao final, a pesquisadora destacou a importância do conceito de constante e que podemos ter uma fórmula geral como no caso A= k x n, no qual k varia de acordo com o tipo da peça e, que este tipo de expressão chamamos de expressão genérica, a qual podemos utilizar para qualquer situação semelhante à trabalhada, onde utilizamos a mesma unidade de medida como no caso dos quadradinhos. E, além disso, comparou com a área de retângulos A = b x h, que foi trabalhada de diversas maneiras durante o desenvolvimento das atividades da seqüência didática. (para os alunos esta seqüência era denominada de projeto álgebra- geometria).

Percebemos que esta atividade despertou a curiosidade dos alunos, durante o seu desenvolvimento, como também, após o seu término, pois, eles nunca haviam trabalhado com este material. Aplicamos esta atividade em 6 sessões de 50 minutos.

5.5.8.3 Análise dos Resultados

Selecionamos para a análise dos resultados desta atividade, uma amostra composta de por 12 alunos do grupo de 33 alunos.

Ao analisarmos os resultados obtidos no exercício 1, no qual os alunos deveriam formar retângulos, utilizando-se de 2, 3 e 4 peças do pentaminó, notamos que todas as duplas conseguiram chegar ao resultado pedido, utilizando diferentes estratégias. Uma das duplas adotou a seguinte estratégia: separou as peças diferentes que não formavam retângulos quando unidas e, em seguida, pegou as demais peças que sobraram e montou a figura. ´Para esta situação obtivemos um resultado de 100% de acertos.

Ao procurarem responder a questão A, na qual os alunos devem calcular a área das figuras formadas, duas duplas apresentaram dificuldades e cometeram o erro de medir as dimensões das figuras com a régua. A pesquisadora informou aos alunos que não era necessário o uso da régua. Sendo assim, tivemos um índice de acerto de 83% e 17% de erros nesta questão. No item B, no qual era perguntado qual seria a expressão numérica que determinava a área da figura. A maioria das duplas escreveu a expressão b x h = 5 x 2 = 10 ; 5 x 3 = 15; 5 x 4 =20. Outra dupla calculava a área separada de cada peça e, em seguida, somava os resultados. Com a dupla G, 5 x 1 = 5, 5 x 2 = 10 então a área total é : 5 + 10 =15 . Obtivemos também um índice de 83% de acerto. Em seguida, os alunos procuraram responder o item d, no qual fizeram uma comparação entre as expressões $A = bxh$ com a $A = n \times k$, percebendo que elas eram semelhantes, pois, neste caso, o número 5 apareceu em todos as expressões numéricas para a determinação dos valores das áreas das figuras formadas. Então, elas consideraram que k= 5, pois era o único número repetido e o n igual à quantidade de peças, ou seja, o n seria a variação da base e o k seria a altura constante, conforme os primeiros exercícios da seqüência, que foram lembrados por duas duplas G, K, nos quais a altura era constante e igual a 5 cm. Não responderam corretamente este item, 42% dos alunos, devido aos erros cometidos nos cálculos das áreas.

Ao responderem o item E, todas as duplas conseguiram formar 3 tipos de peças utilizando 6 e 7 quadrados, mas, não tiveram muita criatividade, pois as peças inventadas eram simples. Em seguida, escreveram as expressões gerais para cada uma delas baseada na do pentaminó, onde k =5, então, para este caso as expressões eram A = 7n e A = 6n. Apenas uma dupla não conseguiu escrever as expressões, ou seja 17% das duplas.

Percebemos que os alunos mobilizaram seus conhecimentos geométricos, algébricos e numéricos para solucionar esta atividade e alguns deles fizeram associações com os conhecimentos aplicados anteriormente, mostrando desta forma que o uso da dialética ferramenta-objeto é válida para a construção de um novo conhecimento.

Durante a execução das atividades da seqüência notamos que os alunos conseguiram transitar do quadro numérico para o algébrico com mais clareza e sem muita dificuldade. Os tipos de erros encontrados durante esta atividade foram pequenos, comparados com as demais atividades. As formas de registros foram mais claras e adotadas automaticamente pelas duplas, pois, todas optaram em fazer a representação figural dos retângulos formados ao invés de, simplesmente, montar o concreto e calcular sua área, sem registrar sua forma.

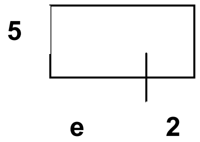
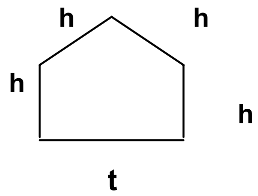
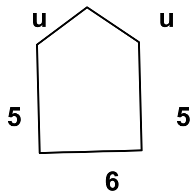
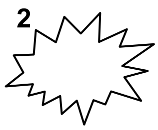
A seguir, fazemos a comparação entre os erros apresentados por Booth (1984) e Kuchemann (1981) em suas pesquisas, com aos erros ocorridos durante todo o desenvolvimento das atividades da seqüência didática analisada.

5.5.9 Análise dos Erros dos alunos apontados nas pesquisas de Küchemann e Booth

Esta análise dos erros dos alunos neste projeto consistiu na comparação com os erros ocorridos nas pesquisas de Booth (1984) e Kuchemann (1978), os quais discutimos e apresentamos no início deste projeto.

Selecionamos alguns destes erros apresentados na pesquisa de Booth e procuramos verificar se estes ocorreram durante o desenvolvimento deste projeto. A seguir apresentamos duas tabelas nas quais mostramos, primeiramente, alguns dos erros selecionados da pesquisa de Booth (1984) e de Kuchemann (1981), representados na tabela 20 e, em seguida, apresentamos na tabela 21, os erros cometidos pelos alunos em nossa pesquisa.

Tabela 20. Erros apresentados nas pesquisas de Booth (1984, p.3-4) e Kuchemann

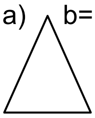
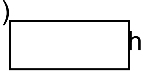
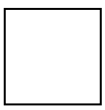
CSMS item	**Erros das respostas**	**% dada de Erros das respostas**	**Habilidades[b]**
1. Área de: 	5e2, e10, 10e, e +10	42	7
2.Perímetro: 	hhhht, 4ht,5ht	27	57
3. Perímetro : 	uu556, 2u16	20	28
4. Perímetro (n lados de comprimento 2) 	32 a 42	25	9
5. Some 4 com 3n	3n4,7n, 7,12	45 17	22
6.Multiplique por 4 n + 5	4n5,n45, n+20,n+9, 20, 9	12 39 16	8
7.Simplifique se for possível: 2 a + 5 b	7ab, 8ab	45	29
8. L + M + N = L + P + N Verdadeiro: Sempre/ nunca/ Às vezes	Nunca	55	11
9. c + d = 10 e c é menor que d c = ?	simples valor 0,1, 2,3,4, (ou 5)	43	7

Ao observarmos os erros apontados na pesquisa de Booth (1984), verificamos que em nossa pesquisa, apenas apareceram os erros referentes a diferenciação entre Perímetro e Área, no teste piloto, no início de nossa pesquisa que cerca de 40% dos alunos não sabiam diferenciar estes conceitos. Quanto à determinação da área de retângulos conforme a pesquisa de Kuchemann (1981) e apontada no item 2 da tabela 1, constatamos que dos alunos analisados apenas 20% erraram esta questão, devido a atividade 4 e 5 de nossa seqüência didática terem construído um suporte e o conhecimento de divisão de segmento e na atividade 7 exigir as expressões de áreas parciais e área total, trabalhando com o raciocínio dos alunos.

No entanto, nos nossos estudos e observações durante a aplicação da seqüência didática observamos outros tipos de erros apontados por Kieran (1989) e outros pesquisadores, tais como: a falta de uso dos parênteses na construção das expressões algébricas e numéricas, problemas nas operações de multiplicação e divisão de números inteiros e decimais, entre outros.

Finalizamos este capítulo, apresentando os erros ocorridos durante as aplicações de nossa seqüência, que foram discutidos durante nossas análises. (vide tabela 21). Esses erros registrados nesta tabela, servirão como pontos de reflexão para nós docentes e pesquisadores buscarmos novos meios didáticos que amenizem os erros dos alunos.

Tabela 21. Erros dos alunos no projeto de pesquisa

Tipos de erros dos alunos	Total de alunos analisados	% de ocorrência dos erros
Uso da fórmula de área de retângulo errada: $\frac{b.h}{2}$	40	20
Não utilização dos parênteses nas expressões: F x H + G x J 4 x B + Y (propriedade distributiva) 5 a + 6 b x z	35	
Cálculo da área total $A_{total} = 5k . 8 j . 10g$	36	
Erro entre os conceitos de Área e Perímetro analisado em duas etapas: 1) No teste piloto: Calcule a área das figuras pedidas: a) b= 6 h= 3  respostas dadas: A = 6+3 = 9 cm² A= 6.3 = 18 cm² A= 3.3 = 9 cm² A= 6.6 = 36cm² A = 6. 3.3 = 54cm² A= 3.3 + 6 = 15 cm² b)  h =3 Respostas: A= 2x 8 + 3 x 2 = 25 cm² A= 64+9 = 73 cm² A = 3 x 3 x 8 x 8 = 576 cm² A = 8 X 3 = 24 ÷ 2 =12 cm² c)  Respostas: A = 4 x 7 = 28 cm² A= 49 + 49 = 98 cm² A = 7 x 7 x 7 x 7 = 2401 cm² 2) Atividade 2: o erro no cálculo de área ocorreu na seguinte forma:	38	50 50 40 20

Fonte: Protocolo dos Alunos.

Para finalizar este capítulo é importante observamos que os erros cometidos pelos alunos no teste piloto realizado no início do projeto, diminuíram no final da aplicação das atividades da seqüência, partimos de um índice de 40% de erros quanto aos conceitos de Área e Perímetro e durante as atividades este índice foi reduzido para 20%. Dessa forma, podemos concluir que esta seqüência didática, ajudou os alunos a diferenciarem estes conceitos, construindo de forma mais significativa.

Na seqüência, apresentamos as considerações finais do nosso projeto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de expressão algébrica, utilizando a Geometria como instrumento de construção do conhecimento matemático, apoiado no conceito de área enquanto grandeza, sendo a ferramenta principal da construção do saber matemático. Além disso, utilizamos outros instrumentos geométricos, como os processos de decomposição e composição de figuras planas, a equicomposição de figuras e a equivalência entre áreas, entre outros. Esses recursos citados anteriormente estão presentes em nossa seqüência didática, visam auxiliar o professor e facilitar o ensino deste conteúdo e, desse modo, gerar ao aluno um sistema de aprendizado significativo.

Nossa pesquisa é iniciada por meio dos estudos e análise dos resultados obtidos do teste – piloto, aplicado por nós nos alunos da 7ª série, no qual procuramos avaliar os conhecimentos prévios dos alunos e, assim, elaborarmos nossa seqüência didática.

Nesta pesquisa, levantamos diversas hipóteses a respeito do tema “expressões algébricas”, e buscamos respostas para a seguinte questão: Como podemos utilizar a Geometria como instrumento para o ensino e aprendizagem das expressões algébricas?

Partindo-se destes pressupostos, procuramos elaborar e desenvolver atividades, usando recursos geométricos para construir o conceito de expressões algébricas de uma forma significativa.

Para que este conhecimento tenha significado para o aluno, tivemos que escolher e adotar meios didáticos para construirmos um sistema de ensino para o objeto matemático em estudo. Elegemos como elementos essenciais deste projeto, duas teorias que fundamentam este trabalho, que são a Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros de Régine Douady (1986) e os Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1988,1991,1992,1994,1995).

Acreditamos que estas teorias ajudam o professor a melhorar a sua prática e o sistema de ensino, levando o aluno a construir seus conhecimentos matemáticos com mais significado. Já, os registros de Representação Semiótica contribuem para o desenvolvimento da atividade e, também, para o aperfeiçoamento do lado cognitivo do aluno. O uso destas teorias como recurso de ensino proporciona ao professor compreender melhor o raciocínio e as estratégias dos alunos, quando procurarem resolver as situações propostas. Destacamos, também, as apreensões perceptiva, discursiva, operacional e seqüencial de Duval, nas resoluções das situações em que as figuras possuem um papel heurístico.

A metodologia adotada nessa seqüência baseou-se no trabalho de Douady e Perrin-Glorian (1989), que definem a área como uma classe de equivalência a partir da função de medida, para evidenciar a mesma área a partir de decomposição e composição, ou medida de figuras planas.

O desenvolvimento dos alunos durante a fase de aplicação da seqüência de atividades e os resultados obtidos na pesquisa mostra que essa metodologia contribui muito para promover a evolução pessoal e intelectual desses alunos.

No início da aplicação da seqüência, percebemos que houve um certo entusiasmo da turma de alunos, tendo em vista a novidade do material e a técnica utilizada nas quatro atividades iniciais.

Notamos que durante os desenvolvimentos das primeiras atividades, os alunos tiveram maior agilidade para resolverem as situações propostas, pois, eles fizeram ligações entre as atividades 1 a 5, mobilizando sempre os conhecimentos construídos anteriormente. A partir destes resultados, a pesquisadora e o professor puderam verificar que a Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros podem proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa.

Durante o desenvolvimento da seqüência didática percebemos que os alunos apresentaram maior dificuldade a partir da atividade 5, na qual eles se depararam com as expressões algébricas e tiveram que utilizar a linguagem matemática para interpretá-la. Além desta atividade, eles também mostraram maior dificuldade ao resolverem as questões propostas na atividade 7, onde deveriam construir retângulos e quadrados utilizando as peças pedidas. Poucos alunos conseguiram escrever as expressões algébricas das figuras construídas, aplicando a propriedade distributiva. Quando eles passaram a resolver as situações propostas para a atividade 7 complementar, notamos que as dificuldades apresentadas na atividade anterior não ocorreram, pois, diversas duplas conseguiram escrever as expressões algébricas equivalentes para as figuras dadas. Este relato nos mostra que, de alguma forma, os conceitos geométricos trabalhados durante as atividades tiveram significados e conseguiram auxiliar os aprendizes na construção das expressões algébricas. Além disso, a mudança do quadro geométrico para o algébrico ajudou os alunos na construção das expressões algébricas. Dessa maneira percebe-se que os alunos mobilizaram os saberes aprendidos para elaborar suas estratégias de resolução para os problemas propostos. Diante dos fatos ocorridos na aplicação das atividades citadas anteriormente, devemos refletir a respeito de sua elaboração e das falhas ocorridas durante a sua execução, levando-nos a repensá-las e assim reformulando-as e corrigindo os itens que causaram maior dificuldade na resolução dos problemas propostos.

Observamos que, durante as resoluções das atividades, algumas duplas ficavam a espera da pesquisadora para receberem outras orientações quanto ao procedimento a ser adotado ou, também, esclarecer algumas dúvidas no decorrer do exercício. Entretanto, notamos que vários alunos desenvolveram com autonomia as atividades, procurando resolver sozinhos os problemas propostos e discutindo com o grupo as soluções elaboradas. Além disso, estas atividades motivaram os alunos mais fracos a superarem suas dificuldades e evoluindo tanto no projeto, como também, na sua aprendizagem dos conceitos matemáticos, fato confirmado pelos resultados, obtidos e relatados pelo professor da turma.

Podemos inferir que esses avanços foram possíveis graças às atividades proposta aos procedimentos solicitados na resolução do problema. Quanto aos resultados obtidos nas análises das atividades da seqüência, podemos considerar, que a quantidade de acertos por atividade foi muito bom, pois, os alunos atingiram um nível de acertos variando de 70% a 80%.

Também, destacamos que por causa do período de aplicação da seqüência ter sido composto por vários feriados nas datas previstas de nossos encontros com a turma, não conseguimos aplicar todas as 12 atividades. Aplicamos nossa seqüência até a atividade 9, pois, as demais poderiam ser consideradas complementares. Mas, acreditamos que nosso projeto não foi prejudicado, pois, conseguimos verificar nossos objetivos.

Reconhecemos que o uso da Ferramenta-Objeto, como instrumento principal para a construção do saber matemático, foi essencial, pois, parece ter levado os alunos à compreensão do conceito de expressão algébrica.

A construção deste saber, também, contou com a utilização de outras ferramentas, tais como: o processo de decomposição e composição de figuras, a equivalência de áreas, entre outros. A escolha da Mudança de Quadros facilitou o desenvolvimento das atividades, pois, levou os alunos a transitarem do quadro geométrico para o algébrico, do algébrico para o numérico e do numérico para o geométrico, conforme as situações. Essas condições contribuíram para a aprendizagem dos alunos. Por outro lado, as Representações Semióticas desempenharam sua função neste projeto, por meio das representações feitas pelos alunos, dos registros matemáticos e das interpretações da linguagem matemática, além das apreensões destacadas por Duval (1994).

Isso valida nossa hipótese, levantada no início deste projeto, de que uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de expressões algébricas baseada em conceitos geométricos e centrada no conceito de área enquanto grandeza pode auxiliar o professor a criar condições favoráveis à aprendizagem pelos alunos do objeto matemático visado.

Podemos ressaltar que este projeto, também, tem como objetivos finais:

1. Fortalecer o conhecimento e a análise dos critérios de investigação em torno da conexão Álgebra e Geometria;
2. Desenvolver, analisar e avaliar uma proposta de ensino baseada na Dialética Ferramenta-Objeto e no Jogo de Quadros, que são noções desenvolvidas por Régine Douady (1989);
3. Contribuir para que o professor de Matemática valorize a pesquisa por se tratar de um instrumento útil à sua função;

4. Iniciar um processo contínuo, por meio do diálogo com os pesquisadores e professores de Educação Matemática, sobre os meios e critérios para a construção de pesquisa sobre os conceitos algébricos, em especial as expressões algébricas;

Frente a algumas dificuldades constatadas no decorrer da aplicação dessa seqüência didática, é de nosso interesse continuar os estudos sobre a proposta de se trabalhar o processo de ensino-aprendizagem da Álgebra, no caso expressões algébricas, utilizando-se da Dialética Ferramenta-Objeto e com o Jogo de Quadros, procurando aperfeiçoar os exercícios sob os pontos de vistas didático e matemático.

Ao final de nossos estudos gostaríamos de evidenciar: a necessidade de se dar mais destaque e importância aos estudos da Geometria, reservando um espaço maior na carga horária do curso, para que o professor consiga trabalhar com mais argumentação e discussão dos conteúdos, como também, elaborar e diversificar novas estratégias de ensino para a apreensão mais concreta dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRÉ, A. D. E. MARLI e LÜDKE, MENGA. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.
2. ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática de matemática e metodologia de pesquisa.** CEMA (Caderno de Educação Matemática), v.3. São Paulo: PUC, 1997.
3. ______. **Fundamentos da Didática da Matemática:** Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2000.
4. ANDREZZO, K. L**. Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra por alunos sem acuidade visual**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2005.
5. AZARQUIEL. **Ideas y actividades para enseñar álgebra**. Madri: Editorial Sintesis, 1993.
6. BACHELARD, G. **La formation de l'ésprit scientifique**. Paris: Livrarie Philosophique J. Vrin., 1967.
7. BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Grenoble, França: Université Joseph Fourier, 1996.
8. ______. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Natal, RN: Ed. Geral; John A. Fossa; Ed. da SBHMAT, 2002.

9. BAUMGART, John K. **Tópicos de matemática**. Álgebra. São Paulo: Editora Atua, 1995.

10. BEDNARZ, N.; KIERAN, C. e LEE, L. **Approaches to Álgebra:** Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publish, 1996.

11. BELL, A. BEDNARZN *et al*. **Approches to Algebra Problem** – Solving Approches to Algebra: two aspects. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996.

12. BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim - 5ªsérie.** São Paulo: FTD, 2000.

13. ______. **Matemática hoje é feita assim - 6ªsérie.** São Paulo: FTD, 2000.

14. ______. **Matemática hoje é feita assim - 7ªsérie.** São Paulo: FTD, 2000.

15. BOLTIANSKI, V. G. **Lecciones populares de Matematics, Figuras Equivalentes y Equicompuestas. Moscou:** Ed. MIR, 1981.

16. BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O. R.; LAUREANO, J. L. **Matemática e Vida- 5ªsérie**. São Paulo: Ática, 1995.

17. ______. **Matemática e Vida - 6ª série**. São Paulo: Ática, 1995.

18. ______. **Matemática e Vida - 7ª série.** São Paulo: Ática, 1995.

19. BOOTH, L R. **Álgebra:** Children's Strategies and Erros, Windsor, Berkshirei: NEFR-Nelson, 1984a.

20. ______. **Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra.** As idéias da Álgebra. Arthur F.Coxford e Alberto P.Shulte (orgs.). NCTM, 1988. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

21. BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo**:** Edgard Blucher, 1974.

22. BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática -5ª à 8ª série.** Brasília: MEC/SEF, 1988.

23. ______. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000.

24. BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques.** Recherches en didactiques des mathématiques**,** nº. 4-2, 1983, pp.165-198.

25. BUEHRING, S. R.; FLORES, R. C.; MORETTI, M. T. O tratamento da informação nos livros didáticos e a teoria dos registros de representação semiótica**. REREMAT**-- **Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática**. Florianópolis: UFSC, 2005, pp. 24-32.

26. CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5ª. ed. Lisboa, Portugal: Gradiva, 2003.

27. CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.** São Paulo: Cortez, 1991.

28. COXFORD, A. e SHULTE, A. (orgs.). **As Idéias de Álgebra. T**rad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

29. DAMM, R. F.; Machado, S. D. A. *et al*. **Registros de Representações**. Educação Matemática, uma introdução. 1ª reimpressão, 2002, pp. 135-153.

30. DOUADY, R. **Jeux de cadre et dialectique outil-objet.** Recherche em Didactique des Mathematiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7.2, 1986, pp. 5-31.

31. ______. **Des Apports de la Didactique Des Mathematiques.** L'Enseignement. Paris: IREM, nº6, Jan/Fev 1992, pp.132-157.

32. DOUADY, R. e PERRIN-GLORIAN, M. J**. Nombres decimaux.** Brochure IREM. Paris: Université VI, 1986.

33. ______. **Measure des longueurs et des Aires.** Paris: Institute de Recherche sur L'enseigment das Mathematiques, 1983.

34. ______. **Um processus d'aprentissage du concept d'aire de surface plane.** Educational Studies in Mathematics 20. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1989, pp. 387-424.

35. DUVAL, R. **Comment décrire et analyzer l'activité mathématique?** Cadres et registres. Nord Pás de Calais, França: Université du Littoral, IUFM, 2001.

36. ______, **Perspectives on the teaching of Geometry for 21st Century--** an ICMI Study, section II. Geometry from a Cognitive Point of the view, vol. 5. Edited by Carmelo Mammana and Vinicio Villani Kluwer, Academic Publishers. Dordrecht/ Boston / London, 1998.

37. FACCO, S. R. **Conceito de Área, uma proposta de ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2003.

38. FAVRE, D. Conception de l'erreur et rupture épistémologique. **Revue Française de Pédagogie***,* n.111, avril-mai-juin, 1995, pp. 85-94.

39. FRANCHI, A**.** **Compreensão das situações multiplicativas elementares**. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 1995.

40. FRANCHI, A. *et al*. **Geometria no 1º Grau:** da composição e decomposição de figuras às formulas de áreas. São Paulo: CLR Baileiro Editores, 1992.

41. GOMES, M. D. C. V. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas--** Álgebra, Geometria e Aritmética de mãos dadas no ensino fundamental. Rio de Janeiro: PGM 3, 2003.

42. IMENES, L. M. e LELLIS, M. **Matemática 5ª série**. São Paulo: Scipione, 2000.

43. ______. **Matemática 6ª série.** São Paulo**:** Scipione, 2000.

44. ______. **Matemática 7ª série**. São Paulo: Scipione, 2000.

45. KIERAN, C. **The eary learning of Álgebra:** a strutural perspective. Research Issues in Learning and Teaching of Algebre. Wargner and Kieran Editors. NCTM, 1989.

46. ______. **The Learning and Teaching of School Algebra.** Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (NCTM- cap. 17). Université du Quebec/ Montreal: 1992.

47. LEMOYNE, G.; CONNE, F.; BRUNN, J. **Du traitment des formes a celui des contenus d'ecritures lellerales:** une perspective d'enseigment introductif de l'Algebre. Recherches em Didactique des Mathématiques. Editions La Pensée Sauvage. Vol. 13, nº3, 1993, pp.333 - 384.

48. LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

49. LOPES, W. S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função:** uma proposta de ensino. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2003.

50. MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática**. Educação Matemática-- uma introdução. 2ªed., 2002, pp.197-208.

51. MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando na Adição e Subtração--** Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

52. MARANHÃO, M. C. S. A. **Medidas de Comprimentos, unidades convencionais em articulação arbitrárias**. São Paulo: PUC, 1996.

53. ______. **Uma Engenharia Didática para a aprendizagem de concepções de tempo.** Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 1996.

54. ______. Dialética Ferramenta-Objeto. *In*: Machado, D. S. A. *et al.* **Educação Matemática**: uma introdução. 2002, pp. 15- 134.

55. MASON, J. Expressing Generatily and Roots of Álgebra. *In*: **Approches to Álgebra**: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publish, 1996, pp.65 - 86.

56. MEIRA, L. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas.** Significados e modelagem na atividade algébrica. São Paulo: PMG 2, 2003.

57. NAKAMURA, O. Y. A**. Generalização de padrões geométricos:** caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2003.

58. NOTARI, A. M. **Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas:** um diagnóstico comparativo dos procedimentos. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2002.

59. NUNES, T.; LIGHT, P.; MASON, J. **Tools for thought**: the Measurement of Length and Área. Learning and Instruction. Vol. 3, 1993, pp. 39-54.

60. NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Introdução à Educação Matemática** – os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM, 2002.

61. PIAGET, J. e GRECO, P**. Aprendizagem e Conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

62. PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas.** Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

63. PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

64. PIRES, C. M. C.; CURI. E; CAMPOS, T. M. M. **Espaço & Forma**. São Paulo: PROEM, 2000.

65. PREPARADED BY THE ALGEBRA WORKING GROUP OF THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **A Framwork for Constructing a Vision of Algebra -** version d´October 1995. New Revision Editor, 1997-1998.

66. RADFORD. L. The Roles of Geometry and Arithmetic in the development of Algebra: Historical remarks from Didatic Perspective. *In:* BEDNARZ,N *et al*. **Approches to Algebra.** Netherland**:** Kluwer Academic Publishers, 1996, pp. 39-51.

67. RICO, L. Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. In***:** KILPATRICK, J.; RICO. L. y GOMEZ, P. **Educación Matemática**, **"una empresa docente".** Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

68. SARESP, 2005: **Provas e Avaliação do Sistema.**

69. SFARD, A. **Concept of Function.** Dubinsky e Harel Ed., vol.25, 1992.

70. **______.** On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin**.** *In:* **Education studies in mathematics**, v. 22, 1991, pp.1-36.

71. SHULTE, ALBERT P. e COXFORD, ARTHUR. **As idéias da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1994.

72. SILVA, M. J. F. da. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 1997.

FONTES

Disponível em <http://www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2003/eda/tetxt3.htm>. Acessado em: 20 dez 2005.

Disponível em <http//www.yahoo.com/search>. Acessado em 20 dez 2005.

Disponível em <http://www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2003/eda/tetxt2.htm>. Acessado em: 20 dez 2005.

Disponível em <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2005/subpages/conheça.htm>. Acessado em: 16 jun. 2006.

ANEXOS

ANEXO 1

Ficha de atividade do aluno – Atividade 1: Medida de Superfície

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade: Com o Kit que o grupo recebeu execute as seguintes tarefas:

1- Recubra a superfície da carteira utilizando as peças do jogo que você recebeu;
2- Registre a quantidade de peças que serão necessárias para recobrir a carteira;
3- Ao finalizar o registro da medida da carteira, compare o resultado obtido com os resultados dos outros grupos.

Escreva suas respostas no espaço abaixo:

ANEXO 2

Ficha de atividade do aluno – Atividade 2: Variação de Área

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.
2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete a uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b)(cm)	**Altura (h)(cm)**	**Área (A)(cm²)**
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	
	5	

3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais?
4- Olhando a tabela a cima, como você calculou a área de cada retângulo?
5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual?
6- Sendo a área de um retângulo de altura 5cm igual a 30cm², qual é a medida da sua base ?
7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área?
8- E se á área fosse 50 cm²?
9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura 5 cm ?
10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

ANEXO 3

Ficha de atividade do aluno-Atividade 3: Conservação de Área, uma relação entre as duas dimensões

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade:

1. Construa os diferentes retângulos cuja área seja igual a 24 cm².
2. Registre os resultados na tabela abaixo:

Base (b) (cm)	Altura (h) (cm)	Área (cm²)
		24
		24
		24
		24
		24
		24
		24
		24
		24

3. Compare os valores da base e da altura, o que acontece com elas?
4. Se temos uma altura que vale 12cm, qual é o valor da base?
5. Você encontrou algum retângulo com medidas iguais?
6. Como você encontrou os valores da base e da altura dos retângulos?
7. Você consegue escrever uma expressão para encontrar os retângulos com área igual a 24 cm²?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

ANEXO 4

Ficha de atividade do aluno – Atividade 4: Diferenciando Perímetro de Área

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade:

Situação-Problema: Mariana quer construir um galinheiro de forma retangular para suas galinhas usando 50 metros de cerca. Ajude-a encontrar as várias formas retangulares de maneira que ela possa construir o galinheiro. (Considerar o fio de arame de 50cm utilizando a escala (1 m corresponde a 1 cm).

Parte A:

1) Utilizando os fios que você recebeu, construir cinco retângulos diferentes.
2) Medir as dimensões dos retângulos utilizando valores inteiros, e registrar estes valores na tabela abaixo.

Tabela 1

Base (b)	Altura(h)	b + h	C = 2b+2h

3) Completar as outras colunas da tabela 1, utilizando os valores de b (Comprimento) e h (altura).
4) Calcular os novos valores para completar as outras colunas.
5) Observar o que acontece com os valores da terceira coluna da tabela 1. Escreva sua conclusão.
6) Se a altura é 15cm, quanto mede a base .
7) Se a base vale 20cm, quanto mede a altura.

8) Escreva o cálculo que você fez para encontrar os valores dos lados do retângulo.
9) Com a expressão que você escreveu no item anterior é possível calcular as dimensões dos outros retângulos?
10) Observar agora a coluna b+h da tabela 1 com a coluna C=2b+2h, é possível escrever uma expressão para encontrar os valores da coluna 3, conhecendo-se os valores da coluna 4? Escreva.

Parte B:

1) Transfira para a tabela abaixo as medidas dos retângulos construídos no item anterior.

Tabela 2

Base (b)	Altura (h)	Área

2) O que é área para você? Como você calcularia as áreas das figuras?
3) Se a base é 10 cm e a área 40cm² qual é o valor da altura.
4) Se a altura é 30 e a área é 90 cm², quanto mede a base.
5) Se a altura vale 8cm e a base vale 15cm, quanto mede a área.
6) Conhecendo a base e altura que operação você fez para encontrar a área?
7) Observando os cálculos que você fez para completar a tabela 2. Escreva uma fórmula geral para encontrar a área.

Obs: Responda as questões na folha anexa.

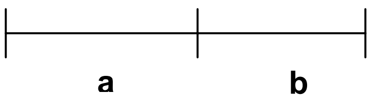
ANEXO 5

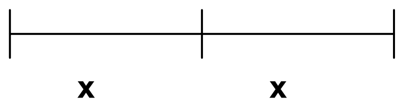
Ficha de atividade do aluno – Atividade 5 – Trabalhando com Variáveis

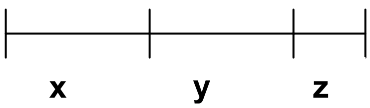
Nome do aluno: ____ nº______

Atividades:

1) Dado um segmento de comprimento C. Procure expressar C como soma dos segmentos dados.







2) Desenhe um segmento em seu caderno cuja medida seja 10cm. Imagine que este segmento é um fio de arame que deve ser dividido em duas partes, uma parte de medida x e outra de medida y. Atribua a X e a Y os valores determinados na tabela abaixo.

X(cm)	Y(cm)	2X	10- X	X^2	X+Y	$X \bullet Y$
1,5						
2,5						
3						
5						
6						
8,5						
9						

Depois que você completou a tabela, responda:

a) O que aconteceu com os valores de x, e y ?
b) Como podemos conseguir novamente o tamanho do comprimento do fio?Escreva uma expressão.
c) Como você calculou o valor x^2?
d) E como você calculou o valor 2x? Comparando com a expressão anterior, elas são diferentes?
e) Determine os novos resultados das expressões abaixo utilizando os valores de x e y da tabela anterior:

2 x + x	**2 x + 3y**	**4 x^2**	**3 xy**	**5x - 3y**

3) Atividade complementar: Escreva as seguintes sentenças[7]algébricas:

a. Um número inteiro qualquer______________
b. O dobro desse número __________________
c. O triplo desse número __________________
d. Um número elevado ao quadrado__________
e. A soma de dois números quaisquer___________
f. O dobro de um número somado com o triplo do outro __________
g. A diferença entre os dois números quaisquer_______
h. O produto entre dois números___________________

[7] Esta atividade complementar baseada em Antonio José Lopes Bigode- Coleção: Matemática, Hoje é feita assim -vol.3(7ªsérie),2000-FTD- São Paulo-SP

ANEXO 6

Ficha de atividade do aluno – Atividade 6 – Decomposição da Cruz-Equivalência de Área

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade de Equicomposição de Área – Transformar a Cruz em um polígono.

Com as cruzes desenhadas na folha que vocês acabam de receber, escolham uma delas e procure construir a figura pedida. Em seguida,responda as questões de 1 a 4, antes de fazer a atividade 5

1) Decomponha a cruz em partes e componha essas partes a fim de obter um quadrado.
2) Mostre através do desenho, como você fez.
3) Com o desenho da outra cruz que é igual a primeira. Procure calcular o valor da área do quadrado.
4) Quanto vale a área da cruz?E a área do quadrado é igual ou diferente da cruz?
5) Pensando na decomposição da cruz em partes, observe a figura abaixo e responda:

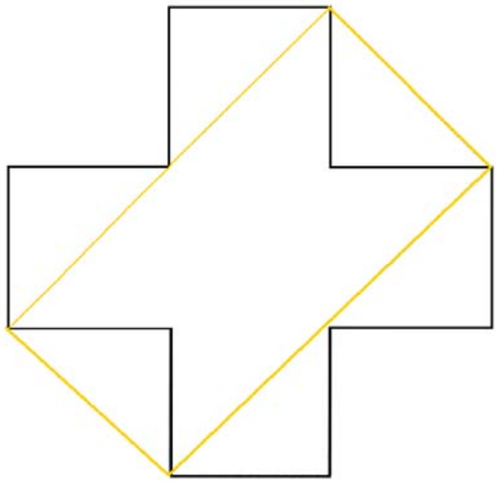


Fig.2

a) Compare a área do retângulo formado com a área da cruz. Elas são iguais? Registre suas observações.

b) Comparando o retângulo do desenho acima com o quadrado construído. As áreas são iguais? Por quê?

Obs: Responda as questões na folha anexa.

Ficha de atividade do aluno – Atividade de Fixação de Equivalência de Área

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade de Fixação: Jogo do Desafio: Você consegue construir as figuras pedidas, utilizando todas as peças do jogo?

1) Com o Kit de peças que você acaba de receber, execute as seguintes tarefas:

   a) Procure construir um quadrado utilizando todas as peças recebidas. Desenhe a figura formada.
   b) Determine a área do quadrado e escreva sua expressão.
   c) Pensando agora na figura do retângulo, você consegue construí-lo utilizando todas as peças? Desenhe a figura formada.
   d) Comparando a área do quadrado com a área do retângulo, qual é a maior?
   e) Podemos dizer que o quadrado e o retângulo são figuras equivalentes, por quê?
   f) Verifique se é possível construirmos uma cruz semelhante ao do exercício anterior, na qual sua área seja equivalente ao quadrado e ao retângulo construídos nos itens anteriores.

Obs: Responda as questões na folha anexa.

Folha anexa: Com as figuras das Cruzes para serem decompostas

1) Figura A para decompor a Cruz em Quadrado

Figura A

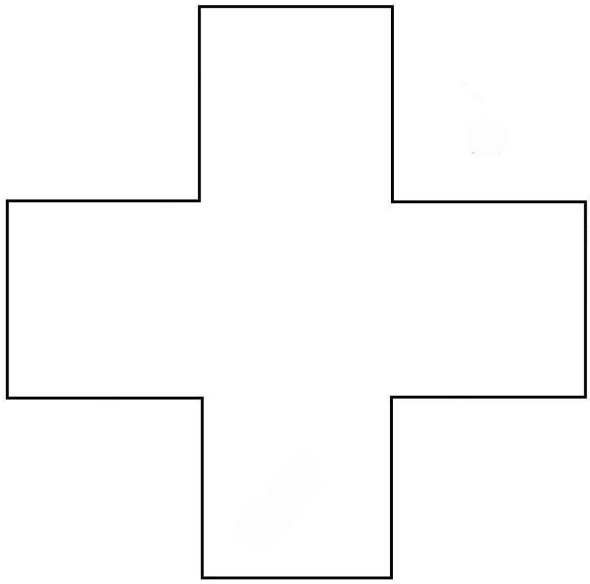
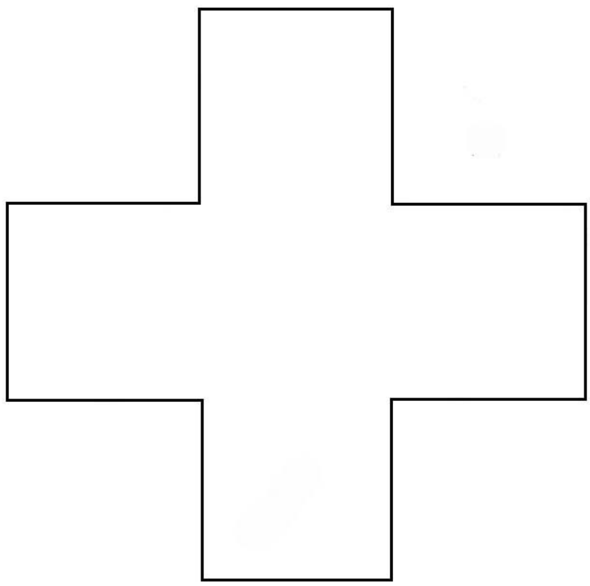


Figura B. Para calcular a área do Quadrado

Figura B



Ficha de atividade do aluno – Atividade de Fixação de Equivalência de Área

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade de Fixação: Jogo do Desafio: Você consegue construir as figuras pedidas, utilizando todas as peças do jogo?

1) Com o Kit de peças que você acaba de receber, execute as seguintes tarefas:

   a) Procure construir um quadrado utilizando todas as peças recebidas. Desenhe a figura formada.
   b) Determine a área do quadrado e escreva sua expressão.
   c) Pensando agora na figura do retângulo, você consegue construí-lo utilizando todas as peças? Desenhe a figura formada.
   d) Comparando a área do quadrado com a área do retângulo, qual é a maior?
   e) Podemos dizer que o quadrado e o retângulo são figuras equivalentes, por quê?
   f) Verifique se é possível construirmos uma cruz semelhante ao do exercício anterior, na qual sua área seja equivalente ao quadrado e ao retângulo construídos nos itens anteriores.

Obs: Responda as questões na folha anexa.

ANEXO 7

Ficha de atividade do aluno – Atividade 7: Construindo Retângulos Aplicando a Propriedade Distributiva

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade 7: Com o kit que você recebeu desenvolva as seguintes tarefas:

1) Construa dois novos retângulos utilizando:
   a) 2 peças;
   b) 3 peças;
   c) 4 peças.
2) Desenhe os novos retângulos na folha quadriculada e calcule suas áreas.
3) Registre em seu caderno como você calculou as áreas das figuras.
4) Construa alguns quadrados com as peças 3 x 3, 3 x 4, 4 x 3, 4 x 4 e desenhe as figuras formadas em seu caderno.
5) Utilizando as peças 5 x 6, 6 x 6, 6 x 5, 5 x 5, procure construir novos quadrados. Desenhe pelo menos três em seu caderno.
6) Com os quadrados construídos nos item 5, complete as tabelas a seguir:

Tabela 1

a	b	h	(a x h)	(b x h)	Área total

Tabela 2

(a+b)	h	Área total = (a+b)x h

Observando a tabela 1 responda:

a) O que acontece com os valores da a, b, e h? Algum deles é constante?
b) Como podemos calcular a área da figura formada? Registre seus cálculos.
c) Compare as tabelas 1 e 2, observando os valores das áreas.Elas são iguais? Como foram calculadas?
d) Verifique se é verdadeira a igualdade entre as expressões : (a+b).h = a.h + b.h. atribuindo as letras a, b, h valores numéricos inteiros. Podemos afirmar que elas são equivalentes?
e) Compare se existe a equivalência entre as seguintes expressões:
   e.1) 5(a +2b) = 5 a + 10b
   e.2) (3 a + 2 b).4 = 7 a + 6b
   e.3) 3(a + 5b) = 3 a + 15 b
   e.4) z(2x +3y) = 2xz + 3zy

7) Componha um retângulo 3 x 9 utilizando duas peças. e complete a sentença abaixo:

   3 x 9 = _____ +_____

8) Utilizando três peças 5x9 construa um retângulo e escreva sua sentença.

9) Construa um retângulo com duas peças 4x12.

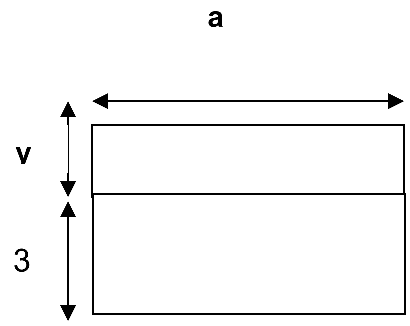
10) Compare agora as sentenças escritas nos itens 7, 8, 9 com a maneira que foram calculadas as áreas das figuras na tabela 1. Registre suas observações.

Ficha de atividade do Aluno – Complementar da Atividade 7

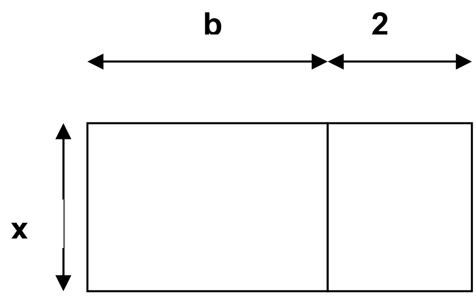
Nome do aluno: ____ nº______

1) Escreva as expressões algébricas que representam as áreas das figuras[1] abaixo:

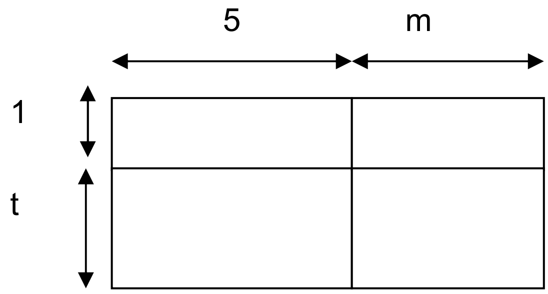
a)



b)



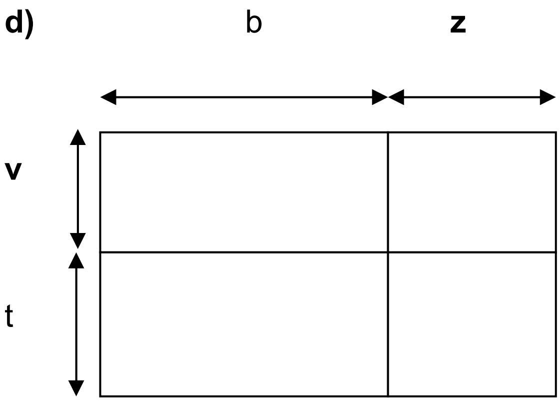
c)



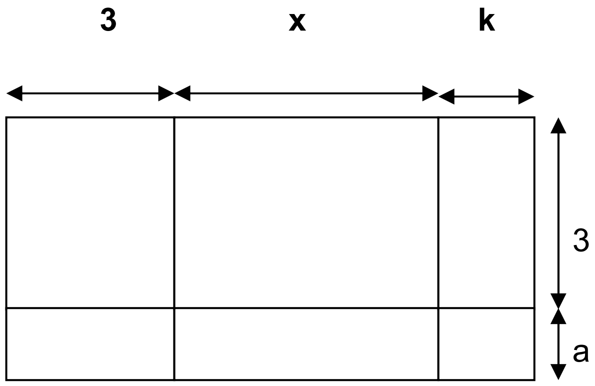
---

1 Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode, Coleção: Matemática:Hoje é feita assim- vol.3(7ª série)-2000- FTD - São Paulo-SP

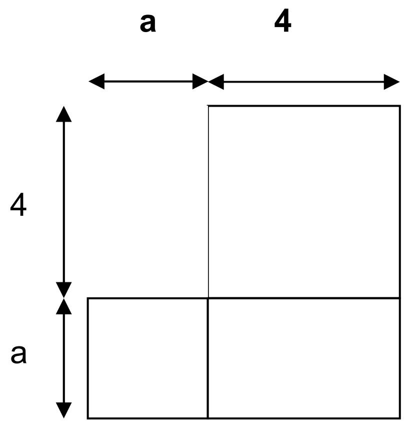
d)



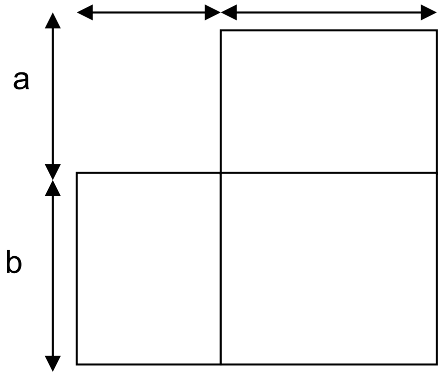
e)



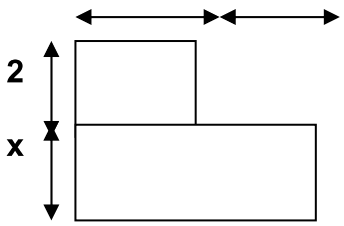
f)



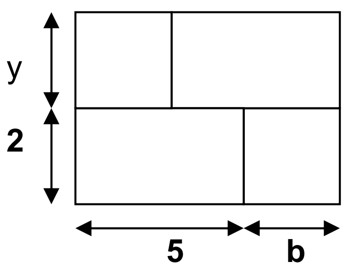
g)



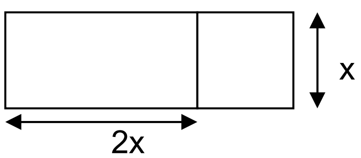
h)



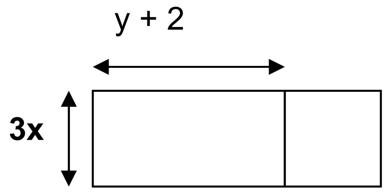
i)



j)



k)



2) Construa os retângulos cujas áreas são :(Considerando 0,5 cm como unidade de medida)

a) $(x +5) . (y + 3)$ b) $(x + 8) .(b + 3)$ c) $2x.(3x + 4)$ d) $3y.(2x +7)$ e) $4x.(2x + y)$

ANEXO 8

Ficha de atividade do aluno – Atividade 8 – Determinação da Área por Decomposição – Jogo dos Cartões

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade 8: Jogos dos Cartões

Com o par de cartões (contendo figuras diferentes) que vocês receberam, vamos calcular as áreas e compará-las segundo as ordens abaixo.

1) Observe a figura colorida do seu cartão e determine sua área, registrando seus cálculos .
2) Mostre seu cartão e o resultado encontrado para o seu parceiro, compare os resultados encontrados para as duas figuras.
3) Unindo-se as duas figuras coloridas contidas nos cartões é possível construir uma nova figura?
4) Preencha a tabela abaixo com os dados dos itens anteriores:

Área 1 (cartão 1)	Área 2 (cartão 2)	Área 1 + Área 2	Base x Altura

5) Analisando os dados da tabela preenchida acima, compare as áreas das figuras dos cartões com a área da nova figura formada. Registre a suas observações.
6) Escreva expressões que determinam os valores das áreas das figuras formadas.
7) Com as expressões que você escreveu compare elas com a expressão para o cálculo de área de retângulos (A= b x h). Elas são equivalentes?

ANEXO 9

Ficha de atividade do aluno – Atividade 9: Construção de diferentes retângulos utilizando Pentaminós

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade 9: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó, e desenhe na folha anexa.

1) Três retângulos utilizando duas peças.Quais são as peças que unidas não formam retângulos?
2) Quatro retângulos com três peças;
3) Dois retângulos com quatro peças;
   a) Determine as áreas das figuras formadas.Quais foram os valores encontrados?
   b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.
   c) Compare a expressão geral da área A= b x h, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.
   d) Pensando na expressão n x k, que valor numérico é atribuído a k?
   e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de k = 6 e k= 7. Será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possível formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.
   f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa.

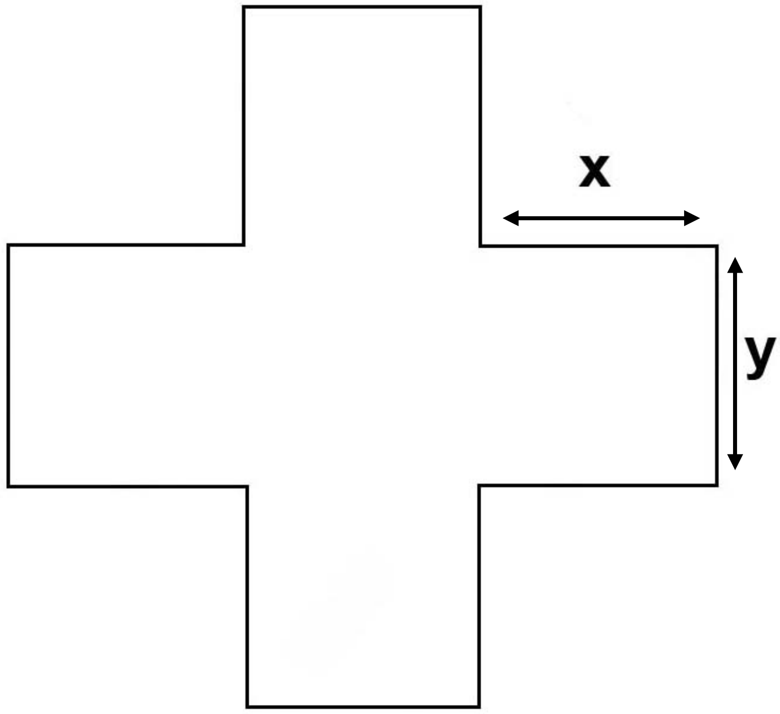
ANEXO 10

Atividade 10 – Decomposição da Cruz – Utilizando a propriedade distributiva, para a construção de expressões algébricas

Atividade 10: Construindo Expressões Algébricas diferentes

Com o retângulo que você acaba de receber realize as seguintes tarefas:

1) Construa uma Cruz como a figura abaixo atribuindo os seguintes valores para x e y:



Conforme a cor do retângulo recebido, desenhe a cruz no seu interior:

a) x = 4 cm e y = 3 cm para o retângulo azul;
b) x = 4 cm e y = 6 cm para o retângulo vermelho;
c) x= 5 cm e y = 2 cm para o retângulo amarelo;
d) x = 5 cm e y = 4 cm para o retângulo verde;
e) x= 6 cm e y = 3 cm para o retângulo laranja

2) Calcule a área total da cruz construída.
3) Escreva as expressões algébricas que determinam a área da cruz. Quantas você encontrou? Elas são equivalentes?
4) Qual foi o valor encontrado para a área da Cruz?
5) Determine agora a área do retângulo recebido.
6) Escreva as expressões algébricas correspondentes a área do retângulo recebido.
7) Como podemos determinar os perímetros da Cruz e do Retângulo .
8) Escreva as expressões algébricas;
9) Calcule os seus valores numéricos;
10) Escolha três valores atribuídos para x e y, dados no item 1 desta atividade e calcule os valores das expressões algébricas dadas a seguir:

Tabela 1

Valor de X	**Valor de Y**	**2xy + 3xy**	**12 x – 4y**	**6.(x + y)**	**(x + 1)²**
		(x+2) .(x -2)	**(x +y). (x-y)**	**(x + y)²**	**2x² + 2y²**

Obs: Responder as questões na folha anexa.

Ficha do aluno – Atividade Complementar da atividade 10

Nome do aluno: ____ nº______

1) Determine os valores numéricos das expressões algébricas da tabela dada a seguir. Escolhendo valores a x e y variando entre 1 a 8.

x	y	5.(x+ y)	4x + 3y	6xy+ 2y	2x²	7.(xy)+ 4y
		10x²	**(y +3)²**	**(x+2).(y+3)**	**3x² – 8y²**	**9 x²y²**

2) Determine os valores pedidos:

a) Se a+b = 4, então a + b + c = 15, quanto vale c ______________________

b) Se x = 15 e y = 3.então qual é o valor da expressão 2.(x+y) _____________

c) Se m = 4 e z =6, então qual é o valor de 7mz ________________________

d) Se x = 8 e y =3, então qual é o valor de (3x + 6y)_____________________

e) Se a= 5, então qual é o valor de (a+ 2)²______________________________

f) Se t= 7, então qual é valor de (t-4) .(t+ 4)___________________________

g) Se h= 9, então qual é o valor de 2h²________________________________

h) Se v= 12, então qual é o valor de 2v________________________________

i) Se w = 45, então qual é o valor de (2 w – 5)_________________________

j) Se m= 23 e n= 12, então quanto vale 2m __________________________

ANEXO 11

Ficha de atividade do aluno – Atividade 11: Produto Notável

Nome do aluno: ____ nº______

Atividade 11: Produto Notável

Com o quadrado que você acabou de receber, execute os seguintes procedimentos:

1) Escolha um valor inteiro entre 4cm a 8cm, marque este valor em um dos lados do quadrado.Trace um segmento que divida a figura. Aguarde as instruções de seu professor para terminar a dobradura.
2) Quantas figuras foram formadas? e quais são elas?
3) Calcule as áreas das figuras formadas e transfira os valores encontrados para a tabela 1.

Tabela 1

a^2	2 a. b	b^2	Área Total

4) Calcule a área da figura total utilizando as expressões da tabela 2

Tabela 2

(a +b)	$(a + b)^2$

5) Observe as tabelas 1 e 2 e responda:
   a) Como você determinou a área total da tabela 1? Explique
   b) Escreva a expressão que representa a área total da tabela 1.
   c) Observando a tabela 2, o que representa a expressão (a+b)?
   d) Como você determinou a área da figura maior. Escreva sua expressão.
   e) O que representa a expressão $(a+b)^2$?

f) Compare as expressões obtidas para o cálculo das áreas totais da tabela 1 e tabela 2. Elas são equivalentes ? Explique sua resposta.

g) Completa as tabelas 3, 4 com os resultados obtidos na discussão do professor e seus colegas.

Tabela 3

Resultados	**a^2**	**2 ab**	**b^2**	**Área Total**
Dupla1				
Dupla 2				
Dupla 3				
Dupla 4				
Dupla 5				
Dupla 6				
Dupla 7				

Tabela 4

Resultados	**(a+b)**	**$(a+b)^2$**	**Área Total**
Dupla1			
Dupla 2			
Dupla 3			
Dupla 4			
Dupla 5			
Dupla 6			
Dupla 7			

Analisando agora o seu resultado com os dos seus colegas, responda:

a. Podemos considerar a e b como variáveis?

b. O que representam os valores a e b para encontrar as áreas das figuras?

c. Se os valores de a e b forem iguais como podemos escrever as expressões encontradas?

d. Utilize os valores de a e b que você marcou no seu quadrado e calcule $a^2 + b^2$. Está expressão é equivalente a $(a+b)^2$?

e. O que representa $a^2 + b^2$?

f. Calcule a expressão $(2a + 2b)^2$. Ela é equivalente a $(a + b)^2$?

Obs: Responder as questões na folha anexa.

Atividade Complementar de Produto Notável

Nome do aluno: ____ nº______

1) Como podemos representar as seguintes expressões algébricas através de desenhos:
   a) (a+ 7) . (a - 7), para a >7
   b) (a + 3) . (a – 3), para a$\neq 3$ e a $\neq -3$
   c) (a –2) . (a - 2), para a >2
   d) (4 +b) . (4 - b), para b > 4
   e) (5+b) . (5+b), para b > 5

ANEXO 12

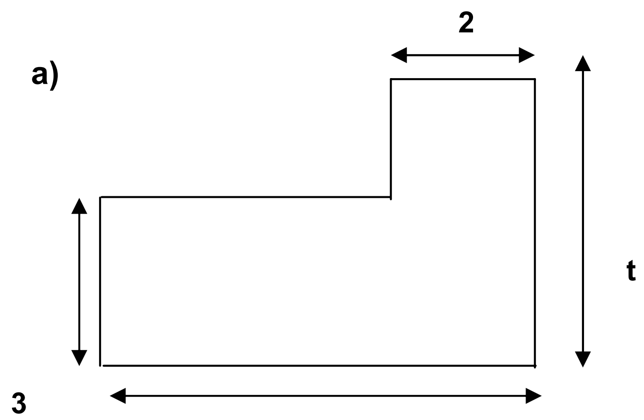
Atividade 12 – Construindo expressões algébricas equivalentes para a determinação da área.[*1]

Atividade 12: Atividades de Equivalência de Área

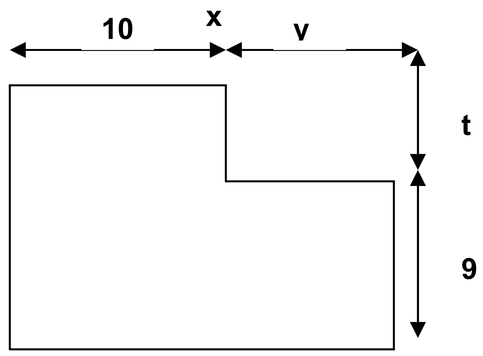
A seguinte situação foi proposta aos alunos no intuito de construir expressões algébricas equivalentes.

1) Para cada uma das figuras abaixo escreva três expressões algébricas correspondentes a sua área.[5]

a)



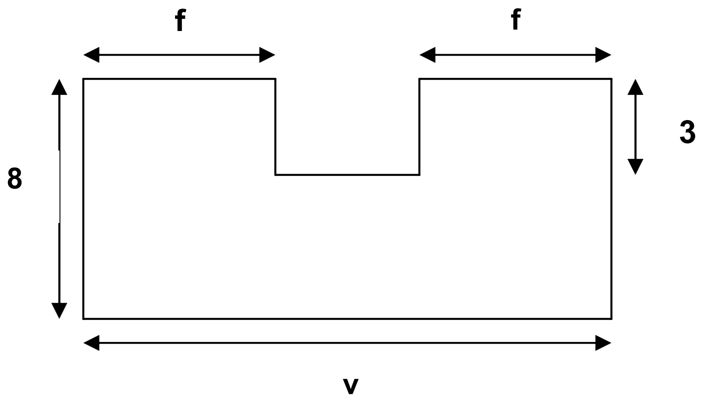
b)



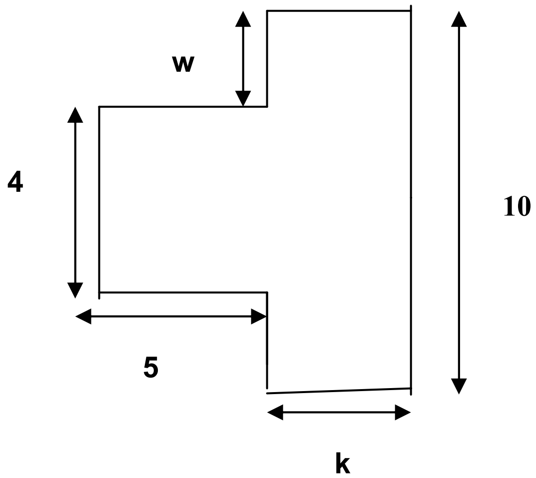
c)

[1] Atividade baseada em Antonio José Lopes Bigode – Coleção :Matemática, Hoje é feita assim. vol. 3(7ªsérie)-2000-FTD- São Paulo-SP

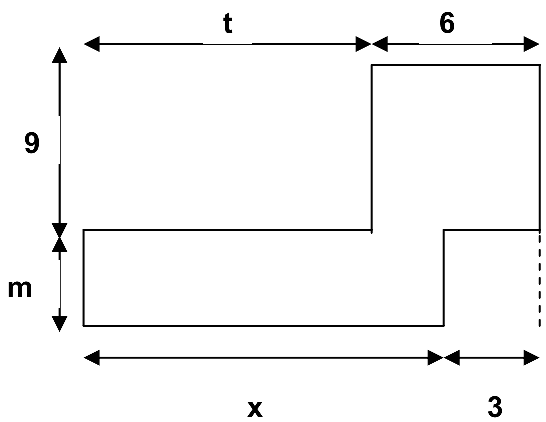
[5] Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode, Coleção : Matemática:Hoje é feita assim - vol.3 (7ª série)-2000-FTD- São Paulo-SP



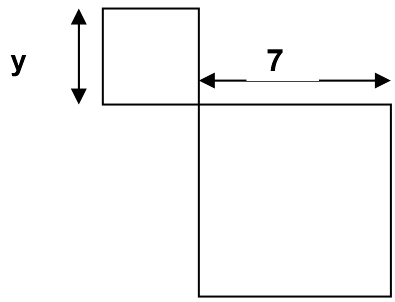
d)



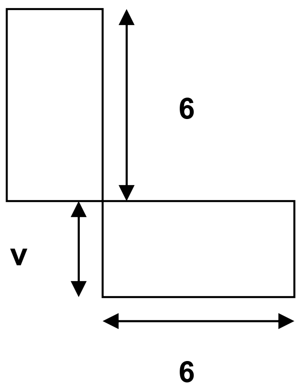
e)



f)



g)



2) Com as expressões algébricas que você escreveu para determinar a área de cada figura verifique se elas são equivalentes.

   c) Escolha valores inteiros variando de 1 a 10, e encontre os valores numéricos de cada expressão. Os resultados encontrados foram iguais?

   d) Podemos considerar estas expressões equivalentes?

3) Preencha as partes incompletas das figuras dadas: utilizando retângulos e quadrados, e escreva as novas expressões formadas para determinar as áreas das figuras.

   a) Compare as expressões que você obteve no item 1, com as expressões que você escreveu para o item 2 na folha anexa e responda: Elas são equivalentes?

4) Calcule agora os valores das áreas das figuras formadas.

Protocolos dos alunos. Atividade 1 – Medida de Superfície

Grupo G

Ficha de atividade do aluno -Atividade 1: Medida de Superficie

Nome do aluno: [illegible] **nº** 19, 26, 29, 42, 43

Atividade: Com o Kit que o grupo recebeu execute as seguintes tarefas:

1) Recubra a superficie da carteira utilizando as peças do jogo que você recebeu;

2) Registre a quantidade de peças que serão necessárias para recobrir a carteira;

3) Ao finalizar o registro da medida da carteira, compare o resultado obtido com os resultados dos outros grupos.

Escreva suas respostas no espaço abaixo:

base= 11 quadrados, 8 quadrados = b x h = 11 x 8 = A□= 88 quadrados

Grupo:
A= 441 - retangulo grande
B= 44 - retangulo grande
C= 44 - retangulo grande
D= 88 - quadrado grande
E= 143 - retangulo pequeno
F= 88 - quadrado grande
G= 88 - quadrado grande
H= 144 - retangulo pequeno
I= 143 - retangulo pequeno

Protocolos dos alunos: Atividade 2 – Variação de Área

Ficha de atividade do aluno –Atividade 2:Variação de Área

Nome do aluno: Emílio / Gustavo / Everton nº 15, 17, 22.

Atividade: Execute as seguintes tarefas:

1- Construir retângulos, cuja altura seja 5 cm em uma malha quadriculada.

2- Após construir os retângulos na malha quadriculada, complete a uma tabela com as medidas dos retângulos e calcule as áreas destas figuras.

Base (b)(cm)	Altura (h)(cm)	Área (A)(cm²)
4	5	20 cm²
3	5	15 cm²
6	5	30 cm²
1	5	5 cm²
2	5	10 cm²
9	5	45 cm²
8	5	40 cm²

3- Compare os retângulos que vocês fizeram. São todos iguais? não. Porque as bases não corresponde aos mesmos comprimento

4- Olhando a tabela a cima, como você calculou a área de cada retângulo?
BASE X ALTURA = ÁREA

5- Você encontrou algum retângulo que tem área igual?
não porque as bases são diferentes

6- Sendo a área de um retângulo de altura 5cm igual a , 30cm², qual é a medida da sua base ? 6 = BASE 5 6 cm

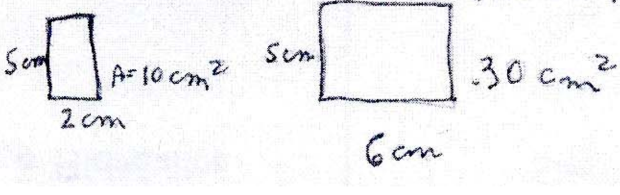
7- Se a base for 15 cm, qual é a sua área?
75 cm²

8- E se a área fosse 50 cm²? A.B = 50 cm² 10 . 5 = 50 cm²

9- Depois de você analisar a tabela acima, explique como podemos calcular a área de qualquer retângulo que tem altura 5 cm ? A = 5 e B = 1 = 5 . 1 = 5 cm²

10- Olhando a coluna da base o que acontece com a área quando a medida da base aumenta? E quando diminui? Como você pode representar esta situação? AUMENTA A ÁREA E E QUANDO DIMINUI DIMINUI A ÁREA

Obs: Responda as questões na folha anexa.



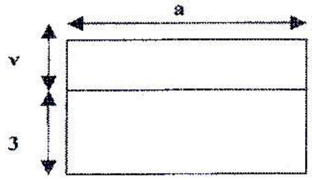
Protocolos dos alunos: Atividade 7 complementar: Construindo Retângulos

Ficha de atividade do Aluno -Complementar da Atividade 7

Nome do aluno: Amanda, Jéssica Pereira n° 04/26

1)Escreva as expressões algébricas que representam as áreas das figuras[1]

a)

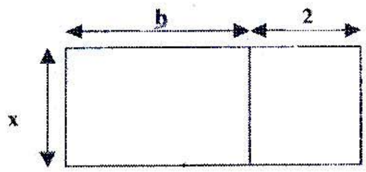


$a.(v+3)=A$

$a.v=A$ $\quad a.v+3=A$

$a.3=A$

b)

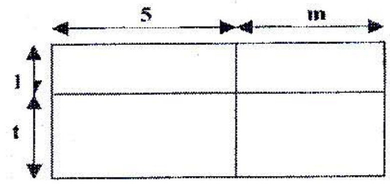


$(b+2).x=A$

$b.x=A$ $\quad b.x+2x=A$

$2.x=A$

c)

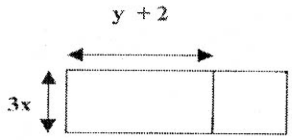


$(5+m).(l+t)=A$

$5.l+m.l+5.t+m.t=A$

[1] Atividade baseada em Antonio Jose Lopes Bigode, Coleção :Matemática:Hoje é feita assim- vol.3(7ª série)-2000-FTD- São Paulo-SP

k)

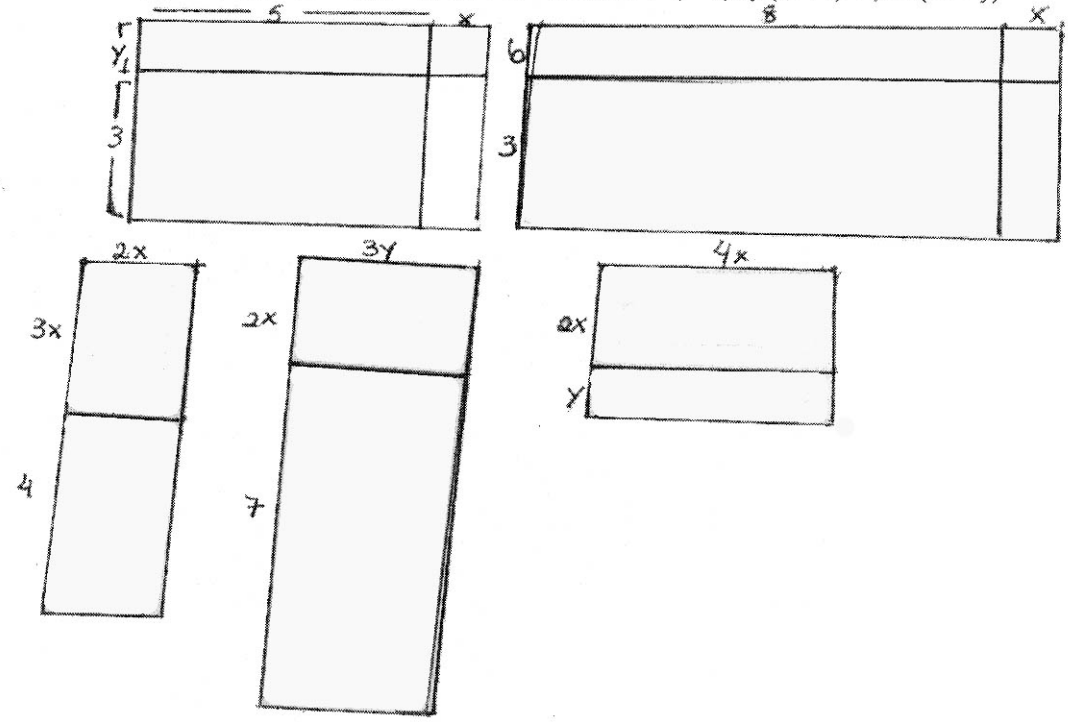


$(y+2+3x) \cdot 3x = A$

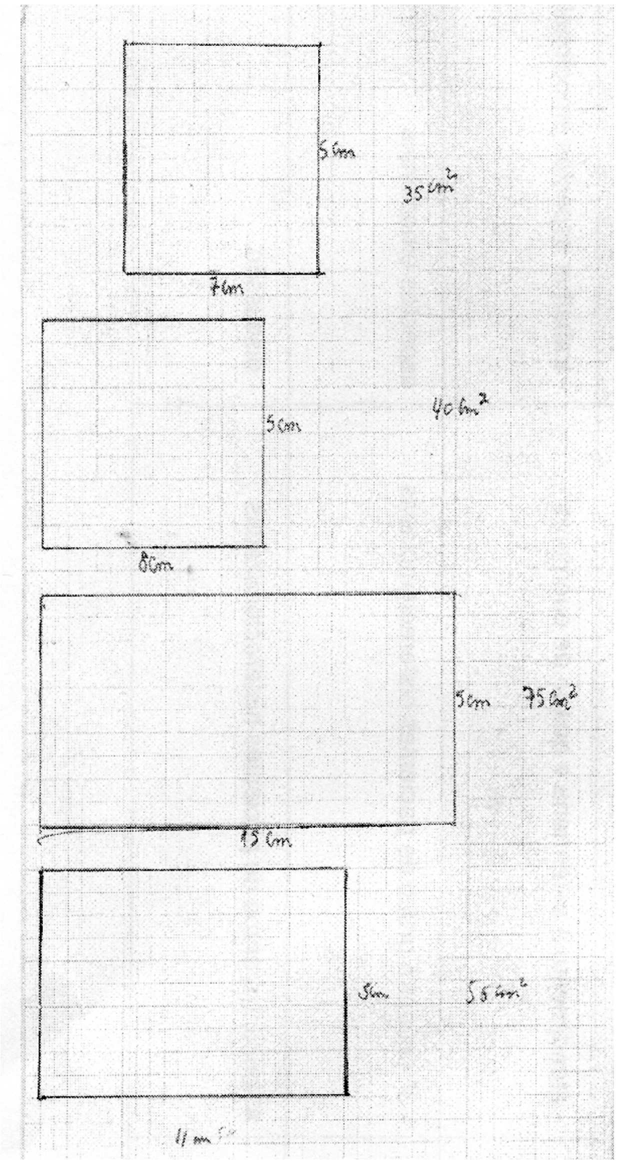
$y+2 \cdot 3x + 3x \cdot 3x = A$

2) Construa os retângulos cujas áreas :(Considerando 0,5 cm como unidade de medida)

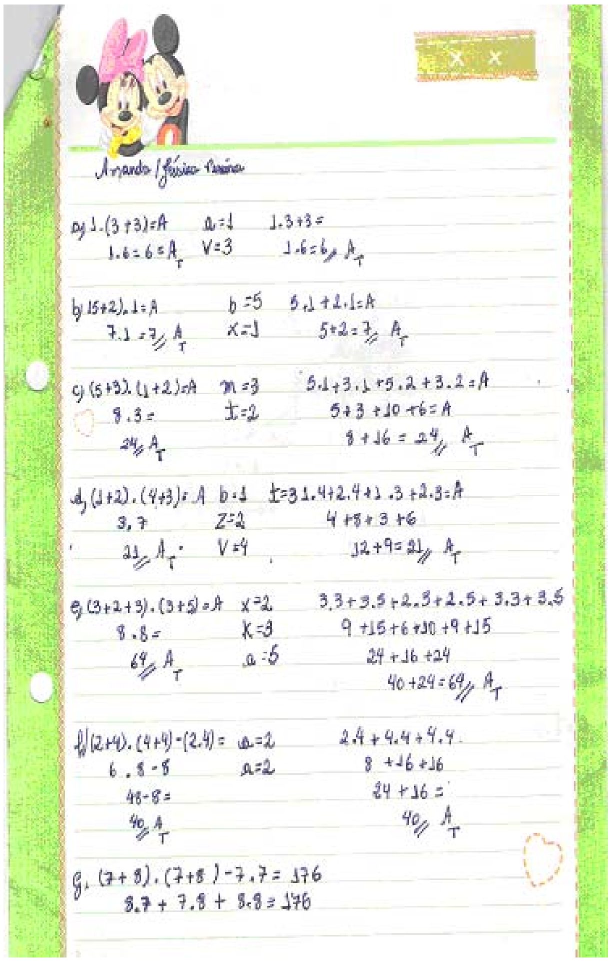
a) $(x + 5) \cdot (y + 3)$ b) $(x + 8) \cdot (b + 3)$ c) $2x.(3x + 4)$ d) $3y.(2x + 7)$ e) $4x.(2x + y)$



Protocolo dos alunos: Registros e Representações Atividade 2 e Atividade 7



Representações da atividade 2



Representações numéricas das expressões Algébricas Equivalentes – atividade 7

Protocolo dos alunos: Atividade 9 – Pentaminós – Decomposição e Composição de Área

<u>**Ficha de atividade do aluno-Atividade 9: Construção de diferentes retângulos utilizando Pentaminós**</u>

Nome do aluno: Kelvin, Luan, Jeferson nº 28, 30, 23

Atividade 9: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó, e desenhe na folha anexa.

1)Três retângulos utilizando duas peças.Quais são as peças que unidas não formam retângulos?

2)Quatro retângulos com três peças;

3)Dois retângulos com quatro peças;

a) Determine as áreas das figuras formadas.Quais foram os valores encontrados?

b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.

c) Compare a expressão geral da área A= b x h, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.

d) Pensando na expressão n x k, que valor numérico é atribuído a k?

e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de k = 6 e k= 7. Será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possível formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.

f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa

1- fizemos a x h que é 5 . 2 = 10 figura 1
fizemos a x h que é 5 . 2 = 10 figura 2
fizemos a x h que é 4 . 2 = 8 figura 3

2- fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 1
fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 2
fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 3
fizemos a x h que é 5 . 3 = 15 figura 4

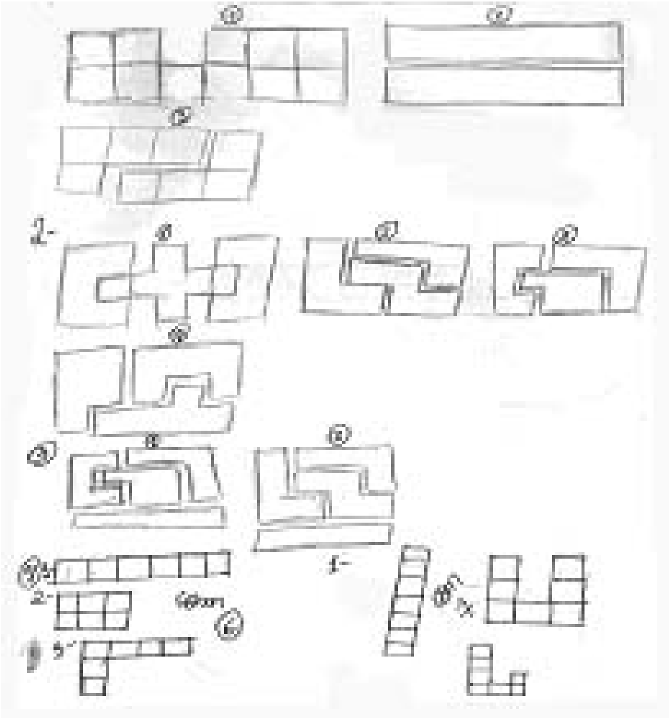
3-) fizemos a x h que é 4 . 5 = 20 figura 1
fizemos a . h que é 4 . 5 = 20 figura 2

4-) K é igual a 5 porque a peça é 5 centímetros
ex: 5 . 2 = 10

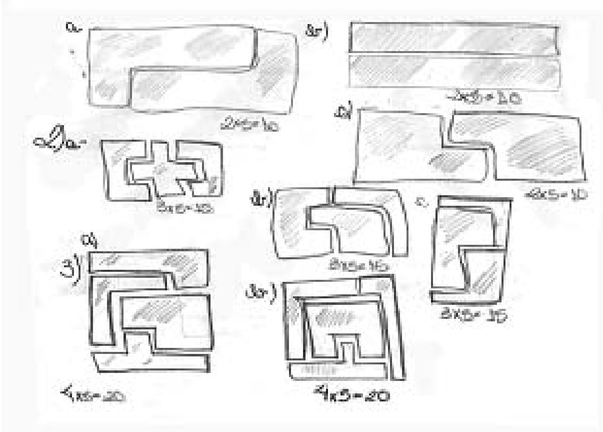
Resposta dos desenhos com 6 e com 7 quadrados

fizemos n x k que é 6 x 2 = 12
a área é igual 6 x N

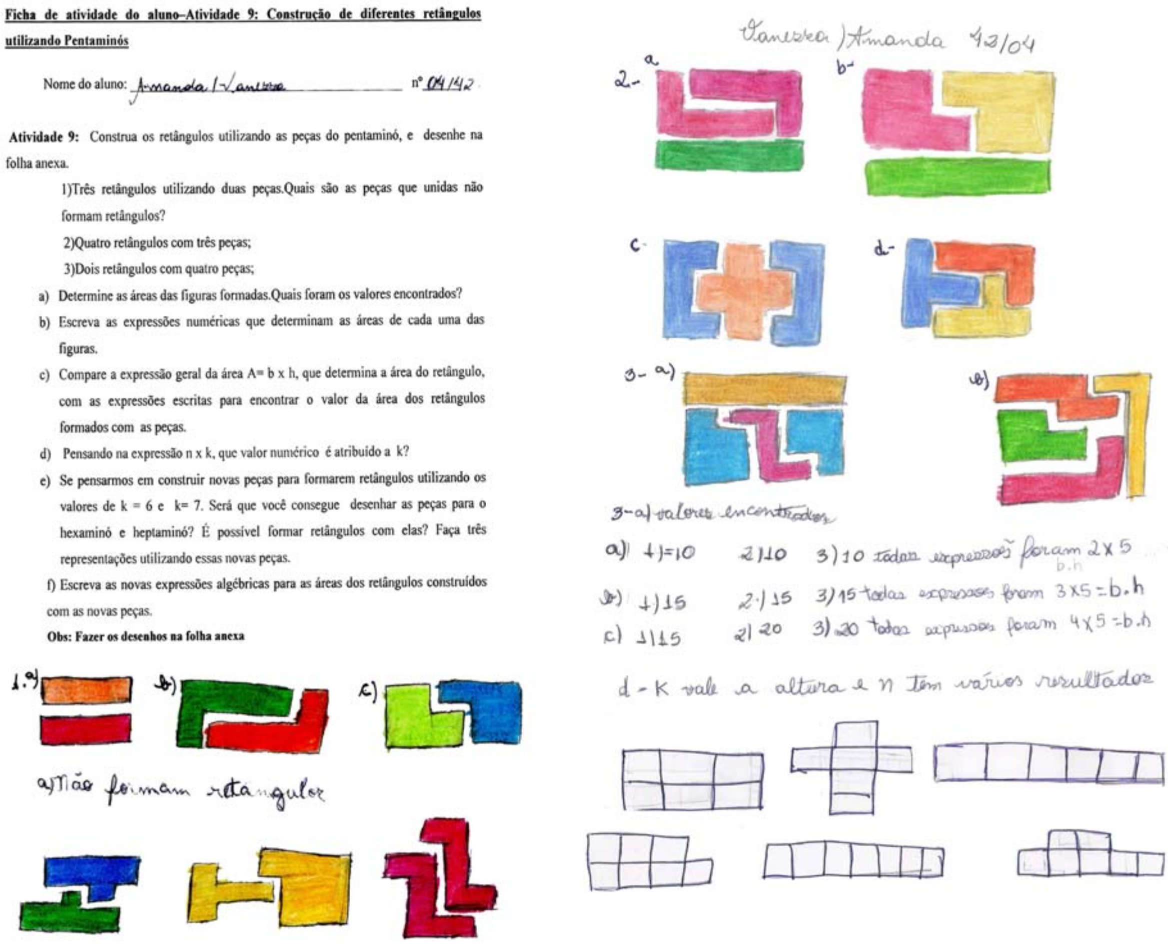
N x K que é 7 x 2 = 14
a área é igual 7 x N



Representações e registros de retângulos da atividade 9



Representação das figuras e cálculo das áreas da atividade 9



Ficha de atividade do aluno–Atividade 9: Construção de diferentes retângulos utilizando Pentaminós

Nome do aluno: Amanda / Vanessa nº 04/42

Atividade 9: Construa os retângulos utilizando as peças do pentaminó, e desenhe na folha anexa.

1)Três retângulos utilizando duas peças.Quais são as peças que unidas não formam retângulos?

2)Quatro retângulos com três peças;

3)Dois retângulos com quatro peças;

a) Determine as áreas das figuras formadas.Quais foram os valores encontrados?

b) Escreva as expressões numéricas que determinam as áreas de cada uma das figuras.

c) Compare a expressão geral da área A= b x h, que determina a área do retângulo, com as expressões escritas para encontrar o valor da área dos retângulos formados com as peças.

d) Pensando na expressão n x k, que valor numérico é atribuído a k?

e) Se pensarmos em construir novas peças para formarem retângulos utilizando os valores de k = 6 e k= 7. Será que você consegue desenhar as peças para o hexaminó e heptaminó? É possível formar retângulos com elas? Faça três representações utilizando essas novas peças.

f) Escreva as novas expressões algébricas para as áreas dos retângulos construídos com as novas peças.

Obs: Fazer os desenhos na folha anexa

Representação das figuras e cálculo das áreas da atividade 9