

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC - SP

Valdenir Francisco Duarte

Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de
argumentação e prova

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC - SP

Valdenir Francisco Duarte

Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de
argumentação e prova

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Trabalho final apresentado à Banca
Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção
do título de MESTRE PROFISSIONAL
EM ENSINO DE MATEMÁTICA, sob a
orientação do Prof. Dr. Vincenzo
Bongiovanni.

São Paulo
2007

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial deste trabalho final por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:_____ Local e Data:_____

Qualquer trabalho pedagógico se torna incompleto se não houver o gosto pelo estudo e o ânimo.

Com muito carinho, dedico este trabalho aos meus pais Iracino e Lurdes por terem me ensinado o gosto pelos estudos; à minha esposa Sônia e ao meu filho João por serem a essência de meu ânimo.

AGRADECIMENTOS

Por intermédio de Santo Antônio, agradeço primeiramente a Deus por tudo, inclusive por nossa conversa todas as manhãs na capela do Santíssimo antes de um dia de serviço.

À Secretaria de Educação pela concessão da Bolsa Mestrado e à reitoria da PUC-SP pela adequação do valor da mensalidade ao valor da bolsa sem as quais meu curso não teria sido possível.

De maneira especial, agradeço ao Professor Doutor Vincenzo Bongiovanni por todo seu apoio, orientação, paciência, dedicação e amparo tanto no aspecto técnico como no aspecto emocional.

Às Professoras Doutoras Celina A. Almeida Pereira Abar e Érica Valéria Alves por participarem da banca examinadora com suas importantes contribuições para este trabalho.

A todos os professores do Mestrado Profissional da PUC-SP pelo seu modo de ensinar com dedicação e amizade constituindo rica contribuição à formação profissional de seus alunos. De maneira especial, à Professora Lulu Healy pela tradução para o Inglês do texto do resumo.

A todos os colegas de curso pela nossa convivência agradável e pelo apoio, sobretudo ao amigo Amadeu Doro pela sua contribuição dedicada e pelos favores prestados.

Ao Francisco e à Vera, da secretaria da PUC-SP, pelo atendimento.

À Diretoria de Ensino de Jundiaí, em especial aos supervisores Adão e Ana pelo amor com que desenvolveram seu trabalho prestando valorosa assistência administrativa, talvez, além de sua obrigação, enquanto eu me ocupava com o curso.

Aos companheiros da Escola Estadual Padre José de Anchieta – Itupeva, em especial aos amigos da diretoria, Patrícia e Armando, da coordenação, Mirna, aos colegas professores e funcionários pelos favores prestados principalmente no contato com os alunos.

Aos jovens alunos participantes da pesquisa por sua colaboração destacando-se como exemplo de dedicação, interesse pelo estudo e responsabilidade.

Aos meus familiares, em especial, ao meu pai Iracino pela construção de artefatos usados na pesquisa e à minha irmã Eliane pelo apoio na parte técnica da elaboração deste trabalho.

Finalmente, com muito carinho, agradeço à minha esposa Sônia pela paciência e pelo apoio incondicional durante todo o curso de mestrado e ao meu filho João Lucas por sua compreensão, principalmente nos momentos em que não tínhamos tempo para brincar ou passear juntos para que pudesse concluir etapas do estudo que agora se conclui.

RESUMO

O presente trabalho, vinculado ao projeto AprovaME, desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, tem por objetivo verificar os avanços e as dificuldades apresentadas pelos alunos na elaboração de provas sobre as propriedades dos paralelogramos.

Os procedimentos dessa pesquisa foram fundamentados nas teorias de Parzysz (2001) sobre provas formais e empíricas; Machado (1995) sobre as quatro dimensões da construção do pensamento geométrico: percepção, representação, construção e concepção; Duval (1995) sobre formas de representação de informações; Duval e Egret (1989) sobre seqüências lógicas.

Usando a metodologia da Engenharia Didática, foram concebidas e aplicadas a alunos da oitava série do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio, uma seqüência de atividades que visaram levá-los, de forma empírica, a construir o conceito de hipótese/tese e, de forma dedutiva, a ordenar proposições de modo a elaborar provas das propriedades dos paralelogramos.

A análise das produções dos alunos mostra dificuldades no processo de argumentação e prova que podem ser agrupadas em três categorias: dificuldades ligadas à elaboração de uma prova, dificuldades oriundas da aceitação de provas empíricas e dificuldades ligadas à leitura e interpretação de enunciados.

A análise também apontou que houve certos avanços nesse processo. Alunos realizaram cálculos sem o apoio empírico, outros apresentaram algumas provas formais completas, e mesmo aqueles que produziram provas incompletas mostraram um raciocínio lógico até o ponto onde elas foram feitas. Além disso, verificou-se que o fato de dois alunos poderem analisar a prova feita pela outra dupla foi um fator muito positivo na seqüência apresentada.

Palavras-chave: paralelogramos, demonstrações, figuras, jogo, seqüência lógica

ABSTRACT

This work, carried out as part of the research project AprovaME developed at the Pontifical Catholic University of São Paulo, has as its aim to verify the advances and the difficulties presented by students in the elaboration of proofs related to the properties of parallelograms. The research procedures adopted during the study drew from the theories of de Parzysz (2001) concerning formal and empirical proofs; the four dimensions involved in the construction of geometrical thinking – perception, representations, construction and conception – presented by Machado (1995); the representation of information from the point of view of Duval (1995); and the considerations related to logical sequences in Duval e Egret (1989).

Using the methodology Didactical Engineering, a sequence of activities was designed and carried out with two groups of students. One group was composed of 8th grade Middle School students and the second of students from the first year of High School. The activity sequence was planned to involve students in, first, the construction of hypotheses and theses on the basis of empirical explorations and, in term, organise, in a deductive form, their propositions in order to elaborate proofs of various properties of parallelograms.

The analysis of the students' productions illustrates difficulties experienced in the process of argumentation and proof that can be grouped into three categories: difficulties related to the elaboration of proofs, difficulties associated with the acceptance of empirical arguments and difficulties linked to problems in interpreting the problems proposed. The analysis also suggested that as the activity sequence progressed, certain advances in relation to these difficulties occurred. Some students began to carry out calculations without needing to consider particular cases, others presented complete formal proofs and even those who produced incomplete proofs made use of logical reasoning in attempts to express valid arguments. In addition, a positive factor related to the activity sequence was the engagement of students in the analysis of proofs constructed by others.

Keywords: parallelograms, proofs, geometrical figures, games, logical sequences.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – A problemática

1.1 – APRESENTAÇÃO.....	14
1.1.1 – Apresentação geral.....	14
1.1.2 - Apresentação do autor.....	14
1.1.3 - Apresentação da estrutura do trabalho.....	15
1.2 – A ESCOLHA DO TEMA E O PROJETO AProvaME.....	16
1.2.1 – A escolha do tema e a adesão ao projeto.....	16
1.2.2 – Breve apresentação do AProvaME.....	17
1.3 – LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO.....	19
1.3.1 – Rigolon.....	19
1.3.2 – Tojo	20
1.3.3 – Alves e Brito	21
1.4 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	22
1.4.1 – Bernard Parzysz.....	22
1.4.2 – Nilson José Machado.....	26
1.4.3 – Raymond Duval.....	28
1.4.4 – Raymond Duval e M. A. Egret.....	31
1.5 – A QUESTÃO DE PESQUISA.....	32
1.6 – METODOLOGIA DA PESQUISA.....	33
1.6.1 – Michèle Artigue e a engenharia didática.....	33

CAPÍTULO 2 – Um estudo histórico sobre paralelogramos.

2.1 – Introdução.....	35
2.2 – Euclides	35
2.3 – Clairaut	38
2.4 – Legendre.....	42
2.5 – Hadamard.....	44

CAPÍTULO 3 – Concepção, análise a priori, aplicação e análise a posteriori das atividades

3.1 – AS ESCOLHAS DIDÁTICAS.....	54
3.2 – O AMBIENTE E OS SUJEITOS DA PESQUISA.....	56
3.3 – A ORGANIZAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO.....	57
3.4 – A COLETA DE DADOS	59
3.5 – ANÁLISES A PRIORI E A POSTERIORI	60
3.5.1 – Análises: Bloco I – Conjecturas e introdução às provas.....	60
3.5.1.1 – Síntese das observações relativas ao bloco I	102
3.5.2 – Análises: Bloco II – O jogo de cartas.....	103
3.5.2.1 – Apresentação do jogo	103
3.5.2.2 – Uma pré-atividade: sequência lógica (apresentação e análises)	114
3.5.2.3 – Análises o jogo	120
3.5.2.4 - Síntese das observações relativas ao bloco II.....	186

CAPÍTULO 4 – Considerações Finais

4.1 – Síntese do Trabalho e Considerações finais	189
--	-----

BIBLIOGRAFIA.....	199
--------------------------	------------

ANEXOS

ANEXO 1 – Primeiro anexo da redação do projeto AprovaME.....	201
ANEXO 2 – Avaliações diagnósticas documentando o conhecimento prévio em geometria dos sujeitos dessa pesquisa.....	208
ANEXO 3 – Atividades Preliminares – Bloco I – Paralelismo.....	214
ANEXO 4 – Atividades Preliminares – Bloco II – Congruência de Triângulos	218
ANEXO 5 – As regras do jogo de cartas.....	226
ANEXO 6 – Nova versão de protocolo para o uso do jogo de cartas.....	227

FIGURAS

Figura 1 :Revestimento de uma região triangular por quadradinhos de 1 cm ²	23
Figura 2 : Região triangular cuja área deverá ser determinada	24
Figura 3: Modelo das relações entre as situações concretas e abstrações na aprendizagem, baseado em Machado (1995)	27
Figura 4: Exemplo de registro figural segundo Duval (1995)	29
Figura 5: Exemplo de registro misto segundo Duval (1995)	29
Figura 6: Exemplo de registro misto com congruência de lados opostos segundo Duval (1995).....	30
Figura 7: A organização dedutiva do discurso	31
Figura 8 – Aparato para verificação experimental do caso LAL de congruência de triângulos	35
Figura 9: Dois pares de retas paralelas e uma transversal	36
Figura 10: Reprodução do triângulo ABC (adaptação do original).....	40
Figura 11: Jogo de réguas transportando um ângulo	41
Figura 12 : Quadrilátero com o traçado de uma das diagonais.....	43
Figura 13: Paralelogramo com diagonais se interceptando	44
Figura 14: Paralelogramo	45
Figura 15: Paralelogramo com vértices A,B,C, D.....	47
Figura 16: Paralelogramo com diagonais tracejadas se interceptando.....	50
Figura 17: Um retângulo e suas diagonais.....	51
Figura 18: Um losango e suas diagonais.....	52
Figura 19: Conteúdo do arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”.....	65
Figura 20: Atividade 1 – resolução pela dupla C.....	67
Figura 21: Tela referente ao arquivo “malha de retas pontilhadas”.....	69
Figura 22: Conteúdo do arquivo C3.....	71
Figura 23: Resolução da atividade 4 pela dupla B.....	73
Figura 24: Resolução da segunda parte da atividade 6 pela dupla A.....	78
Figura 25: Resolução da segunda parte da atividade 6 pela dupla C.....	78
Figura 26: Esquema de resolução do item b – atividade 7.....	81
Figura 27: Esquema de resolução do item d – atividade 7.....	81
Figura 28: Item b – atividade 7.....	82
Figura 29: Resolução da atividade 7) b pela dupla C.....	83
Figura 30: Resolução da atividade 7) b pela dupla D.....	83
Figura 31: Resolução dos itens “c” e “d”(atividade 7) pela dupla B.....	85
Figura 32: Resolução dos itens “c” e “d” (atividade 7) pela dupla A.....	86
Figura 33: Resolução da atividade 7)c pela dupla D.....	86
Figura 34: Resolução da atividade 7)d pela dupla D.....	87
Figura 35: Paralelogramo, diagonal e ângulos alternos	89
Figura 36: Resolução da atividade 9)a pela dupla A.....	93
Figura 37: Resolução esperada para a atividade 10.....	95
Figura 38: Resolução da atividade 10 pela dupla C.....	96
Figura 39: Quadrilátero dividido em dois triângulos congruentes.....	99
Figura 40: Resolução da atividade 11 pela dupla D.....	101
Figura 41: Cartas de A e a.....	103
Figura 42: Cartas de B até f	104
Figura 43: cartas de G até j.....	105
Figura 44: Cartas – condição: de I a IV.....	106
Figura 45: Cartas – condição de V a XIV.....	107
Figura 46: Cartas – condição de XV a XVIII.....	108
Figura 47: Esboço de uma das etapas da prova B.....	108
Figura 48: Planilha carta-desenho usada para indicação do registro figural.....	110
Figura 49: Exemplo de preenchimento possível da planilha para a prova B.....	111
Figura 50: Quadrilátero a ser pintado, recortado e manuseado.....	112

Figura 51: Tabuleiro do jogo em tamanho reduzido.....	113
Figura 52: Cartas da pré-atividade: seqüência lógica.....	116
Figura 53: Cartas da pré-atividade: seqüência lógica.....	117
Figura 54: Paralelogramo ABCD, com uma diagonal.....	117
Figura 55: Paralelogramo, diagonal e ângulos alternos.....	118
Figura 56: Esquema inicial esperado - prova B.....	122
Figura 57: Esquema esperado na seqüência da prova B.....	123
Figura 58: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla A na realização da prova B.....	125
Figura 59: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla C na realização da prova B.....	127
Figura 60: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla D na realização da prova B.....	129
Figura 61: Esboço ou idéia esperados por parte dos alunos – 1º caminho.....	133
Figura 62: Esboço ou idéia esperados por parte dos alunos – 2º caminho.....	133
Figura 63: Rascunho feito pela dupla A ao efetuar a prova A.....	134
Figura 64: Rascunho feito pela dupla C ao efetuar a prova A.....	137
Figura 65: Preenchimento da planilha carta-desenho feito pela dupla C ao efetuar a prova A.....	138
Figura 66: Rascunho feito pela dupla D ao efetuar a prova A.....	140
Figura 67: Representação figural da hipótese da prova I feito pela dupla A.....	143
Figura 68: Esquemas da realização da prova I feitos pela dupla A.....	143
Figura 69: Esquema da realização da prova I feito pela dupla A.....	144
Figura 70: Esboço reproduzindo registro figural da hipótese da prova I, feito pela dupla C.....	145
Figura 71: Primeiro Esboço esperado para a prova f.....	147
Figura 72: Esboço final esperado para a prova f.....	147
Figura 73: Rascunho da dupla D ao efetuar a prova f.....	151
Figura 74: Esboço inicial (ideal) para o início da prova H.....	152
Figura 75: Esboço da seqüência da prova da prova H.....	153
Figura 76: Esboço final esperado para a prova H.....	153
Figura 77: Esboço da dupla B para a prova H.....	155
Figura 78: Esboço alternativo da dupla B para a prova H.....	155
Figura 79: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla B (prova B).....	158
Figura 80: Esboço para finalização da prova f, feito pela dupla C.....	160
Figura 81: Esboço esperado na prova na prova h.....	164
Figura 82: Esquema usado na prova para a “passagem a”.....	166
Figura 83: Esquema inicial esperado para a prova b.....	167
Figura 84: Esquema conclusivo previsto para a prova b.....	168
Figura 85: Possível esquema durante a prova C.....	169
Figura 86: Possível esquema durante a seqüência da prova C.....	170
Figura 87: Esquema inicial durante a prova C, admitida feita a prova B.....	170
Figura 88: Segundo possível esquema durante a prova da prova C.....	171
Figura 89: Esquema único para a prova C, admitindo feita a prova B.....	171
Figura 90: Esquema inicial para a prova c – apenas o registro da hipótese.....	173
Figura 91: Esquema inicial para a prova d – apenas o registro da hipótese.....	174
Figura 92: Esboço intermediário durante a prova da prova d.....	175
Figura 93: Esboço final para a prova d.....	175
Figura 94: Possível esboço inicial para a prova E.....	176
Figura 95: Esquema inicial para a prova e – apenas o registro da hipótese.....	177
Figura 96: Esboço final para a prova e.....	178
Figura 97: Possível esboço inicial para a prova F.....	178
Figura 98: Esboço final previsto para a prova F.....	179
Figura 99: Esboço esperado na seqüência da prova G.....	180
Figura 100: Esboço finalizando a seqüência da prova G.....	181
Figura 101: Esboço esperado na seqüência da prova g.....	182

Figura 102: Esboço esperado para finalizar a prova g.....	182
Figura 103: Esboço esperado durante a prova da prova i.....	183
Figura 104: Esboço final para a prova da prova i.....	184
Figura 105: Esboço final para a prova da prova i.....	184
Figura 106: Esboço final para a prova j.....	185
Figura 107: Esboço alternativo usado na hipótese para provar o paralelismo dos lados.....	197

TABELAS

Tabela 1 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 1.....	68
Tabela 2 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 2.....	71
Tabela 3 - SÍNTESE DAS ATIVIDADES 3 e 4.....	74
Tabela 4 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 5.....	76
Tabela 5 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 6.....	79
Tabela 6 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 7.....	87
Tabela 7- SÍNTESE DA ATIVIDADE 8.....	91
Tabela 8- SÍNTESE DA ATIVIDADE 9.....	95
Tabela 9- SÍNTESE DA ATIVIDADE 10	98
Tabela 10 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 11	102
Tabela 11 - CARTAS ESPERADAS EM CADA DEMONSTRAÇÃO	121

CAPÍTULO 1 – A PROBLEMÁTICA

1.1 – APRESENTAÇÃO

1.1.1 – Apresentação Geral

Ao iniciar uma reflexão sobre argumentação e prova poderiam vir à nossa mente idéias como: “uma seqüência enfadonha de passos terminados pela expressão ‘c.q.d.’ ”; algo tão evidente que nos leve a exclamar ‘é lógico’; “um procedimento empírico que nos leve a fazer conjecturas ou mesmo a, só por ele, dar como concluída uma demonstração”; “a aceitação de uma afirmação pela verificação de poucos casos (ou mesmo um único) onde ela se verifique”.

Nesse trabalho pretendemos abordar todas essas idéias. Sim, mesmo a primeira, através da intenção de deixar a prova formal menos sofrível para alguns alunos pois, pela experiência, sabemos que ela assim se manifesta aos estudantes e mesmo a muitos professores e, eu, apesar dos estudos de aperfeiçoamento já feitos, ainda posso aí incluir-me.

Nosso estudo é relativo às provas das propriedades de um paralelogramo.

1.1.2 – Apresentação do Autor

Quando era criança achava esquisito que problemas “sem números” pudessem pertencer à matemática, pois, afinal, “com o que iríamos fazer as contas”?

Um ano após terminar o Ensino Médio, numa escola da rede estadual (São Paulo) de ensino, concluí que minhas aspirações voltavam-se mesmo para a matemática.

Durante o curso de licenciatura em Matemática, já tinha muito prazer em trabalhar com lógica “nas ocasiões em que ela aparecia”. De fato, olhando para trás, penso que as disciplinas estudadas poderiam ter abrangido muito mais a lógica. Se conversarmos com quem estudou, há alguns anos, nos cursos hoje equivalentes à educação básica, vamos verificar que tais alunos elaboravam demonstrações, prática que, nos

últimos anos, parece estar cada vez mais rara, mesmo no nível superior de ensino.

Durante os últimos dezesseis anos, trabalhando na educação básica da rede paulista de ensino público e, nesse período, de uma forma ou de outra, sempre estudando, minha intenção cada vez mais foi buscar caminhos para tornar agradável o estudo da matemática.

A busca desses caminhos, paralelamente ao desejo de contínuo aperfeiçoamento levou-me a procurar a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo onde, no início do curso de mestrado profissional, fui, assim como meus amigos, convidado a participar de um projeto que tratava de algo, que eu, como foi relatado, julgava estar cada vez mais raro: o trabalho com provas e argumentações.

1.1.3 – Apresentação da Estrutura do Trabalho

No presente capítulo, estaremos apresentando o referido projeto (intitulado “AprovaME”), estudando idéias de alguns autores que nos auxiliam a compreender o fracasso ou o êxito dos alunos numa demonstração.

No capítulo dois, através de um breve “passeio” por algumas fases da história da matemática, faremos um estudo histórico sobre os paralelogramos onde vamos perceber que, mesmo entre os matemáticos, havia procedimentos mais formais e mais empíricos, alguns hoje criticados pelo excessivo apoio na intuição.

Veremos, também, que, ao longo dos séculos, o procedimento para provar as propriedades dos paralelogramos variou muito pouco e, hoje em dia, quando tais provas são trabalhadas na escola, ainda costumam manter tal “tradição” como se pode verificar nos livros didáticos.

No capítulo três vamos apresentar a sugestão de uma sequência didática para o ensino da prova através da articulação de proposições ligadas às etapas das demonstrações de propriedades dos paralelogramos. Ao pesquisar como são feitas tais articulações, estaremos particularmente interessados em investigar como os estudantes, formam e retêm conceitos em geometria, percebem, representam ou mesmo constroem uma figura.

Apresentaremos o uso de várias seções com alunos voluntários, verificando as conjecturas e argumentações, as dificuldades e os avanços, ocorridos nesse tipo de prova buscando uma prática um pouco diferenciada do que hoje, segundo a tradição histórica, se costuma fazer.

Finalmente, no capítulo quatro, apresentaremos os resultados dessa pesquisa.

1.2 - A ESCOLHA DO TEMA E O PROJETO AprovaME

1.2.1 – A escolha do tema e adesão ao Projeto

O tema escolhido na dissertação está vinculado ao projeto AprovaMe (Argumentação e Prova na Matemática Escolar) desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo sob a coordenação da Prof^a Dr^a Siobhan Victoria Healy .

Os participantes do AProvaME puderam optar entre vários conteúdos matemáticos. A escolha das propriedades do paralelogramo foi influenciada pelo fato de se tratar de um assunto inserido num campo da matemática onde a representação das figuras parecia oferecer mais opções de procedimentos do que em outras áreas.

O interesse pelo tema e pela participação no projeto surgiu do fato que como aluno, e mesmo como professor, sempre tive dificuldade em elaborar provas e a exigência de um trabalho com elas deixou de figurar, nos últimos anos, na Educação Básica e mesmo em concursos públicos para provimento de cargos de professores na educação paulista.

Além disso, pesquisas indicam que “os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica” (HEALY, 2005)

Foi aplicado um questionário numa turma de 25 alunos da disciplina Tópicos de Geometria, pelo próprio professor, do mestrado profissional em ensino da matemática, em 2007. Apenas 4 costumavam trabalhar regularmente com as demonstrações em geometria com seus alunos, 11 não costumavam fazê-lo e 10 o faziam esporadicamente.

Em relação à álgebra, 9 professores trabalhavam com demonstrações, 7 não costumavam fazê-lo e 9 às vezes o faziam.

Esses fatos mostram que a demonstração é pouco trabalhada. O projeto AprovaME será de grande auxílio no fechamento dessa lacuna no ensino além de satisfazer o anseio de muitos docentes. Contribuir com esse projeto é o objetivo da presente pesquisa tanto no domínio acadêmico quanto na elaboração de atividades visando melhorar a qualidade do ensino.

Ainda como justificativa para o desenvolvimento do trabalho, citamos aspectos das Orientações Curriculares Para o Ensino Médio que procuram incentivar os docentes à elaboração de atividades relativas à argumentação, à lógica e à justificativas de propriedades:

A forma de trabalhar conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipótese e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação, quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica. (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, 2006, p. 69, 70)

1.2.2 – Breve apresentação do AprovaME¹

O projeto visa :

- levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alguns alunos paulistas;
- formar grupos compostos por professores e pesquisadores a fim de elaborar situações de atividades que envolvam alunos em processos de construção de conjecturas e provas em ambientes informatizados;
- avaliar as situações descritas no item acima inclusive através de um espaço virtual que, por sua vez, terá seu papel também analisado;

1- Projeto financiado pelo CNPq, Processo nº 478272/2004-9

- investigar a implementação das atividades realizadas pelos professores.

Acreditamos ser esse último objetivo de suma importância visto que muitas estratégias em educação, mesmo eficientes, não são utilizadas devido sua não aceitação no meio docente, conforme pôde ser constatado durante os estudos na disciplina “Desenvolvimento Curricular em Matemática” do Mestrado Profissional².

Numa primeira fase, o projeto AProvaME, que contou com a participação de 6 professores pesquisadores e 28 professores colaboradores (mestrandos), estabeleceu o mapeamento das concepções de 1998 alunos através de questionários aplicados em escolas públicas e particulares por 27 professores colaboradores. As questões permitiram avaliar a aceitação pelos alunos de evidências empíricas como prova, a distinção feita entre empirismo e argumentos matematicamente válidos, a compreensão do domínio de validade de uma prova, a capacidade da construção de argumentos válidos e a influência da forma de apresentação da prova (língua natural e formal, representações visuais e figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. Os domínios matemáticos contemplados foram Geometria e Álgebra.

Os dados coletados foram organizados e classificados, segundo um padrão comum, pelos próprios vinte e sete professores aplicadores dos questionários (cada um fez a classificação dos dados que obteve e os remeteu para serem unificados). Também foi estudada a correlação de respostas entre sujeitos que compartilham experiências comuns³.

Numa segunda fase, os membros se dividiram em grupos (cada um formado por professores colaboradores e pesquisadores) nos quais foram desenvolvidas algumas atividades, discutidas e testadas (com uma pequena mostra de alunos). A seguir, tais atividades foram compartilhadas no ambiente virtual TelEduc⁴, numa fase inter-grupos, onde alguns deles analisaram e registraram suas observações relativas às atividades de outros.

2- O autor desse trabalho cursou essa disciplina no primeiro semestre de 2005.

3- Maiores informações podem ser obtidas na dissertação de Mestrado Profissional de Amadeu Tunini Doro (PUC-SP, 2007)

4- O TelEduc é uma plataforma educacional, através da qual um participante do projeto podia anexar seus trabalhos e suas observações tornando-os acessíveis aos demais membros. Além disso o ambiente dispunha de agendas periódicas, arquivos virtuais de materiais disponibilizados pelos professores pesquisadores, de um correio eletrônico interno e de salas de bate-papo para aulas não presenciais.

Algumas dessas questões, já analisadas, foram aplicadas aos alunos, e resultaram em dissertações como trabalho de conclusão de curso de alguns professores colaboradores.

Na última etapa do projeto foram coletadas respostas dos alunos participantes da segunda fase ao questionário elaborado na primeira a fim de tentar responder em que medida as dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (primeira fase) foram por eles superadas e quais características de prova ainda necessitam de investimentos.

1.3 - LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Nesse parágrafo, faremos uma revisão da literatura no sentido de mapear estudos sobre o processo de argumentação e prova. Encontramos nos trabalhos de Rigolon, Tojo, Alves e Brito subsídios para o nosso estudo.

1.3.1 – Rigolon

Silviane Rigolon, com sua pesquisa de mestrado intitulada “Concepção de uma seqüência de ensino para o estudo da semelhança: do empírico ao dedutivo”, abordou o estudo da semelhança de triângulos. A estrutura de seu trabalho, que causou influência em nosso projeto, apresentava três fases: a validação empírica com material concreto, a validação empírica com o uso do software Cabri e a validação usando papel e lápis, ou seja, validação com o uso de premissas aceitas sem demonstração.

Em relação ao uso do material concreto lançou-se mão do instrumento pantógrafo com o objetivo de tornar “o processo de ensino aprendizagem mais significativo” (RIGOLON, 2006, P. 64)

Também foram usadas outras atividades que tratavam da semelhança via perspectiva cônica e via comparação de fotos e objetos. Essa atividade mostrou-se como eficiente sugestão para institucionalização do conceito de “semelhança”.

Usando as ferramentas do software, foi trabalhada a ampliação de figuras dadas visando verificar se, para isso, a institucionalização apreendida com o material concreto seria aplicada.

Ainda com software, foi feita a relação: semelhança de figuras-homotetia e, com ela, uma nova institucionalização para duas figuras semelhantes. Ao final, atividades empíricas visaram levar o aluno a estabelecer os casos de semelhança entre dois triângulos.

A dissertação de Rigolon liga-se mais diretamente à nossa pesquisa pelo seu terceiro bloco: validações dedutivas no ambiente papel e lápis – onde o aluno devia responder questões propostas, agora não mais usando o recurso do empirismo:

Entregaremos também em cada atividade um bloco de seis folhas de sulfite que serão nomeadas como estratégia 1, estratégia 2 até estratégia 6. O aluno iniciará sua resolução na primeira folha, caso esteja errado ou com idéias incompletas, faremos com ele intervenções e pediremos que faça novamente a questão na folha 2, se ainda não estiver de acordo, faremos novas intervenções e a questão será refeita na folha três e assim por diante, ou seja, estamos considerando que o aluno precise de várias tentativas ou estratégias para concluir corretamente cada questão. (RIGOLON, 2006, p. 90)

A autora relata ainda que os alunos serão orientados a justificar as respostas indicando os casos de semelhança de triângulos possivelmente usados ou indicando o uso da homotetia.

1.3.2 – Tojo

Benedita Tojo, na sua dissertação de mestrado intitulada “Concepção de uma seqüência didática para o ensino/aprendizagem da congruência”, procedeu a um estudo cuja primeira parte trazia atividades empíricas: manuseio de objetos tridimensionais como sugestão alternativa à abordagem bidimensional tradicionalmente utilizada pelos livros didáticos. Essas atividades também visavam fornecer base, a partir da manipulação de objetos, para a formação do conceito de congruência a partir do contraste entre observações a ela relativas ou não. Na seqüência, os alunos deveriam dar a sua definição de congruência a partir das observações feitas.

A seguir, a autora, repetiu a experiência com figuras planas que causavam ilusão de ótica parecendo não congruentes.

Na próxima atividade os alunos identificariam figuras congruentes numa atividade semelhante ao tradicional jogo da memória.

Numa segunda etapa, foi usado o computador. Os alunos deveriam ainda verificar a congruência de figuras através da sobreposição de uma sobre a outra, porém não poderiam mais fazer isso manualmente, “pegando” o desenho. Deveriam ser usadas as transformações isométricas: rotação, translação, simetria axial bem como suas composições. Essa etapa diferenciou-se da anterior, sobretudo pela dedução da transformação ou da composição de transformações a serem usadas.

Ainda nessa etapa, foi solicitada a construção de triângulos usando uma malha quadriculada, agulhas, régua, transferidor, fitas e tesoura. O objetivo de tais construções era a verificação empírica dos casos de congruência de triângulos, como também da condição de existência dos mesmos.

Finalizando, foram colocados problemas cuja resolução requeria o domínio, identificação e aplicação dos casos de congruência de triângulos bem como das transformações isométricas estudadas nas etapas anteriores.

Tojo influencia nosso trabalho pois também nos serviremos da congruência de triângulos, mais precisamente, segundo a organização de uma das fases de sua pesquisa proposta por Freudenthal (1973):

Como exemplo, Freudenthal propõe uma organização local para o estudo dos quadriláteros, aceitando sem demonstração os casos de congruência dos triângulos (LLL, LAL, ALA, LAA_o) e a igualdade dos ângulos alternos internos, sendo estes aceitos sem demonstração. Essa organização local pode ser feita com ou sem o computador. (TOJO, 2006, p. 18)

1.3.3 – Alves e Brito

Em seu artigo, “Percepção, Memória e Memória Matemática”, as autoras relatam que a resolução de problemas matemáticos está ligada à percepção, à representação, à imagem, à retenção e à recuperação de informações da memória.

De acordo com as idéias de Krutetskii (1976), expõem que a representação de um problema, por sua vez, está associada à diferenciação das relações que possuem significado matemático básico, das quantidades essenciais e das quantidades supérfluas para tal tipo de problema; ou seja, fazem, para a resolução, um trabalho de escolha, acesso e sistematização, combinação e associação de elementos.

Detalhando mais sobre a percepção e usando as idéias de Sternberg (2000), escrevem que a mesma consiste em processos cognitivos de reconhecimento, organização, síntese e significação dada às sensações recebidas dos estímulos ambientais, através dos órgãos dos sentidos.

Ela pode ser classificada como percepção construtiva (ou inteligente), criada pelo indivíduo a partir da informação sensorial, entre outras. Nela há a interação entre a inteligência e os processos perceptivos uma vez que várias hipóteses são testadas durante sua formação.

Também há a classificação “percepção direta” na qual as informações e o contexto são suficientes para sua formação.

Ainda segundo as idéias de Sternberg (2000) expõem que o conhecimento pode ser classificado como “declarativo” (corpo organizados de informações) ou como “de procedimentos” (algoritmos de execução de uma tarefa). A forma pela qual o sujeito conhece objetos, eventos e idéias que são alheias a sua estrutura cognitiva é a representação do conhecimento.

A representação do conhecimento declarativo se fundamenta em estruturas mentais que abrangem vários conceitos inter-relacionados. A representação do conhecimento de procedimento se faz através de um conjunto de regras de produção, do tipo “se-então”.

1.4 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para fundamentar o trabalho, usaremos as idéias de Parzysz, Machado, Duval e Egret que serão descritas a seguir.

1.4.1 – Bernard Parzysz

Uma pesquisa dentro do ensino da geometria é relatada por Bernard Parzysz (2001) em seu artigo sobre a articulação entre percepção e dedução.

Fazendo referência a outros autores, menciona a classificação dos procedimentos na resolução de problemas geométricos em níveis ou referências, distinguindo as “geometrias concretas” que se apóiam em objetos ou em suas representações e as “geometrias teóricas” que se caracterizam por objetos fora da realidade e pela validação exclusivamente dedutiva através de axiomas e teoremas.

Com base nesse estudo, Parzysz, estabeleceu quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico:

- a geometria concreta (nível G0): objetos materializados – uso de material manipulativo.
- a geometria espaço-gráfica (nível G1): representações figurais e gráficas – uso de desenhos no papel ou na tela do micro e de instrumentos de medida e de desenho como réguas, esquadros e compassos.
- a geometria proto-axiomática (nível G2): objetos teóricos, conceitos – uso de premissas aceitas (e não demonstradas) pelo aluno a fim de, com elas, elaborar provas.
- a geometria axiomática (nível G3): elaboração de provas como no nível anterior mas com a explicitação de todos os axiomas e com a prova de todos os teoremas envolvidos.

Um exemplo desses níveis pode ser apreciado na resolução do cálculo da área de um triângulo eqüilátero, numa atividade usada pelo autor do presente trabalho, durante sua participação no curso “Tópicos de Geometria” da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no primeiro semestre de 2005.

No nível G0, pode ser que o aluno recorte “quadrinhos de cartolina” que ele sabe serem a unidade de medida de área, no caso, o cm^2 . Ele acaba por

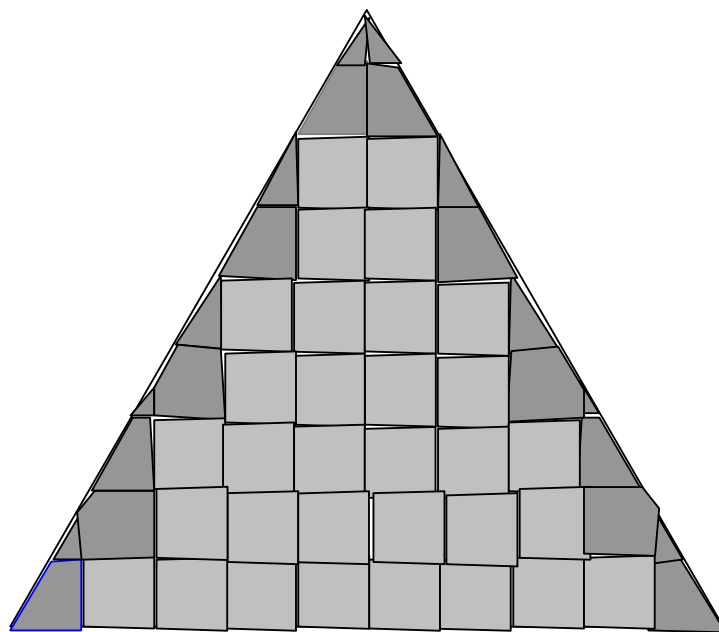


Figura 1 : Revestimento de uma região triangular por quadrinhos de 1 cm^2
Fonte: Autoria própria

recobrir a figura com essas unidades sendo que algumas não poderão ser usadas inteiras (no esboço, os “pedacinhos” mais escuros).

O valor da área seria a quantidade de “quadrados inteiros”, o aluno deveria tentar, justapondo pedaços, montar um “quadrado” inteiro e considerá-lo como 1 cm^2 ou, não conseguindo completar uma unidade inteira, estabelecer a fração correspondente ao pedaço em questão.

Essa atividade deve levar ao estabelecimento de um valor próximo a 43 cm^2 mas o grau de precisão dependerá da habilidade, da paciência e do material usado pelo aluno. Todavia ainda nesse nível, ele poderá ter a definição (e até mesmo o raciocínio) num grau mais elaborado que o estudante que, ao aplicar “cegamente” uma fórmula, chega ao resultado com mais precisão mas não tem noção da superfície ocupada por 1 cm^2 .

No nível G1 o aluno poderá medir com a régua a base e a altura do triângulo e efetuar o cálculo para a obtenção da área. O resultado será uma aproximação da valor exato da área.

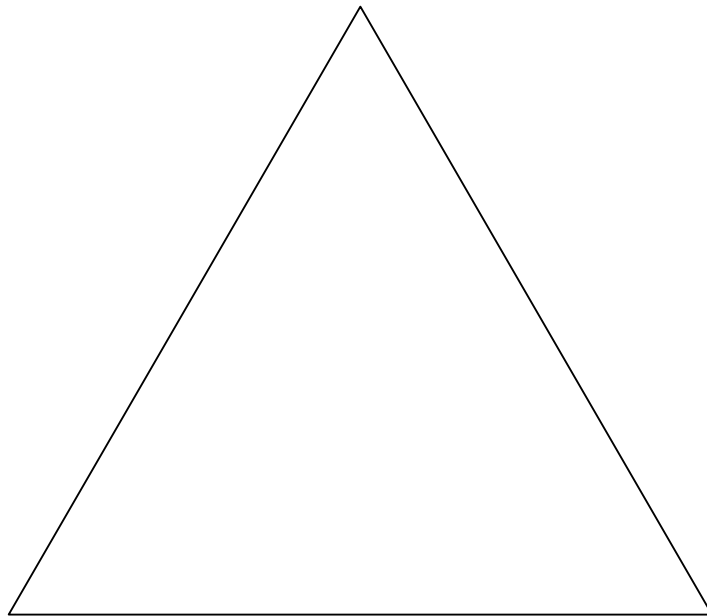


Figura 2 : Região triangular cuja área deverá ser determinada
Fonte: Autoria própria

No nível G2, o aluno usa conhecimentos já existentes mesmo sem justificá-los. Supõe-se que o aluno possa usar diretamente a fórmula da área

de um triângulo qualquer ou mesmo a da área do triângulo equilátero. Antes, porém, lhe sendo fornecida a medida da base, usaria o Teorema de Pitágoras para determinar a altura ou mesmo a fórmula para obter a altura do triângulo equilátero aceitando-os sem questionamento.

Finalmente, no nível G 3, o aluno deve provar as fórmulas para obtenção da área do triângulo a partir dos axiomas de área da geometria euclidiana.

Parzysz relata também o conflito enfrentado pelos alunos ao passar de um nível a outro, pois nos primeiros a percepção é aceita como justificativa o que não ocorre nos outros dois níveis: por exemplo, para provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , nas geometrias concretas, basta que o aluno constate isso “construindo um triângulo”, por exemplo, com cartolina ou com varetas ou mesmo meça e some as medidas de ângulos internos de alguns triângulos obtendo a medida de dois retos. Nas geometrias teóricas, como diz o próprio nome, mesmo que lhe seja visualmente evidente aquilo que deve provar, terá que utilizar axiomas ou teoremas.

Procuraremos elaborar atividades dentro dos dois tipos de geometria sendo que as primeiras devem estar dentro das classificações “concreta” e “espaço-gráfica” mas elas devem culminar nas “geometrias axiomáticas” e temos a esperança de que nossa atividade, a ser relatada no capítulo 3, venha a contribuir para atenuar o conflito mencionado por Parzysz.

Esse pesquisador também estabeleceu mais um fator na análise de uma prova, a chamada CKS (do inglês “contamination of ‘knowing’ by ‘seeing’”) ou “contaminação do saber pela visão”. Nessa situação uma dada prova estava claramente no G2, mas, num dado momento, apresentou elemento do G1: ao observar um diagrama, foi dito, apenas por visualização, que um certo ponto O pertencia à uma tal reta CD.

Essa “classificação extra” também nos será útil pois se liga à teoria dos autores que tratam de representações, percepções e concepções: uma conclusão tirada precipitadamente de uma representação pode inserir uma idéia falsa e comprometer completamente uma conclusão. Temos expectativa que os alunos participantes de nossa pesquisa, fatalmente, possam passar por tal situação e a CKS será, para nós, mais um fator a considerar durante a fase de análises e conclusão de nosso estudo.

Parzysz termina seu artigo citando que muitos alunos, na França, misturam elementos teóricos e perceptivos na elaboração de provas. Em nosso caso, estaremos na tentativa de trabalhar, nas últimas atividades, exclusivamente com elementos teóricos e procuraremos orientar nossos alunos para a importância desse fato mostrando-lhes que “nem tudo é o que aparenta” sendo necessária atenção a fim de não abandonar de repente o procedimento dedutivo com a inserção de dados justificados apenas pela visualização ou verificados através de instrumentos.

Julgamos que apenas o contato dos estudantes com as atividades de provas pode ser uma experiência rica para o levantamento de informações pela prática e pela teoria tanto para os discentes como para os docentes no objetivo de resgatar a percepção e o uso lógico de dados na resolução de problemas procurando assim recolocar, em nosso ensino, a esquecida prática da prova.

1.4.2 - Nilson José Machado

O autor começa tratando das concepções históricas do conhecimento: a metáfora do balde, como bem passível de acumulação. Passa, a seguir, pela idéia da cadeia: conhecimento seguindo uma linearidade. Finalmente chega à idéia do conhecimento como “rede”.

Na seqüência, é colocado que “conhecer” implica em “conhecer o significado”, portanto o autor analisa a concepção de significado como emergente da concepção de linguagem, cuja forma mais absoluta é abalada na busca da compreensão dos mecanismos de construção do significado.

Machado afirma que se prega um caminho do concreto para o abstrato mas, na prática (teoria e exercícios) segue-se um sentido inverso. O ideal é que se sucedam harmonicamente esses sentidos conforme o esquema a seguir:

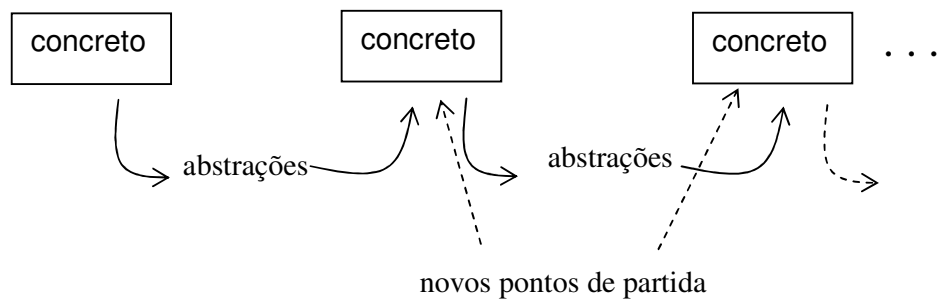


Figura 3: Modelo das relações entre as situações concretas e abstrações na aprendizagem, baseado em Machado (1995)
Fonte: Autoria própria

Ainda há a referência à obra de Euclides que trabalhou com a linguagem esclarecendo o significado das diferentes noções a fim de estabelecer aquelas primitivas que serviriam para elaborar outras definições num encadeamento de justificativas das proposições deduzindo uma a partir da outra através de ligações lógicas.

É feita uma metáfora: “a lógica como cimento a unir os postulados na elaboração de um teorema”.

A seguir, o autor coloca que a observação, a manipulação, a caracterização e o empirismo (mais próprios da faixa entre a primeira e a quarta série do ensino fundamental) devem conduzir o aluno a procedimentos mais próprios da sétima e da oitava série do fundamental como sistematização do conhecimento, às definições precisas, ao enunciado cuidadoso de propriedades e ao encadeamento de proposições.

Quando Machado relata que há uma ruptura entre o “perceptivo” infantil e o conhecimento geométrico apenas no âmbito do pensamento lógico, podemos lembrar que Parzysz também menciona uma ruptura de contrato didático, na França, entre provas empíricas aceitas até a sétima série e as provas no nível axiomático nas séries posteriores.

Mais uma vez, o autor reforça que é fundamental a articulação entre as atividades perceptivas e os momentos de elaboração conceitual, de relações mais consistentes entre o conhecimento empírico e sua sistematização.

Finalmente coloca a metáfora que seria, o fundamento principal das idéias que estamos utilizando em nosso trabalho: o “tetraedro”: percepção-construção-representação-concepção.

Entre essas faces do tetraedro, a construção (massas, varetas, papéis) e representação (desenhos) já permitem propriedades parcialmente concretizadas mas “não costumam ser suficientemente valorizadas como elementos fundamentais dos processos cognitivos [...]” (MACHADO, 1995, p.54)

A percepção é colocada como condição para a construção e para a representação mas a construção e a representação também podem servir para facilitar a percepção (por exemplo, uma planta ou maquete pode facilitar a percepção). Também se coloca que o construído está sendo concebido.

É ressaltada a importância da percepção: “cognição não é o raciocínio, mas sim a percepção” (LÉVY apud MACHADO, 1995, p. 57)

Em nossa pesquisa, procuraremos, utilizar construção e representação para auxiliar a elaboração formal (pretendida) das provas.

1.4.3 - Raymond Duval

Aprofundando um pouco mais o estudo sobre a representação e a percepção, usaremos a teoria de Duval que, justamente, associa esses dois itens: a representação como forma de acesso à percepção.

Ele designa os diferentes tipos de representações por “registros de representação” e os classifica em quatro tipos: dois relativos à representação discursiva: língua natural e sistemas de escrita (numérico, simbólico e algébrico) e dois relativos à representação não discursiva: o figurado e o gráfico.

Alguns deles podem subdividir-se. Como exemplo, o registro numérico pode dividir-se em numérico decimal ou numérico fracionário.

Vejamos um exemplo para um paralelogramo:

REGISTRO DA LÍNGUA NATURAL: Um paralelogramo com vértices nos pontos A,B,C e D.

REGISTRO DO SISTEMA DE ESCRITA:

Nesse caso costumamos utilizar um registro que associa a língua natural e o sistema de escrita simbólico: Um paralelogramo ABCD.

REGISTRO FIGURAL:

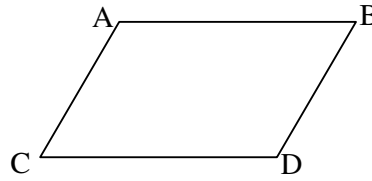


Figura 4: Exemplo de registro figural segundo Duval (1995)
Fonte: Autoria própria

Também nesse caso precisamos da associação de outra forma de registro: a mais indicada seria simbólica (embora pudesse ser a da língua natural).

Se mantivermos a figura acima, estamos apenas representando um quadrilátero com vértices nos pontos A,B,C e D. Portanto o correto é apresentar o registro na forma mista (figural e simbólico) para indicar o paralelogramo:

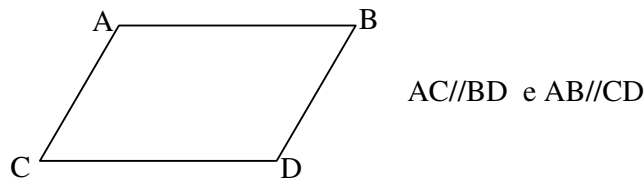


Figura 5: Exemplo de registro misto segundo Duval (1995)
Fonte: Autoria própria

É muito importante que todo docente atente, entre outros, para esse tipo de registro. Conforme foi observado por Parzysz, ao falar em CKS, acreditamos que será grande a “tentação” sofrida por um estudante (ou mesmo por um professor) de concluir, a partir do primeiro registro figural acima (sem a indicação simbólica do paralelismo) que se trata de um paralelogramo afinal estamos nele “enxergando lados paralelos”.

O estudo de Parzysz reforça a idéia de Duval (1995) de que é necessário que o aluno saiba trabalhar com pelo menos dois tipos de registros. De fato a omissão da representação simbólica acima indicando paralelismo, se feita por um aluno orientado a “não confiar somente na aparência de esboços”, pode indicar desde uma simples distração como também uma falha na concepção de paralelogramo.

Também nos será útil, da teoria de Duval (1995), o uso dos registros para proposições. Vejamos um exemplo:

REGISTRO DA LÍNGUA NATURAL: Em todo paralelogramo dois lados opostos quaisquer são congruentes.

REGISTRO DO SISTEMA DE ESCRITA (simbólico):

$$AB//CD, AD//BC \Rightarrow AD \equiv BC \text{ e } AB \equiv DC$$

REGISTRO (MISTO) FIGURAL E SIMBÓLICO: Neste caso, está associado ao registro simbólico.

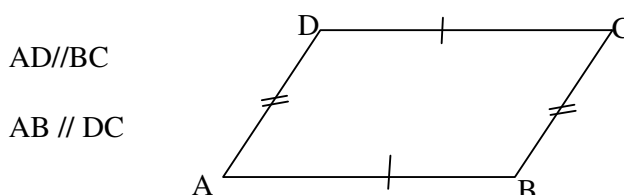


Figura 6: Exemplo de registro misto com congruência de lados opostos segundo Duval (1995)
Fonte: Autoria própria

Duval, na seqüência de seu artigo, coloca três razões para a necessidade de uma diversidade de registros de representação. A primeira delas refere-se à facilidade para expressar uma idéia: as relações entre os objetos podem ser representadas mais facilmente num certo registro do que em outro.

A segunda razão, que se baseia em Bresson (1987), refere-se à quantia de informações daquilo que se representa. Uma forma de registro não oferece as mesmas possibilidades de representação de outros.

A terceira razão coloca a hipótese de que a compreensão de um conceito depende da coordenação de pelo menos dois registros de representação.

A conversão de um registro para outro feita nos dois sentidos dá maior possibilidade de mobilizar conhecimentos dos alunos visando a aquisição de um conceito.

Em nossa pesquisa, pretendemos trabalhar com os registros na língua natural, no sistema de escrita (numérico, simbólico e também o algébrico) e no registro figural.

A intenção é interar os alunos participantes quanto à simbologia matemática necessária para a pesquisa além de dar-lhes uma orientação sobre como fazer esboços de figuras geométricas visando a representação figural.

1.4.4 - Raymond Duval e M.A. Egret (1989)

Os autores propõem, entre outros, um princípio comandando a organização de um ensino cujo objetivo é facilitar aos alunos a realização de demonstrações:

Representar a estrutura subjacente a uma organização dedutiva do enunciado.

Nesse tópico, os autores abordam a substituição de um enunciado anterior (hipótese, ou uma conclusão já tirada dela) por um novo enunciado. Essa substituição se faz através de alguma outra informação, um enunciado normativo (uma definição, um axioma, um teorema).

Com essa operação os autores definem o que estabelecem como a “unidade funcional de toda organização dedutiva”: o Arco Transitivo de Substituição (A.T.S.). Ela corresponde a uma demonstração curta ou a um passo numa demonstração constituída por uma seqüência de substituições recorrentes.

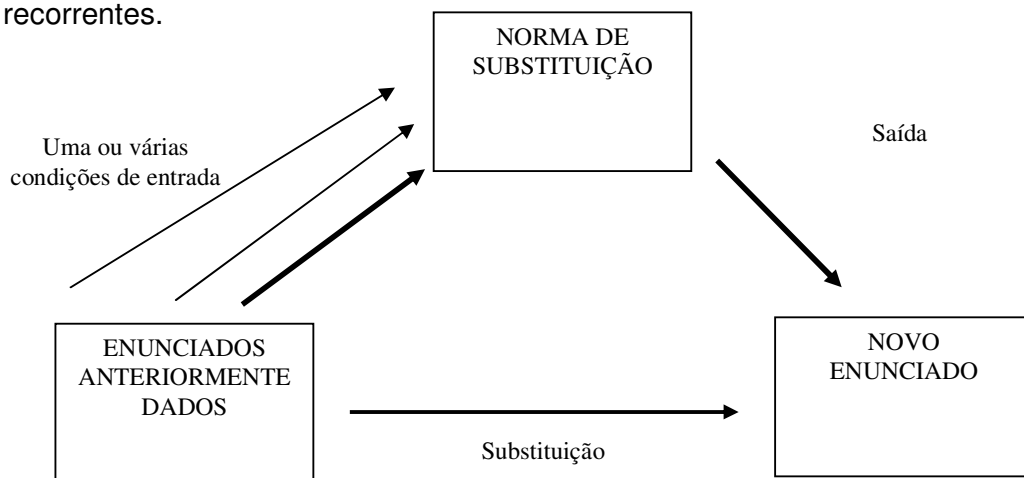


Figura 7: A organização dedutiva do discurso
Fonte: Duval e Egret, 1989

Os autores afirmam que o esquema acima evidencia dois elementos que são essenciais para a compreensão de uma demonstração.

Um é que o número de condições a considerar para aplicar corretamente uma regra de substituição varia de acordo com os teoremas. Geralmente, num primeiro momento, os alunos têm tendência a reter apenas uma. Do mesmo modo, eles sentem muita dificuldade em distinguir um teorema de seu recíproco e isso pode atrapalhar o uso da norma de substituição se tal teorema precisar ser usado.

O segundo é em relação à estrutura ternária e não binária do A.T.S. são três enunciados cada um tendo uma posição diferente. Esses enunciados se articulam em razão de sua posição que é independente de seu conteúdo. De uma situação proposta a outra, a posição de um enunciado pode variar: numa ele pode aparecer como hipótese e noutra como proposição a demonstrar enquanto o conteúdo da afirmação permanece o mesmo.

A distinção entre a posição e o sentido de um enunciado só pode ser compreendida numa apreensão global de uma organização, cujo A. T. S. representa a unidade funcional.

Uma prova, em geral, é constituída por uma seqüência de passos de dedução onde cada passo é formado por uma hipótese e por uma conclusão. A conclusão de cada passo é utilizada como hipótese do passo seguinte. A regra que justifica a passagem da hipótese para a conclusão, em geral, é omitida a fim de não tornar o texto uma leitura de difícil compreensão.

Contudo, ao estudar como fazer uma prova, é possível que quando essa passagem não seja explicitada, tal procedimento possa favorecer o uso de elementos empíricos por parte dos alunos – o que apresentamos como CKS na teoria de Parzysz. É desejável que o aluno esteja consciente dessa estrutura na prova de uma proposição.

1.5 – A QUESTÃO DE PESQUISA

Durante nossas reuniões pelo projeto AprovaME, várias vezes discutimos o quanto uma atividade estaria muito direcionada, muito “mastigada” para o aluno.

Do conhecimento que tínhamos de nossos alunos, sabíamos que mesmo algo que, a nós, parecesse evidente, não seria, facilmente, percebido por eles e nossa preocupação, numa seqüência didática que procurasse auxiliá-lo na

condução do raciocínio e na elaboração de conclusões, seria não permitir um “salto” que interrompesse tal raciocínio mesmo porque muitos de nossos estudantes acabam desistindo quando não vêem, de imediato, uma direção a seguir.

Um certo conflito enfrentado por nós seria como não bloquear as atividades dos alunos sem direcionar demasiadamente seus procedimentos.

Chegamos a pensar em duas questões de pesquisa sendo uma delas abordando tal conflito, mas, por fim, na intenção de concentrar esforços numa direção única, resolvemos que a questão de nossa pesquisa deveria, apenas, verificar como os alunos articulam informações na produção de uma prova:

“Quais dificuldades e avanços apresentam alunos na articulação de informações visando provar propriedades dos paralelogramos?”

Ainda assim, as preocupações oriundas das reuniões do AprovaME não foram descartadas na elaboração das escolhas didáticas, principalmente na concepção das primeiras atividades desta pesquisa a serem desenvolvidas com os alunos.

1.6 - METODOLOGIA DA PESQUISA

1.6.1 – Michèle Artigue e a engenharia didática

Para responder à nossa questão de pesquisa elaboramos uma sequência de atividades que será desenvolvida seguindo os princípios da Engenharia Didática. Ela se caracteriza por um esquema experimental baseado nas “realizações didáticas” em classe.

Segundo Michele Artigue (1996), a engenharia se apóia em quatro fases: a concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. Tem como características o registro dos estudos de caso e a validação interna que consiste na confrontação entre análises a priori e posteriori.

Seguiremos, então, suas fases que são:

Análise Preliminar: Essa análise se baseia no estudo histórico do conteúdo a ser trabalhado, na análise de livros didáticos, nas propostas curriculares, nos conteúdos visados.

Concepção e Análise a Priori: À luz das análises preliminares e do referencial teórico, são feitas escolhas didáticas para a concepção global e local da engenharia didática.

A análise a priori é uma análise matemática da situação que antecipa o funcionamento didático decorrente das escolhas feitas. Trata-se de esclarecer o que pode acontecer com os saberes em jogo quando a situação é colocada em funcionamento.

A análise a priori tem como objetivo determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos.

É um tipo de análise que se fundamenta em hipóteses a serem validadas onde se descrevem as escolhas efetuadas ao nível das variáveis locais, analisa-se o peso dessas escolhas para o aluno em função das possibilidades de ação, da escolha, de decisão, de controle e de validação que ele dispõe. Prevêem-se os comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar seu sentido além de assumir que aqueles comportamentos esperados, se ocorrerem, serão resultantes da aplicação do conhecimento visado.

Experimentação: é o momento da organização e aplicação da seqüência de atividades.

Análise a Posteriori: Artigue comenta que a análise a posteriori, que se apóia nos dados recolhidos e observações realizadas sobre a produção dos alunos, é útil para a validação das hipóteses envolvidas numa investigação.

A análise a posteriori é a interpretação das informações extraídas da experimentação e da seqüência de ensino e que levam a validar ou não as hipótese da pesquisa.

Esta análise é baseada nos protocolos de observação, em referência à análise a priori e é feita para relacionar os fatos observados com os objetivos definidos a priori, no quadro de referência.

Resumimos, assim, as fases da metodologia de nossa pesquisa. As escolhas didáticas da concepção das atividades serão tratadas no terceiro capítulo.

CAPÍTULO 2 – UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE PARALELOGRAMOS

2.1 – INTRODUÇÃO

Procuramos, neste capítulo, fazer um estudo histórico sobre o objeto matemático “paralelogramo” procurando observar semelhanças com a organização do currículo atual.

A justificativa deste capítulo repousa no fato de que será subsídio para a concepção de nossas atividades mesmo porque, de acordo com a figura 8 e com as exposições a serem feitas, mais particularmente no item 2.3, poderemos verificar que o aparato por nós idealizado, coincidentemente, ficou sendo similar ao utilizado por Clairaut, no século XVIII.

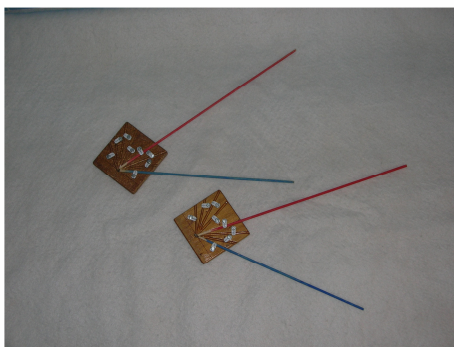


Figura 8 – Aparato para verificação experimental do caso LAL de congruência de triângulos

Fonte: Autoria Própria

Esse capítulo histórico também nos será muito útil em nossas análises a posteriori.

2.2 – Euclides

A obra de Euclides (elaborada por volta de 300 a. C.), embora adaptada e ampliada por outros matemáticos como Legendre e Hilbert, ainda tem grande influência no ensino atual. Podemos observar que os resultados por ele usados são os mesmos que estaremos esperando que os alunos usem para igual prova. Vemos ainda que são usados alguns termos como “igual” atualmente designado como “congruente” e “reta” para o que chamamos de “segmento”.

Euclides (2006), pela definição 23, define o chamado “rombóide”, uma figura que evoluiu para o paralelogramo atual: “Rombóide é uma figura que, tendo os lados opostos iguais, nem é eqüilátera nem é eqüiângula”.

Vemos, portanto, que, para Euclides, um retângulo, um losango ou quadrado não podem ser considerados paralelogramos. Para nossas crianças, essa é a visão inicial. Desde a pré-escola elas aprendem os nomes de tais figuras mas ninguém lhes detalha, e, particularmente, também não creio ser necessário nessa idade, que, por exemplo, um quadrado também pode ser chamado de paralelogramo.

Destacamos, inclusive, que para Euclides, um quadrado não pode ser um losango ou um retângulo como hoje o classificamos.

Transcrevemos a proposição 33 do livro I de Euclides: “As retas, que da mesma parte estão postas entre as extremidades de duas outras retas iguais e paralelas, são também iguais e paralelas. (Fig.9).” (EUCLIDES, 2006)

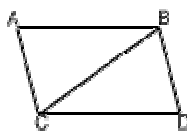


Figura 9: Dois pares de retas paralelas e uma transversal
Fonte: Euclides, 2006,

“Tire-se a reta BC. Porque AB, CD são paralelas, e são cortadas pela reta BC, serão os ângulos alternos ABC, BCD iguais (*Pr.* 29, 1).” (EUCLIDES, 2006)

A proposição 29 do livro I discorre sobre retas paralelas cortadas por uma transversal: entre outras observações, há a que afirma serem os ângulos alternos “iguais” entre si (hoje usaríamos “congruentes”).

Interessante é observar que a sequência tomada por Euclides é hoje usada de maneira praticamente idêntica. Vejamos o restante de seu raciocínio:

“E sendo $AB = CD$, e BC comum; as duas AB, BC serão iguais às duas DC, CB. Mas temos o ângulo $ABC = BCD$. Logo será a base $AC = BD$, que é a outra base (*Pr.* 4, 1); e o triângulo ABC igual ao triângulo BCD; e os mais ângulos iguais aos mais ângulos (*Pr.* 4, 1), cada um a cada um, segundo ficam opostos a lados iguais. Logo deve ser o ângulo $ACB = CBD$. Logo a reta BC fazendo com as duas AC, BD os ângulos alternos ACB, CBD iguais; as duas retas AC, BD serão

paralelas (*Pr.* 27, 1). E já temos demonstrado, que são também iguais.” (EUCLIDES, 2006)

A proposição 4 do livro I, mencionada, refere-se ao que chamamos hoje de caso de congruência LAL e a proposição 27 do livro I tem a redação: “Se uma reta, cortando outras duas retas, fizer com elas os ângulos alternos iguais: as mesmas duas retas serão paralelas.” (EUCLIDES, 2006)

Na proposição 34 do livro I:

“Os lados e os ângulos opostos dos espaços formados com linhas paralelas, ou paralelogramos, são iguais; e todo o espaço paralelogramo, fica dividido pela diagonal em duas partes iguais (Fig. 55).” (EUCLIDES, 2006)

Abaixo, o trecho da prova da proposição acima citada:

“Sendo AB, CD paralelas, e cortadas pela reta BC, os ângulos alternos ABC, BCD serão iguais (*Pr.* 29, 1). Também por serem paralelas as duas AC, BD, e cortadas pela mesma reta BC, devem ser iguais entre si os ângulos alternos ACB, CBD. Logo os dois triângulos ABC, CBD tem dois ângulos ABC, BCA iguais a dois ângulos BCD, CBD, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, que vem a ser o lado comum BC adjacente aos ângulos iguais. Logo os outros lados serão iguais aos outros lados, cada um a cada um, e o ângulo, que resta , igual ao outro ângulo, que resta (*Pr.* 26, 1). Logo será $AB=CD$, $AC=BD$, e o ângulo $BAC=BDC$. E sendo $ABC=BCD$, e $CBD=ACB$; será o angulo total $ABD=ACD$ também total. Mas temos demonstrado ser o angulo $BAC=BDC$. Logo os lados e os ângulos opostos do paralelogramo ABDC são iguais.” (EUCLIDES, 2006)

Na proposição 26 do livro I da transcrição acima Euclides relata o que hoje chamamos caso ALA de congruência de triângulos e na proposição 29 do livro I diz “Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si; o angulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos” (ECLIDES, 2006).

Nos Elementos, só encontramos essas duas provas diretamente ligadas às propriedades dos paralelogramos. Não há, inclusive, diretamente, o estudo e a prova das recíprocas como se costuma fazer hoje em dia em algumas obras do mesmo tipo, ou seja, que seguem um esquema axiomático de provas.

A obra de Euclides foi muito influenciada pela intuição: “Seria realmente notável se os *Elementos* de Euclides [...] não apresentasse defeitos lógicos [...] De todos esses defeitos, talvez o mais grave consista em várias suposições tácitas, sem base nos postulados, admitidos por Euclides” (EVES, 2005a, p. 655, grifo do autor).

E ainda reforçando o perigo do uso único da intuição:

“Uma das grandes armadilhas que ameaçam os que trabalham com um sistema dedutivo consiste na excessiva familiaridade com a matéria objeto do sistema. Essa armadilha responde pela maioria dos defeitos dos *Elementos* de Euclides.” (EVES, 2005b, p. 657, grifo do autor).

As colocações de Eves relacionam-se à idéia colocada por Parzys (2001) quando, em seu artigo, trata da “contaminação do sabido pelo percebido” (CKS).

2.3 – Clairaut

Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765) parece antecipar muitos temas discutidos atualmente em educação matemática como contextualização, etnomatemática e uso da história da matemática.

Em 1741, Clairaut fez uma tentativa de apresentar a geometria elementar de uma maneira intuitiva. Ele escreve uma obra onde discorda do rígido método de Euclides e propõe levar o principiante ao conhecimento da geometria a partir da observação e da experiência.

Sua obra assemelha-se um manual técnico. De fato, o próprio Clairaut chama a atenção dos seus leitores que sua obra não é um tratado de agrimensura. Ele apenas vale-se da medida de terrenos com o objetivo de fazer com que aqueles que usem o seu livro comecem no início da geometria, retornando à sua origem histórica: a medida dos terrenos após as cheias do Rio Nilo no Egito.

Interessante é verificar que este procedimento de Clairaut, usado há aproximadamente 280 anos, relaciona-se com as indicações pedagógicas atuais como uso da história da matemática e contextualização.

Pensei que esta sciencia, como todas as outras, fôra gradualmente formada: verosimilmente, alguma necessidade é que promovera seus primeiros passos, e estes primeiros passos não podiam estar fóra do alcance dos principiantes, visto como por principiantes foram dados.

Com esta idéa , propuz-me remontar ao que podia ser a fonte da geometria. (CLAIRAUT, 1909, p. X, Tradução por José Feliciano)

Clairaut, nessa obra, não teve essencialmente a preocupação com provas rigorosas.

Não nos surprehende que Euclides se dê ao trabalho de demonstrar que dous circulos secantes não têm o mesmo centro [...] Esse geometra tinha de convencer sophistas obstinados, que se gloriavam de recusar as verdades mais evidentes; e então era preciso que a geometria tivesse, como a logica, o auxilio de raciocinios em forma para tapar a boca á chicana. (CLAIRAUT, 1909, p. X, Tradução por José Feliciano)

Esse autor parecia ter a mesma preocupação revelada por vários professores e pedagogos atuais ao tratar do ensino da geometria: *“Logo no começo apresentam ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares, que só lhe parecem anunciar um estudo árido”* (CLAIRAUT, 1909, p. IX).

Por outro lado, dentro de nossa proposta, que segue as sugestões do projeto AProvaME, não há muito o que explorar na obra de Clairaut quanto à demonstração histórica das propriedades dos paralelogramos.

Ainda assim, nos chamaram a atenção, alguns dos métodos sugeridos pelo autor pois, por coincidência, são semelhantes às idéias que tivemos antes de ler sua obra.

Outro fato notável é que, como os teóricos que, neste trabalho, emprestam-nos suas idéias, Clairaut também usa os termos relativos à “visão”, ao “rigor”.

A congruência de triângulos será nossa “matéria prima” na presente pesquisa. Vejamos como Clairaut trata desse assunto. Poderemos observar que a abordagem difere do estilo de Euclides e mesmo dos próximos autores a serem estudados pois é mais prática e menos rigorosa.

O que chamaríamos hoje de caso LLL de congruência de triângulos é colocado como uma “receita” onde se constrói um triângulo congruente a outro dado. Clairaut, expõe a referida construção (figura 10) com o traçado de “uma linha DE, igual ao lado AB” – hoje diríamos: um segmento congruente a AB.

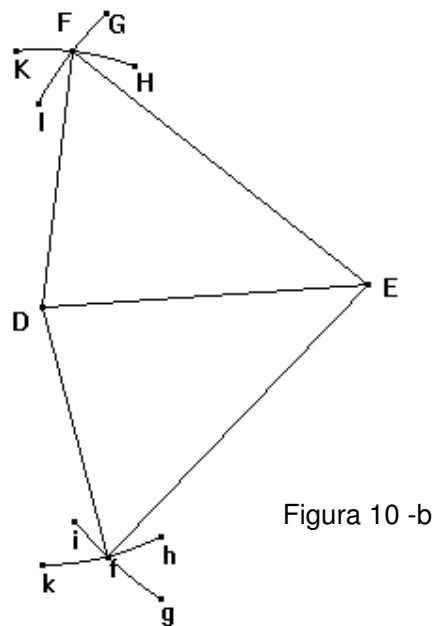
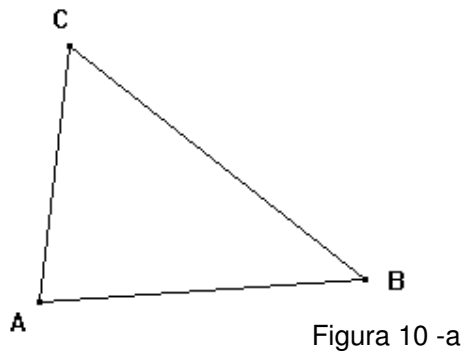


Figura 10: Reprodução do triângulo ABC (adaptação do original)
 Fonte: Clairaut, 1909, p. 22, 23

Depois com uma corda com o comprimento de BC, e centro em E traçamos o arco IFG que terá a corda como raio. Tomando uma corda com o comprimento de AC e centro em D, traçamos o arco KFH, que cortará o primeiro no ponto F. Com o traçado das linhas DF e FE concluímos o traçado do triângulo DEF congruente ao triângulo proposto ABC.

Ainda se fala em construir o triângulo simétrico ao triângulo DEF em relação à base DE.

Interessante também é notar o discurso que Clairaut usa para validar suas idéias (está bem próximo das justificativas de nossos alunos): “[...] não seria possível que a posição das linhas DF e EF sobre DE fosse diferente da posição das linhas AC e BC sobre AB [...]” (CLAIRAUT, 1909, p. 23).

O atual caso LAL, de maneira bem intuitiva é também colocado: para construir um triângulo DEF “igual e semelhante” (hoje, diríamos “congruente”) a um triângulo ABC dado podendo medir apenas dois lados de ABC, toma-se um conjunto de duas réguas articuláveis que possam girar em torno de “b” conforme a figura 11 a fim de “copiar” a medida do ângulo $\hat{A}BC$:

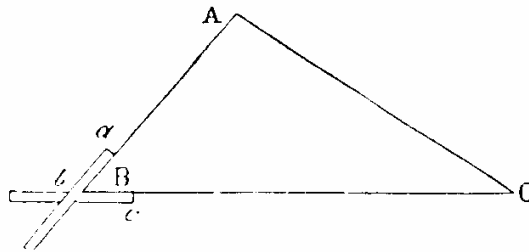


Figura 11: jogo de réguas transportando um ângulo
Fonte: Clairaut, 1909, p. 24, fig. 27

A seguir, Clairaut relata o transporte do ângulo $\hat{A}BC$ para o triângulo a ser construído: indicando que se faça coincidir a régua bc com o lado DE do novo triângulo e o centro b com o ponto D (que será vértice da figura a ser construída).

Como os lados DE e DF serão traçados com as mesmas medidas, respectivamente dos lados BC e BA do primeiro triângulo, o autor conclui que, nesse ponto, basta traçar o terceiro lado para termos o triângulo solicitado.

Podemos observar que é uma operação intuitiva que, facilmente, seria aceita pela maioria dos alunos.

Clairaut conclui essa parte, descrevendo, em linguagem não tão formal, o caso LAL de congruência: “[...] um triângulo é igual a outro quando dois de seus lados são respectivamente iguais e é igual o ângulo entre eles compreendido” (CLAIRAUT, 1909, p. 25).

O caso ALA também é relatado quando se dá a “receita” para construir um triângulo DEF congruente a outro ABC, dado, se apenas se puder medir a base AB: basta traçar o lado DE que será a base do novo triângulo (congruente a

AB). Em seguida, colocam-se as linhas DF e EF de modo que façam com DE os mesmos ângulos que fazem, respectivamente, AC e BC com AB.

Notamos que é algo bem empírico, como poderiam ser as conjecturas dos alunos e Clairaut acrescenta que se trata de um princípio tão simples que não precisa ser demonstrado.

2.4 – Legendre

Durante séculos, a obra de Euclides foi referência para os autores em geometria que conservavam suas definições e proposições.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), em seus “Éléments de Géométrie” reordenou e simplificou as proposições contidas nos “Elementos” de forma que esta sua obra alcançou muito sucesso e passou a ser também uma referência.

Definições também foram reformuladas. Entre as mais notáveis estão as definições de paralelogramos, nosso objeto de estudo, designados como “rombóides” por Euclides (2006): “rombóide é um figura que, tendo os lados opostos iguais, nem é eqüilátera nem eqüiângula”.

Legendre, na definição 17, permite classificar quadrado, retângulo e losango também como paralelogramos o que não ocorria na obra de Euclides: “Parmi les quadrilateres on distingue: [...] Le parallélogramme ou rhombe, qui a les côtés opposés parallèles”¹ (LEGENDRE, 1817, p.3).

Comparando as definições de Legendre, com as que ensinamos aos nossos alunos hoje e que são as trazidas pelos nossos livros didáticos, a única diferença é que, mais especificamente, retângulos e losangos, embora sejam paralelogramos, não são considerados quadrados como se pode verificar ainda na definição 17: “ Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les côtés égaux [...] Le *losangé*, dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits”² (LEGENDRE, 1817, p. 3, grifo do autor).

1 – Entre os quadriláteros se distingue: [...] O paralelogramo ou rombo, que tem os lados opostos paralelos.

2 – O retângulo, que tem os ângulos retos sem ter os lados iguais [...] O losango, cujos lados são iguais sem que os ângulos sejam retos.

Todavia vamos nos concentrar mais nas proposições de 29 a 32 dos “Éléments” de Legendre pois serão objetos das provas a serem desenvolvidas pelos alunos participantes de nossa pesquisa.

As proposições 29 e 31, são relativas às 34 e 33 dos “Elementos”, que já foram comentadas no item 2.2. Entretanto, verifiquemos a proposição 30 de Legendre : “Si dans un quadrilatere ABCD les côtés opposés sont égaux, en sorte qu’ on ait $AB = CD$, et $AD = BC$, les côtés égaux seront paralleles et la figure sera un parallélogramme”³ (1817, p. 30).

Podemos observar seu encadeamento lógico utilizado na prova:

“Car, em tirant la diagonale BD, les deux triangles ABD, BDC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc l’angle ADB opposé au côté AB, est égal à l’angle DBC opposé au côté CD; donc* le côté AD est parallele à BC. Par une semblable raison, AB est parallele à CD ; donc le quadrilatere ABCD est un parallélogramme.”⁴ (1817, p.31)

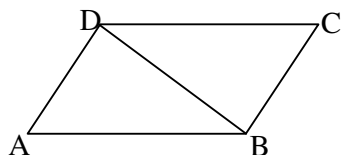


Figura 12 : Quadrilátero com o traçado de uma das diagonais
Fonte: Legendre, 1817, prancha 2, fig. 44

O asterisco utilizado por Legendre, faz referência à proposição 23, mais precisamente da recíproca de um dos corolários dessa proposição que diz que se tivermos iguais (congruentes) ângulos de mesmo nome, ou seja, alternos-internos, alternos-externos ou internos-externos (correspondentes) então “as linhas aos quais eles se referem serão paralelas”.

3 – Se num quadrilátero ABCD os lados opostos são iguais, de sorte que se tenha $AB = CD$, e $AD = BC$, os lados iguais serão paralelos e a figura será um paralelogramo.

4 – Pois, traçando a diagonal BD, os dois triângulos ABD, BDC, terão os três lados iguais, cada um a cada um, portanto eles serão iguais; portanto o ângulo ADB oposto ao lado AB, é igual ao ângulo DBC oposto ao lado CD, portanto* o lado AD é paralelo à BC. Pela mesma razão, AB é paralela à CD; portanto o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

A proposição 32 de Legendre tem a redação: “Les deux diagonales AC, DB, d’un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales”⁵ (1817, p. 31).

Podemos observar que Euclides não tem, em seu primeiro livro, uma proposição com essa redação, ou seja, não menciona que as diagonais de um paralelogramo se “cruzam” em seus respectivos pontos médios.

Para prová-la, Legendre parte de outra, já provada, que diz que um paralelogramo tem lados opostos congruentes:

Car, en comparant le triangle ADO au triangle COB, on trouve le côté $AD = CB$, l’angle $ADO = CBO^*$; et l’angle $DAO = OCB$; donc ces deux triangles sont égaux*; donc AO, côté opposé à l’angle ADO, est égal à OC, côté opposé à l’angle OBC; donc aussi $DO = OB$.⁶ (LEGENBRE, 1817, p.32)

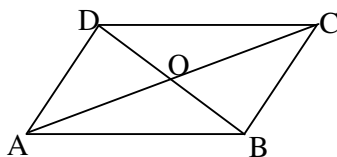


Figura 13: Paralelogramo com diagonais se interceptando
Fonte: Legendre, 1817, prancha 2, fig. 45

Novamente, com o primeiro asterisco, Adrien Legendre, faz referência novamente à proposição 23 mas não indica, nessa proposição, aquela que lhe permite concluir a congruência entre os lados AD e CB que seria a de número 29 cuja redação relata que lados e ângulos opostos de um paralelogramo são iguais (congruentes). O segundo asterisco refere-se à proposição 7 que trata do que, hoje chamamos caso ALA de congruência de triângulos.

2.5 – Hadamard

As definições de Jacques Hadamard (1865-1963) são as que trabalhamos com nossos alunos hoje em dia: paralelogramo é um quadrilátero cujos lados são paralelos dois a dois. Isso é expresso por Hadamard pela definição: “On

5 – As duas diagonais AC, DB, de um paralelogramo se cortam mutuamente em duas partes iguais.

6 – Pois, comparando o triângulo ADO ao triângulo COB, encontra-se o lado $AD = CB$, o ângulo $ADO = CBO^*$; o ângulo $DAO = OCB$; portanto os dois triângulos são iguais*; portanto AO, lado oposto ao ângulo ADO, é igual à OC, lado oposto ao ângulo OBC; portanto também $DO = OB$.

nomme *parallélogramme* (fig. 43) um quadrilatère dont les cotés sont parallèles deux à deux”⁷ (HADAMARD, 1898 p. 38, grifo do autor).



Figura 14: Paralelogramo
Fonte: Hadamard, 1898, p. 38, fig. 43

Quanto aos paralelogramos em geral não há diferença entre as definições de Legendre e Hadamard mas, considerando especificamente as definições de retângulo e losango, a diferença é que agora, os mesmos podem ser considerados quadrados pelas definições de Hadamard: “On appelle *rectangle* um quadrilatère dont les angles sont égaux, et par conséquent tous droits. Un rectangle est un parallélogramme, puisque les angles opposés sont égaux”⁸ (1898 p. 40, grifo do autor) e “On appelle *losange* um quadrilatère dont les quatre cotés sont égaux. Un losange est un parallélogramme, puisque les côtés opposés sont égaux”⁹ (HADAMARD, 1898 p. 40, grifo do autor).

Hadamard altera a definição usada por Legendre retirando as exclusões que este último colocava: um retângulo tinha ângulos retos mas não tinha lados congruentes e um losango tinha lados congruentes mas não tinha ângulos retos. Agora um quadrado pode ser considerado tanto um retângulo como um losango. É o que todos nós ensinamos hoje.

Notável também é o enquadramento feito por Hadamard: além de, por exemplo, sua definição de paralelogramo incluir losangos e retângulos ele a

7 – Denomina-se paralelogramo (fig. 43) um quadrilátero cujos lados são paralelos dois a dois.

8 – Chama-se retângulo um quadrilátero cujos ângulos são iguais, e por consequência todos retos. Um retângulo é um paralelogramo, dado que os ângulos opostos são iguais.

9 – Chama-se losango um quadrilátero cujos quatro lados são iguais. Um losango é um paralelogramo, dado que os lados opostos são iguais.

confirma com o uso de propriedades como podemos constatar nas citações que acabamos de usar: um losango é um paralelogramo dado que seus lados opostos são iguais e um retângulo é um paralelogramo dado que os ângulos opostos são iguais.

Logicamente a estrutura de sua obra diferencia-se da usada por Euclides e Legendre que, no início estabeleciam todas (e apenas) as definições, por isso nelas não se usavam as propriedades das figuras que eram colocadas mais adiante.

A obra de Hadamard aproxima-se mais dos livros atuais devido justamente às definições mas também em relação à sua estrutura: geralmente é provado um teorema e logo em seguida a sua recíproca o que não acontece com regularidade nas obras de Euclides e Legendre.

Como fizemos para essas duas obras, vamos analisar as provas de propriedades de paralelogramos feitas por Hadamard.

Sua obra não traz um número para cada teorema. No item 45 de sua obra, Hadamard define o paralelogramo e logo a seguir coloca o teorema: “Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, les angles adjacents à un même côté supplémentaires”¹⁰ (HADAMARD, 1898 p. 40).

Já comentamos tal prova ao expor sobre Euclides e Legendre. A única diferença é que eles, a partir do paralelogramo considerado na hipótese, tiram duas conclusões: ângulos opostos congruentes (o que está relatado na citação acima, por Hadamard) e lados opostos congruentes.

Apesar de já termos analisado esse teorema (na versão dos dois primeiros autores), vamos ver como Hadamard o coloca mesmo porque conclui sobre ângulos adjacentes suplementares (o que não abordam Legendre e Euclides) e também porque ele traz a prova da recíproca (também não abordadas por Legendre e Euclides).

Usando a figura 15, indicada, em sua obra com o número 44, começa dizendo que os ângulos A e B adjacentes ao mesmo lado AB são os ângulos

10 – Num paralelogramo, os ângulos opostos são iguais, os ângulos adjacentes a um mesmo lado suplementares

internos do mesmo lado em relação às paralelas AD e BC, cortadas pela secante AB: eles são, portanto, suplementares.

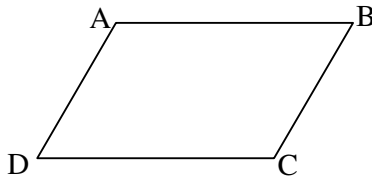


Figura 15: Paralelogramo com vértices A,B,C, D
Fonte: Hadamard, 1898, p. 38, fig. 44

Hadamard prossegue dizendo que quanto aos ângulos opostos A, C, eles são iguais por terem lados paralelos e de sentidos contrários.

Ele não usa congruência de triângulos como Legendre e Euclides. Todavia sua obra não tem a mesma estrutura: há o mesmo rigor axiomático dos dois primeiros, mas não indica, ao longo da prova que está desenvolvendo, os números dos teoremas (ou axiomas) que está usando apesar de tê-los provado anteriormente.

É o caso da conclusão de que os ângulos A e B acima são suplementares. Apesar de não indicar, Hadamard usou a recíproca de um teorema, já provado por ele, que diz que duas retas cortadas por uma secante são paralelas se os ângulos colaterais internos são suplementares e se os ângulos alternos internos são congruentes.

De mesma forma, ao concluir que os ângulos opostos A e C são iguais, nós diríamos hoje, congruentes, ele faz uso de um teorema, no item 43 de sua obra:

“ Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires : égaux, si les côtés sont tous les deux de même sens ou tous les deux de sens contraire ; supplémentaires, si les côtés sont l'un de même sens, l'autre de sens contraire.”¹¹ (HADAMARD, 1898, p.34)

11 – Dois ângulos que têm seus lados paralelos cada um a cada um são iguais ou suplementares: iguais, se os lados são os dois de mesmo sentido ou os dois de sentido contrário; suplementares, se os lados são um de mesmo sentido, outro de sentido contrário.

Vamos também verificar a recíproca ainda no item 45: “Si, dans un quadrilatère, les angles opposés sont égaux, le quadrilatère est un parallélogramme”¹² (HADAMARD, 1898, p.38).

A prova começa com a redação de que a soma dos ângulos de todo quadrilátero (podemos supor, ABCD) é igual a quatro retos (aqui sim é indicado um item, o de número 44 *bis*). Mas tem-se $A = C$ e $B = D$ e a soma das medidas dos quatro ângulos $A+B+C+D$ poderá ser escrita $2A + 2B$. Ter-se-á, portanto, $A+B$ é igual a dois retos, e as retas AD e BC serão paralelas, por formarem com AB dois ângulos colaterais internos suplementares. A demonstração para as retas AB e CD é análoga.

O referido item 44 *bis* acima, traz um teorema que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é igual à quantia de lados do polígono diminuída de duas unidades vezes dois retos. O equivalente à nossa fórmula $S = (n-2) \cdot 180^\circ$, onde S é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono convexo e n ($n \geq 3$) é a quantia de lados do polígono.

No item 46 há outro teorema: “Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux”¹³ (HADAMARD, 1898, p. 39).

Para provar esse teorema, foi usado o caso ALA de congruência de triângulos assim como fizeram Legendre e Euclides mas Hadamard, após fazer a prova, relata que a hipótese poderia ser dividida em duas partes: dois lados opostos são paralelos e os outros lados são igualmente paralelos. A tese também poderia ser dividida em duas: dois lados opostos são congruentes e os dois outros também são congruentes.

Então, embora nos pareça estranho, Hadamard diz que o teorema precedente tem duas recíprocas: “Comme, dans la proposition réciproque, on peut former la conclusion, soit totalement, soit partiellement avec l’hypothèse primitive et *vice versa*, le théorème précédent a deux réciproques”¹⁴ (HADAMARD, 1898, p. 39, grifo do autor).

12 – Se, num quadrilátero, os ângulos opostos são iguais, o quadrilátero é um paralelogramo.

13 – Em todo paralelogramo, os lados opostos são iguais.

14 – Como, na proposição recíproca, pode-se formar a conclusão, seja totalmente, seja parcialmente com a hipótese primitiva e vice-versa, o teorema precedente tem duas recíprocas”.

Na verdade, são apresentados dois teoremas: o primeiro dizendo que para que um quadrilátero seja um paralelogramo é necessário que tenha os lados opostos iguais (diríamos, hoje, congruentes) – esse seria realmente a recíproca do teorema precedente. O segundo dizendo que para que um quadrilátero seja um paralelogramo o mesmo deverá ter dois lados opostos iguais (congruentes) e paralelos.

Estaríamos sendo repetitivos ao expor como Hadamard elaborou a prova do referido teorema pois ela, como já dissemos, é a mesma utilizada por Euclides e Legendre. Em relação aos dois últimos teoremas (parágrafo anterior), o primeiro não foi abordado por Euclides mas o foi por Legendre e, da mesma maneira, usado por Hadamard. O segundo foi abordado novamente pelos dois primeiros autores.

Esse fato nos leva a pensar que, realmente, o trabalho com provas, por vezes, parece nos oferecer apenas um único caminho, pelo menos, um único caminho conveniente. Todavia o que não queremos nesse trabalho com nossos alunos é que acabem por decorar esse caminho único.

Reforçando essa idéia, podemos verificar que Hadamard, ao provar um teorema, no item 47 de sua obra, que afirma que num paralelogramo, as diagonais se cortam mutuamente em partes iguais, procede de modo idêntico ao usado por Legendre.

Por esse motivo, não convém comentar seu raciocínio completo mas é interessante notar que ele usa a congruência de ângulos alternos internos em duas retas paralelas cortadas por uma transversal sem fazer menção a algum teorema anterior já provado:

Dans le parallélogramme ABCD (fig. 46), menons les diagonales AC, BD qui se coupent en O. Les deux triangles ABO, CDO sont égaux comme ayant leurs angles égaux chacun à chacun et le côté $AB = CD$ (théor. précéd.). On a donc $AO = CO$, $BO = DO$.¹⁵ (HADAMARD, 1898, P. 40)

15 – No paralelogramo ABCD (fig. 46), traçamos as diagonais AC, BD que se cortam em O. Os dois triângulos ABO, CDO são iguais por terem ângulos iguais cada um a cada um e o lado $AB = CD$ (teor. preced.) Tem-se portanto $AO = CO$, $BO = DO$.

O “teorema precedente” referido por Hadamard, diz que um paralelogramo tem lados opostos congruentes mas quanto a outras conclusões expostas, o autor parece contar que o leitor esteja seguindo sua obra e já deva ter lido os teoremas que permitem tais conclusões mesmo que, no momento, não se faça referência a eles.

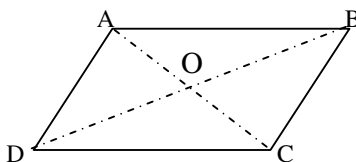


Figura 16: Paralelogramo com diagonais tracejadas se interceptando
Fonte: Hadamard, 1898, p. 40, fig. 46

Hadamard coloca a prova da recíproca desse teorema (o que os dois primeiros autores não fazem).

O que fazemos hoje não difere do seu raciocínio: pela hipótese sabemos que AO é congruente a CO , BO é congruente a DO . Temos também os ângulos AOB e DOC congruentes (são o.p.v.) – Hadamard diz que os “ângulos em O ” são “iguais”. Os triângulos AOB e DOC são congruentes e, assim, os ângulos BAO e DCO serão também congruentes – Hadamard diz que, nesses triângulos congruentes, “os ângulos em A e C serão congruentes”. Por conseguinte, as retas AB e CD serão paralelas.

A congruência dos triângulos ADO e BCO comprovará, analogamente, que AD é paralela à BC .

Novamente, Hadamard não faz referência aos teoremas já provados usados em cada conclusão desta prova.

Dentro do item 48, Hadamard define retângulo e losango e apresenta várias provas. Vamos resumir os comentários sobre elas. A primeira delas diz que num retângulo as diagonais são congruentes. A comprovação é feita usando a a figura 17 e afirmando que a congruências das diagonais vêm da congruência dos triângulos ACD e BCD que têm congruentes os ângulos ADC e DCB (retos), além do lado comum DC e dos lados AD e BC que são congruentes, pois são lados opostos de um paralelogramo.

Observamos que Hadamard pode usar a última conclusão por considerar que todo retângulo é um paralelogramo.

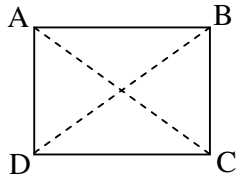


Figura 17: Um retângulo e suas diagonais
Fonte: Hadamard, 1898, p. 40, fig. 47

E, ainda lembrando que Hadamard está considerando essa prova no universo dos paralelogramos, ele apresenta a sua recíproca: todo paralelogramo no qual as diagonais são congruentes é um retângulo. A prova é feita, também com auxílio da sua figura 47 (nossa figura 17). Desta vez a figura é tida como um paralelogramo com diagonais congruentes. Tem-se $AD = BC$: por conseguinte, os triângulos ADC e BCD são congruentes pois têm três lados congruentes (hoje, diríamos, pelo caso LLL). Os ângulos ADC e DCB são congruentes e, como são suplementares, eles são, os dois, retos de onde resulta que o paralelogramo é um retângulo.

É de se observar que Hadamard não faz referência aos outros dois ângulos: DAB e ABC ; nem mesmo que se os ângulos da base de um paralelogramo são retos os outros dois também o devem ser.

Ainda no item 48 de sua obra, há a prova do teorema: Num losango as diagonais são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos.

O raciocínio da prova, usando a sua figura 48 (nossa figura 18), relata simplesmente que se o quadrilátero $ABCD$ é um losango o triângulo ABD é isósceles. A diagonal AC sendo mediana desse triângulo, é ao mesmo tempo altura e bissetriz.

Observamos uma linearidade no trabalho de Hadamard. Ele não coloca na redação de sua argumentação algumas definições e propriedades anteriormente já estabelecidas: deixa para o leitor a tarefa de lembrar que, como um losango é um paralelogramo, suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios e a partir disso se pode concluir que a diagonal AC contém a mediana do triângulo ABD .

O autor relata que a diagonal AC contém a altura do triângulo ABD mas deixa para o leitor a constatação de que a base do referido triângulo é a outra

diagonal do quadrilátero garantindo, portanto, que as diagonais do losango são perpendiculares.

Hadamard, em sua redação, menciona apenas a bissetriz do triângulo ABD. Parece supor que o leitor perceba, sem dificuldades, que o triângulo DBC é simétrico ao triângulo DAB em relação à diagonal DB.

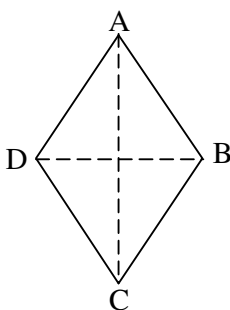


Figura 18: Um losango e suas diagonais
Fonte: Hadamard, 1898, p. 41, fig. 48

Dessa maneira se constata que a diagonal AC contém a bissetriz de dois pares de ângulos opostos do losango. A prova de que a diagonal DB é bissetriz dos ângulos ADC e CBA não é mencionada como análoga àquela feita para a diagonal AC. O autor, provavelmente, estaria supondo dispensável essa observação.

A recíproca do teorema precedente, admitida por Hadamard, usa a figura 18 como um paralelogramo no qual as diagonais são perpendiculares e conclui que o mesmo é um losango.

A redação da prova estabelece apenas que cada vértice será eqüidistante dos dois vértices adjacentes por estar sobre a perpendicular que passa pelo ponto médio da diagonal que liga esses dois vértices.

No item 49 há a definição de quadrado. Como, para Hadamard, um quadrado é um losango e também um retângulo ele não teve a necessidade de provar que suas diagonais são congruentes, perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios.

Também não foi necessário provar que todo quadrilátero no qual as diagonais são congruentes, perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios é um quadrado.

Podemos verificar que a estrutura usada hoje, em geometria, mais precisamente nas séries finais da educação básica, se funda amplamente em Hadamard. Todavia o ensino da geometria das séries iniciais se relaciona mais com a obra de Euclides. De fato, para um aluno que se inicia no estudo da geometria, a idéia de serem o quadrado, o retângulo, o losango e o paralelogramo todos objetos distintos é mais elementar.

As classificações propostas por Hadamard e mesmo a seqüência estrutural de suas provas, hoje estão nos livros (didáticos escolares e nos especializados no estudo mais aprofundado da geometria). Elas permitem uma maior mobilização de raciocínio na elaboração de uma prova pois usam a teoria dos conjuntos (quadrados estão na intersecção entre os conjuntos dos losangos e retângulos e a união dos mesmos é um subconjunto dos paralelogramos).

Poderíamos dizer também que, por exemplo, o termo “quadrado”, pela classificação de Hadamard, permite trabalhar atividades que visem verificar a percepção direta dos alunos (Alves e Brito, 2007) pois, esse termo constitui, para tal percepção, uma informação necessária e suficiente e espera-se que os alunos, mesmo sem o estímulo visual (visão da figura), organizem idéias que são próprias dos losangos, retângulos e paralelogramos.

CAPÍTULO 3 - CONCEPÇÃO, ANÁLISE A PRIORI, APLICAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES

3.1 – AS ESCOLHAS DIDÁTICAS

Apresentaremos a seguir as escolhas de concepção das atividades sobre os paralelogramos.

Resolvemos verificar, inicialmente, o conhecimento prévio dos alunos sujeitos de nossa pesquisa e deixar documentado esse fato.

Diante disso, a primeira atividade concebida foi uma avaliação diagnóstica com conteúdos e definições básicas em geometria.

A próxima etapa deverá dar suporte à realização da pesquisa, pois não será possível trabalhar a prova usando as propriedades dos paralelogramos se os alunos não conhecem nem mesmo a definição de um paralelogramo ou mesmo o que são retas paralelas.

Estão planejadas duas etapas de atividades preliminares com o objetivo de servir para que os alunos aprendam os tópicos de geometria necessários para participar da pesquisa.

Na primeira, serão usadas atividades com o apoio do programa Cabri pelas quais os alunos poderão, pelo menos, ter a definição de ângulo, de retas paralelas, de paralelogramos, de ângulos correspondentes e opostos pelo vértice.

Essas atividades, feitas no micro, podem ser classificadas como pertencentes ao nível 1 de Parzysz, pois apesar do fator dinâmico do próprio programa, os estudantes devem se apoiar em medições (com os recursos também do programa, que, entre outros, automaticamente tira medida de ângulos e indica se duas retas são ou não paralelas).

Na segunda etapa os alunos, experimentalmente, deverão verificar os casos de congruência de triângulos usando, novamente o ambiente Cabri. As primeiras atividades estão situadas no nível 0 de Parzysz pois é previsto o uso de triângulos montados com varetas, bem ao estilo de Clairaut, quando se fixa um ângulo e, nele, se encaixam os lados de um triângulo em construção.

Todavia os alunos farão a maior parte das questões desse bloco no nível 1 de Parzys, uma vez que estarão terminando construções de triângulos já iniciadas na tela do micro, segundo instruções recebidas, e fazendo verificações através de medições.

Estabelecida a “matéria prima” a ser trabalhada inicia-se a pesquisa numa seqüência didática também dividida em dois blocos.

O primeiro irá conter onze questões sendo as cinco primeiras de validação experimental (nível G1 – Parzys) de algumas proposições referentes às propriedades dos paralelogramos.

O objetivo principal de tais questões é apresentar aos alunos alguns exemplos de proposições evidenciando sua estrutura: a hipótese e a tese. Vão “aceitar” a hipótese e verificar se, com isso, “acontece” a respectiva tese. Para tanto, os estudantes farão, com o uso do software Cabri ou de material concreto (varetas), as construções solicitadas, isto é, perceberão na tela quais elementos (segmentos, retas paralelas, pontos médios...) podem “construir a hipótese” solicitada e, com as ferramentas de verificação do programa (verificação de paralelismo, congruência,...), “identificarão a tese” através da percepção visual e das informações fornecidas pelos recursos do programa tal como “retas paralelas”. Tais procedimentos relacionam-se às idéias do tetraedro: percepção – construção – representação - concepção (Machado, 1995).

Essas cinco questões ainda solicitarão que os alunos indiquem exatamente qual parte da redação da proposição é a hipótese e qual é a tese.

Outro objetivo será, segundo idéias sugeridas nas reuniões do projeto AprovaME, analisar como os alunos validam uma prova empírica: se a experiência valida a proposição em qualquer caso ou somente nos exemplos estudados.

A sexta questão deverá provocar um desequilíbrio cognitivo no aluno se o mesmo se basear apenas em procedimentos pertencentes ao nível 1 de Parzys (empírico). A questão pretende motivar a necessidade de buscar outros tipos de prova e não confiar somente na intuição.

Na busca de provas mais seguras, entram as questões de 7 a 11 onde cada conclusão deverá ser justificada e escrita corretamente a partir, preferencialmente, não mais de procedimentos empíricos, mas do uso de

proposições já existentes. Nesse caso, trabalharemos o nível proto-axiomático (Parzys, 2001): uso de resultados admitidos como verdadeiros (isto é, que não precisam ser provados para serem usados na prova de um teorema).

Pelas informações que temos através da prática, na docência no ensino público, acreditamos ser provável que os alunos nunca tenham realizado uma demonstração. Podemos esperar que encontrem muita dificuldade, nessas primeiras provas formais, na articulação das proposições a serem utilizadas. .

Por esse motivo, no segundo bloco de atividades, algumas proposições serão dadas bastando que selecionem e encadeiem na ordem lógica aquelas que devem constituir a prova a ser feita. Logicamente, isso funcionará apenas como um “lembrete” aos alunos, como dicas de proposições que eles poderiam utilizar. Portanto muito haverá a analisar sobre essa “montagem” das provas que constituirá um tipo de jogo no estilo “quebra-cabeça” cujos detalhes técnicos serão apresentados detalhadamente na respectiva análise a priori.

3.2 – O AMBIENTE E OS SUJEITOS DA PESQUISA

Para recrutar os alunos que participariam de nossa pesquisa entrou-se em contato com algumas escolas que dispusessem de um laboratório de informática.

A unidade escolhida foi a E.E. “Pe José de Anchieta” numa cidade do interior paulista onde, após contato com a direção e recebimento da autorização, foram convidadas quatro salas de oitava série do ensino fundamental e três salas do primeiro ano do ensino médio, a participar do projeto de pesquisa. Nenhum deles era aluno do professor pesquisador.

A princípio, alguns alunos se interessaram e aqueles que participariam da pesquisa foram escolhidos predominantemente por sorteio. Esse tipo de escolha se justifica por dois motivos: achamos que dar prioridade a alguns poderia constranger aqueles não escolhidos além do fato de não ser de nossa intenção trabalhar com alunos num grupo homogêneo (embora a escolha aleatória ainda possa gerar, com menos probabilidade, tal equipe).

Tivemos problemas com alunos desistentes logo no início da pesquisa, mesmo após confirmarem interesse e presença, de modo que a pesquisa

precisou ser reiniciada e novos alunos sorteados. Tivemos, na equipe final, três alunos que não haviam recebido o convite inicial, mas estavam interessados em participar sendo, então, indicados pelos colegas.

Fechou-se, portanto, a equipe com sete alunos escolhidos aleatoriamente e três por indicação. Ainda assim tivemos a desistência de mais dois deles após reiniciada a pesquisa. Trabalhamos, portanto, com oito alunos em quatro duplas que foram indicadas pelas letras A,B,C e D. Infelizmente também não pudemos contar plenamente com a presença dos alunos. Em várias seções, tivemos faltas de alunos e, nesse caso, apenas um representou a dupla.

O pesquisador assumiu tanto a função de professor intervindo durante o processo de experimentação e coleta de dados quanto de observador (em alguns momentos procurou não fazer intervenção antes da coleta dos dados).

3.3 – A ORGANIZAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

Lembrando nosso plano de pesquisa, as atividades foram previstas dentro da estrutura abaixo.

Com exceção da prova diagnóstica, foram utilizadas seções de duas horas cada, às tardes das quartas-feiras e sextas-feiras. Cada seção em um dia (uma tarde).

A ESTRUTURA:

- Prova Diagnóstica (para deixar registrado o conhecimento prévio sobre geometria).

Fase preliminar¹

- Etapa 1: atividades empíricas sobre paralelismo (noções de ângulo, retas paralelas, ângulos correspondentes, suplementares, opostos pelo vértice e também a noção de paralelogramo).
- Etapa 2: atividades empíricas sobre congruência de triângulos (casos LAL, ALA, LLL, LAAo)

1 – As atividades das etapas 1 e 2 estão apresentadas nos anexos 3 e 4.

Nessas duas etapas, realizadas em três seções, usou-se o software Cabri – Géomètre.

Atividades da Pesquisa

- **Bloco I:** Questões de validação empírica (com o objetivo de apresentar as proposições aos alunos com seus elementos: hipótese e tese além de verificar suas concepções quanto à extensão de uma validação empírica).

Questões de validação formal (com o objetivo de verificar o desempenho dos alunos numa prova onde não se possa mais usar o fator empírico).

Esse bloco foi realizado em 4 seções.

- **Bloco II:** Jogo de cartas: um “quebra-cabeças” onde se devem encaixar as cartas (as proposições) na seqüência correta até se constituir uma prova.

Esse bloco foi realizado em 6 seções.

Lembramos que, apenas os blocos I e II fazem parte da análise de nossa pesquisa. De certa forma, tentamos, de maneira ousada, aplicar a sugestão do projeto AprovaME: “propriedades dos paralelogramos através da congruência de triângulos” com alunos que tinham deficiências conceituais em geometria.

Por esse motivo, a fase preliminar serviu para um resgate dos conceitos necessários para se poder trabalhar com provas, mesmo as empíricas.

Todavia, podemos, pelo menos, relatar que as avaliações diagnósticas confirmaram o que já estávamos supondo e o que os próprios alunos relataram: pouco estudaram os tópicos de geometria atribuídos ao ensino fundamental.

Precisamos observar que, devido às desistências (muitos dos que se submeteram à avaliação diagnóstica com a intenção de participar da pesquisa acabaram não o fazendo), apenas um dos protocolos pertence a um aluno que participou da pesquisa. Mesmo assim, os demais ainda servem como uma pequena amostra da situação do conjunto dos alunos da unidade escolar. Alguns desses protocolos estão no anexo 2, inclusive aquele do aluno que participou da pesquisa.

Também enfrentamos desistências de alunos que já estavam participando da fase preliminar. Ao substituí-los cuidamos para que os novos participantes tivessem assegurada a apreensão dos conceitos necessários para sua participação na pesquisa.

Inicialmente foram previstas oito seções de duas horas cada sendo três delas para a realização da fase preliminar e as outras cinco para a pesquisa. O trabalho precisou ser reiniciado quando procuramos adaptar a aplicação das atividades da fase preliminar aos alunos que já estavam participando e aos novos, recém recrutados, no lugar dos desistentes. Mesmo assim procuramos manter um novo cronograma com a mesma estrutura. Todavia os blocos I e II precisaram de mais tempo do que tínhamos previsto sendo necessário o acréscimo de mais cinco seções de duas horas cada.

Todas as seções foram feitas na sala de informática, que dispunha de quatro micros, inclusive as que não demandavam o uso do computador. Nas atividades preliminares, cada dupla usou um micro embora, no início, precisássemos contar com até três pessoas por máquina.

A quantia de micros² disponíveis impediu uma melhor ação de convite e recrutamento para o início da pesquisa como, por exemplo, um curso no ambiente Cabri-Géomètre. Tal ação poderia evitar a necessidade das substituições de alunos para suprir as desistências.

3.4 – A COLETA DOS DADOS

Contamos basicamente com a gravação³ (áudio) das seções e com os protocolos dos alunos (compostos por planilhas e pelos rascunhos efetuados).

Uma desvantagem de não contarmos com uma filmadora, estaria ligada à ocasião das provas não formais quando os alunos expressaram suas idéias através do posicionamento das varetas ou canetas representando lados de um triângulo ou quadrilátero. Nesse caso, relatamos e anotamos o que estava ocorrendo, para que tivéssemos os registros gravado e escrito.

2 - Contávamos com apenas 4 computadores (da própria unidade escolar) em funcionamento.

3 - O gravador ficou, algumas vezes, próximo a determinada dupla a fim de gravar o diálogo dos membros entre si, mas, na grande maioria das vezes foi gravado o diálogo pesquisador - duplas nos momentos de intervenção.

As planilhas (como parte dos protocolos), permitiram o recolhimento de dados sobre o desenvolvimento da prova pelos alunos evidenciando tanto a seqüência de proposições utilizada quanto a concepção de tais proposições através do registro figural (Duval, 1995).

A sucessão de planilhas teve como objetivo acompanhar os progressos dos participantes antes e depois de algumas intervenções ou do uso de alguns recursos do jogo e, assim, recolher material suficiente para responder nossa questão de pesquisa.

Como procuramos analisar, de forma geral, o desempenho dos alunos no desenvolvimento de uma prova, procurando que a tendência fosse o estilo formal, recolhemos todos os dados possíveis. Dando ênfase para as conjecturas e procedimentos delineados pelos participantes da pesquisa, acabamos permitindo que alguns abandonassem a planilha caso não estivessem, com ela, sentindo-se à vontade, embora, a princípio, nela colocássemos nossa expectativa de uma boa ferramenta para a coleta de dados. Procuramos compensar esse fato com a gravação da exposição das idéias utilizadas pelas duplas.

3.5 – ANÁLISES A PRIORI E A POSTERIORI

3.5.1 – Análises: Bloco I – Conjecturas e introdução às provas

Antes de iniciarmos as análises, vamos expor todo o conjunto de atividades para que seja possível uma visão geral prévia:

CONJECTURAS E INTRODUÇÃO À PROVA

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**. Estamos considerando como “tese” uma conclusão que, geralmente é escrita após a expressão “então”.

Estamos considerando “hipótese” como uma condição que contém também pelo menos uma informação a partir da qual se inicia o raciocínio para se obter a tese. Geralmente começa com a expressão “se”.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

- 1) a) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero. Você deverá verificar, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo. Como poderá fazer isso? _____

Repita a operação para outros pares de segmentos congruentes.

b) Trace um segmento e rotule suas extremidades como A e B. Trace outro segmento qualquer AC (origem em A e extremidade num ponto qualquer a ser rotulado como C). Usando a ferramenta “compasso” você deve transportar esses dois segmentos formando um quadrilátero cujos LADOS OPOSTOS SÃO CONGRUENTES. Verifique, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo.

Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação: “Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a tese é o trecho _____

2) Usando a malha de retas paralelas (arquivo de nome “malha de retas pontilhadas”) trace um quadrilátero de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Meça os lados opostos de cada um deles. Ao selecionar o ponto A ou o ponto B, você pode mudar a distância entre as retas. Ao selecionar a reta r ou s, você pode mudar a inclinação das mesmas. Verifique se, ao fazer isso, como mudam as medidas que você tirou. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a
tese é o trecho _____

3) Usando o arquivo C3, verifique se O é o ponto médio de AB e também de CD. Trace a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e a reta $\overleftrightarrow{CB}$ e verifique se elas são paralelas. Faça o mesmo para as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“ Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____
_____ e a
tese é o trecho _____

- 4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____ e a tese é o trecho _____

- 5) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outras três varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:

“Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

- 6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

() Verdadeira () Falsa

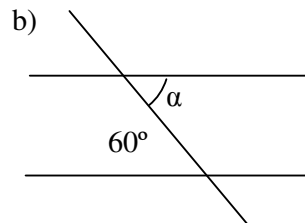
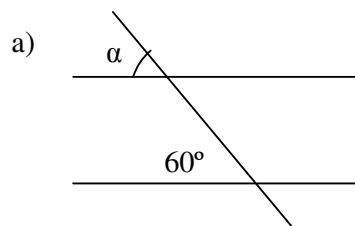
“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

() ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

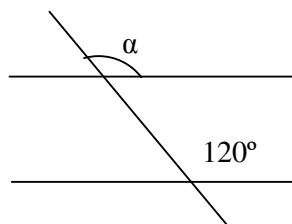
() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

INICIAÇÃO ÀS PROVAS

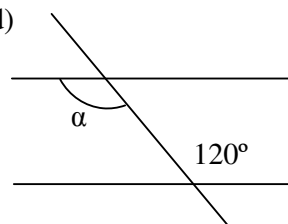
- 7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.



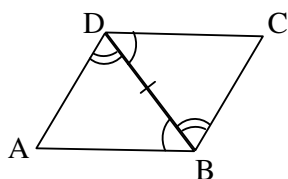
c)



d)



8) Observe o esboço abaixo.



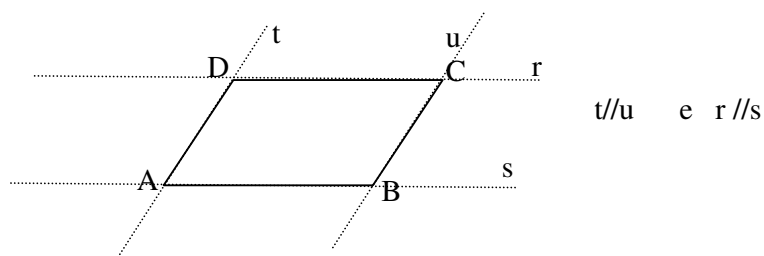
Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? _____

Se você achar que sim, o qual o caso? _____

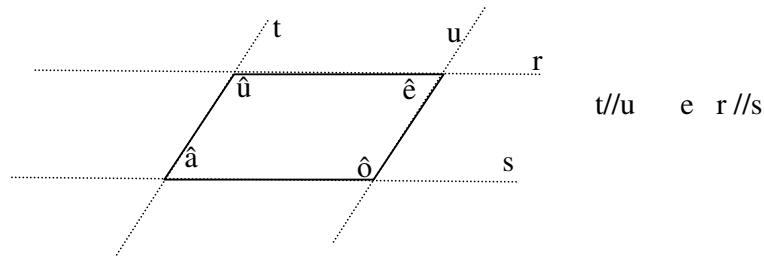
Os dois formam uma figura. Qual? _____

Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

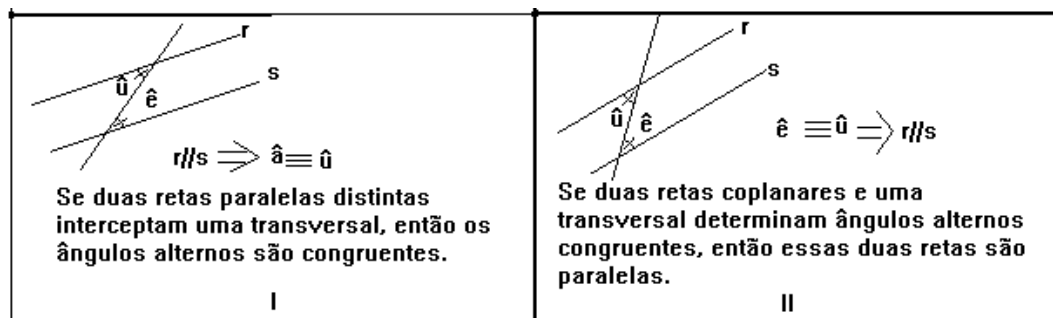
9) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.



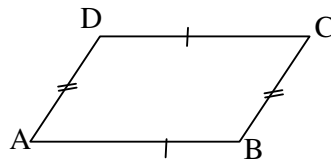
- 10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida $\hat{a}$ e $\hat{e}$ são congruentes, bem como os de medida $\hat{u}$ e $\hat{o}$.



- 11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:



A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



Iniciando a análise a priori, observamos que as quatro primeiras atividades serão realizadas no ambiente computacional com o software Cabri-Géomètre. O enunciado reforça os conceitos de “paralelogramo”, “hipótese” e “tese”

introduzidos pelo pesquisador:

Primeira atividade: (análise a priori)

Vamos definir **paralelogramo** como o quadrilátero que possui **lados opostos paralelos**.

Estamos considerando como “tese” uma conclusão que, geralmente é escrita após a expressão “então”.

Estamos considerando “hipótese” como uma condição que contém também pelo menos uma informação a partir da qual se inicia o raciocínio para se obter a tese. Geralmente começa com a expressão “se”.

No arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”:

- 1) a) Tome dois pares de segmentos congruentes e forme com eles um quadrilátero. Você deverá verificar, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo. Como poderá fazer isso? _____

Repita a operação para outros pares de segmentos congruentes.

Ao abrir o arquivo, o aluno encontra a tela a seguir:

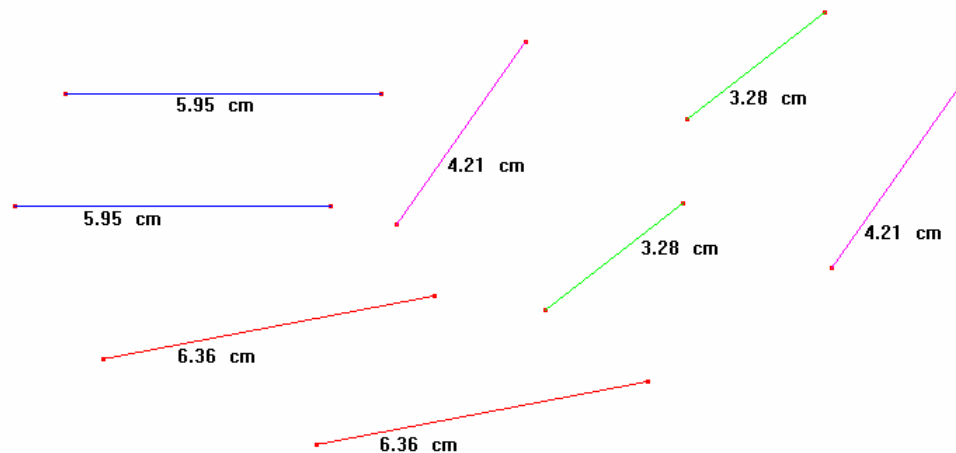


Figura 19: Conteúdo do arquivo “PARES DE SEGMENTOS CONGRUENTES”
Fonte: Autoria própria

A seqüência da atividade:

b) Trace um segmento e rotule suas extremidades como A e B. Trace outro segmento qualquer AC (origem em A e extremidade num ponto qualquer a ser rotulado como C). Usando a ferramenta “compasso” você deve transportar esses dois segmentos formando um quadrilátero cujos LADOS OPOSTOS SÃO CONGRUENTES. Verifique, com as ferramentas do Cabri, se ele é um paralelogramo.

Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho:_____

e a tese é o trecho_____

Esperamos que os alunos digam (item “a”) que é necessário verificar o paralelismo entre os dois pares de lados opostos do quadrilátero de acordo com a definição estudada.

Uma incompreensão das definições de partida, no caso, a de paralelismo e paralelogramo, não parece provável.

O fato de não apresentarem a resposta pode, todavia, significar que não assimilaram o conceito de paralelogramo ou, como sabemos que, em geral, alunos têm dificuldades em expressar-se, a falha em sua comunicação tenha influenciado a resposta.

O pesquisador poderá fazer perguntas aos alunos para confirmar qual das duas hipóteses terá ocorrido.

Acreditamos que a classificação indicada para a questão 1-b será “verdadeira sempre” apesar dos poucos casos observados embora exista a chance de alguma imprecisão no deslocamento dos segmentos conduzir a outras alternativas. Julgamos pouco provável a possibilidade de que alguns estudantes tenham sido orientados, em sua vida escolar, a não confiar apenas em casos particulares ao se fazer uma demonstração. Por esse motivo, não esperamos que assinalem a opção “verdadeira às vezes”.

Não cremos que seja indicada a opção “falsa”. As chances de isso ocorrer, descartado o problema da imprecisão, como já dissemos, devem ser mínimas.

Também esperamos que, facilmente, identifiquem os trechos referentes à hipótese e tese devido a palavra “então” que separa as duas. Há, porém, a preocupação de verificar se, durante a atividade, os alunos estarão atentos às “condições” da hipótese e às “conseqüências” na tese.

O objetivo do item b é ter uma diversificação maior para as várias construções possíveis: o aluno não estaria mais “preso” a uma construção com segmentos que lhe fossem apresentados, mas poderia criar seu próprio quadrilátero, com auxílio do pesquisador para o uso da ferramenta “compasso” se necessário.

Análise a posteriori da primeira atividade:

As duplas indicaram que a proposição era “verdadeira sempre” e também identificaram corretamente a hipótese e a tese conforme cópia desse trecho do protocolo da dupla C:

Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:
“Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero será um paralelogramo”.

☒ Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes. e a tese é o trecho então esse quadrilátero será um paralelogramo

Figura 20: atividade 1 – resolução pela dupla C
Fonte: protocolos recolhidos

Como esperávamos, os alunos não indicaram a opção “verdadeiras às vezes”. Consideramos esse fato natural para estudantes não acostumados com o desenvolvimento de provas: a verificação de alguns casos, para eles, se torna plenamente convincente.

Quanto à identificação correta da hipótese e de tese, também era esperado o acerto pela própria morfologia da frase e pela “dica” da própria pergunta. O que nos preocupou foi se realmente, além de identificarem ambas as partes, perceberam sua essência, compreenderam tal identificação.

Percebemos um caso, na dupla D, que, nesse dia, só tinha um representante. Numa intervenção feita, o pesquisador observou que o aluno havia construído um quadrilátero com lados opostos de mesma medida e devia verificar se tal quadrilátero era um paralelogramo. Fez a pergunta: “Para ser um paralelogramo tem que acontecer o que mesmo?” Como o aluno não respondeu satisfatoriamente, a pergunta foi trocada para “Como é que eu sei se uma figura é um paralelogramo?” e, a seguir, “O nome ‘paralelogramo’ vem de quê?”

Mesmo assim o aluno não ofereceu uma resposta. Interpretamos tal fato como o início de uma verificação experimental sem dominar os conceitos envolvidos. Nesse caso torna-se não relevante o fato de se identificar corretamente as partes “hipótese” e “tese”: a dupla acabou fazendo isso apenas pelo conectivo “então”, pois não sabia exatamente o que deveria estar provando já que não lembrava a definição de paralelogramo.

As duplas também solicitaram ajuda em relação ao uso de algumas ferramentas do Cabri (principalmente o compasso).

O pesquisador deixou claro que se tratava de uma verificação experimental e o que “podia acontecer numa verificação poderia não acontecer em outra”. Mesmo assim os alunos pareciam não se preocupar em fazer várias verificações.

Tabela 1 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 1

DUPLAS	CLASSIFICAÇÃO DA PROPOSIÇÃO ATRAVÉS DA PROVA EMPÍRICA	OUTRAS OBSERVAÇÕES
A	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
B	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
C	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
D	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
		Verificado o não domínio dos conceitos envolvidos.

Fonte: Autoria Própria

Segunda atividade: (análise a priori)

2) Usando a malha de retas paralelas (arquivo de nome “malha de retas pontilhadas”) trace um quadrilátero de modo que seus lados estejam sempre sobre as retas dessa malha. Meça os lados opostos de cada um deles. Ao selecionar o ponto A ou o ponto B, você pode mudar a distância entre as retas. Ao selecionar a reta r ou s, você pode mudar a inclinação das mesmas. Verifique, ao fazer isso, como mudam as medidas que você tirou. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus lados opostos são congruentes.”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____

e a tese é o trecho _____

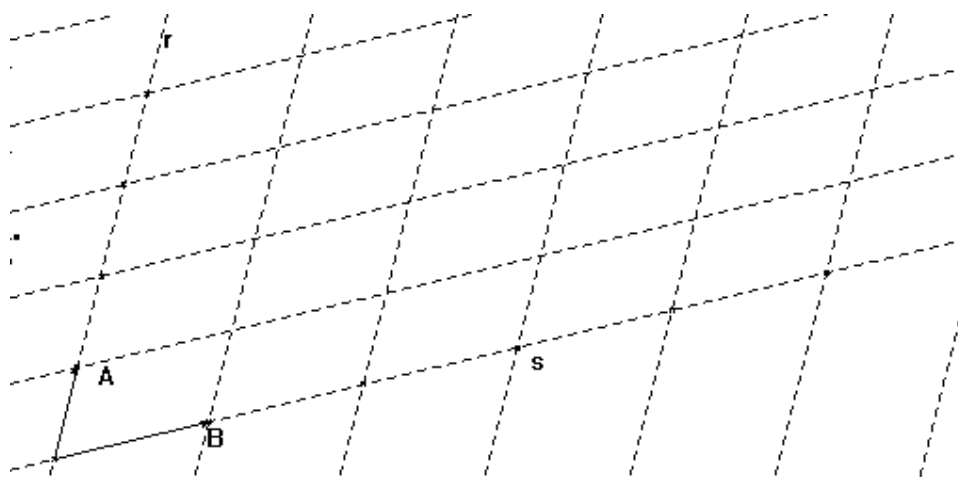


Figura 21: Tela referente ao arquivo “malha de retas pontilhadas”

Fonte: Autoria própria

Pelos mesmos motivos apresentados na análise da atividade anterior, esperamos que a tendência seja os alunos indicarem a alternativa “verdadeira sempre” além de separarem corretamente a proposição em suas partes: hipótese e tese. Será importante que os alunos compreendam que estão

obedecendo uma condição ao colocar o quadrilátero sobre as linhas da malha: seus lados opostos são paralelos. Deverão verificar que essa condição ocasiona lados opostos congruentes.

Análise a posteriori da segunda atividade:

Um caso, verificado na dupla C, revelou dificuldade de linguagem. Após construírem um quadrilátero cujos lados estavam sobre as retas paralelas da malha, o pesquisador perguntou: “Esse quadrilátero vai ser o que, mesmo?” A resposta foi “paralelo”. Na verdade a idéia seria “um paralelogramo”.

Por outro lado, essa mesma dupla, nessa mesma questão, ainda revelou certa insegurança, pois numa intervenção anterior (antes de terem construído o quadrilátero) foi-lhes perguntado em relação a essa construção (que seria feita sobre as linhas da malha de retas paralelas): “Se as linhas são paralelas e os lados do meu quadrilátero vão estar em cima dessas linhas, esse quadrilátero vai ser um paralelogramo?” E a resposta foi “Pode ser”.

A dupla D realizou a atividade, mas parecia não ter consciência “do que estava implicando em que” ao hesitar em responder a pergunta que seria a própria identificação da tese: “Você fez uma figura que tem lados paralelos, um paralelogramo. E aí você concluiu o quê? A última coisa que você fez?”

Como a resposta foi relativa à medição dos segmentos, foi perguntado: “Pelas medidas que você tirou aí, o que deu para perceber? Tem alguma medida que bateu com outra? O aluno, após certa insegurança, respondeu que os lados eram paralelos (ou seja, a hipótese) ao que o pesquisador recolocou: “Tudo bem, são paralelos, mas e as medidas? Tem alguma coisa especial com elas? E o aluno respondeu: “É os mesmos números” referindo-se a “mesmas medidas”. Lembramos que a dificuldade de expressão pode ter influenciado nas respostas dos alunos.

Não verificamos insegurança nas duplas A e B. Todas as duplas, como ocorreu na questão anterior, responderam “verdadeira sempre” e também identificaram corretamente a hipótese e a tese. Todavia as duplas C e D não pareciam, ao pesquisador, muito conscientes do que estavam fazendo quanto ao fato de verificar que a ocorrência de um fato (hipótese) ocasionava outro (tese).

Tabela 2 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 2

DUPLAS	CLASSIFICAÇÃO DA PROPOSIÇÃO ATRAVÉS DA PROVA EMPÍRICA	OUTRAS OBSERVAÇÕES
A	Verdadeira Sempre	
B	Verdadeira Sempre	
C	Verdadeira Sempre	Verificada insegurança em relação aos conceitos envolvidos
D	Verdadeira Sempre	Verificada dificuldade em determinar o processo empírico que levava à tese.

Fonte: Autoria Própria

Terceira atividade: (análise a priori)

3) Usando o arquivo C3, verifique se O é o ponto médio de AB e também de CD. Trace a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e a reta $\overleftrightarrow{CB}$ e verifique se elas são paralelas. Faça o mesmo para as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“ Se dois segmentos se interceptam em seus respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: _____

e a tese é o trecho _____

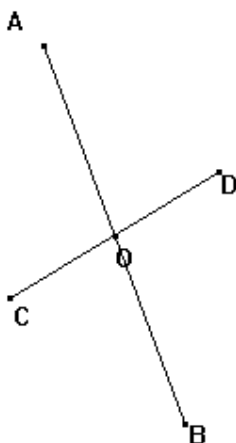


Figura 22: Conteúdo do arquivo C3

Fonte: Autoria própria

Novamente dizemos que nossa expectativa é que a classificação “verdadeira sempre” prevaleça sobre as demais e as razões para isso não diferem das já expostas na análise das experiências anteriores. Também reforçamos que o pesquisador deverá verificar e atuar, fazendo perguntas se necessário, para que os alunos tenham domínio das condições, do conteúdo da hipótese, o que “é necessário que aconteça” para que ocorra a tese.

Quarta atividade: (análise a priori)

4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:

“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”

() Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho:_____

e a tese é o trecho_____

Nessa questão, novamente, pelos motivos já citados, esperamos que a implicação será caracterizada como “verdadeira sempre” a não ser que o aluno não consiga construir o paralelogramo. Observamos, então, que a atividade permite avaliar se o aluno aprendeu o conceito de paralelogramo pois precisará dele para construir a figura.

Nossa expectativa é que os alunos usem a ferramenta do Cabri intitulada “reta paralela” (traça automaticamente uma reta paralela à outra dada por um ponto qualquer). Mais precisamente, que eles, com esse recurso, tracem dois pares de retas paralelas e construam o paralelogramo com lados sobre essas retas.

Segundo Legendre (1817) e Hadamard (1898), conforme apresentamos na parte histórica, quadrados e retângulos são paralelogramos. Mas no dia a dia das pessoas as formas mais comuns são justamente os quadrados e retângulos sem o conhecimento (ou a lembrança) que se tratam de paralelogramos. Por isso, é provável que os alunos, mesmo cientes de que estão desenhando um paralelogramo, optem pelos casos particulares do quadrado ou do retângulo e, nesse caso, poderão utilizar a ferramenta “retas

perpendiculares” (traça automaticamente uma reta perpendicular à outra dada por um ponto qualquer).

Mesmo que algum aluno tente traçar as retas paralelas “à mão” (usando o rato e não as ferramentas “retas paralelas” ou “retas perpendiculares”) ainda estará dominando o conceito de paralelogramo embora, provavelmente, não consiga desenhá-lo.

Conforme exposto na apresentação, o pesquisador poderá fazer intervenção após observar as construções dos estudantes visando estarem preparados para as próximas fases.

Análise a posteriori da terceira e da quarta atividade:

Novamente, todas as duplas indicaram a opção “verdadeira sempre” e continuaram não se importando em verificar vários casos.

Quanto à identificação da hipótese e da tese todas as duplas reproduziram o erro de digitação da tese da questão quatro (faltou o verbo “ser”, o correto seria “os seus ângulos opostos são congruentes”):

4) Construa um paralelogramo e meça seus ângulos opostos. Repita o procedimento para outros paralelogramos. Tendo em vista a experiência que você acabou de realizar, analise a afirmação:
“Se um quadrilátero é paralelogramo então os seus ângulos opostos congruentes”
☒ Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

Na proposição acima a hipótese é o trecho: Se um quadrilátero é paralelo-
grama, e a tese é
o trecho então os seus ângulos opostos congruentes

Figura 23: resolução da atividade 4 pela dupla B
Fonte: protocolos recolhidos

Isso poderia sugerir uma transcrição automática da proposição reforçando a idéia de que nem sempre tais transcrições refletiam um pleno entendimento de “um fato implicando em outro”. Todavia, não necessariamente, pois a cópia acima, embora traga resposta idêntica às das outras duplas, foi tirada do protocolo da dupla B que nos pareceu ter uma melhor compreensão das relações de implicação envolvidas.

Pudemos verificar que a dupla B identificou com mais segurança a tese da atividade quatro: ao identificá-la verbalmente e sem hesitação mostrou que não

havia ocorrido apenas uma transcrição das palavras que estavam após o termo “então” da proposição.

Além disso, um dos componentes havia feito um caso particular de paralelogramo (o retângulo), mas não ficou limitado a ele percebendo que a tese seria mesmo “os seus ângulos opostos são congruentes”: o pesquisador questionou se todas as construções teriam quatro ângulos de mesma medida (como o caso particular feito). O aluno respondeu que isso não ocorria no desenho de seu amigo e esse próprio amigo completou que “os ângulos opostos são iguais” (e, não obrigatoriamente quatro ângulos retos).

Em outro trecho do diálogo com a mesma dupla, numa outra construção, reforçando a idéia de um paralelogramo genérico, um dos integrantes disse que “os ângulos opostos serão, com certeza, iguais”. Observamos que não estávamos exigindo o uso da palavra congruente embora a estivéssemos constantemente usando para fixar seu sentido.

Tabela 3 - SÍNTESE DAS ATIVIDADES 3 E 4:

DUPLAS	CLASSIFICAÇÃO DA PROPOSIÇÃO ATRAVÉS DA PROVA EMPÍRICA	OUTRAS OBSERVAÇÕES
A	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
B	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
		Verificado especial domínio conceitual da tese
C	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas
D	Verdadeira Sempre	Conclusão após poucas verificações empíricas

Fonte: Autoria Própria

Quinta atividade: (análise a priori)

- 5) Tome três varetas e forme um triângulo com elas. Repita a operação para outras três varetas. Tendo em vista as experiências feitas, analise a informação:
 “Três varetas quaisquer sempre formam um triângulo”
 () Verdadeira sempre () Verdadeira às vezes () Falsa

A questão 5 não faz parte daquelas relativas às propriedades dos paralelogramos mas foi colocada com a finalidade de verificar a necessidade de não confiarmos somente em nossa intuição e apenas nas observações feitas (as atividades nos níveis G0 e G1 (Parzysz) auxiliam na elaboração de conjecturas e são um passo inicial e fundamental para as provas mas não suficientes).

O material utilizado será composto por um conjunto de varetas que, tomadas três a três, sempre obedecem à condição de existência de um triângulo. Procurar-se-á garantir certa segurança aos alunos: mesmo que testem todos os casos possíveis, sempre conseguirão formar um triângulo. Tal segurança será quebrada na próxima atividade. O objetivo será alertá-los à ineficiência da prova prática para se estabelecer uma conclusão mesmo que tal prova nos ofereça aparente garantia.

Acreditamos que, pelo menos alguns, ou, com certa probabilidade, a maioria, dirão que a frase é “verdadeira sempre” afinal mesmo que experimentem todas as combinações possíveis de varetas, sempre conseguirão formar um triângulo.

A opção “verdadeira às vezes” seria indicada por alunos que já tivessem experiência com a desigualdade triangular (na escola ou, mesmo casualmente, fora dela – nas brincadeiras, uma tentativa fracassada de construir um triângulo com três palitos quaisquer). Como a geometria ainda não está recebendo um ensino completo e eficiente nas escolas públicas cremos que poucos ou nenhum aluno indique essa opção.

A classificação “falsa” não seria escolhida por alunos que tivessem estudado o assunto e nem pelos que não tivessem feito esse estudo pois estes se orientariam pela experiência que está induzindo à primeira opção.

Os alunos serão orientados a responder às questões a tinta e não rasurá-las para que se registre sua primeira opção e assim confirmarmos ou não nossas hipóteses sobre suas respostas mas, sejam quais forem, haverá a oportunidade de os auxiliarmos a verificar a necessidade da elaboração de provas quando passarem para a questão 6, onde receberão três varetas fora da condição estabelecida pela desigualdade triangular.

Análise a posteriori da quinta atividade:

É importante lembrarmos que os alunos receberam quatro varetas que, tomadas três a três, sempre obedeciam às condições da desigualdade triangular. Acreditávamos que a maioria das duplas fossem indicar a opção

“verdadeira sempre” e, com a questão seis, verificassem a falha nessa escolha. Entretanto as duplas A e D indicaram “verdadeira às vezes”. A dupla A percebeu, que nem sempre três segmentos formam um triângulo e, inclusive, acrescentaram uma caneta às varetas que haviam recebido de forma que, com essa caneta como um dos lados e com duas das varetas recebidas, o triângulo não podia ser formado.

Acreditamos que a dupla D, embora tenha feito sua resolução à parte, possa ter sido influenciada pela equipe A quando esta defendeu sua opinião e mostrou sua idéia usando a caneta.

Tabela 4 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 5

DUPLAS	CLASSIFICAÇÃO DA AFIRMAÇÃO ATRAVÉS DA VERIFICAÇÃO EMPÍRICA	OUTRAS OBSERVAÇÕES
A	Verdadeira às vezes	Uso de contra-exemplo pelos alunos.
B	Verdadeira Sempre	
C	Verdadeira Sempre	
D	Verdadeira às vezes	

Fonte: Autoria Própria

Sexta atividade: (análise a priori)

6) Você receberá mais três varetas. Usando-as, deverá montar um triângulo. Levando em consideração o que você fez e respondeu na atividade anterior, em sua opinião:

“Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique.”

() Verdadeira () Falsa

“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

() ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

Devido ao material utilizado, torna-se evidente que os alunos não conseguirão formar um triângulo mas não necessariamente farão a generalização desse caso para outras verificações como gostaríamos. Nesse caso é possível que alguns assinalem a opção “verdadeira” e precisem de uma intervenção embora acreditemos que seja mais provável que a maioria deles opte pela classificação “falsa” generalizando a experiência feita. Mesmo que atendam às nossas expectativas é possível que o façam sem ter pensado num caso geral. Para verificar essa possibilidade colocamos a segunda pergunta na atividade 6.

Lembramos que, pela estrutura adotada, a parte da pesquisa sobre os procedimentos dos alunos encerra-se numa etapa e recomeça em outra de forma a termos pesquisa pré-intervenção e pós-intervenção sendo que, nas duas etapas, os elementos de provas têm essências distintas. Também lembramos que os dois blocos iniciais são, na verdade, preparatórios para a pesquisa em seu âmago. Fazemos assim uma pesquisa preliminar durante a preparação para a pesquisa principal.

Análise a posteriori da sexta atividade:

O objetivo seria que os alunos refletissem sobre a opção que estavam, em unanimidade, indicando, nas quatro primeiras questões: “verdadeira sempre”.

As duplas A e D foram dispensadas de usarem o segundo conjunto de varetas, afinal, já haviam percebido o erro em indicar que “três varetas sempre formam um triângulo”.

Quanto à afirmação “Para que uma propriedade seja válida basta analisar vários casos onde essa veracidade se verifique” a dupla B indicou a opção “falsa” mas a equipe C, indicou a opção “verdadeira” refletindo que não houve a apreensão do fato de que, para realizar uma prova, não podemos, ou pelo menos, é arriscado, confiarmos apenas na observação de alguns casos.

As respostas para a segunda parte da questão mostraram que os alunos têm forte convicção de que a verificação de vários casos constitui uma prova. Isso mesmo após a resolução das questões cinco e seis. Todas as duplas, inclusive a dupla A que defendeu sua posição com um contra exemplo na questão cinco, indicaram que João provou a proposição em questão.

Podemos dizer que não se atingiu um dos objetivos da questão: os alunos sentirem necessidade da prova formal por verificarem a insegurança oferecida pelas demonstrações exclusivamente empíricas.

Suas justificativas confirmam sua confiança em casos experimentais como podemos verificar nas cópias dos protocolos a seguir:

Justificativa da dupla A: “ele mediu todos e teve a mesma medida”

“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

(X) ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque ele mediu todos e teve a mesma medida

() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

Figura 24: Resolução da segunda parte da atividade 6 pela dupla A
Fonte: protocolos recolhidos

Justificativa da dupla B: “os pontos médios delas sempre serão iguais mesmo a mudando de lugar” – provavelmente com influência da experiência realizada no Cabri (questão 3) quando aproveitaram o aspecto dinâmico do programa para mudar a posição das diagonais e dos lados do paralelogramo construído.

Justificativa da dupla C: “ele testou os 50 paralelogramos e deu sempre certo”.

“João verificou que em 50 paralelogramos as diagonais se interceptavam (se cruzavam) nos respectivos pontos médios.”

() ele provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque ele testou os 50 paralelogramos e deu sempre certo.

() ele não provou que em todo paralelogramo as diagonais se interceptam em seus pontos médios porque _____

Figura 25: Resolução da segunda parte da atividade 6 pela dupla C
Fonte: protocolos recolhidos

Justificativa da dupla D: “verificou todos e, por fim, teve a mesma medida”

Essas atividades foram elaboradas em duas seções (na primeira foram desenvolvidas as questões 1, 2, 3 e na segunda as questões 4, 5 e 6 – embora as duplas não gastassem exatamente o mesmo tempo). Procuramos que todas estivessem novamente juntas para iniciar a questão sete.

Como conclusão dessa parte, relatamos que, ao final, nem todas as duplas tinham noção clara do que seria partir de uma hipótese para chegar a uma tese (o que se deve verificar e o que se deve provar). Também que todas as equipes ainda confiavam muito nas provas empíricas.

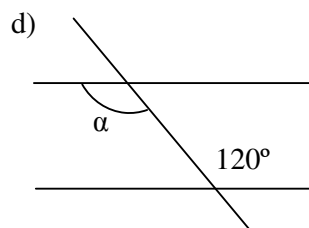
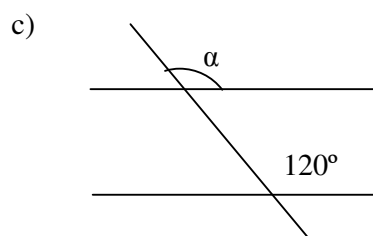
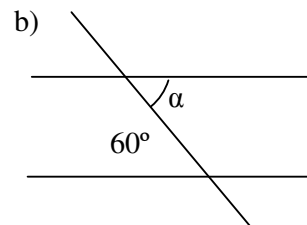
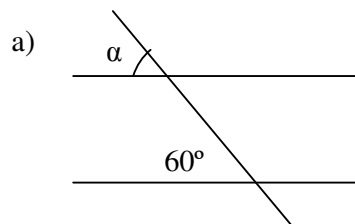
Tabela 5 - SÍNTESE DA ATIVIDADE 6

DUPLAS	CLASSIFICAÇÃO DA FRASE APÓS ATIVIDADE EMPÍRICA RELATIVA	CLASSIFICAÇÃO DA MESMA FRASE EXPRESSA ATRAVÉS DO RELATO DE UMA AÇÃO
A	Falsa (verificação já ocorrida na atividade 5)	Verdadeira (incoerente com a resposta da primeira pergunta dessa questão).
B	Falsa	Verdadeira (incoerente com a resposta da primeira pergunta dessa questão).
C	Verdadeira	Verdadeira
D	Falsa (verificação já ocorrida na atividade 5)	Verdadeira (incoerente com a resposta da primeira pergunta dessa questão).

Fonte: Autoria Própria

A partir da atividade 7, começamos a preparar o aluno para o desenvolvimento de provas. Vejamos a análise a priori:

7) Abaixo estão esboçadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Determine, se possível, a medida do ângulo α e justifique sua resposta.



Com o material, simplesmente caneta ou lápis, espera-se que os alunos solucionem as atividades como a resolução matemática que se segue.

Acreditamos que eles deverão se lembrar do que exercitaram durante as atividades sobre paralelismo (na primeira etapa preliminar da pesquisa) e não terão dificuldades em determinar as medidas indicadas podendo ter, porém, problemas no momento de fazer as justificativas: não por elas em si mas pelo uso do vocabulário. Nesse caso prevemos intervenção do examinador solicitando que consultem os vocábulos utilizados nas atividades sobre paralelismo.

Se nos orientarmos pela prática de alguns alunos de nossa região é possível que, mesmo logo após a realização de atividade referente, não surja a resposta devido à dispersão de atenção em aula ou não participação da referida atividade. Tal ocorrência não é esperada aqui, pois o ambiente de pesquisa não será uma sala numa aula comum com todos os alunos, mas sim um procedimento com acompanhamento contínuo do observador. Ainda se pode esperar, principalmente se houver um espaço de tempo entre a fase preliminar e a presente atividade, que alguns alunos afirmem não saber determinar as medidas indicadas. Caso isso venha a ocorrer, o professor poderá lembrá-los que fizeram uma atividade relativa na primeira etapa da fase preliminar. cremos que isso será suficiente para que possam iniciar a resolução.

A resolução matemática esperada para a atividade 7:

a) Como um par de retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes, $\alpha = 60^\circ$ por ser correspondente a um ângulo com essa medida.

b) A medida β vale 60° (ver questão “a”). Como o ângulo de medida α é oposto pelo vértice ao ângulo de medida β , α também mede 60°

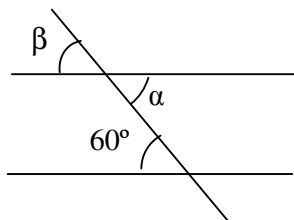


Figura 26: Esquema de resolução do item b – atividade 7
Fonte: autoria própria

Ainda na questão “b” poder-se-ia dizer que os ângulos de medida α e 60° são alternos internos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, por isso a medida α é 60° . Essa colocação, porém, não é esperada, pois os alunos não deverão usar esses termos nas atividades sobre paralelismo (fase preliminar). É importante, no entanto introduzir os termos ainda neste bloco, pois serão usados na etapa final: o jogo.

c) Como um par de retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes, $\alpha = 120^\circ$ por ser correspondente a um ângulo com essa medida.

d) A medida β vale 120° (ver questão “c”). Como o ângulo de medida α é oposto pelo vértice ao ângulo de medida β , α também mede 120° .

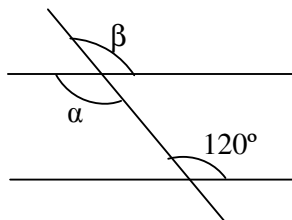


Figura 27: Esquema de resolução do item d – atividade 7
Fonte: autoria própria

Análise a posteriori da sétima atividade:

Lembramos que os alunos, na primeira etapa da fase preliminar, já haviam estudado paralelismo, inclusive a definição de ângulos correspondentes e sua congruência. Também já haviam estudado a congruência de ângulos opostos pelo vértice.

Era previsível, portanto que todas as duplas resolvessem o item “a” sem dificuldade, com a justificativa de que α mede 60° , pois é correspondente ao ângulo dado cuja medida é 60° , embora não tenham usado exatamente essa redação, mas simplesmente a palavra “correspondentes”.

A dupla D questionou sobre “o que fazer, no item ‘a’”, mas assim que o pesquisador disse que deveriam determinar a medida do ângulo α , um dos integrantes já respondeu que α sendo correspondente ao ângulo de 60° também teria a mesma medida.

Ainda assim, um dos integrantes perguntou “se todos os ângulos seriam correspondentes”. E, após questão colocada por seu parceiro, o pesquisador observou que se tratavam de “retas paralelas cortadas por um transversal”, para que atentassem aos dados do enunciado, mas que deveriam analisar cada caso.

Esse fato ocasiona certa insegurança quanto à apreensão dos conceitos pela dupla D mesmo após acertar, instantaneamente o item “a” – talvez apresentassem a justificativa “são correspondentes” embora não tivessem claro esse próprio conceito.

- o item b:

b)

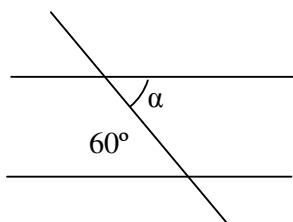
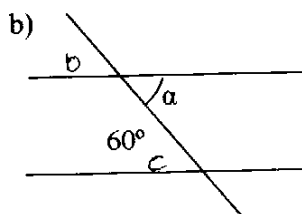


Figura 28: item b – atividade 7

Fonte: Autoria própria

A dupla C chamou o pesquisador e apresentou oralmente, e de forma correta, sua idéia sendo orientada a colocá-la na folha usando mesmas letras para indicar medidas (genéricas) iguais.

A seguir essa apresentação:



b) o ângulo c é correspondente ao b que é OPV a a.

Figura 29: resolução da atividade 7) b pela dupla C

Fonte: protocolos recolhidos

Assim como a dupla C, as duplas A e B não precisaram de intervenção para a resolução desse item.

A dupla D, porém apresentou bastante dificuldade, segundo o diálogo a seguir, de acordo com seu esquema:

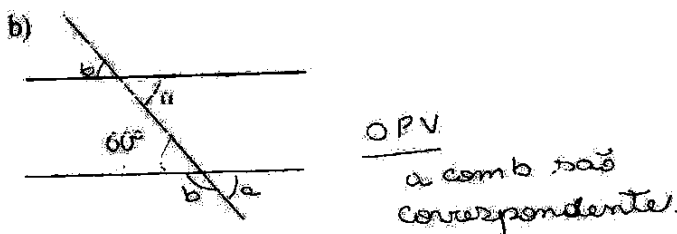


Figura 30: resolução da atividade 7) b pela dupla D

Fonte: protocolos recolhidos

Podemos verificar que “a” e “b”, segundo o esquema apresentado, não se referem a “ângulos correspondentes”. Essa apresentação mostra que o conceito apresentado na fase preliminar não foi ainda apreendido por essa equipe.

Vejamos o diálogo, na intervenção do pesquisador, que começou perguntando aos alunos:

— Vocês anotaram aqui: “o.p.v. : ‘a’ com ‘b’, né?”

— Está certo assim?

— Deixa ver se eu entendi: “a” com “b” são o.p.v.?

A dupla confirmou mas logo a seguir mostrou-se insegura:

— Hum-hum ... será que é isso mesmo?

— Eu comento daqui a pouquinho, vou precisar da idéia de vocês. Nem que esteja errado, não “esquente a cabeça”.

A intenção era dar mais um tempo para que os componentes discutissem entre si mas, segundo nova solicitação da dupla, o diálogo continuou:

— A gente não chegou no α ainda. Precisa ver esse α aí quanto “que mede”.

— 60°?

— É, mas como é que você achou?

— É a única medida em graus ...

— Ah, porque é a única medida em graus ... mas às vezes não é ...

— A gente precisa de alguma coisa para medir... ou não precisa?

— Não. É tudo sem medidas mesmo ...

O pesquisador solicitou que observassem a questão 7) a já feita:

— quem sabe se a gente achar esse “b”? Aqui eu achei o α (mostrando o item 7)a). Está na mesma posição do “b”, no item b. O “b” do item b equivale ao α do item a. Quem sabe não dá para achar esse b, quanto mede. Pensem nessa idéia.

Foi dado um tempo para a dupla pensar. Após, aproximadamente, 3 minutos, o diálogo continuou, começando pela dupla:

— O senhor tinha falado para achar o valor de b.

— Você achou?

— Para ser o.p.v., tem que ser correspondente. Para ser correspondente tem que ter o mesmo valor, não tem?

— Deixa ver se eu entendi: quais são correspondentes?

— O “a” e o “b”.

— O “a” e o “b”?

Então o pesquisador solicitou que deixassem anotada essa informação antes de continuar a intervenção. A dupla continuou suas colocações e se pôde verificar que realmente estavam com dúvidas conceituais sobre ângulos o.p.v e correspondentes - mesmo após a intervenção feita anteriormente, orientando

que usassem como referência um par de ângulos que eles mesmos já haviam classificado como correspondentes.

Referindo-se aos ângulos indicados como “a” e “b”, que classificavam como correspondentes, os alunos da dupla reiniciaram:

- Se são correspondentes, têm o mesmo valor: 60°
- O “b” você não achou ainda quanto mede?
- Se o “a” vale 60° o “b” também pois são correspondentes.
- Deixa ver se o raciocínio seu é esse aqui: 60° equivale ao “a” e, porque mesmo?
- Porque são correspondentes e o.p.v.
- Ao mesmo tempo? 60° o “a” são correspondentes e o.p.v?
- Sim.
- E depois ...
- Aí “a” e “b” são correspondentes e têm o mesmo valor.

O pesquisador deixou para orientar a dupla depois durante o fechamento coletivo da seção. Porém, durante o acompanhamento das próximas atividades lhes foi dado um retorno com o conceito de ângulos correspondentes e do modo esperado de se resolver essa questão.

Os itens c e d:

As duplas A, B e C não precisaram de intervenção do pesquisador e conseguiram desenvolver bem também esses dois itens. De uma maneira mais direta ou mais discursiva justificavam, sem dificuldades, suas conclusões como indicam as cópias de alguns protocolos:

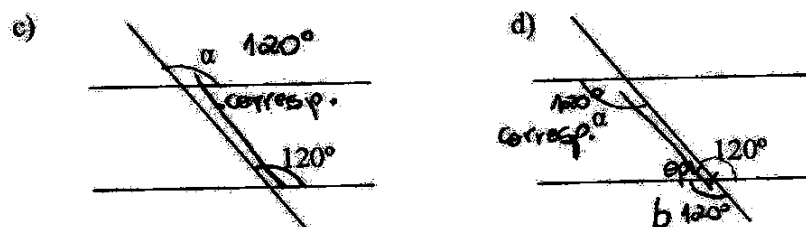
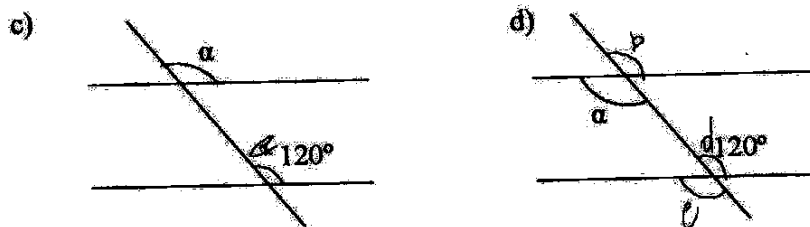


Figura 31: Resolução dos itens “c” e “d”(atividade 7) pela dupla B
Fonte: protocolos recolhidos



c) Ângulo (A) é correspondente ao ângulo (c)
com 120°

d) o Ângulo (d) é o P.V. do ângulo e o ângulo (c) é correspondente ao ângulo (A)
então (A) tem 120°

Figura 32: Resolução dos itens “c” e “d” (atividade 7) pela dupla A
Fonte: protocolos recolhidos

Na dupla D, logo ao entrar no item 7) c um componente iniciou novo diálogo:

- “E agora, como faz”.
- “Quem sabe não é bem parecido com o item “a”?”
- Imediatamente seu parceiro de equipe respondeu:
- “É correspondente”.
- Então “ α é 120° ” porque é correspondente?

Com a confirmação foi solicitado que anotassem a justificativa.

Apresentaram, simplesmente, o registro abaixo:

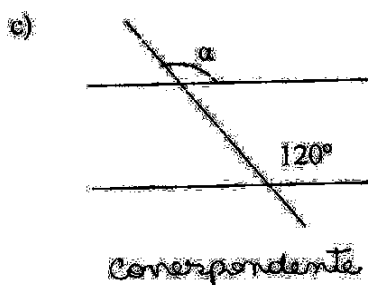


Figura 33: resolução da atividade 7)c pela dupla D
Fonte: protocolos recolhidos

A dupla não solicitou ajuda para a resolução do item 7)d mas, em seu protocolo deixou um registro que apresenta a mesma dúvida referente ao item 7) b:

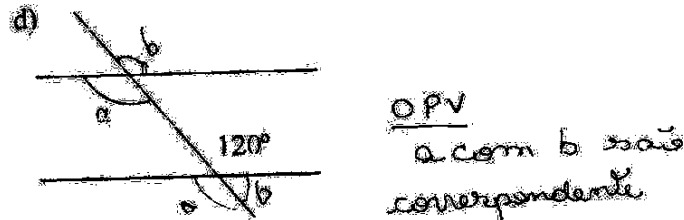


Figura 34: resolução da atividade 7)d pela dupla D
Fonte: protocolos recolhidos

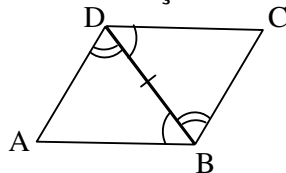
Tabela 6: SÍNTESE DA ATIVIDADE 7

DUPLAS	OBSERVAÇÕES
A	Resolução correta dos quatro itens da questão sem necessidade da intervenção do pesquisador.
B	Resolução correta dos quatro itens da questão sem necessidade da intervenção do pesquisador.
C	Resolução correta dos quatro itens da questão sem necessidade da intervenção do pesquisador.
D	A dupla precisou da intervenção do pesquisador para entender o enunciado do item (a) e do item (c). Nos itens (b) e (d) apresentou dúvidas conceituais em relação aos ângulos opostos pelo vértice e correspondentes. Não conseguiu resolver esses itens. O item (c) após intervenção quanto ao enunciado, foi resolvido corretamente sem auxílio do pesquisador.

Fonte: Autoria Própria

Atividade 8: (análise a priori)

8) Observe o esboço abaixo:



Podemos dizer que temos dois triângulos congruentes? _____

Se você achar que sim, qual o caso de congruência? _____

Os dois formam uma figura. Qual? _____

Se os dois triângulos forem congruentes teremos dois pares de lados desse quadrilátero também congruentes. Quais são esses pares?

A atividade 8, admitimos, está muito direcionada porém julgamos que servirá de base para que o estudante possa “ser introduzido nas práticas utilizadas para a prova”. Em muitos casos, admiramos uma prova, classificada como genial, mas, de nossa parte, apenas a reproduzimos (um bom exemplo é o método usado por Euclides para provar que o conjunto dos números primos é infinito: praticamente só repetimos sua idéia). Para que possamos elaborar nossas próprias provas ou, pelo menos, “redescobri-las”, necessitamos entrar em contato com os vocábulos, os conceitos e os procedimentos utilizados, como uma espécie de “estágio preparatório”. O próprio projeto AProvaME, em sua pesquisa, fornece alguns exemplos de prova, para que os alunos participantes iniciem a sua produção.

Por outro lado, a classificação “direcionada” é muito relativa. Lembramos que estamos trabalhando com alunos não acostumados a observação e percepção, confirmando o que escreve Machado ao relatar que há uma ruptura entre o enfoque perceptivo utilizado nas séries iniciais e a sistematização do conhecimento utilizada por volta da sétima ou oitava série do ensino fundamental. Muitos nem chegam a estudar geometria e a disciplina “desenho geométrico” foi oficialmente retirada do currículo paulista (e não apenas dele). Ela constituiria uma prática que poderia garantir a “construção e representação” citada por Machado onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas, mas *“...não costumam ser suficientemente valorizadas como elementos fundamentais dos processos cognitivos ...”* (Machado, 1995, p. 54).

Apesar do exposto acima, cremos que os estudantes não terão dificuldades para responder à questão conforme a resolução abaixo, pelas atividades desenvolvidas na fase preliminar, embora possam ter dificuldades para afirmar que a figura é um quadrilátero (nem esperamos que digam que é um paralelogramo). Como já mencionamos, os termos do dia a dia são “quadrado” e “retângulo” e, popularmente, “um quadrilátero” acaba sendo designado pelo termo “quadrado” mesmo que se esteja pensando num polígono qualquer de quatro lados.

Em todo o caso, essa seria apenas uma dificuldade de expressão.

A resolução matemática esperada para a atividade 8:

Primeira e segunda lacuna: resposta “sim”; caso de congruência: ALA e para a última pergunta: pares de lados congruentes: $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$.

Embora a atividade já esteja apresentada de forma quase resolvida, espera-se que os alunos lembrem-se dos casos de congruência estudados na fase preliminar, percebam que foi fornecida a informação através de um registro figural (conforme Duval, 1989) de que ordenadamente, em cada triângulo, há congruentes um lado e dois ângulos a ele adjacentes levando ao caso ALA de congruência, portanto o lado $\overline{AD}$ (oposto ao ângulo $\hat{D}\hat{B}A$) é congruente ao lado $\overline{BC}$ (oposto ao ângulo $\hat{B}\hat{D}C$ que é congruente ao ângulo $\hat{D}\hat{B}A$). Analogamente, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes.

Análise a posteriori da oitava atividade:

Todas as duplas preencheram a primeira e a segunda lacuna conforme esperado com as palavras “SIM” e “ALA”. As equipes pareciam seguras de sua escolha, inclusive a dupla D que havia apresentado dificuldades na questão anterior.

O resultado não esperado foi que nenhuma das duplas usou o termo “quadrado” na terceira lacuna conforme tínhamos suposto em nossa análise a priori. Três duplas usaram o termo “quadrilátero” e a dupla B usou o termo “paralelogramo”. Ainda não tínhamos provado que “se o ângulo $\hat{B}\hat{D}C$ é congruente ao ângulo $\hat{D}\hat{B}A$, então os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ serão paralelos” (e analogamente, para o par de lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$

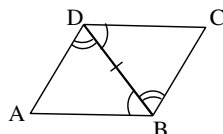


Figura 35: Paralelogramo, diagonal e ângulos alternos
Fonte: autoria própria

em relação, respectivamente, aos ângulos $\hat{A}\hat{D}B$ e $\hat{C}\hat{B}D$).

Por isso, para essa dupla, o professor explicou que a figura realmente era um paralelogramo, mas que, pelos dados que tínhamos, não podíamos ainda tirar tal conclusão. A dupla se orientou apenas pela visão. Posteriormente, em relação a esse fato, pensamos que a representação figural ocasionou uma dificuldade semelhante à CKS (Parzysz, 2001). De fato, visualmente, temos um paralelogramo e pode gerar um obstáculo ao entendimento do aluno a afirmação de que não podemos concluir isso diretamente a partir das informações iniciais.

Todas as duplas responderam satisfatoriamente a última pergunta (sobre os pares de lados congruentes). Todavia, o professor resolveu confirmar com algumas

delas, no caso, as duplas C e D, se realmente estavam entendendo o que estavam respondendo. Solicitou, portanto que cada uma justificasse como tinham determinado tais pares de lados. Uma das perguntas foi “Como vocês sabem que $\overline{AD}$ é congruente a $\overline{BC}$?

A dupla C respondeu que era pela cor (a cor das marcas dos ângulos). Com isso o professor compreendeu que estavam querendo mencionar a correspondência que pode ser aplicada ao quadrilátero: aos ângulos de mesma medida se opõem lados congruentes entre si. Embora tal correspondência já tivesse sido estudada em duas questões na fase preliminar, atribuímos isso mais à percepção inteligente (Alves & Brito, 2007) - percepção construtiva com a influência de um estímulo: a cor. Foi exposto, a essa dupla, como poderiam expressar sua idéia de acordo com a linguagem matemática.

Embora a dupla D aparentasse segurança, não conseguiu justificar como associou a congruência entre os lados opostos. Acreditamos, que, novamente a visão influenciou a resposta. A percepção inteligente pôde ser observada também nessa dupla, pois, embora não tenham feito a correspondência esperada entre lados e ângulos, pelo menos, mencionaram o par de ângulos congruentes: a cor parece destacar-se mais do que, simplesmente o registro simbólico.

Quanto à forma de registro, a dupla B escreveu, para indicar os pares de lados congruentes: “D,A e C,B” (estavam querendo dizer $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$, mas não mencionaram o outro par de lados).

A dupla D escreveu “A com B”, “D com C”, “A com D”, “C com B”. Após conversa com seus membros, o professor confirmou que queriam expressar $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$. As outras duplas usaram, conforme orientação do professor o símbolo de congruência e indicaram corretamente os pares de lados opostos congruentes.

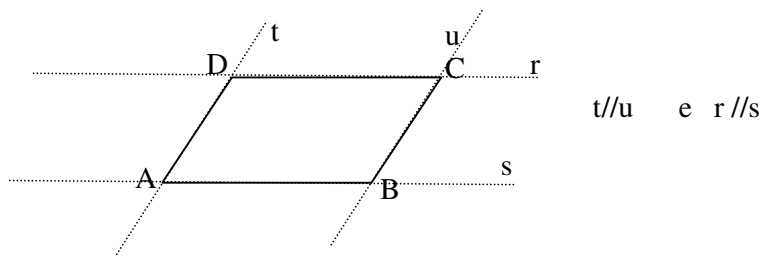
Tabela 7: SÍNTESE DA ATIVIDADE 8

DUPLAS	OBSERVAÇÕES
	Apresentação das respostas conforme o esperado.
A	
	Apresentação das respostas conforme o esperado. Verificada ocorrência de CKS
B	
	Apresentação das respostas conforme o esperado. Verificada percepção construtiva (ou inteligente)
C	
	Apresentação das respostas conforme o esperado, porém sem a correspondente justificativa. Verificada ocorrência de CKS Verificada percepção construtiva (ou inteligente)
D	

Fonte: Autoria Própria

Atividade 9: (análise a priori)

9 a) Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.



Esperamos que os alunos elaborem a prova solicitada na atividade 9 a), afinal ela é uma “repetição” da questão 8 embora não se forneça a informação dos ângulos congruentes como naquela.

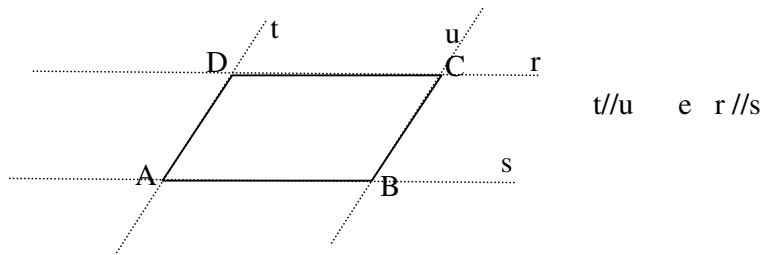
Sabemos, entretanto, pela experiência que temos com nossos alunos, que é muito provável que surjam dificuldades. Acreditamos que o maior obstáculo será, após o uso da diagonal $\overline{BD}$ (por exemplo), a justificativa da congruência do par de ângulos $\widehat{CDB}$ e $\widehat{DBA}$ e do par $\widehat{BDA}$ e $\widehat{DBC}$.

Mas ainda é possível que nem cheguem a pensar em triângulos congruentes.

Nesse caso o aplicador poderá recolher o que puderam produzir e, após, convidar os alunos a observar novamente a referida questão porém na versão a seguir:

9 b)

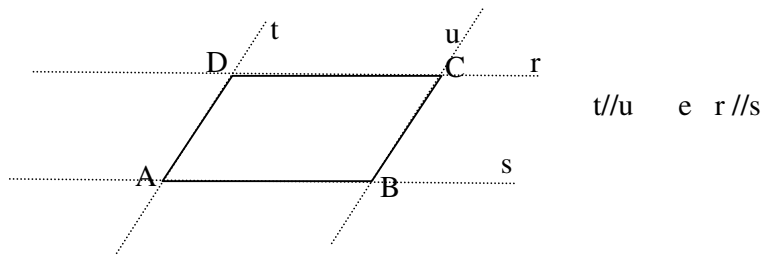
Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Verifique se é possível identificar dois triângulos congruentes. Caso seja possível, diga o caso de congruência.



Mesmo assim, pode acontecer de alguns alunos não conseguirem determinar o caso de congruência, como foi sugerido. Então o aplicador deverá recolher o protocolo da atividade 9 b) - e fornecer-lhes o que está a seguir:

9 c)

Abaixo temos um esboço de um paralelogramo. Você deverá provar que os lados opostos são dois a dois congruentes, isto é $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Verifique se é possível identificar dois triângulos congruentes. Caso seja possível, diga o caso de congruência.



Se você encontrou um caso de congruência, deverá justificar a congruência dos elementos necessários. Por exemplo: se o caso encontrado foi ALA deverá explicitar qual é o par de triângulos congruentes, quais são os pares de ângulos congruentes e justificar porque o são bem como o par de lados congruentes (um em cada triângulo).

Ainda admitimos que é possível termos, na pesquisa, jovens que não consigam estabelecer a relação solicitada. Mesmo que isso ocorra, para nós, haverá a valia de trabalhar com alunos totalmente distanciados das práticas de provas e observações verificando quais dificuldades surgirão em tal trabalho.

Análise a posteriori da nona atividade:

Os resultados não variaram muito além do esperado.

A dupla A colocou a redação “se são paralelas, $A \equiv D$ e $B \equiv C$ e $D \equiv C \equiv A \equiv B$ todos os ângulos têm mesma quantidade de graus”.

Talvez por influência da questão 10, que seria a próxima e, realmente, pedia a prova da congruência dos ângulos opostos do paralelogramo, a dupla respondeu a questão 9 se preocupando com a congruência dos ângulos. Isso revela desatenção ao próprio enunciado. Posteriormente, a dupla, fez indicação, no protocolo, que tal resposta se referia à questão 10. Mesmo assim a conclusão de que temos quatro ângulos congruentes não poderia ser tirada.

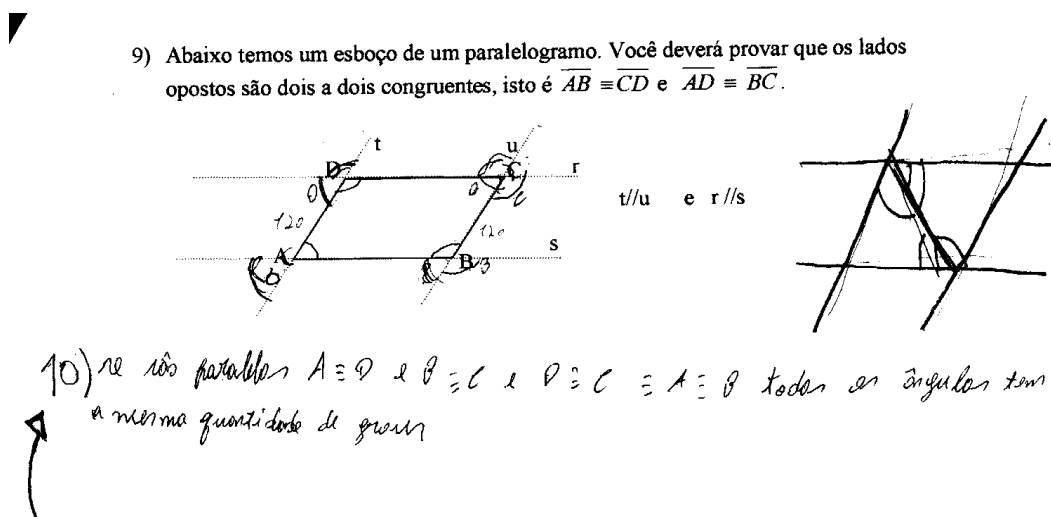


Figura 36: resolução da atividade 9)a pela dupla A
Fonte: protocolos recolhidos

Ao efetuar a “2ª tentativa” (9b), a dupla relatou o caso de congruência ALA e chegou a representar corretamente (representação figural) a congruência entre os ângulos alternos. Na 3ª tentativa (9c), os registros efetuados foram os mesmos.

Analisando posteriormente o texto da atividade, acreditamos que ficou um tanto extenso e, possivelmente, de difícil entendimento, em especial o trecho: “explicitar qual é o par de triângulos congruentes, quais os pares de ângulos congruentes e justificar porque o são bem como o par de lados congruentes (um em cada triângulo).”

Nessa pesquisa, várias vezes, o pesquisador precisou ler, com os alunos, os enunciados, destacando a parte principal da questão. Em vista disso, um texto, como o que destacamos no parágrafo anterior, se mostra inadequado, em especial, pela expressão “justificar porque o são” que foi justamente a pergunta não respondida por nenhuma das duplas.

A dupla C apresentou registros semelhantes aos da dupla A (mostrou a congruência dos triângulos através da representação figural e classificou o caso como ALA). Inclusive não apresentou a 3ª tentativa, reforçando a hipótese de os acréscimos ao enunciado da 2ª tentativa não serem respondidos pelo difícil entendimento.

Embora as duas duplas não tenham respondido expressamente o que foi solicitado explicitamente no enunciado da questão 9)c o fizeram através da representação figural, com exceção da justificativa da congruência dos ângulos alternos e da expressão da conclusão solicitada (congruência entre os lados opostos). Poderíamos considerar que fizeram parcialmente a prova sem apresentar detalhes.

A dupla B fez a mesma apresentação das duplas A e C, mas logo na 1ª tentativa, ou seja, não precisou da dica do uso da congruência entre dois triângulos. Além disso, foi a única que apresentou a conclusão $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ como decorrência da congruência dos triângulos.

A dupla D apresentou-se confusa: ainda na questão 9)a escreveu a palavra “ALA”, dividiu o paralelogramo em dois triângulos mas não justificou o caso de congruência nem mesmo pela representação figural que não indicava a congruência dos pares de ângulos alternos. Na segunda tentativa classificou o caso de congruência como LLL.

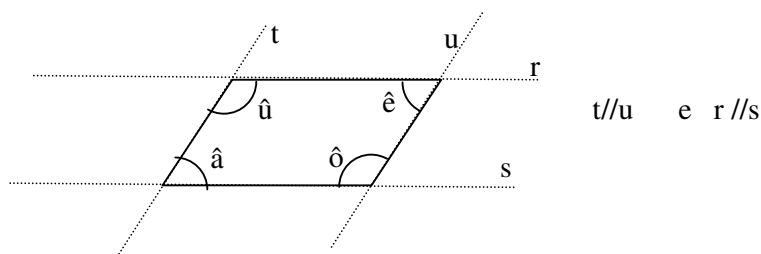
Tabela 8: SÍNTESE DA ATIVIDADE 9

DUPLA	OBSERVAÇÕES			
	CASO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS APRESENTADO	JUSTIFICATIVA	APRESENTAÇÃO EXPRESSA DA TESE	JUSTIFICATIVA DA CONGRUÊNCIA DOS ÂNGULOS ALTERNOS
A	ALA, a partir da 2ª tentativa	Pela representação figural	Não	Não
B	ALA, a partir da 1ª tentativa	Pela representação figural	Sim	Não
C	ALA, a partir da 2ª tentativa	Pela representação figural	Não	Não
D	ALA, a partir da 1ª tentativa	Não foi feita justificativa	Não	Não

Fonte: Autoria Própria

Atividade 10: (análise a priori)

- 10) Abaixo temos o esboço de um paralelogramo. Demonstre que “num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes”. Você deve demonstrar que os ângulos de medida $\hat{a}$ e $\hat{e}$ são congruentes, bem como os de medida $\hat{u}$ e $\hat{o}$.



Quanto à atividade 10 nossa expectativa é que a maioria dos alunos lembre que se trata de uma repetição dos exercícios trabalhados na fase preliminar.

A resolução que esperamos deverá seguir o caminho apresentado na primeira etapa das atividades preliminares:

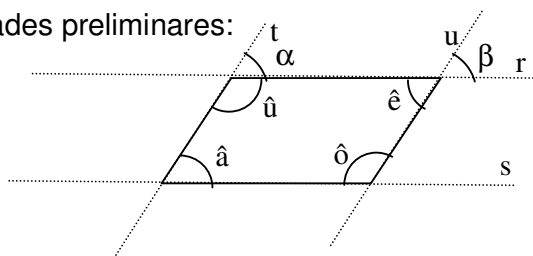


Figura 37: Resolução esperada para a atividade 10

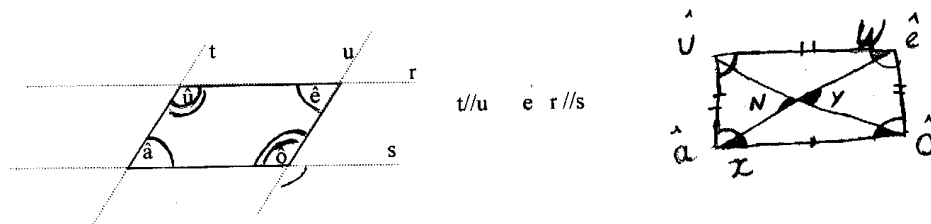
Fonte: autoria própria

Como as retas “r” e “s” são paralelas o ângulo de medida $\hat{a}$ e o de medida α são congruentes. Como as retas “t” e “u” são paralelas os ângulos de medidas α e β são congruentes e o ângulo de medida β e o ângulo de medida $\hat{e}$, como são opostos pelo vértice também são congruentes, portanto, $\hat{a} = \hat{e}$. De forma análoga, os ângulos de medidas $\hat{u}$ e $\hat{o}$ são congruentes.

Análise a posteriori da décima atividade:

Destacamos que essa questão permite verificar a ocorrência de conhecimentos conceituais, em especial o conceito da congruência dos ângulos opostos de um paralelogramo.

A dupla C, pelo seu esboço, mostrou que tinha tal conceito, numa representação figural correta da tese. Todavia, o conceito de “ângulos correspondentes” (presente durante a fase preliminar) pareceu ter-se perdido, ou melhor, não deve ter se formado, embora os componentes dessa dupla tenham respondido corretamente as atividades daquela fase. Embora não estejamos analisando as atividades da fase preliminar (anexo 3), o fato sugere revisá-las em caso de futura aplicação, pois sua correta resolução não garantiu plena aquisição conceitual.



Estes não são congruentes porque $\hat{a}$ e $\hat{o}$, $\hat{o}$ e $\hat{e}$, $\hat{e}$ e $\hat{u}$, $\hat{u}$ e $\hat{a}$. Tem um lado e dois ângulos ou seja, A.A.A.,
 tracando duas diagonais ficamos com 4 triângulos,
 cada ângulo medindo 90°
 Pintando o ângulo x e y eles serão correspondente pois estão
 do mesmo lado, pintando o n para opV com y e
 o W será correspondente com n por isto eles serão
 congruentes

Figura 38: resolução da atividade 10 pela dupla C
 Fonte: protocolos recolhidos

A dupla redigiu sua justificativa da seguinte maneira (que pode ser acompanhada pelo esboço da figura 37: “Pintando o ângulo x e y , eles serão correspondentes, pois estão do mesmo lado, pintando o n , será o.p.v. com y e o w será correspondente com n por isto eles serão congruentes”.

A dupla parece ter retido a afirmação que, como parte do conhecimento conceitual (questão 3, no anexo 3), dizia que ângulos correspondentes devem estar “do mesmo lado” da reta transversal; mas não reparou que a base do quadrilátero e sua diagonal não eram paralelas (outra condição para termos ângulos correspondentes congruentes). A questão 9, ainda no anexo 3, reforça a necessidade de termos retas paralelas para haver a congruência dos ângulos (todavia apresentava um conhecimento de procedimento que julgávamos ter ocasionado um desequilíbrio cognitivo nos alunos que garantisse sua retenção).

Ainda observando o protocolo, a dupla pareceu usar a mesma letra para indicar medidas diferentes de ângulos ao escrever “ $\hat{a}$ e $\hat{o}$, $\hat{o}$ e $\hat{e}$, $\hat{e}$ e $\hat{u}$, $\hat{u}$ e $\hat{a}$, tem um lado e dois ângulos, ou seja, ALA”. Também não havia uma informação que garantisse a congruência dos lados ou dos ângulos para usar o caso ALA de congruência.

Havíamos trabalhado a definição da representação da medida de ângulos na fase preliminar mas não tanto os adjacentes. Esse fator pode ter influenciado a produção dessa dupla.

A dupla D escreveu “ALA” e depois “são correspondentes e têm a mesma medida se $t//u$ e $r//s$ tem a mesma medida então $\hat{u}$ e $\hat{o} \dots \hat{u}$ e $\hat{o}$ também têm”.

O paralelogramo foi dividido por uma diagonal em dois triângulos. Embora tenha feito menção ao paralelismo dos lados, os ângulos indicados não foram os correspondentes. Assim como a dupla C, os alunos usaram os símbolos $\hat{u}$, $\hat{e}$ e $\hat{o}$ para se referir aos ângulos de um triângulo e os símbolos $\hat{u}$, $\hat{a}$ e $\hat{o}$ para se referir aos ângulos do outro triângulo, isto é, o mesmo símbolo para ângulos adjacentes.

As duas duplas C e D, por essa atividade, não pareciam preparadas para a realização das provas da próxima fase: além de admitirem fatos sem justificativas, a redação da equipe D, bem como suas representações figurais não deixavam claro seu raciocínio (duas formas de comunicação com falhas se aproximam mais de um raciocínio com falhas).

A dupla A provou a congruência de um par de ângulos opostos, com as justificativas esperadas e a dupla B, também com as justificativas esperadas provou a congruência dos dois pares de ângulos opostos.

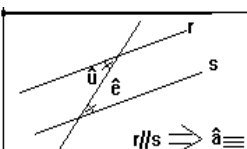
Tabela 9: SÍNTESE DA ATIVIDADE 10

DUPLA	OBSERVAÇÕES
A	justificou satisfatoriamente a congruência de um par de ângulos opostos
B	justificou satisfatoriamente a congruência dos dois pares de ângulos opostos.
C	não conseguiu efetuar a prova solicitada apresentou dificuldades conceituais tirou conclusões falsas e não fundamentadas
D	não conseguiu efetuar a prova solicitada tirou conclusões falsas e não fundamentadas

Fonte: Autoria Própria

Atividade 11: (análise a priori)

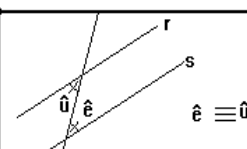
11) Vamos usar as afirmações abaixo sem nos preocuparmos com suas demonstrações:



$r \parallel s \Rightarrow \hat{a} \equiv \hat{u}$

Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes.

I

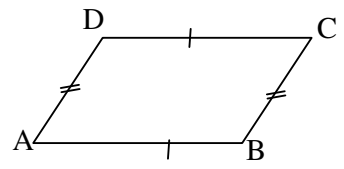


$\hat{e} \equiv \hat{u} \Rightarrow r \parallel s$

Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes, então essas duas retas são paralelas.

II

A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.



A implicação “... se os ângulos alternos são congruentes então as retas são paralelas” pode surgir sem a intervenção do aplicador. Ela porém, deve constituir o maior obstáculo, novamente, porque nossos alunos não estão acostumados a usar informações, mesmo de forma direcionada, para tirar conclusões e é natural que

uma pesquisa do tipo precise investir no hábito da percepção e dedução nas primeiras atividades.

Sendo, então necessária a intervenção, os itens a serem trabalhados pelo professor são os que, como já dissemos, faziam parte do enunciado da questão:

Ajudas que poderão ser dadas após o aluno apresentar uma estratégia de resolução:

Ajuda 1 : Verifique que a hipótese é “um quadrilátero tem lados opostos congruentes” – aí você já tem algumas informações para justificar parte do caso de congruência de triângulos que pretende usar. Qual seria a tese?

Ajuda 2 : Você quer provar (tese) que “o quadrilátero é um paralelogramo”. O que precisa acontecer para que ele seja um paralelogramo?

Ajuda 3 : Caso você tenha que provar que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ terá que usar uma das informações anteriores. Será a I ou a II?

Ajuda 4 : Para usá-la talvez você precise de um par de ângulos congruentes. Há um par de triângulos congruentes que possibilitem isso? Use-o.

Ajuda 5 : Com a diagonal menor, divida o quadrilátero em dois triângulos. Determine um caso de congruência lembrando que cada par de elementos congruentes (lados, ângulos) deve ter sua congruência justificada.

A resolução esperada:

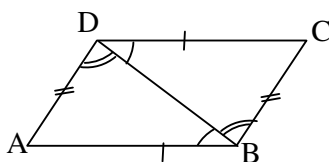


Figura 39: Quadrilátero dividido em dois triângulos congruentes
Fonte: Autoria Própria

Os triângulos DAB e BCD são congruentes pelo caso LLL visto que $\overline{BD}$ é lado comum aos dois.

Temos então os ângulos $\widehat{CDB}$ e $\widehat{ABD}$, também congruentes, verificam a informação II: se duas retas coplanares, no caso, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ e uma transversal ($\overleftrightarrow{DB}$) determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas. Portanto os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ respectivamente contidos nessas duas retas também serão paralelos.

Como os ângulos $\widehat{BDA}$ e $\widehat{DBC}$ são congruentes pelo mesmo caso de congruência dos triângulos DAB e BCD, de maneira análoga, os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos e o quadrilátero é um paralelogramo.

Lembramos ainda que essa não é a atividade principal relativa às provas mas se os alunos com os quais estamos acostumados a trabalhar conseguirem um desenvolvimento isso será um bom passo.

Talvez ainda fosse ideal a realização de outras provas, mas elas serão deixadas para serem exploradas na realização do jogo previsto para a próxima fase.

Ainda admitindo, como já relatamos, algumas características de nossos alunos, é possível que nossas expectativas relatadas não se verifiquem nos casos onde os jovens têm uma espécie de entrave para o raciocínio matemático deixando a aversão vencer o entusiasmo e em outros casos, mais raros, onde os alunos parecem ter certa limitação para certos tipos de estudo.

Gostaríamos de reforçar que, devido ao acompanhamento quase individualizado, diferente das possibilidades reais numa sala de aula, as chances desses obstáculos se verificarem são menores no caso dos entraves e sensivelmente menores no caso das “limitações individuais”. Além disso, o fato de serem voluntários os torna um público diferenciado.

Análise a posteriori da décima primeira atividade:

No início da atividade o professor pesquisador fez uma abordagem usando “construção” de ângulos alternos através de retas paralelas cortadas por uma transversal utilizando varetas e canetas.

A dupla B trabalhou compenetrada sem fazer solicitações ao professor. A dupla D, ao solicitar ajuda, foi convidada a verificar qual das afirmações trazia a conclusão que as retas são paralelas. Após indicar a afirmação II, a dupla recebeu a sugestão

de procurar ângulos como os indicados na carta por $\hat{u}$ e $\hat{e}$ e provar sua congruência. Como resposta, a dupla D apresentou o desenho da figura 40:

A partir delas e do esboço abaixo, você deve provar que “se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes então ele é um paralelogramo”.

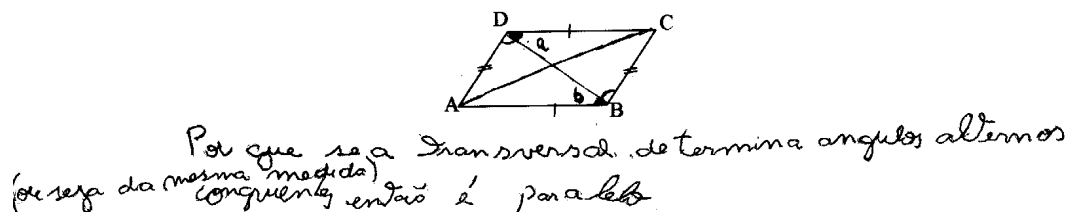


Figura 40: resolução da atividade 11 pela dupla D
Fonte: protocolos recolhidos

O pesquisador questionou como a dupla justificava a congruência dos ângulos $\hat{BDC}$ e $\hat{DBA}$ recebendo a resposta que como $\overline{AD}$ tinha a mesma medida de $\overline{BC}$ então os ângulos em questão também tinham a mesma medida.

Podemos perceber que a equipe inseriu uma conclusão não prevista na análise a priori. Com ela e com a sugestão do professor, finalizou de modo satisfatório a prova.

A dupla A também teve a intervenção do pesquisador que fez a mesma pergunta antes dirigida à equipe D sobre as afirmações a serem usadas. Um membro escolheu a afirmação I e o outro a afirmação II. O professor convidou, novamente, a repararem bem na conclusão de cada uma. Quando os dois decidiram pela afirmação II, foi-lhes sugerido o uso de um caso de congruência de triângulos para garantir a congruência entre os ângulos alternos internos.

Após algum debate entre si e com o professor pesquisador, a dupla pensou em usar a congruência dos lados opostos de modo empírico: se o segmento $\overline{AD}$ for menor que o segmento $\overline{BC}$ as retas não serão paralelas.

A dupla B apresentou sua produção, mas concluiu sobre ângulos opostos congruentes e também admitiu ser a figura um paralelogramo (CKS – Parzysz, 2001) pois prolongou seus lados e trabalhou com a congruência dos ângulos correspondentes.

Destacamos o fato de a dupla D, que, até o momento, apresentou mais dificuldades, ter se destacado nessa atividade em relação às demais.

Tabela 10: SÍNTESE DA ATIVIDADE 11

DUPLA	OBSERVAÇÕES
A	apresentou resolução da prova com enfoque empírico
B	apresentou a prova de outra conclusão que não a solicitada ocorrência de CKS
C	não temos o protocolo dessa atividade
D	desenvolveu satisfatoriamente a prova

Fonte: Autoria Própria

3.5.1.1 – Síntese das observações relativas ao bloco I

Como síntese das observações desse bloco, podemos citar fatores que impediram a plena realização da prova:

- Todos os alunos acreditam que a prova empírica é suficiente para se tirar uma conclusão geral;
- Foi verificado não domínio ou insegurança em relação a conceitos envolvidos (duas das duplas);
- Não compreensão da tese da proposição com a qual se está trabalhando ou, também, não compreensão ideal do que seria partir de uma hipótese para chegar a uma tese;
- Incoerência entre duas conclusões próprias ligadas aos resultados de provas empíricas (3 duplas) e não sentimento de insegurança quanto ao uso de provas exclusivamente empíricas (todas as duplas);
- Dificuldade para entender enunciados (uma dupla);
- Ocorrência de CKS (Parzysz, 2001), isto é, o aluno tira conclusões indevidas a partir da observação de um esboço (duas duplas);
- Apresentação de conclusões não fundamentadas (duas duplas);
- Apresentação de provas incompletas - sem o “fechamento” – faltando apenas expressar a conclusão da tese;
- Uso de prova empírica;
- Apresentação de conclusão não solicitada.

Também tivemos ocasiões nas quais as duplas finalizaram completamente algumas provas.

3.5.2 – Análises: Bloco II – O Jogo de Cartas

3.5.2.1 – Apresentação do jogo

A articulação dos argumentos necessários à formalização de uma prova é uma atividade, hoje em dia, difícil até mesmo para a maioria dos docentes. Por esse motivo, os alunos contarão com algumas proposições escritas em cartas bastando selecionar as que são necessárias à prova do teorema em questão e ordená-las de forma que a primeira seja consequência da hipótese, a segunda seja consequência da primeira (ou da associação da primeira com a hipótese) e assim sucessivamente até que a proposição da última carta permita concluir o que diz a tese.

Na prova de um teorema, ao partir da hipótese para chegar à tese, geralmente, precisamos encadear de maneira lógica algumas proposições, ou, conforme Duval e Egret (1989), substituir um enunciado anterior por um novo enunciado, ou, poderíamos dizer, “atacar passo a passo” o problema, daí o uso das cartas, as quais chamaremos de “cartas-condição”.

Elas farão parte de um jogo cujo objetivo é realizar o maior número possível de provas das propriedades dos paralelogramos. Para isso, os alunos se associarão em duplas. Cada dupla escolherá uma propriedade do paralelogramo para provar da maneira como acabamos de expor: receberá todas as cartas-condição, selecionará as adequadas, as colocará em ordem de modo que uma implique a ocorrência da seguinte ligando a hipótese à tese.

As propriedades dos paralelogramos a serem escolhidas e provadas estão descritas a seguir, também em formatos de cartas:

PROVA A	PROVA a
EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.	TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO.

Figura 41: Cartas de A e a
Fonte: Autoria própria

PROVA B EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.	PROVA b TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO.
PROVA C EM TODO PARALELOGRAMO AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.	PROVA c SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO.
Prova D TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.	Prova d SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO.
Prova E TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.	Prova e SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.
Prova F TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM SUAS DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.	Prova f TODO QUADRILÁTERO EM QUE AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.

Figura 42: Cartas de B até f
Fonte: Autoria própria

Prova G TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS.	Prova g SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.
Prova H TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.	Prova h TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.
Prova I SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.	Prova i TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.
Prova J SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS PARALELOS E CONGRUENTES.	Prova j SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS QUE SE INTERCEPTAM NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.

Figura 43: cartas de G até j
Fonte: Autoria própria

Podemos observar que a um teorema designado por uma letra maiúscula, corresponde sua recíproca designada pela mesma letra, porém minúscula.

Também verificamos que, ao total são vinte provas (entre provas de teoremas e suas recíprocas) .

Como dissemos, as provas serão feitas por alunos associados em duplas. A previsão é uma competição dessas duplas duas a duas (dois alunos contra dois alunos).

Para nós o mais importante é que as provas sejam realizadas. Cada dupla fará uma prova articulando as cartas-condição. É previsto um prazo (a ser previamente combinado) para que cada uma realize sua prova. Ao final desse tempo cada dupla anota, numa planilha recebida, obedecendo a determinada ordem, as cartas-condição utilizadas na prova e a submete à apreciação de equipe oponente. Isso caracteriza uma rodada do jogo.

Portanto cada equipe, ao final da rodada, terá duas atividades a serem analisadas pelo pesquisador: a prova feita, que será ou não validada, e a apreciação feita da prova elaborada pela equipe oponente.

Antes de entrarmos nessas análises vejamos as cartas-condição:

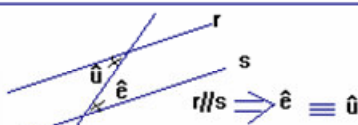
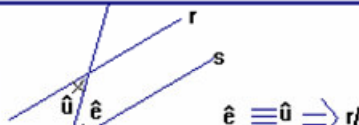
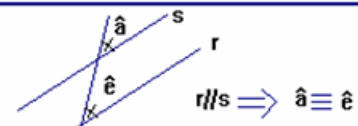
 Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes. I	 Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas. II
 Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes III	USO DA DIAGONAL MENOR IV

Figura 44: Cartas – condição: de I a IV
Fonte: Autoria própria

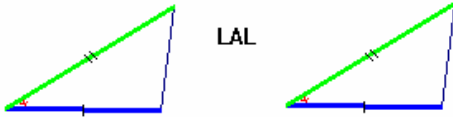
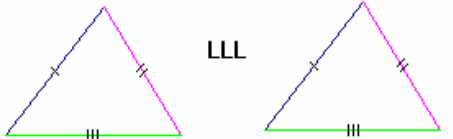
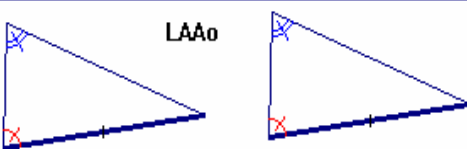
USO DA DIAGONAL MAIOR V	USO DE UM LADO COMUM A DOIS TRIÂNGULOS VI
ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE SÃO CONGRUENTES. VII	LAL  Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes. VIII
ALA  "Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes então estes triângulos são congruentes". IX	LLL  "Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes." X
LAAo  "Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes." XI	A SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO É IGUAL A 360 GRAUS E A DE UM TRIÂNGULO É IGUAL A 180 GRAUS. XII
A MEDIDA DE UM ÂNGULO DE "MEIA VOLTA" É 180 GRAUS. XIII	SE $A = B$ E SE $C = D$ ENTÃO $A + C = B + D$ XIV

Figura 45: Cartas – condição de V a XIV
Fonte: Autoria própria

PODEMOS "PROLONGAR" OU TRAÇAR LADOS DE QUADRILÁTEROS OU DE TRIÂNGULOS. XV	SE $A = B$ E $B = C$ ENTÃO $A = C$ XVI
EM FIGURAS CONGRUENTES, ELEMENTOS CORRESPONDENTES TAMBÉM SÃO CONGRUENTES. XVII	SE $A+B = A+C$ ENTÃO $B = C$ XVIII

Figura 46: Cartas – condição de XV a XVIII
Fonte: Autoria própria

Vejamos um exemplo: Admitindo que um paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos vamos provar que “EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES” (prova B do jogo).

Identificando os vértices por A,B,C, e D, usar uma das diagonais (no caso, BD) e verificar que os ângulos $\hat{A}BD$ e $\hat{B}DC$ são congruentes por termos AB paralelo a DC bem como congruentes os ângulos $\hat{A}DB$ e $\hat{D}BC$ por termos AD paralela a BC.

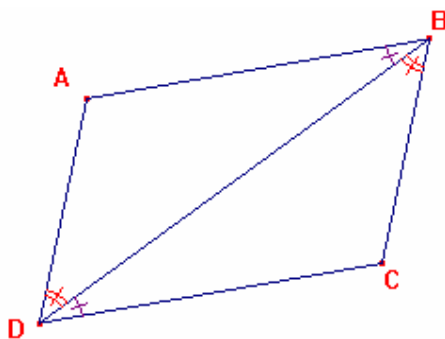


Figura 47: Esboço de uma das etapas da prova B
Fonte: Autoria própria

Concluir que os triângulos ABD e DBC são congruentes (caso ALA) e assim poder afirmar que os lados correspondentes em cada triângulo: AD e BC assim como AB e DC também são congruentes.

Não esperando que os alunos estruturem sem ajuda todo esse raciocínio, lhes são oferecidas, como auxílio, as cartas indicadas anteriormente, os passos da prova a ser efetuada. Eles por sua vez deverão selecionar as pertinentes além de ordená-las. O modo correto seria (nessa ordem) a escolha das cartas: V- Uso da diagonal maior, ou IV (uso da diagonal menor), I (retas paralelas implicam ângulos alternos congruentes⁴), novamente o uso da carta I (cada vez indicando a tomada de um dos pares de ângulos alternos), VI (uso de um lado comum a dois triângulos), e a carta IX (congruência de triângulos pelo caso ALA).

Após concluir que os triângulos ABD e DBC são congruentes, é importante saber que é esse fato que nos permite concluir que os lados opostos do paralelogramo são congruentes (pois são lados correspondentes – e congruentes – em cada triângulo). Por isso ainda deve ser usada a carta XVII - Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes.

Uma outra equipe estaria fazendo algo semelhante. Isso encerra uma rodada. As próximas seriam análogas diferindo apenas por se estar provando uma outra propriedade do paralelogramo (ou essa mesma, caso a equipe não tenha obtido êxito e queira tentar novamente).

Será vencedora a equipe que fizer um maior número de provas de maneira correta. Cada prova corresponde a uma rodada e não há, a princípio, um número fixo delas (isso pode ser definido posteriormente em comum acordo entre os participantes). Trata-se de um jogo com duração prevista para várias seções.

Mas falamos também que, para finalizar cada rodada as equipes teriam sua produção (por exemplo, a relação de cartas indicada acima) analisada através de uma planilha.

Nela os alunos indicarão as idéias (proposições) que estarão utilizando.

4 - A redação completa da carta diz “Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.”

Como é necessário que estejam representando mentalmente essa idéia solicitaremos que eles a expressem, também, em linguagem figural (Duval, 1995).

Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e “onde se quer chegar” no último desenho.		
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
		
		
		

Figura 48: Planilha carta-desenho usada para indicação do registro figural
Fonte: Autoria própria

Ela também serviria para a equipe oponente apreciar a argumentação feita e poderia, no caso, de aplicação do jogo numa sala de aula, independentemente de se estar fazendo uma pesquisa, servir como um registro do trabalho dos alunos para o professor principalmente, se, durante a aula, não tivesse conseguido observar todos os grupos.

Em nosso exemplo, prova da proposição B ("EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES"), tal planilha ficaria como se segue:

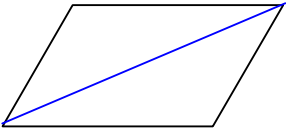
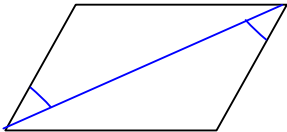
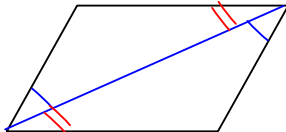
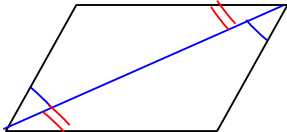
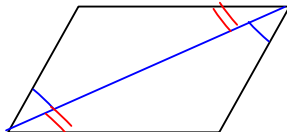
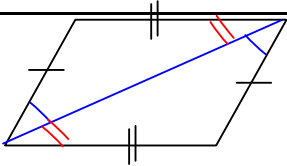
Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e “onde se quer chegar” no último desenho.		
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
$\mathcal{B}$	$\mathcal{V}$	
	I	
	I	
	$\mathcal{VI}$	
	IX	
	$XVII$	

Figura 49: Exemplo de preenchimento possível da planilha para a prova B
Fonte: Autoria própria

O trabalho ficará mais enriquecido quando uma equipe, além de preencher sua planilha, analisar a planilha da dupla com a qual está competindo. Ela

poderá verificar, por exemplo, mesmo que não tenha conseguido encadear suas idéias, que não se poderia usar, digamos, o caso ALA de congruência de triângulos antes de se ter garantido que realmente há em cada par de triângulos, respectivamente congruentes: um lado e os ângulos adjacentes a ele.

Assim se uma dupla não conseguir definir todos os elementos necessários para elaborar uma prova mas souber o que não pode ser feito, também terá esse seu conhecimento avaliado.

Logicamente, tais análises das planilhas das equipes oponentes também poderão provocar “alteração no placar do jogo” mas isso servirá apenas como efeito de motivação aos participantes. Em nossa análise importará a produção dos alunos e não a alteração que ela provocará no resultado do jogo.

Por esse motivo, as regras, em detalhes, que não influenciarão pedagogicamente, serão deixadas no anexo 5.

Também será oferecido o desenho abaixo, de um paralelogramo, para que o aluno possa marcar nele elementos congruentes, recortá-lo e manuseá-lo conforme as idéias de Machado (1995).



Figura 50: Quadrilátero a ser pintado, recortado e manuseado
Fonte: Autoria própria

Ainda serão fornecidas folhas de rascunho para auxiliar os alunos na elaboração da prova.

De acordo com Parzys, embora julguemos estar já no nível G2 vamos precisar de um retorno aos níveis G1 e G0 como auxílio. Ou, como relata Machado (1995), a representação e a construção são fundamentais para a concepção. De fato apenas o registro em língua escrita parece não trazer à memória toda conceituação se é que ela foi mesmo elaborada.

As vinte provas a serem realizadas estão também representadas num tabuleiro com cinco regiões denominadas “campos”. Esses campos terão a

representação figural ou mista (Duval, 1989) de afirmações que podem, conforme

Duval e Egret (1989), ora ser uma hipótese, ora ser uma tese:

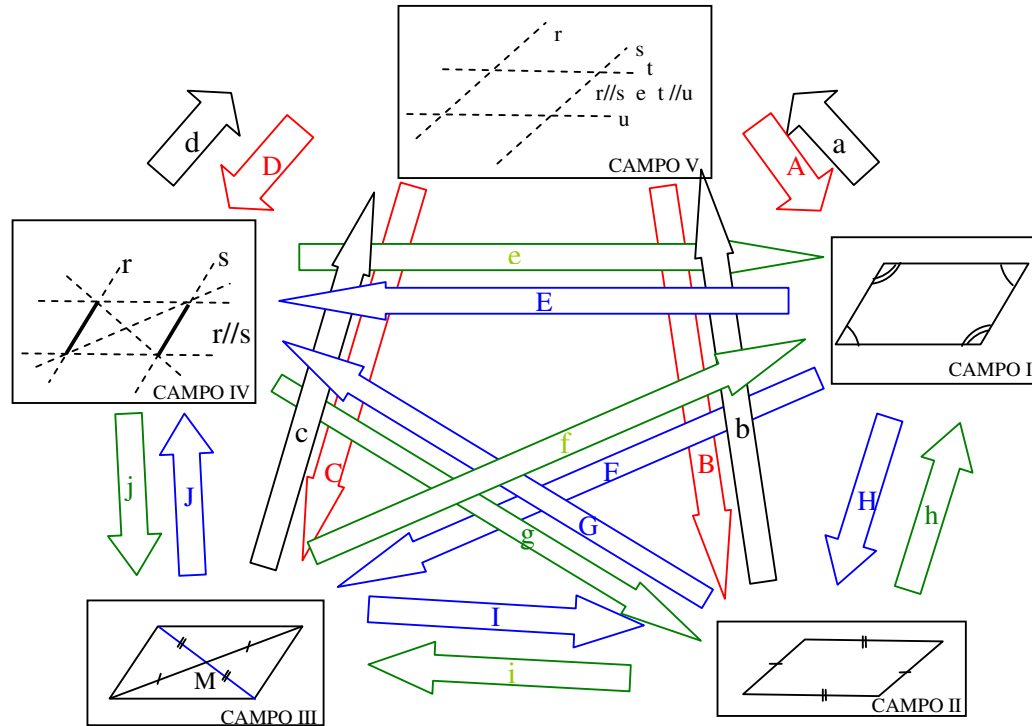


Figura 51: Tabuleiro do jogo em tamanho reduzido
Fonte: Autoria própria

Por exemplo, vamos tomar o campo I, onde se representa figuralmente um quadrilátero com ângulos opostos congruentes. Tal campo será tese se a prova escolhida for a indicada por "A": "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES." E, logicamente, nessa mesma prova, a hipótese terá sua representação figural no campo V.

Caso a prova escolhida seja aquela indicada por "a": "TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO", como se pode verificar acima, a representação do campo I será a hipótese e a do campo V será a tese.

É importante lembrar que as cartas com a redação de cada proposição já foram apresentadas (cartas A, a, B, b, ...). Tais cartas serão fornecidas aos alunos que fizerem a prova correspondente. No exemplo que demos

anteriormente (prova B), os alunos ao terem a prova validada recebem uma carta com a inscrição: "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES".

Esses alunos poderão usar, de agora em diante, além daquelas cartas-condição, também essa. Assim se quiserem, por exemplo, realizar a prova "C": "EM TODO PARALELOGRAMO AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS", terão, como hipótese, além de um "quadrilátero com lados opostos paralelos", também "um quadrilátero com lados opostos congruentes", pois já garantiram que "EM TODO PARALELOGRAMO (que é a hipótese do campo V, de onde estão partindo) DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES".

Finalizando a apresentação do jogo, resta-nos mencionar sobre a validação das provas feitas bem como das análises das provas feitas pela equipe oponente.

O pesquisador é que fará as validações finais. Mas para nós não importa o que elas provocarão no placar e sim se elas (avaliação das provas feitas e das análises pelos alunos das provas feitas) estarão se constituindo em intervenções que ajudarão os alunos a realizarem as provas das próximas rodadas.

Gostaríamos de lembrar que embora tal procedimento possa, de certa forma, prejudicar a pesquisa (pela quantia de intervenções – uma a cada prova efetuada) também há o fato de termos várias delas previstas.

A intenção é que as intervenções (necessárias, afinal, trata-se de uma seqüência didática) sejam diminuídas ao longo da pesquisa em suas vinte provas possíveis ou que, pelo menos, as últimas só venham a confirmar e validar provas efetuadas com algum sucesso obtido pelos alunos.

3.5.2.2 – Uma pré-atividade: seqüência lógica (apresentação e análises)

No jogo os alunos só poderão usar uma carta se houver condições para isso, ou seja, conforme Duval e Egret (1989), haverá uma seqüência de proposições onde a tese de uma será hipótese da próxima. Não se pode usar uma carta se a hipótese nela escrita não estiver já demonstrada.

Sabemos que uma dificuldade muito provável no desenvolvimento de uma prova, deverá ser o uso de proposições no "momento errado", isto é, sem que

estejam garantidas as condições para tal, por exemplo, afirmar que dois triângulos são congruentes pelo caso LAL observando a congruência, digamos, apenas de dois pares de lados correspondentes em cada um e não do ângulo compreendidos entre eles.

Para facilitar a compreensão dos alunos em relação ao que lhes será solicitado durante o jogo, elaboramos uma pré-atividade, onde a sequência lógica estivesse mais próxima da linguagem popularmente utilizada.

Também visamos uma apresentação prática dos conceitos de teorema e seu recíproco pois a atividade divide-se justamente em duas partes: a prova de um “teorema” (Se uma pessoa é mordomo então ela é um ladrão) e seu “recíproco” (Se uma pessoa é um ladrão, então ela é um mordomo).

A seguir a redação da atividade:

CARTAS LÓGICAS

I) Sua dupla deve provar que:

Se Australopithecus é mordomo então ele é um ladrão.

Veja que a hipótese está grifada. Também costumamos, em linguagem matemática usar o símbolo $\Rightarrow$ entre a hipótese e a tese. Ficaria assim:
Australopithecus é mordomo $\Rightarrow$ ele é um ladrão (isso é uma implicação)

Vocês deverão usar várias implicações na sequência correta até poder concluir que ele é um ladrão (tese final).

Vocês começam com uma informação: Australopithecus é mordomo. Essa será a única informação que vocês poderão usar ao escolher a primeira carta tirando qualquer informação que se refira diretamente a Australopithecus.

Após, com seu (sua) amigo(a), selecionar e ordenar as cartas que lhe garantem concluir que Australopithecus é ladrão, escreva abaixo a identificação das mesmas na ordem em que foram usadas: _____

II) Repitam o procedimento para provar a implicação:

Amebus é ladrão $\Rightarrow$ ele é mordomo

Cartas usadas: _____

As cartas que, embaralhadas, serão fornecidas aos alunos:

<u>SE UMA PESSOA É INGLESA E</u> <u>MORDOMO</u> ENTÃO ELA COME USANDO FACA. W	AUSTRALOPITECUS É IRLANDÊS. Q
AUSTRALOPITECUS É ESCOCÊS. V	<u>SE UMA PESSOA É ESCOCESA E</u> <u>COME USANDO GARFO, FACA E</u> <u>COLHER</u> ENTÃO ELA É UM LADRÃO. R
<u>SE UMA PESSOA É ESCOCESA E</u> <u>MORDOMO</u> ENTÃO ELA COME USANDO FACA. F	AMEBUS É PALHAÇO. E
<u>SE UMA PESSOA É ESCOCESA E</u> <u>MORDOMO</u> ENTÃO ELA COME USANDO GARFO. D	AMEBUS É FERREIRO. S
<u>SE UMA PESSOA É ESCOCESA E</u> <u>COME USANDO GARFO E FACA</u> ENTÃO ELA DORME NO PAIOL. H	<u>SE UMA PESSOA É UM LADRÃO E</u> <u>É UM FERREIRO</u> ENTÃO ELA TRABALHA NO PALACETE. M

Figura 52: Cartas da pré-atividade: seqüência lógica
Fonte: Autoria própria

<u>SE UMA PESSOA DORME NO PAIOL</u> ENTÃO ELA É UM LADRÃO. L	<u>SE UMA PESSOA TRABALHA NO PALACETE</u> ENTÃO ELA É UM MORDOMO. G
--	---

Figura 53: Cartas da pré-atividade: seqüência lógica
Fonte: Autoria própria

Cremos que os estudantes não terão dificuldades para estabelecer as duas seqüências esperadas. A primeira deverá ser composta pelas cartas V, F, D, H, L ou pela seqüência V, D, F, H, L e a segunda pelas cartas: S, M, G (também se encontram nessa ordem, acima).

A idéia foi inspirada numa das provas a ser desenvolvida na etapa seguinte: "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES" e na sua recíproca: "TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO".

Vejamos a primeira usando o paralelogramo ABCD:

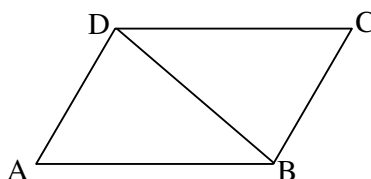


Figura 54: Paralelogramo ABCD, com uma diagonal
Fonte: Autoria própria

A hipótese – “ABCD é um paralelogramo” equivale à afirmação fornecida: “Australopithecus é mordomo”. Na seqüência da prova vamos considerar a diagonal BD. Como num paralelogramo se pode adequar o traçado de uma diagonal, também a Australopithecus se pode adequar a afirmação de que é escocês.

Como o lado AB é paralelo ao lado DC os ângulos $\hat{ABD}$ e $\hat{CDB}$ são congruentes bem como os ângulos $\hat{BDA}$ e $\hat{DBC}$ (por serem paralelos os lados AD e BC).

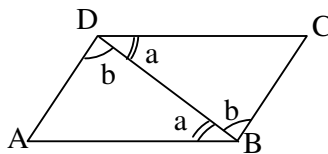


Figura 55: Paralelogramo, diagonal e ângulos alternos
Fonte: Autoria própria

Vejamos que antes de considerarmos a congruência dos ângulos aos quais nos referimos acima, precisávamos ter dois fatos: os lados paralelos e a diagonal. Da mesma forma, espera-se que um aluno não indique, por exemplo, a carta F – “SE UMA PESSOA É ESCOCESA E MORDOMO ENTÃO ELA COME USANDO FACA” antes de “garantir” que tal pessoa é mesmo escocesa e é um mordomo. O mesmo vale para a carta D – “SE UMA PESSOA É ESCOCESA E MORDOMO ENTÃO ELA COME USANDO GARFO”. As cartas F e D podem ser usadas em qualquer ordem, porém após o uso da hipótese e da carta V.

Para concluir a congruência dos triângulos ABD e DBC é necessário juntar três informações: a congruência de um lado (no caso, o lado comum), a congruência dos pares de ângulos $\hat{A}BD$ e $\hat{C}DB$ e a congruência dos pares de ângulos $\hat{B}DA$ e $\hat{D}BC$. Da mesma forma, antes de concluir que “uma pessoa dorme no paiol” é necessário assegurar-se de que se verificam três condições: ela “é escocesa”, “come usando garfo” e “come usando faca”.

Finalmente, se os triângulos ABD e DBC são congruentes, então todos seus elementos (lados e ângulos) correspondentes serão congruentes, portanto os lados AD e BC serão congruentes bem como os lados AB e DC.

Como a congruência dos triângulos leva à tese, o fato de alguém dormir no paiol leva-nos a concluir que essa pessoa é um ladrão.

Para a prova da recíproca, basta considerarmos que temos um quadrilátero com os lados AD e BC congruentes assim como os lados AB e DC (a essa hipótese associa-se a nossa: “Amebus é ladrão”).

Como a um quadrilátero se pode associar o traçado de uma diagonal, também podemos usar uma das frases atribuídas a Amebus (que ele é ferreiro).

Com a hipótese (lados congruentes) e com uma diagonal (lado comum a dois triângulos) podemos concluir a congruência dos triângulos ABD e DBC e essa congruência nos levará a afirmar que os ângulos $\hat{A}BD$ e $\hat{C}DB$ serão também congruentes assim como os ângulos $\hat{B}DA$ e $\hat{D}BC$. Isso nos garante o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero.

Também com duas informações (a hipótese e a contida na carta S) podemos afirmar que Amebus trabalha no palacete e, assim, ele é um mordomo.

Observamos que a única função das cartas W, Q, R, E é verificar se os alunos não acrescentariam elementos desnecessários à prova ou se não tomariam uma afirmação sem que ele estivesse ligada logicamente à seqüência (a carta R – “SE UMA PESSOA É ESCOCESA E COME USANDO GARFO, FACAS E COLHER ENTÃO ELA É UM LADRÃO” - poderia ser usada caso o aluno não atentasse para a questão da colher, afinal, após pensar nos talheres, já conduz logo à tese da primeira prova).

Sabemos que, embora possamos ter feito tal analogia, as cartas que contenham afirmações relativas à geometria não terão a mesma evidência para serem colocadas na seqüência lógica. No caso de Australopithecus e Amebus cada tese escrita em uma carta era exatamente a hipótese da carta seguinte o que não ocorrerá com as cartas cujo conteúdo serão proposições geométricas.

Por exemplo: a carta que diz que “Australopithecus é escocês” acaba, pela própria redação, indicando a ligação Australopithecus – escocês. Já não é tão evidente lembrar que se pode usar uma diagonal para dividir um paralelogramo em dois triângulos.

O aluno também poderá, talvez, já ter determinado a congruência dos elementos que necessita para usar um dos casos de congruência de triângulos e, mesmo assim, não perceber isso. A ligação das cartas V,F,D (ou V, D,F) com a carta H, todavia, torna-se mais evidente pois a carta H traz exatamente as palavras usadas nas três primeiras. Embora uma carta (cuja redação seja um dos casos de congruência de triângulos) faça menção aos ângulos e aos lados, a mesma não diz exatamente quais são eles.

De qualquer maneira, julgamos que tal atividade trará benefícios aos processos de prova aos quais os estudantes deverão ser submetidos. Pelo

menos quanto ao aspecto de otimismo, pois, como esperamos que não encontrem grandes dificuldades nessa atividade, acreditamos que começarão confiantes as primeiras provas envolvendo paralelogramos.

Análise a posteriori dessa pré-atividade:

Conforme tínhamos previsto, os alunos não apresentaram grandes dificuldades: todas as equipes obtiveram, rapidamente, a seqüência exatamente como tínhamos previsto.

Apenas a dupla B, que, de certa forma estava se destacando nas atividades até o momento, obteve a seqüência da mesma forma que as demais, porém, numa segunda tentativa. Inicialmente seus membros usaram a seqüência: V, G, D, F, H, L – ou seja, uniram as condições “mordomo” (hipótese) e “escocês” (carta V) que formariam, juntas, a hipótese da carta F. Todavia a próxima hipótese usada foi “pessoa trabalha no palacete” quebrando a seqüência lógica e conduzindo à condição “mordomo” que era a hipótese inicial de todo o encadeamento.

Após, convidados pelo pesquisador a repetirem a atividade, rapidamente perceberam o erro e obtiveram a resposta esperada.

Sabemos, entretanto, que o sucesso atingido nessa atividade não garante um bom desempenho na próxima fase (o jogo), pois aqui a tese de uma carta acaba ficando idêntica à hipótese da carta seguinte e no jogo as condições a considerar para uma nova tese não estarão tão explícitas. Além disso, foi usada, como representação discursiva (Duval, 1995), a língua natural (veremos ao longo deste trabalho, que é a preferida pelos alunos).

3.5.2.3 – Análises: o jogo

A princípio, o esperado é colocado na tabela a seguir.

Para um bom acompanhamento das seqüências de cartas (e, portanto, das proposições) utilizadas o ideal é acompanhar a análise que se segue. Todavia é útil observar que na tabela anterior supomos as provas feitas na ordem em que aparecem. Desse modo, feitas as provas de “A” até “d”, para as próximas, apenas se utilizam aquelas já realizadas.

Tabela 11 - CARTAS ESPERADAS EM CADA DEMONSTRAÇÃO

PROVA	ESPERA-SE QUE OS ALUNOS USEM AS CARTAS:
A	XV, III, III, VII, III, III, VII ou V, (ou IV), I, I, VI, IX, XVII, XIV
a	XV, XII, XIII, XVIII, II, III, II
B	A, V (ou IV), I, VI, XI, XVII ou V (ou IV), I, I, VI, IX, XVII
b	V (ou IV), VI, X, XVII, II, II
C	B, V, IV, VII, I, XI, XVII ou B, IV, V, I, I, IX, XVII ou V, IV, I, I, I, I, VI, XI, XVII, IX, XVII
c	VII, VIII, XVII, II, VII, VIII, XVII, II ou VII, VIII, XVII, VII, VIII, XVII, b
D	B
d	XV, V (ou IV), I, VI, VIII, XVII, II
E	a, D
e	d, A
F	a, C
f	c, A
G	b, D
g	d, B
H	a, B
h	b, A
I	c, B
i	b, C
J	c, D
j	d, C

Fonte: Autoria Própria

A partir da prova “E” é interessante observar a seqüência de letras maiúsculas e minúsculas alternando-se num tipo de composição entre uma proposição e sua recíproca. Não esperamos, porém, que os alunos percebam esse fato mesmo porque, provavelmente, não chegarão, talvez, a elaborar todas as dez primeiras provas. Procuraremos, entretanto, instigá-los a, sempre que possível, usar provas já realizadas na elaboração das seguintes.

Faremos, agora, os detalhamentos. Antes, porém, precisamos deixar claro que tentamos não seguir a ordem linear dos livros de matemática, e assim, embora estejamos sugerindo a todas as equipes que comecem com uma das

provas tendo como hipótese “que o quadrilátero é um paralelogramo”, quanto às outras, poderão partir da uma hipótese à sua escolha.

Por esse fato, na análise a priori, prevemos alguma intervenção logo após as equipes apresentarem sua conclusão. Essas intervenções seriam, por exemplo, convidar os alunos a observarem algum elemento da prova que deixaram despercebido e lhe “quebrou a seqüência lógica”.

A intenção é diminuir a quantia de intervenções conforme as provas vão sendo apresentadas e, por fim, a apresentação de uma prova sem nenhuma interferência do pesquisador.

Essas intervenções serão colocadas nas análises a seguir. Vamos estabelecer, para a análise a priori, a ordem na qual os alunos trabalharam. Na primeira seção, resolvemos ainda não usar as regras e decidimos que todas as equipes começariam pela prova B cuja análise a priori fazemos a seguir:

PROVA B: EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.

Devido a um breve treinamento envolvendo alguns conceitos lógicos na fase preparatória para a pesquisa (fases preliminares) e no início da própria pesquisa, acreditamos que os alunos não tenham dificuldade para iniciar com a única informação disponível: relativa à carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes.*

De fato “lados paralelos” (hipótese) ligam-se ao início da redação dessa carta. O que os alunos podem se esquecer é que embora a expressão “lados paralelos” lhes indiquem a carta I, ela também traz o elemento “transversal”, que, esperamos, seja uma das diagonais (carta V - *Uso da diagonal maior* ou carta IV - *Uso da diagonal menor*).

Se eles articularem esses dois elementos da prova, o esboço esperado deverá ficar como o indicado a seguir. Lembramos que os alunos serão aconselhados a indicar iguais medidas genéricas por letras iguais:

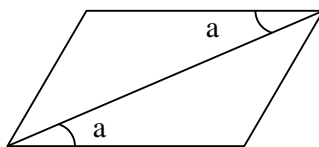


Figura 56:Esquema inicial esperado - prova B
Fonte: Autoria própria

Outra dificuldade pode ser a identificação do caso de congruência a ser usado. Eles saberão, de antemão, que deverão usar um caso de congruência (afinal é o próprio tema da pesquisa na qual estão inseridos). Talvez usem o esperado caso ALA. Em caso negativo sua produção ficará comprometida e isso se refletirá nos registros que irão apresentar à equipe adversária e, logicamente, também, ao aplicador.

Nesse momento é prevista uma intervenção do mesmo no sentido de analisarem se as informações disponíveis são compatíveis com as condições exigidas para o caso de congruência escolhido. Por exemplo, digamos que a equipe tenha escolhido o caso LAL. Nesse caso seus integrantes serão motivados a observar os elementos de que podem dispor com certeza: um lado congruente (lado comum aos dois triângulos no qual se dividiu o paralelogramo) e um par de ângulos congruentes (um em cada triângulo). Para usar o caso LAL, qual seria o segundo lado congruente em cada triângulo?

Acreditamos que essa intervenção os faça abandonar também a idéia de usar o caso LLL, caso tenha sido escolhido. Espera-se que eles sintam a necessidade do segundo ângulo congruente e usem mais uma vez a carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*. Assim, motivados a repetir essa prova, o esboço, agora já direcionado ao caso ALA de congruência, ficaria como se segue:

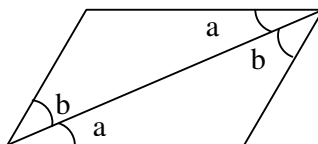


Figura 57: Esquema esperado na seqüência da prova B
Fonte: Autoria própria

Logicamente, após deduzir que deverá ser usado o caso ALA de congruência de triângulos, espera-se que assinalem que há um lado comum – carta VI - *Uso de um lado comum a dois triângulos*. Os dois ângulos já foram indicados com o uso de duas cartas I. Resta então indicar a carta IX - *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes então estes triângulos são congruentes*. Para reforçar que, se os triângulos são congruentes então cada elemento de um deles é congruente ao

correspondente no outro, espera-se que os alunos indiquem a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*.

Análise a posteriori: **PROVA B:**

Nesse dia, os dois componentes da dupla B não estavam presentes e também faltou um dos membros da dupla A apesar de termos solicitado para que evitassem faltar nos dias da pesquisa.

O pesquisador ainda fez a introdução solicitando aos alunos que atentassem para a hipótese: “um paralelogramo tem lados paralelos. Vocês precisam usar uma carta cuja redação inicie falando em lados paralelos. Existem cartas com essa redação e também concluindo que os lados são paralelos”.

O objetivo dessa seção foi verificar o procedimento dos alunos ao elaborar a prova e também, como parte da seqüência didática, orientá-los usando os erros ocorridos. A expectativa era que os alunos não conseguissem desenvolvê-la nesse início da pesquisa.

Vamos verificar como procedeu cada equipe:

Dupla A:

Podemos verificar (fig. 58) que o único erro foi a conclusão sem as condições necessárias: não foi verificada a congruência dos lados opostos (aliás, essa era a tese à qual se queria chegar) para se poder usar o caso LLL de congruência de triângulos.

Lembramos que a carta V diz “Uso da diagonal maior”, a carta VI diz “Uso de um lado comum a dois triângulos” e a carta X: “Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes” (essa foi a carta indevida e seu registro figural também apresenta um erro pois informa que a diagonal é congruente a cada um dos lados de um dos pares de opostos.

Além desse erro de registro, a equipe, logo na primeira linha de seu desenvolvimento, indicou a congruência entre os lados opostos do paralelogramo (o que talvez a tenha movido ao indevido uso da carta X).

Nos demais, a dupla fez uso correto do registro misto (escrita e símbolos - através do conteúdo das cartas) e do registro figural.

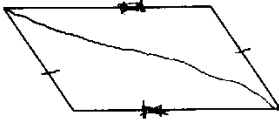
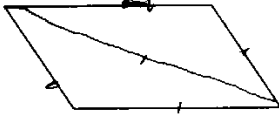
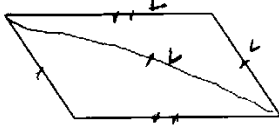
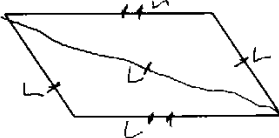
Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número da carta utilizada e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e "onde se quer chegar" no último desenho.	
NÚMERO DA CARTA	DESENHOS
	
V	
V I	
X	
X V III	

Figura 58: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla A na realização da prova B

Fonte: protocolos recolhidos

O pesquisador procurou alertar os estudantes para não alterarem as anotações que já haviam feito. No entanto a rasura na primeira linha pode ter ocorrido após a entrevista feita com a dupla:

Indicando os pares de lados opostos

- Você está dizendo que já têm a mesma medida, com esses dois risquinhos (à esquerda e à direita, em cima e em baixo) ou você vai “querer chegar neles”?
- Tem que chegar mas eu tenho que responder essa figura aqui ...
- Isso, na verdade, é a última coisa a que a gente quer chegar.
- Então “deixa quieto”.

— Não está valendo essa parte? (referindo-se à indicação de lados congruentes).

— Não.

Mesmo após esse diálogo, a dupla continuou sua explanação admitindo o caso LLL de congruência de triângulos (não percebendo que o fato de não estarmos mais admitindo dois pares de lados congruentes afetaria as condições necessárias ao uso dessa proposição).

Outras observações, como a que a hipótese não nos permitia contar com o uso dos lados opostos congruentes, foram deixadas para o final da seção.

Observamos ainda que foi necessária intervenção, para essa dupla, no início da atividade: havia dúvidas em “como começar” ao que o pesquisador revisou, como já havia feito verbalmente, momentos antes, para todos que estávamos partindo de algumas condições (hipótese) apontando os lados opostos da figura e dizendo que se eram paralelos dois a dois queríamos mostrar que os mesmos tinham medidas iguais (mostrando novamente os pares de lados opostos). De fato destaca-se a importância do apoio no registro figural para o entendimento da hipótese e da tese.

A dupla C:

A dupla foi orientada a reproduzir a hipótese, o desenho do campo V do tabuleiro, na primeira linha e também quanto ao preenchimento da planilha: número da carta à esquerda e o desenho (registro figural) correspondente à direita.

Nessa seção o combinado era receber várias cartas de certos tipos, por exemplo, várias cartas I, pois, dependendo da prova feita ela poderia ser usada até quatro vezes (na mesma prova): haveria uma carta para cada vez que fosse usada. O pesquisador, então, ao ver que a dupla estava um tanto confusa, resolveu ajudá-los a separar as cartas repetidas revelando que, nessa prova, não iriam usar o mesmo tipo de carta várias vezes.

Registrando as suas escolhas, foi verificado que falaram duas vezes na sequência: III - *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal,*

Essa seqüência ainda não foi a apresentada na conclusão dessa equipe mas podemos verificar que fogem de uma seqüência lógica.

Após, aproximadamente 15 minutos, chamaram o pesquisador para apresentar sua nova seqüência: carta III - *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes*; carta VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*; carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*, carta XV - *Podemos "prolongar" ou traçar lados de quadriláteros ou de triângulos* e carta IV - *Uso da diagonal menor*.

O pesquisador solicitou que indicassem no desenho onde estavam os ângulos correspondentes (e, inclusive, mostrou-lhes o registro figural da carta III que trazia ângulos correspondentes, dizendo que deveríamos ter ângulos como aqueles). Ainda acrescentou a pergunta: "Já temos ângulos correspondentes aqui que já posso falar que são congruentes ou não podemos usar essa condição ainda?" Como resposta foram indicados os ângulos opostos do paralelogramo.

Ainda mais 15 minutos (aproximadamente) e a dupla expôs a finalização de sua conclusão (como está na última linha da planilha acima) e foi questionada sobre quais seriam as figuras congruentes que estavam usando afinal a redação da carta XVII era "*Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*". A resposta foi que tais figuras eram os lados opostos. De certa maneira, assim como fez a dupla A, a tese foi repentinamente inserida no meio da seqüência de proposições usadas na prova.

A seguir o pesquisador acompanhou com a dupla os seus registros (podemos reparar que cada registro figural bate com o escrito e simbólico que consta nas respectivas cartas), mas sem fazer, nesse momento intervenção. Apenas resolveu fazer mais uma pergunta: "Como vocês concluíram, da penúltima para a última linha, que os lados opostos eram congruentes?" A resposta foi que "os ângulos (no caso, os opostos do paralelogramo) são congruentes, pois são o.p.v., então os lados também são".

Com as questões feitas oralmente enquanto acompanhava o desenvolvimento da prova, o pesquisador pôde verificar que os alunos realmente fugiam da lógica.

A dupla usou corretamente o conceito de ângulos correspondentes na questão 7 do Bloco I, não esperávamos que os confundissem com os ângulos opostos do paralelogramo. Verificado, portanto, um erro conceitual.

A dupla também relatou que ângulos o.p.v. são congruentes, mas isso, logicamente, não demonstra a congruência dos ângulos opostos do paralelogramo. Houve aí uma espécie de reflexão: “a prova justificando a própria prova”.

Acreditamos que a resolução de questões semelhantes na fase preliminar sobre o fato de serem congruentes os ângulos opostos de um paralelogramo também possa ter influenciado o pensamento dos alunos.

A dupla D:

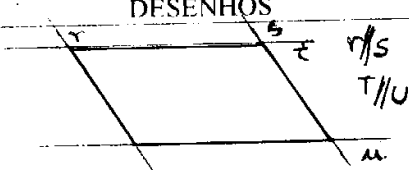
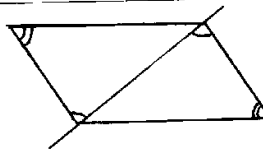
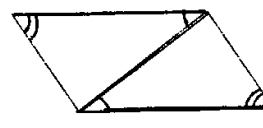
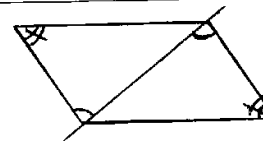
Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número da carta utilizada e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e “onde se quer chegar” no último desenho.	
NÚMERO DA CARTA	DESENHOS
	
XV	
III	
II	
V III	

Figura 60: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla D na realização da prova B

Fonte: protocolos recolhidos

A equipe começa a prova lembrando que há uma semelhança com a atividade pré-atividade de seqüência lógica desenvolvida antes de se iniciar o jogo na qual se devia provar que *Australopithecus* era um ladrão embora aquela estivesse mais evidente.

Por isso aconselhou-se que a dupla verificasse bem qual era a hipótese e qual a redação que nela se encaixava, como tinham feito naquela atividade – reforçando que devia envolver lados paralelos.

Podemos observar que, como ocorreu com as outras duas duplas, também não há lógica na seqüência de cartas apresentadas.

A dupla chamou o pesquisador e apresentou dúvidas sobre qual desenho deveria colocar em correspondência à carta XVII (a princípio, tinham usado as cartas III e XVII) e recebeu, em troca a pergunta: “Vocês já têm alguma figura congruente ali?”

Como a dupla ficou em dúvida, o pesquisador resolveu explicar a redação da carta através de um exemplo de triângulos congruentes.

Alguns minutos depois, o pesquisador questionou a equipe sobre o uso da carta III - *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes*, perguntando se haviam desenhado os ângulos correspondentes. A resposta da dupla foi “Acho que não.” E, depois, “Acho que sim” – indicando um dos ângulos dos vértices do paralelogramo.

Após observação, com a dupla, da penúltima linha (vemos representados ângulos alternos, embora o pesquisador não acreditasse que os alunos estavam mesmo conscientes do que estavam usando), foi-lhes solicitado verificar as condições para usar a carta IX (haviam usado essa carta na última linha da planilha): “Para usar o caso ALA você teria que usar um lado e dois ângulos. Aqui no desenho quais seriam o lado e os dois ângulos?”

Novamente, classificamos esse procedimento como: “conclusão sem as condições necessárias”.

Após, aproximadamente, seis minutos a dupla anunciou que estava trocando, na última linha, o caso ALA pelo caso LAL (carta VIII). O pesquisador resolveu não questionar novamente, nesse momento, a escolha que, novamente trazia conclusões não fundamentadas.

A finalização da seção:

Conforme estava previsto, foi feito um apanhado geral, na lousa, das dúvidas de todas as duplas. Nesse dia resolveu-se não usar as regras do jogo (uma equipe analisar os erros da outra) por dois motivos: o tempo utilizado excedeu o previsto e os alunos estavam com muitas dúvidas sobre sua própria produção para poder analisar a dos colegas.

A seguir relatamos como foi feita essa abordagem geral que começou com a análise da seqüência de proposições da dupla C.

O pesquisador reproduziu o desenho do paralelogramo feito na segunda linha da planilha dessa equipe, apontou os ângulos opostos que ela tinha utilizado e perguntou se eram correspondentes.

Uma integrante da equipe D perguntou “correspondentes têm mesma medida não têm?”

Foi-lhe confirmado que sim (provavelmente lembraram-se de alguma atividade relativa da fase preliminar), mas que aqueles eram ângulos opostos do paralelogramo. E esboçou na lousa o desenho da carta III para revisar-lhes a representação figural dos ângulos correspondentes além de convidar as equipes a observarem essa carta que estava em suas mãos.

Os desenhos da terceira e quarta linhas batiam com os termos usados nas cartas, mas não ajudavam na elaboração da prova.

Na última linha não poderíamos usar uma carta cuja redação partisse de figuras congruentes se não tínhamos tais figuras. Mesmo que usássemos os lados do paralelogramo como “figuras congruentes” (segundo relato da dupla) ainda não tínhamos provado a congruência de tais lados.

Análise da produção da dupla D:

Não foi feita objeção quanto a começar a prova prolongando os lados da figura. Foi colocado que a escolha da carta III era boa no sentido se a hipótese de sua redação estar de acordo com a hipótese da proposição a ser provada mas não tínhamos os ângulos correspondentes das quais falava. Foi observado que tal erro foi o mesmo cometido pela dupla C.

Da mesma maneira não podíamos usar a carta II, pois não sabíamos se os ângulos alternos eram congruentes. Além disso, essa carta traz uma conclusão que é a nossa hipótese.

Por fim, não tínhamos garantido, para usar o caso LAL, a congruência dos elementos necessários.

Análise da produção da dupla A:

A elaboração da prova esteve perfeita na primeira e na segunda linha. O problema foi o uso da carta X (caso LLL), pois só havia garantida a congruência de um dos três lados em cada triângulo.

Nesse ponto foi interessante a colocação de um membro da dupla C sugerindo o uso da carta VI novamente ao que o pesquisador respondeu que, como só há um lado comum aos dois triângulos, tal carta só poderá ser usada uma vez (isto é, não adianta tentar garantir a necessária congruência dos demais lados – para se poder usar o caso LLL – através do uso repetido do lado comum).

Por isso foi reforço, através do desenho de um paralelogramo dividido em dois triângulos, o conceito de lado comum aos dois, evidenciando que a diagonal está numa posição e os lados em outra.

A seguir o professor lançou a pergunta: “Se ele pudesse usar a carta X, ele não precisaria usar a carta X. É verdade ou é confuso isso?”

Uma integrante da dupla C respondeu: “Porque ele já sabia.”

Para auxiliar os alunos nas próximas seções, o professor pesquisador resolveu investir mais em alguns conceitos (associados aos seus registros figurais), pois julgava que não estavam bem apreendidos pelos alunos e estavam auxiliando na quebra da seqüência lógica das proposições na elaboração das provas. Isso foi feito ao final da seção quando o professor expôs em lousa as resoluções feitas pelas duplas bem como a exposição da resolução esperada.

Na próxima seção também foi combinado que todos fariam a mesma prova (aquela indicada por “A”) cuja análise a priori está a seguir:

PROVA A: EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS
QUAISQUER SÃO CONGRUENTES.

Um caminho seria trabalhar com paralelismo e o prolongamento dos lados do paralelogramo onde se marcariam os pontos E e F conforme o desenho:

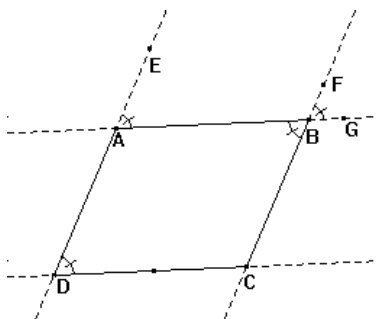


Figura 61: Esboço ou idéia esperados por parte dos alunos – 1º caminho
Fonte: Autoria própria

Como os lados AB e DC são paralelos, os ângulos correspondentes $\hat{CDA}$ e $\hat{BAE}$ são congruentes (carta III - *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes*). Da mesma maneira, como o lado AD é paralelo ao lado BC os ângulos correspondentes $\hat{BAE}$ e $\hat{GBF}$ também são congruentes (carta III, novamente).

Como os ângulos $\hat{GBF}$ e $\hat{CBA}$ são opostos pelo vértice, então são congruentes (carta VII - *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*). Pela transitividade, os ângulos $\hat{CDA}$ e $\hat{CBA}$ são congruentes (carta XVI – *Se $A = B$ e $B = C$ então $A = C$*). De modo análogo a prova é feita para o outro par de ângulo opostos.

Outro caminho seria o uso do caso ALA de congruência dos triângulos ADB e BDC, indicando que os ângulos $\hat{ABD}$ e $\hat{BDC}$ são congruentes por termos o lado AB paralelo a DC bem como os ângulos $\hat{ADB}$ e $\hat{DBC}$ por termos AD paralelo a BC. O lado congruente em cada triângulo é o lado comum BD.

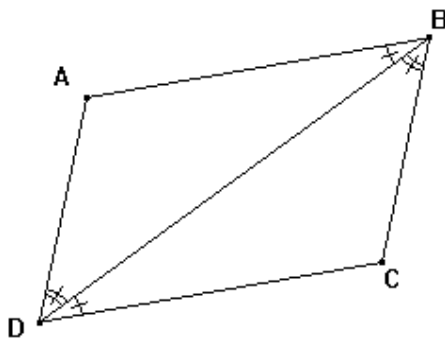


Figura 62: Esboço ou idéia esperados por parte dos alunos – 2º caminho
Fonte: Autoria própria

Como os triângulos são congruentes, os ângulos $\hat{BAD}$ e $\hat{DCB}$ também o serão. Como $\hat{ABD}$ e $\hat{BDC}$ são congruentes assim como $\hat{ADB}$ e $\hat{DBC}$ e

$\text{med}(\hat{ADC}) = \text{med}(\hat{ADB}) + \text{med}(\hat{BDC})$ assim como $\text{med}(\hat{CBA}) = \text{med}(\hat{ABD}) + \text{med}(\hat{DBC})$, os ângulos $\hat{ADC}$ e $\hat{CBA}$ também o serão.

No jogo, as cartas usadas serão: IV - *Uso da diagonal menor* (ou a carta V - *Uso da diagonal maior*). Também a carta I - *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*, novamente a carta I, a carta VI - *Uso de um lado comum a dois triângulos*. Essas cartas garantem a condição para se usar a carta IX - *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes então estes triângulos são congruentes*. Para a finalização, a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* para o par de ângulos ($\hat{BAD}$ e $\hat{DCB}$) e a carta XIV - *Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$* para o par de ângulos $\hat{ADC}$ e $\hat{CBA}$.

Na verdade, pudemos perceber que mesmo após a realização de atividades semelhantes, os alunos terão dificuldades em iniciar uma prova. Por esse motivo é prevista a intervenção do professor pesquisador após cada rodada, onde os alunos analisarão, dessa vez com ele, todas as estratégias usadas pela equipe a qual pertencem e pela equipe oponente.

O objetivo é proporcionar o avanço dos alunos na elaboração de provas. Pois no início, os mesmos poderão indicar cartas sem ligação lógica, cartas desnecessárias, cartas que não se relacionem com a prova em questão ou cartas insuficientes para concluir a prova.

Análise a posteriori: **PROVA A:**

A equipe A apresentou um desenho de acordo com a figura 63 relatando ao professor que A era correspondente a B, B era correspondente a C. Sendo A o.p.v. com O estava provada a congruência para um par de ângulos.

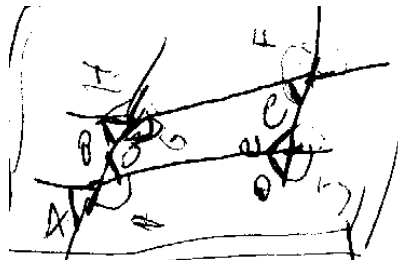


Figura 63: rascunho feito pela dupla A ao efetuar a prova A
Fonte: protocolos recolhidos

Esse rascunho foi feito abandonando as cartas. Todavia, a equipe começou selecionando as cartas: III - *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes*; I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*; V- *Uso da diagonal maior* e VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*.

O pesquisador perguntou-lhes se tal seqüência estava de acordo com o rascunho feito e a dupla afirmou que “não”. Mostraram-se conscientes do procedimento adotado.

Embora, para provar a congruência do outro par de ângulos opostos bastasse usar um procedimento análogo, a equipe afirmou não estar conseguindo fazer tal prova. O professor deixou que eles continuassem pensando, mas, antes, quis garantir que realmente estavam cientes da parte da tese provada. Perguntou-lhes, então, qual era o par de ângulos congruentes que haviam acabado de determinar e eles responderam com os ângulos indicados por “O” e “A”.

Ao final a equipe conseguiu provar, de maneira análoga, a congruência do outro par de ângulos opostos.

A dupla B usou o mesmo procedimento. Antes, porém, haviam pensado nas cartas I, XV, XVII e II. Dessas, a XV (prolongamento dos lados), liga-se ao procedimento utilizado pelos alunos. Quanto à carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes* – o professor orientou que eles deviam, para usá-la, ter uma reta transversal.

A carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* – pareceu causar confusão por causa de sua redação. Ela foi elaborada com a idéia de que as “figuras congruentes” fossem triângulos ou mesmo quadriláteros. Os alunos a usavam pensando num ângulo. O professor pesquisador (que também era autor das cartas), percebendo o problema, comentou-o com os alunos e completou dizendo que, no caso do ângulo, os “elementos congruentes” poderiam ser os lados, a região angular, mas que tal carta não se encaixava na seqüência da prova.

Nas análises que faremos na seqüência deste trabalho, veremos que a redação da carta XVII ainda continuou gerando problemas.

A carta II seria mais adequada para provar que os lados eram paralelos.

A dupla C apresentou inicialmente as cartas I, V, VIII, XVII.

O professor percebeu que sua dica (que estava sendo expressa verbalmente a todas as equipes) para associar a hipótese da carta I com a hipótese da prova “A” estaria gerando dificuldades e mesmo erros de procedimento, pois destacou aos alunos a parte da hipótese (carta I) que falava do paralelismo das retas, mas não a que falava da transversal.

Ao revelar tal observação à dupla C, recebeu, em retorno (o que pode ser considerado um bom raciocínio lógico), que a ordem das cartas I e V deveria ser alterada para V e I (de fato, para usar a redação da carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes* – é necessário termos a transversal (no caso, a diagonal expressa pela carta V).

Podemos ver que a dupla C usou a seqüência: diagonal, ângulos alternos congruentes e caso LAL de congruência de triângulos. O pesquisador, lembrando-os da pré-atividade lógica realizada em seções anteriores, onde, para o uso de uma carta, teríamos que, antes, reunir algumas condições, questionou-os se tinham elementos suficientes para usar aquele caso de congruência.

Os alunos indicaram, em um dos triângulos, um lado comum (diagonal), um par de ângulos alternos (que já tinham provado serem congruentes) e um dos lados opostos. O pesquisador, após questionar se tinham certeza da congruência do último par de lados indicados, lembrou-os que esses eram lados paralelos, mas que não tínhamos certeza se eram congruentes.

Após relatar que tinham feito um bom avanço, deixou-os pensar um pouco mais.

Consideramos, ainda, um bom raciocínio lógico, embora com falha pela não observação conveniente da própria representação figural, o uso de ângulos opostos pelo vértice para usar o caso ALA de congruência de triângulos.

De fato, como não conseguiram verificar a congruência do terceiro lado necessário ao caso LAL, pensaram no ângulo e no lado (que já “tinham”) e agora procuravam a congruência de um novo par de ângulos para o uso do caso ALA.

A falha pode ser observada com o auxílio da figura 64:

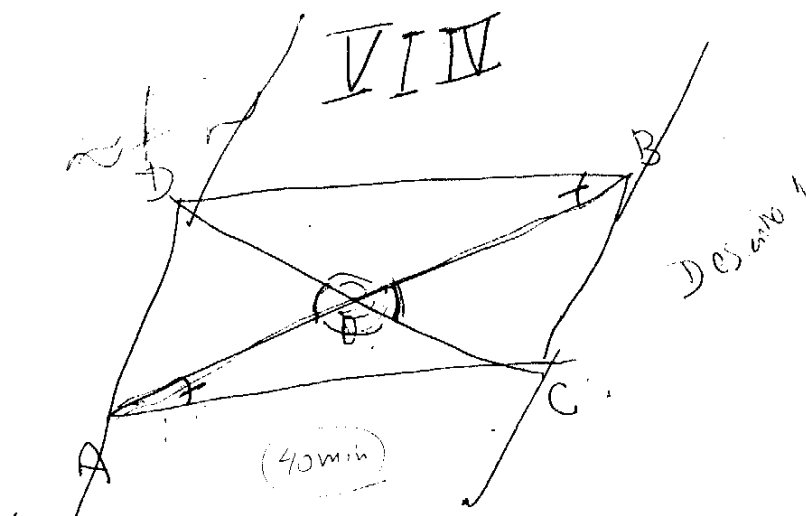


Figura 64: rascunho feito pela dupla C ao efetuar a prova A
Fonte: protocolos recolhidos

Podemos observar que, com o uso de duas diagonais, temos dois pares de ângulos opostos congruentes (ângulos que completariam as condições para se usar o caso ALA).

Na intervenção, o professor perguntou quais eram os dois triângulos cuja congruência queriam demonstrar. Após alguma dificuldade de expressão, indicaram o triângulo ABC como um dos que formavam o par (o professor aproveitou para reforçar tal notação simbólica, pois, até o momento, estava sendo necessário pedir que os alunos contornassem com a caneta o triângulo que queriam indicar).

Nesse ponto, convidou os alunos a observarem que, por exemplo, o par de ângulos opostos pelo vértice $\widehat{BOC}$ e $\widehat{AOD}$ não eram elementos do triângulo ABC. Poderiam usar o par de triângulos AOD e CBO, mas, nesse, caso, não poderiam usar os ângulos $\widehat{DBA}$ e $\widehat{CAB}$. Se usassem os triângulos DBO e AOC, poderiam usar dois pares de ângulos (com congruência já provada), mas faltaria, por exemplo, um lado congruente.

Feitas as observações acima, deixou-os pensar mais um pouco.

Embora até o momento da socialização, ao final da seção, a dupla não tenha conseguido terminar a prova, consideramos que teve um bom raciocínio, mesmo porque, apesar de não ter solicitado ajuda do professor, o surpreendeu entregando o protocolo de acordo com a figura 65:

Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e "onde se quer chegar" no último desenho.

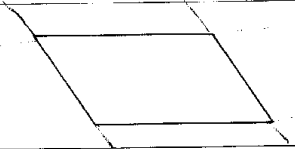
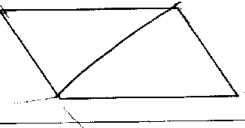
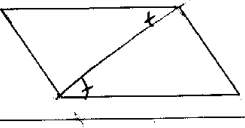
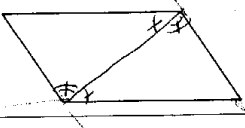
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
	II	
	V	
	I	
	I	
		

Figura 65: preenchimento da planilha carta-desenho feito pela dupla C ao efetuar a prova A

Fonte: protocolos recolhidos

Verificamos que, embora não tenham indicado a carta IX, fecharam o caso ALA de congruência de triângulos. Além disso, conseguiram algo que o professor verificou, durante a socialização da prova B (primeira seção do Bloco II), tratar-se de uma dificuldade geral das duplas A,C e D: perceber a congruência de ângulos alternos quando as retas paralelas estão na horizontal e (no mesmo desenho) não perceber tal congruência quando a verificação

mesma dependa da observação das retas inclinadas (no protocolo da figura 65, marcado com um símbolo duplo).

A dupla D (nesse dia, na verdade, com apenas um de seus componentes presentes) teve muitas dificuldades no início: o pesquisador prestou auxílio quanto ao entendimento da redação das cartas, quanto à representação figural, inclusive a que trata da carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*.

Resolveu-se iniciar a prova auxiliando o aluno representante da dupla. Foi usada uma diagonal (carta V) e indicado um par de ângulos alternos congruentes. Ressaltou-se que estávamos já, usando dois triângulos e, por fim, sugeriu-se pensar nas retas paralelas inclinadas como dica para o uso do outro par de ângulos alternos congruentes.

Interessante notar que, após alguns minutos, o professor voltou a verificar a produção do aluno. Em seu rascunho estavam marcados dois ângulos alternos que o aluno dizia serem congruentes. A justificativa da congruência foi feita pela palavra “paralelos”. Todavia quando o pesquisador indagou quais lados eram paralelos, verificou que o aluno estava com dificuldades nesse conceito através das representações figurais apresentadas. Após revisar o conceito através de outros exemplos como o teto e o chão da sala, resolveu retomar com o estudante as etapas da prova já feita.

Ainda é notável observar que quando foi solicitado ao aluno indicar onde poderia ser traçada uma diagonal no quadrilátero esboçado, tal traçado foi indicado; porém quando foi indicado, na revisão da prova até esse ponto já feita, o segmento (já traçado), ligando dois vértices não consecutivos, o aluno não soube dizer que se tratava de uma diagonal.

Foi solicitado que o aluno procurasse determinar mais condições para o estabelecimento de um caso de congruência de triângulos.

Após mais alguns minutos, o aluno disse que usaria o caso ALA e indicou, segundo solicitação do pesquisador, corretamente os elementos que já tinha para essa congruência: um lado (que era a diagonal do paralelogramo) e um par de ângulos alternos congruentes. Faltava verificar a congruência de mais um par de ângulos.

O professor resolveu, segundo a teoria proposta por Machado (1995), recortar dois triângulos congruentes, com os respectivos ângulos da base

pintados da mesma cor, indicando a congruência – numa tentativa também da percepção construtiva (Alves & Brito, 2007).

Com esses recortes, solicitou ao aluno que “montasse” o paralelogramo do esboço que estavam usando (figura 66) que apresentava apenas um par de ângulos congruentes (na cor verde). Após a construção do paralelogramo, o pesquisador solicitou que o aluno indicasse, no esboço, o segundo par de ângulos congruentes (na cor vermelho).

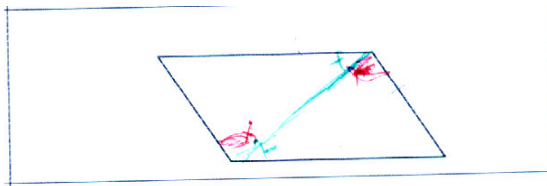


Figura 66: rascunho feito pela dupla D ao efetuar a prova A
Fonte: protocolos recolhidos

O recurso de pensar em dois triângulos congruentes pelo caso ALA formando um paralelogramo permitiu ao aluno verificar, nesse quadrilátero, o par de ângulos cuja congruência deveria determinar. Isso lhe foi solicitado junto à indicação de novo uso da carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*.

Na justificativa da congruência dos ângulos do segundo par (vermelho), o aluno indicou o par de lados paralelos horizontais (verificar figura 66) e recebeu como resposta que esses lados estavam ligados ao par de ângulos cuja congruência já havia sido provada (no esboço, em verde). Além disso, lhe foi perguntado se esse era o único par de lados paralelos. Mas ele não conseguiu responder. Pelo diálogo com pesquisador, se pode verificar que o aluno ainda tinha dificuldades nesse conceito (lados paralelos), pois, observando o esboço, fez a indicação de alguns elementos, mas nenhum era o par de lados paralelos solicitado (lados opostos aos ângulos indicados em verde).

Lembramos que a dupla D foi a que apresentou, na primeira atividade da pesquisa, deficiência quanto ao conceito de “paralelogramo” e podemos observar que todas as representações figurais, na tela do micro, no papel e na lousa (fechamento da seção com a participação de todos os alunos), além de todos os comentários feitos até o momento, envolvendo paralelogramos e

paralelismo não foram suficientes para a formação de tal conceito para essa dupla.

Como conclusão dessa seção, podemos relatar que as provas elaboradas com sucesso pelas duplas A e B, confirmaram o que estamos acostumados a observar durante a prática docente: um caminho que acabe sendo a repetição de um procedimento (nesse caso, o uso de ângulos correspondentes) oferece bem menos dificuldade do que um caminho que precise ser ainda construído (uso de congruência de triângulos).

De fato, na fase preliminar, havia uma atividade praticamente idêntica, sem expressar explicitamente que se tratava de uma prova de uma propriedade de um paralelogramo. Tal atividade ficou retida facilmente. Era livre aos alunos usarem esse caminho ou tentarem um novo.

A equipe C, embora não tenha concluído a prova, apresentou raciocínio com certo fundamento lógico mesmo em procedimentos errados. Além disso, chegou perto de concluir a sua demonstração.

A equipe D poderia, apesar da dificuldade inicial, avançar bem mais se não fosse a barreira conceitual.

Ao final dessa tarde, como ocorreu na seção anterior, o professor pesquisador, apresentou a todos, usando uma lousa, a produção de cada dupla e também a conclusão esperada para essa prova através da congruência de triângulos.

As duas primeiras reuniões para o desenvolvimento do jogo levaram mais tempo do que o previsto. O professor pesquisador gostaria de ter feito mais provas do que uma a cada seção. Finalmente, na terceira, puderam ser feitas as provas I e f. Ainda essas duas, foram sugeridas pelo pesquisador por se considerar que se estava, por enquanto, numa fase inicial do jogo e por serem tais provas menos trabalhosas. Faremos a análise de cada uma:

Análise a priori: Prova I

PROVA I: SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.

Nessa prova, acreditamos que os alunos não tenham dificuldades pois o caso de congruência LAL está “bem visível”. Para tanto, esperamos que indiquem a carta com redação sobre a congruência dos ângulos o.p.v. (VII) e, a seguir, a carta relativa ao caso LAL – *“Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes”*. com a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* – conclui-se que os lados opostos aos ângulos o.p.v., que também são os lados opostos do quadrilátero, são congruentes. A prova é análoga para o outro par de triângulos.

Vamos supor aqui um caminho mais longo em relação aos anteriores, porém nem tanto, uma vez que faz uso apenas das cartas com a redação das provas (estamos admitindo já provadas as necessárias) :

Partindo da hipótese usa-se a carta com a prova “J”: “SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS PARALELOS E CONGRUENTES”.

Logo após a carta com a prova “e”: “SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO CONVEXO COM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES” e finalmente a prova “H”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES”.

Análise a posteriori: Prova I

A dupla A executou a prova conforme o esperado embora recebesse ajuda do professor para provar o segundo par de lados opostos congruentes. O próprio professor não se incomodou muito com o auxílio, pois a dupla já tinha feito a prova do primeiro par.

A dupla B estava incompleta nesse dia. Fez-se necessária uma explicação da redação da prova, do que se deveria provar. As idéias iniciais podem ser observadas nas figuras 67 e 68:

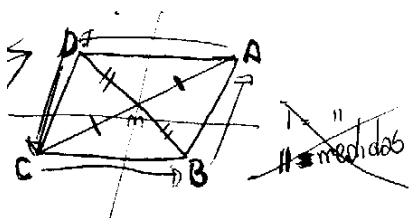


Figura 67: Representação figural da hipótese da prova I feito pela dupla B
Fonte: protocolos recolhidos

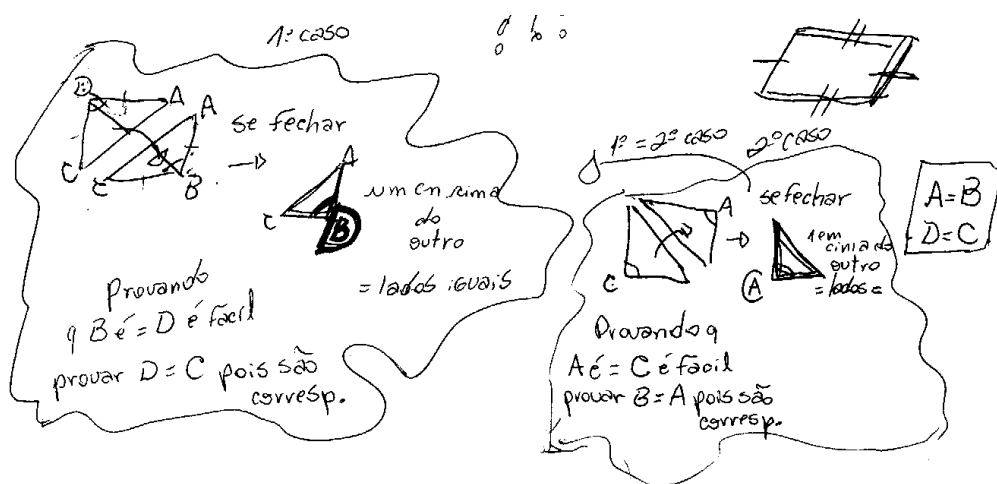


Figura 68: Esquemas da realização da prova I feitos pela dupla B
Fonte: protocolos recolhidos

Lembramos que alguns matemáticos, como Clairaut, usavam um enfoque empírico. O procedimento da dupla B se relaciona a tal enfoque, pois se usou uma idéia dinâmica embora com erros.

A dupla representou corretamente a hipótese, mas talvez tenha pensado num losango (nesse caso não se precisaria provar a tese), para que, por exemplo, o lado $\overline{DA}$ coincida com o lado $\overline{AB}$. A representação figural realmente mostra quatro lados congruentes embora a dupla, nesse dia, tenha apresentado dúvidas quanto às representações figurais. Também está supondo, apenas pelo seu esboço que os ângulos opostos irão se sobrepor “dobrando” a figura pela diagonal. Já é uma suposição que os ângulos opostos são congruentes (essa prova não foi solicitada). Outro erro, agora conceitual, foi admitir que os ângulos com vértice em C e D são correspondentes.

Após verificar a produção da dupla, o professor sugeriu, seguindo as idéias de Machado (1995) a representação da hipótese através de uma construção

das diagonais usando varetas coloridas. Com a observação delas sugeriu-se a procura de um caso de congruência de triângulos.

Após alguns minutos, o aluno apresentou o esquema da figura 69, identificando corretamente os dois pares de triângulos congruentes. O professor, solicitou a indicação de dois lados congruentes, um em cada triângulo. E a resposta foi $\overline{DM}$ e $\overline{AM}$ com a justificativa do rebatimento do triângulo DCM sobre o triângulo AMB.

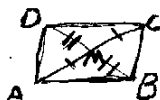


Figura 69: Esquema da realização da prova I feito pela dupla A
Fonte: protocolos recolhidos

Podemos verificar a não interpretação da própria representação figural, pois se os lados do triângulo foram indicados como não congruentes, não faria sentido pensar em tal rebatimento como se tais segmentos fossem simétricos. Isso revela também o não uso da hipótese que, praticamente, já conduziria ao caso LAL de congruência de triângulos.

Posteriormente, ao final, dessa rodada, usando as varetas, o pesquisador mostrou o erro na idéia de considerar que lados não congruentes iriam se sobrepor.

Pareceu haver, com a dupla C (nesse dia com apenas um representante), uma “contaminação pela visão” semelhante àquela relatada por Parzysz. A dupla, usando o esboço que pode ser visto na figura 70, “visualizava” informações que não estavam na hipótese cujos dados foram fornecidos pela representação figural do campo III do tabuleiro (apresentado em tamanho reduzido pela figura 51).

A primeira idéia foi usar o caso LLL de congruência de triângulos e pelo esboço, diretamente, temos apenas dois pares de lados congruentes.

Outra idéia foi o uso da carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes* e, num segundo momento, a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas*.

Verificamos que, pela hipótese, não temos lados paralelos (para usar a carta I) e nem ângulos alternos congruentes (para usarmos a carta II). O pesquisador solicitou que a dupla verificasse se essas informações estavam na hipótese. Após não conseguirem determinar um par de lados paralelos, partiram para o uso da carta II. Ao serem solicitados a indicarem ângulos alternos (como aqueles que aparecem no desenho da carta), mostraram os ângulos opostos pelo vértice de seu esboço. O esperado era que, com a leitura da representação figural da carta, percebessem que não havia, no esboço, ângulos alternos formados.

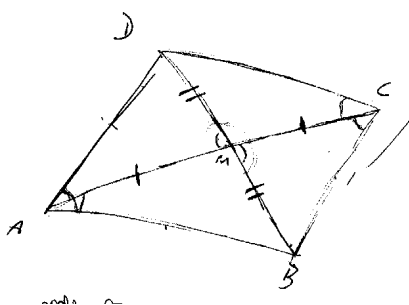


Figura 70: Esboço reproduzindo registro figural da hipótese da prova I, feito pela dupla C

Fonte: protocolos recolhidos

Além disso, pensou-se em usar a carta com o caso LAL de congruência de triângulos sendo dois lados congruentes $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$, segundo seu esboço (figura 70).

O professor, então resolveu indicar à dupla os dois pares de lados, que, com certeza, de acordo com seu esboço, eram congruentes: $\overline{DM}$ e $\overline{MB}$ além do par $\overline{AM}$ e $\overline{MC}$. A seguir, disse que já tinham “dois lados prontos” (para estabelecer o caso de congruência). A própria dupla afirmou faltar “só o ângulo” que foi indicado por “M” (na verdade, teria vértice no ponto M – vemos aí, uma expressão incompleta ao tentar indicar o ângulo).

Mesmo assim os triângulos congruentes (que deveriam ser congruentes) indicados foram ABD e BDC. Desta vez, os lados congruentes indicados foram $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ (que, mais uma vez, não se podia concluir pela hipótese).

A dupla, não conseguiu concluir a prova nessa rodada. Nesta análise a posteriori, percebemos que, talvez se o esboço da dupla se restringisse à representação exclusiva das diagonais as “informações indevidas” (que foram

tiradas, mas não estavam na hipótese) não influenciariam no desenvolvimento da prova.

A dupla D que, nessa seção, estava desfalcada, a partir do esboço do campo III do tabuleiro, conseguiu determinar que teríamos, pelo caso LAL, dois pares de triângulos congruentes. Sua dificuldade maior foi em estabelecer a correspondência entre os elementos congruentes em cada par. Como não foram utilizadas as cartas, embora se usassem as idéias nelas contidas, o pesquisador queria saber se estava claro aos alunos que a congruência entre os lados opostos era uma consequência da congruência entre os elementos correspondentes em cada triângulo.

Os estudantes não estavam conseguindo entender a solicitação: “localizar elementos pares de elementos congruentes em cada triângulo”. Por isso, o professor estabeleceu uma seqüência com eles indicando os lados que, por hipótese, já eram congruentes e solicitando o terceiro par. Embora a dupla tenha acertado, a indicação poderia ser influenciada pela “exclusão” afinal o par de lados solicitado era o único restante.

A prova foi considerada realizada, mas o fato de os alunos não conseguirem localizar ângulos respectivamente congruentes em cada par de triângulos (não eram necessários nessa prova, mas foram solicitados para verificar se os alunos faziam a associação) deixou o pesquisador pensativo: ainda não havia um domínio pleno da prova realizada.

Ao término da rodada, verificou-se que o estabelecimento de elementos respectivamente congruentes em cada par de triângulos congruentes era uma dificuldade geral. Procurou-se, na socialização das produções das equipes, orientar os alunos, usando canetas e varetas de modo a representar ângulos e lados opostos, segundo a idéia de Machado (1995), dizendo que ângulos opostos a lados respectivamente congruentes são, por sua vez, também congruentes.

A seguir as equipes começaram a prova f.

Análise a priori: Prova f

PROVA f: TODO QUADRILÁTERO EM QUE AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades em perceber o caso de triângulos congruentes dois a dois pelo caso LAL. Para isso bastaria indicar a carta VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*, pois os lados já são congruentes pela hipótese. A representação figural esperada seria:

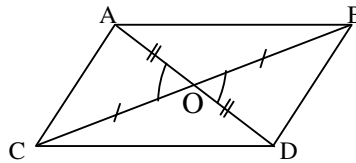


Figura 71: Primeiro Esboço esperado para a prova f
Fonte: Autoria própria

Agora resta usar a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* e anotar, na figura, todos os pares de ângulos congruentes. Se os alunos usarem letras para indicar as medidas genéricas de cada ângulo (logicamente letras iguais para medidas iguais) o novo esboço ficaria:

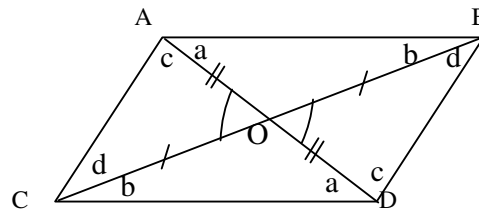


Figura 72: Esboço final esperado para a prova f
Fonte: Autoria própria

Todavia, acreditamos que os estudantes tenham dificuldade para indicar todas as medidas de ângulos conforme esboço acima. Muito provavelmente precisarão de uma intervenção a não ser que já tenham feita prova com recurso semelhante.

Mesmo atingindo essa etapa, não acreditamos ser muito evidente que saibam expressar sua idéia para finalizar a justificativa da tese, isto é, dirão que os ângulos opostos são congruentes, pois verão a mesma dupla de letras em cada ângulo do par de opostos considerados, mas enfrentarão obstáculos para

expressar isso, mesmo com a carta XIV - *Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$* lhe indicando isso.

A referida carta traz medidas genéricas e, mesmo que concordem com seu conteúdo, provavelmente não perceberão como pode encaixar-se na finalização da prova em andamento. Talvez uma intervenção possível seja comentar o conteúdo de cartas que trazem “linguagem algébrica” (cartas XIV, XVI e XVIII) antes de se iniciar a prova e, depois, oferecer duas ou as três para que os alunos selecionem qual traduz seu pensamento, esperando que indiquem a carta XIV.

Admitimos ainda que os alunos, partindo do esboço anterior (fig. 72), poderão provar que se trata de um paralelogramo (usando duas vezes a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas* ou com a carta c: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO"). Nesse caso, poderão proceder conforme já comentamos na prova A.

Caso já tenham provado as passagens “c” e “A”, a hipótese nos levaria a um paralelogramo e daí para a tese com as cartas “c”: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO" e “A”: "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES."

Análise a posteriori: Prova f

Nessa prova, confirmamos que, geralmente, constatamos pela prática em sala de aula: uma simples aula expositiva tem muito pouca eficiência. De fato, o pesquisador resolveu colocar algumas idéias como dicas e acabou, praticamente, fazendo quase toda a prova. Mesmo assim isso parece não ter causado grande influência no desempenho dos alunos.

Como se partia da mesma hipótese, foi dito aos alunos que poderiam usar, novamente, o caso LAL. Também foi exposta a dica de que os ângulos opostos do quadrilátero eram compostos de um par de ângulos adjacentes, um de cada

triângulo dentre dois dos quatro possíveis. Foi dito, ainda, que não se podia usar paralelismo pois não se sabia se os lados opostos eram paralelos.

A dupla A pensou em provar empiricamente o paralelismo dos lados opostos do quadrilátero: sendo num par de lados opostos admitidos congruentes, no outro par teremos segmentos paralelos. Era uma idéia intuitiva e o pesquisador resolveu aceitá-la embora, no início não lhe ficasse bem claro qual estratégia a dupla estaria usando para precisar provar o paralelismo dos lados.

Todavia, no lugar de esclarecer esse fato, percebeu que um caminho alternativo estava facilmente ao alcance da dupla. Podemos acompanhar a estratégia planejada através do tabuleiro (figura 51). A equipe podia contar com a carta I (pois já tinha feito essa prova) e podia, também, pela regra do jogo, sem novas justificativas passar do campo III – onde estava a hipótese inicial – para o campo II, isto é, se as diagonais se cruzam nos respectivos pontos médios, poderia concluir que os lados opostos eram congruentes.

Do campo II para o campo V a justificativa empírica estava sendo aceita, isto é, se os lados opostos são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Finalmente, a passagem do campo V para o campo I já estava justificada quando a equipe fez, em outra seção a prova A, isto é, num paralelogramo os ângulos opostos são congruentes.

Logicamente o professor não detalhou todo esse raciocínio, que se liga à teoria de Duval e Egret (1989) no sentido de “a conclusão de um passo ser utilizada como hipótese do passo seguinte”, mas apenas lembrou a dupla que podiam contar com a carta A (passagem do campo V para o campo I) e com a carta I (passagem do campo III para o campo II).

Embora precisassem da intervenção do pesquisador, conseguiram concluir a prova por esse caminho. Uma das intervenções foi em relação à intenção do uso de ângulos alternos congruentes. Talvez estivessem pensando em usar a carta II que levaria ao paralelismo. Chegaram a fazer indicação da carta I que necessitaria da condição de paralelismo. Diziam que se tinham provado que os lados opostos eram congruentes também tinham provado que os mesmos eram paralelos. O professor percebeu que faziam realmente a justificação empírica

que seria aceita. Conforme dica inicial do pesquisador, conseguiram “encaixar corretamente a carta A” no fechamento da prova.

A dupla C pensou em usar a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas*, apesar das colocações iniciais do pesquisador. Quando o mesmo solicitou que indicassem os ângulos que permitiram o uso de tal carta, a equipe, que usava o esboço de um quadrilátero com suas duas diagonais, indicou um par de ângulos alternos, mas não soube justificar o motivo de sua congruência.

O pesquisador sugeriu que usassem um caso de congruência (esperando que indicassem LAL), mas a escolha foi ALA cuja justificativa ficou incompleta. Em nova intervenção, após reforçar, usando os desenhos da própria carta IX (ALA) as condições para se estabelecer essa congruência, o professor sugeriu tentarem outro caso mas a equipe não conseguiu terminar a prova.

A dupla D, com o auxílio do pesquisador, partiu do caso LAL que já havia sido justificado na rodada anterior. Mas estava usando um esboço de um quadrilátero e suas diagonais sem todas as informações anotadas. Por esse motivo não estava conseguindo identificar os elementos respectivamente congruentes em cada par de triângulos. O professor interveio completando o registro figural e revisando seu significado. Após essa intervenção, a equipe indicou satisfatoriamente os lados respectivamente congruentes, mas ainda tinha dificuldade em indicar os ângulos.

Além disso, a dupla resolveu usar a carta II (que conclui sobre lados paralelos). Essa escolha seria um desvio do caminho direto para provar a tese. A justificativa para o uso dessa carta estava sendo dada pelo uso de ângulos alternos congruentes (usando uma das diagonais e um par de lados), mas, como ocorreu com a dupla C, não tinham sustentação para tal justificativa.

O caminho escolhido pelo pesquisador foi desenhar separadamente os pares de triângulos congruentes e, pintando da mesma cor ângulos respectivamente congruentes de um dos três pares, além de identificar um dos pares de lados congruentes, solicitar aos alunos que indicassem os demais elementos congruentes dois a dois.

Como, a partir dessa intervenção, a equipe conseguiu identificar corretamente os ângulos respectivamente congruentes, o pesquisador

relembrou-a da tese a ser provada indicando os pares de ângulos opostos e colocando a dica que “embora não tivessem, ainda, provado a congruência entre os ângulos opostos, já tinham provado a congruência de partes deles”.

A dupla conseguiu estender o raciocínio para o outro par de triângulos congruentes, inclusive indicando os elementos congruentes.

Ainda faltava concluir a idéia de que partes iguais, sendo somadas, resultam todos iguais. Mais precisamente, usando o esboço da equipe (fig. 73), por exemplo, para provar a congruência entre os ângulos $\widehat{DCB}$ e $\widehat{BAD}$, se diria que a medida de $\widehat{DCB}$ poderia ser expressa pela soma das medidas dos ângulos $\widehat{DCO}$ e $\widehat{OCB}$; a medida do ângulo $\widehat{BAD}$ poderia ser expressa pela soma das medidas dos ângulos $\widehat{BAO}$ e $\widehat{OAD}$. Como temos $\widehat{DCO} \equiv \widehat{BAO}$ e $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OAD}$, tais somas seriam iguais e, portanto, também as medidas dos ângulos opostos.

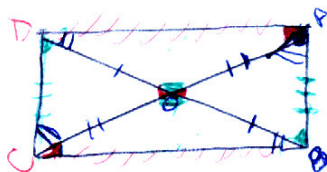


Figura 73: Rascunho da dupla D ao efetuar a prova f
Fonte: protocolos recolhidos

Para confirmar se a equipe conseguiria concluir a prova, entre as cartas com informações algébricas: XIV - Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$; XVIII - Se $A + B = A + C$ então $B = C$ e XVI - Se $A = B$ e se $C = D$, então $A + C = B + D$, foram separadas duas para que a equipe escolhesse aquela que corresponderia ao fechamento da prova. E a escolhida foi a carta XIV como o esperado.

Essa rodada não foi socializada, pois se estava no limite do tempo da seção.

Nas próximas seções deixou-se que cada dupla escolhesse a prova que iria realizar. A dupla D, na próxima seção, não compareceu.

Como o professor estava percebendo que o uso da linguagem natural formal estava dificultando a percepção das informações, sugeriu que usassem a linguagem simbólica e figural das cartas. Também lembrou que as equipes

poderiam usar provas já realizadas como recurso para abreviar alguns passos na estratégia planejada para a realização das novas provas.

A dupla B escolheu a prova H cuja análise a priori transcrevemos a seguir:

PROVA H: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.

A prova ideal seria: Indicando medidas iguais por letras iguais, fazer uma mudança para o quadro algébrico e com o auxílio da carta XII - *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus e a de um triângulo é igual a 180 graus* – escrever a equação $2a + 2b = 360$ de acordo com o esboço:

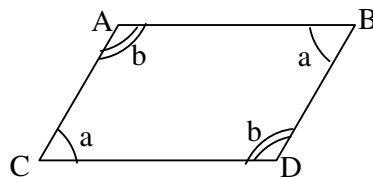


Figura 74: Esboço inicial (ideal) para o início da prova H
Fonte: Autoria própria

Na verdade, julgamos que os alunos não pensarão em usar medidas iguais de ângulos congruentes com letras como as do esboço. Além desse recurso de representação algébrica, acreditamos, que também não estariam pensando em trabalhar com somas de ângulos, o que dificultaria a escolha da carta XII como expomos acima.

Caso examinem várias cartas e essa seja escolhida ainda julgamos que terão dificuldades em aplicar o seu conteúdo. É possível, por exemplo, que concluam que “se a soma das quatro medidas dos ângulos é 360, então cada um deve ter 90° (supondo, sem justificativa para tal, que todos têm a mesma medida).

Talvez seja necessária uma intervenção sugerindo o uso da carta XIII - *A medida de um ângulo de “meia-volta” é 180 graus* – mas isso também não influenciaria muito se não estiverem pensando na álgebra (ainda que implicitamente).

A continuação da prova, na forma ideal, seria: usar a carta XV - *Podemos "prolongar" ou traçar lados de quadriláteros ou de triângulos* – de acordo com o esboço a seguir onde a medida do ângulo adjacente a $\hat{CDB}$ é indicada por “c”.

Com o uso da carta XIII - *A medida de um ângulo de "meia-volta" é 180 graus* – duas equações podem ser usadas (ou, pelo menos a idéia não formalizada delas): $2a + 2b = 360^\circ$ e $b + c = 180^\circ$.

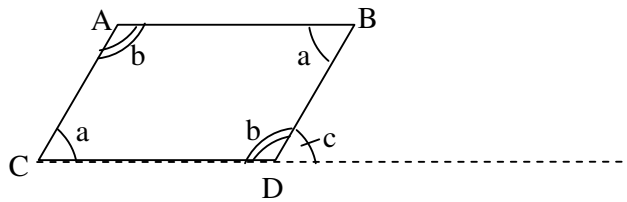


Figura 75: Esboço da seqüência da prova da prova H
Fonte: Autoria própria

Pelas duas equações se pode concluir que $a = c$. Nesse caso é possível o uso da carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas* – e concluir o paralelismo dos lados AB e CD.

Agora basta usar a carta IV - *Uso da diagonal menor* ou a carta V- *Uso da diagonal maior* – seguida da carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes* – (indicados no esboço seguinte com a medida “e”), da carta VI - *Uso de um lado comum a dois triângulos* – e, por fim, da carta XI - *Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes*.

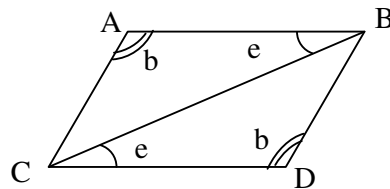


Figura 76: Esboço final esperado para a prova H
Fonte: Autoria própria

Sendo ACB e BCD triângulos congruentes, os lados correspondentes num e no outro também serão congruentes: $AC \equiv BD$ e $AB \equiv CD$. Isso pode ser

indicado pela carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes.*

Admitindo feitas as passagens necessárias um caminho poderia ser, pela passagem “a” sermos levados a um paralelogramo e daí, pela passagem “B” à tese.

Outro caminho possível: passagem “E”: "TODO QUADRILÁTERO CONVEXO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES" e passagem “g”: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES".

Vale observar que não cremos que os alunos, mesmo após fazer passagens como as supostas acima (“a” e “B” no primeiro caminho ou “E” e “g” no segundo), percebiam que poderão usá-las para “encurtar” outras provas a serem feitas, afinal, eles nunca trabalharam com provas. Está previsto apresentar a eles essa “dica”, dar alguns exemplos possíveis e deixar que verifiquem como podem aplicar a sugestão àquelas provas que já têm feitas e traçarem, assim, planos de caminhos possíveis estudando do que dispõem e verificando quais passagens lhes seria mais conveniente provar para atingir um objetivo.

Análise a posteriori – Prova H

A dupla B foi a única a escolher essa prova, nesse dia. Foi necessário auxílio do pesquisador para a interpretação da linguagem figural que expressava a hipótese e a tese.

Houve um fator de indução ao erro ligado à nossa parte histórica e também à contaminação do saber pela visão (Parzysz, 2001), pois todos os matemáticos abordados no capítulo dois usavam esboços de quadriláteros com lados paralelos assim como nossos alunos (na verdade, os matemáticos geralmente usavam os esboços quando partiam da hipótese “o quadrilátero é um paralelogramo”, mas não o trocavam por outro para provar a recíproca).

A dupla B já havia provado a passagem "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES." e estavam usando a recíproca sem prová-la. Interessante notar que, nos registros de seus

diálogos, percebemos que hesitaram um pouco: um deles até disse: “a ordem não é essa...”.

Por fim acabaram usando a recíproca e, a partir dela e do uso de uma diagonal, teriam ângulos alternos congruentes para usar o caso ALA de congruência de triângulos.

Após intervenção do pesquisador, resolveram manter a mesma estratégia após efetuarem a prova “a” que era justamente a recíproca da qual necessitavam. O pesquisador ainda ressaltou que deviam provar a ocorrência de pares de ângulos alternos congruentes para conseguir o paralelismo dos lados.

A idéia da dupla para conseguir tais ângulos foi boa, porém, novamente “contaminada” pelo esboço com lados paralelos. Os alunos mencionaram a congruência dos ângulos $\hat{e}$ e $\hat{e}$ de seu esboço (fig. 77).

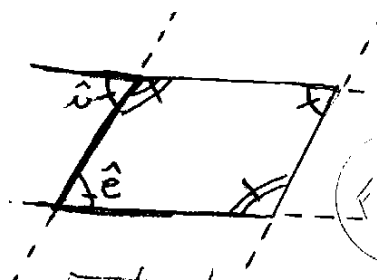


Figura 77: Esboço da dupla B para a prova H
Fonte: protocolos recolhidos

Como o professor disse que ainda não era possível saber se os ângulos indicados por $\hat{e}$ e $\hat{e}$ eram congruentes, a dupla trocou o esboço pelo apresentado na figura 78 usando um par de ângulos opostos pelo vértice.

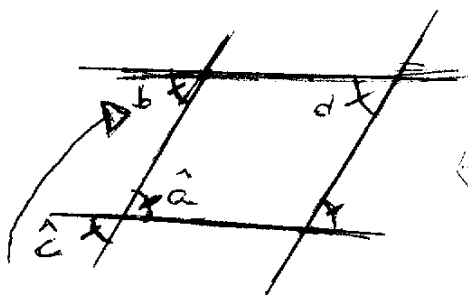


Figura 78: Esboço alternativo da dupla B para a prova H
Fonte: protocolos recolhidos

Portanto, em três vezes consecutivas, foi considerada a informação “lados paralelos” que acabou sendo introduzida indevidamente pelos esboços feitos. Os alunos, ao mudar de estratégia, acabavam voltando a considerar justamente aquilo que estava ocasionando o erro.

O professor tentou induzi-los a usar o caminho relatado em nossa análise a priori, mas a dupla preferiu mudar de prova: anunciaram que estariam trocando a prova H pela prova B (essa prova já havia sido feita na primeira seção, mas nenhuma dupla havia, nela, obtido sucesso).

Ressaltamos que a equipe B não estava presente nesse dia e, portanto, não participou da socialização da realização, em lousa, das etapas dessa prova.

Ainda observamos que, mesmo que a equipe estivesse presente, e fizesse, então, apenas uma reprodução do que haviam visto na primeira seção, julgamos que eles teriam aprendido a fazer tal prova.

Voltando à nossa parte histórica, podemos verificar que Legendre desenvolveu as demonstrações da mesma maneira que Euclides e Hadamard, por sua vez, apresentou deduções com poucas variações dos dois primeiros autores. Tais variações se deviam principalmente às alterações de algumas definições.

Ainda hoje, fazemos repetições das provas da mesma maneira que foram desenvolvidas através da história. Se considerarmos que, nessa situação, “aprendemos” a fazê-las, a dupla B também teria “aprendido” se repetisse os passos vistos na primeira seção.

Todavia, a dupla, mesmo sem participar da primeira seção, realizou muito bem a prova só necessitando de intervenção na conclusão final, relativa à carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*. Mesmo assim o pesquisador, pelo diálogo com a dupla, não conseguiu ter certeza se estavam com tal idéia intuitivamente e, apenas, não estavam conseguindo expressar-se. Os alunos não responderam diretamente o esperado (sobre a correspondência de lados e ângulos opostos) por isso foram usados triângulos de papel com os ângulos respectivamente congruentes pintados da mesma cor (segundo a teoria de Machado, 1995). O pesquisador também relatou a idéia da correspondência dos ângulos e lados sem o uso dos triângulos de papel.

Apesar do auxílio ao final da prova, essa dupla apresentou uma planilha (fig. 79) quase perfeita segundo as expectativas: tanto em relação às representações figurais correspondentes às cartas quanto à seqüência lógica.

Houve apenas um erro (por distração) na indicação de uma carta na penúltima linha: era VI e os alunos anotaram V, mas pensaram realmente na carta VI. Outro erro foi, na penúltima linha, apresentar a representação figural que expressava a tese antes do uso da carta XVII (de fato, antes de concluir que os lados opostos eram congruentes, deveria ser abordado que isso se devia à congruência dos triângulos).

A dupla A escolheu a prova D cuja análise a priori está a seguir:

PROVA D: TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.

Essa prova foi colocada, na verdade, porque, pelo modo como foi composto o tabuleiro, seria o “quinto lado do pentágono”. Todavia ela tem sua utilidade: verificar se o aluno percebe que parte da tese é automática (pela própria definição de paralelogramo, os dois pares de lados, citados na tese, serão paralelos).

Quanto à questão da congruência desses lados, seria interessante que os alunos já tivessem provado a passagem B: "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES".

Nesse caso, o “restante da tese” também fica, automaticamente, provado, mas, se os alunos ainda não puderem usar essa propriedade, poderão utilizar as mesmas estratégias usadas para provar a passagem B (já descritas).

Análise a posteriori: prova D

A dupla A, com a orientação do pesquisador, leu a simbologia “r//s” e “t//u” (no campo V). Responderam positivamente que se tratava de um paralelogramo. O pesquisador ainda reforçou a notação simbólica da tese (campo IV), além de observar que a própria hipótese já trazia uma parte da tese. Também sugeriu o uso de uma carta cuja hipótese trouxesse retas paralelas.

Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número da carta utilizada e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual. Aconselha-se anotar o que se sabe no primeiro desenho e "onde se quer chegar" no último desenho.

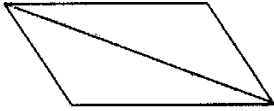
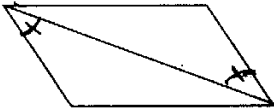
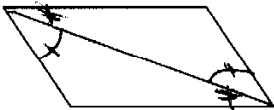
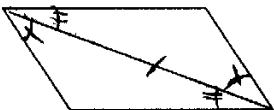
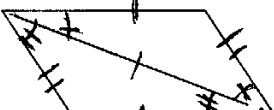
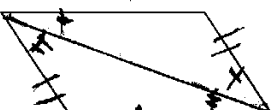
NÚMERO DA CARTA	DESENHOS
✓	
I	
I	
✓	
IX	
XVII	

Figura 79: Preenchimento da planilha carta-desenho pela dupla B (prova B)
Fonte: protocolos recolhidos

Um dos alunos sugeriu o uso da prova I "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES", pois já a tinham demonstrado. O pesquisador, porém, ressaltou que não estavam partindo dessa hipótese (diagonais se cruzando ao meio) e, partindo do campo V, só poderiam usar essa condição se tivessem já feita a prova C (como podemos ver no tabuleiro – fig. 51).

Podemos dizer que há certa lógica no fato de a dupla traçar as diagonais do paralelogramo na intenção de usar a prova I (já feita). Todavia, só o traçado, de fato, não garante que elas se interceptam nos respectivos pontos médios. Ao ouvir essa observação do professor, tentaram justificar dizendo que podiam usar o caso LAL. Ainda no diálogo com o pesquisador a dupla questionou se o fato de termos ângulos opostos pelo vértice implicaria em lados congruentes. Também questionou se num paralelogramo as diagonais não se cruzariam em seus pontos médios. O professor voltou a dizer que, para isso, precisariam ter feito a prova C.

A dupla resolveu trocar a prova “D” pela “h”. O pesquisador observou que se a equipe (que já havia feito as provas “A”, “I” e “f”) desenvolvesse a prova “i” nada mais precisaria fazer. (Vemos que, nesse caso fariam uma prova para valer por duas, pois, como se pode verificar no tabuleiro, ao fazer a prova “i” também se estava garantindo a prova “h” pelo caminho: “i” e “f”).

A equipe teve problemas ao seguir a sugestão do pesquisador porque estava considerando como hipótese a própria tese da prova a ser feita.

Novamente, a dupla A resolveu trocar da prova a ser feita. Desta vez pela indicada por “J” que acabou não sendo concluída.

A dupla C também escolheu a prova D e a realizou da maneira esperada, relatada na análise a priori, sem dificuldades. A planilha apresentada trazia tanto uma seqüência lógica (sem erros) quanto uma correta representação figural em correspondência às idéias usadas.

Logo após, a dupla decidiu efetuar a prova f (que não havia conseguido na seção anterior quando todas as equipes tentaram sua resolução).

Já relatamos a análise a priori dessa prova cuja hipótese traz um quadrilátero com diagonais se interceptando nos respectivos pontos médios e a tese traz um quadrilátero com ângulos opostos congruentes.

É importante observar que, em sua idéia inicial, a equipe partiu de lados paralelos que, com as diagonais, formavam ângulos alternos congruentes (redação da carta I). Após intervenção do pesquisador perceberam que a hipótese não trazia a informação do paralelismo dos lados. Então pensaram em ângulos alternos congruentes formados pelas diagonais e pelos lados garantindo que esses últimos eram paralelos (redação da carta II, recíproca da carta I).

De fato, a hipótese também não garantia que existiam ângulos alternos congruentes, ou seja, a dupla C acabou caindo num ciclo: “P implica Q” ou “Q implica P”, mas nem P e nem Q haviam ocorrido. Apesar do erro, houve certa lógica: já que não podiam usar “P implica Q” porque não havia, ainda, a ocorrência de P (lados paralelos), os alunos procuraram que P ocorresse através de “Q implica P” (se Q – ângulos alternos congruentes – estivesse provada, o raciocínio estaria correto).

O pesquisador sugeriu que atentassem para a representação figural do campo III do tabuleiro de onde poderiam verificar que era possível se formar quatro triângulos com alguns elementos já congruentes.

Após essa intervenção, a equipe não teve dificuldades em identificar o caso LAL de congruência e em estabelecer a seqüência de cartas: ângulos o.p.v. congruentes; LAL e a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*. O professor, porém, resolveu aprofundar a idéia perguntando quais eram os elementos congruentes e a dupla indicou os ângulos sendo auxiliada na indicação dos lados de acordo com o esboço da figura 80 (o par de triângulos congruentes considerado foi DMC e AMB):

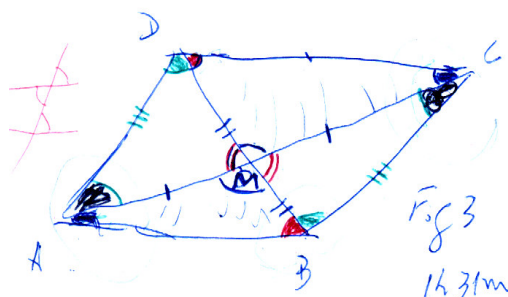


Figura 80: Esboço para finalização da prova f, feito pela dupla C
Fonte: protocolos recolhidos

Observamos que voltou a ocorrer um erro conceitual: a equipe, que já havia usado o conceito de ângulos correspondentes em outras atividades, parece sofrer um tipo de abalo nesse mesmo conceito, pois indica, como ângulos correspondentes, o par $\widehat{ACB}$ e $\widehat{CMB}$.

Querendo auxiliar a equipe a terminar a prova, o pesquisador chamou a atenção para a tese e os estudantes perceberam que teriam que trabalhar com

os ângulos opostos (inteiros), mas só estavam provando a congruência de ângulos que eram partes deles.

A congruência do par de triângulos DMA e CMB ainda não havia sido estabelecida. Os alunos a determinaram com a orientação do pesquisador que, a seguir, evidenciou os pares de elementos congruentes já verificados solicitando que a dupla determinasse os demais. Era intenção saber se conseguiriam verificar as relações: $\widehat{MDA} \equiv \widehat{MBC}$; $\widehat{DAM} \equiv \widehat{BCM}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e, de fato, eles conseguiram.

A expectativa do pesquisador era que ocorresse, a percepção inteligente (Alves & Brito, 2007): pela evidência das cores iguais para iguais medidas de ângulos e a dupla, facilmente, determinasse que os ângulos opostos eram congruentes porque eram formados pelas mesmas medidas (embora desconhecidas), mas como justificativa inicial, falaram em ângulos opostos pelo vértice.

Quando o pesquisador explicitou melhor o recurso das cores, a equipe disse que era possível, com essa idéia, provar a congruência entre os ângulos opostos, mas “não sabia como falar”. Por esse motivo, o professor pesquisador entregou-lhes as três cartas que envolviam linguagem algébrica (XIV, XVI e XVIII) solicitando que escolhessem uma delas (a que expressava a idéia que queriam expressar).

Num primeiro momento, a dupla pareceu animar-se a escolher a carta XIV (que era a esperada), mas depois hesitou. Um fator que acabou prejudicando a equipe pareceu ser a confusão entre as letras A, B e C usadas na redação das cartas e as letras usadas nos vértices do quadrilátero esboçado pela dupla.

O pesquisador, então, resolveu usar um outro esboço onde as letras E e F correspondiam respectivamente às medidas dos pares de ângulos $\widehat{DCM}$; $\widehat{MAB}$ e $\widehat{MCB}$; $\widehat{MAD}$ do esboço dos alunos, tentando induzir a equipe ao raciocínio esperado com as perguntas: “Para formar esse ângulo (*apontando para um dos opostos*) eu tenho que fazer o que com essas medidas?” e “Se eu somar essas aqui (*apontando para as medidas indicadas por F e E*) é o mesmo que somar essas duas (*apontando para o outro ângulo oposto, também dividido em duas medidas indicadas por E e F*)?”

Embora, praticamente o pesquisador tenha feito sozinho o final da prova, os alunos responderam “somar” à primeira pergunta e “sim” à segunda pergunta.

Destacamos que essa conclusão esperada não foi tão evidente para outras equipes que fizeram o mesmo tipo de prova em seções anteriores.

Procurou-se conduzir a penúltima seção com a mínima intervenção possível do pesquisador. Também foram aplicadas, na íntegra, as regras do jogo (não foram assim aplicadas antes devido às dificuldades encontradas inicialmente).

As duplas produziram suas provas, passaram as conclusões na planilha e a submeteram à apreciação de outra equipe. A dupla B não estava presente. O pesquisador atuou mais na apresentação das produções e apreciações feitas pelas equipes.

Apresentamos alguns resultados:

A dupla C escolheu a prova D: "TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES" (análise a priori já feita).

Simplesmente indicou a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*.

Na análise, feita pela dupla D, foi colocado, também, simplesmente, que a equipe “não provou nada”. De fato, não havia nem mesmo as figuras congruentes para que se pudesse usar a carta XVII. As duplas, em geral, pareciam ter dificuldades em perceber a hipótese e a tese durante as seções anteriores, mas a dupla D mostrou estar delas consciente em seu relatório que expressava que a equipe oponente além de não provar a congruência dos lados opostos, só verificou o paralelismo garantido pela própria hipótese.

Reciprocamente, a dupla C analisou a produção da dupla D que escolheu a prova J: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS PARALELOS E CONGRUENTES"

Vejamos a análise a priori:

Já relatamos anteriormente, como os alunos podem estabelecer a congruência, pelo caso LAL, entre os quatro triângulos com vértice no ponto médio das duas diagonais. Isso prova, pelos mesmos motivos já comentados, que temos dois lados opostos do quadrilátero congruentes. Quanto ao paralelismo, da mesma forma que mencionamos ao analisar passagem “c” pode ser usada a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos*

congruentes então essas duas retas são paralelas (lembrando que tais ângulos congruentes já foram justificados pela congruência dos quatro triângulos).

Outra variação para essa mesma prova, admitindo-se feitas aquelas indicadas por “I”, “h”, “a” e “D”, é estabelecida pelo caminho a seguir:

Partindo da hipótese, usa-se passagem “I”: “SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES”.

A seguir a passagem “h”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES”, a passagem “a”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO”, a passagem “D”: “TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES”.

A produção da dupla D:

Os lados do quadrilátero foram prolongados (não haveria necessidade). Usou-se o caso LAL de congruência de triângulos (a congruência dos lados era garantida pela hipótese, mas não foi indicado o uso da congruência dos ângulos opostos pelo vértice). Não foi indicada a congruência de elementos dos triângulos (carta XVII), como por exemplo, os lados (no caso, um par de lados opostos – parte da tese). Foi considerado o paralelismo do par de lados opostos.

A dupla C relatou que seria necessário provar a congruência dos dois pares de triângulos (na verdade, não seria – bastava um par) e também o não uso da carta XVII.

Podemos concluir que tivemos tanto uma prova quanto uma análise satisfatórias.

Na prova, não ocorreu, como nas primeiras seções, o uso de conclusões não fundamentadas ou de idéias desconexas. As idéias omitidas (indicação de ângulos o.p.v. e da congruência de elementos dos triângulos) poderiam, talvez, até ter sido consideradas pela dupla (embora não tivessem sido expressas).

A análise sugeriu a falta de uma indicação que não era necessária mas abrangeu satisfatoriamente o restante da prova.

A dupla A escolheu a prova h. Vejamos a análise a priori:

PROVA h: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.

Espera-se que os alunos não tenham muita dificuldade para realizar essa prova, mesmo do modo formal, se já tiverem realizado ou visto a realização de outras. Eles devem usar a carta cuja redação aborda uma das diagonais (IV ou V), o uso de um lado comum (VI) e já poderão indicar aquela sobre o caso LLL de congruência de triângulos (carta X).

Um pouco mais de dificuldade é esperada no momento de indicar os elementos (no caso, os ângulos) congruentes – carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*. Iremos aconselhá-los a indicar medidas iguais com letras iguais misturando a representação simbólica na representação figural conforme o esboço abaixo:

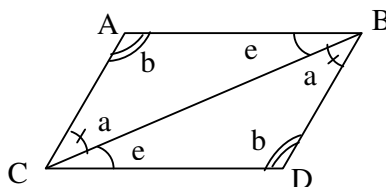


Figura 81: Esboço esperado na prova na prova h
Fonte: Autoria própria

Pelo esboço podemos verificar claramente a congruência dos ângulos $\widehat{CAB}$ e $\widehat{BDC}$ embora seja possível que alguns alunos, observando o esboço ainda não atentem para o que acabaram de provar devendo, talvez, ser convidados a “atentar mais para o esboço e verificar se já provaram a congruência de pelo menos um par de ângulos”.

A expectativa é que finalizem a prova usando a carta XIV - *Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$* para indicar que, os ângulos do outro par de opostos serão congruentes uma vez que, cada um deles, é formado por duas medidas desconhecidas porém respectivamente congruentes às duas do par oposto.

Como essa carta envolve álgebra e uma percepção mais refinada, prevemos que os estudantes precisarão de ajuda para indicá-la.

Admitindo feitas as passagens necessárias: sem “passar pelo paralelogramo” o aluno pode usar a passagem “G”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES” e a passagem “e”: “SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES”.

Análise a posteriori da prova h feita pela dupla A:

A dupla A usou uma conclusão não fundamentada. Após dividir o quadrilátero em dois triângulos, através da diagonal, relatou que os ângulos alternos eram congruentes (lembramos que os lados desse quadrilátero não necessariamente eram paralelos). Outros erros poderiam até mesmo ser resultantes de distração (como indicar “diagonal maior” e esboçar a menor ou afirmar que o caso de congruência de triângulos era LAAo em lugar de ALA – talvez tivessem pensado em ALA mas indicaram LAAo).

A dupla C fez uma análise satisfatória percebendo alguns erros como os que relatamos acima como “distração”, porém também não percebeu o uso da conclusão não fundamentada.

A própria dupla C que analisou a prova h também a tinha escolhido. Em seu desenvolvimento, que partiu da hipótese “lados opostos congruentes” (campo II do tabuleiro), foram usadas duas diagonais e, a seguir, foi indicada a prova “f” que a dupla já havia feito em seções anteriores.

Mais uma vez, tivemos uma conclusão não fundamentada, pois o simples fato de traçar as diagonais não garante que elas se interceptam nos respectivos pontos médios (essa seria a condição para se usar a prova “f”).

É importante verificar que há uma espécie de oscilação da percepção geral entre os participantes do jogo, pois a dupla A, que analisou a produção, percebeu a falha que ficou despercebida pela dupla C. Sem essa última conclusão indevida a prova poderia estar perfeita.

Outra questão a observar é que a dupla C não concluiu com a prova “f”, isto é, não perceberam que a tese de tal prova era a mesma na qual se pretendia chegar, ou seja, a prova h estava finalizada. A equipe continuou. Lançou a carta sobre o uso de ângulos opostos pelo vértice (que por si só não garantia algum caso de congruência) e a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos*

correspondentes também são congruentes. Se a equipe julgou necessário o uso da carta XVII, então deveria também ter lançado duas vezes a carta XIV - *Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$* para justificar a congruência dos ângulos opostos do quadrilátero a partir dos ângulos congruentes de cada triângulo.

A seguir faremos a análise a priori das provas que acabaram não sendo escolhidas pelas duplas, mas que poderiam ter sido elaboradas. Tal análise visa também auxiliar os docentes que quiserem usar o presente trabalho.

PROVA a: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO.

A prova pode ser feita considerando as medidas de cada par de ângulos opostos congruentes como a e b . Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° (essa é a redação da carta XII), temos que $2a + 2b = 360^\circ$ ou, $a + b = 180^\circ$. Considerando " c " a medida do ângulo adjacente e suplementar a um dos ângulos cuja medida é b , temos que $b + c = 180^\circ$. Isso é relativo à carta XIII - *A medida de um ângulo de "meia-volta" é 180 graus.* Através da carta XVIII - *Se $A + B = A + C$ então $B = C$,* o aluno mostra que está considerando $a = c$.

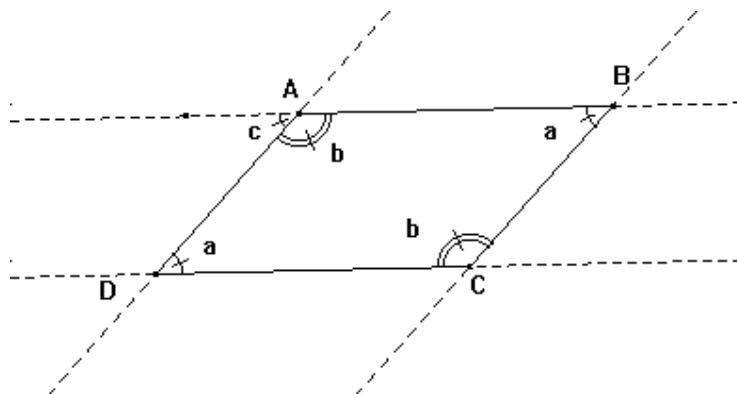


Figura 82: Esquema usado na prova para a "passagem a"
Fonte: Autoria própria

Se as medidas " a " e " c " são as mesmas, temos que os lados AB e DC são paralelos. Com a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são*

paralelas, o aluno indica isso. De forma análoga faz-se a prova para o outro par de lados paralelos.

É prevista grande dificuldade para que um aluno tenha a idéia dessa seqüência. De fato, algumas provas ao longo da história parecem ser singulares – “alguém teve uma idéia” e os demais “só a reproduziram”. Como vimos no capítulo dois, as demonstrações com as quais estamos trabalhando parecem ter sido organizadas por Euclides (cuja obra, em geral, também foi um compilação) e após isso foram, em muitos casos, apenas repetidas.

Todavia ficaremos satisfeitos se ajudarmos nossos alunos a “redescobrir a roda” com inteligência, isto é, pensamos que ao selecionarem as cartas estaremos propondo atividades que permitam o desenvolvimento de seu raciocínio (indutivo ou dedutivo) e da coerência lógica. Por isso também está prevista intervenção em seu trabalho para essa prova.

PROVA b: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO.

O aluno será orientado, previamente, a sempre anotar no espaço reservado para os esboços, o rascunho relativo à hipótese como o que está a seguir, lembrando que antes de começar a pesquisa estaremos, com eles, combinando e introduzindo a notação figural a ser usada:

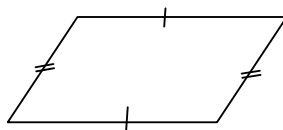


Figura 83: Esquema inicial esperado para a prova b
Fonte: Autoria própria

Espera-se também que, devido ao breve treinamento inicial, os alunos estejam atentos à carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas*, pois ela relaciona-se com a tese que devem provar.

Prevemos que, mesmo assim, pode haver dificuldade em chegarem num encadeamento de idéias: é necessário “garantir a hipótese da carta II para se usar sua tese”, ou seja, garantir que temos ângulos alternos congruentes.

Possivelmente lembrarão-se de uma transversal para formar tais ângulos, mas usarão, provavelmente, um dos lados do quadrilátero como sendo essa transversal e, nesse caso, poderão até considerar como ângulos alternos um par que não o seja (por exemplo, dois ângulos adjacentes a um dos lados).

De qualquer forma, o erro acima poderá ser rico para o debate entre as equipes quando for apresentado (momento de apresentação da prova à equipe oponente). Pode ser feita, nesse momento, uma intervenção pelo pesquisador questionando, por exemplo, se os ângulos tomados são mesmo alternos, e se são congruentes.

Poder-se-á deixar que equipes refaçam a prova. Se mesmo assim, não obtiverem sucesso, acreditamos que os estudantes não estarão ainda preparados para fazerem associações usando os elementos disponíveis. Todavia nossa intenção é, ainda, verificar se, mesmo com mais uma indicação, como a sugestão de usar uma das diagonais e um caso de congruência de triângulos, os alunos conseguem dar seqüência a essa prova com a indicação das cartas IV - *Uso da diagonal menor* (ou V - *Uso da diagonal maior*) e X- *Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes.*"

Sempre julgaremos necessário o uso da carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* – para confirmar que, se os triângulos são congruentes então cada ângulo de um deles é congruente ao correspondente no outro.

Admitimos que o uso da carta acima não garante plenamente que o aluno tenha compreendido a associação esperada. Estaremos prevendo algum formalismo por parte dele, mas não muito rigoroso. Julgamos que, completando a idéia expressa na carta, a apresentação do esquema abaixo indicando medidas iguais por letras iguais seja um indicativo confiável para concluir que foi estabelecida a relação por nós esperada.

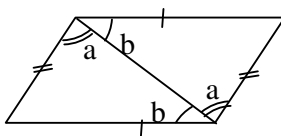


Figura 84: Esquema conclusivo previsto para a prova b
Fonte: Autoria própria

Quando a equipe utilizar, por último, a referida carta II, duas vezes, uma para cada par de lados, saberemos que ela compreendeu que há necessidade de, antes, garantir ângulos alternos congruentes (no esquema os pares de ângulos de medidas “a” e “b”) para depois concluir que as retas, em nosso, caso os lados do quadrilátero que estão sobre essas retas, são paralelas.

PROVA C: EM TODO PARALELOGRAMO AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.

Como nas outras provas, esperamos que a hipótese acima, leve o estudante a pensar na carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*. Um grande obstáculo, porém, será o aluno escolher um dos casos de congruência de triângulos visto que, da hipótese, podemos concluir sobre ângulos congruentes e, pensando nas diagonais, também lados congruentes mas sem chegar a um caso de congruência que, diretamente nos leve à tese. O melhor que os alunos poderiam chegar, num primeiro momento, seria resumido pelo esquema abaixo:

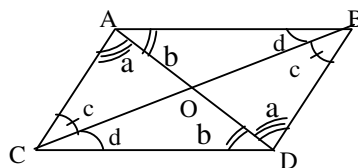


Figura 85: Possível esquema durante a prova C
Fonte: Autoria própria

Como vemos, se os alunos estabelecerem todas as relações acima, é possível concluir, por exemplo, que são congruentes os triângulos ADB e ACD ou os triângulos ACB e CDB (ambos pelos casos ALA, diretamente, ou LAAo, indiretamente), mas isso não nos leva à tese (diagonais se “cruzando” ao meio).

Ainda assim é possível que eles, a partir dessas congruências e, acrescentando outras idéias, cheguem a situações (também de congruência), como a dos triângulos ACO e BOD. Nesse caso, facilmente poderão confirmar que $\overline{AO} \equiv \overline{OD}$ e $\overline{CO} \equiv \overline{OB}$ concluindo a prova. As cartas a serem usadas, na ordem, seriam: IV - *Uso da diagonal menor*; V - *Uso da diagonal maior*;

quatro cartas I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*; carta IX - *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes então estes triângulos são congruentes*. Até aí o rascunho esperado seria:

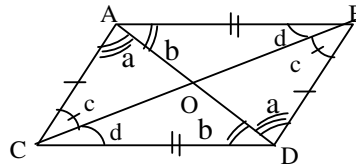


Figura 86: Possível esquema durante a seqüência da prova C
Fonte: Autoria própria

Com o esquema anterior e, preferencialmente, com algum registro escrito, saberemos que os alunos usaram o caso ALA para determinar a congruência dos triângulos ADB e ACD, com a conseqüente congruência dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Usando mais uma vez a carta IX (caso ALA), devem indicar que os triângulos ACO e BOD ou os triângulos AOB e OCD são congruentes. Com a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* – finalizam concluindo que se ACO e BOD (ou AOB e OCD) forem triângulos congruentes, então $\overline{AO} \equiv \overline{OD}$ e $\overline{CO} \equiv \overline{OB}$.

Ainda nessa passagem, podemos esperar uma atuação menos trabalhosa para a equipe, caso ela já tenha feito, por exemplo, a prova indicada na passagem B – EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES (Vale lembrar que propriedades já provadas podem ser usadas diretamente).

Nesse caso, espera-se que o esboço inicial seja:

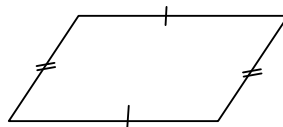


Figura 87: Esquema inicial durante a prova C, admitida feita a prova B
Fonte: Autoria própria

Como a carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes* – tem sua redação

ligando diretamente as hipóteses “ser um paralelogramo” e “retas paralelas interceptam uma transversal” cremos que os alunos não terão dificuldades em lembrar-se de registrar no esboço as informações como se segue:

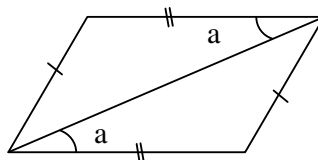


Figura 88: Segundo possível esquema durante a prova da prova C
Fonte: Autoria própria

Podemos verificar que nenhum caso de congruência, por enquanto, leva diretamente à tese.

Admitimos que talvez os alunos não pensem de imediato em usar a outra diagonal e/ou o outro par de ângulos alternos adjacentes àquela já usada. Se isso acontecer talvez não consigam concluir a prova ou, o que costuma ser próprio de alguns alunos, acrescentem deduções não justificadas ou não pertinentes à prova.

Nesse caso, depois de feita uma análise da produção desses alunos, pode-se indicar o uso de “triângulos com um vértice comum no interior da figura”, mais precisamente, esse vértice estaria no ponto médio de cada diagonal (e comum às duas).

Se os alunos pensarem em todas as informações que podem tirar com o uso da hipótese inicial (a figura é um paralelogramo), da carta B: "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES" e do uso das duas diagonais, poderemos ter o seguinte esboço no qual esperamos que essas informações estejam registradas:

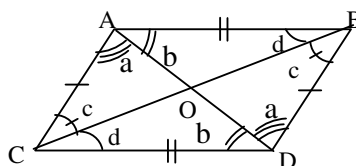


Figura 89: Esquema único para a prova C, admitindo feita a prova B
Fonte: Autoria própria

Observamos que se trata do mesmo esquema esperado para o final de nossa primeira suposição (quando não se admitia feita a passagem B), porém,

sem todas aquelas passagens e sim tirando de imediato a conclusão da congruência dos triângulos ACO e BOD.

Finalizando essa prova, poderíamos supor que os alunos já tivessem provado que "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES" – carta de passagem A – mas esse fato não reduziria a quantia de passos necessários para realizar a prova a um número menor do que aquele previsto sem o uso dessa informação.

É também possível que ainda os alunos tenham dificuldades em iniciar a prova como naquelas por nós já comentadas. A intervenção deverá ser semelhante àquela ali relatada bem como nossa classificação “ainda não se encontram preparados para fazer as associações necessárias numa prova”.

Lembramos que, no jogo, as duplas poderão escolher as provas a serem feitas. Não sabemos, exatamente por qual delas as equipes irão iniciar e podemos prever dificuldades a cada análise a seguir, mas, vamos nos abster de comentar possíveis intervenções a serem feitas pelo aplicador se elas forem semelhantes aos casos já analisados. Lembramos que prevemos alguma influência do pesquisador apenas nas primeiras provas a serem feitas pelos alunos.

PROVA c: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO."

Como já dissemos, os alunos serão, numa fase preparatória anterior à pesquisa propriamente dita, e, mesmo no início desta, treinados a registrar, de acordo com as idéias de Machado (1995) e Duval (1995), suas idéias num rascunho. Será o início da prova a ser feita.

Temos a expectativa de que o esboço abaixo os leve diretamente a pensar num caso de congruência: que será, sem muita dificuldade, o caso LAL.

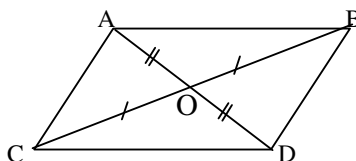


Figura 90: Esquema inicial para a prova c – apenas o registro da hipótese
Fonte: Autoria própria

Logicamente, o aluno deverá, antes, identificar a congruência dos ângulos $\hat{A}OC$ e $\hat{D}OB$. O fato de ângulos o.p.v. serem congruentes é bem intuitivo e não deve oferecer dificuldades.

Portanto, esperamos que a seqüência de cartas e, logicamente do raciocínio, seja: carta VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes* (vamos supor, os ângulos $\hat{A}OC$ e $\hat{D}OB$); carta VIII - *"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes"* (no caso, os triângulos AOC e DOB) e a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* – para indicar que, devido à congruência dos triângulos, os ângulos $\hat{C}AO$ e $\hat{B}DO$ são congruentes. Com a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas* – indicarão o paralelismo dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

O paralelismo dos outros dois lados terá prova análoga bastando usar as mesmas cartas para o outro par de triângulos.

Como a resposta dos alunos sempre nos surpreendem, podemos ter problemas com essa prova, porém acreditamos que seja uma das mais fáceis para eles.

PROVA d: SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO.

Esperamos que os estudantes apresentem o esboço abaixo com o registro figural - Duval, (1995) das hipóteses:

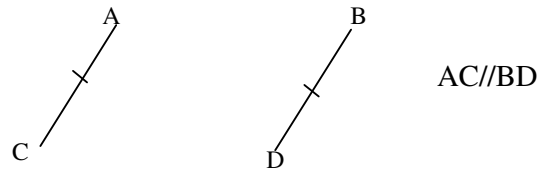


Figura 91 Esquema inicial para a prova d – apenas o registro da hipótese
Fonte: Autoria própria

Todavia, sem dúvida, aqui haverá um problema: a equipe, deverá, no esboço inicial, indicar apenas dois segmentos congruentes e paralelos e não esboçar um quadrilátero. A idéia é não fazer intervenção, principalmente se a equipe não estiver em sua primeira prova.

Como eles serão treinados a não usar elementos que não estejam garantidos (isto é, já provados ou presentes na hipótese), espera-se que percebam que não é conveniente usar o esboço do quadrilátero da primeira linha da planilha “carta-desenho” (fig. 48).

Caso os alunos tenham utilizado elementos alheios à hipótese, no momento de as duas equipes apresentarem suas idéias, isso será colocado para eles que poderão reformular suas idéias na prova.

Acreditamos que o fato de não se começar com um esboço de quadrilátero acabe desviando a atenção do uso de um segmento ligando os pontos A e D (ou C e B). Esse segmento seria uma das diagonais, se os pontos A, B, C e D já fossem vértices de um quadrilátero.

O uso das cartas: I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*; XV – *Podemos “prolongar” ou traçar lados de paralelogramos ou de triângulos*; VI – *Uso de um lado comum a dois triângulos* e da carta VIII - *“Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes”* (no caso, os triângulos DBC e ACB abaixo) deve associar-se

ao esboço:

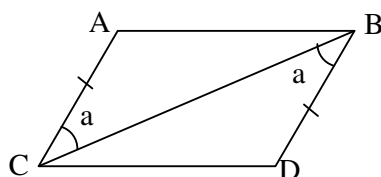


Figura 92: Esboço intermediário durante a prova da prova d
Fonte: Autoria própria

Pela definição de paralelogramo usada, basta provar que os lados AB e CD são paralelos. Com a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*, supõe-se que os alunos indiquem a congruência dos ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{DCB}$.

Finalmente, com o uso da carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas*, eles poderão concluir a prova.

Como esperamos que os esboços completem as idéias expressas através das cartas, o registro final deverá ser:

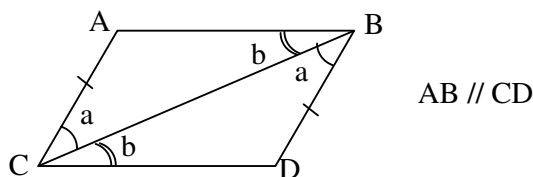


Figura 93: Esboço final para a prova d
Fonte: Autoria própria

A partir das próximas provas, a análise a priori tornar-se-ia um tanto repetitiva ou então muito mais breve.

Se as equipes já tiverem feito as provas comentadas até o momento poderão usar, as cartas que trazem a redação de propriedades dos paralelogramos (poderão ser usadas sem precisar ser novamente justificadas).

Caso os alunos não tenham feito todas as passagens anteriores, terão que conduzir o raciocínio à procura de um novo procedimento.

PROVA E: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.

Não esperamos que os alunos, mesmo após ter realizado algumas provas, consigam iniciar essa com sucesso. Não é possível, de início, usar dois triângulos congruentes. Acreditamos até que acabem usando algum caso de congruência sem garantir as condições para isso. Por exemplo: usar um ângulo oposto congruente, um lado comum congruente (justificados) e supor congruente um terceiro elemento – lado ou ângulo – sem justificar essa congruência.

Cremos que pensem em dividir o quadrilátero em dois triângulos usando a diagonal. Todavia, mesmo procurando “dicas” nas cartas, talvez não pensem, por exemplo, em “abandonar um pouco a geometria”, utilizar a álgebra e a carta XII - *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus e a de um triângulo é igual a 180 graus* - a fim de verificar a congruência, digamos, entre os ângulos cuja medida está indicada por “b” e “c” (fig. 94) e, assim, provar o paralelismo entre dois lados.

Vejamos:

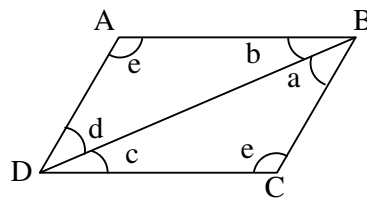


Figura 94: Possível esboço inicial para a prova E
Fonte: Autoria própria

Espera-se o uso da carta IV - *Uso da diagonal menor-* ou da carta V- *Uso da diagonal maior* (que está mais adequada ao esboço feito) a fim de dividir o quadrilátero em dois triângulos. Pela hipótese, sabemos que $a + b = c + d$ e que os outros dois ângulos também são congruentes (de medida e).

Usando a referida carta XII, temos que $a + c + e = b + e + d = 180^\circ$ ou, melhor, $a + c = b + d$ que, associada num sistema de equações à informação

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a + c = b + d \end{cases}$$

inicial nos permite concluir, após subtração membro a membro, que $b - c = c - b$, ou ainda que $b = c$.

A igualdade das medidas b e c nos permite usar a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas* – e assim conclui-se que há um par de lados paralelos (para seguir, rigorosamente, as posições do esboço no tabuleiro, o ideal seria usar a diagonal menor).

Quanto à congruência desses lados, se os alunos observarem as informações já obtidas, poderão usar a carta XI - *Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes* – para mostrar que perceberam a congruência dos triângulos DBA e BDC.

Para indicar que, se os triângulos são congruentes, então os lados AB e DC também o serão, basta que usem a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*.

Vamos considerar, agora, que alunos já tenham elaborado algumas provas.

Basta que os alunos provem que tal quadrilátero é um paralelogramo com a carta “a”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO”.

Sendo um paralelogramo, verifica-se a tese com o uso da carta “D”: “TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES”

PROVA e: SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES.

O início dessa prova e o esboço inicial são os mesmos por nós previstos na análise da prova d.

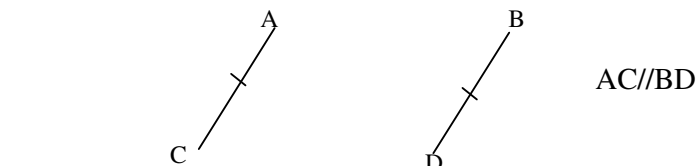


Figura 95: Esquema inicial para a prova e – apenas o registro da hipótese
Fonte: Autoria própria

Ao seguir o mesmo raciocínio já exposto (prova d), as equipes podem concluir que os triângulos formados DBC e ABD serão congruentes.

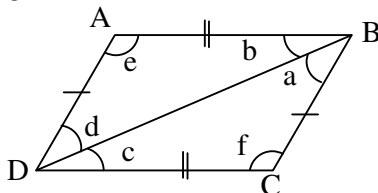


Figura 96: Esboço final para a prova e
Fonte: Autoria própria

O que muda é a conclusão final: a partir da congruência dos triângulos, teremos $a = d$, $b = c$, $e = f$. Como as medidas dos ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{CBA}$ são compostas de duas outras, há uma carta para confirmar a congruência destes.

A carta XIV - Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$ – vem reforçar algo que, apesar de ser intuitivo para o aluno, não nos dá certeza de estar implícito em seu raciocínio.

Esperamos também que possam ser usadas propriedades já provadas. Vamos, novamente “passar pelo paralelogramo”. Com a carta “d”: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO" verificamos que se trata de um paralelogramo.

Se é paralelogramo, então tem ângulos opostos congruentes. É o que diz a carta “A”: "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES."

PROVA F: TODO QUARILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM SUAS DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.

Caso os alunos não tenham provado ainda outras propriedades, poderiam partir das mesmas idéias já analisadas na prova E:

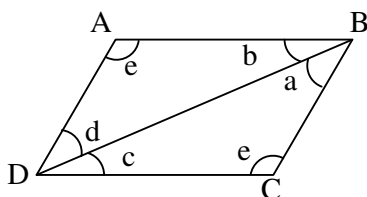


Figura 97: Possível esboço inicial para a prova F
Fonte: Autoria própria

Em tais idéias e procedimentos chegava-se à conclusão de que as medidas b e c (fig. 97) eram iguais, os triângulos DBA e BDC eram congruentes pelo caso LAAo e os elementos correspondentes em cada triângulo eram também congruentes.

Nesse ponto, o aluno pode considerar o esboço a seguir onde são registradas as informações até aqui justificadas, o uso da outra diagonal (carta IV) e também a congruência de ângulos o.p.v. que ele poderá indicar com a carta VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*.

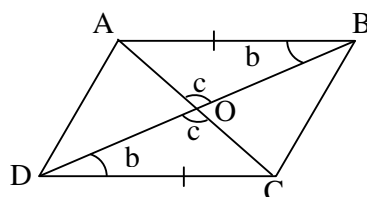


Figura 98: Esboço final previsto para a prova F
Fonte: Autoria própria

Com a carta XI - *Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes* – o aluno indica a congruência dos triângulos ABO e DOC.

Com a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*, o aluno finaliza a prova concluindo que $AO \equiv OC$ (dois lados opostos ao ângulo de medida b) e $DO \equiv OB$.

Supondo já provadas algumas propriedades poderíamos ter que a hipótese nos leva a um paralelogramo e, se é paralelogramo, então tem diagonais interceptando-se nos respectivos pontos médios.

As cartas usadas: “a”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO” e “C”: “EM TODO PARALELOGRAMO AS DIAGONAIS INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS”

PROVA G: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES.

É bem possível que os alunos não percebam que a hipótese já traz em si parte da tese a ser provada. Esperamos que pelo menos uma das equipes

possa perceber isso. Talvez seja necessária uma pergunta sobre isso, ou melhor, antes de se iniciar a secção onde essa prova poderá ocorrer, fazer uma observação a respeito: “poderemos ter algumas provas onde a hipótese já garante parte do que queremos provar”.

De fato não encontramos, em geral, uma prova desse tipo nos livros mas ela nos será útil para averiguar a percepção de nossos alunos. Nada os atrapalhará também, caso provem além do paralelismo, algo que já estaria provado.

Quanto à parte da tese que fala sobre o quadrilátero ter um par de lados paralelos (vamos supor que tenham percebido que não é necessário provar que há dois lados opostos congruentes pois a hipótese já garante isso), se os alunos já tiverem efetuado algumas provas e observado as intervenções relativas aos seus erros (caso tenham ocorrido), esperamos que indiquem uma das cartas que levam ao paralelismo.

A questão é que há um caminho a percorrer: primeiro temos que garantir a congruência de ângulos alternos através da congruência de triângulos. Não há, praticamente variações mais simples dessa prova (ao longo da história os tipos de prova não costumam variar). Como já mencionamos, se os alunos já tiverem tido contato com alguns tipos de provas (mesmo nessa pesquisa) poderão ter visto como são algumas dessas invariantes. Então, espera-se que para atingir uma prova mais formal, utilizem a carta V- *Uso da diagonal maior* ou a carta IV - *Uso da diagonal menor*, a carta VI - *Uso de um lado comum a dois triângulos* a fim de garantir o uso da carta X- *Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes.* O esboço esperado até aí seria:

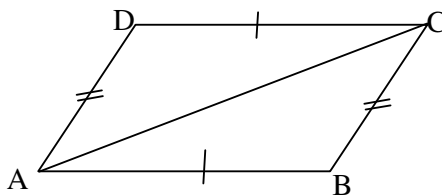


Figura 99: Esboço esperado na seqüência da prova G
Fonte: Autoria própria

Uma carta que pode ser esquecida embora implicitamente os alunos possam dela ter consciência, é a indicada por XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes.* Com ela o esboço

passaria para a forma seguinte:

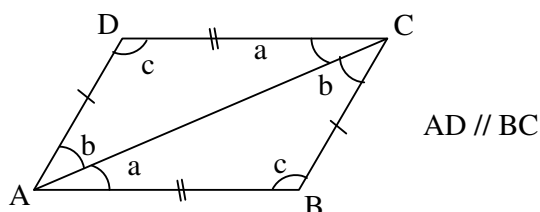


Figura 100 Esboço finalizando a seqüência da prova G
Fonte: Autoria própria

Se os alunos utilizarem a carta II - *Se duas retas coplanares e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são paralelas*, terão provado o paralelismo entre os lados AD e BC.

Caso não tivessem percebido que a congruência dos mesmos lados já estivesse garantida na hipótese, espera-se que ao observar o esboço feito (um “risquinho” no lado AD e outro no lado BC) concluam que toda a passagem G está concluída.

Não podemos deixar de observar que, mesmo após apreciar alguns desenvolvimentos de provas teóricas, os alunos podem cair em erros como o de contar com lados paralelos sem que isso esteja assegurado pela hipótese ou por uma prévia dedução.

De outra maneira, admitindo-se feitas as provas necessárias, a hipótese nos leva a um paralelogramo e daí para a tese com as cartas “b”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO” e “D” ; “TODO PARALELOGRAMO TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES” (logicamente já estando provadas tais passagens).

PROVA g: SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SÃO LADOS DE UM QUADRILÁTERO COM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES.

Dependendo da observação de algumas provas teóricas os alunos podem partir para um caminho mais empírico ou, se tiverem aprendido bem a estrutura que pode ser formada com as proposições das cartas, usar aquelas de indicação XV - *Podemos “prolongar” ou traçar lados de quadriláteros ou de*

triângulos. Após, a carta usada seria V- *Uso da diagonal maior* ou IV - *Uso da diagonal menor*. O esboço correspondente seria:

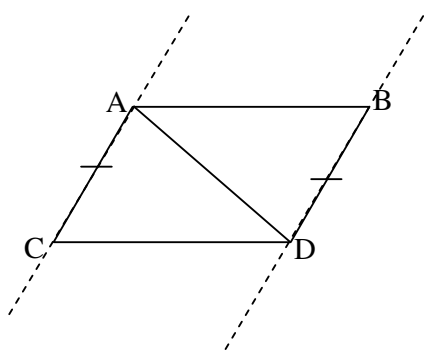


Figura 101: Esboço esperado na sequência da prova g
Fonte: Autoria própria

Como os lados AC e BD são, por hipótese, paralelos, então, com a carta I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes*, os alunos poderão fazer o esboço a seguir e, assim, com o uso da carta VI- *Uso de um lado comum a dois triângulos* terem condições de usar a carta VIII - *"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes"* e assim justificar a congruência dos triângulos ADC e BDA.

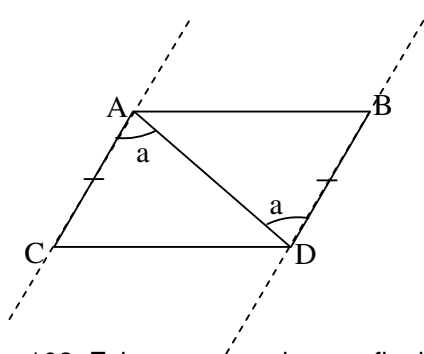


Figura 102: Esboço esperado para finalizar a prova g
Fonte: Autoria própria

Com o uso da carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* os alunos podem justificar a congruência dos lados AB e CD. Uma vez que a congruência dos lados AC e BD já era garantida pela hipótese (ou pela própria observação do esboço feito), a prova está concluída.

Por outro lado, admitidas feitas as provas necessárias, a hipótese nos leva a um paralelogramo e daí para a tese com as cartas “d”: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO" e “B” "EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES".

Logicamente, se tivessem sido feitas outras passagens, teríamos outras opções como a de não passar pela afirmação do quadrilátero ser um paralelogramo.

PROVA i: TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.

Um caminho possível, embora acreditemos que os alunos não desenvolvam tão facilmente a seqüência completa do raciocínio mesmo após elaborar ou apreciar algumas provas, seria o uso da carta IV - *Uso da diagonal menor*, da carta VI - *Uso de um lado comum a dois triângulos*, da carta X- *Se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então eles são congruentes* – e da carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*. O esboço ficaria como se segue:

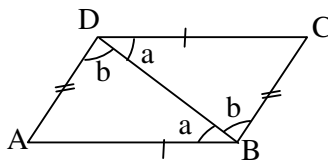


Figura 103: Esboço esperado durante a prova da prova i
Fonte: Autoria própria

Então, com a carta V- *Uso da diagonal maior* , e da carta VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*, já é possível usar, para o par de triângulos DCM e AMB (fig. 104) ou para o par ADM e BMC, a carta XI - *Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes*.

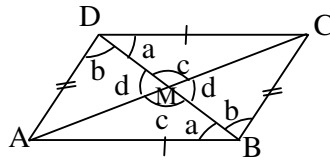


Figura 104: Esboço final para a prova da prova i
Fonte: Autoria própria

O fechamento da prova, isto é, a justificativa de que o segmento AM é congruente ao segmento MC e de que os segmentos DM e MB também são congruentes, deve ser indicada pela carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*.

Um outro modo de fazer a prova seria a partir do primeiro esboço (fig. 103), traçar a diagonal maior chegando, pelo caso LLL de congruência dos triângulos ADC e CBA, à congruência dos ângulos $D\hat{C}A$ e $B\hat{A}C$.

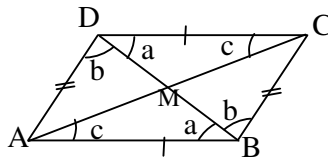


Figura 105: Esboço final para a prova da prova i
Fonte: Autoria própria

Com a carta IX - *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes então estes triângulos são congruentes* – se indica a congruência entre os triângulos DCM e AMB e com a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* – se indica que temos $DM \equiv MB$ e $AM \equiv MC$.

No jogo, não obrigatoriamente, a equipe deve seguir a ordem alfabética das letras que identificam as provas. Digamos que já tenham sido feitas as provas “G” e “j” e verifiquemos como ligam a hipótese à tese:

Carta G: "TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM UM PAR DE LADOS PARALELOS E CONGRUENTES"
e carta “j”: "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E

CONGRUENTES ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS QUE SE INTERCEPTAM NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS"

PROVA j: SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES ENTÃO SUAS EXTREMIDADES DETERMINAM SEGMENTOS QUE SE INTERCEPTAM NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS.

Esperamos que os alunos, se essa não for uma das primeiras provas que estiverem realizando, poderão ter um traçado inicial da seqüência da prova, mas precisarão de ajuda.

A forma completa seria usar as cartas: XV - *Podemos "prolongar" ou traçar lados de quadriláteros ou de triângulos*; IV - *Uso da diagonal menor*, V- *Uso da diagonal maior*; VII- *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*; I- *Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes* e XI - *Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes*.

O esboço ficaria assim:

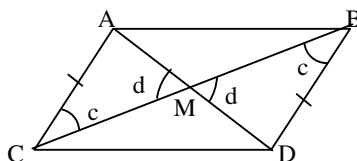


Figura 106: Esboço final para a prova j
Fonte: Autoria própria

Conclui-se a prova, indicando-se, com a carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes* - que, devido à congruência dos triângulos AMC e DMB (fig. 106), os segmentos CM e MB são congruentes bem como os segmentos AM e MD.

Acreditamos que essas cartas podem também ser usadas independentemente do jogo. Podem constituir um exercício do tipo seqüência lógica aplicada à geometria.

Para finalizar, pensemos num caminho bem extenso para a passagem j. Não é provável que as equipes o utilizem afinal, após feitas algumas provas, a forma como o tabuleiro foi organizado permite a descoberta de um caminho mais curto. Elaboramos a “trajetória” a seguir para evitar repetições das análises já feitas e como uma sugestão de uso das cartas num jogo de encadeamento de raciocínio.

Pensemos, admitidas já provadas, nas passagens: “d”: “SE DOIS SEGMENTOS DE RETA SÃO PARALELOS E CONGRUENTES, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO”; “A”: “EM TODO PARALELOGRAMO DOIS ÂNGULOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES”; “H”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES” e, finalmente, “I”: “TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM DIAGONAIS INTERCEPTANDO-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS”.

As atividades, dessa forma propostas (o jogo), abrem, é verdade, um leque bem amplo de possibilidades, o que, inclusive, dificulta uma análise a priori muito detalhada. Em compensação há uma riqueza de variações de provas que podem ser feitas.

Como, a princípio, estamos prevendo a seqüência elaboração - análise-intervenção - reelaboração por parte do pesquisador e das equipes, nos será útil a variedade de provas para que os estudantes possam ter, nas primeiras a serem feitas, a participação numa seqüência didática que os introduza no universo das provas e argumentações e, nas demais, uma avaliação das habilidades atingidas. Por esse motivo, a intervenção do pesquisador é prevista apenas nas primeiras seções (a referida “seqüência didática”) ao passo que, nas últimas, o material a ser recolhido trará as conclusões dos alunos sem a influência do pesquisador visando verificar o que puderam produzir sem ajuda.

3.5.2.4 - Síntese das observações relativas ao bloco II

Uma das ocorrências mais freqüentes foi o estabelecimento de conclusões sem as condições para isso. Esse fato esteve, várias vezes, ligado a outro, também freqüente: erro conceitual. Tal erro se associa a outro fato: alguns conceitos que, num dado momento, foram usados de

maneira incorreta, também foram aplicados corretamente em seções anteriores. Era como se o conceito, usado corretamente em provas imediatas sofresse um “abalo” ao ser inserido, numa prova mais extensa, como um dos vários passos necessários.

Um caso específico de uso de conclusões não fundamentadas foi um tipo de ciclo: hipótese-tese. Os alunos tinham duas cartas com proposições recíprocas: $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$; mas, naquela etapa da prova, nem A e nem B estavam ainda fundamentadas. Quando usaram a primeira implicação ($A \Rightarrow B$) e receberam intervenção do pesquisador que lhes alertou que não tinham ainda condições de usar a hipótese A, não hesitaram em usar a outra carta que lhes estava em mãos: $B \Rightarrow A$, afinal era o modo “mais direto” de fundamentar a hipótese A (nem se lembraram de verificar se já tinham fundamentado B).

Algumas provas apresentaram elementos desconexos: foram colocados como parte da prova, mas poderiam ser perfeitamente retirados, pois não se constituíam em vínculo de uma etapa à seguinte. Possivelmente os alunos, ao pensar em uma idéia, a acrescentavam à seqüência dos passos da prova. Ao abandonar tal idéia, porém, não a retiravam.

Outro fator que prejudicou um bom desenvolvimento em algumas provas estava ligado à leitura e interpretação: dificuldades em entender a redação das cartas que traziam as informações em língua natural formal (a linguagem com o rigor dos textos de geometria); dificuldades em perceber a hipótese; dificuldades em comparar a representação figural de uma carta com a representação figural do esboço com o qual se estava trabalhando.

A percepção também sofreu influência da representação figural: mesmos tipos de elementos puderam ser percebidos numa posição mas não em outra.

A congruência entre triângulos foi a principal base para a realização das provas do jogo. Todavia os alunos tiveram alguma dificuldade em localizar elementos respectivamente congruentes em cada triângulo.

Houve também a ocorrência do “desvio da meta”: os alunos iniciaram uma prova tentando verificar um fato e a concluíram provando outro.

Uma das equipes, após provar uma das propriedades, usou sua recíproca como se já estivesse também provada. Além disso, de modo semelhante às que trabalharam com Parzys (2001), tal equipe sofreu a influência da “contaminação pela visão” ocasionada por seu esboço. Tal contaminação também ocorreu com outra equipe que acabou usando informação que não estava fundamentada pela hipótese.

Tivemos também alguns progressos: provas realizadas completamente e provas incompletas, mas com seqüência lógica, pelo menos razoável até o ponto onde foram feitas.

Algumas dessas provas podem ter tido influência de atividades anteriores que, praticamente, traziam todo o raciocínio necessário, mas, como relatamos em nossa análise a posteriori, o capítulo que traz a parte histórica nos permite concluir que, hoje, quem sabe desenvolver uma prova, provavelmente faz apenas uma repetição dos passos traçados por Euclides.

Alguns dos alunos que participaram da pesquisa puderam obter provas com raciocínio próprio e isso é muito positivo se considerarmos que eles não estavam acostumados a trabalhar com demonstrações e que tal desempenho não tem sido exigido para o ingresso no magistério paulista (de acordo com os últimos concursos).

Fugindo parcialmente das regras do jogo, autorizamos algumas equipes a justificar parte de seu raciocínio de forma empírica. Mas a seqüência lógica foi mantida, embora precisasse da intervenção do pesquisador.

Em outras ocasiões, as duplas não tiveram dificuldade em compreender ordem trocada de cartas o que representa um progresso na formação de uma habilidade para se estabelecer a competência de se trabalhar com procedimentos ligados à lógica.

Na penúltima seção o professor pesquisador tentou dinamizar melhor algumas estratégias como solicitar que às duplas prestassem mais atenção às representações figurais de modo a não caírem em erros conceituais ou quebrarem a seqüência lógica em seu raciocínio. As duplas, na última seção, relataram não ter seguido tais conselhos na seção anterior.

Por isso foi planejada uma nova versão de protocolo (anexo 6), que chegou a ser usada, em casa, por alguns alunos ainda após o encerramento das seções de pesquisa (os resultados não variaram muito).

CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 – SÍNTESE DO TRABALHO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A finalidade deste capítulo é expor uma síntese do trabalho realizado com suas conclusões, respondendo à nossa questão de pesquisa cujo objeto é o estudo do processo de argumentação e prova aplicado a alunos da última série do Ensino fundamental e da primeira série do Ensino Médio. Tal estudo está inserido num projeto maior denominado AprovaME que culminará com a realização de 28 dissertações envolvendo essa temática (argumentação e prova).

Para contribuir com o estudo desse processo, foi concebida uma seqüência de atividades que utiliza elementos da engenharia didática de Michèle Artigue (1996) – análise a priori e análise a posteriori – e que se fundamenta, inclusive para a análise de resultados, nas idéias de Parzysz (2001), Machado (1995), Duval (1995) e de Duval & Egret (1989).

O estudo do objeto matemático “paralelogramo” se apoiou em fragmentos extraídos da história da matemática (Euclides, Legendre, Clairaut e Hadamard).

Para verificar aspectos relacionados à “demonstração” e que foram objetos de outras pesquisas acadêmicas, foi feito um levantamento bibliográfico que remeteu a alguns trabalhos que tiveram influência na presente pesquisa.

Foram feitas escolhas didáticas para atingir o objetivo proposto. Dentre elas, citamos:

- a verificação dos conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema através de uma prova diagnóstica;
- a familiarização dos alunos com conceitos básicos da geometria plana – fase preliminar (anexos 3 e 4) através do uso de um software de geometria dinâmica;
- a articulação entre a geometria concreta e a geometria dedutiva (Bloco I – pág. 60);
- apresentação de um jogo de cartas onde teoremas equivalentes às várias definições de paralelogramo foram explorados e articulados (Bloco II – pág. 103).

Participaram da sequência de ensino oito alunos divididos em quatro duplas identificadas por A, B, C e D.

Nas onze atividades analisadas no Bloco I foram encontrados os seguintes fatos, ligados às dificuldades dos alunos.

- NÃO DOMÍNIO OU INSEGURANÇA EM RELAÇÃO A CONCEITOS ENVOLVIDOS (exemplos: dupla D, atividade 1, pág. 68; dupla C, atividade 2, pág. 70; dupla C, atividade 10, pág. 96; dupla D, atividade 7, pág. 82);

- CONCLUSÕES INDEVIDAS PELA OBSERVAÇÃO DE UM ESBOÇO (CKS – Parzysz, 2001b) – (exemplos: duplas B e D, atividade 8, pág. 90; dupla B, atividade 11, pág. 101);

- USO DE CONCLUSÕES NÃO FUNDAMENTADAS (exemplos: duplas C e D, atividade 10, pág. 97);

- APRESENTAÇÃO DE PROVAS INCOMPLETAS (exemplos: duplas A, C e D, atividade 9, pág. 95)

- APOIO EM POUCAS VERIFICAÇÕES EMPÍRICAS PARA SE TIRAR UMA CONCLUSÃO (exemplos: todas as duplas, atividade 1, pág. 68);

- PLENA CONFIANÇA NAS PROVAS EMPÍRICAS (exemplos: todas as duplas, atividade 6, pág. 79)

- TROCA DO USO DE PROPOSIÇÕES POR RECURSOS EMPÍRICOS (exemplo: dupla A, atividade 11, pág. 101)

- DIFICULDADE PARA ENTENDER ENUNCIADO (exemplo: dupla D, atividade 7, pág. 82)

- NÃO COMPREENSÃO DA TESE (exemplo: dupla D, atividade 2, pág. 70)

- APRESENTAÇÃO DE CONCLUSÃO NÃO SOLICITADA (exemplo: dupla A, atividade 9, pág. 94; dupla B, atividade 11, pág. 101).

Também destacamos os cálculos realizados (parte não empírica) e as provas feitas:

- CÁLCULOS CORRETOS - SEM APOIO EMPÍRICO (exemplos: todas as duplas, atividade 7, pág. 82, 83, 85; duplas A e C, atividade 8, pág. 89);

- PROVAS FEITAS (exemplos: dupla A, atividade 10 – faltando apenas término com etapa análoga; dupla B, atividade 10 – prova completa, pág. 97; dupla D, atividade 11, pág. 103).

Ainda dentro das observações referentes ao Bloco I, expomos que alguns alunos, não dominando a maneira formal de expressão escrita, usaram indicações que, poderíamos considerar, como criação própria. Alguns exemplos: expressão “D,A e C,B” para indicar “ $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$ ” ou “A com B, D com C, A com D, C com B” para indicar “ $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ ”.

As dificuldades levantadas no Bloco II foram¹:

- PERCEPÇÃO E CONCLUSÃO INCOERENTES (exemplos: duplas A e D, prova B, respectivamente, pág. 124 e pág. 130; duplas C e D, prova f, pág. 150; dupla C, prova h, pág. 165; dupla A, prova h, pág. 165; dupla B, prova H, pág. 156, dupla C, prova f -2ª tentativa, pág. 159; dupla A, prova D, pág. 159).
- ERRO CONCEITUAL (exemplos: duplas C e D, prova B – respectivamente pág. 129 e pág. 130; dupla D, prova A, pág. 139; dupla C, prova f, pág. 160; dupla D, prova A, pág. 139; dupla B, prova I, pág. 143).
- USO DO RECÍPROCO (NÃO JUSTIFICADO) PARA PROVAR O TEOREMA RESPECTIVO (exemplo: dupla C, prova f, pág. 160).
- PROVAS COM ELEMENTOS DESCONEXOS (E NÃO NECESSÁRIOS) – (exemplos: dupla C, prova B, pág. 128; dupla D, prova B, pág. 130).
- LOCALIZAR ELEMENTOS RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES EM CADA UM DOS DOIS TRIÂNGULOS (TAMBÉM CONGRUENTES) – (exemplos: dificuldade geral, socialização, pág. 146, em destaque, dupla D, prova I, pág. 146; dupla D, prova f, pág. 150).
- DESVIO DA META (TESE) NO DECORRER DA PROVA (exemplo: dupla D, prova f, pág. 150).
- USO DA RECÍPROCA TENDO PROVADO APENAS A PROPOSIÇÃO REFERENTE (exemplo: dupla B, prova H, pág. 155).

1 – A síntese das observações do Bloco II, ao final do capítulo 3, traz uma exposição mais detalhada sobre as dificuldades aqui apresentadas.

- ENTENDER O ENUNCIADO DOS TEOREMAS (exemplos: dupla D, prova B, pág. 130; dupla A, prova B, pág. 126);
- PERCEBER A HIPÓTESE (exemplos: dupla A, prova B, pág. 126; dupla C, prova I, pág. 145; dupla A, prova D, pág. 158).
- COMPARAR REPRESENTAÇÃO FIGURAL DA PROPOSIÇÃO COM O ESBOÇO USADO (exemplo: dupla C, prova B, pág. 131);
- PERCEBER MESMOS ELEMENTOS DA MESMA FIGURA APÓS SER ROTACIONADA (exemplos: duplas A,C,D, prova B, pág. 138).
- CONTRADIÇÃO DA PRÓPRIA REPRESENTAÇÃO FIGURAL (exemplo: dupla B, prova I, pág. 144).

Foi observado, também, que o procedimento usando ângulos correspondentes foi retido mais facilmente na memória dos alunos em relação ao procedimento usando congruência de triângulos – exemplo: duplas A e B, prova A, pág. 141.

Em relação aos progressos obtidos pelas duplas podemos dizer que em várias ocasiões, os alunos conseguiram elaborar provas completas e também algumas que, embora incompletas, mostraram raciocínio lógico até o ponto onde foram feitas. Nessas ocasiões, podemos considerar que se verifica o “arco transitivo de substituição” apresentado por Duval e Egret (1989): uma seqüência lógica de proposições que levam da hipótese inicial até a tese. Como exemplos de provas completas, citamos: duplas A e B, prova A, respectivamente, pág. 134 e pág. 135; dupla B, prova B, pág. 157; dupla C, prova D, pág. 159; dupla D, prova f; pág. 151; dupla D, prova I, pág. 146; dupla A, prova I, pág. 142; dupla C, prova f, pág. 162 – no nível proto-axiomático de Parzysz (2001); dupla A, prova f, pág. 149 – prova com elementos da geometria proto-axiomáticos e concreta - Parzysz (2001). Algumas dessas provas, apesar de serem consideradas como concluídas, necessitaram da intervenção do pesquisador diversas vezes e outras provas não, como a prova A pelas duplas A e B ou a prova D pela dupla C, ou necessitaram de pouca intervenção, como a prova B pela dupla B. Na penúltima seção, se procurou diminuir ao máximo a intervenção do pesquisador. Classificamos como provas incompletas, mas com raciocínio lógico considerável, a prova J feita pela dupla D, pág. 163 ou a prova A pela dupla C, pág. 138.

Também é importante destacar que a análise, feita pelas duplas, das produções dos amigos foi considerada, em geral, satisfatória. Algumas foram boas, outras não perceberam erros graves, mas indicaram outros aspectos consideráveis.

A partir dos resultados obtidos nos dois blocos, podemos apresentar alguns elementos de resposta à nossa questão de pesquisa:

Quais dificuldades e avanços apresentam alunos na articulação de informações visando provar propriedades dos paralelogramos?

Agrupamos as dificuldades apontadas acima em 3 categorias C1, C2 e C3: dificuldades ligadas à elaboração de uma prova (C1), dificuldades oriundas da aceitação de provas empíricas (C2) e dificuldades ligadas à leitura e interpretação de enunciados (C3).

Dentre as dificuldades apresentadas, apontamos: não domínio em relação a conceitos envolvidos (C1), conclusões indevidas pela observação de uma figura (C1), uso de conclusões não fundamentadas (C1), conclusões a partir de poucas verificações empíricas (C2), dificuldades para entender a linguagem formal das proposições (C2), dificuldades de reconhecimento da hipótese ou da tese a ser trabalhada (C3), uso do recíproco (não justificado) para provar o teorema respectivo (C1), uso do recíproco tendo provado apenas a proposição referente (C1), dificuldades em localizar elementos respectivamente congruentes em triângulos congruentes (C1), dificuldades para comparar representações figurais (C3), dificuldades em perceber os mesmos elementos da mesma figura após rotacionada (C3).

Entre os avanços apresentados pelas duplas, verificamos realização de cálculos feitos sem o apoio empírico e de provas formais completas ou de forma incompleta, mas com raciocínio lógico até o ponto onde foram feitas. Além disso, a análise da produção dos amigos foi feita de modo satisfatório.

A análise das observações e do material recolhido das quatro duplas evidenciou a complexidade do processo de argumentação e prova. A passagem de uma verificação empírica para uma prova formal é uma ruptura brusca no processo escolar que necessita ser ensinada.

Apesar das dificuldades citadas, as produções dos alunos mostraram que houve um avanço lento nas ações dos alunos tanto em validações empíricas quanto em validações dedutivas, mas considerável se levarmos em conta que tais estudantes não estavam acostumados ao trabalho com geometria e nem com demonstrações. Por isso esperamos que esse trabalho indique a viabilidade do ensino de provas estimulando novas abordagens e que a perseguição ao tema “demonstração”, um dos mais delicados do ensino, esteja sempre presente no planejamento de todo professor.

O jogo apresentado, embora busque a prova formal, traz a vantagem de variedade de possibilidades (vinte diferentes provas possíveis) além da rica experiência de se motivar o aluno a, depois de elaborar sua prova, também analisar a produção dos amigos.

Orientando-nos pelos resultados da análise a posteriori pensamos em alterações que poderiam trazer melhorias para a aprendizagem da prova através das atividades dos Blocos I e II, além da Pré-atividade lógica.

As cartas que trazem o quantificador universal, como por exemplo, "TODO QUADRILÁTERO QUE TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES É PARALELOGRAMO" poderiam ter sua redação trocada para "SE UM QUADRILÁTERO TEM OS ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES ENTÃO ELE SERÁ UM PARALELOGRAMO.

O motivo desse encaminhamento é porque, não foi analisada a influência de tal quantificador que, se não for devidamente introduzido, pode trazer dificuldades para o entendimento dos alunos.

Da mesma maneira, é útil a alteração da redação da carta XIV - Se $A = B$ e se $C = D$ então $A + C = B + D$; para “Se $A = B$ e $C = D$ então $A + C = B + D$ ”, pois a segunda ocorrência da palavra “se” pode trazer dúvidas aos alunos na correta identificação da hipótese e da tese.

Mais que uma dupla mostrou ter dificuldade com a redação da carta XVII - *Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes*. De fato, os alunos cogitavam lançá-la após a verificação, por exemplo, de um ângulo congruente. A intenção era o uso dessa carta para indicar que o aluno estava, após estabelecido um caso de congruência de

triângulos, usando também a congruência de seus elementos que poderia constituir a tese a ser provada ou uma condição para sua demonstração.

Como tais figuras eram sempre triângulos, nada mais conveniente do que trocar a palavra “figuras” pela palavra “triângulos”, pois lados e ângulos também são “figuras”.

Optou-se, para a redação das cartas, pela linguagem com o rigor dos livros. Tal linguagem se constituiu num obstáculo ao desenvolvimento das provas. Pelo menos para os alunos iniciantes nesse tipo de estudo, numa aplicação para sala de aula, poder-se-ia usar uma linguagem menos formal e, posteriormente, desenvolver um trabalho que os permitisse usar, sem embaraços, as cartas na versão apresentada nessa pesquisa.

Ainda sobre as cartas, há a sugestão de não usar termos como “ladrão” (cartas da pré-atividade lógica): apesar de nossa intenção de simular uma investigação policial (para aumentar o estímulo à resolução da atividade) o termo pode apresentar-se inconveniente.

Cumpre ainda destacar que as observações preliminares da primeira atividade do Bloco I (pág. 60) apresentaram um erro conceitual, em sua redação (identificado após a aplicação): expõe que a hipótese inicia-se com a expressão “se”. Lembramos que a hipótese segue após tal expressão (ela não faz parte da hipótese).

Também observamos que, mesmo de acordo com as observações preliminares citadas, a identificação da tese, feita pela dupla C em seu protocolo (figura 20, pág. 67) não está correta, como foi afirmado na seqüência do texto, pois tais observações trazem a definição da tese como uma expressão posicionada após a expressão “então” (e não a abrangendo).

Reforçamos, pois, que o ideal seria que o texto tivesse usado a definição de hipótese como a “proposição que, em caso de uso da expressão “se”, estivesse disposta após tal expressão e não englobando-a. A definição para tese seria análoga em relação a expressão “então”.

Em relação aos esboços utilizados, a sugestão é promover variação em relação ao costume histórico. Em geral um paralelogramo é representado sempre com um par de lados paralelos e horizontais. Alguns alunos conseguem perceber informações através da representação figural numa

posição, mas têm dificuldades em perceber as mesmas informações se tal figura sofrer algum tipo de rotação.

Rotacionar a figura de modo a apresentá-la em outras posições pode enriquecer a percepção e representação dos alunos. Quando precisarem observar um desenho para, dele, tirar informações, estarão habituados a analisá-lo não mais a partir de uma única opção.

Outro fator importante ligado à representação figural, que também se repete desde a época de Euclides até os nossos dias é o esboço (com lados opostos paralelos) de um quadrilátero, usado numa hipótese de uma proposição, cuja tese é justamente “ter lados opostos paralelos”.

Mesmo que digamos aos nossos alunos que o quadrilátero é apenas um esboço e que seus lados, embora possam até ser paralelos, na verdade não o são com certeza e que, portanto, não podemos contar com essa hipótese, a imagem de tal esboço ocasionará um fator semelhante ao verificado por Parzysz (2001): a “contaminação pela visão” – se não usarem a idéia do paralelismo no início da prova, poderão, com considerável probabilidade, usá-la nas etapas seguintes.

Além do paralelismo dos lados opostos dos quadriláteros nos esboços dos campos I, II e III do tabuleiro, que induziu a erros, tivemos a “contaminação” ocasionada pelos esboços feitos pelos próprios estudantes. Quanto aos rascunhos destes resta-nos apenas orientá-los para tenham atenção, mas quanto aos esboços já trazidos pelo jogo poderia haver alteração.

Logicamente, no caso de um desenho, dentro das proporções, não haveria como, por exemplo, traçar um quadrilátero com lados ou ângulos opostos congruentes de modo que seus lados opostos não sejam paralelos. Mas se tratando de um esboço, embora o mesmo se apresente de maneira estranha a nós, que estamos acostumados com as representações tradicionais, ele poderia ser feito de maneira a não induzir os alunos a considerarem informações indevidas. Como o exemplo da figura 107:

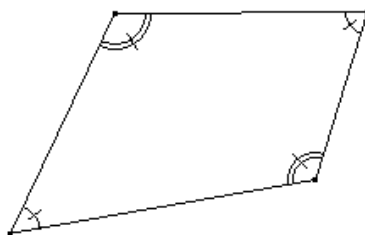


Figura 107: Esboço alternativo usado na hipótese para provar o paralelismo dos lados
Fonte: Autoria própria

A viabilidade dessa sugestão, porém, é associada ao seu uso nas fases iniciais do trabalho com provas, pois o objetivo final é que os estudantes saibam utilizar os esboços tradicionais sem inserir informações indevidas em seus raciocínio.

Ao tentar alguma ação para resolver um problema muito freqüente ocorrido durante as atividades desenvolvidas durante a pesquisa (uso de conclusões não fundamentadas), pensamos em utilizar também a figura 107 além daquelas pertencentes aos outros campos do tabuleiro, numa versão dinâmica do jogo, usando o programa Cabri, onde a cada carta lançada, o estudante deveria usar as ferramentas de verificação do programa que funcionariam como um tutor na ausência da intervenção do professor.

Por exemplo, se o aluno traçasse, na figura 107, com o rato, as duas diagonais, admitindo que as mesmas se interceptassem em seus pontos médios, deveria, logo a seguir, solicitar que o programa confirmasse isso. Em caso positivo continuaria sua construção na tela do micro e, em caso negativo, pensaria em nova estratégia.

Tal idéia se torna inviável, no computador, pois embora num esboço feito em papel, seja possível admitir as informações figurais da hipótese, como a dos ângulos opostos congruentes, elas não podem ser confirmadas pelo programa quando o aluno delas precisar (afinal, por construção, tais ângulos realmente não são congruentes, estando apenas indicados como tal), ou seja, o referido tutor só funcionaria para alertar o estudante quando estivesse usando alguma conclusão indevida, gerando problemas no caso de conclusões corretas.

Outra idéia seria solicitar que acostumassem a fazer a si mesmos, a cada carta utilizada, a pergunta “o que me garante o uso dessa afirmação”; todavia tal orientação já foi utilizada em nosso trabalho.

Resta-nos contar com a superação do problema do uso de conclusões não fundamentadas pela prática, pelo trabalho constante com análises, demonstrações, treino da percepção, da atenção. Nesse ponto, o jogo apresenta a conveniência de oferecer inúmeras provas e a rica experiência de analisar a produção dos amigos.

O trabalho com outras atividades, principalmente de provas menos extensas, de questões que treinem o aluno a fazer observações, a expressar suas conjecturas (mesmo de forma empírica) não pode ser esquecido e o projeto AprovaME traz um bom conjunto de tais atividades.

Os procedimentos aqui sugeridos, devido ao seu caráter formal, se aplicam melhor a uma etapa mais avançada no ensino das provas. Foram aplicados a alunos não acostumados a elaborar demonstrações, mas uma rica atividade poderia ser, talvez, a sua aplicação posterior àquelas tantas outras, elaboradas pelos colegas que participam do projeto e podem se adaptar melhor aos alunos iniciantes nesse estudo.

Nossa pesquisa, tem o objetivo de auxiliar, como um complemento, ao conjunto de trabalhos elaborados no projeto AprovaME e se torna incompleta e menos eficiente se isolada. Todavia, fazendo parte desse todo, nos dá a perspectiva de procedermos ao retorno da argumentação e da prova na matemática escolar.

BIBLIOGRAFIA

ALVES, Érica Valéria; BRITO, Márcia Regina Ferreira. Percepção, Memória e a Memória Matemática. VII Reunião didática da matemática do Cone Sul.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (Dir.). *Didática das Matemáticas*. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193 – 217. (Horizontes Pedagógicos).

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BONGIOVANNI, Vincenzo; VISSOTO LEITE, Olímpio Rudinin; LAUREANO, José Luiz Tavares. *Matemática e Vida – 7ª série – 1º Grau*. 4. ed. São Paulo: Ática, 1991. 247 p.

CLAIRAUT, Alexis Claude. *Elementos de Geometria*. Tradução por José Feliciano. São Paulo: Typ. Augusto Siqueira & C., 1909. 161 p.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6.ed. São Paulo: Atual, 1985. 341 p.

DORO, Amadeu Tunini. *Argumentação e prova: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica*. 2007. 117f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DUVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond; EGRET, M.A. *L'organisation deductive du discours*, Annales de Didactique et de Sciences cognitives 2 (1989) (p. 25-40) IREM de Strasbourg.

EUCLIDES. *Livro I*. In: EUCLIDES. *Os Elementos*. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/2parte>>. Acesso em: 31/12/06

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2005. 844 p.

HADAMARD, Jacques. *Leçons de Géométrie*. Paris: Armand Colin & Cie, Éditeurs, 1898. 308 p.

HEALY, Sioban Victoria– Argumentação e Prova na Matemática Escolar – Anexo 1

LEGENDRE, Adrien Marie. *Éléments de Géométrie*. 11.ed. Paris : Chez Firmin Didot, 1817. 465 p. Disponível em : <<http://www.ufpel.tche.br/bvm/>>. Acesso em : 03 jan. 2007.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática – As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez, 1995.

PARZYSZ, Bernard. *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*. Colloque COPIRELEM de Tours, IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM - université Paris - 7 2001 a.

_____. *Pre-service elementary teachers and the fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving*. IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM - université Paris - 7 – 2001 b.

RIGOLON LUIS, Silvine. *Concepção de uma seqüência de ensino para o estudo da semelhança: do empírico ao dedutivo*. 2006. 255 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TOJO, Benedita Natsuko. *Concepção de uma seqüência didática para o ensino/aprendizagem da congruência*. 2006. 205 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ANEXO 1

Primeiro anexo da redação do projeto AProvaME

Anexo 1

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

**Argumentação e Prova na Matemática Escolar
(AProvaME)**

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduação em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado de São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado de São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com frequência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase caracteriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

- ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.
- BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.
- CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.
- COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER, R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.
- GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.
- GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.
- GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.
- HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.
- HEALY, S. V. (L.), & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.
- HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.
- HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.
- LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LIGHT, P., GIOTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.
- LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.
- MARIOTTI, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

- TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.
- THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.
- VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? // *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.
- WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.
- WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

ANEXO 2

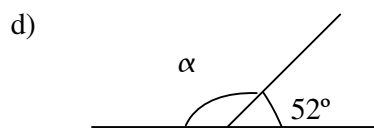
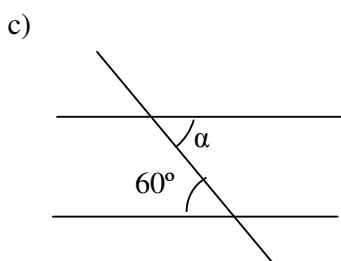
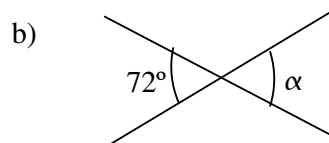
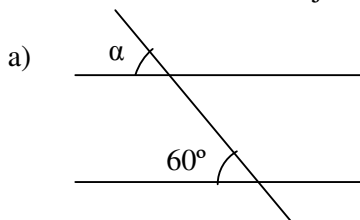
AVALIAÇÕES DIAGNÓSTICAS DOCUMENTANDO O CONHECIMENTO PRÉVIO EM GEOMETRIA DOS SUJEITOS DESSA PESQUISA

A PROVA

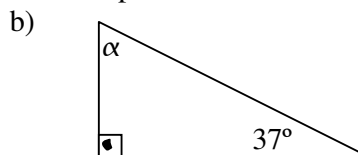
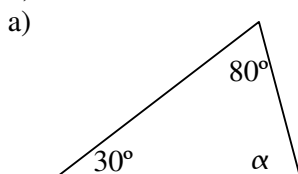
PESQUISA – DISSERTAÇÃO – PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – Conhecimentos prévios dos alunos participantes

Nome: _____ série: _____

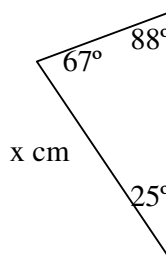
- 1) Abaixo temos duas retas paralelas intersectadas (cortadas) por uma transversal. Determine as medidas indicadas justificando sua resposta



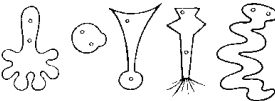
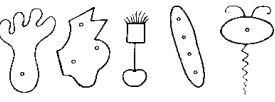
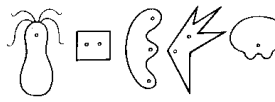
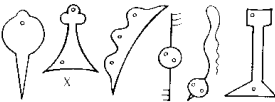
- 2) Determine as medidas indicadas justificando sua resposta.



- a)



- 6) Assinale¹:

Todos estes são Bliques. 	Todos estes são Piques. 
Nenhuma destes é um Blique. 	Nenhuma destes é um Pique. 
Quais destes são Bliques? 	Quais destes são Piques? 

209

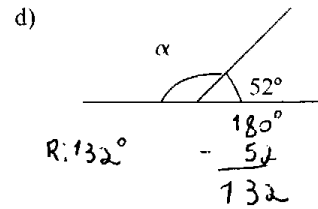
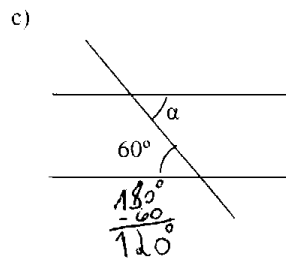
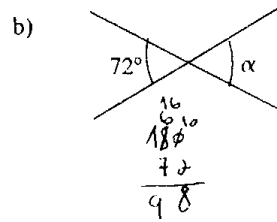
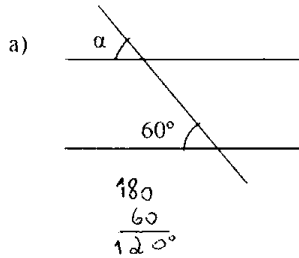
ALGUNS PROTOCOLOS DESSAS PROVAS

PESQUISA – DISSERTAÇÃO – PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – Conhecimentos prévios dos alunos participantes

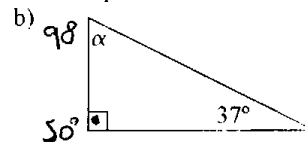
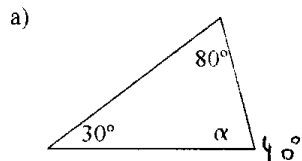
Nome:

série:

- 1) Abaixo temos duas retas paralelas intersectadas (cortadas) por uma transversal. Determine as medidas indicadas justificando sua resposta

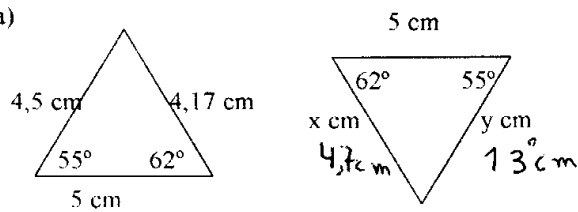


- 2) Determine as medidas indicadas justificando sua resposta.

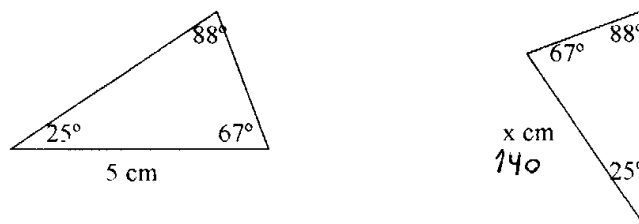


3) Determine, caso possível, as medidas indicadas justificando sua resposta (justifique mesmo se não for possível determinar essa medida). Oriente-se pelos dois triângulos.

a)



b)



4) Faça um esboço de um paralelogramo.



5) Você conhece quais são os casos de congruência de triângulos? Em caso positivo, cite-os.

6) Assinale:

BRINCANDO COM LÓGICA

Todos esses são Blipes



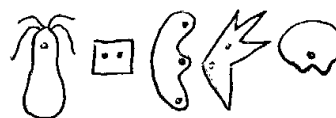
Todos esses são Piques



Nenhum desses é Blipe



Nenhum desses é Pique



Quais desses são Blipes?



Quais desses são Piques?

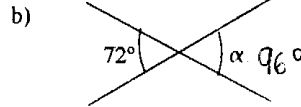
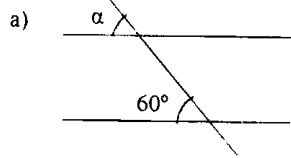


PESQUISA – DISSERTAÇÃO – PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – Conhecimentos prévios dos alunos participantes

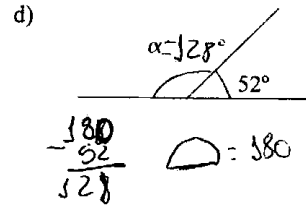
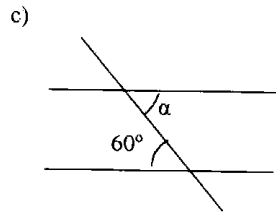
Nome: _____

série: _____

- 1) Abaixo temos duas retas paralelas intersectadas (cortadas) por uma transversal. Determine as medidas indicadas justificando sua resposta



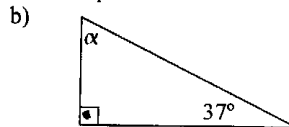
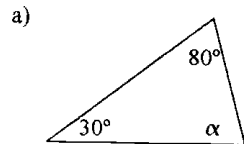
$$\begin{array}{r} 560 \overline{) 2813} \\ \underline{72} \\ 288 \\ \underline{1038} \\ 184 \\ \underline{180} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$



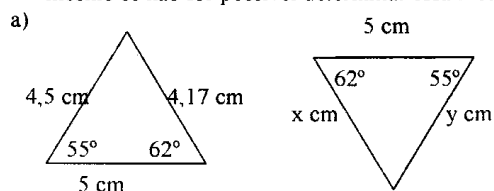
$$\begin{array}{r} 180 \\ - 52 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\alpha = 128$$

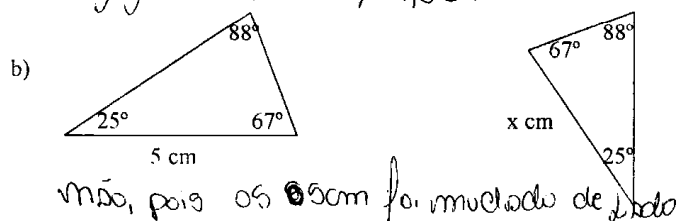
- 2) Determine as medidas indicadas justificando sua resposta.



- 3) Determine, caso possível, as medidas indicadas justificando sua resposta (justifique mesmo se não for possível determinar essa medida). Oriente-se pelos dois triângulos.

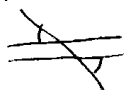


Sim tem a mesma medida, pois somam-se inverteu
A figura $x = 4,17 \text{ cm}$ $y = 4,5 \text{ cm}$



não, pois os 5cm foi mudado de lado

- 4) Faça um esboço de um paralelogramo.

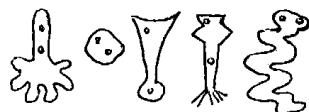


- 5) Você conhece quais são os casos de congruência de triângulos? Em caso positivo, cite-os.

- 6) Assinale:

BRINCANDO COM LÓGICA

Todos esses são Bliques



Todos esses são Piques



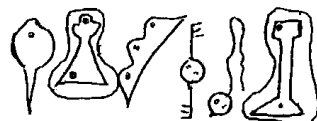
Nenhum desses é Blique



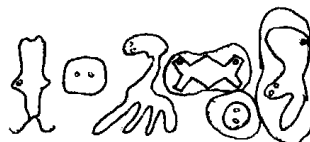
Nenhum desses é Pique



Quais desses são Bliques?



Quais desses são Piques?



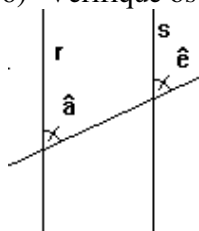
ANEXO 3

Atividades Preliminares 1ª Etapa –Paralelismo

- 1) No Cabri, desenhe duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
- 2) Quantos ângulos você pode observar? _____
- 3) Tire as medidas de todos eles e anote-as aqui (não é necessário anotar duas vezes a mesma medida): _____
- 4) A cada par de ângulos de mesma medida (que não sejam o.p.v e estejam do mesmo lado da reta transversal.), chamamos “ângulos correspondentes”. Faça abaixo um rascunho do desenho que você vê na tela indicando os pares de ângulos correspondentes.

- 5) Usando o ponteiro mude a inclinação das retas desenhadas e repare a variação das medidas dos ângulos correspondentes. O que acontece com elas? Obs.: Se preferir, pinte da mesma cor os ângulos correspondentes do mesmo par antes de movimentar o desenho.

- 6) Verifique os pares de ângulos abaixo. Eles são correspondentes?

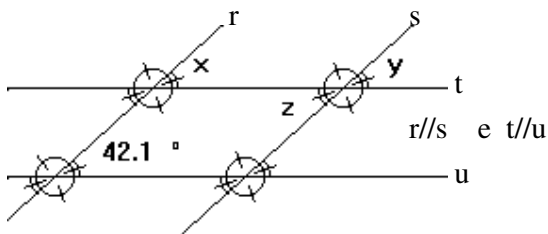


$r // s$

sim ()
não ()

Se a medida do ângulo indicado por $\hat{a}$ for 65° quanto será a medida do ângulo indicado por $\hat{e}$? _____

- 7) Observando o desenho abaixo, diga o valor das medidas indicadas por x, y e z justificando sua resposta:



x vale _____ porque _____

y vale _____ porque _____

z vale _____ porque _____

- 8) Se você teve dúvidas no exercício anterior, abra o arquivo P4* no Cabri e meça os ângulos indicados. Verifique se as retas “r” e “s” são paralelas e se os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{e}$ são

correspondentes. Se você não teve dúvidas no exercício 7 pule essa questão e passe ao exercício 9.

9) Abra o arquivo P2*. Sem movimentar o desenho, responda qual é o valor das medidas indicadas justificando a sua resposta:

$\hat{a}$ mede _____ porque _____
 $\hat{u}$ mede _____ porque _____
 $\hat{e}$ mede _____ porque _____
 $\hat{i}$ mede _____ porque _____
 $\hat{o}$ mede _____ porque _____

Tire as medidas dos ângulos de confira as suas respostas. Caso tenha errado alguma faça a correção abaixo indicando o motivo do erro. *Sugestão: verifique se todas as retas de um mesmo feixe são paralelas.*

Ainda no arquivo P2*, é possível saber a medida do ângulo $\hat{b}$ apenas observando o desenho sem medi-lo? Como?

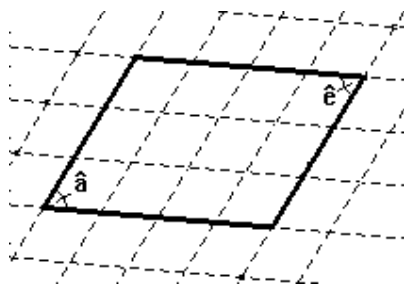
10) Abra o arquivo P3* e indique abaixo quais quadriláteros são paralelogramos.

ABCD () sim () não porque: _____

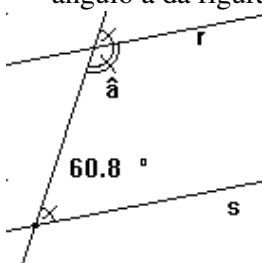
EFGH () sim () não porque: _____

O ângulo $\hat{DAB}$ está marcado. Que cor é essa marca? _____ O ângulo $\hat{CDA}$ está marcado. Que cor é essa marca? _____ Os ângulos $\hat{CDA}$ e $\hat{ABC}$ são chamados “ângulos opostos” do paralelogramo. Assim como os ângulos $\hat{BCD}$ e $\hat{DAB}$.

11) Veja o desenho abaixo. Diz-se que num paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes, isto é, os ângulos opostos têm mesma medida. Usando a malha pontilhada de retas paralelas explique porque o ângulo $\hat{a}$ tem a mesma medida que o ângulo $\hat{e}$.

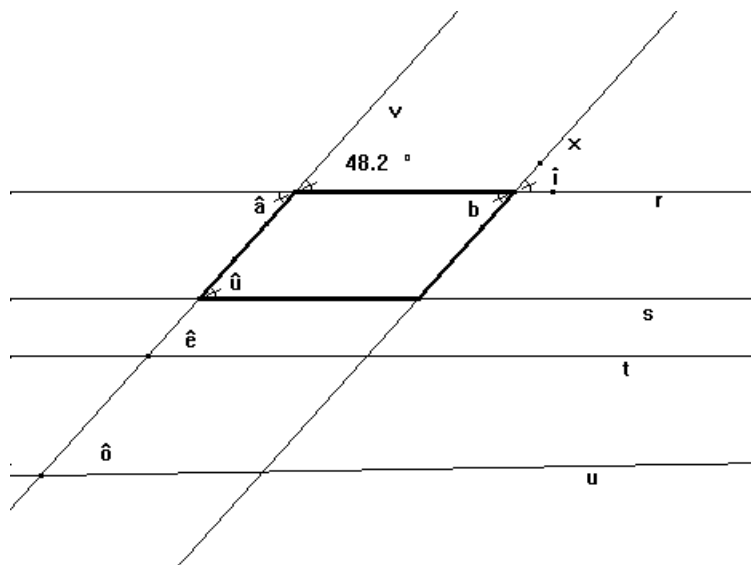


12) Lembrando que um ângulo de “meia-volta” tem 180° como podemos calcular a medida do ângulo $\hat{a}$ da figura abaixo onde as retas “r” e “s” são paralelas:

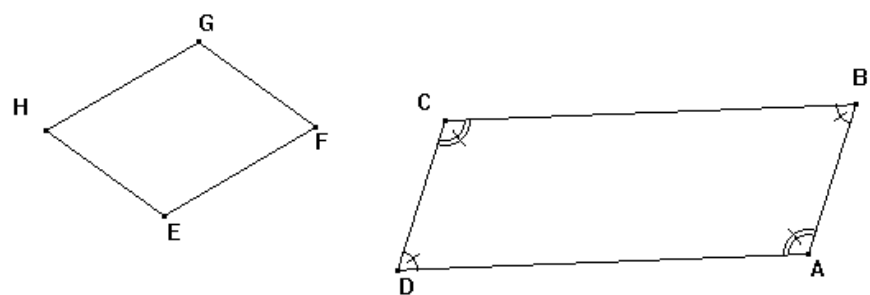


* Os conteúdos dos arquivos P2, P3 e P4 estão especificados seguir:

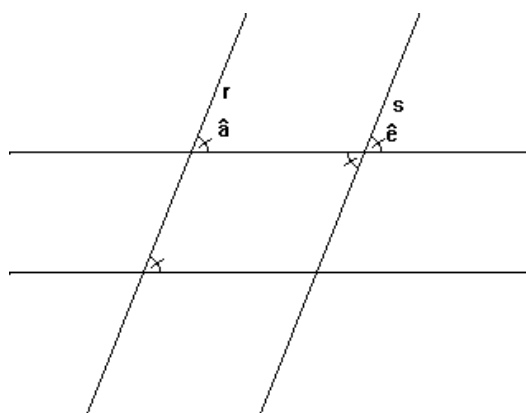
O ARQUIVO P2 NO CABRI



O ARQUIVO P3 NO CABRI



O ARQUIVO P4 NO CABRI



ANEXO 4

Atividades Preliminares 2ª Etapa –Congruência de Triângulos

Podemos definir elementos congruentes como aqueles que têm mesma medida.

a) Abra o arquivo C2* e complete as frases:

O segmento AB é congruente ao segmento _____ e o segmento _____ é congruente ao segmento _____. O ângulo AÔB é congruente ao ângulo _____ e o ângulo _____ é congruente ao ângulo _____.

Um triângulo é congruente a outro se, e somente se,

SEUS LADOS SÃO ORDENADAMENTE CONGRUENTES AOS LADOS DO OUTRO e SEUS ÂNGULOS SÃO ORDENADAMENTE CONGRUENTES AOS ÂNGULOS DO OUTRO.

b) O triângulo ABC é congruente ao triângulo _____.

Para saber se dois triângulos são congruentes, não precisamos, na verdade, medir todos os seus lados e todos os seus ângulos. Abrindo o arquivo “Estudando Congruências”*, verifique o PRIMEIRO PAR de triângulos. Eles têm, cada um, um lado congruente (azul) e dois ângulos adjacentes a esse lado também congruentes (um preto e outro rosa). Nada sabemos sobre os outros dois lados e sobre o terceiro ângulo. Na sua opinião, se “completarmos” os dois triângulos, eles serão congruentes? _____. Para ver se você acertou trace uma reta passando pelos pontos A e D, uma reta passando pelos pontos B e C. Marque o ponto de intersecção entre elas. Trace outra reta passando pelos pontos E e H e uma pelos pontos F e G. Marque o ponto de intersecção entre elas. Confira se os triângulos formados são congruentes. Sua resposta estava certa? _____

No SEGUNDO PAR de triângulos, temos o lado AB congruente ao lado DE (verdes) pois ambos medem 4,05 cm. Também os pares de lados AC e EF (vermelhos) são congruentes (medem _____ cm cada um). Os ângulos compreendidos entre eles são congruentes e medem _____ cm cada um. Na sua opinião, se completarmos o triângulo, o terceiro lado e os outros dois ângulos também serão congruentes? _____. Para verificar se você acertou. Complete a figura com o terceiro lado de cada triângulo traçando um segmento com extremidades nos pontos C e B e outro com extremidade nos pontos D e F. Confira se os triângulos formados são congruentes. Sua resposta estava certa? _____

Já vimos que:

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então estes triângulos são congruentes – caso chamado ALA - (nem precisaríamos verificar os outros lados e ângulos).

Se dois triângulos tem ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido , então eles são congruentes – caso chamado LAL - (nem precisaríamos verificar os outros lados e ângulos).

Na sua opinião se dois triângulos tiverem três ângulos de mesma medida, eles serão congruentes, isto é, nem precisaremos medir os três lados?_____ Verifique o terceiro par e confira sua resposta medindo os três lados. Sua resposta estava certa?_____

Se você tiver dois triângulos com os três lados congruentes, eles serão congruentes, isto é, nem precisaremos medir os três ângulos?_____ Verifique o quarto par e confira sua resposta medindo os três ângulos. Sua resposta estava certa?_____

No quinto par temos dois triângulo incompletos: eles têm um lado congruente (azul) e essa medida, que é a mesma nos dois é 3,78 cm. Eles têm apenas um ângulo adjacente congruente (vermelho) cuja medida é 65,6°. Coloque o ponteiro no ponto C e verifique que ele é móvel. O mesmo ocorre com o ponto F – portanto os lados AC e DF não têm a mesma medida mas seja como for o ângulo que deve ser oposto ao lado de mesma medida (azul) está fixo e será o mesmo nos dois triângulos (medida de 86,1° independentemente dos tamanhos dos lados AC e DF).

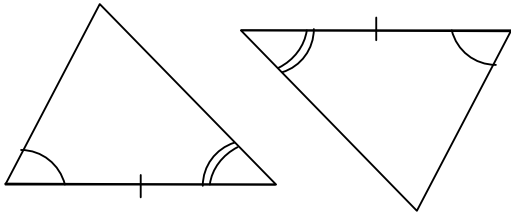
Temos congruentes um LADO, um ÂNGULO ADJACENTE a esse lado e um ÂNGULO OPOSTO a esse lado. Será que se “fechamos” os dois triângulos, eles serão congruentes? _____ Experimente fazer isso e confira sua resposta.

Agora, complete a tabela:

Elementos congruentes em cada triângulo	Os triângulos são congruentes?	
	Sim	Não
a) Dois lados e o ângulo compreendido entre eles (LAL)		
b) Três ângulos (AAA)		
c) Três lados (LLL)		
d) Um lado e dois ângulos adjacentes a ele. (ALA)		
e) Um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado.(LAAo)		

1) Indique quais pares de triângulos abaixo são congruentes.

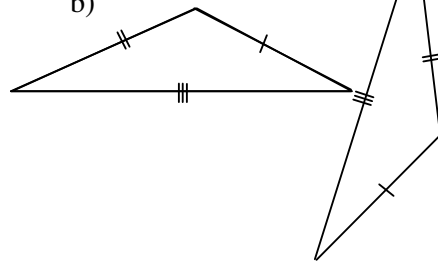
a)



() não

() sim, porque _____

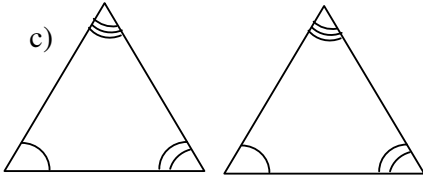
b)



() não

() sim, porque _____

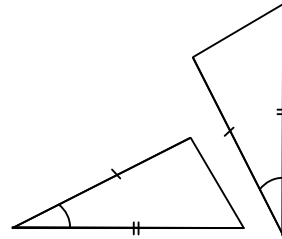
c)



() não

() sim, porque _____

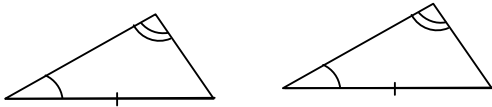
d)



() não

() sim, porque _____

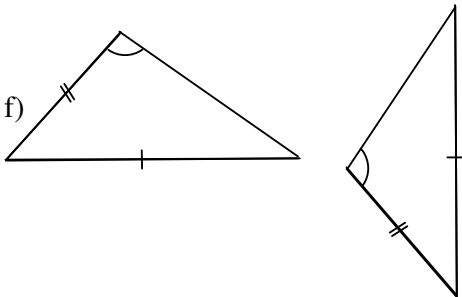
e)



() não

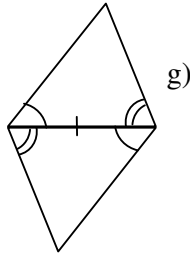
() sim, porque _____

f)

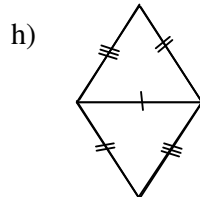


() não

() sim, porque _____

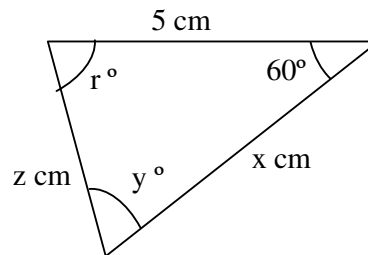
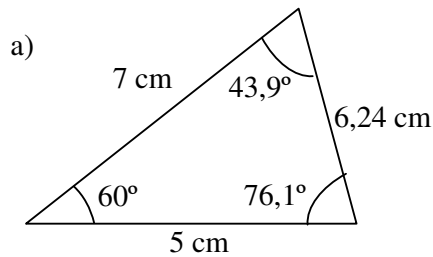


() não
 () sim, porque _____



() não
 () sim, porque _____

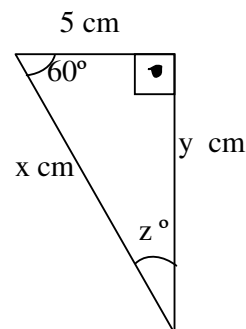
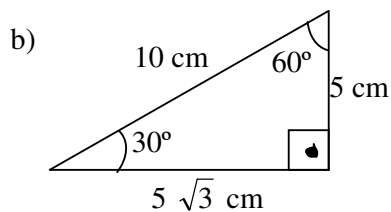
3) Usando esboços:



Os pares de triângulos acima são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.
 () não são congruentes pois _____
 () são congruentes pois _____

Se a medida x for 7cm os triângulos serão congruentes? ____ Se forem, por qual caso? ____
 E nesse caso, como saber se a medida r° é $43,9^\circ$ ou $76,1^\circ$



Os pares de triângulos acima são congruentes?

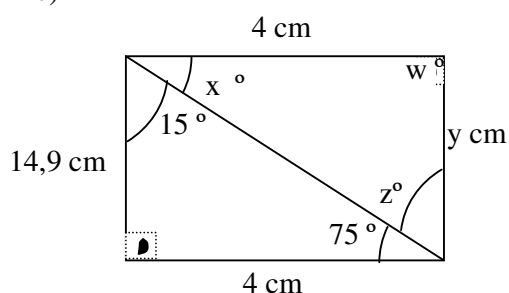
() não é possível saber a partir dos dados informados.

() não são congruentes pois _____

() são congruentes pois _____

No caso de os triângulos serem congruentes, é possível saber se a medida x é 10 cm ou $5\sqrt{3}$ cm ? Como?

c)



Os pares de triângulos acima são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.

() não são congruentes pois _____

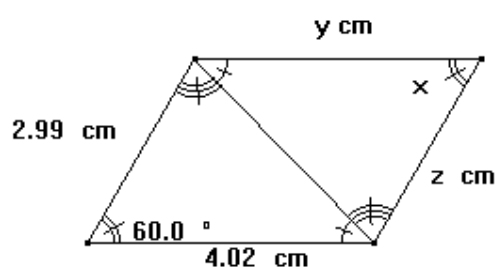
() são congruentes pois _____

Se a medida y for 14,9 cm, os triângulos serão congruentes? _____

Por qual caso? _____ Nesse caso, como saber se a medida x vale 75° ou 15°?

Como determinar as medidas dos outros dois ângulos: z° e w° ?

d)



Os pares de triângulos acima são congruentes?

() não é possível saber a partir dos dados informados.

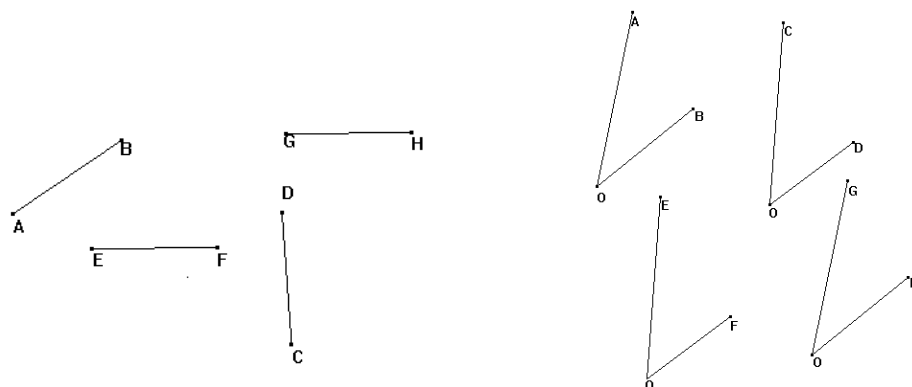
() não são congruentes pois _____

 () são congruentes pois _____

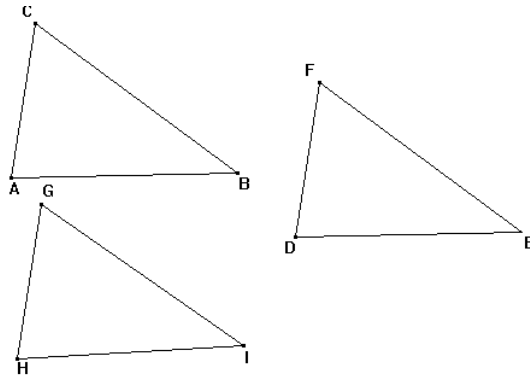
Como saber se y vale 2,99 cm ou 4,02 cm?

* Os conteúdos dos arquivos “C 2” e “Estudando Congruência” estão a seguir:

O ARQUIVO C 2



O ARQUIVO C 2 - continuação



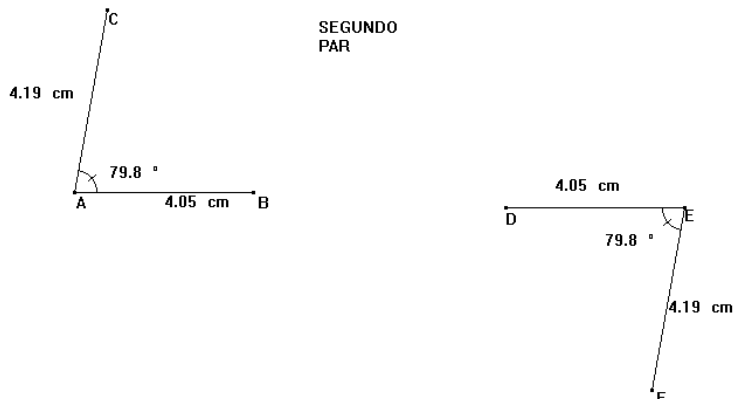
O ARQUIVO “ESTUDANDO CONGRUÊNCIAS”

Esse arquivo é composto por figuras móveis a não ser quanto às medidas dos elementos que estabelecem um caso de congruência. Por exemplo, no caso ALA haverá um lado e dois ângulos a ele adjacentes cujas medidas não podem ser alteradas. Os alunos poderão mudar as outras medidas, mas deverão verificar que por mais variação que ocorra os triângulos serão congruentes.

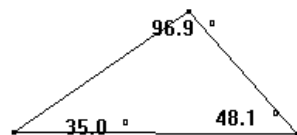
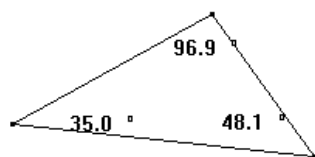
PRIMEIRO PAR



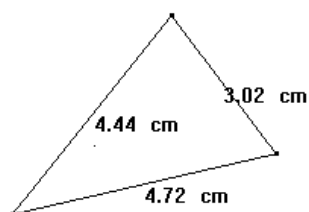
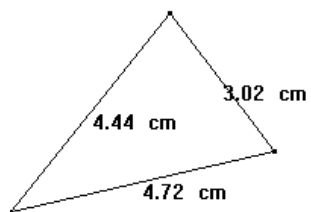
SEGUNDO PAR



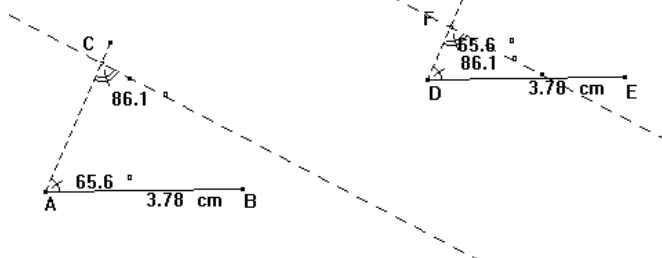
TERCEIRO
PAR



QUARTO PAR



QUINTO PAR



ANEXO 5

AS REGRAS DO JOGO DE CARTAS

Material:

- 1 cronômetro ou relógio.
- 18 cartas-condição (cada uma com inscrição de uma proposição ou postulado em geometria).
- 20 cartas (cada uma com inscrição de uma propriedade do paralelogramo).
- 1 tabuleiro.

Regras

Cada equipe escolhe uma propriedade do paralelogramo para provar. É combinado um prazo para que as equipes, simultaneamente, elaborem cada uma a sua prova através da articulação das proposições ou postulados recebidos.

Ao final desse tempo, as equipes anotam, na ordem em que acharem correta, na planilha própria, os números das cartas utilizadas bem como a respectiva representação figural da proposição. Logo após, cada equipe submete sua planilha à análise dos oponentes, segundo a tabela abaixo. Fecha-se assim uma rodada.

Não há um número pré-determinado de rodadas. Todavia, encerrada a última delas (após comum acordo entre os participantes) será vencedora a equipe que tiver mais provas consideradas válidas.

VALIDANDO UMA PROVA:

Ao avaliar a validade de uma prova, as equipes devem chegar a um consenso. Em caso contrário devem decidir a questão com o professor (ou mediador).

Teremos as situações :

A equipe que expõe:	A equipe que analisa:	Situação
Apresenta as cartas corretas	as aceita	a prova é considerada válida.
Apresenta as cartas incorretas	não as aceita	a prova não é considerada válida e a equipe que analisou tem direito a considerar feita (por ela) uma das provas.
Apresenta as cartas corretas	não as aceita	a prova é considerada válida e a equipe que analisou tem desconsiderada uma das provas por ela já feita.
Apresenta as cartas incorretas	as aceita	a prova é considerada válida e a equipe que analisou perde a chance de “barrar” a oponente (mesmo estando errada esta última).

ANEXO 6

NOVA VERSÃO DE PROCOTOLO PARA O USO DO JOGO DE CARTAS

ÚLTIMAS ATIVIDADES DA PESQUISA

Agradeço muito sua colaboração. Conforme combinamos, não será necessário vir à escola para prestar-me ajuda nessa parte. Vocês podem resolver as questões, com calma, em casa, conforme forem tendo tempo. A entrega do material pode ser no dia 22/06/07. O objetivo é verificar o quanto as atividades ajudaram os alunos, portanto solicitamos a gentileza de resolver individualmente.

NOME: _____

1) Responda:

a) Quando um quadrilátero pode ser considerado um paralelogramo?

2) Faça um rascunho de: (nesses rascunhos, use a simbologia que você aprendeu: um risquinho, dois risquinhos, ângulos de mesma medida com a mesma cor, ou com a mesma quantia de risquinhos (ou “voltinhas”),...

(vale olhar nos desenhos das cartas...)

a) Um quadrilátero com dois ângulos opostos quaisquer congruentes.

b) Um quadrilátero com dois pares de lados opostos congruentes.

c) Um quadrilátero com as diagonais interceptando-se (quer dizer, “cruzando-se”) nos respectivos pontos médios.

d) Um paralelogramo

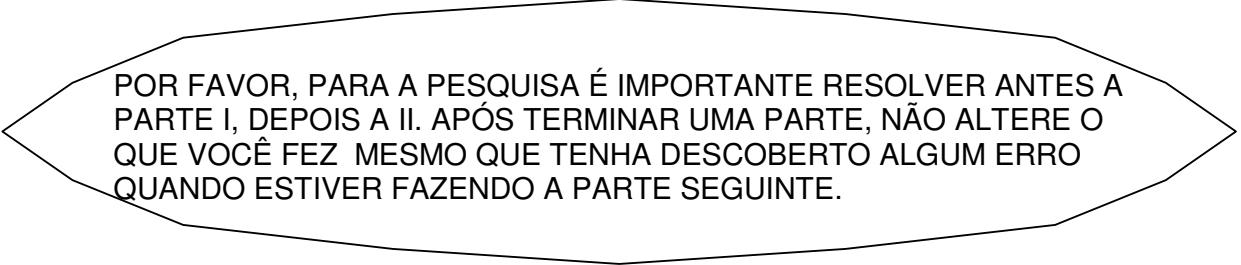
e) Dois ângulos correspondentes.

f) Dois ângulos correspondentes em outra posição (por exemplo, se você desenhou as retas, no ex. e, na posição horizontal, desenhe-as na posição inclinada ou vertical).

g) Dois ângulos alternos.

h) Dois ângulos alternos em outra posição.

3) Vamos repetir uma prova que, no segundo dia do jogo, nenhuma dupla conseguiu.



POR FAVOR, PARA A PESQUISA É IMPORTANTE RESOLVER ANTES A PARTE I, DEPOIS A II. APÓS TERMINAR UMA PARTE, NÃO ALTERE O QUE VOCÊ FEZ MESMO QUE TENHA DESCOBERTO ALGUM ERRO QUANDO ESTIVER FAZENDO A PARTE SEGUINTE.

"EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES". (Passagem B)

PARTE I – SEM AS CARTAS

Procure começar com o esboço de um paralelogramo. Lembre-se que, como não estamos gravando essa prova, cada elemento usado deve ser indicado. Por exemplo, se você disser “os dois ângulos têm mesma medida” quem ler precisará saber quais são esses ângulos. Use letras para indicá-los.

Por exemplo: “os ângulos $\underline{a}$ e $\underline{d}$ têm mesma medida”. Outro exemplo: “os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos” e não simplesmente “os lados são paralelos”. Você pode continuar a redação da prova na próxima página.

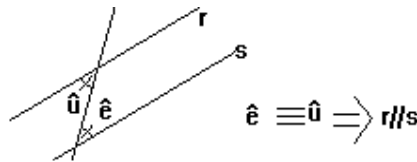
PARTE II – COM AS CARTAS

Dicas: - Façam um esboço inicial de um paralelogramo. Usem, nos vértices as letras A, B, C e D – indiquem os pares de lados paralelos. Poderia ser $\overline{AB} // \overline{CD}$, $\overline{AC} // \overline{BD}$ – isso vai depender dos vértices onde vocês colocaram as letras..

- Lembrem que “os lados opostos com mesma medida” - onde queremos chegar – podem ser “lados correspondentes de triângulos congruentes”. verifiquem que mudamos um pouco a redação da carta XVII – que dizia “Em figuras congruentes elementos correspondentes também são congruentes”. Agora a redação é: “Em triângulos congruentes, lados e ângulos correspondentes são congruentes”. **Então, assim que você usar uma carta de congruência de triângulos, veja bem no seu rascunho quais são esses triângulos. Pinte os três ângulos de um deles cada um de uma cor. Depois pinte cada ângulo do outro com a mesma cor de seu correspondente no primeiro triângulo. Faça o mesmo com os lados. Veja se isso já lhe permite provar o que foi pedido.**

- Nossa maior dificuldade foi “quebrar a sequência”, isto é, usar uma carta sem que tivéssemos condições para isso. Por exemplo chegamos a usar a afirmação: “Se duas retas coplanares e uma transversal determinam **ângulos alternos congruentes** então essas duas retas são paralelas”. Só que para usar essa afirmação, precisávamos, antes, ter os tais “**ângulos alternos congruentes**” e não os tínhamos. Para fugir disso, vamos tentar nos concentrar nos desenhos e nos símbolos. Veja a próxima dica.

- Se eu quiser usar uma carta, por exemplo a II, ela traz o desenho e os símbolos:



1º - verifique se nos esboços feitos até o momento, já temos algum desenho como esse da carta que queremos usar.

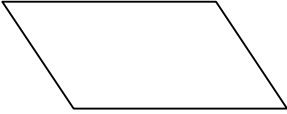
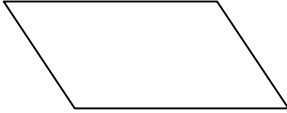
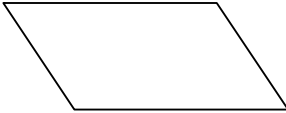
2º - $\hat{e} \equiv \hat{u} \Rightarrow r // s$ quer dizer: se os ângulos $\hat{e}$ e $\hat{u}$ (localize-os no desenho) têm mesma medida, então as retas r e s são paralelas. Só podemos usar essa afirmação se soubermos que os ângulos $\hat{e}$ e $\hat{u}$ forem congruentes, isto é, tiverem mesma medida. **Então antes de usar qualquer carta, pergunte a você mesmo(a): “eu já garanti a hipótese dessa carta?”** - lembre: hipótese é a parte que, geralmente, vem antes da palavra “então”.

As quatro cartas de congruência de triângulos estão separadas para vocês lembrarem de preencher uma planilha a fim de ter certeza que o caso escolhido é o correto.

AGORA, USANDO A RELAÇÃO DE CARTAS, VAMOS PROVAR QUE “EM TODO PARALELOGRAMO DOIS LADOS OPOSTOS QUAISQUER SÃO CONGRUENTES”. (você pode usar a mesma carta mais de uma vez).

vamos
usar, em
especial,
essas dicas

Importante: só inicie essa atividade após concluir a parte 1

Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual.		
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
		
		
		
		

- 4) Vamos provar que "SE DOIS SEGMENTOS DE RETA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO"
(Passagem c)

PARTE I – SEM AS CARTAS

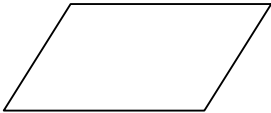
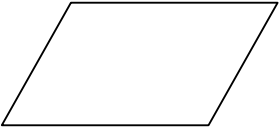
Por gentileza, dê uma olhada nas instruções da parte I da questão 3

PARTE II – COM AS CARTAS

Por gentileza, dê uma olhada nas dicas da parte II da questão 3 (caso você esteja fazendo essa questão num dia diferente daquele em que fez a questão 3)

AGORA, USANDO A RELAÇÃO DE CARTAS, VAMOS PROVAR QUE "SE DOIS SEGMENTOS DE RÊTA INTERCEPTAM-SE NOS RESPECTIVOS PONTOS MÉDIOS, ENTÃO SUAS EXTREMIDADES SÃO VÉRTICES DE UM PARALELOGRAMO" . (passagem c - você pode usar a mesma carta mais de uma vez).

Importante: só inicie essa atividade após concluir a parte 1

Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual.		
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
		
		
		
		
		
		

- 5) Vamos provar que "TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES" (passagem h)

PARTE I – SEM AS CARTAS

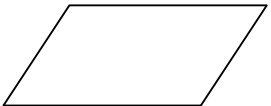
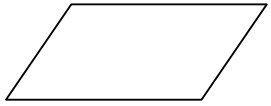
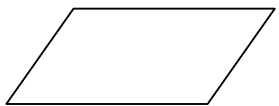
Por gentileza, dê uma olhada nas instruções da parte I da questão 3

PARTE II – COM AS CARTAS

Por gentileza, dê uma olhada nas dicas da parte II da questão 3 (caso você esteja fazendo essa questão num dia diferente daquele em que fez a questão 3)

AGORA, USANDO A RELAÇÃO DE CARTAS, VAMOS PROVAR QUE "TODO QUADRILÁTERO QUE TEM LADOS OPOSTOS CONGRUENTES TEM ÂNGULOS OPOSTOS CONGRUENTES". (passagem h - você pode usar a mesma carta mais de uma vez).

Importante: só inicie essa atividade após concluir a parte 1

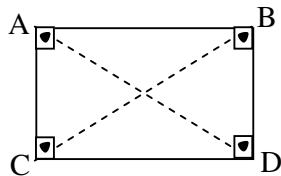
Na coluna da esquerda você deve apenas indicar o número das cartas utilizadas e na coluna da direita o desenho que corresponde a essa carta. A cada linha que você avança, deve na coluna da esquerda colocar a nova carta e, na coluna da direita, repetir os desenhos já colocados nas linhas anteriores e acrescentar aquele referente à carta da linha atual.		
PASSAGEM	CARTAS UTILIZADAS	DESENHOS
		
		
		
		
		

Eu sei que já estou “enchendo”, mas já estamos terminando ...

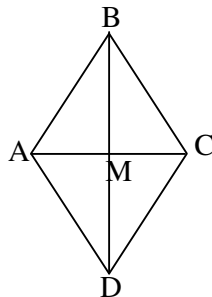
- 6) Dizem que num retângulo, as diagonais são congruentes (tem a mesma medida). Vamos lembrar que um retângulo é um paralelogramo que tem quatro ângulos retos (quatro ângulos com a mesma medida de noventa graus). Usando a tabela abaixo onde estão propriedades de um paralelogramo (você precisará de apenas uma delas) explique como concluir que os segmentos AD e CB têm a mesma medida. Talvez você tenha que usar um caso de congruência de triângulos. Se você usar um dos casos, diga qual, e justifique assim como você fez nas “planilhas de justificação de congruência”.

Um paralelogramo tem:

- lados opostos com mesma medida
- ângulos opostos com mesma medida
- diagonais que se cruzam nos respectivos pontos médios



- 7) Dizem que num losango as diagonais formam ângulos retos (90°). lembrando que um losango é um paralelogramo (você pode usar as propriedades da tabela do exercício 6 – precisará apenas de uma delas). USE TAMBÉM A AFIRMAÇÃO: Uma volta tem 360° . Se for dividida em quatro parte iguais cada parte terá 90° . Você deve provar que os ângulos $\hat{A}MB$, $\hat{B}MC$, $\hat{C}MD$ e $\hat{D}MA$ todos medem 90° .



8) Observando o tabuleiro responda:
 Era a última rodada de um jogo. A dupla Eudoxo e Arquimedes venceria se fizesse duas provas enquanto os adversários fariam apenas uma. Eles já tinham feito as passagens I, h, B e D. A intenção agora era fazer a passagem c quando, de repente, Arquimedes disse: “Não compensa fazermos a passagem c. Há uma outra que nos permitirá passar do campo III ao campo V se usarmos algumas das passagens que já temos. Assim faremos essa passagem e juntando com algumas que temos garantimos uma passagem equivalente aquela indicada por c. De modo, com uma prova, garantimos duas”. Qual seria essa passagem da qual fala Arquimedes?

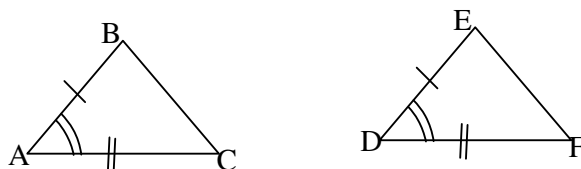
Pessoal, muito obrigado a todos vocês!!!!

PLANILHAS DE JUSTIFICAÇÃO DE CONGRUÊNCIA

NOME: _____

Em cada exercício, por favor, não use uma carta de congruência de triângulos sem preencher a planilha abaixo, ela deverá ajudar quanto às dificuldades encontradas na pesquisa.

O preenchimento é simples. Veja um exemplo: eu digo que os triângulos abaixo são congruentes pelo caso LAL. Então eu escolho caso LAL (assinalo um x) e indico os elementos necessários para que esse caso seja possível.



<i>Exemplo</i>	
() ALA	Ângulo Lado Ângulo
(X) LAL	Lado AB e DE Ângulo BAC e EDF Lado AC e DF
() LLL	Lado Lado Lado
() LAAo	Lado Ângulo Ângulo Oposto
() NÃO USEI CASO DE CONGRUÊNCIA	

Repare: indicamos os lados
correspondentes em cada
triângulo

NÃO SE ESQUEÇA DE, AO DETERMINAR UM CASO DE CONGRUÊNCIA, PINTAR OS
ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO CADA UM DE UMA COR E CADA ÂNGULO
CORRESPONDETE NO OUTRO COM A MESMA COR. FAÇA O MESMO COM OS
LADOS.

QUEM SABE SE VOCÊ AO FAZER ISSO JÁ NÃO ESTÁ PROVANDO O QUE FOI
PEDIDO...

NAS PROVAS DAS QUESTÕES 3,4, e 5 PREENCHA A PLANLHA ABAIXO QUANDO
CHEGAR NA PARTE DA CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS. CASO VOCÊ NÃO USE
CONGRUÊNCIA , DEIXE TAMBÉM ANOTADO,

QUESTÃO 3	
() ALA	Ângulo Lado Ângulo
() LAL	Lado Ângulo Lado
() LLL	Lado Lado Lado
() LAAo	Lado Ângulo Ângulo Oposto
() NÃO USEI CASO DE CONGRUÊNCIA	

QUESTÃO 4	
() ALA	Ângulo Lado Ângulo
() LAL	Lado Ângulo Lado
() LLL	Lado Lado Lado
() LAAo	Lado Ângulo Ângulo Oposto
() NÃO USEI CASO DE CONGRUÊNCIA	

QUESTÃO 5	
() ALA	Ângulo Lado Ângulo
() LAL	Lado Ângulo Lado
() LLL	Lado Lado Lado
() LAAo	Lado Ângulo Ângulo Oposto
() NÃO USEI CASO DE CONGRUÊNCIA	

QUESTÃO 6	
() ALA	Ângulo Lado Ângulo
() LAL	Lado Ângulo Lado
() LLL	Lado Lado Lado
() LAAo	Lado Ângulo Ângulo Oposto
() NÃO USEI CASO DE CONGRUÊNCIA	

QUESTÃO 7	
() ALA	Ângulo Lado Ângulo
() LAL	Lado Ângulo Lado
() LLL	Lado Lado Lado
() LAAo	Lado Ângulo Ângulo Oposto
() NÃO USEI CASO DE CONGRUÊNCIA	

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)