PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

WELLINGTON ZARUR VIANA VIEIRA

ARGUMENTAÇÃO E PROVA: UMA EXPERIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

WELLINGTON ZARUR VIANA VIEIRA

ARGUMENTAÇÃO E PROVA: UMA EXPERIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do(a) **Prof(a). Dr(a). Ana Paula Jahn.***

São Paulo

2007

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

Aos meus filhos
Caio, Caíque e João Pedro

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde, paz e proteção. Graças a Ele tive a maravilhosa oportunidade de iniciar e concluir esta importante etapa da minha vida.

À minha mãe que criou e educou dois filhos com muita luta e trabalho.

Ao meu irmão por estar sempre ao meu lado incentivando, acreditando e apoiando.

Ao professor João Aparecido Friaza. Foi através dele que pude perceber o quanto o estudo pode transformar a vida de uma pessoa.

À minha esposa Jaqueline, pela paciência, carinho e amor.

Aos meus amigos (irmãos) José Leôncio e Paulo R. Salomão, pelo companheirismo, amizade e apoio.

À minha orientadora Ana Paula Jahn por sua dedicação, orientação e paciência.

As professoras Sônia Pitta Coelho e Monica Karrer pelas valiosas contribuições concedidas na qualificação.

Aos meus alunos, muito obrigado, pelo amor, carinho e amizade.

Resumo

Este trabalho está inserido no Projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar – que têm o objetivo de fazer um mapeamento das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo, bem como a elaboração, aplicação e avaliação de situações de aprendizagem sobre prova. Para isto, apresentamos uma seqüência de atividades que abordam conceitos da Geometria Espacial, em particular envolvendo paralelismo e perpendicularismo. Esta seqüência foi elaborada e aplicada a seis alunos (14-16 anos) de uma Escola Pública Estadual, com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento desses alunos quando inseridos num contexto de argumentação e prova em Matemática. Como auxilio neste processo, usamos o software Cabri-Géomètre, com a hipótese de que este poderia dar suporte à visualização dos objetos em estudo. As análises mostram que, embora os alunos não tenham atingido um nível de prova intelectual, houve um avanço significativo na identificação de propriedades e elementos pertinentes das figuras para justificar suas respostas. As situações despertaram um visível interesse nos alunos, permitindo discutir alguns aspectos que devem ser considerados na elaboração de uma prova em Geometria, relacionados principalmente à interferência de elementos espaciais das representações figurais.

Palavras chaves: Argumentação, Prova, Geometria Espacial e Educação Matemática.

Abstract

This work is inserted in Project AProvaME – Argumentation and proof in School Mathematics - it has the objective of to do a map of conceptions about students and adolescent's argumentation and proof in schools at State of São Paulo, how this the preparation, application and valuation of the learning situations. To that we expose one sequence of activities that broach Spatial Geometry Concepts, how parallelism and perpendicularity. This sequence of activities was applied to six students age between 14 and 16 years in a State Public School, with the objective of to contribute to the development these students when they are inserted in a argumentation and proof's context on Mathematics. How assistance in this process, we used the software Cabri-Géomètre, with the hypothesis that this could to give a support to visualization of the object in study. The analysis presents that, though the students hadn't searched a level of intellectual proof. There was an important advance on search proprieties and pertinent elements of the figure to justify their answers. The situations woke-up a visible interest on the students, permitting to discuss some aspects that have to be considered in the elaboration of a Geometry proof, related principally the interference of the spatial elements of figural representation.

Key words: Argumentation, Proof, Spatial Geometry, Mathematics Education.

SUMÁRIO

Apresentação do Estudo......... 11
Capítulo 1 – O Projeto AProvaMe..15
1.1 Primeira Fase do Projeto.. 18
1.2 Segunda Fase do Projeto..26
1.3 O Cabri-Géomètre...29
1.4 A Plataforma TelEduc.. ..31
Capítulo 2 – Pesquisas de Referências 33
2.1 Educação Matemática, Argumentação.. 38
2.2 Funções e Tipos de Prova.. 43
2.3 A Prova na História da Matemática...43
2.3 Elementos de Geometria envolvidos nas Situações de Aprendizagem......51
Capítulo 3 – Apresentação das Atividades e Análise a *Priori*.........................61
3.1 Atividade 1..62
3.2 Atividade 2..74
3.3 Atividade 3..84
3.4 Atividade 3..92
Capítulo 4 – Procedimentos Metodológicos e Análise dos Resultados..94
4.1 Perfil dos alunos...97
4.2 Papel do professor..98
4.3 Dados coletados..99
4.4 Análise dos resultados..100
4.5 Considerações Finais..140
Referências Bibliográficas..145
Anexos..i

Lista de Quadros

Quadro 1 – Questão 1 de Álgebra ……………………………………….....................21
Quadro 2 – Questão 3 de Geometria 24
Quadro 3 – Equipes Formadas na 2ª Fase 27
Quadro 4 – Atividade 1 parte A...64
Quadro 5 – Atividade 1 parte B 68
Quadro 6 – Atividade 1 parte C 72
Quadro 7 – Atividade 2 parte A...77
Quadro 8 – Atividade 2 parte B...83
Quadro 9 – Atividade 3..88
Quadro 10 – Atividade 4..94

Apresentação do Estudo

Neste trabalho, buscamos investigar as possibilidades de levar alunos da Educação Básica, mais especificamente das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, a desenvolverem habilidades de argumentar e provar, quando confrontados a atividades de formulação de conjecturas ou questionados sobre a validade de certos resultados ou sobre o porquê de certas propriedades em uma dada situação. Por se tratar de uma temática muito complexa e geralmente pouco tratada por professores de Matemática, acreditamos ser este estudo relevante, podendo colaborar com a melhoria do ensino de Matemática, no que se refere particularmente à produção de argumentos e provas pelos alunos.

Nosso estudo é desenvolvido no contexto do Projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar,* mais especificamente relacionado à Fase 2 como veremos mais adiante, com o objetivo de elaborar e avaliar situações de aprendizagem envolvendo justificativas e provas matemáticas. No caso, tais atividades referem-se a noções de Geometria Espacial, a serem experimentadas com alunos do Ensino Médio (15-16 anos).

Como recurso auxiliar para o desenvolvimento de tais situações, optamos por utilizar um recurso tecnológico que é o ambiente de geometria dinâmica Cabri-Géomètre. Atualmente, não se pode desprezar o efeito que um computador causa na sociedade em geral, sobretudo nas escolas, e acreditamos que no ensino de Matemática não deve ser diferente. Nossa hipótese é que este software pode ajudar na construção e tratamento de diversas situações, na visualização de elementos e relações dos objetos geométricos construídos, no tempo para fazer/desfazer (ou refazer) uma figura, e num ponto que consideramos importantíssimo: o de levar o aluno a fazer conjecturas. De fato, os recursos, as possibilidades de manipulação direta dos objetos e o tratamento de diversos "casos de figura" pode favorecer o levantamento de hipóteses baseadas no que os alunos estão construindo e observando, em particular, com a percepção de invariantes na manipulação ou movimentação (*dragging*). Além disso, essas hipóteses podem ser testadas ou verificadas experimentalmente, e depois de convencidos da veracidade (ou não), os alunos podem encontrar motivação para justificar ou refutar a conjectura feita, engajando-se em processos de provas ou produção de contra-exemplos.

No Capítulo 1, descrevemos o Projeto AProvaME que foi desenvolvido em duas fases, objetivando colaborar com as pesquisas nacionais existentes sobre argumentação e prova e comparar os resultados obtidos no Brasil com as pesquisas já realizadas em outros países, especificamente a realizada por Healy e Hoyles (2000) na Inglaterra.

No Capítulo 2, intitulado *Referencial Teórico*, procuramos mostrar o que pensam os Educadores Matemáticos sobre argumentação e prova e os resultados que obtiveram em suas pesquisas com alunos e/ou professores. Pudemos observar que existe uma grande preocupação com este tema, tendo em vista a quantidade de pesquisas que foram realizadas no Brasil e em outros países e a grande quantidade de pesquisas em andamento. Sem dúvida, como professores, não podemos deixar de questionar: Por que não abordar este tema, propiciando situações de ensino nas quais o aluno possa vivenciar etapas do processo de argumentação e prova, buscando justificar matematicamente suas respostas? Não estaria ele, desta forma, tendo acesso a um tipo de “fazer matemático” importante para sua formação, e em particular, para compreender essa característica própria de validação em Matemática? Acreditamos que a resposta a última questão é positiva, sendo uma das principais motivações para nosso estudo.

Ainda neste capítulo, procuramos descrever brevemente alguns fatos históricos da questão da prova em Matemática, pois acreditamos que a História da Matemática pode colaborar com o Ensino de Matemática. Fazemos a hipótese de que estudando e analisando o desenvolvimento da Matemática no decorrer de sua História é possível compreender seu presente, no que se refere às características e pertinência dos conteúdos a serem ensinados. E desta forma, pensamos que é possível identificar alguns elementos que possam integrar abordagens de ensino visando motivar os alunos na busca de resultados e não ficarem apenas esperando resultados prontos.

No Capítulo 3, apresentamos as atividades propostas, juntamente com a análise a priori das mesmas.As atividades, neste capítulo apresentadas, são fruto da participação e discussão que tivemos durante a segunda fase do Projeto AProvaME, tendo sido elaboradas, modificadas e testadas por uma equipe do projeto até ficar na forma de podermos apresentá-las e aplicá-las a alunos de uma Escola da Rede Pública do Estado de São Paulo.

No Capítulo 4, apresentamos os procedimentos metodológicos para o desenvolvimento das atividades, ressaltando o perfil dos alunos, o papel assumido pelo professor e os dados coletados durante a aplicação das atividades.

E para finalizar este trabalho de pesquisa, apresentamos no Capítulo 5 a análise *a posteriori* das situações experimentadas. Com a descrição dos resultados e análise dos comportamentos dos alunos, buscaremos elementos para responder as seguintes questões: Será que os alunos tiveram uma experiência pertinente na produção de argumentos e justificativas matemáticas, com as situações de Geometria Espacial? As atividades apresentadas ampliaram a compreensão dos alunos sobre o papel e sentido da prova em Matemática? Assim, pretendemos fazer uma avaliação das atividades, a fim de verificar se foram desenvolvidas de maneira a colaborar com o desenvolvimento dos alunos dentro do processo de argumentação e prova. E ainda, em que medida o ambiente Cabri-Géomètre representa uma ferramenta auxiliar neste processo.

Neste último capítulo, portanto, buscaremos sintetizar os principais resultados e evidências para responder às questões acima levantadas.

Para concluir, faremos algumas considerações finais sobre o estudo, indicando as principais contribuições para nossa formação e atuação profissional.

CAPÍTULO 1

O Projeto AProvaME

> "Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta." (George Polya)

> "É das hipóteses simples que mais devemos desconfiar; porque são aquelas que têm mais possibilidades de passarem despercebidas."
> (Poincaré)

Tem-se, atualmente, uma grande preocupação entre pesquisadores em Educação Matemática a respeito da prova na Matemática Escolar. Sabemos que é um desafio, pois, geralmente deixa-se para desenvolver um estudo sobre argumentação e prova em Matemática somente no Ensino Superior. No entanto, acreditamos que é possível e necessário abordar esse tema no Ensino Fundamental e no Médio. É provável que o desinteresse dos alunos pela

Matemática tenha também suas origens nesta problemática, pois os alunos estão cansados de receber uma Matemática pronta, sem questionamentos, cheia de regras a serem seguidas ou fatos matemáticos a serem memorizados. O Projeto AProvaMe propõe investigar o ensino e aprendizagem da argumentação e prova, e em particular, tem o objetivo de desenvolver atividades que levem o aluno a pensar, a conjecturar, a descobrir e a querer chegar num resultado, justificando-o. No nosso entender, uma atividade questionadora, motivadora, que desperte no aluno o querer por resolvê-la, pode devolver vida ao ensino de Matemática na sala de aula. Foi neste sentido que aceitamos fazer parte deste grupo. Quando fomos convidados pela professora Lulu Healy, coordenadora do projeto, de imediato identificamo-nos com os objetivos deste, que foram assim destacados (cf. Anexo 1, p. v):

- *Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo.*
- *Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.*
- *Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.*
- *Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos*

grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.

- *Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.*
- *Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.*

O Projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar – teve início no 2° semestre de 2005, com a participação de 27 mestrandos (professores colaboradores) e 6 professores pesquisadores..

Pretendemos, por meio deste projeto, com o trabalho e colaboração de todos, elaborar situações de ensino, investigar, levantar dados, codificar e verificar como os alunos se comportam diante de atividades onde precisam desenvolver uma comunicação efetiva de argumentos matemáticos válidos, onde são questionados a respeito dos porquês e precisam justificar os resultados obtidos. Pois, como é citado na apresentação do Projeto AProvaMe (Anexo 1, p. iv).

> *"além da base sólida sobre as concepções e dificuldade dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações".*

O projeto foi dividido em duas fases, cujo desenvolvimento descrevemos detalhadamente nos parágrafos que seguem.

1.1 Primeira Fase do Projeto

A primeira fase teve início no 2° semestre de 2005, com reuniões quinzenais, para a discussão do tema *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* e, além dos encontros presenciais, tivemos encontros a distância através do ambiente TelEduc, do qual falaremos com detalhes mais adiante.

Inicialmente, fizemos leituras e discutimos questões como: O que é uma prova em Matemática? Argumentação é um tipo de prova? É possível iniciar ou introduzir situações de aprendizagem com o objetivo de argumentar e provar no Ensino Fundamental e Médio?

Estas questões foram levantadas e buscamos, ao longo deste estudo, elementos de respostas para elas. Apontamos abaixo o que pensam alguns Educadores Matemáticos sobre argumentação e prova. No entanto, queremos destacar que esta discussão será retomada no Capítulo 2.

Pietropaolo (2005) destaca em sua tese que, para Duval (1991), a argumentação não poderia sugerir um caminho para construção de uma prova, pois a heterogeneidade entre argumentação e prova ocorre não somente do ponto de vista lógico, mas também cognitivo. No entanto, outros pesquisadores, como por exemplo, Boero, Garutti e Mariotti (1976, apud Pietropaolo, 2005, p. 74) não concordam com essa idéia de Duval e defendem que há unidade cognitiva entre essas duas estruturas, apoiando-se nos aspectos conceituais de Vergnaud e nas mudanças de quadro de Douady.

Com os resultados dessas pesquisas, é possível dizer que hoje a distância entre os defensores da unidade cognitiva e os da ruptura cognitiva entre argumentação e prova parece estar se tornando bem menor.

Este início de discussão no grupo foi muito rico, pois, sendo todos nós participantes do projeto, professores em exercício, cada um pôde expor o que pensava a respeito do assunto e se trabalhava com questões ou atividades nas quais o aluno precisasse apresentar uma justificativa ou prova. Grande parte dos colegas assumiu que o assunto é delicado e que não desenvolviam um trabalho seguindo este objetivo e justificaram dizendo que o livro didático não prioriza a argumentação e a prova, e mesmo na Graduação o assunto é em geral pouco trabalhado e desta forma, ao longo dos anos, sempre foi ficando em segundo plano.

Particularmente, tivemos uma formação na Graduação que priorizou e muito as provas das proposições matemáticas consideradas, levando-nos a uma rotina de não aceitar um resultado sem demonstração, e dentro do possível, procurarmos abordar isso em sala de aula, apresentando, por exemplo, a prova da relação matemática que permite encontrar as raízes da equação do 2° grau, ou o termo geral de uma Progressão Aritmética ou Geométrica, alguns resultados da Geometria, como a soma das medidas dos ângulos interno de um triângulo, o famoso Teorema de Pitágoras, entre outros. É claro que não é possível, e nem acreditamos ser ideal, desenvolver atividades para chegarmos a provas formais de todos os resultados desenvolvidos com os alunos, porém, acreditamos que seja um equívoco não abordar essa questão, não enfatizar a especificidade da validação na Matemática, levando o aluno a aceitar passivamente os resultados ou propriedades matemáticas.

Confessamos que no curso de Graduação, sofremos para demonstrar os principais resultados do Cálculo Diferencial e Integral, das Geometrias e das

Álgebras, pois na maioria dos casos, os professores apresentavam provas formais, garantindo assim a validade de um teorema, sem, no entanto, que a prova apresentada tivesse um sentido além daquele que estava exercendo, ou seja, o de validar o teorema em estudo.

Queremos, neste estudo, abordar a questão de que a prova tem outras funções além da verificação, funções essas que acreditamos poder ampliar os significados atribuídos pelos alunos na aprendizagem da Matemática.

Voltando às atividades desenvolvidas pela equipe, nas reuniões presenciais e interações a distância, temos uma primeira atividade na qual os professores pesquisadores propuseram um questionário com 3 questões de Álgebra e 3 de Geometria, desenvolvido no âmbito no projeto de Healy e Hoyles (2000), na Inglaterra. Algumas dessas questões já apresentavam soluções e tínhamos apenas que atribuir uma nota, avaliando cada solução. Em outras, precisávamos apresentar uma solução à questão dada e, através das notas e respostas que apresentávamos, os formadores puderam ter idéia dos conhecimentos apresentados por nós professores colaboradores a respeito do que considerávamos como prova e como avaliávamos certos tipos de argumentos supostamente elaborados por alunos.

Segue abaixo a questão 1 de Álgebra e a 3 de Geometria, a título de ilustração do tipo de questão contida no questionário (Anexo 2, p. ii).

A1: Artur, Beth, Célia, Duda, Érica, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando se soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
2 + 4 = 6	4 + 4 = 8
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Célia

Números pares são números que podem ser divididos por 2. Quando você soma números com um fator comum, 2 neste caso, a resposta terá o mesmo fator comum.

Então Célia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

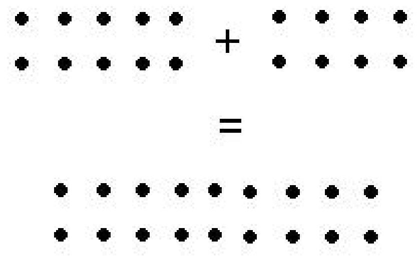
Resposta de Érica

Seja x = número inteiro qualquer
y = número inteiro qualquer

x + y = z
z – y = x
z – x = y
z + z – (x + y) = x + y = 2z

Então Érica diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Quadro 1 – Questões sobre prova (Healy e Hoyles, 2000)

Inicialmente, tínhamos que dar uma nota para os argumentos apresentados. Posteriormente, à luz das leituras e discussões, passamos a melhor entender a natureza desses argumentos e a classificá-los quanto à seu grau de generalidade. Faremos uma breve síntese da análise dessas respostas, as quais retomaremos detalhadamente no Capítulo 2 deste trabalho.

Segundo Balacheff (1987), Artur se encontra no nível da *experiência mental,* ou seja, sua solução ou argumentação flui por meio de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação, trata-se de uma prova denominada conceitual (ou intelectual).

A resposta de Beth considera apenas alguns casos particulares para afirmar que é verdadeira. Para De Villiers (2001), ela apresentou algumas poucas evidências para a verificação da proposição, mas não explicita as propriedades envolvidas ou razões que garantem esses resultados. Já para Balacheff (1987), trata-se de um *empirismo ingênuo*, um tipo de validação empírica e insuficiente. A partir dos resultados da pesquisa de Healy e Hoyles (2000), sabe-se que esse tipo de argumento é muito comum entre os alunos, podendo ser considerado o primeiro passo para o desenvolvimento do processo de argumentação e prova, e, portanto, não pode ser desconsiderado do ponto de vista didático.

No caso da resposta de Célia, que utiliza um registro na língua natural (Duval, 1995, apud Mariani, p. 54), tem-se claramente que, embora tendo a aluna descartado o uso de símbolos matemáticos ou figuras, conseguiu atingir o objetivo e provar a afirmação utilizando argumentos gerais e convincentes. Nesse caso, leva-se em consideração a propriedade de que números pares podem ser divididos por dois, e também, o fato de que, se somarmos números com um mesmo fator comum, a soma também tem este fator comum, no caso, o número dois, e, portanto, é par. A menos do registro, podemos relacionar esse tipo de resposta a de Artur, com controle de toda a generalidade da situação (Balacheff, 1987) encontrando-se, assim, num nível de *experiência mental*.

A resposta de Duda não faz uso de exemplos particulares, pelo contrário, apresenta argumentos de forma a considerar todos os casos. No entanto, faz uma afirmação que a nosso ver carece de explicação ou justificativa – o porquê da soma dos números terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8 também terminarem em 0, 2, 4, 6, ou 8. Trata-se também de uma prova conceitual, que para ser completa, deveria contemplar (exaustivamente) esse aspecto apontado.

A justificativa de Érica é iniciada considerando-se x e y inteiros quaisquer, no entanto, apresenta erro. Alguns elementos são pertinentes (o fato de conter o termo 2z, por exemplo), mas deve-se observar que a prova é incompleta e incorreta, devendo ser analisada como tal.

Franklin usa um registro de representação figural (com desenhos), não muito comum entre os alunos, mas que pode ser considerado como identificando a estrutura de número par.

Esse item, quando socializado nos encontros presenciais, motivou grande discussão no grupo, pois, para alguns dos professores colaboradores, a resposta faz uso de um exemplo, ou seja, um caso particular, devendo ser tratada como a de Beth, por exemplo. Outros defenderam a idéia de que em Franklin há generalização quando da representação de números pares e de sua soma da forma exposta, querendo indicar figuralmente a possibilidade de se obter sempre o arranjo de “dois em dois”.

Inicialmente, quando de nossa avaliação consideramos que fosse realmente um caso particular. A partir das discussões, pudemos reconhecer mais que isto na resposta de Franklin. Pelo fato de ser baseado em um exemplo, mas ainda assim representar uma propriedade geral (relativa a uma classe), pode ser considerado o que Balacheff (1987) denomina de *exemplo genérico*.

Consideremos agora, a questão 3 de Geometria (Anexo 2, p. viii).

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? **Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.** Justifique sua resposta:

Quadro 2 – Questões sobre prova (Healy e Hoyles, 2000)

Esta atividade parte de uma afirmação para a qual o aluno inicialmente precisa responder se é verdadeira ou falsa, para depois justificar sua resposta.

Acreditamos que questões deste tipo (verdadeira ou falsa), que fazem com que o aluno reflita sobre a afirmação e busque meios para validá-la (ou não), não são muito exploradas no ensino brasileiro.

Anteriormente a esta questão, foram abordadas as provas para a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. A proposta é que, utilizando este resultado, seja provado o caso dos quadriláteros, relacionando-os a dois triângulos por decomposição em relação à uma diagonal.

Juntamente com essa discussão, participamos das modificações e adaptações desse questionário inicial, para constituir o principal instrumento de coleta de dados da 1ª fase do projeto: o questionário sobre provas. Sempre partindo das discussões e do trabalho no grupo, o “novo” questionário foi definido. O questionário sobre provas foi composto com 5 questões de Álgebra e 5 de Geometria (cf. Anexo 3). Aplicamos o questionário para os alunos de escolas pública/particulares no Estado de São Paulo, com idades entre 14 e 16 anos.

O questionário aplicado teve como objetivo obter dados para um levantamento das concepções dos alunos sobre prova, ou seja, buscando verificar em que medida eles consideram que uma proposição foi provada (ou não), e o que eles próprios produzem quando confrontados com questões abertas solicitando a provar ou justificar uma proposição.

A experiência tem mostrado que os alunos normalmente se convencem que uma evidência é uma prova, ou concluem verdades matemáticas levando em consideração somente os testes que fazem usando casos particulares ou figuras. Por outro lado, também observamos que esse tema é pouco abordado pelos professores em sala de aula, sobretudo nos Ensinos Fundamental e Médio.

Cada professor colaborador indicou 5 turmas de uma ou mais escolas as quais tinham acesso. Em nosso caso, escolhemos três turmas da 8ª série do Ensino Fundamental, recentemente designada de nono ano, e duas turmas da 1ª série do Ensino Médio. A partir dessa indicação, três turmas foram sorteadas, aleatoriamente para aplicarmos o questionário sobre provas.

A aplicação levou em média, com cada turma, uma hora e dez minutos, e foi realizada na própria escola onde lecionamos. E para finalizar a Fase 1 do projeto, codificamos as respostas dos questionários respondidos. E esta codificação serviu de fonte para outras pesquisas dentro do Projeto.

1.2 Segunda Fase do Projeto

Na segunda fase do projeto, iniciada no primeiro semestre de 2006, o grupo de 27 mestrandos foi dividido em sub-grupos de 5 ou 6 mestrandos e cada qual com a orientação de dois professores formadores. Neste momento do projeto, também com reuniões quinzenais, o trabalho passou a ser intra-grupo e as atividades realizadas eram discutidas nesses sub-grupos, que tinham por objetivo elaborar situações de aprendizagem que pudessem colaborar na investigação dos desempenhos dos alunos em atividades de prova, ou para aqueles alunos que nunca trabalharam com este tema, terem a oportunidade de serem iniciados, sobretudo com o auxílio de uma ferramenta tecnológica.

Sabe-se que uma atividade eficiente pode colaborar e muito para despertar no aluno o desejo de buscar uma resposta, de buscar uma argumentação convincente, ou no caso, uma prova. Concordamos com Fonseca (2005), quando a mesma relata que os alunos precisam de ambientes de aprendizagem com tarefas desafiadoras, aguçando, desta forma, a curiosidade e o desenvolvimento desses alunos.

Cada novo grupo formado recebeu dois temas – um de Álgebra e um de Geometria – para serem trabalhados e desenvolvidos nesta fase do projeto. Seguem abaixo os sub-grupos (ou equipes) com seus respectivos temas de estudo.

EQUIPE 1	Função do primeiro grau Triângulos e Ângulos
EQUIPE 2	Progressões Aritméticas e Geométricas Geometria Analítica: Paralelismo e Perpendicularismo
EQUIPE 3	Conjuntos Numéricos Geometria Espacial
EQUIPE 4	Múltiplos e Divisores Propriedades de Quadriláteros
EQUIPE 5	Teorema Fundamental da Aritmética Teorema de Pitágoras

Quadro 3 - TelEduc

Participamos da equipe 3, devendo elaborar atividades envolvendo propriedades de Conjuntos Numéricos e o paralelismo e perpendicularismo na Geometria Espacial.

A segunda fase do projeto tem por objetivo que cada grupo elabore suas atividades, discutindo-a internamente, no caso, com os professores colaboradores e os pesquisadores, analisando assim, se as atividades são pertinentes, ou se as atividades elaboradas encontram-se dentro dos objetivos do AProvaME: o de desenvolver situações de aprendizagem que engajem os alunos na produção de provas.

Assim, logo começamos a pensar sobre como desenvolver atividades que abordassem paralelismo e perpendicularismo no espaço em um contexto de prova, pois reconhecemos, através de nossa prática, que na maioria dos casos a

Geometria não é bem aceita pelos alunos, e se considerarmos a Geometria Espacial, temos desafio maior ainda. Após algumas reuniões e discussões, chegamos à conclusão de que explorar paralelismo e perpendicularismo no espaço usando um cubo como objeto auxiliar seria bem interessante e sugestivo, pois é um sólido familiar aos alunos, que pode auxiliar na visualização. Desta forma, iniciamos o desenvolvimento das atividades, sendo construídas através dos encontros da Fase 2, juntamente como os colegas colaboradores e os professores pesquisadores.

Esses encontros quinzenais foram filmados, para que pudéssemos ter registros como apoio na análise do processo.

Participamos ativamente dos encontros, opinando a respeito das atividades sugeridas pelos colegas. Tivemos valiosas discussões de textos envolvendo o tema em questão, por exemplo, parte das teses de Gravina (2001), que escreveu sobre ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo, e de Pietropaolo (2005), o qual escreveu sobre o tema (Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática.

A segunda fase teve sua continuidade no segundo semestre de 2006, com encontros semanais, tanto presenciais quanto a distância, visando o compartilhamento das atividades elaboradas entre os sub-grupos formados, para discussão e avaliação das mesmas. Neste momento do projeto, passamos a trabalhar *inter-grupos*, para que cada grupo analisasse e discutisse as propostas de atividades de um outro, opinando sobre a atividade, quais as possíveis mudanças para torná-la realmente didática, dentro dos objetivos do projeto. E todo esse momento de troca foi realizado no ambiente virtual, por meio de Fóruns de Discussão.

Esta Fase 2 seria finalizada com a aplicação e análise das situações de aprendizagem, que foram discutidas, elaboradas e testadas durante o ano de 2006. A seqüência de atividades sobre Geometria Espacial foi nosso objeto de estudo e prevista para ser aplicada a estudantes do Ensino Médio. A partir dos dados coletados, pretendemos avaliar o potencial dessas situações no sentido de engajarem os alunos em processos de prova e argumentação, colaborando não só para o desenvolvimento do educando, como também dos professores e, acima de tudo, transformando o ensino de Matemática, criando novos espaços para tratar as provas e justificativas matemáticas, com o auxílio de ferramentas computacionais.

1.3 O ambiente Cabri-Géométre

Como citado anteriormente, um dos objetivos do AProvaMe é envolver os alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados. Este objetivo, relativo especificamente à segunda fase, apoiou-se basicamente em dois ambientes, a saber: o Cabri-Géomètre[1] e o Excel. Esses ambientes são considerados aliados importantes para alcançarmos nosso objetivo.

---

[1] O Cabri-Géométre foi desenvolvido por J.M. Laborde, Franch Bellemain e Y. Baulac, no laboratório de Estruturas Discretas e de Didática da Universidade de Grenoble

No caso da Geometria, “a utilização de programas de geometria dinâmica, permite a formulação e reformulação de conjecturas, verificando as verdadeiras e refutando as falsas” (Pietropaolo, 2005, p. 88).

Para De Villiers (2001), uma das funções da prova é a de verificação, ou seja, tendo o aluno verificado o teorema em casos particulares, e obtido uma forte evidência indutiva a seu respeito, adquire confiança no teorema, e que com tal confiança, tem motivação para elaborar uma prova. Fazemos a hipótese de que o ambiente Cabri-Géomètre oferece aos alunos ferramentas para manipular os objetos em estudo e efetuar estas verificações, abranfendo um diversos “casos de figuras, dado seu caráter dinâmico.

Podemos considerar que os ambientes informatizados, como dizem Arcavi e Hadas (2000), constituem laboratórios onde os alunos podem brincar, investigar e aprender Matemática, facilitando assim as bases intuitivas para dar justificativas conceituais de conjecturas e proposições matemáticas.

Em nosso estudo este software será indispensável, pois através dele é possível construir as figuras geométricas que necessitam de régua e compasso para sua construção, ou utilizar as figuras disponíveis no programa. Em nosso estudo, por exemplo, utilizaremos o cubo, retas, segmentos e polígonos. Uma das vantagens que o Cabri oferece, é que as construções realizadas podem ser manipuladas sem perderem as propriedades utilizadas em suas construções, além de podermos fazer e refazer as construções com certa facilidade e num curto espaço de tempo.

1.4 A Plataforma TelEduc

Outro objetivo do projeto é criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática (cf. Anexo 1, p. v).

O espaço virtual usado pelo Projeto está localizado na plataforma TelEduc[2], que é um ambiente de criação, participação e administração de cursos via Web, em contínuo desenvolvimento no Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

O Teleduc oferece um conjunto de ferramentas que facilitou o contato entre os integrantes do projeto. Os formadores criaram um curso neste ambiente, chamado *Projeto AProvaME*, onde formadores e colaboradores, com o uso de uma senha e login, entravam no ambiente e podiam assim trocar informações através das ferramentas disponíveis, tais como: Agenda, Leitura, Material de Apoio, Fóruns de Discussão, Correio e Portfólio, dentre outras.

Esta plataforma possibilitou um contato constante entre professores colaboradores e pesquisadores além de um registro de dados importante. No Portfólio, depositamos as atividades assim que ficavam prontas, nos fóruns discutimos questões sobre argumentação e prova, além de darmos nossas opiniões e contribuições para as atividades dos demais grupos. Em Material de Apoio encontramos textos que serviram de apoio para as discussões presenciais,

---

[2] Disponível em: http://teleduc.nied.unicamp.br. Último acesso em 30/05/2007

além de utilizarmos a Agenda e o Correio, para confirmar reuniões e atividades a serem elaboradas e quaisquer esclarecimentos sobre andamento das tarefas.

A seguir, no capítulo 2, apresentamos o referencial teórico do nosso trabalho de pesquisa, uma breve discussão da questão da prova na história da Matemática e alguns elemento da Geometria Espacial necessários para o desenvolvimento da seqüência de atividades apresentada no capítulo 3.

CAPÍTULO 2

Pesquisas de referências

Tem-se hoje uma grande questão no Ensino de Matemática: introduzir ou não provas na Matemática Escolar? E em caso afirmativo, como ou com qual abordagem? Consideremos a Matemática Escolar acima citada, como sendo a Matemática da Educação Básica, que segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) no seu Artigo 21 (PCNEM, 1999, p.43), engloba a Educação infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Particularmente para esta pesquisa, estamos considerando e analisando somente a Matemática ensinada nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, pois nosso objetivo é desenvolver atividades sobre provas para alunos na faixa etária de 14 a 16 anos.

Hoje, inúmeras pesquisas nacionais e internacionais tentam responder esta e outras perguntas relativas à temática do ensino da prova e argumentação em Matemática. Sabe-se que grupos de pesquisadores franceses, italianos e ingleses estão há mais tempo investigando esta problemática e que no Brasil, os estudos são mais recentes, aproximadamente há três décadas, com o fim do Movimento da Matemática Moderna (MMM)[3] (Pietropaolo, 2005).

Neste movimento, houve uma valorização do ensino de Álgebra e certo abandono do ensino de Geometria. Esse quadro vem sendo alterado, em

[3] O Movimento da Matemática Moderna teve caráter internacional, iniciado nos anos 50, e perdurando pelas décadas de 60 e 70, envolvendo disputas entre americanos e russos, sobretudo, na luta pela conquista do espaço.

particular com a expansão dos estudos na área de Educação Matemática e a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, em 1998, que enfatizou o ensino de todas as áreas, de forma equilibrada e articulada, fazendo com que a Geometria reconquistasse seu espaço. Um dos objetivos do projeto AProvaME é formular recomendações para mudanças no currículo da Matemática Escolar, no que se refere à argumentação e prova.

Pretendemos desenvolver um estudo que possa subsidiar nossa prática, no que se refere à introdução de atividades para que os alunos possam argumentar e provar.

Precisamos, primeiramente, considerar o que há de diferente entre esses dois entes – argumentação e prova – discutindo-os com cautela, pois envolvem idéias complexas.

Se considerarmos os pesquisadores na área de Matemática, como citam Nasser e Tinoco (2001), eles aceitam apenas a prova que é um desenvolvimento formal, partindo de hipóteses que são resultados já aceitos como verdadeiros e, através de um encadeamento lógico destes, permite, chegar ao resultado esperado ou tese.

No entanto, é preciso destacar que este tipo de prova, num sistema axiomático hipotético-dedutivo, do tipo formal, não é acessível a alunos ou aprendizes nos níveis por nós mencionados. Do ponto de vista didático, isto é, em relação ao ensino e aprendizagem, este não pode ser o único tipo de prova a ser considerado. De fato, vários pesquisadores (Pietropaolo, 2005, p. 80), destacam a necessidade de caracterização de uma prova como algo mais amplo, incluindo argumentações aceitáveis, que podem ter diversos tipos de rigor, dependendo da idade e do nível de escolaridade em que o aluno se encontra. E neste caso, podemos dar início à resposta a uma das perguntas acima, ou seja, em que momento introduzir o uso de prova no Ensino de Matemática? Segundo esses autores, uma vez que diferentes tipos de argumentos podem ser considerados um tipo de prova, então podemos iniciar o uso de prova desde as séries iniciais, pois as crianças são mais espontâneas e conseguem explicar seu raciocínio mesmo que oralmente, com naturalidade. Com o passar dos anos, essa espontaneidade diminui, e desta maneira, o aluno não consegue justificar sua resposta nem oralmente, nem através da escrita, segundo Nasser e Tinoco (2001).

Podemos encontrar alunos da Educação Básica que apresentam um raciocínio dizendo que: "*a soma de dois ímpares é par, pois afirmam que as unidades sobrantes em cada número ímpar formam um novo par*". Temos um argumento válido e completo, podendo ser associado a um em linguagem algébrica, ou seja, $(2n + 1) + (2m+1) = 2n + 2m + 2 = 2(m+n+1)$ (Fonseca, 2005, p. 4).

Assim, entramos na outra questão, que é um verdadeiro desafio, que é a de elaboração de atividades motivadoras e que introduzam os alunos numa situação de aprendizagem onde eles possam conjecturar e provar. Não buscamos atividades convencionais (prove que, demonstre que), mas sim aquelas que permitam ao aluno vivenciar o processo de forma mais ampla, participando de diferentes fases, inclusive de formulação de conjecturas. E ainda, os argumentos para tentar validá-las podendo ser expressos de diferentes formas e em diferentes registros.

Como dissemos anteriormente, são grandes questões em debate no âmbito da Educação Matemática, uma vez que se trata de uma mudança não somente para o aluno, que terá contato com uma “nova” Matemática, nova no sentido de que o aluno será questionado constantemente a respeito da validade dos resultados, que na maioria dos casos são apresentadas como se tivessem “caídos do céu”, e também será uma grande mudança para os professores, que serão os agentes principais para inserir e engajar seus alunos nesse contexto de argumentar e provar.

Como diria Mariotti, não se pode ensinar Matemática sem introduzir prova (Mariotti, 2001, apud Pietropaolo, 2005. p. 73). Antecipando uma das respostas para tantas perguntas levantadas, tem-se que é preciso apresentar aos alunos a Matemática de maneira diferente da qual sempre foi apresentada, ou seja, não como um conjunto de resultados prontos e fatos definidos sem nenhum sentido para eles. Devem-se fazer questionamentos que os levem a descobrir resultados, verificá-los, conjecturar e tentar validar essas conjecturas, e desta forma, envolver-se com este tipo de atividade matemática. Portanto, não devemos abrir mão de criar atividades que os façam pensar, agir, testar, reformular e validar seus resultados.

Concordamos com Mariotti (2001), ou seja, pensamos que a prova não deve ser objeto de estudo apenas nos cursos de Exatas da Graduação. Ao contrário, deve ser uma preocupação dos pesquisadores em Educação Matemática e professores de Matemática, no sentido de reconhecer a pertinência e importância desse ensino.

A questão de introduzir ou não a prova na Matemática Escolar, leva a consideração de outras questões que estão ligadas às finalidades e tipos de provas. Pretendemos esclarecer e fazer considerações sobre a diferença entre prova e demonstração, e sobre os tipos de provas considerados por pesquisadores em Educação Matemática.

Para Balacheff (1991) e Duval (1992-1993), (apud Fonseca e Fernandes 2003, p. 3), com a argumentação não se pretende provar a verdade de uma afirmação, mas obter a concordância de outrem para a validade de uma dada afirmação, convencer o interlocutor, enquanto que a prova teria que garantir a verdade.

Para que os argumentos apresentados em defesa das afirmações matemáticas possam constituir uma prova, estes devem ser convincentes, gerais, rigorosos, completos e resistentes, conforme afirmam Fonseca e Fernandes (2003).

Isto levou Balacheff (1987) a propor a existência de três níveis diferentes de validação. Assim, para esse autor, os níveis são de *explicação, prova e demonstração.* A explicação encontra-se no nível do indivíduo falante, que estabelece e garante para si a validade dos raciocínios. A prova surge subdividida em quatro níveis, o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental, sendo que cada um será destacado cuidadosamente na seção 2.2. E para finalizar, a demonstração, onde a validade dos raciocínios é garantida via dedução, é um tipo de prova com forma estritamente codificada e formal (Fonseca, 2005). Complementaremos essas idéias nos itens que seguem.

2.1 Educação Matemática, Argumentação e Prova

Neste item, vamos detalhar o que pensam alguns dos Educadores Matemáticos e as conclusões que chegaram através de seus trabalhos, a respeito do ensino e aprendizagem da argumentação e prova, sobretudo, na faixa etária 14-16 anos, retomando assim a discussão iniciada no início deste capítulo.

Balacheff (1987) distingue duas categorias de provas produzidas pelos alunos, provas essas que mostram o status do conhecimento em questão. São elas: as *provas pragmáticas* e as *provas intelectuais* (ou *conceituais*). As provas pragmáticas são explicações advindas de ações diretas sobre certas representações dos objetos matemáticos, e são, em geral, explicações fundadas em casos particulares. Já as provas intelectuais (ou conceituais) têm suas ações centradas no discurso lógico-dedutivo e no controle da generalidade dos objetos matemáticos e de suas relações (Balacheff, 1987, apud Gravina 2001, p. 66).

No processo de ensino, objetiva-se que o aluno tenha condições de fazer uma passagem das provas pragmáticas para as provas intelectuais. No entanto, diversos estudos e, em particular o de Balacheff (1987), discutem a dificuldade nessa passagem, considerando o processo de elaboração de provas conceituais bastante complexo para o aluno. Esse autor ainda destaca quatro diferentes formas de validação dentro dessas categorias, são elas: o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental.

No empirismo ingênuo, o aluno justifica a validade de uma determinada propriedade a partir da análise de poucos casos ou apresentando alguns exemplos para os quais a referida propriedade é válida e conclui a partir daí que a propriedade é sempre verdadeira. Este tipo de validação é considerado por

Balacheff (1987) como rudimentar e insuficiente, porém, constitui um primeiro passo no processo de generalização.

Já na experiência crucial, o aluno considera um exemplo com algumas propriedades, buscando a validação para este caso ”especial”, e posterior a esta etapa, toma com verdadeiro para o caso geral.

Tanto o empirismo ingênuo como a experiência crucial referem-se a argumentos empíricos, sendo consideradas provas da categoria pragmática.

No exemplo genérico, o aluno justifica suas razões que validam a propriedade em estudo, fazendo uso de um representante ou exemplo, mas que têm propriedades próprias e represente uma determinada classe e desta forma, através de operações ou transformações dentro desta classe, chega-se à validade da afirmação. E este nível encontra-se numa fase intermediária, tanto na categoria de prova pragmática, como na categoria de prova intelectual, dependendo da natureza efetiva da ação sobre o exemplo. Se for uma ação baseada somente no caso particular, fica-se na categoria de prova pragmática, se for apoiada num caso particular somente como suporte para expressar um raciocínio generalizador, passa-se para categoria de prova intelectual.

E, por último, na experiência mental, a explicação do aluno é desprendida de concretização em representante particular, sua argumentação flui através de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação, e não mais relacionados a situações particulares. E segundo Balacheff (1987), o nível de experiência mental marca claramente a produção de uma prova intelectual.

Procuraremos discutir ao longo deste trabalho que, as condições e possibilidades do aluno progredir de um nível de validação pragmático para os o nível conceitual.

Para isso, tomamos o processo de argumentação e prova como sendo mais amplo, com diferentes fases, desde a formulação de conjecturas, levando o aluno a pensar, descobrir, testar resultados, verificar e validar, permitindo seu desenvolvimento cognitivo.

Esse nosso objetivo está de acordo com o que traz os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN – Ensino Médio, 1999, p. 259) ao elencarem as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática. Estas são apresentadas em três partes de igual importância, da qual destacamos duas que nos interessam particularmente:

- *Representação e Comunicação*

O aluno deve ler e interpretar textos matemáticos, utilizar representações matemáticas, como tabelas, gráficos e expressões, produzir textos matemáticos adequados, dentre outros.

Esta segunda parte é especial, pois nela os PCN confirmam a necessidade dos alunos se envolverem com situações de aprendizagem que valorizam a argumentação e a prova.

- *Investigação e Compreensão*

Espera-se que o aluno identifique o problema, procurando, selecionando e interpretando as informações relativas ao mesmo, formule hipóteses e preveja resultados, selecione estratégias de resolução de problemas, interprete e critique resultados numa situação concreta, diferencie e utilize raciocínios dedutivos e indutivos, faça e valide conjecturas e produza argumentos convincentes.

Reconhecemos a importância de incluir no dia-a-dia escolar, atividades que levem os alunos a desenvolverem tais competências e habilidades.

Em relação ao uso do computador, podemos citar Pietropaolo (2005), que diz que a prova decorreria da necessidade do aluno, diante de um problema na tela do computador, ou que, a computação vem trazer novos elementos para o convencimento da validade de teoremas matemáticos, permitindo uma visão da verdade, explorando a Matemática in loco. Ou ainda, segundo De Villiers (2001), quando diz que a interação dos alunos com os programas matemáticos é capaz de incitá-los ao estudo, ao desenvolverem atividades de investigação. Essas atividades, além de favorecerem o convencimento do aluno quanto a determinados resultados, proporcionarão o levantamento de diversas questões, como o porquê das coisas funcionarem de determinadas maneiras.

De fato, um ambiente de Geometria Dinâmica, como o Cabri-Géomètre, permite formular e reformular conjecturas com rapidez, identificando as verdadeiras e descartando as falsas, a partir da produção de contra-exemplos e ferramentas de validação experimental.

Desta forma, podemos considerar que a utilização do computador no ensino de Matemática pode ser um elemento facilitador nesta difícil tarefa de argumentar e provar, conforme já indicamos no Capítulo 1.

2.2 Funções e Tipos de Provas

Vamos destacar algumas funções das provas na interpretação do pesquisador De Villiers (2001), nas quais vamos nos apoiar em nosso estudo.

Segundo esse autor, um dos problemas que encontramos para lidar com as provas, é que para provar uma propriedade ou um teorema, o aluno precisa reconhecer alguma necessidade para a prova. No entanto, na maioria dos casos, sobretudo em Geometria, ele percebe visualmente ou verifica que a propriedade é verdadeira através de um exemplo, e isto já constitui um argumento satisfatório, ou mesmo uma prova. Para De Villiers (2001, p. 31) "uma prova apenas tem significado quando responde às dúvidas dos alunos, quando prova o que não é óbvio" e, continuando afirma que "a necessidade, a funcionalidade da prova pode apenas emergir em situações em que os alunos têm incertezas quanto à verdade das proposições matemáticas", e partindo deste princípio, temos o desafio de preparar atividades para levar o aluno a essas necessidades, a essas incertezas e poder, desta forma, engajá-los na atividade e buscar justificativas para suas respostas.

As funções de uma prova, segundo De Villiers (2001), que devem ser valorizadas no Ensino de Matemática, são elas:

- *Verificação*: neste caso, o aluno considera a afirmação e busca verificar, fazendo testes, figuras ou gráficos, se a afirmação é verdadeira. Esta função é a mais enfatizada no ensino e motiva o levantamento de conjecturas;.

- *Explicação*: esta função tem um grau de importância muito grande, pois, quando se realiza uma prova em matemática, não é somente para concluir a verdade sobre a afirmação. Em geral, com a verificação já se supõe a validade, a prova serve então para explicar o porquê dessa validade. A prova ajuda no entendimento da propriedade ou afirmação que se quer verificar, e desta forma, a prova não serve apenas como um conjunto de regras a serem seguidas e ao finalizá-la saber que tal propriedade é verdadeira. Desta forma, consideramos esta função da prova, que é a de explicar, como sendo uma das mais importantes.

- *Sistematização*: não podemos deixar de lado a organização dos vários resultados obtidos num sistema de axiomas, conceitos principais e teoremas, pois os resultados que são assumidos como verdadeiros, ou seja, que não precisam de prova, os chamados axiomas ou postulados, e resultados já provados, e por isto considerado como verdadeiros, serão certamente usados como argumentos para a construção de novas provas.

- *Descoberta*: é possível durante uma prova ou uma demonstração, que ocorram descobertas, as quais podem ser de vários tipos. Por exemplo, a descoberta de uma nova demonstração para o mesmo teorema[4]. Ou ainda a descoberta de um novo conceito, de um novo resultado que também precisa ser verificado, explicado, sistematizado e provado. É o que aconteceu quando os matemáticos Lobachesvisky, Bolyai e Gauss, trabalhando e questionando a Geometria Euclidiana, sobretudo o 5° Postulado de Euclides, desenvolveram modelos de Geometrias não-Euclidianas.

- *Comunicação*: quando se chega ao fim de um resultado, é importante comunicar este resultado a um colega, a professores, a fim de colocá-la num fórum de discussão para análise e comentários, tendo, portanto, a prova um

[4] O matemático Elisha Scott Loomis (1940) compilou em seu livro "The Pythagorean Proposition", 370 provas distintas para o teorema de Pitágoras.

caráter de comunicação entre as pessoas e de transmissão de conhecimento matemático. Por isso, consideramos importante que os sujeitos envolvidos tenham algo em comum, que é o mínimo de familiaridade possível com o assunto para haver uma interação e um acompanhamento e entendimento dos resultados obtidos.

- *Desafio Intelectual*: para finalizar, não se pode deixar de falar que para ir a busca de uma prova, é preciso sentir-se desafiado, é preciso que o exercício da prova seja uma atividade motivadora, como citamos anteriormente. Desta forma, o desafio intelectual torna-se uma espécie de motivação para ir a busca da prova, sem desistir no meio do caminho, ou mesmo, desistir sem tentar. E para muitos, claramente há uma enorme satisfação ao chegar ao final de uma prova, sendo esta uma realização.

Com raras exceções, professores de Matemática acreditam que apenas a prova fornece a certeza para um matemático e que é a única forma de estabelecer a validade de uma conjectura. No entanto, a prova não é um requisito necessário para a convicção, pelo contrário, a convicção é um pré-requisito importante para a busca de uma prova. De Villiers (2001, p. 32) diz que: "porque razão gostaríamos, por vezes, de tentar provar certas conjecturas, se não estivéssemos já convencidos da sua verdade?". Esta pergunta é bem interessante, pois como já mencionamos, o papel mais enfatizado da prova é o de verificação, quando na verdade, essa verificação já está feita quando se parte para a prova. Aliás, existem atualmente conjecturas e teoremas que foram demonstrados recentemente, depois de ficarem sem solução por séculos. Podemos citar o "Último Teorema de Fermat", que afirma: "Sendo n um inteiro maior que dois não há valores inteiros positivos x, y, z, tais que $x^n + y^n = z^n$" (Boyer, p. 243) e a "Conjectura de Poincarè", recentemente demonstrada. Tem-se também problemas, para os quais, até o momento nenhum matemático apresentou a demonstração. É o caso da "Função Zeta de Reimann", definida da seguinte maneira: $\varsigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, $R_e(z) > 1$, e que atualmente tem sido utilizada pelos especialistas para estudar o caos. Riemann levantou a hipótese de que o zero não trivial da função zeta tem sempre parte real igual a ½. Não é nosso objetivo o aprofundamento nestes teoremas ou em problemas deste tipo, só queremos citar o quanto a convicção de que uma conjectura é verdadeira antecede e pode motivar e encorajar a busca de uma prova.

Segundo De Villiers (2001), é aconselhável introduzir cedo outras funções da prova e dar atenção aos aspectos relativos à comunicação, negociando e clarificando com os alunos os critérios para a evidência aceitável, a heurística[5] subjacente e a lógica da prova.

Os estudos sobre provas na Educação Matemática têm-se intensificado fora do Brasil, por exemplo, na França, na Itália e na Inglaterra. No Brasil, até pouco tempo atrás, não havia muitos trabalhos a respeito, no entanto, começa-se ter certa preocupação com o assunto, tendo em vista as diversas pesquisas que estão sendo desenvolvidas.

É possível perceber a urgência em estudar este tema devido às discussões que ocorreram nos dois principais congressos internacionais de Educação Matemática, que foram o The International Group for the Psychology of

[5] Conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou a resolução de problemas.

Mathematics Education (PME) e International Congress on Mathematics Education (ICME) (Pietropaolo, 2005).

Este último foi realizado em Copenhagem no ano de 2004, sendo que dois grupos de trabalho tiveram como tema “Reasoning, Proof and Proving in Mathematics Education”.

Vemos então, como dito anteriormente, que a preocupação de introduzir seqüências de ensino que levem o aluno a situações de aprendizagem envolvendo argumentação e prova é pertinente para o contexto brasileiro. Pietropaulo (2005) comenta diversos trabalhos nesse tema. Embora os enfoques e ferramentas teóricas sejam diferentes, não há discordância entre os autores sobre a necessidade de mudanças nos currículos, no sentido de abordarem a questão da prova desde as séries iniciais.

Os pesquisadores reconhecem que a prova, sendo um aspecto fundamental da atividade matemática, deveria estar presente também na formação do aluno. Concordamos plenamente com esta consideração.

Sabemos que as pesquisas internacionais, nacionais e os PCN apontam nesta direção, que através de situações de aprendizagem que envolvam os alunos em atividades motivadoras, levando-os a questionar, a conjecturar, a testar, argumentar e provar, sem esquecer-se do auxílio de uma ferramenta tecnológica, em nosso caso o computador (e, particularmente, o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre), é possível modificar e melhorar o ensino de Matemática. Acreditamos nisso, e queremos, com este trabalho de pesquisa mostrar esta possibilidade de mudança e, mais especificamente, a viabilidade do trabalho sobre provas com alunos de 14-16 anos.

2.3 A Prova na História da Matemática

Atualmente, tem-se considerado a História da Matemática como importante ferramenta no Ensino da Matemática e não poderia ser diferente, uma vez que, estudar, compreender e valorizar todo conhecimento e material que os Matemáticos do passado nos deixaram é, sem dúvida, aprender e vivenciar a Matemática que temos hoje estruturada. O que dizer de Tales de Mileto (600 a.C.)? E de Pitágoras? Que segundo alguns historiadores, foi discípulo de Tales. E de Euclides de Alexandria com sua maravilhosa obra “Os Elementos”? Sabemos que toda a Geometria trabalhada nas escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio é Euclidiana. E porque não estudar a vida e o modo como esses brilhantes matemáticos e outros, claramente, que deveriam ser citados, trabalharam cada qual em sua época, para o desenvolvimento da Matemática?

Iniciando com os Egípcios, tem-se que eles não consideravam uma prova como um conjunto de tarefas apoiadas numa estrutura axiomática. Um resultado era considerado válido, para eles, apenas pela funcionalidade que tinha na realidade em que precisavam empregar.

Na história de Heródoto (c. 484 – 425 a.C.) encontra-se a famosa frase “O Egito é uma Dádiva do Nilo” e será em busca de respostas aos desafios apresentados pelo rio que se encontra a origem da ciência Egípcia, em particular, de sua Geometria (Polcino e Bussab, 1999). Isso porque o Egito floresceu no meio de um imenso deserto estéril, onde nenhuma vida seria possível, não fosse o rio fornecer água, transporte e, também, húmus, graças às inundações anuais.

Sabiam por exemplo que o ano tinha 365 dias, pois, “observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela cão, se levantava a leste logo antes do Sol. Observando que esses surgimentos helíacos de Sirius, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias" (Boyer, p.8) e consideravam o número π igual a 3 $\frac{1}{6}$. Os egípcios tinham uma regra especial para calcular a área do círculo e consideravam que: "a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades (Boyer, p.12). Considerando a fórmula moderna podemos verificar que para os egípcios o valor de $\pi \cong 3{,}16$.

Além disso, deixaram ao mundo as Pirâmides, construções essas que mostra o quanto eles usaram do conhecimento matemático que tinham para dar respostas às necessidades que enfrentavam no dia-a-dia.

Não é possível dizer exatamente qual foi a trajetória do desenvolvimento da noção de prova em Matemática, é comum aceitar que este desenvolvimento tenha sido iniciado com os gregos, pois nenhum documento anterior aos autores gregos dos séculos VII e VI a.C., Tales e Pitágoras, por exemplo, permite dizer o contrário.

Os primeiros gregos que escreveram textos a respeito de provas foram Platão (c. 427 – 347 a.C.) e Aristóteles (c. 384 – 322 a.C.).

Platão escreveu a respeito do método dedutivo na República que:

"*Você está a par de que os estudantes de Geometria, Aritmética e Ciências similares assumem os números pares e ímpares, as figuras, os três tipos de ângulo e coisas semelhantes em seus diversos ramos de ciência; estas são as hipóteses, que se supõe que eles e todo mundo sabem... e eles* *começam com elas e vão em frente até chegarem, de maneira consistente, à sua conclusão".* (Kline, 1972, apud Polcino e Bussab, 1999. p. 51).

A Academia de Platão, provavelmente, sistematizou e incentivou o uso do raciocínio por redução ao absurdo, que consiste na aceitação de uma tese e na prova de seu contrário. Também divulgaram o método analítico, que é resolver um problema detendo-se nas partes constituintes e a prova por destruição de alternativas, se um evento pode se dar de três formas distintas e duas delas não atendem às condições do problema, então a terceira alternativa é a correta.

Aristóteles provou por absurdo que o lado do quadrado e sua diagonal são incomensuráveis entre si. Esta demonstração causou uma crise na Matemática Grega, pois para a Escola Pitagórica todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados por meio dos números inteiros. Foi considerado o "Mestre", ou seja, aquele que tinha abarcado toda a filosofia e a ciência da humanidade. Foi, acima de tudo, o sistematizador, senão o criador da ciência da Lógica.

Ainda assim faltava uma estruturação preliminar composta de noções, postulados e definições. E tudo isso, é encontrado na grandiosa obra de Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.): Os Elementos, livro composto de XIII volumes.

O maior mérito da obra de Euclides reside na originalidade da apresentação e no seu plano geral: o enunciado de axiomas e postulados logo no início, a cuidadosa lista de definições que antecede o desenvolvimento de cada parte e a organização dos teoremas em ordem crescente de dificuldades. E partindo de um pequeno conjunto de postulados poder provar centenas de teoremas.

Posterior a Euclides, é possível destacar outros matemáticos que tiveram importância no cenário de contribuição para o desenvolvimento desta ciência, são eles: - Apolônio de Perga (c.262 – 190 a.C.), que trabalhou com as cônicas, provando que todas as cônicas podiam ser obtidas a partir de um único cone apenas variando a posição relativa do plano seccionador, Arquimedes de Siracusa (c. 285 – 212 a.C.), o contador de areia, é com ele que se tem a primeira tentativa científica para se obter o valor aproximado do π. Podemos continuar a lista de brilhantes matemáticos da Antiguidade Clássica, citando Ptolomeu (c. 100 – 168 d.C.) e sua grandiosa obra: O Almagesto, livro formado de XIII volumes, tratando de Astronomia, Geometria e Trigonometria. Tem-se aí um declínio da Matemática Grega, com a ascensão do Império Romano que muito pouco, ou nada, contribuíram para o desenvolvimento da Matemática em toda a sua história (Polcino e Bussab, 1999).

No decorrer da Idade Média, o centro de produção matemática se deslocou do Ocidente para o mundo árabe e hindu. Mesmo validando seus resultados, eles não priorizaram as demonstrações tal como fizeram os gregos.

Do Renascimento até o século XIX houve um resgate da Geometria Euclidiana, juntamente com o nascimento do Cálculo Diferencial e Integral com Newton e Leibniz, e da Geometria Analítica com Descartes.

No final do século XIX a prova era uma atividade desenvolvida por alguém que procurava convencer a si mesmo e aos outros a respeito da veracidade de uma proposição, não apenas do ponto de vista racional, mas também do psicológico. Foi o matemático G. Frege (1848-1925) um dos que contribuiu para a reformulação da idéia de prova, estabelecendo um modelo formal.

No final do século XVIII e início do XIX, a Matemática sofre uma transformação essencial em sua natureza, tem-se o surgimento da Matemática

Pura, há uma reconstrução da análise sobre bases não-geométricas, sendo que o filósofo Immanuel Kant teve um papel destacado na evolução deste termo.

Neste momento da história retoma-se o 5° Postulado de Euclides que modificado equivale à: Por um ponto fora de uma dada reta, pode-se traçar uma e apenas uma reta paralela à reta dada. Os gregos alegaram a falta de auto-evidência deste postulado e procuraram prová-lo partindo dos outros, não obtendo sucesso. Isso só ocorreu no século XIX com os trabalhos de Riemann, Lobachesvisky, Bolyai e Gauss, no entanto, provaram a impossibilidade de deduzir o postulado das paralelas a partir dos outros.

É possível perceber como no decorrer da história a questão da prova sempre inquietou os matemáticos e hoje não pode ser diferente, pois, quando se busca provar uma proposição, um teorema, além de colaborar para validar tal resultado, é possível descobrir um novo resultado, ou seja, a prova tem uma função de descoberta, como diria De Villiers (2001). Podemos exemplificar com o surgimento da Geometria não-Euclidiana, pois ao questionar o 5° Postulado de Euclides visualizou-se a possibilidade de: dada uma reta e um ponto fora dela, existir mais de uma reta paralela a reta dada, ou simplesmente não existir reta paralela a reta dada.

2.4 Elementos de Geometria envolvidos nas Situações de Aprendizagem

Vamos destacar neste item, um breve estudo sobre a posição relativa entre duas retas e algumas definições e propriedades de figuras geométricas abordadas em nossa seqüência. Acreditamos que os alunos já tenham sido introduzidos a algumas dessas noções, devendo outras serem explicitadas e/ou desenvolvidas ao longo das atividades, conforme apresentaremos no Capítulo 3.

As atividades iniciais envolvem retas paralelas, concorrentes e reversas, ou seja, propõe a discussão de posições relativas entre duas retas. Acreditamos que os alunos são familiares às relações de paralelismo e perpendicularismo no plano e que estenderão essas noções ao espaço. Quanto às retas reversas, provavelmente não seja uma relação conhecida dos alunos, ou se o é, acreditamos ser necessário uma retomada, apresentando a definição de retas reversas, da seguinte maneira:

Def.: *Duas retas são reversas quando todo plano que contém uma delas não contém a outra.*

No decorrer das atividades, quando os alunos trabalharem com as diagonais da face do cubo e diagonais do cubo, terão que analisar o que acontece com as diagonais do quadrado e do retângulo. Assim, deverão mobilizar a definição de quadrado e retângulo, e também, as propriedades dessas duas figuras geométricas para justificar as respostas dadas as questões envolvendo essas figuras. Acreditamos que o quadrado é bastante familiar aos alunos, inclusive às propriedades de suas diagonais: cortam-se ao meio, são congruentes e perpendiculares.

Talvez o mesmo não ocorra com o retângulo e pode acontecer de os alunos confundirem e considerarem que as diagonais de um retângulo qualquer se interceptam formando um ângulo de 90°. Se necessário, faremos algumas retomadas coletivamente, de forma interativa, buscando retomar e rever as definições e propriedades dessas duas figuras, lembrando que foram objetos de construção na fase de familiarização com o Cabri.

Nas atividades finais da seqüência, os alunos precisarão identificar um quadrilátero que é um paralelogramo. Também acreditamos que os alunos dominem essa noção, mobilizando uma caracterização de quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos, geralmente enfatizada no ensino.

Como veremos mais adiante, todas as atividades serão desenvolvidas com referência a um cubo, sólido geométrico com o qual acreditamos que os alunos estejam familiarizados. Estaremos atentos a retomada dos elementos e propriedades que se fizerem necessárias, em particular, auxiliando os alunos na identificação das diagonais do cubo.

Uma das principais atividades com a qual pretendemos que os alunos se engajem em um processo de argumentação e prova envolve um quadrilátero reverso. Acreditamos que com a introdução das retas reversas no início da seqüência e um trabalho experimental (cf. será descrito no Capítulo 3), possamos levar os alunos a estabelecerem as características desse tipo de quadrilátero, diferenciando-o do polígono de 4 lados (quadrilátero plano).

Os conceitos que apresentamos acima são aqueles que acreditamos serem familiares aos alunos ou que serão introduzidos, de maneira que os alunos possam utilizá-los durante o desenvolvimento da seqüência de atividades para argumentar e/ou provar as conjecturas elaboradas ou afirmações propostas.

Em relação à Geometria Espacial propriamente dita, tema de nosso estudo, apresentamos abaixo algumas considerações que julgamos importantes.

2.5 A Geometria Espacial

A Geometria Espacial está presente na Matemática desde o próprio surgimento desta Ciência tão encantadora.

Segundo Polcino e Bussab (1999) no Papiro de Moscou escrito por volta de 1890 a.C., é possível encontrar a fórmula para o cálculo do tronco da pirâmide $V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$, onde *h* é a altura do tronco, *a* o lado da base e *b* o lado da base do topo.

O Papiro de Rhind, semelhante ao de Moscou, mostra-nos que os egípcios conheciam a fórmula para calcular o volume de uma pirâmide $V = \frac{h.S}{3}$, sendo *h* a altura da pirâmide e *S* a área da base.

Temos, também, Tales de Mileto (625-546 a.C.) medindo a altura de uma pirâmide.

"Observando o comprimento de sua sombra (sombra da pirâmide) no momento em que nossas sombras são iguais a nossa própria altura". (Polcino e Bussab, 1999, p. 22).

Podemos considerar, também, um dos três problemas clássicos, que é o da Duplicação do Cubo. Existem muitos relatos a respeito deste problema, um deles é:

"Contado numa carta supostamente de Erastóstenes a Ptolomeu, narrando que Minos, insatisfeito com a tumba construída para abrigar o corpo de seu

filho Glauco, ordenou a seus construtores que duplicassem o volume do mausoléu" (Polcino e Bussab, p. 41).

Não poderíamos deixar de citar *Os Elementos* de Euclides, que dedicou os três últimos volumes de sua obra para a Geometria Espacial.

Euclides apresenta algumas definições, tais como:

- Sólido é o que tem comprimento, largura e profundidade.
- A extremidade de um sólido é uma superfície.
- Uma reta é perpendicular a um plano quando é perpendicular a todas as retas que a cortam e estão contidas no plano.

Queremos com esta modesta introdução histórica da Geometria Espacial, mostrar sua importância para o desenvolvimento da própria Matemática. E no contexto escolar não é diferente, essa parte da Geometria permite o desenvolvimento de diversas habilidades e competências. Sabemos que hoje, para resolver atividades relacionadas à Geometria Espacial, é preciso recorrer ao plano, e depois retornar ao espaço, ou ainda recorrer à Álgebra e às Grandezas e Medidas, para encontrar relações entre elementos do objeto em estudo e assim obter o resultado esperado.

Em relação à Geometria Espacial, os PCN+ Ensino Médio (2002, p.120) relatam que:

"A Geometria, ostensivamente presente na formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços".

Pelos motivos apresentados acima, temos que a Geometria Espacial é considerada de grande importância para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, não podendo ficar fora dos planos de ensino dos professores. Salientamos que mesmo fazendo parte do currículo, é comum não apresentá-la, como temos observado em nossa prática diária.

No Ensino Médio, em termos de conteúdos, a Geometria Espacial deve ser apresentada, segundo os PCN+ Ensino Médio (2002, p.122) da seguinte maneira:

- *Elementos dos poliedros, sua classificação e representação;*
- *Sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.*
- *Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções;*
- *Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos;*
- *Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade;*
- *Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas, e reconhecer o valor da demonstração para perceber a*

Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

Está última consideração vem ao encontro de nosso estudo, pois reforça a importância da prova em Matemática, mostrando assim que não podemos desprezar as atividades que levem os alunos a justificar e validar.

Considerando a parte métrica, os alunos devem efetuar cálculos de áreas, volumes, devem fazer estimativas e manipular valores exatos e aproximados.

Vemos, portanto, que há muito o que desenvolver no Ensino Médio com relação à Geometria Espacial, e como citamos anteriormente, não podemos desprezá-la, até pela sua proximidade com o espaço físico.

Os pesquisadores Parzysz (1995) e Duval (1995) nos trazem, por meio de suas pesquisas, elementos que nos ajudarão a analisar o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos, particularmente, em Geometria.

Parzysz (1995) apresenta um modelo para um quadro teórico do ensino de geometria, no qual destaca quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico. São elas:

- ***A geometria concreta**, conhecida também como nível G0; neste nível os objetos são materializados, por exemplo, se um aluno precisa provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e para isto considera um triângulo feito de papel, corta os ângulos e os junta formando assim um ângulo reto e daí conclui que a afirmação é verdadeira, segundo Parzysz, o aluno encontra-se no nível G0.*
- ***A geometria espaço-gráfica**, ou nível G1; neste nível tem-se a geometria das representações figurais e gráficas, neste nível os objetos são*

bidimensionais e os desenhos são feitos numa folha ou num computador e a justificativa é feita pelo olhar. Voltando ao exemplo da soma dos ângulos internos de um triângulo, se o aluno desenhar um triângulo, medir com auxílio de um transferidor (ou usar o Cabri) e verificar que a soma é igual a 180° e comparar seu resultado com os colegas e concluir que a afirmação é verdadeira, encontrar-se-á no nível G1.

- ***A geometria proto-axiomática**, ou nível G2; neste nível os conceitos são objetos teóricos e as provas dos teoremas, das afirmações, são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo; os objetos e o caminho de validação são localmente os mesmos que na geometria axiomática, mas não há necessidade de explicitar um sistema de axiomas. No exemplo citado acima, o aluno pode traçar uma paralela a um dos lados e usar o fato de que retas paralelas determinam ângulos alternos internos congruentes (sem justificar esse resultado) e provar assim que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, será considerado um aluno no nível G2.*

***A geometria axiomática**, ou nível G3; neste nível os axiomas são explicados completamente (apud Luis, 2006. p.08).*

Ao estudar objetos em três dimensões, geralmente representamos esses objetos em um suporte bidimensional, ocorrendo assim perda de informações em relação ao objeto inicial. Neste caso, Parzysz (1988) destaca que dois pólos são instituídos, a saber:

- ***pólo do visto****, consiste em representar um objeto tal qual ele se apresenta aos olhos do sujeito, baseado em sua observação e imagem visual.*
- ***pólo do sabido****, consiste em representar as propriedades e as relações do objeto que o sujeito julga importantes* (apud Rosalves, 2006).

Duval (1995) por sua vez, interessado nos registros de representação e referindo-se ao registro usual da Geometria ensinada – o figural – destaca quatro maneiras de apreender uma figura: a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva, a apreensão operatória e a apreensão seqüencial.

- **Apreensão Perceptiva:** é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica.

- **Apreensão Discursiva:** é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, pois os mergulha numa rede semântica de propriedades do objeto.

- **Apreensão Operatória:** é uma apreensão central sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e de suas reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem.

- **Apreensão Seqüencial:** é uma apreensão solicitada na construção de uma figura geométrica com a ajuda de instrumentos (régua, compasso, software).

Usaremos constantemente esses conceitos em nossas análises buscando interpretar as respostas dos alunos, identificando em que nível eles se situam e que tipo de apreensão eles fazem das figuras e, nesse caso, como lidam com as relações entre os pólos do visto e do sabido. Como já citamos, estamos propondo uma seqüência de atividades envolvendo a Geometria Espacial e constantemente os alunos estarão construindo ou em contato com figuras (representações figurais), analisando e tomando decisões baseadas no que fazem usando o Cabri e no que sabem e estão vendo na tela do computador. No próximo capítulo, apresentamos essa seqüência e elementos de sua análise a priori.

CAPÍTULO 3

Situações de Aprendizagem e Elementos de Análise *a priori*

Neste capítulo, vamos apresentar as atividades desenvolvidas e analisadas pelos professores na segunda fase do projeto AProvaMe. Tentaremos também apresentar alguns elementos de análise a priori, indicando os objetivos de cada atividade ou tarefa, as possíveis soluções dos alunos e o papel do Cabri na proposta.

São atividades envolvendo conceitos de Geometria Espacial, com as quais queremos explorar as noções de paralelismo e perpendicularismo com o auxílio do Cabri-Géomètre. Dentro desta exploração, consideraremos o estudo das posições relativas entre retas, abordando as retas reversas e introduzindo o conceito de quadrilátero reverso.

Para resolver as quatro atividades propostas, os alunos receberão um arquivo do Cabri, contendo a figura de um cubo em perspectiva cavaleira, figura esta que será chamada de “Rot Cubo”, pois oferece a possibilidade de movimentar um ponto “Rot” em uma circunferência, o que provoca movimentações específicas e rotações no cubo considerado. Além disso, o ponto extremidade do segmento “lado” permite alterar o comprimento da aresta do cubo (cf. figura abaixo).

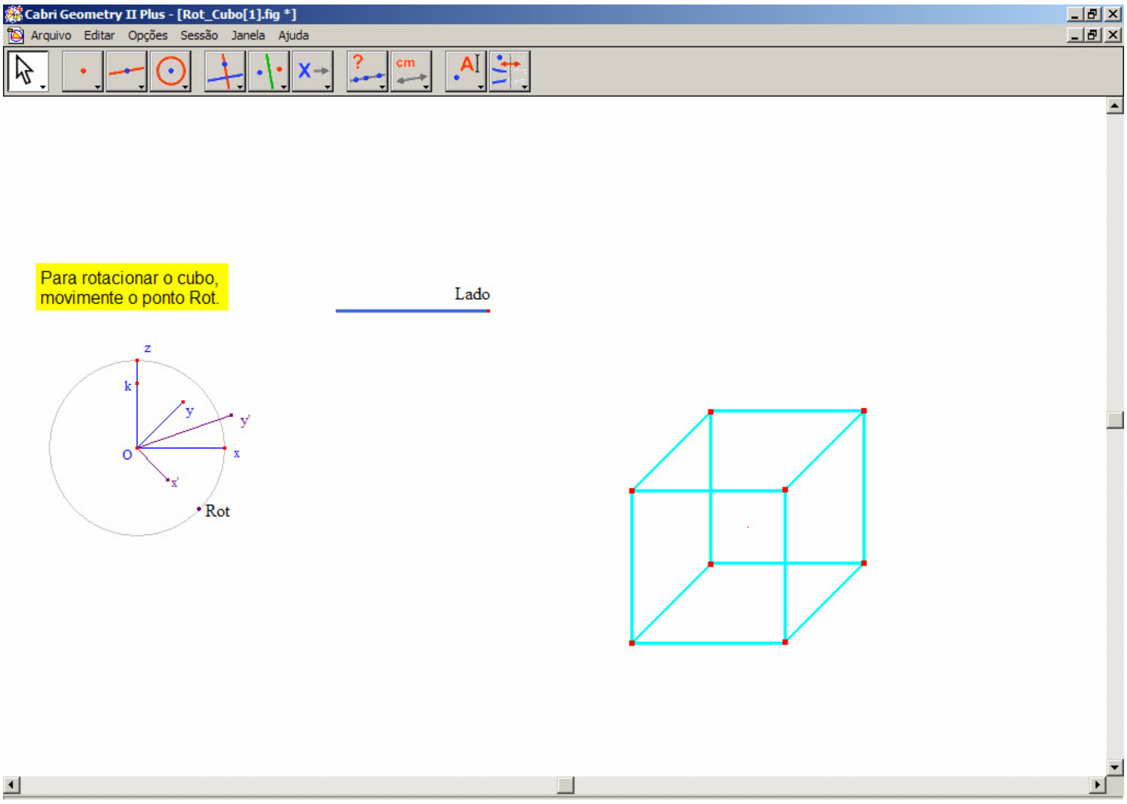


Figura 3.1: Arquivo "Rot Cubo" do Cabri

As atividades serão aplicadas para três duplas de uma Escola Pública do Estado de São Paulo, onde lecionamos. Esses seis alunos estão no Ensino Médio, sendo que dois deles são do 1° ano e quatro do 2° ano, respeitando a faixa etária proposta pelo projeto.

3.1 Atividade 1

Esta atividade tem por objetivo motivar e estimular o aluno a encontrar um caminho, que hoje no ensino de Matemática se faz necessário, que é o caminho da argumentação e da prova.

É uma atividade de Geometria Espacial para ser realizada com o apoio do Cabri-Géomètre.

Este programa permite ao aluno a visualização do que ele está realizando, permite, também, manipular a figura para ter percepção do que está acontecendo e para poder levantar suas hipóteses, fazer considerações de elementos pertinentes à situação e até verificar propriedades invariantes na situação.

Nesta atividade, optamos por usar este sólido geométrico – o cubo – que é bastante familiar aos alunos, para explorar as posições de arestas (ou retas suportes destas) – paralelas, perpendiculares e reversas – e, na seqüência, a noção de quadrilátero reverso.

Uma vez que a figura de um cubo foi disponibilizada, propusemos que os alunos aproveitem essa figura para identificar essas posições, em relação às retas suportes das arestas deste objeto.

Abaixo, reproduzimos a parte A da Atividade 1, tal qual foi apresentada na ficha do aluno.

Atividade 1

Parte A

1) No Cabri 2, abra o arquivo “Atividade_1.fig”. Ele contém a representação de um cubo ABCDEFGH.

a) Trace duas retas, uma que passa pelos pontos A e D e outra que passa pelos pontos B e C.

b) Agora, movimento o cubo, a partir do ponto “Rot” e observe as retas.

c) O que é possível afirmar sobre a posição relativa dessas retas? Justifique sua resposta.

d) Faça o mesmo para as retas definidas por $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, movimentando o cubo a partir do ponto “Rot” e verificando o que acontece. O que você pode afirmar sobre a posição das retas.

e) Considerando as outras retas que contêm dois vértices quaisquer do cubo, indique outros pares de retas que apresentam a mesma posição relativa das retas $\overleftrightarrow{\mathrm{AD}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Obs.: Não se esqueça de salvar sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1A.

Quadro 4: Ficha da Atividade 1 – Parte A

O objetivo desta parte da Atividade 1 é verificar se os alunos têm familiaridade com a noção de retas paralelas e, para isto, devem utilizar a ferramenta do Cabri 2 para o traçado das retas suportes das arestas do cubo, a partir de dois pontos. Acreditamos que os alunos já estejam familiarizados com esta ferramenta, pois tiveram contato com este ambiente de Geometria Dinâmica anteriormente. De fato, realizamos 3 encontros de aproximadamente 1 hora de duração cada, com o objetivo de introduzir os alunos aos comandos básicos do programa, a fim de realizarem as tarefas sem dificuldades.

No item (a), as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, e como foi dito anteriormente, acreditamos que os alunos não encontrem dificuldades para realizar esta tarefa. A figura abaixo ilustra a construção desejada e, por meio da apreensão perceptiva, pretendemos que os alunos identifiquem o paralelismo. Em termos da justificativa, esperamos que os alunos utilizem o fato da face do cubo ser quadrada e que as retas estão definidas por segmentos (lados) paralelos dessa figura.

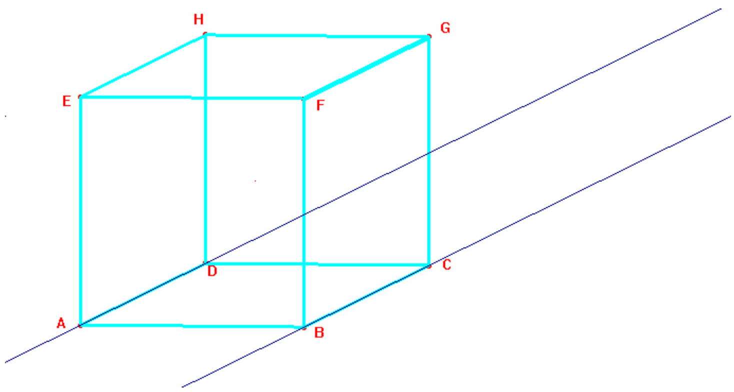


Figura 3.2: Atividade 1 – Parte A: Retas Paralelas

No item (b), o fato de os alunos poderem manipular a figura no Cabri através do ponto “Rot”, permitindo o movimento de rotação da figura, sem perder as suas propriedades, poderá ajudar na percepção e na visualização da posição das retas.

No item (c), esperamos que os alunos caracterizem as retas como não tendo ponto em comum ou atentem para as direções, e que elas pertencem ao mesmo plano. É possível ainda que utilizem a propriedade de paralelismo de lados opostos de um quadrado.

No item (d), o aluno deverá considerar outro par de retas, neste caso, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ e concluir que também são paralelas. Se ele não observar o plano que as contém, pode usar a transitividade, relacionando a reta $\overleftrightarrow{FG}$ à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e está com $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ (item c), concluindo que são paralelas.

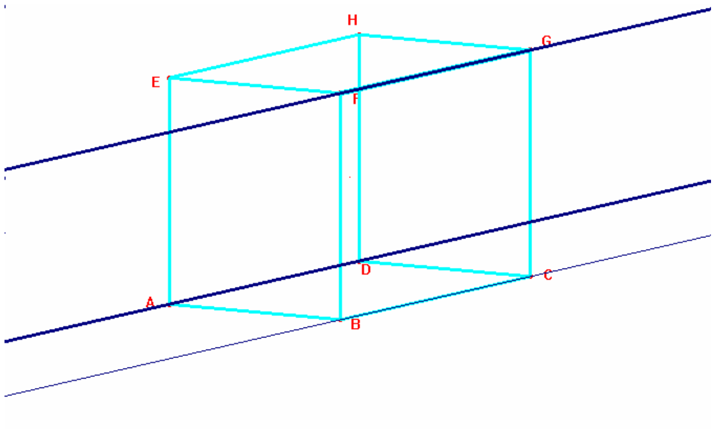


Figura 3.3: Atividade 1 – Parte A: Retas Paralelas

E no último item desta atividade (e), acreditamos que os alunos não terão dificuldades em identificar outros pares de retas paralelas, utilizando, como já citamos, os conhecimentos sobre paralelismo dos lados das faces quadradas do cubo. Este item vem reforçar e explicitar a compreensão do aluno no que se refere ao paralelismo de retas (ou arestas).

Para esta parte da atividade, novamente a representação no Cabri pode facilitar a identificação das retas e de suas posições, correspondendo a uma situação na qual estão envolvidas as apreensões perceptiva e operatória. De fato, a visualização possível em ambientes dinâmicos, como o Cabri, permite aos alunos apreender e experimentar, e apreciar com facilidade a obtenção de vários exemplos (Arcavi e Hadas, 2000).

Além disso, observamos que essa atividade situa os alunos nos níveis G1 e G2 de Parzysz (1995).

A parte B desta Atividade 1 traz a mesma proposta, só que desta vez, com relação a retas perpendiculares. A página que segue traz o enunciado desta parte da atividade.

Atividade 1

Parte B

a) Ainda considerando o cubo ABCDEFGH, no arquivo dado, trace as retas definidas pelos pontos C e D e pelos pontos C e G. Movimente a figura por meio de ponto “Rot” e observe as retas criadas.

b) Elas se interceptam? Baseado em que você pode afirmar isso?

____

____

c) Qual o ângulo formado entre elas? Explique sua resposta.

____

____

d) Você sabe o nome que essas retas recebem?

____

____

e) Considerando novamente o cubo, existem outros pares de retas nesta mesma situação ou posição das retas?

____

____

____ f)

Suponha que um aluno traçou as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, depois mediu o ângulo formado entre elas e verificou que:

( ) é diferente de 90°, logo as retas não são perpendiculares.

( ) é 90°, portanto as retas são perpendiculares.

( ) é diferente de 90° porque o cubo foi construído em perspectiva, porém deve ser considerado 90°, pois as faces do cubo são quadradas.

Obs.: Não se esqueça de salvar sua figura nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1B.

Quadro 5. Ficha da Atividade 1 – Parte B

Nos itens (a) e (b), o aluno deve traçar as retas indicadas, movimentar a figura e observar o que ocorre. Novamente, pretendemos ressaltar a importância de movimentar e manipular a figura para visualizar, motivando o aluno a buscar e identificar os invariantes da figura.

As retas têm um ponto de intersecção - o ponto C - e acreditamos que o aluno não terá dificuldade para identificá-lo. Aliás, isso é possível antes mesmo de traçá-las, analisando os pontos que determinam as retas e observando que ambas passam por C. A representação no Cabri só vem reforçar a existência desse ponto em comum.

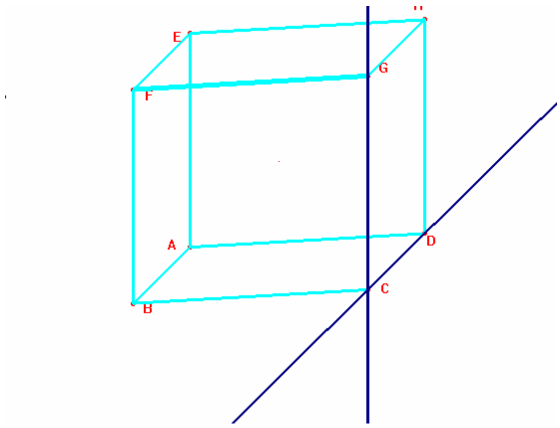


Figura 3.4: Atividade 1 – Parte B: Retas Perpendiculares

No item (c), os alunos devem identificar o ângulo formado entre as duas retas. Esperamos que respondam 90° (ou ângulo reto), novamente considerando a face quadrada do cubo, isto é, espera-se que verifiquem que são retas suportes a lados consecutivos de um quadrado, logo, interceptam-se formando um ângulo de 90°. É possível que os alunos utilizem a ferramenta "Medida de Ângulo" do Cabri para medir o ângulo entre as retas. Neste caso, não obterão a medida exata, e esta questão será retomada no último item.

O item (d) foi proposto para introduzir a nomenclatura. Acreditamos que a maior parte dos alunos já conheça a expressão “retas perpendiculares”, associada a ângulo reto. Além disso, este termo aparece no fim do item f da atividade, e de alguma maneira, os alunos poderão relembrá-lo ou deduzi-lo.

Já o item (e) tem o objetivo de fazer com que os alunos identifiquem no cubo outros pares de retas perpendiculares, mostrando assim que são capazes de identificar e validar o que fizeram nos itens anteriores.

E para finalizar esta parte, colocamos um exercício que pode causar polêmica. O motivo da polêmica é que medindo o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, encontra-se uma medida diferente de 90°. Isso se deve ao fato do cubo estar representado por projeção, em um suporte bidimensional, não conservando todas as suas propriedades no desenho. Nosso intuito é chamar a atenção dos alunos para este aspecto, levando-os a considerarem as propriedades do objeto, e não somente os aspectos espaciais da representação. Esperamos que conhecendo a característica das faces do cubo (quadrados), os alunos respondam que, no caso, deve-se considerar o ângulo reto, confirmando (ou revendo) desta forma a relação de perpendicularidade entre as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. Se os alunos se fixarem apenas no desenho ou representação (pólo do visto) ou na medida do ângulo obtida com a ferramenta do Cabri, acabarão apresentando respostas insatisfatórias. Neste caso, o professor fará uma intervenção, primeiramente para retomar as características ou propriedades do cubo, e depois, propondo o confronto das respostas ao último item e discutindo essa relação objeto-representação (ou pólos do visto e sabido). Abaixo, ilustramos a situação evocada no item (f), com a suposta figura traçada pelo aluno.

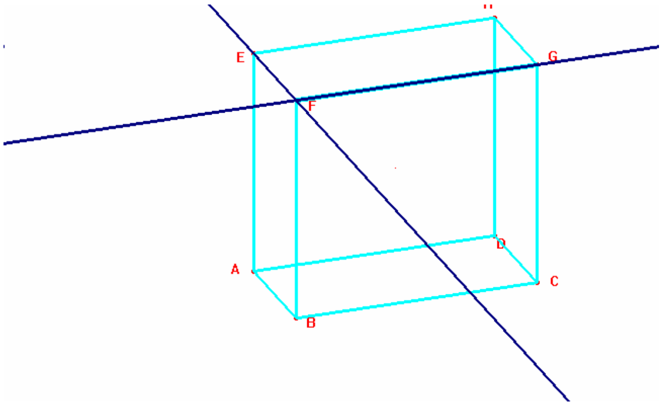


Figura 3.5: Atividade 1 – Parte B (item f)

A última parte dessa atividade (Parte C) propõe, de maneira análoga, o conceito de retas reversas, e neste momento, a utilização do cubo se faz ainda mais pertinente. Abaixo reproduzimos essa parte da Atividade.

Atividade 1

Parte C

a) Abra o arquivo “Atividade1.fig”, e considere novamente duas retas, uma que passa pelos pontos C e D e a outra passando pelos pontos F e G. Movimente o cubo utilizando o ponto Rot e observe a posição relativa dessas retas.

b) É possível afirmar que:

As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ estão contidas num mesmo plano?

Sim, no plano: _______________

Não, por quê?____

____

____

c) As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ se interceptam? Por quê?

____

____

____

d) Você sabe como são denominadas essas retas?

____

e) No cubo, encontre outros pares (pelo menos dois) de retas que apresentam a mesma posição relativa das retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

____

____

____

Quadro 6: Ficha da Atividade 1 – Parte C

Acreditamos que as duplas irão desenvolver com êxito esta parte da atividade, sem, no entanto, saberem mencionar o termo “retas reversas”, pois é provável que este não tenha sido apresentado aos alunos. Assim, está prevista após a realização desta etapa, uma fase de institucionalização deste conceito, sob a responsabilidade do professor.

No item (a) os alunos devem traçar as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ e movimentá-las utilizando o ponto “Rot” a fim de observar a posição relativa entre elas.

Já no item (b), pedimos que digam se as retas estão ou não no mesmo plano. Esperamos que este item forneça argumentos para a resposta do item (c), que destacaremos logo abaixo. Pois, se observarem que as retas não estão no mesmo plano, facilita a justificação para dizer que não existe intersecção entre elas.

No item (c), os alunos devem dizer se há intersecção entre as retas e justificar sua resposta. Como adiantamos, o item (b) desta atividade colabora para esta resposta e sua justificativa, em termos do que o aluno observou ou considerou.

A dificuldade aqui pode ocorrer na identificação de planos de referência, para concluir a impossibilidade de obter um mesmo plano contendo as duas retas.

É importante o aluno movimentar o ponto “Rot” e observar a figura em diferentes posições, para tentar visualizar as posições das retas, pois no desenho, as retas têm aspectos de concorrentes e isso não é possível uma vez que estão em planos distintos.

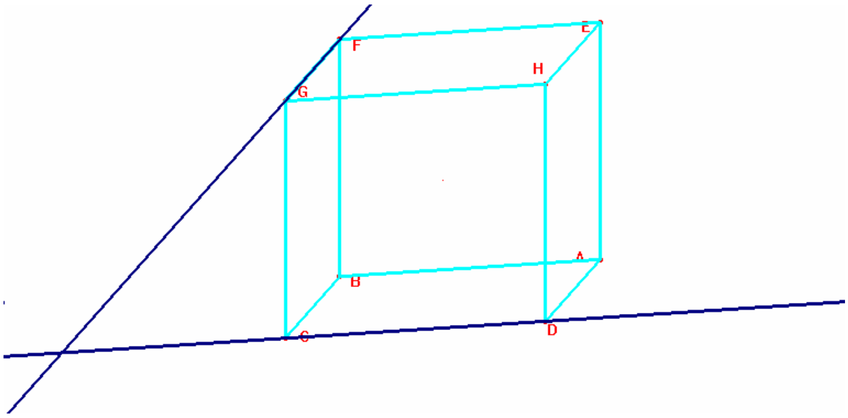


Figura 3.6: Atividade 1 – Parte C: Retas Reversas

Como estamos usando o Cabri 2, e nosso cubo foi criado em perspectiva cavaleira, é provável que alguns alunos respondam rapidamente que as retas traçadas acima interceptam-se em um ponto, baseado apenas no desenho (ou representação), ou seja, estarão influenciados pelos aspectos visuais e espaciais do desenho, não estando atentos às propriedades dos objetos em jogo. Esse tipo de comportamento é muito comum em Geometria, no qual o aluno responde apoiado simplesmente no que vê na representação e não em relação às propriedades que dela são possíveis extrair. Desta forma, diremos que os alunos estarão contagiados pelo desenho (pólo do visto) atentando apenas perceptivamente para a posição das retas, e não identificando os planos e atentando para as arestas do cubo (pólo do sabido), como destaca Parzysz (1995) em seus estudos.

Vemos como um ponto positivo o uso do Cabri 2, e uma discussão neste momento, para podermos introduzir este alerta de que o que se vê na tela não é suficiente para a tomada de decisão e que, portanto, é preciso analisar a figura com cuidado, buscando relações e propriedades, para assim concluir a respeito de certas questões.

Nesta etapa da atividade, esperamos então que os alunos não se limitem ao nível G1, ou seja, às características das representações figurais, mas, passem para o nível G2, podendo assim responder a atividade com sucesso.

No item (d) perguntamos a denominação dessas retas. Acreditamos que os alunos não trarão consigo o, termo “reversas” ou por não lembrarem ou por nunca terem visto. E ao final desta atividade, acreditamos que se fará necessária uma fase de institucionalização dos conceitos por eles levantados, bem como da questão das limitações das representações figurais. A partir das respostas dos alunos, pretendemos, de forma interativa com o grupo, propor uma atividade de formulação da definição de retas reversas. Pretendemos que os alunos produzam uma descrição que se aproxime da definição abaixo.

> **Def. 1:** Duas retas são reversas quando não existe um mesmo plano que as contenha.

3.2 Atividade 2

Consideremos, como reproduzida abaixo, a parte A da Atividade 2, na qual o aluno começará a explorar as diagonais das faces de um cubo. Igualmente como ocorreu na Atividade 1, as duplas receberão o arquivo pronto do Cabri contendo a figura do “Rot Cubo” – um cubo em perspectiva cavaleira, com possibilidades de movimentação.

Atividade 2

Parte A

a) Considere novamente o cubo ABCDEFGH. Trace as diagonais da face ABCD do cubo e determine a intersecção entre elas, nomeando esse ponto “X”.

b) Qual o ângulo formado entre essas diagonais? Justifique sua resposta.

____

____

____

c) Trace, agora, as diagonais das faces EFGH, AEHD e BFGC e determine os pontos Y, Z, T de intersecção em cada caso.

d) Unindo-se os quatro pontos X, Y, Z, T determinados nos itens anteriores, que figura geométrica se obtém? Essa figura é plana? Justifique sua resposta. Para observar a figura, movimente o cubo por meio do ponto “Rot”.

____

____

____

Quadro 7: Ficha da Atividade 2 – Parte A

Na parte (a) desta atividade, o aluno deverá traçar as diagonais da face ABCD do cubo, usando a ferramenta “Segmento” do Cabri, e deverá identificar o ponto de intersecção entre elas, nomeando-o de X. É um exercício bastante simples e os alunos deverão executá-lo sem problemas, obtendo uma figura como a indicada a seguir.

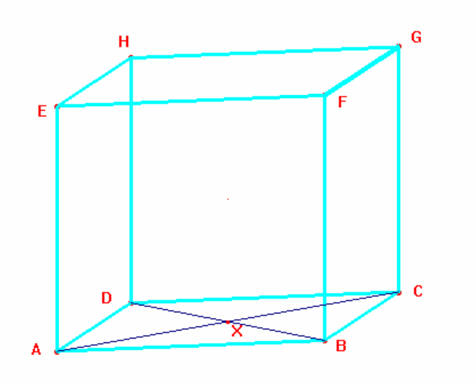


Figura 3.7: Atividade 2 – Parte A (item a)

Já na parte (b), os alunos se deparam com a tarefa de determinar o ângulo entre as diagonais obtidas, analogamente à parte B da Atividade 1. Neste caso, é possível ainda que os alunos utilizem a medida do ângulo entre as duas diagonais. Pode ser que a parte B da Atividade 1 produza alguma influência levando os alunos a considerarem as propriedades das diagonais de um quadrado. Em outras palavras, esperamos que os alunos atentem para as propriedades da face, não se deixando levar pelos aspectos perceptivos, logo, respondam no nível G2 e não fiquem presos às validações empíricas e perceptivas do nível G1.

No item (c), os alunos devem traçar outros três pares de diagonais como se pede no enunciado, obtendo assim três outros pontos de intersecção de cada par de diagonais, nomeados de Y, Z, T (cf. figura abaixo). Por se tratar da criação de segmentos e determinação de pontos de intersecção, análogo ao item (a), acreditamos que os alunos não terão dificuldades ou dúvidas na realização deste item.

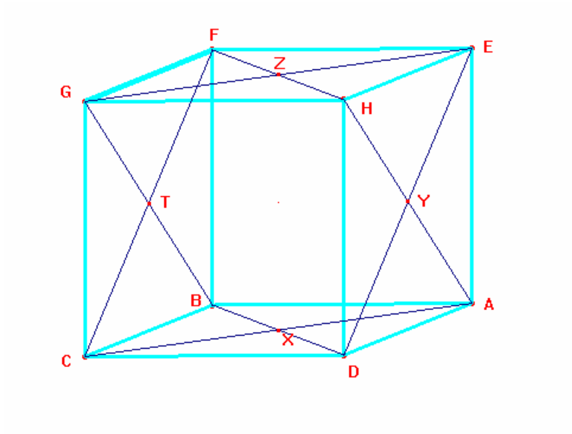


Figura 3.8: Atividade 2 – Parte A (item c)

O item (d) pretende fazer com que os alunos estudem a figura formada pela união desses 4 pontos X, Y, Z, T, obtidos nos itens a e c. A questão da planicidade da figura não é evidente e aqui está prevista uma intervenção do professor para questionar os alunos sobre o que seria uma figura plana e como identificar e justificar este fato na situação.

Uma das formas de validação experimental, baseada nas apreensões perceptiva e operatória e situada no nível G1, é propiciada pela figura Rot_Cubo e pela manipulação da mesma, gerando vistas específicas. O aluno pode, rotacionando o cubo através do ponto Rot, observar que numa dada posição, a figura torna-se, aparentemente, um segmento de reta e interpretar isso como relacionado à sua planicidade (cf. figuras 3.14 e 3.15). Este tipo de argumento é insuficiente, mas ajuda bastante na visualização da resposta, o que pode apresentar um passo importante para levar os alunos à justificá-la, com uma função de explicação do por quê isso acontece. O que esperamos com a atividade é que os alunos visualizem a figura formada por esses pontos e, depois, tentem argumentar sobre o fato de esses pontos estarem no mesmo plano. E isso pode ser feito de várias formas, considerando, por exemplo, o plano que passa pelos pontos médios de $\overline{EH}$, $\overline{FG}$ e $\overline{BC}$, como sendo um plano que contém os pontos X, Y, Z, T, e, portanto, a figura é plana. Ou ainda que as retas XZ e TY se interceptem (no centro do cubo) e, portanto, são concorrentes e coplanares. Essas respostas não são simples, pois dependem da consideração de objetos (planos, retas e pontos) não diretamente identificados ou destacados na figura, exigindo apreensões mais operatórias da figura. Caso os alunos apresentem dificuldades ou respostas muito limitadas à percepção, faremos uma intervenção no sentido de questionar os alunos sobre esses elementos, bem como, rediscutir a validade de argumentos baseados apenas nos elementos espaciais das representações, identificados perceptivamente.

Acreditamos que esta questão deve colaborar para o desenvolvimento da última atividade desta seqüência de ensino, onde trabalharemos com quadriláteros reversos e os alunos deverão novamente discutir as característica de uma figura formada por 4 pontos, em particular sua planicidade.

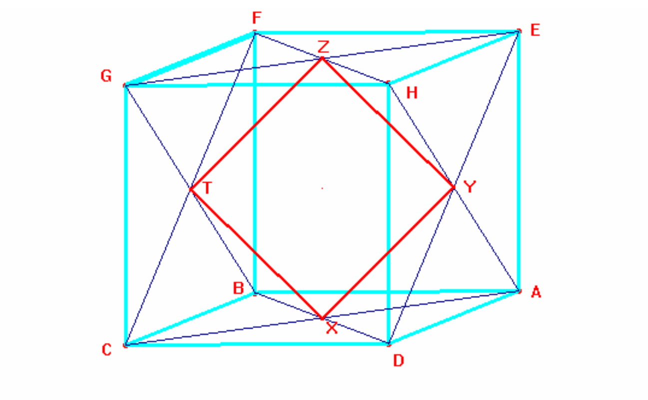


Figura 3.9: Atividade 2 – Parte A (item d)

A figura seguinte foi obtida com a movimentação do ponto “Rot” na figura 3.14.

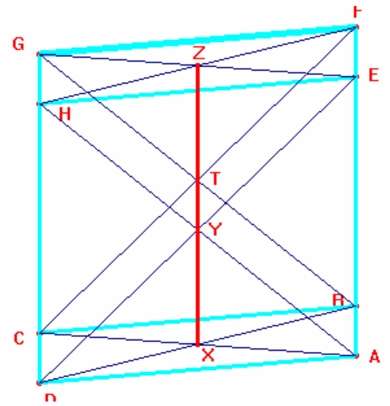


Figura 3.10: Atividade 2 – Parte A (item d)

Sabemos que não é suficiente, porém a figura acima permite ao aluno conjecturar que o quadrilátero XYZT é plano, ou até visualizar que trata-se de um quadrado. Esperamos que isso motive os alunos a buscarem argumentos (razões) que expliquem este fato observado perceptivamente, uma vez que em atividades anteriores puderam constatar que as medidas ou elementos espaciais do desenho (intersecções e medidas, por exemplo), nem sempre podem ser considerados como tal.

Por outro lado, dada a dificuldade da resolução de problemas de posição no espaço, com representações planas dos objetos, é provável que os alunos permaneçam no nível G1, sobretudo pelo fato de contarem com o suporte visual e experimental do Cabri. Para esta atividade, este tratamento é importante e pode servir de base para o desenvolvimento das demais atividades.

Na parte B desta Atividade 2, os alunos irão explorar as diagonais de um cubo, diferenciando-a das diagonais das faces.

Atividade 2

Parte B

a) No item (a) da parte A, consideramos as diagonais de uma face do cubo ABCDEFGH. Agora, vamos investigar as **diagonais desse cubo**. Comece fazendo uma exploração no Cabri a fim de tentar identificar e criar as diagonais do cubo.

b) Anote: O cubo ABCDEFGH possui as seguintes diagonais:

____

____

c) Considere duas diagonais do cubo ABCDEFGH. Crie o quadrilátero formado pelas extremidades dessas duas diagonais e movimente o cubo através do ponto "Rot".

d) Que quadrilátero é este? Justifique sua resposta.

____

____

____

e) É correto afirmar que:

Duas diagonais do cubo interceptam-se formando um ângulo de 90º?

Por quê? Justifique sua resposta.

____

____

____

Quadro 8: Ficha da Atividade 2 – Parte B

Nos itens (a) e (b), os alunos devem identificar e criar diagonais de um cubo. Novamente, o fato de usarmos a figura do Cabri facilita essa tarefa, esperando que os alunos utilizem o conceito de diagonais utilizado para polígonos e estenda para o caso do cubo. Os alunos podem fazer testes, observar, apagar o que foi feito, refazer, movimentar a figura e explorar com muita facilidade, de forma prática graças aos recursos do ambiente. As duplas devem realizar estes itens sem dificuldade, obtendo, por exemplo, figuras como a apresentada abaixo.

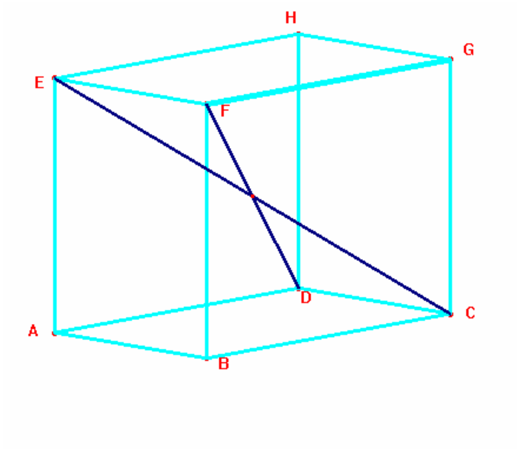


Figura 3.11: Atividade 2 – Parte B: diagonais do cubo

O item (c) foi desenvolvido a fim de problematizar a intersecção de duas diagonais de um cubo, confrontando com o resultado da parte anterior. O que se propõe discutir é o fato de que as diagonais do cubo se interceptam e não formam um ângulo de 90°, o que ocorre com as diagonais das faces. Assim, os alunos devem criar o quadrilátero determinado pelos 4 pontos extremidades das diagonais consideradas (cf. figura abaixo) e tentar classificar ou caracterizar este quadrilátero.

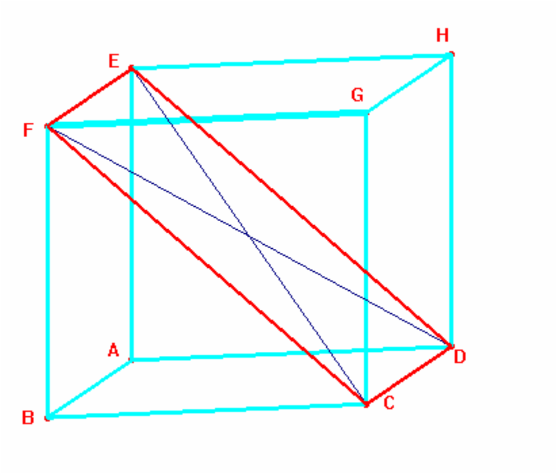


Figura 3.12: Atividade 2 – Parte A (item c)

No item (d), os alunos deparam-se com a tarefa de classificar esse quadrilátero formado. Neste momento, temos a presença de um fator determinante, que é o fato de sairmos dos planos (faces do cubo) onde consideramos as diagonais das faces do cubo (itens (a) e (c) da parte A) e entrarmos na região "interna" ao cubo. Esperamos que digam ser um retângulo, uma vez que $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são segmentos congruentes e paralelos, pois são diagonais de faces paralelas, $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$ também são congruentes e paralelos, pois são arestas do cubo de faces paralelas (conforme Figura 3.18) e ressaltando, com suporte visual e conceitual, os ângulos retos. É possível ainda identificar que a aresta do cubo tem medida menor que a diagonal da face, definindo assim um retângulo. Sendo as diagonais do cubo $\overline{DF}$ e $\overline{CE}$ também diagonais do retângulo CDEF, podemos concluir sobre suas posições e ângulo, o que solicita o item (e) que passamos a discutir.

No item (e), os alunos precisam dizer se o ângulo formado entre as diagonais traçadas é ou não de 90°. Temos, portanto, um confronto com o item (b) da parte A desta Atividade 2. Queremos observar se os alunos serão influenciados pela resposta que obtiveram quando estavam considerando as faces quadradas do cubo, o que é uma confusão comum entre os alunos, ou se passam a atentar e considerar estes objetos distintos. Conforme descrito acima, a identificação do retângulo CDEF permite responder a questão colocada. Cabe ainda salientar que nossa opção de indicar primeiro a construção e caracterização do quadrilátero determinado pelos pontos extremidades de duas diagonais e, somente a partir daí, questionar o ângulo formado por duas diagonais do cubo, corresponde a uma variável importante, imprimindo uma progressão particular, que algumas experiências anteriores demonstraram ser fundamental. É focado nessa característica da situação que acreditamos ser possível os alunos apresentarem justificativas conceituais e produzirem o contra-exemplo do item (e), dando significado a ele.

3.3 Atividade 3

Esta atividade procura aprofundar a exploração e as tomadas de decisões por partes dos alunos, diante do desafio de terem que justificar suas respostas ou argumentar em favor de uma conjectura.

Iniciamos a atividade com a definição de quadrilátero reverso, pois acreditamos que este conceito é desconhecido dos alunos. Na verdade, sabemos que existem muitas dificuldades para se trabalhar com a Geometria Plana, porém os conceitos da Geometria Plana são bem mais familiares para nossos alunos, comparados com os conceitos da Geometria Espacial tendo em vista que os primeiros são mais abordados no Ensino Fundamental. No caso do Ensino Médio, os conceitos da Geometria Espacial ficam em segundo plano, ou às vezes, nem são trabalhados. Mas, para a noção em questão – quadrilátero reverso - sua introdução pode ser feita com base nos conhecimentos dos alunos sobre quadriláteros (planos) e será apoiada por uma atividade envolvendo dobraduras.

Inicialmente, vamos propor a definição abaixo para ser discutida e explorada coletivamente.

Def. 1: Um quadrilátero é chamado de quadrilátero reverso quando não existe plano contendo seus 4 vértices.

Posterior a leitura e discussão da definição acima, faremos um trabalho com dobraduras solicitando aos alunos que tentem obter um quadrilátero reverso a partir de um quadrilátero plano, recortado em papel.

Acreditamos que nesta atividade, os alunos irão dobrar o papel obtendo polígonos reversos, não necessariamente quadriláteros, mas insistiremos no fato de que a figura deve ser um quadrilátero reverso. Com isso, pretendemos que a estratégia de dobrar na diagonal apareça. É desta forma que acreditamos que esta atividade auxilie o aluno tanto na compreensão do que é um quadrilátero reverso, como também, na construção do mesmo usando o Cabri, na seqüência da atividade.

Segue abaixo a Atividade 3, conforme a ficha do aluno.

Atividade 3

1) No Cabri, abra o arquivo "Atividade_3.fig". A partir desse cubo, construa um quadrilátero reverso XYZT.

Na sua construção, o quê garante que seu quadrilátero é reverso? Explique.

____

____

2) Marque o ponto médio de cada lado do quadrilátero reverso obtido e trace o quadrilátero PQRS determinado por esses 4 pontos médios.

3) Antonio está tentando investigar as propriedades desse quadrilátero PQRS. Ele afirma que:

"Como XYZT é reverso, o quadrilátero PQRS também é reverso".

A afirmação de Antonio é verdadeira ou falsa?

____

____

a) Se <u>verdadeira</u> identifique pelo menos dois planos que contêm os vértices do quadrilátero PQRS:

____

____

b) Se <u>falsa</u>:

b_1) O que você pode fazer para mostrar que Antônio está equivocado?

____

____

b_2) De que tipo é o quadrilátero PQRS?

( ) Trapézio

( ) Paralelogramo

( ) Losango

( ) Retângulo

( ) Quadrado

Quadro 9: Ficha da Atividade 3

Como nas outras atividades, o aluno utilizará o arquivo do Cabri contendo a figura “Rot Cubo” como auxiliar na construção do quadrilátero reverso.

No item 1 da Atividade 3, os alunos devem partir do suporte do cubo dado para construir um quadrilátero reverso e explicar o porquê de seu quadrilátero ser reverso.

Após termos apresentado a definição de quadrilátero reverso e trabalhado empiricamente com esta definição, acreditamos que a solução seja dada, pelos alunos, sem dificuldades. Um tipo de solução esperada dos alunos está ilustrada na figura abaixo.

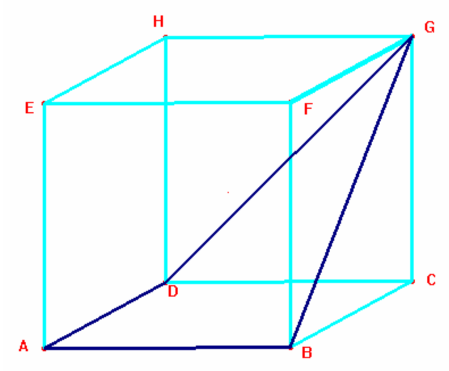


Figura 3.13: Possível solução do item 1 da Atividade 3

Em relação à justificativa de ser reverso, é possível considerar o quadrilátero ABGD, correspondendo ao quadrilátero XYZT solicitado, como na figura e argumentar que é quadrilátero por ter quatro vértices e quatro lados, e é reverso, pois os pontos A, B, D determinam um único plano – o suporte da face ABCD – e o ponto G não pertence a este plano (vértice da face oposta), respeitando assim a definição de quadrilátero reverso.

Outro caso possível é considerar os vértices do quadrilátero reverso sem serem vértices do cubo, como na figura abaixo, e para a qual o mesmo raciocínio pode ser empregado. É possível que o cubo constitua, nesse momento da seqüência, uma figura de referência com seus vértices destacados e os alunos prefiram a 1ª solução.

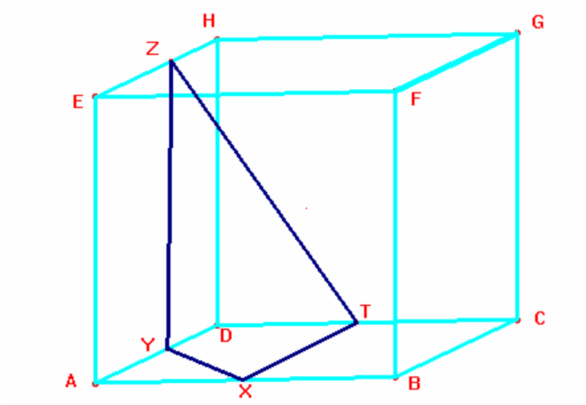


Figura 3.14: Possível solução do item 1 da Atividade 3

Na parte 2 da Atividade 3 o aluno deverá usar a ferramenta “Ponto Médio” do Cabri, para obter o ponto médio de cada lado do quadrilátero reverso construído e uni-los por meio da opção “Polígono” (cf. figura abaixo), devendo ser realizada facilmente pelos alunos que têm familiaridade com esses comando e operações.

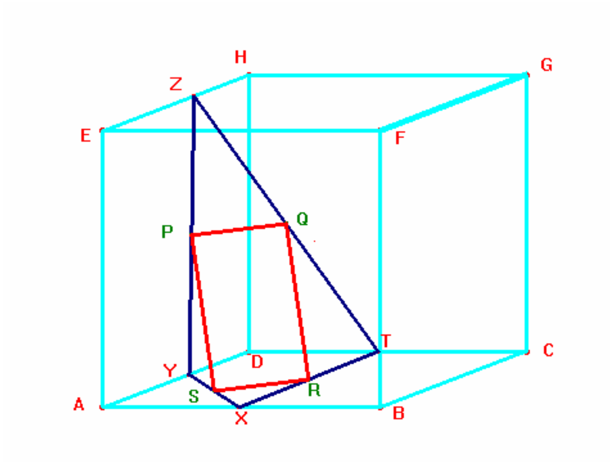


Figura 3.15: Atividade 3 (item 2)

Na parte 3 desta Atividade, os alunos recebem uma questão desafiadora, para a qual eles devem pensar e buscar argumentos para justificar suas respostas. Este é o objetivo desta parte da atividade, levar os alunos a se questionarem sobre as características do quadrilátero e refletirem sobre a justificativa para a validade de uma afirmação. Esperamos que assim, os alunos sintam-se envolvidos em um processo de investigação, buscando argumentos que sustentem suas afirmações.

Nesta parte da atividade, consideramos um aluno hipotético Antônio, para afirmar que se o quadrilátero XYZT é reverso, então PQRS também é reverso e os alunos devem discutir se esta afirmação é verdadeira ou falsa, explicando e justificando sua resposta.

O Cabri, neste momento, pode auxiliar a exploração e verificação para a elaboração de conjecturas. De fato, a figura dinâmica e as possibilidades de verificação de propriedades podem favorecer um olhar mais geométrico por parte dos alunos, evitando que fiquem apenas na apreensão perceptiva da figura. O professor estará atento para solicitar aos alunos que justifiquem suas respostas, solicitando que identifiquem propriedades e argumentos para explicitar o que estão levando em conta na situação.

Com a movimentação da figura, é possível perceber que o quadrilátero formado com a união dos pontos médios do quadrilátero reverso é uma figura plana e, portanto, não reverso. O mesmo tipo de manipulação citado na Atividade 2 quando da análise do quadrilátero XYZT formado por pontos de intersecção de diagonais das faces, pode ser usado aqui e fornecer subsídios para o aluno invalidar a afirmação.

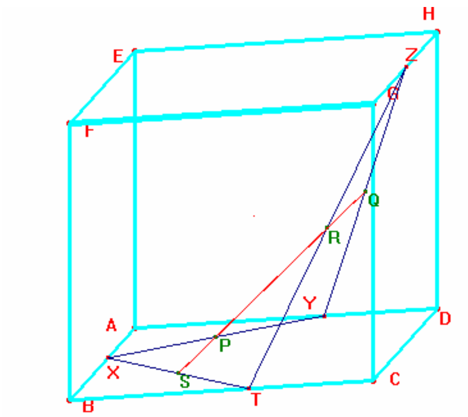


Figura 3.16: Atividade 3 (item 3): Planicidade do Quadrilátero

Chegando a essa resposta, o aluno deve identificar o quadrilátero formado, classificando-o. Esperamos dos alunos a identificação do quadrilátero PQRS como sendo um paralelogramo – o que consideramos possível de ser conjecturado. E para isto, novamente os recursos do Cabri podem auxiliar, pois em se tratando de segmentos paralelos, suas medidas podem ser comparadas mesmo na figura em projeção do "Rot_Cubo" (cf. figura abaixo). Ao final – Atividade 4 – solicitaremos aos alunos que explicitem as propriedades que garantem essa classificação como descrito em seguida.

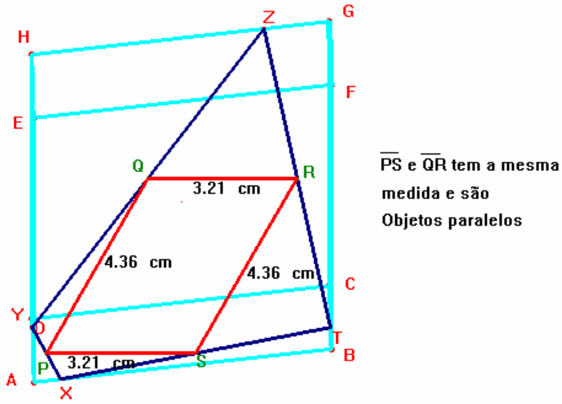


Figura 3.17: Atividade 3 (item 3): Caracterização do Quadrilátero

3.4 Atividade 4

Esta é a última atividade e tem por objetivo verificar se os alunos, ao longo do desenvolvimento da seqüência, envolvem-se em um processo de prova de uma dada afirmação – no caso, que o quadrilátero PQRS é um paralelogramo.

Considerando que a situação do segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo foi tratada na fase de familiarização com o Cabri (conjecturada), é possível que os alunos possam reconhecer as hipóteses dessa propriedade e a utilizem nessa questão. Nessa ocasião, os alunos tiveram a oportunidade de verificar experimentalmente o referido teorema. É alinhando então essa experiência a atividade de dobradura com o quadrilátero reverso – na qual o mesmo pode ser apreendido como decomposto em dois triângulos por uma diagonal – que baseamos nossa hipótese de que os alunos têm condições de validar a conjectura elaborada acerca do tipo de quadrilátero obtido na Atividade 3.

Esperamos, assim, que os alunos produzam argumentos baseados nessa propriedade e na noção de paralelismo para atingirem, mesmo com observações sobre a figura, um nível de prova conceitual, do tipo *experimento de pensamento* (Balacheff, 1987).

A atividade 4 é uma extensão da atividade 3, pois usaremos as respostas dadas pelos alunos na atividade 3 para desenvolver esta situação. Na verdade, nesta atividade, os alunos precisam provar (ou refutar) o resultado encontrado na atividade 3.

Atividade 4

Na **Atividade 3**, vocês chegaram à conclusão de que o quadrilátero PQRS é um _________________________.

Retomem a figura obtida na Atividade 3, e usando o fato de o quadrilátero XYZT ser reverso e de termos considerado os pontos médios de cada lado desse quadrilátero para obtermos o quadrilátero PQRS, relacione abaixo todos os argumentos possíveis, propriedades e relações geométricas da figura que justificam sua resposta.

Quadro 10: Ficha da Atividade 3

Como se vê, é uma atividade que vai direto à questão da produção de uma prova, colocando assim o aluno na posição de quem precisa argumentar, buscar propriedades vistas anteriormente, relações possíveis, inclusive utilizando os recursos do Cabri como auxílio.

Sabemos que a questão da prova, já ressaltada anteriormente, é delicada até mesmo em níveis superiores (na Graduação, por exemplo), podendo nossos alunos apresentar bastante resistência para sair do nível empírico. Ainda assim, tentaremos avaliar os tipos de argumentos produzidos por eles, buscando relacioná-los às características e propostas das atividades anteriores, com o intuito de verificar seus efeitos.

Nesta atividade, o papel da prova pode ser de explicação ou de comunicação do raciocínio desenvolvido. É o que procuraremos analisar, a partir das respostas dos alunos, conforme apresentamos no capítulo que segue.

CAPÍTULO 4

Procedimentos Metodológicos

Neste capítulo, faremos algumas considerações sobre nosso envolvimento com a Escola, com os alunos que participaram deste estudo e também, em relação a todo o processo de escolha dos alunos, de organização e aplicação das atividades.

Escolhemos para a aplicação de nossas atividades, a própria Escola onde lecionamos. É uma Escola Pública do Estado de São Paulo, como citamos anteriormente, com aproximadamente 1300 alunos. Lecionamos nesta escola há quatro anos e recebemos bastante apoio da Direção e dos colegas para que nela realizássemos nossas experimentações relativas ao projeto AProvaME e, por conseqüência, ao curso de Mestrado.

A escola tem um laboratório de Informática com 8 computadores e acesso a *Internet*. Tivemos acesso a esse laboratório, o que muito nos favoreceu no desenvolvimento das situações, uma vez que estas foram previstas para serem desenvolvidas com o auxílio do software Cabri-Géomètre[6].

[6] A escola tem o software Cabri-Géomètre 2, adquirido por meio do Governo do Estado de São Paulo.

4.1 Perfil dos Alunos

Os alunos foram convidados a participarem do Projeto AProvaMe. Visitamos três turmas da escola, sendo que lecionamos em apenas uma delas e, para as quais explicitamos os objetivos do projeto, anunciando o uso do computador como auxiliar nas atividades a serem realizadas. Frisamos que se tratava do desenvolvimento da nossa dissertação de Mestrado e de como seria importante a participação deles, bem como a ajuda que nos prestariam.

A partir do convite, e para surpresa nossa, tivemos muitos alunos interessados. Inicialmente, pensamos em trabalhar com sete duplas, ou seja, quatorze alunos no total, para atender o maior número de interessados possível. Porém, em conversa com nossa orientadora, percebemos que correríamos o risco de não conseguir acompanhar em detalhes e dar toda atenção necessária as duplas durante o desenvolvimento das atividades. Assim, optamos por desenvolver o estudo com apenas três duplas, sendo duas do segundo ano do Ensino Médio (15 e 16 anos) e uma dupla do primeiro ano do Ensino Médio (14 e 15 anos).

Num contato inicial, procuramos saber se os alunos tinham alguma experiência com assuntos relacionados à Geometria e se conheciam o ambiente Cabri-Géomètre. As respostas foram negativas para ambas as perguntas. Os alunos disseram que estudaram muito pouco de Geometria nas séries anteriores e que desconheciam o referido software. Por outro lado, são alunos com bom desempenho em Matemática e que se mostraram muito interessados e motivados a participar das situações experimentais.

Este é, portanto, o perfil dos alunos participantes de nosso estudo. Pela descrição acima, percebemos que estamos num ambiente favorável para aplicarmos as atividades desenvolvidas e fazermos um levantamento das concepções e conhecimentos dos alunos sobre argumentação e prova. E, sobretudo, avaliar o potencial das atividades, analisando se estas podem levar esses alunos à produção de argumentos e provas conceituais, possibilitando ampliar a compreensão deles sobre os processos de prova em Matemática, em particular, o problema da limitação dos argumentos empíricos.

4.2 O Papel do Professor

Durante as Fases 1 e 2 do projeto AProvaMe, tivemos inúmeras experiências para que pudéssemos compreender, também, qual seria o nosso papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem e na evolução do que conhecemos sobre argumentação e prova em Matemática.

Ao longo do projeto, como professores-colaboradores, tivemos vários papéis, desde a participação na aplicação e codificação dos questionários (Fase 1) até a escolha e organização do grupo de alunos participantes do experimento, passando pela etapa de discussão e de elaboração das situações de aprendizagem (Fase 2). Particularmente, em relação à experimentação das atividades com os alunos, assumimos o papel de professor, em uma atividade de caráter extracurricular.

As atividades foram elaboradas de tal forma que os alunos pudessem desenvolvê-las sem contínua intervenção direta do professor. Este ponto é delicado, pois, nossa experiência mostra que os alunos estão acostumados a receberem resultados prontos e muita ajuda do professor. Temos também uma situação diferente, pois, em dupla, precisam resolver as atividades com justificativas e argumentos convincentes, algo que não lhes é familiar. Com isso, procuramos negociar com os alunos que eles deveriam interagir com o colega de dupla e tentar resolver ou responder às atividades da melhor forma possível.

Durante a aplicação das atividades, sempre que recebíamos alguma pergunta por parte dos alunos, procurávamos devolvê-la com outra pergunta de tal forma que pudessem organizar seus raciocínios e continuar desenvolvendo as atividades. Também prestamos esclarecimentos quanto aos enunciados, quando solicitados pelos alunos e ainda sobre alguns recursos e procedimentos no Cabri. Procuramos assim, o papel de um professor que dialoga, questiona, traz informações e media as situações a fim de colaborar com o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Outro papel importante que desenvolvemos foi proporcionar encontros para refletir sobre as respostas dadas, comentar erros e acertos e também introduzir conceitos ou ferramentas do Cabri que até então eram desconhecidos dos alunos, mas que foram mobilizadas implicitamente nas atividades. Nestes encontros, procuramos então possibilitar momentos de retomada e síntese das estratégias utilizadas pelos alunos, motivando a participação dos mesmos no que podemos relacionar a fases de institucionalização.

4.3 Dados Coletados

A seqüência de ensino foi desenvolvida em onze encontros, de aproximadamente 1h30’ de duração cada.

Os dados coletados ao longo desses encontros foram: as gravações em vídeo e áudio das interações das duplas, arquivos do Cabri e respostas escritas nas fichas de trabalho.

Como citamos anteriormente, em razão da necessidade de uma etapa de familiarização com o ambiente Cabri, desses onze encontros, temos que cinco foram efetivamente usados para a aplicação das atividades envolvendo provas e argumentações.

As atividades foram aplicadas em dias diferentes, com o objetivo de observar e comparar o desempenho dos alunos no decorrer de suas elaborações e das observações que fazíamos ao término de cada atividade.

Desta forma, coletamos os dados em arquivos Cabri, em imagem e áudio e em documentos impressos. É com base nesses dados que realizaremos as análises das respostas e processos dos alunos ao longo do desenvolvimento das atividades.

4.4 Análise dos Resultados

Procuraremos mostrar o desempenho dos alunos diante das atividades propostas e verificar o quanto evoluíram em relação aos processos de argumentação e prova. Outro ponto importante a ser avaliado são as atividades em si, ou seja, analisar se comportam elementos que permitem conduzir e auxiliar o aluno a um nível de prova conceitual.

Gostaríamos de destacar o empenho e a alegria com que os alunos participaram das atividades, confirmando nossa percepção inicial. Em particular com relação ao uso do computador, pudemos perceber nitidamente o encanto dos alunos diante da tela, logo nas primeiras construções com o software Cabri.

Um fato interessante é que trabalhar num ambiente de Geometria Dinâmica permite ao aluno fazer e refazer a figura com rapidez, e consideramos isso importante, pois percebemos durante a aplicação que os alunos tentavam, por diversas vezes, chegar a uma figura solicitada e responder às questões, sem, no entanto, interpelar o professor com freqüência. É possível afirmar que o ambiente proporciona isso, ou seja, os alunos apresentaram iniciativa e não ficaram esperando uma resposta pronta do professor, como acontece costumeiramente na sala de aula. Como afirma Pietropaolo (2005), a prova pode decorrer da necessidade do aluno, diante de um problema ou fenômeno na tela do computador. Diante do entusiasmo dos alunos com o Cabri, é o que esperamos que aconteça e que procuraremos identificar e analisar nos itens que seguem.

4.4.1 Atividade 1

As três duplas tiveram acesso, por meio de um arquivo, à uma figura denominada “Rot_Cubo”, que contêm a representação de um cubo ABCDEFGH e utilizaram este objeto, com facilidade, durante toda a atividade, conforme veremos a seguir.

A **Dupla 1** desenvolveu com clareza e corretamente a Atividade 1. Como pedido, a dupla abriu o arquivo contendo o “Rot_Cubo”, ou seja, a representação de um cubo ABCDEFGH no Cabri e traçou as retas pedidas, no item (a), $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ (cf. figura abaixo).

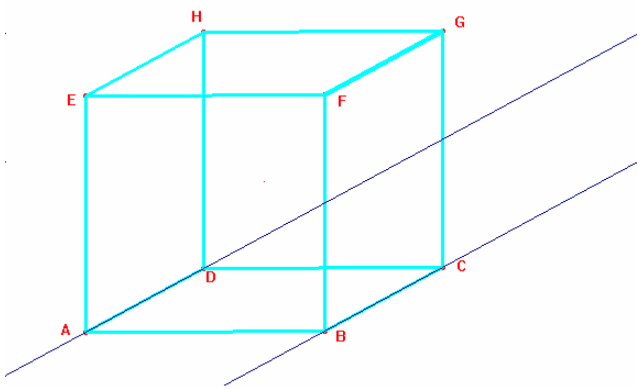


FIGURA 4.1: Atividade 1A (item a), Dupla 1

No item (b), a dupla movimentou o cubo com as retas traçadas, por meio do ponto "Rot". A partir daí, concluíram que as retas eram paralelas, dando a resposta ao item (c) da seguinte maneira: *"Elas são paralelas porque se movimentam de acordo com o cubo".*

Esta resposta não está completa, pois podemos ter retas não paralelas que tenham esse comportamento. Na verdade, quaisquer duas retas traçadas por dois pontos quaisquer do cubo (no caso, os vértices) se movimentarão com o cubo. Interrogamos, portanto, a dupla neste sentido e obtivemos a seguinte resposta: *"Elas estão em vértices opostos de um quadrado"*.

Com isso, é possível perceber que estão considerando, claramente, o fato de as retas serem suportes de lados paralelos de um quadrado e desta maneira, as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Na verdade, não escreveram, mas comentaram que as retas seguem a mesma direção e com a movimentação do cubo, a posição relativa não se altera.

Temos, então, uma situação onde, a princípio, a dupla encontra-se no nível G1 (Parzysz, 1995). No entanto, ao ser questionada, a dupla deixa claro que não está levando em consideração somente o que vê na tela do computador e sim algumas propriedades, como o fato de as retas serem suportes de lados opostos de um quadrado, mantendo a mesma direção no movimento. Assim, como era esperado, podemos considerar que a dupla se situou nos níveis G1 e G2 (Parzysz, 1995), articulando a *geometria espaço-gráfica* com a *geometria proto-axiomática.*

No item (d), continuaram com a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e traçaram a reta $\overleftrightarrow{FG}$ dizendo que:

> *"Cada uma das retas está em um plano e uma face diferente, assim são paralelas".*

Apresentaram a seguinte figura:

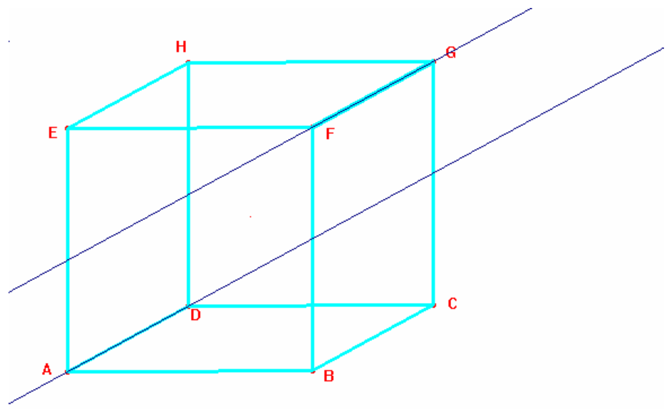


FIGURA 4.2: Atividade 1A (item d), Dupla 1

A dupla observou as posições das retas em relação a planos, no entanto, pela informação não é possível garantir o paralelismo entre elas. Ao questioná-los a respeito da resposta dada, completaram dizendo que: "*Estão em lados opostos".*

Explicitando que são retas suportes de arestas em faces paralelas, logo as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas, deveriam citar que as retas têm a mesma direção, mas argumentaram que isso fica claro olhando na figura. É o que Duval (1995) chama de apreensão perceptiva, ou seja, a dupla interpretou a figura imediata e perceptivamente pela familiaridade que tem dela.

Percebemos, claramente, neste início de análise, a importância de pedir a dupla que apresente esclarecimentos e reveja suas respostas. Vemos que as respostas dadas inicialmente são baseadas em fatos que estão observando, sem levar em consideração os elementos pertinentes que justificam o resultado. E, desta forma, a dupla iniciou no *pólo do visto* (Par*zysz, 1988)*. No entanto, ao pedir que explique sua resposta, a dupla buscou e encontrou argumentos que a justificasse, migrando assim para o pólo do sabido (Par*zysz, 1988)*. Esse nosso papel tem justamente esse interesse, o de incitar e questionar os alunos sobre suas produções. Acreditamos ser essa uma atuação propícia para o trabalho com provas e argumentações.

Uma resposta possível que esperávamos e a dupla não apresentou seria considerar o fato de que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas e, então por transitividade $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas.

No item (e) a dupla identificou corretamente outros pares de retas paralelas, apresentando os seguintes: $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{HE}$, $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

A parte B desta atividade também foi desenvolvida com sucesso pela dupla.

No item (a), consideraram novamente o cubo ABCDEFGH, traçaram as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ e movimentaram a figura conforme solicitado (Figura 4.3).

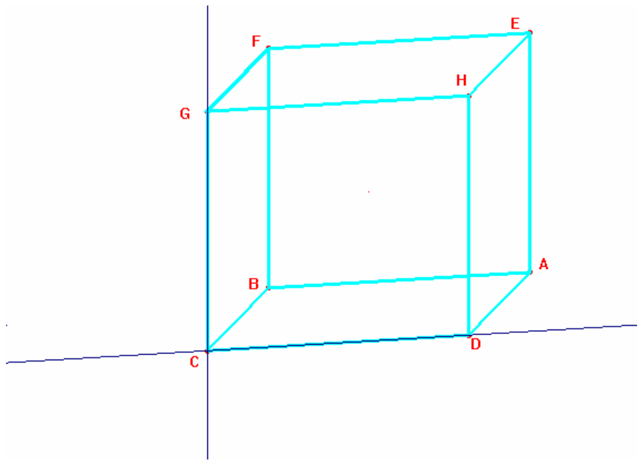


FIGURA 4.3: Atividade 1B (item a), Dupla 1

Ao serem interrogados, no item (b), a respeito da intersecção dessas retas, responderam que sim, conforme descrito abaixo:

"Sim, pois os dois estão ligados ao ponto C, fazendo com que as retas se cruzem".

Vemos que há imprecisão na maneira que colocaram a frase, porém, fica claro que consideraram ambas as retas passando pelo ponto C e, portanto concorrentes.

Disseram, também, que o ângulo formado entre as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ é de 90°, ao responder o item (c), justificando que:

"Estão traçadas uma em cada lado do quadrado GCHD".

Neste caso, a dupla destaca a relação das retas com os lados do quadrado da face. Mostraram assim, que estão atentos à elementos pertinentes da figura que colaboram para a justificativa pedida, ou seja, no nível G2 (Parzysz, 1995).

A princípio, no item (d), não souberam dizer o nome que essas retas recebem. Na verdade, alegaram que não lembravam o nome da posição relativa entre as retas. Então fizemos uma intervenção, perguntando às outras duplas se poderiam ajudar. A dupla 2 disse que as retas eram perpendiculares. Então, voltamos a atenção para a dupla 1, perguntando se eles concordavam, ou seja, se tinham lembrado ou conheciam essas retas. A dupla 1 respondeu:

"Sim, são perpendiculares no ponto C".

No item (e) apresentaram outros 6 pares de retas que têm a mesma posição relativa, ou seja, que são perpendiculares. Os pares são: $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{FB}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{EH}$

No item (c), perguntamos o ângulo formado entre as retas. A dupla poderia ter seguido outro caminho para identificar a medida de 90° pedindo ao Cabri que medisse esse ângulo. E se fizessem este caminho não encontrariam o ângulo de 90°, pois o cubo foi construído em perspectiva Cavaleira. Pensando nisso, elaboramos o item (f), que apresenta uma situação hipotética onde o aluno Pedro mediu o ângulo. A dupla assinalou a alternativa correta, ou seja, *que o ângulo é diferente de 90° porque o cubo foi construído em perspectiva, porém deve ser considerado 90°, pois as faces do cubo são quadradas*. Finalizou, assim, a parte B da Atividade 1.

Na parte C, última desta primeira atividade, a dupla deparou-se com o conceito de retas reversas e, como havíamos previsto na análise a priori, a dupla soube trabalhar com as retas reversas e também identificar pares de retas com esta característica, sem, entretanto saber denominá-las.

No item (a) a dupla considerou o cubo ABCDEFGH e nele traçou as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. Movimentou a figura, apresentada abaixo, a fim de observar a posição relativa entre essas retas.

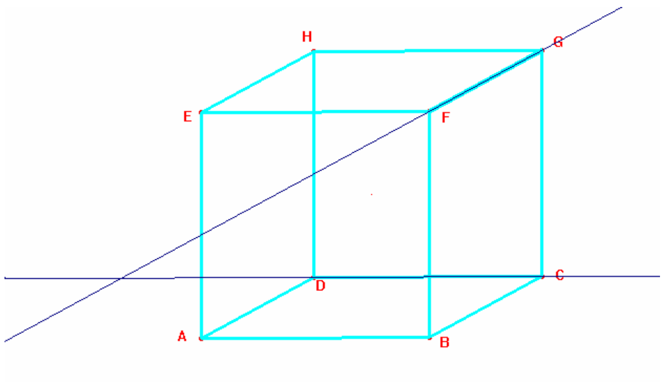


FIGURA 4.4: Atividade 1C (item a), Dupla 1

Esta é sem dúvida uma questão interessante, pois a apreensão perceptiva da figura sugere uma intersecção (visualiza-se retas concorrentes) e, no entanto, este não é o caso e esta interseção não existe. Como já explicamos, se a dupla assim considerasse, estaria no nível G1 (da geometria no espaço-gráfico) de Parzysz (1995), inferindo elementos não pertinentes aos objetos em jogo, pautando-se simplesmente no aspecto do suporte gráfico, fazendo o controle pelo olhar. Porém, não foi o que ocorreu, a dupla analisou a figura e tomou a decisão baseada em premissas aceitas de modo intuitivo, estando, portanto, no nível G2 (a geometria proto-axiomática) de Parsysz (1995).

Ao responder, no item (b), se este par de retas está ou não no mesmo plano, a dupla escreveu:

"Não. Porque elas não são paralelas e elas também não se interceptam."

Cabe destacar aqui, a comparação que a dupla está fazendo com os itens anteriores desta atividade, nos quais analisou retas paralelas e perpendiculares.

No item (c) a dupla foi questionada a respeito da intersecção entre este par de retas e como já tinha antecipado a resposta, continuou:

"Não. Porque elas estão em planos diferentes e para se interceptarem as retas teriam que estar ligadas ao mesmo ponto".

Quando citam que "as retas deveriam estar ligadas ao mesmo ponto", estão referindo-se à necessidade de ponto comum para determinar a intersecção.

No item (d), a dupla respondeu: "*Não sabemos os nomes das retas".*

Mesmo sem saber a nomenclatura, souberam, no item (e), reconhecer outros pares de retas reversas diferentes de $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. São eles: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

Depois da atividade respondida e de termos verificado que nenhuma das três duplas apresentou a nomenclatura, realizamos um novo encontro para apresentar a definição de retas reversas e dar continuidade às outras atividades.

Em síntese, a dupla 1 não encontrou dificuldades para desenvolver esta atividade. Usou o Cabri com facilidade para traçar as retas pedidas e observar a figura com movimentação, mostrando assim que os encontros anteriores para a familiarização com o software foram de grande valia.

A dupla não considerou apenas o visual, ou seja, o que viam na tela do computador, indo além, buscando conceitos ou propriedades dos objetos que pudessem sustentar as respostas. Podemos dizer que os objetivos foram plenamente atingidos para esta dupla na Atividade 1.

Acompanhemos o desenvolvimento da **Dupla 2** nesta primeira atividade. Esta dupla não desenvolveu satisfatoriamente apenas a Parte C, como veremos mais adiante.

Inicialmente, a dupla abriu o arquivo contendo o "Rot_Cubo" e traçou as retas mencionadas no item (a), obtendo a figura abaixo.

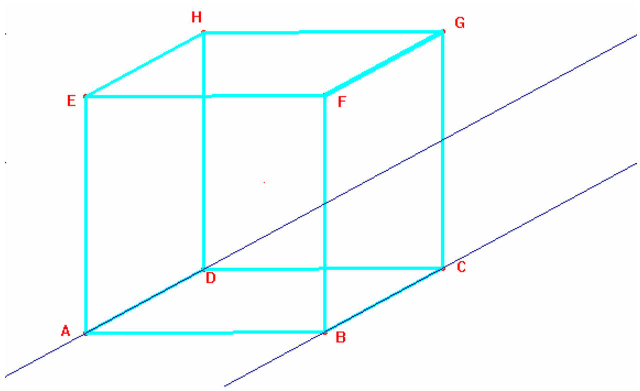


FIGURA 4.5: Atividade 1A (item a), Dupla 2

No item (b) a dupla movimentou o cubo por meio do ponto "Rot", concluindo que as retas são paralelas, dando a seguinte resposta ao item (c):

> *"Elas são paralelas e por isso as retas não se cruzam. Porque não passam pelos mesmos pontos de origem".*

A dupla mostra que tem como conceito de retas paralelas, aquelas que não se interceptam. Quanto à justificativa apresentada pela dupla, tem-se que a mesma considerou o fato de que cada reta passa por vértices diferentes da face ABCD do cubo dado e que, portanto, não poderiam encontrar-se. Este fato ocorre, claramente, porque as faces do cubo são quadradas. A dupla não fez referência a este fato, no entanto, neste caso particular, a representação gráfica é clara e a figura muito familiar, o que pode ter sido tratado como uma evidência.

De Villiers (2001) menciona que: “uma prova apenas tem significado quando responde às dúvidas dos alunos, quando prova o que não é óbvio”. E em muitos casos, sobretudo, em Geometria o aluno percebe e valida visualmente uma propriedade e deixa de justificar de maneira detalhada, uma vez que já se convenceu do resultado. É assim que reconhecemos a complexa relação entre objeto e representação, ou ainda, entre os pólos do visto e do sabido, como descreve Parzysz (1995).

No item (d), a dupla continuou a análise observando a posição relativa entre as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ dizendo que: *“As retas* $\overleftrightarrow{AD}$ *com* $\overleftrightarrow{FG}$ *se encontram ao movimentar o Rot, o* $\overleftrightarrow{AD}$ *é o extremo oposto dos outros pontos*”.

A dupla manipulou e explorou as figuras que seguem.

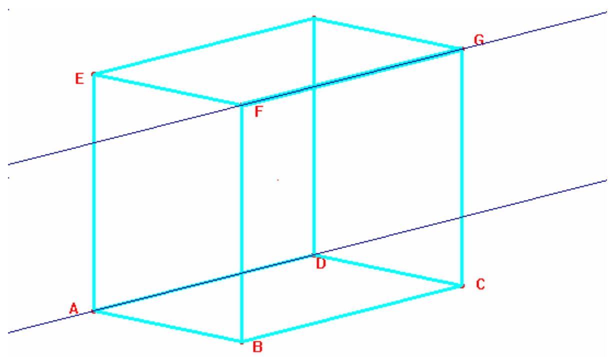


FIGURA 4.6: Atividade 1A (item d), Dupla 2

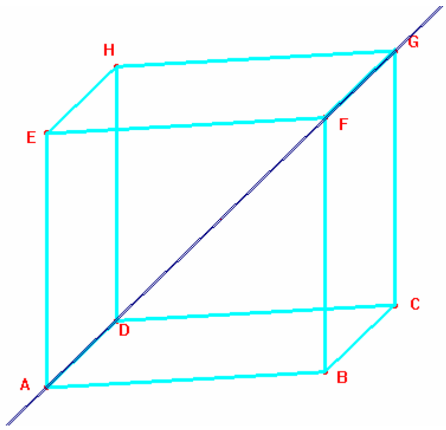


FIGURA 4.7: Atividade 1A (item d), Dupla 2

A dupla teve dificuldades em analisar os elementos que foram dados e traçados. Observamos que na figura 4.6, a posição indica o par de retas paralelas e ao movimentar o cubo a partir do ponto "Rot", a dupla encontra uma posição tal que uma reta se sobrepõe à outra (cf. figura 4.7), respondendo, assim, que "as duas retas se encontram". Conforme dissemos no início desta análise, a dupla deixou-se levar pelo visual apenas, ou seja, permaneceu no pólo do visto (Parzysz, 1988), sendo impregnada pelos aspectos espaciais, sem analisar em termos geométricos as movimentações e a perspectiva da figura. Realizou este item (d) da atividade de maneira incorreta. Neste caso, para esses alunos, os recursos e a característica dinâmica do Cabri não surtiram efeito positivo.

Também não usaram a comparação com os pares de retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, para concluírem que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas.

No item (e), a dupla identificou corretamente outros pares de retas paralelas. Observemos que a dupla considerou somente pares de retas pertencentes à mesma face, limitando sua análise e esclarecendo o porquê de não identificarem $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ como paralelas.

Nesta etapa inicial da seqüência, percebemos que a dupla 2 encontra dificuldades para explicitar e justificar suas respostas. Já na parte B desta atividade, a dupla teve um melhor desempenho.

No item (a), consideraram novamente o cubo ABCDEFGH, traçaram as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ e movimentaram a figura.

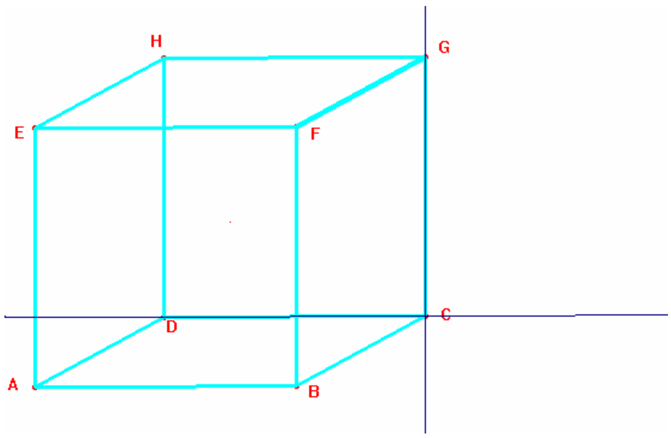


FIGURA 4.8: Atividade 1B (item a), Dupla 2

Ao serem interrogados, no item (b), a respeito da intersecção dessas retas, responderam corretamente, conforme descrito abaixo:

"Elas se encontram, pois as duas retas passam pelo ponto C".

Disseram, também, que o ângulo formado entre as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ é de 90°, ao responder o item (c): *"Um ângulo de 90°, pois elas são perpendiculares".*

Nesse momento, fizemos uma intervenção questionando como podem ter certeza de que o referido ângulo é reto e os alunos responderam prontamente que se deve considerar “os quadrados das faces”.

No item (d), a dupla associou a nomenclatura adequadamente, resposta que já tinham antecipado no item (c) e para a Dupla 1.

No item (e), apresentaram outros 5 pares de retas que têm a mesma posição relativa, ou seja, são perpendiculares.

A dupla fez a opção correta no item (f), finalizando, assim, a parte B da Atividade 1.

A Dupla 2 iniciou a parte C traçando as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. Movimentou a figura, apresentada abaixo, a fim de observar a posição relativa entre essas retas.

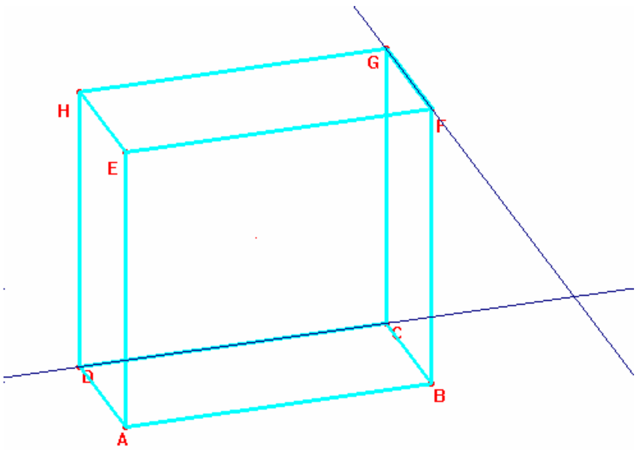


FIGURA 4.9: Atividade 1C (item a), Dupla 2

Como destacamos anteriormente para a Dupla 1, se o aluno considerar apenas a figura, ou seja, ter uma apreensão perceptiva dela (Duval, 1995), não chegaria à resposta correta, pois visivelmente não se trata de um ângulo reto (na perspectiva).

Ao responder, no item (b), se este par de retas está ou não no mesmo plano, a dupla escreveu que: *"Não, porque* $\overleftrightarrow{FG}$ *é um plano e* $\overleftrightarrow{CD}$ *é outro plano",* dizendo a sua maneira que estão em planos distintos. Consideramos, portanto, a resposta certa.

No item (c), a dupla foi questionada a respeito da intersecção entre este par de retas e respondeu: *"Sim, porque elas não são paralelas".*

Essa resposta deixa claro que a dupla está se baseando no que estão vendo na figura e, neste momento, não houve um olhar para as propriedades existentes na figura (faces opostas paralelas, p. ex.). Em princípio, isso significa que a dupla encontra-se no pólo do visto (Parzysz 1988). A dupla tem razão quando diz que as retas não são paralelas, no entanto, existem outros pares de retas que não têm intersecção e que não são paralelas. É o caso das retas reversas, objeto de estudo nesta parte.

No item (d), a dupla deveria nomear essa posição relativa, mas disse simplesmente: "*Nós* n*ão sabemos".*

Mesmo sem saber a nomenclatura e sem uma definição explícita de retas reversas, souberam no item (f) reconhecer outros pares de retas reversas diferentes de $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ – $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, e $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.

Depois desta parte C da atividade respondida e de termos verificado que nenhuma das três duplas apresentou a nomenclatura correspondente, realizamos um novo encontro para apresentar uma definição de retas reversas e dar continuidade às outras atividades.

Resumindo essa Atividade 1, a Dupla 2 apoiou-se mais nas imagens que viam na tela do computador do que em elementos que pudessem realmente fortalecer a argumentação, encontrando-se, portanto, no pólo do visto (Parzysz, 1988). Usou o Cabri com facilidade para traçar as retas pedidas e realizar as movimentações do cubo.

Vamos finalizar a análise desta Atividade 1, observando e comentando os resultados obtidos a partir das produções da **Dupla 3**.

Analogamente às duplas 1 e 2, a Dupla 3 abriu o arquivo contendo o "Rot_Cubo" e traçou as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, obtendo a figura reproduzida abaixo.

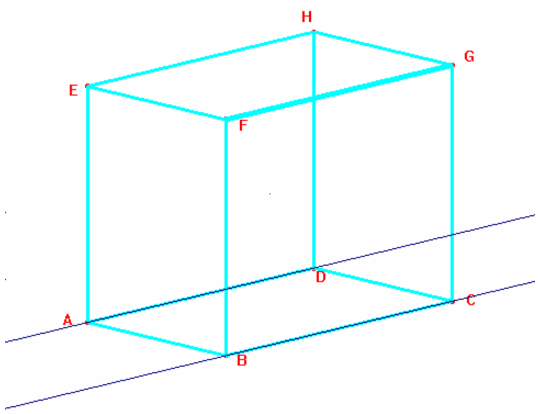


FIGURA 4.10: Atividade 1A (item a), Dupla 3

Nos itens (b) e (c), após movimentações da figura e observações, a dupla concluiu o paralelismo das retas, respondendo na ficha: *"Que as retas ficaram paralelas aos dois pontos".* Apesar da imprecisão ou falta de clareza da frase, quando questionados, explicitaram a relação entre os lados do quadrado da base (paralelos e congruentes), complementando que se referiam às distâncias de A para B e de C para D.

Quando perguntamos a eles o que eram retas paralelas, afirmaram: *“Não se encontram oras!”.*

No item (d), os alunos continuaram a atividade observando a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ (conforme figura abaixo) dizendo que:

“Continua paralelas, e nunca vão se cruzar. Porque cada uma das retas está ligada a dois pontos diferentes”.

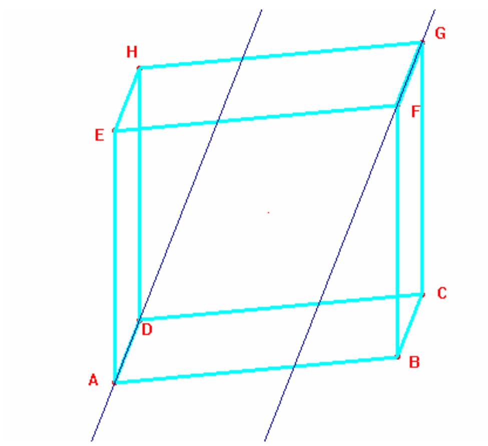


FIGURA 4.11: Atividade 1A (item d), Dupla 3

Novamente consideramos a resposta correta, mas sem clareza no registro escrito. Nas interações, percebemos que a dupla encontra argumentos que, na verdade, são redundantes. Pretendíamos que a dupla justificasse o porquê não há o encontro das retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, mas este não foi o caso.

No item (e), a Dupla 3 também identificou corretamente outros pares de retas paralelas.

Na parte B desta atividade, a Dupla 3 ainda persistiu em responder as questões sem justificar usando elementos pertinentes, como os que o cubo oferece, por isso o escolhemos.

No item (a), consideraram novamente o cubo ABCDEFGH, traçaram as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ e movimentaram a figura (cf. 4.12).

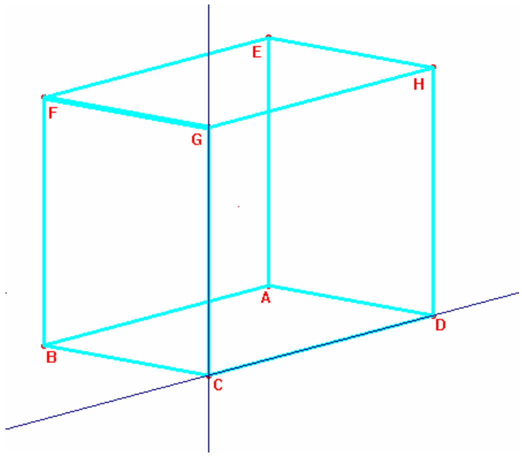


FIGURA 4.12: Atividade 1B (item a), Dupla 3

Ao ser interrogada, no item (b), a respeito da intersecção dessas retas, a dupla respondeu que sim, conforme descrito abaixo:

"Sim porque elas se cruzam no ponto C formando um ângulo de 90°".

Apresentaram, portanto, a resposta correta.

Disseram, antecipadamente, que o ângulo formado entre as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ é de 90°, e depois no item (c), acrescentaram:

"Formam o ângulo de 90°. Porque elas se cruzam no ponto C".

A resposta que esperávamos é que o ângulo formado entre as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ é de 90° porque são suportes de lados consecutivos de um quadrado, a face do cubo. Mas, como já mencionamos, esta característica é evidente para os alunos.

No item (d), a dupla respondeu: *"Reta perpendicular".*

No item (e), apresentou outros 2 pares de retas que têm a mesma posição relativa, ou seja, que são perpendiculares. Os pares apresentados foram: $\overleftrightarrow{DH}$ e $\overleftrightarrow{DC}$, e $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.

A Dupla 3 fechou esta parte da atividade de maneira análoga as outras duas, ou seja, mostrou domínio da relação objeto-representação e concordou que se usasse o Cabri para medir o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$, este ângulo seria diferente de 90°, uma vez que o cubo "no desenho, fica torto".

Com relação à Parte C, após o traçado das retas (cf. Figura 4.13) e observação da movimentação, a dupla respondeu o item (b): *"Não, porque* $\overleftrightarrow{FG}$ *é um plano e* $\overleftrightarrow{CD}$ *é outro plano".* Eles quiseram dizer, à maneira deles, que as retas estão em planos distintos. Na discussão, eles chegaram a mencionar que "*não dá para ter as duas no mesmo plano*", o que evidencia uma boa visualização e compreensão da situação, além de caracterizar corretamente retas reversas.

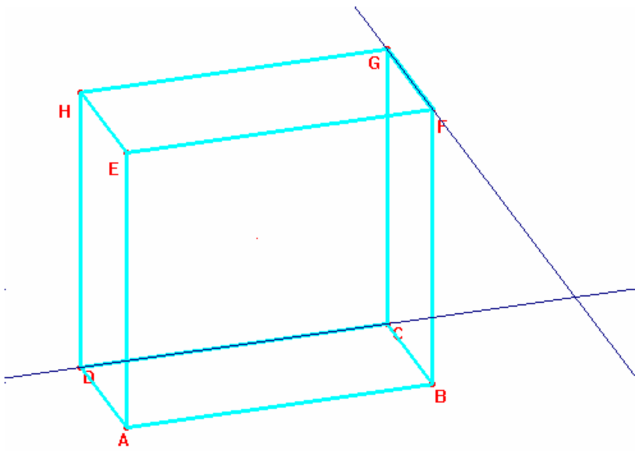


FIGURA 4.13: Atividade 1C (item a), Dupla 3

No item (c), em relação à existência ou não de ponto de intersecção, a dupla respondeu: *"Sim, porque elas não são paralelas".*

Os alunos têm razão quando dizem que as retas não são paralelas, no entanto, existem outros pares de retas que não têm intersecção e que não são paralelas, como é o caso das retas reversas. Ao perguntarmos qual seria essa intersecção, os alunos hesitaram bastante, retomando a idéia de que as retas "não estavam no mesmo plano", com respostas vagas nesse momento. Esse episódio parece-nos ilustrar o conflito entre o visto e o sabido, de acordo com Parzysz (1988), pois mesmo analisando adequadamente as posições entre as retas, os alunos, talvez se deixaram influenciar pelo que se apresentava às suas visões na figura da tela do computador.

Os alunos não conheciam a denominação de retas reversas, respondendo "*Nós não sabemos"* no item (d). Ainda assim, no item (f), reconheceram corretamente outros pares de retas reversas, diferentes de $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

Em síntese, a dupla oscilou entre apoiar-se no que viam na tela do computador e interpretar efetivamente as características dos objetos geométricos, apresentando respostas iniciais no pólo do visto, mas atingindo o pólo do sabido quando das discussões. Assim como no caso das outras duplas, para os alunos da Dupla 3, o manuseio do Cabri se fez sem qualquer dificuldade.

4.4.2 Atividade 2

Nesta atividade as duplas 1, 2 e 3 também utilizaram o cubo ABCDEFGH, com o interesse de estudar as diagonais da face e do cubo.

Consideremos abaixo o resultado que obtivemos da **Dupla 1**. No item (a), a dupla criou corretamente a intersecção das duas diagonais da face ABCD, nomeando-a de X, conforme figura abaixo.

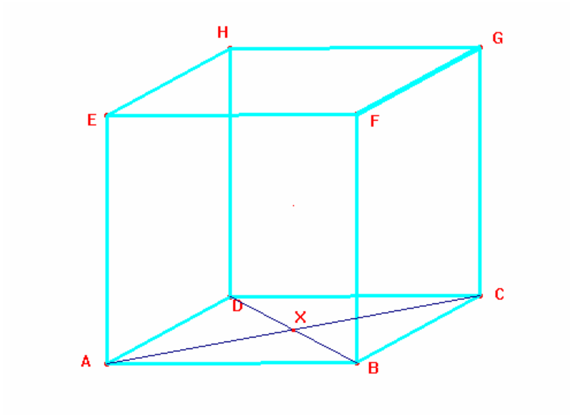


FIGURA 4.14: Atividade 2 (item a), Dupla 1

Ao responder sobre o ângulo formado entre essas diagonais, no item (b), a dupla escreveu:

> *"90°, porque a intersecção x é como se fosse uma circunferência e toda a circunferência tem 360° e essa é dividida em partes iguais formando ângulos de 90°.*

A dupla não respondeu na direção do que esperávamos, ou seja, que a face ABCD do cubo é quadrada e, portanto, suas diagonais interceptam formando um ângulo de 90°. Mas, considerou o ponto X como sendo o centro de uma circunferência e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ como diâmetros, dividindo-a em quatro partes iguais. Desta forma, tiveram uma apreensão operatória da figura, motivada talvez por certa familiaridade com esse tipo de representação. Quando questionados sobre a resposta, colocaram que ela foi fundamentada no que estavam observando e percebendo da figura. Aproveitamos a oportunidade para discutir com os alunos e destacar que ao analisar um objeto geométrico e tirar dele conclusões apenas pela percepção e pelo que está “se vendo”, pode-se cometer erros com facilidade, considerando falsas hipóteses na situação. Lembramos que não foi o que aconteceu, pois a dupla respondeu corretamente, mas solicitamos que atentassem para isso e procurassem explicar e justificar os elementos e relações das figuras que estavam sendo usados, ou em outras palavras, que indicassem sempre o que “garante” a afirmação.

No item (c), a dupla traçou as diagonais das faces EFGH, AEHD e BCFG nomeando-as de Y, Z e T, conforme o enunciado.

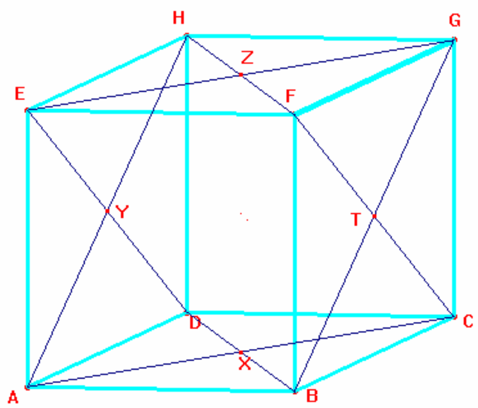


FIGURA 4.15: Atividade 2 (item c), Dupla 1

Ao unir os pontos X, Y, Z e T, a dupla obteve a figura geométrica reproduzida abaixo.

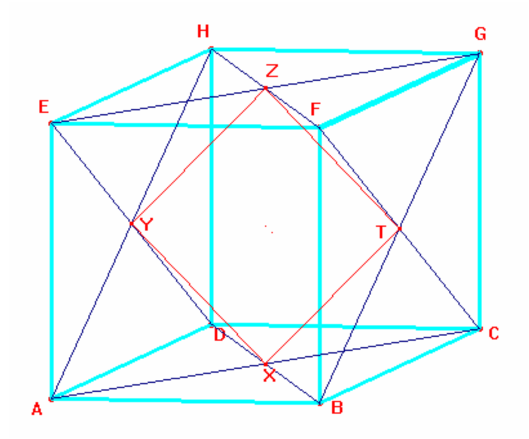


FIGURA 4.16: Atividade 2A (item c), Dupla 1

Um passo importante para que a dupla argumentasse corretamente as questões colocadas nas atividades é que construíram com fidelidade as figuras conforme os enunciados, obtendo posições favoráveis para a visualização. E nesta etapa, a dupla desenvolveu com perfeição, ou seja, traçou corretamente cada segmento, polígono e nomeou os pontos.

No item (d), visando caracterizar a figura XYZT, obtivemos a seguinte resposta: "*Um quadrado".*

E para o caso da figura ser plana ou não, responderam:

"*Sim. Porque pegamos os pontos que são os centros das diagonais, formando um quadrado perfeito".*

Novamente, a dupla acertou a resposta, mas não justificou, dando a impressão que a apreensão perceptiva (Duval, 1995) foi suficiente para tal.

Na parte B, as questões foram direcionadas para as diagonais do cubo. No item (a), a dupla identificou corretamente duas diagonais do cubo e traçou-as, nomeando-as, no item (b), de $\overline{AG}$ e $\overline{FD}$.

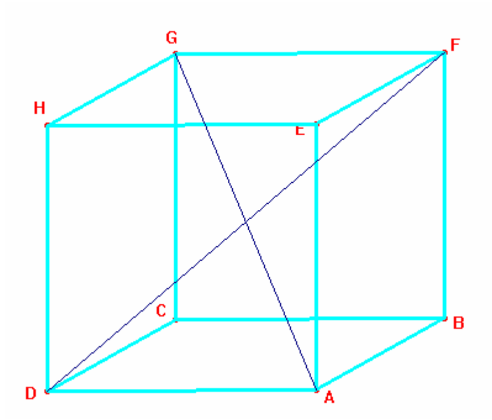


FIGURA 4.17: Atividade 2A (item a), Dupla 1

No item (c), a dupla, criou o quadrilátero formado pelas extremidades dessas duas diagonais, obtendo assim, um quadrilátero apresentado como segue.

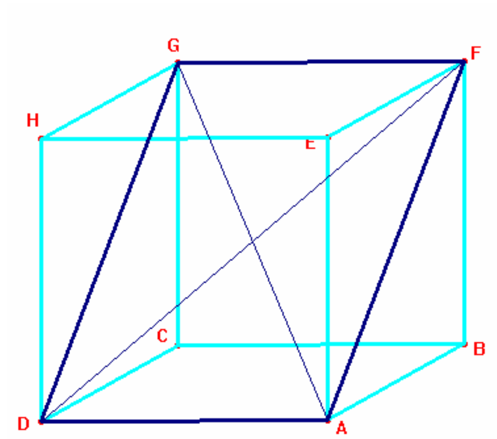


FIGURA 4.18: Atividade 2A (item c), Dupla 1

Em (d), referindo-se ao tipo do quadrilátero obtido, responderam que era "*regular, pois tem todos os lados iguais".*

Esta resposta não está correta, pois a medida do segmento $\overline{AD}$ que é lado de um quadrado é menor que a medida do segmento $\overline{DG}$ que é diagonal desse quadrado.

Quando questionados se as diagonais $\overline{AG}$ e $\overline{FD}$ interceptam-se perpendicularmente, a dupla respondeu que "*Sim, porque ela fica no centro do cubo formando o centro do quadrilátero*".

A dupla considerou o quadrilátero formado como sendo um quadrado, pois, afirmaram que os lados são iguais e as diagonais se interceptam perpendicularmente. As diagonais de um retângulo qualquer não são necessariamente perpendiculares (só no caso particular do quadrado), desta forma, esta resposta também está incorreta.

Esta parte da atividade, portanto, não foi realizada com êxito por esta dupla. Acreditamos que ao trabalhar com as diagonais e centros das faces primeiramente, fez com que os alunos estendessem, de forma análoga, o raciocínio para o estudo com as diagonais do cubo. Faltou, também, manipulação da figura e observação em diferentes posições. O que nos chamou a atenção é que mesmo na posição adotada pela dupla, a figura não aparentava um quadrado – o que, de certa maneira, "contraria" a apreensão perceptiva. A dupla não procurou comparar os lados ou identificá-los detalhadamente, podendo assim perceber que a diagonal do quadrado é maior que a medida do seu lado. De fato, os alunos não tiveram uma apreensão operatória da figura.

Vamos considerar, agora, os resultados desta Atividade 2 apresentados pela **Dupla 2**.

No item (a), inicialmente, a dupla confundiu segmento de reta com reta, traçando as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.

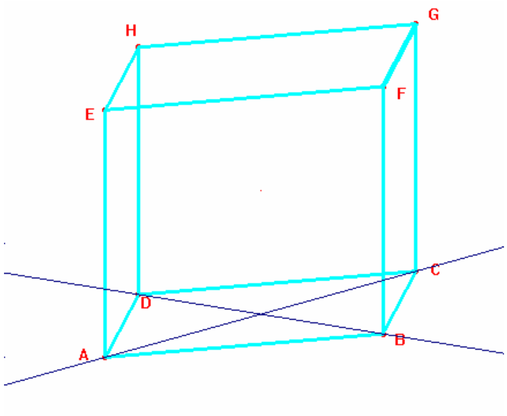


FIGURA 4.19: Atividade 2A (item a), Dupla 2

Questionamos então a dupla no sentido de desfazer este equívoco, e os alunos atenderam prontamente, comentando que se deve *"ir de A até C e depois de B até D".*

Apresentando, assim, a seguinte figura:

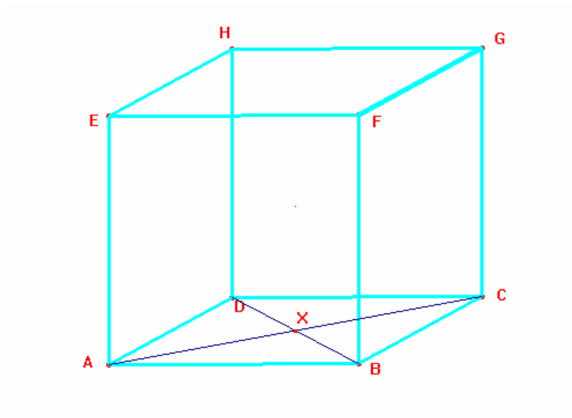


FIGURA 4.20: Atividade 2A (item a), Dupla 2

Analogamente à dupla 1, a dupla 2 também respondeu que essas diagonais se interceptam perpendicularmente.

"90°, pois a face foi dividida em 4 partes, o total é 360°, em uma parte da o resultado de 90°.

Pode ter havido comunicação entre as duplas para a resolução deste item, pois conversaram diversas vezes nessa sessão.

Como pedido no enunciado do item (c), a dupla traçou as diagonais das faces EFGH, AEHD e BCFG nomeando-as de Y, Z e T.

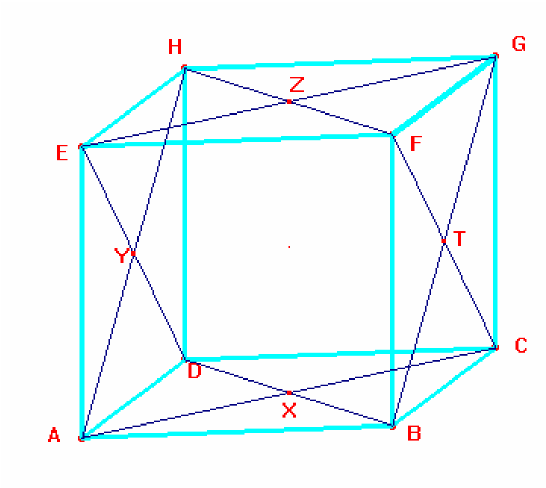


FIGURA 4.21: Atividade 2A (item c), Dupla 2

Unindo os ponto X, Y, Z e T a dupla obteve a configuração abaixo, que passou a movimentar.

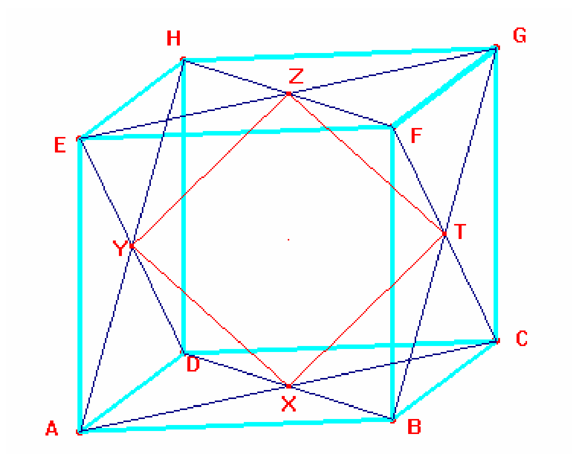


FIGURA 4.22: Atividade 2A (item c), Dupla 2

Insistimos com os alunos que tentassem identificar qual figura geométrica é a figura XYZT e analisassem se era uma figura plana ou não. Para o item (d), os alunos afirmaram se tratar de "*um losango*", e disseram que a figura não é plana, "*pois não pertence à mesma face*". A partir das interações entre os alunos, pode-se perceber que eles utilizaram as faces como elemento de referência para indicar a planicidade de uma figura. Para a dupla, na situação específica, a figura só será plana se estiver contida em uma das faces do cubo. Os alunos não aprofundaram muito este item e restringiram-se a anotar as respostas acima na ficha.

Na segunda parte desta atividade, a dupla também identificou corretamente as diagonais do cubo, destacando as seguintes diagonais $\overline{AG}$ e $\overline{FD}$, como segue abaixo.

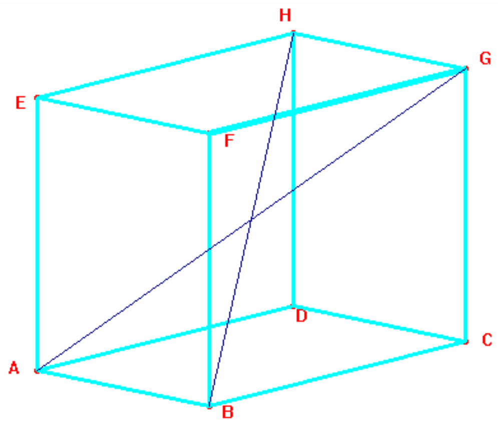


FIGURA 4.23: Atividade 2B (item a), Dupla 2

E no item (c), a dupla, criou o quadrilátero formado pelas extremidades dessas duas diagonais, obtendo desta forma o quadrilátero ABGH.

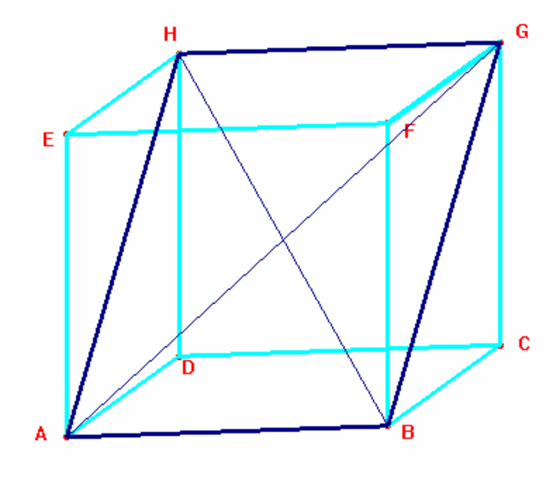


FIGURA 4.24: Atividade 2B (item c), Dupla 2

Diferentemente da dupla 1, a dupla 2 observou e respondeu corretamente o item (d) dizendo que o quadrilátero formado é um retângulo. Descreveram da seguinte maneira: *"É um retângulo porque os lados possuem medidas diferentes".*

Interrogamos a dupla no sentido de mostrar que só ter lados diferentes não é suficiente para ser retângulo. A dupla complementou que o fato dos lados opostos serem paralelos e os ângulos medirem de 90°, já era claro na figura. Percebe-se, mais uma vez, a questão da resistência à argumentação, uma vez que é uma evidência na figura.

A dupla 2, assim como a dupla 1, respondeu que as diagonais deste retângulo interceptam-se perpendicularmente. Confirmamos mais uma vez nossa hipótese inicial dessa falsa propriedade (em retângulos quaisquer) presente no repertório dos alunos.

No desenrolar da seqüência, percebemos que a Dupla 2 ainda continuava apoiando-se muito na representação, satisfazendo-se plenamente dos elementos e propriedades observados visualmente. Em outras palavras, foi uma dupla relativamente resistente, situando-se mais no nível G1 e realizando apreensões perceptivas das figuras (Duval 1995).

A **Dupla 3**, também, confundiu segmento de reta com reta e traçou as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, da mesma maneira que a dupla 2. Procedemos ao mesmo tipo de intervenção e este pequeno equívoco foi sanado.

Com relação às diagonais traçadas, a dupla 3 respondeu simplesmente que os ângulos entre elas eram iguais, justificando da seguinte maneira: *"Em um cubo com lados iguais os ângulos vão ser iguais".*

Ficou faltando explicitar que os ângulos eram retos, mas acreditamos que isso era do conhecimento dos alunos. Mesmo sem responder o valor do ângulo, na discussão entre eles, a dupla fez referências ao cubo, argumentando que o cubo possui faces congruentes, que são quadrados.

Desenvolveu o item (c) da mesma maneira que as duplas 1 e 2, obtendo a figura abaixo.

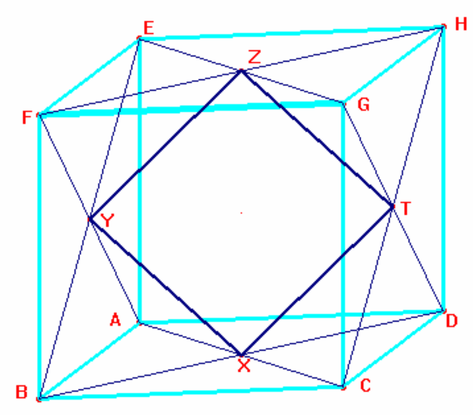


FIGURA 4.25: Atividade 2 (item c), Dupla 3

No desenrolar da seqüência de atividades, a dupla apresentou uma significativa melhora no que tange a explicitar e tentar justificar suas respostas.

Em relação à figura geométrica formada (quadrilátero XYZT), a dupla nada respondeu, e a justificativa apresentada para a afirmação que é uma figura plana foi relativamente ingênua.

Com as respostas dadas acima, fica claro que a dupla teve dificuldades em analisar as figuras geométricas e delas retirar elementos para enriquecer e fundamentar suas argumentações.

Na parte B desta Atividade 2, a dupla 3, no item (a), encontrou dificuldades para traçar as diagonais do cubo, criando as diagonais das faces laterais (cf. figura abaixo).

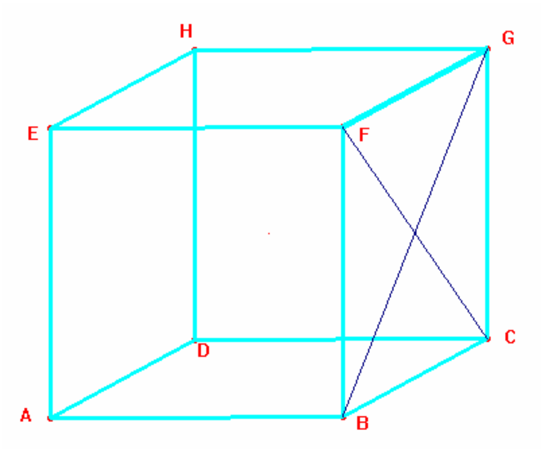


FIGURA 4.26: Atividade 2B (item a), Dupla 2

Fizemos uma intervenção para ajudar a dupla a determinar as diagonais do cubo, retornando ao plano e fazendo uma comparação com as diagonais das faces quadradas. Na discussão, ao indagarmos sobre a posição da diagonal, os alunos responderam que "*atravessa o quadrado..... passa pelo meio*". A partir daí, pedimos à dupla que tentasse selecionar os vértices que permitiam esse tipo de segmento, e os alunos rapidamente começaram a descartar as arestas, e identificaram os segmentos representando diagonais do. Segundo eles: "*encontramos um segmento que atravessa o cubo*".

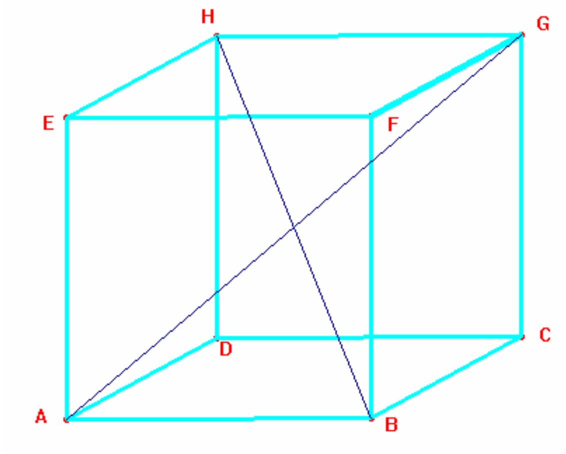


FIGURA 4.27: Atividade 2 (item a), Dupla 3

No item (c), a dupla criou sem problemas o quadrilátero formado pelas extremidades dessas duas diagonais, conforme podemos observar na figura abaixo.

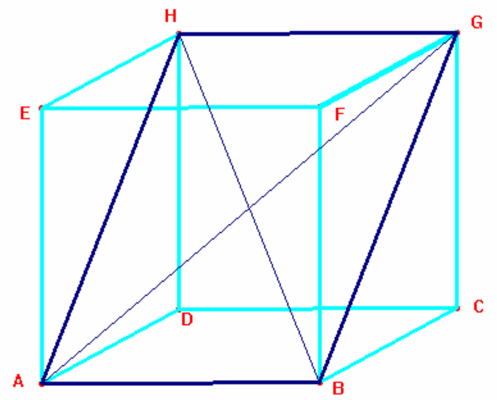


FIGURA 4.28: Atividade 2 (item c), Dupla 3

No item (d), a dupla responde que este quadrilátero é um quadrado, "*porque possui lados iguais",* cometendo o mesmo erro da Dupla 1.

Quando questionados se as diagonais $\overline{AG}$ e $\overline{BH}$ interceptam-se perpendicularmente, a dupla respondeu que: "*Não porque não é uma reta perpendicular*".

Desta forma, a dupla se contradiz, pois havia considerado o quadrilátero como sendo um quadrado e já havia afirmado sobre a perpendicularidade das diagonais. De fato, o desenvolvimento desta seqüência de atividades por parte da dupla 3 ficou a desejar, não por falta de comprometimento da dupla ao resolver a seqüência e sim por falta de requisitos anteriores que os ajudaria no momento de analisar e estruturar suas respostas. Neste sentido, consideramos nosso trabalho como uma experiência importante, sobretudo pela possibilidade de, ao final de cada situação, os alunos recebiam um retorno de suas respostas e podiam comparar as respostas com os colegas, tirar suas dúvidas. Essa Dupla 3 em particular, mostrou-se dentro do que realmente esperávamos e obviamente, tiveram uma grande oportunidade de rever e até mesmo ver pela primeira vez conceitos da Geometria até então desconhecidos.

4.4.3 Atividade 3

Nesta atividade, a **Dupla 1** construiu o quadrilátero reverso ABDF sem apresentar dificuldades e acreditamos que isto foi possível devido às atividades anteriores com esse conceito, em particular a referência empírica no trabalho anterior com dobraduras. Tem-se abaixo a figura construída pela dupla.

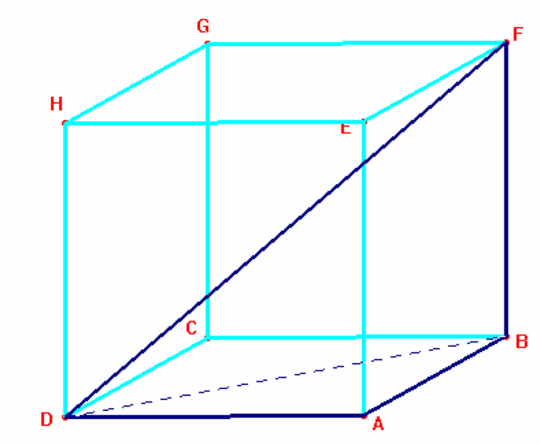


FIGURA 4.29: Atividade 3, Dupla 1

Além do quadrilátero ABDF, a dupla traçou a diagonal $\overline{BD}$ deste quadrilátero.

Na questão 1, perguntamos à dupla o que garante que este quadrilátero é reverso, e eles responderam que: *"É reverso porque três segmentos se encontram no plano ABD. Já o F está em outro plano, sendo assim um quadrilátero reverso".*

A dupla explica corretamente que o quadrilátero é reverso, pois quando cita que três segmentos estão no plano ABD, para eles, as extremidades desses segmentos estão (determinam, na verdade) no plano ABD e que o ponto F está em outro plano, assim não existe um mesmo plano contendo os 4 vértices deste quadrilátero, logo ele é reverso.

Destaquemos que a dupla não se apoiou apenas no que via na tela do computador, ou seja, concluiu que o quadrilátero é reverso através da aplicação da definição anteriormente trabalhada, encontrando-se assim no pólo do sabido (Parzysz, 1988). Além da apreensão perceptiva da figura, acreditamos que houve também apreensão operatória, uma vez que os elementos do cubo foram reconsiderados em termos geométricos.

Em seguida, na questão 2, a dupla marcou o ponto médio de cada lado do quadrilátero reverso ABDF obtendo os pontos P, Q, R e S. Ao unir esses pontos obtiveram o quadrilátero PQRS.

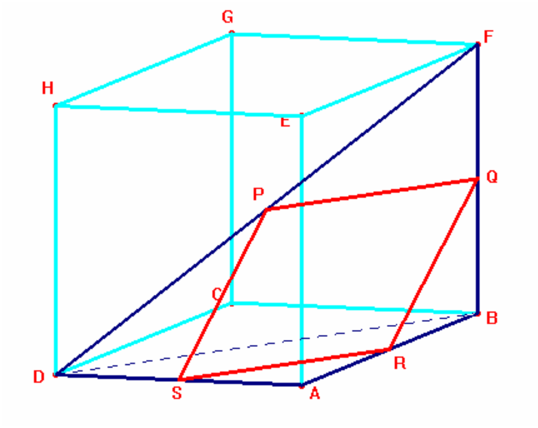


FIGURA 4.30: Atividade 3, Dupla 1

Na questão 3, a dupla analisou a resposta de um aluno hipotético, Antônio, que afirma: “como o quadrilátero XYZT é reverso, então o quadrilátero PQRS também é reverso”. Ao responder se a afirmação de Antônio é verdadeira ou falsa, a dupla escreveu: *“Falsa, pois o quadrilátero PQRS traçado pelos quatro pontos médios pega só um plano”.*

Observemos então que a dupla compreende perfeitamente que para um quadrilátero ser reverso, ele não pode conter os 4 vértices no mesmo plano. E para justificar este equívoco de Antônio, a dupla explicou: *“traçamos uma reta pelo plano e vimos que ela segue na mesma direção sempre”.* Tínhamos consciência da dificuldade de se provar a planicidade do objeto, e não esperávamos provas completetas e rigorosas. Mesmo assim, pudemos observar que a dupla mobiliza conhecimentos pertinentes à questão.

Para finalizar, classificaram este quadrilátero como paralelogramo. Como previamos a retomada desta questão na atividade 4, não fizemos intervenção nesse momento, simplesmente pedimos aos alunos para pensarem sobre essa afirmação, pois deveriam convencer os colegas da sua veracidade.

A dupla 2 também construiu o quadrilátero reverso ABCH sem apresentar dificuldades (cf. figura abaixo) e justificou que era reverso de forma análoga à dupla 1: "*"Um dos vértices não está no mesmo plano que os demais".*

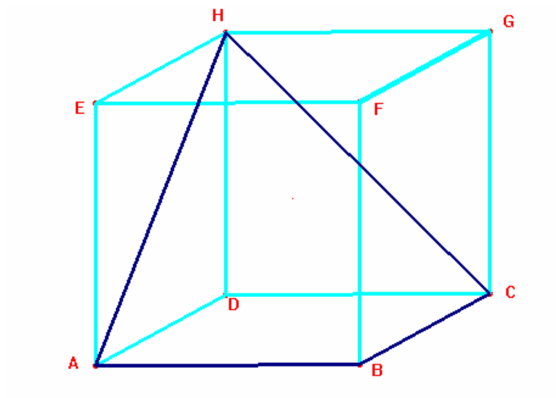


FIGURA 4.31: Atividade 3, Dupla 2

Na questão 2, como pedimos, a dupla 2 marcou o ponto médio de cada lado do quadrilátero reverso ABCH obtendo os pontos P, Q, R e S e os uniu com a ferramenta "Polígono".

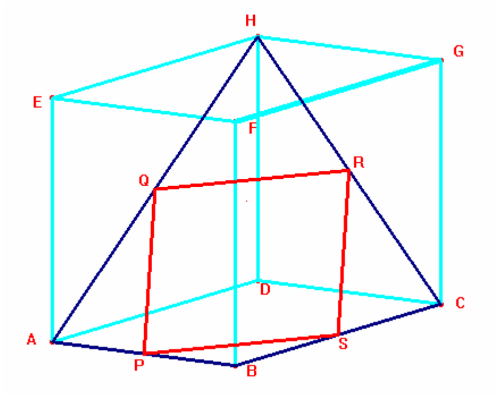


FIGURA 4.32: Atividade 3, Dupla 2

Em seguida, no que tange sua classificação, discutiram e movimentaram a figura para concluir que a afirmação de Antonio é falsa.

Observamos que a dupla insistiu em analisar a posição dos 4 pontos, identificando, perceptivamente que compreende perfeitamente que para um quadrilátero ser reverso, ele não pode conter os 4 vértices no mesmo plano. E para justificar este equívoco do Antônio a dupla argumentou que *"no quadrilátero PQRS todos os vértices estão no mesmo plano".*

Inicialmente, a Dupla 2 considerou o quadrilátero PQRS como sendo um retângulo, e baseou-se na figura abaixo.

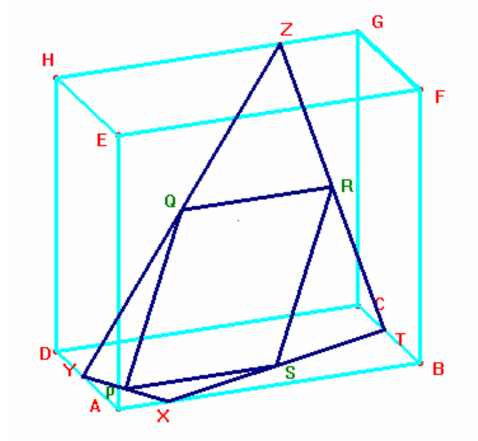


FIGURA 4.33: Atividade 3, Dupla 2

Após analisar e movimentar o cubo com o auxílio do ponto "Rot", a dupla mudou de opinião e classificou o quadrilátero como sendo um paralelogramo, justificando que: *"Nós analisamos que ao pegar uma folha retangular e dobrarmos aparentemente dava um retângulo. Mas, depois, não parece ângulo de 90º!".*

De fato, eles começaram observando as dobraduras que fizeram antes de construir o quadrilátero reverso com o Cabri e utilizando os dedos e lápis ou canetas, tentavam reproduzir o quadrilátero dos pontos médios. Nessa realização empírica, levantaram a hipótese de ser retângulo, mas com a observação da figura no Cabri, a invalidaram pois não identificavam ângulos de 90º.

A dupla explicou sua estratégia, articulando as duas situações e enunciou a propriedade em questão:

> *"Pensamos que era retângulo... mas ao analisar no Cabri percebemos que não era um retângulo e sim um paralelogramo e quando pegamos uma folha no formato de um quadrilátero qualquer ficou claro que seria um paralelogramo. Então qualquer quadrilátero que pegarmos e dobrarmos, com a junção de seus pontos médios formará um paralelogramo".*

O que motivou a dupla a buscar uma compreensão melhor do que estava acontecendo foram os questionamentos que fazíamos durante a aplicação e essa possibilidade de utilizar seja o material concreto (no caso da dobradura) quanto a representação no Cabri. Por exemplo, na figura 4.32 a dupla considerou os vértices do quadrilátero reverso coincidentes com os vértices do cubo. Pedimos que construíssem um outro quadrilátero reverso onde isso não ocorresse, obtendo assim o da figura 4.33. Acreditamos que a manipulação desta figura, movimentando além do ponto “Rot”, os vértices do quadrilátero reverso esta que colaborou para que a dupla mudasse de opinião.

A dupla 3 apresentou respostas muito próximas daquelas dadas pelas demais duplas. Não teve qualquer dificuldade em construir os objetos e explorar dinamicamente a figura. Também não aprofundou as justificativas da planicidade do segundo quadrilátero construído (com os pontos médios), ficando na apreensão perceptiva, fazendo afirmativas a partir da visualização na figura. Quanto à sua conjectura sobre a classificação desse quadrilátero, indicou ser este um paralelogramo, como os demais colegas.

4.4.4 Atividade 4

Esta atividade finaliza a seqüência de atividades, pois é onde cada dupla vai tentar validar a conjectura formulada na atividade anterior. Tentamos novamente conversar com os alunos sobre os riscos de generalizações precoces, bem como de afirmações e argumentos baseados na percepção (no que se vê), apresentando algumas figuras que, em diferentes posições, pareciam sugerir objetos distintos.

Apresentamos na seqüência, as respostas dadas pelas duplas nesta questão.

A dupla 1, justificou o fato de ser paralelogramo da seguinte maneira:

“Ao pegarmos um quadrilátero e dobrarmos na diagonal teremos um quadrilátero reverso (é importante lembrar que ao ser dobrado as medidas não mudaram), a partir deste, pegamos o ponto médio de cada lado, e os ligamos, formamos assim outro quadrilátero localizado no centro do

primeiro. Quando a figura ainda estava em um só plano, ao ligarmos os pontos médios obteríamos um losango tendo assim lados iguais e paralelos e ângulos diferentes, mas quando a figura já estava em dois planos ao ligarmos os mesmos, obteríamos um paralelogramo, pois formam um lado paralelo ao primeiro plano (as horizontais), e as duas retas que saltam dos planos através da diagonal (as retas verticais) também são paralelas".

Neste momento, esses alunos permaneceram no suporte concreto, relacionado à situação de quadriláteros reversos obtidos por dobradura. Sugerimos que os alunos nomeassem os pontos afim de se ter maior clareza sobre os objetos (planos, segmentos) a que se referiam. Ao questioná-los um pouco mais a respeito do que estavam argumentando, a dupla apresentou outros elementos pertinentes, como a transitividade do paralelismo dos segmentos,conforme descrição abaixo:

"A reta PQ segue na mesma direção de DB que por sua vez segue na mesma direção que RS, então PQ está indo na mesma direção de RS".

Quando a dupla cita a figura losango ao unir os pontos médios do quadrilátero no plano, isso se deve ao fato desta ter utilizado uma folha de papel retangular como quadrilátero inicial e, conseqüentemente, considerar um caso particular. Observa-se, no entanto, que enuncia uma propriedade verdadeira.

A dupla reescreveu a justificativa, tentando esclarecer os objetos mencionados com a utilização da nomenclatura adotada, mas não aprofundou a resposta.

A **Dupla 2** apoiou-se na seguinte justificativa:

"É um paralelogramo, pois os lados são paralelos, o quadrilátero PQRS está no mesmo plano. Ele não é um retângulo porque os ângulos não possuem 90°. Não é um trapézio, pois todos os lados são paralelos. Não é um quadrado porque não tem um ângulo de 90° e os lados não tem a mesma medida".

A dupla buscou uma justificativa por eliminação, ou seja, foi descartando os quadriláteros que não correspondiam à situação, até restar o paralelogramo. No entanto, quando cita, por exemplo, que não é um trapézio porque os lados são paralelos (ambos os pares de lados), precisaria justificar este fato. Não avançaram muito quando esta solicitação foi feita por nós. Analisando o comportamento dos alunos, consideramos que eles não entendiam (ou percebiam) essa necessidade. Pode-se dizer que a explicação não traz as justificativas que se relacionam com as hipóteses, mas simplesmente baseadas na percepção e da figura. Esta dupla, com esta resposta, está distante de uma validação conceitual (Balacheff, 1987).

E para finalizar a Atividade 4, a **Dupla 3** produziu a argumentação que segue:

"Pegamos os pontos médios do quadrilátero ABDF para poder fazer o paralelogramo.

Que os lados são paralelos porque o segmento $\overline{PQ}$ *é paralelo ao segmento* $\overline{RS}$*. O ABDF é reverso porque há um ponto para fora".*

"E porque paralelo? Porque os lados da direita e esquerda são do mesmo tamanho e o lado de cima e de baixo são também do mesmo tamanho, por isso chamamos de paralelogramo".

É também uma resposta fundamentada somente no visual, ou seja, no nível G1 descrito por Parzysz (1995) e não explicita o porque de serem lados congruentes, ainda que observamos essa dupla mencionar a decomposição do quadrilátero reverso em dois triângulos.

Percebemos que esta dupla iniciou a resolução desta seqüência de atividade com certa dificuldade de usar o software e justificar suas respostas. No entanto, como o passar dos dias e os comentários que íamos tecendo ao final de cada atividade entregue e discutida, percebemos uma melhora significativa na atitude da Dupla 3 diante das atividades. A dificuldade maior que persistiu foi, muitas vezes, não conseguirem registrar adequadamente seus raciocínios ou os elementos considerados por eles nas resoluções.

Podemos afirmar que os alunos esforçaram-se para verificar e explicar aquilo que desenvolveram, mesmo porque, eram constantemente cobrados neste sentido. No entanto, por se tratar do domínio geométrico, com forte apoio visual ou perceptivo nas figuras dinâmicas, o enunciado de uma característica ou relação entre os objetos, era considerada pelos alunos como geral e "visível" na figura, não suscitando nos alunos a necessidade de justificar ou explicar porque isso ocorre. Assim, a função de explicação para a prova (De Villiers, 2001) que tentamos enfatizar na concepção da seqüência, não foi percebida ou sentido como necessária pelos alunos nesta Atividade 4.

Pelo exposto, consideramos as duplas em nível de validação pragmática (Balacheff, 1987), servindo-se da visualização e utilização de elementos espaciais para intuir propriedades gerais. Ainda assim, consideramos que as atividades, da forma como foram propostas e geridas, podem criar uma tendência para produções na categoria de prova intelectual, pois podem ser complementadas e inseridas em um lapso de tempo maior.

4.5 Considerações Finais

Este trabalho foi desenvolvido durante a segunda fase do Projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* - no qual desenvolvemos uma seqüência de atividades dentro do campo da Geometria Espacial, envolvendo os conceitos de paralelismo e perpendicularismo. Esta seqüência de atividades foi aplicada a 6 alunos do Ensino Médio de uma Escola Pública do Estado de São Paulo.

Trabalhamos inicialmente na Fase 1 do Projeto AProvaME onde foi feito um levantamento das concepções dos alunos entre 14 e 16 anos sobre argumentação e prova na Matemática. Mas, o foco principal do nosso trabalho foi a elaboração, a aplicação e a avaliação da seqüência de atividades onde introduzimos os alunos em situações de aprendizagem envolvendo argumentação e prova.

Destacamos a parte histórica da prova em Matemática no capítulo 2, sem a intenção de que os alunos justificassem e provassem da mesma maneira que os matemáticos lá citados e sim com o objetivo de mostrar como esta questão da prova sempre inquietaram e colaboraram para o desenvolvimento da Matemática.

Nossa pesquisa apoiou-se teoricamente em várias pesquisas de Educação Matemática sobre o tema, em particular nas da Didática Francesa. Assim, citamos os estudos de Balacheff (1987) com os tipos de provas pragmáticas e intelectuais ou conceituais, as idéias de De Villiers (2001) com as funções das provas, o trabalho de Parzysz (1988, 1995) com os níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico e os pólos do visto e do sabido nas situações de Geometria no espaço, e ainda Duval (1995) com as maneiras de apreender uma figura, nos forneceram alguns caminhos para classificar e analisar as respostas e produções dos alunos.

Dos resultados que obtivemos, ficou claro o quanto os alunos, sobretudo os das duplas 2 e 3, apoiaram-se nos aspectos espaciais das representações, ou seja, responderam a partir do que estavam vendo na tela do computador, encontrando-se assim no nível G1 de Parzysz (1988) e com apreensões perceptivas das figuras (cf. Duval, 1995). Durante a análise das atividades procuramos classificar as duplas conforme os tipos de provas acima citados, sem considerar como prova apenas a prova formal. A prova formal tem sua importância, porém, concordamos com os autores acima que é possível considerar outros tipos de validações de maneira que os alunos possam avançar diante desses tipos até chegarem num nível mais aceitável. Foi o que observamos com a dupla 3, que realizou as atividades 1 e 2 com certa ingenuidade e no decorrer da seqüência, apoiou-se em elementos pertinentes dos objetos em estudo, incluindo propriedades e relações gerais.

Podemos observar este fato, por exemplo, considerando o que a dupla 3 realizou na atividade 1 (parte C, item (b) e (c)). No item (b), a dupla traçou as retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e respondeu que estas retas estavam em planos distintos. Porém, no item (c) quando questionada a respeito da intersecção das retas, a dupla, respondeu que sim, justificando que as retas não eram paralelas. Neste ponto consideramos a resposta dada pela dupla 3 ingênua, pois, se as retas estão em planos distintos, como destacou no item (b), a existência da intersecção?

Em relação ao avanço da dupla 3 no decorrer da seqüência, foi possível observar na atividade 3 que existiu um esforço da dupla em buscar elementos para justificar suas respostas. Quando pedimos a explicação, na questão 1 desta atividade, do porquê o quadrilátero construído ser reverso, a dupla foi buscar a justificativa na definição de quadrilátero reverso e na figura construída. E na atividade 4 onde tinham que provar que o quadrilátero PQRS era um paralelogramo, utilizaram (sem justificar) o fato de que os lados opostos eram paralelos e de mesmo tamanho. Consideramos este passo dado pela dupla 3 importante, pois mesmo sem apresentar uma prova conceitual, buscaram analisar a figura e dela extrair elementos para justificar a resposta.

Segundo Balacheff (1987), o aluno pode apresentar uma prova pragmática onde faz uso de um caso particular para verificar e generalizar um resultado. Este é um nível bastante freqüente na atividade de alunos principiantes. Balacheff (1987) coloca que esse tipo de validação é insuficiente, mas que deve ser considerado. Em nossa seqüência de atividades, nenhuma dupla atingiu o nível de prova intelectual (conceitual), porém, a dupla 1, na atividade 4 chegou no nível de validação do exemplo genérico com tendência para o nível de prova conceitual.

Na atividade 4 a dupla procurou provar que o quadrilátero PQRS obtido na figura 3 era um paralelogramo e considerou para isto o seguinte argumento: "*A reta* $\overleftrightarrow{PQ}$ *segue na mesma direção de* $\overleftrightarrow{DB}$ *que por sua vez segue na mesma direção que* $\overleftrightarrow{RS}$*, então* $\overleftrightarrow{PQ}$ *está indo na mesma direção de* $\overleftrightarrow{RS}$". Ou seja, justificou o paralelismo entre os segmentos $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ usando a propriedade transitiva e o elemento principal da seqüência que é cubo para indicar que as retas seguiam na mesma direção. Faltou mostrar que os segmentos $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ eram congruentes. Logo, consideramos que a dupla 1 quase atingiu o nível de validação correspondente à prova conceitual.

Elaboramos esta seqüência de atividades visando envolver os alunos em situações de aprendizagens num contexto de argumentação e prova como citamos acima, com o auxílio de uma ferramenta computacional. Os alunos realizaram toda a seqüência de atividades com o auxílio do Cabri-Géomètre. Este programa facilitou a construção e a visualização de figuras geométricas. Além disso, possibilitou aos alunos um ambiente favorável para a busca de elementos nas figuras para o levantamento de conjecturas e para verificá-las.

Este trabalho de pesquisa colaborou, também, para nossa formação profissional. Através dele amadurecemos nossa maneira de considerar o Ensino de Matemática, uma vez enfrentamos o desafio de ter que elaborar uma seqüência de atividades, aplicar e analisar. Outro ponto importante que consideramos foi o fato de termos que desenvolver a seqüência de atividades usando o Cabri. Realmente ocorreu uma revolução em nossa prática, pois não trabalhávamos nesta direção, que atualmente consideramos fundamental.

Acreditamos que este trabalho de pesquisa auxiliará outros professores de Matemática em sua prática. Não é possível, atualmente, desprezar a influência da tecnologia em todos os setores da atuação humana e o Ensino de Matemática não pode ficar de fora. Desta forma, esperamos que este trabalho influencie e motive outros professores de Matemática a trabalharem na criação de atividades para serem resolvidas com o auxilio de alguma ferramenta tecnológica. E desta forma, como foi possível confirmar, teremos alunos mais engajados e comprometidos com as atividades.

Referências bibliográficas

ARCAVI, A.; HADAS, N. *El Computador com médio de aprendizaje*: exemplo de um enfoque. International Journal of computers for mathematical learning. Tradução de Maria Fernanda Megéa, 2000.

BALACHEFF, N. *Apprendre la Preuve. Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. Paris/France: PUF, 1988, p.201.

BALACHEFF, N. *Processus de Preuve et Situations de Validation*. Educational Studies em Mathematics, 1987.

BOYER, C.B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. SÃO PAULO, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN + Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, 2002.

DE VILLIERS, M. *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica*. Tradução de Rita Bastos, 2002.

DE VILLIERS, M. *Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad*. Revista Educação e Matemática n°62 , 2001.

FONSECA, L. *A demonstração e os futuros professores de Matemática da Educação Básica,* 2005.

FONSECA, L; FERNANDES, D. *Argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores*, 2003.

GRAVINA, M.A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese de Doutorado. UFRS/RS, 2001.

IEZZI, G. DOLCE, O.;DEGENSZAJN. D.;PÉRIGO R.; ALMEIDA, N. *Matemática: Ciência e Aplicações*. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IRENS de Grenoble e Rennes, 2003. *Prova e demonstração*. Tradução de Ana Paula Jahn, Sônia Pitta Coelho e Vincenzo Bongiovanni, 2006.

LEANDRO, E.J. *Um panorama de argumentação de alunos da Educação Básica*: *O caso fatorial*. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2006.

LOOMIS, E.S. *The Pythagorean Proposition*, 1940. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm25/pitagoras/dirhpitagoras.htm.

MARIANI, Rita de Cássia Pistoia. *Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A Coordenação de Registros de Representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo.* Tese de Doutorado. PUC/SP, 2006.

MELO, E.G.S. *Demonstração "Uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no Ensino da Geometria".* Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 1999.

NASCIMENTO, A. Z. *Uma seqüência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica*. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2005.

NASSER, L.; TINOCO, L.A.A. *Argumentação e Provas no ensino de Matemática* – Projeto Fundão, 2001.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria: Uma visão histórica*. Dissertação de Mestrado. UNICAMP/SP, 1989.

PIETROPAOLO, R.C. *Demonstrações nos currículos de matemática da Educação Básica: Pontos de vista de pesquisadores e professores e implicações para os cursos de formação*. Dissertação de Doutorado. PUC/SP, 2005.

POLCINO, F. C., BUSSAB L. H. O. *A geometria na antiguidade clássica*, São Paulo: FTD, 1999.

ROSALVES,M.Y. *Relações entre os pólos do visto e do sabido no Cabri 3D: Uma experiência com alunos do Ensino Médio.* Dissertação de mestrado. PUC/SP, 2006.

ANEXO I

PROJETO AProvaME

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto àquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.*) Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*.: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

ANEXO II

QUESTIONÁRIO VERSÃO INICIAL

A1: Artur, Beth, Célia, Duda, Érica, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando se soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
2 + 4 = 6	4 + 4 = 8
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Célia

Números pares são números que podem ser divididos por 2. Quando você soma números com um fator comum, 2 neste caso, a resposta terá o mesmo fator comum.

Então Célia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

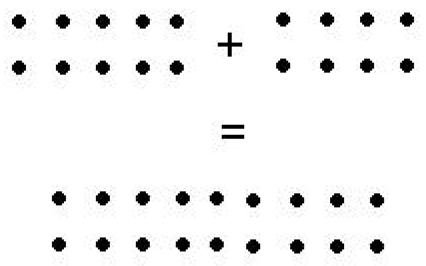
Resposta de Érica

Seja x = número inteiro qualquer
y = número inteiro qualquer

$x + y = z$
$z - y = x$
$z - x = y$
$z + z - (x + y) = x + y = 2z$

Então Érica diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Para cada item, circule SIM (1), NÃO (2) ou NÃO SEI (3)

A afirmação é:

Quando se soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

	SIM	NÃO	NÃO SEI
Resposta de Artur:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Beth:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Célia:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Duda:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Érica:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3

Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3

Resposta de Franklin:

Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3

Resposta de Hanna:

Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3

A2. Suponha que já foi demonstrado que:

Quando se soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando se soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada ☐

(B) Zé precisa construir uma nova demonstração. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Quando se soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

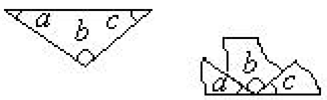
Minha resposta:

G1: Amanda, Bia, Cíntia, Dario, Edu, Fernando e Hélia estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando se soma os ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180^o.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e coloco juntos.

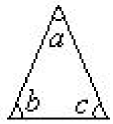


Eu obtenho uma linha reta que é 180^o.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.

Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Bia

Eu desenhei um triângulo isósceles, com c igual a 65^o.



Afirmações .... Justificativa

$a = 180^o - 2c$.............. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

$a = 50^o$........................ $180^o - 130^o$.

$b = 65^o$........................ $180^o - (a + c)$

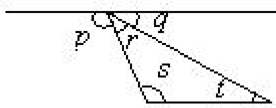
$c = d$........................... Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

$\therefore a + b + c = 180^o$.

Então Bia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações .... Justificativa

$p = s$.......................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.

$q = t$.......................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.

$p + q + r = 180^o$.......... Ângulos numa linha reta.

$\therefore s + t + r = 180^o$

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de todos os tipos de triângulos e fiz uma tabela.

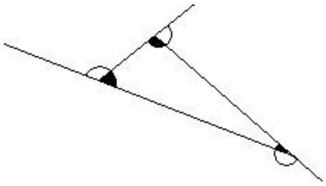
a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180^o.

Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo, você termina olhando o caminho por onde começou. Você deve ter girado um total de 360°.

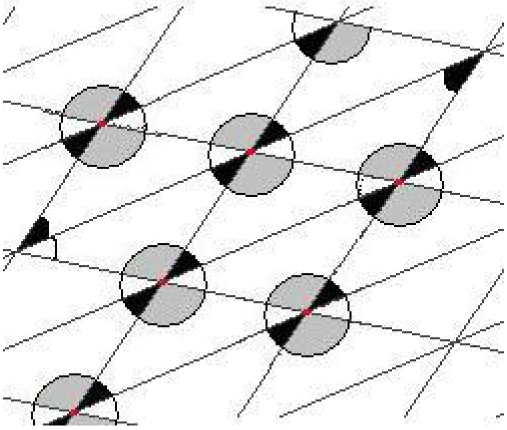


Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° – 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Fernando

Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei ângulos iguais.

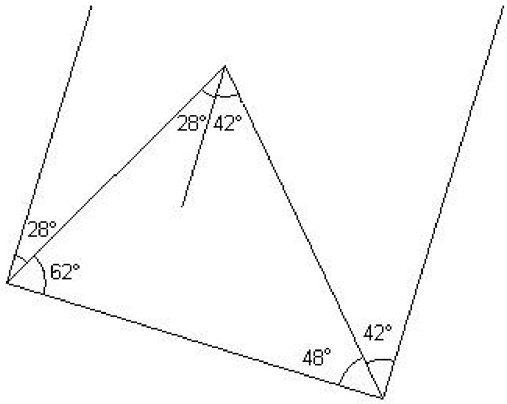


Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360°.

Então Fernando diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^\circ - 28^\circ) + 28^\circ + 42^\circ + (90^\circ - 42^\circ) = 180^\circ$

Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Para cada item, circule SIM (1), NÃO (2) ou NÃO SEI (3)

A afirmação é:

Quando se soma os ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

	SIM	NÃO	NÃO SEI
Resposta de Amanda:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Bia:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Cíntia:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Dario:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Edu:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3
Resposta de Fernando:			
Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3

Resposta de Hélia:

Contem um erro.	1	2	3
Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.	1	2	3
Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos.	1	2	3
Explica de modo fácil porque a afirmação é verdadeira.	1	2	3

G2. Suponha que já foi demonstrado que:

Quando se soma os ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^{o}.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando se soma os ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180^{o}.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Quando se soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360^{o}.

Minha resposta:

ANEXO III

QUESTIONÁRIO VERSÃO FINAL

escola

turma

aluno

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: ....
Turma:...

Data de nascimento: .... Data de hoje:................................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $4 + 6 = 10$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

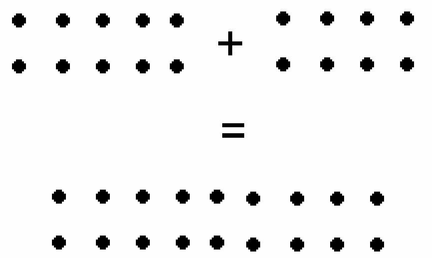
Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a

resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4,

6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(C) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada ☐

(D) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. **A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?**

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?

Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:..............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

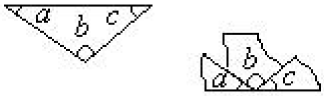
escola	
turma	
aluno	

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

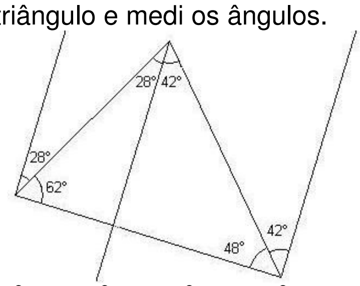
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

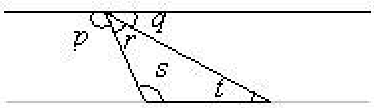
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

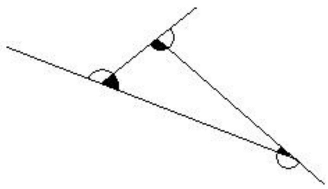
Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações Justificativa
$p = s$.......................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$ .... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$.......... Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180^o$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter gir um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quandc somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam um Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180^o

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180^o.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Escolha A ou B:

(C) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

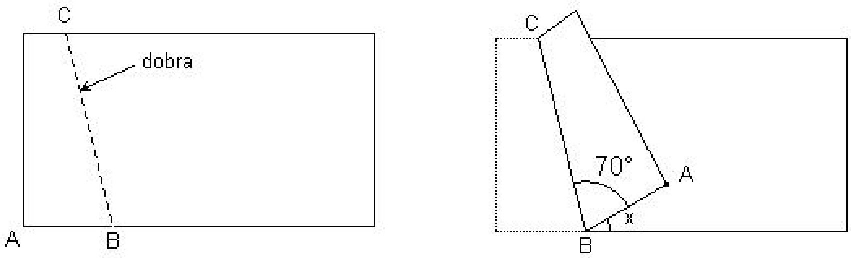
(D) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360^o.

Justifique sua resposta:

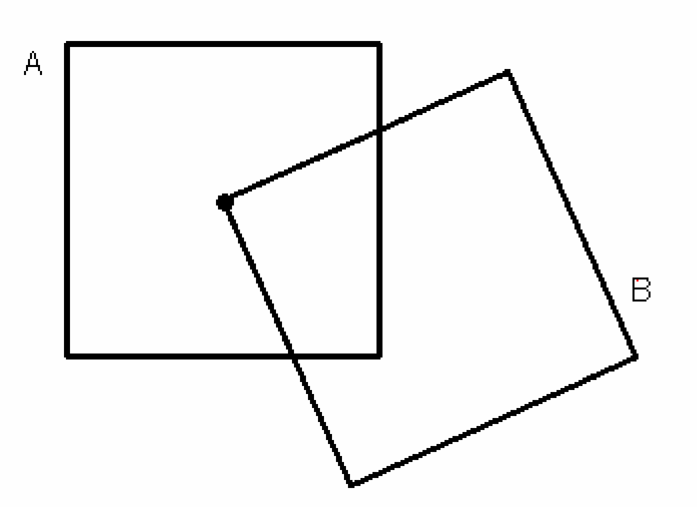
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

ANEXO IV

ATIVIDADES

Atividade 1

Parte A

2) No Cabri 2, abra o arquivo “Atividade_1.fig”. Ele contém a representação de um cubo ABCDEFGH.

f) Trace duas retas, uma que passa pelos pontos A e D e outra que passa pelos pontos B e C.

g) Agora, movimento o cubo, a partir do ponto “Rot” e observe as retas.

h) O que é possível afirmar sobre a posição relativa dessas retas? Justifique sua resposta.

___

___

i) Faça o mesmo para as retas definidas por $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, movimentando o cubo a partir do ponto “Rot” e verificando o que acontece. O que você pode afirmar sobre a posição das retas.

___

___

j) Considerando as outras retas que contêm dois vértices quaisquer do cubo, indique outros pares de retas que apresentam a mesma posição relativa das retas $\overleftrightarrow{\mathrm{AD}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$.

___

___

___

Obs.: Não se esqueça de salvar sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1A.

Atividade 1

Parte B

f) Ainda considerando o cubo ABCDEFGH, no arquivo dado, trace as retas definidas pelos pontos C e D e pelos pontos C e G. Movimente a figura por meio de ponto “Rot” e observe as retas criadas.

g) Elas se interceptam? Baseado em que você pode afirmar isso?

____

____

h) Qual o ângulo formado entre elas? Explique sua resposta.

____

____

i) Você sabe o nome que essas retas recebem?

____

____

j) Considerando novamente o cubo, existem outros pares de retas nesta mesma situação ou posição das retas?

____

____

____

f) Suponha que um aluno traçou as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, depois mediu o ângulo formado entre elas e verificou que:

( ) é diferente de 90°, logo as retas não são perpendiculares.

( ) é 90°, portanto as retas são perpendiculares.

( ) é diferente de 90° porque o cubo foi construído em perspectiva, porém deve ser considerado 90°, pois as faces do cubo são quadradas.

Obs.: Não se esqueça de salvar sua figura nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1B.

Atividade 1

Parte C

a) Abra o arquivo “Atividade1.fig”, e considere novamente duas retas, uma que passa pelos pontos C e D e a outra passando pelos pontos F e G. Movimente o cubo utilizando o ponto Rot e observe a posição relativa dessas retas.

b) É possível afirmar que:

As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ estão contidas num mesmo plano?

Sim, no plano: _______________

Não, por quê?____

____

____

c) As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ se interceptam? Por quê?

____

____

____

d) Você sabe como são denominadas essas retas?

____

e) No cubo, encontre outros pares (pelo menos dois) de retas que apresentam a mesma posição relativa das retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

____

____

____

Atividade 2

Parte A

a) Considere novamente o cubo ABCDEFGH. Trace as diagonais da face ABCD do cubo e determine a intersecção entre elas, nomeando esse ponto “X”.

b) Qual o ângulo formado entre essas diagonais? Justifique sua resposta.

____

____

____

c) Trace, agora, as diagonais das faces EFGH, AEHD e BFGC e determine os pontos Y, Z, T de intersecção em cada caso.

d) Unindo-se os quatro pontos X, Y, Z, T determinados nos itens anteriores, que figura geométrica se obtém? Essa figura é plana? Justifique sua resposta. Para observar a figura, movimente o cubo por meio do ponto “Rot”.

____

____

____

Atividade 2

Parte B

a) No item (a) da parte A, consideramos as diagonais de uma face do cubo ABCDEFGH. Agora, vamos investigar as **diagonais desse cubo**. Comece fazendo uma exploração no Cabri a fim de tentar identificar e criar as diagonais do cubo.

b) Anote: O cubo ABCDEFGH possui as seguintes diagonais:

____

____

c) Considere duas diagonais do cubo ABCDEFGH. Crie o quadrilátero formado pelas extremidades dessas duas diagonais e movimente o cubo através do ponto "Rot".

d) Que quadrilátero é este? Justifique sua resposta.

____

____

____

e) É correto afirmar que:

Duas diagonais do cubo interceptam-se formando um ângulo de 90º?

Por quê? Justifique sua resposta.

____

____

____

<u>Def. 1</u>: Um quadrilátero é chamado de <u>quadrilátero reverso</u> quando não existe plano contendo seus 4 vértices.

Atividade 3

1) No Cabri, abra o arquivo “Atividade_3.fig”. A partir desse cubo, construa um quadrilátero reverso XYZT.

Na sua construção, o quê garante que seu quadrilátero é reverso? Explique.

____

____

2) Marque o ponto médio de cada lado do quadrilátero reverso obtido e trace o quadrilátero PQRS determinado por esses 4 pontos médios.

3) Antonio está tentando investigar as propriedades desse quadrilátero PQRS. Ele afirma que:

“Como XYZT é reverso, o quadrilátero PQRS também é reverso”.

A afirmação de Antonio é verdadeira ou falsa?

____

____

a) Se <u>verdadeira</u> identifique pelo menos dois planos que contêm os vértices do quadrilátero PQRS:

____

____

b) Se <u>falsa</u>:

b_1) O que você pode fazer para mostrar que Antônio está equivocado?

____

____

b_2) De que tipo é o quadrilátero PQRS?

( ) Trapézio

( ) Paralelogramo

( ) Losango

( ) Retângulo

( ) Quadrado

Atividade 4

Na **Atividade 3**, vocês chegaram à conclusão de que o quadrilátero PQRS é um ________________________.

Retomem a figura obtida na Atividade 3, e usando o fato de o quadrilátero XYZT ser reverso e de termos considerado os pontos médios de cada lado desse quadrilátero para obtermos o quadrilátero PQRS, relacione abaixo todos os argumentos possíveis, propriedades e relações geométricas da figura que justificam sua resposta.

Nome do arquivo:	dissertaç[1]..correção para cd
Pasta:	C:\Documents and Settings\Wellington Viana\Meus documentos
Modelo:	C:\Documents and Settings\Wellington Viana\Dados de aplicativos\Microsoft\Modelos\Normal.dot
Título:	
Assunto:	
Autor:	Usuario Itautec
Palavras-chave:	
Comentários:	
Data de criação:	31/8/2007 05:44:00
Número de alterações:	55
Última gravação:	28/10/2007 20:50:00
Salvo por:	Usuario Itautec
Tempo total de edição:	452 Minutos
Última impressão:	28/10/2007 21:07:00
Como a última impressão	
Número de páginas:	188
Número de palavras:	35.521 (aprox.)
Número de caracteres:	191.815 (aprox.)

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo