MIRTES FÁTIMA PASINI

ARGUMENTAÇÃO E PROVA: EXPLORAÇÕES A PARTIR DA ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DIDÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

MIRTES FÁTIMA PASINI

ARGUMENTAÇÃO E PROVA: EXPLORAÇÕES A PARTIR DA ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DIDÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Matemática, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy).

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

Dra. Siobhan Victoria Healy

Dra. Ana Paula Jahn

Dra. Mônica Karrer

DEDICATÓRIA

Para Arnaldo (em memória), minhas filhas Leonora e Júlia, com todo meu amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Muitos me auxiliaram na construção deste trabalho, com conhecimento, incentivo, amizade e carinho. Agora que chegamos ao final, é tempo de agradecer.

À minha orientadora Lulu Healy, pela orientação dedicada e amiga, pela paciência, compreensão, pelo incentivo e apoio constantes.

Às minhas filhas Leonora e Júlia, pela paciência em momentos difíceis e por compreenderem meus momentos de ausência, sempre demonstrando seu amor e companheirismo.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais Darvile e Maria, aos meus irmãos Dorli e Mari e aos meus cunhados Luciana e Fernando, que, além de compreenderem minhas ausências, sempre estiveram prontos para ajudar, incentivar e socorrer-me nos momentos difíceis.

Aos queridos colegas Prof.ª Ângela, Prof. João Batista e Prof. Keiji pela convivência harmoniosa em nossas viagens e pela compreensão durante os períodos de trabalhos.

À amiga e Prof.ª Simone, por suas idéias, pelo carinho e amizade, sempre se mostrando pronta para ajudar, muito obrigada.

À amiga e Prof.ª Sandra, que dispôs de seu precioso tempo para revisar os textos.

À diretora da E.E. Capitão Bernardo Ferreira Machado, Prof.ª Maria Luiza, às coordenadoras pedagógicas Prof.ª Rina e Prof.ª Rosely, pelo incentivo, amizade e por terem cedido espaço para realização desta pesquisa e de todos os trabalhos com participação de alunos durante os três anos de curso e, ainda, durante minha participação no Projeto AProvaME.

Aos alunos que participaram das atividades, pela colaboração espontânea sem os quais este trabalho não teria se realizado. Em especial agradeço ao Igor, Daniel, Letícia e Raíssa.

Às Prof.ªs Dr.ªs Ana Paula Jahn e Prof.ª Dr.ª Mônica Karrer, integrantes da banca examinadora, pelas sugestões que muito contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À Coordenação e ao Corpo Docente do programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática Profissional da PUC-SP, pelo convívio, apoio e compreensão.

Aos secretários Francisco e Vera, pela atenção e pelo apoio dispensado.

Aos colegas de mestrado, pela união e companheirismo demonstrados durante todo o curso.

Enfim, a todos que, de uma maneira ou de outra, participaram de minha jornada, quero agradecer dividindo este momento especial.

RESUMO

Nosso trabalho está inserido no Projeto *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* (AProvaME), que tem como objetivo estudar o ensino e aprendizagem de provas matemáticas na Educação Básica. A questão principal da pesquisa consiste em analisar o tratamento deste tema em determinados conteúdos geométricos de uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental. Mais especificamente, o estudo busca identificar como a passagem do empirismo à dedução é contemplada nas atividades dos livros e quais as intervenções e estratégias necessárias por parte do professor para gerenciar essa passagem. Os tipos de prova na classificação de Balacheff (1988) e as funções de prova identificadas por De Villiers (2001) foram as principais ferramentas teóricas utilizadas para estas análises.

Após um levantamento das atividades relacionadas à prova nos conteúdos Teorema de Pitágoras, Retas Paralelas e as propriedades dos Triângulos, seqüências baseadas nessas atividades foram desenvolvidas com alunos de 8.ª Série do Ensino Fundamental de uma escola pública no Município de Jacupiranga, do Estado da São Paulo. Concluímos que o professor tem à sua disposição material consistente para trabalhar com seus alunos, embora exista o problema na passagem brusca de exercícios empíricos em diversos níveis de verificação para as demonstrações formais, sendo necessária intervenção do professor por meio de revisões pertinentes, proporcionando ao aluno esclarecimentos para desenvolver uma atividade. A principal dificuldade para o professor foi interferir sem assumir a responsabilidade de resolver a situação em questão. Por fim, apresenta-se uma atividade no ambiente de geometria dinâmica, visando proporcionar uma transição mais espontânea entre argumentos baseados em evidência e argumentos baseados em propriedades matemáticas.

Palavras-chave: Argumentação e Prova, Demonstração, Coleção Didática, Geometria, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This work is inserted the research project *Argumentation and Proof in School Mathematics* (AProvaME), which aims to study the teaching and learning of mathematical proofs during compulsory schooling. The main research question of this contribution to the project relates to how proof is treated in particular geometry topics in one collection of mathematics textbooks for secondary school students. More specifically, the study aims to identify how the passage from empiricism to deduction is contemplated in the textbook activities as well as to document the interventions and strategies necessary on the part of the mathematics teacher in order to manage this transition. The types of proofs in the classification of Balacheff (1988) and the functions of proof identified by de Villiers (2001) serve as the principle theoretical tools for these analyses.

Following a survey of the activities related to proof and proving in topics related to the theorem of Pythagoras and properties of straight lines and triangles, teaching sequences based on these activities were developed with students from the 8th Grade of a secondary school within the public school system of the municipal of Jacupiranga in the State of São Paulo. The main findings of the study indicate that the teacher has at his or her disposal material that permit a broad approach to proof and proving, although the passage from exercises involving reliance on empirical manipulations for validation to the construction of proofs based on mathematical properties is not very explicitly addressed, with the result that intense teacher intervention is necessary at this point. A particular difficulty faced by the teacher is knowing how to intervene without assuming responsibility for the resolution of the task in question. Finally, a dynamic geometry activity is presented, as an attempt to provide a learning situation which might enable students to engage more spontaneously in the transition from evidence-based arguments to valid mathematical proofs.

Keywords : Argumentation and Proof, Demonstration, Textbooks, Geometry, Secondary school mathematics.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 15

CAPÍTULO 1 – ANÁLISES PRELIMINARES

1.1. Projeto AProvaME...20
1.2. Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)............................26
1.3. Critérios de análise para a escolha da coleção 27
1.4. Escolha da Coleção...29
1.5. Descrição da coleção *Idéias & Relações* 30
1.5.1. Apresentação dos conteúdos..32
1.6. Síntese..35

CAPITULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO E SUJEITOS DA PESQUISA

2.1. Introdução...37
2.2. Prova e demonstração em Matemática 37
2.3. Funções da prova segundo De Villiers......................................40
2.4. Tipos de prova..43
2.5. Metodologia..48
2.5.1. Perfil do sujeito...49
2.5.2. Aplicação da seqüência de atividades.............................50
2.6. Síntese 51

CAPÍTULO 3 – EXPLORANDO RELAÇÕES E PROPRIEDADES ENTRE ÂNGULOS, TRIÂNGULOS E RETAS PARALELAS

Introdução...53
3.1. Ângulos e triângulos 53
3.2. Análise da resolução da Seqüência de Atividades 1(S-AT1)......57
3.3. Retas paralelas...63

3.4. Análise da resolução da Seqüência de Atividades 2(S-AT2)......77
3.5. Síntese...93

CAPÍTULO 4 – TEOREMA DE PITÁGORAS
4.1. Introdução 94
4.2 Teorema de Pitágoras...94
4.2.1. Teorema de Pitágoras em outros Capítulos 106
4.2.2. Síntese...113
4.3. Desenvolvimento do Teorema de Pitágoras em sala de aula...115
4.3.1. Síntese da aula..128
4.4. Análise da resolução da Seqüência de Atividades 3 (S-AT3) 129
4.5. Síntese 144

CONCLUSÃO
1. Introdução...145
2. Principais resultados...147
3. As questões de pesquisa...150
4. Sugestão de atividade utilizando ambiente dinâmico.........................154
5. Uma palavra final 158

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...160

ANEXOS...165
- Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME).......................166
- Seqüência de Atividades 1 (S-AT 1)...175
- Seqüência de Atividades 2 (S-AT 2)...194
- Seqüência de Atividades 3 (S-AT 3)...210

LISTA DE QUADROS

Quadro I: Classificação dos exercícios encontrados no capítulo Ângulos e Triângulos....57
Quadro II: Classificação dos exercícios encontrados no capítulo Ângulos e Retas....76
Quadro III: Classificação dos exercícios encontrados no capítulo Teorema de Pitágoras....105

FIGURAS

Figura 3.2.1: Atividade 12, observação empírica da soma dos ângulos internos do triângulo....55
Figura 3.2.2: Atividade 17, cálculo de ângulos....56
Figura 3.3.1: Determinar medida dos ângulos....58
Figura 3.3.2: Atividades resolvidas pelas Duplas A e B....59
Figura 3.3.3: Atividade 12 (cont.), recorte da soma dos ângulos internos de um triângulo....62
Figura 3.4.1: Ângulos OPV são congruentes....64
Figura 3.4.2: Atividades que utilizam os conceitos de ângulos....66
Figura 3.4.3: Definição de ângulos complementares, suplementares e replementares....66
Figura 3.4.4: Atividade utilizando a mudança de registros de representação....67
Figura 3.4.5: Criar um enunciado e resolver os sistemas....68
Figura 3.4.6: Retas paralelas cortadas por transversal....70
Figura 3.4.7: Atividade algébrica para descobrir ângulos desconhecidos....72
Figura 3.4.8: Atividade: generalizar congruência de ângulos agudos e obtusos no paralelogramo....72
Figura 3.4.9: Soma dos ângulos internos de um triângulo....73
Figura 3.4.10: Soma dos ângulos internos de um paralelogramo....75
Figura 3.5.1: Resolução da Atividade 1 – ângulos OPV são congruentes....78
Figura 3.5.2: Resolução de atividades utilizando os conceitos de ângulos....79
Figura 3.5.3: Resolução da Atividade 5 por dupla de alunos....81
Figura 3.5.4: Proposta de resolução dos sistemas....82
Figura 3.5.5: Resolução dos sistemas da Atividade 6 pelas duplas....83
Figura 3.5.6: Resolução da Atividade 7, retas paralelas cortadas por uma transversal....84
Figura 3.5.7: Atividade 8 resolvida pelas duplas....85
Figura 3.5.8: Atividade 10, propriedade: ângulos do paralelogramo....86

Figura 3.5.9: Demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º...89
Figura 3.5.10: Resposta das duas duplas – comprovação empírica da somas dos ângulos no triângulo..89
Figura 3.5.11: Demonstrar que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360º..90
Figura 4.2.1: Introdução ao Teorema de Pitágoras...95
Figura 4.2.2: Generalização do Teorema de Pitágoras...96
Figura 4.2.3: Pergunta sobre a medida da hipotenusa..98
Figura 4.2.4: A mais bela prova...100
Figura 4.2.5: A demonstração do presidente...101
Figura 4.2.6: A prova mais curta..102
Figura 4.2.7: *Não esqueça!* Generalizando o Teorema de Pitágoras......................104
Figura 4.2.1.1: Calculadora manual..106
Figura 4.2.1.2: Calcular a medida da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras...108
Figura 4.2.1.3: Construção de um tetraedro utilizando fita adesiva e tiras de papel...109
Figura 4.2.1.4: Problema da Olimpíada de Matemática..110
Figura 4.2.1.5: Teorema de Pitágoras aplicado para calcular lados do triângulo retângulo...111
Figura 4.2.1.6: Teorema de Pitágoras em sistemas de equações...........................112
Figura 4.2.1.7: Teorema de Pitágoras para calcular altura do triângulo eqüilátero...113
Figura 4.3.1: A mais bela prova, livro da 8.ª série..120
Figura 4.3.2: A prova mais curta, livro da 8.ª série..121
Figura 4.3.3: A demonstração do presidente, livro da 8.ª série...............................123
Figura 4.3.4: Cálculo de medidas desconhecidas..124
Figura 4.3.5: Quadrado de lado *l* e diagonal *d*...125
Figura 4.3.6: Calcular a altura do triângulo eqüilátero 125
Figura 4.3.7: Calcular a área do triângulo isósceles..126

Figura 4.3.8: Calcular a área do hexágono regular..127
Figura 4.4.1: Resolução da Atividade 1 envolvendo números irracionais................131
Figura 4.4.2: Resolução da Atividade 2 – comprimento do caibro do telhado..........132
Figura 4.4.3: Resolução da Atividade 8 inserida no capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações*..133
Figura 4.4.4: Resolução da Atividade 9 inserida no capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações*..135
Figura 4.4.5: Resolução da Atividade 7 constante no capítulo *Utilizando equações do 2.º grau para resolver problemas*..136
Figura 4.4.6: Resolução da Atividade 5 encontrada no capítulo *Calculando áreas*...138
Figura 4.4.7: Resolução da Atividade 6 retirada do capítulo *Trigonometria*.............140
Figura 4.1: Tela principal do *software Cabri-Géomètre II*...155
Figura 4.2: Atividade de prova em ambiente informatizado.......................................157

APRESENTAÇÃO

Após 20 anos no magistério, sentindo certa inquietação quanto ao desempenho dos alunos, vi a necessidade de ampliar meus conhecimentos, o que me levou a procurar o mestrado pelas oportunidades oferecidas em pesquisa e, conseqüentemente, para uma melhor qualificação profissional.

Ao decorrer do curso Mestrado Profissional em Matemática tive o privilégio de conhecer e participar do Projeto Argumentação e Provas no Ensino de Matemática (AProvaME), grupo de estudos que se reúne quinzenalmente para estudar e discutir sobre argumentações e provas matemáticas no Ensino Fundamental e Médio.

A presente pesquisa está inserida no Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME), elaborado e coordenado por nossa orientadora.

Esse projeto é financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) e faz parte de um grupo maior, intitulado Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM), pertencente ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, no qual contamos com a participação de vários pesquisadores.

O projeto AProvaME, formado inicialmente por 27 alunos mestrandos e seis professores do programa da PUC/SP, tem como objetivo levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo, avaliando situações de aprendizagem e a compreensão dos alunos sobre as funções da prova em Matemática. Também tem por meta, por meio da formação de grupos de pesquisadores e professores, elaborar situações de aprendizagem envolvendo alunos na construção de conjecturas e provas, utilizando ambientes informatizados.

No grupo, com o acompanhamento dos estudos publicados sobre demonstrações na Matemática, em especial em Geometria, os tipos de prova de Balacheff (1988) e as leituras sobre as funções da demonstração em Matemática (De Villiers, 2001 e 2002), tive a oportunidade de realizar um trabalho que envolveu os tipos de argumentações, justificativas e formas de validação apresentados pelos alunos.

Dentre os 27 mestrandos participantes do projeto AProvaME, encontramos trabalhos subdivididos em três grupos: o grupo que trabalha na análise do *Questionário sobre Prova*,[1] o que trabalha sobre o desenvolvimento das atividades e o grupo que analisa o tratamento da argumentação e da prova em livros didáticos, do qual faço parte.

Alguns desses trabalhos já foram publicados, entre eles: *Um panorama de argumentação de alunos da educação básica: o caso do fatorial*, PUC (2006), relativo à dissertação de Ednaldo José Leandro, *Uma análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção do ensino médio*, PUC (2007), relativo à dissertação de Lourival Júnior Mendes e *Abordagens no ensino da prova e argumentação na matemática escolar: análise de uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental*, PUC (2007), relativo à dissertação de Sueli Maffei Jamelli.

[1] *Questionário sobre prova*, elaborado pelos pesquisadores do projeto AProvaME, contendo questões de Álgebra e de Geometria apresentados em dois blocos.

Meu trabalho encontra-se na intersecção de dois grupos: o que fez apenas análise de livro didático e o grupo que trabalhou com o desenvolvimento das atividades, desenvolvimento este baseado nas atividades do projeto AProvaME. Nosso estudo vai contemplar tanto uma análise de livros didáticos quanto uma discussão da aplicação de atividades em sala de aula, procurando responder três questões:

Questão 1

- *Os conteúdos abordados no livro didático, sua metodologia e seus exercícios dariam a oportunidade ao professor de fazer um trabalho, junto a seus alunos, com vistas ao desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova matemática?*

Na tentativa de responder a esta questão, além de considerar as atividades, explicações, comentários e exercícios apresentados em uma coleção de livros didáticos, também aplicamos alguns desses exercícios em duas duplas de alunos, bem como um capítulo, em sua íntegra, em todos os alunos de uma sala de aula, com o intuito de trazer reflexões sobre qual a postura a ser adotada pelo professor, quais as dificuldades dos alunos e quais as estratégias necessárias para gerenciar a complexidade de situações de aprendizagem associada a prova em sala de aula.

Questão 2

- *Como a passagem do empirismo para o conceitual é contemplada nas atividades apresentadas nos livros da coleção?*

Buscamos responder esta questão observando as atividades que são propostas aos alunos. Procuramos verificar se as mesmas contemplam a passagem do empírico para o conceitual e como ocorre essa passagem. Para isso, acreditamos ser necessária uma investigação acerca da distribuição das atividades na coleção didática, ou seja, é preciso verificar quantos são somente exercícios para aplicar propriedades e quantas atividades de prova são propostas aos alunos.

Questão 3

- *Quais intervenções por parte do professor são necessárias para ajudar os alunos a negociar essa passagem?*

Procuramos investigar como os alunos interagem com essas atividades, anotando seus sucessos e as principais dificuldades. Também verificamos as dificuldades apresentadas pelo professor e as intervenções que se fizeram necessárias para o desenvolvimento dos referidos conteúdos.

Abaixo, faremos uma descrição do trabalho, que resultará em nossa dissertação. Resumimos os principais tópicos de cada um dos capítulos que integram o trabalho.

No **Capítulo 1** iniciamos fazendo um relato sobre o Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME), descrevendo os objetivos e a metodologia utilizada para o desenvolvimento do projeto. Essa fase contou com três semestres para seu total desenvolvimento.

Também analisamos o *Guia de Livros Didáticos 2005 – 5.ª a 8.ª séries* enviado às escolas, que contém os livros indicados e, por fim, analisamos a coleção didática indicada na escola em que leciono, descrevendo como o conteúdo é explorado, como os temas são abordados e como as atividades são propostas.

No **Capítulo 2** fizemos algumas referências à origem da prova e demonstração, às funções da prova na Matemática segundo De Villiers (2001 e 2002), e destacamos as classificações de prova de Balacheff (1988). Descrevemos, também, os sujeitos de nossa pesquisa e a aplicação da seqüência de atividades.

No **Capítulo 3** apresentamos e analisamos os tópicos: *Retas paralelas cortadas por uma transversal* e o *Teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo*. Aplicamos, também, duas seqüências de atividades retiradas dos capítulos analisados e observamos como argumentações e provas são apresentadas pelos estudantes.

No **Capítulo 4** apresentamos e analisamos o tópico *Teorema de Pitágoras*, tanto as atividades encontradas no capítulo dedicado ao Teorema como as atividades que aparecem em outros capítulos. Desenvolvemos o referido capítulo em sala de aula observando as atividades de prova desenvolvidas pelos alunos. Por fim, aplicamos e ponderamos sobre uma terceira seqüência de atividades.

Concluímos nossa dissertação procurando quais elementos respondem às nossas questões iniciais. Sugerimos também uma atividade em que procuramos abordar argumentações e provas em ambiente informatizado.

CAPÍTULO 1

ANÁLISES PRELIMINARES

1.1 Projeto AProvaME

Pesquisas internacionais indicam que os aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos, e que os argumentos são analisados de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Healy e Hoyles, 2000). Assinalam, ainda, a necessidade de os alunos explicarem e justificarem as suas resoluções. Para esse desenvolvimento são necessários ambientes de aprendizagem ricos, contendo tarefas desafiadoras, que provocam a curiosidade e envolvam os alunos (Fonseca, 2003). Tais pesquisas mostram também que entre os estudantes é comum o raciocínio não se apresentar segundo as leis da lógica, sendo eles influenciados por fatores além das exigências lógicas (Healy, 2004).

O projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar,[2] sob a coordenação da Prof.ª Dr.ª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy), está sendo pesquisado pelo Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM), que faz parte do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. A finalidade do projeto é investigar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos.

[2] Financiado pelo CNPq – Processo 478272/2004-9.

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação dessas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação dessa abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

O projeto está sendo desenvolvido em duas fases, integrando, além da equipe de pesquisadores, 27 estudantes do curso de Mestrado Profissional no

Ensino de Matemática da PUC/SP, considerados como professores-colaboradores. Minha participação no projeto se dá como professora-colaborada e teve início no segundo semestre de 2005.

Na primeira fase do projeto, dedicamo-nos ao estudo das *provas e demonstrações* em diversas pesquisas publicadas, como: Pietropaolo (2005), Gravina (2001), Nasser e Tinoco (2001) e De Villiers (2001 e 2002). Também foi criado um espaço virtual para facilitar nossa troca de informações.

Nos encontros presenciais, trabalhamos o "Questionário sobre Prova", visando ao levantamento das concepções de alunos na faixa etária de 14-16 anos.

Aplicamos o questionário citado em 81 turmas, envolvendo um total de 1.998 alunos do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo. O questionário foi elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países, em que encontramos as questões de Geometria e Álgebra apresentadas em dois blocos: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação; e 2) construção de provas.

Os exercícios contidos no questionário visam avaliar em que medida os alunos aceitam evidências empíricas como prova, diferenciam evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos e são capazes de construir argumentos válidos.

Pretendemos, também, identificar a forma de apresentação da prova (língua natural, formal, representações visuais ou figurativas) na compreensão dos argumentos.

Após a aplicação do questionário pelos professores-colaboradores, coletamos os dados e os classificamos utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (1998). Esses dados foram analisados segundo a construção de um modelo multinível, para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Healy, 2004). Os resultados deste questionário poderão se encontrados em Leandro (2006), Doro (2007), Santos (2007), Almeida (2007) e Carvalho (2006).

Na segunda fase, a atenção esteve centrada no professor e em sua contribuição no processo de preparação de situações de aprendizagem. O grupo inicial foi dividido em grupos menores, composto por professores-colaboradores e pesquisadores. Para estes grupos foram propostos dez tópicos de investigação, cinco com conteúdos de Álgebra e cinco de Geometria, tais como: Função do 1.º grau; Triângulos e Ângulos; Progressão Aritmética e Progressão Geométrica; Geometria Analítica: Paralelismo e Perpendicularismo; Números Racionais; Geometria Espacial: Paralelismo e Perpendicularismo; Múltiplos e Divisores; Propriedades dos Quadriláteros; Teorema Fundamental da Aritmética e Teorema de Pitágoras.

O meu grupo desenvolveu atividades sobre Função do 1.º grau e Medida de Ângulos nos Triângulos. Discutimos sobre o conceito de função, quais as dificuldades que os alunos encontram na construção das tabelas e sobre como provar que o gráfico de uma função do 1.º grau é sempre uma reta. Com essa finalidade, o grupo elaborou uma atividade para desenvolver com os alunos usando o *software Cabri Géomètre.*

Também discutimos sobre a criação de atividade voltada para geometria, referindo-se aos ângulos opostos pelo vértice, mas como atividade preliminar, tentando levar os alunos a formar conclusões e a justificá-las. Procuramos elaborar atividades buscando mostrar ao aluno as possibilidades dos pontos serem ou não colineares, além de fomentar a possibilidade de outras discussões. Além disso, procuramos desenvolver atividade referente à soma dos ângulos internos de um triângulo.

Desenvolvemos essas situações de aprendizagem utilizando o *software Cabri Géomètre,* procurando envolver argumentações e provas.

Mantivemos encontros semanais, alternando encontros presenciais e a distância, utilizando o espaço virtual que foi criado na primeira fase.

Essa segunda fase divide-se em duas etapas, conforme descrito a seguir.

Na primeira etapa, chamada intragrupos, estamos elaborando, com auxílio do *software Cabri-Géomètre*, situações envolvendo provas, as quais serão aplicadas em pequenas amostras de alunos. Estamos utilizando nesses encontros, áudio-gravação, produções escritas e computacionais. Cada grupo fará relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre as atividades desenvolvidas, e o disponibilizará no ambiente virtual.

Na segunda etapa, chamada intergrupos, as produções serão disponibilizadas no ambiente virtual e cada professor-colaborador desenvolverá, pelo menos, duas atividades elaboradas pelo grupo, uma de geometria e outra de álgebra, em uma de suas turmas. A aplicação da atividade será acompanhada pelos pesquisadores e a sessão será videogravada para análise. Cada professor-colaborador fará suas observações sobre as atividades que estiver desenvolvendo, disponibilizado-as no ambiente virtual do projeto, visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações ou complementações das situações de aprendizagem.

O projeto não previu, originalmente, a investigação de atividades relacionadas à prova e demonstração apresentadas em livros didáticos; portanto, a partir da participação no projeto, verificamos a necessidade de observarmos em algumas coleções o desenvolvimento do conteúdo e a metodologia utilizada.

Nesse sentido, amadureceu a vontade de efetuar nossa pesquisa na análise de livros didáticos. Nosso estudo tanto vai contemplar uma análise de livros didáticos quanto a discussão da aplicação de atividades em sala de aula, buscando responder as questões:

- *Os conteúdos abordados no livro didático, sua metodologia e seus exercícios dariam a oportunidade ao professor de fazer um trabalho, junto a seus alunos, com vistas ao desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova matemática?*
- *Como a passagem do empirismo para o conceitual é contemplada nas atividades apresentadas nos livros da coleção?*
- *Quais intervenções por parte do professor são necessárias para ajudar seus alunos em negociar essa passagem?*

Como parte dessa análise, julgamos importante trabalhar com duplas de alunos, tal como o livro propõe, possibilitando assim uma reflexão sobre os desafios enfrentados pelo professor no gerenciamento das atividades em sala de aula, a fim de orientar e desenvolver satisfatoriamente uma atividade.

Iniciaremos nossa procura pelas respostas das questões mencionadas anteriormente analisando os critérios adotados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para inclusão das coleções de livros didáticos.

A seguir, analisamos a coleção escolhida para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

1.2 Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)

Desde 1929, quando o governo brasileiro criou um órgão específico para legislar sobre a política do livro didático, o Instituto Nacional do Livro (INL), a ação federal nessa área vem se aperfeiçoando com a finalidade de prover as escolas das redes federal, estaduais, municipais e do Distrito Federal com obras didáticas, paradidáticas e dicionários de qualidade (MEC-FNDE, 2005).

Atualmente, essa política está consolidada no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e distribui gratuitamente obras didáticas para todos os alunos das oito séries da rede pública de Ensino Fundamental. E desde 2003, as escolas de educação especial públicas e as instituições privadas definidas pelo censo escolar como comunitárias e filantrópicas foram incluídas no programa.

O Ministério da Educação instituiu, também, em 2003, o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), com o objetivo de distribuir gratuitamente livros didáticos para os alunos do Ensino Médio de escolas públicas.

Dessa forma, a partir de 2005, as escolas passaram a receber livros didáticos das disciplinas de Português e Matemática para os três anos do Ensino Médio.

O PNLD é mantido pelo FNDE com recursos financeiros do Orçamento Geral da União e da arrecadação do salário-educação.

O PNLD foi criado em 1985, e a distribuição de livros seguia, por critério de escolha, as opções feitas pelos professores. Em 1995 foi publicado o primeiro Guia Nacional do Livro Didático (GNLD), projeto com texto elaborado por especialistas de diversas áreas referentes ao Ensino Fundamental, tendo como objetivo auxiliar os professores na escolha do material a ser adotado para trabalhar em sala de aula. Nesse Guia encontramos resenhas críticas de várias coleções escolhidas e os critérios que orientaram a seleção, com sínteses para orientar os educadores na escolha dos livros, observando o plano pedagógico de sua escola. Em 2005 foi editada a terceira avaliação pedagógica dos livros didáticos de 5.ª a 8.ª séries.

Para esta análise, consultamos o Guia Nacional de Livros Didáticos de 5.ª a 8.ª séries de Matemática, editado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2005.

1.3 Critérios de análise para a escolha da coleção

Para avaliar o Livro Didático de Matemática são adotados critérios eliminatórios, em seus aspectos gerais:

1. Correção de conceitos e informações básicas

A presença de erros conceituais ou de induções ao erro é um dos critérios fundamentais para decidir se um livro pode ou não ser usado em sala de aula (BRASIL 1998, p. 202).

2. Correção e adequação metodológicas

Entre as concepções e práticas de ensino e aprendizagem, devem ser feitas escolhas metodológicas que incluam estratégias para desenvolver várias competências cognitivas básicas, como a observação, a argumentação, a análise, a comunicação de idéias matemáticas, entre outras. Nesse aspecto, o livro didático deve atender a certos requisitos básicos: não deve privilegiar uma única competência e, sim, propiciar o desenvolvimento de várias habilidades e competências; ser coerente com a proposta que aponta e, caso o livro didático recorra a mais de um modelo metodológico, deve indicar sua articulação.

3. Contribuição para a construção da cidadania

O livro didático de Matemática não pode vincular nos seus textos e ilustrações preconceitos que levem a qualquer tipo de discriminação, nem violar o Estatuto da Criança e do Adolescente quanto ao estímulo ou indução ao consumo de drogas, álcool, fumo ou práticas sociais nocivas.

Além dos critérios eliminatórios, encontramos fichas de avaliação, preenchidas pelos especialistas, listas estas chamadas de critérios não-eliminatórios, que são utilizadas na análise dos livros didáticos de Matemática. O conjunto completo desses critérios focaliza os conteúdos, a inter-relação entre eles, a apresentação e as conexões dos conteúdos estudados com o contexto sociocultural. Abaixo extraímos do Guia texto explicativo.

> "A fim de propiciar uma aprendizagem significativa, devem ser dosados judiciosamente o uso da intuição, de fatos do dia-a-dia, o inicio da matemática abstrata, visando, por um lado, a aprendizagem futura e, por outro, desenvolvendo a capacidade de raciocinar, de fazer abstrações a partir de situações concretas, de globalizar, organizar e representar" (BRASIL 1998, p. 204).

Ao manual do professor é dispensada especial atenção, pois este deve reproduzir o livro do aluno, contendo respostas das atividades sugeridas e oferecendo orientações metodológicas e didáticas. Além disso, deve conter indicações para a formação continuada do professor e indicações de leituras complementares para os alunos.

1.4 Escolha da Coleção

Atualmente, leciono em uma escola estadual do Município de Jacupiranga, no Estado de São Paulo. No ano de 2004, a escola recebeu o Guia de Livros Didáticos – 2005, contendo as resenhas aprovadas de 23 coleções de Matemática do Ensino Fundamental.

Aproveitando o encontro semanal de Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC), a Direção/Coordenação disponibilizou esse Guia à equipe de professores de Matemática e, também, algumas coleções de Matemática enviadas para a escola pelas editoras, para que os professores a analisassem.

Em seguida, colheu o parecer dos professores presentes e indicou a coleção *Idéias & Relações*.[3] Esta faz parte da relação de livros indicados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2005. Esse encontro para análise e indicação da coleção não teve a minha participação.

1.5 Descrição da Coleção *Idéias & Relações*

A seguir, apresentamos a coleção citada, tendo como objetivo verificar a abordagem dada ao conteúdo de geometria. O foco de análise está no desenvolvimento de provas e demonstrações, desde a forma empírica, por intuição, até a demonstração formal.

Neste capítulo, descrevemos a forma de apresentação padronizada para toda a coleção. Além disso, citamos e descrevemos as subdivisões apresentadas no interior dos capítulos.

Já nos Capítulos 3 e 4, apresentamos uma análise não só de como o conteúdo é introduzido, como também dos exemplos citados, das atividades resolvidas e das atividades propostas aos alunos.

Nos quatro volumes da coleção é utilizada uma forma de apresentação padronizada, por meio de sete categorias, cada uma indicada por uma cor diferente, a saber:

[3] TOSATTO, Cláudia Miriam; PERACCHI, Edilaine do Pilar F.; ESTEPHAN, Violeta M. *Matemática*. Curitiba: Positivo, 2002.

 Laranja corresponde à *geometria*;

 Azul escuro à *números*;

 Verde escuro à *jogos e descobertas*;

 Vermelho à *medidas*;

 Roxo à *idéias e relações;*

 Verde claro à *truques matemáticos*;

 Azul claro à *arte com a matemática*.

Os capítulos também seguem um mesmo padrão de subdivisões – uma breve apresentação do conteúdo a ser desenvolvido; "*Atividades Matemáticas*"; "*Trocando Idéias*"; "*Não Esqueça*!" e "*Já Sei*!!!". Estas subdivisões não aparecem na mesma ordem em todos os capítulos, assim como nem todos os capítulos trazem todas as subdivisões citadas, com exceção das "*Atividades Matemáticas*".

A seguir, comentamos cada uma das subdivisões utilizadas nos capítulos.

1.5.1 Apresentação dos Conteúdos

Os conteúdos são apresentados e retomados mais de uma vez no livro e nas séries seguintes em diferentes contextos. Pretende-se, assim, que os alunos tenham oportunidade de ampliar conhecimentos e compreender as idéias matemáticas que estão sendo trabalhadas.

Ao apresentar e desenvolver conteúdos, a coleção procura estabelecer conexões entre diversos eixos da Matemática, entre a Matemática e outras disciplinas e entre a Matemática e os temas transversais.

Essas conexões são proporcionadas por meio das diferentes formas de apresentação utilizadas na coleção. Uma delas, os "*Jogos e Descobertas*", traz contextos em que as idéias matemáticas podem ser exploradas de forma significativa e interessante. Em algumas situações eles aparecem para introduzir um assunto e, em outras, para retomar e ampliar conteúdos vistos anteriormente. São propostos diferentes jogos no decorrer do Livro do Aluno, sempre na categoria "*Jogos e Descobertas*". Os jogos visam promover troca de informações e idéias entre os educandos, pois sendo atividades realizadas em grupos, os alunos precisam discutir, argumentar e analisar o ponto de vista do outro. Essa interação proporciona conquistas no aspecto emocional, social e estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico (BRASIL 1998, p. 47).

Uma outra forma de apresentação utilizada para as conexões é a chamada "*Arte com a Matemática*", a qual permite que o professor aborde aspectos da vida do aluno ligados a outras áreas do conhecimento (como Arte, História ou Ciências) e aos Temas Transversais.

As formas de apresentação de "*Truques Matemáticos*" e "*Idéias e Relações*" procuram explorar e relacionar conteúdos vistos anteriormente. Estas seções também proporcionam conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, entre conteúdos matemáticos e tratamento da informação, uma vez que os temas são abordados e, em seguida, retomados e aprofundados ao longo da coleção. Isto se dá por meio de situações reais, valorizando o conhecimento do aluno, privilegiando sua criatividade na busca das soluções para os problemas e curiosidades apresentadas.

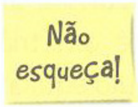
ATIVIDADES MATEMÁTICAS

As situações propostas neste item não visam apenas ao reforço do conhecimento. Muitas vezes são apresentados novos conceitos e problemas que exigem estratégias de solução diferentes das apresentadas anteriormente.

Algumas situações permitem mais de uma solução e outras, inclusive, têm por objetivo mostrar a impossibilidade de resolução.

TROCANDO IDÉIAS

Este item tem a intenção de proporcionar momentos em sala de aula durante os quais o aluno possa realizar trocas intelectuais e também afetivas com seus professores e colegas, levantando hipóteses e analisando as questões apresentadas. Expondo e compartilhando idéias, os alunos desenvolvem tanto a linguagem quanto a capacidade de reelaborar o pensamento matemático. O tópico "*Trocando Idéias*" pretende desenvolver nos alunos a capacidade de trabalhar com o outro e de realizar ações coletivas e cooperativas.



São lembretes que buscam auxiliar os alunos na realização de sínteses, generalizações e organização de idéias, chamando a atenção para aspectos mais relevantes.

Apresenta desafios que levam os alunos a procurar soluções diferentes e inteligentes para problemas não-convencionais e elaborar estratégias pessoais para a solução dos desafios. É importante que o professor estimule seus alunos a resolverem esses problemas e valorize as soluções apresentadas, mesmo que a resposta não seja a solução final.

Em alguns capítulos, aparecem sugestões de leitura propostas aos alunos, nas quais se procura despertar o gosto tanto pela matemática quanto pela literatura. A literatura exerce um papel fundamental no aprendizado da língua materna. No que diz respeito ao ensino e à aprendizagem da matemática, há estudos que apontam para a necessidade de aproximar cada vez mais este ensino do da língua materna (Machado, 1998).

Quanto ao uso da calculadora, observamos que é utilizada para servir como instrumento para compreensão de algumas operações e de seus significados, bem como na verificação de resultados e validação de estratégias utilizadas na resolução de problemas. Em toda a coleção são propostas questões que desafiam e estimulam o aluno a explicar, verbalmente ou por escrito, os procedimentos que utilizou para resolver o problema. No livro da 8.ª série encontramos a sugestão para o uso da calculadora científica, mostrando como os valores aproximados podem ser obtidos utilizando essa calculadora.

Não encontramos referência à utilização de *softwares* educacionais no desenvolvimento dos conteúdos. Todavia, encontramos alguns exercícios que utilizam a figura do computador para resolver situações-problemas que envolvem grandes números e notação científica.

1.6 Síntese

Apresentamos neste capítulo o projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar, do qual participei como professora-colaboradora durante os três semestres utilizados para sua realização.

Analisamos o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2005, para termos maior compreensão sobre como é orientada a análise desses livros.

Também analisamos o Guia de Livros Didáticos 2005 – 5.ª a 8.ª séries, que chega às escolas contendo os livros indicados e, por fim, a coleção didática indicada pela escola, visando à análise dos conteúdos, da metodologia e dos exercícios propostos aos alunos em toda coleção *Idéias & Relações* – Matemática, com o objetivo de responder às questões propostas nesta pesquisa.

No próximo capítulo, apresentaremos o referencial teórico que subsidiará nossa pesquisa.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO E SUJEITOS DA PESQUISA

2.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos as diferentes noções teóricas que serão utilizadas para subsidiar as análises de atividades para prova considerada no trabalho.

Também descrevemos o perfil dos sujeitos de nossa pesquisa e o processo envolvido na aplicação das atividades retiradas da coleção *Idéias e Relações.*

2.2 Prova e demonstração em Matemática

Quando falamos em *demonstração* estamos nos referindo a um tipo de prova matemática. Na literatura sobre a História da Matemática e sobre a Educação Matemática, encontramos também outras expressões para se referir à demonstração, como: prova rigorosa, simplesmente prova, demonstração formal, etc. Observando o significado em outras línguas, percebemos que na literatura francesa alguns pesquisadores utilizam os termos *preuve* e a *démonstration* com o mesmo significado, enquanto outros distinguem uma da outra, atribuindo um significado mais amplo para ao primeiro termo, ou seja, o termo *prova* é utilizado para qualquer tentativa de determinar a veracidade de uma afirmação, enquanto *demonstração* é revestido por argumentos dedutivos e axiomáticos. Os autores ingleses utilizam o termo *proof*, mas alguns distinguem entre *proof* e *formal proof* (Bastos e Loureiro, 2004; Pietropaolo, 2005). Novamente, para alguns pesquisadores, o termo *proof* é mais amplo que *formal proof.*

Segundo Gouvêa (1998), encontram-se vestígios da origem da demonstração, na Matemática da Antigüidade, mais precisamente na Grécia, no período referente ao século VI a.C., baseando-se em poucos comentários de matemáticos gregos posteriores a essa época, tendo em vista a inexistência de documentos. Ainda, segundo o mesmo autor, entre os gregos, a demonstração é conseqüência do pensamento reflexivo, influenciado pelas exigências político-sociais da necessidade de convencer o outro, utilizado pelos sofistas,[4] estes mestres de retórica e de eloqüência que precisavam preparar os cidadãos para as disputas de cargos públicos por meio de eleições livres numa Atenas democrática. Nesse sentido, o significado da palavra *demonstração* parece se aproximar de um sentido mais amplo que alguns atribuíam à palavra *prova.*

Segundo os pesquisadores Bastos e Loureiro (2004) e Pietropaolo (2005), encontramos ainda outra dificuldade: a palavra *demonstração* é usada com vários sentidos em diferentes contextos, ainda que em todos esses contextos exista a idéia comum que é a de justificar ou a de validar uma afirmação, fornecendo razões e argumentos, apesar de os meios usados para tal serem diferentes.

[4] Estamos nos referindo ao termo Sofista segundo a definição encontrada na *Enciclopédia Barsa*, v. 14, p. 353: "Na Grécia dos séculos V e IV a.C., a palavra designava uma categoria de professores e conferencistas que instruíam os jovens, mediante remuneração, visando encaminhá-los na vida pública. Ensinavam, sobretudo, a arte de falar e o uso de argumentos firmes numa discussão pública".

Segundo Fonseca (2004) e Pietropaolo (2005), o que os matemáticos consideram demonstração é uma questão complicada e subjetiva. Ainda segundo Fonseca (2004), entende-se demonstração ou demonstração matemática como sendo uma cadeia de argumentos convincentes, rigorosos, gerais, completos e resistentes, interligados logicamente.

Em relação à análise dos princípios sobre a demonstração, vários estudiosos como Kline (1973, apud De Villiers, 2001), Albert (1988, apud De Villiers, 2001), Hanna (1989, apud De Villiers, 2001) e Volmink (1990, apud De Villiers, 2001) mostram os diferentes significados que podem ser atribuídos à palavra “demonstrar”. Segundo esses pesquisadores, a demonstração pode surgir em diferentes situações, pode ser utilizada quando os alunos têm dúvidas, incertezas e, ainda, quando uma demonstração é um argumento necessário para validar uma afirmação.

Quanto às funções atribuídas à *demonstração*, Pietropaolo (2005) distingue que na prática docente da Matemática a função da prova é a de justificação e verificação da atividade proposta, enquanto na Educação Matemática a prova tem uma função que se considera mais importante do ponto de vista do ensino, que é a de explicar, elucidar uma dúvida, sanar uma dificuldade do aluno. O autor conclui que uma demonstração é construída não só para garantir a verdade de uma afirmação, mas para explicar por que razão é verdadeira.

Tendo em vista o contexto de nossa pesquisa, isto é, a do ensino-aprendizagem, faremos uma diferenciação entre prova e demonstração, uma vez que entendemos que prova tem um significado mais amplo, ou seja, vai desde uma escrita e/ou fala empírica até uma escrita e/ou fala conceitual, porém com menos rigor, e demonstração tem um sentido mais restrito, referindo-se a algo mais rigoroso e estritamente conceitual. Nosso interesse é verificar todos os tipos de provas apresentados pelos alunos.

A seguir, abordaremos as funções da prova segundo De Villiers (2001).

2.3 Funções da prova segundo De Villiers

Segundo De Villiers (2001), a função da prova nos traz a idéia de remover as dúvidas existentes quanto à resposta dos exercícios, ou seja, a prova é vista como a verificação, ou como a correção das afirmações matemáticas produzidas pelos alunos, idéia esta que dominou a prática de ensino e as investigações relativas ao ensino da prova.

> "Tradicionalmente, a função da demonstração[5] foi vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correção das afirmações matemáticas. A idéia é que a demonstração é usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de céticos, uma idéia que dominou unilateralmente a prática de ensino e a maior parte das discussões ou da investigação relativa ao ensino da demonstração" (De Villiers, 2001, p. 31).

Além disso, o autor coloca que:

> "A prática real da investigação moderna em matemática requer uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração. Embora eu não o

[5] Na tradução do texto de De Villiers encontramos o termo *demonstração*, mas como no original o termo utilizado pelo autor é *proof*, vamos, em nossa escrita, adaptá-lo ao significado mais amplo da palavra *prova*.

> defenda nem como completo, nem como único, ao longo de minha investigação nos últimos anos tenho considerado útil o seguinte modelo relativo à função da demonstração: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual (sem que a ordem signifique ordem de importância)" (De Villiers, 2001, p. 32).

Para De Villiers, a prova, além de verificação, tem outras funções importantes na Matemática, como: explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual.

A função da prova como processo de *verificação/convencimento* não é necessária para a convicção; mas, ao contrário, procuramos provar certas conjecturas quando já estamos convencidos da sua verdade. Em situações onde a convicção existe e parte-se para a prova, esta fornece a motivação e torna-se um pré-requisito para a procura de uma demonstração, assumindo sentido diferente de verificação ou convencimento. Segundo De Villiers, para alguns professores somente a prova fornece a certeza.

Na prova como processo de *explicação*, com verificações quase empíricas é possível atingir um alto nível de confiança na validade de uma conjectura, mas esses processos não fornecem uma explicação satisfatória, apenas a confirmam; e, quanto mais exemplos forem usados, mais essa confiança aumenta. No entanto, a sensação psicológica de entendimento e esclarecimento somente é adquirida pela necessidade de uma explicação que proporcione compreensão sobre por que é verdade (De Villiers, 2002).

A prova como processo de *descoberta ou invenção* pode levar a encontrar novos resultados. Isto é, a prova não se constitui apenas em um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas sim em uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados (De Villiers, 2001).

A prova como processo de *sistematização* é indispensável para transformar um conjunto de resultados conhecidos numa definição ou teorema. A organização dessas relações lógicas tem como principal objetivo arranjar essas afirmações isoladas ou não relacionadas num todo unificado e coerente.

A prova como *desafio intelectual* cumpre a função gratificante de realização própria e satisfação pessoal por ter construído uma demonstração. Passa a ser um campo de teste para a energia intelectual. Segundo De Villiers (2002), muitas vezes não é a verdade do resultado que está em dúvida, mas se (e como) seremos capazes de demonstrá-lo.

A prova como *meio de comunicação* assume a importante função comunicativa da demonstração, sendo um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos e entre os próprios alunos, tendo este a importância social de comunicar o conhecimento matemático na sociedade. Esta comunicação contribui para o seu refinamento e a identificação dos erros, ou para sua rejeição, se descoberto um contra-exemplo.

Para De Villiers:

> "Parece fazer sentido iniciar os alunos nas várias funções da demonstração, numa seqüência como a indicada abaixo, embora não de maneira estritamente linear, mas numa espécie de espiral em que as funções já introduzidas são retomadas e ampliadas" (De Villiers, 2001, p. 35).

Explicação

⇩

Descoberta

⇩

Verificação

⇩

Desafio Intelectual

⇩

Sistematização

Concluindo, para De Villiers (2002), estas não são as únicas funções da *prova* em Matemática, sendo, porém, as principais.

2.4 Tipos de prova

Em diversos trabalhos são abordadas as dificuldades dos alunos em construir uma prova matemática, e inúmeras são as pesquisas publicadas em busca de estratégias que sejam eficazes para o seu ensino, como as de Bell (1976, apud De Villiers, 2001), Van Dormolen (1977, apud De Villiers, 2001), Barbin (1988, apud Gouvêa, 1998), Balacheff (1988), Gravina (2001), Healy e Hoyles (2000), entre outros.

Assim como Vaz (2004), Gouvêa (1998) e Carvalho (2004), utilizaremos em nosso trabalho os tipos de prova de Balacheff (1988).

Para este autor, existem duas categorias de provas produzidas por alunos: provas pragmáticas e provas intelectuais (conceituais).

As provas pragmáticas envolvem uma ação, são explicações que ocorrem de ações diretas sobre certas representações de objetos matemáticos (como, por exemplo, os desenhos). Já as provas intelectuais não dependem apenas da ação efetiva sobre a representação, mas têm nas ações interiorizadas e no discurso lógico-dedutivo o controle dos objetos e das relações entre eles (Gravina, 2001).

Balacheff (1988) distingue ainda, quatro tipos de provas conceituais e pragmáticas: *empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico* e *experiência mental.*

Descrevemos abaixo esses quatro tipos de provas utilizando as descrições de Vaz (2004), e exemplificamos cada tipo por meio de um exemplo retirado do "Questionário sobre Prova", questionário este que foi aplicado aos alunos na segunda fase do projeto AprovaME. No questionário citado, encontramos cinco demonstrações de que a seguinte afirmação é verdadeira "Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º", demonstrações aqui utilizadas para exemplificar cada tipo de prova.

1) *Empirismo ingênuo*: são verificados alguns casos e, concluindo-se a validade para todos, aceita-se o fato como verdadeiro, sem examinar suas particularidades. Este modo de validação apresenta-se insuficiente, pois não é possível analisar todos os exemplos possíveis, sendo uma forma de generalização, que resiste ao longo do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

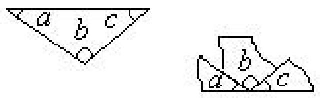
a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi 180º.

2) *Experiência crucial*: verifica-se a propriedade em um caso particular, ou seja, escolhemos um caso, estudamos suas características e, se a propriedade fica verificada para esse caso, então está confirmado seu caráter geral.

Resposta de Amanda

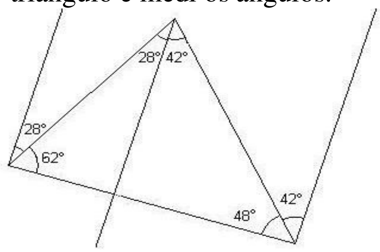
Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles, e a mesma coisa acontece.

3) *Exemplo genérico*: escolhe-se um objeto representante de uma classe, objeto este que possua propriedades características e estrutura representativa da classe e, a partir desse exemplo, tornam-se explícitas as razões da verdade de uma asserção por meio das operações ou transformações que representam à classe.

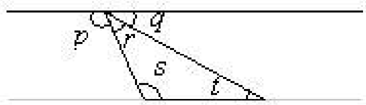
Resposta de Hélia
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$

4) *Experiência mental*: o aluno se desprende de situações particulares, com exemplos, o que se torna claro na argumentação. As propriedades, relações fundamentais de prova, são indicadas pela explicação caracterizada como demonstração matemática.

Resposta de Cíntia
Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$.......................... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$ .... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.
$\therefore s + t + r = 180^o$	

O *empirismo ingênuo* e o *experimento crucial*, segundo Balacheff (1988), não estabelecem a validade de uma afirmação, não satisfazem as condições necessárias a serem consideradas como demonstrações. Segundo as definições que foram apresentadas, Balacheff escolhe chamá-las de *prova,* porque os alunos costumam justificá-las dessa maneira.

Ressalta também que as análises das expressões lingüísticas não são suficientes para verificar o tipo das provas.

Balacheff (1988) argumenta que a passagem do *empirismo ingênuo* para o *experimento crucial* corresponde à necessidade de garantir generalidade para sustentar a validade de uma conjectura. O *empirismo ingênuo* desaparece quando as provas conceituais se fixam, mas o *experimento crucial* pode continuar para validar uma proposição.

Para Balacheff (1988, apud Gravina, 2001), o nível *experiência mental* marca a transição da prova pragmática para a prova intelectual, sendo o nível *exemplo genérico* uma fase intermediária, que podemos situar como ora na categoria de prova pragmática ora na categoria de prova intelectual, pois requer uma negociação das características genéricas do exemplo utilizado.

2.5 Metodologia

O principal objetivo de nossa pesquisa é analisar se os conteúdos abordados no livro didático, sua metodologia e exercícios dariam a oportunidade ao professor de fazer um trabalho junto aos seus alunos visando desenvolver as habilidades de argumentar e provar matematicamente.

Nosso estudo é composto de duas partes. A primeira envolve um levantamento de atividades relacionadas à *prova,* da coleção *Idéias & Relações – Matemática,* em dois tópicos principais: "Paralelas e Propriedades dos Triângulos" e "Teorema de Pitágoras". A segunda parte envolve a aplicação de seqüências de atividades, estas com base em um levantamento feito com alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental.

Em relação à primeira parte, os seguintes procedimentos foram adaptados do Projeto AprovaME. No Projeto, dez tópicos foram propostos para investigação (cinco de Álgebra e cinco de Geometria). Optamos por trabalhar apenas com conteúdos de geometria e escolhemos dois tópicos em particular, porque:

1) No subgrupo fase 1 do Projeto AprovaME, participei do desenvolvimento de atividades sobre os ângulos e propriedades dos triângulos, portanto esse tópico é de grande interesse.

2) Como decidi enfocar meus estudos nas 8.ª séries, o Teorema de Pitágoras será um tópico abordado na sala de aula.

Inicialmente, fizemos uma análise na qual as atividades relacionadas à prova e demonstração foram identificadas e discutidas à luz das perspectivas teóricas levantadas no Capítulo 2.

Na segunda parte do estudo, investigamos como os alunos interagem com essas atividades, anotando seus sucessos e suas principais dificuldades. Também verificamos as dificuldades apresentadas pelo professor no desenvolvimento dos conteúdos.

2.5.1 Perfil do sujeito

Os sujeitos desta pesquisa são alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental da Escola Estadual Capitão Bernardo Ferreira Machado, situada no município de Jacupiranga. Essa escola faz parte da Diretoria de Ensino Hugo Bertelli, de Registro, localizada na região do Vale do Ribeira, no Estado de São Paulo.

A E. E. Capitão Bernardo F. Machado atende alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental nos períodos da manhã e da tarde. Como nosso trabalho será desenvolvido no período da tarde, pois a pesquisadora leciona no período da manhã e à noite, optamos por convidar todos os alunos da 8.ª série do período matutino para ajustarem-se aos horários.

Decidimos ainda por trabalhar com alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental porque as seqüências de atividades selecionadas fazem parte do conteúdo da coleção *Idéias e Relações* e encontram-se nos livros da 6.ª, 7.ª e 8.ª séries. Para tanto, pretendemos aplicar três seqüências de atividades, em duplas, para alunos que cursam a 8.ª série.

Convidamos todos os alunos das três oitavas séries – A, B e C – do período da manhã. Explicamos que os trabalhos seriam desenvolvidos no período da tarde, em possivelmente três encontros. Solicitamos o compromisso por parte deles quanto à presença e quatro alunos se manifestaram espontaneamente para participar desse projeto.

2.5.2 Aplicação da seqüência de atividades

Chamaremos as Seqüência de Atividades 1, 2 e 3 de S-AT1, S-AT2 e S-AT3. As seqüências foram, nesta ordem, extraídas do 6.º, 7.º e 8.º livros da coleção *Idéias & Relações*.

No caso das S-AT1 e S-AT2, os exercícios foram aplicados pela pesquisadora em duas sessões (a primeira teve a duração de duas horas e a segunda de duas horas e meia), os alunos foram observados, as dificuldades foram registradas e os encontros foram gravados.

A S-AT3 é composta por atividades que envolvem o Teorema de Pitágoras. Essa seqüência foi aplicada após o desenvolvimento do capítulo Teorema de Pitágoras em sala de aula, pois a seqüência aborda atividades sobre o referido Teorema, mas essas atividades encontram-se em outros capítulos do livro da 8.ª série.

Foram colocados a disposição dos alunos, reunidos em duplas, réguas, transferidores, esquadros, lápis, borracha, papel para rascunho e recorte, além do texto copiado da coleção *Idéias & Relações* com as atividades.

Foram prestados aos alunos esclarecimentos sobre o objetivo das atividades. Nas duas sessões, este consiste em verificar a diferença entre argumentos empíricos e dedutivos. Para isso, informamos que as seqüências de atividades propostas têm a finalidade de desenvolver noções e conceitos. Dessa forma, pretendíamos que os estudantes percebessem por que na matemática é importante a prova, em seus vários níveis.

Além disso, após o termino das atividades, a pesquisadora colocaria em discussão as dificuldades encontradas por cada dupla, além dos diferentes procedimentos encontrados para resolver os problemas, estabelecendo a troca de conhecimentos.

Durante as duas sessões a pesquisadora procedeu da seguinte forma:

- Distribuiu o material utilizado durante a sessão;
- Verificou a composição das duplas de trabalho;
- Supervisionou os trabalhos, respondendo dúvidas que surgiram; e
- Ao final da primeira sessão, recolheu o material, guardando-o para o próximo encontro.

2.6 Síntese

Neste capítulo apresentamos as diferentes funções da prova, sendo as principais, segundo De Villiers (2001), as funções de verificação, explicação, descoberta, sistematização, desafio intelectual e comunicação. O autor sugere, ainda, que, ao trabalharmos as provas com alunos, utilizemos uma espécie de espiral em que as funções já introduzidas são retomadas e ampliadas.

Também abordamos a existência efetiva de diferentes “tipos de provas” (Balacheff, 1988) – *empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico* e *experiência mental* – que constituem uma hierarquia, cuja evolução e ligação com o nível de formalização dos conceitos apresentados verificamos junto aos alunos.

Pretendemos avaliar as atividades associadas com a prova constantes na coleção didática *Idéias & Relações*, enfatizando e também verificando as considerações que são dadas para os diferentes tipos de argumentos, como apontado por Balacheff (1988). Em particular, a nossa atenção será direcionada à passagem das provas pragmáticas para as conceituais.

Apresentamos, também, o perfil do sujeito pesquisado e o desenvolvimento da aplicação das Seqüências de Atividades.

No próximo capítulo analisaremos o tópico de geometria: *Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal* e o *Teorema da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo,* bem como a S-AT1 e a S-AT2. Verificaremos a introdução dada aos conteúdos citados e como a argumentação e as provas são apresentadas nas atividades propostas aos alunos.

Capítulo 3

EXPLORANDO RELAÇÕES E PROPRIEDADES ENTRE ÂNGULOS, TRIÂNGULOS E RETAS PARALELAS

3.1 Introdução

Este capítulo tem por foco os tópicos: *Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal* e *a Soma dos Ângulos Internos do Triângulo*. Apresenta um levantamento das atividades sobre esses tópicos nos livros da 6.ª e 7.ª séries. Também traz uma análise das atividades dos alunos em duas seqüências elaboradas usando essas mesmas atividades.

Nossa pesquisa tem por objetivo interpretar se essas seqüências envolvem os alunos em processos de argumentação e prova. Além disso, pretendemos refletir sobre o papel desempenhado pelo professor, proporcionando um bom aproveitamento por parte dos alunos.

3.2 Ângulos e triângulos

O conteúdo referente a ângulos e triângulos aparece pela primeira vez no livro da 6.ª série, num capítulo de sete páginas chamado "Ângulos e Triângulos".

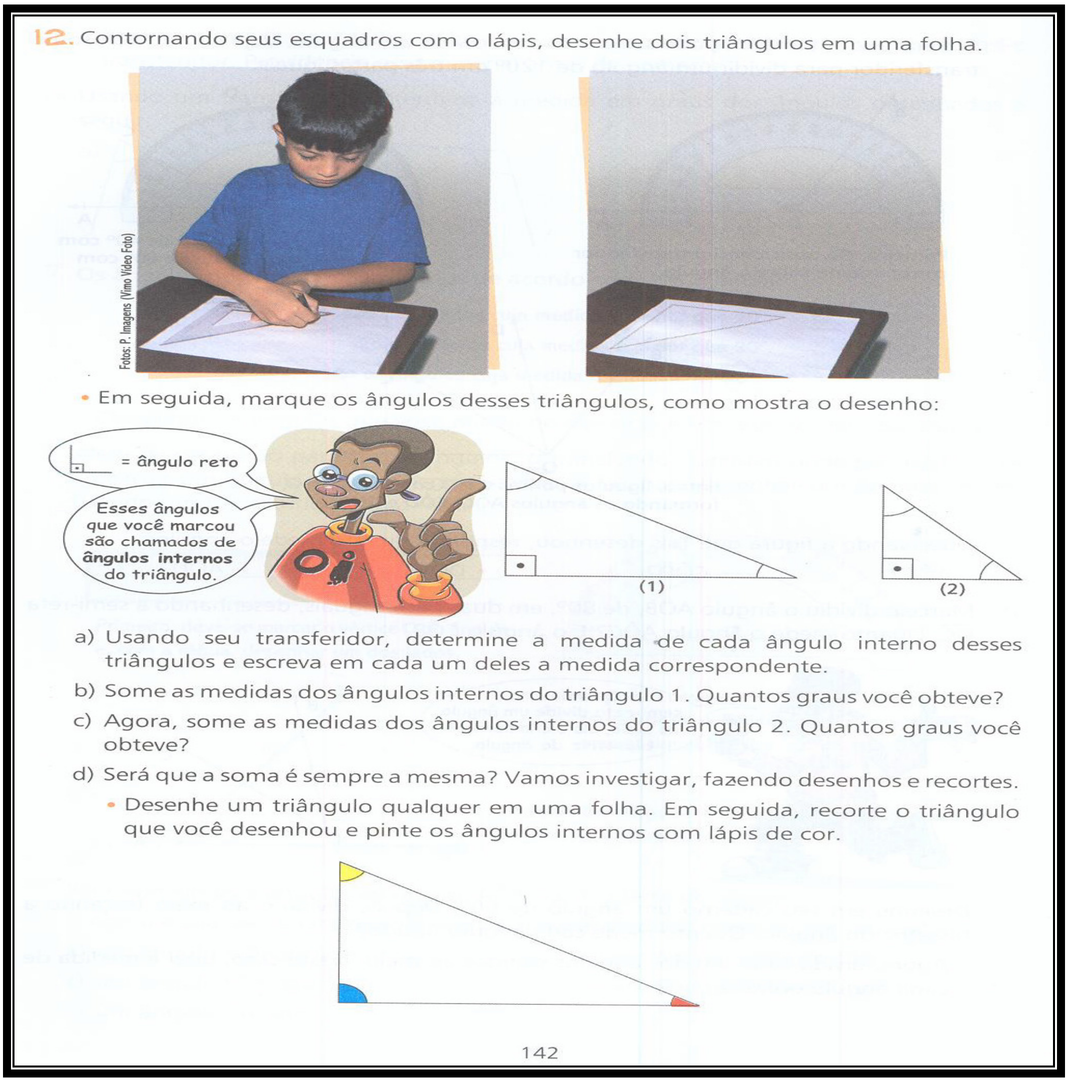
A introdução ao capítulo se faz explicando que os ângulos surgem em diferentes situações e a idéia de ângulo é apresentada em ilustrações como: garoto fazendo manobras com *skate* (quatro ilustrações); na arte de dançar, quando uma bailarina faz um giro completo ou quando ergue a perna com abertura de 90º e 180º (três ilustrações); e um Planisfério Político, contendo os continentes em escala reduzida, utilizando a Linha do Equador e o Meridiano de *Greenwich* como eixos para explicar que o piloto recorre a medidas de ângulos para definir a direção do vôo de um avião.

No livro do professor verificamos a preocupação do autor quanto às medidas, orientando o docente da seguinte forma:

> "As atividades que necessitam de instrumentos para efetuar medições geram imprecisões. Chame a atenção de seus alunos para esse fato e, nas atividades propostas, desconsidere pequenos erros de medida" (TOSATTO, PERACCHI e ESTEPHAN, 6.ª série, 2002, p. 137).

Nas *Atividades Matemáticas* deste capítulo, encontramos uma seqüência de 18 atividades ilustrativas para os alunos, a serem desenvolvidas por meio de medições, utilizando transferidor e régua. Os alunos são levados a medir os ângulos indicados nas figuras e a resolver problemas utilizando graus e frações. Encontramos também a definição de ângulos agudos, retos e obtusos, explicações sobre bissetriz do ângulo, sempre envolvendo atividades de medição.

As atividades 12 a 16 estão direcionadas para os ângulos do triângulo.



12. Contornando seus esquadros com o lápis, desenhe dois triângulos em uma folha.

Fotos: P. Imagens (Vimo Vídeo Foto)

• Em seguida, marque os ângulos desses triângulos, como mostra o desenho:

= ângulo reto

Esses ângulos que você marcou são chamados de **ângulos internos** do triângulo.

(1)

(2)

a) Usando seu transferidor, determine a medida de cada ângulo interno desses triângulos e escreva em cada um deles a medida correspondente.

b) Some as medidas dos ângulos internos do triângulo 1. Quantos graus você obteve?

c) Agora, some as medidas dos ângulos internos do triângulo 2. Quantos graus você obteve?

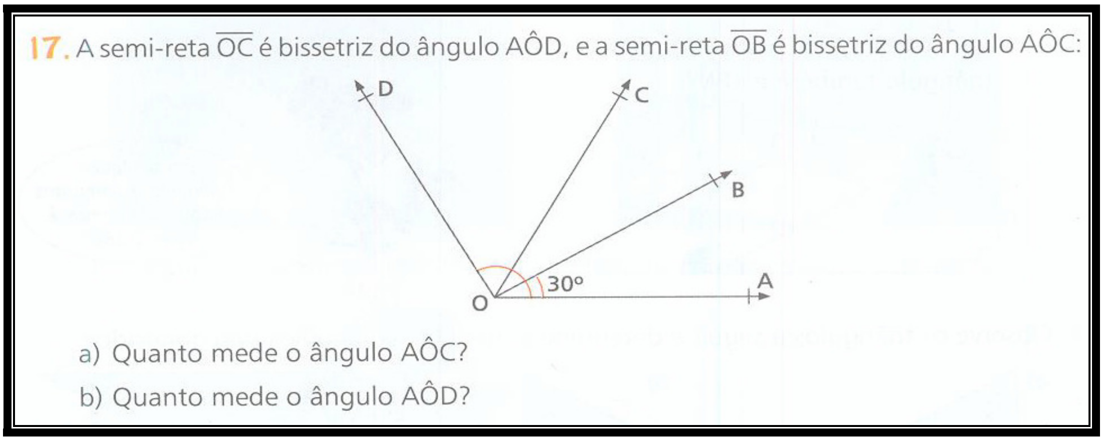
d) Será que a soma é sempre a mesma? Vamos investigar, fazendo desenhos e recortes.

• Desenhe um triângulo qualquer em uma folha. Em seguida, recorte o triângulo que você desenhou e pinte os ângulos internos com lápis de cor.

142

Figura 3.2.1: Atividade 12, observação empírica da soma dos ângulos internos do triângulo, p. 142.

Com medições e recortes, os alunos verificam empiricamente que a soma dos ângulos do triângulo é 180º. Também encontramos atividades para determinar a medida dos ângulos desconhecidos no triângulo (Atividades 13 a16) – esses ângulos estão representados em todas as atividades pela incógnita *x*. As Atividades 17 (conforme figura 3.2.2, a seguir) e 18 referem-se à medida de ângulos, dada a bissetriz.


17. A semi-reta $\overline{OC}$ é bissetriz do ângulo AÔD, e a semi-reta $\overline{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC:

a) Quanto mede o ângulo AÔC?
b) Quanto mede o ângulo AÔD?

Figura 3.2.2: Atividade 17, cálculo de ângulos, p. 144.

Verificamos que no capítulo todas as atividades são pragmáticas, utilizando recortes e medições. Segundo os critérios de prova de Balacheff (1988), estão classificadas como empíricas. Essa forma de validação apresenta-se insuficiente, mas é uma forma de generalização que resiste ao longo do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Construímos uma tabela contendo a quantidade de exercícios que envolvem medições e também cálculo algébrico, ou seja, é aplicação da propriedade para um exercício explorando o cálculo numérico, não localizamos exercícios que possam induzir às provas conceituais.

Quadro I: Classificação dos exercícios encontrados no capítulo Ângulos e Triângulos

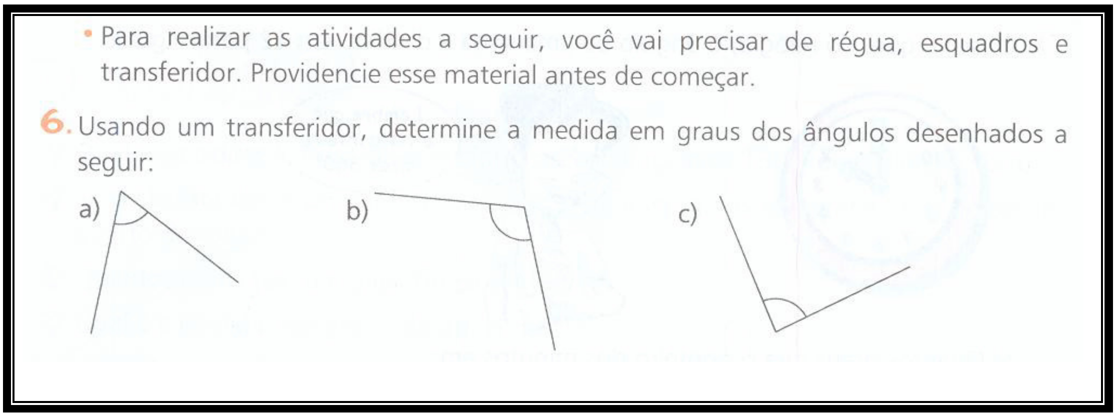
Total de atividades encontradas no capítulo	**Atividades utilizando instrumentos de medida para construir e/ou medir ângulos**	**Aplicação da propriedade para um exercício de cálculo**	**Atividade para classificação dos ângulos**	**Introdução de novos conceitos em forma de estudo dirigido**
18 Atividades subdivididas em 38 exercícios	21 exercícios	15 exercícios	1 Atividade	1 Atividade

A partir das atividades descritas, criamos a Seqüência de Atividades 1, contendo as 13 primeiras atividades do capítulo. Convidamos para participar da resolução dessa seqüência quatro alunos da 8.ª série, os quais realizaram a atividade em duplas. Chamaremos a esta primeira atividade aplicada de S-AT1. A seguir analisaremos as respostas e algumas perguntas que surgiram durante seu desenvolvimento.

3.3 Análise da resolução da Seqüência de Atividades 1 (S-AT1)

A primeira sessão foi realizada no dia 21 de fevereiro de 2007, na casa da pesquisadora, situada no Município de Jacupiranga, no Estado de São Paulo, ocasião em que foram aplicadas as atividades da S-AT1. Essa sessão teve duração aproximada de duas horas.

Cada dupla resolveu suas atividades solicitando poucas vezes a intervenção da pesquisadora. Verificamos que a grande dificuldade apresentada pelos alunos encontra-se em como manusear transferidores e esquadros. Como exemplo, apresentamos a Atividade 6 abaixo:


• Para realizar as atividades a seguir, você vai precisar de régua, esquadros e transferidor. Providencie esse material antes de começar.

6. Usando um transferidor, determine a medida em graus dos ângulos desenhados a seguir:

a) b) c)

Figura 3.3.1: Determinar medida dos ângulos, p. 140.

Após explicações sobre o uso do transferidor, as duplas fizeram alguns testes com ele para verificar se as dificuldades haviam sido elucidadas e, em seguida, voltaram para as atividades da S-AT1, medindo os ângulos solicitados e resolvendo as demais atividades propostas. A seguir, vejamos a Figura 3.3.2 de algumas atividades resolvidas pelas duplas. Fica evidente também a pequena diferença encontrada para as medidas dos ângulos da Atividade 6. Essa diferença deve-se à imprecisão dos instrumentos de medida, que podem levar a pequena diferença nos resultados, e também a pouca habilidade de trabalhar com esses instrumentos verificados nas duplas.

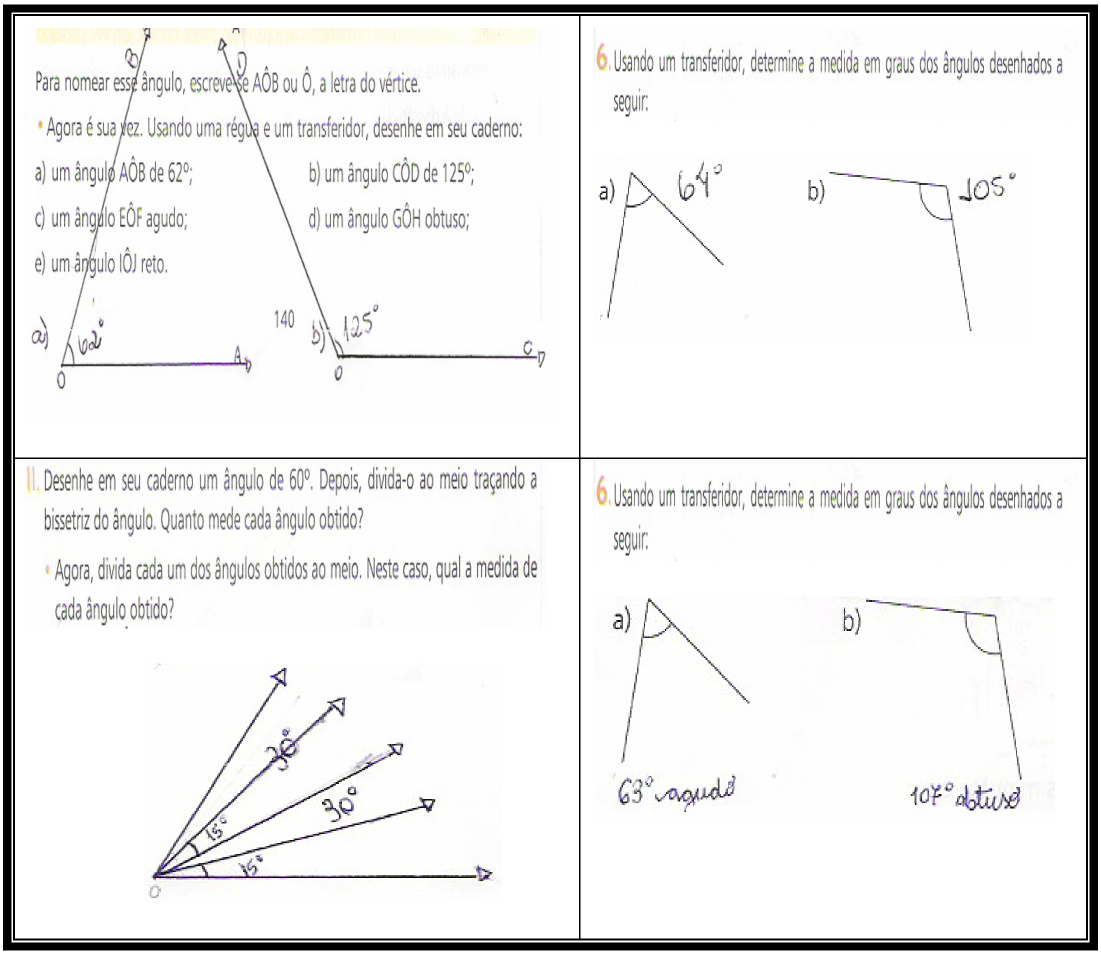


Figura 3.3.2: Atividades resolvidas pelas duplas de alunos.

Na Atividade 12, construções de triângulos com esquadros e lápis, (Figura 3.2.1, p. 55), encontramos no item (d) o questionamento aos alunos: “Será que a soma é sempre a mesma? Vamos investigar, fazendo desenhos e recortes”.

Cada dupla desenhou triângulos em posições diversas, coloriu os ângulos e, em seguida, recortou e arrumou esses recortes sobre uma reta, e conferiu que em todos os casos a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Foi interessante observar que, apesar da dificuldade encontrada para medir os ângulos, os alunos verificaram que os três ângulos formam um ângulo de 180º, como ilustrado na Figura 3.3.3. Cabe mencionar, também, que eles construíram relativamente poucos exemplos, apenas dois triângulos por dupla. Encontramos, então, indícios de a soma já ser conhecida por eles e, conseqüentemente, não precisarem de muitos exemplos para se convencer.

Podemos classificar a prova, dentre os tipos de prova de Balacheff (1988) como experiência crucial, ou seja, as duplas verificaram a propriedade em um caso particular, estudando suas características. E se a propriedade fica verificada para esse caso, então está confirmado seu caráter geral.

Acreditamos que após o desenvolvimento de uma atividade, devemos salientar os pontos principais, esclarecer dúvidas, apresentar outras formas de desenvolver a atividade e, nesse sentido, com o término da S-AT1, abrimos espaço para perguntas. Estas foram basicamente quanto à leitura de ângulos, bissetriz e construção de ângulos. Transcrevemos abaixo algumas observações das duplas e respostas dadas aos questionamentos da pesquisadora.

> Dupla A: No exercício 6 medimos os ângulos a, b e c mais de uma vez e achamos medidas diferentes.

Pesquisadora: Isto se deve aos instrumentos de medida. A posição inadequada do transferidor. Também a ponta do lápis pode contribuir para achar medidas diferentes.

Dupla B: Achei difícil desenhar os ângulos do exercício 8.

Pesquisadora: Por que achou difícil?

Dupla B: Eu não sabia o que queria dizer AÔB, EÔF e os outros.

Dupla A: No exercício 11, não lembrava como se achava a bissetriz.

Pesquisadora: Para acharmos a bissetriz do ângulo, dividimos o ângulo ao meio, em duas partes iguais.

Pesquisadora: Vocês coloriram e recortaram somente dois triângulos cada dupla, e com essas observações já chegaram à conclusão de que a soma dos ângulos internos é 180º?

Dupla B: Eu lembro que estudei sobre soma dos ângulos do triângulo.

Dupla A: No livro está escrito que em qualquer triângulo a soma é sempre 180º e achamos que não precisava ter mais exemplos.

Analisamos em grupo as atividades, comparamos os resultados obtidos nas medições fazendo uso de instrumentos e esclarecendo por que as duplas encontraram essas pequenas diferenças. Esclarecemos também que as medidas fornecem uma idéia de certas propriedades da figura, e a isso chamamos de conjectura. Assim, para constatar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma, utilizamos apenas recortes; logo, trata-se de uma verificação empírica, ou argumentação empírica.

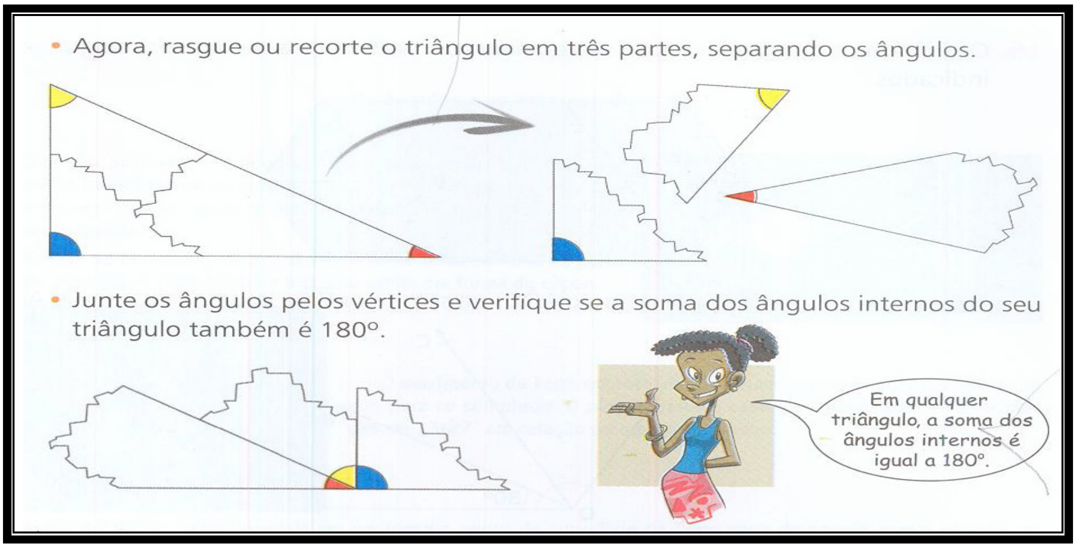


Figura 3.3.3: Atividade 12 (cont.), recorte da soma dos ângulos internos de um triângulo, p. 143.

Finalizamos esta atividade de recorte lembrando que sempre é necessário provar um resultado que estamos afirmando, e que essa prova pode ser aceita mediante observações de propriedades da figura, ou justificando-a oralmente e também a descrevendo, para isso utilizando uma ou várias propriedades já estudadas.

No ‘livro do professor’ não encontramos orientações para o aluno conversar com o professor ou com colegas sobre as atividades desse capítulo, mas achamos enriquecedora essa troca de experiências, pois as duplas apresentaram as mesmas dificuldades tanto na leitura e construção de ângulos quanto em trabalhar com (manusear) os instrumentos de medida.

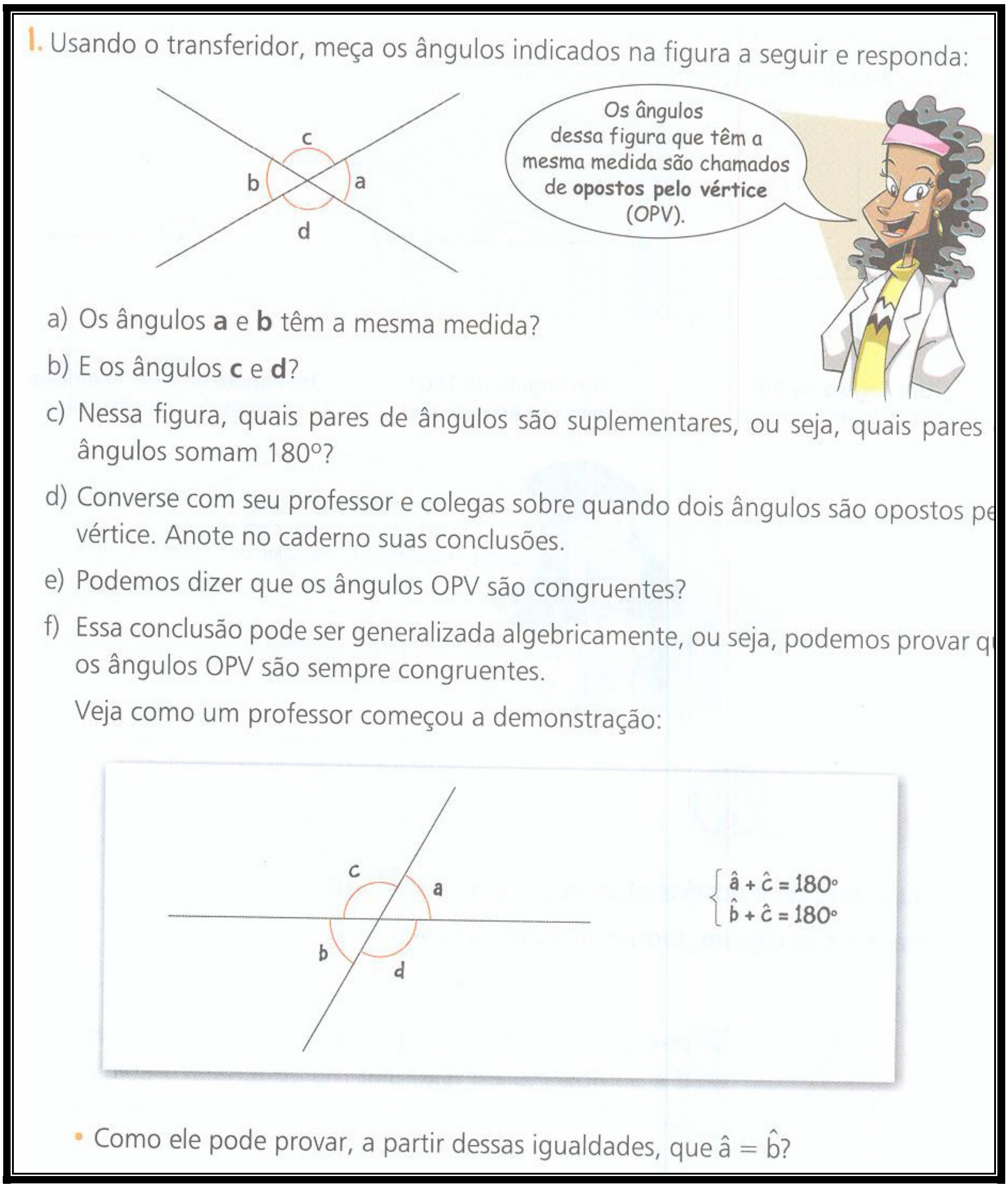
3.4 Retas paralelas

O conteúdo retas paralelas aparece na 7.ª série, num capítulo de sete páginas chamado “Ângulos e Retas”.

Por meio de medições utilizando transferidor, os alunos são levados a medir os ângulos indicados nas figuras e verificar a propriedade dos ângulos Opostos Pelo Vértice (OPV), empiricamente. No livro do professor verificamos, novamente, a preocupação do autor quanto às medidas, orientando o professor da seguinte forma:

> “Oriente seus alunos sobre as limitações dos instrumentos de medida, que podem levar a pequena diferença nos resultados” (TOSATTO, PERACCHI e ESTEPHAN, 7.ª série, 2002, p. 128).

Em seguida, é questionada a validade da propriedade para todos os casos e chega-se à conclusão, pelas medições, que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Esta conclusão pode ser generalizada algebricamente, sendo que o livro apresenta o início de uma demonstração (Figura 3.4.1).



1. Usando o transferidor, meça os ângulos indicados na figura a seguir e responda:

a) Os ângulos **a** e **b** têm a mesma medida?

b) E os ângulos **c** e **d**?

c) Nessa figura, quais pares de ângulos são suplementares, ou seja, quais pares ângulos somam 180°?

d) Converse com seu professor e colegas sobre quando dois ângulos são opostos pe vértice. Anote no caderno suas conclusões.

e) Podemos dizer que os ângulos OPV são congruentes?

f) Essa conclusão pode ser generalizada algebricamente, ou seja, podemos provar q os ângulos OPV são sempre congruentes.

Veja como um professor começou a demonstração:

- Como ele pode provar, a partir dessas igualdades, que $\hat{a} = \hat{b}$?

Figura 3.4.1: Ângulos OPV são congruentes, p. 128.

Como a figura ilustra, a resolução da parte final da demonstração cabe aos alunos, com o desafio de explicar: “Como ele pode provar, a partir dessas igualdades, que $\hat{a} = \hat{b}$?”.

Segundo De Villiers (2001), a demonstração tem sido encarada quase exclusivamente em termos de verificação das proposições matemáticas. Porém a prova possui outras funções, não simplesmente a verificação; nesse caso, proporciona a compreensão sobre o porquê dos ângulos a e b serem iguais. Isto porque, utilizando a subtração das igualdades ou igualando os membros, os alunos estarão "explicando as razões que validam uma propriedade" (BALACHEFF, 1988), aplicando conhecimentos apreendidos.

O capítulo também apresenta definições de alguns tipos de ângulos. Além de ângulos opostos pelo vértice, as definições encontradas fazem referência a ângulos agudos e obtusos, ou seja: "todos os ângulos agudos da figura são congruentes", "todos os ângulos obtusos da figura são congruentes" e "a soma de um ângulo agudo com um ângulo obtuso é 180 graus".

Nas *atividades matemáticas* deste capítulo, encontramos seis atividades contendo uma reta cortada por uma transversal e atividades que utilizam as definições de ângulos complementares, suplementares e replementares, solicitando que os alunos determinem a medida das variáveis em cada situação, conforme Figura 3.4.2 a seguir.

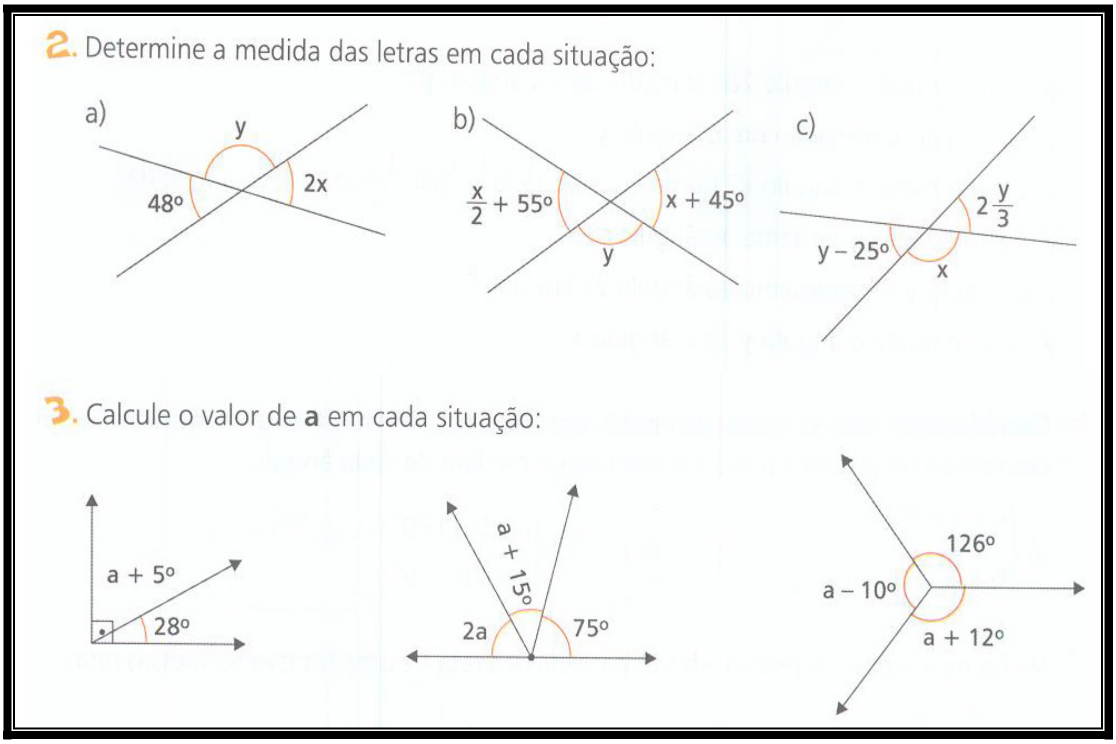


Figura 3.4.2: Atividades que utilizam os conceitos de ângulos, p. 128 e 129.

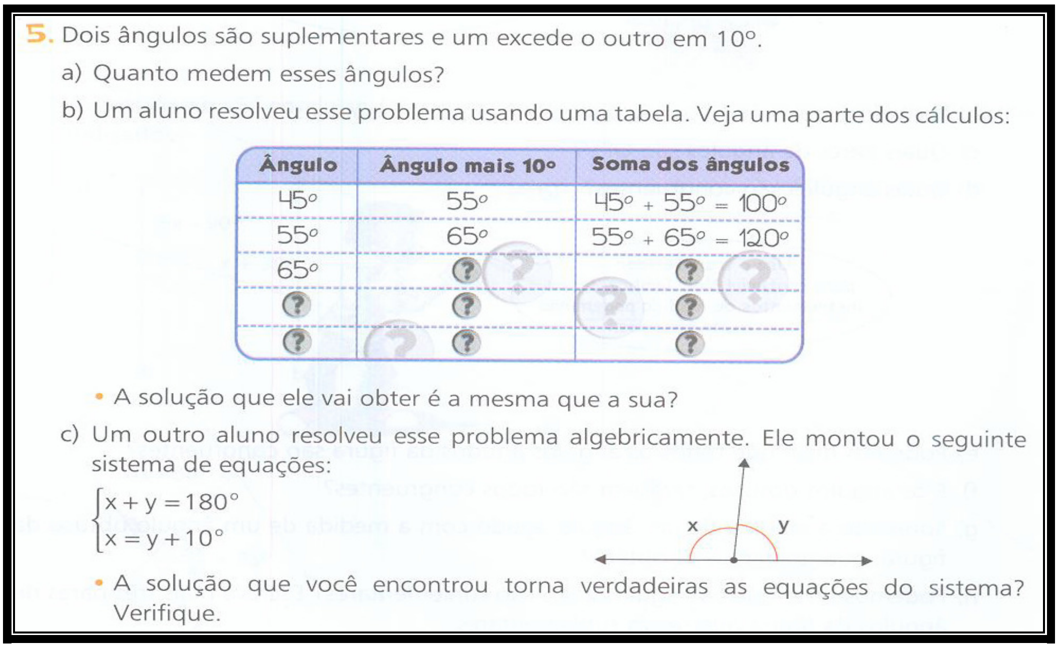
O aluno irá equacionar algebricamente e calcular o valor da incógnita, utilizando a definição de ângulos OPV e a definição conforme Figura 3.4.3.

Quando dois ou mais ângulos somam:
- 90º, eles são ditos **complementares**;
- 180º, eles são ditos **suplementares**;
- 360º, eles são ditos **replementares**.

Figura 3.4.3: Definição de ângulos complementares, suplementares e replementares, p. 129.

Nestas atividades os alunos não são solicitados a explicar nem a justificar seu raciocínio.

Ainda nesse capítulo, encontramos a Atividade 5, conforme exposto a seguir.


5. Dois ângulos são suplementares e um excede o outro em 10º.

a) Quanto medem esses ângulos?

b) Um aluno resolveu esse problema usando uma tabela. Veja uma parte dos cálculos:

Ângulo	Ângulo mais 10º	Soma dos ângulos
45º	55º	45º + 55º = 100º
55º	65º	55º + 65º = 120º
65º	?	?
?	?	?
?	?	?

• A solução que ele vai obter é a mesma que a sua?

c) Um outro aluno resolveu esse problema algebricamente. Ele montou o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x = y + 10° \end{cases}$$

• A solução que você encontrou torna verdadeiras as equações do sistema? Verifique.

Figura 3.4.4: Atividade utilizando a mudança de registros de representação, p. 129.

Nesta atividade são abordadas três formas de resolução. Segundo Duval (1995), a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em um outro registro toca um conjunto de operações para designar os objetos. Verificamos essa mudança de representação de registros, pois o aluno equaciona o problema, trabalha com uma tabela atribuindo valores aos ângulos e monta um sistema de equações partindo para a resolução algébrica do exercício. Aparece também a abordagem geométrica do assunto ângulos e retas, momento este para relembrar o significado da solução na resolução de um sistema. Por fim, espera-se que os alunos cheguem à conclusão de que a solução encontrada torna verdadeira as equações do sistema.

Na Atividade 6 (Figura 3.4.5), encontramos dois sistemas de equações em que as incógnitas são medidas de ângulos. Aos alunos está a solicitação para criar um enunciado e descobrir a medida de cada ângulo. Imaginamos que os alunos encontrarão dificuldades em criar um enunciado, pois todas as informações do problema deverão estar relacionadas para formar as duas equações matemáticas nas mesmas incógnitas.

6. Considerando que as incógnitas **a** e **b** dos sistemas são medidas de ângulos, crie um enunciado para cada situação e descubra a medida de cada ângulo:

a) $\begin{cases} a + b = 90° \\ b = \dfrac{a}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a + b = 180° \\ a = 2b - 15° \end{cases}$

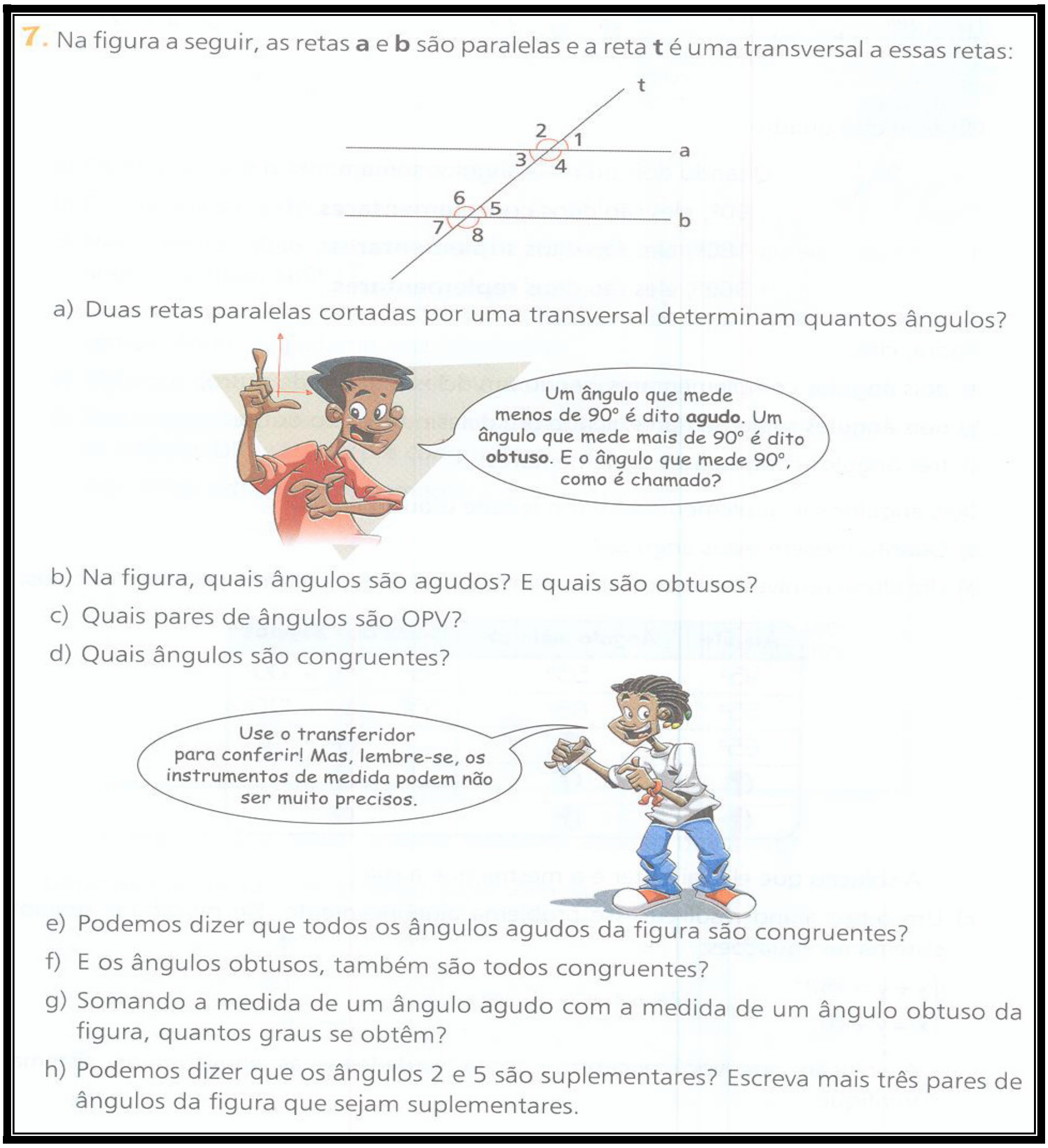
Figura 3.4.5: Criar um enunciado e resolver os sistemas, p. 130.

Existem vários caminhos para encontrar a solução de um sistema de equações. Uma das soluções consiste no fato de os alunos criarem uma tabela de valores, em que, atribuindo um valor para uma incógnita, o valor da outra incógnita poderá ser determinado resolvendo-se uma equação.

O sistema (a) refere-se a ângulos complementares, ou seja, caso em que a soma dos ângulos é 90º. No sistema (b), temos ângulos suplementares, ou seja, o caso em que a soma dos dois ângulos é 180º. Os alunos podem esboçar os ângulos geometricamente e descobrir o valor dos mesmos por meio da resolução de equações.

Há, também, a solução por meio de métodos de resolução, conhecidos nesta série pelos alunos. Se a opção for pelo método da substituição, os sistemas acima já estão prontos para serem resolvidos. Também poderá ser utilizado o método da comparação, que consiste em isolar a mesma incógnita nas equações e em seguida compará-las, encontrando assim a solução do sistema. Essas equações, quando resolvidas simultaneamente, poderão resultar num par ordenado, que será a solução, ao mesmo tempo, das duas equações. A partir disso, os alunos farão a verificação, e a resposta será dada em graus. Nesta atividade não encontramos solicitação de justificativas para explicar os valores encontrados para os ângulos.

Na Atividade 7 encontramos as retas paralelas *a* e *b* e a reta *t* transversal a essas retas, determinando oito ângulos.



7. Na figura a seguir, as retas **a** e **b** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a essas retas:

a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam quantos ângulos?

b) Na figura, quais ângulos são agudos? E quais são obtusos?

c) Quais pares de ângulos são OPV?

d) Quais ângulos são congruentes?

e) Podemos dizer que todos os ângulos agudos da figura são congruentes?

f) E os ângulos obtusos, também são todos congruentes?

g) Somando a medida de um ângulo agudo com a medida de um ângulo obtuso da figura, quantos graus se obtêm?

h) Podemos dizer que os ângulos 2 e 5 são suplementares? Escreva mais três pares de ângulos da figura que sejam suplementares.

Figura 3.4.6: Retas paralelas cortadas por transversal, p. 130.

As propriedades verificadas, após a introdução das retas paralelas cortadas por uma transversal, são as seguintes: “todos os ângulos agudos da figura são congruentes”, “todos os ângulos obtusos da figura são congruentes” e “a soma de um ângulo agudo com um ângulo obtuso da figura é 180°”. Verificamos a observação quanto à imprecisão dos instrumentos de medida.

Esses ângulos são tratados como ângulos agudos, menores de 90° e ângulos obtusos, maiores de 90°. Temos vários itens para o aluno completar, perguntando quais são agudos, obtusos, congruentes ou opostos pelo vértice, usando como instrumento de medida o transferidor. Nesta atividade não aparece a definição de ângulos alternos internos nem de ângulos correspondentes. Todo desenvolvimento se faz utilizando a definição de ângulos agudos e obtusos.

A partir desta atividade encontramos outras, com retas paralelas cortadas por uma transversal em várias posições: paralelas na posição horizontal, na posição vertical e na posição inclinada, para que o aluno descubra algebricamente a medida dos ângulos que estão representados por variáveis. Novamente não é esperado que os alunos forneçam justificativas para explicar como chegaram aos valores dos ângulos, pois a resolução das atividades envolve as definições dos ângulos citados acima e entendemos ser importante o aluno justificar os pares de ângulos relacionados.

As Atividades 8 e 9 utilizam as propriedades citadas na Atividade 7. O aluno irá descobrir as medidas dos ângulos desconhecidos, tendo *r* e *s* paralelas. Nas atividades encaminhadas para as duplas, somente colocamos parte da Atividade 8, pois ao todo temos 10 atividades de resolução algébrica de equações para descobrir as medidas dos ângulos desconhecidos. Abaixo, segue a Figura 3.4.7 da Atividade 8.

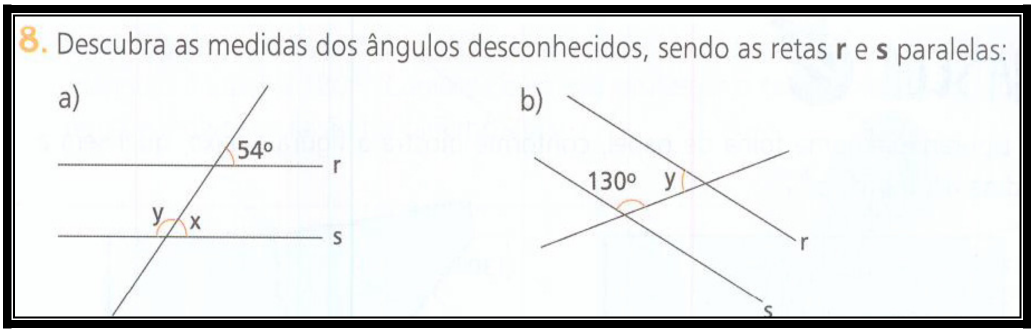


Figura 3.4.7: Atividade algébrica para descobrir ângulos desconhecidos, p. 131.

Na Atividade 10, utilizando os conhecimentos sobre ângulos opostos e ângulos agudos e obtusos, é apresentado um paralelogramo com questionamentos sobre os ângulos. No item (e) temos:

> e) Num paralelogramo, tanto os ângulos agudos como os obtusos são sempre congruentes. Generalize algebricamente essa afirmação a partir da seguinte figura:

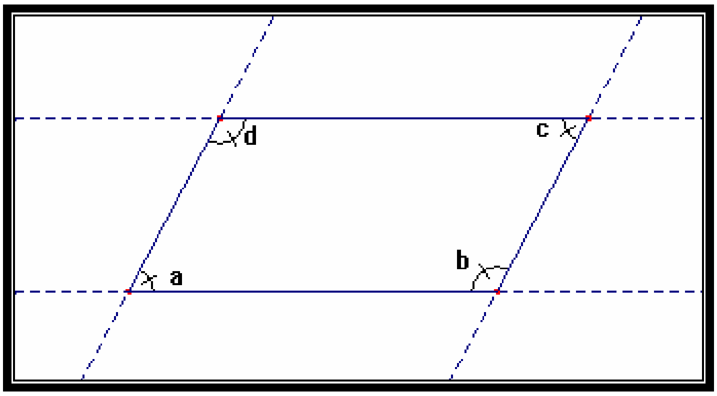


Figura 3.4.8: Atividade: generalizar congruência de ângulos agudos e obtusos no paralelogramo

A propriedade dos ângulos de um paralelogramo é verificada utilizando a subtração das igualdades ou igualando os membros. No livro do professor encontramos a expressão abaixo, a qual seria a resposta esperada dos alunos.

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{a}+\hat{d}=180^{o}\\ \hat{c}+\hat{d}=180^{o}\end{array}\right. \rightarrow \hat{a}=\hat{c}$$

Esta atividade se parece com a Atividade 1, em que os alunos são solicitados a explicar algebricamente as razões que validam uma propriedade.

Em seguida, solicita-se aos alunos duas demonstrações algébricas das propriedades, Atividades 11 e 14, aplicando as relações sobre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Uma das propriedades é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Observamos que nessas demonstrações, fornecidas no livro do professor, está sendo utilizada a propriedade dos ângulos alternos internos, mas estes não são definidos na coleção.

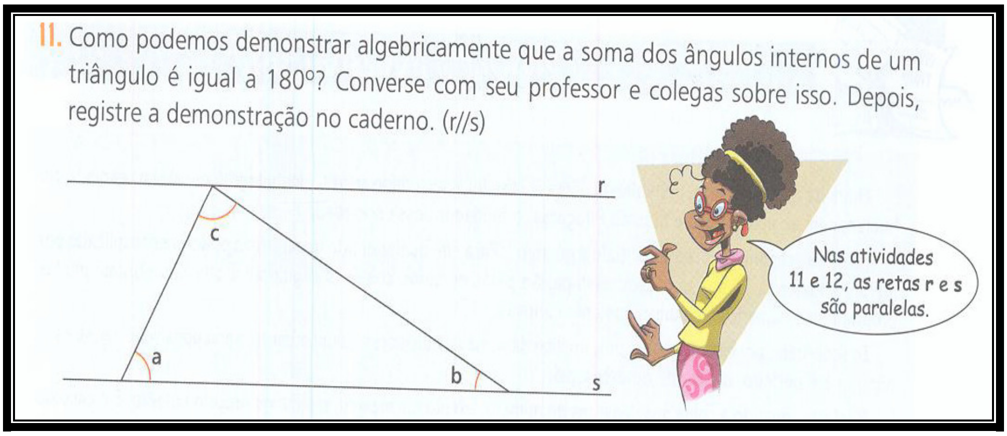


Figura 3.4.9: Soma dos ângulos internos de um triângulo, p. 133.

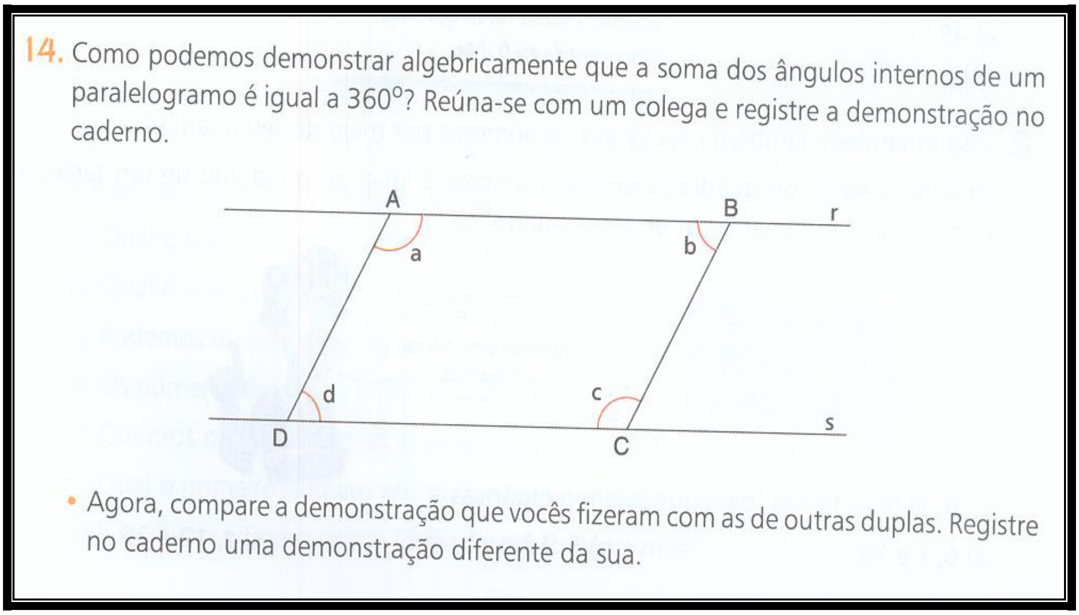
Considerando estas atividades com referência aos tipos de prova levantada por Balacheff (1988), anotamos que "a prova surge subdividida em quatro níveis, sendo a validade dos raciocínios garantida: empirismo ingênuo; experimento crucial; exemplo genérico e experimento mental".

A prova sugerida encontra-se no nível experimento mental, pois segundo Gravina (2001), a explicação flui por meio de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação, e não por meio de situações particulares.

Em algumas atividades encontramos a sugestão *“Converse com seu professor e colegas sobre isso”.* Como já mencionado, uma das funções da prova é explorar, descobrir e inventar resultados, e o papel do professor como facilitador nesse processo de aprendizagem está em incentivar a cooperação entre os alunos.

Procuramos, também, verificar as orientações dadas ao professor e encontramos a prova formal para a Atividade 11. Esta consiste em utilizar as propriedades das retas paralelas e os conhecimentos sobre *ângulos alternos internos;* embora este termo não seja apresentado aos alunos em seu livro didático, está presente no livro do professor. Portanto, concluímos que é importante que o professor, antes de começar alguma atividade do Livro, leia as instruções descritas nas orientações, porque algumas vezes é necessário fazer um trabalho prévio com os alunos.

Entendemos também que confrontar o que um aluno pensa e o que pensam seus colegas, pode ser uma forma de aprendizagem significativa na prova pela necessidade de descrever, verificar, ou seja, reformular seus argumentos. Também está de acordo com De Villiers (2001), que destaca a função da comunicação entre professores e alunos e entre os próprios estudantes.



14. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360°? Reúna-se com um colega e registre a demonstração no caderno.

- Agora, compare a demonstração que vocês fizeram com as de outras duplas. Registre no caderno uma demonstração diferente da sua.

Figura 3.4.10: Soma dos ângulos internos de um paralelogramo, p. 133.

O último item pede a comparação de demonstrações realizadas pelos alunos, com a finalidade de conduzir ao conhecimento da existência de várias outras formas possíveis de demonstrar o mesmo teorema.

Procuramos no capítulo atividades que apresentam provas. Construímos uma tabela contendo a quantidade de exercícios que envolvem cálculo algébrico, ou seja, a aplicação da propriedade para um exercício explorando o cálculo numérico. Também localizamos quatro provas completas, estas utilizando a linguagem *“Demonstração algébrica”*.

Quadro II: Classificação dos exercícios encontrados no capítulo Ângulos e Retas

Total de atividades encontradas no capítulo	**Aplicação da propriedade para um exercício de cálculo**	**Introdução de novos conceitos em forma de estudo dirigido**	**Prova conceitual completa**
14 Atividades subdivididas em 48 exercícios	24 exercícios	3 Atividades subdivididas em 20 itens	4 Atividades

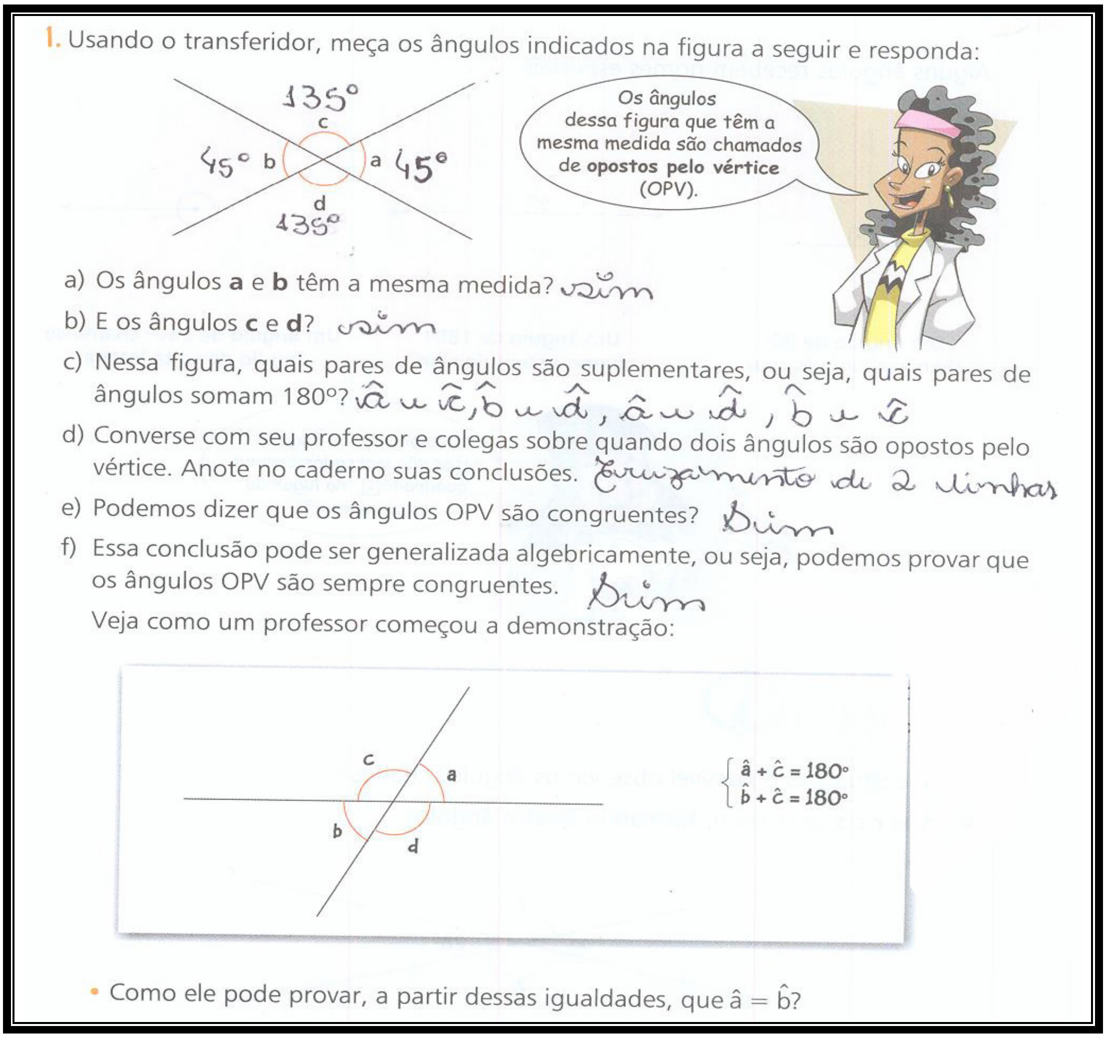
A partir das atividades descritas, criamos a Seqüência de Atividades 2, contendo as 14 primeiras atividades do capítulo, e retiramos a Atividade 9 (as retas *a* e *b* são paralelas, descubra a medida desconhecida), por ser idêntica à Atividade 8, que consta da seqüência. Convidamos para participar da resolução dessa seqüência os mesmos 4 alunos da 8.ª série que realizaram as atividades da Seqüência de Atividades 1. Estas também foram realizadas em duplas. Chamaremos a esta segunda atividade aplicada de S-AT2. A seguir faremos uma análise de todas as atividades aplicadas e das dificuldades apresentadas pelas duplas, e apresentaremos exemplos das resoluções, além do papel do professor.

3.5 Análise da resolução das atividades da Seqüência de Atividades 2 (S-AT2)

A segunda sessão foi desenvolvida no dia 23 de fevereiro de 2007, do mesmo modo que a primeira, realizada na casa da pesquisadora, ocasião em que foram aplicadas as atividades da S-AT2. O encontro para realização da seqüência teve a duração de duas horas e meia, pois as duplas encontraram dificuldades na resolução de, praticamente, todas as atividades, sendo necessária a intervenção da pesquisadora, com esclarecimentos e explicações em vários momentos.

Na Atividade 1 (Figura 3.5.1), deparamos com a solicitação, já na primeira atividade, para generalizar algebricamente que os ângulos Opostos Pelo Vértice (OPV) são sempre congruentes. Nesta atividade encontramos os itens (a), (b), (c), (d) e (e), em que o aluno utiliza somente medições e definições dos ângulos OPV. A partir destas medições está apresentado no livro um início de apresentação de propriedades, com duas propriedades já destacadas, $\hat{a} + \hat{b} = 180^o$ e $\hat{b} + \hat{c} = 180^o$; a tarefa dada aos alunos é completar esta demonstração.

As dificuldades apresentadas nesta atividade envolveram os conceitos de ângulos OPV e de congruência. Também é importante destacar que as duplas não perceberam a necessidade de terminar a prova começada pelo professor, mesmo depois de termos conversado sobre todos os itens da questão.



1. Usando o transferidor, meça os ângulos indicados na figura a seguir e responda:

a) Os ângulos **a** e **b** têm a mesma medida? sim

b) E os ângulos **c** e **d**? sim

c) Nessa figura, quais pares de ângulos são suplementares, ou seja, quais pares de ângulos somam 180°? $\hat{a}$ e $\hat{c}$, $\hat{b}$ e $\hat{d}$, $\hat{a}$ e $\hat{d}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$

d) Converse com seu professor e colegas sobre quando dois ângulos são opostos pelo vértice. Anote no caderno suas conclusões. Cruzamento de 2 linhas

e) Podemos dizer que os ângulos OPV são congruentes? Sim

f) Essa conclusão pode ser generalizada algebricamente, ou seja, podemos provar que os ângulos OPV são sempre congruentes. Sim

Veja como um professor começou a demonstração:

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{c} = 180° \\ \hat{b} + \hat{c} = 180° \end{cases}$$

- Como ele pode provar, a partir dessas igualdades, que $\hat{a} = \hat{b}$?

Figura 3.5.1: Resolução da Atividade 1 – ângulos OPV são congruentes.

Nos itens (a) e (b) os estudantes não apresentaram dificuldades e mediram os ângulos indicados para verificar que realmente possuíam as mesmas medidas. No item (c), eles também identificaram todos os pares de ângulos que tinham soma 180º, como podemos verificar na Figura 3.5.1.

Mas no item (f) nenhum dos alunos sabia como prosseguir. Eles pareciam completamente perdidos e decidi deixá-los trabalhar nas outras atividades, já que esta propriedade seria apresentada em uma outra atividade da seqüência. Tornou-se evidente nesta atividade a resolução pragmática pelos alunos, pois no momento de generalização, seu instinto foi virar a página.

A igualdade $\hat{a} = \hat{b}$ será retomada no final do capítulo, quando esperamos que as duplas tenham adquirido mais confiança em argumentar com a finalidade de apresentar uma prova.

As Atividades 2 e 3 utilizam os conhecimentos de ângulos OPV, ângulos complementares (quando dois ou mais ângulos somam 90º), suplementares (quando dois ou mais ângulos somam 180º) e replementares (quando dois ou mais ângulos somam 360º), mas privilegiam a resolução algébrica das incógnitas, equacionando as sentenças, conforme Figura 3.5.2.

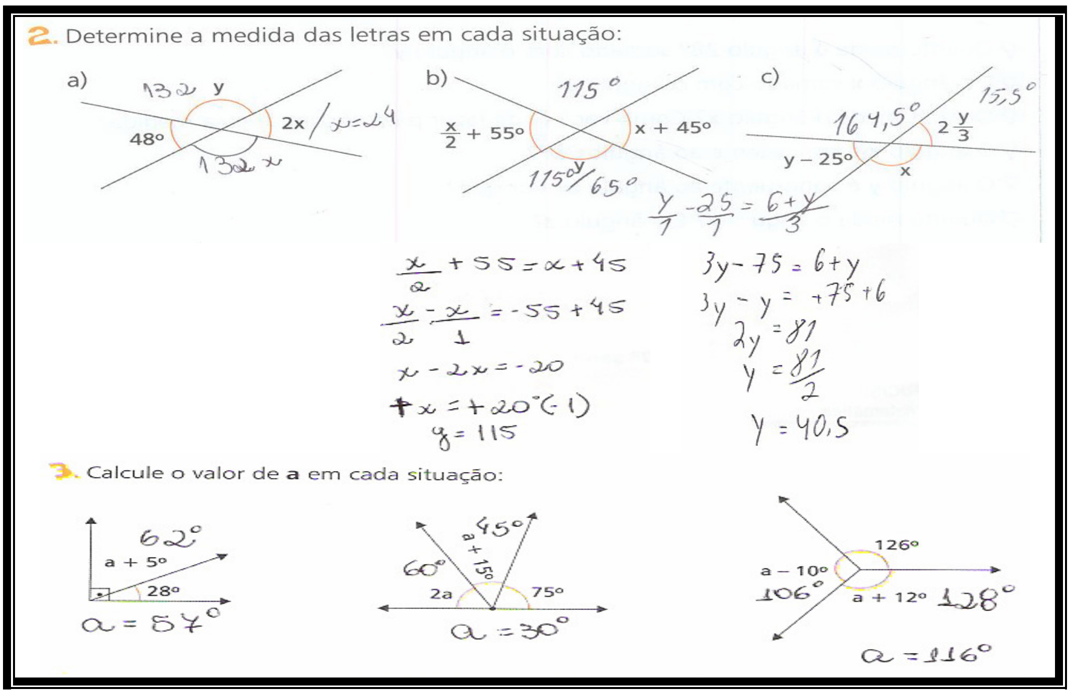
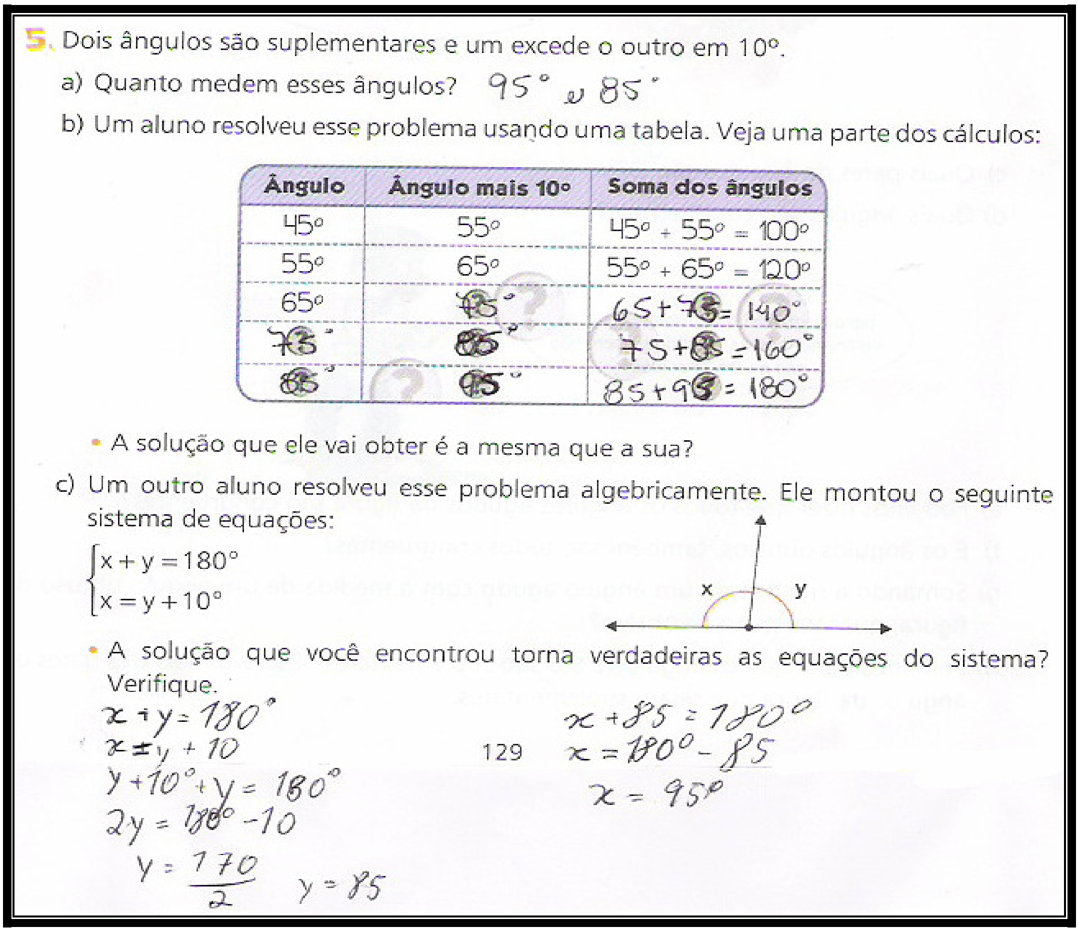


Figura 3.5.2: Resolução de atividades utilizando os conceitos de ângulos.

Nestas atividades, a ênfase está na resolução dos valores desconhecidos. Para chegar a esses valores, foi necessário fazer uma revisão sobre a propriedade da igualdade nas equações, a resolução dessas equações e a verificação do valor desconhecido encontrado, que deve satisfazer a equação. Esta revisão fez-se necessária, pois as expressões que determinam os ângulos envolvem várias operações, gerando dificuldade na sua resolução. O resultado provocou certo desvio do assunto. A atenção deixou de ser nas propriedades geométricas, e os alunos foram levados a lembrar atividades de resolução de equações. Acreditamos que as expressões poderiam ser mais simples, para evitar que o enfoque algébrico obscureça o geométrico.

Na Atividade 5 (Figura 3.5.3), surge a oportunidade de o aluno explorar e conjecturar sobre as possibilidades de resolver um problema. A atividade tem início solicitando uma resolução dos alunos. Em seguida, mais duas diferentes possibilidades são apresentadas, sendo a primeira, item (b), de natureza pragmática, e a segunda, item (c), dotada de um argumento conceitual formulado algebricamente.



5. Dois ângulos são suplementares e um excede o outro em 10°.

a) Quanto medem esses ângulos? 95° e 85°

b) Um aluno resolveu esse problema usando uma tabela. Veja uma parte dos cálculos:

Ângulo	Ângulo mais 10°	Soma dos ângulos
45°	55°	45° + 55° = 100°
55°	65°	55° + 65° = 120°
65°	75°	65 + 75 = 140°
75°	85°	75 + 85 = 160°
85°	95°	85 + 95 = 180°

• A solução que ele vai obter é a mesma que a sua?

c) Um outro aluno resolveu esse problema algebricamente. Ele montou o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x = y + 10° \end{cases}$$

• A solução que você encontrou torna verdadeiras as equações do sistema? Verifique.

$x + y = 180°$
$x = y + 10$
$y + 10° + y = 180°$
$2y = 180° - 10$
$y = \frac{170}{2}$ $y = 85$

$x + 85 = 180°$
$x = 180° - 85$
$x = 95°$

129

Figura 3.5.3: Resolução da Atividade 5 por dupla de alunos.

Avaliando a resolução apresentada pelos alunos, percebe-se que essas tarefas não ofereceram dificuldades. O sistema foi resolvido algebricamente, e a verificação se deu observando que o valor encontrado foi o mesmo já encontrado pragmaticamente, tornando verdadeiras as equações do sistema. Parece que os alunos ainda estão valorizando mais o trabalho com álgebra, uma vez que o foco de atenção não está nas justificativas ou mesmo nas propriedades geométricas.

Na Atividade 6 (Figura 3.5.4), encontramos dois sistemas de equações. Novamente a ênfase está na resolução algébrica dos sistemas, e a preocupação das duplas foi encontrar os valores das incógnitas resolvendo os sistemas por forma conhecida, não tendo havido preocupação em esboçá-los geometricamente.

6. Considerando que as incógnitas **a** e **b** dos sistemas são medidas de ângulos, crie um enunciado para cada situação e descubra a medida de cada ângulo:

a) $\begin{cases} a+b=90^\circ \\ b=\dfrac{a}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a+b=180^\circ \\ a=2b-15^\circ \end{cases}$

Figura 3.5.4: Proposta de resolução dos sistemas.

As dificuldades apresentadas na Atividade 6 estão ligadas à mudança de linguagem. Verificamos que para os alunos essa mudança da linguagem simbólica para a linguagem escrita comum não é tarefa fácil. Essa dificuldade provavelmente ocorre pelo fato de a prática da escrita ser quase inexistente em suas aulas de Matemática. Como orientação para produção do enunciado, retornamos à definição de ângulos complementares e suplementares, cuja finalidade era a criação, por parte das duplas, de um texto e este utilizando dois ângulos simbolizados por *a* e *b,* conforme expressões do sistema que deveriam resolver. Mesmo realizando a atividade em duplas, o enunciado para cada situação não foi criado. Os estudantes apenas resolveram os sistemas e apresentaram o valor das incógnitas (Figura 3.5.5). Não havendo a representação geométrica, os ângulos em jogo não foram identificados pelos estudantes como complementares ou suplementares.

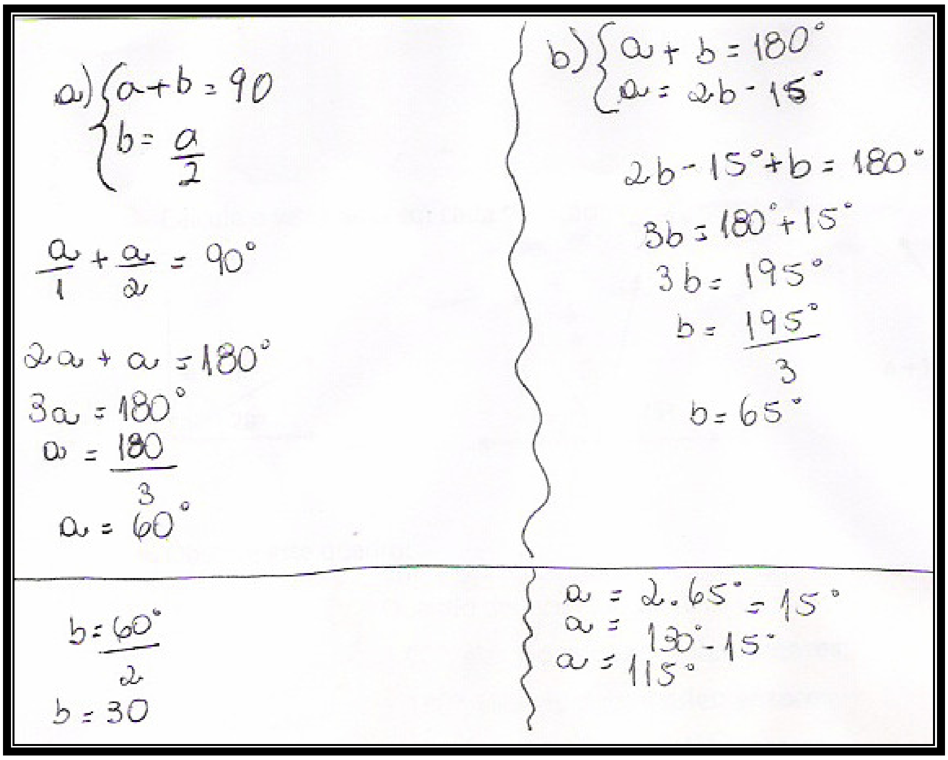
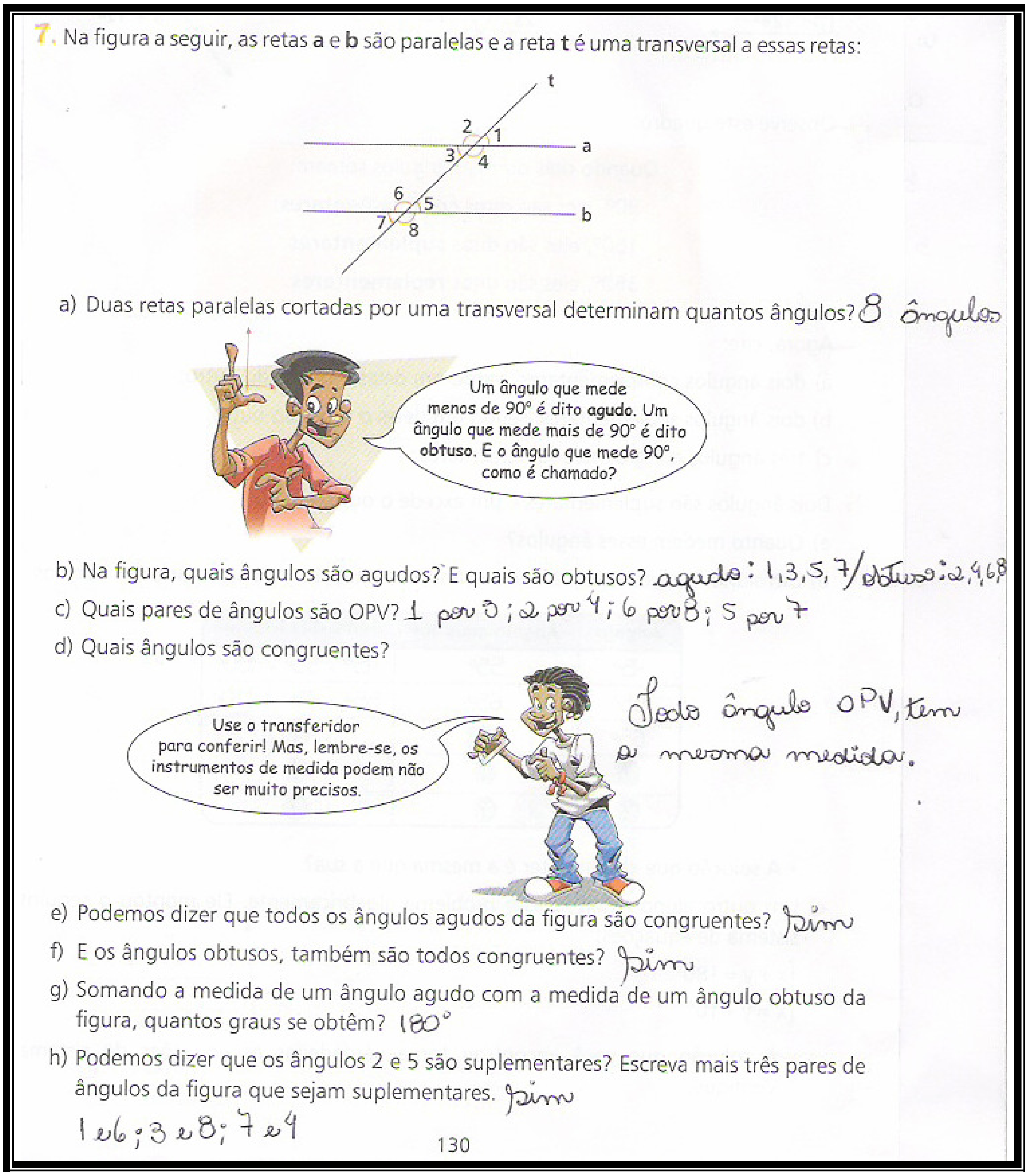


Figura 3.5.5: Resolução dos sistemas da Atividade 6 pelas duplas.

Na Atividade 7 (Figura 3.5.6), as propriedades sobre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal são abordadas empiricamente por meio de medições, ângulos opostos pelo vértice, ângulos agudos e ângulos obtusos. Toda a Atividade 7 foi desenvolvida pelos alunos sem dificuldades. Identificaram os pares de ângulos OPV, também definiram a contento ângulos congruentes e localizaram, com facilidade, mais três pares de ângulos suplementares nas paralelas cortadas por uma transversal.



7. Na figura a seguir, as retas **a** e **b** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a essas retas:

a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam quantos ângulos? 8 ângulos

b) Na figura, quais ângulos são agudos? E quais são obtusos? agudo: 1,3,5,7 / obtuso: 2,4,6,8

c) Quais pares de ângulos são OPV? 1 por 3 ; 2 por 4 ; 6 por 8 ; 5 por 7

d) Quais ângulos são congruentes?

Todo ângulo OPV, tem a mesma medida.

e) Podemos dizer que todos os ângulos agudos da figura são congruentes? Sim

f) E os ângulos obtusos, também são todos congruentes? Sim

g) Somando a medida de um ângulo agudo com a medida de um ângulo obtuso da figura, quantos graus se obtêm? 180°

h) Podemos dizer que os ângulos 2 e 5 são suplementares? Escreva mais três pares de ângulos da figura que sejam suplementares. Sim

1 e 6 ; 3 e 8 ; 7 e 4

130

Figura 3.5.6: Resolução da Atividade 7, retas paralelas cortadas por uma transversal.

Na apresentação da Atividade 7 foram comentadas as imprecisões dos instrumentos de medida, que foram verificadas pelas duplas no desenvolvimento das atividades, mas as duplas eram confiantes na suposição de que os ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes, pois já tinham desenvolvido várias atividades de medição e resolução de equações utilizando essa afirmação.

Na Atividade 8 (Figura 3.5.7), as duplas apresentaram suas resoluções utilizando as definições da Atividade 7, sem demonstrar dificuldades.

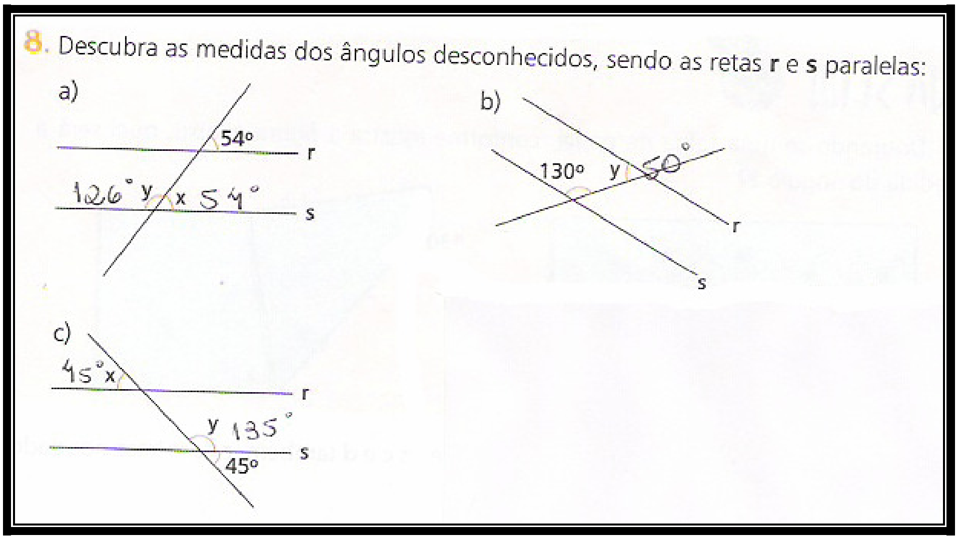
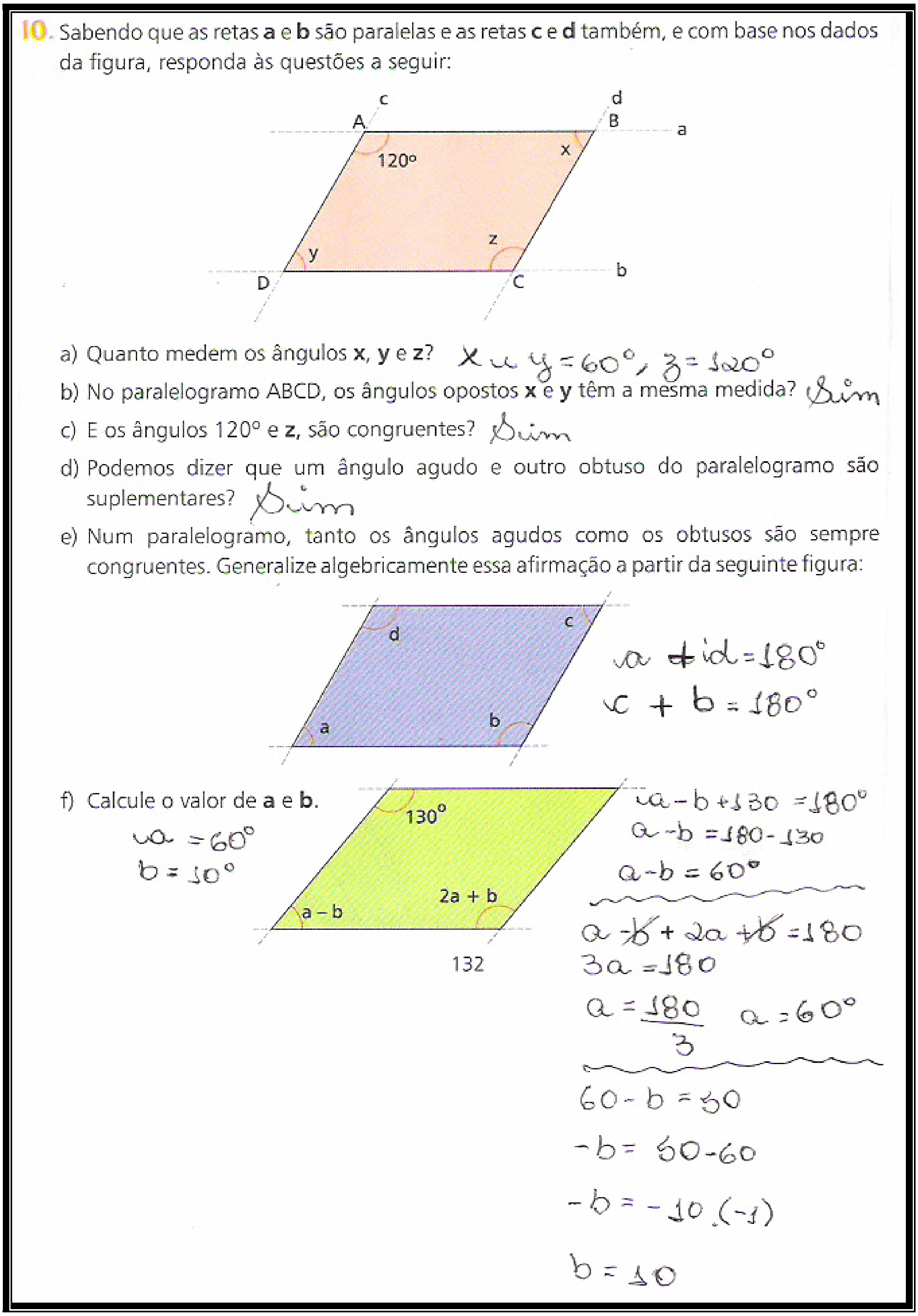


Figura 3.5.7: Atividade 8 resolvida pelas duplas.

Uma propriedade dos ângulos de um paralelogramo é verificada empiricamente na Atividade 10. As duplas não encontraram dificuldades em responder os itens (a), (b), (c) e (d). Mas, a partir do item (e), esperava-se a generalização algébrica dessa afirmação (Figura 3.5.8), sendo então necessário retomar vários conceitos da Seqüência de Atividades 1 e 2.



10. Sabendo que as retas **a** e **b** são paralelas e as retas **c** e **d** também, e com base nos dados da figura, responda às questões a seguir:

a) Quanto medem os ângulos **x**, **y** e **z**? x e $y = 60°$, $z = 120°$

b) No paralelogramo ABCD, os ângulos opostos **x** e **y** têm a mesma medida? Sim

c) E os ângulos 120° e **z**, são congruentes? Sim

d) Podemos dizer que um ângulo agudo e outro obtuso do paralelogramo são suplementares? Sim

e) Num paralelogramo, tanto os ângulos agudos como os obtusos são sempre congruentes. Generalize algebricamente essa afirmação a partir da seguinte figura:

$a + d = 180°$
$c + b = 180°$

f) Calcule o valor de **a** e **b**.

$a = 60°$
$b = 10°$

$a - b + 130 = 180°$
$a - b = 180 - 130$
$a - b = 60°$

$a \cancel{-b} + 2a \cancel{+b} = 180$
$3a = 180$
$a = \frac{180}{3}$ $a = 60°$

$60 - b = 50$
$-b = 50 - 60$
$-b = -10 \cdot (-1)$
$b = 10$

Figura 3.5.8: Atividade 10, propriedade: ângulos do paralelogramo.

A princípio, as duplas apresentaram dificuldades em entender a necessidade de generalizar o item (e), demonstrando a afirmação citada. Houve a tentativa por parte da pesquisadora de ligar essa atividade à primeira desta seqüência (Figura 3.5.1), pois as duplas já tinham resolvido vários exercícios observando ângulos complementares e suplementares e, também, haviam resolvido os sistemas. Isso ficou mais evidente quando comentamos sobre a adição das parcelas num sistema e, a partir desse comentário, os grupos desenvolveram a igualdade $\hat{a} = \hat{b}$ da Atividade 1. Quanto à generalização pedida, não houve resposta satisfatória dos alunos.

Para resolver o item (f), após tentarem resolução por ângulos OPV sem sucesso, procuramos lembrar sobre o primeiro encontro. Abaixo segue o trecho colhido do material gravado:

> Pesquisadora: Lembram do Anexo 1?
>
> Grupo B: Ângulos dos triângulos, três ângulos (observações feitas após alguns comentários feitos pela pesquisadora sobre exercícios do Anexo 1).
>
> Grupo A: Soma dos ângulos é 180 graus.
>
> Pesquisadora: como poderiam utilizar estas informações neste exercício?
>
> Grupo A: nós podemos pegar os ângulos de dois em dois
>
> Pesquisadora: Como assim? Ângulos iguais?
>
> Grupo A: Não, aqueles que juntos dão 180 graus.
>
> Pesquisadora: Sim, quais ângulos?
>
> Grupo A: Pode ser um grande e um pequeno (agudo e obtuso)
>
> Pesquisadora: E depois?

Grupo A: Somamos os ângulos.

Pesquisadora: Vamos tentar?

As duplas encontraram dificuldades para resolução da atividade e, após minha interferência no sentido de levá-los a visualizar os pares de ângulos suplementares, as duas duplas criaram as equações e partiram para a resolução. Definiram uma equação achando o valor de *a,* para em seguida substituir esse valor na outra equação e descobrir o valor de *b* (Figura 3.5.8). Solicitamos que retornassem ao item (e) e procurassem generalizar, mas a atividade não foi realizada. Como aconteceu a princípio, na Atividade 1, as duplas não compreenderam o que era generalizar algebricamente a afirmação: para eles nada tinha a ser feito.

Em seguida, há a solicitação aos alunos para demonstrar duas propriedades aplicando as relações entre os ângulos formados por duas paralelas cortadas por transversais. Nas duas solicitações, são empregados os termos *demonstrar algebricamente*. Uma das propriedades é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, conforme a Figura 3.5.9 abaixo:

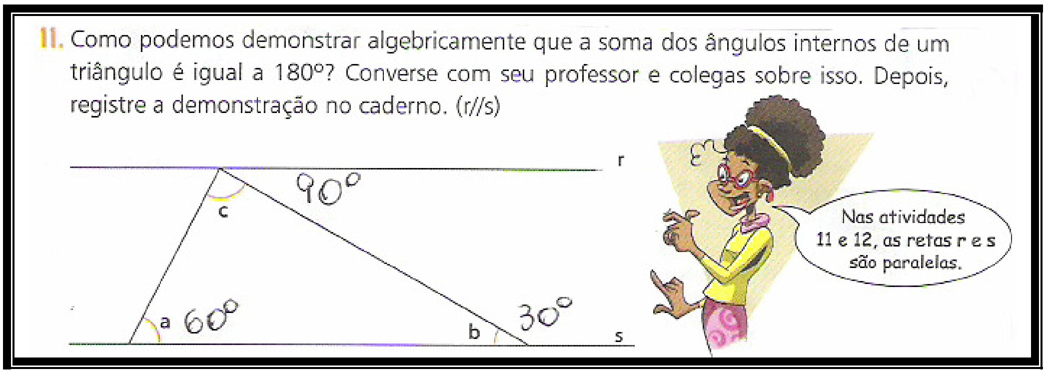


Figura 3.5.9: Demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Os dois grupos atribuíram valores para *a, b* e *c* (Figura 3.5.10), comprovando empiricamente que a soma dos ângulos internos é 180º.

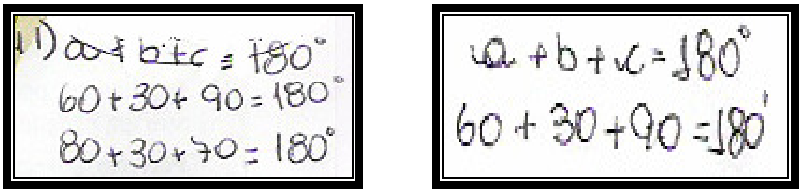


Figura 3.5.10: Resposta das duas duplas – comprovação empírica da somas dos ângulos no triângulo.

Questionados se atribuir valores é uma demonstração, um dos grupos lembrou da atividade de recorte da S-AT1 e falou que estava demonstrado. Abaixo texto gravado:

> Aluno: Professora, no outro dia eu pintei os cantos dos triângulos, cortamos e mostramos que juntando os três dá uma reta (180 graus)
>
> Pesquisadora: E com isto está demonstrado algebricamente?
>
> Aluno: Acho que sim, os triângulos eram diferentes e deu 180 graus.

Concluímos que as propriedades foram estudadas por medições, de forma empírica, e mesmo com algum domínio na argumentação, os alunos não conseguiram uma demonstração com encadeamento de idéias. Além disso, é provável que o fato de não haver uma definição ou mesmo uma menção aos ângulos alternos e internos tenha dificultado a determinação de uma demonstração formal.

Verificamos que não há distinção entre evidência empírica e prova por parte dos alunos.

A mesma dificuldade foi verificada na Atividade 14 (Figura 3.5.11), em que a solicitação está em demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360º.

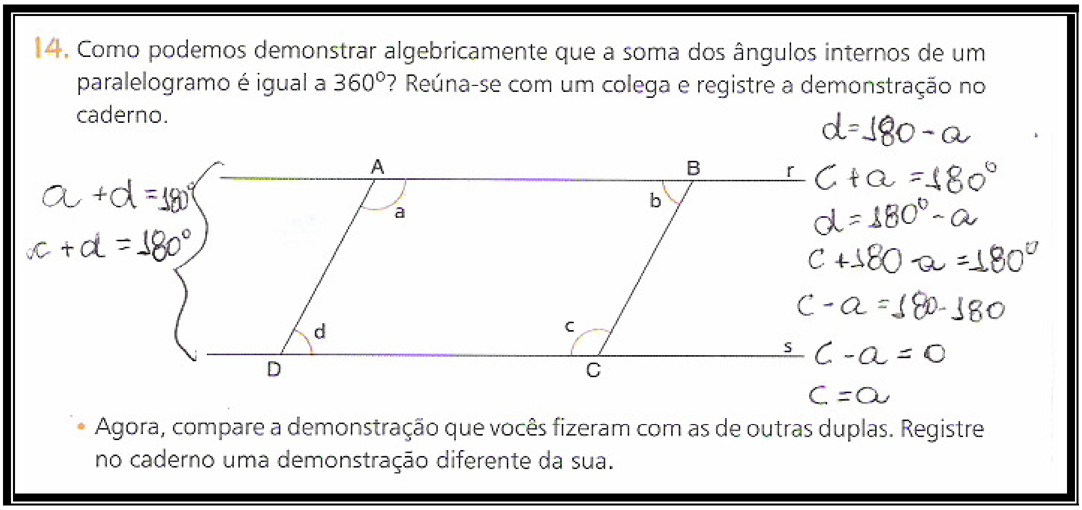


Figura 3.5.11: Demonstrar que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360º.

Nesta atividade, retomamos a Atividade 10, em que temos a propriedade “um ângulo agudo e outro obtuso do paralelogramo são suplementares”, e a Atividade 11, “a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º”, cujo intento visava a que os grupos imaginassem um sistema de equações e, por fim, o demonstrassem fazendo uso desses conceitos. Abaixo trecho da gravação referente ao encontro:

> Pesquisadora: Para resolver a Atividade 10, nos lembramos de vários conceitos, vocês não acham que podem ser úteis neste momento?
>
> Dupla B: Vamos ver a Atividade 10.
>
> Dupla A: Soma de um ângulo agudo com um obtuso?
>
> Pesquisadora: Esta informação pode ser útil nesta Atividade?
>
> Dupla A: Acho que sim
>
> Dupla B: $a + d$ e $b + c$ que dá 180º cada soma.
>
> Dupla A: No fim são 360º.
>
> Pesquisadora: Isso. Como vocês podem demonstrar algebricamente com estes dados? Tentem.

Retomamos a Atividade 14 e conversamos sobre a prova algébrica que realizaram, ou seja, o ângulo *c* tem a mesma medida que o ângulo *a*, mas esta não é uma demonstração algébrica de que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360º. No final dessa atividade, encontramos a recomendação de comparar com as dos colegas as demonstrações encontradas. Dessa forma o aluno observa a possibilidade de existirem vários encadeamentos possíveis para demonstrar o mesmo teorema. Explicamos que podemos provar de formas diferentes, mas acreditamos que após a seqüência de atividades, os alunos não entenderam o que é uma prova e, também, não conseguiram demonstrar.

Verificamos que a maioria das propriedades foi estudada empiricamente, os encaminhamentos das atividades deram ênfase ao cálculo algébrico e não ao geométrico. Além disso, a passagem dos argumentos empíricos para uma demonstração formal é muito drástica, não permitindo ao aluno uma construção gradual.

Observamos, também, que as atividades apresentadas, ou seja, uma seqüência contendo 14 Atividades, e cada atividade subdividida em vários itens enfatizando o cálculo algébrico, não ajudaram as duplas na passagem das provas pragmáticas para as provas conceituais.

Observamos que a autora utiliza a expressão demonstração algébrica no domínio geométrico e, com isso, imaginamos que os alunos devam chegar a uma prova formal dos teoremas solicitados. Neste ponto identificamos a mudança de nível subitamente, pois os exercícios são apresentados de forma empírica, de validação, de verificação experimental para em seguida percebemos a passagem precipitada para exercícios de demonstração algébrica.

Para Balacheff (1988), a prova e demonstração são distintas, pois do ponto de vista didático a prova estabelece a validade de uma afirmação de forma mais ampla, correspondendo a um discurso que convence nos seus vários níveis para uma determinada afirmação. Já na demonstração apenas podem ser aceitas como provas explicações que adotam uma forma particular, ou seja, o desenvolvimento formal de um raciocínio, este utilizando axiomas ou teoremas já provados para chegar a uma conclusão.

Fazendo uma análise dentro das quatro categorias de provas pragmáticas e conceituais de Balacheff (1988), o *empirismo ingênuo* não desapareceu após a Seqüência de Atividades, não havendo fixação das provas conceituais.

Também devo ressaltar a dificuldade que tive no desenvolvimento da S-AT2. Como professora, foi extremamente difícil saber como interferir e até que ponto deveria responder aos questionamentos sem comprometer a pesquisa. Isso porque meus esclarecimentos foram tão freqüentes que, no final das Atividades, fiquei com a impressão de que estive perto de dar as respostas para as duplas.

3.6 Síntese

O foco deste capítulo esteve nos tópicos *Retas paralelas cortadas por uma transversal* e *Soma dos ângulos internos de um triângulo*. Também observamos as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de duas seqüências de atividades, denominados S-AT1 e S-AT2.

No próximo capítulo abordaremos o tópico de Geometria *Teorema de Pitágoras*, as atividades e provas sugeridas aos alunos, o aparecimento do teorema em outros capítulos do livro, o desenvolvimento do teorema em sala de aula e a Seqüência de Atividades 3.

CAPÍTULO 4

TEOREMA DE PITÁGORAS

4.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos como argumentações e provas são apresentadas no tópico *Teorema de Pitágoras*, algumas atividades resolvidas e questionamentos colocados aos alunos, o aparecimento do teorema em outros capítulos do livro, o desenvolvimento do teorema em sala de aula e uma seqüência de atividades retiradas do livro da 8.ª série.

4.2 Teorema de Pitágoras

A seguir, analisamos o Teorema de Pitágoras. Este conteúdo aparece pela primeira vez no livro destinado à 8.ª série num capítulo de seis páginas dedicado ao Teorema. O capítulo tem como título *Jogos e Descobertas*, e inicia-se com a construção de um quebra-cabeça. Além desse capítulo, achamos referências ao Teorema de Pitágoras em mais seis capítulos, também no livro da 8.ª série.

Abaixo, faremos a apresentação do Teorema de Pitágoras e dos exercícios encontrados no capítulo dedicado ao Teorema, suas características, expectativa de resolução pelos alunos e faremos alguns comentários nossos.

O Teorema de Pitágoras é explorado inicialmente de forma experimental, empiricamente, comparando áreas por meio de atividades de recorte de quebra-cabeça. Propõe-se que o aluno recorte as peças de cada quebra-cabeça e, com elas, monte o quadrado formado a partir da hipotenusa do triângulo (Figura 4.2.1). Nessa atividade espera-se do aluno a percepção de que a soma das áreas dos quadrados formados a partir dos lados é igual à área do quadrado formado a partir da hipotenusa (Figura 4.2.2).

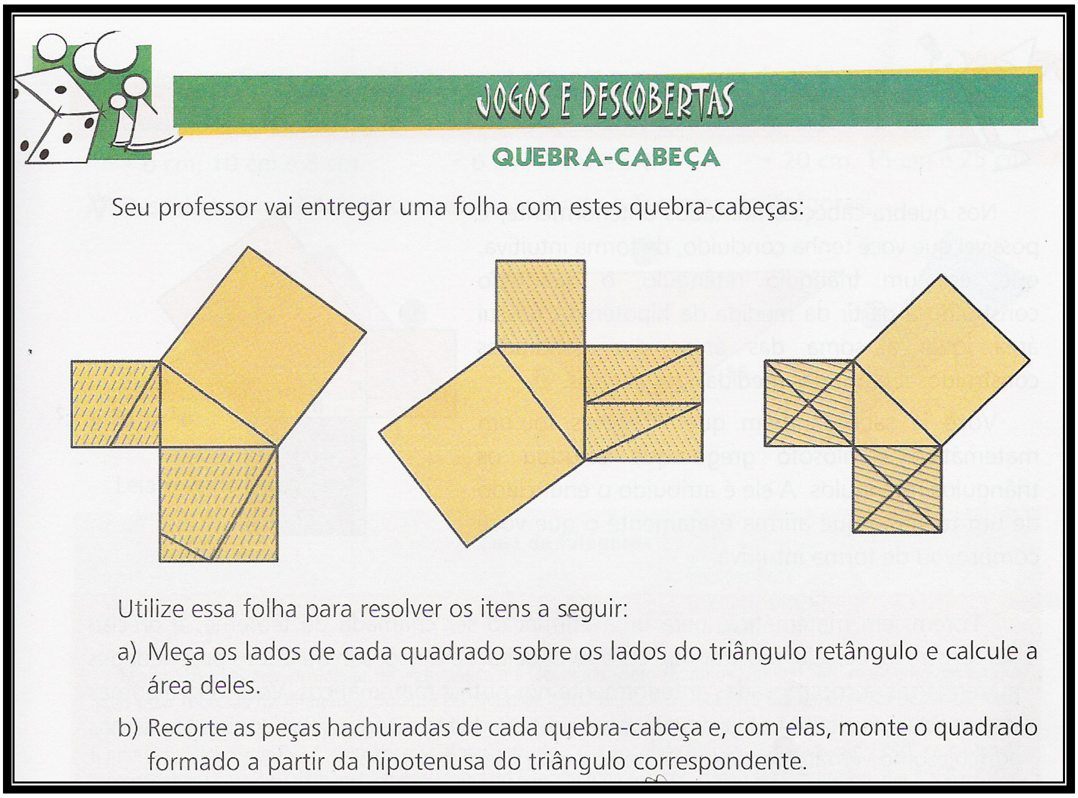


Figura 4.2.1: Introdução ao Teorema de Pitágoras, p. 67.

Dentre as classificações de prova, segundo Balacheff (1988), este tipo de atividade pode ser classificado como prova pragmática, pois está baseada em manipulações, e para essas manipulações são utilizados objetos concretos, como as atividades de recorte com quebra-cabeça.

Em seguida, o aluno é levado a generalizar a observação utilizando as letras *a* como medida da hipotenusa e *b* e *c* como as medidas dos catetos do triângulo retângulo. Por meio da forma experimental, a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é analisada em diferentes escalas, obtendo-se sempre triângulos retângulos de diferentes medidas. Sendo assim, por meio dessas tarefas justifica-se empiricamente a relação $a^2 = b^2 + c^2$ como sendo válida para todo triângulo retângulo.

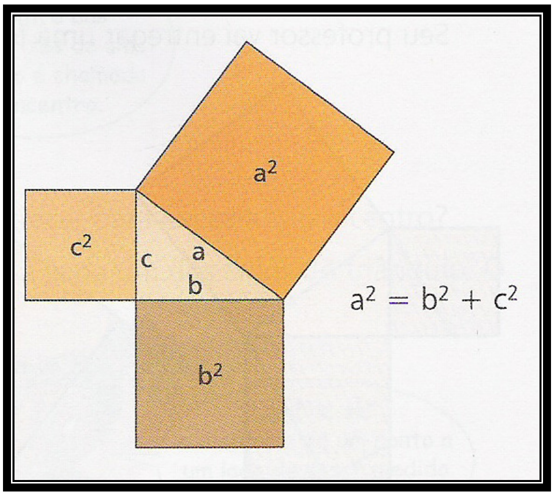


Figura 4.2.2: Generalização do Teorema de Pitágoras, p. 68.

Segue o comentário:

"Nos quebra-cabeças montados anteriormente, é possível que você tenha concluído, de forma intuitiva, que, em um triângulo retângulo, o quadrado construído a partir da medida da hipotenusa possui área igual à soma das áreas dos quadrados construídos a partir das medidas dos catetos.

> Você já sabe também que Pitágoras foi um matemático e filósofo grego que estudou os triângulos retângulos. A ele é atribuído o enunciado de um teorema que afirma exatamente o que você comprovou de forma intuitiva” (TOSATTO, PERACCHI e ESTEPHAN, 8.ª série, 2002, p. 68).

Os termos “concluir” e “comprovar” estão sendo usados para supor propriedades de forma intuitiva. Para os autores, parece que “forma intuitiva” é usada para dar significado à abordagem empírica.

Neste ponto o autor mostra a preocupação com o rigor matemático, conforme abaixo:

> “Porém, em matemática, para uma afirmação ser chamada de teorema, é preciso demonstrá-la, ou seja, mostrar que ela é verdadeira. Para isso são utilizadas propriedades já comprovadas por outros matemáticos. Você verá algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras nas atividades a seguir. Por enquanto, vamos admitir como verdadeiro o seguinte enunciado desse teorema:
> Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa desse triângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lado a medida de cada um dos catetos” (TOSATTO, PERACCHI e ESTEPHAN, 8.ª série, 2002, p. 68).

Essa explicação sobre a importância de demonstrar para mostrar que uma afirmação é verdadeira pode confundir o aluno, pois o termo “comprovada” está sendo utilizado com um significado diferente do que na citação anterior. É questionável, entretanto, que o aluno compreenderia a diferença entre comprovado por matemáticos e comprovado de forma intuitiva. Portanto, a diferença entre observação empírica e demonstração não é explicada de maneira clara aos alunos.

No item *Trocando Idéias,* encontramos um exercício de construção do triângulo retângulo, com medidas previamente dadas para verificar se satisfazem ao Teorema de Pitágoras. Encontramos, ainda, três exercícios para descobrir as medidas desconhecidas e três verificações da aplicação do Teorema. Analisando esses exercícios, verificamos que geralmente são apresentados vários triângulos retângulos com a finalidade de calcular a medida do terceiro lado por meio do uso do teorema.

Ainda nesse item, encontramos o teorema abaixo. No questionamento endereçado aos alunos, podemos verificar a função da prova como *processo de descoberta* de De Villiers (2001).


Podemos afirmar que a hipotenusa é sempre o maior lado do triângulo retângulo?

Figura 4.2.3: Pergunta sobre a medida da hipotenusa, p. 69.

No livro do professor não encontrarmos indicação da resposta pretendida. Com isso, conjecturamos que a idéia presente consiste em partir de exercícios de exploração, análise e descoberta de medidas desconhecidas, para que o aluno possa encontrar, pelos processos intuitivos e/ou empíricos utilizados, que a soma dos quadrados dos lados é igual ao quadrado da hipotenusa e, de posse desta informação, concluir que a hipotenusa é sempre o maior lado do triângulo retângulo.

No item *Atividades Matemáticas*, encontramos um texto retirado da *Revista do Professor de Matemática*. São duas provas geométricas chamadas "*A* *mais bela prova"* e "*A demonstração do presidente*", e uma prova algébrica: "*A prova mais curta"*.

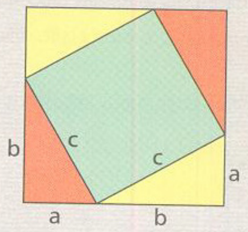
Nessa atividade constatamos a passagem das provas pragmáticas para as provas conceituais. Segundo Balacheff (1988), as provas conceituais não dependem apenas da ação efetiva sobre a representação, baseiam-se nas formulações das propriedades em questão e nas relações entre essas propriedades.

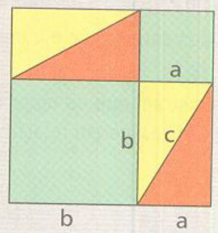
Conforme já apresentado, para Balacheff (1988), existe uma hierarquia de importância entre os tipos de provas. Classifica o *empirismo ingênuo* e o *experimento crucial* como provas pragmáticas, o *exemplo genérico* passa a ser uma fase intermediária entre as provas pragmática e conceitual, enquanto a *experiência mental* é classificada como prova conceitual.

O Teorema de Pitágoras foi proposto inicialmente em forma de quebra-cabeça, constituído por peças planas que os alunos deveriam organizar por justaposição. Além disso, foram propostas tarefas de construção de triângulos retângulos dadas as medidas. Concluímos, então, que essa fase teve um tratamento empírico. Acreditamos que para produzir um texto de demonstração, é necessário organizar as propriedades em seqüências dedutivas. As atividades com quebra-cabeça permitem ao aluno efetuar uma demonstração, mas se faz necessário que as observações sejam elementos que desencadeiem conjecturas e processos que levem às justificativas formais.

A mais bela prova

Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos "Elementos" de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria, pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo.





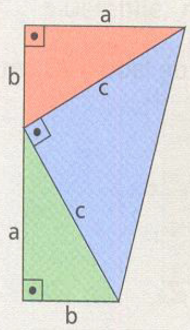
Do quadrado que tem a + b como lado, retiremos quatro triângulos iguais. Se fizermos isso, como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c. Mas, se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b, respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b.

Esta é, provavelmente, a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras. Entretanto, no livro de Loomis ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.

- Descreva essa demonstração do Teorema de Pitágoras, usando a linguagem algébrica.

Figura 4.2.4: A mais bela prova, p. 70.

Na atividade "*A mais bela prova"*, o professor propõe o quebra-cabeça acima, constituído por peças planas em que o aluno irá compor de duas maneiras diferentes. Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observamos que $a^2 = b^2 + c^2$. Com isso, o Teorema de Pitágoras foi "demonstrado". Trabalhos com material concreto e com outros exercícios encontrados de medição não constituem demonstrações matemáticas que possam ser aceitas na 8.ª série.



A demonstração do presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos por apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881), era um general que também gostava muito de Matemática. Ele deu uma prova do Teorema de Pitágoras baseada na figura ao lado.

A área do trapézio com bases a, b e altura a + b é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos. Portanto:

$$\frac{a+b}{2} \times (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Simplificando, obtemos $a^2 + b^2 = c^2$.

Revista do Professor de Matemática, n. 1, 2, 3 e 4, 2º semestre de 1982 a 1º semestre de 1984, p. 15.

- Descreva algebricamente essa demonstração do Teorema de Pitágoras e escreva o conhecimento matemático utilizado.

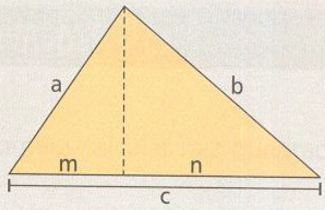
Figura 4.2.5: A demonstração do presidente, p. 71.

Nas demonstrações acima, acreditamos que o aluno, utilizando a regra do cancelamento, possa descrever algebricamente o Teorema de Pitágoras.

Quanto à "*prova mais curta*", abordada abaixo, verificamos os conteúdos anteriores ao Teorema de Pitágoras. Estes foram: *relações métricas no triângulo retângulo*, os *números e o triângulo retângulo* e *fazendo arte com a matemática,* portanto, solicitar ao aluno a demonstração do Teorema de Pitágoras e mostrar os conhecimentos utilizados significa valer-se de conhecimentos anteriores, como a propriedade das proporções entre os lados dos triângulos semelhantes e trabalhar algebricamente estas igualdades com a finalidade de demonstrar o Teorema.

A prova mais curta

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte conseqüência da semelhança de triângulos retângulos: se m e n são, respectivamente, as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c, temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m + n = c$. Somando as expressões, temos $a^2 + b^2 = c^2$.



- Descreva essa demonstração do Teorema de Pitágoras e mostre os conhecimentos matemáticos utilizados.

Figura 4.2.6: A prova mais curta, p. 71.

Os conteúdos abordados para a demonstração das três provas foram tratados nos capítulos anteriores desta série. Ambicionamos que o aluno utilize os conhecimentos sobre áreas, o conceito de semelhança de triângulos e passe para à demonstração formal do Teorema.

Observamos, assim como já assinalamos no Capítulo 3, que a autora utiliza a expressão demonstração algébrica no domínio geométrico; com isso, enxergamos a tendência de querer que os alunos cheguem a uma prova formal nas três demonstrações solicitadas. Neste ponto identificamos a ruptura, pois os exercícios são apresentados de forma empírica, de validação, de verificação experimental, chamando a atenção para a importância de validar e justificar. No entanto, em seguida percebemos a passagem brusca para exercícios de demonstração algébrica, procurando a generalização. Considerando que Balacheff (1988) faz distinção entre prova e demonstração, acreditamos que a autora, nesse item, queira uma demonstração formal. Do ponto de vista didático, a prova é menos formal, estabelecendo a validade de uma afirmação de forma mais ampla, mais geral, correspondendo a um discurso que convence nos seus vários níveis para uma determinada afirmação. Já a demonstração é o desenvolvimento formal de um raciocínio utilizando axiomas ou teoremas já provados para chegar a uma conclusão.

Nessas demonstrações, verificamos as funções de *validação* e também a de *explicação* (De Villiers, 2001): validação quando trabalhamos duas expressões algébricas e, utilizando regras de cancelamento, provamos uma igualdade (caso de "A *demonstração do presidente"* e "*A mais bela prova"*); explicação quando a conjectura é conseqüência de outros resultados conhecidos e, portanto, explica as etapas envolvidas no processo (caso de "*A prova mais curta"*).

> "Em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos" (De Villiers, 2001).

Pietropaolo (2005) também enfatiza as diferenças entre as duas "espécies" de demonstração – *validação* e *explicação* –, conforme abaixo.

> "A principal diferença entre as duas 'espécies' de demonstrações – a que apenas valida e a que também explica – é que a explicativa termina por utilizar raciocínios baseados em idéias matemáticas, enquanto a prova formal emprega basicamente regras de sintaxe" (Pietropaolo, 2005, p. 9).

Contudo, a mudança de linguagem, ou seja, utilizar a linguagem formal descrevendo algebricamente o conhecimento matemático utilizado nas demonstrações pode ser um processo difícil para o aluno, pois os exercícios foram apresentados de forma empírica, validando uma propriedade ou verificando experimentalmente. Acreditamos que com as atividades apresentadas, alguns alunos não conseguirão descrever os conhecimentos matemáticos que são utilizados para chegar ao Teorema de Pitágoras.

Também verificamos nesse processo a existência da função *desafio intelectual*, ou seja, a satisfação resultante de conseguir desenvolver a atividade solicitada.

Nas *Atividades Matemáticas* encontramos mais cinco questões, num total de nove exercícios, para descobrir as medidas desconhecidas nos triângulos retângulos. Encontramos, também, figuras planas (triângulo, quadrado, hexágono) que podem ser decompostas em triângulos retângulos, sendo que após a decomposição aplica-se o Teorema de Pitágoras para a resolução da atividade. Alguns desses exercícios utilizam números irracionais, nos valores dados ou no valor que o aluno encontrará efetuando os cálculos.

No final do capítulo encontramos o lembrete *Não esqueça!*, chamando a atenção para o triângulo retângulo e sua generalização.

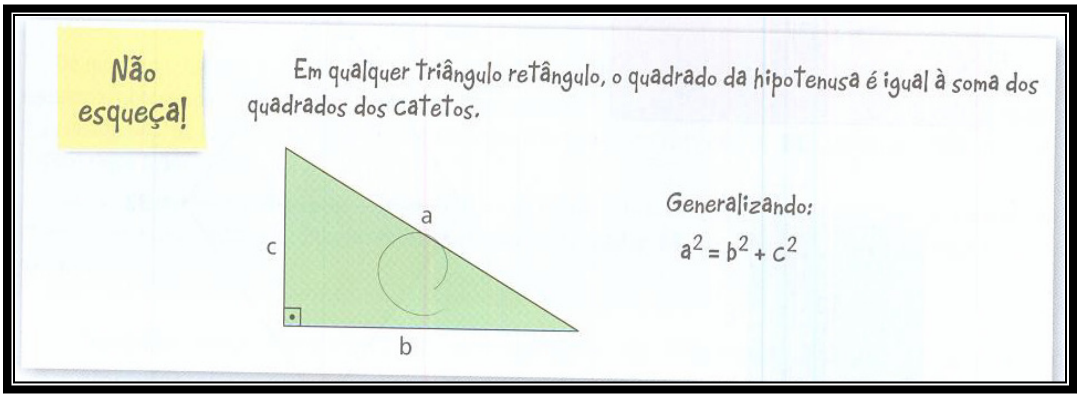


Figura 4.2.7: *Não esqueça!* Generalizando o Teorema de Pitágoras, p. 72.

Alguns pesquisadores, como Bell (1976, apud Nasser e Tinoco, 2001) enfatizam a função da prova em preparar o aluno para o domínio do processo dedutivo. Para isso, ele deve acompanhar as provas apresentadas pelo professor, explicando todos os passos tomados no desenvolvimento de uma demonstração. A partir disso, o estudante toma conhecimento das estruturas matemáticas envolvidas para que seja capaz de fazê-las.

Para justificar esta afirmação, procuramos no capítulo exercícios apresentando provas. Optamos por fazer uma tabela contendo a quantidade de exercícios que são aplicação da propriedade para um exercício explorando o cálculo numérico e as provas completas, estas utilizando a linguagem *demonstração algébrica*.

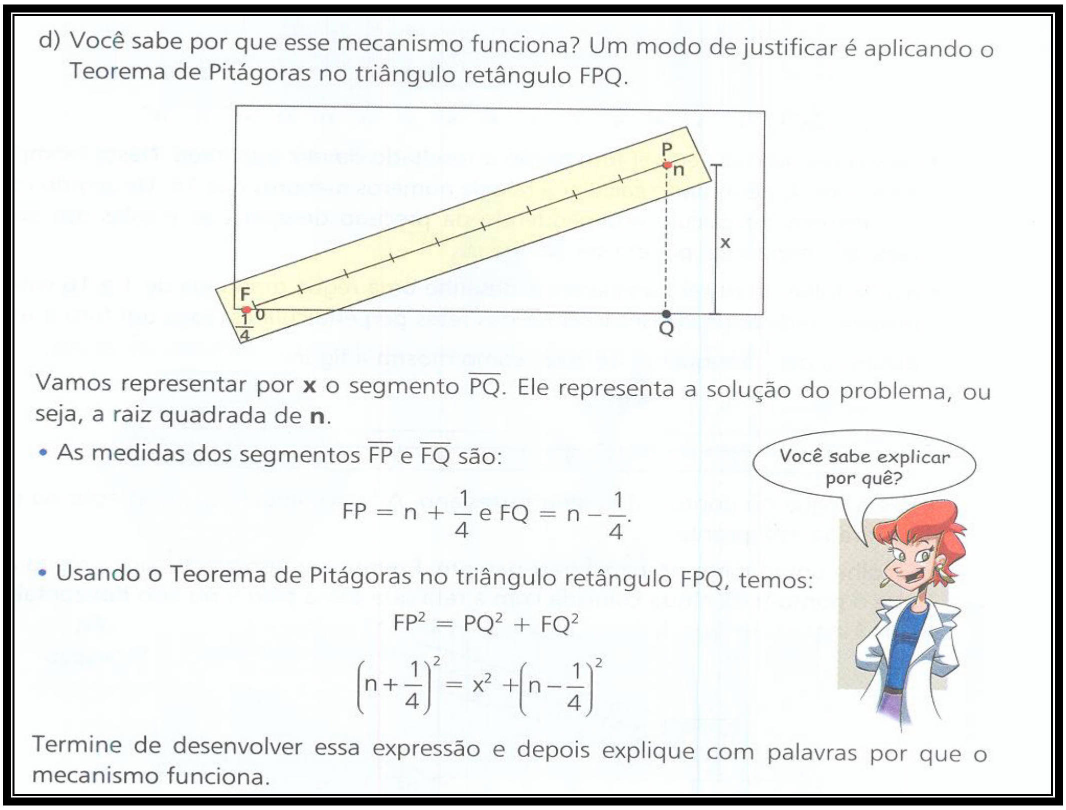
Quadro III: Classificação dos exercícios encontrados no capítulo Teorema de Pitágoras

Total de atividades encontradas no capítulo	**Aplicação da propriedade para um exercício de cálculo**	**Prova conceitual completa**
13 atividades, contendo um total de 25 exercícios	22 exercícios	3 atividades

4.2.1 Teorema de Pitágoras em outros capítulos

O tópico encontrado nas páginas imediatamente após o capítulo sobre Pitágoras examina uma atividade de construção chamada “*Obtendo Raiz Quadrada Manualmente”*, que envolve a raiz quadrada de dados manuais por meio de uma construção utilizando o Teorema de Pitágoras.

Encontramos um exercício adaptado da *Revista do Professor de Matemática*, o qual questiona os alunos para o funcionamento do mecanismo e esclarece que um modo de justificar consiste em aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, como vemos a seguir.


d) Você sabe por que esse mecanismo funciona? Um modo de justificar é aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo FPQ.

Vamos representar por **x** o segmento $\overline{PQ}$. Ele representa a solução do problema, ou seja, a raiz quadrada de **n**.

- As medidas dos segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{FQ}$ são:

$$FP = n + \frac{1}{4} \text{ e } FQ = n - \frac{1}{4}.$$

- Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo FPQ, temos:

$$FP^2 = PQ^2 + FQ^2$$

$$\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \left(n - \frac{1}{4}\right)^2$$

Termine de desenvolver essa expressão e depois explique com palavras por que o mecanismo funciona.

Figura 4.2.1.1: Calculadora manual, p. 74.

O aluno terá que desenvolver os binômios e trabalhá-los algebricamente, simplificando a expressão na qual encontrará que $x = \sqrt{n}$, portanto temos como resposta no livro do professor que "o mecanismo funciona porque x sempre será a raiz quadrada de n" (TOSATTO, PERACCHI e ESTEPHAN, 8.ª série, 2002, p. 74), ou seja, a justificação se dá pela manipulação algébrica das expressões.

Encontramos ainda, no livro do professor, que a distância de FP é o número n mais ¼ e FQ é n menos ¼, e isso ocorre por conseqüência da construção da "calculadora". Mas quanto ao valor ¼ não é óbvio de onde vem, portanto, na sala de aula, ao se propor esse trabalho ao aluno, estaremos utilizando a função da prova como meio de explicação, que deve ser explorada sempre apresentando atividades significativas (De Villiers, 2001).

Observamos que na construção para extrair a raiz quadrada, o número ¼ não é um valor exato, talvez mais uma adaptação da régua utilizada, de tal maneira que caia exatamente no valor x inteiro, isto para que as demais raízes tenham soluções corretas até uma casa decimal. Agora, na demonstração, usando o Teorema de Pitágoras, temos que usar exatamente ¼ para que dê certo na demonstração final, isto é, x igual à raiz quadrada de n. Podemos colocar outros valores no lugar de ¼, mas teremos maiores dificuldades para demonstrar, o que, em vez de facilitar, dificulta mais a prática de raiz quadrada.

No início do capítulo *"Números Irracionais*", na p. 75, encontramos uma atividade em espiral composta por 10 triângulos que foram construídos a partir de um triângulo de catetos medindo 1 cm. É solicitado ao aluno que calcule as medidas das hipotenusas usando o Teorema de Pitágoras.

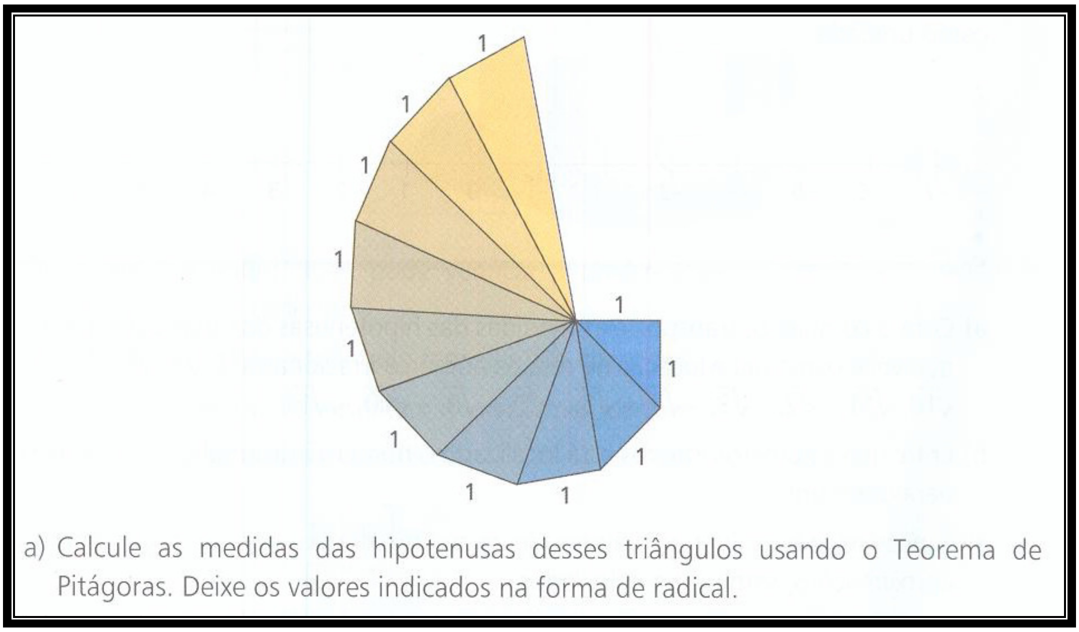
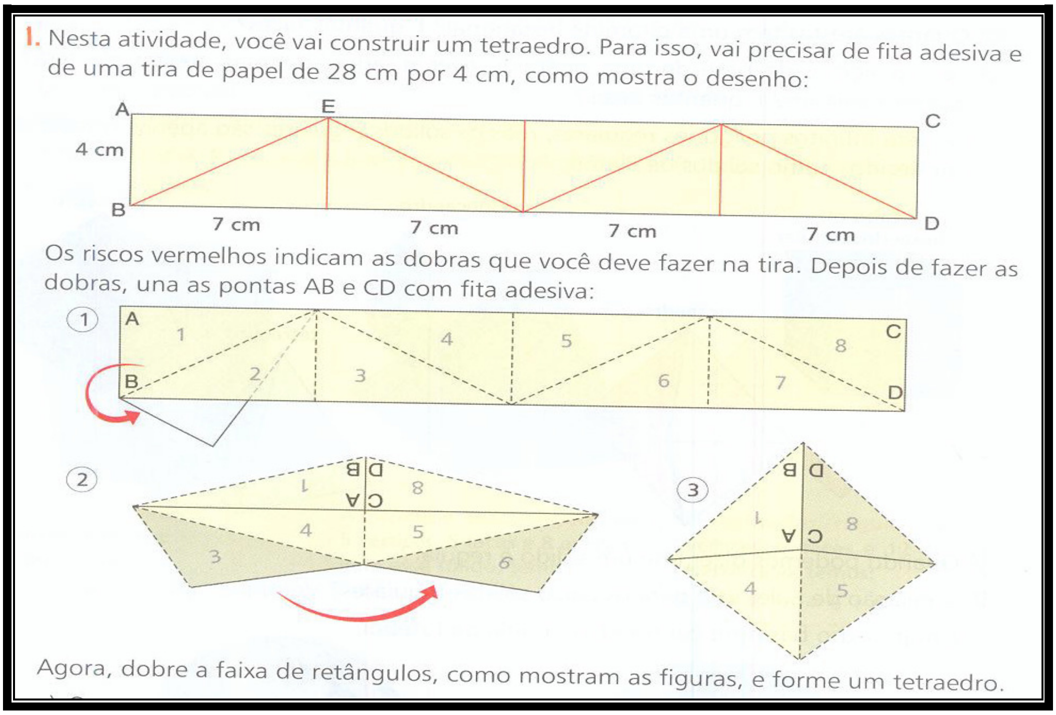


Figura 4.2.1.2: Calcular a medida da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras, p. 75.

Nesta atividade verificamos a construção inadequada dos triângulos, pois não existe indicação de que esses triângulos sejam retângulos.

O Teorema de Pitágoras é retomado na forma de exercício na atividade "*Poliedros*", na p. 92: a partir da construção e manipulação de modelos de poliedros feitos de papel e canudinhos, os alunos observam a presença do triângulo retângulo e podem aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular elementos desconhecidos desses sólidos.

Na p. 94, encontramos uma atividade de construção de um tetraedro. O Teorema de Pitágoras é utilizado para determinar essa diagonal.



1. Nesta atividade, você vai construir um tetraedro. Para isso, vai precisar de fita adesiva e de uma tira de papel de 28 cm por 4 cm, como mostra o desenho:

Os riscos vermelhos indicam as dobras que você deve fazer na tira. Depois de fazer as dobras, una as pontas AB e CD com fita adesiva:

Agora, dobre a faixa de retângulos, como mostram as figuras, e forme um tetraedro.

e) Usando o Teorema de Pitágoras, determine a medida do segmento $\overline{BE}$ da tira.

Figura 4.2.1.3: Construção de um tetraedro utilizando fita adesiva e tiras de papel, p. 94.

No capitulo "*Trabalhando com várias idéias e relações*", na p. 105, encontramos problemas retirados das Olimpíadas de Matemática.

Segundo De Villiers (2001), localizamos neste exercícios várias funções de demonstração, como: validação, explicação, descoberta, comunicação; também podemos citar o desafio intelectual, pois quase todos oferecem um desafio e exigem do aluno uma variedade de processos de pensamento que, com incentivo, o professor ajudará a desenvolver.

Exemplificamos: temos a seguir o problema 8, no qual aplicamos o Teorema de Pitágoras e verificamos o comprimento da diagonal do cartão. Temos ≅

2,1 , que é maior que o comprimento de dois quadrados. Depois de proporcionadas as oportunidades para explorar, conjecturar e explicar como o cartão poderia ser colocado no tabuleiro, o aluno encontrará como resposta que 12 quadrados podem ser tocados.

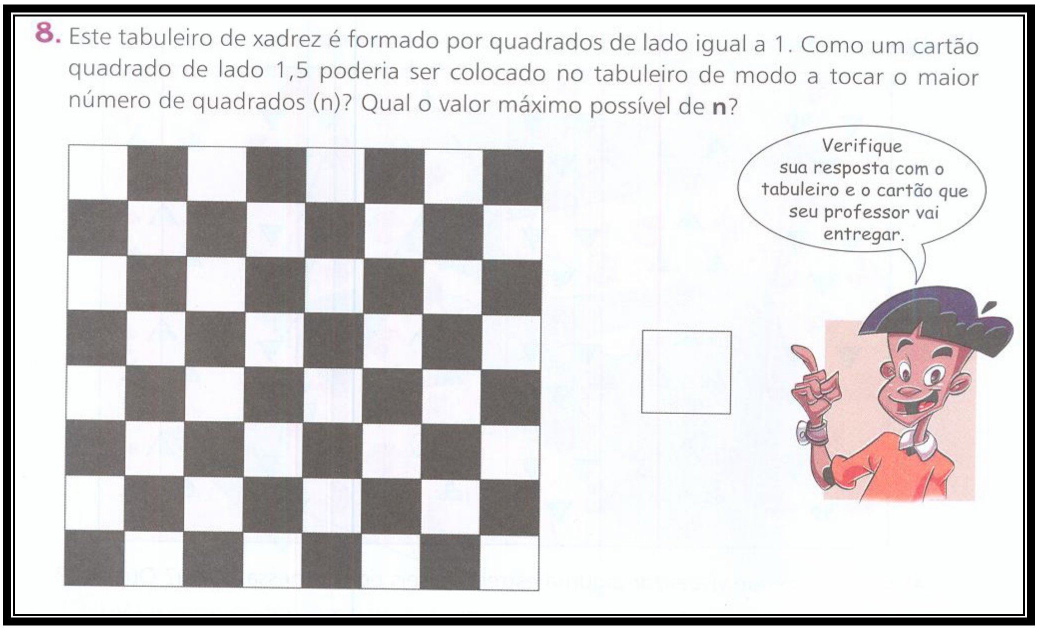

8. Este tabuleiro de xadrez é formado por quadrados de lado igual a 1. Como um cartão quadrado de lado 1,5 poderia ser colocado no tabuleiro de modo a tocar o maior número de quadrados (n)? Qual o valor máximo possível de **n**?

Figura 4.2.1.4: Problema da Olimpíada de Matemática, p. 107.

Acreditamos que uma das estratégias que podem ser utilizadas para desenvolver as habilidades de argumentação nos alunos são os chamados "problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico e devem sempre ser propostos, não importa o tópico que esteja sendo abordado" (Nasser e Tinoco, 2001, p. 9).

Segundo Dante (2003), aplicando problemas como estes, estamos proporcionando oportunidades para explorar e explicar. Além disso, requerem um tempo para que os alunos reflitam sobre eles, buscando soluções onde se privilegiem as discussões coletivas.

> “Os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos, quando estão trabalhando em pequenos grupos. Assim vão esclarecendo os pontos fundamentais e destacando as informações importantes do problema” (Dante, 2003, p. 31).

No capitulo “*Utilizando Equação do Segundo Grau para resolver problemas*”, na p. 126, localizamos dois exercícios sugerindo a utilização do Teorema de Pitágoras, conforme as Figuras 4.2.1.5 e 4.2.1.6, para calcular os lados do triângulo retângulo e o perímetro do retângulo.

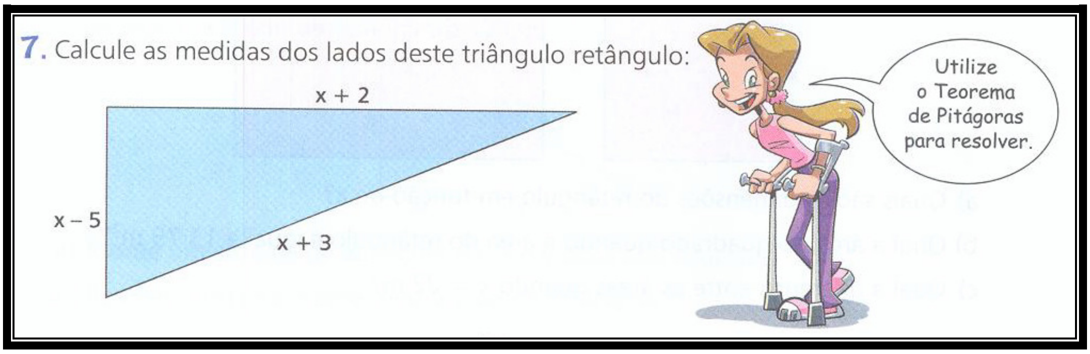
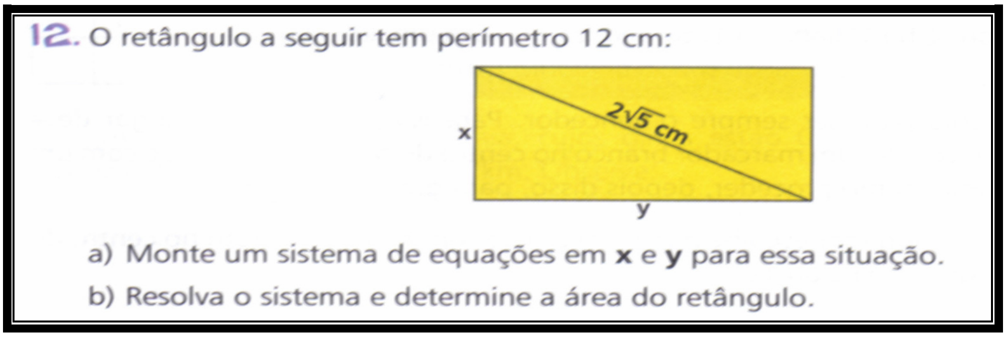


Figura 4.2.1.5: Teorema de Pitágoras aplicado para calcular lados do triângulo retângulo, p. 127.



12. O retângulo a seguir tem perímetro 12 cm:

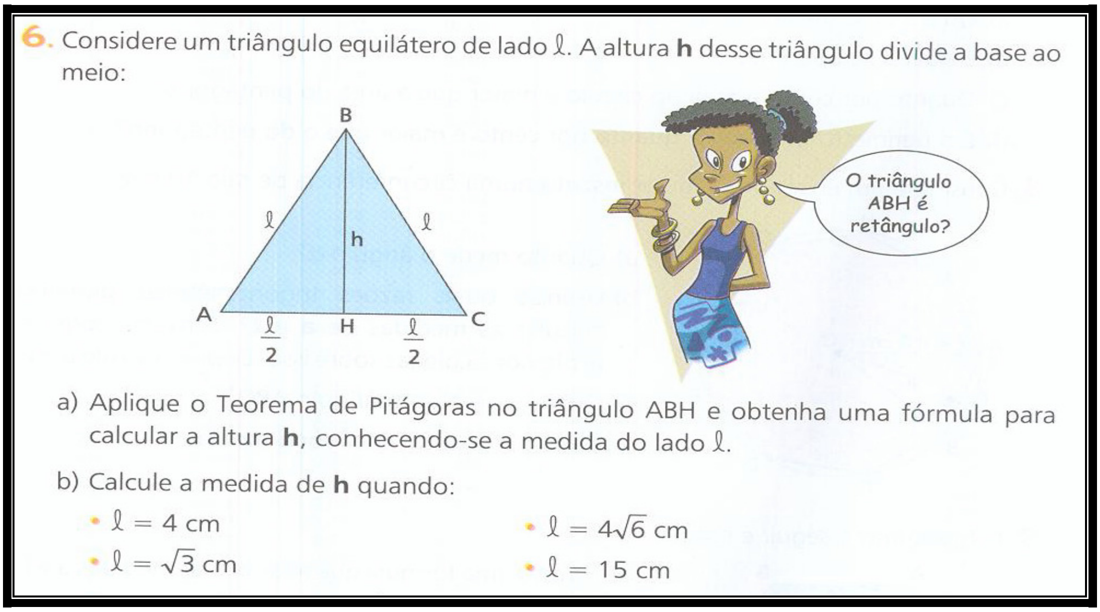
a) Monte um sistema de equações em **x** e **y** para essa situação.

b) Resolva o sistema e determine a área do retângulo.

Figura 4.2.1.6: Teorema de Pitágoras em sistemas de equações, p. 129.

No item "*Trigonometria*", na p. 196, o triângulo retângulo é retomado para explicar a razão entre as medidas dos lados e hipotenusa, dado um ângulo α, definindo então seno, co-seno e tangente.

Em Trigonometria, nas *Atividades Matemáticas*, na p. 201, encontramos o exercício com triângulo eqüilátero de lado *l*. A altura *h* divide a base ao meio. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo, obtemos a altura *h*. Em seguida, temos exercícios para calcular a medida *h*, dados os lados. Nesses exercícios, estão sendo utilizadas duas medidas contendo um número inteiro, e duas com números irracionais.


6. Considere um triângulo equilátero de lado ℓ. A altura **h** desse triângulo divide a base ao meio:

a) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH e obtenha uma fórmula para calcular a altura **h**, conhecendo-se a medida do lado ℓ.

b) Calcule a medida de **h** quando:

- $\ell = 4$ cm
- $\ell = \sqrt{3}$ cm
- $\ell = 4\sqrt{6}$ cm
- $\ell = 15$ cm

Figura 4.2.1.7: Teorema de Pitágoras para calcular altura do triângulo eqüilátero, p. 201.

4.2.2 Síntese

Para finalizar este tópico, destacamos que, com relação ao Teorema de Pitágoras, encontrado em vários capítulos no livro da 8.ª série, detectamos 16 atividades em que se sugere ao aluno utilizar o teorema para as suas resoluções.

Não localizamos exercícios resolvidos, exemplos ou outras formas de apresentar argumentos no desenvolvimento do conteúdo propriamente dito, diferentes dos exemplificados acima. As atividades estão apresentadas de forma a introduzir novos itens, levando o aluno a questionar e discutir em grupo para chegar a definições. Encontramos no livro do aluno diversas sugestões como: *reúnam-se em grupos para discutir as possíveis soluções*; *descreva com palavras*, e ainda, *converse com seu professor sobre isso*.

Assim, avaliamos que no capítulo "*Teorema de Pitágoras*" e também nos diversos capítulos em que aparecem atividades com a sugestão da utilização do teorema, em referência ao livro da 8.ª série, estão definidas diversas funções da prova, segundo De Villiers (2001), como: validação, explicação, descoberta, comunicação e três provas formais, ou seja, a organização de vários resultados num sistema dedutivo.

Assim, nas atividades propostas aos alunos, algumas vezes são apresentados novos conceitos e problemas que exigem estratégias para sua resolução.

Também verificamos que o Teorema de Pitágoras é usado, principalmente, para calcular medidas desconhecidas nos triângulos e algumas vezes para descrever demonstrações usando linguagem algébrica.

Balacheff (1988) defende a idéia e argumentação aceitável, possuindo diversos níveis de rigor, sendo que a prova ingênua pode ser um nível aceitável, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta. No livro didático analisado, encontramos atividades no primeiro e no último nível de rigor, indo do empirismo ingênuo ao experimento de pensamento formal, e não encontramos exemplos genéricos, argumentos em linguagem natural das propriedades ou experimentação. Classificamos a maioria dos exercícios como explorações empíricas, embora também apresentem provas conceituais, inclusive empregando nas atividades a expressão demonstrações algébricas. Quanto às atividades com justificação, que avaliamos para os níveis de Balacheff, algumas encontram-se no primeiro nível e outras no último nível, mas a maioria dos exercícios não se refere à justificação e sim à aplicação de teoremas.

Observamos também que a diferença entre observação empírica e demonstração não é explicada de maneira clara, e, nos poucos exemplos iniciados pelo autor, encontramos a solicitação para que os alunos passem a descrever algebricamente exercícios que foram apresentados somente de forma experimental.

4.3 Desenvolvimento do Teorema de Pitágoras em sala de aula

A introdução da aula sobre Teorema de Pitágoras deu-se com um pouco da História da Matemática, na qual discorremos sobre os Egípcios e as dificuldades dos lavradores do antigo Egito para cultivar as margens do rio Nilo devido às constantes enchentes, o que os obrigou a criar técnicas de abastecimento, a desenvolver instrumentos para controlar as inundações e a utilizar a geometria para medir a extensão de suas terras.

Para evitar que o agricultor perdesse suas terras, os egípcios mantinham funcionários para medir seus terrenos, e estes utilizavam uma corda de treze nós distribuídos em intervalos iguais. Como os terrenos eram geralmente retangulares, os egípcios precisavam obter um ângulo reto, de 90º, para efetuar as marcações de suas terras.

Iniciamos a partir desta introdução um pouco da história de Pitágoras, por ter sido este o primeiro a provar a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Também comentamos sobre suas viagens estabelecendo-se em Crotona, fundando a escola pitagórica, onde se estudavam Matemática, Música, Astronomia e Filosofia.

Iniciamos o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras em sala de aula por uma atividade experimental. Participaram desta atividade os alunos da 8.ª série A do ensino fundamental do período da manhã, num total de 41 alunos. Para o desenvolvimento do capítulo utilizamos 17 horas-aula.

Para essa atividade os alunos receberam uma folha de sulfite, tesoura e régua. Solicitamos que realizassem uma única dobra na folha, de modo a obter um triângulo retângulo, recortaram esse triângulo e, utilizando a régua, mediram os lados do triângulo. Como os instrumentos de medida foram a régua ou o esquadro, os alunos verificaram, comparando os recortes com os dos colegas, que os lados tinham medidas diferentes, em milímetros. Explicamos que devido ao material de medida utilizado e porque, também, os cortes poderiam ter sido malfeitos, poderíamos encontrar medidas diferentes, mas isso não alteraria a conclusão a que chegariam ao final da atividade.

Em seguida, solicitamos que todos calculassem o quadrado da medida dos lados encontrados e, de posse desses cálculos, localizassem os catetos e a hipotenusa no seu recorte, somassem os quadrados das medidas dos catetos e comparassem com o quadrado da medida da hipotenusa. Com o resultado desse trabalho deveriam, então, observar o que acontecera em seus cálculos e também com os resultados de seus colegas.

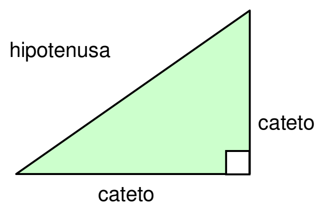
Alguns alunos questionaram a diferença de medidas que foram utilizadas e também perceberam que, depois de efetuados os cálculos, essa diferença ficou em alguns milímetros. Comentamos que, a partir de experiências de recorte, medição e cálculo podemos aceitar essas pequenas diferenças.

Nesse momento questionamos quanto à conclusão a que poderiam chegar, mesmo com essa diferença mínima. Obtivemos como resposta “somando os quadrados dos lados vamos encontrar um valor (quase) igual ao quadrado da hipotenusa”.

A quase totalidade dos alunos chegou a essa conclusão. Alguns trabalharam com calculadora, concluindo a atividade mais rapidamente; outros cometeram alguns erros de multiplicação, atrasando o seu desenvolvimento.

Surgiram questionamentos como: Em qualquer tamanho de triângulo retângulo teremos esta conclusão? A sugestão, então, foi que aproveitassem o restante da folha sulfite, recortassem outro triângulo retângulo e repetissem o procedimento. Esta sugestão foi seguida por alguns alunos e estes chegaram à mesma conclusão.

Utilizando, então, a letra *a* para a hipotenusa, e *b* e *c* para os catetos, completamos essa atividade generalizando o teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$ ou $a^2 = b^2 + c^2$.



Levamos uma corda para a sala de aula e com a ajuda de alguns alunos fizemos os treze nós e a fixamos na mesa para melhor visualização do triângulo retângulo.

Em seguida, solicitamos a construção no caderno de um triângulo retângulo, com lados medindo 3, 4 e 5 cm. Além disso, pedimos que em cada lado do triângulo retângulo construíssem um quadrado, quadriculassem esse quadrado em quadrados menores de 1 cm, achando a área de cada quadrado. Os alunos verificaram a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, já comentada, que foi a seguinte: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Optamos por desenvolver uma atividade diferente da que consta da coleção *Idéias & Relações*, para relembrarmos o que é área de um quadrado e como pode ser calculada, por entendermos que na atividade experimental da coleção, o aluno possa não ter a percepção de área somente preenchendo o quadrado sobre a hipotenusa.

Concluímos que essas duas atividades experimentais fizeram que os alunos se entusiasmassem e foi bastante proveitosa para introduzir o teorema.

Passamos então para o item *Trocando idéias*, que consiste em seis exercícios, alguns de observação sobre as medidas dos lados de um triângulo retângulo e outros envolvendo cálculo dos lados para termos um triângulo retângulo usando o Teorema de Pitágoras.

Nesse item encontramos o questionamento: Podemos afirmar que a hipotenusa é sempre o maior lado do triângulo retângulo?

Como pesquisadora e professora, acho esse questionamento bastante interessante, pois dá margem a várias justificativas, que foram solicitadas. Algumas respostas obtidas para esta pergunta merecem ser mencionadas, tais como: somente sim; ou, terá que ser o maior lado porque somando os quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa; ou ainda, a hipotenusa é oposta ao ângulo reto.

A seguir passamos para as atividades de verificação do item *Atividades Matemáticas.*

Na primeira atividade, temos a informação de que os números 3, 4 e 5, nesta ordem, são chamados ternos pitagóricos, por verificarem o Teorema de Pitágoras e que, também, qualquer trio de números, múltiplos destes, será um terno pitagórico. Com esta explicação, os alunos teriam que descobrir o número que faltava para formar um terno pitagórico utilizando os números citados na atividade. Os alunos responderam a esta questão de duas formas: alguns utilizaram a informação dada descobrindo o número pelos múltiplos do terno dado, outros aplicaram o Teorema de Pitágoras, desenvolveram as operações e também descobriram o número ausente no terno.

Observamos que todas as atividades, tanto as de observação quanto as que envolviam cálculo numérico utilizando o Teorema de Pitágoras, foram de grande interesse e não surgiram questionamentos ou dúvidas que comprovassem falta de entendimento quanto ao seu desenvolvimento.

A seguir, na Atividade 2, encontramos três atividades de demonstração e nas três atividades encontramos as expressões: “demonstre algebricamente” ou “use a linguagem algébrica”. Acreditamos que se espera dos alunos uma demonstração formal utilizando a linguagem apropriada nas demonstrações.

Passamos, então, para a primeira atividade de demonstração *“A mais bela prova”*. Construímos no quadro a Figura 4.3.1 e os alunos foram questionados: Como poderiam a partir dessas figuras chegarem à generalização do Teorema de Pitágoras?

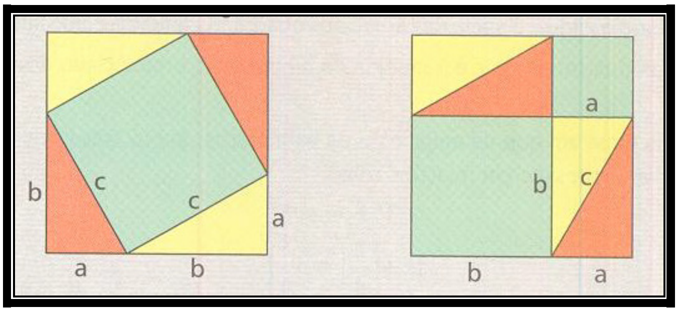


Figura 4.3.1: A mais bela prova, livro da 8.ª série, p. 70.

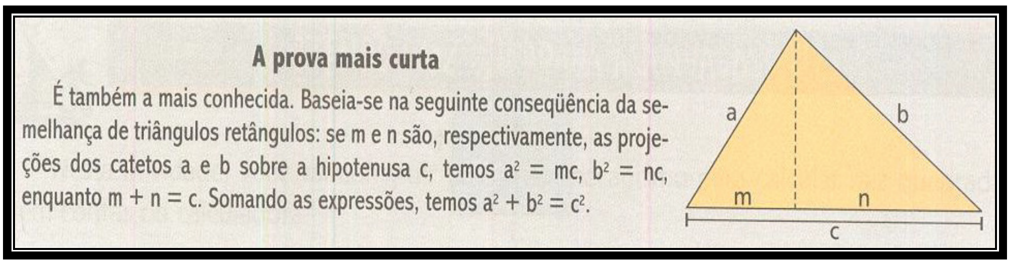
A princípio demonstraram não ter a mínima idéia do que deveriam fazer. Relembramos, então, o conceito de áreas de quadrados, de retângulos e de triângulos, bem como composição e decomposição de figuras. Surgiram questionamentos sobre composição e decomposição de figuras e exemplificamos construindo no quadro um paralelogramo. Traçamos as alturas e recortamos mostrando que outras figuras podem surgir compondo as peças, como um retângulo. Também fizemos a decomposição da Figura 4.3.1 buscando levar os alunos a constatarem que os dois quadrados são iguais, mas foram compostos de maneiras diferentes.

Com essa decomposição pretendíamos que os alunos retirassem os triângulos retângulos dos dois quadrados e percebessem que restaria o Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, onde c está representando a hipotenusa. Em relação à decomposição, verificamos que houve aproveitamento, mas esta não verificou-se para generalizar o Teorema de Pitágoras.

Como a solicitação do livro é para descrever essa demonstração do Teorema de Pitágoras usando a linguagem algébrica, retornamos ao conceito de área das figuras envolvidas na decomposição. Lembramos, ainda, o desenvolvimento dos produtos notáveis realizando no quadro negro alguns exercícios usando a propriedade distributiva. Também procuramos levá-los a somar ou subtrair essas áreas, com a finalidade de chegarmos ao Teorema de Pitágoras, mas mesmo ao final da revisão de alguns tópicos, os alunos ainda não sabiam como deveriam começar essa demonstração.

Percebemos que para produzir um texto de demonstração, e entendemos que o livro referia-se a uma prova formal, se faz necessário organizar as propriedades em seqüências dedutivas, mas as atividades anteriores à demonstração solicitada apareceram em forma de medição e de cálculo do valor desconhecido. Concluímos, então, que estas não deram suporte ao aluno para realizar uma prova formal. Também as observações e questionamentos que foram efetuados pelo professor não desencadearam conjecturas e processos que pudessem levar às justificativas formais.

A segunda atividade de demonstração, chamada "*A prova mais curta*", utiliza a proporção entre os lados dos triângulos semelhantes, conforme a Figura 4.3.2 a seguir.



A prova mais curta

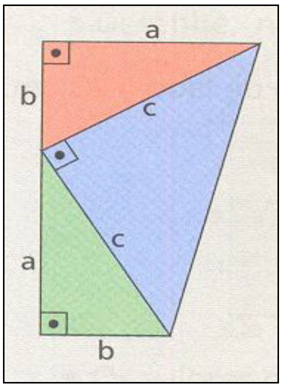
É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte conseqüência da semelhança de triângulos retângulos: se m e n são, respectivamente, as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c, temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m + n = c$. Somando as expressões, temos $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 4.3.2: A prova mais curta, livro da 8.ª série, p. 70.

Também a solicitação encontrada no livro é descrever essa demonstração do Teorema de Pitágoras e mostrar os conhecimentos matemáticos utilizados. Novamente e ainda com as informações que constam na Figura 4.3.2, os alunos não apresentaram um texto de demonstração ou mostraram os conhecimentos matemáticos utilizando as expressões citadas para chegar ao Teorema de Pitágoras.

Como os capítulos anteriores ao Teorema de Pitágoras foram *Semelhança de Triângulos* e *Relações Métricas no Triângulo Retângulo*, procuramos incentivar os alunos a desenharem os três triângulos da figura separadamente, para montarem as proporções entre os lados com mais facilidade e perceberem de onde haviam saído as expressões acima. Em seguida, desenhamos no quadro negro os três triângulos da figura, fazendo sua decomposição, e montamos todas as proporções. Verificamos o acompanhamento com interesse dos alunos nessa atividade. Quando questionados se viam no quadro as igualdades que constam no exercício, a resposta foi afirmativa, mas somente dois alunos perceberam que poderiam chegar ao Teorema, pois já tinham pronto a^2 e b^2, mas não souberam fazer a soma das expressões, ou seja, não expressaram os argumentos em linguagem formal. Terminamos então a atividade, relembrando a fatoração necessária para desenvolver a prova.

Na terceira atividade de demonstração chamada *"A demonstração do presidente"*, Figura 4.3.3, também encontramos a solicitação: Descreva algebricamente essa demonstração do Teorema de Pitágoras e escreva o conhecimento matemático utilizado.



A área do trapézio com bases a, b e altura a + b é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos. Portanto:

$$\frac{a+b}{2} \times (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Figura 4.3.3: A demonstração do presidente, livro da 8.ª série, p. 70.

Nesta atividade, a postura inicial dos alunos foi novamente não saber o que fazer. Nossa intervenção foi feita procurando relembrar a área do trapézio. Observamos maior participação dos alunos, pois já tinham vivenciado duas provas, sendo que estas utilizavam a decomposição de figuras planas e cálculo de área, desenvolvimento de expressões algébricas utilizando a fatoração, mas ainda, no decorrer da aula, outras dúvidas referentes a tópicos anteriores foram surgindo, sendo que procuramos esclarecer as dúvidas pertinentes para o desenvolvimento desta atividade. Acreditamos que todos os conhecimentos proporcionados pelas demonstrações anteriores possibilitaram que onze alunos continuassem a expressão dada (Figura 4.3.3). Estes usaram corretamente a regra do cancelamento e provaram o Teorema de Pitágoras. Além disso, para nossa satisfação, dois alunos, utilizando a linguagem escrita, descreveram corretamente alguns conhecimentos matemáticos que foram utilizados para chegar ao Teorema.

Ainda que a tarefa solicitada aos alunos, ou seja, uma demonstração formal, não tenha se desenvolvido a contento, pois ao final da terceira prova poucos alunos demonstraram, observamos que, no transcorrer do desenvolvimento das atividades, estes conjecturaram e procuraram estratégias para sua realização, o que despertou seu interesse, prova disso é que quando chegamos à terceira demonstração tivemos um número razoável de alunos que apresentaram a atividade desenvolvida.

A Atividade 3 envolve cálculo de medidas desconhecidas em figuras, sendo que esses triângulos, quadrados e losangos usam o Teorema de Pitágoras. Observamos que na atividade não está presente a indicação de os triângulos serem retângulos, como também não encontramos a indicação de ângulo reto nos quadriláteros ou nas diagonais do losango. Vejamos a seguir a Figura 4.3.4 da atividade.

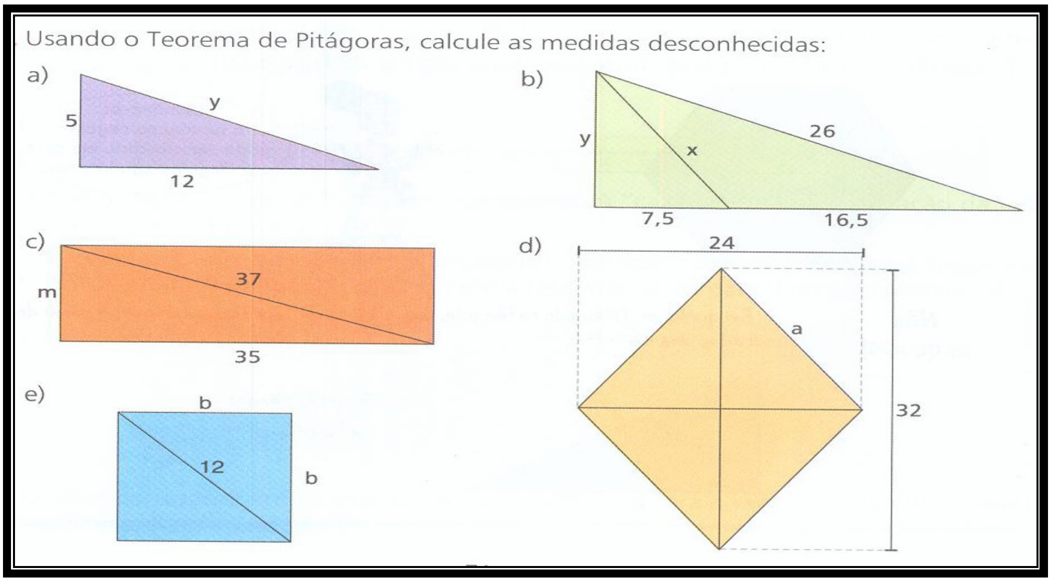
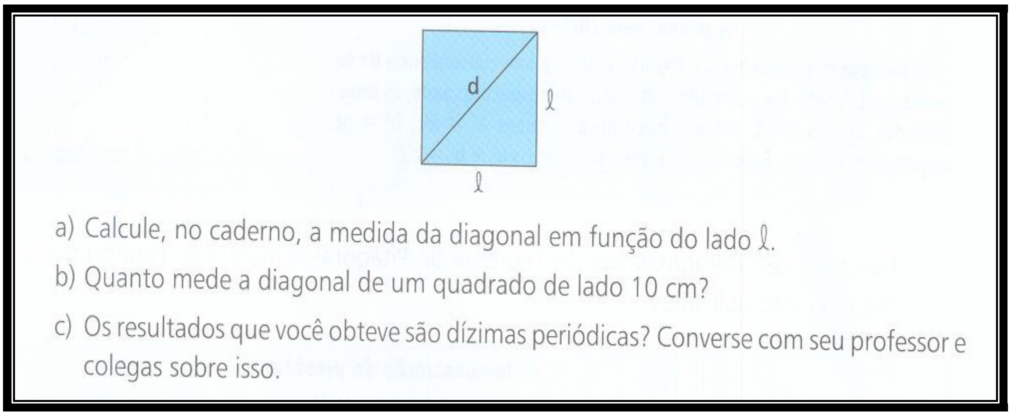


Figura 4.3.4: Cálculo de medidas desconhecidas, p. 70.

Os alunos passaram por estes exercícios sem maiores questionamentos, efetuaram os cálculos utilizando o Teorema de Pitágoras e também utilizaram a decomposição das figuras (b) e (d) para calcular a medida desconhecida.

Analisamos as Atividades 4 e 5 como uma introdução para o próximo capítulo que os alunos irão estudar, ou seja, os *números irracionais.* Na Atividade 4 temos um quadrado de lado *l* e diagonal *d*, e na Atividade 5 o aluno terá que determinar a medida da altura de um triângulo eqüilátero, conforme as Figuras 4.3.5 e 4.3.6 a seguir.



a) Calcule, no caderno, a medida da diagonal em função do lado ℓ.

b) Quanto mede a diagonal de um quadrado de lado 10 cm?

c) Os resultados que você obteve são dízimas periódicas? Converse com seu professor e colegas sobre isso.

Figura 4.3.5: Quadrado de lado *l* e diagonal *d,* p. 71.

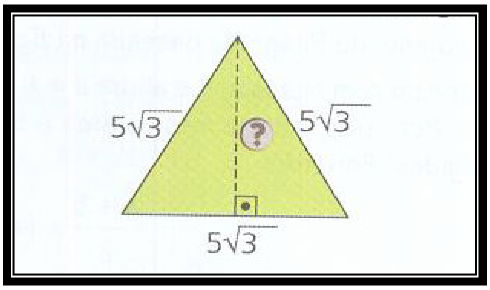


Figura 4.3.6: Calcular a altura do triângulo eqüilátero, p. 71.

Como para estes exercícios utilizamos a calculadora, os alunos verificaram que $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ são números que não possuem um período. Com essa informação, alguns alunos utilizaram a decomposição do quadrado e do triângulo eqüilátero, respondendo as duas atividades com números decimais contendo um ou dois algarismos após a vírgula, e outros responderam utilizando números na forma de radical.

Concluímos não ser importante, nesse momento, a classificação de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ como irracionais, mas introduzir outro tipo de número que não é dízima periódica, ou seja, não tem um período que se repete.

Na Atividade 6, o aluno tinha que determinar a área do triângulo isósceles, conforme a Figura 4.3.7.

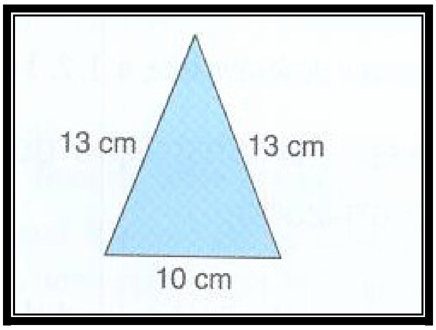


Figura 4.3.7: Calcular a área do triângulo isósceles, p. 71.

Também nesta atividade os alunos, de imediato, aplicaram o Teorema de Pitágoras para determinar a altura do triângulo isósceles e, em seguida, calcular a sua área.

Para finalizar as atividades do capítulo, temos a Atividade 7: calcular a área do hexágono regular de lado 8 cm, conforme a Figura 4.3.8.

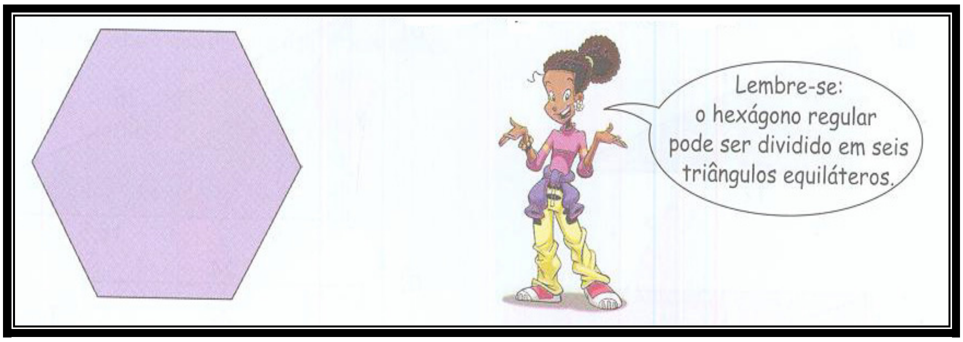


Figura 4.3.8: Calcular a área do hexágono regular, p. 71.

A princípio os alunos questionaram o significado da palavra “regular”. Esclarecemos a dúvida sem dificuldade solicitando que observassem com atenção a informação contida no balão ao lado do hexágono. Após a leitura do balão, pedimos para explicarem com suas palavras o que tinham entendido procurando eliminar todas as dúvidas ou confusões que poderiam surgir. Em seguida, os alunos partiram para a decomposição do hexágono regular em seis triângulos eqüiláteros. Separaram um triângulo eqüilátero, calcularam a altura utilizando o Teorema de Pitágoras, para em seguida calcular sua área. De posse da área de um triângulo eqüilátero, multiplicaram esse valor por seis, achando o valor da área do hexágono regular.

4.3.1 Síntese da aula

Finalizamos este capítulo após 17 horas-aula. Em relação às atividades focadas nesse capítulo, quase todas, com exceção da Atividade 2, são aplicações da propriedade para um exercício de cálculo que os alunos desenvolveram satisfatoriamente. Salientamos que na Atividade 2, na qual os alunos deveriam realizar três diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras usando linguagem algébrica, o resultado não foi satisfatório, pois ao iniciarmos a atividade pouco interesse ficou evidenciado na observação dos alunos; além disso, eles não tinham idéia sobre o que seria necessário fazer. Foram algumas aulas de revisão sobre decomposição e composição de figuras planas, produtos notáveis, operações com expressões algébricas ou fatoração. Somente na última demonstração onze alunos conseguiram provar algebricamente o Teorema de Pitágoras, continuando a expressão iniciada no livro (Figura 4.3.3); também começamos a perceber que houve entendimento, pois participaram das explicações e sugeriram caminhos para a resolução da atividade. Para esta atividade necessitamos de 6 horas-aulas.

Como professora constatei a dificuldade dos alunos em compreender o que era solicitado que desenvolvessem. O Teorema de Pitágoras foi iniciado experimentalmente para em seguida solicitarmos uma demonstração algébrica, esta utilizando conceito de áreas, desenvolvimento de expressões algébricas e semelhança de triângulos, conhecimentos estes que os alunos possuem, mas cuja demonstração parece não ter sentido, pois estão acostumados a aplicar propriedades na resolução de exercícios para achar valores desconhecidos e validar esse valor.

Percebemos que no início das explicações de como faríamos uma prova utilizando conhecimentos anteriores, alguns alunos desinteressaram-se, talvez porque muitos não lembravam o que haviam aprendido sobre área ou fatoração de expressões, e concluímos que seria necessário rever alguns tópicos. Partimos então para a resolução de alguns exercícios em que os alunos teriam que representar por meio de uma expressão algébrica a área de alguns polígonos. Nesses exercícios utilizamos a fatoração e também decomposição das figuras dadas em quadrados, triângulos e retângulos, tendo como finalidade achar a área total das figuras. Nosso objetivo nessa revisão foi proporcionar aos alunos o maior número de informações para, eventualmente, preencher alguma lacuna em seu conhecimento, dando-lhes suporte para realizar as provas do Teorema.

4.4 Análise da resolução das atividades da Seqüência de Atividades 3 (S-AT3)

A terceira sessão foi desenvolvida no dia 5 de julho de 2007. Esta sessão realizou-se na escola estadual em que estudam os alunos envolvidos e local de trabalho da pesquisadora, ocasião em que foram aplicadas as atividades da S-AT3. Esta terceira seqüência é composta por sete atividades que podem ser realizadas utilizando o Teorema de Pitágoras e retiradas de outros capítulos do livro da 8.ª série. Para a realização dessas atividades o aluno poderá utilizar o Teorema de Pitágoras. Inclusive algumas destas vêm com a sugestão de utilização do teorema.

Participaram desta seqüência as mesmas duplas de alunos que desenvolveram as S-AT1 e S-AT2. O encontro para realização das atividades teve a duração de uma hora e cinqüenta minutos. A aplicação desta terceira seqüência desenvolveu-se após a aplicação do capítulo Teorema de Pitágoras em sala de aula, com um total de 17 horas-aula para sua conclusão. O encontro para realização das atividades transcorreu tranqüilamente, as duplas apresentaram poucos questionamentos, e com isso a interferência da pesquisadora somente ocorreu quando solicitada.

Da mesma forma que nas sessões anteriores, após o término da seqüência as duplas foram questionadas quanto às dificuldades encontradas na realização das atividades e trocamos informações sobre as atividades, socializando assim os conhecimentos.

A seguir descrevemos o desenvolvimento da sessão.

A Atividade 1 (Figura 4.4.1) está inserida na introdução do capítulo *Números Irracionais*, sendo que o objetivo está em introduzir os valores decimais infinitos, os quais não formam dízima periódica. Para isso, os alunos utilizaram a calculadora e verificaram que os resultados são números decimais sem nenhuma regularidade nas ordens decimais; concluíram, então, que não podem ser escritos como razão de dois números inteiros e por isso não são racionais. Nesse caso, chamamos a esses números de irracionais.

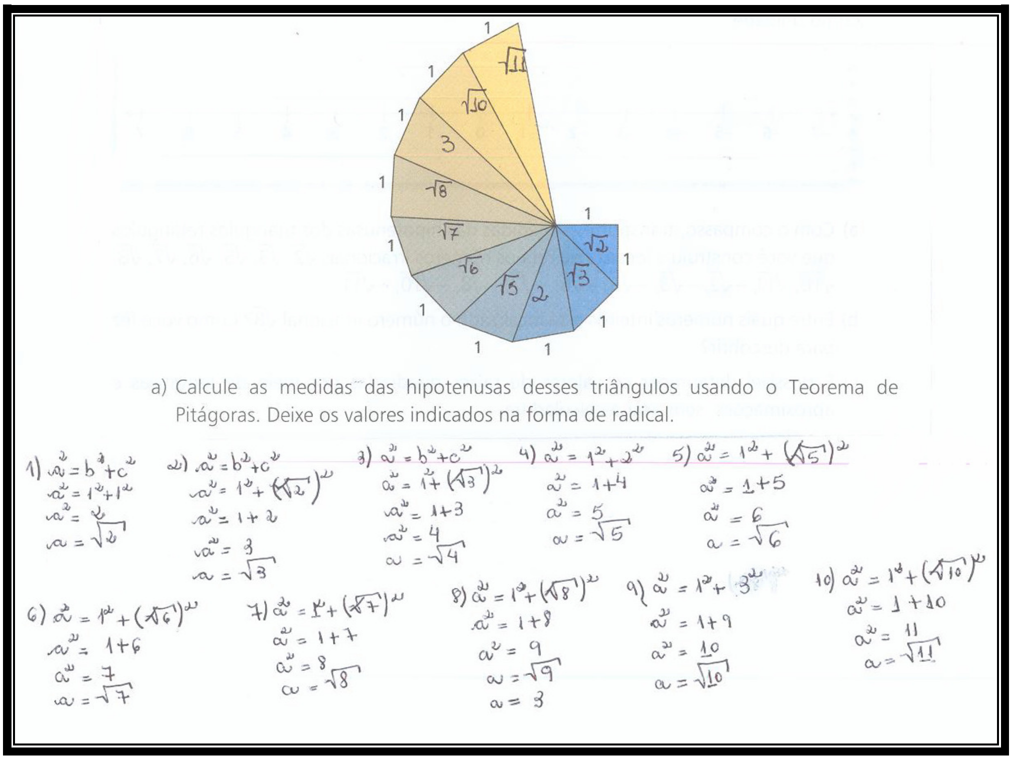
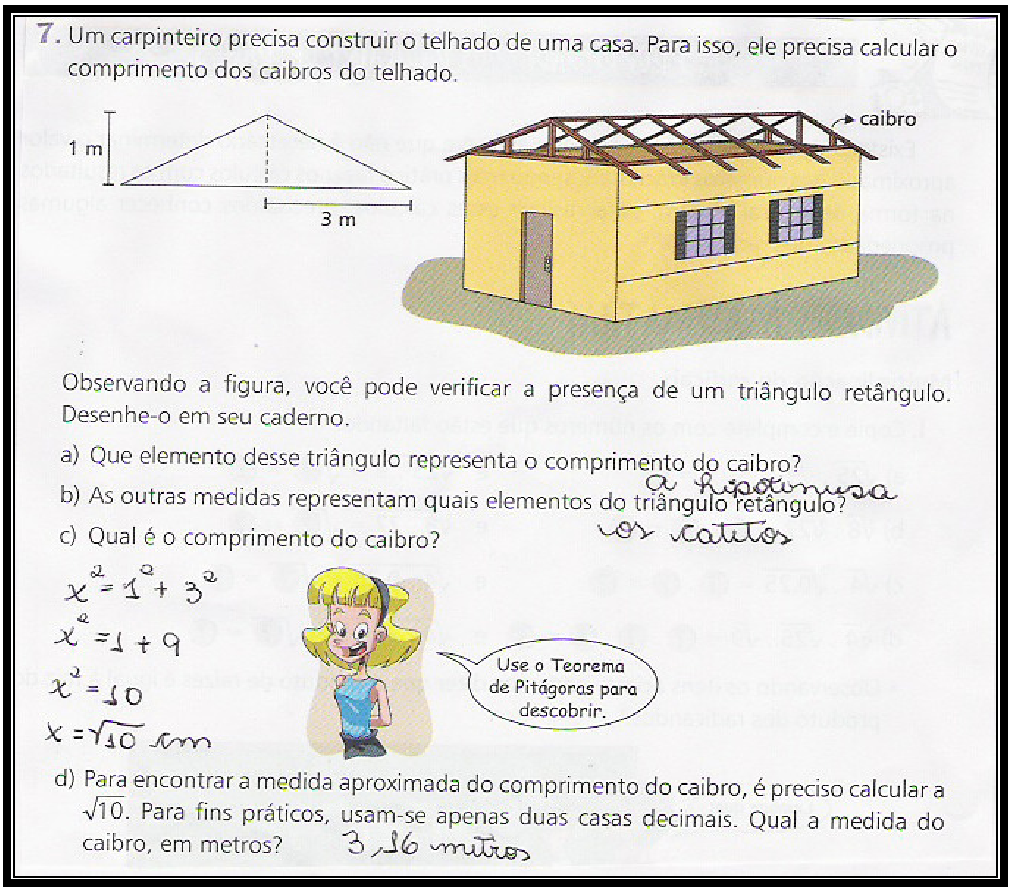


Figura 4.4.1: Resolução da Atividade 1 envolvendo números irracionais.

As duplas utilizaram o Teorema de Pitágoras nos dez triângulos, verificaram que duas das hipotenusas são números racionais. Observaram também que, continuando a construir os triângulos retângulos, teremos um caracol com valores para a hipotenusa aumentando, intercalando com alguns números racionais.

Na próxima atividade (Figura 4.4.2) apresentamos o sétimo problema do mesmo capítulo. Trata-se de um problema enfocando a construção de um telhado e para isso será necessário calcular a medida dos caibros do telhado.



7. Um carpinteiro precisa construir o telhado de uma casa. Para isso, ele precisa calcular o comprimento dos caibros do telhado.

1 m

3 m

caibro

Observando a figura, você pode verificar a presença de um triângulo retângulo. Desenhe-o em seu caderno.

a) Que elemento desse triângulo representa o comprimento do caibro? a hipotenusa

b) As outras medidas representam quais elementos do triângulo retângulo? os catetos

c) Qual é o comprimento do caibro?

$x^2 = 1^2 + 3^2$

$x^2 = 1 + 9$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10}$ m

Use o Teorema de Pitágoras para descobrir.

d) Para encontrar a medida aproximada do comprimento do caibro, é preciso calcular a $\sqrt{10}$. Para fins práticos, usam-se apenas duas casas decimais. Qual a medida do caibro, em metros? 3,16 metros

Figura 4.4.2: Resolução da Atividade 2 – comprimento do caibro do telhado.

Houve o questionamento sobre o que é um caibro. Consultamos, então, o dicionário esclarecendo que é uma peça de madeira retangular usada em armações de telhados, soalhos etc. Em seguida, as duplas verificaram o triângulo retângulo, respondendo aos itens (a), (b), e aplicaram o Teorema de Pitágoras, como sugerido, para resolver o item (c).

No capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações* encontramos atividades retiradas das Olimpíadas de Matemática, e aplicamos as Atividades 8 (Figura 4.4.3) e 9 . As duas atividades oferecem um desafio e, para resolvê-las, as duas duplas necessitaram um tempo maior que as demais, havendo inclusive troca de informações entre elas. A seguir, vejamos a Figura 4.4.3 da Atividade.

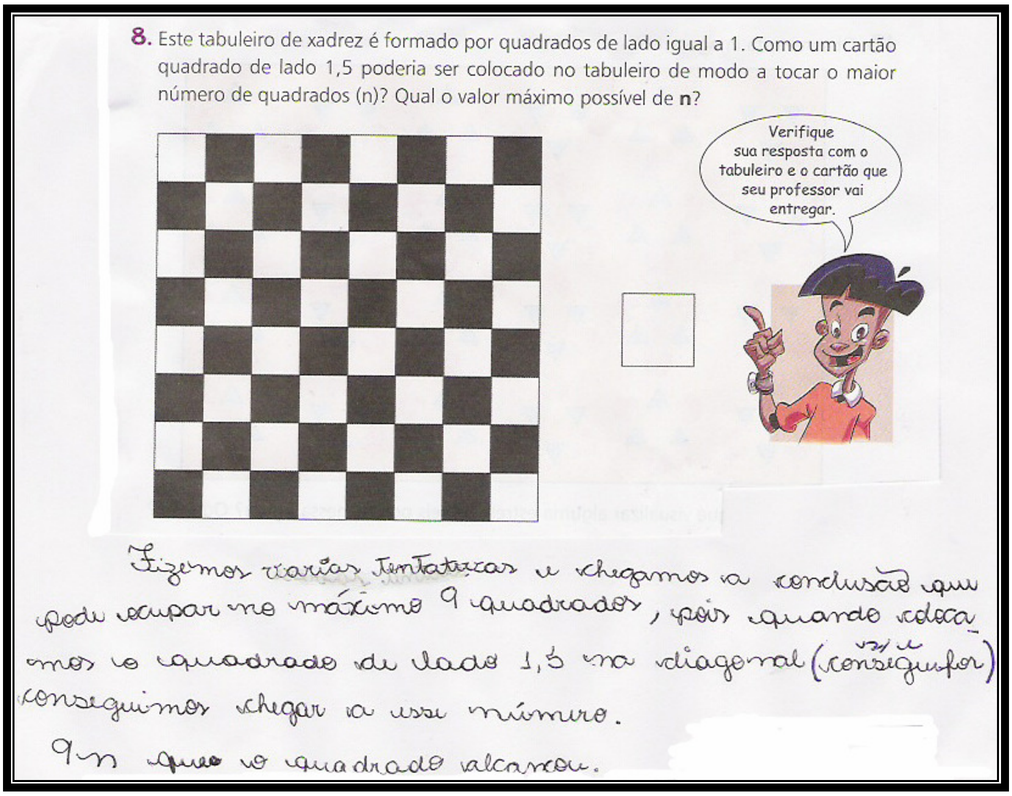


Figura 4.4.3: Resolução da Atividade 8 inserida no capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações.*

Na busca da solução para o tabuleiro de xadrez, as duas duplas utilizaram o quadrado de 1,5 no tabuleiro, fazendo experiências; isso ocorreu em várias tentativas. Nas primeiras experiências, chegaram à conclusão de que tocaria somente 4 quadradinhos. Nesse momento houve a interferência da pesquisadora, relendo o problema e salientando que o quadrado de 1,5 teria que tocar o maior número de quadrados possível. Com isso os alunos passaram a fazer novas experiências manipulando o quadrado no tabuleiro e chegaram a outros valores, como: tocaria em 5 quadrados, 7 quadrados ou 9 quadrados. Novamente interferimos para auxiliar os alunos na elaboração de estratégias de resolução, pois eles perceberam que estavam achando várias soluções, demonstrando insegurança e procurando saber se estavam certos ou o que deveriam fazer para ter certeza do resultado. Para orientar, sugerimos que verificassem as medidas dos quadrados e questionamos se não poderiam aplicar algum cálculo numérico para validar a resposta encontrada.

Orientando dessa forma pretendíamos que as duplas procurassem a medida da diagonal do quadrado maior, encontrando aproximadamente 2,1 para sua diagonal e verificassem que esta medida é maior que a soma de dois lados dos quadrados do tabuleiro. Com essa informação as duplas verificariam, fazendo experiências no tabuleiro, que 12 quadrados poderiam ser tocados.

As duas duplas fizeram experiências e chegaram à conclusão que poderiam ser tocados, no máximo, 9 quadrados do tabuleiro – isto somente por tentativas, portanto esta conclusão está classificada dentro dos níveis de Balacheff como empírica.

Ainda nesse mesmo capítulo, aplicamos a Atividade 9 (Figura 4.4.4), despertando grande interesse das duplas.

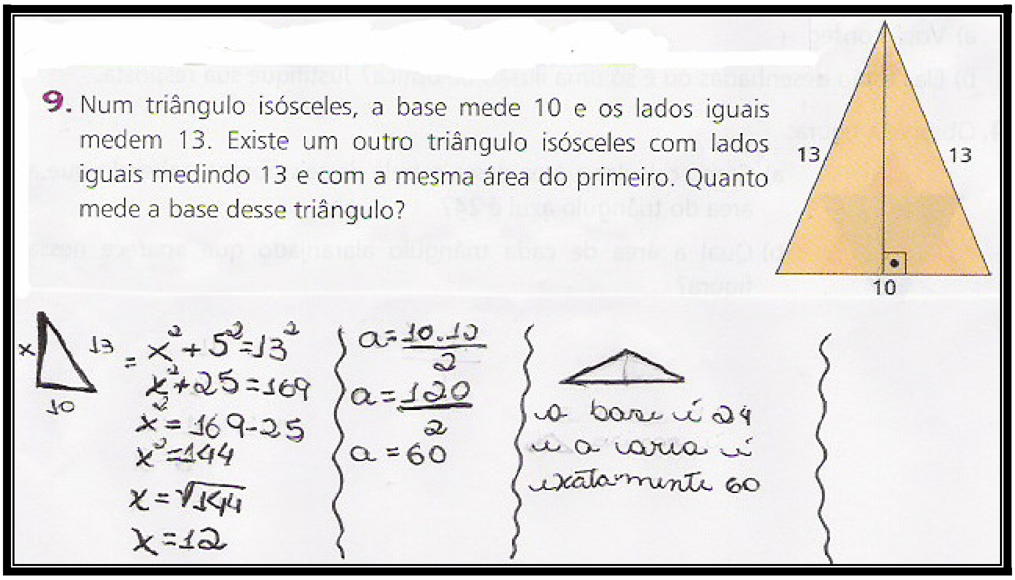


Figura 4.4.4: Resolução da Atividade 9 inserida no capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações.*

Nesta atividade, os alunos recortaram o triângulo isósceles na altura, percebendo imediatamente a existência de dois triângulos retângulos, sendo necessário então calcular a altura dos triângulos retângulos. Aplicaram o Teorema de Pitágoras e, em seguida, fazendo manipulações, localizaram outro triângulo isósceles cuja base era composta pelas duas alturas dos triângulos retângulos que foram recortados a partir do triângulo isósceles. Salientamos inclusive que uma das duplas, após determinar a medida da nova base, provou que as áreas são iguais, determinando a área do primeiro triângulo isósceles e do segundo triângulos isósceles.

Na atividade seguinte, o objetivo é calcular os lados de um triângulo retângulo. Essa atividade aparece no capítulo *Utilizando equações do 2.º grau para resolver problemas*, conforme a Figura 4.4.5 a seguir.

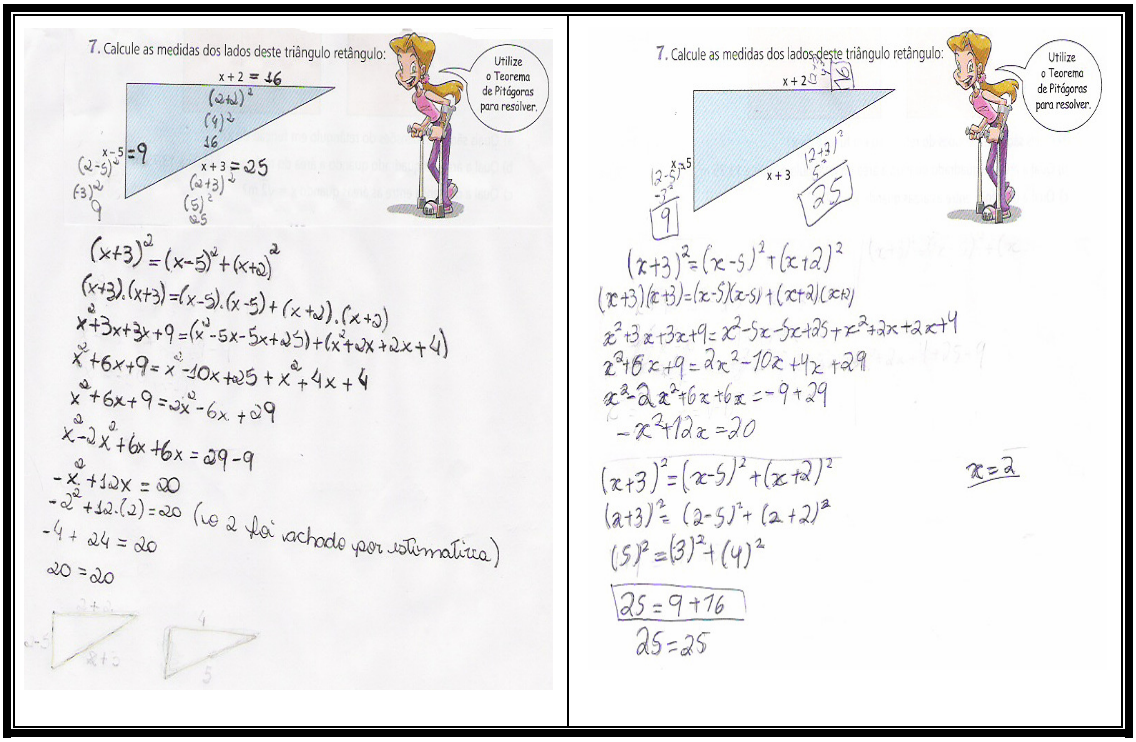


Figura 4.4.5: Resolução da Atividade 7 constante no capítulo *Utilizando equações do 2.º grau para resolver problemas.*

Analisando esta atividade, percebemos que as duplas utilizaram a sugestão indicada na figura ao lado do triângulo retângulo e aplicaram corretamente o Teorema de Pitágoras para calcular o valor da variável. Após terem desenvolvido os binômios, chegaram a uma equação completa do 2.º grau, tópico este que ainda não foi ministrado na sala de aula.

Nesse momento, as duplas solicitaram a ajuda da pesquisadora, questionando como fariam para resolver o exercício. Nossa orientação foi no sentido de fazer os alunos pensarem em alguma estratégia que fosse apropriada para resolver o problema. Procuramos relembrar um pouco das expressões algébricas já vistas, como fatoração de um trinômio quadrado perfeito, mas nesse caso estimulando-os a perceber que teriam que “arrumar” a expressão para chegar a um trinômio quadrado perfeito. Outra orientação sugerida consistia em estimar o valor da incógnita, sendo que, por tentativa, encontrariam o valor dos lados.

Analisando esta atividade percebemos que as duplas resolveram por tentativas, ou seja, atribuíram valores para a incógnita na expressão com a finalidade de chegar a uma igualdade. Nesse caso, as duplas substituíram na expressão o valor 2 para a incógnita e chegaram à igualdade 25 = 25 e 20 = 20. Percebemos também que as duplas substituíram no triângulo retângulo o valor encontrado e com isso acharam um lado negativo, o que não poderia ocorrer, mas não alteraram a resposta.

A próxima atividade refere-se à área de dois triângulos retângulos. Esta Atividade 5 está inserida no capítulo *Calculando áreas*, conforme a Figura 4.4.6.

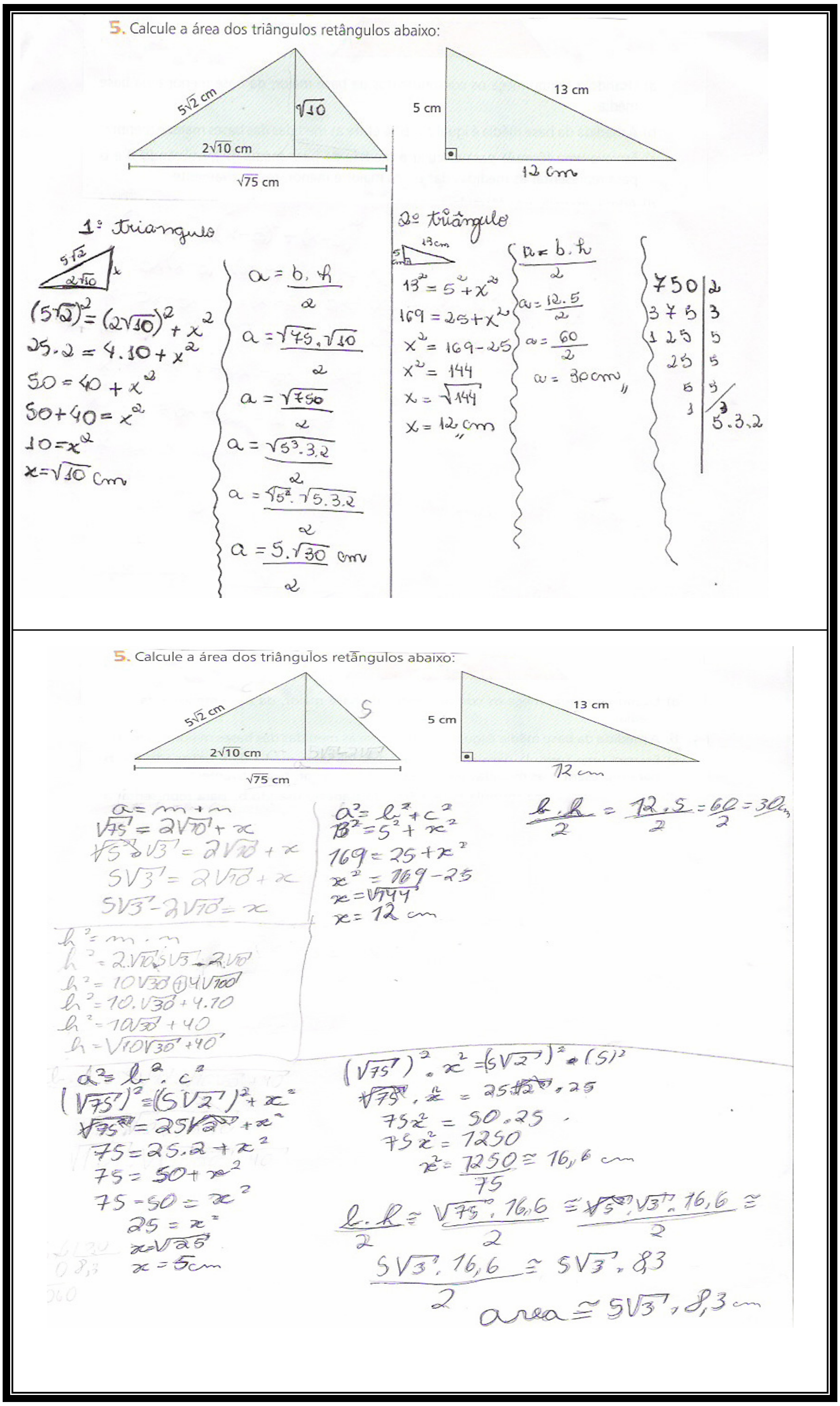


Figura 4.4.6: Resolução da Atividade 5 encontrada no capítulo *Calculando áreas.*

Analisando a atividade verificamos que para calcular a área dos dois triângulos retângulos as duplas não apresentaram dificuldades. Seguiram por caminhos diferentes e desenvolveram muito bem o exercício.

Uma dupla trabalhou com a definição de triângulos semelhantes. Constataram que a altura de um triângulo retângulo em relação à hipotenusa divide-o em outros dois triângulos retângulos semelhantes. Desenvolveram o Teorema de Pitágoras para determinar a altura do triângulo retângulo e em seguida calcularam a área desse triângulo.

Também observamos que a outra dupla fez uso das igualdades, chamadas de relações métricas no triângulo retângulo, tópico este desenvolvido em aulas anteriores ao Teorema de Pitágoras. Ao utilizar as relações, a dupla desenvolveu alguns cálculos bastante trabalhosos, abandonaram esses cálculos e iniciaram outros, ainda utilizando as relações métricas, com desempenho muito bom. Também teriam chegado à área correta do triângulo retângulo, não fosse a distração de esquecer a potência, ocorrida provavelmente pelo fato de terem optado por trabalhar com cálculos envolvendo as relações, que se tornaram longos e cansativos.

Retiramos esta última atividade do capítulo *Trigonometria*. A Atividade 6 (Figura 4.4.7) envolve os conceitos de triângulo eqüilátero e triângulo retângulo.

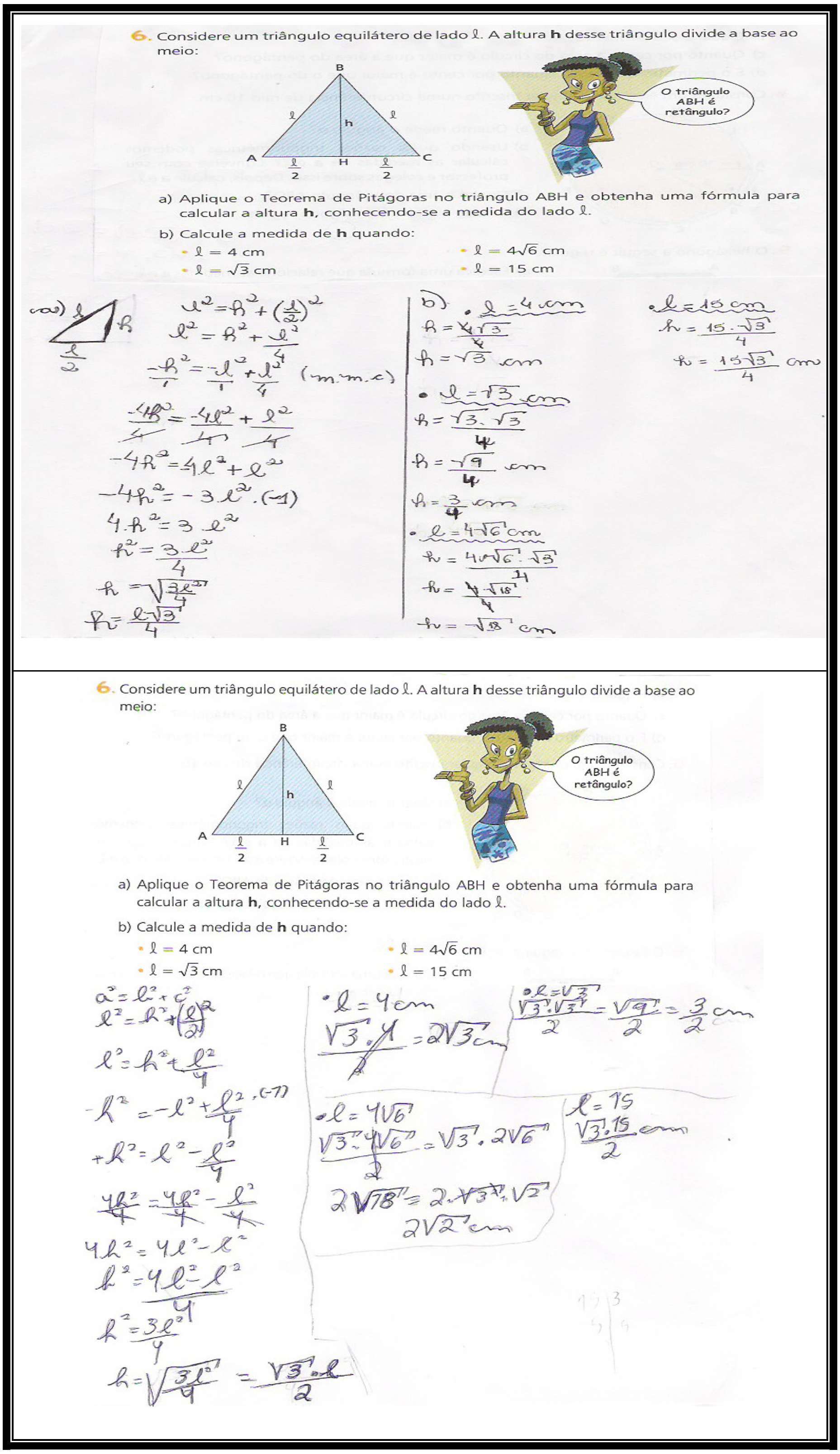


Figura 4.4.7: Resolução da Atividade 6 retirada do capítulo *Trigonometria.*

Seguindo a sugestão constante na atividade, as duplas aplicaram o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, triângulo este que foi obtido a partir da altura do triângulo eqüilátero. Algumas dúvidas surgiram durante o desenvolvimento algébrico, como: se era necessário utilizar mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e o que fazer com a expressão $h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$. Tentamos relembrar os números irracionais e as propriedades da multiplicação e divisão de radicais utilizadas para simplificar expressões. Com isso, os cálculos foram efetuados e as duplas chegaram à fórmula para calcular a altura desse triângulo.

Sem apresentar mais dúvidas, trabalharam com a fórmula e as medidas dos lados, em centímetros dados na atividade, determinando, assim, o valor da altura pedida.

Após o desenvolvimento da S-AT3, procuramos rever todas as atividades desenvolvidas com o objetivo de esclarecer alguns pontos. As duplas foram questionadas quanto às dificuldades encontradas na realização da seqüência, pois resolveram atividades que constam em capítulos ainda não estudados por eles. Também comparamos as atividades, verificamos alguns enganos e procuramos esclarecê-los.

Com relação à Atividade 7 (Figura 4.4.5), que consta no capítulo *Utilizando equações do 2.º grau para resolver problemas,* as duplas localizaram o valor da incógnita, x = 2 por tentativas. Quando substituíram esse valor no triângulo retângulo para calcular as medidas dos lados, acharam um lado com medida negativa. Foram questionados da seguinte forma:

Pesquisadora: Quando vocês substituíram x por 2, acharam um lado com medida $2 - 5 = -3$. Pode existir lado negativo no triângulo retângulo?

Dupla A: Acho que não.

Pesquisadora: Então como vocês explicam o valor -3?

Dupla B: Eu achei estranho dar -3, mas quando substituímos os valores no Teorema de Pitágoras deu resultado $25 = 16 + 9$, que deu certo.

Pesquisadora: Dupla A, por estimativa, vocês verificaram que uma das respostas da equação é 2, mas quando substituíram no triângulo retângulo não acharam estranhas as medidas dos lados?

Dupla A: Na hora não lembrei que valor negativo não podia ser resposta.

Pesquisadora: Nesta equação do 2.º grau temos duas respostas que satisfazem a equação, vocês acharam uma, $x = 2$, mas no nosso problema, precisamos de um valor para x que substituindo no triângulo retângulo teremos lados positivos.

Dupla A: Precisaríamos continuar nas tentativas até achar o número.

Pesquisadora: Se continuassem nas tentativas vocês chegariam ao número 10. Substituindo no triângulo retângulo encontrariam lados com as medidas 5, 12 e 13.

Pesquisadora: E quanto à fatoração da expressão $-x^2 + 12x = 20$?

Dupla A: Quando a senhora comentou, até tentamos, mas não lembramos como faz.

Pesquisadora: Na expressão $-x^2 + 12x = 20$, multiplicamos por -1 e teremos $x^2 - 12x = -20$, somando em ambos os membros os números 36, passam a ter $x^2 - 12x + 36 = -20 + 36$, com isso chegaremos ao trinômio quadrado perfeito $x^2 - 12x + 36 = 16$ que usando a fatoração será igual a $(x - 6)^2 = 16$. Com esta expressão vocês chegariam a $x = 10$.

Dessa forma os alunos verificaram a possibilidade da existência de formas diferenciadas para resolver um problema.

Em relação à Atividade 8 (Figura 4.4.3), temos um problema retirado das Olimpíadas de Matemática, que privilegia a elaboração de estratégias para resolução. As duplas buscaram a solução em conjunto, com destaque para manipulações e conjecturas. Transcrevemos os seguintes comentários:

> Pesquisadora: Na Atividade 8, quais as dificuldades que vocês sentiram? Entenderam a proposta do problema?
>
> Dupla B: No começo nós mudamos várias vezes a posição do quadrado e achamos sempre 4 quadradinhos.
>
> Dupla A: Nós recortamos o quadradinho de 1,5 de lado e colocamos de várias maneiras no tabuleiro.
>
> Pesquisadora: E em quantos quadrados do tabuleiro o quadrado maior tocou?
>
> Duplas A: só 9 quadradinhos.
>
> Dupla B: quando a senhora falou em algum cálculo não entendi.
>
> Pesquisadora: Estava tentando orientar sobre a medida da diagonal do quadrado maior. O exercício pede o valor máximo possível. Aplicando o Teorema de Pitágoras verificamos que o comprimento da diagonal do quadrado de 1,5 de lado é $\sqrt{4,5}$ e usando a calculadora vocês achariam aproximadamente 2,1. Como cada quadrado do tabuleiro tem 1 de lado e 2,1 é maior que o comprimento de dois quadrados, acertando a diagonal do quadrado no tabuleiro, ela ultrapassaria um pouquinho dois quadrados (1 mm), com isso, contando os quadradinhos do tabuleiro, teríamos 12 quadrados tocados.

Concluímos, analisando a seqüência, o bom aproveitamento das duplas no tópico Teorema de Pitágoras desenvolvido em sala de aula. Minha satisfação se fez sentir, pois as duplas gostaram dos exercícios, em especial do retirado das Olimpíadas de Matemática. As dificuldades demonstradas referem-se a tópicos vistos em aulas ou anos anteriores, o que justifica a dificuldade de desenvolver algumas expressões ou os erros verificados nos exercícios. Também verificamos que as funções de validação e explicação citadas por De Villiers (2001) estiveram presentes nas atividades.

4.5 Síntese

Neste capítulo focamos o capítulo Teorema de Pitágoras na coleção didática, analisamos suas atividades e as atividades que aparecem em outros capítulos utilizando o teorema para sua resolução.

Também descrevemos o desenvolvimento do capítulo em sala de aula e aplicamos a Seqüência de Atividades 3 contendo exercícios encontrados em outros capítulos do livro da 8.ª série, para cuja resolução pode ser utilizado o Teorema de Pitágoras.

A seguir faremos a conclusão de nossa pesquisa e sugerimos uma atividade de construção dirigida sobre ângulos do triângulo, para ser desenvolvida em ambiente computacional.

CONCLUSÃO

1. Introdução

O objetivo deste trabalho foi analisar uma coleção de livros didáticos indicada no Programa Nacional de Livros Didáticos no ano de 2005.

Na análise da coleção procuramos verificar a aplicação de atividades em sala de aula, e trabalhamos com duplas de alunos de maneira como o livro propõe com o objetivo de examinar se os conteúdos abordados no livro didático, sua metodologia e seus exercícios dariam a oportunidade ao professor de fazer um trabalho junto a seus alunos com vistas ao desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova matemática.

Verificamos a passagem do empirismo para o conceitual nas atividades que são apresentadas no livro didático e, como professora, quais as intervenções e estratégias necessárias para gerenciar uma situação em sala de aula, com a finalidade de conduzir e desenvolver de maneira satisfatória uma atividade.

Para nossa pesquisa foram fundamentais as leituras efetuadas com vistas a analisar uma coleção didática. Pudemos verificar que para De Villiers (2001) a prova possui várias funções na Matemática, como: verificação, explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual; e faz sentido iniciar os alunos nas várias funções, numa espécie de espiral em que as funções são retomadas e ampliadas.

Também vimos que para Balacheff (1988) existem duas categorias de provas produzidas por alunos: provas pragmáticas e provas intelectuais. O autor distingue ainda quatro tipos de provas conceituais e pragmáticas: *empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico* e *experiência mental.*

As provas pragmáticas são explicações que ocorrem de ações diretas sobre certas representações de objetos matemáticos, ou seja, caracterizam-se por seu caráter indutivo, enquanto as provas intelectuais não dependem apenas da ação efetiva sobre a representação, mas baseiam-se nas ações interiorizadas e no discurso lógico-dedutivo, e caracterizam-se por seu caráter dedutivo.

A metodologia para este trabalho foi composta de duas partes. A primeira envolveu um levantamento de atividades da coleção relacionadas à *prova*, em dois tópicos principais: “Paralelas e Propriedades dos Triângulos” e o “Teorema de Pitágoras”. A segunda parte envolveu a aplicação de três seqüências de atividades, que chamaremos de S-AT1, S-AT2 e S-AT3, bem como o desenvolvimento do capítulo “Teorema de Pitágoras” em sala de aula.

Nesta segunda fase, as seqüências de atividades foram aplicadas em duas duplas de alunos da 8.ª série do ensino fundamental.

Procuramos investigar como os alunos interagem com essas atividades, anotando seus sucessos e as principais dificuldades. Também verificamos as dificuldades apresentadas pelo professor e as intervenções que se fizeram necessárias para o desenvolvimento dos referidos conteúdos.

2. Principais resultados

Foram aplicadas três seqüências de atividades, tais como aparecem no livro didático. A primeira e segunda seqüências são capítulos inteiros retirados do livro da 6.ª e 7.ª série, respectivamente.

Na primeira seqüência aplicada (S-AT1), enfocando *Ângulos e Triângulos*, os exercícios foram classificados como empíricos, pois todos utilizam medição e recortes. Também verificamos que as duas duplas apresentaram as mesmas dificuldades, sendo estas na leitura e construção de ângulos e, principalmente, em trabalhar com os instrumentos de medida. Essas dificuldades não se relacionam a aspectos do processo de prova. Nossa intervenção foi mínima, esclarecendo a leitura de ângulos e como medir ângulos utilizando o transferidor; definindo bissetriz e, como complemento, encontrar a bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso, ou seja, a intervenção ocorreu principalmente no sentido de ajudá-los com os instrumentos de medida.

Na segunda seqüência de atividades (S-AT2) sobre *Retas Paralelas,* as duplas agiram de forma totalmente diferente. Em todos os exercícios surgiram dúvidas e foi necessária nossa intervenção. Nesta seqüência, localizamos atividades associadas tanto a provas pragmáticas como também a provas conceituais, mas não encontramos atividades que possam contemplar a passagem do empírico para o conceitual.

Verificamos o cuidado da autora com essas atividades, geralmente introduzindo em forma de estudo dirigido novos conceitos, mas em nossa análise a maioria das propriedades foi estudada empiricamente, e os encaminhamentos das atividades deram ênfase ao cálculo algébrico e não ao geométrico, pois em muitos exercícios a atenção deixou de ser nas propriedades geométricas, e com isso os alunos foram levados a relembrar outras atividades para concluir uma resolução.

Acreditamos que poderiam ter sido utilizadas expressões mais simples, para que o enfoque geométrico permanecesse em primeiro plano. Além disso, entendemos que a passagem dos argumentos empíricos, com exercícios de validação, de verificação experimental para uma demonstração formal é efetuada repentinamente, não envolvendo o aluno no processo de construção gradual do conceito da prova.

Em relação à seqüência das atividades realizadas com os alunos, os resultados indicaram que, mesmo depois de concluir as atividades propostas, a principal estratégia utilizada pelos alunos continuou sendo o empirismo, ou seja, o pouco contato com provas conceituais não resultou na sua apropriação.

Também devemos ressaltar que foram feitas várias intervenções nesta seqüência, com explicações sobre a atividade ou revisões sobre os tópicos necessários para sua resolução. Como professora, fazer este trabalho de mediação é extremamente difícil, pois não existe um limite estabelecido para perceber até que ponto poderia responder aos questionamentos sem comprometer a aprendizagem dos alunos, ou seja, houve momentos em que a responsabilidade pela resolução das atividades ficou com a professora e não com os alunos.

Em sala de aula, com um total de 41 alunos da 8.ª série, desenvolvemos o capítulo Teorema de Pitágoras. Temos neste capítulo várias atividades pragmáticas e três demonstrações formais, mas, novamente, não encontramos atividades que possam contemplar a passagem do empírico para o conceitual.

Talvez esse tenha sido um fator que contribuiu para o resultado não tão satisfatório na atividade em que os alunos deveriam realizar três diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras usando linguagem algébrica, pois ao iniciarmos essa atividade observamos pouco empenho dos alunos, como também que eles não tinham idéia sobre o que seria necessário fazer. Para isso, foram necessárias algumas aulas de revisão sobre decomposição e composição de figuras planas, produtos notáveis, operações com expressões algébricas ou fatoração – desviando a atenção mais uma vez do tema prova.

Na última dessas três demonstrações, entretanto, 11 alunos conseguiram provar algebricamente o Teorema de Pitágoras, continuando a expressão iniciada no livro, participando das explicações e sugerindo caminhos para a resolução da atividade. A conclusão à qual chegamos é que depois da intensa intervenção de nossa parte, alguns alunos começaram a entender o que era esperado para uma prova formal, mas, infelizmente, essa foi a última atividade dessa natureza no capítulo.

Consideramos também que no capítulo encontramos muitos exercícios para aplicar a propriedade e determinar o valor desconhecido, e somente três atividades de demonstração. Julgamos ser conveniente haver mais atividades deste tipo e reduzir as atividades de aplicação da propriedade.

Também observamos que no livro da 7.ª e da 8.ª séries a autora utiliza a mesma linguagem, referindo-se a uma “demonstração algébrica” no domínio geométrico. Concluímos então que os alunos devam chegar a uma prova formal do teorema. Neste ponto identificamos a mudança súbita de nível e a provável ruptura, pois as atividades são apresentadas de forma empírica, privilegiando a validação, a verificação experimental, para em seguida propor atividades de demonstração algébrica.

A falta de familiaridade dos alunos com provas, tendo em vista as poucas atividades sugeridas, é outro aspecto que devemos ressaltar. Tentamos contornar essa dificuldade por meio de intervenções com revisões de outros tópicos, mas acabamos resolvendo junto com os alunos as provas e poucos se apropriaram dos conhecimentos utilizados.

A terceira seqüência, denominada S-AT3, foi retirada de alguns capítulos que aparecem após o capítulo Teorema de Pitágoras. Essas atividades envolvem conhecimento geométrico e também algébrico, mas resumem-se na aplicação do teorema para determinar um valor desconhecido.

Os resultados verificados nesta seqüência são bons. Fizeram-se necessárias poucas intervenções e estas apenas no sentido de rever tópicos vistos anteriormente. Estiveram presentes nessas atividades as funções de validação, comunicação e explicação citadas por De Villiers (2001), e verificamos fazer sentido iniciar os alunos nas várias funções, numa espécie de espiral em que as funções são retomadas e ampliadas.

3. As questões de pesquisa

As questões de pesquisa, elaboradas com o intuito de analisar uma coleção de livros didáticos, serão respondidas de acordo com essa análise, verificando não só o desenvolvimento das seqüências de atividades aplicadas em duplas de alunos, quanto a discussão da aplicação de atividades em sala de aula.

1.ª) *Os conteúdos abordados no livro didático, sua metodologia e seus exercícios dariam a oportunidade ao professor de fazer um trabalho, junto a seus alunos, com vistas ao desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova matemática?*

No livro didático encontramos atividades de apropriação, atividades para resolução de problemas e também atividades de demonstração algébrica. Considerando a linguagem utilizada na apresentação dessa atividade, julgamos que a autora usa os termos "prova" e "demonstração" como sinônimos. Acreditamos também ser uma tendência da autora querer uma prova expressa em linguagem algébrica. A nosso ver, estão em geral faltando na coleção exercícios exigindo provas baseadas em propriedades geométricas (provas conceituais), e não necessariamente demonstrações algébricas.

As atividades apresentadas nos livros didáticos dão oportunidade para o professor realizar um trabalho junto a seus alunos, uma vez que localizamos vários exercícios de validação e de verificação experimental, chamando a atenção para a importância de provar. Verificamos que o problema está na passagem brusca de exercícios empíricos em diversos níveis de verificação para as demonstrações formais, referindo-se às provas algébricas, sendo esta a grande lacuna que encontramos, pois as atividades aparecem de forma empírica para em seguida ser solicitada uma demonstração algébrica.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais indicações de que para o 3.º ciclo do Ensino Fundamental (5.ª e 6.ª séries) a argumentação deve estar ligada à capacidade de justificar uma afirmação, sendo que o argumento será aceito se estiver sustentado por conteúdos matemáticos. Assim, a argumentação está mais próxima dos discursos espontâneos regidos mais pelas leis da coerência da língua materna do que pela lógica formal que sustenta a demonstração (BRASIL 1998, p. 70).

Portanto, no "teorema da soma das medidas de ângulos internos de um triângulo", apresentado na coleção, verificamos a experimentação por meio de dobraduras e recortes dos ângulos do triângulo considerado, evitando, assim, excessos de simbologia.

Quanto ao 4.º ciclo (7.ª e 8.ª séries), observamos como sugestão dos PCN, que o estudo deve ter como ponto de partida a análise das figuras por observação, manuseio e construção, que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. Nesse ciclo os problemas de Geometria farão que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo (BRASIL 1998, p. 86).

Concluímos que a coleção corresponde à sugestão dada nos Parâmetros Curriculares, mas salientamos novamente que não encontramos atividades que fazem a ligação entre provas empíricas e provas conceituais, ou seja, esta passagem não está destacada suficientemente, ao nosso ver, nos PCN.

2.ª) *Como a passagem do empirismo para o conceitual é contemplada nas atividades apresentadas nos livros da coleção?*

Entendemos que as atividades apresentadas no livro didático não privilegiam a passagem do empirismo para o conceitual. O professor terá que atuar na lacuna verificada entre uma atividade empírica para em seguida partir para uma prova formal.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos é como proceder para a resolução: Quais conhecimentos serão utilizados? O aluno tem dificuldade em descobrir no enunciado os pontos que levam ao uso de determinada propriedade e a partir de certos dados mobilizarem os conhecimentos adequados.

Nesse contexto, o professor terá que trabalhar nesta lacuna. O aluno será induzido a perceber que, na prova, devemos observar a necessidade de que cada afirmação realizada precisa de uma justificativa e, além disso, deve derivar da anterior, para que a prova tenha organização lógica em suas afirmações.

3.ª) *Quais intervenções por parte do professor são necessárias para ajudar seus alunos a negociar essa passagem?*

Como professora e pesquisadora, constatamos várias vezes a dificuldade dos alunos em compreender a atividade. Verificamos que os tópicos estudados foram introduzidos experimentalmente, por meio de recortes ou de medições, para em seguida termos como solicitação uma demonstração algébrica.

Também verificamos que nas atividades de prova, quando iniciamos as explicações de como faríamos uma prova utilizando conhecimentos anteriores, alguns alunos desinteressaram-se, talvez porque não tenham lembranças sobre o tópico enfocado no momento. Verificamos, ainda, que o aluno tem a tendência de utilizar as propriedades estudadas recentemente, mas tem dificuldade de utilizar conhecimentos anteriores.

Nesse momento o professor deve intervir proporcionando ao aluno conhecimentos para desenvolver uma atividade. Essa intervenção se dá por meio de revisões de assuntos pertinentes, revendo propriedades e resolvendo exercícios. Nosso objetivo nessa revisão é proporcionar o maior número de informações para, eventualmente, preencher alguma lacuna em seu conhecimento, com isso lhe dando suporte para realizar as provas exigidas.

4. Sugestão de atividade utilizando ambiente dinâmico

Na coleção didática analisada não encontramos referências ao uso do computador. Assim, tomamos a liberdade de sugerir uma atividade para ser desenvolvida com os alunos em ambiente informatizado, recurso este que poderá ajudá-los na superação de obstáculos próprios ao processo de aprendizagem da Matemática (Gravina, 1998).

O ambiente dinâmico apresenta como vantagem a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, favorecendo assim o processo de investigação e argumentação. A pretensão é que o aluno, nesse processo de manipulação e exploração de figuras, descubra a possibilidade da construção de conceitos.

Para essa atividade será utilizado o *software Cabri-Géomètre II*,[6] um *software* de Geometria Dinâmica (DGS) que apresenta recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas feitas usualmente com régua e compasso.

[6] O *Cabri-Géomètre II* é um programa computacional educativo desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG), da Université Joseph Fourier em Grenoble, França.

Na figura abaixo, observamos que a tela do *Cabri*[7] funciona como uma folha de caderno de desenho, na qual podemos desenhar os objetos geométricos em estudo e interagir com as figuras.

A barra de ferramentas do *Cabri* é composta por 11 itens. A flecha do primeiro item chama-se *ponteiro* e é utilizada para escolher e manipular os objetos já construídos.

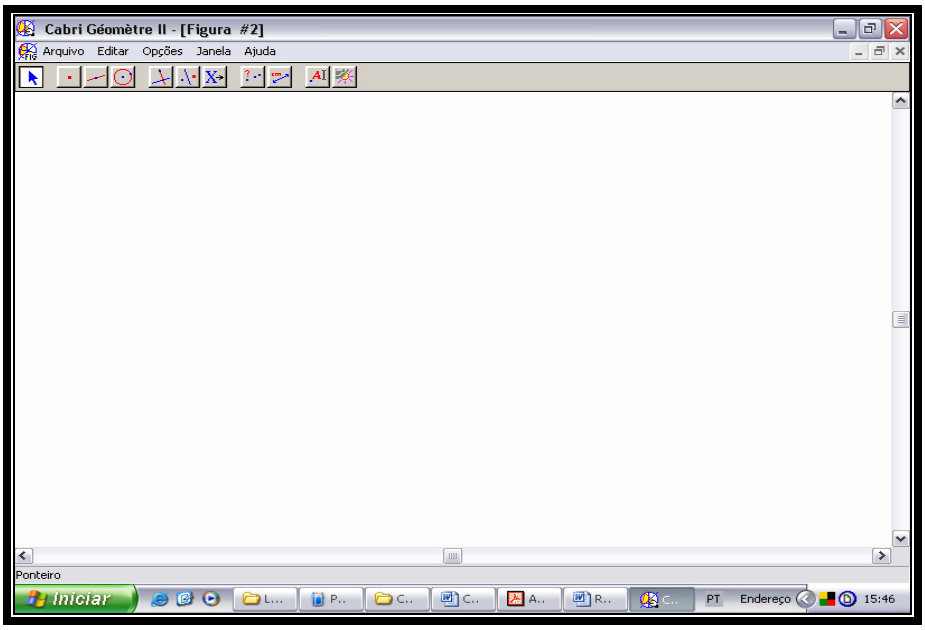


Figura 4.1: Tela principal do *software Cabri-Géomètre II.*

O *software Cabri* permite a realização de construções geométricas, uma capacidade que talvez possa contribuir para a construção de argumentos baseados em propriedades. A configuração de uma figura construída dessa forma poderia ser alterada, mas as propriedades matemáticas da figura serão sempre conservadas.

[7] Usarei *Cabri* para me referir ao *Cabri-Géomètre II.*

Durante a segunda fase da minha participação no projeto AProvaME, o grupo do qual fazia parte trabalhou na elaboração de uma atividade que tinha como objetivo envolver alunos na exploração da soma dos ângulos internos de um triângulo, chegando eventualmente a uma prova.

A princípio, elaboramos uma atividade que partia da premissa da criação de um triângulo qualquer ABC, e em seguir traçar uma reta paralela ao lado BC. Revendo a atividade do projeto em referência, verificamos que com a informação da reta paralela dada os alunos perderiam a chance de conjecturar, pois estamos dando a informação principal para o desenvolvimento de nossa atividade. Optamos então por modificar a atividade, acreditando que dessa forma o aluno, no seu processo de investigação, terá a oportunidade de levantar suas próprias conjecturas, procurando justificar por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Ou seja, terá a chance de perceber visualmente a propriedade do paralelismo, na qual a prova da soma dos seus ângulos depende.

Na Figura 4.2: Apresentamos a atividade “Soma dos ângulos internos do triângulo”. Nessa atividade o aluno encontrará a figura pronta construída, de tal forma que, manipulando os pontos D ou E para a direita ou para a esquerda, respectivamente, este não ultrapasse o vértice C.

Para iniciar as explorações dessa figura é sugerida a adição de algumas medidas antes que seus elementos sejam manipulados, explorados e analisados.

Construção:

Abrir Figura 4.2: Atividade de prova em ambiente informatizado.

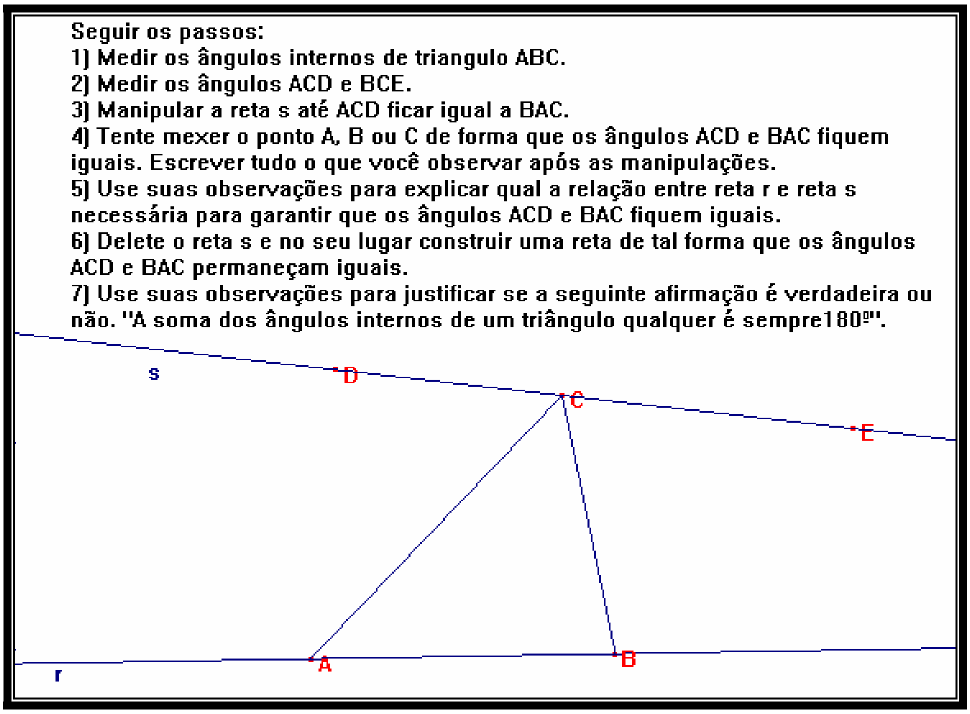


Figura 4.2: Atividade de prova em ambiente informatizado.

Quando o aluno manipular a reta *s* conseguindo igualar os ângulos ACD e BAC, almejamos que perceba que as retas *r* e *s* se tornam paralelas. Também igualando os ângulos ACD e BAC e manipulando o vértice A ou o vértice B, o aluno perceberá que os ângulos simultaneamente mudam de valor, mas sempre permanecendo com a mesma medida, sendo que as retas *r* e *s* continuam paralelas. Com estas observações pretendemos que os alunos possam concluir que a condição necessária entre reta *r* e reta *s* para garantir que os ângulos ACD e BAC permaneçam iguais seja o paralelismo.

Segundo Balacheff (1988), esta conclusão ainda tem caráter de prova pragmática, já que é o resultado de um trabalho empírico. Esperamos que a prova do teorema passe a ter um caráter mais conceitual quando o aluno apagar a reta *s* e no seu lugar construir uma reta, de tal forma que os ângulos ACD e BAC permaneçam iguais. Para a construção dessa reta, será necessário utilizar a propriedade do paralelismo, e a partir do formalismo (com ferramenta do menu), almejamos que os alunos fiquem mais motivados para falar sobre as propriedades gerais associadas ao paralelismo e à congruência de ângulos alternos.

5. Uma palavra final

Entendemos que o livro didático adotado pela escola para determinada série serve como referência ao professor para o planejamento de suas aulas. Contudo, não deve ser a única fonte de pesquisa para o docente, sendo necessário utilizar outros recursos para enriquecimento do conteúdo.

Percebemos tal necessidade ao final da análise da coleção foco de nosso trabalho, a qual enfatiza os exercícios algébricos, mas apresenta poucos exercícios de argumentação e prova. Algumas atividades sobre argumentação e prova, constantes nesta coleção, referem-se ao Teorema de Pitágoras. A realização dessas atividades com os alunos em sala de aula mostrou uma certa complexidade de aplicação, pois em diversos momentos houve a necessidade de revermos outros conteúdos necessários para realização da prova. Porém, percebemos, com satisfação, que alguns alunos conseguiram produzir provas conceituais.

Como resultado desta pesquisa, apontamos a importância de solicitarmos aos alunos a produção de textos matemáticos que justifiquem seus procedimentos, como também relatos que descrevam seus conhecimentos.

Como sugestão para futuras pesquisas, levantamos a hipótese de que outros recursos, como *softwares* ou material concreto, associados ao uso do livro didático, facilitem a aprendizagem de argumentação e prova em Matemática.

Com relação à nossa atuação como professora, este trabalho permitiu-nos refletir sobre algumas estratégias de ação em sala de aula para, então, repensá-las. Ressaltamos a necessidade de dar mais atenção às atividades de argumentação e até mesmo de explorar textos com escrita matemática. Esperamos que esta pesquisa possa contribuir para um melhor desenvolvimento da aprendizagem matemática, assim como muito acrescentou à nossa formação pessoal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Júlio César Porfírio de. *Argumentação e prova na matemática do ensino médio: a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

BALACHEFF, Nicolas. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.) *Mathematics teachers and children*. London: Hodder and Stoughton 1988. p. 216-235.

_____________. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, n. 2, 1987. p. 147-176.

BASTOS, Rita. LOUREIRO, Cristina; *Demonstração – uma questão polêmica.* E. S. E. Lisboa. Disponível em: (http://www.spce.org.pt/sem/encontros/encontro2000.htm). Acesso em: 28 jan. 2007 às 21h22.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática* (5.ª a 8.ª séries). Brasília: MEC, 1998.

_____________. Ministério da Educação/Plano Nacional do Livro Didático. *Guia do Plano Nacional do Livro Didático*. Brasília: MEC/PNLD, 2005. Disponível em: (http://www.fnde.gov.br/home/index.jsp?arquivo=/livro_didatico/livro_didatico.htm). Acesso em: 22 dez. 2006.

CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci. *A extimidade da demonstração.* Tese de doutorado em Educação Matemática. Rio Claro/São Paulo: UNESP, 2004.

CARVALHO, Moacir Benvindo de. *Concepções de alunos sobre provas e argumentos matemáticos: análise de questionário no contexto do Projeto AProvaME.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de matemática.* São Paulo: Ática, 2003.

DE VILLIERS, Michael. *Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad*. 2001. Disponível em: (http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofc.pdf). Acesso em: 23 jul. 2006 às 22h47.

_____________. *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica.* Tradução Rita Bastos, 2002. Disponível em: (http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html). Acesso em: 13 mar. 2006 às 23h52.

DORO, Amadeu Tunini. *Argumentação e Prova: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectual*s. Berna: Peter Lang, 1995.

ENCICLOPÉDIA BARSA. Elaborada com a assistência editorial da Encyclopaedia Britannica. São Paulo, v. 14, 1981.

FONSECA, Lina. *A demonstração e os futuros professores de matemática da Educação Básica.* Universidade de Aveiro, 2003. Disponível em: (http://www.mytwt.net/cibem5/MyFiles/outros/Lina_Fonseca.pdf). Acesso em: 22 out. 2006 às 19h20.

____________. *Formação inicial de professores de matemática: A demonstração em geometria.* Tese de doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2004.

GOUVÊA, Filomena Aparecida Teixeira. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 1998.

GRAVINA, Maria Alice. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.* Tese de doutorado PGIE. Porto Alegre: Universidade do Rio Grande do Sul, 2001.

____________. Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria*. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Belo Horizonte, 1996. p 1-13.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. *A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

HEALY, Lulu (Coord.). *Argumentação e prova na matematica escolar (AProvaME)*. São Paulo: PUC, 2004. Disponível em: (http://www.teleduc.pucsp.br/pagina_inicial/cursos_all.php?&tipo_curso=A&cod_pasta23). Acesso em: 4 set. 2005 às 19h45.

HEALY, Lulu; HOYLES, C. *Justifying and proving in school Mathematics*. London: University of London – Institute of Education Technical Report, 1998.

____________; ____________. A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), p. 396-428, 2000.

HURANA, Nancy Cury Andraus. *Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2000.

JAMELLI, Sueli Maffei. *Abordagens no ensino da prova e argumentação na matemática escolar: análise de uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

LEANDRO, Ednaldo José. *Um panorama de argumentação de alunos da educação básica: o caso do fatorial.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2006.

LOURENÇO, Marcos Luiz. A demonstração com informática aplicada à Educação. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, Rio Claro, UNESP, 2002. n. 18. p. 82-92.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua.* São Paulo: Cortez, 1998.

MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em matemática*. São Paulo: Papirus, 2003.

MENDES, Lourival Junior. *Uma análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção do ensino médio.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia A. A. *Argumentação e provas no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ – Projeto Fundão, 2001. p. 1-10.

PIETROPAOLO, Ruy César. *(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2005.

SANTOS, Jonas Borsetti Silva. *Argumentação e prova: análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica.* Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

TOSATTO, Cláudia Miriam; PERACCHI, Edilaine do Pilar F.; ESTEPHAN, Violeta M. *Idéias & Relações – Matemática*. 1. ed. Curitiba: Positivo, 2002.

VAZ, Regina de Lourdes. *O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.* Dissertação de Mestrado em Educação matemática. São Paulo: PUC, 2004.

ANEXOS

Anexo 1

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais.*: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

S-AT 1

Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

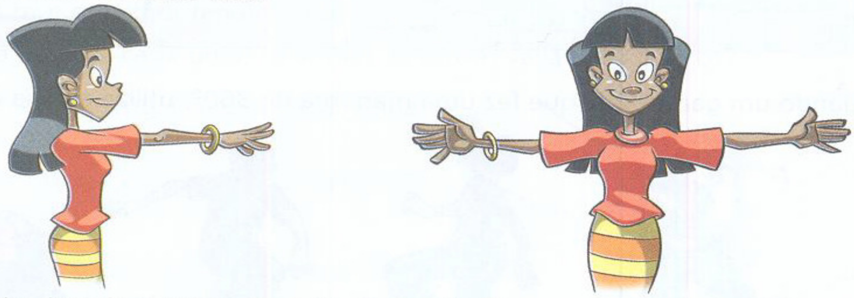
Nome: ………………………………………………………………………… data:………….
Nome:……………………………………………………………………………data:………….

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 6ª série

ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

ATIVIDADES MATEMÁTICAS

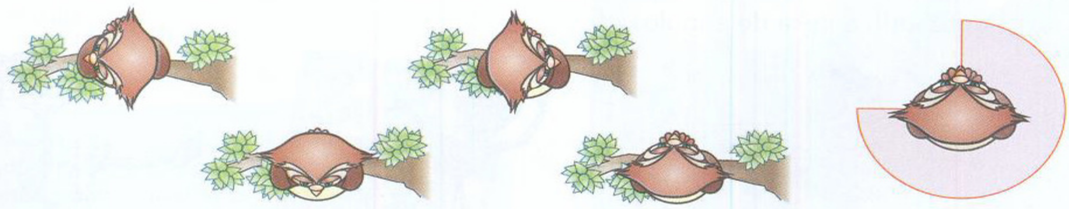
1. Para determinar seu ângulo máximo de visão, Janaína estendeu os braços para a frente e abriu-os lentamente até que eles sumissem de seu campo de visão. A abertura formada pelos braços até o ponto em que ainda era possível visualizá-los formou o ângulo máximo de visão dela.



a) Qual é o ângulo máximo de visão de Janaína?

b) E o seu ângulo máximo de visão, será que coincide com o de Janaína? Verifique.

2. A coruja tem um ângulo máximo de visão de apenas 50º. Entretanto, ela consegue girar a cabeça até $\frac{3}{4}$ de uma volta completa, tanto para a direita como para a esquerda.

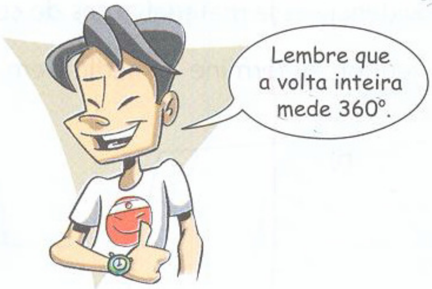


a) Em quantos graus a coruja consegue girar a cabeça?

b) E em quantos graus você consegue girar a cabeça?

138

3. Observe que, no relógio, o ângulo de uma volta é dividido em 12 partes iguais:



a) Quantos graus gira o ponteiro dos minutos em:

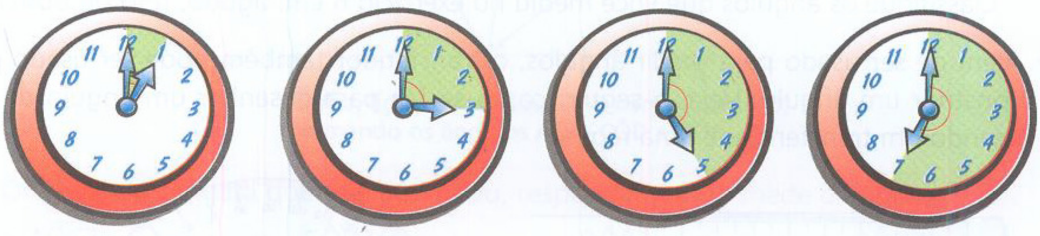
- 15 minutos? • 30 minutos? • 1 hora?

b) Quantos graus gira o ponteiro das horas em:

- 1 hora? • 2 horas? • meia hora?

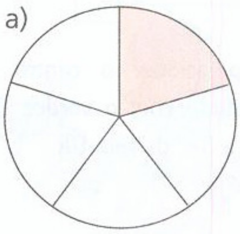
c) Determine a medida dos ângulos indicados nos relógios a seguir:

I. II. III. IV.

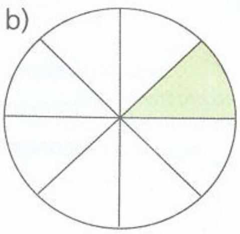


4. Os alunos da 6ª série dividiram algumas circunferências em partes iguais, usando o transferidor. Determine, em cada caso, quantos graus mede cada ângulo:

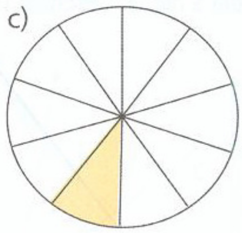
a)



b)



c)



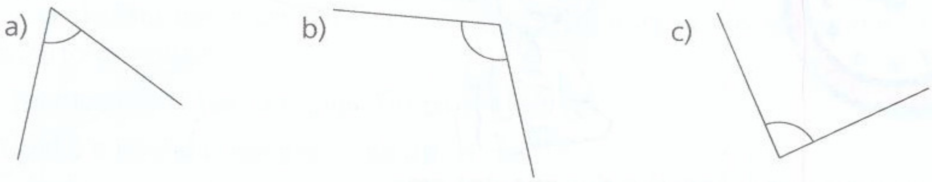
- Em cada caso, a parte pintada representa que fração da circunferência?

5. Quando dividimos uma circunferência, a partir do ponto central, em dez partes iguais, determinamos um ângulo de 36°. Podemos dizer, então, que o ângulo de 36° está associado à divisão da circunferência em dez partes iguais, ou seja, à fração $\frac{1}{10}$. A que fração da circunferência, dividida em partes iguais, está associado cada ângulo a seguir?

a) 45° b) 90° c) 180° d) 120°

• Para realizar as atividades a seguir, você vai precisar de régua, esquadros e transferidor. Providencie esse material antes de começar.

6. Usando um transferidor, determine a medida em graus dos ângulos desenhados a seguir:

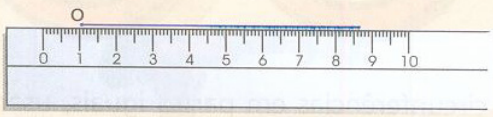


7. Os ângulos podem ser classificados de acordo com sua medida:

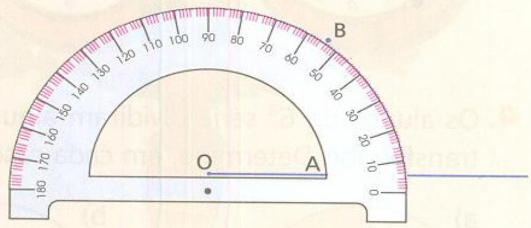
> **Agudos:** são os ângulos cuja medida é menor que 90°.
> **Obtusos:** são os ângulos cuja medida é maior que 90°.
> **Retos:** são os ângulos cuja medida é exatamente 90°.

• Classifique os ângulos que você mediu no exercício 6 em: agudo, reto ou obtuso.

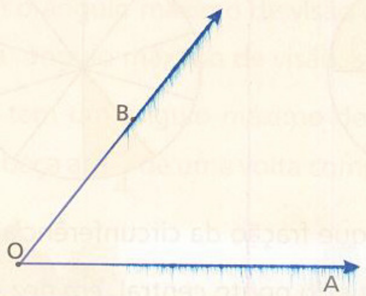
8. Além de ser usado para medir ângulos, o transferidor também pode ser usado para construir um ângulo. Veja, a seguir, como se faz para desenhar um ângulo de 54° usando um transferidor e uma régua:



Primeiro, deve-se marcar o vértice O do ângulo e, com a régua, desenhar um dos lados.



Depois, deve-se posicionar o centro do transferidor coincidindo com o vértice O e marcar um ponto B a 54° da reta OA.



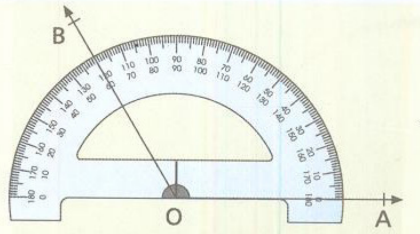
Finalmente, traça-se com a régua o outro lado do ângulo, unindo os pontos O e B.

Para nomear esse ângulo, escreve-se AÔB ou Ô, a letra do vértice.

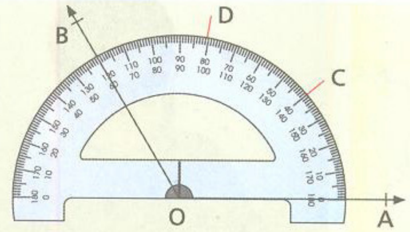
• Agora é sua vez. Usando uma régua e um transferidor, desenhe em seu caderno:

a) um ângulo AÔB de 62°;
b) um ângulo CÔD de 125°;
c) um ângulo EÔF agudo;
d) um ângulo GÔH obtuso;
e) um ângulo IÔJ reto.

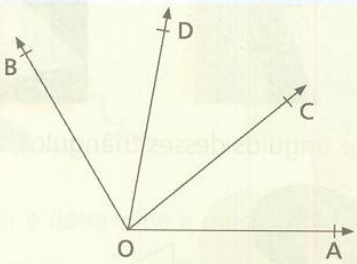
9. O transferidor também pode ser usado para dividir um ângulo. Veja como Taís usou o transferidor para dividir um ângulo de 120º em três partes iguais:



Primeiro, ela posicionou o transferidor corretamente sobre o ângulo.



Depois, marcou o ângulo de 40º com um ponto C e o ângulo de 80º com um ponto D.

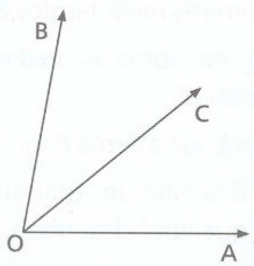


Então, ligou os pontos C e D com o ponto O, formando os ângulos AÔC, CÔD e DÔB.

Observando a figura que Taís desenhou, responda quanto mede o ângulo:

- AÔC?
- CÔD?
- DÔB?
- AÔD?

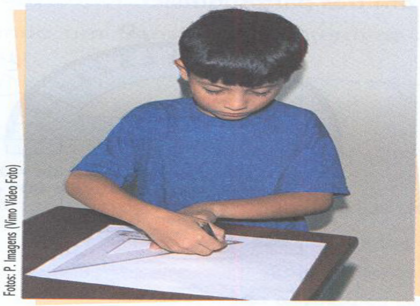
10. Marcelo dividiu o ângulo AÔB, de 80º, em duas partes iguais, desenhando a semi-reta $\overrightarrow{OC}$. Quanto mede o ângulo AÔC? E o ângulo CÔB?



11. Desenhe em seu caderno um ângulo de 60º. Depois, divida-o ao meio traçando a bissetriz do ângulo. Quanto mede cada ângulo obtido?

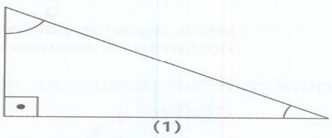
- Agora, divida cada um dos ângulos obtidos ao meio. Neste caso, qual a medida de cada ângulo obtido?

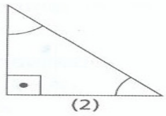
12. Contornando seus esquadros com o lápis, desenhe dois triângulos em uma folha.




Fotos: P. Imagens (Vimo Vídeo Foto)

- Em seguida, marque os ângulos desses triângulos, como mostra o desenho:





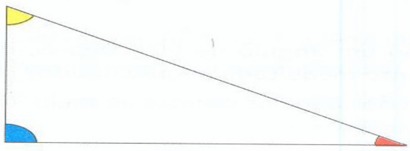
a) Usando seu transferidor, determine a medida de cada ângulo interno desses triângulos e escreva em cada um deles a medida correspondente.

b) Some as medidas dos ângulos internos do triângulo 1. Quantos graus você obteve?

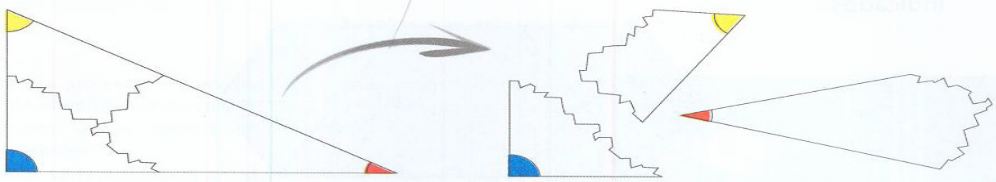
c) Agora, some as medidas dos ângulos internos do triângulo 2. Quantos graus você obteve?

d) Será que a soma é sempre a mesma? Vamos investigar, fazendo desenhos e recortes.

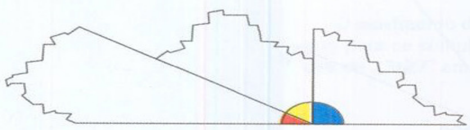
- Desenhe um triângulo qualquer em uma folha. Em seguida, recorte o triângulo que você desenhou e pinte os ângulos internos com lápis de cor.



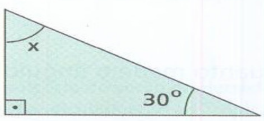
- Agora, rasgue ou recorte o triângulo em três partes, separando os ângulos.

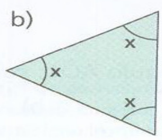


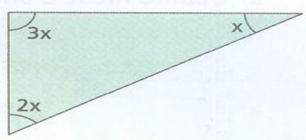
- Junte os ângulos pelos vértices e verifique se a soma dos ângulos internos do seu triângulo também é 180°.



13. Observe os triângulos a seguir e determine a medida dos ângulos desconhecidos:

a) 

b) 

c) 

S-AT 1

Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

Nome: Raíssa G. Longo Pedrozo .... data: 21/02/07
Nome: Igor Yusuf Numoni Afonso .... data: 21/02/07

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 6ª série

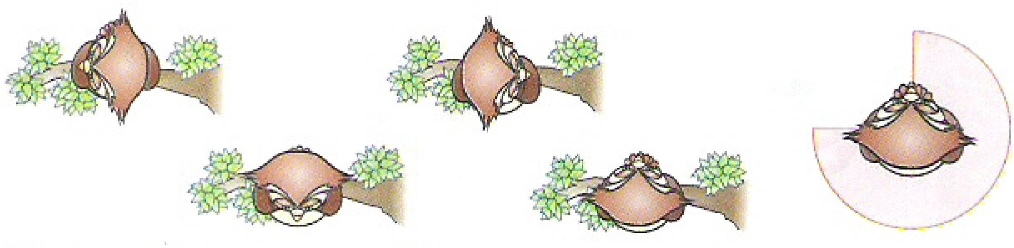
ATIVIDADES MATEMÁTICAS

1. Para determinar seu ângulo máximo de visão, Janaína estendeu os braços para a frente e abriu-os lentamente até que eles sumissem de seu campo de visão. A abertura formada pelos braços até o ponto em que ainda era possível visualizá-los formou o ângulo máximo de visão dela.

a) Qual é o ângulo máximo de visão de Janaína? 180°

b) E o seu ângulo máximo de visão, será que coincide com o de Janaína? Verifique. Sim

2. A coruja tem um ângulo máximo de visão de apenas 50°. Entretanto, ela consegue girar a cabeça até $\frac{3}{4}$ de uma volta completa, tanto para a direita como para a esquerda.

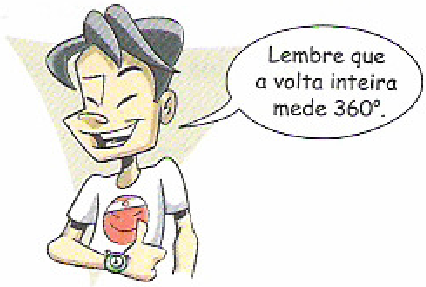


a) Em quantos graus a coruja consegue girar a cabeça? 270°

b) E em quantos graus você consegue girar a cabeça? 180°

138

3. Observe que, no relógio, o ângulo de uma volta é dividido em 12 partes iguais:



a) Quantos graus gira o ponteiro dos minutos em:

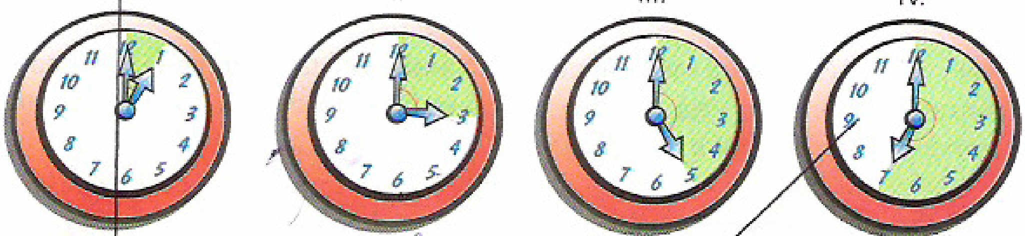
- 15 minutos? 90°
- 30 minutos? 180°
- 1 hora? 360°

b) Quantos graus gira o ponteiro das horas em:

- 1 hora? 30°
- 2 horas? 60°
- meia hora? 15°

c) Determine a medida dos ângulos indicados nos relógios a seguir:

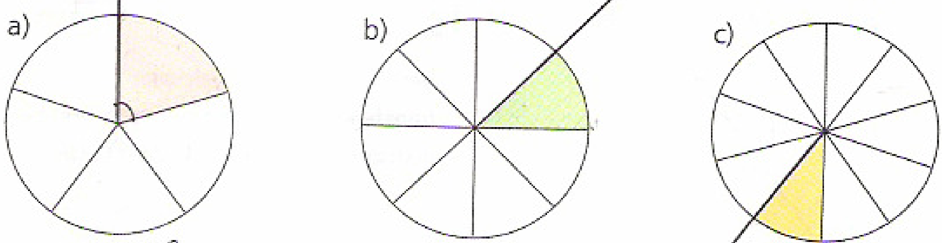
I. II. III. IV.



30° 90° 140° 200°

4. Os alunos da 6ª série dividiram algumas circunferências em partes iguais, usando o transferidor. Determine, em cada caso, quantos graus mede cada ângulo:

a) b) c)



71° 47° 37°

- Em cada caso, a parte pintada representa que fração da circunferência?

5. Quando dividimos uma circunferência, a partir do ponto central, em dez partes iguais, determinamos um ângulo de 36°. Podemos dizer, então, que o ângulo de 36° está associado à divisão da circunferência em dez partes iguais, ou seja, à fração $\frac{1}{10}$. A que fração da circunferência, dividida em partes iguais, está associado cada ângulo a seguir?

a) 45° $\frac{1}{8}$

b) 90° $\frac{1}{4}$

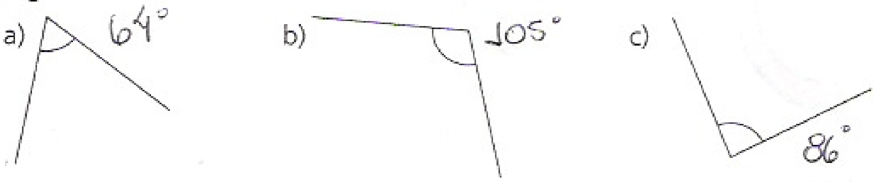
c) 180° $\frac{1}{2}$

d) 120° $\frac{1}{3}$

- Para realizar as atividades a seguir, você vai precisar de régua, esquadros e transferidor. Providencie esse material antes de começar.

6. Usando um transferidor, determine a medida em graus dos ângulos desenhados a seguir:

a) b) c)



7. Os ângulos podem ser classificados de acordo com sua medida:

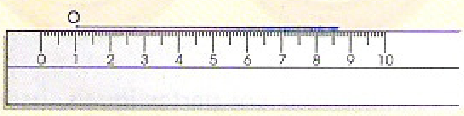
Agudos: são os ângulos cuja medida é menor que 90°.

Obtusos: são os ângulos cuja medida é maior que 90°.

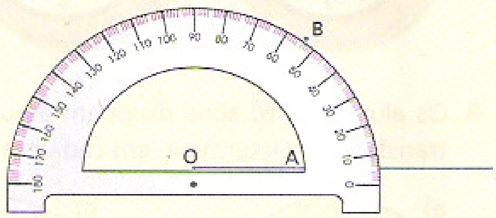
Retos: são os ângulos cuja medida é exatamente 90°.

- Classifique os ângulos que você mediu no exercício 6 em: agudo, reto ou obtuso.

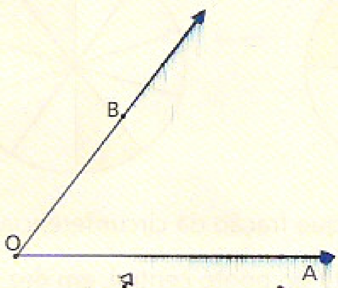
8. Além de ser usado para medir ângulos, o transferidor também pode ser usado para construir um ângulo. Veja, a seguir, como se faz para desenhar um ângulo de 54° usando um transferidor e uma régua:



Primeiro, deve-se marcar o vértice O do ângulo e, com a régua, desenhar um dos lados.



Depois, deve-se posicionar o centro do transferidor coincidindo com o vértice O e marcar um ponto B a 54° da reta OA.



Finalmente, traça-se com a régua o outro lado do ângulo, unindo os pontos O e B.

Para nomear esse ângulo, escreve-se AÔB ou Ô, a letra do vértice.

- Agora é sua vez. Usando uma régua e um transferidor, desenhe em seu caderno:

a) um ângulo AÔB de 62°;

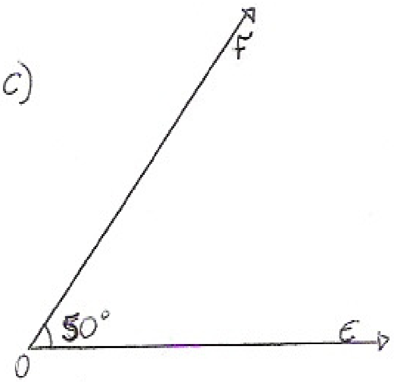
b) um ângulo CÔD de 125°;

c) um ângulo EÔF agudo;

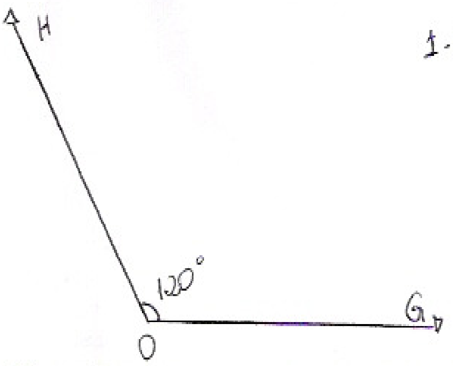
d) um ângulo GÔH obtuso;

e) um ângulo IÔJ reto.

c)

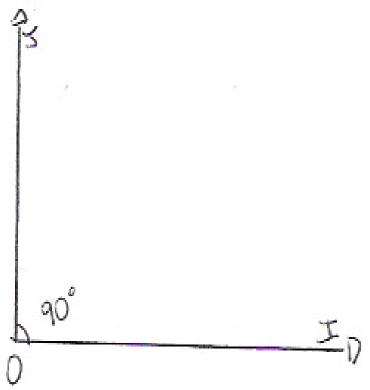


d)

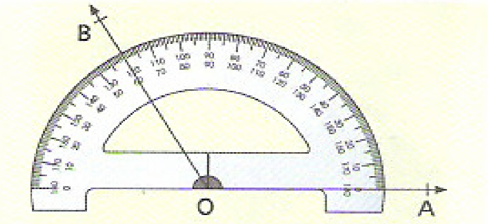


1-RI

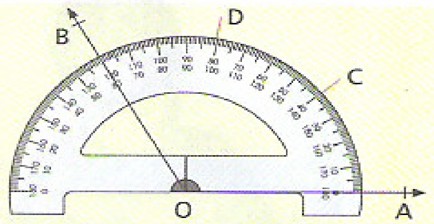
e)



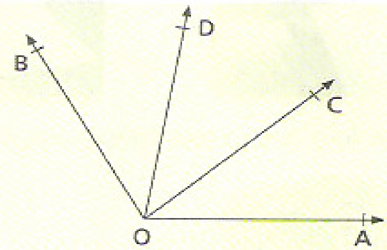
9. O transferidor também pode ser usado para dividir um ângulo. Veja como Taís usou o transferidor para dividir um ângulo de 120° em três partes iguais:



Primeiro, ela posicionou o transferidor corretamente sobre o ângulo.



Depois, marcou o ângulo de 40° com um ponto C e o ângulo de 80° com um ponto D.

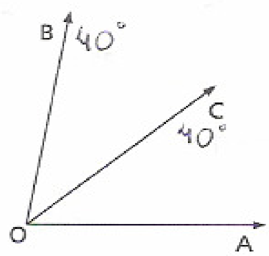


Então, ligou os pontos C e D com o ponto O, formando os ângulos AÔC, CÔD e DÔB.

Observando a figura que Taís desenhou, responda quanto mede o ângulo:

- AÔC? 40°
- CÔD? 40°
- DÔB? 40°
- AÔD? 80°

10. Marcelo dividiu o ângulo AÔB, de 80°, em duas partes iguais, desenhando a semi-reta $\overrightarrow{OC}$. Quanto mede o ângulo AÔC? E o ângulo CÔB?

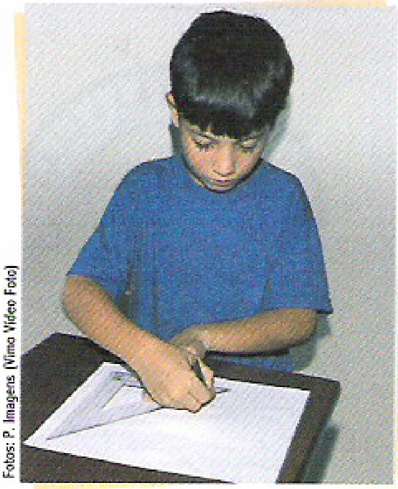


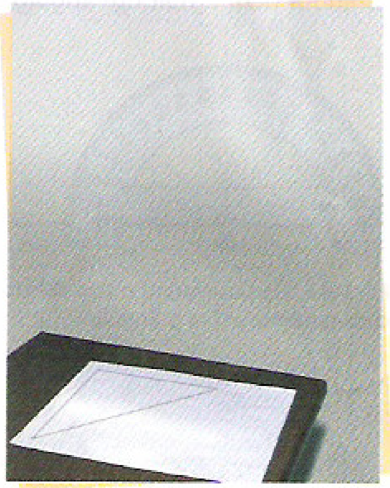
11. Desenhe em seu caderno um ângulo de 60°. Depois, divida-o ao meio traçando a bissetriz do ângulo. Quanto mede cada ângulo obtido? 30°

- Agora, divida cada um dos ângulos obtidos ao meio. Neste caso, qual a medida de cada ângulo obtido? 15°

1.RI

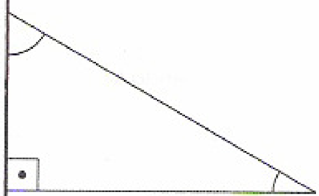
12. Contornando seus esquadros com o lápis, desenhe dois triângulos em uma folha.



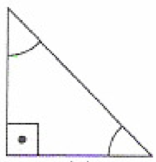


Fotos: P. Imagens (Vimo Vídeo Foto)

• Em seguida, marque os ângulos desses triângulos, como mostra o desenho:



(1)



(2)

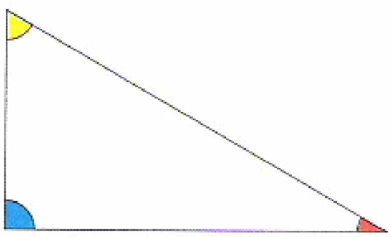
a) Usando seu transferidor, determine a medida de cada ângulo interno desses triângulos e escreva em cada um deles a medida correspondente. 1) 90°, 60°, 30° / 2) 90°, 45°, 45°

b) Some as medidas dos ângulos internos do triângulo 1. Quantos graus você obteve? 180°

c) Agora, some as medidas dos ângulos internos do triângulo 2. Quantos graus você obteve? 180°

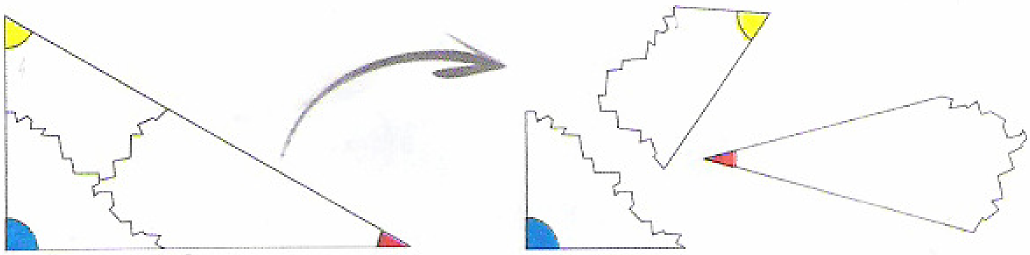
d) Será que a soma é sempre a mesma? Vamos investigar, fazendo desenhos e recortes.

• Desenhe um triângulo qualquer em uma folha. Em seguida, recorte o triângulo que você desenhou e pinte os ângulos internos com lápis de cor.

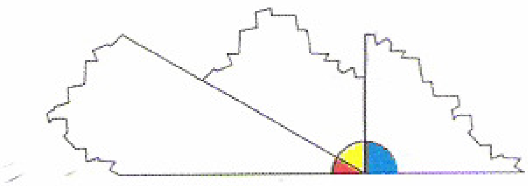


1 - RI

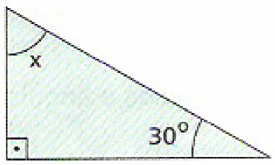
- Agora, rasgue ou recorte o triângulo em três partes, separando os ângulos.



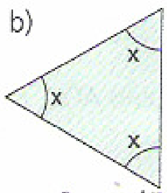
- Junte os ângulos pelos vértices e verifique se a soma dos ângulos internos do seu triângulo também é 180°.



13. Observe os triângulos a seguir e determine a medida dos ângulos desconhecidos:

a) 

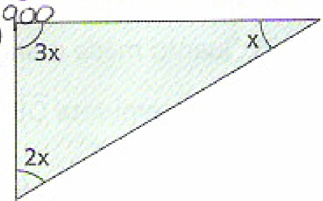
60°

b) 

$3x = 180°$

$x = 180 : 3$

$x = 60°$

c) 90°  30°

60°

$3x + 2x + x = 180°$

$6x = 180°$

$x = 180 : 6$

$x = 30°$

S-AT 1

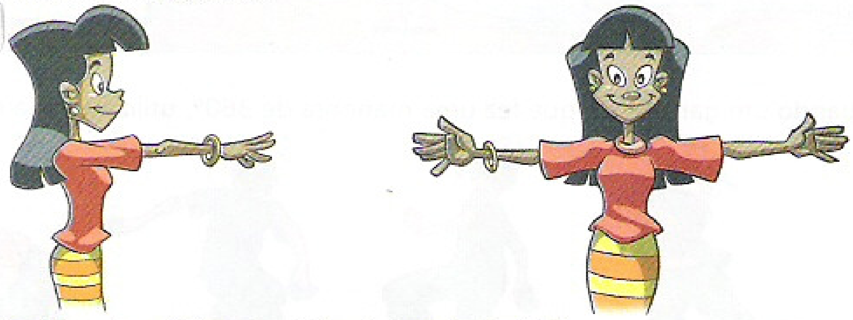
Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

Nome: Letícia Paes Magalhães .... data: 21/02/07
Nome: Daniel Francisco dos Santos ....data: 21/02/07

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 6ª série

ATIVIDADES MATEMÁTICAS

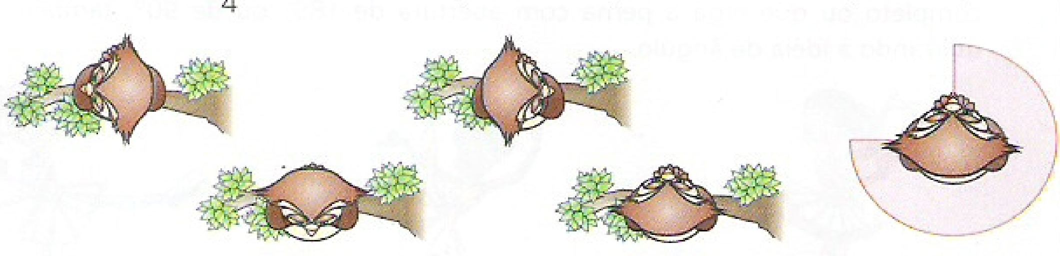
1. Para determinar seu ângulo máximo de visão, Janaína estendeu os braços para a frente e abriu-os lentamente até que eles sumissem de seu campo de visão. A abertura formada pelos braços até o ponto em que ainda era possível visualizá-los formou o ângulo máximo de visão dela.



a) Qual é o ângulo máximo de visão de Janaína? 180°

b) E o seu ângulo máximo de visão, será que coincide com o de Janaína? Verifique.
Sim.

2. A coruja tem um ângulo máximo de visão de apenas 50°. Entretanto, ela consegue girar a cabeça até $\frac{3}{4}$ de uma volta completa, tanto para a direita como para a esquerda.

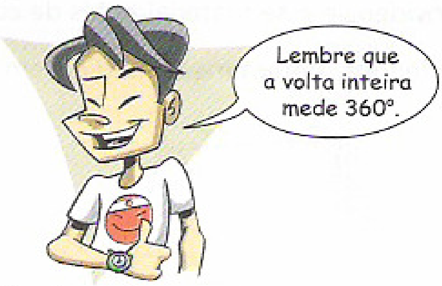


a) Em quantos graus a coruja consegue girar a cabeça? 270 graus

b) E em quantos graus você consegue girar a cabeça? 180 graus

138

3. Observe que, no relógio, o ângulo de uma volta é dividido em 12 partes iguais:



a) Quantos graus gira o ponteiro dos minutos em:

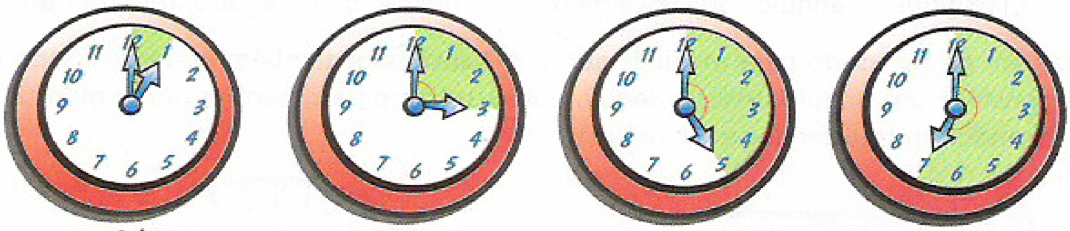
- 15 minutos? 90°
- 30 minutos? 180°
- 1 hora? 360°

b) Quantos graus gira o ponteiro das horas em:

- 1 hora? 30°
- 2 horas? 60°
- meia hora? 15°

c) Determine a medida dos ângulos indicados nos relógios a seguir:

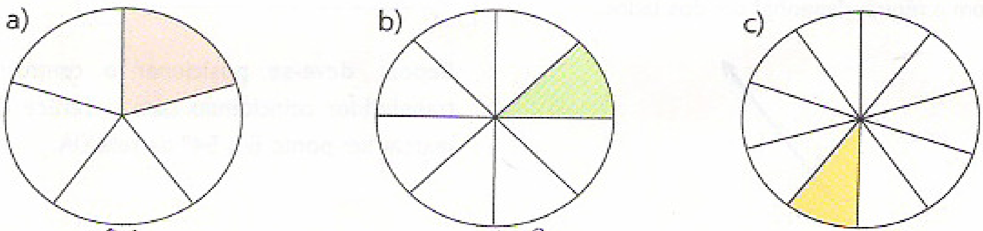
I. II. III. IV.



30° 90° 150° 210°

4. Os alunos da 6ª série dividiram algumas circunferências em partes iguais, usando o transferidor. Determine, em cada caso, quantos graus mede cada ângulo:

a) b) c)



71° 45° 33°

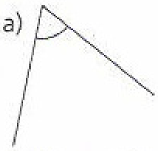
- Em cada caso, a parte pintada representa que fração da circunferência?

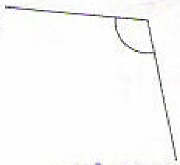
5. Quando dividimos uma circunferência, a partir do ponto central, em dez partes iguais, determinamos um ângulo de 36°. Podemos dizer, então, que o ângulo de 36° está
a) 1/5 b) 1/8 c) 1/10
associado à divisão da circunferência em dez partes iguais, ou seja, à fração $\frac{1}{10}$. A que fração da circunferência, dividida em partes iguais, está associado cada ângulo a seguir?

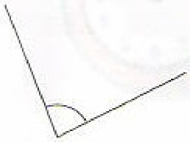
a) 45° $\frac{1}{8}$ b) 90° $\frac{1}{4}$ c) 180° $\frac{1}{2}$ d) 120° $\frac{1}{3}$

• Para realizar as atividades a seguir, você vai precisar de régua, esquadros e transferidor. Providencie esse material antes de começar.

6. Usando um transferidor, determine a medida em graus dos ângulos desenhados a seguir:

a) 
63° agudo

b) 
107° obtuso

c) 
86° agudo

7. Os ângulos podem ser classificados de acordo com sua medida:

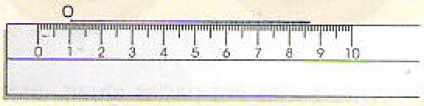
Agudos: são os ângulos cuja medida é menor que 90°.

Obtusos: são os ângulos cuja medida é maior que 90°.

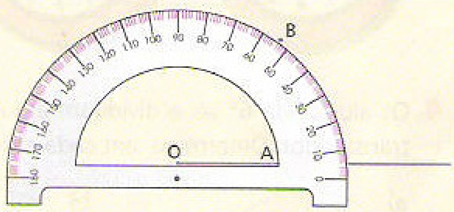
Retos: são os ângulos cuja medida é exatamente 90°.

• Classifique os ângulos que você mediu no exercício 6 em: agudo, reto ou obtuso.

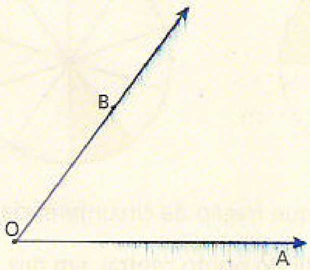
8. Além de ser usado para medir ângulos, o transferidor também pode ser usado para construir um ângulo. Veja, a seguir, como se faz para desenhar um ângulo de 54° usando um transferidor e uma régua:



Primeiro, deve-se marcar o vértice O do ângulo e, com a régua, desenhar um dos lados.



Depois, deve-se posicionar o centro do transferidor coincidindo com o vértice O e marcar um ponto B a 54° da reta OA.



Finalmente, traça-se com a régua o outro lado do ângulo, unindo os pontos O e B.

Para nomear esse ângulo, escreve-se AÔB ou Ô, a letra do vértice.

• Agora é sua vez. Usando uma régua e um transferidor, desenhe em seu caderno:

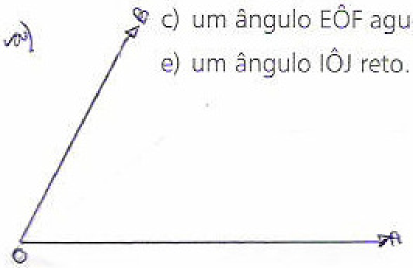
a) um ângulo AÔB de 62°;

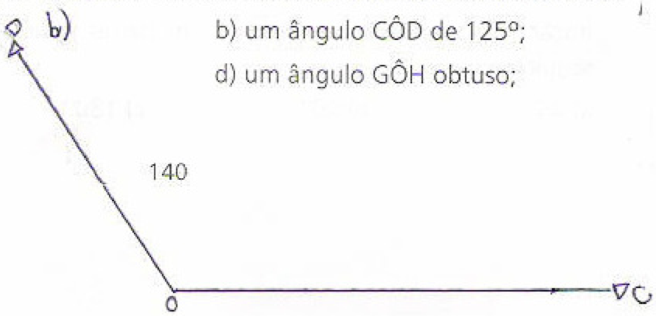
b) um ângulo CÔD de 125°;

c) um ângulo EÔF agudo;

d) um ângulo GÔH obtuso;

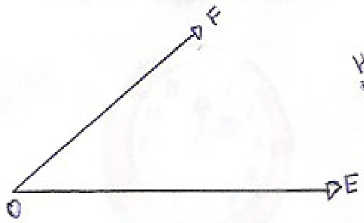
e) um ângulo IÔJ reto.

a) 

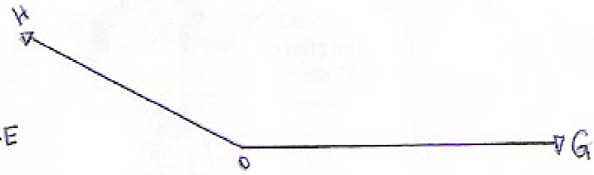
b) 

1-LD

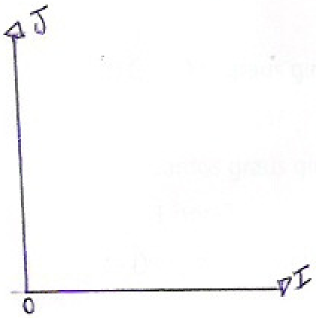
c)



d)

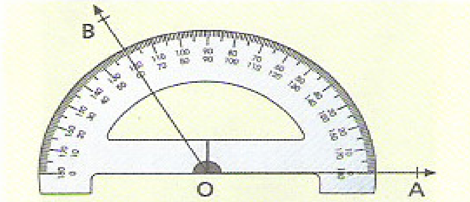


e)

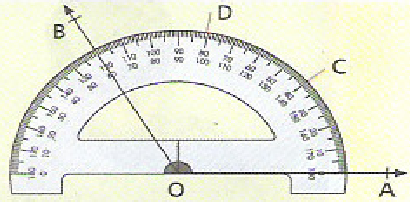


1. 2D

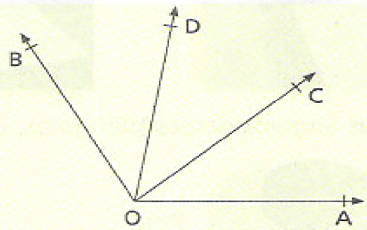
9. O transferidor também pode ser usado para dividir um ângulo. Veja como Taís usou o transferidor para dividir um ângulo de 120° em três partes iguais:



Primeiro, ela posicionou o transferidor corretamente sobre o ângulo.



Depois, marcou o ângulo de 40° com um ponto C e o ângulo de 80° com um ponto D.

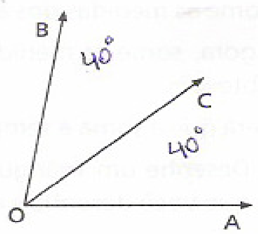


Então, ligou os pontos C e D com o ponto O, formando os ângulos AÔC, CÔD e DÔB.

Observando a figura que Taís desenhou, responda quanto mede o ângulo:

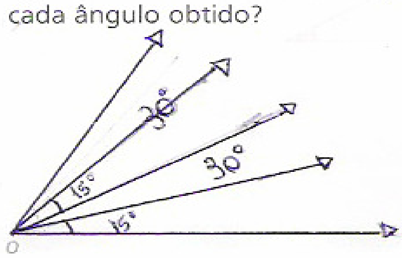
- AÔC? 40°
- CÔD? 40°
- DÔB? 40°
- AÔD? 80°

10. Marcelo dividiu o ângulo AÔB, de 80°, em duas partes iguais, desenhando a semi-reta $\overrightarrow{OC}$. Quanto mede o ângulo AÔC? E o ângulo CÔB?



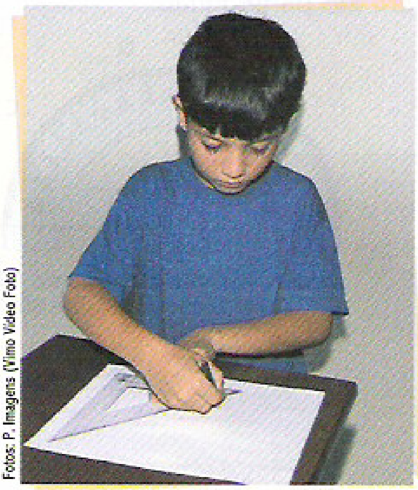
11. Desenhe em seu caderno um ângulo de 60°. Depois, divida-o ao meio traçando a bissetriz do ângulo. Quanto mede cada ângulo obtido?

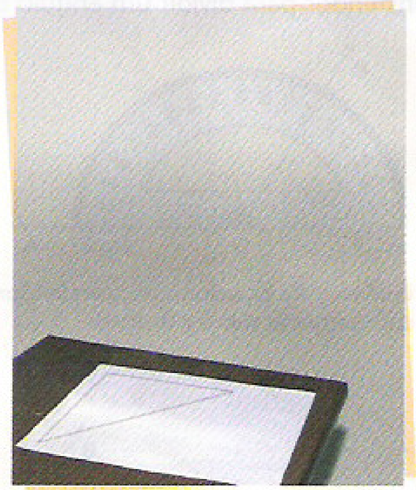
- Agora, divida cada um dos ângulos obtidos ao meio. Neste caso, qual a medida de cada ângulo obtido?



141

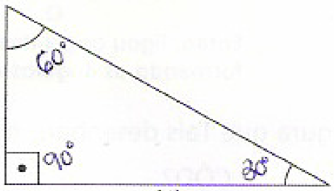
12. Contornando seus esquadros com o lápis, desenhe dois triângulos em uma folha.



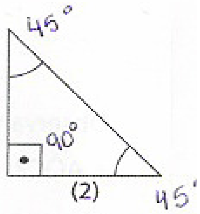


Fotos: P. Imagens (Vimo Video Foto)

- Em seguida, marque os ângulos desses triângulos, como mostra o desenho:



(1)



(2)

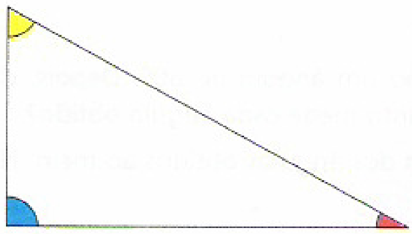
a) Usando seu transferidor, determine a medida de cada ângulo interno desses triângulos e escreva em cada um deles a medida correspondente.

b) Some as medidas dos ângulos internos do triângulo 1. Quantos graus você obteve? 180

c) Agora, some as medidas dos ângulos internos do triângulo 2. Quantos graus você obteve? 180°

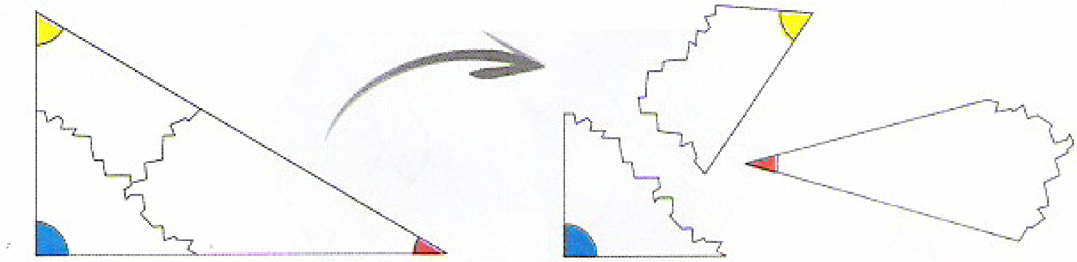
d) Será que a soma é sempre a mesma? Vamos investigar, fazendo desenhos e recortes.

- Desenhe um triângulo qualquer em uma folha. Em seguida, recorte o triângulo que você desenhou e pinte os ângulos internos com lápis de cor.

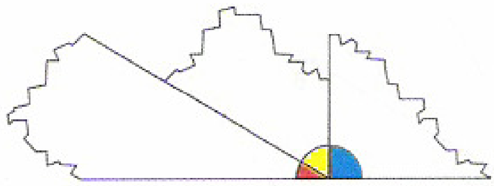


1. LD

- Agora, rasgue ou recorte o triângulo em três partes, separando os ângulos.

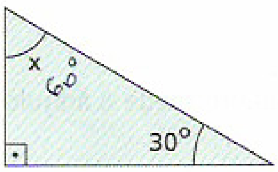


- Junte os ângulos pelos vértices e verifique se a soma dos ângulos internos do seu triângulo também é 180°.

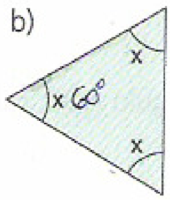


13. Observe os triângulos a seguir e determine a medida dos ângulos desconhecidos:

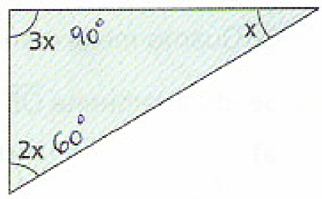
a)



b)



c)



a) $180 - 90 - 30 = x$

$x = 120 - 180$

$x = 60°$

b) $3x = 180$

$x = \frac{180}{3}$

$x = 60°$

c) $3x + 2x + x = 180$

$6x = 180$

$x = \frac{180}{6}$

$x = 30°$

S-AT 2

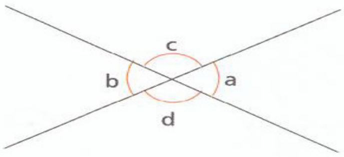
Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

Nome: ……………………………………………………………………… data:………….
Nome:…………………………………………………………………………data:………….

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 7ª série

ATIVIDADES MATEMÁTICAS

1. Usando o transferidor, meça os ângulos indicados na figura a seguir e responda:



a) Os ângulos **a** e **b** têm a mesma medida?

b) E os ângulos **c** e **d**?

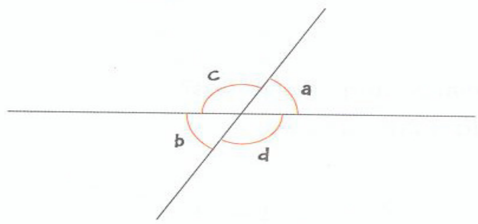
c) Nessa figura, quais pares de ângulos são suplementares, ou seja, quais pares de ângulos somam 180°?

d) Converse com seu professor e colegas sobre quando dois ângulos são opostos pelo vértice. Anote no caderno suas conclusões.

e) Podemos dizer que os ângulos OPV são congruentes?

f) Essa conclusão pode ser generalizada algebricamente, ou seja, podemos provar que os ângulos OPV são sempre congruentes.

Veja como um professor começou a demonstração:

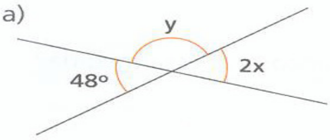


$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{c} = 180° \\ \hat{b} + \hat{c} = 180° \end{cases}$$

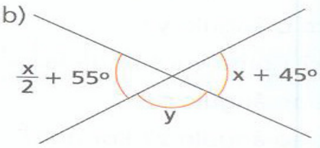
• Como ele pode provar, a partir dessas igualdades, que $\hat{a} = \hat{b}$?

2. Determine a medida das letras em cada situação:

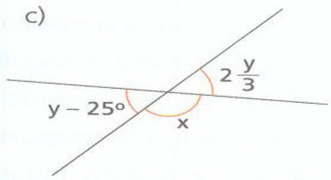
a)



b)

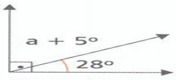


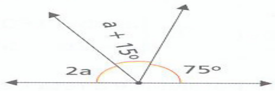
c)

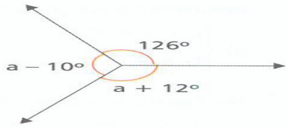


128

3. Calcule o valor de **a** em cada situação:







4. Observe este quadro:

> Quando dois ou mais ângulos somam:
> - 90º, eles são ditos **complementares**;
> - 180º, eles são ditos **suplementares**;
> - 360º, eles são ditos **replementares**.

Agora, cite:

a) dois ângulos complementares, sendo um deles o dobro do outro;

b) dois ângulos suplementares, sendo um deles o triplo do outro;

c) três ângulos congruentes suplementares.

5. Dois ângulos são suplementares e um excede o outro em 10º.

a) Quanto medem esses ângulos?

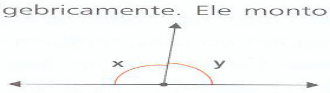
b) Um aluno resolveu esse problema usando uma tabela. Veja uma parte dos cálculos:

Ângulo	Ângulo mais 10º	Soma dos ângulos
45º	55º	45º + 55º = 100º
55º	65º	55º + 65º = 120º
65º	?	?
?	?	?
?	?	?

- A solução que ele vai obter é a mesma que a sua?

c) Um outro aluno resolveu esse problema algebricamente. Ele montou o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x = y + 10° \end{cases}$$



- A solução que você encontrou torna verdadeiras as equações do sistema? Verifique.

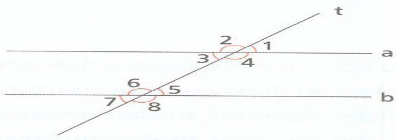
129

6. Considerando que as incógnitas **a** e **b** dos sistemas são medidas de ângulos, crie um enunciado para cada situação e descubra a medida de cada ângulo:

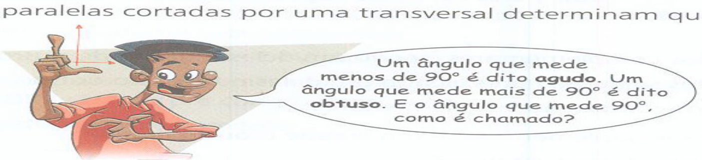
a) $\begin{cases} a + b = 90° \\ b = \frac{a}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b = 180° \\ a = 2b - 15° \end{cases}$

7. Na figura a seguir, as retas **a** e **b** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a essas retas:



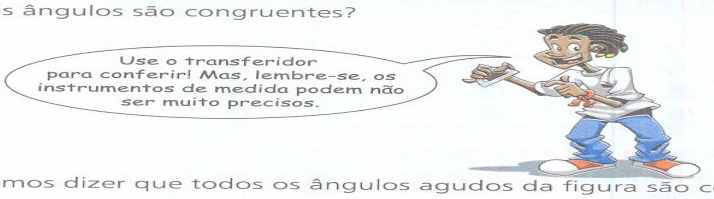
a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam quantos ângulos?



b) Na figura, quais ângulos são agudos? E quais são obtusos?

c) Quais pares de ângulos são OPV?

d) Quais ângulos são congruentes?



e) Podemos dizer que todos os ângulos agudos da figura são congruentes?

f) E os ângulos obtusos, também são todos congruentes?

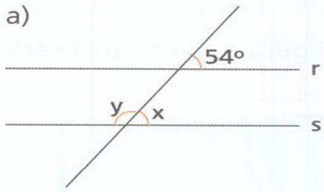
g) Somando a medida de um ângulo agudo com a medida de um ângulo obtuso da figura, quantos graus se obtêm?

h) Podemos dizer que os ângulos 2 e 5 são suplementares? Escreva mais três pares de ângulos da figura que sejam suplementares.

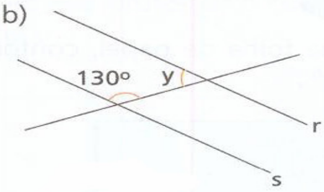
130

8. Descubra as medidas dos ângulos desconhecidos, sendo as retas **r** e **s** paralelas:

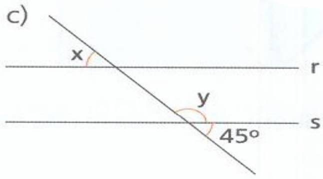
a)



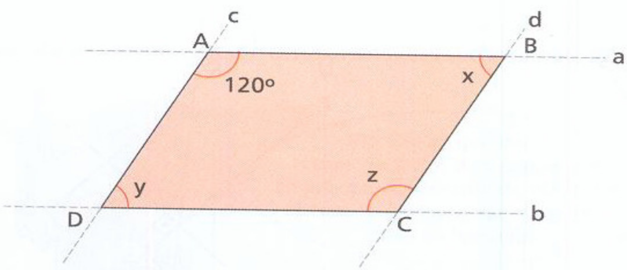
b)



c)



10. Sabendo que as retas **a** e **b** são paralelas e as retas **c** e **d** também, e com base nos dados da figura, responda às questões a seguir:



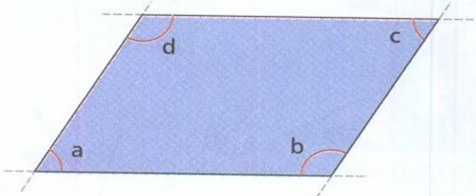
a) Quanto medem os ângulos **x**, **y** e **z**?

b) No paralelogramo ABCD, os ângulos opostos **x** e **y** têm a mesma medida?

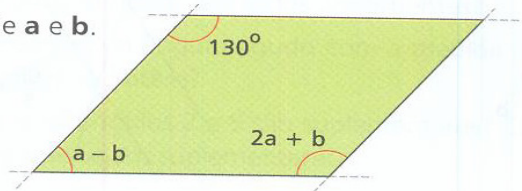
c) E os ângulos 120° e **z**, são congruentes?

d) Podemos dizer que um ângulo agudo e outro obtuso do paralelogramo são suplementares?

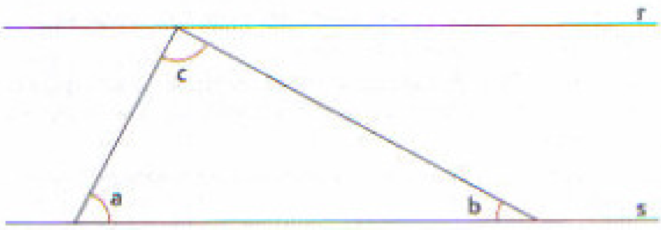
e) Num paralelogramo, tanto os ângulos agudos como os obtusos são sempre congruentes. Generalize algebricamente essa afirmação a partir da seguinte figura:



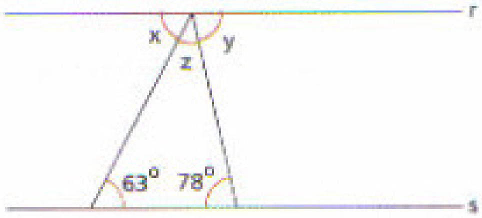
f) Calcule o valor de **a** e **b**.



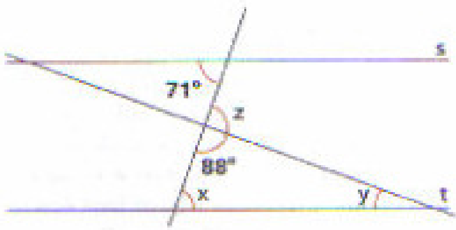
11. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°? Converse com seu professor e colegas sobre isso. Depois, registre a demonstração no caderno. (r//s)



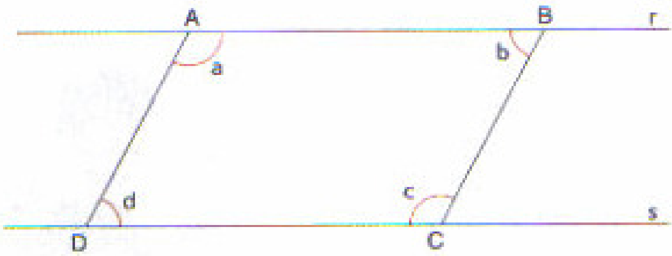
12. Descubra as medidas dos ângulos **x**, **y** e **z** na figura a seguir: (r//s)



13. Calcule o valor de **m**, **n** e **p** na figura: (s//t)



14. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360°? Reúna-se com um colega e registre a demonstração no caderno.



- Agora, compare a demonstração que vocês fizeram com as de outras duplas. Registre no caderno uma demonstração diferente da sua.

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

S-AT 2

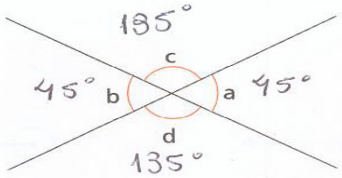
Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

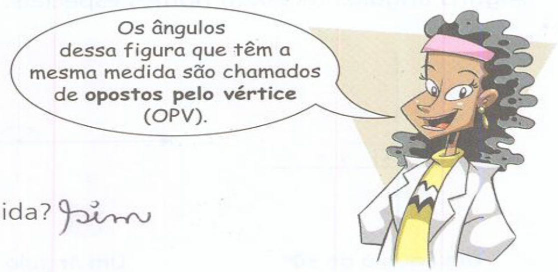
Nome: Raíssa G. Lanon Pedroso .... data: 23/02/07
Nome: Igor Y. Numan Franco .... data: 23/02/07

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 7ª série

ATIVIDADES MATEMÁTICAS

1. Usando o transferidor, meça os ângulos indicados na figura a seguir e responda:





a) Os ângulos **a** e **b** têm a mesma medida? sim

b) E os ângulos **c** e **d**? sim

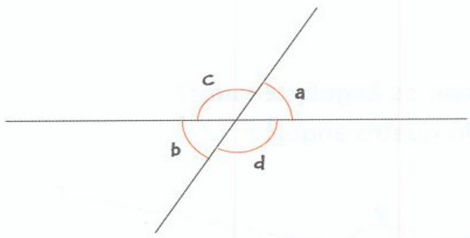
c) Nessa figura, quais pares de ângulos são suplementares, ou seja, quais pares de ângulos somam 180°? $A\hat{O}C$ / $B\hat{O}C$

d) Converse com seu professor e colegas sobre quando dois ângulos são opostos pelo vértice. Anote no caderno suas conclusões.

e) Podemos dizer que os ângulos OPV são congruentes? sim

f) Essa conclusão pode ser generalizada algebricamente, ou seja, podemos provar que os ângulos OPV são sempre congruentes. sim

Veja como um professor começou a demonstração:

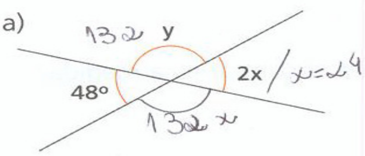


$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{c} = 180° \\ \hat{b} + \hat{c} = 180° \end{cases}$$

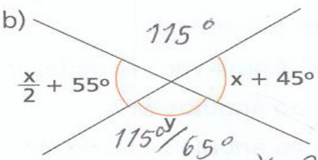
- Como ele pode provar, a partir dessas igualdades, que $\hat{a} = \hat{b}$?

2. Determine a medida das letras em cada situação:

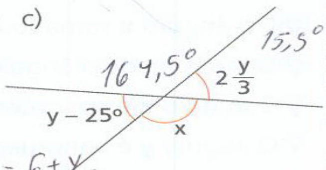
a)



b)

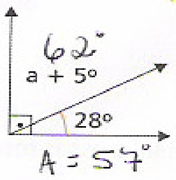


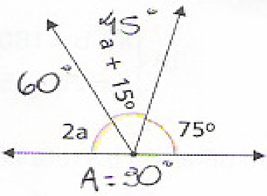
c)

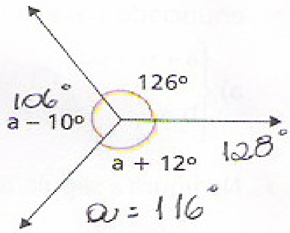


$\frac{y}{1} - \frac{25}{1} = \frac{6+y}{3}$

3. Calcule o valor de **a** em cada situação:







4. Observe este quadro:

> Quando dois ou mais ângulos somam:
> - 90°, eles são ditos **complementares**;
> - 180°, eles são ditos **suplementares**;
> - 360°, eles são ditos **replementares**.

Agora, cite:

a) dois ângulos complementares, sendo um deles o dobro do outro; 60° e 30°

b) dois ângulos suplementares, sendo um deles o triplo do outro; 135° e 45°

c) três ângulos congruentes suplementares. 120°

5. Dois ângulos são suplementares e um excede o outro em 10°.

a) Quanto medem esses ângulos? 95° e 85°

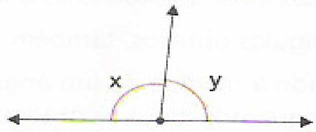
b) Um aluno resolveu esse problema usando uma tabela. Veja uma parte dos cálculos:

Ângulo	Ângulo mais 10°	Soma dos ângulos
45°	55°	45° + 55° = 100°
55°	65°	55° + 65° = 120°
65°	75°	65 + 75 = 140°
75°	85°	75 + 85 = 160°
85°	95°	85 + 95 = 180°

- A solução que ele vai obter é a mesma que a sua?

c) Um outro aluno resolveu esse problema algebricamente. Ele montou o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x = y + 10° \end{cases}$$



- A solução que você encontrou torna verdadeiras as equações do sistema? Verifique.

$x + y = 180°$
$x = y + 10$
$y + 10° + y = 180°$
$2y = 180° - 10$
$y = \frac{170}{2}$ $y = 85$

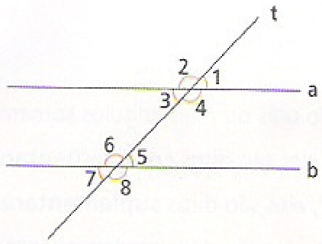
$x + 85 = 180°$
$x = 180° - 85$
$x = 95°$

2-RI

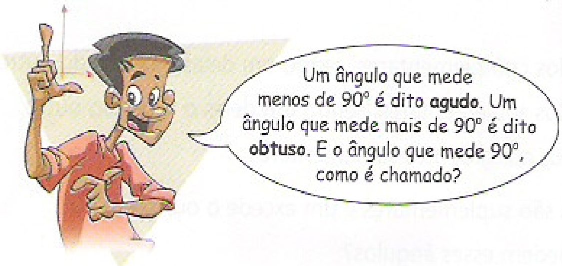
6. Considerando que as incógnitas **a** e **b** dos sistemas são medidas de ângulos, crie um enunciado para cada situação e descubra a medida de cada ângulo:

a) $\begin{cases} a+b=90° \\ b=\dfrac{a}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a+b=180° \\ a=2b-15° \end{cases}$

7. Na figura a seguir, as retas **a** e **b** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a essas retas:



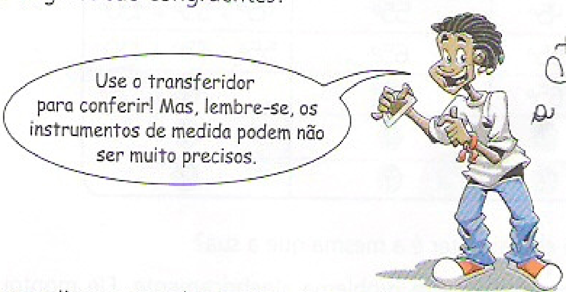
a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam quantos ângulos? 8 ângulos



b) Na figura, quais ângulos são agudos? E quais são obtusos? agudo: 1,3,5,7 / obtuso: 2,4,6,8

c) Quais pares de ângulos são OPV? 1 por 3; 2 por 4; 6 por 8; 5 por 7

d) Quais ângulos são congruentes?



Todo ângulo OPV, tem a mesma medida.

e) Podemos dizer que todos os ângulos agudos da figura são congruentes? Sim

f) E os ângulos obtusos, também são todos congruentes? Sim

g) Somando a medida de um ângulo agudo com a medida de um ângulo obtuso da figura, quantos graus se obtêm? 180°

h) Podemos dizer que os ângulos 2 e 5 são suplementares? Escreva mais três pares de ângulos da figura que sejam suplementares. Sim

1 e 6; 3 e 8; 7 e 4

a) $\begin{cases} a+b=90 \\ b=\frac{a}{2} \end{cases}$

$\frac{a}{1}+\frac{a}{2}=90°$

$2a+a=180°$

$3a=180°$

$a=\frac{180}{3}$

$a=60°$

$b=\frac{60°}{2}$

$b=30$

b) $\begin{cases} a+b=180° \\ a=2b-15° \end{cases}$

2 - RJ

$2b-15°+b=180°$

$3b=180°+15°$

$3b=195°$

$b=\frac{195°}{3}$

$b=65°$

$a=2.65°-15°$

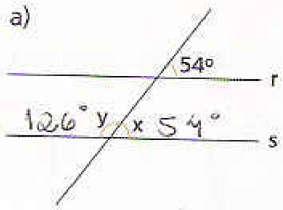
$a=130°-15°$

$a=115°$

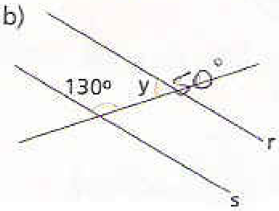
2 - RJ

8. Descubra as medidas dos ângulos desconhecidos, sendo as retas **r** e **s** paralelas:

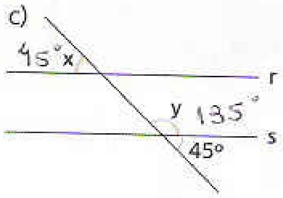
a)



b)

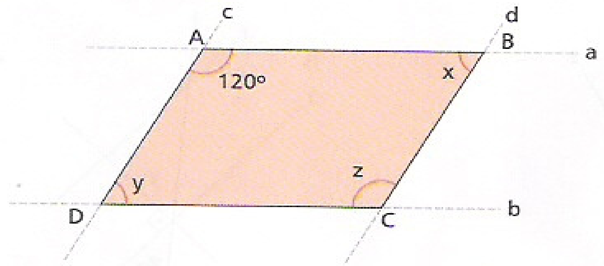


c)



2 - RI

10. Sabendo que as retas **a** e **b** são paralelas e as retas **c** e **d** também, e com base nos dados da figura, responda às questões a seguir:



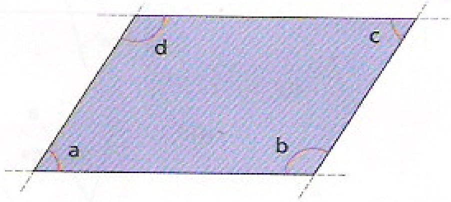
a) Quanto medem os ângulos **x**, **y** e **z**? x e $y = 60$ / $z = 120$

b) No paralelogramo ABCD, os ângulos opostos **x** e **y** têm a mesma medida? Sim

c) E os ângulos 120° e **z**, são congruentes? Sim

d) Podemos dizer que um ângulo agudo e outro obtuso do paralelogramo são suplementares? Sim

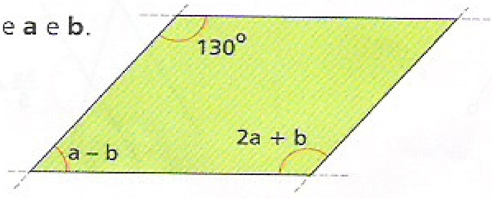
e) Num paralelogramo, tanto os ângulos agudos como os obtusos são sempre congruentes. Generalize algebricamente essa afirmação a partir da seguinte figura:



$a + b = 180°$

$c + d = 180°$

f) Calcule o valor de **a** e **b**.



132

$a - \cancel{b} + 2a + \cancel{b} = 180°$

$3a = 180°$

$a = \frac{180}{3}$

$a = 60°$

$60° - b + 130 = 180$

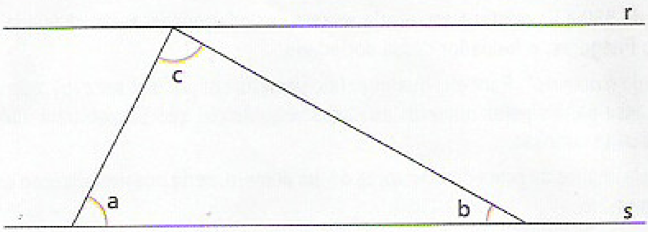
$-b = 180 - 60 - 130$

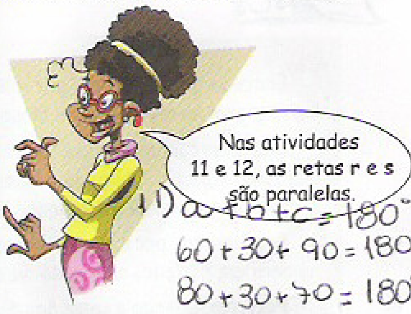
$-b = -10 \ (\cdot -1)$

$b = 10$

2 - RI

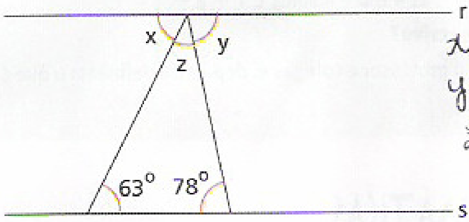
11. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°? Converse com seu professor e colegas sobre isso. Depois, registre a demonstração no caderno. (r//s)





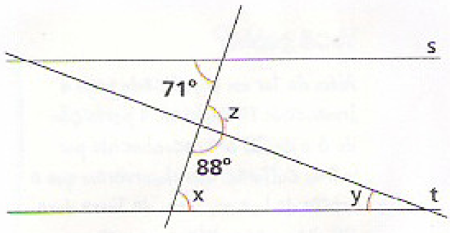
11) $a+b+c=180°$
$60+30+90=180°$
$80+30+70=180°$

12. Descubra as medidas dos ângulos **x**, **y** e **z** na figura a seguir: (r//s)



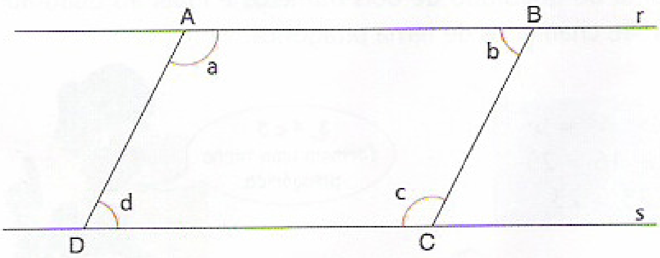
$x=63°$
$y=78°$
$z=39$

13. Calcule o valor de **m**, **n** e **p** na figura: (s//t)



$z=71°$
$x=88°$
$y=21°$

14. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360°? Reúna-se com um colega e registre a demonstração no caderno.



$\begin{cases} a+b=180° \\ a+d=180° \end{cases}$

- Agora, compare a demonstração que vocês fizeram com as de outras duplas. Registre no caderno uma demonstração diferente da sua.

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

S-AT 2

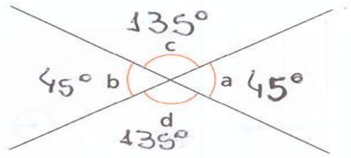
Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

Nome: ...Letícia Pais Magalhães.............. data: 23/02/07
Nome: ...Daniel dos Santos.................................data: 23/02/07

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 7ª série

ATIVIDADES MATEMÁTICAS

1. Usando o transferidor, meça os ângulos indicados na figura a seguir e responda:



a) Os ângulos **a** e **b** têm a mesma medida? sim

b) E os ângulos **c** e **d**? sim

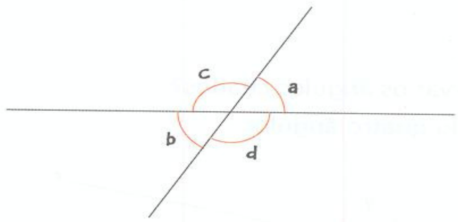
c) Nessa figura, quais pares de ângulos são suplementares, ou seja, quais pares de ângulos somam 180°? $\hat{a}$ e $\hat{c}$, $\hat{b}$ e $\hat{d}$, $\hat{a}$ e $\hat{d}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$

d) Converse com seu professor e colegas sobre quando dois ângulos são opostos pelo vértice. Anote no caderno suas conclusões. Cruzamento de 2 linhas

e) Podemos dizer que os ângulos OPV são congruentes? Sim

f) Essa conclusão pode ser generalizada algebricamente, ou seja, podemos provar que os ângulos OPV são sempre congruentes. Sim

Veja como um professor começou a demonstração:



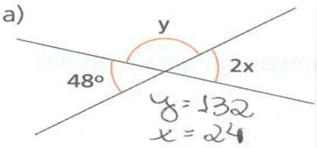
$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{c} = 180° \\ \hat{b} + \hat{c} = 180° \end{cases}$$

$c = 180 - a$
$b + 180 - a = 180$
$b - a = 180 - 180$
$b - a = 0$
$b = a$

• Como ele pode provar, a partir dessas igualdades, que $\hat{a} = \hat{b}$?

2. Determine a medida das letras em cada situação:

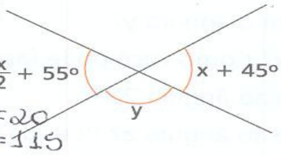
a)



$y = 132$
$x = 24$

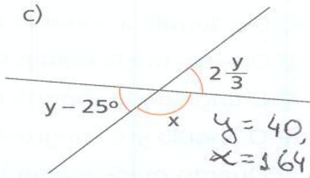
$2x = 48$ $x = 24$
$y = 180 - 48$ $y = 132$

b)



$x = 20$
$y = 115$

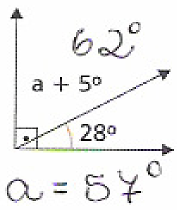
c)

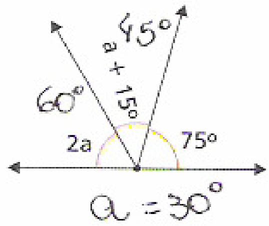


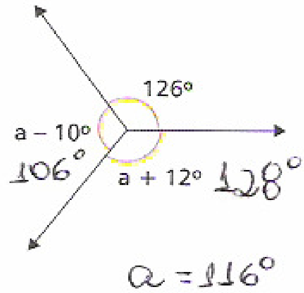
$y = 40{,}5$
$x = 164{,}5$

2 - LD

3. Calcule o valor de **a** em cada situação:







4. Observe este quadro:

> Quando dois ou mais ângulos somam:
> - 90°, eles são ditos **complementares**;
> - 180°, eles são ditos **suplementares**;
> - 360°, eles são ditos **replementares**.

Agora, cite:

a) dois ângulos complementares, sendo um deles o dobro do outro; 60° e 30°

b) dois ângulos suplementares, sendo um deles o triplo do outro; 135° e 45°

c) três ângulos congruentes suplementares. 60°

5. Dois ângulos são suplementares e um excede o outro em 10°.

a) Quanto medem esses ângulos? 85° e 95°

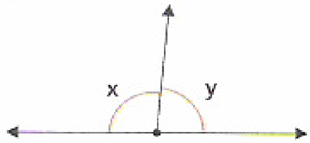
b) Um aluno resolveu esse problema usando uma tabela. Veja uma parte dos cálculos:

Ângulo	Ângulo mais 10°	Soma dos ângulos
45°	55°	45° + 55° = 100°
55°	65°	55° + 65° = 120°
65°	? 75°	65° + 75° = 140°
? 75°	? 85°	75° + 85° = 160°
? 85°	? 95°	85° + 95° = 180°

- A solução que ele vai obter é a mesma que a sua? Sim

c) Um outro aluno resolveu esse problema algebricamente. Ele montou o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x = y + 10° \end{cases}$$



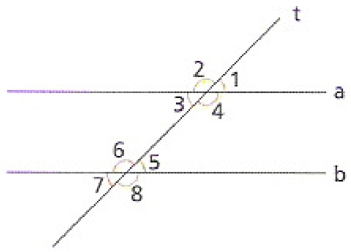
- A solução que você encontrou torna verdadeiras as equações do sistema? Verifique. Sim

6. Considerando que as incógnitas **a** e **b** dos sistemas são medidas de ângulos, crie um enunciado para cada situação e descubra a medida de cada ângulo:

a) $\begin{cases} a + b = 90° \\ b = \dfrac{a}{2} \end{cases}$ $a = 60°$ $b = 30°$

b) $\begin{cases} a + b = 180° \\ a = 2b - 15° \end{cases}$ $a = 115°$ $b = 65°$

7. Na figura a seguir, as retas **a** e **b** são paralelas e a reta **t** é uma transversal a essas retas:



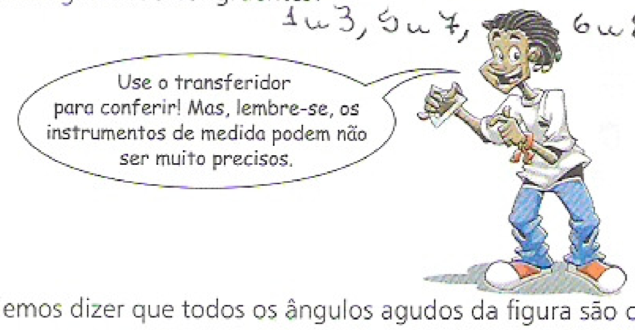
a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam quantos ângulos?
8 ângulos

ângulo reto

b) Na figura, quais ângulos são agudos? E quais são obtusos? 1, 5, 7, 3 (agudos) 2, 4, 6, 8 (obtusos);

c) Quais pares de ângulos são OPV? 2 e 4, 1 e 3 6 e 8, 5 e 7;

d) Quais ângulos são congruentes?
1 e 3, 5 e 7, 6 e 8, 2 e 4;



e) Podemos dizer que todos os ângulos agudos da figura são congruentes? Sim

f) E os ângulos obtusos, também são todos congruentes? Sim

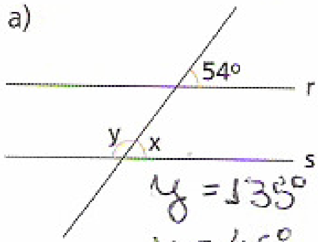
g) Somando a medida de um ângulo agudo com a medida de um ângulo obtuso da figura, quantos graus se obtêm? 180°

h) Podemos dizer que os ângulos 2 e 5 são suplementares? Escreva mais três pares de ângulos da figura que sejam suplementares. Sim
3 e 4, 1 e 6, 7 e 8

2 - 1D

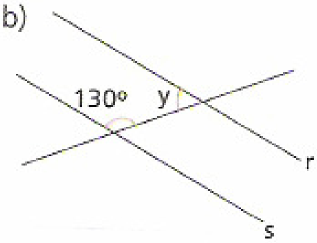
8. Descubra as medidas dos ângulos desconhecidos, sendo as retas **r** e **s** paralelas:

a)



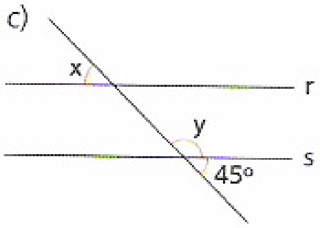
$y = 135°$
$x = 45°$

b)



$y = 50°$

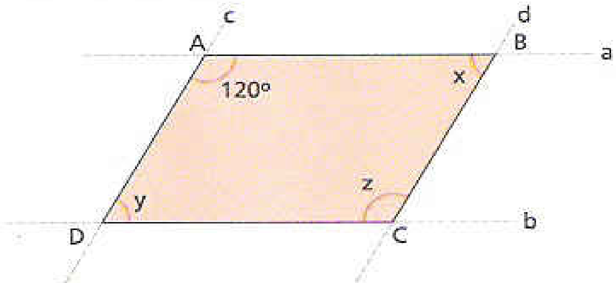
c)



$y = 135°$
$x = 45°$

2 - 2D

10. Sabendo que as retas **a** e **b** são paralelas e as retas **c** e **d** também, e com base nos dados da figura, responda às questões a seguir:



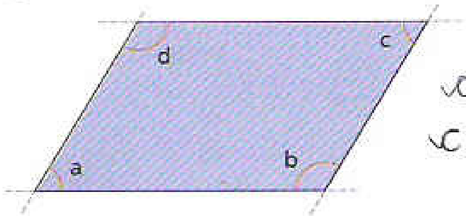
a) Quanto medem os ângulos **x**, **y** e **z**? x e y = 60°, z = 120°

b) No paralelogramo ABCD, os ângulos opostos **x** e **y** têm a mesma medida? Sim

c) E os ângulos 120° e **z**, são congruentes? Sim

d) Podemos dizer que um ângulo agudo e outro obtuso do paralelogramo são suplementares? Sim

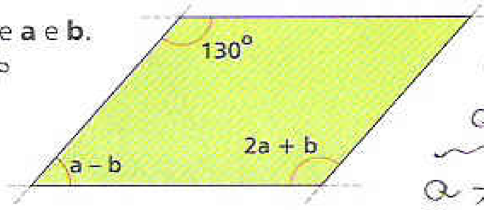
e) Num paralelogramo, tanto os ângulos agudos como os obtusos são sempre congruentes. Generalize algebricamente essa afirmação a partir da seguinte figura:



$a + d = 180°$
$c + b = 180°$

f) Calcule o valor de **a** e **b**.

$a = 60°$
$b = 10°$



132

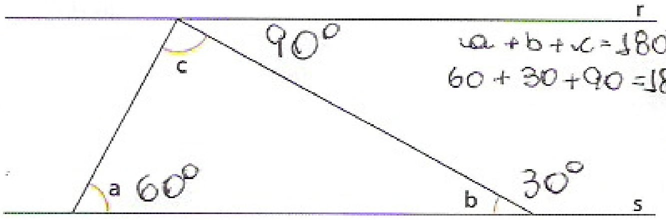
$a - b + 130 = 180°$
$a - b = 180 - 130$
$a - b = 60°$

$a - \cancel{b} + 2a + \cancel{b} = 180$
$3a = 180$
$a = \frac{180}{3} \quad a = 60°$

$60 - b = 50$
$-b = 50 - 60$
$-b = -10 \cdot (-1)$
$b = 10$

2 - 2 D

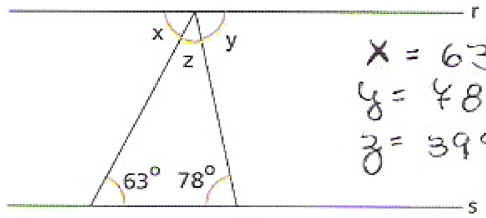
11. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°? Converse com seu professor e colegas sobre isso. Depois, registre a demonstração no caderno. (r//s)



$a + b + c = 180°$

$60 + 30 + 90 = 180°$

12. Descubra as medidas dos ângulos **x**, **y** e **z** na figura a seguir: (r//s)

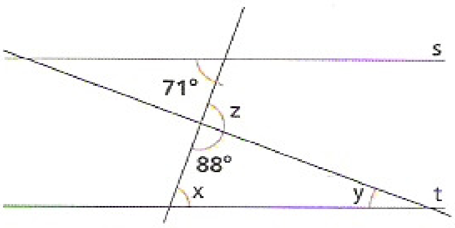


$x = 63°$

$y = 48°$

$z = 39°$

13. Calcule o valor de **m**, **n** e **p** na figura: (s//t)



$x = 88°$

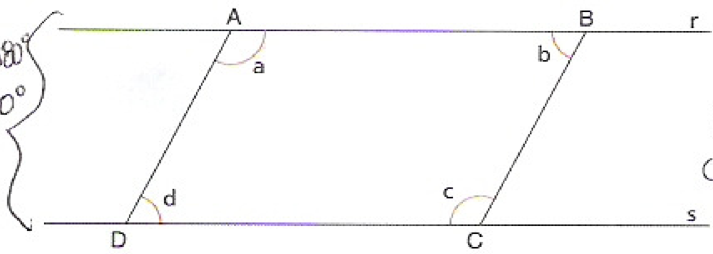
$z = 71°$

$y = 21°$

14. Como podemos demonstrar algebricamente que a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é igual a 360°? Reúna-se com um colega e registre a demonstração no caderno.

$a + d = 180°$

$c + d = 180°$



$d = 180 - a$

$c + a = 180°$

$d = 180° - a$

$c + 180 - a = 180°$

$c - a = 180 - 180$

$c - a = 0$

$c = a$

- Agora, compare a demonstração que vocês fizeram com as de outras duplas. Registre no caderno uma demonstração diferente da sua.

S-AT 3

Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

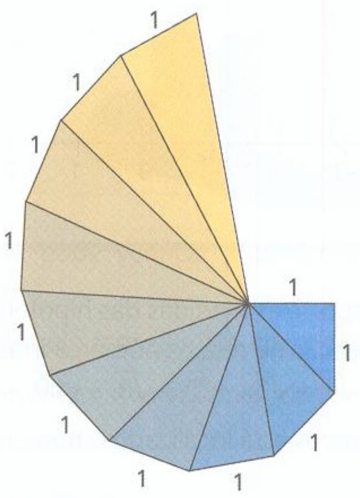
Nome: ……………………………………………………………………… data:…………
Nome:………………………………………………………………………data:………….

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 8ª série

Neste anexo, apresentamos algumas atividades que aparecem em outros capítulos e empregam o Teorema de Pitágoras na sua resolução. Leia com atenção e utilize seus conhecimentos sobre o assunto para resolvê-las.

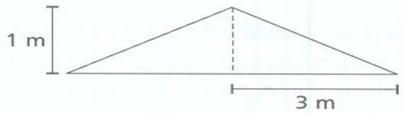
Atividades que aparecem no capítulo *Números Irracionais*, p. 75

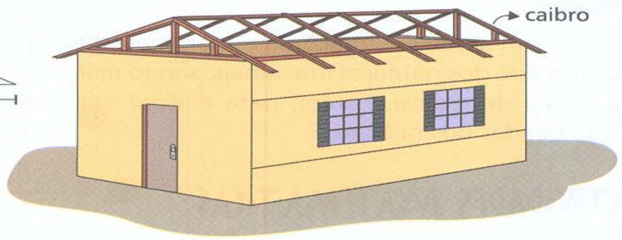
1. Utilizando seus instrumentos de medida, construa 10 triângulos retângulos a partir de um triângulo retângulo de catetos medindo 1 cm, conforme mostra esta figura:



a) Calcule as medidas das hipotenusas desses triângulos usando o Teorema de Pitágoras. Deixe os valores indicados na forma de radical.

7. Um carpinteiro precisa construir o telhado de uma casa. Para isso, ele precisa calcular o comprimento dos caibros do telhado.



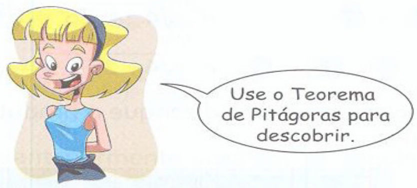


Observando a figura, você pode verificar a presença de um triângulo retângulo. Desenhe-o em seu caderno.

a) Que elemento desse triângulo representa o comprimento do caibro?

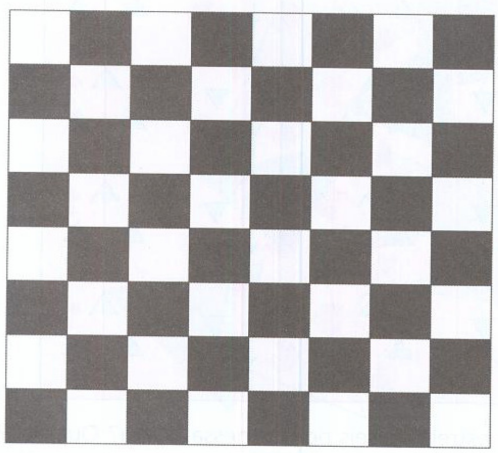
b) As outras medidas representam quais elementos do triângulo retângulo?

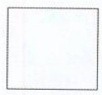
c) Qual é o comprimento do caibro?



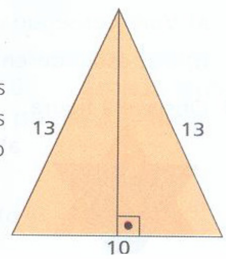
Atividades que aparecem no capítulo *Trabalhando com varias idéias e relações*, p. 107.

8. Este tabuleiro de xadrez é formado por quadrados de lado igual a 1. Como um cartão quadrado de lado 1,5 poderia ser colocado no tabuleiro de modo a tocar o maior número de quadrados (n)? Qual o valor máximo possível de **n**?

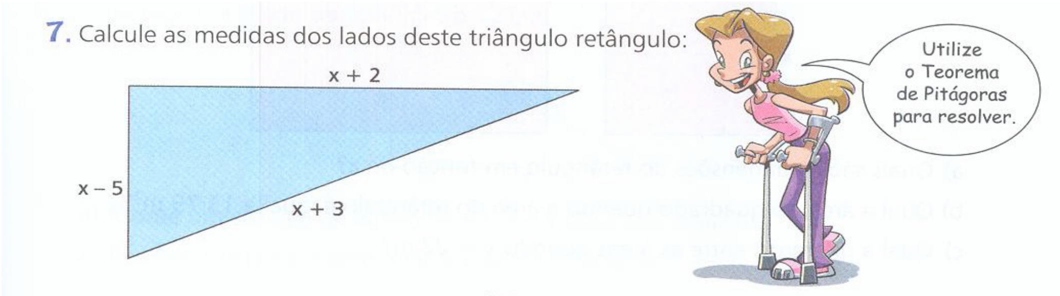




9. Num triângulo isósceles, a base mede 10 e os lados iguais medem 13. Existe um outro triângulo isósceles com lados iguais medindo 13 e com a mesma área do primeiro. Quanto mede a base desse triângulo?

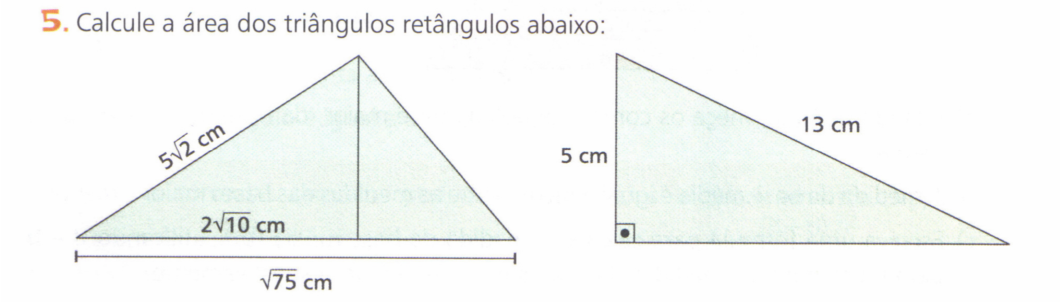


Atividade aparecendo no capítulo *Utilizando equação do 2º grau para resolver problemas*, p. 127.



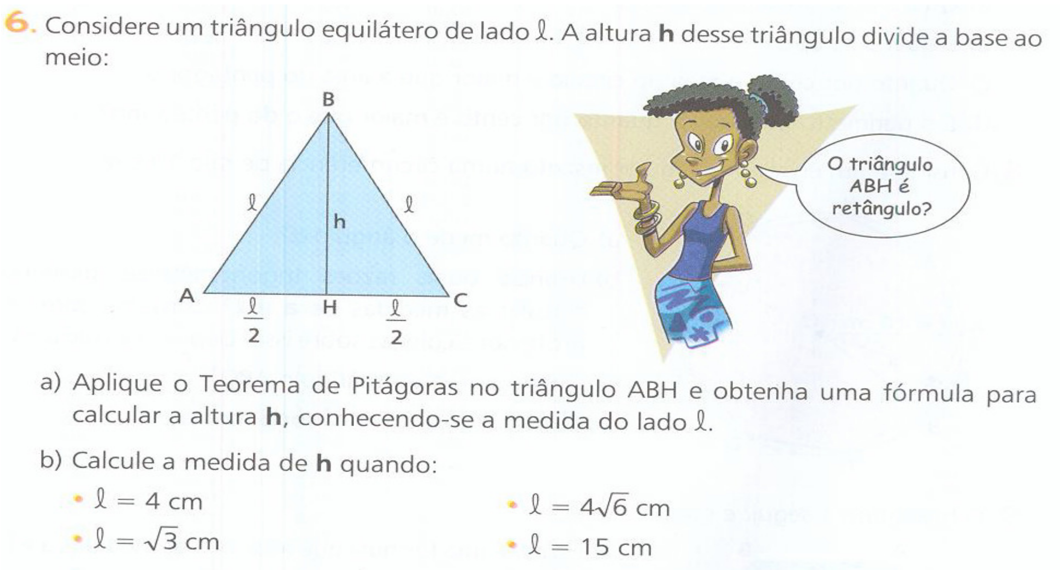
7. Calcule as medidas dos lados deste triângulo retângulo:

Atividade aparecendo no capítulo *Calculando áreas,* p. 174.



5. Calcule a área dos triângulos retângulos abaixo:

Atividade aparecendo no capítulo *Trigonometria,* p. 201.



6. Considere um triângulo equilátero de lado ℓ. A altura **h** desse triângulo divide a base ao meio:

a) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH e obtenha uma fórmula para calcular a altura **h**, conhecendo-se a medida do lado ℓ.

b) Calcule a medida de **h** quando:

- $\ell = 4$ cm
- $\ell = \sqrt{3}$ cm
- $\ell = 4\sqrt{6}$ cm
- $\ell = 15$ cm

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

S-AT 3

Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

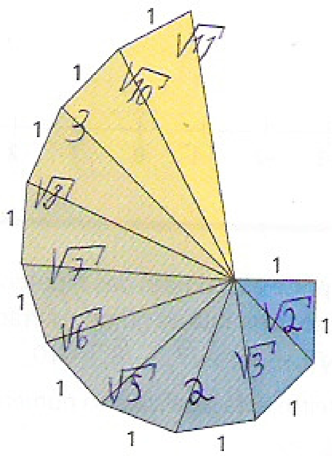
Nome: Igor Yiunf Human Franco .... data: 05/07/007
Nome: Raíssa Gabriela Zamen Pedrozo .... data: 05/07/007

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 8ª série

Neste anexo apresentamos algumas atividades que aparecem em outros capítulos e empregam o Teorema de Pitágoras em sua resolução. Leia com atenção e utilize seus conhecimentos sobre o assunto para resolvê-las.

Atividades aparecendo no capítulo *Números Irracionais*, p. 75

1. Utilizando seus instrumentos de medida, construa 10 triângulos retângulos a partir de um triângulo retângulo de catetos medindo 1 cm, conforme mostra esta figura:



a) Calcule as medidas das hipotenusas desses triângulos usando o Teorema de Pitágoras. Deixe os valores indicados na forma de radical.

$x^2=1^2+1^2$
$x^2=1+1$
$x^2=2$
$x=\sqrt{2}$

$x^2=(\sqrt{2})^2+1^2$
$x^2=\sqrt{2^2}+1$
$x^2=2+1$
$x^2=3$
$x=\sqrt{3}$

$x^2=(\sqrt{3})^2+1^2$
$x^2=\sqrt{3^2}+1$
$x^2=3+1$
$x^2=4$
$x^2=\sqrt{4}$
$x=2$

$x^2=2^2+1^2$
$x^2=4+1$
$x^2=5$
$x=\sqrt{5}$

$x^2=(\sqrt{5})^2+1^2$
$x^2=\sqrt{5^2}+1^2$
$x^2=5+1$
$x^2=6$
$x=\sqrt{6}$

$x^2=(\sqrt{6})^2+1$
$x^2=\sqrt{6^2}+1$
$x^2=6+1$
$x^2=7$
$x=\sqrt{7}$

$x^2=(\sqrt{7})^2+1$
$x^2=\sqrt{7^2}+1$
$x^2=7+1$
$x^2=8$
$x=\sqrt{8}$

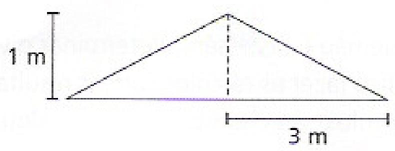
$x^2=(\sqrt{8})^2+1$
$x^2=\sqrt{8^2}+1$
$x^2=8+1$
$x^2=9$
$x=\sqrt{9}$
$x=3$

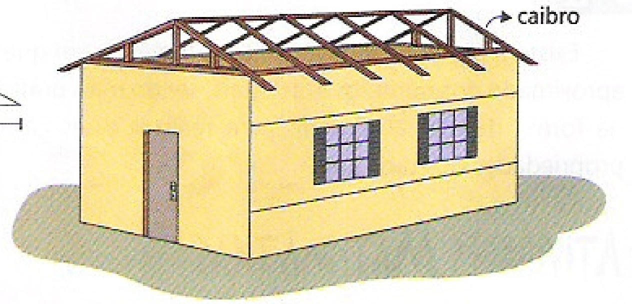
$x^2=3^2+1^2$
$x^2=9+1$
$x^2=10$
$x=\sqrt{10}$

$x^2=(\sqrt{10})^2+1^2$
$x^2=\sqrt{10^2}+1^2$
$x^2=10+1$
$x^2=11$
$x\sqrt{11}$

3 - KL

7. Um carpinteiro precisa construir o telhado de uma casa. Para isso, ele precisa calcular o comprimento dos caibros do telhado.





Observando a figura, você pode verificar a presença de um triângulo retângulo. Desenhe-o em seu caderno.

a) Que elemento desse triângulo representa o comprimento do caibro?

b) As outras medidas representam quais elementos do triângulo retângulo?

c) Qual é o comprimento do caibro?

a)-

$x^2 = 1^2 + 3^2$

$x^2 = 1 + 9$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10}$

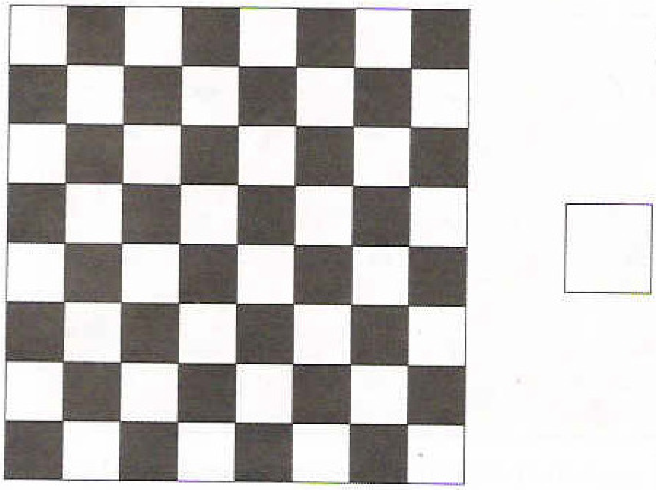
b)- catetos

c)- $\sqrt{10}$

3 - RI

Atividades que aparecem no capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações*, p. 107

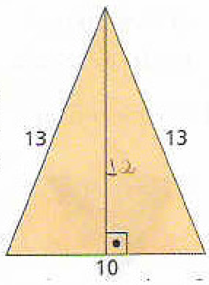
8. Este tabuleiro de xadrez é formado por quadrados de lado igual a 1. Como um cartão quadrado de lado 1,5 poderia ser colocado no tabuleiro de modo a tocar o maior número de quadrados (n)? Qual o valor máximo possível de **n**?

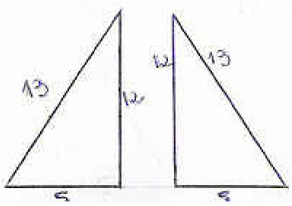


9

Fizemos várias esperiências com o quadrado de 1,5 cm, sobre o Tabuleiro com quadrados de 1 cm. E chegamos a conclusão de que o quadrado de 1,5 cm, ocupa 9 espaço dos quadrados do tabuleiro.

9. Num triângulo isósceles, a base mede 10 e os lados iguais medem 13. Existe um outro triângulo isósceles com lados iguais medindo 13 e com a mesma área do primeiro. Quanto mede a base desse triângulo?





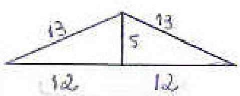
$13^2 = x^2 + 5^2$

$169 = x^2 + 25$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

$x = \sqrt{144} = 12$

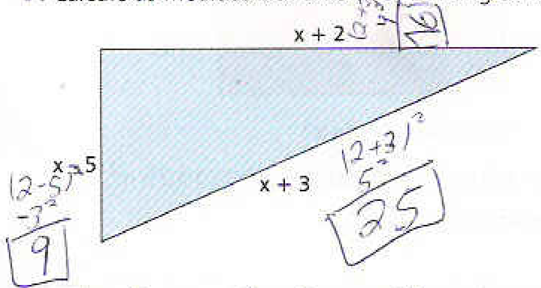


base = 24

3.Q I

Atividade aparecendo no capítulo *Utilizando equação do 2º grau para resolver problemas*, p. 127.

7. Calcule as medidas dos lados deste triângulo retângulo:



$(x+3)^2=(x-5)^2+(x+2)^2$

$(x+3)(x+3)=(x-5)(x-5)+(x+2)(x+2)$

$x^2+3x+3x+9=x^2-5x-5x+25+x^2+2x+2x+4$

$x^2+6x+9=2x^2-10x+4x+29$

$x^2-2x^2+6x+6x=-9+29$

$-x^2+12x=20$

$x=2$

$(x+3)^2=(x-5)^2+(x+2)^2$

$(2+3)^2=(2-5)^2+(2+2)^2$

$(5)^2=(3)^2+(4)^2$

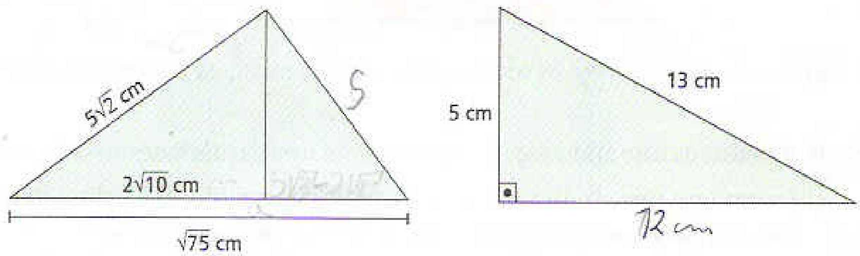
$\boxed{25=9+16}$

$25=25$

3. RJ

Atividade aparecendo no capítulo *Calculando Áreas*, p. 174.

5. Calcule a área dos triângulos retângulos abaixo:



$a = m + n$
$\sqrt{75} = 2\sqrt{10} + x$
$\sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{10} + x$
$5\sqrt{3} = 2\sqrt{10} + x$
$5\sqrt{3} - 2\sqrt{10} = x$

$h^2 = m \cdot n$
$h^2 = 2\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{10}$
$h^2 = 10\sqrt{30} - 4\sqrt{100}$
$h^2 = 10 \cdot \sqrt{30} + 4 \cdot 10$
$h^2 = 10\sqrt{30} + 40$
$h = \sqrt{10\sqrt{30} + 40}$

$a^2 = b^2 + c^2$
$13^2 = 5^2 + x^2$
$169 = 25 + x^2$
$x^2 = 169 - 25$
$x = \sqrt{144}$
$x = 12$ cm

$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}^2$

$a^2 = b^2 \cdot c^2$
$(\sqrt{75})^2 = (5\sqrt{2})^2 + x^2$
$\sqrt{75^2} = 25\sqrt{2^2} + x^2$
$75 = 25 \cdot 2 + x^2$
$75 = 50 + x^2$
$75 - 50 = x^2$
$25 = x^2$
$x = \sqrt{25}$
$x = 5$ cm

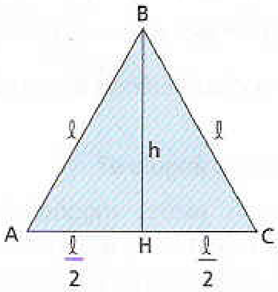
$(\sqrt{75})^2 \cdot x^2 = (5\sqrt{2})^2 \cdot (5)^2$
$\sqrt{75^2} \cdot x^2 = 25\sqrt{2^2} \cdot 25$
$75x^2 = 50 \cdot 25$
$75x^2 = 1250$
$x^2 = \frac{1250}{75} \cong 16{,}6$ cm

$\frac{b \cdot h}{2} \cong \frac{\sqrt{75} \cdot 16{,}6}{2} \cong \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{3} \cdot 16{,}6}{2} \cong$
$\frac{5\sqrt{3} \cdot 16{,}6}{2} \cong 5\sqrt{3} \cdot 8{,}3$
área $\cong 5\sqrt{3} \cdot 8{,}3$ cm

3.RI

Atividade aparecendo no capítulo *Trigonometria*, p. 201.

6. Considere um triângulo equilátero de lado ℓ. A altura **h** desse triângulo divide a base ao meio:



a) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH e obtenha uma fórmula para calcular a altura **h**, conhecendo-se a medida do lado ℓ.

b) Calcule a medida de **h** quando:

- ℓ = 4 cm
- ℓ = $\sqrt{3}$ cm
- ℓ = $4\sqrt{6}$ cm
- ℓ = 15 cm

$a^2 = b^2 + c^2$

$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$

$-h^2 = -\ell^2 + \frac{\ell^2}{4} \cdot (-1)$

$+h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$

$\frac{4h^2}{\cancel{4}} = \frac{4\ell^2}{\cancel{4}} - \frac{\ell^2}{\cancel{4}}$

$4h^2 = 4\ell^2 - \ell^2$

$h^2 = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4}$

$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$

$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \ell}{2}$

• ℓ = 4 cm

$\frac{\sqrt{3} \cdot \cancel{4}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{3}$ cm

• ℓ = $\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$ cm

• ℓ = $4\sqrt{6}$

$\frac{\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{18} = 2 \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$ cm

ℓ = 15

$\frac{\sqrt{3} \cdot 15}{2}$ cm

S-AT 3

Orientanda: Mirtes Fátima Pasini
Orientadora: Profª Drª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

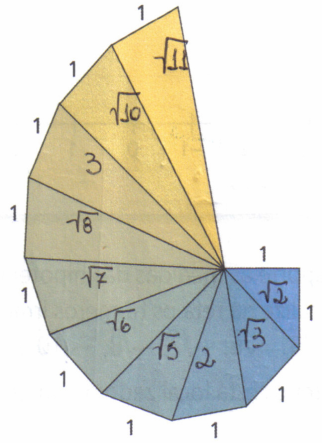
Nome: Letícia Paes Magalhães .... data: 05/07/07
Nome: Daniel Francisco dos Santos .... data: 05/07/07

Atividades retiradas da Coleção *Idéias & Relações* – 8ª série

Neste anexo apresentamos algumas atividades que aparecem em outros capítulos e empregam o Teorema de Pitágoras em sua resolução. Leia com atenção e utilize seus conhecimentos sobre o assunto para resolvê-las.

Atividades aparecendo no capítulo *Números Irracionais*, p. 75

1. Utilizando seus instrumentos de medida, construa 10 triângulos retângulos a partir de um triângulo retângulo de catetos medindo 1 cm, conforme mostra esta figura:



a) Calcule as medidas das hipotenusas desses triângulos usando o Teorema de Pitágoras. Deixe os valores indicados na forma de radical.

1) $a^2=b^2+c^2$
$a^2=1^2+1^2$
$a^2=2$
$a=\sqrt{2}$

2) $a^2=b^2+c^2$
$a^2=1^2+(\sqrt{2})^2$
$a^2=1+2$
$a^2=3$
$a=\sqrt{3}$

3) $a^2=b^2+c^2$
$a^2=1^2+(\sqrt{3})^2$
$a^2=1+3$
$a^2=4$
$a=\sqrt{4}$

4) $a^2=1^2+2^2$
$a^2=1+4$
$a^2=5$
$a=\sqrt{5}$

5) $a^2=1^2+(\sqrt{5})^2$
$a^2=1+5$
$a^2=6$
$a=\sqrt{6}$

6) $a^2=1^2+(\sqrt{6})^2$
$a^2=1+6$
$a^2=7$
$a=\sqrt{7}$

7) $a^2=1^2+(\sqrt{7})^2$
$a^2=1+7$
$a^2=8$
$a=\sqrt{8}$

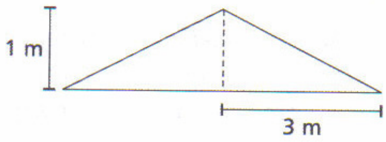
8) $a^2=1^2+(\sqrt{8})^2$
$a^2=1+8$
$a^2=9$
$a=\sqrt{9}$
$a=3$

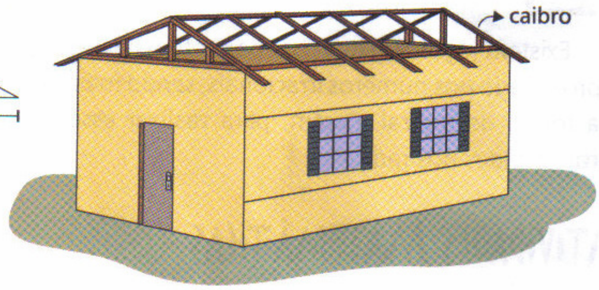
9) $a^2=1^2+3^2$
$a^2=1+9$
$a^2=10$
$a=\sqrt{10}$

10) $a^2=1^2+(\sqrt{10})^2$
$a^2=1+10$
$a^2=11$
$a=\sqrt{11}$

3 - LD

7. Um carpinteiro precisa construir o telhado de uma casa. Para isso, ele precisa calcular o comprimento dos caibros do telhado.





Observando a figura, você pode verificar a presença de um triângulo retângulo. Desenhe-o em seu caderno.

a) Que elemento desse triângulo representa o comprimento do caibro? a hipotenusa

b) As outras medidas representam quais elementos do triângulo retângulo? os catetos

c) Qual é o comprimento do caibro?

$x^2 = 1^2 + 3^2$

$x^2 = 1 + 9$

$x^2 = 10$

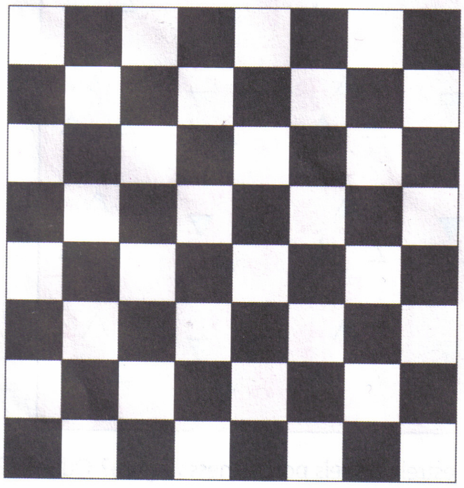
$x = \sqrt{10}$ cm

d) Para encontrar a medida aproximada do comprimento do caibro, é preciso calcular a $\sqrt{10}$. Para fins práticos, usam-se apenas duas casas decimais. Qual a medida do caibro, em metros? 3,16 metros

3 - LD

Atividades que aparecem no capítulo *Trabalhando com várias idéias e relações*, p. 107.

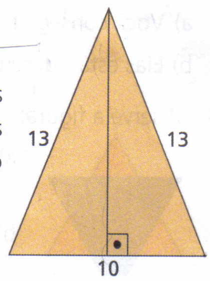
8. Este tabuleiro de xadrez é formado por quadrados de lado igual a 1. Como um cartão quadrado de lado 1,5 poderia ser colocado no tabuleiro de modo a tocar o maior número de quadrados (n)? Qual o valor máximo possível de **n**?

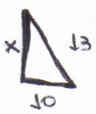


Fizemos várias tentativas e chegamos a conclusão que pode ocupar no máximo 9 quadrados, pois quando colocamos o quadrado de lado 1,5 na diagonal (conseguiu for) conseguimos chegar a esse número.

9 n que o quadrado alcançou.

9. Num triângulo isósceles, a base mede 10 e os lados iguais medem 13. Existe um outro triângulo isósceles com lados iguais medindo 13 e com a mesma área do primeiro. Quanto mede a base desse triângulo?





$= x^2 + 5^2 = 13^2$

$x^2 + 25 = 169$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

$x = \sqrt{144}$

$x = 12$

$a = \frac{10 \cdot 12}{2}$

$a = \frac{120}{2}$

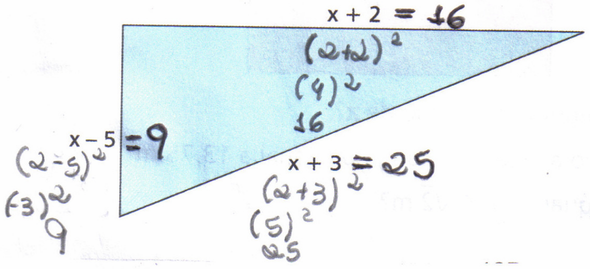
$a = 60$

a base é 24 e a área é exatamente 60

3.LD

Atividade aparecendo no capítulo *Utilizando equação do 2º grau para resolver problemas*, p. 127.

7. Calcule as medidas dos lados deste triângulo retângulo:



$(x+3)^2=(x-5)^2+(x+2)^2$

$(x+3).(x+3)=(x-5).(x-5)+(x+2).(x+2)$

$x^2+3x+3x+9=(x^2-5x-5x+25)+(x^2+2x+2x+4)$

$x^2+6x+9=x^2-10x+25+x^2+4x+4$

$x^2+6x+9=2x^2-6x+29$

$x^2-2x^2+6x+6x=29-9$

$-x^2+12x=20$

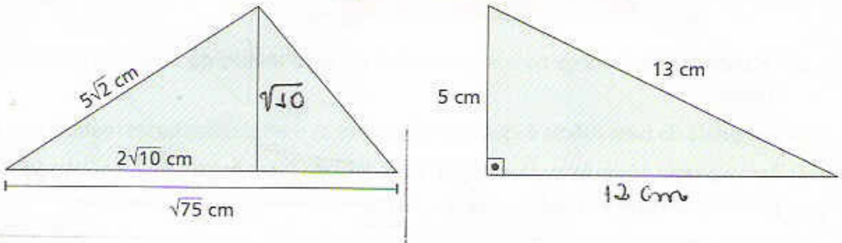
$-2^2+12.(2)=20$ (o 2 foi achado por estimativa)

$-4+24=20$

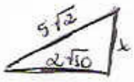
$20=20$

Atividade aparecendo no capítulo *Calculando Áreas*, p. 174.

5. Calcule a área dos triângulos retângulos abaixo:



1º triângulo



$(5\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{10})^2 + x^2$

$25.2 = 4.10 + x^2$

$50 = 40 + x^2$

$50 + 40 = x^2$

$10 = x^2$

$x = \sqrt{10}$ cm

$a = \frac{b.h}{2}$

$a = \frac{\sqrt{75}.\sqrt{10}}{2}$

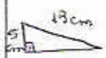
$a = \frac{\sqrt{750}}{2}$

$a = \frac{\sqrt{5^3.3.2}}{2}$

$a = \frac{\sqrt{5^2}.\sqrt{5.3.2}}{2}$

$a = \frac{5.\sqrt{30}}{2}$ cm

2º triângulo



$13^2 = 5^2 + x^2$

$169 = 25 + x^2$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

$x = \sqrt{144}$

$x = 12$ cm

$a = \frac{b.h}{2}$

$a = \frac{12.5}{2}$

$a = \frac{60}{2}$

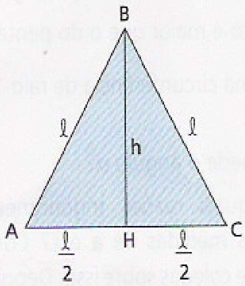
$a = 30$ cm

750	2
375	3
125	5
25	5
5	5
1	$5^3.3.2$

3.LD

Atividade aparecendo no capítulo *Trigonometria*, p. 201.

6. Considere um triângulo equilátero de lado ℓ. A altura **h** desse triângulo divide a base ao meio:

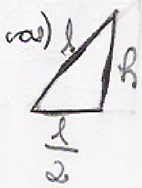


a) Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH e obtenha uma fórmula para calcular a altura **h**, conhecendo-se a medida do lado ℓ.

b) Calcule a medida de **h** quando:

- $\ell = 4$ cm
- $\ell = \sqrt{3}$ cm
- $\ell = 4\sqrt{6}$ cm
- $\ell = 15$ cm

a)



$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$

$\frac{-h^2}{1} = \frac{-\ell^2}{1} + \frac{\ell^2}{4}$ (m.m.c)

$\frac{-4h^2}{\cancel{4}} = \frac{-4\ell^2}{\cancel{4}} + \frac{\ell^2}{\cancel{4}}$

$-4h^2 = 4\ell^2 + \ell^2$

$-4h^2 = -3\ell^2 \cdot (-1)$

$4 \cdot h^2 = 3\ell^2$

$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$

$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{4}$

b)

• $\ell = 4$ cm

$h = \frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}}$

$h = \sqrt{3}$ cm

• $\ell = \sqrt{3}$ cm

$h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4}$

$h = \frac{\sqrt{9}}{4}$ cm

$h = \frac{3}{4}$ cm

• $\ell = 4\sqrt{6}$ cm

$h = \frac{4\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{4}$

$h = \frac{4\sqrt{18}}{4}$

$h = \sqrt{18}$ cm

• $\ell = 15$ cm

$h = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$h = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm