PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

PAULO ROGÉRIO SALOMÃO

ARGUMENTAÇÃO E PROVA NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO:
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E O USO DE TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

PAULO ROGÉRIO SALOMÃO

ARGUMENTAÇÃO E PROVA NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO:
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E O USO DE TECNOLOGIA

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Celina A. A. P. Abar.***

São Paulo

2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

À minha esposa, Cleusa.

À minha linda filha, Alinne.

Aos meus queridos pais, Luiz e Antonieta.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela luz, vida, saúde, e vontade de estar sempre a seu lado em todos os instantes desta caminhada...

À professora-doutora Celina A. A. P. Abar, pela competente orientação, dedicação, paciência e incentivo constantes.

Às professoras doutoras da Banca Examinadora, Ana Paula Jahn e Odete Sidericoudes, pela atenção, esclarecimentos e sugestões que muito contribuíram para melhoria da pesquisa.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pela compreensão e desenvolvimento que me proporcionaram.

A todos os colegas do curso pelas constantes contribuições e incentivos durante esta etapa de minha vida.

Agradeço, em especial, à minha família. Minha mãe e pai queridos, que sempre acreditaram em meu potencial, apoiando-me em todos os momentos de minha vida. Ao meu cunhado Sérgio pelas informações técnicas. À minha maravilhosa filha Alinne, por compreender minha ausência em alguns momentos e à minha querida esposa Cleusa, pela paciência e incentivo constantes em todos os momentos.

RESUMO

No primeiro semestre de 2005, ingressei no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na PUC/SP. Neste mesmo ano, iniciava-se o projeto de pesquisa AProvaME, cujos objetivos são: investigar concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo; formar grupos compostos por professores e pesquisadores para elaboração de atividades envolvendo alunos em processos de construção de conhecimento, argumentos e provas em Matemática e o uso de tecnologia e investigar o papel do professor como mediador neste processo. Por fazer parte deste projeto, estruturarei minha dissertação para investigar duas situações. A primeira para verificar ***em que medida, por meio da mediação do professor e das atividades propostas, é possível engajar os alunos em situações de argumentar, justificar e provar conjecturas sobre Progressões Aritméticas.*** Na segunda, investigar se ***o uso de tecnologia pode favorecer a construção de argumentos, justificativas e provas em Progressões Aritméticas pelos alunos.*** Orientado por essas questões, procurei levantar algumas observações de como deve ser feita a mediação do professor, utilizando atividades de Progressões Aritméticas para engajar os alunos em situações de argumentações, justificativas e provas, bem como qual tipo e como usar as tecnologias disponíveis: em primeiro lugar, percebi a necessidade da mediação do professor a cada término de atividade ou a cada final de um grupo de atividades, fazendo um fechamento, ou seja, propondo que os alunos confrontassem e discutissem, argumentando e justificando suas respostas, para que todos pudessem prosseguir com as atividades seguintes sem comprometimento de suas conjecturas; em seguida, verifiquei que o uso de tecnologia é um incentivo para a realização de atividades em qualquer área do conhecimento, pois os alunos sentem-se motivados por construir figuras geométricas no computador para a resolução de exercícios de Matemática; ao finalizar, com relação ao uso da tecnologia, constatei que nas atividades deste trabalho a utilização de mais uma ferramenta computacional para validação das respostas dos alunos, como o software Excel, poderia complementar os resultados obtidos. Este trabalho fundamentou-se, sobretudo nos nove tipos de tarefas extraídos do texto de Balacheff et al. (2001). A metodologia utilizada foi o experimento de ensino, objetivando sempre um aperfeiçoamento, tanto das atividades, como da interação professor – aluno – tecnologia. A pesquisa envolveu oito alunos da 1ª série do Ensino Médio do período noturno de uma escola da rede pública estadual.

Palavras–chave: Argumentação e Prova na Matemática Escolar; Padrões e Progressões; Educação Básica; Tecnologia na Educação Matemática.

ABSTRACT

In the first term of 2005, I joined the Professional Master's degree on Mathematics Teaching at PUC/SP. In this same year, the research project AProvaME, whose goals are: investigating concepts about argumentation and proofs of teenager students at schools from São Paulo state; structuring groups composed by teachers and researchers in order to elaborate activities involving students in the building process of knowledge, arguments and proofs in Mathematics, the use of technology and the investigating the teacher's role as the mediator of this process. As a part of this project, I will structure my dissertation in order to investigate two situations. The first one to verify to what extent, by the teacher's mediation and by the activities proposed, it is possible to engage students in argument, justification and proof of conjectures about Arithmetical Progressions. On the second one, investigating if the use of technology can favor the building of arguments, justification and proofs in Arithmetical Progressions by the students. Oriented by these questions, I tried to raise some observations of how the teacher's mediation should be done, using activities related to Arithmetical Progressions to engage the students in argument, justifying and proof situations, as well as which type and how to use the technologies available: first of all, I realized the need for the teacher's mediation after each ending of a group of activities, making a closure, or else, proposing to the students that they needed to confront and discuss, giving arguments, justifying their answers, so that everyone could proceed to the following activities without compromising their conjectures; subsequently; I verified that the use of technology is an incentive to the performing of activities in any area of knowledge, because the students feel motivated to build geometrical figures in the computer to solve the Mathematics exercises, concluding, with relation to the use of technology, I noticed that in the activities of this essay the usage of one more computational tool for the validation of students' answers, as the Excel software, could complement the results obtained. This essay was based, mainly on the nine types of tasks extracted from Balacheff et al. text (2001). The methodology used was the teaching experiment, always looking for an improvement, not only in the activity, but also in the teacher-student-technology interaction. The research involved 10th graders from the evening shift of a State public network school.

Keywords: Argumentation and Proof in School Mathematics, Standards and Progressions, Elementary Education, Technology in the Teaching of Mathematics

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 1
1.1 INTRODUÇÃO 1
1.2 PROJETO AProvaME.. 4
1.2.1 O PROJETO 4
1.2.2 DESENVOLVIMENTO DO PROJETO 5
CAPÍTULO 2 10
2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS 10
2.1.1 OS NOVE TIPOS DE TAREFAS 10
2.1.2 DISCUSSÕES NO FÓRUM (TELEDUC) 18
2.1.3 PADRÕES, SUCESSÕES E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS 22
2.1.4 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) 27
2.1.5 O SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE 30
CAPÍTULO 3 34
3.1 METODOLOGIA.. 34
3.1.1 EXPERIMENTO DE ENSINO 34
3.2 PLANEJAMENTO.. 37
3.2.1 INTRODUÇÃO.. 37
3.2.2 OFICINAS DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE.............................. 38
3.2.2.1 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE À PRIORI 38
3.2.2.2 ANÁLISE DA OFICINA DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE...... 42
3.2.3 ATIVIDADES PROPOSTAS 45
CAPÍTULO 4 47
4.1 ANÁLISES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS 47
CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS....................... 82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.. 86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Divisão dos temas por equipe 8
Tabela 2 - O Experimento de Ensino Multicamadas 36
Tabela 3 - Respostas das duplas referentes à Atividade 2 54
Tabela 4 - Respostas das duplas referentes à Atividade 3 59
Tabela 5 - Respostas das duplas referentes à Atividade 4 66
Tabela 6 - Respostas das duplas referentes à Atividade 5 72
Tabela 7 - Respostas das duplas referentes à Atividade 6 77

LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1 - O PROJETO AProvaME 89
ANEXO 2 - Capa dos Questionários 101
ANEXO 3 - Questionário Q1 102
ANEXO 4 - ATIVIDADES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS 108
ANEXO 5 - ATIVIDADES DAS OFICINAS DO CABRI-GÉOMÈTRE 120

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 - Respostas da Atividade 2 (dupla C) 53
Ilustração 2 - Respostas da Atividade 3 - item d da dupla C................................. 60
Ilustração 3 - Respostas da Atividade 3 - item e da dupla C................................. 60
Ilustração 4 - Respostas da Atividade 3 - item f da dupla C.................................. 61
Ilustração 5 - Respostas da Atividade 3 - item g da dupla C................................. 61
Ilustração 6 - Respostas da Atividade 3 - item h da dupla C................................. 62
Ilustração 7 - Respostas da Atividade 3 - item i da dupla C 62
Ilustração 8 - Respostas da Atividade 3 - item j da dupla C 62
Ilustração 9 - Respostas da Atividade 4 - item a da dupla C................................. 67
Ilustração 10 - Respostas da Atividade 4 - item b da dupla C............................... 67
Ilustração 11 - Respostas da Atividade 4 - item c da dupla C 67
Ilustração 12 - Respostas da Atividade 4 - item d da dupla C............................... 68
Ilustração 13 - Respostas da Atividade 4 - item e da dupla C............................... 68
Ilustração 14 - Respostas da Atividade 5 - item d da dupla D............................... 73
Ilustração 15 - Respostas da Atividade 5 - item f da dupla D................................ 73
Ilustração 16 - Respostas da Atividade 5 - item g da dupla D............................... 73
Ilustração 17 - Respostas da Atividade 6 - item a da dupla D............................... 77
Ilustração 18 - Respostas da Atividade 6 - item b da dupla D............................... 78
Ilustração 19 - Respostas da Atividade 6 - item c da dupla D 78
Ilustração 20 - Respostas da Atividade 6 - item d da dupla D............................... 79
Ilustração 21 - Respostas da Atividade 6 - item e da dupla D............................... 79
Ilustração 22 - Respostas da Atividade 7 (dupla D) 81

CAPÍTULO 1

1.1 INTRODUÇÃO

No primeiro semestre de 2005, quando iniciava o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, alguns alunos foram convidados a participar do projeto AProvaME[1] (Argumentação e Prova na Matemática Escolar). Desde então, 27 alunos desse curso e os professores do grupo TecMEM – Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, passaram a fazer parte do projeto, sob a coordenação da Profª.Drª. Siobhan Victoria Healy.

Em minha prática docente, pela minha formação inicial que é Engenharia Mecânica, não tive grandes dificuldades para me tornar um “professor padrão”. Denomino-me, assim, porque, antigamente, procurava ensinar exatamente como o fizeram comigo, sem muitas explicações dos porquês das coisas. Simplesmente, deveria aplicar a fórmula, fazer conforme o modelo da lousa e aceitar tudo o que o “professor padrão” falava.

Quando tive a oportunidade de participar desse projeto, sem saber direito o que é prova em Matemática, pois, em meu curso em Engenharia não se vê quase nada, ou melhor, nada sobre provas e demonstrações. Assim, procurei esforçar-me ao máximo, buscando um melhor aproveitamento, para que esta experiência fosse da melhor forma possível aproveitada, tanto para meus alunos como para mim.

O projeto AProvaME está dividido em várias etapas, e a primeira consiste em aplicar aos alunos, na faixa etária entre 14 e 16 anos (8ª série do Ensino Fundamental ou 1ª série do Ensino Médio) um questionário baseado no elaborado

[1] Projeto AProvaME – Anexo 1

por Healy e Hoyles (1998), contendo atividades de Álgebra e Geometria, no qual se procura averiguar qual a situação dos alunos brasileiros sobre provas e demonstrações. Este questionário passou por adaptações feitas pela equipe de Doutores e Mestrandos, da qual faço parte, para melhor se adaptar à nossa realidade.

Em outra etapa do projeto AProvaME, os mestrandos chamados de professores-colaboradores foram divididos em equipes que desenvolveram atividades em Matemática envolvendo provas e argumentações, além das tecnologias, como softwares de Geometria Dinâmica, Excel e outros.

Estas atividades foram desenvolvidas ao longo do projeto, o layout final ficou pronto depois de várias sugestões, discutidas dentro de cada equipe, assim como foram disponibilizadas em fóruns de discussões das equipes, para que outras equipes analisassem. Após a versão final, as atividades foram aplicadas a alunos de escolas públicas e particulares e analisadas com o intuito de sugerir melhorias em Matemática, bem como na prática docente dos professores.

Hoje, após alguns anos de experiências e prestes a concluir o curso de Mestrado em Ensino de Matemática e, ainda, participando do projeto sobre prova e demonstração, percebo a grande diferença em ensinar o aluno a fazer as coisas como a gente quer que ele faça e interagir com ele, para, ajudá-lo a compreender, desenvolver, aperfeiçoar e aprofundar seus conhecimentos, tornando-se crítico e participativo quanto ao ensino-aprendizagem dele próprio.

Trabalhei na equipe 2 com Progressões Aritméticas (PA), Progressões Geométricas (PG) e Geometria Analítica (Paralelismo e Perpendicularismo), e minha escolha foi pela PA, pois, pude trabalhar as atividades de PA algebricamente e geometricamente, utilizando o software Cabri-Géomètre, sendo este um software de geometria dinâmica que permite, além de construir e medir uma infinidade de figuras geométricas, poder manipulá-las de uma forma dinâmica, verificando a veracidade de uma conjectura, e ainda, investigar, explorar, experimentar propriedades, etc. Escolhi, portanto, trabalhar, utilizando o software Cabri-Géomètre, inserido no tema prova e argumentação em Progressões Aritméticas.

Neste trabalho, procuro responder às seguintes questões:

Em que medida, por meio da mediação do professor e das atividades propostas, é possível engajar os alunos em situações de argumentar, justificar e provar conjecturas sobre Progressões Aritméticas?

O uso de tecnologia pode favorecer a construção de argumentos, justificativas e provas em Progressões Aritméticas pelos alunos?

Em minha prática docente, hoje, sempre que possível, procuro abordar provas e algumas demonstrações, e solicito aos alunos que justifiquem suas respostas por meio de seus argumentos, para que convençam outros e se convençam de suas respostas, mesmo que estejam erradas ou incompletas, pois, com suas justificativas, pode-se saber onde estão errando, ajudando-os a compreender e corrigir seus erros, buscando, assim, um aperfeiçoamento das respostas.

Procuro, também, ajudar o aluno a entender por que precisa argumentar e provar, aproveitando o que ele sabe fazer para passar da prova empírica à conceitual, assim como, em língua natural. Portanto, os professores devem estar engajados em situações e atividades, sempre buscando ferramentas, para abordar questões de provas com os alunos em sala de aula.

Inicialmente, este trabalho traz no Capítulo 1, como foi o nascimento do Projeto AProvaME e seu desenvolvimento no Brasil.

No Capítulo 2, são apresentados os Fundamentos Teóricos, sendo esta fundamentação baseada no texto de Balacheff et al. (2001), que apresenta os nove tipos de tarefas sobre Prova que serão detalhados mais adiante. As discussões feitas via ambiente Virtual estão também descritas nesse capítulo, assim como um breve relato sobre Padrões, Sucessões e Progressões Aritméticas, o que trazem os Parâmetros Curriculares Nacionais a respeito de argumentações e provas e, ainda, o papel do Software Cabri-Géométre.

No Capítulo 3, é apresentada a metodologia utilizada neste trabalho, o planejamento da oficina do Cabri, mostrando o que se esperava e o que realmente aconteceu, o planejamento das atividades sobre Progressões Aritméticas e ainda como foi escolhido o tema e como foram desenvolvidas estas atividades.

No último capítulo, Capítulo 4, optou-se por apresentar a análise a priori de cada uma das atividades, procurando prever quais seriam as respostas, as dificuldades e as atitudes dos alunos durante a resolução das atividades, bem como a postura do professor, seguida da análise a posteriori, já discutindo as respostas dos alunos, fazendo, também, comparação com o que foi previsto na análise a priori.

Finalmente, serão apresentadas as conclusões, bem como sugestões para futuros trabalhos quanto ao ensino-aprendizagem sobre argumentação e prova em Progressões Aritméticas com a utilização de uma ferramenta computacional.

1.2 PROJETO AProvaME[2]

1.2.1 O PROJETO

[2] Projeto AProvaME – Anexo 1

Com a aprovação do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq), nasceu o projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar, ou seja, o projeto AProvaME, sob a coordenação da Profª.Drª. Siobhan Victoria Healy, que faz parte do Grupo de Pesquisas Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM). Este projeto conta também com a participação de docentes desse grupo.

As pesquisas sobre argumentações, justificativas, demonstrações e provas em Educação Matemática são alguns dos objetos de estudo, no qual se baseou este projeto. Além de observar os alunos em suas argumentações e justificativas e da aceitação desses argumentos pelos professores, deseja-se saber, também, o quanto os ambientes computacionais podem ajudar os alunos em suas justificativas e quais mudanças ocorreram na prática docente com relação a argumentações e demonstrações.

1.2.2 DESENVOLVIMENTO DO PROJETO[3]

O projeto AProvaME foi organizado em duas fases; na primeira, foi feito um levantamento com alunos, entre 14 e 16 anos, de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo, para saber em que medida esses alunos estão familiarizados com provas e demonstrações em Matemática. Na segunda fase, os resultados obtidos e analisados da primeira etapa, serviriam como base para a elaboração, aplicação e análise de atividades envolvendo situações de aprendizagem sobre provas e demonstrações.

Procurarei detalhar estas fases e as etapas do projeto AProvaME.

Na primeira fase, o início dos trabalhos via TelEduc[4] foi em agosto de 2005 com a realização de reuniões presenciais, com duração de 1h30, realizadas

[3] Para maiores detalhes do Projeto AProvaME ver anexo 1

quinzenalmente, reunindo pesquisadores e os mestrandos, como professores-colaboradores.

O instrumento que serviu para analisar a compreensão dos alunos sobre provas e demonstrações foi o questionário denominado Q1 (anexo 3), elaborado pelos participantes do projeto AProvaME, sendo este instrumento baseado no questionário concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e utilizado em outros países. Entre os participantes e coordenadores do projeto, procurou-se moldar o questionário da melhor forma a se adaptar à realidade dos alunos do Brasil. Os domínios matemáticos envolvidos neste questionário são Álgebra e Geometria, que utilizam o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988).

Pelo TelEduc, nós, professores-colaboradores, indicamos cinco turmas de alunos de 8ª série do Ensino Fundamental ou 1ª série do Ensino Médio das escolas onde lecionamos, para que fossem selecionadas apenas três, para as quais aplicaríamos o questionário. Também por este ambiente, participamos de vários Fóruns de discussão que nos acrescentaram muito sobre os conceitos de provas e demonstrações.

Em outubro de 2005, os questionários a serem aplicados para cerca de 2.000 alunos já estavam prontos e, nessa semana, deu-se início à aplicação dos mesmos.

Após a aplicação, tivemos muitas discussões, tanto a distância pelo TelEduc, como presencialmente nas reuniões quinzenais, sobre como avaliar e codificar as respostas dos alunos nos questionários. Dentre as análises feitas para os 1.998 alunos que responderam ao questionário, segundo o projeto, estão: avaliar em que medida os alunos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos,

---

[4] TelEduc – Software distribuído pela GNU-General Public License, que é um ambiente para realização de cursos a distância através da internet. Utilizado como espaço virtual para compartilhamento de informações e comunicação entre os membros do projeto AProvaME. Desenvolvido pelo Nied (Núcleo de Informática Aplicada à Educação), e pelo Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos, além de identificar a influência da forma de apresentação da prova na compreensão dos argumentos.

Nós, professores-colaboradores, também, respondemos algumas informações sobre a escola, o perfil dos alunos, da turma e do professor, para que, posteriormente, os dados coletados fossem organizados e classificados.

Na segunda fase, havia duas vertentes a serem seguidas e analisadas: uma com relação à *aprendizagem*, com o objetivo de elaboração e análise das situações em que os alunos apresentaram dificuldades ou compreensão de questões que trabalhavam provas e a outra seria com relação ao *ensino*, na qual a atenção deveria se voltar ao professor, tanto na elaboração das atividades como nas modificações das ações exercidas pelos docentes em sala de aula.

Deste modo, a primeira etapa desta segunda fase iniciou-se em março de 2006, sendo constituídas cinco equipes para a segunda fase e cada equipe contava com dois coordenadores e cinco professores-colaboradores, com encontros em dias e horários diferentes, para que todos tivessem disponibilidade de horário. No projeto, os Temas considerados foram:

Ensino Fundamental

Tema 1: Múltiplos e divisores (inclusive MDC e MMC);
Tema 2: Teorema Fundamental da Aritmética;
Tema 3: Congruência e suas aplicações nas propriedades dos quadriláteros;
Tema 4: Teorema de Pitágoras; e
Tema 5: Teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal e teorema da soma das medidas dos ângulos de um triângulo.

Ensino Médio

Tema 1: Conjuntos numéricos;

Tema 2: Progressões Aritméticas e Geométricas;

Tema 3: Funções do 1° e 2° graus;

Tema 4: Geometria espacial (paralelismo e perpendicularismo); e

Tema 5: Geometria analítica (paralelismo e perpendicularismo).

Os temas foram distribuídos entre as equipes, conforme tabela abaixo.

Tabela 1 - Divisão dos temas por equipe

Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3	Equipe 4	Equipe 5
Funções	Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas	Conjuntos numéricos	Múltiplos e divisores (incluindo mdc e mmc)	Teorema Fundamental da Aritmética.
Teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal e teorema da soma das medidas dos ângulos de um triângulo.	Geometria Analítica (paralelismo e perpendicularismo)	Geometria Espacial (paralelismo e perpendicularismo)	Congruência e aplicações nas propriedades dos quadriláteros	Teorema de Pitágoras.

Esta fase do projeto, além do desenvolvimento das atividades, tinha como objetivo testá-las e aplicá-las a uma pequena amostra de alunos, para que, após várias discussões do grupo, estas atividades fossem reformuladas. Tarefa esta que foi realizada por alguns professores-colaboradores.

A etapa da segunda fase ocorreu no início do segundo semestre de 2006, quando cada equipe, após as análises, dava sugestões para reformulação das atividades internamente e as disponibilizavam no ambiente TelEduc para que fossem discutidas nos intergrupos.

Nesta etapa, cada equipe, de acordo com a orientação de seus coordenadores, resolveu as atividades de outras equipes. No meu caso, nossa equipe foi dividida em duplas; em outras, a equipe toda trabalhou em todas as atividades e muitas sugestões foram feitas, sempre com o objetivo de melhorar e aperfeiçoar as atividades. Durante a resolução das atividades, algumas equipes foram filmadas e gravadas, tanto suas falas e discussões como o acompanhamento das resoluções das atividades via ambiente computacional. Através dos Fóruns do TelEduc, foi possível sugerir correções e melhorias das atividades durante sua resolução.

Ainda nesta etapa, alguns professores-colaboradores aplicaram as atividades de outras equipes, para um pequeno grupo de alunos, como uma aplicação "piloto", descrevendo determinadas reflexões, objetivos atingidos e as dificuldades e problemas enfrentados, disponibilizando um relatório no TelEduc, visando novas discussões para reformular e complementar às atividades em questão.

A terceira e última etapa teve como objetivo comparar resultados, analisando os resultados obtidos na fase 1 com os da fase dois, para que fossem avaliados em que medida as principais dificuldades sobre provas encontradas anteriormente foram sanadas e quais características de prova necessitarão de novas observações.

Esta comparação poderá, neste trabalho, ser feita, pois, depois de aplicadas as atividades que elaborei aos alunos, aplicarei o questionário sobre prova utilizado na fase 1 (questionário Q1) a estes mesmos alunos, podendo, assim, analisar até que ponto, por meio de minha mediação e com as atividades elaboradas, foi possível engajar os alunos em situações envolvendo argumentos, justificativas e provas em Progressões Aritméticas com o uso de tecnologia.

CAPÍTULO 2

2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1.1 OS NOVE TIPOS DE TAREFAS

A publicação do texto de Balacheff et al., (2001) *Preuve et démonstration: quelques questions essentielles*[5] (IREMs de Grenoble et Rennes), é uma compilação de vários trabalhos de pesquisas desenvolvidas na França abordando nove tipos de tarefas ou situações com o objetivo de introduzir os alunos no tema argumentação e prova, ou seja, tais tarefas foram classificadas quanto aos objetivos a serem atingidos com os alunos pelo professor.

Dentre os nove tipos de tarefas que serão detalhados a seguir, estão:

1 - tarefas de iniciação à prova.
2 - tarefas que dão sentido a uma frase.
3 - tarefas relativas aos enunciados de teoremas.
4 - tarefas para dar sentido à demonstração.
5 - tarefas sobre a utilização das palavras de ligação.
6 - tarefas para encontrar um encadeamento dedutivo.
7 - tarefas para aprendizagem da escrita.
8 - tarefas para tentar descobrir a estrutura de textos de demonstração.
9 - tarefas para vencer certos obstáculos.

---

[5] Para trabalhar no Projeto AProvaME com esta referência, parte do texto foi traduzida pelos coordenadores do Projeto.

A tarefa tradicional do tipo “Demonstrar que”, é destinada a alunos que já possuem conhecimentos sobre demonstração, portanto, não é uma tarefa para introduzir conhecimento ao aluno e, sim, para que aplique o que já possui.

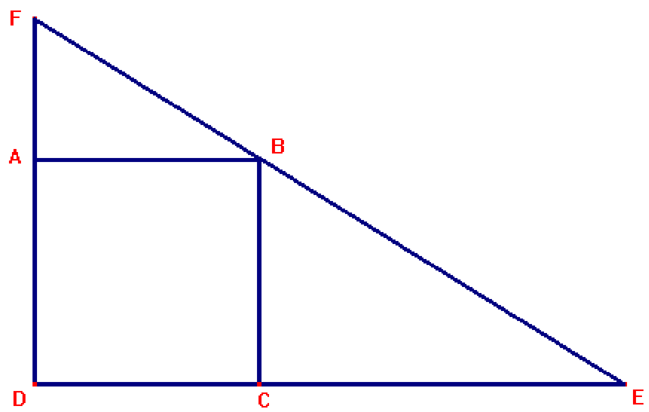
A ***tarefa de iniciação à prova*** é o tipo de tarefa que faz com que o aluno descreva todos os argumentos que possui, para que seja aceita ou não uma determinada conjectura, ou seja, por mais completa que seja sua resposta sempre irá faltar algo, para que esta chegue a ser uma prova. Portanto, para que a tarefa seja de iniciação à prova, deverá trazer, não apenas argumentos de várias naturezas, mas também uma explicação para que estes argumentos justifiquem sua conjectura.

Os tipos de tarefas que pedem ao aluno para enunciar ou validar uma conjectura, para que analise se esta acontece “sempre” ou, “às vezes”, ou “nunca”, são tarefas de iniciação à prova, conforme exemplos extraídos do texto descrito abaixo:

Exemplo 1 (p. 85): Complete com “sempre” ou “nunca” ou “às vezes” a frase seguinte:

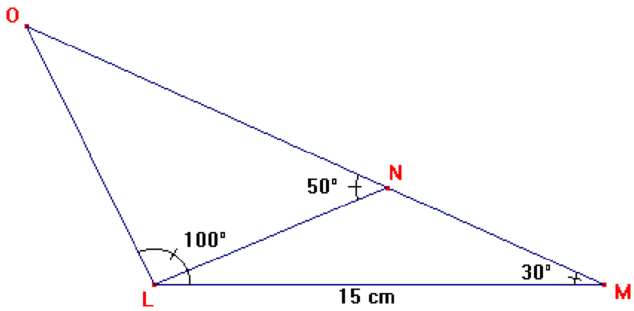
“Os pontos médios dos lados de um quadrilátero...................os vértices de um paralelogramo.”

Exemplo 2 (p. 85): ABCD é um quadrado de 8 cm de lado. AF = 5cm, CE = 13 cm. F, B e E estão alinhados?



No exemplo 2, é importante observar o que está sendo questionado, pois esta proposição deve gerar dúvidas entre os alunos, além de despertar interesse. Caso não desperte interesse nem gere dúvidas, a atividade perderá sua função de conjectura.

Exemplo 3 (p. 86): OLM é um triângulo. O ponto N pertence ao segmento OM. Ainda, ONL = 50°; OLM = 100°; OML = 30° e LM = 15 cm. A figura está mal construída; ela não corresponde aos dados. Construa uma figura respeitando este enunciado. Explique seu método.



O exemplo 3 apresenta uma tarefa de construção em que é preciso deduzir para executar; portanto é necessário que o aluno tenha realmente trabalhado na construção para fazer uma reflexão, é importante que o aluno justifique essa construção.

A ***tarefa que dá sentido a uma frase*** é um tipo de tarefa que exige do aluno a compreensão correta do sentido da frase. No entanto, em algumas atividades, o aluno limita-se a compreender de que se trata, levando-o a confundir o sentido da frase. Caso o aluno não entenda o que se pede na atividade, a intervenção do professor poderá solucionar o problema, mas, "não a atitude fundamental de não pesquisar o sentido preciso do que é dito" (p. 87).

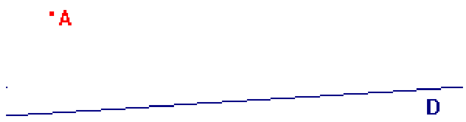
Exemplo 1 (p. 87): Eis uma frase exata: "a incógnita x representa um comprimento, a equação E não tem solução negativa." Para uma das questões seguintes, encontrar a resposta correta: sim, não, nada se pode afirmar.
Eis algumas das questões apresentadas:

- (–2) é solução da equação E?
- 3 é solução da equação E?
- O número t não é solução da equação E. t é negativo?

Exemplo 2 (p. 87):

- Complete escolhendo entre as palavras, às vezes, sempre, jamais: “um quadrilátero que tem um ângulo reto............é um retângulo.”

- Complete escolhendo entre as palavras o, a, um, uma: “Trace.......reta passando por........ponto A e secante à.........reta(D).”



Questões para completar frases escolhendo entre as palavras: um, uma, certos, alguns, nenhum, todos, às vezes, sempre ou jamais são tarefas que podem levar os alunos a explicitarem suas idéias, procurando desacordo entre eles, fazendo com que o professor gerencie uma discussão de maneira que todos sejam beneficiados.

As ***tarefas relativas aos enunciados de teoremas*** podem ter como objetivo, dar sentido ao teorema e, também, saber em que situação utilizá-lo. Elas têm o objetivo de visualizar os teoremas em enunciados que possuam diversas configurações, saber reconhecer hipóteses e distinguir o próprio teorema de seu recíproco.

Exemplo (p. 89): Para introduzir o Teorema de Pitágoras Étienne Thépot, (1988, apud Balacheff et al., 2001), propôs uma longa seqüência. Esta comporta, em particular, trabalhos sobre puzzles (quebra-cabeça) e a idéia interessante de raciocinar sobre figuras em perspectiva cavaleira.

Pode existir tarefa que, para se introduzir um teorema, seja necessário validar ou rejeitar uma conjectura, e esta conjectura deve criar muitos conflitos entre os alunos, para que encontrem vontade para buscar os argumentos necessários à prova.

As ***tarefas para dar sentido à demonstração*** têm como objetivo fazer com que o aluno entenda o que está lendo, por exemplo, pede-se ao aluno que estude uma demonstração e explique-a com suas palavras. O contexto em que a atividade está envolvida é essencial para atingir esse objetivo.

Exemplo (p. 90): Se (D) e (D’) são duas retas dadas, A e A’ dois pontos que não pertencem nem a (D) e nem a (D’), a todo ponto M de (D) associa-se o ponto M’de intersecção de (D’) e da paralela à (AM) passando por A’. O que se passa com as retas (MM’)?

Para este tipo de tarefa, as conjecturas dos alunos, muitas vezes, são complexas, portanto, a escolha da atividade é de fundamental importância para que se atinja o objetivo de dar sentido à demonstração.

As ***tarefas sobre a utilização das palavras de ligação***, como “se... então”, “por que”, “como”, “quando”, têm como objetivo fazer com que o aluno domine o uso dessas palavras, pois este domínio *“parece ser um dos elementos mais importantes no ensino”* (Balacheff et al., 2001, p. 90). Estas tarefas pedem ao aluno que escreva com outras palavras (palavras equivalentes) uma mesma frase de um texto de demonstração, ou ainda, para que preencham algumas lacunas deixadas no texto.

Uma maneira interessante para validar as conjecturas dos alunos é usar a aula seguinte, para que eles avaliem todas essas respostas, pois aceitarão as respostas boas e rejeitarão as ruins e ainda com boas justificativas.

Nesta tarefa, também, é muito importante a escolha das palavras que estruturam a demonstração, pois esta estrutura deve incomodar o aluno, fazendo com que ele se interesse e pesquise sobre o assunto e sinta prazer em escrever.

As ***tarefas para encontrar um encadeamento dedutivo*** têm como objetivo, preparar o aluno para que, posteriormente, chegue à demonstração, ou seja, pede-se para ele organizar conjecturas e propriedades de uma maneira dedutiva. Esta tarefa deve ser trabalhada em grupo, para que enriqueça as respostas por meio de conflitos.

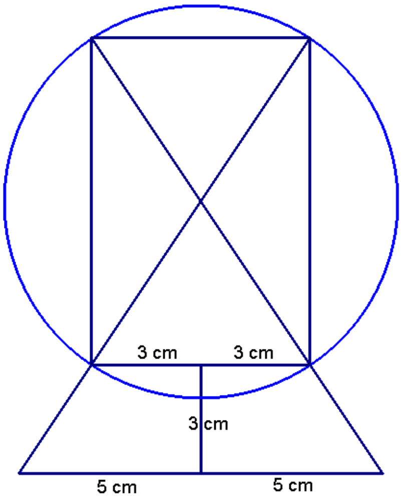
Exemplo (p. 92): Escrever um plano de raciocínio em que "O, A e P estão alinhados"

- Posicionar o sistema de referência em O.
- Dar as coordenadas de A e P.
- Escrever a equação de (AP).
- Verificar se O é um ponto de (AP).
- Concluir.

Para esta tarefa, Isabelle Geslin (1993, apud Balacheff et al., 2001) propõe aos alunos escreverem o que ela chama de planos de raciocínio (planos de resolução de problemas). A sugestão dos autores é que se organizem grupos de trabalho, a fim de dar sentido às respostas que surgirem nos conflitos entre os alunos.

As ***tarefas para aprendizagem da escrita*** têm como objetivo suprir "uma prática quase inexistente da escrita matemática" (Balacheff et al., 2001, p.93), fazendo com que esses alunos sejam favorecidos por essas tarefas para que sejam capazes de produzir verdadeiros textos, pois, quando os alunos começam a aprendizagem da demonstração, não estão habituados à escrita Matemática. Estas tarefas devem propor escritas em Matemática, sem que sejam demonstrações e, ainda, algumas exigem um domínio preciso da leitura de um enunciado escrito pelos alunos.

Exemplo (p. 94): Escrever um programa de construção para refazer a figura abaixo:



A tarefa acima foi descrita por Michèle Martin (apud Balacheff et al., 2001, p.94). Tarefas desse tipo são propostas em grande número para alunos, entre 11 e 13 anos, pois, seu interesse é, por um lado, escrever matematicamente um texto e, por outro, fazer com que o aluno crie conjecturas antes de se empenhar na elaboração do texto.

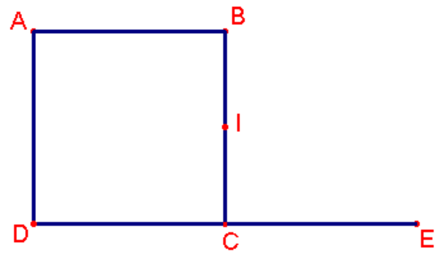
As ***tarefas para tentar descobrir a estrutura de textos de demonstração*** têm como objetivo fazer com que o aluno compreenda o tipo de formação que possui um texto de demonstração, como foi organizado em etapas que se articulam e que o aluno consiga perceber que, neste tipo de atividade, em cada etapa, existe um dado ou um teorema ou uma conclusão.

Exemplo 1 (p.95): São propostos quatro enunciados e seis demonstrações com uma questão: Qual(is) demonstração(ões) corresponde(m) a qual enunciado. Justifique sua escolha. (IREM de Rennes, 1996, apud Balacheff et al., 2001).

Exemplo 2 (p. 96): A partir de uma figura, escrever o enunciado de um problema e sua solução.

As ***tarefas para vencer certos obstáculos*** devem ser preparadas, de acordo com o tipo de obstáculo a ser vencido quanto à redação da demonstração, pois alguns podem fazer parte da aprendizagem da demonstração, como a falta de domínio de um enunciado ou a dúvida entre teorema e sua recíproca e outros podem estar ligados aos conteúdos matemáticos envolvidos na demonstração.

Exemplo (p. 97): Dado o enunciado e a figura: ABCD é um quadrado. I é o ponto médio do segmento BC e E o ponto simétrico de D em relação à C. Mostre que I é o ponto médio do segmento AE.



E a demonstração:

ABCD é um quadrado, então, AD é paralelo a BC.

Sabe-se que E é simétrico de D em relação a C, então C, é o ponto médio do segmento DE.

No triângulo ADE, a reta CI é paralela a um lado AD e passa pelo ponto médio do outro lado DE, então, ela corta o terceiro lado em seu ponto médio.

Assim, I é o ponto médio do segmento AE.

Este tipo de tarefa (IREM de Rennes, 1995, apud Balacheff et al., 2001) tem por finalidade levar os alunos a descobrirem que a demonstração acima não utiliza do dado “BI = IC”, contido no “I ponto médio do segmento BC”. Como o resultado não é verdadeiro se I é um ponto do segmento BC diferente do ponto médio, esta demonstração contém uma falha que precisa ser encontrada.

Nas atividades desenvolvidas neste trabalho que buscam engajar os alunos em situações de argumentar, justificar e provar conjecturas sobre

Progressões Aritméticas[6], procurei, em algumas delas, especificamente, relacionar às idéias apresentadas nos nove tipos de tarefas.

Após os alunos responderem estas atividades, responderão ao questionário da fase 1 denominado Q1 (anexo 3), podendo, portanto, comparar as respostas dos 1.998 alunos da primeira fase do projeto com os que trabalharam com as atividades sobre Progressões Aritméticas, para verificar se houve um maior envolvimento dos alunos e se as tecnologias e recursos disponíveis, assim como a mediação do professor favoreceram este engajamento dos alunos com argumentação e provas.

2.1.2 DISCUSSÕES NO FÓRUM (TELEDUC)

As discussões realizadas no Fórum de Discussão e que nos acrescentaram muito sobre os conceitos de provas e demonstrações, foram várias, como por exemplo, ao ler um capítulo da Tese de Doutorado em Educação Matemática de Pietropaolo (2005). Neste fórum, apareceram muitas observações interessantes, além de diversas discussões sobre como vários pesquisadores em Educação Matemática tratam questões sobre justificativa, argumentação, prova e demonstração.

As discussões mais importantes, de meu ponto de vista, extraídas do fórum do TelEduc foram, inicialmente, quando a professora pesquisadora 1 perguntou a todos *"Quais os argumentos apresentados no texto do Ruy, a favor da inclusão de provas nos currículos?"*, foi quando, o professor colaborador 1 citou as falas de Mariotti, 2001 (apud Pietropaolo, 2005, p. 73), *"não se pode ensinar matemática sem introduzir a demonstração"*. Outro argumento citado pelo professor colaborador 2, foi adotar a premissa de que a *"demonstração proporciona a compreensão da natureza do conhecimento matemático, pois esta faz parte da própria matemática" (Thurston,1994, apud Pietropaolo,2005, p.77).*

[6] Atividades apresentadas, conforme anexo 4.

Outra discussão que muito contribuiu para todos nós, iniciou, quando o professor pesquisador 2 pediu para que nós, professores-colaboradores, respondêssemos, conforme nosso ponto de vista, sobre a relação entre argumentação e demonstração e ainda se elas são a mesma coisa.

Houve um consenso de que argumentação e demonstração são diferentes.

Com relação às respostas sobre a argumentação, percebi que as opiniões são muito parecidas, o professor colaborador 3 disse *"Na argumentação, procura-se convencer alguém que um determinado resultado é correto, isto é, assume um caráter pessoal".* O professor colaborador 1 citou que é o aluno quem constrói, por meio dos anos de escolaridades, a habilidade de argumentar e, conseqüentemente, torna- se mais crítico e exige justificativas a todas as respostas.

O professora pesquisadora 1, arriscou uma definição e acrescentou:

> *A palavra argumentar está ligada ao discurso jurídico e retórico e, nestes contextos, tem uma forte conotação de convencimento, persuasão; um bom argumentador pode, em princípio, convencer o interlocutor de uma afirmação, sem que esta tenha sequer um parentesco longínquo com a verdade. É suficiente que ele domine alguns recursos básicos de retórica. E é claro que essa significação do termo argumentação está muito distante da idéia que os matemáticos fazem de uma boa demonstração*.

O professor colaborador 4 falou ainda, que não vê prova e argumentação como sinônimos, citou que em busca de uma prova a argumentação é um processo de fabricação e que a prova é o produto final e se questiona *"o que é a prova senão o conjunto de argumentos utilizados, ou seja, a argumentação?"*

Concluímos que, na Matemática, a argumentação usa justificativas para (“provar” a) convencer alguém de que você está certo, mesmo que na realidade não esteja.

Com relação às respostas sobre demonstração ou prova, também, houve um consenso, o professor colaborador 5 disse: *“Na demonstração, o resultado é universal e de caráter impessoal, os resultados são garantidos pela Matemática formal (axiomas, teoremas)”.* O participante 1 disse: *“Na demonstração, trata-se de se assegurar que um resultado é a conseqüência de teoremas já conhecidos”*. Pode-se observar que a demonstração, segundo o ponto de vista dos participantes, é como uma prova formal, e para se chegar à demonstração é preciso muito conhecimento matemático e segundo meu ponto de vista, devo concordar com eles.

Ainda na discussão da tese de Pietropaolo (2005), outra contribuição importante que apareceu no Fórum, foi quanto à explicação da complexa relação entre argumentação e demonstração, citando a divergência entre vários pesquisadores, disse que, segundo Duval (apud, Pietropaulo, 2005) a argumentação não é um caminho para a construção da demonstração e explicou que *“a heterogeneidade entre argumentação e a demonstração ocorre não apenas do ponto de vista lógico, mas também do cognitivo”*. No entanto, outros pesquisadores como Boero, Garutti e Mariotti (apud, Pietropaulo, 2005), possuem outra visão, dizem que *“a argumentação e a demonstração têm uma relação que é produtiva e inevitável, tanto em Matemática como em Educação Matemática”.*

Durante o fórum, o que provocou maior participação, tanto dos professores colaboradores como dos professores pesquisadores foi quanto às discussões e trocas de informações entre os professores pesquisadores, sobre argumentação e demonstração, o que trouxe grandes contribuições a todos os envolvidos.

O professor pesquisador 2 citou sobre a relação entre argumentação e demonstração que:

> *Não haveria nem continuidade nem ruptura entre argumentação e demonstração, mas uma relação complexa e constitutiva de cada uma: a argumentação constitui um obstáculo epistemológico à aprendizagem da demonstração e, em especial, da prova em Matemática (Balacheff, 1999, apud Pietropaolo, 2005, p. 75).*

No entanto, o professor pesquisador 3 referiu-se quanto à posição de Balacheff sobre a citação acima e explicou que:

> *Um obstáculo epistemológico é um conhecimento (não uma dificuldade) que tem um domínio de validade restrito e que fora desse domínio de validade revela-se improdutivo, quando se pretende fazer uma generalização. Esse conhecimento provoca um conflito entre conhecimentos adquiridos e conhecimentos a adquirir. Quando Balacheff diz que a argumentação constitui um obstáculo epistemológico à aprendizagem da demonstração, entendo que ele quer dizer que a demonstração necessita de uma articulação própria, que é peculiar do raciocínio matemático. É necessário passar de uma hipótese para uma primeira conclusão; dessa primeira conclusão para uma segunda conclusão e, assim por diante até atingir a tese. No entanto, a argumentação é uma forma de discurso que não utiliza necessariamente esses critérios. Nesse sentido, a argumentação é um obstáculo epistemológico.*

Neste sentido, pode-se verificar a importância da argumentação pelos nossos alunos.

A professora pesquisadora 4 questionou quanto ao uso da tecnologia, mais especificamente, o software Cabri para verificar que *"a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus? Isto é uma demonstração? É uma prova? Ou o Cabri usou um bom argumento?"* Respondendo a este questionamento, o professor colaborador 4 explicou que, no seu ponto de vista, a utilização do Cabri não é uma demonstração, pois diz que este obedeceu a um algoritmo e devolveu a soma dos ângulos internos e citou a explicação que aparece no texto da tese de Pietropaolo (2005) quanto *"a utilização de programas de geometria dinâmica permite a formulação de conjecturas, verificando as verdadeiras e refutando as falsas. É interessante a utilização do programa para que o aluno perceba o resultado"*, dizendo que ainda há necessidade de uma prova.

Estas discussões foram aprofundadas nos encontros presenciais, sobretudo para fundamentar o questionário sobre prova (denominado Q1).

Quanto à minha conclusão entre a distinção entre provas e demonstrações matemáticas, é que uma prova em Matemática é um argumento ou justificativa para convencer alguém ou se convencer da validade de uma afirmação. Esta pode ser de natureza empírica ou conceitual, já a demonstração matemática é só conceitual e ainda formal.

Portanto, o aluno chega à prova, se nós, professores, trabalharmos e valorizarmos o que ele já sabe fazer no empírico, pois de acordo com os objetivos deste trabalho, além de valorizar o conhecimento que possuem empiricamente, a mediação do professor e o uso de tecnologia são de fundamental importância para o crescimento do aluno quanto à argumentação e prova em Matemática.

Mas, o que ficou como base para este trabalho, até mesmo como objetivo, obedecendo aos critérios das discussões realizadas no Fórum é que, segundo meu ponto de vista, o trabalho com os alunos deve ser mais em nível de argumentações e provas do que em demonstrações formais.

2.1.3 PADRÕES, SUCESSÕES E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Conforme Barbosa (2000), ao consultar, nos dicionários, o significado da palavra padrão, podem ser encontrados vários significados, como por exemplo:

atos ou características observáveis de uma pessoa e, ainda, o que serve de referência para avaliação de quantidade, tipo, modelo.

Quando se reconhece um padrão, podem ser feitas previsões e observar características idênticas em várias situações, ou ainda, conforme Barbosa (2000), quando há uma regularidade ou um padrão de uma ocorrência, pode-se "adivinhar", prever ou projetar o futuro.

O padrão encontra-se em fórmulas de áreas, volumes, seqüências que seriam suas leis de formação, tais como nas Progressões Aritméticas e Geométricas, pois expressam regularidades em seus termos, além de propriedades e regras.

Não se pode deixar de dizer que:

> *Nas artes ou na arquitetura, a questão é mais clara: pois, por exemplo, temos os cânones clássicos gregos ou romanos, como modelos estéticos que foram respeitados e seguidos por séculos. Nesses, não podemos deixar de lembrar a presença ubíqua da divina proporção ou seção áurea, e, dos números da sucessão de Fibonacci. Por conseqüência, como deixar de citar a sua intromissão curiosa na Natureza, como no caso das razões da filotaxia, em sucessões de grãos nas espirais do girassol, ou então das pinhas, ou mesmo das espirais das conchas; até nas relações das medidas de ossos no corpo humano (Barbosa, 2000, p. 9 - 10).*

Conforme o autor, um padrão emerge pela forma indutiva, na qual sua existência pode ser observada em situações casuais e estas podem ser criadas, propositadamente, em formas mais simples.

Alguns pesquisadores em Educação Matemática afirmam, com relação aos padrões que

> *O próprio objetivo da Matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão (Davis e Hersh, 1995, apud Vale e Pimentel, 2005, p. 14)*.

Ou ainda,

> *A essência da Matemática consiste em procurar padrões. O nosso espírito parece estar estruturado para procurar relações e sucessões. Procuramos à ordem desconhecida (Balmond, 2000, apud Vale et al., 2005, p. 3).*

Por exemplo, na sucessão de Fibonacci, citada anteriormente (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...), os números, a princípio, parecem não ter uma ordem; no entanto, a partir do segundo número, podemos obter um número por meio da soma dos dois anteriores.

Pode-se perguntar como usar padrões para o ensino de Matemática?

> *Quando apelamos aos padrões no ensino da Matemática é, normalmente, porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai ao encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões e fazerem generalizações e também previsões (Vale et al., 2005 p. 5).*

Destacam-se algumas idéias provenientes da investigação do porquê usar os padrões:

> *- Podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática;*
>
> *- Permitem o estabelecimento de conexões matemáticas;*

> *- Atraem e motivam os alunos, porque apelam fortemente ao seu sentido estético e criatividade;*
> *- Permitem a promoção e melhoramento das capacidades e competências dos alunos;*
> *- Ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informações;*
> *- Permitem a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem* (Orton, 1999, apud Vale et al., 2005, p. 9).

Os padrões, então, fazem com que os alunos busquem relações para futuras generalizações, sendo esta questão muito importante, pois uma vez que o aluno encontre os termos de uma seqüência o próximo passo é chegar à álgebra.

Alguns estudos apontam algumas dificuldades encontradas pelos alunos que trabalham com seqüências. Vejamos algumas delas:

> *1- Encontrar termos numa seqüência torna-se progressivamente mais difícil, para os alunos, à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados.*
>
> *2- Muitos alunos têm mais dificuldades em explicar um padrão do que continuá-lo.*
>
> *3- Geralmente há mais alunos a explicar as regras, detectadas nas seqüências, oralmente do que por escrito (Vale et al., 2005, p. 12).*

Pode-se perceber ainda que o estudo de padrões seja uma introdução ao estudo de seqüências e progressões, pois, considera-se o termo padrão numérico ligado à idéia de regularidade de algum tipo, na qual se identifique uma lei (padrão), que permita continuar a seqüência numérica e chegar à generalização (fórmula).

Modanez (2003) em sua dissertação de Mestrado apresenta a análise de pesquisas realizadas sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra escolar e cita Booth (1994), que diz *“Álgebra é uma constante fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos”*.

A autora afirma que a citação acima é pertinente para a maioria dos professores de Matemática. Neste sentido, acredita que, analisando os erros dos alunos, as dificuldades da Álgebra possam ser identificadas, apresentando alguns erros mais comuns cometidos pelos alunos.

A natureza das respostas dos alunos mostra a dificuldade para ***diferenciar Aritmética da Álgebra***, pois na primeira basta encontrar uma resposta, um número e, na segunda, a representação deve ser de uma forma generalizada.

Nas atividades deste trabalho, o erro apresentado acima será fácil de ser observado, pois os alunos terão de responder os itens de algumas atividades aritméticas e em outros algebricamente.

A ***interpretação dos símbolos*** pelos alunos é outra dificuldade, quanto à notação e convenção em Álgebra, citando, como exemplo, a dificuldade dos alunos em aceitar a expressão 2x + 2y como resposta, porque nesta associação eles juntam os termos, dando como resposta 5xy.

Neste tipo de erro, o aluno precisa identificar símbolos, além de ***realizar operações matemáticas algebricamente***, como no caso das atividades realizadas neste trabalho, pois deverão identificar o primeiro termo (a_1), a razão (r), o número de termos (n) e, ainda, o termo geral (a_n) de uma Progressão Aritmética.

A ***generalização das relações e procedimentos aritméticos*** deve ser bem apreendida pelos alunos, para que seu desempenho no contexto algébrico não seja afetado.

Nas atividades de PA, analisando as repostas dos alunos, o erro acima será identificado no momento em que eles irão subtrair termos generalizados de Progressões Aritméticas igualando com a razão, como por exemplo: $a_{(n+1)} - a_n = r$ ou $a_n - a_{(n-1)} = r$.

Algumas destas dificuldades apresentadas serão observadas nas análises feitas nas atividades de Progressões Aritméticas deste trabalho e serão comentadas e mostradas posteriormente.

2.1.4 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais mostram a importância do domínio da linguagem na Matemática. O trecho abaixo enfatiza a questão da linguagem e dos diferentes registros.

> *O domínio de linguagens, para a representação e a comunicação científico-tecnológicas, é um campo comum a toda a ciência e a toda a tecnologia, com sua nomenclatura, seus símbolos e códigos, suas designações de grandezas e unidades, boa parte dos quais, já incorporada à linguagem cotidiana moderna. A articulação dessa nomenclatura, desses códigos e símbolos em sentenças, diagramas, gráficos, esquemas e equações, a leitura e interpretação destas linguagens, seu uso em análises e sistematizações de sentido prático ou cultural, são construções características dessa área de conhecimento, mas hoje integram um instrumental igualmente necessário para atividades econômicas e para o pensamento social. Por isso, o desenvolvimento de códigos e linguagens em ciência e tecnologia deve ser tomado como um aspecto formativo de interesse amplo, ou seja, no ensino de cada disciplina científica, esse desenvolvimento não está somente a serviço dessa determinada*

ciência ou das ciências, mas sim promovendo uma competência geral de representação e comunicação. (PCN+, 2002, p.24)

A elaboração de textos, argumentação e o posicionamento crítico estão presentes na transdisciplinaridade dos componentes curriculares, portanto, pode-se observar a importância da relação entre argumentação e demonstração, que são fundamentais em Matemática.

De forma geral, o desenvolvimento de competências nesse domínio da representação e comunicação envolve, em todas as disciplinas da área: o reconhecimento, a utilização e a interpretação de seus códigos, símbolos e formas de representação; a análise e a síntese da linguagem científica presente nos diferentes meios de comunicação e expressão; a elaboração de textos; a argumentação e o posicionamento crítico perante temas de ciência e tecnologia. (PCN+, 2002, p.26-27)

De acordo com o objetivo deste trabalho, nas atividades procurou-se pedir aos alunos que justificassem ou argumentassem e generalizassem algumas propriedades sobre Progressões Aritméticas, dentro da Matemática, fazendo com que, inicie no aluno, a compreensão e interpretação de situações, conforme os PCN.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCN+, 2002, p.111)

Assim como,

A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. (PCNEM, 1999, p.211)

A frase abaixo vem exatamente ao encontro do objetivo deste trabalho, ou seja, em que medida as atividades, as tecnologias e a mediação do professor auxiliam no engajamento dos alunos em provas matemáticas.

Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática. (PCNEM, 1999, p.254)

Já as citações abaixo falam da importância da argumentação e de suas justificativas.

A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la. (PCN, 1998, p. 70)

Assim, um argumento será aceito se for pertinente, ou seja, se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos. (PCN, 1998, p. 70)

Os PCN ainda trazem a diferença entre argumentação e demonstração, mostrando a importância da argumentação para conduzir o aluno à demonstração, indo de acordo, exatamente, com os objetivos deste trabalho, assim como os objetivos do projeto AProvaME.

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova

> *dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração. (PCN, 1998, p. 70)*
>
> *Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vistas, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração. (PCN, 1998, p. 70)*

Os critérios utilizados nas atividades sobre Progressões Aritméticas que servem para verificar até que ponto os alunos fazem representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, também, estão presentes nos PCN.

> *Utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e algébricos. (PCN, 1998, p. 76)*

2.1.5 O SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE

Em Bongiovanni et al. (1997)[7] são apresentadas algumas informações a respeito do software Cabri-Géomètre.

A sigla Cabri vem do Francês **Ca**hier de **Br**ouillon **I**nformatique, que significa Caderno de Rascunho Informático.

O software Cabri-Géomètre é uma ferramenta para se trabalhar na Matemática com Álgebra, Trigonometria, Geometria Plana, Geometria Espacial,

[7] Assim como, o site http://www.cabri.com.br, sobre o software Cabri Géomètre.

Geometria Descritiva, Geometria Analítica, na Física com Óptica Geométrica e também, em Artes.

O Cabri-Géomètre é um software desenvolvido por J. M. Laborde, Franck Bellemain e Y. Baulac, no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática da Universidade de Grenoble, na França. Este é um laboratório associado ao CNRS, instituição francesa equivalente ao CNPq brasileiro.

Este software é representado no Brasil, desde 1992, pelo PROEM, por conta de um projeto de pesquisa de cooperação internacional entre a PUC/SP e a Universidade Joseph Fourier de Grenoble.

Em torno do Cabri já foram organizados vários encontros científicos, nos quais professores e pesquisadores em Matemática, Física e Informática puderam discutir as potencialidades e a utilização do software.

O software Cabri-Géomètre é um dos mais utilizados ambientes de ensino-aprendizagem do mundo e, com o Cabri (empregando uma calculadora ou uma tela de computador) milhões de estudantes adentram, de uma maneira inovadora, nos mistérios da geometria e são introduzidos aos conhecimentos da geometria euclidiana, da ótica, da dinâmica, da teoria dos campos, etc.,

O Cabri-Géomètre é uma excelente ferramenta para o estudo da Geometria experimental, pois o programa permite criar desenhos geométricos e estabelecer relações entre seus componentes. Uma vez criado, o desenho pode ser arrastado pelo mouse e deformado. O mais interessante é que as relações estabelecidas são preservadas e os invariantes são destacados. O fato permite investigar propriedades e investigar conjecturas.

Trata-se de um software que permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem se movimentar conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Esta possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos, constituindo-se numa ferramenta rica de validação experimental de fatos geométricos.

Dentre suas principais características estão:

- Na Geometria Dinâmica (figura com movimento mantendo as suas propriedades);
- Construtivista (o aluno cria as suas conjecturas construindo seu conhecimento);
- Software Aberto (o professor cria as atividades como quer);
- Trabalhar Conceitos;
- Explorar Propriedades dos Objetos e suas Relações (comprovar experimentalmente);
- Construção de figuras geométricas;
- Históricos das construções; e
- Criação de macros.

Encontra-se disponível em mais de quarenta países e em vinte e quatro idiomas diferentes, é uma ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem da Geometria, sendo utilizado, no Ensino Médio, Ensino Fundamental e Ensino Superior.

O Cabri-Géomètre tem outros aspectos que vão muito além da manipulação dinâmica e imediata das figuras, permite visualizar lugares geométricos materializando a trajetória de um ponto escolhido enquanto o outro ponto está sendo deslocado, respeitando as propriedades particulares da figura. Ele permite, também, medir distâncias, ângulos e observar a evolução em tempo real durante as modificações da figura.

Uma verdadeira ferramenta para o aluno, o Cabri-géomètre também é uma ferramenta para o professor que o utiliza no ensino. Alguns recursos do programa podem ser suprimidos, outros adicionados. Assim, usar computadores para construir figuras geométricas abre um mundo inteiro de possibilidades, quando são comparados com os métodos clássicos de construção, utilizando papel, lápis, régua e compasso.

Para este trabalho, o uso do software Cabri foi extremamente limitado, pois, segundo as informações apresentadas do potencial deste software, sua utilização para construir um triângulo eqüilátero, usar a ferramenta “simetria axial” e “preencher” foi basicamente para estimular o aluno pelo uso das tecnologias, na sala de Informática.

CAPÍTULO 3

3.1 METODOLOGIA

3.1.1 EXPERIMENTO DE ENSINO

A metodologia na qual se fundamenta este trabalho é conhecida por experimento de ensino ou *design research*[8].

Segundo Doerr e Wood (2006), em razão da complexa interação entre alunos, professores, salas de aula, currículos, tecnologias e instrumentos de aprendizagem é que se procura adotar esta metodologia que pode suprir os problemas práticos nas pesquisas sobre ensino.

Alguns problemas práticos nas pesquisas sobre ensino, observados por Doerr e Wood (2006), são descritos abaixo.

> *O primeiro conjunto de problemas está associado ao desenho da pesquisa, à metodologia e aos quadros teóricos analíticos produzidos empiricamente para sumarizar os resultados (p.114).*
>
> *O segundo conjunto de problemas é caracterizado pelas dificuldades com a escala e o escopo. Um problema de escala pode ser depreendido do número relativamente alto de pesquisas que envolvem apenas um sujeito ou o auto-estudo, outro problema de escala é encontrado na dimensão do tempo, pois, tomando como base os estudos atuais, sugere-se que a duração das pesquisas sobre o desenvolvimento do conhecimento*

[8] Design possui vários significados, como modelo, padrão, projetos, produtos, invento, o que, por meio de ações, quer dizer modelar, projetar, produzir, inventar.

> *docente precisaria ser da ordem de vários anos, em vez de vários meses. Quando ao escopo da coleta e análise dos dados, sabe-se que as fontes de dados potenciais para a compreensão do processo de ensino são vastas, e ainda a análise desses dados consome um tempo enorme e não pode ser generalizada de imediato para um número maior de professores (p.115).*

> *Uma terceira área problemática localiza-se no desenvolvimento de intervenções para o aprimoramento da pedagogia, aliadas as visões atuais sobre a aprendizagem. Ou seja, há sempre alguma intervenção baseada em pesquisa corrente, que, por sua vez, fundamenta o estudo desenvolvido (p.116).*

O desenvolvimento de um processo ou produto, no qual se deva aprimorar constantemente, sempre se baseando na versão anterior, feito por meio de negociações e aceitando suas limitações, é uma das características do experimento de ensino. Em relação à aprendizagem docente, tem-se:

> *No caso de aprendizagem docente, os processos e os produtos que buscamos aprimorar são as interpretações que os professores utilizam para dar sentido ao seu ensino e os artefatos são os instrumentos utilizados em seu trabalho. (Doerr e Wood 2006 p. 117).*

Outra característica importante e necessária desta metodologia de experimento de ensino é:

> *[...] que ela requer vários ciclos de análise para aprimorar o produto e a interpretação em múltiplos níveis. [...] a coleta e a interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento, mas a própria coleta em desenvolvimento e a interpretação de dados em todos os níveis devem gerar e refinar princípios, propriedades e produtos que sejam cada vez mais*

úteis a pesquisadores, professores e outros profissionais (Doerr e Wood, 2006. p.117).

Uma das dificuldades para implantar o experimento de ensino é articular as interpretações de cada nível, então, Lesh e Kelly (apud Doerr e Wood, 2006), criaram uma tabela que pode auxiliar em sua implantação.

Tabela 2 - O Experimento de Ensino Multicamadas

Nível 3 Pesquisadores	Com a ajuda de estudantes e professores, os pesquisadores desenvolvem modelos que dão sentido à aprendizagem de alunos e professores, e reinterpretam e estendem suas teorias.
Nível 2 Professores	Os professores trabalham com colegas e pesquisadores para descrever, explicar e dar sentido à aprendizagem do aluno.
Nível 1 Estudantes	Equipes de estudantes resolvem, com a ajuda de professores, atividades matemáticas por meio das quais eles constroem, revisam e refinam sua interpretação de uma situação-problema.

Portanto, experimento de ensino não é só aplicar inicialmente aos alunos uma atividade ou uma seqüência de atividades desenvolvidas por professores e/ou pesquisadores. Mas, com base em suas análises, tanto dos resultados da atividade como da interação entre alunos, professores e tecnologia, buscar um aperfeiçoamento, alterando e melhorando a atividade, em um processo constante.

Neste caso, os papéis de professor e pesquisador não se misturam; no entanto, nada impede do pesquisador ora ser professor, interagindo com os alunos e ora ser pesquisador, desenvolvendo, aplicando e analisando as atividades envolvidas neste processo de experimento de ensino.

A metodologia do experimento de ensino estará auxiliando no processo de desenvolvimento das atividades sobre Progressões Aritméticas, envolvendo conceitos de PA, argumentação e provas e o uso de tecnologia, desenvolvidas neste trabalho, pois está se levando em consideração o ambiente em que os alunos irão trabalhar as atividades, no caso, lápis, papel e um software de Geometria Dinâmica, o Cabri-Géomètre, no qual será observada a interatividade entre os alunos, inclusive, por meio de gravações de áudio.

3.2 PLANEJAMENTO

3.2.1 INTRODUÇÃO

Após a escolha dos temas pela equipe 2 do projeto AProvaME, os coordenadores de cada equipe pediram para que os professores-colaboradores, pensassem individualmente, em duas atividades para cada tema, ou seja, duas sobre Progressões Aritméticas (PA) ou Progressões Geométricas (PG) e mais duas sobre Geometria Analítica, sempre utilizando uma tecnologia e envolvendo provas e argumentações.

Neste momento, escolhi o tema para minha dissertação, identificando-me com PA e PG. Elaborei algumas atividades, sendo que umas trabalhavam mais com o software Cabri e com pouca prova e argumentação e outras, que foram justamente as atividades escolhidas para este trabalho, com pouco uso do software Cabri e que envolviam mais argumentações e provas, pois se pode trabalhar Progressões Aritméticas algébrica e geometricamente.

A partir daí, cada reunião teria como objetivo aperfeiçoar as atividades desenvolvidas pelo componente da equipe. Ao ser escolhida a atividade que deveria ser melhorada, todos os componentes de cada equipe discutiam e davam sugestões, até que da melhor maneira possível, os objetivos do projeto pudessem ser atingidos. Após muitas discussões e sugestões, minhas atividades que seriam trabalhadas com os alunos da 1ª série do Ensino Médio da Escola Estadual México ficaram prontas. (conforme anexo 5)

3.2.2 OFICINAS DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE

3.2.2.1 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE À PRIORI

Os alunos que fizeram as atividades deste trabalho tiveram oficinas no laboratório de Informática para se familiarizarem com as ferramentas do software Cabri - Géomètre.

As oficinas foram divididas em cinco encontros de 1 hora cada, realizadas em cinco dias no mês de abril de 2007 na E.E. México. Para a realização das atividades, foram convidados 20 alunos dentre as cinco salas da 1ª série do Ensino Médio do período noturno.

A seguir, as atividades desenvolvidas nas oficinas do Cabri (anexo 4) são apresentadas, bem como, sua análise a priori.

1) Construir um quadrado.

1º passo : Segmento AB.
2º passo : Edição numérica igual a 90º.
3º passo : Rotação de 90º do segmento AB ao redor do ponto A.
4º passo : Repita o 3º passo até a construção completa do quadrado.

A Atividade 1 tem como objetivo familiarizar o aluno com as seguintes ferramentas do software Cabri-Géomètre: Segmento, rótulo, edição numérica e rotação, pois os alunos, quando fossem utilizar o Cabri na resolução das atividades de PA, poderiam usar estas ferramentas específicas. Nesta atividade, o valor do ângulo de 90º foi fornecido ao aluno, no qual ele deveria rotacionar o segmento AB, por rotação em relação ao ponto A de 90°, até formar um quadrado.

Caso os alunos apresentem dúvidas quanto à utilização do software, o papel do professor é saná-las, assim como fazer com que eles refaçam as atividades sem a ajuda do professor.

2) Construir um pentágono.

Inicialmente, crie um polígono regular de 5 lados (pentágono)
Meça os ângulos internos deste pentágono.
1º passo : Segmento AB.
2º passo : Edição numérica igual ao ângulo Xº, interno do pentágono.
3º passo : Rotação de Xº do segmento AB ao redor do ponto A.
4º passo : Repita o 3º passo até a construção completa do pentágono.

3) Construir um hexágono.

Inicialmente crie um polígono regular de 6 lados (hexágono)
Medir os ângulos internos deste hexágono.

1º passo : Segmento AB.
2º passo : Edição numérica igual ao ângulo Xº interno do hexágono.
3º passo : Rotação de Xº do segmento AB ao redor do ponto A.
4º passo : Repita o 3º passo até a construção completa do hexágono.

Nas Atividades 2 e 3, o objetivo é fornecer ao aluno métodos para encontrar a medida do ângulo interno de um polígono regular, pois o ângulo interno do pentágono e do hexágono não foram fornecidos, no entanto, foi orientado como se deve proceder para achar os valores destes ângulos, no caso, usando as ferramentas “Polígono regular” e “Medir ângulo”, do software Cabri-Géomètre. A partir daí, fazer a rotação do segmento AB em relação ao ponto A, usando o ângulo encontrado, até completar um pentágono na atividade 2 e um hexágono na atividade 3.

Para estas duas Atividades, casos os alunos ainda apresentem dúvidas quanto à utilização do software, o papel do professor, também, é saná-las, para que os alunos as refaçam, sem a ajuda do mesmo.

4) Construir um octógono.

5) Construir um decágono.

6) Construir um dodecágono.

As Atividades 4, 5 e 6 têm como objetivo verificar se os alunos já possuem os conhecimentos necessários para construir, respectivamente, um octógono, um decágono e um dodecágono, sem a descrição dos passos sugeridos nas Atividades 1, 2 e 3, mas reutilizando-os.

Como o objetivo desta oficina é fazer com que o aluno familiarize-se com as ferramentas do software Cabri, toda e qualquer dúvida levantada pelos alunos deve ser sanada; no entanto, acredito que eles realizarão estas três atividades anteriores sem a ajuda do professor.

7) Construir um triângulo ABC qualquer.

→ Medir seus três ângulos internos
→ Com a calculadora, somar seus ângulos internos.
→ Mover o resultado para a tela.
→ Com o ponteiro, movimentar o ponto A. O que acontece com a soma dos ângulos internos?
→ Com o ponteiro, movimentar o ponto B, em seguida movimentar o ponto C. O que acontece com a soma dos ângulos internos? O que podemos concluir?

> 8) Construir um triângulo eqüilátero, sem usar a ferramenta polígono regular.

A Atividade 7 tem como objetivo fazer com que o aluno verifique empiricamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180º. Além disso, na atividade seguinte, o aluno deve concluir sozinho que, para construir um triângulo eqüilátero (que possui lados e ângulos iguais) ele pode dividir 180º por 3 e determinar o valor do ângulo que é 60º, a partir daí, repetir os passos das atividades anteriores, construindo, assim, o triângulo eqüilátero solicitado.

Para a Atividade 7, acredito que os alunos não terão dívidas nem dificuldades em resolvê-la, mas para a Atividade 8, minha previsão é que eles realizem a atividade corretamente, mas, talvez com estratégias diferentes, como, por exemplo, construir um polígono regular e medir seus ângulos para chegar ao valor do ângulo de 60°.

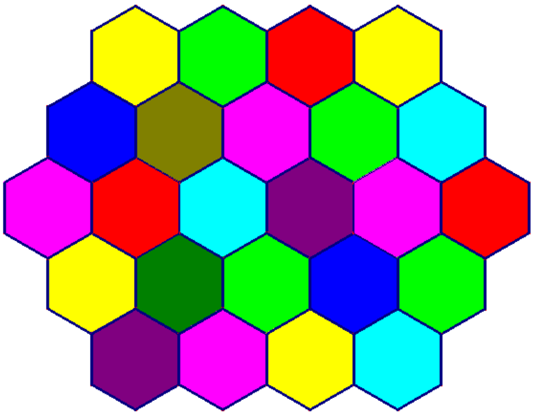
> 9) Construir um mosaico usando simetria axial. Preencher com várias cores.
>
> 10) Construir alguns mosaicos com diversas figuras planas. (atividades extraídas do curso Tópicos de Geometria do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP, do Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni)

Para a realização das Atividades 9 e 10, o professor deve apresentar o conceito mosaico, assim como citar alguns exemplos, conforme os representados abaixo.

O conceito de mosaico[9], que será apresentado aos alunos é que mosaico é um "desenho" que se repete com beleza e harmonia e que cobre todo o plano (ou parte de um plano) Estes mosaicos aparecem em pisos, tetos, papel de parede, no calçamento de ruas, etc...

[9] Atividades extraídas do curso Tópicos de Geometria do Mestrado Profissional de Ensino de Matemática da PUC/SP do Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.

Exemplo de mosaico feito no software Cabri apresentado aos alunos.



A Atividade 9 tem por objetivo apresentar ao aluno as ferramentas “Simetria axial” e “Preencher”, pois estas também serão usadas nas atividades do objeto de estudo deste trabalho. A Atividade 10, além de possuir o mesmo objetivo da atividade anterior, mostrará ao aluno uma maneira de se divertir com a construção dos mosaicos, treinando, assim, as ferramentas do software Cabri.

3.2.2.2 ANÁLISE DA OFICINA DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE

Dos vinte alunos das 1^{as} séries do Ensino Médio que foram convidados a participarem das oficinas, somente 11 vieram no 1° dia, no segundo dia, três alunos que vieram no primeiro dia não compareceram e outros quatro vieram pela primeira vez e, infelizmente, este descomprometimento ocorreu até o último dia da oficina, o que acredito ter comprometido um pouco o aprendizado do software.

As atividades foram desenvolvidas, conforme descrito a seguir:

No primeiro encontro, houve a apresentação do software e das ferramentas básicas, sempre procurando apresentar aos alunos, as ferramentas necessárias para realização das atividades propostas neste trabalho. Ainda neste primeiro encontro, foi falado aos alunos, do objetivo principal desta oficina, que era para que estes alunos realizassem as atividades relativas a argumentações e provas para minha dissertação de mestrado, assumindo, assim, um compromisso com os alunos de continuar estas oficinas até o final do ano.

No segundo encontro, as tarefas descritas no Anexo 1 foram realizadas, no máximo, até a Atividade 4, e uma dupla fez até a Atividade 3. Para o terceiro encontro, todos terminaram a Atividade 6.

No quarto encontro, os alunos fizeram as Atividades 7 e 8, sendo que nestas atividades já lhes era solicitado justificativas e conclusões.

Neste ponto (quarto encontro) das atividades, falei novamente com os alunos do compromisso que haviam feito comigo, pedi novamente sua colaboração e consegui, a partir daí, formar quatro duplas que iriam trabalhar juntas até o final das atividades de PA. Ainda neste encontro, os alunos conseguiram responder corretamente às perguntas da Atividade 7 e concluíram que, para qualquer triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos sempre é 180°. Precisei ajudá-los no uso da calculadora do Cabri, pois houve um aluno que achou mais fácil usar a calculadora do Windows, sendo que o Cabri estava aberto.

Na Atividade 8, somente uma dupla usou as idéias sugeridas na Atividade 7, que era dividir 180° por 3 para achar o 60°, lembrando que era para construir um triângulo eqüilátero que possui três ângulos iguais. Das outras duplas, uma usou polígono regular para achar o ângulo, outra não conseguiu fazer sem a ajuda do professor; a outra dupla disse “que ouviu alguém falar que o ângulo era 60°, usou e deu certo” e, curiosamente, um aluno que havia freqüentado algumas aulas, ao construir um triângulo qualquer, arrastou os vértices do triângulo até formar um triângulo eqüilátero. Novamente, o professor interferiu para mostrar a diferença entre desenhar e construir no Cabri.

Cabe aqui ressaltar que o Cabri-géomètre é um software de Geometria Dinâmica, no qual, ao se fazer construções geométricas, permite a transformação de figuras mantendo suas propriedades. Portanto, na geometria dinâmica, pode-se "estabelecer uma importante distinção entre desenhar e construir" (Bongiovanni, 2006, p. 6).

> Desenhar é produzir uma imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto geométrico teórico. É um traçado material cuja validade é apenas para uma posição particular dos objetos iniciais.
>
> Construir é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num software de geometria dinâmica, preserva, quando do deslocamento de um de seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, neste caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de um dos seus pontos de base. A construção vai além do simples traçado empírico controlado apenas pela visualização. (Bongiovanni, 2006, p.6).

No quinto e último encontro, foi sugerida a construção de alguns mosaicos, atividades estas, extraídas do material do Prof.Dr. Vincenzo Bongiovanni do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP, procurando apresentar, das ferramentas do software Cabri, a "Simetria axial" e "Preencher". Além de fazermos uma revisão das atividades desenvolvidas anteriormente, com o objetivo de fixar, nos alunos, os conhecimentos das ferramentas do software Cabri-Géomètre a serem utilizadas nas atividades que serão aplicadas para o trabalho da dissertação.

Para realização das atividades com mosaicos, o professor apresentou o conceito, alguns exemplos e pediu para que os alunos trabalhassem espontaneamente, usando sua própria criatividade, o que resultou em uma aula bem descontraída e com um ótimo resultado.

3.2.3 ATIVIDADES PROPOSTAS

Para a realização das Atividades de PA, foram previstas seis aulas para serem distribuídas em três encontros; no entanto, os alunos demoraram dez aulas para realizarem todas as Atividades, do seguinte modo: três aulas, no primeiro encontro para realização das Atividades 1, 2 e 3; cinco aulas no segundo encontro para realização das Atividades 4 e 5; e duas aulas no terceiro e último encontro para realização das Atividades 6 e 7. Estes encontros ocorreram nos dias 25, 26 e 27 de abril no período noturno.

Para a realização das atividades foram formadas quatro duplas: duas permaneceram juntas desde o início da oficina do software Cabri até o fim das Atividades de PA; uma dupla, que estava junta desde o início das Atividades do software Cabri foi desfeita após o primeiro encontro das Atividades de PA, pois um dos alunos da dupla não compareceu mais nem nas Atividades nem à escola; no entanto, o aluno que ficou, assumiu o compromisso sozinho, até o último encontro; uma dupla formada com uma menina que não faltou em nenhuma oficina, com um menino que faltou na primeira e terceira oficinas.

As duplas foram tratadas de dupla A, composta por duas meninas que estiveram juntas desde o início das oficinas, mas, que faltaram em duas das cinco oficinas. Cabe ressaltar que, sempre que o professor estava ocupado com outros afazeres, esta dupla saia das atividades de PA, entrando na Internet e, por muitas vezes, procuravam o professor para que este explicasse como fazer as atividades de PA, mostrando, portanto, pouco interesse na resolução das mesmas.

A dupla B, durante toda a oficina do Cabri, foi composta por dois meninos, mas, durante as atividades de PA, um deles foi só no primeiro dia. No entanto, este aluno que ficou sozinho, realizou até o final, todas as atividades de PA, mostrando-se muito interessado e esforçado. Esta “dupla B”, assim denominada neste trabalho, foi uma das escolhidas para ser gravada; no entanto, quando o aluno ficou sozinho, a gravação das discussões perdeu sua função.

A dupla denominada C foi sem dúvida, a mais interessante de todas, pois foi formada no primeiro dia de aplicação das atividades, com uma menina que não faltou às oficinas e com um menino que, após o início das atividades, que para ele foi a partir da 2ª aula do primeiro encontro, mostrou-se muito interessado em aprender e dedicou-se muito até o final das atividades de PA. O interessante desta dupla foi quanto às discussões entre os elementos da dupla e o comprometimento em resolver, justificar e até provar, para eles mesmos, as respostas das atividades de PA.

A dupla denominada D, foi a que se não fosse por motivo de doença, seria a única dupla em que seus elementos não teriam faltado em nenhuma aula; no entanto, a falta em uma aula, ocorrida por um elemento da dupla, não interferiu em nada quanto às resoluções das atividades.

No geral, os alunos não apresentaram dificuldades quanto à utilização do software Cabri para as atividades envolvidas, portanto, posso concluir que os encontros foram suficientes para o aprendizado das ferramentas necessárias às atividades.

CAPÍTULO 4

4.1 ANÁLISES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Optou-se por apresentar a análise a priori de cada uma das atividades, seguida da análise a posteriori, já discutindo os resultados, para facilitar a leitura do desenvolvimento do trabalho.

Atividade 1: Complete as seqüências abaixo:

a) Seqüência dos dias da semana: (domingo, ________, _______, ________, ________, ________, sábado).

a) Seqüência dos meses do ano: (janeiro, ________, ________, ________, ________, _________, ________, __________, _________, _________, __________, __________).

b) Seqüência dos números naturais: (0 , ___, ___, ___, ___, ___, ___, ..., n , n+1, ...)

c) Seqüência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada: (1990, 1994, _____, _____, _____, _____, _____,...).

Nas situações acima, pode-se observar certa ordem nos elementos das seqüências. Estes são, também, chamados de termos da seqüência e são, em geral, representados: o primeiro termo por a_1, o segundo termo por a_2, e, assim por diante até o enésimo termo, que é representado por a_n, e, ainda, podemos ter seqüências finitas ou infinitas.

Algumas seqüências são formadas por leis matemáticas chamadas leis de formação. Observe a seqüência abaixo, pois o primeiro elemento possui uma bola; o segundo, quatro bolas; o terceiro, nove bolas e, assim, por diante.

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Portanto, temos: $a_1 = 1^2 = 1$ bola

$a_2 = 2^2 = 4$ bolas

$a_3 = 3^2 = 9$ bolas

$a_4 = 4^2 = 16$ bolas

.

.

.

$a_n = n^2 = n \cdot n$ bolas

Existem ainda, algumas seqüências, nas quais a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Esta diferença constante é chamada de razão e é, em geral, representada pela letra r, que pode ser positiva ou negativa. Para este tipo de seqüência, dá-se o nome de Progressão Aritmética (PA). Portanto, pode-se ter PA crescente (razão positiva) ou PA decrescente (razão negativa).

Análise a priori da Atividade 1

Nos itens a e b, são utilizadas questões, para que o aluno complete as seqüências. No item c, propositadamente, na seqüência dos números naturais são colocados os termos n e n +1, como uma dica a ser observada pelo aluno para que, posteriormente, seja utilizada nas atividades de prova. No item d, são colocados os dois primeiros termos da seqüência, com o intuito de introduzir a noção de razão, pois a copa do mundo de futebol é realizada de quatro em quatro anos.

Seu objetivo consiste em introduzir, para o aluno, o conceito de seqüências numéricas e não-numéricas; apresentar o conceito da lei de formação para algumas seqüências, bem como familiarizá-lo com as nomenclaturas usadas na fórmula de Progressão Aritmética, orientá-lo quanto às PA crescente e decrescente, além de apresentar o conceito de Progressão Aritmética em função da diferença entre dois termos consecutivos, ou seja, relacionando-o ao conceito de razão constante. Propondo, então, neste momento completar seqüências do cotidiano do aluno, bem como apresentar o conceito de PA e os tipos crescente e decrescente.

Pode ser que os alunos não percebam a importância do n e n +1, na seqüência dos números naturais; neste caso, optarei por ficar neutro, aguardando a manifestação de algum aluno. A importância destas representações é saber seus significados, ou seja, o que é “n” e o que é “n + 1”.

Acredito que, no geral, os alunos não encontrarão dificuldades para completar esta atividade.

Análise a posteriori da Atividade 1

Nesta atividade, os itens a e b foram respondidos corretamente pelas quatro duplas, sendo a primeira pergunta referente aos termos n, n+1, colocados no item c, querendo eles saber o significado, tendo, neste momento, a primeira intervenção do professor, procurando verificar dos alunos o que eles achavam desses termos, no entanto, o professor explicou seus significados, pois todas as duplas não souberam explicar.

A dupla B, ao iniciar a Atividade 2, perguntou ao professor o que queria dizer PA. Cabe ressaltar que esta dupla não leu os conceitos introduzidos na Questão 1 sobre PA, o que comprova que os alunos não possuem o hábito da leitura. Neste caso, o professor pediu para que todos lessem, com muita atenção, as informações contidas em todas as questões e que o objetivo do trabalho não era verificar quem sabia responder tudo certo e o mais rápido possível, mas sim que respondesse o mais completo possível.

Para verificar se os objetivos da Atividade 1 foram atingidos completamente, devem ser observadas as respostas da Atividade 2, pois, caso as respostas da Atividade 2 estejam corretas, os objetivos foram atingidos.

Atividade 2: Identifiquem, nas seqüências abaixo, quais são PA. No caso de PA, calcule o valor da razão r, indique se é crescente ou decrescente e justifique suas respostas.

a) (6, 13, 20, 27, 34)

b) (20, 10, 0, – 10, –20)

c) (2, 7, 12, 18)

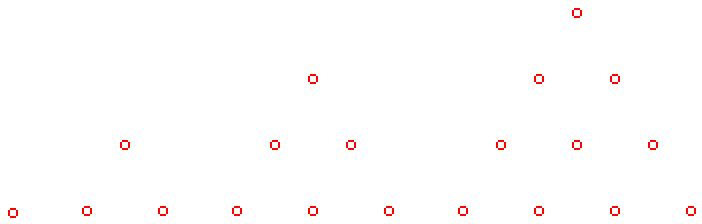
d) (6,01; 11,93; 17,85; 29,78; 41,71)

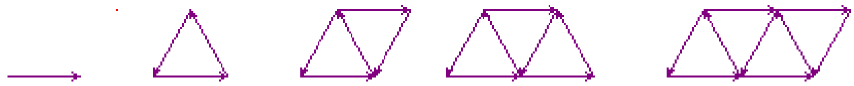
e) (50; 38,67; 27,34; 16,01; 4,68; –6,65)

f) $(a, a^2, a^3, a^4, a^5, ..., a^n, a^{n+1}, ...)$

g) (– 50, –45, –40, –35, –30,...)

h) (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 23, 36,...)

i) 

j) 

Análise a priori da Atividade 2

Damm (1999, p.135-153) afirma que, para Duval é impossível a construção do conhecimento sem as representações semióticas, pois para a apreensão de um objeto matemático é necessário que a conceitualização ocorra por meio dos diferentes registros de representações.

Segundo Bongiovanni (2006, p. 16) *"Os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, o seu acesso passa necessariamente por representação semióticas"* e explica ainda que, de acordo com Duval (1995), representações semióticas são as formas sob a qual a informação é descrita e estas representações podem ser classificadas em quatro tipos, *"dois são relativos à representação discursiva: a língua natural e os sistemas de escritas (registro numérico, registro simbólico e registro algébrico) e dois relativos à representação não discursiva: registro figural, ... e registro gráfico".*

Os itens desta atividade foram elaborados, propositadamente, com diferentes registros de representação para verificar se os alunos apresentarão dúvidas e como estes diferentes registros de representação serão tratados. Portanto, os itens a, b, c, d, e, g e h são registros de representações numéricas, o item f é registro de representação algébrica e os itens i e j são registros de representação figural.

Comparando o que Modanez, 2003 apresentou no referencial teórico apresentado deste trabalho e a análise das respostas dos alunos pode-se verificar em que itens das atividades apresentadas os alunos mostrarão maiores dificuldades, pois existem itens que devem ser resolvidos aritmeticamente (numéricos) e o item f, algebricamente. Acredita-se que os alunos apresentarão maiores dificuldades na resolução do item f, pois sua resolução é puramente algébrica.

Esta atividade tem como objetivo verificar se o aluno consolidou os conceitos de Progressão Aritmética, identificando-a dentre as várias seqüências, calculando as razões, utilizando uma calculadora, de preferência a do Cabri, pois a usaram na oficina e, durante as atividades o software Cabri estará aberto, quando necessário e justificando suas respostas.

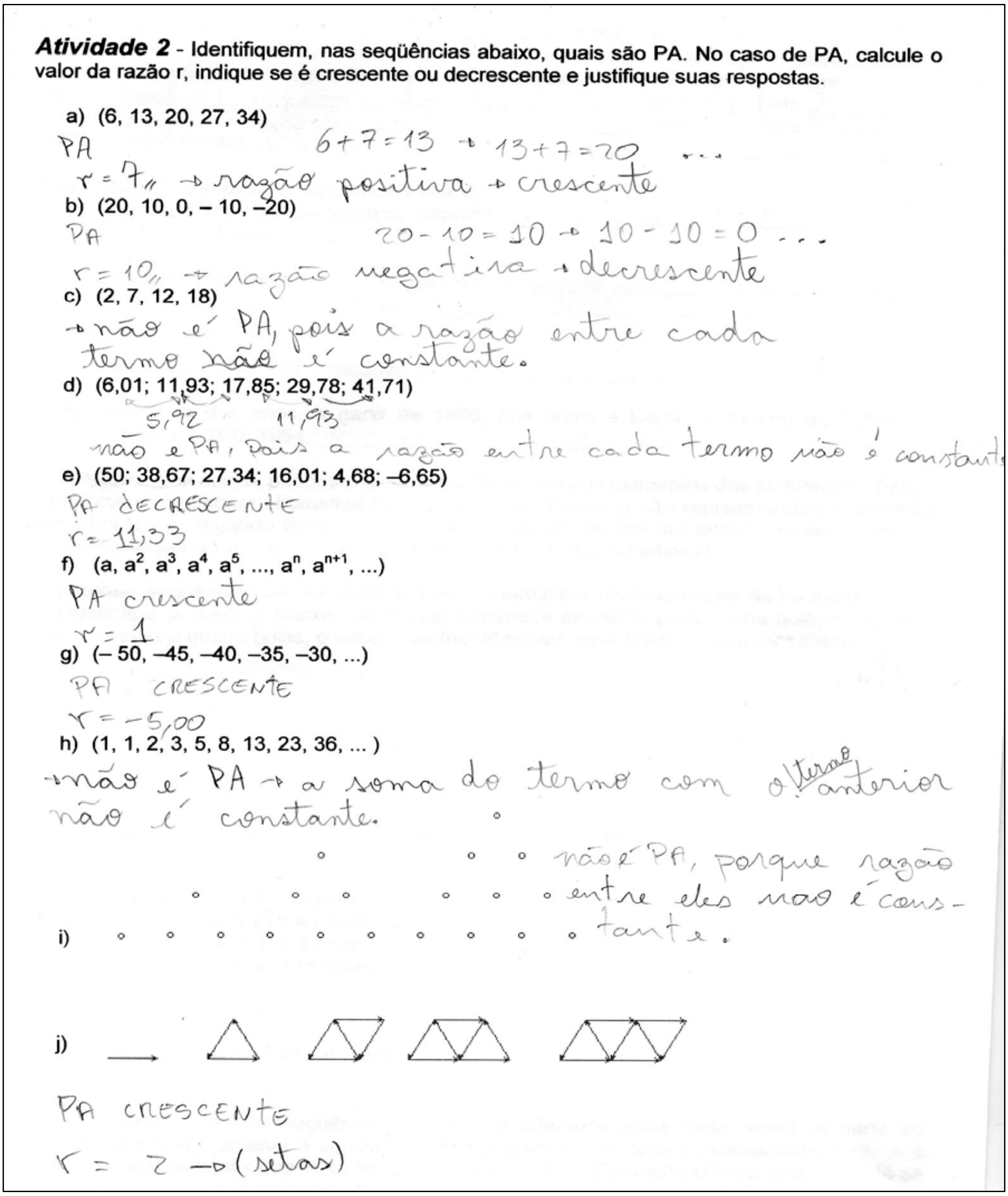
Para esta Atividade, a análise é verificar se o aluno será capaz de realizá-la, ou seja, minha expectativa é que ele consiga identificar as Progressões Aritméticas, calcular sua razão e, ainda, justificá-las por intermédio da definição apresentada ou por de algum argumento.

Análise a posteriori da Atividade 2

A primeira observação que se percebe com relação às respostas é que os alunos deveriam justificar somente em caso de PA e o que ocorreu é que justificaram ambas as situações.

Na ilustração, a seguir estão representadas as respostas da dupla C referente à Atividade 2.

Ilustração 1 - Respostas da Atividade 2 (dupla C)



Atividade 2 - Identifiquem, nas seqüências abaixo, quais são PA. No caso de PA, calcule o valor da razão r, indique se é crescente ou decrescente e justifique suas respostas.

a) (6, 13, 20, 27, 34)

PA $6+7=13 \to 13+7=20$ ...

$r = 7$ → razão positiva → crescente

b) (20, 10, 0, – 10, –20)

PA $20-10=10 \to 10-10=0$ ...

$r = 10$ → razão negativa → decrescente

c) (2, 7, 12, 18)

→ não é PA, pois a razão entre cada termo não é constante.

d) (6,01; 11,93; 17,85; 29,78; 41,71)

5,92 11,93

não é PA, pois a razão entre cada termo não é constante

e) (50; 38,67; 27,34; 16,01; 4,68; –6,65)

PA DECRESCENTE

$r = 11,33$

f) (a, a^2, a^3, a^4, a^5, ..., a^n, a^{n+1}, ...)

PA crescente

$r = 1$

g) (– 50, –45, –40, –35, –30, ...)

PA CRESCENTE

$r = -5,00$

h) (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 23, 36, ...)

→ não é PA → a soma do termo com o termo anterior não é constante.

i)

não é PA, porque razão entre eles não é constante.

j)

PA CRESCENTE

$r = 2$ → (setas)

Para a análise desta atividade, foi feita uma tabela com o intuito de facilitar a visualização de todas as respostas dos alunos.

Nos dados da tabela 3, a seguir, na primeira coluna vertical encontram-se cada item da Questão 2 e nas demais colunas verticais, as duplas. Nos cruzamentos das duplas com o item, está a resposta da dupla a ser analisada. A cada linha encontra-se, em primeiro lugar, se a seqüência apresentada é ou não Progressão Aritmética; na segunda pede-se a razão, em caso de PA, na terceira, também, em caso de PA, se é crescente ou decrescente e, finalmente, a justificativa.

Para facilitar a visualização das respostas dos alunos, a seguir, apresento a tabela 3, cujas respostas corretas estão sem preenchimento, as erradas preenchidas na cor laranja e os itens que não foram respondidos, ou seja, deixados em branco, estão na cor verde.

Tabela 3 - Respostas das duplas referentes à Atividade 2

<table>
<tr><th></th><th>Dupla A</th><th>Dupla B</th><th>Dupla C</th><th>Dupla D</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Item a</td><td>É uma PA.</td><td>É uma PA.</td><td>É uma PA.</td><td>É uma PA.</td></tr>
<tr><td>R = 7</td><td>r = 7</td><td>r = 7</td><td>r = 7</td></tr>
<tr><td>Crescente</td><td>Crescente</td><td>Crescente</td><td>Crescente</td></tr>
<tr><td>Nos cálculos, um menos o outro dá sempre o mesmo resultado.</td><td>Porque o termo é constante</td><td>6 + 7 = 13
13 + 7 = 20</td><td>Porque acrescenta 7 unidades a cada número</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Item b</td><td rowspan="4">A dupla diz que não é PA, pois a razão não é constante.</td><td>É uma PA.</td><td>É uma PA.</td><td>É uma PA.</td></tr>
<tr><td>R = - 10</td><td>r = - 10</td><td>r = - 10</td></tr>
<tr><td>Decrescente</td><td>Decrescente</td><td>Decrescente</td></tr>
<tr><td>A razão é constante e decrescente</td><td>20 – 10 = 10
10 – 10 = 0</td><td>Porque está na seqüência negativa de 10 em 10</td></tr>
<tr><td>Item c</td><td>A dupla diz que não é PA, pois a razão não é constante.</td><td>A dupla diz que não é PA, pois o termo não é constante.</td><td>Não é PA, pois a razão não é constante</td><td>Não é PA., porque a razão seria 5 e no lugar de 18 é 17</td></tr>
<tr><td>Item d</td><td>A dupla diz que não é PA, pois a razão não é constante.</td><td>A dupla diz que não é PA, porque a razão não é constante.</td><td>Não é PA, pois a razão não é constante</td><td>Não é PA, porque a razão é diferente</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Item e</td><td>É uma PA.</td><td rowspan="4">A dupla diz que não é PA, pois a razão não é constante.</td><td>É uma PA.</td><td>É uma PA.</td></tr>
<tr><td>R = - 11,33</td><td>r = 11,33</td><td>r = 11,33</td></tr>
<tr><td>Decrescente</td><td>Decrescente</td><td>Decrescente</td></tr>
<tr><td>Porque os resultados dos cálculos são os mesmos.</td><td>Em branco</td><td>Porque está diminuindo 11,33 de cada valor</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Item f</td><td rowspan="4">Em branco</td><td>É PA.</td><td>É PA.</td><td>É PA.</td></tr>
<tr><td>R = a</td><td>r = 1</td><td>r = 1</td></tr>
<tr><td>Crescente</td><td>Em branco</td><td>Crescente</td></tr>
<tr><td>A razão é constante</td><td>Em branco</td><td>Porque aumenta um n° a cada seqüência</td></tr>
</table>

Continuação da Tabela 3

Item g	É uma PA. r = 5 Crescente Porque a razão é constante	A dupla diz que não é PA, pois a razão não é igual.	É uma PA. r = - 5 Crescente Em branco	É uma PA. r = - 5 Decrescente Porque esta seqüência é negativa de 5 em 5
Item h	Não é PA.	Não é PA.	Não é PA.	É PA. r é o n° anterior Crescente Porque soma o resultado com o número anterior
Item i	Não é PA.	Não é PA.	Não é PA.	É PA. Crescente Em branco Porque a base está aumentando
Item j	É uma PA. Em branco Em branco Em branco	É uma PA. r = 2 Em branco Porque a razão é 2.	É uma PA. r = 2 Em branco Em branco	É uma PA. Em branco Crescente O triângulo aumenta

Assim que a primeira dupla começou esta atividade, logo surgiu uma pergunta, se podia utilizar a calculadora e, na primeira interferência do professor, foi respondido que se existe a tecnologia, esta deve ser usada. Mas o curioso é que eles começaram a usar a calculadora do Windows e, assim que o professor percebeu, orientou-os a utilizarem a calculadora do Cabri, pois eles estavam com o Cabri aberto, o que mostrou que, apesar de usarem a calculadora nas oficinas, não se familiarizaram com ela o suficiente, para lembrarem-se dela, no momento preciso. Outra interferência foi quando questionaram a respeito da vírgula, pois na calculadora do Cabri, em lugar da vírgula deve ser digitado o ponto.

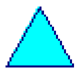
Ao observar a tabela, percebe-se que os alunos responderam corretamente a maioria dos itens e, ainda, justificaram tanto os itens em que a seqüência é PA como aqueles que não eram PA. Neste caso, o papel do professor é interferir e até mediar uma discussão; no entanto, minha postura desde o início das atividades foi ficar em posição neutra.

No item f desta atividade, os alunos apresentaram maior dificuldade, pois, segundo Modanez (2003), se as operações aritméticas não forem bem trabalhadas, os alunos apresentarão muitas dificuldades para resolver atividades algébricas. Pode-se observar que todos os alunos erraram e não houve questionamento. Quando eles estavam com dúvidas, perguntavam, o que mostra que achavam que estavam respondendo acertadamente.

Este tipo de atividade mostra a importância do papel do professor como mediador, pois, a postura neutra do professor durante a aplicação das atividades fez com que o erro não fosse detectado no momento de sua realização e, sim, acertado em outra oportunidade, após a entrega de todas as atividades.

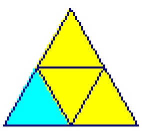
Analisando a questão globalmente, pode-se perceber que os alunos atingiram o objetivo desta atividade, pois identificaram a maioria das Progressões Aritméticas, calcularam suas razões, responderam se é crescente ou decrescente e, ainda, justificaram, conforme as definições apresentadas na atividade anterior.

Atividade 3: a) Usando o Cabri-Géomètre, construa um triângulo eqüilátero e pinte de azul, usando as seguintes ferramentas: segmento, edição numérica, rotação, triângulo e preencher.



Observação: diminua seu tamanho, após a construção, para prosseguir a atividade.

b) Construa, por simetria axial, mais três triângulos eqüiláteros, obtendo assim a figura abaixo, mantendo o triângulo externo eqüilátero. Pinte de amarelo.

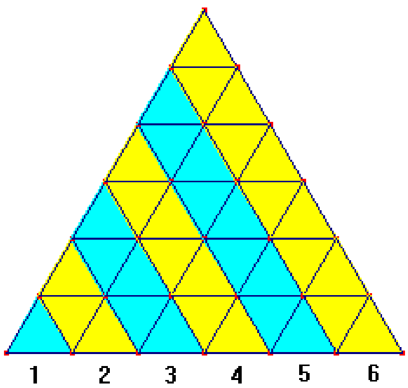


Pode-se dizer que o triângulo azul está na 1ª fileira (um triângulo) e que os triângulos amarelos estão na 2ª fileira (três triângulos).

c) Na mesma figura, usando as mesmas ferramentas do Cabri, construa mais uma fileira de triângulos eqüiláteros (3ª fileira). Pinte esta fileira de azul e responda quantos triângulos possui a fileira.

d) O número de triângulos aumentou de quanto em quanto para cada fileira? Então, qual é a razão?

e) Construa, usando as mesmas ferramentas do Cabri, até a 6ª fileira, obtendo assim a figura abaixo. Complete a tabela, a seguir.



Número da fileira	Total de triângulos em cada fileira
a_1 (1ª fileira = 1° termo)	1
a_2 (2ª fileira = 2° termo)	3
a_3 (3ª fileira = 3° termo)	
a_4 (4ª fileira = 4° termo)	
a_5 (5ª fileira = 5° termo)	
a_6 (6ª fileira = 6° termo)	
a_{10} (10ª fileira = 10° termo)	
a_{25} (25ª fileira = 25° termo)	

f) Como você chegou ao resultado da 10ª fileira (a_{10})?

g) Como você chegou ao resultado da 25ª fileira (a_{25})?

h) Este raciocínio utilizado nos itens (f) e (g) é verdadeiro para quaisquer fileiras,

( ) sempre ( ) às vezes

i) Escreva uma expressão que represente este raciocínio.

j) Utilizando essa expressão, quantos triângulos têm a 97ª fileira?

Análise a priori da Atividade 3

Por meio desta atividade, espero que o aluno familiarize-se com o conceito de seqüência, apresente uma lei de formação e realize a atividade, usando o software Cabri.

Nesta atividade, a formação do conceito de Progressão Aritmética teve continuidade, por intermédio da construção de várias fileiras de triângulos eqüiláteros com a ferramenta “simetria axial” do software Cabri, de modo que de uma fileira para a outra foram aumentados dois triângulos, obtendo-se, assim, uma PA de 6 termos e razão igual a 2.

A organização dos dados é feita pelo do preenchimento de uma tabela.

O aluno deve descrever como chegou ao número de triângulos das fileiras 10 e 25 e, pergunta-se se o raciocínio utilizado funciona sempre ou, às vezes, para quaisquer fileiras.

Segundo Balacheff at al., (2001), esta atividade é uma tarefa que pode vir a provocar, entre os alunos, uma discussão para se saber qual é a melhor maneira de se chegar aos resultados solicitados, pois, conforme apresentado nos fundamentos teóricos, dentre os nove tipos de tarefas, esta atividade aproxima-se da tarefa de ***iniciação à prova.*** Caso haja a necessidade de uma intervenção do professor, que esta seja no sentido de orientá-los, para que cheguem às suas conclusões positivamente.

Meu objetivo para esta atividade é que o aluno encontre uma expressão algébrica, ou melhor, uma lei de formação para a seqüência apresentada e que consiga justificar sua expressão, mostre que se é sempre válida e aplique sua expressão, encontrando o número de triângulos da fileira 97.

Minha expectativa para esta atividade é que o aluno consiga construir, utilizando o software cabri, toda a seqüência de triângulos eqüiláteros das seis fileiras, bem como complete a tabela solicitada no item e. Quanto aos itens f, g e h, acredito que ele chegue ao resultado correto. No entanto, no item i, que deverá apresentar uma lei de formação, acredito que apresentará, talvez, uma lei de formação que não funcione sempre.

Neste caso, assim como em todas as atividades o professor deve fazer um fechamento, ou seja, abrir uma discussão, para que todos justifiquem suas conjecturas, a fim de verificarem suas conclusões, ou ainda, a utilização do Software Excel para confirmarem seus resultados.

Análise a posteriori da Atividade 3

A tabela abaixo apresenta um resumo das respostas das duplas referente à Atividade 3.

Tabela 4 - Respostas das duplas referentes à Atividade 3

	Dupla A	Dupla B	Dupla C	Dupla D
Item a	OK	OK	OK	OK
Item b	OK	OK	OK	OK
Item c	OK	OK	OK	OK
Item d	Aumenta de 2 em 2 e r = 2	1, 3, 5, 7, 9, 11 r = branco	De 2 em 2 e r = 2	Aumenta de 2 em 2 e r = 2
Item e	Construção OK Tabela OK	Construção OK Tabela OK	Construção OK Tabela OK	Construção OK Tabela OK
Item f	Contando de 2 em 2	Somando de 2 em 2	Adicionando de 2 em 2	Aumentando 2 a cada resultado
Item g	Contando de 2 em 2	Somando de 2 em 2	Adicionando de 2 em 2	Aumentando 2 a cada resultado
Item h	Sempre	Sempre	Sempre Obs.: menos a fileira número 1	Sempre
Item i	Em branco	Não escreveu a expressão	N + N - 1 = X	2X - 1
Item j	Em branco	97 + 96 = 193	97 + 97 = 194 194 - 1 = 193	2 . 97 - 1 (duas vezes a fileira menos 1)

Esta atividade iniciou no segundo encontro e a partir desse dia a dupla denominada B ficou somente com um aluno, assim, procedeu até o fim das atividades.

Uma curiosidade que aconteceu durante a resolução desta atividade, foi quando a dupla B fez a construção das demais fileiras por rotação do triângulo e não por simetria axial, conforme orientação contida na atividade. Com isso, não conseguiu preencher as cores solicitadas. No entanto, em outra oportunidade, foram repetidos os passos do aluno e a construção pôde ser preenchida, fato que deveria ser observado no momento em que o aluno fez a atividade, pois esta não foi salva no computador; portanto, não se pode detectar a falha em sua construção.

Ilustração 2 - Respostas da Atividade 3 - item d da dupla C

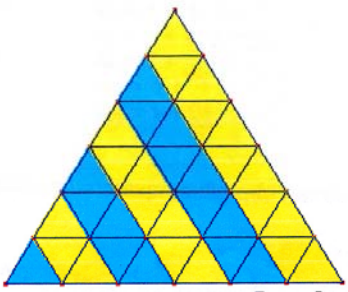
d) O número de triângulos aumentou de quanto em quanto para cada fileira? Então, qual é a razão? de 2 em 2

$r = 2$

Neste item da atividade, somente o aluno B deixou a questão em branco, as demais duplas responderam acertadamente.

Ilustração 3 - Respostas da Atividade 3 - item e da dupla C

e) Construa, usando as mesmas ferramentas do Cabri, até a 6ª fileira, obtendo assim a figura abaixo. Complete a tabela a seguir.



1 2 3 4 5 6

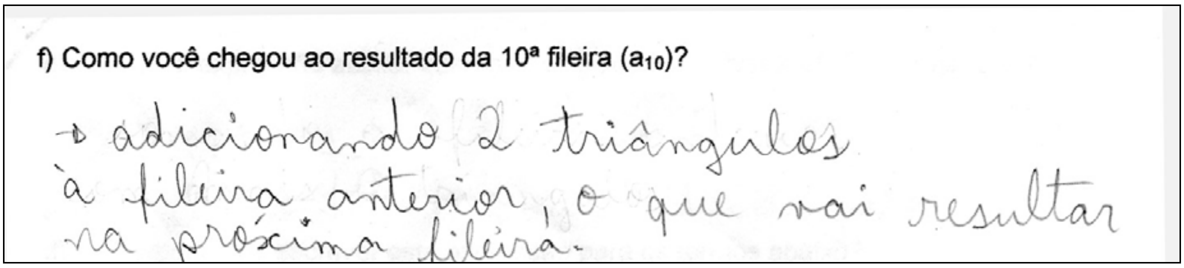
Número da fileira	Total de triângulos em cada fileira
a_1 (1ª fileira = 1° termo)	1
a_2 (2ª fileira = 2° termo)	3
a_3 (3ª fileira = 3° termo)	5
a_4 (4ª fileira = 4° termo)	7
a_5 (5ª fileira = 5° termo)	9
a_6 (6ª fileira = 6° termo)	11
a_{10} (10ª fileira = 10° termo)	19
a_{25} (25ª fileira = 25° termo)	49

11 = 21
12 = 23
13 = 25
14 = 27
15 = 29
16 = 31
17 = 33
18 = 35
19 = 37
20 = 39
21 = 41
22 = 43
23 = 45
24 = 47
25 = 49

A Ilustração 3 mostra como a dupla C chegou ao resultado da 25ª fileira, somando a razão 2 ao termo anterior, portanto, fez de modo empírico, com cálculo termo a termo.

Na Ilustração 4, a mesma dupla respondeu exatamente, o que se pode perceber na resposta do item anterior.

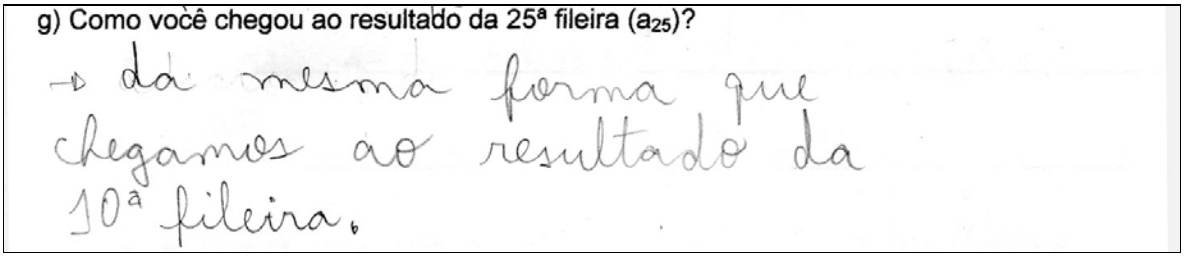
Ilustração 4 - Respostas da Atividade 3 - item f da dupla C



f) Como você chegou ao resultado da 10ª fileira (a_{10})?

→ adicionando 2 triângulos à fileira anterior, o que vai resultar na próxima fileira.

Ilustração 5 - Respostas da Atividade 3 - item g da dupla C



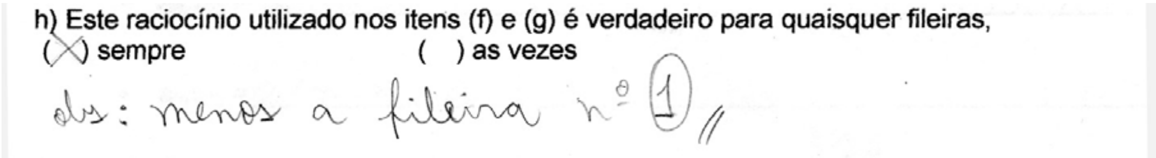
g) Como você chegou ao resultado da 25ª fileira (a_{25})?

→ da mesma forma que chegamos ao resultado da 10ª fileira.

Os alunos responderam aos itens f e g, conforme estava previsto; no entanto, cada um respondeu praticamente a mesma coisa, com palavras diferentes, pois as respostas foram: Contando de 2 em 2, Somando de 2 em 2, Adicionando de 2 em 2 e Aumentando 2 a cada resultado.

Outra observação importante que a dupla C fez no item h desta atividade, que está representada na Ilustração 6, ao dizer que o raciocínio utilizado funciona para todas as fileiras, menos à fileira número 1. O fato mostra que os alunos estão atentos, pois o número da primeira fileira já é dado, ou seja, não há necessidade de se somar 2 para se obter esta fileira.

Ilustração 6 - Respostas da Atividade 3 - item h da dupla C


h) Este raciocínio utilizado nos itens (f) e (g) é verdadeiro para quaisquer fileiras,
(X) sempre ( ) as vezes
obs: menos a fileira nº 1

Os alunos responderam corretamente que seu raciocínio funciona sempre, mas somente duas duplas escreveram a expressão que representa o raciocínio. A dupla C escreveu “n + n – 1 = x” (Ilustração 7), e a dupla D, “2.x – 1”, calculando o número de triângulos da 97ª fileira (Ilustração 8), justifica seu raciocínio. No entanto, eles não têm como se certificarem dos resultados. O que me leva a acreditar que outra tecnologia poderia ser utilizada para este fim, como por exemplo, uma planilha Excel.

Ilustração 7 - Respostas da Atividade 3 - item i da dupla C

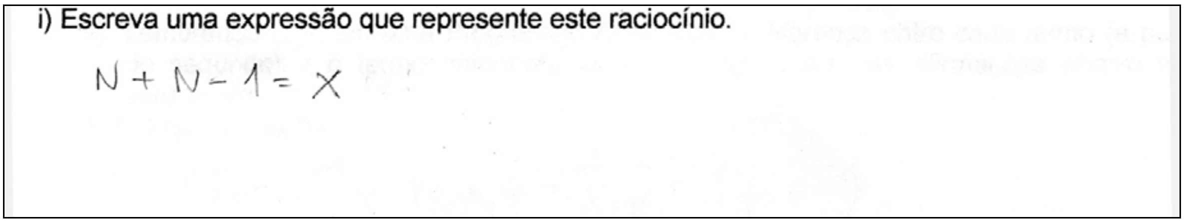
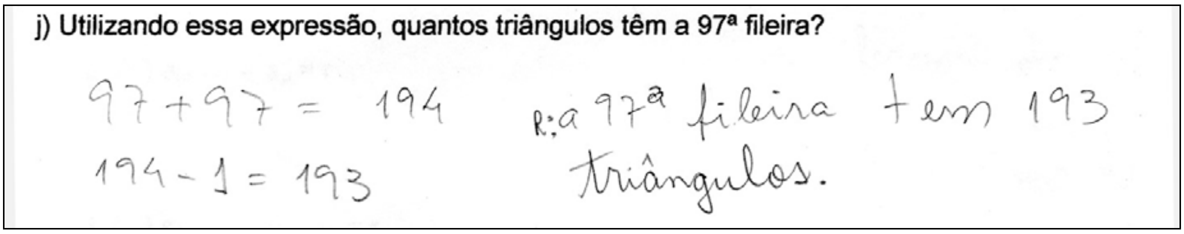

i) Escreva uma expressão que represente este raciocínio.
N + N - 1 = X

Ilustração 8 - Respostas da Atividade 3 - item j da dupla C


j) Utilizando essa expressão, quantos triângulos têm a 97ª fileira?
97 + 97 = 194
194 - 1 = 193
R: a 97ª fileira tem 193 triângulos.

Pode-se perceber, também, que houve discussão entre os componentes de cada dupla, sobre qual a melhor maneira de se certificarem dos resultados, sobretudo entre os componentes das duplas C e D. No entanto, a presença do professor não foi solicitada.

Acredita-se que 50% dos alunos conseguiram atingir os objetivos desta atividade, surpreendendo as previsões das análises a priori, pois achava-se que suas respostas não seriam tão completas e talvez que os alunos não mostrassem tanta dedicação. Uma dupla deixou em branco, e o aluno B não escreveu a expressão. Novamente, neste caso, o professor deveria fazer um fechamento, provocando até uma discussão, para sanar as dúvidas apresentadas.

Atividade 4:

a) Observe a tabela do item e da atividade anterior e complete os _____.

$a_1 = 1 + 0.\ 2 = 1$

$a_2 = 1 + 1.\ 2 = 3$

$a_3 = 1 + 2.\ 2 = 5$

$a_4 = 1 + 3.\ 2 = 7$

$a_5 = 1 + 4.\ 2 =$ __

$a_6 = 1 +$ __. $2 =$ __

$a_{10} = 1 +$ __. $2 =$ __

$a_{25} = 1 +$ __. $2 =$ __

b) Escreva uma expressão que represente um termo n qualquer, em função de a_1 e r.

c) Usando a expressão acima, quantos triângulos têm a fileira 117? Ou seja, a_{117}?

d) Como podemos escrever esta expressão para os termos abaixo?

- $a_{(n+1)} =$____
- $a_{(n-1)} =$____
- $a_{(n+2)} =$____
- $a_{(n-2)} =$____

e) Lembrando que, em uma Progressão Aritmética, a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é igual à razão, quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1. ( ) $a_{(n-1)} + a_n = r$

2. ( ) $a_{(n+1)} - a_n = r$

3. ( ) $a_{(n+1)} - a_{(n-1)} = r$

4. ( ) $a_n - a_{(n-1)} = r$

Justifique as afirmações verdadeiras

Análise a priori da Atividade 4

Esta atividade é uma das mais importantes dentre todas, pois se espera que o aluno generalize a expressão conhecida como a "fórmula do termo geral da PA" e faça a prova desta fórmula de maneira genérica, ou seja, usando a definição de PA, verificando que esta expressão, obtida no item b, é sempre válida.

De acordo com Balacheff at al. (2001) esta atividade faz o aluno caracterizar o uso de expressões específicas, organizando suas conjecturas e as propriedades da PA de uma maneira dedutiva; no caso a fórmula do termo geral, o que caracteriza um tipo de ***tarefa para encontrar um encadeamento dedutivo***, escrevendo, assim, suas argumentações.

Procurei organizar os dados de modo que o aluno chegue a uma generalização, ou seja, escreva uma expressão para um termo n qualquer, somando o primeiro termo com o produto da razão por (n – 1) que é a fórmula do termo geral da PA.

Minha pretensão para esta atividade é que o aluno consiga escrever, no item b, a fórmula do termo geral da PA, aplique-a no item c para encontrar o 117° termo e trabalhe com a fórmula encontrada algebricamente, escrevendo o valor dos termos $a_{(n+1)}$, $a_{(n-1)}$, $a_{(n+2)}$ e $a_{(n-2)}$, justificando, no item “e” quais afirmações são PA, pela definição apresentada anteriormente.

Acredito que os alunos terão algumas dificuldades para escrever as expressões solicitadas no item d, bem como justificar as afirmações verdadeiras apresentadas no item “e”.

Conforme Modanez (2003), os erros que possam acontecer neste tipo de atividade, são erros quanto à ***generalização das relações e procedimentos aritméticos***, o que também vem de encontro com *o que* Meira (2003) apresenta, pois as “dificuldades que alunos e professores enfrentam no ensino e aprendizagem da álgebra” e um resumo das dificuldades pesquisadas pelo americano Fey, 1990 (apud Meira, 2003), que “o ensino da Álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis”, ou seja, o que os alunos farão nos itens “d” e “e”, é exatamente transformar expressões algébricas em símbolos, no caso, para a letra “r”.

Portanto, posso afirmar, contando também com minha experiência, que os alunos não estão acostumados a trabalhar com expressões literais. Neste caso, acredito que minha intervenção será inevitável, mas farei o possível, para que o aluno chegue por meio de minha mediação ao resultado esperado e tire suas conclusões.

Análise a posteriori da Atividade 4

Os alunos conseguiram escrever a fórmula do termo geral da PA, assim como demonstrar o que foi pedido. No entanto, a dupla A necessitou da ajuda do professor, este precisou explicar detalhadamente o item d e orientar como deveriam proceder no item e. As demais duplas somente pediram a ajuda do professor para verificar se os resultados obtidos estavam corretos, e o professor respondeu que, numa igualdade, se um lado possui um valor, no caso “r” e o outro lado, o resultado da conta deu o mesmo valor “r”, sua veracidade já foi provada.

A tabela abaixo apresenta um resumo das respostas das duplas referente à Atividade 4, ainda na tabela as respostas em destaque estão incorretas.

Tabela 5 - Respostas das duplas referentes à Atividade 4

	Dupla A	Dupla B	Dupla C	Dupla D
Item a	OK	OK	OK	OK
Item b	OK, mas com a ajuda do professor.	OK	OK	OK, com pouca ajuda do professor.
Item c	OK	OK	OK	OK
Item d	$a_1 + n.r$	$a_1 + n.r$	$a_1 + n.r$	$a_1 + n.r$
	$a_1 + n.r - 2.r$	$a_1 + n.r - 2.r$	$a_1 + n.r - 2.r$	$a_1 + n.r - 2.r$
	$a_1 + n.r$	$a_1 + n.r + r$	$a_1 + n.r + r$	$a_1 + n.r + r$
	$a_1 + n.r - 3.r$	$a_1 + n.r - 3.r$	$a_1 + n.r - 3.r$	$a_1 + n.r - 3.r$
Item e	Falsa	Falsa	Falsa	Falsa
	$a_2 + 2.n.r - 3.r \neq r$	$a_2 + 2.n.r - 3.r \neq r$	$2a_1 + 2.n.r - 3.r \neq r$	$2a_1 + 2.n.r - 3.r \neq r$
	Verdadeira	Falsa	Verdadeira	Verdadeira
	$r = r$	$r = r$	$r = r$	$r = r$
	Falsa	Verdadeira	Falsa	Falsa
	$2r \neq r$	$2.r = r$	$2.r \neq r$	$2a_1 - r \neq r$
	Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira
	$r = r$	$r = r$	$r = r$	$r = r$
Justificativas do item e	São verdadeiras porque as razões são as mesmas	Porque os resultados deram r nas suas contas	Porque os dois lados dão o mesmo resultado	Pois o resultado de um lado é igual ao outro

Ilustração 9 - Respostas da Atividade 4 - item a da dupla C

Atividade 4

a) Observe a tabela do item e da atividade anterior e complete os ____.

$a_1 = 1 + 0.\ 2 = 1$
$a_2 = 1 + 1.\ 2 = 3$
$a_3 = 1 + 2.\ 2 = 5$
$a_4 = 1 + 3.\ 2 = 7$
$a_5 = 1 + 4.\ 2 = 9$
$a_6 = 1 + 5.\ 2 = 11$
$a_{10} = 1 + 9.\ 2 = 19$
$a_{25} = 1 + 24.\ 2 = 49$

$a_n \quad n \quad r \quad x$

As duplas novamente surpreenderam-me, pois, apesar dos alunos apresentarem grandes dificuldades para trabalhar com literais. Destas duplas, somente uma, a D, demonstrou muita dificuldade, pois mostrou pouco compromisso quanto ao aprendizado. Neste caso, expliquei o que se pretendia para esta atividade, enquanto, para as outras duplas só surgiram perguntas simples, para confirmarem seus resultados.

Ilustração 10 - Respostas da Atividade 4 - item b da dupla C

b) Escreva uma expressão que represente um termo n qualquer, em função de a_1 e r.

$a_n = a_1 + (n-1).r$ //

Os itens c, d, e desta atividade mostram que os alunos são capazes de padronizar, justificar e formular suas observações, lembrando que estes alunos não tinham noções de padrões nem de progressões.

Ilustração 11 - Respostas da Atividade 4 - item c da dupla C

$a_n = a_1 + (n-1).r$

c) Usando a expressão acima, quantos triângulos têm a fileira 117? Ou seja, a_{117}?

$a_{117} = a_1 + (117 - 1) . 2$

→ a fileira 117 têm 233 triângulos

Ilustração 12 - Respostas da Atividade 4 - item d da dupla C

d) Como podemos escrever esta expressão para os termos abaixo?

- $a_{(n+1)} = a_{(n+1)} = a_1 + (n+1-1).r = a_1 + nr$ //
- $a_{(n-1)} = a(n-1) = a1 + (n-1-1).r = a1 + (n-2).r$
  $\rightarrow a_1 + nr - 2r$ //
- $a_{(n+2)} = a(n+2) = a1 + (n+2-1).r = a1 + (n+1).r$
  $\rightarrow a_1 + nr + 1r$ /
- $a_{(n-2)} = a(n-2) = a1 + (n-2-1).r = a1 + (n-3).r$
  $\rightarrow a_1 + nr - 3r$ //

Ilustração 13 - Respostas da Atividade 4 - item e da dupla C

e) Lembrando que, em uma Progressão Aritmética, a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é igual à razão, quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1. ( ) $a_{(n-1)} + a_n = r$

$a_1 + nr - 2r + a_1 + nr - 1r = 2a_1 + 2nr - 3r$

→ diferente de r //

2. (X) $a_{(n+1)} - a_n = r$

$a_1 + nr - (a_1 + nr - 1r) = r$ // → verdadeira

3. ( ) $a_{(n+1)} - a_{(n-1)} = r$

$a_1 + nr - (a_1 + nr - 2r) = 2r$ //

4. (X) $a_n - a_{(n-1)} = r$

$a_1 + nr - 1r - (a_1 + nr - 2r) = r$ // → verdadeira

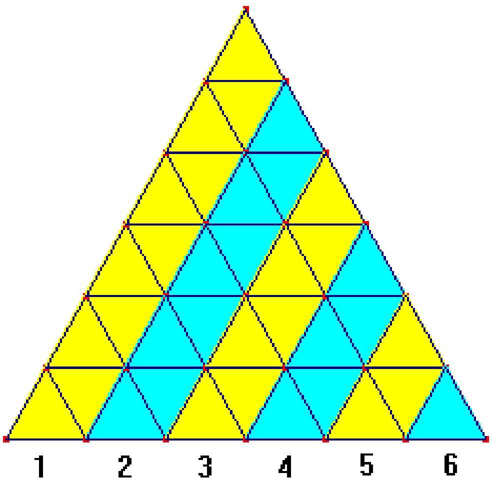
Justifique as afirmações verdadeiras

→ Porque os dois lados dão o mesmo resultado.

Acredita-se, também, que os objetivos desta atividade foram atingidos quase em sua totalidade, pois os alunos generalizaram a expressão da PA, caracterizaram o uso da expressão (Balacheff at al., 2001), calculando os valores solicitados, trabalharam algebricamente com as expressões apresentadas e justificaram seus resultados.

Atividade 5:

Retorne para a figura construída no software Cabri-Géomètre e faça as alterações de cores para obter a figura abaixo.



a) Sabendo que o n° 1 significa a 1ª fileira (amarela), o n° 2 significa a 2ª fileira (azul) e assim por diante, complete a tabela abaixo:

Número da fileira	Total de triângulos em cada fileira
a_1 (1ª fileira = 1° termo)	11
a_2 (2ª fileira = 2° termo)	9
a_3 (3ª fileira = 3° termo)	
a_4 (4ª fileira = 4° termo)	
a_5 (5ª fileira = 5° termo)	
a_6 (6ª fileira = 6° termo)	

b) O número de triângulos diminui de quanto em quanto, para cada fileira? Então, qual é a razão?

Caso não estivéssemos trabalhando com triângulos e, sim, com números inteiros, ou seja, teríamos o primeiro termo da PA sendo $a_1 = 11$, o segundo termo $a_2 = 9$ e, assim, por diante. Qual seria o valor do sétimo termo? E do décimo termo?

a_7 = _____ a_{10} = _____

c) Como você chegou ao resultado para o sétimo termo (a_7)?

d) Como você chegou ao resultado para o décimo termo (a_{10})?

e) Este raciocínio utilizado nos itens (c) e (d) é verdadeiro para quaisquer fileiras,
( ) sempre ( ) às vezes

f) Escreva uma expressão que represente este raciocínio.

g) Utilizando essa expressão, qual é o número do termo 25? Ou seja, a_{25}?

Análise a priori da Atividade 5

Esta atividade é muito parecida com a Atividade 3; no entanto, nesta PA a razão é negativa. Como o aluno já está familiarizado com o conceito de seqüência, a atividade está proposta com o objetivo de consolidar este conceito. O aluno terá, também, que apresentar uma lei de formação e estará usando o Cabri de uma maneira muito simples, pois, só terá de mudar a cor do preenchimento.

Baseando-se em Balacheff at al., (2001), esta atividade é, também, uma tarefa que pode gerar uma discussão entre os alunos, mas acredito que eles mesmos, nesta parte do processo, cheguem às suas conclusões, sem a intervenção do professor.

Esta atividade diferencia-se da Atividade 3, por ser uma PA de razão negativa, além do que não se pode construir indefinidamente a figura. Ocorre aqui uma mudança de quadro (do geométrico figural para o numérico simbólico-algébrico), pois o aluno deverá sair do manipulável, que é o software Cabri, e começar a trabalhar com uma seqüência numérica, não podendo representar na figura, os termos negativos. O aluno deve perceber no item b desta atividade, quando for calcular o sétimo termo, a existência de termos negativos.

No item b, além de solicitado ao aluno o valor da razão, foi pedido para que ele não enxergasse esta seqüência, como o número total de triângulos na fileira e, sim, como os números inteiros, para que pudéssemos dar continuidade à PA, ou seja, foi feita a seguinte pergunta ao aluno: Qual é o valor do sétimo elemento? E o aluno deveria responder, – 1. A mesma pergunta foi feita para o décimo elemento e o aluno deveria responder – 7.

Neste ponto da atividade, acredito que pode ser que haja necessidade da interferência do professor aplicador, pois, mesmo que na Atividade 2, o aluno tenha tido contato com PA de razão negativa, o professor-aplicador deve retomar e, até dar exemplos, para mostrar que, em uma PA de razão negativa, esta mudança de termos positivos para termos negativos pode acontecer.

Nos itens c e d, solicito ao aluno que justifique os resultados encontrados do sétimo e do décimo termos, pois estes não representam triângulos e, sim, números inteiros.

Nesta atividade, meu objetivo é que o aluno encontre uma expressão, ou seja, uma lei de formação para esta seqüência decrescente e que no momento da passagem de números positivos para números negativos a intervenção do professor seja mínima.

Nesta atividade, acredito que o aluno consiga, sem dificuldades, responder ao item a, mas, para os itens seguintes creio que necessitará da intervenção do professor-aplicador somente para se certificar de suas respostas dadas.

Análise a posteriori da Atividade 5

A tabela abaixo apresenta um resumo das respostas das duplas referente à Atividade 5. Pode-se observar que as anotações em vermelho são as respostas apresentadas erroneamente pelas duplas.

Tabela 6 - Respostas das duplas referentes à Atividade 5

	Dupla A	Dupla B	Dupla C	Dupla D
Item a	OK	OK	OK	OK
Item b	Diminui de 2 em 2 r = - 2, a_7 = -1 e a_{10} = - 7	Em 2, a_7 = 0 e a_{10} = - 7	De 2 em 2, a_7 = -3 e a_{10} = - 7	Diminui de 2 em 2, r = 2, a_7 = -1 e a_{10} = - 7
Item c	Diminuindo de 2 em 2.	Diminuiu – 2	Continuamos subtraindo 2	o resultado passa do n° 1 positivo para o n° 1 negativo
Item d	Continuou diminuindo até o número que queria	Da mesma forma do item anterior	Da mesma forma que chegamos no a_7	Acrescentando -2 a cada resultado até chegar ao termo a_{10} = - 7
Item e	Às vezes	Sempre	Sempre, a partir da 2ª fileira.	Sempre
Item f	Em branco	Não escreveu a expressão	(n. 2) - r = a_n	11+ x - 1.r
Item g	Em branco	-35	(25 . 2) - 2 = a_n 625 - 2 = - 623	11+(25 -1).(-2) = 11+ 24.(-2) = 11- 48 = -37

Dentre todas as atividades desenvolvidas pelas duplas, esta, sem dúvida, foi a mais complicada, pois, analisando a tabela acima, pode-se perceber que houve um alto índice de erros (respostas erradas, incompletas ou em branco).

A previsão para esta atividade era que o aluno consolidasse os conceitos de PA, mas não foi o que ocorreu, pois ele confundiu razão negativa com diminuir, somente uma dupla (a dupla D), disse adicionar – 2 (Ilustração 14) e, ainda, foi a única a que conseguiu acertar a expressão para chegar ao termo 25.

Ilustração 14 - Respostas da Atividade 5 - item d da dupla D

d) Como você chegou ao resultado para o décimo termo (a_{10})?

Fui acrescentando −2 a cada resultado até chegar ao termo $a_{10} = -7$

Na resposta da dupla D, pode-se observar que, no item f, o raciocínio utilizado aproximou-se da fórmula da PA (Ilustração 15). A verificação do raciocínio, calculando o termo 25 (ilustração 16) mostra que não usou a fórmula da PA e, sim, fez os cálculos para cada termo.

Ilustração 15 - Respostas da Atividade 5 - item f da dupla D

f) Escreva uma expressão que represente este raciocínio.

$11 + X - 1 \cdot r$

Ilustração 16 - Respostas da Atividade 5 - item g da dupla D

g) Utilizando essa expressão, qual é o número do termo 25? Ou seja, a_{25}?

$11 + (25 - 1) \cdot (-2)$

$11 + 24 \cdot (-2)$

$11 - 48 = -37$

Pode-se observar que o objetivo desta atividade não foi atingido, pois duas duplas deixaram o item f em branco e das duas que responderam somente uma dupla acertou. Portanto, houve um índice muito baixo de acerto. O mesmo se diz a respeito do item g, que era para calcular o 25° termo, ou seja, somente uma dupla chegou ao resultado correto. Neste momento, pode-se observar a importância da intervenção do professor ao levar o aluno a construir o conhecimento necessário, quer seja por explicação ou gerenciar uma discussão; no entanto, minha postura foi permanecer neutro.

A maior preocupação foi que os alunos não solicitaram a interferência do professor, talvez por acharem que estavam respondendo corretamente, o que não ocorreu.

Atividade 6:

a) Observe a tabela do item a da atividade anterior e complete os ____.

$a_1 = 11 + 0.(-2) = 11$

$a_2 = 11 + 1.(-2) = 9$

$a_3 = 11 + 2.(-2) = 7$

$a_4 = 11 + 3.(-2) = 5$

$a_5 = 11 + 4.(-2) =$ ___

$a_6 = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

$a_7 = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

$a_{10} = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

$a_{25} = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

b) Escreva uma expressão que represente um termo n qualquer, em função de a_1 e r.

c) Utilizando esta expressão, qual é o número do termo 117, ou seja, a_{117}.

d) Como se pode escrever esta expressão para os termos abaixo?

- $a_{(n-3)} =$

- $a_{(n+2)} =$

- $a_{(n-2)} =$

- $a_{(n+3)} =$

e) Lembrando que, em uma Progressão Aritmética, a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é igual à razão, quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1. ( ) $a_{(n-3)} - a_{(n-2)} = r$

2. ( ) $a_{(n+2)} - a_{(n+1)} = r$

3. ( ) $a_{(n+2)} - a_{(n-1)} = r$

4. ( ) $a_{(n+1)} - a_{(n-1)} = 2r$

Justifique as afirmações verdadeiras

Análise a priori da Atividade 6

Esta atividade é outra das mais importantes, espera-se que o aluno, generalize a expressão conhecida, como a fórmula do termo geral da PA e faça o desenvolvimento de como se chega à fórmula de uma maneira genérica, ou seja, usando a definição de PA, além de verificar que a fórmula do termo geral é verdadeira, tanto para PA crescente (razão positiva) como para PA decrescente (razão negativa).

De acordo com Balacheff at al., (2001), esta atividade, assim como a Atividade 4, fazem o aluno caracterizar o uso de expressões específicas, organizando suas conjecturas e as propriedades da PA de uma maneira dedutiva, no caso a fórmula do termo geral, o que caracteriza um tipo de ***tarefa para encontrar um encadeamento dedutivo***, redigindo, assim, suas argumentações, conforme já descrito.

Nesta Atividade, espero que o aluno organize os dados de modo que chegue a uma generalização, ou seja, na expressão para um termo n qualquer, que é a fórmula do termo geral da PA. Pede-se para que calcule o termo 117 e que escreva as expressões para n+3, n –3, n+1 e n –1. Em seguida, solicito que verifique a veracidade de algumas afirmações apresentadas no item “e”, calculando algebricamente, comparando com o resultado da igualdade e, para justificar, sendo este item o ponto crucial do trabalho, pois o objetivo do mesmo é verificar em que medida é possível engajar os alunos em situações de argumentar, justificar e provar conjecturas sobre Progressões Aritméticas.

Minha pretensão para esta atividade, assim como na Atividade 4 é que o aluno consiga escrever a fórmula do termo geral da PA, aplique-a no item d, escreva a generalização solicitada e, conseqüentemente, justifique, encontrando argumentos e justificativas para convencer e se convencer das afirmações verdadeiras apresentadas no item e.

Análise a posteriori da Atividade 6

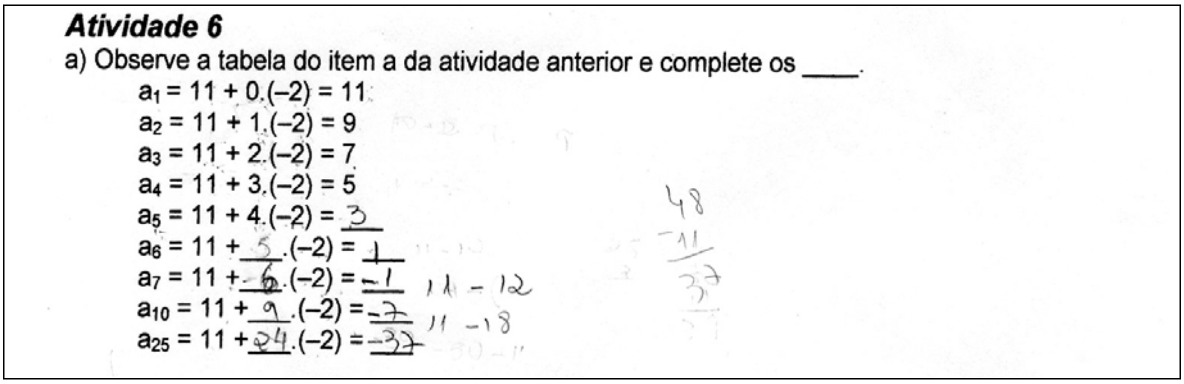
A tabela abaixo apresenta um resumo das respostas das duplas referente à Atividade 6, o que está preenchido na cor laranja representa erro na resposta, quanto ao que está preenchido em amarelo, será comentado, posteriormente.

Tabela 7 - Respostas das duplas referentes à Atividade 6

	Dupla A	Dupla B	Dupla C	Dupla D
Item a	OK	Errou (a_{25} = - 49)	OK	OK
Item b	Ok, mas com a ajuda do professor.	OK	OK	OK
Item c	a_{117} = -243	a_{117} = 233	a_{117} = - 221	a_{117} = - 222
Item d	a_1 + n.r - 4.r	a_1 + n.r - 4.r	a_1 + n.r - 4.r	a_1 + n.r – 4.r
	a_1 + n.r	a_1 + n.r + r	a_1 + n.r + r	a_1 + n.r + r
	a_1 + n.r - 3.r	a_1 + n.r - 3.r	a_1 + n.r - 3.r	a_1 + n.r – 3.r
	a_1 + n.r - 4.r	a_1 + n.r + 2.r	a_1 + n.r + 2.r	a_1 + n.r + 2.r
Item e	Falsa	Falsa	Falsa	Falsa
	- r ≠ r	- 7.r ≠ r	- 7.r ≠ r	- r ≠ r
	Falsa	Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira
	- 3r ≠ r	r = r	-r = r	r = r
	Falsa	Falsa	Verdadeira	Falsa
	2r ≠ r	- r ≠ r	- r = r	3r ≠ r
	Verdadeira	Verdadeira	Falsa	Falsa
	2.r = 2.r	2.r = 2.r	- 2.r ≠ 2.r	2.r = r
Justificativas do item e	É verdadeira porque a razão é a mesma.	Resolvendo as contas consegui os resultados	Porque os dois lados dão o mesmo resultado	Pois o resultado de um termo é igual ao outro

Na realização desta atividade, pode-se perceber com relação aos alunos que, além de responderem muito rapidamente, perguntavam se poderiam fazer o resultado direto ou se deveriam colocar a resolução. Neste momento, foi-lhes solicitado mais um pouco de esforço e dedicação, pois as atividades já estavam terminando.

Ilustração 17 - Respostas da Atividade 6 - item a da dupla D


Atividade 6

a) Observe a tabela do item a da atividade anterior e complete os ____.

$a_1 = 11 + 0.(-2) = 11$
$a_2 = 11 + 1.(-2) = 9$
$a_3 = 11 + 2.(-2) = 7$
$a_4 = 11 + 3.(-2) = 5$
$a_5 = 11 + 4.(-2) = 3$
$a_6 = 11 + 5.(-2) = 1$
$a_7 = 11 + 6.(-2) = -1$ 11 – 12
$a_{10} = 11 + 9.(-2) = -7$ 11 – 18
$a_{25} = 11 + 24.(-2) = -37$

48
–11
37

Podem ser percebidos, também, erros que mostraram ou falta de atenção, ou dificuldades na interpretação algébrica, como afirmar que a questão é verdadeira e colocar - r = r, ou ainda, resolver toda a demonstração corretamente e não perceber que o resultado encontrado (= 2.r) era igual ao outro membro da expressão (= 2.r), como foi o caso da dupla D destacada na tabela em amarelo, respondendo que o item era falso.

Conforme a análise das respostas dos alunos, percebi a importância do fechamento em cada atividade, pois, infelizmente, detectei algumas falhas no aprendizado dos alunos, que poderiam ser sanadas por meio de discussões e da interferência do professor.

Ilustração 18 - Respostas da Atividade 6 - item b da dupla D

b) Escreva uma expressão que represente um termo n qualquer, em função de a_1 e r.

$a_n = a_1 + (n-1).r$

Ilustração 19 - Respostas da Atividade 6 - item c da dupla D

c) Utilizando essa expressão, qual é o numero do termo 117? Ou seja, a_{117}?

$a_{117} = 11 + (117-1).(-2)$

$a_{117} = 11 + 116.(-2)$

$a_{117} = 11 - 232$

$a_{117} = -221$

232
11
221

Acredita-se que, em parte, os objetivos desta atividade foram alcançados, pois os alunos escreveram a expressão solicitada que era a fórmula do termo geral da PA, duas das quatro duplas confirmaram o resultado, calculando o termo a_{117} (= - 221). Três das quatro duplas escreveram as expressões para os termos solicitados ($a_{(n-3)}$, $a_{(n+2)}$, $a_{(n-2)}$ e $a_{(n+3)}$) corretamente e quanto às provas e justificativas pedidas no item e, pode-se perceber que, poucos erros foram cometidos, que poderiam ser sanados em uma possível interferência do professor.

Ilustração 20 - Respostas da Atividade 6 - item d da dupla D

d) Como podemos escrever esta expressão para os termos abaixo?

- $a_{(n-3)} =$

$a(n-3) = a1 + (n-3-1) \cdot r$

$a1 + (n-4) \cdot r = a1 + nr - 4r$

- $a_{(n+2)} =$

$a(n+2) = a_1 + (n+2-1) \cdot r = a1 + (n+1) \cdot r$

$a1 + nr + 1r$

- $a_{(n-2)} =$

$a(n-2) = a1 + (n-2-1) \cdot r = a1 + (n-3) \cdot r$

$a1 + nr - 3r =$

- $a_{(n+3)} =$

$a(n+3) = a1 + (n+3-1) \cdot r = a1 + (n+2) \cdot r$

$a1 + nr + 2r$

Ilustração 21 - Respostas da Atividade 6 - item e da dupla D

e) Lembrando que, em uma Progressão Aritmética, a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é igual à razão, quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1. ( ) $a_{(n-3)} - a_{(n-2)} = r$

$a1 + nr - 4r - (a1 + nr - 3r) = r$

$a1 + nr - 4r - a1 - nr + 3r = r$

$-1r = r$

2. (V) $a_{(n+2)} - a_{(n+1)} = r$

$a1 + nr + 1r - (a1 + nr) = r$

$a1 + nr + 1r - a1 - nr = r$

$1r = r$

3. ( ) $a_{(n+2)} - a_{(n-1)} = r$

$a1 + nr + 1r - (a1 + nr - 2r) = r$

$a1 + nr + 1r - a1 - nr + 2r = r \quad 3r = r$

4. ( ) $a_{(n+1)} - a_{(n-1)} = 2r$

$a1 + nr - (a1 + nr - 2r) = r$

$a1 + nr - a1 - nr + 2r = r \quad 2r = r$

Justifique as afirmações verdadeiras

É verdadeiro a 2 por que o resultado de um termo é igual ao outro.

Atividade 7: Comparando a expressão encontrada no item b da Atividade 4 com a expressão encontrada no item b da Atividade 6, o que se pode concluir sabendo que uma é PA crescente e a outra é PA decrescente?

Análise a priori da Atividade 7

Com a intenção de chamar a atenção do aluno para mais uma observação que julgo importante, inseri esta questão com o propósito de fazer o aluno concluir que tanto para PA crescente como para PA decrescente, utiliza-se a mesma expressão, que é a fórmula do termo geral da PA.

Para esta atividade, acredito que o aluno não encontre dificuldade, fazendo a comparação solicitada e concluindo que tanto para a PA crescente como para a PA decrescente pode ser utilizada a mesma fórmula.

Análise a posteriori da Atividade 7

Nesta atividade, os objetivos que eram simples, foram atingidos completamente, pois, todas as duplas perceberam que a fórmula era a mesma tanto para PA crescente como para PA decrescente e justificaram comparando as duas expressões, dizendo que eram as mesmas. Mas a dupla D apresentou uma justificativa mais convincente, dizendo “que na PA crescente o número da razão é positivo e na PA decrescente o número da razão é negativo”, interpretando perfeitamente o papel da letra r (que é a razão) na definição de PA.

Ilustração 22 - Respostas da Atividade 7 (dupla D)

Atividade 7 - Comparando a expressão encontrada no item b da atividade 4 com a expressão encontrada no item b da atividade 6, o que se pode concluir, sabendo que uma é PA crescente e a outra é PA decrescente?

Porque a PA crescente a número da razaõ é positivo. e a PA decrescente o número da razaõ é negativa.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O objetivo deste trabalho foi analisar em que medida as atividades de Progressões Aritméticas relacionadas com tarefas de argumentação e prova e o uso de tecnologia poderiam contribuir para o ensino-aprendizagem de alunos da 1ª série do Ensino Médio. Pretendeu-se, também, analisar a importância do papel do professor, como mediador neste processo.

Ao analisar as respostas do questionário Q1 (anexo 3), aplicado aos alunos da 1ª série do Ensino Médio que participaram das atividades deste trabalho, mas, que não participaram da 1ª fase do projeto AprovaME, pode-se constatar que houve uma contribuição significativa para o desenvolvimento de argumentação e prova na Matemática, pois percebeu-se maior envolvimento em suas respostas, nas quais procuraram sempre justificar suas conjecturas, resultando, conseqüentemente, uma redução nas respostas deixadas em branco.

Um aspecto importante que pode ser analisado, foi quanto à postura do professor, na interação com os alunos, durante as atividades, pois a atitude de neutralizar, na maioria das vezes, suas ações mostrou-se pouco eficiente quanto ao aprendizado dos alunos.

Acredita-se que o papel ideal do professor seria ter ações mais ativas, propondo debates, discussões, fazendo questionamentos aos alunos, confrontando suas respostas para levantamento de conjecturas ou para excitar seus raciocínios.

Quanto ao uso de tecnologia como ferramenta educacional, a utilização do software Cabri foi em parte um motivador para o aluno, no sentido de utilizar uma ferramenta computacional para realização de suas atividades Matemáticas. No entanto, seu uso foi pontual, ou seja, limitou-se a poucas ferramentas, pois, conforme apresentado anteriormente (Capítulo 2), a possibilidade de arrastar construções geométricas para verificar se suas propriedades são mantidas, é uma de suas principais características que não foi usada, limitando-se às ferramentas “rotação”, “simetria axial” e “preencher”.

Com relação ao uso de tecnologia, pode-se perceber que além do software Cabri, com a função de motivar os alunos, poderia ser usada uma planilha de cálculo, ou seja, o software Excel.

O software Excel para este trabalho teria uma função muito importante, pois o professor poderia simplesmente fornecer, pelo software, a fórmula da PA, sem mostrá-la ao aluno, para obter o resultado de seus cálculos para sua própria verificação, ou ainda, além da oficina do software Cabri poderia ser dada uma oficina do software Excel, para que o próprio aluno desenvolvesse a fórmula da PA, pela generalização de suas conjecturas, calculando seus resultados com muitos valores e, também, com valores elevados em uma rapidez que só o computador pode oferecer.

As atividades deste trabalho devem ser melhoradas, no sentido de apresentarem mais provas, pois, percebeu-se que estas possuíam algumas argumentações e justificativas e mais tratamentos aritméticos e algébricos.

Como questões de pesquisa, têm-se:

Em que medida, por meio da mediação do professor e das atividades propostas, é possível engajar os alunos em situações de argumentar, justificar e provar conjecturas sobre Progressões Aritméticas?

O uso de tecnologia pode favorecer a construção de argumentos, justificativas e provas em Progressões Aritméticas pelos alunos?

Por intermédio destas questões de pesquisa procurou-se levantar algumas observações de como deve ser feita a mediação do professor, utilizando atividades de Progressões Aritméticas para engajar os alunos em situações de argumentações, justificativas e provas, bem como qual tipo e como usar as tecnologias disponíveis:

- Em primeiro lugar, percebeu-se a necessidade da mediação do professor a cada término de atividade ou a cada término de um grupo de atividades, fazendo um fechamento, ou seja, propondo que os alunos confrontem e discutam, argumentando e justificando suas respostas, para que todos possam prosseguir as atividades seguintes sem comprometimento de suas conjecturas.

- Em seguida, verificou-se que o uso de tecnologia é um incentivo para realização de atividades em qualquer área do conhecimento, pois os alunos sentiram-se motivados por construírem figuras geométricas no computador, para resolverem exercícios de Matemática.

- Finalizando, ainda com relação ao uso de tecnologia, constatou-se que nas atividades deste trabalho houve a necessidade de mais uma ferramenta computacional para validação das respostas dos alunos, pois o software Excel cumpriria este papel perfeitamente.

Entretanto, recomenda-se a continuidade deste trabalho, pois, segundo a metodologia do experimento de ensino deve-se procurar um aprimoramento constante, baseado nas análises das versões anteriores, procurando incentivar professores e alunos a trabalharem em conjunto, de modo a aplicar cada vez mais justificativas, argumentações e provas na Matemática, sempre usando a tecnologia, como motivadora e auxiliar na Educação para seus próprios desenvolvimentos.

Neste estudo, as conclusões alcançadas, de forma alguma, são conclusivas, sendo, portanto, um estudo inicial e um desafio para novos trabalhos. Por ser novo, o projeto AProvaME trará muitos frutos, se trabalhos como este tiverem continuidade e aprofundamento.

Esta pesquisa pode não trazer novos conhecimentos nesta área da Matemática, ou seja, em Progressões Aritméticas, mas, com certeza, trouxe muitas transformações nos profissionais envolvidos nele, além de novas perspectivas para o futuro dos alunos que fizeram parte do processo ao qual está envolvido este trabalho. Justificar e provar suas conjecturas, assim como usar os recursos tecnológicos disponíveis no mercado, com certeza, fazem parte de seus processos de aprendizagem, não só na Matemática, mas, em todas as áreas do conhecimento.

Portanto, acredita-se que para se ter melhores resultados em futuras aplicações das atividades propostas, bem como em todos os conteúdos matemáticos, as observações acima devem sempre ser levadas em consideração, objetivando, futuramente, as demonstrações formais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (2001) Demongeot C., Gandit M., Garnier R., Hilt D., Houdebine J., Juhel M.-A. Preuve et démonstration: quelques questions essentielles. IREMs de Grenoble et Rennes. (p.84 - 99). Tradução de Ana Paula Jahn, Sônia Pitta Coelho e Vincenzo Bongiovanni. Disponível em:
http://www.eduscol.education.fr/D0124/preuve_et_demonstration.pdf
(Acesso em 08 março de 2006)

BARBOSA, R. M. (2000) Aprendendo com Padrões Mágicos. Publicação da SBEM-SP n°1.

BONGIOVANNI, V. (2006) Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em geometria.

BRASIL – Ministério da Educação (1998) Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasília.

BRASIL – Ministério da Educação (1999) Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM), Brasília.

BRASIL – Ministério da Educação (2002) Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCN+), Brasília.

DAMM, R. F. (1999) Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC.

DOERR H. M., WOOD T. (2006) Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In:Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática. Org. Borba M. C. Autêntica Editora – Belo Horizonte – MG

HEALY, S. V.; HOYLES, C. (1998) Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report, University of London, Institute of Education.
______. A Study of Proof Conception in Algebra. (2000) Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), pp.396-428.

MEIRA, L. (2003) Rede Brasil - Educação Algébrica e Resolução de Problemas – Significados e modelagem na atividade algébrica. Disponível em: www.redebrasil.tv.br/salto/boletins2003/eda/tetxt2.htm.
(Acesso em 10 abr 2007)

MODANEZ, L. (2003) Das seqüências de Padrões Geométricos à Introdução ao Pensamento Algébrico. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), São Paulo - Pontifícia Universidade Católica, PUC/SP.

PIETROPAOLO, R. C. (2005) (Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo
Pontifícia Universidade Católica, PUC/SP.

VALE, I. , PIMENTEL, T. (2005) Padrões: Um tema transversal do currículo. Educação e Matemática – Revista da associação dos professores de Matemática (Nov. / Dez. de 2005)

VALE, I. , PALHARES, P., CABRITA, I. , BORRALHO, A. (2006) Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Disponível em: www.spce.org.pt/sem/13iv.pdf - (Acesso em 10 abr 2007)

BONGIOVANNI, V.; CAMPOS, T. M. M; ALMOULOUD, S. A. (1997) Descobrindo o Cabri-Géometre.

CASTILHO, A. P. F.; PESCUMA, D. (2005) Projeto de Pesquisa. O que é? Como fazer? 2ª ed. São Paulo (SP): Olho d'Água

______. Referências Bibliográficas. 2ª ed. São Paulo (SP): Olho d'Água, 2005.

______. Trabalho Acadêmico. O que é? Como fazer? 2ª ed. São Paulo (SP): Olho d'Água.

Cultural, Larousse (1999) – Grande Dicionário da Língua Portuguesa. Nova Cultural Ltda.

GRAVINA, M. A. (2001) Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo. Porto Alegre: UFRGS. Tese de Doutorado.

Site Oficial do Cabri-Géométre – Geometria Dinâmica – PROEM – PUC/SP http://www.cabri.com.br/index.php - (acesso em 16 abr 2007)

ANEXO 1 - O PROJETO AProvaME

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar
(AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)
Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)
Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática
PUC/SP

Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. A Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, as quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

Principais Referências Bibliográficas do Projeto AProvaME

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds*.) Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*.: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group* *for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

ANEXO 2 - Capa dos Questionários

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AProvaME

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

ANEXO 3 - Questionário Q1

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

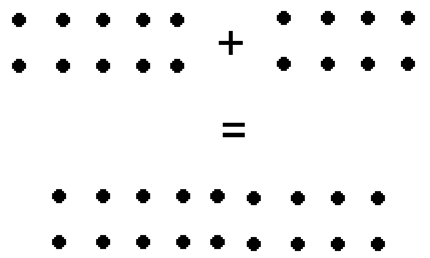
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

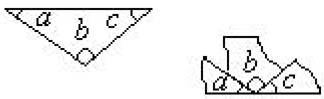
Justifique

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

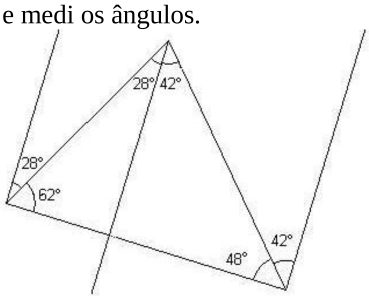
Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

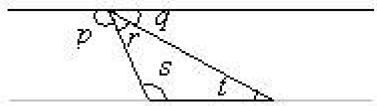
Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia
Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

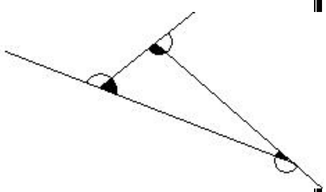


Afirmações	Justificativa
$p = s$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180^o$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girad um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma r Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:
Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

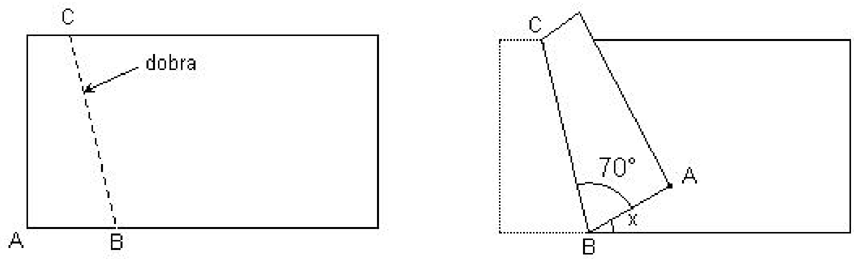
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Justifique sua resposta:

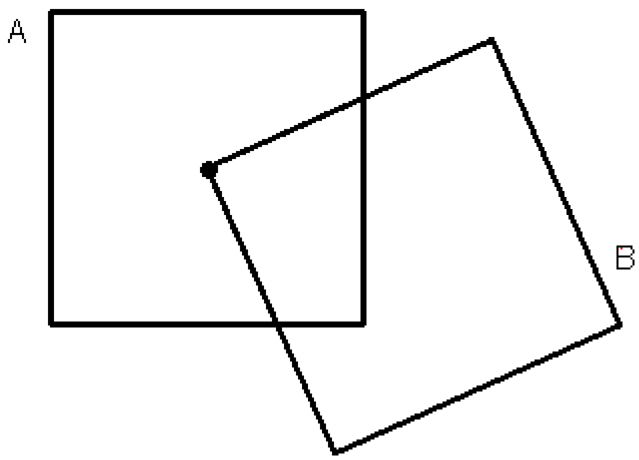
G4: **Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.**



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

ANEXO 4 - ATIVIDADES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA – PUC – SP

Projeto AProvaME–Abril de 2007–Aplicador: Mestrando Paulo Rogério Salomão

Atividades de Progressão Aritmética utilizando o software Cabri-Géomètre

Nome: _________________________________ Série ____ Data ___/___/____

Nome: _________________________________ Série ____ Data ___/___/____

Escola em que estuda: ____

Atividade 1: Complete as seqüências abaixo:

a) Seqüência dos dias da semana: (domingo, ________, _______, ________, ________, ________, sábado)

b) Seqüência dos meses do ano: (janeiro, ________, ________, ________, ________, _________, ________, __________, _________, _________, __________, __________).

c) Seqüência dos números naturais: (0 , ___, ___, ___, ___, ___, ___, ..., n , n+1, ...)

d) Seqüência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada: (1990, 1994, _____, _____, _____, _____, _____,...).

Nas situações acima, podemos observar certa ordem nos elementos das seqüências. Estes são, também, chamados de termos da seqüência e são representados: o primeiro termo por a_1, o segundo termo por a_2 e, assim por diante até um termo n qualquer, que é representado por a_n, e, ainda, podemos ter seqüências finitas ou infinitas.

Algumas seqüências são formadas por leis matemáticas chamadas Leis de Formação. Observe a seqüência abaixo, pois o primeiro elemento possui uma bola; o segundo, quatro bolas; o terceiro, nove bolas e, assim, por diante.

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Portanto temos: $a_1 = 1^2 = 1$ bola

$a_2 = 2^2 = 4$ bolas

$a_3 = 3^2 = 9$ bolas

$a_4 = 4^2 = 16$ bolas

.

.

.

$a_n = n^2 = n \cdot n$ bolas

Existem ainda, algumas seqüências, nas quais a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Esta diferença constante é chamada de razão e é representada pela letra r que pode ser positiva ou negativa. Para este tipo de seqüência dá-se o nome de Progressão Aritmética (PA). Portanto, pode-se ter PA crescente (razão positiva) ou PA decrescente (razão negativa).

Atividade 2 - Identifiquem, nas seqüências abaixo, quais são PA. No caso de PA, calcule o valor da razão r, indique se é crescente ou decrescente e justifique suas respostas.

a) (6, 13, 20, 27, 34)

b) (20, 10, 0, – 10, –20)

c) (2, 7, 12, 18)

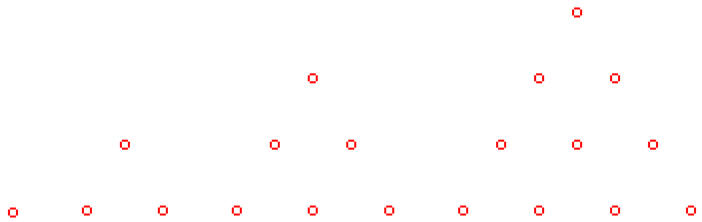
d) (6,01; 11,93; 17,85; 29,78; 41,71)

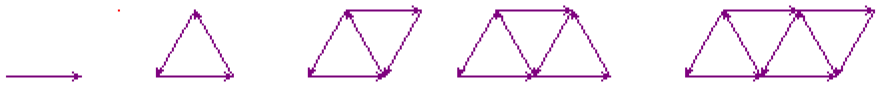
e) (50; 38,67; 27,34; 16,01; 4,68; –6,65)

f) $(a, a^2, a^3, a^4, a^5, ..., a^n, a^{n+1}, ...)$

g) (– 50, –45, –40, –35, –30, ...)

h) (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 23, 36, ...)

i) 

j) 

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA – PUC – SP

Projeto AProvaME–Abril de 2007–Aplicador: Mestrando Paulo Rogério Salomão

Atividades de Progressão Aritmética utilizando o software Cabri-Géomètre

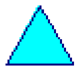
Nome: _________________________________ Série ____ Data ___/___/____

Nome: _________________________________ Série ____ Data ___/___/____

Escola em que estuda: ____

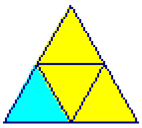
Atividade 3

a) Usando o Cabri-Géomètre, construa um triângulo eqüilátero e pinte de azul, usando as seguintes ferramentas: segmento, edição numérica, rotação, triângulo e preencher.



Observação: diminua seu tamanho, após a construção, para prosseguir a atividade.

b) Construa, por simetria axial, mais três triângulos eqüiláteros, obtendo assim a figura abaixo, mantendo o triângulo externo eqüilátero. Pinte de amarelo.

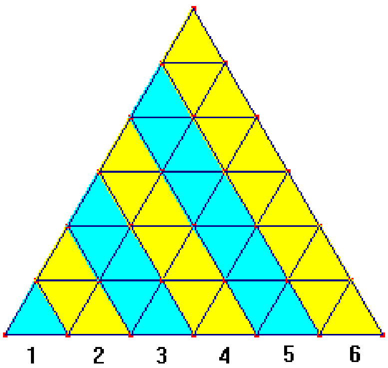


Pode-se dizer que o triângulo azul está na 1ª fileira (um triângulo) e que os triângulos amarelos estão na 2ª fileira (três triângulos).

c) Na mesma figura, usando as mesmas ferramentas do Cabri, construa mais uma fileira de triângulos eqüiláteros (3ª fileira). Pinte esta fileira de azul e responda quantos triângulos possui a fileira.

d) O número de triângulos aumentou de quanto em quanto para cada fileira? Então, qual é a razão?

e) Construa, usando as mesmas ferramentas do Cabri, até a 6ª fileira, obtendo assim a figura abaixo. Complete a tabela, a seguir.



Número da fileira	Total de triângulos em cada fileira
a_1 (1ª fileira = 1° termo)	1
a_2 (2ª fileira = 2° termo)	3
a_3 (3ª fileira = 3° termo)	
a_4 (4ª fileira = 4° termo)	
a_5 (5ª fileira = 5° termo)	
a_6 (6ª fileira = 6° termo)	
a_{10} (10ª fileira = 10° termo)	
a_{25} (25ª fileira = 25° termo)	

f) Como você chegou ao resultado da 10ª fileira (a_{10})?

g) Como você chegou ao resultado da 25ª fileira (a_{25})?

h) Este raciocínio utilizado nos itens (f) e (g) é verdadeiro para quaisquer fileiras,

( ) sempre ( ) as vezes

i) Escreva uma expressão que represente este raciocínio.

j) Utilizando essa expressão, quantos triângulos têm a 97ª fileira?

Atividade 4

a) Observe a tabela do item e da atividade anterior e complete os ____.

$a_1 = 1 + 0.\ 2 = 1$

$a_2 = 1 + 1.\ 2 = 3$

$a_3 = 1 + 2.\ 2 = 5$

$a_4 = 1 + 3.\ 2 = 7$

$a_5 = 1 + 4.\ 2 =$ __

$a_6 = 1 +$ __. $2 =$ __

$a_{10} = 1 +$ __. $2 =$ __

$a_{25} = 1 +$ __. $2 =$ __

b) Escreva uma expressão que represente um termo n qualquer, em função de a_1 e r.

c) Usando a expressão acima, quantos triângulos têm a fileira 117? Ou seja, a_{117}?

d) Como podemos escrever esta expressão para os termos abaixo?

- $a_{(n+1)} =$ ____
- $a_{(n-1)} =$ ____
- $a_{(n+2)} =$ ____
- $a_{(n-2)} =$ ____

e) Lembrando que, em uma Progressão Aritmética, a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é igual à razão, quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1. (   ) $a_{(n-1)} + a_n = r$

2. (   ) $a_{(n+1)} - a_n = r$

3. (   ) $a_{(n+1)} - a_{(n-1)} = r$

4. (   ) $a_n - a_{(n-1)} = r$

Justifique as afirmações verdadeiras

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA – PUC – SP

Projeto AProvaME – Abril de 2007 –Aplicador: Mestrando Paulo Rogério Salomão

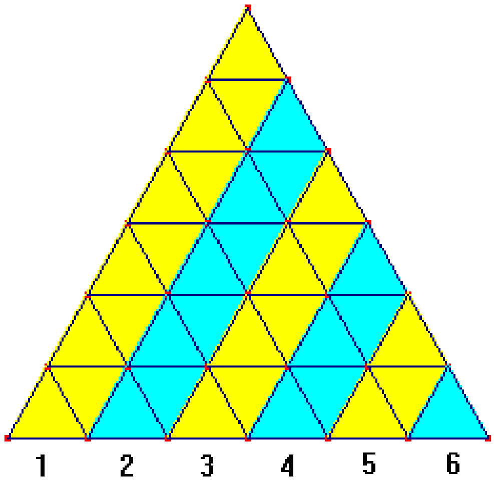
Atividades de Progressão Aritmética utilizando o software Cabri-Géomètre

Nome: ________________________________ Série ____ Data ___/___/____

Nome: ________________________________ Série ____ Data ___/___/____

Escola em que estuda: ____

Atividade 5 – Retorne para a figura construída no software Cabri-Géomètre e faça as alterações de cores para obter a figura abaixo.



a) Sabendo que o n° 1 significa a 1ª fileira (amarela), o n° 2 significa a 2ª fileira (azul) e, assim por diante, complete a tabela abaixo.

Número da fileira	Total de triângulos em cada fileira
a_1 (1ª fileira = 1° termo)	11
a_2 (2ª fileira = 2° termo)	9
a_3 (3ª fileira = 3° termo)	
a_4 (4ª fileira = 4° termo)	
a_5 (5ª fileira = 5° termo)	
a_6 (6ª fileira = 6° termo)	

b) O número de triângulos diminui de quanto em quanto, para cada fileira? Então, qual é a razão?

Caso não estivéssemos trabalhando com triângulos e, sim, com números inteiros, ou seja, teríamos o primeiro termo da PA sendo $a_1 = 11$, o segundo termo $a_2 = 9$ e, assim, por diante. Qual seria o valor do sétimo termo? E do décimo termo?

$a_7 =$ _____ $a_{10} =$ _____

c) Como você chegou ao resultado para o sétimo termo (a_7)?

d) Como você chegou ao resultado para o décimo termo (a_{10})?

e) Este raciocínio utilizado nos itens (c) e (d) é verdadeiro para quaisquer fileiras,

( ) sempre ( ) as vezes

f) Escreva uma expressão que represente este raciocínio.

g) Utilizando essa expressão, qual é o número do termo 25? Ou seja, a_{25}?

Atividade 6

a) Observe a tabela do item a da atividade anterior e complete os ____.

$a_1 = 11 + 0.(-2) = 11$

$a_2 = 11 + 1.(-2) = 9$

$a_3 = 11 + 2.(-2) = 7$

$a_4 = 11 + 3.(-2) = 5$

$a_5 = 11 + 4.(-2) =$ ___

$a_6 = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

$a_7 = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

$a_{10} = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

$a_{25} = 11 +$ ___ $.(-2) =$ ___

b) Escreva uma expressão que represente um termo n qualquer, em função de a_1 e r.

c) Utilizando esta expressão, qual é o numero do termo 117? Ou seja, a_{117}?

d) Como se pode escrever esta expressão para os termos abaixo?

- $a_{(n-3)} =$

- $a_{(n+2)} =$

- $a_{(n-2)} =$

- $a_{(n+3)} =$

e) Lembrando que, em uma Progressão Aritmética, a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é igual à razão, quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1. (   ) $a_{(n-3)} - a_{(n-2)} = r$

2. (   ) $a_{(n+2)} - a_{(n+1)} = r$

3. (   ) $a_{(n+2)} - a_{(n-1)} = r$

4. (   ) $a_{(n+1)} - a_{(n-1)} = 2r$

Justifique as afirmações verdadeiras

Atividade 7 - Comparando a expressão encontrada no item b da Atividade 4 com a expressão encontrada no item b da Atividade 6, o que se pode concluir, sabendo que uma é PA crescente e a outra é PA decrescente?

ANEXO 5 - ATIVIDADES DAS OFICINAS DO CABRI-GÉOMÈTRE

E.E. México - Abril de 2007

Oficina de Cabri-Géomètre – Professor Paulo Rogério Salomão

1) Construir um quadrado.

1º passo : Segmento AB.

2º passo : Edição numérica igual a 90º.

3º passo : Rotação de 90º do segmento AB ao redor do ponto A.

4º passo : Repita o 3º passo até a construção completa do quadrado.

2) Construir um pentágono.

Inicialmente forme um polígono regular de cinco lados (pentágono)

Meça os ângulos internos deste pentágono.

1º passo : Segmento AB.

2º passo : Edição numérica igual ao ângulo Xº interno do pentágono.

3º passo : Rotação de Xº do segmento AB ao redor do ponto A.

4º passo : Repita o 3º passo até a construção completa do pentágono.

3) Construir um hexágono.

Inicialmente forme um polígono regular de 6 lados (hexágono)

Medir os ângulos internos deste hexágono.

1º passo : Segmento AB.

2º passo : Edição numérica igual ao ângulo Xº interno do hexágono.

3º passo : Rotação de Xº do segmento AB ao redor do ponto A.

4º passo : Repita o 3º passo até a construção completa do hexágono.

4) Construir um octógono.

5) Construir um decágono.

6) Construir um dodecágono.

7) Construir um triângulo ABC qualquer.

→ Medir seus três ângulos internos

→ Com a calculadora somar seus ângulos internos.

→ Mover o resultado para a tela.

→ Com o ponteiro movimentar o ponto A. O que acontece com a soma dos ângulos internos?

→ Com o ponteiro movimentar o ponto B, em seguida movimentar o ponto C. O que acontece com a soma dos ângulos internos? O que podemos concluir?

8) Construir um triângulo eqüilátero. (sem usar a ferramenta polígono regular)

9) Construir um mosaico usando simetria axial. Preencher com várias cores.

10) Construir alguns mosaicos com diversas figuras planas. (atividades extraídas do curso de Geometria do Mestrado Profissional da PUC-SP do Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni)

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo