Universidade Brasília

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Separabilidade sob Conjugação de Grupos Comensuráveis com os Grupos de Bianchi Euclideanos

por

Sheila Campos Chagas *

Doutorado em Matemática - Brasília - DF

Orientador: Prof. Dr. Pavel A. Zalesskii

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq e da Capes.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Separabilidade sob Conjugação de Grupos Comensuráveis com os Grupos de Bianchi Euclideanos

por

Sheila Campos Chagas[*]

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

8 de setembro de 2007

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Pavel A. Zalesskii- UnB (Orientador)

Prof. Dr. Angel Del Rio Mateos (Univ. de Múrcia- Espanha)

Prof. Dr. Dan Haran (Univ. de Tel Aviv- Israel)

Profª. Drª. Dessislava Kochloukova (UNICAMP)

Prof. Dr. Said Najati Sidki (UnB)

[*]O autor contou com o apoio financeiro do CNPq e da CAPES.

Ao meu pai, com todo amor e carinho

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Pavel Zalesskii, pela paciência, amizade por todo o apoio durante os quatro anos de doutorado. Gostaria também de agradecer a todos os professores do departamento de matemática da Universidade de Brasília, especialmente aos professores de Álgebra, quem contribuíram para a minha formação. Também quero agradecer aos funcionários do departamento de matemática Manoel da xerox, Luiz Carlos, Gari, Maria, Cida e especialmente a minha querida companheira de ginástica e amiga Tânia Sertão. Além disso, gostaria de agradecer ao apoio financeiro do CNPq e da CAPES.

Agradeço aos amigos Ticianne e Adilson pelas muitas interessantes e estimulantes conversas matemáticas que tivemos, eu teria aprendido muito menos sem vocês. Também quero agradecer a todos os meus amigos Cira, Luciana, Tânia, Paulo Henrique, Simone, Marina, Ary, Jorge, Ângelo, Jaques, Euro, Porfírio, Élida, Ricardo, Josimar, André Luiz, Rosângela, Flávio e Kellcio pelas nossas corridas de Kart e pelas nossas conversas sobre futebol, política, filosofia, e claro sobre matemática. Especialmente quero agradecer as minhas amigas Cira, Luciana e Ticianne que fizeram estes 4 anos parecem muito pouco tempo e que estarão sempre no meu coração, alías nós formamos um “quarteto fantátisco” de amizade.

Não posso deixar de agradecer aos professores e amigos do departamento de matemática da UFAM Renato Tribuzy, Ivan Tribuzy, Roberto Cristóvão, Domingos Anselmo, Alfredo Wagner, Flávia Morgana, Cicero Mota, Akay pelo apoio e incentivo e em especial as minhas amigas Ivanilde do departamento de estatística Ivanilde e Karla Tribuzy do departamento de Matemática.

Finalmente, gostaria de agradecer meus pais Edson e Sandra e meus irmãos Steffen, Edsandra, Abraão e Andrezza e minha avó Floripedes pela torcida e apoio durante todo esse tempo, e que sem vocês nada disso seria possível e que eu amo muito vocêeeees.

E acima de tudo gostaria de agradecer à Deus.

RESUMO

Nesta tese estudamos a propriedade de separabilidade sob conjugação de grupos comensuráveis com os grupos de Bianchi. Os grupos de Bianchi são os grupos $\Gamma_d = PSL_2(O_d)$, onde O_d é o anel dos inteiros do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, e d é um inteiro livre de quadrados. O resultado principal desta tese é demonstrar a propriedade de separabilidade sob conjugação de grupos livres de torção e comensuráveis com os grupos de Bianchi euclideanos.

Mostramos também a propriedade em questão para os grupos $SL_2(O_d)$, $d = 1, 2, 7, 11$ e $GL_2(O_d)$, $d = 2, 7, 11$.

A prova do teorema principal é baseada principalmente em dois resultados cruciais. Primeiro a decomposição dos grupos de Bianchi euclideanos Γ_d, obtido por B. Fine, em produtos livres com amalgamação e HNN-extensão de grupos virtualmente livres e segundo a separabilidade sob conjugação dos grupos Γ_d demonstrado por Wilson and Zalesskii.

Palavras Chaves: Grupos de Bianchi, Separabilidade sob conjugação, Topologia Profinita.

ABSTRACT

In this thesis we study the conjugacy separability of groups commensurable with Bianchi groups. The Bianchi Groups are groups $\Gamma_d = PSL_2(O_d)$, where O_d is the ring of integers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, and d is a square-free integer. The main result of the thesis is to show the conjugacy separability of torsion free groups commensurable with euclidean Bianchi groups.

We also show the property in question for groups $SL_2(O_d)$, $d = 1, 2, 7, 11$ and $GL_2(O_d)$, $d = 2, 7, 11$.

The proof of the main theorem is based on two crucial facts. The first one is the decomposition of the euclidean Bianchi groups Γ_d in free products with amalgamation and HNN-extensions of virtually free groups obtained by B. Fine. The second fact is the conjugacy separability of Γ_d proved by Wilson and Zalesskii.

Key words: Bianchi groups, Conjugacy separability, Profinite topology.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Há mais de um século os grupos de Bianchi vêm atraindo a atenção dos matemáticos. O primeiro a iniciar investigações que trouxeram este objeto a foco de atenção dos outros matemáticos foi o pesquisador Luigi Bianchi, quem em 1892 determinou geradores para muitos membros da classe destes grupos.

Os grupos de Bianchi são os grupos $\Gamma_d = PSL_2(O_d)$, onde O_d é o anel de inteiros do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, e d é um inteiro positivo livre de quadrados. Estes grupos são interessantes não somente como objetos da teoria dos grupos, mas aparecem naturalmente em várias outras áreas da matemática tais como teoria dos números e geometria. Os grupos Γ_d podem ser pensados como generalizações óbvias do grupo $PSL_2(\mathbb{Z})$. Todavia eles também são generalizações naturais de $PSL_2(\mathbb{Z})$ de ponto de vista geométrico. A saber, $PSL_2(\mathbb{Z})$ age sobre o semi-plano superior hiperbólico $\mathbb{H}^2$ de modo totalmente descontínuo. Por sua vez, $PSL_2(O_d)$ pode ser pensado como o grupo de isometrias do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ agindo de modo totalmente descontínuo. De fato, isto foi demonstrado por Luigi Bianchi, e além disso ele determinou domínios fundamentais para estes grupos, que teoricamente permite obter apresentações para eles.

Os grupos de Bianchi são grupos aritméticos e portanto o problema de congruência faz sentido para Γ_d. O problema de congruência para os grupos $SL_n(O_d)$ pergunta se qualquer subgrupo de índice finito contém um subgrupo da forma $\{ g \in SL_n(O_d) \mid g \equiv 1 \; mod \; I\}$ para algum ideal não nulo I de O_d. A formulação moderna do problema é descrever o *n*úcleo de congruência, isto é, o núcleo do homomorfismo $\varphi : \widehat{SL_n(O_d)} \longrightarrow SL_n(\widehat{O_d})$. Foi mostrado por Bass, Milnor e Serre [B-M-S-67] que para $n > 2$ o núcleo de congruência é finito e por Serre [S-70] que no caso $n = 2$ o núcleo de congruência é infinito. Para grupos aritméticos o "tamanho" do núcleo de congruência determina se topologia profinita do grupo é forte ou fraca. Em particular o resultado de Serre mostra que a topologia profinita dos grupos $SL_2(O_d)$ é forte, e logo o mesmo acontece nos grupos Γ_d. Em outras palavras os grupos Γ_d têm estrutura normal rica. Notemos que a completa solução do problema de congruência para estes grupos (isto é, a descrição dos núcleos de congruência) não foi ainda estabelecida, embora Lubotzky [L-82] tenha mostrado que estes núcleos contém subgrupos profinitos livres de posto enumerável.

Outras indicações de que a topologia profinita sobre um grupo é forte podem ser detectadas das propriedades residuais tais como: LERF e separabilidade sob conjugação (definidas a seguir).

Um grupo G é chamado LERF, se cada subgrupo finitamente gerado de G é a interseção de subgrupos de índice finito de G, ou em outras palavras, é um subgrupo fechado na topologia profinita.

Recentemente Agol, I., Long, D., e Reid, A. W. provaram que os grupos de Bianchi são LERF [L-R-2004]. Entretanto observamos que a propriedade LERF não implica separabilidade sob conjugação e um exemplo disso pode ser extraído dos artigos de Raptis, E., Talelli, O., Varsos, D. [R-T-V-95] e de Zalesskii, P. A., Tavgen, O. I., [Z-T-95]. Além disso, existem restrições para usar a propriedade de LERF: por exemplo esta propriedade não é preservada por produtos diretos.

A propriedade de separabilidade sob conjugação que é objeto de estudo desta tese pode ser formulada como segue:

Definição. *Um grupo G é chamado separável sob conjugação se para todos elementos a, b não conjugados de G existe algum quociente finito de G no qual as imagens de a, b não são conjugadas.*

Podemos também expressar esta propriedade em termos da topologia profinita de G; G é separável sob conjugação se a conjugação de cada par de elementos de G no completamento profinito $\widehat{G}$ de G implica sua conjugação em G. Consequentemente, G é separável sob conjugação se, e somente se, a classe de conjugação de todo elemento em G é fechada na topologia profinita.

A importância dessas propriedades foi primeiro observada em 1958 por Mal'cev em [M-58], quem demonstrou que grupos finitamente apresentáveis separáveis sob conjugação (respectivamente LERF) tem solução positiva para o problema da conjugação (respectivamente para o problema generalizado da palavra), isto é existe um algoritmo para detectar se dois elementos em G são conjugados (respectivamente, se um elemento de G pertence a um subgrupo finitamente gerado dado).

O problema da conjugação é conhecido como o segundo problema de Dehn. Em 1912 Dehn formulou três problemas sobre grupos finitamente apresentáveis $G = \langle X \mid R \rangle$.
Problema da Palavra: Existe um algoritmo que determine se duas palavras quaisquer nos geradores em X representam o mesmo elemento do grupo G?
Problema da Conjugação: Existe um algoritmo que determine se duas palavras v e w quaisquer são conjugadas em G?
Problema do Isomorfismo: Existe um algoritmo que determine se dois grupos dados por apresentações finitas são isomorfos?

Daremos agora alguns exemplos de grupos que são separáveis sob conjugação:

1. Todos os grupos profinitos, incluindo os grupos de Galois de extenções algébricas de corpos;
2. grupos nilpotentes finitamente gerados (demonstado por Blackburn em 1965 [B-65]);
3. grupos policíclicos por finito (demonstrado por Remeslennikov em 1969 [R-69] e por For manek em 1976 [Fo-76]);
4. grupos livres (demonstrado por Bausmslag em 1965 [Ba-65]);
5. grupos livres por finito (demontrado por Dyer em 1979 [Dy-79]);
6. produto livre de grupos separáveis sob conjugação é separável sob conjugação (demonstrado por Stebe em 1970 [St-70] e por Remeslennikov em 1971 [R-71]).

A separabilidade sob conjugação para produtos livres com amalgamação é mais difícil, e nesta linha tem-se os seguintes resultados:

1. Se $G = G_1 *_H G_2$ é um produto livre dos grupos G_1 e G_2 amalgamando o grupo H, onde G_1 e G_2 são livres ou nilpotentes finitamente gerados e H é cíclico, então G é separável sob conjugação (demonstrado por Dyer em 1980 [Dy-80]);

2. Se G_1 e G_2 são livres por finito ou grupos nilpotentes finitamente gerados por finito e H cíclico, então G é separável sob conjugação (demonstrado por Tang em 1995 [T-95] e generaliza o exemplo anteior).

3. grupos de superfícies;

4. grupos de Fuchs;

Os dois últimos exemplos foram primeiramente mostrados por Fine e Rosenberger em 1990 [F-R-90] e podem ser obtidos como consequência do teorema B de Ribes-Zalesskii (1995) [R-Z-96].

O resultado mais geral obtido para produto livre com amalgamação cíclica foi provado por Ribes-Segal-Zalesskii (1998) [R-S-Z-98], que estabelece a separabilidade sob conjugação para grupos que podem ser obtidos fazendo-se sucessivos produtos livres com amalgamação cíclica a partir de grupos policíclico por finito e/ou livre por finito.

Wilson e Zalesskii (1998) [W-Z-98] provaram que os grupos de Bianchi $PSL_2(O_d)$ são separáveis sob conjugação para $d = 1, 2, 7, 11$. Para conseguir este resultado eles usaram a decomposição estabelecida por Benjamin Fine, na qual os grupos de Bianchi em questão são dados como produtos livres com amalgamação e HNN-extensão, em seguida provaram que sob certas condições especias produtos livres com amalgamação não cíclica e HNN-extensões são separáveis sob conjugação e depois disso provaram que os grupos de Bianchi satisfazem estas condições.

Daremos exemplos de grupos que não são separáveis sob conjugação:

1. Um grupo que não é residualmente finito não é separável sob conjugação, então o grupo de Baumslag- Solitar $G = \langle a, b | a^{-1}b^2a = b^3 \rangle$ não é separável sob conjugação.

2. O grupo $SL_3(\mathbb{Z})$ é um exemplo de um grupo que é residualmente finito e não é separável sob conjugação, como podemos ver em [R-71].

Note que é um problema em aberto se a separabilidade sob conjugação é herdada para subgrupos de índice finito, e também se podemos obter a separabilidade sob conjugação de um grupo uma vez conhecida esta propriedade para um subgrupo qualquer de índice finito.

O objetivo desta tese é resolver estes problemas para subgrupos de $GL_2(\mathbb{C})$ livres de torção e comensuráveis com os grupos de Bianchi Euclidianos Γ_d, $d = 1, 2, 7, 11$. Assim o principal resultado desta tese é:

Teorema 1. *Seja G um subgrupo livre de torção de $GL_2(\mathbb{C})$ comensurável com os grupos de Bianchi $\Gamma_d = PSL_2(O_d)$, $d = 1, 2, 7, 11$. Então G é separável sob conjugação.*

Lembramos que dois grupos são comensuráveis se possuem subgrupos de índice finito que são isomorfos.

Na busca de demonstrar este resultado observamos que o grupo G não possui subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado $\langle x, y | x^2 = y^2 \rangle$ e exatamente isto que foi usado na demonstração do resultado principal. Desta forma o que foi demonstrado realmente é o seguinte

Teorema 2. *Seja G um grupo livre de torção comensurável com os grupos de Bianchi $\Gamma_d = PSL_2(O_d)$, $d = 1, 2, 7, 11$, que não contém subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado. Então G é separável sob conjugação.*

Na verdade, para obter a separabilidade sob conjugação de um grupo G a partir da separabilidade sob conjugação de um subgrupo de índice finito precisamos das condições do teorema enunciado a seguir e demonstrado na seção 2.3. Observemos também que as condições 1 e 2 do teorema abaixo são satisfeitas para os subgrupos de $GL_2(\mathbb{C})$.

Teorema 3. *Seja G um grupo livre de torção que não contém subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado. Seja H um subgrupo de G de índice finito tal que:*

1. *H separável sob conjugação;*
2. *para todo $h \in H$, $C_H(h)$ é abeliano livre de posto no máximo 2.*

Então G é separável sob conjugação.

Quando queremos provar a separabilidade sob conjugação de grupos G que são construções livres, uma das primeiras preocupações é saber se os grupos que fazem parte da decomposição de G são separáveis sob conjugação. O segundo ponto importante é que não necessariamente a topologia profinita induzida por G nos grupos da decomposição, determina a topologia profinita (completa) destes grupos, isto é, se a topologia profinita induzida nos subgrupos é a topologia profinita destes subgrupos. Desta forma fica difícil de usar a separabilidade sob conjugação dos grupos da decomposição. Então para provar a separabilidade sob conjugação do grupo G exigiremos que a topologia profinita seja forte, mais precisamente temos a

Definição. *Dizemos que a topologia profinita sobre um produto livre amalgamado $G = G_1 *_H G_2$ é eficiente se, G é residualmente finito, a topologia sobre G induz a topologia profinita completa sobre G_1, G_2 e H, e G_1, G_2 e H são fechados em G.*

Analogamente dizemos que a topologia profinita sobre uma HNN-extensão $G = HNN(H, G_1, t)$ é eficiente se, G é residualmente finito, a topologia profinita de G induz a topologia profinita sobre H e os subgrupos associados G_1, G_2 e H, G_1, G_2 são fechados na topologia profinita sobre G.

Observamos primeiro que a eficiência da topologia profinita sobre o produto livre com amalgamação $G = G_1 *_H G_2$ (respectivamente a HNN-extensão $G = HNN(H, G_1, t)$) implica que o completamento profinito transporta estas construções para a categoria dos grupos profinitos, isto é, $\widehat{G} = \widehat{G_1} \coprod_{\widehat{H}} \widehat{G_2}$ (respectivamente $\widehat{G} = HNN(\widehat{H}, \widehat{G_1}, t)$), onde $\widehat{G_1}, \widehat{G_2}, \widehat{H}$ são imersos em $\widehat{G}$. De acordo com a teoria de Bass-Serre e a versão profinita dessa teoria, G age naturalmente sobre a árvore $S(G)$ e $\widehat{G}$ age continuamente sobre a árvore profinita $S(\widehat{G})$. A segunda consequência importante da eficiência da topologia profinita é que $S(G)$ pode ser imersa naturalmente em $S(\widehat{G})$. Isto possibilita usar a teoria de Bass-Serre junto com a versão profinita desta teoria que são as ferramentas principais desta tese.

Descreveremos brevemente a estrutura desta tese. Dedicaremos o primeiro capítulo as preliminares, no qual a primeira seção versa sobre a topologia profinita de um grupo G. Na segunda e terceira seção falamos sobre a teoria de Bass-Serre de grupos agindo sobre árvores e a versão profinita desta teoria que são necessárias nas demonstrações do capítulo 2.

O capítulo 2 inicia com a descrição dos centralizadores de elementos dos grupos

$GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C})$, que foi essencialmente usada na demonstração do resultado principal. A seção seguinte estabelece o principal resultado desta tese e sua demonstração. A seção 3 destina-se a demonstrar a propriedade de sepabilidade sob conjugação dos grupos $SL_2(O_d)$, para $d = 1, 2, 7, 11$ e $GL_2(O_d)$, para $d = 2, 7, 11$. Os casos $d = 3$ para $SL_2(O_d)$ e $d = 1, 3$ para $GL_2(O_d)$ são excluídos devidos estes grupos não terem decomposição como produtos livres com amalgamação ou HNN-extensão e isto nos impede de usarmos as técnicas desta tese.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Topologia Profinita

Introduziremos agora a topologia profinita sobre um grupo G, isto possibilita expressar alguns fatos algébricos de maneira mais suscinta, como por exemplo: as proporiedades LERF e separabilidade sob conjugação.

Seja G um grupo, e considere $\aleph$ a coleção de todos os subgrupos normais de índice finito de G, esta coleção pode ser tomada como um sistema fundamental de vizinhança da identidade de G, assim G torná-se um grupo topológico. Esta topologia sobre G é chamada de topologia profinita de G.

A topologia profinita sobre G, é a topologia mais fraca sobre a qual todo homomorfismo de G sobre um grupo finito é contínuo. E sobre cada quociente finito a topologia considerada é a topologia discreta. Em particular observamos que para qualquer grupo finito a topologia profinita nada mais é que a topologia discreta.

O completamento profinito $\widehat{G}$ de G com respeito a sua topologia profinita é definido por:

$$\widehat{G} = \varprojlim_{N \in \aleph} G/N$$

onde N percorre todos os subgrupos normais de índice finito. Assim $\widehat{G}$ torna-se um grupo profinito, isto é, um grupo topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo. Além disso, existe um homomorfismo natural $\iota : G \longrightarrow \widehat{G}$ que associa $g \mapsto (gN)$, a aplicação ι é um monomorfismo quando G é residualmente finito. Se S é um subconjunto do grupo topológico $\widehat{G}$, denotamos por $\overline{S}$ o seu fecho em $\widehat{G}$. A topologia profinita sobre G é a topologia induzida de $\widehat{G}$.

Lema 1.1.1. *Seja G um grupo residualmente finito, S um subconjunto de G e $\overline{S}$ o fecho de S em $\widehat{G}$. Então S é fechado na topologia profinita de G, se e somente se, $\overline{S} \cap G = S$.*

Demonstração: Temos $\overline{S} \cap G = \bigcap\limits_{\mathcal{U} \trianglelefteq_o \widehat{G}} (\overline{S}\mathcal{U} \cap G) = \bigcap\limits_{\mathcal{U} \trianglelefteq_o \widehat{G}} (S\mathcal{U}) \cap G = \bigcap\limits_{\mathcal{U} \trianglelefteq_o G} (S\mathcal{U})$, e esta última igualdade é exatamente a definição de conjunto fechado na topologia profinita de G. O resultado segue. $\square$

Podemos também expressar a separabilidade sob conjugação usando a topologia profinita de G. E para isso daremos a seguintes equivalências.

Proposição 1.1.2. *Seja G um grupo, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *G é separável sob conjugação;*

(ii) *Para todo $x \in G$, a classe de conjugação x^G de x é fechada na topologia profinita. Em particular G é residualmente finito;*

(iii) *Para todo par de elementos $x, y \in G$ tal que $y = x^\gamma$, para algum $\gamma \in \widehat{G}$, existir $g \in G$ tal que $y = x^g$.*

Demonstração: $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Seja $y \in G \setminus x^G$, isto significa que y não é conjugado de x em G. Sendo G separável sob conjugação existe um subgrupo normal $N \lhd_f G$ de índice finito em G tal que xN e yN não são conjugados e então temos que $yN \cap x^G = \emptyset$. Desta forma $y \notin x^G N$, e então temos que para todo $y \notin x^G$ temos que $y \notin x^G N$ para algum $N \lhd_f G$. Portanto $\bigcap\limits_{N \lhd_f G} x^G N \leq x^G$, então x^G é fechado na topologia profinita de G. Reciprocamente, para todo $x \in G$ temos que x^G é fechado na topologia profinita de G, então temos que $x^G = \bigcap\limits_{N \lhd_f G} x^G N$.

Assim para todo $x, y \in G$ não conjugados temos que $y \notin x^G = \bigcap_{N \lhd_f G} x^G N$, e desta forma existe um subgrupo normal $N \lhd_f G$ tal que $y \notin x^G N$ e então tem-se $yN \cap x^G = \emptyset$, portanto xN e yN não são conjugados em G/N. Em particular, qualquer grupo separável sob conjugação é residualmente finito, já que a classe de conjugação do elemento identidade é fechado na topologia profinita de G.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Sejam $x, y \in G$ quaisquer tal que $y = x^\gamma$, onde $\gamma \in \widehat{G}$. Suponhamos que x e y não são conjugados G, então a condição (i) implica que existe um quociente finito em que as imagens de x e y não são conjugadas, mas isto contraria o fato de x e y serem conjugados no completamento $\widehat{G}$, assim x e y são conjugados em G. Reciprocamente, sejam $x, y \in G$ tal que x e y não são conjugados em G. Suponhamos que para todo subgrupo normal de índice finito $N \lhd_f G$, as imagens de x e y são conjugadas em G/N. Então x e y são conjugados em $\widehat{G}$ e pela condição (iii) temos que x e y são conjugadas em G, o que é uma contradição. $\square$

É fácil ver que a separabilidade sob conjugação é fechada com respeito ao produto direto finito.

Vale a pena observar que em geral a topologia profinita de G induz sobre um subgrupo H de G uma topologia mais fraca do que a topologia profinita de H. Logo se G é um produto livre com amalgamação $G = G_1 *_H G_2$ ou uma HNN-extensão $G = HNN(H, G_1, t)$, não necessariamente a topologia profinita induzida por G nos grupos G_1, G_2 e H, determina a topologia profinita (completa) destes grupos, isto é, se a topologia profinita induzida nos subgrupos é a topologia profinita destes subgrupos. Desta forma fica difícil de usar a separabilidade sob conjugação dos grupos da decomposição. Então para provar a separabilidade sob conjugação do grupo G temos que exigir que a topologia profinita seja forte. Isto motiva a seguinte

Definição 1.1.3. *Dizemos que a topologia profinita sobre um produto livre amalgamado $G = G_1 *_H G_2$ é eficiente se G é residualmente finito, a topologia sobre G induz a topologia profinita completa sobre G_1, G_2, e H, e G_1, G_2 e H são fechados em G.*

Analogamente dizemos que a topologia profinita sobre uma HNN-extensão $G = HNN(H, G_1, t)$ é eficiente se, G é residualmente finito, a topologia profinita de G induz a topologia profinita sobre H e os subgrupos associados G_1, G_2, e H, G_1, G_2 são fechados na topologia profinita sobre G.

Observamos primeiro que a eficiência da topologia profinita sobre o produto livre com amalgamação $G = G_1 *_H G_2$ ou HNN-extensão $G = HNN(H, G_1, t)$ implica que $\widehat{G} = \widehat{G_1} \coprod_{\widehat{H}} \widehat{G_2}$, $\widehat{G} = HNN(\widehat{H}, \widehat{G_1}, t)$, onde nas partes das equações à direita o produto livre e a HNN-extensão é considerada na categoria dos grupos profinitos, e $\widehat{G_1}, \widehat{G_2}$ e $\widehat{H}$ são imersos em $\widehat{G}$.

Exemplo 1.1.4. *Os exemplos mais interessantes de produtos livres com amalgamação e HNN-extensões com topologia eficiente são os grupos de Bianchi euclideanos. O fato que a topologia profinita sobre estes grupos é eficiente foi provado por Wilson e Zalesskii em [W-Z-98]. Os grupos de Bianchi euclideanos têm as seguintes decomposições, dadas por B. Fine em [F-89].*

O grupo de Bianchi Γ_1 tem a decomposição em produto livre com amalgamação

$$PSL_2(O_1) = G_1 *_M G_2,$$

onde $G_1 = S_3 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} A_4$ e $G_2 = S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_2$ e M é o grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Os grupos de Bianchi $PSL_2(O_d)$, para $d = 2, 7, 11$, se decompõem nas seguintes HNN-extensões

$$\begin{aligned} PSL_2(O_2) &= HNN\big(K_2, M, t\big) \\ PSL_2(O_7) &= HNN\big(K_7, M, t\big) \\ PSL_2(O_{11}) &= HNN\big(K_{11}, M, t\big), \end{aligned}$$

onde $K_2 = (A_4 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_2), K_7 = (S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3), K_{11} = (A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} A_4)$ e M é o grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Estas decomposições serão usadas no decorrer da tese. E para exemplificar as imersões dos grupos das decomposições nos restringiremos ao caso $d = 1$ e os demais casos sugerimos ao leitor ver em [F-89].

Mais precisamente, $PSL_2(O_1)$ tem apresentação

$$\langle A, B, C, D | A^3 = B^2 = C^3 = D^2 = (AC)^2 = (AD)^2 = (BD)^2 = (BC)^2 = 1 \rangle,$$

considerando $G_1 = \langle A, C, D | A^3 = C^3 = D^2 = (AC)^2 = (AD)^2 = 1 \rangle$ e $G_2 = \langle B, C, D | B^2 = C^3 = D^2 = (BD)^2 = (BC)^2 = 1 \rangle$ obtemos que $PSL_2(O_1)$ é um produto livre com amalgamação dos grupos G_1 e G_2 considerando a identificação $C = C$ e $D = D$. Agora observemos que estas *identificações induzem isomorfismos entre os subgrupos gerados por C e D. Sejam*

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle A, C, D | A^3 = C^3 = D^2 = (AC)^2 = (AD)^2 = 1 \rangle = A_4 *_A S_3 \\ G_2 &= \langle B, C, D | B^2 = C^3 = D^2 = (BD)^2 = (BC)^2 = 1 \rangle = S_3 *_B D_2. \end{aligned}$$

Assim G_1 é o produto livre de A_4 e S_3 com a identificação $A = A$, que induz um isomorfismo de subgrupos. Do mesmo modo temos que G_2 é o produto livre com amalgamção de S_3 e D_2 amalgamando o subgrupo cíclico gerado por B. Finalmente, considerando o subgrupo gerado por $\langle C, D\rangle$ em G_1, e observando que este subgrupo intercepta os fatores de G_1 e G_2 trivialmente temos que $\langle C, D\rangle \cong C_2 * C_3 = PSL_2(\mathbb{Z})$. Logo $PSL_2(O_1)$ é o produto livre com amalgamação de G_1 e G_2 amalgamando $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Para ser completo daremos as definições de produtos livre com amalgamação e HNN-extensão na categoria dos grupos profinitos.

Definição 1.1.5. *O produto livre profinito amalgamado dos grupos profinitos G_1, G_2 amalgamado o subgrupo H com homomorfismos injetivos contínuos $f_i : H \longrightarrow G_i$, $i = 1, 2$, é um grupo profinito G junto com monomorfismos contínuos $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$, com $\varphi_1 f_1 = \varphi_2 f_2$ satisfazendo a seguinte propriedade universal:*

Para cada par de homomorfismos contínuos $\psi_1 : G_1 \longrightarrow K$, $\psi_2 : G_2 \longrightarrow K$ em um grupo profinito K com $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$, existe um único homomorfismo contínuo $\psi : G \longrightarrow K$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dotted, "\psi"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

Observamos que é suficiente verificar a propriedade universal quando K é finito, e também podemos considerar H como um subgrupo comum de G_1 e G_2 e pensar que os homomorfismos f_i são inclusões. E usual denotar o produto profinito livre amalgamado dos grupos G_1 e G_2 amalgamado o subgrupo H por $G = G_1 \coprod_H G_2$.

Ressaltamos que diferente do caso abstrato os homomorfismos $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ não necessariamente são injetivos. Entretanto isto pode ser revertido se substituimos G_1, G_2 e H por suas imagens em G e desta forma resgatamos o que tinhamos no caso abstrato. É uma consequência deste fato que o homomorfismo $\iota : G_1 *_H G_2 \longrightarrow G_1 \coprod_H G_2$ é uma imersão.

Definição 1.1.6. *Uma HNN-extensão profinita de um grupo profinito H com subgrupos associados A e B fechados de H com um isomorfismo contínuo $f : A \longrightarrow B$, é um grupo G junto com um elemento $t \in G$ e um homomorfismo contínuo $\varphi : H \longrightarrow G$ com $\varphi(f(a)) = tf(a)t^{-1}$, $\forall\, a \in A$, satisfazendo a seguinte propriedade universal:*

Para qualquer grupo K, e qualquer elemento $k \in K$ e qualquer homomorfismo contínuo $\psi : H \longrightarrow K$ com $k(\psi(a))k^{-1} = \psi f(a)$, para todo $a \in A$, existe um único homomorfismo contínuo $\omega : G \longrightarrow K$ com $\omega(t) = k$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, dotted, "\omega"] & \\ H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] & K \end{tikzcd}$$

Do mesmo modo como para o produto profinito livre com amalgamação é suficiente verificar a propriedade universal quando K é finito. E usual denotar a HNN-extensão profinita do grupo H com subgrupos associados A e B por $G = HNN(H, A, t)$.

Novamente em contraste com o caso abstrato o homomorfismo $\varphi : H \longrightarrow G$ não é sempre um monomorfismo. Entretanto esta situação pode ser contornada se substituimos H por sua imagem em G. É uma consequência deste fato é que o homomorfismo $\iota : HNN^{abs}(H, A, t) \longrightarrow HNN(H, A, t)$ é uma imersão.

A separabilidade sob conjugação significa a possibilidade de separar as classes de conjugação distintas de elementos de G em quocientes finitos. Mas as vezes precisamos separar em quocientes finitos a classe de conjugação de um subconjunto ou um subgrupo de G da classe de conjugação de um elemento. A próxima definição formaliza isto.

Definição 1.1.7. *Um subgrupo H de um grupo G é chamado distinguido sob conjugação, se $\cup_{g \in G} H^g$ é fechada na topologia profinita em G.*

A proposição seguinte reune resultados importantes sobre grupos virtualmente livres que serão usados nesta tese.

Proposição 1.1.8. *Seja G um grupo virtualmente livre finitamente gerado. Então:*

1. *G é separável sob conjugação;*

2. *G é LERF (isto é, se cada subgrupo finitamente gerado é fechado na topologia profinita de G);*

3. *A topologia profinita sobre G induz a topologia profinita sobre cada subgrupo finitamente gerado de G;*

4. *Para cada par de subgrupos H_1, H_2 finitamente gerados de G temos que o produto H_1H_2 é um subconjunto fechado de G, isto é, $\overline{H_1H_2} \cap G = H_1H_2$, onde $\overline{H_1H_2}$ é o fecho de H_1H_2 em $\widehat{G}$;*

5. *Todo subgrupo finitamente gerado H de G é distinguido sob conjugação (isto é, se para todo $g \in G$ tal que $g^\gamma \in \widehat{G}$, onde $\gamma \in \widehat{G}$, existe $\delta \in G$ tal que $g^\delta \in H$);*

6. *Se H_1 e H_2 são subgrupos finitamente gerados de G, então $\overline{H_1 \cap H_2} = \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$.*

O item 1 foi provado por Dyer em [Dy-79], o item 2 é um resultado de M. Hall em [H-49], o item 3 foi demonstrado independentemente por Niblo em [N-92] para grupos livres e por Ribes e Zalesskii em [R-Z-96] para um caso mais geral, e nesta última referência também podemos encontrar a demonstração do item 4. A demonstração do item 5 é a Proposição 2.5 de Ribes e Zalesskii em [R-Z-96]. O item 6 é a Proposição 2.4 de [W-Z-98].

1.2 Grafos e Grafos de Grupos

Nesta seção introduziremos a definição de grafo de grupos que tornou-se uma importante ferramenta no estudo dos grupos agindo sobre árvores.

Definição 1.2.1. *Um grafo é um conjunto Γ com um subconjunto distinguido $V = V(\Gamma)$ (conjunto de vértices de Γ) e duas aplicações $d_0, d_1 : \Gamma \rightrightarrows V(\Gamma)$ tais que restritas a V são aplicações identidades. O conjunto $E = \Gamma \setminus V$ é o conjunto de arestas de Γ. Se $e \in E$, então $d_0(e), d_1(e)$ são os vértices inicial e final de e.*

Para cada $e \in \Gamma$ definiremos os símbolos formais e e e^{-1} para indicar que percorremos um sentido ou o seu sentido oposto, respectivamente. Definimos $d_0(e^{-1}) = d_1(e)$ e $d_1(e^{-1}) = d_0(e)$. Para cada $v \in \Gamma$ definimos o conjunto $Star_\Gamma(v) = \{e \in \Gamma \mid d_0(e) = v$ ou $d_1(e) = v\} \cup \{v\} = d_0^{-1}(v) \cup d_1^{-1}(v) \cup \{v\}$, como o conjunto de todas as arestas que tem origem ou fim em v, união o vértice v.

Um *caminho* P no grafo Γ é uma sequência finita,

$$P = v_0, e_1^{\epsilon_1}, v_1, \ldots, e_n^{\epsilon_n}, v_n$$

que usualmente abreviamos por $e_1^{\epsilon_1}, e_2^{\epsilon_2}, \ldots, e_n^{\epsilon_n}$, onde $n \geq 0$ e $\epsilon_i = \pm 1$, e $d_0(e_i^{\epsilon_i}) = v_{i-1}$, $d_1(e_i^{\epsilon_i}) = v_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Dizemos que o caminho P é reduzido se $e_i^{\epsilon_i} \neq e_{i+1}^{-\epsilon_{i+1}}$ para todo i. Um caminho reduzido chama-se um circuito (ou caminho fechado) se $d_1(e_n^{\epsilon_n}) = d_0(e_1^{\epsilon_1})$.

Um grafo diz-se *conexo* sempre que dados dois vértices $v, w \in \Gamma$, existe um caminho ligando-os. O grafo Γ é uma árvore se é conexo e não contém circuitos de comprimento $n \geq 1$. Segue do Lema de Zorn que todo grafo conexo Γ contém uma subárvore maximal T, isto é, um subgrafo conexo que é uma árvore e satisfaz $V(T) = V(\Gamma)$.

Se no caminho P acima tivermos $e_i^{\epsilon_i} = e_{i+1}^{-\epsilon_{i+1}}$, para algum i, então o caminho $P' = e_1^{\epsilon_1}, e_2^{\epsilon_2}, \ldots, e_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, e_{i+2}^{\epsilon_{i+2}}, \ldots, e_n^{\epsilon_n}$ obtido de P cancelando-se as arestas $e_i^{\epsilon_i}$ e $e_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$, P' também é um caminho ligando v e w, e é dito um caminho obtido de P por meio de uma redução simples. Mais precisamente dois caminhos ligando os vértices v e w são equivalentes se podemos transformar um no outro através de uma sequência finita de reduções simples e suas inversas. É fácil ver que a equivalência entre caminhos é uma relação de equivalência. Representemos por $[P]$ a classe de todos o caminhos que são equivalentes ao caminho P no grafo Γ.

Fixado um vértice v. Consideremos A_v, o conjunto de todos os caminhos reduzidos de v para v em Γ. Então a relação de equivalência definida anteriormente, define uma relação de equivalência no conjunto A_v. Definimos como multiplicação em A_v, a justaposição de caminhos, isto é, $[P][Q] = [PQ]$, para todo $P, Q \in A_v$. Desde modo $A_v/\sim$ é um grupo, e este grupo é denominado grupo fundamental do grafo Γ com ponto base v, e é denotado por $\pi_1(\Gamma, v)$, e observando que este grupo independe da escolha do vértice v, pois Γ é conexo. Denotamos este grupo simplesmente por $\pi_1(\Gamma)$. Observamos que o grupo $\pi_1(\Gamma)$ é livre.

Podemos também dizer que Γ é uma árvore se, e somente se, $\pi_1(\Gamma) = 1$ conforme parágrafo 5 de [D-80]. Está condição é equivalente $\pi_1(\Gamma)^{ab} = 1$, pois $\pi_1(\Gamma)$ é livre.

Dados Γ e Γ' grafos, um *morfismo de grafos* $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ é uma aplicação que satisfaz, $d_i(\alpha(m)) = \alpha(d_i(m))$, para todo $i = 0, 1$. Se α é sobrejetiva (injetiva, bijetiva respectivamente), dizemos que α é um epimorfismo (monomorfismo, isomorfismo respectivamente)

Definição 1.2.2. *Um G-conjunto X é um conjunto com uma função $G \times X \longrightarrow X$, que associa o par $(g, x) \in G \times X$ com o elemento $gx \in X$ satisfazendo:*

(i) $1x = x$*, para todo* $x \in X$*;*

(ii) $g(g'x) = (gg')x$*, para todo* $g, g' \in G$*,* $x \in X$*;*

(iii) *para cada* $g \in G$*, a aplicação que associa* $x \longmapsto gx$ *é uma bijeção.*

A definição acima é equivalente a um homormorfismo $\phi : G \longrightarrow Sym(X)$. Dizemos também que G age sobre X, ou ainda que existe uma G-ação sobre X. Se $Ker\phi = \{g \in G \,|\, gx = x, \forall\ x \in X\} = 1$, dizemos que G age fielmente sobre X, e neste caso temos que $G \cong H \leq Sym(X)$.

O próprio grupo G é um G-conjunto com a multiplicação à esquerda, o conjunto das classes laterais de um subgrupo de G é um G-conjunto.

O conjunto $G_x = \{g \in G \,|\, gx = x\}$ é chamado o estabilizador do elemento $x \in X$, e é um subgrupo de G. A órbita de x é o conjunto $Gx = \{gx \,|\, g \in G\}$. Dois elementos x e y estão na mesma órbita se $y = gx$, para algum $g \in G$, é fácil ver que isto é uma relação de equivalência e determina uma partição do conjunto X, que chamamos de conjunto quociente $X/G = \{Gx \mid x \in X\}$ das órbitas dos elementos de X.

Se X é um G-conjunto segue facilmente que $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, e temos o seguinte G-isomorfismo $G/G_x \cong_G Gx$. Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é chamado G-invariante se $GY = Y$.

Definição 1.2.3. *Um transversal (ou um G-transversal) é um subconjunto $S \subset X$ tal que a aplicação $\sigma : X \longrightarrow X/G$ restrita à S é uma bijeção, isto é, S é um subconjunto de X formado por um único elemento de cada órbita.*

Assim se S é um G-transversal temos o seguinte G-isomorfismo $X = \bigcup_{x\in S} Gx \cong_G \bigcup_{x\in S} G/G_x$. E então atráves deste isomorfismo temos que X é determinado pelo G-transversal S e pelos G-estabilizadores dos elementos $x \in S$.

Definição 1.2.4. *Seja G um grupo e seja Γ um grafo. Dizemos que o grupo G age sobre um grafo Γ se, Γ é um G-conjunto e além disso temos que $d_j(gm) = gd_j(m)$, para todo $g \in G$, $m \in \Gamma$, $j = 0, 1$.*

Quando $G_m = 1$, para todo $m \in \Gamma$ dizemos que G age livremente sobre Γ. Um subconjunto A de Γ é chamado G-invariante se, $GA = A$. Segue facilmente que o conjunto de vértices $V(\Gamma)$ e o conjunto de arestas $E(\Gamma)$ do G-grafo Γ são G-invariantes.

O grafo quociente Γ/G é o conjunto das G-órbitas dos elementos de Γ, indicando por $V(\Gamma/G) = \{Gv \mid v \in V(\Gamma)\}$ o conjunto dos vértices de Γ/G e por $E(\Gamma/G) = \{Ge \mid e \in E(\Gamma)\}$ o conjunto das arestas de Γ/G, e como aplicações de bordo $\overline{d}_0(Ge) = Gd_0(e)$ e $\overline{d}_1(Ge) = Gd_1(e)$, é fácil verificar que Γ/G satisfaz a definição (1.2.1) e é portanto um grafo. Além disso, o epimorfismo natural $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma/G$ é um epimorfismo local (isto é, $\alpha|_{d_i^{-1}(v)} : d_i^{-1}(v) \longrightarrow d_i^{-1}(v)$, para $i = 0, 1$ é sobrejetora) e a conexidade de Γ/G segue da conexidade de Γ. Também é importante citar a seguinte observação:

Observação 1.2.5. *Se Γ é uma árvore, v, w são vértices de Γ e $g \in G$ é tal que $gv = v, gw = w$, então g fixa o caminho $[v, w]$ compreendido entre os vértices v e w.*

Descreveremos com poucos detalhes agora uma técnica geometrica muito poderosa desenvolvida por Bass-Serre para a manipulação com construções livres. Esta técnica envolve a ação de um grupo G sobre uma árvore X, e através da análise desta ação podemos deduzir que tipo de construção livre G tem, além disso podemos reobter demonstrações dos teoremas principais sobre construções livres de uma forma razoavelmente unificada.

Definição 1.2.6. *Seja Γ um grafo conexo. Um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é um sistema de grupos $\{G(m) \,|\, m \in \Gamma\}$ e monomorfismos $\partial_{i,e} : G(e) \to G(d_i(e))$, $e \in E(\Gamma), i = 0, 1$. Chamamos os grupos $G(e), e \in \Gamma$ e $G(v), v \in V(\Gamma)$ de grupos de arestas e grupos de vértices associados ao grafo Γ respectivamente de $(\mathcal{G}, \Gamma)$, satisfazendo:*

1. $G(e^{-1}) = G(e)$
2. $\partial_{1,e} = \partial_{0,e^{-1}}$

Exemplo 1.2.7. *Seja Γ um G-grafo conexo. Agora para cada $m \in \Gamma$ associamos como grupo $G(m) = G_m$ o estabilizador de m. Se $e \in E(\Gamma)$ e $g \in G_e$, então temos que:*

1. $gd_0(e) = d_0(ge) = d_0(e)$
2. $gd_1(e) = d_1(ge) = d_1(e)$

Logo, se $g \in G_{d_0(e)}$ ou se $g \in G_{d_1(e)}$, definimos $\partial_{0,e} : G_e \to G_{d_0(e)}$ e $\partial_{1,e} : G_e \to G_{d_1(e)}$ como sendo a aplicação identidade, que são monomorfismos.

Definição 1.2.8. *Sejam Γ um grafo conexo, T uma árvore maximal de Γ e $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos. Uma T-especialização de $(\mathcal{G}, \Gamma)$ em um grupo K é um par (β, β_1), onde:*

(i) $\beta = \{\beta_m : G(m) \longrightarrow K \mid \beta_m$ *é um homomorfismo* $\}$;

(ii) $\begin{array}{rccc} \beta_1 : & \Gamma & \longrightarrow & K \\ & T & \longrightarrow & 1 \end{array}$, *isto é $\beta_1(t) = 1$, para todo $t \in T$;*

(iii) *O diagrama abaixo é comutativo, para todo $e \in E(\Gamma)$.*

onde $w_{\beta_1(e)}$ indica a conjugação por $\beta_1(e)$. Então segue a seguinte igualdade do diagrama acima:

$$\beta_{d_1(e)}(\partial_{1,e}(g)) = \beta_1(e)^{-1}(\beta_{d_0(e)}(\partial_{0,e}(g)))\beta_1(e),$$

para todo $g \in G(e), e \in E(\Gamma)$.

Definição 1.2.9. *Seja $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos. O grupo fundamental de $(\mathcal{G}, \Gamma)$ com respeito à uma árvore maximal T é um grupo $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ e uma T-especialização $(\beta, \beta_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$, satisfazendo a seguinte propriedade universal:*

Para toda T-especialização $(\alpha, \alpha_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to K$, em um grupo qualquer K, existe um único homomorfismo $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T) \to K$ tal que $\phi\beta_1 = \alpha_1$ e $\phi\beta = \alpha$. Como podemos ver no diagrama abaixo:

onde $w_{\beta_1(e)}, w_{\alpha_1(e)}$ indicam a conjugação por $\beta_1(e)$, $\alpha_1(e)$ respectivamente.

O seguinte teorema estabelece a apresentação do grupo fundamental de um grafo de grupos.

Teorema 1.2.10 (Serre [S-77])**.** *Seja $(\mathcal{G}, \Gamma)$ um grafo de grupos. Seja T uma árvore maximal de Γ. Então grupo fundamental do grafo de grupos tem apresentação:*

$$\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T) = \left\langle G(v), t_e \,|\, rel(G(v)), \partial_{1,e}(g)^{t_e} = \partial_{0,e}(g),\ e \in E(\Gamma) \text{ e } g \in G(e), t_e = 1, e \in E(T) \right\rangle.$$

Demonstração: Seja H o grupo acima dado no segundo membro da igualdade, e sejam $\beta_1 : \Gamma \longrightarrow H$ a aplicação que envia T para $1 \in H$ e $e \in \Gamma \setminus T$ para t_e, $\beta_{d_0(e)}$ e $\beta_{d_1(e)}$

as inclusões de $G(d_0(e))$ e $G(d_1(e))$ em H respectivamente que segue do teorema da forma normal de elementos para produtos livres com amalgamação e HNN-extensões páginas 182 e 187 de [L-S-77]. Agora é fácil mostrar que o par (β, β_1) é uma T-especialização de $(\mathcal{G}, \Gamma)$, onde $\beta = \{\beta_m : G(m) \longrightarrow H \mid \beta_m \text{ é um homomorfismo}\}$. Logo H junto com o par (β, β_1) satisfaz a propriedade universal da definição (1.2.9). □

Observação 1.2.11. *As aplicações naturais $\partial_{i,v} : G(v) \to \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ são imersões. Isto segue do corolário 2.7 de [D-80].*

Observamos que o grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ é único a menos de isomorfismo e independe da escolha da árvore maximal T, conforme o teorema 2.4 em [D-80].

Exemplo 1.2.12. *Seja Γ um grafo finito e considere $(\mathcal{G}, \Gamma)$ o grafo de grupos associado a Γ. Se os grupos de arestas $G(e)$ são triviais para todo $e \in E(\Gamma)$, então as aplicações $\partial_{0,e}, \partial_{1,e}$ são triviais e pelo teorema* (1.2.10) *temos que a apresentação do grupo fundamental deste grafo de grupos é:*

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) &= \langle G(e), t_e \mid rel(G(v)),\, t_e = 1, e \in T \rangle \\
&= \langle G(v) \,|\, rel(G(v)) \rangle * \langle t_e \,|\, t_e = 1, e \in T \rangle \\
&= \big(*_{v \in V(\Gamma)} G(v) \big) * \big\langle\, t_e, e \in E(\Gamma) \setminus T \,|\, \emptyset \big\rangle \cong \big(*_{v \in V(\Gamma)} G(v) \big) * \pi_1(\Gamma)
\end{aligned}$$

Portanto temos que $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = (*_{v \in V(\Gamma)} G(v)) * \pi_1(\Gamma)$ é o produto livre dos grupos de vértices com o grupo fundamental do grafo Γ. Em particular se Γ é uma árvore temos que $t_e = 1,\ \forall\ e \in \Gamma$ e desta forma temos que $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = *_{v \in V(\Gamma)} G(v)$.

Exemplo 1.2.13. *Seja Γ um grafo conexo consistindo de dois vértices v, w e uma aresta e, e seja $(\mathcal{G}, \Gamma) = \{G(v), G(w), G(e)\}$ o grafo de grupos associado a Γ. Observamos que a única escolha para a árvore maximal é $T = \Gamma$, e pelo teorema* (1.2.10) *temos que*

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) &= \langle G(v), G(w) \mid rel(G(v)),\, rel(G(w)),\, \partial_{1,e}(g) = \partial_{o,e}(g),\ g \in G(e) \rangle \\
&= G(v) *_{G(e)} G(w)
\end{aligned}$$

é o produto livre dos grupos de vértices amalgamado o grupo de aresta.

$$G(v) \xrightarrow{G(e)} G(w)$$

Exemplo 1.2.14. *Seja Γ o grafo consistindo de um vértice v e um laço e em torno de v. Seja $(\mathcal{G},\Gamma) = \{G(v), G(e)\}$ o grafo de grupos associado a Γ. Observamos que a árvore maximal neste caso é o vértice v, e pelo teorema* (1.2.10) *temos que*

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{G},\Gamma) &= \left\langle G(v), t_e \mid rel(G(v)),\ (\partial_{1,e}(g)) = \partial_{0,e}(g)^{t_e},\ g \in G(e)\right\rangle \\ &= HNN(G(v), G(e), t_e)\end{aligned}$$

Logo o grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ do grafo de grupos associado ao grafo Γ é a HNN- extensão, onde o grupo base é o grupo de vértices, com grupos associados $\partial_{0,e}(G(e))$ e $\partial_{1,e}(G(e))$.

Observação 1.2.15. *Concluimos com estes dois exemplos que se Γ é uma árvore finita, e $(\mathcal{G},\Gamma)$ é um grafo de grupos qualquer associado com a árvore Γ, temos que o seu grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ pode ser obtido fazendo-se sucessivos produtos livres com amalgamação e HNN-extensões.*

Enunciaremos agora o principal teorema de estrutura para grupos agindo em árvores em duas partes. O primeiro teorema afirma que dado um grafo de grupos $(\mathcal{G}, Y)$ podemos associar a ele um grupo que é semelhante ao grupo fundamental de um espaço topológico, e é denotado por $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$, este grupo é construído dos grupos de vértices e de arestas usando produto livre com amalgamações e HNN-extensões. E o segundo teorema afirma que se G é um grupo que age sobre uma árvore T, então associamos com esta ação um grafo de grupos $(\mathcal{G}, Y)$, onde Y é o grafo quociente G/T, e o grupo de vértices e de arestas são estabilizadores de um certo conjunto de arestas e de vértices de T, e então G é isomorfo ao grupo fundamental deste grafo de grupos. E teremos que a teoria do grupos agindo sob árvores fica completa se o grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, Y)$ do grafo de grupos $(\mathcal{G}, Y)$ age sobre uma árvore especialmente construída.

Seja Γ um grafo conexo e $(\mathcal{G},\Gamma)$ um grafo de grupos e T uma árvore maximal de Γ, e seja $G = \pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$. Definimos o grafo universal $S = S(\mathcal{G},\Gamma,T)$ por:

$$\begin{cases} V(S) = \bigcup_{v\in V(\Gamma)} G/G(v) \\ E(S) = \bigcup_{e\in E(\Gamma)} G/G(e) \end{cases}$$

onde $G/G(m) = \{gG(m) \mid g \in G\}$ e as aplicações de bordo dadas por:

$$\begin{cases} d_0(gG(e)) = gG(d_0(e)) \\ d_1(gG(e)) = gt_eG(d_1(e)) \end{cases}$$

Definimos a ação de G sobre S como segue

$$h(gG(m)) = hgG(m)$$

onde $gG(m) \in S,\ g, h \in G$.

O teorema 1.2.16 abaixo mostra que o grafo S definido acima é uma árvore e que $G = \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ age sobre S.

Teorema 1.2.16 (Serre, J.P. [S-77]). *Seja G o grupo fundamental de um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$. Seja S o grafo definido acima. Então S é uma árvore.*

Começaremos agora com um grupo G que age sobre um grafo T, construiremos um grafo de grupos que terá G como o seu grupo fundamental.

Seja então um grupo G que age sobre um grafo conexo T. Seja $\Gamma = T/G$ o grafo quociente, considere D uma árvore maximal de Γ, observe que D contém todos os vértices de Γ, logo em $\Gamma \setminus D$ restam apenas arestas. Levantemos D para uma subárvore D' de T, as arestas levantadas de $\Gamma \setminus D$ para T têm vértices iniciais em D'. Obtemos então um *G-transversal conexo* $\sum$ de T(isto é, existe uma bijeção $\sigma : \Gamma \to \sum$ que $d_0(s) \in \sum,\ \forall s \in \Gamma$).

Deste modo se $e \in \Gamma \setminus D$, temos que $\sigma(e) \in \sum,\ \sigma(d_o(e)) \in \sum$ mas não necessariamente $\sigma(d_1(e)) \notin \sum$, então existe $g_e \in G$ tal que

$$g_e^{-1}\sigma(d_1(e)) = d_1(\sigma(e)) \tag{1.1}$$

Definiremos então um grafo de grupos como segue. Para cada $m \in \Gamma$, considere o grupo associado $G(m) = G_{\sigma(m)}$, e as aplicações de bordo por:

$$\begin{cases} \partial_{o,e} : G_{\sigma(e)} \to G_{\sigma(d_o(e))}, & \text{que envia} \quad x \mapsto x, \quad \text{e} \\ \partial_{1,e} : G_{\sigma(e)} \to G_{\sigma(d_1(e))}, & \text{que envia} \quad x \mapsto g_e x g_e^{-1}, \end{cases}$$

que são claramente bem definidas e são monomorfismos. Deste modo obtemos um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$. Seja $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, D)$ junto com a D-especialização (ν, ν_1) o grupo fundamental do grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$.

Construiremos agora uma D-especialização para o grupo G. Sendo $G(m) = G_{\sigma(m)} \leq G$, definamos $\beta_m : G(m) \to G$ como sendo a inclusão e $\beta_1 : \Gamma \to G$ enviando $m \mapsto g_m$, observe que $\beta_1(m) = 1$, $\forall\, m \in D$ e $\beta_1(e) = g_e$, $\forall\, e \in \Gamma \setminus D$. E assim o par $(\beta, \beta_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to G$ é uma D-especialização. Agora pela propriedade universal existe um único homomorfismo $f : \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, D) \to G$ tal que $f\nu = \beta$ e $f\nu_1 = \beta_1$. O teorema abaixo mostra G junto com esta D-especialização é isomorfo ao grupo fundamental do grafo de grupos definido acima, mais precisamente, f é um isomorfismo.

Teorema 1.2.17 (Serre, J. P. [S-77]). *Com as notações acima, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é uma árvore;*

(ii) *O monomorfismo de grafos $\psi : S \to T$ que envia $gG_{\sigma(m)} \mapsto f(g)\sigma(m)$ é um isomorfismo;*

(iii) *$f : \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, D) \to G$ é um isomorfismo.*

Definição 1.2.18. *Seja G um grupo que age sobre uma árvore T, dizemos que um elemento $g \in G$ é hiperbólico se g não fixa nenhum vértice de T.*

Um elemento que não satisfaz a condição acima é dito não hiperbólico.

A proposição seguinte é devida a J. Tits (proposição 24 de [S-77]) e será usada em uma forma mais conveniente nas demonstrações desta tese.

Proposição 1.2.19. *Seja G o grupo fundamental de um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ e S sua árvore universal. Suponha que o elemento $a \in G$ é hiperbólico. Sejam $m = \min_{v \in V(S)} l\,[v, av]$ e $T_a = \{v \in V(S) \mid l[v, av] = m\}$, onde $l[v, av]$ representa o comprimento da geodésica $[v, av]$. Então T_a é o conjunto de vértices de uma reta de S. Além disso, toda subárvore $\langle a \rangle$-invariante de $S(G)$ contém T_a e $T_a = \langle a \rangle [v, av[$.*

O fato central da versão profinita da teoria de grupos agindo sobre árvores que será usado no decorrer da tese é o seguinte teorema

Teorema 1.2.20 (Zalesskii-Mel'nikov)**.** *G age sobre uma árvore T e $E(T)$ compacto. Então $\forall\ v, w \in V(T)$, $G_v \cap G_w \subset G_e$, para $e \in T$ tal que $v = d_0(e)$ ou $v = d_1(e)$.*

1.3 Grafos Profinitos e Grafos de Grupos Profinitos

Introduziremos nesta seção noções do análogo profinito da teoria de Bass-Serre para grupos agindo sobre árvores que será necessário nesta tese. Com o objetivo de obter resultados análogos a teoria combinatoria dos grupos para o caso profinito foi desenvolvido o análogo profinito da teoria de Bass-Serre para grupos agindo sobre árvores, uma vez que os métodos clássicos da teoria combinatoria dos grupos baseado na existência da forma normal dos elementos em construções livres são impossíveis no caso profinito. A teoria dos grupos profinitos agindo sobre árvores profinitas foi iniciada por Gildenhuys e Ribes em [G-R-73] e foi desenvolvida por Zalesskii, Mel'nikov em [Z-89], [Z-M-89] e [Z-M-90]. Vale a pena observar que o caso profinito difere em alguns aspectos do caso abstrato: por exemplo as noções de árvore profinita e grafo profinito simplesmente conexo não coincidem no caso profinito como podemos ver em [Z-89], entretanto estas duas noções coincidem no caso prosolúvel.

Definição 1.3.1. *Um grafo profinito é um espaço profinito (espaço topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo) Γ com um subconjunto distinguido fechado $V = V(\Gamma)$ (conjunto de vértices de Γ) e duas aplicações contínuas $d_0, d_1 : \Gamma \rightrightarrows V(\Gamma)$ tais que $d_i|_{V(\Gamma)} = id_{V(\Gamma)}$.*

O conjunto $E(\Gamma) = \Gamma \setminus V(\Gamma)$ é o conjunto de arestas de Γ, e $d_0(e)$ e $d_1(e)$ são os vértices inicial e final da aresta $e \in E(\Gamma)$.

Todo grafo profinito é obviamente um grafo no sentido usual. Todo grafo abstrato finito é um grafo profinito.

Um *morfismo de grafos profinitos* $\alpha : \Gamma \to \Delta$ é uma aplicação contínua tal que $d_j\alpha(m) = \alpha d_j(m)$, para todo $m \in \Gamma$ e $j = 0, 1$. Se α é sobrejetiva (injetiva, bijetiva respectivamente), dizemos que α é um epimorfismo (monomorfismo, isomorfismo respectivamente).

Exemplo 1.3.2. *Seja Δ um subgrafo fechado de um grafo profinito Γ. Considere a aplicação contínua natural $q : \Gamma \to \Gamma/\Delta$. Definamos $V(\Gamma/\Delta) = q(V(\Gamma))$, $d_0(q(m)) = q(d_0(m))$, $d_1(q(m)) = q(d_1(m))$, para todo $m \in \Gamma$. Então temos que Γ/Δ torná-se um grafo quociente de Γ e dizemos que Γ/Δ é obtido de Γ colapsando o subgrafo Δ em um ponto.*

Podemos verificar usando a propriedade universal (de limite projetivo) que um grafo profinito é o limite projetivo de grafos abstratos finitos. Um grafo profinito é chamado *conexo* se todas os seus grafos quocientes finitos são conexos como grafos abstratos. Um subgrafo profinito conexo maximal de um grafo profinito Γ é chamado uma componente conexa de Γ.

Definição 1.3.3. *Seja G um grupo profinito. Um G-conjunto profinito X é um espaço profinito com uma aplicação contínua $G \times X \longrightarrow X$, que associa o par $(g, x) \in G \times X$ com o elemento $gx \in X$ tal que $1x = x$, para todo $x \in X$, e $g(g'x) = (gg')x$, para todo $g, g' \in G$ e $x \in X$.*

A definição acima é equivalente a um homomorfismo contínuo entre os grupos G e $Aut(X)$, o grupo dos automorfismos contínuos de X, onde $Aut(X)$ é dotado da topologia compacta-aberta. Dizemos também que G age continuamente sobre X, ou ainda que existe uma G-ação contínua sobre X.

O próprio grupo profinito G é um G-conjunto com a multiplicação à esquerda, o conjunto das classes laterais de um subgrupo fechado de G é um G-conjunto.

Definição 1.3.4. *Seja G um grupo profinito e seja Γ um grafo profinito. Dizemos que o grupo profinito G age sobre um grafo profinito Γ (ou que Γ é um G-grafo) se, G atua continuamente sobre o espaço topológico Γ, e além disso temos que $d_j(gm) = gd_j(m)$, para todo $g \in G$, $m \in \Gamma$, $j = 0, 1$.*

Se um grupo profinito G age sobre um grafo profinito Γ e $m \in \Gamma$, definimos o grupo $G_m = \{g \in G \mid gm = m\}$ como o estabilizador do elemento m. Segue da continuidade que G_m é um subconjunto fechado de G. E quando $G_m = 1$, para todo $m \in \Gamma$ dizemos que G age livremente sobre Γ.

Definição 1.3.5. *Se Γ é um grafo finito conexo, o grupo fundamental profinito $\Pi_1(\Gamma)$ de Γ é definido como o completamento profinito $\Pi_1(\Gamma) = \widehat{\pi_1(\Gamma)}$ do grupo fundamental discreto usual de Γ.*

Sejam $\psi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ um morfismo de grafos finitos e C um circuito com origem em um ponto m_0. Então $\psi(C)$ é um circuito de Δ com origem no ponto $\psi(m_0)$. Deste modo o morfismo ψ induz um homomorfismo entre os grupos fundamentais $\pi_1(\Gamma)$ e $\pi_1(\Delta)$ e consequentemente entre os grupos fundamentais profinitos $\Pi_1(\Gamma)$ e $\Pi_1(\Delta)$.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\Gamma) & \longrightarrow & \Pi_1(\Delta) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1(\Gamma) & \longrightarrow & \pi_1(\Delta) \end{array}$$

Como o grafo conexo profinito com um ponto distinguido $m_0 \in \Gamma$ é o limite projetivo de grafos finitos Γ_i, considerando-se a projeção canonica ψ_i no grafo finito Γ_i com ponto distinguido $\psi_i(m_0)$, assim obtemos homomorfismos entre os grupos fundamentais $\Pi_1(\Gamma_i)$.

Logo, o sistema projetivo de grafos finitos com ponto distinguido dar origem (como descrito acima) a um sistema projetivo de seus grupos profinitos fundamentais, e o limite projetivo deste sistema de grupos fundamentais profinitos é o grupo fundamental profinito $\Pi_1(\Gamma)$.

Se $\Pi_1(\Gamma)^{ab} = \{1\}$, então Γ é chamada uma árvore profinita. Segue da definição que $\Pi_1(\Gamma)$ é um grupo livre profinito, se Γ é finito, em geral isto não é verdade como podemos ver em [Z-89].

Restringiremos nossa atenção para grafos finitos de grupos profinitos, pois é suficiente para obtermos os resultados nesta tese. Para uma abordagem do caso geral veja [Z-M-89].

Definição 1.3.6. *Seja Γ um grafo finito conexo. Um grafo de grupos profinitos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é um sistema de grupos profinitos $\{\mathcal{G}(m) \mid m \in \Gamma\}$ e monomorfismos contínuos $\partial_{i,e} : \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_i(e))$, $e \in E(\Gamma), i = 0, 1$. Chamamos os grupos $\mathcal{G}(e), e \in \Gamma$ e $\mathcal{G}(v), v \in V(\Gamma)$ de grupos de arestas e grupos de vértices associados ao grafo Γ respectivamente de $(\mathcal{G}, \Gamma)$. As aplicações $\partial_{i,e}$ são chamadas aplicações de bordo.*

Definição 1.3.7. *Seja T uma subárvore maximal de Γ. Uma T-especialização $(\beta, \beta_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to K$ de um grafo de grupos profinitos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ em um grupo profinito K é um par (β, β_1) de aplicações $\beta : \bigcup\limits_{m \in \Gamma} \mathcal{G}(m) \to K$ e $\beta_1 : \Gamma \to K$, com as seguintes propriedades:*

1. *$\beta_m = \beta|_{\mathcal{G}(m)}$ é um homomorfismo contínuo para todo $m \in T$;*

2. *$\beta_1(m) = 1$, para todo $m \in T$;*

3. *$\beta(\partial_0(g)) = \beta_1(e)\beta(\partial_1(g))\beta_1(e)^{-1}$, para todo $e \in E(\Gamma)$ e todo $g \in \mathcal{G}(e)$;*

4. *$\beta(g) = \beta(\partial_0(g))$, para todo $e \in E(\Gamma)$ e todo $g \in \mathcal{G}(e)$.*

Definição 1.3.8. *O grupo fundamental profinito de um grafo finito de grupos profinitos* $(\mathcal{G}, \Gamma)$ *com respeito à uma árvore maximal* T *é um grupo profinito* $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ *junto com uma* T*-especialização*

$$(\beta, \beta_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T),$$

satisfazendo a seguinte propriedade universal: Para toda T*-especialização* $(\alpha, \alpha_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \to K$, *em um grupo profinito* K, *existe um único homomorfismo contínuo* $\phi : \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T) \to K$ *tal que* $\phi\beta_1 = \alpha_1$ *e* $\phi\beta = \alpha$, *isto é, o diagrama*

comuta, onde $w_{\beta_1(e)}, w_{\alpha_1(e)}$ indicam a conjugação por $\beta_1(e)$, $\alpha_1(e)$ respectivamente.

Observe que para verificar que um grupo profinito é o grupo fundamental profinito de um grafo finito de grupos profinitos, é suficiente provar a propriedade universal para grupos finitos K, pois K é o limite inverso de grupos finitos.

Podemos dar uma construção explícita de $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$, quando Γ é finito em termos do completamento profinito, seguindo a construção abstrata correspondente. Sem considerar a topologia profinita sobre os grupos de vértice e arestas, obtemos o grupo fundamental abstrato $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$, considere $\phi_m : \mathcal{G}(m) \to \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ os monomorfismos naturais. Defina então $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ como o completamento profinito de $\pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ munido da topologia onde o sistema de vizinhanças da identidade é dado pelos subgrupos normais N de índice finito tal que $\phi_m^{-1}(N)$ é um aberto em $\mathcal{G}(m)$, para todo $m \in \Gamma$. Segue então que $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ tem a seguinte apresentação, como podemos ver na seção 3 de [Z-89].

Teorema 1.3.9. *O grupo* $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ *tem a seguinte apresentação na categoria dos grupos profinitos:*

$$\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)=\Big\langle \mathcal{G}(v),t_e \,\Big|\, rel(\mathcal{G}(v)),(\partial_{0,e}(g))^{t_e}=\partial_{1,e}(g),\ e\in E(\Gamma)\, e\, g\in\mathcal{G}(e),t_e=1,\forall\, e\in T\Big\rangle.$$

Note que $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ independe da escolha da árvore maximal T como podemos ver na seção 3.3 de [Z-M-90] (veja também o item 6 do lema (1.3.19)), e por isso escreveremos simplesmente $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$. Vale observar que no caso abstrato as aplicações $\beta_m:\mathcal{G}\longrightarrow\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ da T-especialização são injetivas, o que nem sempre ocorre no caso profinito. Entretanto podemos contornar este fato sem modificar o grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$, e para isto basta trocar os grupos de vértices e arestas por suas imagens em $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ e considerar ∂_0 a aplicação identidade e $\partial_1(m)=t_e^{-1}\partial_0(m)t_e$, onde $t_e=\beta_1(e)$ e $m\in\mathcal{G}(e)$.

Exemplo 1.3.10. *Se* $\mathcal{G}(e)=1$*, para todo* $e\in E(\Gamma)$*, é fácil verificar pela propriedade universal que* $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)$ *é o produto livre profinito dos grupos de vértices* $\mathcal{G}(v)$ *com o grupo fundamental profinito do grafo* Γ*, isto é:*

$$\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)=\Big(\coprod_{v\in V(\Gamma)}\mathcal{G}(v)\Big)\coprod\Pi_1(\Gamma)$$

Exemplo 1.3.11. *Se* Γ *consiste de uma aresta* e *entre dois vértices* v *e* w*, e seja* $\mathcal{G}=\{(G(v),G(w)),(G(e))\}$ *o grafo de grupos profinitos associado a* Γ*. Do mesmo modo como vimos no exemplo* (1.3.10) *temos que* $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma,T)=\mathcal{G}(v)\coprod_{\mathcal{G}(e)}\mathcal{G}(w)$ *é o produto livre amalgamado profinito dos grupos de vértices* $\mathcal{G}(v)$*,* $\mathcal{G}(w)$ *com subgrupo de aresta amalgamado* $\mathcal{G}(e)$*.*

Exemplo 1.3.12. *Seja* Γ *o grafo consistindo de um vértice* v *e um laço em torno de* v*. Como no exemplo anterior, vemos que o grupo fundamental* $\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$ *do grafo de grupos profinitos associado ao grafo* Γ *é a HNN- extensão profinita, onde o grupo base é o grupo de vértices, com subgrupos associados* $\partial_0(\mathcal{G}(e))$*,* $\partial_1(\mathcal{G}(e))$ *e* $f:\partial_0(\mathcal{G}(e))\to\partial_1(\mathcal{G}(e))$ *é o isomorfismo* $\partial_0(x)\to\partial_1(x)$*, onde* $x\in\mathcal{G}(e)$*.*

Construiremos agora o grafo universal S sobre o qual $\Pi(\mathcal{G},\Gamma)$ age continuamente de modo natural, e este grafo S é de fato uma árvore profinita. Sejam $(\mathcal{G},\Gamma)$ um grafo finito de grupos profinitos e seja $G=\Pi_1(\mathcal{G},\Gamma)$. Definamos $G(v)=\beta_v(\mathcal{G}(v))$, para $v\in V(\Gamma)$, e $G(e)=\beta_e(\mathcal{G}(e))$, para $e\in E(\Gamma)$. Então $S=S(\mathcal{G},\Gamma)$ é dado como segue:

$$S=\bigcup_{m\in\Gamma}G/G(m),$$

com a união topológica disjunta, o espaço de vértices é definido por

$$V(S) = \bigcup_{v \in V(\Gamma)} G/G(v),$$

e tem como conjunto de arestas

$$E(S) = \bigcup_{e \in E(\Gamma)} G/G(e)$$

e as aplicações de bordo são dadas por:

$$d_0(gG(e)) = gG(d_0(e)), \quad d_1(gG(e)) = gt_eG(d_1(e))$$

A ação de G sobre S é dada por:

$$g(g'G(m)) = (gg')G(m),$$

onde $g, g' \in G$.

Pelo teorema enunciado abaixo temos que S é uma árvore profinita e que S módulo a ação de G é Γ, isto é $S/G = \Gamma$.

Teorema 1.3.13 (Zalesskii, P., Mel'nikov, O. V., [Z-M-89])**.**

(i) *O grafo $S = S(\mathcal{G}, \Gamma)$ de um grafo de grupos profinitos é uma árvore e $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ age continuamente sobre S;*

(ii) *A aplicação $\beta : S \to \Gamma$ que associa $gG(m)$ em S com m em Γ é uma fatorização pela ação de G.*

Agora diremos o que significa a topologia profinita ser eficiente sobre um grupo abstrato G, que é o grupo fundamental de um grafo de grupos abstratos, $G = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$, e esta inclui obviamente a definição (1.1.3).

Definição 1.3.14. *Seja $G = \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ dizemos que a topologia sobre G é eficiente se induz a topologia profinita sobre os grupos de vértices $G(v)$, $v \in V(\Gamma)$ e sobre os grupos de arestas $G(e)$, $e \in E(\Gamma)$, G é residualmente finito e $G(e), G(v)$ são fechados na topologia profinita de G.*

Exemplo 1.3.15. *Se G é o grupo fundamental de um grafo de grupos finitos de ordem limitado então G tem topologia profinita eficiente, e isto segue de G ser virtualmente livre conforme o teorema 3.2 capítulo IV de [D-80], e assim sobre cada subgrupo finitamente gerado de G a topologia induzida é a topologia profinita.*

Se tivermos Γ um grafo finito, e se a topologia profinita sobre $G = \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ for eficiente, então teremos como consequência que o completamento profinito $\widehat{G}$ de G é o grupo fundamental $\Pi_1(\widehat{\mathcal{G}}, \Gamma)$, onde $(\widehat{\mathcal{G}}, \Gamma)$ é o grafo do completamento profinito dos correspondentes grupos de vértices e de arestas com aplicações de bordo ∂_i, definidas de modo natural.

A observação seguinte é muito importante pois possibilita imergir a árvore $S(G)$ em $S(\widehat{G})$, e este fato é crucial para as demonstrações desta tese.

Observação 1.3.16. *Note que se $S(G)$ denota a árvore associada a G, e G tem topologia profinita eficiente , então $S(G)$ é imersa naturalmente em $S(\widehat{G})$(árvore sobre a qual $\widehat{G}$ age), e isto segue do fato que todos os estabilizadores são fechados. Além disso temos que $S(G)$ é denso em $S(\widehat{G})$.*

A proposição seguinte fornece informações sobre o fecho da reta de Tits em $S(\widehat{G})$, e diz que um elemento hiperbólico de G é hiperbólico no sentido profinito.

Proposição 1.3.17. *Seja G o grupo fundamental de um grafo de grupos finito $(\mathcal{G}, \Gamma)$ e suponha que a topologia profinita é eficiente. Sejam $a \in G$ um elemento hiperbólico e T_a a reta de Tits correspondente. Então:*

(i) $\overline{\langle a \rangle}$ *age livremente sobre a árvore $S(\widehat{G})$;*

(ii) $\overline{T_a} = \overline{\langle a \rangle}[v, av[$*;*

(iii) $\overline{\langle a \rangle}$ *age livremente sobre a árvore profinita $\overline{T_a}$, e $\overline{\langle a \rangle} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$;*

(iv) T_a *é uma componente conexa de $\overline{T_a}$ considerada como um grafo abstrato, em outras palavras, os únicos vértices de $\overline{T_a}$ que estão à uma distância finita de um vértice de T_a são os vértices de T_a.*

Demonstração: O item (i) está provado na proposição 2.9 de [R-Z-96]. Os itens (ii) e (iii) são demonstrados no lema 4.1 de [R-S-Z-98].

Para demonstrar o item (iv) vamos usar o mesmo raciocínio do lema 4.3 de [R-S-Z-98]. Seja w um vértice de $\overline{T_a}$ que esta a uma distância finita de v, mostraremos que $w \in T_a$. Suponha que $w \notin T_a$ então existe uma aresta e' da geodésica $[v, w]$ que não esta em T_a e podemos assumir que o vértice inicial de e' é v. Como $\overline{T_a} = \overline{\langle a \rangle}[v, av[$, então existe $\alpha \in \overline{\langle a \rangle}$ tal que $\alpha e = e'$, onde e é uma aresta de $[v, av[$. Seja w_0 a origem de e, então $\alpha w_0 = v$. Assim $\alpha w_0 = v \in T_a$ e sendo

$T_a = \langle a \rangle [v, av[$ temos que existe $\beta \in \langle a \rangle$ tal que $\beta\alpha w_0 \in [v, av[$ e portanto $\beta\alpha = 1$ e então $\alpha \in \langle a \rangle$. $\square$

Definição 1.3.18. *Seja G um grupo profinito que age sobre um grafo profinito Δ tal que o grafo quociente $\Gamma = \Delta/G$ é finito e conexo. Um* transversal conexo *é um subconjunto $\mathcal{J} \subseteq \Delta$ tal que cada par de vértices pode ser ligado por um caminho em $\mathcal{J}$, a aplicação natural $\sigma : \Delta \longrightarrow \Gamma$ restrita a $\mathcal{J}$ é uma bijeção e $d_0(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$.*

Observe que $\mathcal{J}$ é um grafo se, e somente se, Γ é uma árvore.

Seja T' uma árvore maximal em Γ, observe que em $\Gamma \setminus T'$ restam apenas arestas. Para cada $m \in \Gamma$ denotaremos o seu único levantamento em $\mathcal{J}$ por $\widetilde{m} = (\sigma|_{\mathcal{J}})^{-1}(m)$. Levantemos T' para uma árvore T em Δ e em seguida levantemos as arestas em $\Gamma \setminus T'$ para arestas em Δ tais que $d_0(\widetilde{m}) \in T$. Deste modo construimos um transversal conexo $\mathcal{J}$ a partir de qualquer árvore maximal T' de Γ.

Agora para cada $m \in \Gamma \setminus T'$, temos que $\widetilde{m} \in \mathcal{J}$ e por construção temos que $d_0(\widetilde{m}) \in \mathcal{J}$ e $d_1(\widetilde{m}) \notin \mathcal{J}$, mas $\widetilde{d_1(m)}$ é o levantamento do vértice $d_1(m)$ e sendo $\mathcal{J}$ um tranversal existe $t_m \in G$ tal que $t_m d_1(\widetilde{m}) = \widetilde{d_1(m)}$, se $m \in T'$ temos que $t_m = 1$. Assim definimos uma aplicação $\alpha_1 : \Gamma \longrightarrow G$ que associa a cada $m \in \Gamma \setminus T'$ o elemento $t_m \in G$ e para $m \in T'$ a aplicação é trivial.

Definamos um grafo de grupos profinitos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ como segue: Para todo $m \in \Gamma$ o grupo profinito $\mathcal{G}(m) = G_{\widetilde{m}}$ (o estabilizador de $\widetilde{m}$) e definimos para $e \in E(\Gamma)$ e $g \in \mathcal{G}(e)$ as aplicações de bordo por:

$$\begin{cases} \partial_{0,e} : & \mathcal{G}(e) & \longrightarrow & \mathcal{G}(d_0(e)) \\ & g & \longmapsto & g \\ \partial_{1,e} : & \mathcal{G}(e) & \longrightarrow & \mathcal{G}(d_1(e)) \\ & g & \longmapsto & g^{t_e} \end{cases}$$

estas aplicações são claramente bem definidas e são monomorfismos contínuos.

Construiremos agora uma T-especialização para o grupo profinito G. Observando que os grupos associados $\mathcal{G}(m) = G_{\widetilde{m}}$ são subgrupos de G, definamos para cada $m \in \Gamma$ as aplicações $\alpha_m : \mathcal{G}(m) \longrightarrow G$ como sendo a inclusão, indicaremos esta família de aplicações por

$\alpha : \bigcup\limits_{m\in\Gamma} \mathcal{G}(m) \longrightarrow G$ e $\alpha_1 : \Gamma \longrightarrow G$ que associa a cada $e \in \Gamma \setminus T'$ o elemento $t_e \in G$ e trivial sobre os elementos de T'. Assim o par $(\alpha, \alpha_1) : (\mathcal{G}, \Gamma) \longrightarrow G$ satisfaz as hipóteses da definição (1.3.7) e é portanto uma T-especialização.

Seja $S = S(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ a árvore profinita do grafo de grupos profinitos construída logo após o teorema (1.3.9). Considere a ação canônica de $\widetilde{G} = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ sobre S dada por:

$$g(g'\mathcal{G}(m)) = (gg')\mathcal{G}(m)$$

para $g, g' \in \widetilde{G}$.

O próximo lema é a versão profinita do teorema principal da teoria de Bass-Serre, queremos também ressaltar que esta versão é basicamente igual ao caso abstrato exceto pelo fato de estarmos tratando de grafos de grupos profinitos.

Lema 1.3.19. *Sob as mesmas hipótese da definição* (1.3.18). *Sejam S a árvore profinita do grafo de grupos profinitos construída acima e considere o ação canônica de $\widetilde{G} = \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T)$ sobre S. Então temos as seguintes afirmações:*

- **(i)** *Para todo $\delta \in \Delta$ o estabilizador G_δ é conjugado a $\mathcal{G}(m)$ por um determinado $m \in \Gamma$.*
- **(ii)** *Existe um homomorfismo de grupos profinitos $\lambda : \widetilde{G} \longrightarrow G$ com $\lambda\beta = \alpha$, $\lambda\beta_1 = \alpha_1$ e um morfismo de grafos profinitos $\lambda_0 : S \longrightarrow \Delta$ que envia $\mathcal{G}(m)g \longmapsto \tilde{m}\lambda(g)$ para todo $m \in \Gamma$ e $g \in G$.*
- **(iii)** *Seja $H := \langle G_v, t_e \mid v \in V(\mathcal{J}), e \in E(\Gamma)\rangle^{abs}$, então $H\mathcal{J}$ é um grafo conexo abstrato, denso em $\overline{H\mathcal{J}}$, $\overline{H\mathcal{J}}$ é componente conexa de Δ e $\overline{H} = Stab(\overline{H\mathcal{J}})$. Além disso, a imagem $\mathcal{I}m(\lambda) = \overline{H} = \langle \mathcal{I}m(\alpha), \mathcal{I}m(\alpha_1)\rangle$.*
- **(iv)** *A aplicação α da T-especialização é injetiva sobre as fibras, isto é, $\alpha|_{\mathcal{G}(m)}$ é injetiva para todo $m \in \Gamma$; Δ é conexo se, e somente se, λ é um epimorfismo;*
- **(v)** *λ é um isomorfismo de grupos se, e somente se, λ_0 é um isomorfismo de grafos profinitos e se, e somente se, $\Pi_1(\Delta) = 1$;*
- **(vi)** *para quaisquer árvores maximais T, T' em Γ existe um isomorfismo de grupos fundamentais $\phi : \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T) \longrightarrow \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma, T')$.*

Demonstração: (i) Como $\mathcal{J}$ é um transversal, existe $m \in \mathcal{J}$ tal que $\delta = gm$ para algum $g \in G$, logo $G_\delta = G_{gm} = gG_m g^{-1} = g\mathcal{G}(m)g^{-1}$.

(ii) Pela propriedade universal na definição (1.3.8) existe um morfismo de grafos profinitos $\lambda : \widetilde{G} \longrightarrow G$ tal que $\lambda\beta = \alpha$ e $\lambda\beta_1 = \alpha_1$.

(iii) Segue das igualdades $\alpha = \lambda\beta$, $\lambda\beta_1 = \alpha_1$ e da definição (1.3.18) que $\mathcal{I}m(\lambda) = \overline{H} = \langle \mathcal{I}m(\alpha), \mathcal{I}m(\alpha_1)\rangle$. Agora $H\mathcal{J}$ é uma árvore abstrata, e podemos demonstrar isto fazendo indução sobre o comprimento minimal de $h \in H$ escrevendo como o produto de elementos em G_v e os t_e's. Para $n = 0$ coloquemos $H_0 = 1$ e $H_1 = \{1, g_v^{\pm 1}, t_e^{\pm 1} \mid g_v$ percore todos os geradores dos grupos G_v's$\}$ e definamos $H_n = H_{n-1}H_1$. Como $\mathcal{J}$ é conexo temos que para cada $e \in \Gamma\backslash T'$ existe $t_e \in G$ tal que $t_e d_1(\widetilde{e}) = \widetilde{d_1(e)}$, e assim quaisquer dois vértices v_1, v_2 em $\mathcal{J}$ e $t_e\mathcal{J}$ respectivamente podem ser ligados via $d_1(\widetilde{e})$; observamos também que $\mathcal{J} \cup G_v\mathcal{J}$ é conexo para qualquer v em $\mathcal{J}$. Suponhamos por hipótese de indução que $H_{n-1}\mathcal{J}$ é conexo. Como $1 \in H_{n-1}$ temos que $\mathcal{J} \subset H_{n-1}\mathcal{J}$ e então $t_e\mathcal{J} \subset H_{n-1}t_e\mathcal{J}$ e $G_v\mathcal{J} \subset H_{n-1}G_v\mathcal{J}$. Mas $H_{n-1}\mathcal{J}$ é conexo, logo $H_n = H_{n-1}H_1\mathcal{J}$ é conexo para qualquer n e portanto $H\mathcal{J}$ é conexo. Assim o fecho $\overline{H\mathcal{J}} = \overline{H}\mathcal{J}$ é um grafo profinito conexo $\overline{H}$-invariante.

Para mostrar que $\overline{H}\mathcal{J}$ é uma componente conexa de Δ, consideraremos uma aplicação $\rho : \Delta \longrightarrow G/\overline{H}$ que envia $g\widetilde{m} \in \Delta$ para a classe lateral $g\overline{H} \in G/\overline{H}$. Esta aplicação é bem definida, isto segue do fato que a definição de ρ independe da escolha do representante de $\widetilde{m}$ e do fato que $\overline{H}$ é gerado pelos G_v's. Considere $G/\overline{H}$ como um grafo profinito consistindo somente de um vértice, isto é, $V(G/\overline{H}) = G/\overline{H}$. Provaremos que ρ é um morfismo de grafos profinitos, isto é, temos $d_i\rho = \rho d_i$. Como ρ comuta com a ação de G, é suficiente provar isto para todas as arestas em $\mathcal{J}$. De fato, para $\tilde{e} \in E(\mathcal{J})$ a igualdade $\rho(d_0(\tilde{e})) = \rho(\tilde{e})$ segue da definição de ρ. Como $t_e\widetilde{d_1(e)} = d_1(\tilde{e})$ e $t_e \in \overline{H}$, encontramos $\rho(d_1(\tilde{e})) = \rho(\tilde{e})$ como queremos.

Observe que $\rho^{-1}(g\overline{H}) = g\mathcal{I}m(\lambda_0)$ é um subgrafo conexo de Δ para todo $g \in G$. Segue que $\{g\mathcal{I}m(\lambda_0) \mid g \in G\}$ é o espaço das componentes conexas de Δ.

(iv) A injetividade de $\alpha|_{\mathcal{G}(m)}$ é imediata da construção em (1.3.18). A segunda afirmação de (iv) segue de (iii).

(v) Usando (iv) vemos que λ é um isomorfismo se, e somente se, $S(G)$ é conexa e $\{1\} \cong ker(\lambda) \cong \pi_1(\Delta)$. E como por construção λ_0 é a fatorização módulo $ker(\lambda)$. Então (v) segue.

(vi) Denotaremos por $(S, \widetilde{G})$ e $(S', \widetilde{G'})$ a ação de $\widetilde{G}$ sobre S e de $\widetilde{G}'$ sobre S' respectivamente . Consideraremos a construção descrita em (1.3.18) com $(\Delta, G) := (S', \widetilde{G}')$ e $\mathcal{J}$ como um transversal em S' construído a partir de $T \subseteq \Gamma$. Então (ii) mostra a existência do morfismos ϕ_0, ϕ. Como S' é uma árvore profinita, (v) implica que ϕ_0, ϕ são isomorfismos. $\square$

CAPÍTULO 2

Grupos de Bianchi

2.1 Centralizadores em $SL_2(\mathbb{C})$

Dedicaremos esta seção para o estudo dos centralizadores de elementos em $GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C})$ e usaremos resultados de B. Fine [F-89] para obtermos os centralizadores de elementos dos grupos de Bianchi.

Lema 2.1.1. *Se $g \in G = GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C})$ tal que $g \notin Z(G)$, então $C = C_G(g)$ é abeliano.*

Demonstração: Seja $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, $ad - bc \neq 0$. Pela forma canônica de Jordan podemos supor que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $ad \neq 0$. Calcularemos agora o centralizador de g, temos dois casos a considerar.

Se os autovalores de g são distintos, temos que g é diagonalizável e então $g =$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, vejamos os elementos $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ de $GL_2(\mathbb{C})$ que comutam com g.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax & yd \\ az & wd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ dz & dw \end{pmatrix}$$

Logo temos que,

$$z(a-d) = 0 \quad \text{e} \quad y(a-d) = 0,$$

o que implica $y = z = 0$. E desta forma o centralizador de g corresponde à:

$$C_{GL_2(\mathbb{C})}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \middle| xw \neq 0 \right\}.$$

Agora se $a = d$, isto é, se os autovalores são iguais, temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ az & aw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+aw \end{pmatrix}$$

De onde obtemos $bz = 0$ e $b(x-w) = 0$, como $g \notin Z(G)$ e $b \neq 0$ o centralizador de g é:

$$C_{GL_2(\mathbb{C})} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}.$$

Portanto em qualquer um dos casos acima temos que o centralizador de um elemento $g \in GL_2(\mathbb{C})$ é abeliano.

Agora observando que $C_{GL_2(\mathbb{C})}(g) \cap SL_2(\mathbb{C}) = C_{SL_2(\mathbb{C})}(g)$, segue então que o centralizador de um elemento $g \in SL_2(\mathbb{C})$ é também abeliano. $\square$

Lema 2.1.2. *Seja $\overline{g} \in \Gamma_d = PSL_2(O_d)$, onde O_d é o anel de inteiros do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, um elemento de ordem infinita. Então o centralizador $C_{\Gamma_d}(\overline{g})$ de $\overline{g}$ é abeliano. Além disso, $C_{\Gamma_d}(\overline{g})$ é virtualmente abeliano livre de posto no máximo 2.*

Demonstração: Considere a projeção $\varphi : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/Z$, onde $Z = Z(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C} \right\}$ é o centro de $GL_2(\mathbb{C})$, que associa a cada $g \in GL_2(\mathbb{C})$ a sua classe $\overline{g} = gZ$. Seja $\overline{g} \in PGL_2(\mathbb{C})$ com $g \notin Z$.

Um elemento $hZ \in PGL_2(\mathbb{C})$ centraliza gZ se, e somente se, $hZ(gZ)h^{-1}Z = gZ$. Escrevamos então a imagem inversa do centralizador do elemento $\overline{g} \in PGL_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi^{-1}(C_{PGL_2(\mathbb{C})}(\overline{g})) = \{h \in GL_2(\mathbb{C}) \mid hgh^{-1} = gz, \ \text{para algum} \ z \in Z\}$$

Pela fórmula canônica de Jordan podemos supor que $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix}$ e $gz = \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & aw \end{pmatrix}$. Como matrizes conjugadas têm os mesmos autovalores, estas matrizes só podem ser conjugadas em $GL_2(\mathbb{C})$ se $a = 1$ ou se $aw = x$ e $w = ax$. No segundo caso temos $a^2 = 1$ e logo $a = -1$. Mas a matriz $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ têm ordem finita em Γ_d, pois o determinante dela é $-x^2$ que tem que ser uma unidade do anel O_d. Como g tem ordem infinita por hipótese $a = 1$.

Assim temos que

$$\varphi^{-1}(C_{PGL_2(\mathbb{C})}(\overline{g})) = C_{GL_2(\mathbb{C})}(g).$$

Como $Z \subset C_{GL_2(\mathbb{C})}(g)$ temos que $C_{PGL_2(\mathbb{C})}(g)$ é o quociente do centralizador de g em $GL_2(\mathbb{C})$ pelo centro, isto é, $C_{PGL_2(\mathbb{C})}(g) \cong C_{GL_2(\mathbb{C})}(g)/Z$. Pelo lema (2.1.1) o centralizador de g em $PGL_2(\mathbb{C})$ é abeliano.

A segunda parte do lema segue do fato que os subgrupos abelianos livre de torção em Γ_d são abelianos livres de posto no máximo 2, veja Fine [F-89] página 107. $\square$

2.2 Teorema Principal

Lema 2.2.1. *Seja G um grupo abstrato que age sobre uma árvore S tal que S/G é finito e que os estabilizadores de arestas são finitamente gerados. Suponha que a topologia sobre G é eficiente e que existe um epimorfismo $\tau : G \longrightarrow K$, onde K é virtualmente livre e tal que a restrição de τ para estabilizador de vértice G_v é um isomorfismo para cada $v \in V(S)$. Então os estabilizadores de arestas são distinguidos sob conjugação em G.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente a seguinte afirmação que será usada no decorrer desta demonstração.

Afirmação: (i) Sejam m_1, m_2 elementos de uma componente conexa C de $S(\widehat{G})$. Seja $g \in \widehat{G}$ tal que $gm_1 = m_2$, então $g \in Stab_{\widehat{G}}(C)$.
(ii) Sejam m_1, m_2 elementos de uma componente conexa C de $S(G)$. Seja $g \in G$ tal que $gm_1 = m_2$, então $g \in Stab_G(C)$.

De fato, precisamos mostrar que C é g-invariante, isto é, $m \in C$ implica que $gm \in C$. Observe que $g[m_1, m] = [gm_1, gm] = [m_2, gm]$, e como m_1 e m são elementos de C e C é conexo temos que a geodésica $[m_1, m] \subset C$, agora como $m_2 \in C$ e como C é conexo temos que $g[m_1, m]$ está contido em C. Portanto $gm \in C$ e assim $g \in Stab_{\widehat{G}}(C)$. O item (ii) é apenas a versão abstrata deste fato, e tem demonstração inteiramente análoga.

Seja $e \in S$ uma aresta qualquer. Queremos mostrar que G_e é distinguido sob conjugação em G. Sejam $g \in G$ e $\gamma \in \widehat{G}$ tal que $g^\gamma \in \widehat{G_e}$, mostraremos que existe $\gamma_1 \in G$ tal que $g^{\gamma_1} \in G_e$. Observamos primeiro que pelo item (i) da proposição (1.3.17) g é um elemento não hiperbólico de G, então g estabiliza um vértice v de S. Usaremos indução sobre o número de arestas do grafo S/G. Se o grafo S/G tem uma aresta, temos que S/G consiste de uma aresta e dois vértices (ou uma aresta e um vértice), e assim temos que G é o produto livre dos estabilizadores dos vértices amalgamado o estabilizador da aresta (ou uma HNN-extensão com o estabilizador de vértice como o grupo base), isto é, $G = G_{v_1} *_{G_e} G_{v_2}$ $\Big($ou $G = HNN(G_{v_1}, G_e, t)\Big)$. Sendo τ restrito à G_v é um isomorfismo para K, e como K é virtualmente livre temos que $\tau(G_e)$ é distinguido sob conjugação em K pela proposição (1.1.8), pois $\tau(G_e)$ é finitamente gerado, logo existe $\gamma_1 \in K$ tal que $\tau(g)^{\gamma_1} \in \tau(G_e)$ e como $\tau|_{G_v}$ é um isomorfismo para K, existe $\delta \in G_v$ tal que

$\tau(\delta) = \gamma_1$ e então $\tau(g)^{\tau(\delta)} \in \tau(G_e)$, e consequentemente $g^\delta \in G_e$.

Fixemos um transversal conexo T de S/G em S. Sem perda de generalidade podemos assumir que v e e pertencem à T. Como g fixa v e γe pelo Teorema 2.8 em [Z-M-89] g fixa a geodésica $[v, \gamma e]$, isto é, a subárvore profinita minimal que contém v e γe. Considere $S(\widehat{G}) \setminus \widehat{G}e$ e chamemos C a componente conexa de $(S(\widehat{G}) \setminus \widehat{G}e) \cap [v, \gamma e]$, contendo v. Seja e' uma aresta de C que tem um vértice em comum com alguma aresta $e_0 \in \widehat{G}e \cap [v, \gamma e]$, verificaremos que esta aresta existe. De fato, sejam $\Delta = [e', \gamma e]$ e $\Gamma = \Delta \setminus \{\widehat{G}e\}$, considere Δ_Γ o grafo profinito obtido pelo colapso de todas as componentes conexas de Γ. Pela proposição 3.2 de [Z-92] temos que Δ_Γ é uma árvore profinita. Seja v_C o vértice que é a imagem da componente conexa C. Agora como $E(\Delta_\Gamma)$ é compacto, pois $\Delta \setminus \widehat{G}e$ é aberto e fechado, então pela proposição 2.15 de [Z-M-89] temos que existe uma aresta $\overline{e_0} \in \Delta_\Gamma$ que tem v_C como vértice inicial, seja $e_0 = \pi_\Gamma^{-1}(\overline{e_0})$, onde $\pi_\Gamma : \Delta \longrightarrow \Delta_\Gamma$ é a aplicação quociente, e assim e_0 e e' tem um vértice em comum, digamos $d_0(e_0)$.

Seja $\nu : S(\widehat{G}) \to S(\widehat{G})/\widehat{G}$ o epimorfismo natural, agora observe que $\nu(e) = \widehat{G}e$ e $\nu(v) \in (S/G) \setminus \nu(e)$. Seja $\widehat{\Pi}$ o maior subgrupo de $\widehat{G}$ que deixa o componente conexa C_0 de $S(\widehat{G}) \setminus \widehat{G}e$ contendo v invariante. Pela afirmação acima temos que $\nu|_{C_0}$ coincide com factorização de C_0 modulo $\widehat{\Pi}$. Como $e_0 \in \widehat{G}e \cap [v, \gamma e]$, as arestas e_0 e e possuem a mesma imagem sob ν. Note que $v \in C \subset C_0$, $d_0(e_0) \in C_0$ e $d_0(e) \in C_0$ (para ver a última afirmação observe que $T \setminus e$ divide-se em duas componentes conexas, já que e é único representante de $\widehat{G}e$ em T, e além disso como $v \in T$ temos que $d_0(e)$ ou $d_1(e)$ pertencem a C_0. Mas sendo o colapso um morfismo de grafos (orientados) como no exemplo (1.3.2), colapsando C_0 obtemos que $d_0(e) \in C_0$). Assim podemos encontrar $\delta \in \widehat{\Pi}$ tal que $v_0 := \delta d_0(e_0) = d_0(e)$ e consequentemente v_0 é um vértice comum de $\delta e'$ com e.

Verificaremos agora que $\Pi := \widehat{\Pi} \cap G$ satisfaz a hipótese de indução. De fato, seja $T_0 = C_0 \cap T$, ou seja a componente conexa de $T \setminus e$ em C_0. Sendo T é um transversal de $S(G)/G$, a aplicação $\sigma : T \longrightarrow S(\widehat{G})/\widehat{G} = S(G)/G$ é uma bijeção e como σ restrita a T_0 ainda é uma bijeção temos que T_0 é um transversal de $C_0/\widehat{\Pi}$.

Agora observemos que $C_0 \cap S$ é uma árvore. Com efeito, na verdade precisamos somente verificar que $C_0 \cap S$ é conexo. Suponha que $C_0 \cap S$ tenha duas componentes conexas em $S \setminus e$. Sejam v e w em diferentes componentes conexas de $C_0 \cap S$, então a geodésica $[v, w] \in C_0$ e como v e w são vértices de $S(G)$, $[v,w] \in S(G)$ e como v e w ficam em diferentes componentes conexas de $S(G) \setminus e$, então $[v,w]$ contém uma translação de e, o que é uma contradição, pois C_0 não contém translações da aresta e.

Portanto Π age sobre a árvore $C_0 \cap S$, logo $\Pi \leq Stab_G(C_0 \cap S)$. Para obter a outra inclusão observemos que se $g \in G$ estabiliza a árvore $C_0 \cap S$, então pela afirmação acima $g \in \widehat{\Pi}$, pois $\widehat{\Pi}$ é o maior subgrupo que deixa a componente conexa C_0 invariante. Logo $Stab_G(C_0 \cap S) \leq \widehat{\Pi} \cap G = \Pi$, e assim $\Pi = Stab_G(C_0 \cap S)$.

Sejam $\Gamma = C_0/\widehat{\Pi}$ e $\Gamma' = (C_0 \cap S)/\Pi$, os grafos quocientes de C_0 e $C_0 \cap S$, mostraremos que Γ e Γ' são grafos isomorfos. Seja $\theta : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ o morfismo de grafos que associa $m\Pi$ com $m \in \widehat{\Pi}$. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma'$, e consideremos $s_1, s_2 \in C_0 \cap S$ os levantamentos de γ_1 e γ_2 respectivamente. Assim existe $p \in \widehat{\Pi}$ tal que $ps_1 = s_2$. Logo pela afirmação acima $p \in \Pi$, então $\gamma_1 = \gamma_2$. Portanto $\Gamma' \cong \Gamma$.

Finalmente observemos que pelo teorema de Bass-Serre Π é o grupo fundamental de um grafo de grupos $(\mathcal{G}, \Gamma)$, onde $\gamma = C_0 \cap S$, isto é, $\Pi = \pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ e os grupos de vértices e arestas são $\mathcal{G}(v) = \Pi_v = G_v$ e $\mathcal{G}(e) = \Pi_e = G_e$ respectivamente (onde um dos sentidos das inclusões é dada pela afirmação acima). Do mesmo modo pela versão profinita da teoria de Bass-Serre temos que $\widehat{\Pi}$ é o grupo fundamental de um grafo de grupos profinitos, isto é, $\widehat{\Pi} = \Pi_1(\mathcal{G}', \Gamma)$ com grupos de vértices e arestas $\mathcal{G}'(v) = \widehat{\Pi}_v = \widehat{G}_v$ e $\mathcal{G}'(e) = \widehat{\Pi}_e = \widehat{G}_e$ respectivamente e como a topologia sobre Π é eficiente temos que $\widehat{\Pi}$ é o completamento profinito de Π. E assim Π satisfaz as hipótese do lema.

Agora sendo Γ um subgrafo próprio de $S(G)/G$ então pela hipótese de indução aplicada para o grupo Π temos que os grupos de arestas são distinguidos sob conjugação em Π, e como $g^{\delta^{-1}} \in \widehat{\Pi}_{\delta e'}$, e $\delta \in \widehat{\Pi}$ temos que g é conjugado em Π para um elemento de $\Pi_{\delta e'}$ e portanto podemos assumir que $g \in G_{\delta e'}$. Agora $\tau(g)^{\tau(\gamma)} \in \tau(\widehat{G_e})$ e pela proposição (1.1.8) temos que subgrupos finitamente gerados de K são distinguidos sob conjugação. Logo $\tau(g)$ é conjugado a um elemento de $\tau(G_e)$. Como $\tau|_{G_{v_0}}$ é um isomorfismo, g é conjugado em G_{v_0} a um elemento de G_e como desejado. □

Teorema 2.2.2. *Seja G um grupo livre de torção que não contém subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado. Seja H um subgrupo de G de índice finito tal que:*

1. *H separável sob conjugação;*

2. *para todo $h \in H$, $C_H(h)$ é abeliano livre de posto no máximo* 2.

Então G é separável sob conjugação.

Demonstração: Sejam $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_2 = g_1^{\gamma}$, para algum $\gamma \in \widehat{G}$. Como H tem índice finito em G, temos que $g_1^m, g_2^m \in H$, onde $m = |G : H|$.

Observe que $\widehat{G} = G\widehat{H}$, e então podemos escrever $\gamma = d\gamma_0$, onde $\gamma_0 \in \widehat{H}$ e $d \in G$. Logo $g_2^m = (g_1^{\gamma})^m = (g_1^m)^{\gamma} = (g_1^m)^{d\gamma_0}$. Agora substituindo g_2 por conjugado em G, podemos supor que $\gamma \in \widehat{H}$. Assim temos g_1^m e g_2^m são conjugados em $\widehat{H}$, e como H é separável sob conjugação existe $\gamma_1 \in H$ tal que $g_1^m = (g_2^{\gamma_1})^m$. Portanto $g_1^m = (g_2^m)^{\gamma_1}$ e assim temos que g_1^m e g_2^m são conjugados em H. E desta forma podemos supor que $g_1^m = g_2^m$. Sejam $N = \langle g_2^m \rangle$ e $K = \langle g_1, g_2 \rangle$, temos que K centraliza N. E como $C_G(N)$ é virtualmente abeliano livre de posto no máximo 2, então K é virtualmente abeliano livre de posto no máximo 2. Se K é virtualmente cíclico e sendo K livre de torção então pelo teorema 3.5 de [D-80] K é cíclico e isto implica que $g_1 = g_2$.

Suponha agora que K é virtualmente abeliano livre de posto 2. Escolha A um grupo abeliano normal de índice finito livre de torção, onde sem perda de generalidade podemos assumir que g_1^m é gerador de A. Seja $\varphi : K \longrightarrow Aut(A) = GL_2(\mathbb{Z})$ o homomorfismo induzido pela ação de K sobre A. Como N é central em K, $\varphi(K)$ é um subgrupo finito do grupo das matrizes triangulares superiores e com primeira coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo o outro elemento da diagonal destas matrizes tem que ser 1 ou -1. Como a imagem de K em $GL_2(\mathbb{Z})$ é finita e uma matriz da forma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem ordem infinita, qualquer elemento de $\varphi(K)$ tem a forma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observando que $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, concluimos que a imagem de K é um grupo cíclico de ordem no máximo 2. Logo o centralizador $P = C_K(A)$ de A em K tem índice 2. Como $A \leq Z(P)$, temos que $[P, P]$ é finito e sendo P livre de torção temos que P é abeliano. Logo podemos assumir que $P = A$. Neste caso conjugando a imagem de K em $GL_2(\mathbb{Z})$ se necessário (ou seja, escolhendo outra base para A) podemos assumir que a imagem de K é trivial ou gerada pela matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De fato, conjugando a matriz

$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ por uma matriz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 2x-y \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, logo obtemos a primeira matriz no caso de y ser par, e a segunda no caso de y ser ímpar e para este caso temos que esta matriz é conjugada da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

No primeiro caso K é um grupo diedral generalizado. De fato, seja z um elemento da imagem inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, e como z centraliza z^2 então z^2 é uma potência de g_1^m. Mas esta potência pode ser somente 1 ou -1, porque caso contrário fatorizando z^2 vemos que $K/\langle z^2\rangle$ tem os seguintes geradores $g_1^m\langle z^2\rangle$, $\alpha\langle z^2\rangle$ e $z\langle z^2\rangle$ em termos dos geradores g_1^m, α de A, portanto temos um grupo 3-gerado, exceto quando z^2 é g_1^m ou $(g_1^m)^{-1}$. Logo K tem somente uma relação $\alpha^z = \alpha^{-1}$, onde α é o gerador do grupo A invertido pela matriz dada acima. Portanto K é um grupo diedral generalizado que pela hipótese do teorema é descartado.

No segundo caso, K é um grupo com torção. De fato, seja z um elemento da imagem inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e logo existem geradores x e y de A que são trocados pela ação de z, isto é $x^z = y$ e $y^z = x$. Como z centraliza z^2 então $z^2 = (xy)^n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Mas $(zx^{-n})^2 = zx^{-n}zx^{-n} = z^2(yx)^{-n} = 1$, isto é, zx^{-n} tem ordem 2. Portanto K tem torção e sendo G livre de torção este caso também é descartado.

Logo K é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e isto implica que $g_1 = g_2$. $\square$

Proposição 2.2.3. *Seja H um subgrupo de $G = \Gamma_d$ de índice finito livre de torção para $d = 1, 2, 7, 11$, então H é separável sob conjugação.*

Demonstração: Sejam $S(G)$ e $S(\widehat{G})$ as árvores associadas às decomposições de G e $\widehat{G}$ (veja o exemplo (1.1.4)). Como a topologia profinita sobre G é eficiente, $S(G)$ é imersa em $S(\widehat{G})$ veja (1.3.16).

Pelo lema (2.1.2) os centralizadores dos elementos não triviais de G são grupos abelianos livres de posto no máximo 2. Logo tendo em vista o teorema (2.2.2) basta provar a proposição para um subgrupo de índice finito apropriado de H. Recordamos que G age sobre a árvore $S(G)$, que foi definida antes do teorema (1.2.16). Para nós o subgrupo apropriado é um subgrupo que satisfaz as condições do lema (2.2.1), mostraremos agora a existência de tal subgrupo. Pelos lemas (4.2) e (4.3) de [W-Z-98] existe um grupo P virtualmente livre, um epimorfismo $\tau : G \to P$ tal que $\tau|_{G_v}$ é injetiva, para todo $v \in V(S)$ e $|P : \tau(G_v)| < \infty$. Como $S(G)/H$ é finito, então existe um número finito de órbitas Hv, $v \in S(G)$, consequentemente existe um número finito de estabilizadores de vértices em H a menos de conjugação. Agora como $[G : G_v] \leq \infty$ então sob o epimorfismo τ $[P : \tau(G_v)] \leq \infty$ e portanto $\tau(G_v)$ tem um número finito de conjugados em P. Logo $K := \bigcap_{v \in V(S)} \tau(H_v)$ tem índice finito em P (pois, $\tau(G_v)$ tem um número finito de conjugados em P) e a imagem inversa $L = \tau^{-1}(K) \cap H$ é o subgrupo desejado. De fato, $\tau|_{L_v}$ é um isomorfismo para K, pois $\tau(L_v) = \tau(L \cap H_v) = \tau(L)$, onde a última igualdade segue da definição de L. Assim de agora em diante assumimos que H satisfaz as hipóteses do lema (2.2.1).

Sejam $g_1, g_2 \in H$ tal que $g_2 = \gamma^{-1} g_1 \gamma$ para algum $\gamma \in \widehat{H}$. Mostraremos que g_1 e g_2 são conjugados em H. Separaremos a demonstração em dois casos.

$1^{\underline{0}}$ **Caso**: Suponhamos que g_1 é um elemento não hiperbólico. Logo pela proposição (1.3.17) g_2 é também não hiperbólico. Sendo H um subgrupo de índice finito em G, temos que S/H é finito. Agora g_1 é um elemento não hiperbólico temos que g_1 fixa um vértice v_1, e assim $g \in G_{v_1}$. Se tivermos que $\gamma \in \widehat{G}_{v_1}$, então $g_2 = g_1^{\gamma} \in \widehat{G}_{v_1}$. Como $\widehat{G}_{v_1} \cap H = G_{v_1} \cap H$, $g_1, g_2 \in G_{v_1} \cap H$ e $\gamma \in \widehat{G}_{v_1} \cap \widehat{H}$, e pelo item 6 da proposição (1.1.8) $\widehat{G}_{v_1} \cap \widehat{H} = \widehat{G_{v_1} \cap H}$. Note que G_{v_1} é um grupo virtualmente livre e finitamente gerado, segue que $G_{v_1} \cap H$ um subgrupo virtualmente livre e finitamente gerado de G_{v_1}, mas $G_{v_1} \cap H$ é separável sob conjugação, pelo item 2 da proposição (1.1.8). Logo existe $\gamma_1 \in G_{v_1} \cap H$ tal que $g_2 = g_1^{\gamma_1}$. Portanto g_1 e g_2 são conjugados em $H \cap G_{v_1}$.

Por outro lado, se $\gamma \notin \widehat{G}_{v_1}$ então pelo teorema (1.2.20) temos que $g_1 = \gamma g_2 \gamma^{-1} \in \widehat{G}_{v_1} \cap \gamma \widehat{G}_v \gamma^{-1} \leq \widehat{G}_e$, onde $e \in S(\widehat{G})$, v é um vértice de $S(G)$ estabilizado por g_2 e $v = d_0(e)$ ou $v = d_1(e)$. Agora $|G_v : H_v| < \infty$, então $\widehat{G}_v / \widehat{H}_v = G_v / H_v$ e deste modo $Star_{S(\widehat{G})}(v)/\widehat{H}_v = Star_{S(G)}(v)/H_v$, logo existe um elemento $\widehat{h} \in \widehat{H_v}$ tal que $e_1 = \widehat{h} e \in S(\widehat{G})$.

Portanto $g_1^{\widehat{h}^{-1}} \in \widehat{H_{e_1}}$ e como $\widehat{h} \in \widehat{H_v}$ e sendo H_{e_1} distinguido sob conjugação em H_v (pelo item 5 da proposição (1.1.8)), temos que existe $h \in H_v$ tal que $g_1^h \in H_{e_1}$. Logo podemos assumir que $g_1 \in H_e$, onde e é a aresta de $S(G)$. Do mesmo modo sendo g_2 um elemento não hiperbólico temos que g_2 fixa um vértice $v \in S(G)$, e com o mesmo argumento acima conjugando g_2 se necessário podemos assumir que g_2 estabiliza uma aresta e' de $S(G)$. Seja T um transversal de $S(G)/H$ em $S(G)$ que contém e. Escolhamos este conjugado de g_2 de modo que $e' \in T$. Considere a geodésica $[\gamma^{-1}e, e']$. Então g_2 estabiliza esta geodésica (teorema 2.8 de [Z-M-89]).

Seja $\mu : S(\widehat{G}) \to S(\widehat{G})/\widehat{H}$ o epimorfismo natural. Então $C = \mu([\gamma^{-1}e, e'])$ contém $\mu(e)$ e $\mu(e')$ e pela conexidade temos que C contém o caminho p entre $\mu(e)$ e $\mu(e')$. Seja m o comprimento do caminho p, mostraremos que conjugando g_2 por elementos de H podemos reduzir este caminho para um de comprimento 0, isto é, temos que $\mu(e)$ e $\mu(e')$ têm um vértice em comum.

Usaremos indução sobre m. Seja $\overline{e_0}$ uma aresta de p tal que um caminho de $\mu(e)$ a $\overline{e_0}$ tenha comprimento menor que m. Sendo $\overline{e_0}$ uma aresta de p temos que existe $e'_0 \in [\gamma e, e']$ tal que $\mu(e'_0) = \overline{e_0}$. Segue que existe $\delta \in \widehat{H}$ tal que $e_0 = \delta e'_0 \in T$. Assim temos que $g_2^{\delta^{-1}} \in \widehat{H}_{e_0}$ e $\delta \in \widehat{H}$ e como pelo lema (2.2.1) temos que os estabilizadores de arestas são distinguidos sob conjugação em H, e portanto H_{e_0} e distinguido sob conjugação em H, então conjugando g_2 por um elemento de H, se necessário podemos assumir que $g_2 \in H_{e_0}$, como queriamos.

Agora como $e, e' \in T$, pelo que foi demonstrado podemos assumir que g_1 e g_2 estão no mesmo estabilizador H_{v_1}.

Consideremos a restrição de $\tau : H \longrightarrow K$ como no lema (2.2.1), temos que g_1, g_2 são conjugados em $\widehat{H}$ e então aplicando o epimorfismo $\widehat{\tau} : \widehat{G} \to \widehat{K}$ temos que $\tau(g_1)$ e $\tau(g_2)$ são conjugados em $\widehat{K}$, e como K é separável sob conjugação existe $k \in K$ tal que $\tau(g_2) = \tau(g_1)^k$. Então existe $z \in H \cap G_{v_1}$ tal que $\tau(z) = k$ e portanto g_2 e g_2^z tem mesma imagem sob τ, e como $g_2, g_1^z \in G_{v_1} \cap H$ e $\tau|_{G_{v_1}}$ é injetiva temos que $g_2 = g_1^z$.

$2^{\underline{0}}$ **Caso**: Suponhamos agora que g_1, g_2 são elementos hiperbólicos. Como g_1 e g_2 são elementos hiperbólicos temos que g_1 e g_2 agem livremente sobre $S(G)$. Sejam T_{g_1} e T_{g_2} retas infinitas sobre a qual g_1 e g_2 agem livremente, conforme item (ii) da proposição (1.3.17). Seja e uma aresta qualquer de T_{g_1}. Como $g_2 = \gamma^{-1} g_1 \gamma$ temos que g_2 age livremente sobre $\gamma^{-1}\overline{T_{g_1}}$, agora pela proposição 2.2(ii) de [R-Z-96] temos que $\gamma^{-1}\overline{T}_{g_1} = \overline{T}_{g_2}$, e portanto $\gamma^{-1}e \in \overline{T}_{g_2} = \overline{\langle g_2 \rangle} T_2$, onde $T_2 = [v_2, g_2 v_2]$ para algum $v_2 \in \widehat{T_2}$. Tome $x \in \overline{\langle g_2 \rangle}$ tal que $x\gamma^{-1}e \in T_2$, então sobre a aplicação $\widehat{\mu} : \widehat{S} \to \widehat{S}/\widehat{H}$, induzida por μ temos que $x\gamma^{-1}e$ e e têm a mesma imagem, e como $\widehat{S}/\widehat{H} = S/H$ existe $g \in H$ tal que $x\gamma^{-1}e = ge$. Portanto $g^{-1}x\gamma^{-1}e = e$ e assim $\delta := g^{-1}x\gamma^{-1} \in \overline{H_e}$. Note que $g_1 = \gamma g_2 \gamma^{-1} = \gamma x^{-1} g_2 x \gamma^{-1} = \delta^{-1} g^{-1} g_2 g \delta$. Portanto substituindo g_2 por $g^{-1} g_2 g$ e γ por δ podemos supor que $\gamma \in \overline{H_e}$. Desta forma substituindo g_1 e g_2 por conjugados em H, podemos supor que T_{g_1} e T_{g_2} tem uma aresta em comum e.

Seja P uma geodésica de comprimento finito em T_{g_1} que possui e como uma de suas arestas e tal que $\gamma \in \overline{I}$, onde $I = \bigcap_{e \in E(P)} H_e$. Mostraremos que podemos assumir que γ pode ser substituído por um elemento que pertence ao fecho da interseção dos estabilizadores das arestas de uma geodésica que contém estritamente P. Seja $e_1 \in T_{g_1} \setminus P$ uma aresta conexa a P e seja v o vértice comum de e_1 e P. Seja $P^+ = P \cup \{e_1\}$, e tome $e_2 = \gamma e_1$ temos que $e_2 \in \overline{T}_{g_2}$, pois $\gamma \overline{T}_{g_1} = \overline{T}_{g_2}$. De fato, $e_2 \in T_{g_2}$. Com efeito, seja e' uma aresta de T_{g_2} e como e_1 e e_2 tem um vértice comum v, existe um caminho em $S(G)$ ligando e' a e_2. Como $e_2 = \gamma e_1 \in \gamma \overline{T}_{g_1} = \overline{T}_{g_2}$ e $e' \in \overline{T}_{g_2}$ segue que a geodésica $[e', e_2]$ está contida em $\overline{T}_{g_2}$. Agora observe que T_{g_2} é uma componente conexa de $\overline{T}_{g_2}$ considerada como grafo abstrato, em outras palavras os únicos vértices de $\overline{T}_{g_2}$ que estão à uma distância finita de T_{g_2} são os vértices de T_{g_2}, conforme o item (iii) da proposição (1.3.17), portanto $e_2 \in T_2$.

Agora e_1 e e_2 tem a mesma imagem sob a aplicação $\overline{\varphi}$ temos que existe $h \in H$ tal que $e_1 = he_2$, e sendo v o vértice comum de e_1 e e_2, $h \in H_v$. Logo, $e_2 = h^{-1}e_1 = h^{-1}\gamma^{-1}e_2$ e então temos que $\gamma_1 := h^{-1}\gamma^{-1} \in \overline{H_{e_2}}$.

Observe que se m é um vértice ou uma aresta em $S(G)$ então seu estabilizador H_m em H é conjugado de $H \cap G_1, H \cap G_2$ ou $H \cap K$ em G, logo é finitamente gerado e portanto pelo Teorema de Howson [H-54] temos que I é finitamente gerado. Então pelo item 4 da proposição (1.1.8) temos que $H_{e_2}I$ é fechado na topologia profinita de G_v, isto é, $\overline{H_{e_2}I} \cap H_v = H_{e_2}I$. Portanto $h = \gamma^{-1}\gamma_1^{-1} \in H_{e_2}I$, logo existe $h_1 \in I$, $h_2 \in H_{e_2}$ tal que $h = h_2h_1$. Seja $\gamma^+ = h_1^{-1}\gamma$, logo $\gamma^+ e_1 = h_1^{-1}\gamma e_1 = h^{-1}h_2e_2 = e_1$, e então $\gamma^+ \in \overline{H}_{e_1}$. Temos também que $\gamma^+ = h_1^{-1}\gamma \in \overline{I}$, e sendo I e H_{e_1} finitamente gerado em H_v pelo item 6 da proposição (1.1.8) $\gamma^+ \in \overline{\bigcap_{e \in P^+} H_e}$. Logo podemos substituir γ por γ^+ e g_2 por $h_1^{-1}g_2h_1$ e assumir que $\gamma \in \overline{\bigcap_{e \in P^+} H_e}$.

Seja P uma geodésica de T_{g_1} que contém e e g_1e. Seja $I = \bigcap_{e \in P} H_e$ e considere $D = I \cap g_1Ig_1^{-1}$, onde $g_1Ig_1^{-1}$ é a interseção dos estabilizadores do caminho g_1P. Pelo que que foi feito no parágrafo anterior podemos supor que $\gamma \in \overline{D}$ (usando $P^+ = P \cup g_1P$ e que se $e' = g_1e$, então $H_{e'} = g_1H_eg_1^{-1}$). Observe que I é ciclíco, já que em S a interseção de dois grupos de arestas é ciclíca, pelo lema 4.1 de [W-Z-98]. Agora provaremos que g_1 normaliza D. De fato, como D é fechado em G_1 e portanto em G e desta forma temos que $D = \bigcap_{N \trianglelefteq_f G} DN$. Assim basta mostrar que DN é normalizado por g_1, para cada $N \trianglelefteq_f G$. Com efeito, seja $N \trianglelefteq_f G$ e considere o quociente G/N, temos que o grupo DN/N possui o mesmo índice nos grupos IN/N e $I^{g_1}N/N$, já que estes grupos são conjugados. Se xN gera IN/N, então $(xN)^m$ e $(g_1N)(xN)^m(g_1N)^{-1}$ geram IN/N e desta forma concluimos que DN é normalizado por g_1.

Seja d um gerador de D e escreva $E = \langle d, g_1 \rangle$. Mostraremos que E é abeliano. De fato, se d não centraliza g_1, então $g_1 d g_1^{-1} = d^{-1}$ e portanto E é o grupo diedral generalizado. Logo basta mostrar que os grupos de Bianchi não possuem subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado. Com efeito, tome $x = g_1 d$ e $y = g_1^d$, então $E \cong \langle x, y | x^2 = y^2 \rangle$. Assim $E \leq C_G(x^2)$ que é um subgrupo abeliano pelo lema (2.1.1), e isto é uma contradição.

Logo d centraliza g_1 e consequentemente E é abeliano. Isto implica que $\overline{E}$ é abeliano e portanto $g_1 = g_2$ como o desejado. □

Teorema 2.2.4. *Seja G um grupo livre de torção comensurável com Γ_d, $d = 1, 2, 7, 11$, que não contém subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado. Então G é separável sob conjugação.*

Demonstração: Como G é comensurável com Γ_i, existem subgrupos isomorfos M, N de índice finito em G e Γ_i respectivamente. Agora pela proposição (2.2.3) temos que N é separável sob conjugação, e consequentemente M é separável sob conjugação. Então $M \leq G$ satisfaz todas as hipóteses do teorema (2.2.2), e portanto G é separável sob conjugação. □

Teorema 2.2.5. *Seja $G \leq GL_2(\mathbb{C})$ livre de torção comensurável com Γ_d, $d = 1, 2, 7, 11$. Então G é separável sob conjugação.*

Demonstração: Pelo teorema (2.2.4) é suficiente mostrar que G não possui subgrupos isomorfos ao grupo diedral generalizado. De fato, suponha que G possua um subgrupo H tal que $H \cong \langle x, y | x^2 = y^2 \rangle$, temos que $H \leq C_G(y^2)$ que é um subgrupo abeliano pelo lema (2.1.1), e isto é uma contradição. □

2.3 $SL_2(O_d)$ e $GL_2(O_d)$

O objetivo desta seção é demonstrar a separabilidade sob conjugação do grupo $SL_2(O_d)$ nos casos em que o anel O_d é euclideano e do grupo $GL_2(O_d)$, quando $d = 2, 7, 11$, o caso $d = 1$ é excluído devido o grupo $GL_2(O_1)$ ter a propriedade FA (isto é, se $X^G \neq \emptyset$ para qualquer árvore X sobre a qual G age) e portanto não possui uma decomposição não fictícia em produto livre com amalgamação ou HNN-extensão.

Lema 2.3.1. *Seja R um domínio de integridade de característica diferente de* 2.

(i) Se A e $-A$ são matrizes conjugadas de $SL_2(R)$, então A tem ordem 4;

(ii) Se A e $-A$ são matrizes conjugadas de $GL_2(R)$, então $det\,(A) = -1$ implica que A tem ordem 2 e $det\,(A) = 1$, implica que A tem ordem 4.

Demonstração: Seja F o corpo de frações de R, considere K o fecho algébrico de F. Dado $A \in SL_2(K)$ usando a fórmula canônica de Jordan podemos supor que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, onde $a, b, d \in R$ e $ad = 1$, e desta forma $d = a^{-1}$. Como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ e $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}$ são conjugados, então possuem raízes do polinômio característico iguais, assim temos que $a^{-1} = -a$, e portanto $a = \pm i$, digamos que $a = i$ e então A tem a forma $A = \begin{pmatrix} i & b \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Assim temos que A tem ordem 4.

No caso de $det\,(A) = -1$ temos $d = -a^{-1}$, logo $a^{-1} = a$ e então $a^2 = 1$, isto é $a = \pm 1$. Assim $A^2 = 1$. □

Lema 2.3.2. *Seja $g \in SL_2(O_d)$ um elemento que é conjugado ao elemento $-g$ no completamento $\widehat{SL_2(O_d)}$. Então g tem ordem 4. Se $g \in GL_2(O_d) \setminus SL_2(O_d)$ é um elemento conjugado a $-g$ no completamento $\widehat{GL_2(O_d)}$, então g tem ordem 2.*

Demonstração: Seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todos os ideais primos P tais que O_d/P tem característica $\neq 2$ (observe que P tem índice finito em O_d). Então $\bigcap_{P \in \mathbb{P}} P = 0$ e por isto o homomorfismo natural

$$\iota : SL_2(O_d) \longrightarrow \prod_{P\in\mathbb{P}} SL_2(O_d/P)$$

é injetivo. Como a imagem g_P de g em $SL_2(O_d/P)$ é conjugada a $-g_P$ pelo lema (2.3.1) g_P tem ordem 4, logo $\iota(g) = (g_P)$ tem ordem 4 e consequentemente g também possui ordem 4.

Para demonstrar a segunda parte observemos que o homomorfismo natural

$$j : GL_2(O_d) \longrightarrow \prod_{P\in\mathbb{P}} GL_2(O_d/P)$$

é injetivo também. Como g_P e $-g_P$ são conjugados em $GL_2(O_d/P)$ pelo lema (2.3.1) g_P tem ordem 2, logo $j(g) = (g_P)$ tem ordem 2 e consequentemente g também possui ordem 2. □

Teorema 2.3.3. *Sejam $SL_2(O_d)$, os grupos das matrizes 2×2 com coeficientes no anel O_d, onde O_d é o anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ e $d = 1, 2, 7, 11$. Então $SL_2(O_d)$ é separável sob conjugação.*

Demonstração: Sejam $g_1, g_2 \in SL_2(O_d)$ conjugados no completamento profinito $\widehat{SL_2(O_d)}$, isto é, existe $\widehat{x} \in \widehat{SL_2(O_d)}$ tal que

$$g_1^{\widehat{x}} = g_2 \tag{2.1}$$

Agora seja ψ a aplicação natural de $SL_2(O_d)$ em $PSL_2(O_d)$, que associa $g \mapsto \overline{g} = \{g, -g\}$, e observemos que $\overline{g_1}$ e $\overline{g_2}$ são conjugados em $PSL_2(O_d)$, pois $PSL_2(O_d)$ é separável sob conjugação, deste modo existe $\overline{x_1} \in PSL_2(O_d)$ tal que $\overline{g_2}^{\overline{x_1}} = \overline{g_1}$, novamente usando a aplicação ψ temos que

$$g_2^{x_1} = \pm g_1 \tag{2.2}$$

Substituindo-se a equação (2.2) em (2.1) obtemos que $g_1^{\widehat{x}x_1} = \pm g_1$. Se $g_1^{\widehat{x}x_1} = g_1$, então segue que g_1 e g_2 são conjugados em $SL_2(O_d)$.

Consideraremos agora o caso $g_1^{\widehat{x}x_1} = -g_1$. Então g_1 e $-g_1$ são conjugados no completamento $\widehat{SL_2(O_d)}$, logo pelo lema (2.3.2) g_1 tem ordem 4.

Considerando o epimorfismo $\psi : SL_2(O_d) \longrightarrow PSL_2(O_d)$, e sabendo-se que $PSL_2(O_d)$ tem uma decomposição como produto livre com amalgamação para $d = 1$ (e como HNN-extensão para $d = 2, 7, 11$), veja (1.1.4), temos que $SL_2(O_d)$ também se decompõe como produto livre com amalgamação $SL_2(O_1) = G'_1 *_{M'} G'_2$ e HNN-extensão $SL_2(O_d) = HNN(K'_d, M', t)$, $d = 2, 7, 11$, onde os grupos das decomposições são imagens inversas dos subgrupos das decomposições correspondentes de $PSL_2(O_d)$.

Como g_1 tem ordem 4, g_1 é conjugado para um dos fatores da decomposição (respectivamente para o grupo de base). Portanto podemos supor que g_1 está em um dos fatores, digamos em G'_1 (respectivamente em grupo de base K'_d). Se $\widehat{x}x_1 \in \widehat{G'_1}$ (respectivamente $\widehat{x}x_1 \in \widehat{K'_d}$), o resultado segue da separabilidade sob conjugação de G'_1 (respectivamente K'_d), pois estes grupos são virtualmente livres e finitamente gerados (veja item 1 da proposição (1.1.8)). Caso contrário, pelo teorema (1.2.20) temos que g_1 é conjugado em G'_1 (respectivamente em K'_d) para algum elemento de $\widehat{SL_2(\mathbb{Z})}$. Pelo item 5 da proposição (1.1.8) $SL_2(\mathbb{Z})$ é distinguido sob conjugação em G'_1 (respectivamente em K'_d), logo g_1 é conjugado para um elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$ em $SL_2(O_d)$. Observemos que os únicos elementos de ordem 4 a menos de conjugação em $SL_2(\mathbb{Z})$ são $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Então se $d = 1, 2, 11$ o elemento que conjuga g_1 para $-g_1$ é $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} w & 1 \\ 1 & -w \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} w-2 & -w-1 \\ -1-w & -w+2 \end{pmatrix}$ respectivamente, onde em cada caso $w = i$ se $d = 1$, $w = i\sqrt{2}$ se $d = 2$ e $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$ se $d = 11$.

Consideremos agora o caso $d = 7$. Pela proposição 4.3.4 [F-89] $SL_2(O_7)$ tem a seguinte apresentação

$$SL_2(O_7) = \langle A, T, U, J \mid A^2 = (AT)^3 = (U^{-1}A^{-1}UAT)^2 = J, J^2 = I, J \text{ central}, [T, U] = I \rangle,$$

onde $A = g_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Agora consideremos o quociente módulo o subgrupo normal gerado por $(AT)^2$ e U, assim obtemos um grupo cíclico de ordem 4 $\langle A \mid A^4 = I \rangle$, onde a imagem de A no quociente $PSL_2(O_7)$ é denotada pela mesma letra. Mas neste grupo quociente A não é conjugado a A^{-1}, logo g_1 não pode ser conjugado a g_1^{-1} em $\widehat{SL_2(O_7)}$, isto termina o caso $d = 7$. $\square$

Mostraremos agora que o grupo $GL_2(O_d)$ é separável sob conjugação para $d = 2, 7, 11$ seguindo o mesmo método da proposição (2.3.3), e para isto usaremos as decomposições em produto livre como amalgamação e HNN-extensão feita por B. Fine em [F-89] para os grupos de Bianchi $\Gamma_d = PSL_2(O_d)$ e obteremos decomposições em produtos livre com amalgamação para os grupos $PGL_2(O_d)$, onde $d = 1, 2, 7, 11$ e em seguida mostraremos que $PGL_2(O_d)$ é separável sob conjugação.

Proposição 2.3.4. *Os grupos $PGL_2(O_2)$, $PGL_2(O_7)$ e $PGL_2(O_{11})$ são produtos livres com amalgamação:*

1. $PGL_2(O_2) = G_1 *_M G_2$, *onde* $G_1 = S_4 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ e $G_2 = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$

2. $PGL_2(O_7) = G_1 *_M G_2$, *onde* $G_1 = S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_2$ e $G_2 = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$.

3. $PGL_2(O_{11}) = G_1 *_M G_2$, *onde* $G_1 = A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} S_3$ e $G_2 = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$.

Além disso, os grupos das decomposições acima são virtualmente livres.

Demonstração: 1. Usando o teorema 4.3.1 de B. Fine [F-89] temos a seguinte apresentação para o grupo $\Gamma_2 = \langle a, t, u \mid a^2 = (at)^3 = (u^{-1}aua)^2 = [t, u] = 1\rangle$. Seja $v = a^u$, e adicione v na apresentação de Γ_2 então temos

$$\Gamma_2 = \langle a, t, u, v \mid a^2 = (at)^3 = v^2 = (av)^2 = (vt)^3 = [t, u] = 1, u^{-1}au = v.\rangle$$

Desta forma Γ_2 é uma HNN-extensão com grupo base K_2

$$K_2 = \langle a, t, v | a^2 = v^2 = (av)^2 = (at)^3 = (vt)^3 = 1\rangle.$$

Sejam $s = at$ e $m = av$ então usando transformações de Tietze obtemos,

$$\begin{aligned} K_2 &= \langle a, m, s | a^2 = m^2 = (am)^2 = s^3 = (sm)^3 = 1\rangle \\ &= \langle a, m | a^2 = m^2 = (am)^3 = 1\rangle *_{\langle m\rangle} \langle s, m | s^3 = m^2 = (sm)^2 = 1\rangle \end{aligned}$$

assim $K_2 = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} A_4$. Observe que em K_2 o subgrupo gerado por $\langle a, t\rangle = \langle a, s\rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ é o grupo modular M, pois a e s estão em fatores diferentes de K_2 e interceptam o subgrupo amalgamado $\langle m\rangle$ trivialmente $\Big($isto segue de $(am)^2 = 1$ e $(sm)^3 = 1\Big)$. Analogamente o grupo gerado por $\langle t, v\rangle = \langle am, as\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Agora considere a aplicação que associa a cada matriz $A \in GL_2(O_2)$ o seu determinante

$$\begin{aligned} det : GL_2(O_2) &\to O_2^* \\ A &\mapsto det\, A \end{aligned}$$

onde $O_2^* = \{1, -1\}$ são os elementos inversíveis do anel O_2. Observe que esta aplicação é um homomorfismo e $Ker\,(det) = SL_2(O_2)$ e assim $SL_2(O_2)$ é um subgrupo normal de índice 2 de $GL_2(O_2)$. Como o centro de $GL_2(O_2)$ é $\pm I \in SL_2(O_2)$ temos que $PSL_2(O_2)$ é um subgrupo normal de índice 2 de $PGL_2(O_2)$.

As matrizes que os geradores representam são respectivamente:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\omega = i\sqrt{2}$, também temos

$$s = at = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v = a^u = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} -1 & -\omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin PSL_2(O_2)$, d é um elemento de ordem 2 e portanto temos

$$PGL_2(O_2) = PSL_2(O_2) \rtimes \langle d \rangle.$$

Observe que d deixa M invariante e isto segue dos cálculos

$$a^d = a,\ s^d = (s^{-1})^a$$

Agora tome $x = du = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin PSL_2(O_2)$, observemos que ainda temos $PGL_2(O_2) = PSL_2(O_2) \rtimes \langle x \rangle$ e mais temos que x deixa K_2 invariante e isto segue dos cálculos abaixo

$$a^x = am, s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, m^x = m.$$

Afirmamos que $PGL_2(O_2) = PSL_2(O_2) \rtimes \langle x \rangle$ é isomorfo ao produto amalgamado $(K_2 \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle)$. De fato, chamemos $G = PGL_2(O_2)$ e $H = (K_2 \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle)$, desta G e H tem as seguintes apresentações:

$$\begin{cases} G = \langle a, m, s, u, x \mid a^2 = m^2 = (am)^2 = s^3 = (sm)^3 = 1, a^u = am, (as)^u = as, x^2 = 1, \\ \qquad a^x = am, m^x = m, s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, u^x = u^{-1} \rangle \\ H = \langle a, m, s, x, d \mid a^2 = m^2 = (am)^2 = (s)^3 = (sm)^3 = x^2 = d^2 = 1, a^x = am, m^x = m, \\ \qquad s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, a^d = a, s^d = (s^{-1})^a \rangle \end{cases}$$

Agora G e H são isomorfos se conseguimos sair de um para outro através de um número finito de transformações de Tietze, assim observe que $u = d.x$, acrescentando u como novo gerador do grupo H, através da transformação T_1, temos

$$\begin{aligned} H &= \langle\, a, m, s, x, d, u \mid a^2 = m^2 = (a\,m)^2 = s^3 = (sm)^3 = x^2 = d^2 = 1, a^x = am, m^x = m, \\ &\qquad s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}},\ a^d = a,\ s^d = (s^{-1})^a, u = d\,x\rangle \\ &= \langle a, m, s, x, u, d \mid a^2 = m^2 = (am)^2 = s^3 = (sm)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, a^x = am, m^x = m, \\ &\qquad s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, a^{ux} = a, s^{ux} = (s^{-1})^a, d = u\,x\rangle. \end{aligned}$$

Usando agora a transformação de Tietze T_2 podemos deletar d e a relação $d = ux$ da apresentação de H e obtemos

$$\begin{aligned} H = \langle a, m, s, x, u \mid\ & a^2 = m^2 = (am)^2 = s^3 = (sm)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, a^x = am, m^x = m, \\ & s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, a^{ux} = a, s^{ux} = (s^{-1})^a\rangle. \end{aligned}$$

Temos que $(as)^u = a^u s^u$, mas $a^{ux} = a$ e $s^{ux} = (s^{-1})^a$ e assim $(as)^u = a^{x^{-1}}(s^{-1})^{ax^{-1}} = (s^{-1})^x a^x$ e sendo $s^x = (sm)^{-1}$, $a^x = am$, consequentemente temos $(as)^u = as$, e como $a^{ux} = a$ é equivalente à $a^u = a^{x^{-1}} = a^x = am$ então podemos acrescentar estas relações usando uma transformação de Tietze as relações de H, e obtemos

$$\begin{aligned} H = \langle a, m, s, x, u \mid\ & a^2 = m^2 = (am)^2 = s^3 = (sm)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, a^x = am, m^x = m, \\ & s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, a^{ux} = a, s^{ux} = (s^{-1})^a, (as)^u = as, a^u = am\rangle. \end{aligned}$$

E sendo as relações $s^{ux} = (s^{-1})^a$, $a^{ux} = a$ deriváveis das outras relações podemos deletá-las e então a apresentação de H fica como segue

$$\begin{aligned} H = \langle a, m, s, x, u \mid\ & a^2 = m^2 = (am)^2 = s^3 = (sm)^3 = (x)^2 = (ux)^2 = 1, a^x = am, m^x = m, \\ & s^x = ((sm)^{-1})^{a^{-1}}, (as)^u = as, a^u = am\rangle. \end{aligned}$$

E portanto temos que $H \cong G$.

$$PGL_2(O_2) = (K_2 \rtimes \langle x\rangle) *_M (M \rtimes \langle d\rangle). \tag{2.3}$$

Consideremos agora o fator $K_2 \rtimes \langle x\rangle$, seja que $y = dua = \begin{pmatrix} \omega & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, temos que y é um elemento de ordem 4 deixa A_4 e D_2 invariante e isto segue de

$$\begin{cases} s^y = (sm)^{-1} \\ m^y = m \\ a^y = a \end{cases}$$

e assim obtemos que

$$K_2 \rtimes \langle x\rangle = \langle A_4, y\rangle *_{\langle y\rangle} \langle D_2, y\rangle \tag{2.4}$$

De fato, chamemos $H_1 = K_2 \rtimes \langle x\rangle$ e $H_2 = \langle A_4, y\rangle *_{\langle y\rangle} \langle D_2, y\rangle$, note que $H_1/K_2 \cong \langle x\rangle$ e sendo $K_2 = \langle A_4, D_2\rangle$ temos que $H_2/K_2 = H_2/\langle A_4, D_2\rangle = \langle y\rangle K_2/K_2 \cong C_2$, desta forma temos $H_1 \cong H_2$.

Afirmamos que $\langle A_4, y\rangle$ é isomorfo a S_4 e $\langle D_2, y\rangle$ é isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De fato, provaremos a primeira afirmação, seja $H = \langle A_4, y\rangle$ temos que H é um subgrupo finito de ordem 24 ($|H| = \frac{|A_4|\,|\langle y\rangle|}{|\langle A_4\rangle|\cap|\langle y\rangle|} = 24$), seja $\psi : H \to S_4$ a aplicação dada por

$$\begin{cases} \psi(s) = x_1x_2 \\ \psi(m) = (x_3x_2x_1)^2 \\ \psi(y) = x_3x_2x_1 \end{cases}$$

onde x_1, x_2, x_3 são os geradores de $S_4 = \langle x_1, x_2, x_3 \,|\, x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = (x_1x_2)^3 = (x_2x_3)^3 = (x_1x_3)^3 = 1\rangle$. É fácil verificar que $\psi(\{s, m, y\})$ satisfazem as relações de H, então pelo teorema de Von Dycks conforme [J-90] temos que ψ estende-se a um único homormorfismo $\overline{\psi} : H \to S_4$, e como $x_1, x_3x_2x_1$ e $(x_3x_2x_1)^2$ geram S_4 temos que $\overline{\psi}$ é sobrejetiva e então $H/Ker\,\overline{\psi} \cong S_4$ e $|H : Ker\,\overline{\psi}| = |S_4| = 24$, e como a ordem de H é 24 segue que $Ker\,\overline{\psi} = 1$ e portanto $\overline{\psi}$ é um isomorfismo. E assim $\langle A_4, y\rangle \cong S_4$. Para provar o segundo isomorfismo, observemos que o grupo $H = \langle D_2, y\rangle$ é um grupo de ordem 8, e isto segue de

$$H/D_2 = D_2\langle y\rangle/D_2 = \langle y\rangle/D_2 \cap \langle y\rangle = \langle y\rangle/\langle y^2\rangle \cong C_2.$$

Além disso, H é uma extensão deD_2 por $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e lembrando que existem apenas cinco grupos de ordem 8, à saber, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, D_4, Q, como H é abeliano e é uma extensão de D_2 por C_2 temos que $H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Substituindo estes isomorfismos na equação (2.4) obtemos

$$K_2 \rtimes \langle x \rangle = \langle A_4, y \rangle *_{\langle y \rangle} \langle D_2, y \rangle = S_4 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Agora substituindo a equação acima em (2.3) obtemos que

$$PGL_2(O_2) \quad = \quad (S_4 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) *_M (M \rtimes \langle d \rangle).$$

Finalmente observamos que $M \rtimes \langle d \rangle = \langle a, s, y \,|\, a^2 = s^3 = d^2 = 1, a^d = a, s^d = (s^{-1})^a \rangle$ é isoformo ao grupo $D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$. De fato, isto é obtido adicionando-se a apresentação do grupo $M \rtimes \langle d \rangle$ o novo gerador $y = ad$ e então chegamos a seguinte apresentação $\langle a, s, y \,|\, a^2 = s^3 = (ay)^2 = y^2, s^y = s^{-1} \rangle = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$. E substituindo na equação (2.4) chegamos a decomposição desejada

$$PGL_2(O_2) = (S_4 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) *_M (D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3),$$

e isto conclui o caso $d = 2$.

2. Usando o teorema 4.3.1 de B. Fine [F-89] temos a seguinte apresentação para o grupo $\Gamma_7 = \langle\, a, t, u \mid a^2 = (at)^3 = (u^{-1}auat)^2 = [t, u] = 1 \,\rangle$. Sejam $v = a^u$, $s = at$ e $m = sv$, usando transformações de Tietze obtemos a seguinte apresentação para Γ_7

$$\Gamma_7 = \langle\ a, v, s, m, u \mid a^2 = s^3 = m^2 = v^2 = (am)^3 = (vs)^2 = 1, (as)^u = as, v = a^u, m = sv \,\rangle.$$

Desta forma Γ_7 é uma HNN-extensão com grupo base K_7 dado pela seguinte apresentação

$$\begin{aligned} K_7 &= \langle a, v, s, m | a^2 = s^3 = m^2 = v^2 = (am)^3 = (vs)^2 = 1, m = sv \rangle \\ &= \langle a, m | a^2 = m^2 = (am)^3 = 1 \rangle *_{\langle m = sv \rangle} \langle s, v | s^3 = v^2 = (vs)^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

e então que $K_7 = S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$, e em K_7 o subgrupo gerado por $\langle a, s \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = M$, já que a e s estão em fatores diferentes de K_7 e interseptam o subgrupo amalgamado $\langle m = sv \rangle$ trivialmente. Analogamente para o grupo gerado por $\langle v, as \rangle = \langle v, am \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned} det : GL_2(O_7) &\to O_7^* \\ A &\mapsto det\, A \end{aligned}$$

onde $O_7^* = \{1, -1\}$ são os elementos inversíveis do anel O_7. Observe que esta aplicação é um homomorfismo e $Ker\,(det) = SL_2(O_7)$ e assim $SL_2(O_7)$ é um subgrupo normal de índice 2 de $GL_2(O_7)$. Logo $PSL_2(O_7)$ é um subgrupo normal de índice 2 de $PGL_2(O_7)$.

As matrizes que os geradores representam são respectivamente:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\omega = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, também temos que

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\omega & -\omega^2 - 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} -1 & -\omega \\ -\omega + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin PSL_2(O_7)$, d é um elemento de ordem 2 e assim temos

$$PGL_2(O_7) = PSL_2(O_2) \rtimes \langle d \rangle,$$

além disso, temos que d deixa M invariante, e isto segue dos cálculos

$$a^d = a,\ s^d = (s^{-1})^a.$$

Agora tome $x = du = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin PSL_2(O_7)$, observemos que ainda temos $PGL_2(O_7) = PSL_2(O_7) \rtimes \langle x \rangle$, e mais x deixa K_7 invariante, e isto segue dos cálculos abaixo

$$a^x = v, s^x = (am)^{-1}, m^x = m, v^x = a.$$

Logo, K_7 é invariante, e temos que $K_7 = S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3^x$. Agora podemos fazer a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} PGL_2(O_7) &= PSL_2(O_7) \rtimes \langle x \rangle = HNN(K_7, M, u) \rtimes \langle x \rangle \\ &= (K_7 \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle). \end{aligned}$$

De fato, chamemos $H = (K_7 \rtimes \langle x\rangle) *_M (M \rtimes \langle d\rangle)$ e $G = HNN(K_7, M, u) \rtimes \langle x\rangle$, mostraremos que H e G são isomorfos. Os grupos H e G possuem as seguintes apresentações

$$\begin{cases} G = \langle a,m,u,v,s,x \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=1,(as)^u=as,a^u=v,m=sv, \\ \qquad\qquad x^2=1,a^x=v,m^x=m,s^x=(am)^{-1},v^x=a\rangle \\ H = \langle a,m,v,s,x,d \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=x^2=d^2=1,m=sv,a^x=v, \\ \qquad\qquad m^x=m,s^x=(am)^{-1},v^x=a,a^d=a,s^d=(s^{-1})^a\rangle \end{cases}$$

Portanto usando o teorema de Tietze G e H são isomorfos se conseguimos sair de uma apresentação para outra através de um número finito de transformações de Tietze. Assim observe que $u = d.x$, acrescentando u como novo gerador do grupo H, através da transformação T_1, temos

$$\begin{aligned} H &= \langle\, a,m,v,s,x,d,u \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=x^2=d^2=1,\ m=sv, \\ &\qquad a^x=v,m^x=m,s^x=(am)^{-1},v^x=a,a^d=a,s^d=(s^{-1})^a,\ u=dx\rangle \\ &= \langle a,m,v,s,x,d,u \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=x^2=(ux)^2=1,\ m=sv, \\ &\qquad a^x=v,m^x=m,s^x=(am)^{-1},v^x=a,a^{ux}=a,s^{ux}=(s^{-1})^a,d=ux\rangle. \end{aligned}$$

Usando agora a transformação de Tietze T_2 podemos deletar d e a relação $d = ux$ da apresentação de H e obtemos

$$\begin{aligned} H = \langle\, a,\ m,\ v,\ s,\ x,\ u \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=x^2=(ux)^2=1,\ m=sv, \\ a^x=v,\ m^x=m,\ s^x=(am)^{-1},\ v^x=a,a^{ux}=a,s^{ux}=(s^{-1})^a\rangle. \end{aligned}$$

Temos que $(as)^u = a^u s^u$, mas $a^{ux} = a$ e $s^{ux} = (s^{-1})^a$ e assim $(as)^u = a^{x^{-1}}(s^{-1})^{ax^{-1}} = (s^{-1})^x a^x$ e sendo $s^x = (am)^{-1}$, $a^x = v$ e $m = sv$, então temos $(as)^u = as$, agora como $a^{ux} = a$ é equivalente à $a^u = a^{x^{-1}} = a^x = v$ podemos acrescentar estas relações usando uma transformação de Tietze as relações de H, e obtemos

$$\begin{aligned} H = \langle\, a,\ m,\ v,\ s,\ x,\ u \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=x^2=(ux)^2=1,m=sv, \\ a^x=v,\ m^x=m,\ s^x=(am)^{-1},\ v^x=a,\ a^u=v,(as)^u=as,s^{ux}=(s^{-1})^a\,\rangle. \end{aligned}$$

E sendo $s^{ux} = (s^{-1})^a$ derivável das outras relações podemos deletá-la e então obtemos a apresentação de G, como segue

$$\begin{aligned} H = \langle\, a,m,v,s,x,u \mid a^2=s^3=m^2=v^2=(am)^3=(vs)^2=x^2=(ux)^2=1,m=sv,a^x=v, \\ m^x=m,s^x=(am)^{-1},v^x=a,a^u=v,(as)^u=as\,\rangle = G. \end{aligned}$$

Portanto temos,

$$PGL_2(O_7) = (K_7 \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle). \tag{2.5}$$

Vejamos agora que $K_7 \rtimes \langle x \rangle = (S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3^x) \rtimes \langle x \rangle = S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \langle x \rangle)$. Mostraremos a última igualdade e para isto chamemos $H_1 = (S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3^x) \rtimes \langle x \rangle$ e $H_2 = S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \langle x \rangle)$ agora observe que H_1 e H_2 possuem as seguintes apresentações

$$\begin{cases} H_1 = \langle a, m, x \mid a^2 = m^2 = (am)^3 = x^2 = 1, m^x = m \ \rangle \\ H_2 = \langle a, s, m, v, x \mid a^2 = s^3 = m^2 = v^2 = (am)^3 = (vs)^2 = x^2 = 1, m = sv, a^x = v, v^x = a, \\ \hfill s^x = (am)^{-1}, m^x = m \ \rangle. \end{cases}$$

Novamente mostraremos que H_1 e H_2 são isomorfos saindo da apresentação de H_1 para H_2 através de um número finito de transformações de Tietze. De fato, seja $s = ((am)^{-1})^x$ e $v = a^x$, e então adicionamos s e v aos geradores de H_1 e suas respectivas relações a apresentação de H_1 usando a transformação de Tietze T_1 e obtemos

$$H_1 = \langle a, m, x, s, v \mid a^2 = m^2 = (am)^3 = x^2 = 1, m^x = m, s^x = (am)^{-1}, v = a^x \ \rangle.$$

Note que as relações $s^3 = 1$, $v^2 = 1$, $(vs)^2 = 1$ e $m = sv$, são deriváveis respectivamente das relações $(am)^3 = 1$, $a^2 = 1$, $m^2 = 1$, $s = ((am)^{-1})^x$ e $v = a^u$ portanto podemos acrescentar as relações de H_1

$$H_1 = \langle \ a, m, x, s, v \mid a^2 = v^2 = m^2 = (vs)^2 = (am)^3 = s^3 = x^2 = 1, m^x = m, s^x = (am)^{-1}, \\ v = a^x, \ m = sv \ \rangle = H_2.$$

Assim temos $H_1 \cong H_2$. Vejamos agora que $M \rtimes \langle d \rangle = \langle a, s, y \,|\, a^2 = s^3 = d^2 = 1, a^d = a, s^d = (s^{-1})^a \rangle$ é isoformo ao grupo $D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$, para isto usaremos transformações de Tietze adicionando a apresentação do grupo $M \rtimes \langle d \rangle$ o novo gerador $y = ad$ e chegamos a seguinte apresentação $\langle a, s, y \,|\, a^2 = s^3 = (ay)^2 = y^2, s^y = s^{-1} \rangle = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$. Portanto usando a igualdade (2.5) temos

$$\begin{aligned} PGL_2(O_7) &= (K_7 \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle) \\ &= (S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) *_M (D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3) \\ &= (S_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_2) *_M (D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3), \end{aligned}$$

e com isto terminamos o caso $d = 7$.

3. A apresentação para o grupo de Bianchi Γ_{11} dada no teorema 4.3.1 de B. Fine [F-89] é:

$$\Gamma_{11} = \langle a, t, u \mid a^2 = (at)^3 = (u^{-1}auat)^3 = [t, u] = 1\rangle.$$

Sejam $v = a^u$, $s = at$ e $m = sv$, usando transformações de Tietze obtemos a seguinte apresentação para Γ_{11}

$$\Gamma_{11} = \langle a, v, s, m, u \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = 1, (as)^u = as, v = a^u, m = sv\rangle.$$

Desta forma Γ_{11} é uma HNN-extensão com grupo base K_{11}, onde

$$\begin{aligned} K_{11} &= \langle a, v, s, m | a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = 1, m = sv\rangle \\ &= \langle a, m | a^2 = m^3 = (am)^3 = 1\rangle *_{\langle m=sv\rangle} \langle s, v | s^3 = v^2 = (vs)^3 = 1\rangle, \end{aligned}$$

e então que $K_{11} = A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} A_4$. Em K_7 o subgrupo gerado por $\langle a, s\rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = M$, pois a e s estão em fatores diferentes de K_{11} e interseptam o subgrupo amalgamado $\langle m = sv\rangle$ trivialmente. Analogamente o grupo gerado por $\langle v, as\rangle = \langle v, asv\rangle = \langle v, am\rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned} det : GL_2(O_{11}) &\to O_{11}^* \\ A &\mapsto det\, A \end{aligned}$$

onde $O_{11}^* = \{1, -1\}$ são os elementos inversíveis do anel O_{11}. Observe que esta aplicação é um homomorfismo e $Ker\,(det) = SL_2(O_{11})$ e assim $SL_2(O_{11})$ é um subgrupo normal de índice 2 de $GL_2(O_{11})$. Logo $PSL_2(O_{11})$ é um subgrupo normal de índice 2 de $PGL_2(O_{11})$.

As matrizes que os geradores de $PSL_2(O_{11})$ representam são respectivamente:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\omega = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}$, também temos

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\omega & -\omega^2 - 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} -1 & -\omega \\ -\omega + 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seja $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin PSL_2(O_{11})$, d é um elemento de ordem 2 e portanto

$$PGL_2(O_{11}) = PSL_2(O_{11}) \rtimes \langle d \rangle.$$

Observemos que d deixa M invariante, e isto segue dos cálculos

$$a^d = a,\ s^d = (s^{-1})^a.$$

Agora tome $x = du = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin PSL_2(O_{11})$, observemos que ainda temos $PGL_2(O_{11}) = PSL_2(O_{11}) \rtimes \langle x \rangle$, e mais temos que x deixa K_7 invariante e isto segue dos cálculos abaixo

$$a^x = v, s^x = (am)^{-1}, m^x = m^{-1}, v^x = a.$$

Logo vemos que K_{11} fica invariante, e então temos que $K_{11} = A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} A_4^x$. Agora podemos fazer a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} PGL_2(O_{11}) &= PSL_2(O_{11}) \rtimes \langle x \rangle = HNN(K_{11}, M, u) \rtimes \langle x \rangle \\ &= (K_{11} \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle). \end{aligned}$$

De fato, chamemos $H = (K_{11} \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle)$ e $G = HNN(K_{11}, M, u) \rtimes \langle x \rangle$, mostraremos que H e G são isomorfos, H e G possuem as seguintes apresentações

$$\begin{cases} G = \langle a, m, u, v, s, x \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = 1, (as)^u = as,\ a^u = v,\ m = sv, \\ \qquad x^2 = 1, a^x = v, m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a \rangle \\ H = \langle a, m, v, s, x, d \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = d^2 = 1,\ m = sv,\ a^x = v, \\ \qquad m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a, a^d = a, s^d = (s^{-1})^a \rangle \end{cases}$$

Portanto usando o teorema de Tietze G e H são isomorfos se conseguimos sair de um para outro através de um número finito de transformações de Tietze, e para isto acrescentamos $u = dx$ como novo gerador do grupo H, através da transformação T_1, e a apresentação de H fica

$$\begin{aligned} H &= \langle\ a, m, v, s, x, d, u \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = d^2 = 1, m = sv, \\ &\qquad a^x = v, m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a, a^d = a, s^d = (s^{-1})^a, u = dx \rangle \\ &= \langle\ a, m, v, s, x, d, u \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, m = sv, \\ &\qquad a^x = v, m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a, a^{ux} = a, s^{ux} = (s^{-1})^a, d = ux \rangle. \end{aligned}$$

Usando agora a transformação de Tietze T_2 podemos deletar d e a relação $d = ux$ da apresentação de H e obtemos

$$H = \langle a, m, v, s, x, u \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, m = sv, a^x = v,$$
$$m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a, a^{ux} = a, s^{ux} = (s^{-1})^a \rangle.$$

Temos que $(as)^u = a^u s^u$, mas $a^{ux} = a$ e $s^{ux} = (s^{-1})^a$ e assim $(as)^u = a^{x^{-1}}(s^{-1})^{ax^{-1}} = (s^{-1})^x a^x$ e sendo $s^x = (am)^{-1}$, $a^x = v$ e $m = sv$, obtemos que $(as)^u = as$, como $a^{ux} = a$ é equivalente à $a^u = a^{x^{-1}} = a^x = v$, temos que podemos acrescentar estas relações usando uma transformação de Tietze as relações de H, e então

$$H = \langle a, m, v, s, x, u \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, m = sv, a^x = v,$$
$$m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a, a^u = v, (as)^u = as, s^{ux} = (s^{-1})^a \rangle.$$

E sendo $s^{ux} = (s^{-1})^a$ derivável das outras relações podemos deletá-la e então obtemos a apresentação de G como segue

$$H = \langle a, m, v, s, x, u \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = (ux)^2 = 1, m = sv, a^x = v,$$
$$m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v^x = a, a^u = v, (as)^u = as, \rangle = G.$$

Logo temos,

$$PGL_2(O_{11}) = (K_{11} \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle). \tag{2.6}$$

Vejamos agora que $K_{11} \rtimes \langle x \rangle = (A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} A_4^x) \rtimes \langle x \rangle = A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \langle x \rangle)$. Mostraremos a última igualdade e para isto chamemos $H_1 = (A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} A_4^x) \rtimes \langle x \rangle$ e $H_2 = A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} \Big(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \langle x \rangle\Big)$. Agora observe que H_1 e H_2 possuem as seguintes apresentações

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle a, m, x \mid a^2 = m^3 = (am)^3 = x^2 = 1, m^x = m^{-1} \rangle \\ H_2 &= \langle a, s, m, v, x \mid a^2 = s^3 = m^3 = v^2 = (am)^3 = (vs)^3 = x^2 = 1, m = sv, a^x = v, v^x = a, \\ &\qquad s^x = (am)^{-1}, m^x = m \rangle \end{aligned}$$

Novamente mostraremos que H_1 e H_2 são isomorfos saindo da apresentação de H_1 para H_2 através de um número finito de transformações de Tietze. De fato, seja $s = ((am)^{-1})^x$ e

$v = a^x$, e então adicionamos s e v aos geradores de H_1 e suas respectivas relações a apresentação de H_1 usando a transformação de Tietze T_1 e obtemos

$$H_1 = \langle a, m, x, s, v \mid a^2 = m^3 = (am)^3 = x^2 = 1, m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, v = a^x \rangle$$

Note que as relações $s^3 = 1$, $v^2 = 1$, $(vs)^3 = 1$ e $m = sv$, são deriváveis respectivamente das relações $(am)^3 = 1$, $a^2 = 1$, $m^3 = 1$, $s = ((am)^{-1})^x$ e $v = a^u$ portanto podemos acrescentar as relações de H_1

$$H_1 = \langle a, m, x, s, v \mid a^2 = v^2 = m^3 = (vs)^3 = (am)^3 = s^3 = x^2 = 1, m^x = m^{-1}, s^x = (am)^{-1}, \\ v = a^x, m = sv \rangle = H_2.$$

E temos então $H_1 \cong H_2$. Agora note também que $M \rtimes \langle d \rangle = \langle a, s, d \,|\, a^2 = s^3 = d^2 = 1, s^d = (s^{-1})^a \rangle = \langle a, s, y \,|\, a^2 = s^3 = (ay)^2 = y^2 = 1, s^y = s^{-1} \rangle$, onde na última igualdade aplicamos transformações de Tietze adicionando o novo gerador $y = ad$ e desta forma $M \rtimes \langle d \rangle = D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3$. Logo da igualdade (2.6) temos

$$\begin{aligned} PGL_2(O_{11}) &= (K_{11} \rtimes \langle x \rangle) *_M (M \rtimes \langle d \rangle) \\ &= (A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) *_M (D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3) \\ &= (A_4 *_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} S_3) *_M (D_2 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S_3), \end{aligned}$$

e com isto terminamos o caso $d = 11$.

O fato que os grupos das decomposições são virtualmente livres segue do teorema 3.6 de [D-80]. □

Teorema 2.3.5. *O grupo projetivo geral linear $PGL_2(O_d)$ das matrizes 2×2 com coeficientes no anel O_d, onde $d =, 2, 7, 11$ é separável sob conjugação.*

Demonstração: Sejam $g_1, g_2 \in PGL_2(O_d)$ conjugados no seu completamento profinito $\widehat{PGL_2(O_d)}$, isto é, existe $\widehat{g} \in \widehat{PGL_2(O_d)}$ tal que

$$g_1^{\widehat{g}} = g_2. \tag{2.7}$$

Dividiremos em dois casos. No primeiro caso g_1 e g_2 tem ordem infinita. Como $PSL_2(O_d)$ tem índice 2 em $PGL_2(O_d)$, temos que $g_1^2, g_2^2 \in PSL_2(O_d)$, agora sendo $\widehat{PGL_2(O_d)} =$

$\widehat{PSL_2(O_d)}PGL_2(O_d)$ podemos escrever $\widehat{g} = g_0 d$, onde $g_0 \in \widehat{PSL_2(O_d)}$, $d \in PGL_2(O_d)$. Logo substituindo em (2.9) temos

$$(g_1^2)^{g_0} = (g_2^2)^d = (g_2^d)^2. \tag{2.8}$$

Desta forma g_1^2 e $(g_2^d)^2$ são conjugados em $\widehat{PSL_2(O_d)}$, e como $PSL_2(O_d)$ é separável sob conjugação existe $\gamma \in PSL_2(O_d)$ tal que $(g_1^2)^\gamma = (g_2^d)^2$, portanto $(g_1^2)^{\gamma d^{-1}} = g_2^2$ e assim g_1^2 e g_2^2 são conjugados em $PGL_2(O_d)$. Portanto podemos sem perda de generalidade supor que $g_1^2 = g_2^2$, então $g_1, g_2 \in C_{PGL_2(\mathbb{C})}(g_2^2) = C$ e pelo lema (2.1.1) C é abeliano, logo temos duas possibildades para o subgrupo $L = \langle g_1, g_2 \rangle$. A primeira L é livre de torção e neste caso $L \cong \mathbb{Z}$ e como $\mathbb{Z}$ tem a propriedade única da raiz temos que $g_1 = g_2$. A segunda possibilidade é que $g_2 = g_1 x$, onde $x \in PGL_2(O_d)$ é um elemento de ordem 2, usando a forma canônica de Jordan temos que a menos de conjugação em $GL_2(\mathbb{C})$, x tem a forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Agora módulo o centro restam apenas as possibilidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Como g_1 comuta com x pelo lema (2.1.1) temos que a menos de conjugação em $GL_2(\mathbb{C})$, g_1 é uma matriz diagonal $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, com autovalores $a \neq b$. Segue que o segundo autovalor de $g_2 = g_1 x$ difere do segundo autovalor de g_1 por $-1, i$ ou $-i$. Agora $g_2 = g_1 x$ e g_1 são conjugados em $\widehat{PGL_2(O_d)}$ e portanto são conjugados em cada quociente finito. Então escolhemos um ideal primo P tal que $-1, i$ e $-i$ são diferentes de 1 módulo P. Logo $g_1 x$ e g_1 não podem ser conjugados no quociente finito $GL_2(O_d/P)$ e portanto em $PGL_2(O_d/P)$. Isto contradiz o fato de g_1x e g_1 serem conjugados em $\widehat{PGL_2(O_d)}$.

Agora trataremos o segundo caso em que g_1 e g_2 tem ordem finita, então temos que g_1 e g_2 são conjugados para os fatores. E portanto podemos considerar as possibilidades:

Se $g_1, g_2 \in PSL_2(O_d)$, então como $\widehat{PGL_2(O_d)} = \widehat{PSL_2(O_d)}PGL_2(O_d)$ temos que $\gamma = \delta\gamma'$, onde $\gamma' \in \widehat{PSL_2(O_d)}$ e $\delta \in PGL_2(O_d)$. Assim $g_2 = g_1^{\gamma} = g_1^{\delta\gamma'}$ e logo podemos assumir que $\gamma \in \widehat{PSL_2(O_d)}$ e como $PSL_2(O_d)$ é separável sob conjugação o resultado segue.

Logo podemos assumir que $g_1, g_2 \notin PSL_2(O_d)$. Se g_1 e g_2 não pertencem a G_i, para $i = 1, 2$ fixo, ou $\gamma \notin \widehat{G_i}$, então pelo teorema (1.2.20) g_1, g_2 são conjugados em $\widehat{PGL_2(O_d)}$ a elementos de $\widehat{M} = \widehat{PSL_2(\mathbb{Z})}$ e portanto têm determinante 1 módulo qualquer ideal não trivial de O_d. Logo eles pertencem a $PSL_2(O_d)$, o que contradiz nossa hipótese. Assim $g_1, g_2 \in G_i$ e $\gamma \in \widehat{G_i}$ e o resultado segue da separabilidade sob conugação dos G_i's. $\square$

Teorema 2.3.6. *O grupo geral linear $GL_2(O_d)$ das matrizes 2×2 com coeficientes no anel O_d, onde $d = 2, 7, 11$ é separável sob conjugação.*

Demonstração: Sejam $g_1, g_2 \in GL_2(O_d)$ conjugados no seu completamento profinito $\widehat{GL_2(O_d)}$, isto é existe $\widehat{x} \in \widehat{GL_2(O_d)}$ tal que

$$g_1^{\widehat{x}} = g_2. \tag{2.9}$$

Agora seja ψ a aplicação natural de $GL_2(O_d)$ em $PGL_2(O_d)$, que associa $g \mapsto \overline{g} = \{g, -g\}$, e observemos que $\overline{g_1}$ e $\overline{g_2}$ são conjugados em $PGL_2(O_d)$, pois $PGL_2(O_d)$ é separável sob conjugação pelo teorema (2.3.5), deste modo existe $\overline{x_1} \in PGL_2(O_d)$ tal que $\overline{g_2}^{\overline{x_1}} = \overline{g_1}$, novamente usando a aplicação ψ temos que

$$g_2^{x_1} = \pm g_1. \tag{2.10}$$

Substituindo-se a equação (2.10) em (2.9) obtemos que $g_1^{\widehat{x}x_1} = \pm g_1$. Se $g_1^{\widehat{x}x_1} = g_1$, então segue que g_1 e g_2 são conjugados em $GL_2(O_d)$.

Agora se $g_1^{\widehat{x}x_1} = -g_1$, então temos que g_1 e $-g_1$ são conjugados no completamento $\widehat{GL_2(O_d)}$, e pelo lema (2.3.2) g_1 tem ordem 2 ou 4, e além disso, os elementos de ordem 2 ficam fora de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Considerando o epimorfismo $\psi : GL_2(O_d) \longrightarrow PGL_2(O_d)$, e sabendo-se que $PGL_2(O_d)$ tem um decomposição como produto livre com amalgamação para $d = 2, 7, 11$ pela proposição (2.3.4), temos que $GL_2(O_d)$ também se decompõe como produto livre com amalgamação $GL_2(O_d) = G'_1 *_{M'} G'_2$, onde os grupos da decomposição são imagens inversas dos subgrupos da decomposição correspondente de $PGL_2(O_d)$.

Como g_1 tem ordem 2 ou 4, g_1 é conjugado para um dos fatores da decomposição. Portanto podemos supor que g_1 está em um dos fatores, digamos em G'_1. Se $\widehat{x}x_1 \in \widehat{G'_1}$, o resultado segue da separabilidade sob conjugação de G'_1. Caso contrário, pelo teorema (1.2.20) temos que g_1 é conjugado em G'_1 para algum elemento de $\widehat{GL_2(\mathbb{Z})}$. Pelo item 5 da proposição (1.1.8) $GL_2(\mathbb{Z})$ é distinguido sob conjugação em G'_1, logo g_1 é conjugado para um elemento de $GL_2(\mathbb{Z})$ em $GL_2(O_d)$.

Observemos que os únicos elementos de ordem 4 a menos de conjugação em $GL_2(\mathbb{Z})$ (veja [D-D-89]) são $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Então o elemento que conjuga g_1 para $-g_1$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Agora se g_1 é um elemento de ordem 2, então a menos de conjugação e sinal, g_1 é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (veja [D-D-89]) e portanto g_1 é conjugado para $-g_1$ por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, respectivamente. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[B-M-S-67] Bass, H., Milnor, J., Serre, J. P., *Solution of the Congruence Subgroup Problem for* SL_n*,* $n \geq 3$*,* Sp_{2n} $(n \geq 2)$, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **33** (1967) 59-137.

[B-65] Blackburn, N., *Conjugacy in Nilpotent Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **16** (1965) 143-148.

[Ba-65] Bausmslag, G., *Residual Nilpotence and Relations in Free Groups*, J. Algebra, **2** (1965) 271-282.

[D-80] Dicks, W., *Groups, Trees and Projective Modules*, Lecture Notes in Mathematics, No. 790, Springer-Verlag, 1980.

[D-D-89] Dicks, W., Dunwoody, M. J., *Groups Acting on Graphs*, Cambrige Univ. Press., Cambrige, 1989.

[Dy-79] Dyer, J. L., *Separating Conjugates in Amalgamated Free by Finite Groups*, J. London Math. Soc., 2, **20** (1979) 215-222.

[Dy-80] Dyer, J. L., *Separating Conjugates in Amalgamated Free Products and HNN extensions*, J. Australian Math. Soc. **29** (1980) 35-51.

[F-89] Fine, B., *Algebraic Theory of the Bianchi Groups*, Marcel Dekker, 1989.

[F-R-90] Fine, B., Rosenberger, G., *Conjugacy separability of Fuchsian groups and related questions*, Contemp. Math.,**109**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[Fo-76] Formanek, *Conjugacy Separability in Polycyclic Groups*, J. Algebra, **42** (1976) 1-10.

[G-R-73] Gildenhuys, D., Ribes, L., *A Kurosh Subgroup Theorem for Free Pro-$\mathcal{C}$ Products of Pro-$\mathcal{C}$ Groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **186** (1973) 309-329.

[H-49] Hall, M., *Coset Representations in Free Groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949) 421-432.

[H-54] Howson, A. G., *On Intersection of Finitely Generated Free Groups*, J. London Math. Soc., **29** (1954) 428-466.

[J-90] Johnson, D. L., *Presentations of Groups*, London Mathematical Society, Student Texts, 15, 1990.

[L-S-77] Lyndon, R. C., Schupp, P. E, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 1977.

[L-82] Lubotzky, A., *Free Quotions and Congruence Kernel of SL_2*, J. of Algebra, **77** (1982) 411-418.

[L-R-2004] Long, D. D., Reid, A. W., *Subgroup Separability and Virtual Retractions of Groups*, Preprint, 23pp.

[M-58] Mal'cev, A. I., *On Homormorphisms onto finite groups*, Uchen. Zap. Ivanovskogo Gos. Ped. Inst., **18** (1958) 40-60.

[N-92] Niblo, G. A., *Separability Properties of Free Groups and Surface Groups*, J. Pure Appl. Algebra, **78** (1992) 77-84.

[R-69] Remeslennikov, V. N., *Conjugacy in Polycyclic Groups*, Algebra and Logic, **8** (1969) 404-411.

[R-71] Remeslennikov, V. N., *Groups that are Residually finite with respect to Conjugacy*, Siberian Math. J., **12** (1971) 783-792.

[R-T-V-95] Raptis, E., Talelli, O., Varsos, D., *On Finiteness Conditions of Certain Graphs of Groups*, International Journal of Algebra and Computation, **5** (1995) 719-729.

[R-S-Z-98] Ribes, L., Segal, D., Zalesskii, P. A., *Conjugacy Separability And Free Products of Groups with Cyclic Amalgamation*, J. London Math. Soc., 2, **57** (1998) 609-628.

[R-Z-96] Ribes, L., Zalesskii, P. A., *Conjugacy Separability of Almagamated Free Products of Groups*, Journal of Algebra, **179** (1996) 751-774.

[R-Z-96] Ribes, L., Zalesskii, P. A., *On the Profinite Topology of a Free Group*, Bull. London Math. Soc., **25** (1993) 37-43.

[S-70] Serre, J.P., *Le Probleme de Groupes de Congruence pour SL_2*, Ann. of Math., **92** (1970) 489-657.

[S-77] Serre, J.P., *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 1977.

[St-70] Stebe, P. F., *A Residual Property on Certain Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **26** (1970) 37-42.

[T-95] Tang, C. Y., *Conjugacy Separability of Generalized Free Products of Certain Conjugacy Separable Groups*, Canad. Math. Bull., **38** (1995) 120-127.

[W-Z-98] Wilson, J. S., Zalesskii, P. A., *Conjugacy Separability of Certain Bianchi Groups and HNN extensinos*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **123** (1998) 227-242.

[Z-M-89] Zalesskii, P. A., Mel'nikov, O. V., *Subgroups of Profinite Groups Acting on Trees*, Math. Sb., **63** (1989) 405-424.

[Z-M-90] Zalesskii, P. A., Mel'nikov, O. V., *Fundamental Groups of Graphs of Profinite Groups*, Algebra i Analiz, **1** (1989) 117-134.

[Z-92] Zalesskii, P. A., *Open Subgroups of Free Profinite Products*, Contemporary Mathematics, **131** (1992) 473-491.

[Z-89] Zalesskii, P. A., *A Geometrical Characterization of Free Constructions of Profinite Groups*, Siber. Math. J., **30** (1989) 73-84.

[Z-T-95] Zalesskii, P. A., Tavgen, O. I., *Closed Orbits and Finite Approximability With Respect to Conjugacy of Free Almagamated Products*, Mathematical Notes, **58** (1995) 1042-1048.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo