

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Resultados sobre Independência Assintótica e  
Cópulas Associadas a Distribuições Lévy Estáveis**

por

Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Brasília

**2006**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Resultados sobre Independência Assintótica e Cópulas Associadas a Distribuições Lévy Estáveis.

por

**Cira Etheowalda Guevara Otiniano**

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de  
Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**DOCTOR EM MATEMÁTICA**

Brasília, 26 de janeiro de 2006

Comissão Examinadora:

---

Profa. Chang Chung Yu Dorea - MAT/UnB (Orientadora)

---

Profa. Cátia Regina Gonçalves - MAT/UnB

---

Profa. Beatriz Vaz de Melo Mendes - IM / UFRJ

---

Prof. Gregorio Saravia Atuncar - EST/ UFMG

---

Prof. Pushpa Narayan Rathie - EST/ UnB

Para meus pais, Regina e Marcos  
e para meus irmãos :  
Beris, Felipe, Gladis, Janet e Victor.

# Agradecimentos

Agradeço à professora Chang, pela confiança em mim depositada, pela compreensão e pela orientação na área que eu desejava.

Ao Carlos, pelo amor e incentivo em cada momento.

À professora Cátia, pelo que aprendi de probabilidade durante suas aulas.

As minhas grandes amigas para toda a vida, Luciana, Sheila e Ticiane.

Aos meus colegas e amigos da UCB, Ana Paula, Daniele, Luciana, em especial ao Cláudio Manuel que me incentivou a fazer o doutorado, e ao Vilmondes pelo auxílio nos dois primeiros anos de doutorado.

Ao Ary, por toda ajuda e pelas enriquecedoras conversas.

Aos amigos que fiz durante o curso, pelo incentivo, compaherismo e momentos de Laser, Elida, Porfírio, Jaques, Euro, Adriana, Débora, Flávio, Ângelo, Marina, Kelcio e Jhames.

Aos professores e funcionários do Departamento, em especial a minha amiga e companheira de ginástica Tânia Sertão, ao Manuel, á Sandra, ao Luiz, ao Gari e ao Lucimar, pela atenção.

Aos professores, funcionários e amigos de Arrais, pelo apoio, em especial para Cásia, Fernanda, Leia, José Milton, José Fransicco e Sérgio.

À minha família, pela torcida para meu sucesso mesmo na distância.

Agradeço também aos membros da comissão examinadora, por aceitar o convite em fazer parte da banca e por todas as sugestões, correções e comentários, que melhoraram o trabalho.

# Resumo

Na modelagem de dados no campo de finanças é comum analisar se os dados podem ser aproximados por somas de pequenos termos e se as suas densidades empíricas exibem cauda pesada e assimetria. As caudas pesadas das distribuições empíricas e a assimetria sugerem o possível uso da distribuição Lévy estável  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$ . Neste trabalho estudamos esta modelagem quando temos que a distribuição  $F$  dos dados  $X_1, \dots, X_n$  pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$ ,  $F \in D(\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu))$ , o que permite o ajuste de tais dados estimando os parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma$ . Analisamos o comportamento caudal de funções elementares de variáveis aleatórias com distribuição Lévy estável, assim como o comportamento caudal de funções elementares de variáveis aleatórias cuja distribuição pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável e baseados nos estimadores do índice de estabilidade  $\alpha$  e do parâmetro de escala  $\sigma$  propomos resultados sobre independência. No estudo de cópulas associadas a distribuições Lévy estáveis mostramos resultados de independência assintótica. Ilustrações numéricas para retornos de taxas de câmbio de vários países são apresentadas.

Palavras chaves: distribuição Lévy estável; distribuição extremal; independência assintótica; cópula; taxas de câmbio.

# Abstract

A common practice in modelling financial data is analyse if the data can be approximate by sums of small terms and also if their empiric densities exhibit heavy tail and asymmetry. The heavy tails of the empiric distributions and the asymmetry suggest the possible use of a Lévy stable distribution,  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$ . In this work we study the case when the common distribution  $F$  of the data  $X_1, \dots, X_n$  belongs to the domain of attraction of a Lévy stable distribution  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$ ,  $F \in D(\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu))$ , which allows the adjustment of such data which estimating the parameters  $\alpha$  and  $\sigma$ . We analyse the tailed behavior of elementary functions of random variables with Lévy stable distributions. Also analyse the tailed behavior of elementary functions of random variables that belongs to the domain of attraction of a Lévy stable distributions and based on estimates of the stability parameter  $\alpha$  and scaling parameter  $\sigma$  we propose results for the independence. Results of asymptotic independence based on associated copulas as well numerical illustrations are also included.

Key words: Lévy stable distribution; extreme distribution; asymptotic independence; copula; exchange rates.

# Sumário

<b>Abreviações, símbolos, notações, expressões, etc.</b>	<b>1</b>
<b>Introdução.</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Introdução . . . . .	8
1.2 Distribuições Extremais e Distribuições de Variação Regular . . . . .	11
1.3 Distribuições Estáveis Univariadas . . . . .	15
1.3.1 Definições Equivalentes . . . . .	15
1.3.2 Propriedades de distribuições estáveis . . . . .	19
<b>2 Estimação dos Parâmetros da Distribuição Lévy Estável</b>	<b>21</b>
2.1 Introdução . . . . .	21
2.2 Distribuições Estáveis Versus Distribuições Extremais. . . . .	24
2.3 Estimação no caso Lévy Estável Simétrico . . . . .	28
2.4 Superposição de Distribuições Lévy Estáveis . . . . .	31
<b>3 Resultados sobre Independência para Distribuições de Lévy Estáveis</b>	<b>35</b>
3.1 Introdução . . . . .	35



3.2	Comportamento Caudal de Funções Elementares de Variáveis Aleatórias Lévy Estáveis . . . . .	37
3.3	Resultados sobre Independência . . . . .	49
3.4	Outros Resultados sobre Independência . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Cópuas Associadas a Distribuições Estáveis</b>	<b>57</b>
4.1	Propriedades Básicas das Cópuas . . . . .	59
4.2	Cópuas de Distribuições Estáveis . . . . .	62
4.3	Resultados sobre Independência Assintótica . . . . .	66
4.4	Cópuas Arquimedianas . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Ilustrações Numéricas</b>	<b>71</b>
5.1	Modelos . . . . .	71
5.2	Simulações . . . . .	73
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Introdução

Dados com caudas pesadas aparecem em diversos campos de aplicação tais como: finanças, telecomunicações, hidrologia e física da matéria condensada. A estreita relação entre as distribuições estáveis e distribuições de cauda pesada sugere o uso das mesmas na modelagem destes fenômenos.

A classe das distribuições estáveis foi caracterizada por Paul Lévy em 1924 no estudo de somas de termos independentes e identicamente distribuídos. As distribuições estáveis surgem como o limite de somas normalizadas (ou passeios aleatórios normalizados): dada uma seqüência  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  de variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com variância não necessariamente finita, o limite assintótico de

$$S(n) = X_1 + \dots + X_n$$

normalizada é uma distribuição estável  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ , mais precisamente, para  $a_n > 0$  e  $b_n$ ,

$$P\left(\frac{S(n) - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)(x), \quad (0.1)$$

onde o parâmetro  $0 < \alpha \leq 2$  é denominado índice de estabilidade e  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $\sigma > 0$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  são, respectivamente, parâmetros de simetria, escala e de locação.

A teoria clássica das distribuições estáveis formada pelas distribuições Gaussianas  $S_2(0, \sigma, \mu)$  e pelas distribuições Lévy estáveis (distribuições de cauda pesada)  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(\beta, \mu) = S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  para  $0 < \alpha < 2$ , pode ser encontrada em Gnedenko e Kol-

---

mogorov (1954), em Ibragimov e Linnik (1971) e em Feller(1971), entre outros.

Na análise de dados é comum observar se os dados podem ser aproximados por somas de pequenos termos e se as suas densidades empíricas exibem caudas pesadas e assimetria. Baseado nestas evidências empíricas, pode - se justificar o uso de distribuições Lévy estáveis  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$  para modelar tais dados.

No campo de finanças vários modelos têm sido propostos, por exemplo, em Mantegna e Stanley (1994, 1995) foi modelada uma dinâmica de preços da Bolsa de Valores de Nova Iorque com passeios aleatórios de Lévy e observou-se um claro desvio no sentido que caudas experimentais eram menos pesadas que o esperado da distribuição estável estimada. Os Vôos de Lévy Truncados (TLF, "The Truncated Lévy Flights ") foram introduzidos como uma tentativa de superar tal desvio. Os TLF simplesmente constituem distribuições estáveis com um ponto de corte pré selecionado  $l_c$ ,

$$\ell_{\text{TLF}}(\cdot) = K\ell_{\alpha,\sigma}(\cdot)1_{[-l_c,l_c]}(\cdot),$$

onde  $K$  é uma constante,  $\ell_{\alpha,\sigma}(\cdot)$  é a densidade de probabilidade da distribuição de Lévy estável  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}$  e  $1_A(\cdot)$  denota a função indicadora do conjunto  $A$ . Outros procedimentos de truncamento e suavização podem ser encontrados na literatura: Vôos de Lévy Gradualmente Truncados (GTLF, "Gradually Truncated Lévy Flight"), Gupta e Campanha (1999),

$$\ell_{\text{GTLF}}(\cdot) = K\ell_{\alpha,\sigma}(\cdot)\ell_{\text{gradual}}(\cdot),$$

onde para algum  $\eta > 0$ ,  $b > 0$ ,

$$\begin{aligned} \ell_{\text{gradual}}(x) &= 1 \text{ se } |x| \leq l_c, \\ \ell_{\text{gradual}}(x) &= \exp\left\{-\left(\frac{|x| - l_c}{b}\right)^\eta\right\} \text{ se } |x| > l_c. \end{aligned}$$

Vôos de Lévy Suavemente Truncados (STLF, "Smoothly Truncated Lévy flights"), Nakao (2000), que substitui  $\ell_{\text{gradual}}(\cdot)$  por

$$\ell_{\text{smooth}}(x) = |x|^{-(1+\alpha)} \exp\{-\rho|x|\}, \quad \rho > 0$$

e os Vãos de Lévy Exponencialmente Amortecidos (EDLF, "Exponentially Damped Lévy Flight), Matsushita, Rathie e da Silva (2003), que engloba todas as variações anteriores.

No trabalho de Dorea, Guevara Otiniano, Matsushita e Rathie (2005) ao invés da modelagem pela distribuição estável  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$  assume - se que a distribuição  $F$  dos dados  $X_1, \dots, X_n$  é tal que  $F \in D(\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu))$ , ou seja, temos a convergência dada por (0.1). Esta abordagem permitiu maior flexibilização no ajuste de dados ao estimar os parâmetros de interesse  $\alpha$  e  $\sigma$ , o índice de estabilidade usando o estimador clássico de Hill (1975), por

$$\hat{\alpha}_{n,k} = \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k)}} \right]^{-1} \quad (0.2)$$

e o parâmetro de escala por nosso estimador

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_n(0) \right]^{-1}, \quad (0.3)$$

quando  $k = k(n)$  é convenientemente escolhido e  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  são as estatísticas de ordem associadas.

Motivados por estes resultados analisaremos o comportamento caudal de funções elementares de variáveis aleatórias com distribuição Lévy estável, bem como o comportamento caudal de funções elementares de variáveis aleatórias cuja distribuição pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável. Usando nossos resultados sobre comportamento caudal e os estimadores de  $\alpha$  e  $\sigma$  proporemos resultados sobre independência. No estudo de cópulas associadas a distribuições Lévy estáveis mostraremos resultados de independência assintótica.

Assim, dividimos este trabalho em cinco capítulos.

Iniciamos o Capítulo 1 descrevendo classes de distribuições de cauda pesada. Na Seção 1.2 faremos uma breve revisão de distribuições maximais (distribuições limite de  $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ),

$$P \left( \frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq x \right) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_\gamma(x)$$

que podem ser de apenas três tipos,

$$\mathcal{G}_\gamma(x) = \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\},$$

a depender do índice caudal  $\gamma$  associado. Na Seção 1.3, apresentamos definições equivalentes e propriedades conhecidas de distribuições estáveis univariadas que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

No capítulo 2, apresentamos a demonstração detalhada dos resultados do trabalho de Dorea, Guevara Otiniano, Matsushita e Rathie (2005), onde são obtidos os estimadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\sigma}$  dados por (0.2) e (0.3) respectivamente. Para o bom entendimento destes estimadores estudamos na Seção 2.2 a relação entre o índice de estabilidade  $\alpha$  de  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}$  com o índice caudal  $\gamma$  de  $\mathcal{G}_\gamma$ . Em nossas Proposições 2.2.1 e 2.2.2 estabelecemos a relação entre os domínios de atração correspondentes.

Os estimadores  $\alpha$  e  $\sigma$  do índice de estabilidade e parâmetro de escala de uma distribuição Lévy estável  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}$ , para o caso simétrico serão detalhados na Seção 2.3. O Corolário 2.3.1 mostrará que

$$\hat{\alpha}_n \xrightarrow{p} \alpha \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma.$$

Na Seção 2.4, analisamos o caso em que a cauda direita e esquerda de uma distribuição Lévy estável tem comportamento distinto. Neste caso usando-se a técnica de superposição de distribuições estendemos o uso dos estimadores acima para situações assimétricas.

No Capítulo 3, Seção 3.2 obtemos resultados quanto ao comportamento caudal de funções elementares de variáveis aleatórias Lévy estáveis:  $\max\{X, Y\}$ ,  $X + Y$ ,  $XY$  e  $\min\{X, Y\}$ , nas Proposições 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6. Mostramos a Proposição 3.2.5 usando um resultado de Tang e Tsitsiashvili (2003). Na Seção 3.3 propomos resultados sobre independência. Para tal, sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores

aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$ ,

$$X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X} = S_{\alpha_X}(0, \sigma_X, 0) \quad e \quad Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y} = S_{\alpha_Y}(0, \sigma_Y, 0),$$

( $\stackrel{d}{=}$ : igualdade em distribuição).

Para  $\alpha = \alpha_X = \alpha_Y$  o primeiro resultado está baseado nas diferenças  $W_j = X_j - Y_j$  e nos estimadores do parâmetro de escala  $\hat{\sigma}_X$ ,  $\hat{\sigma}_Y$  e  $\hat{\sigma}_W$ . O nosso resultado mostrará que se  $X$  e  $Y$  são independentes então

$$\frac{\hat{\sigma}_W^\alpha}{\hat{\sigma}_X^\alpha + \hat{\sigma}_Y^\alpha} \xrightarrow{p} 1. \quad (0.4)$$

De modo que, quando são dependentes a convergência não se verifica.

Quando  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ , os nossos resultados estão baseados no produto  $XY$  ou no  $\min\{X, Y\}$  e em estimadores de Hill. Provamos que quando temos independência

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}}{\hat{\alpha}_{XY}} \xrightarrow{p} 1 \quad (0.5)$$

ou

$$\frac{\hat{\alpha}_X + \hat{\alpha}_Y}{\hat{\alpha}_{\min X, Y}} \xrightarrow{p} 1. \quad (0.6)$$

Na Seção 3.4, estendemos o uso dos estimadores (0.5) e (0.6) quando a condição  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$  é substituída por  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$ . Para o caso em que  $X$  e  $Y$  tem caudas pesadas com cauda esquerda e direita distintas, apresentamos um resultado sobre independência baseados no produto  $XY$ .

No Capítulo 4 definimos cópulas associadas a distribuições Lévy estáveis e obtemos resultados sobre tais cópulas que permitem introduzir resultados de independência assintótica.

Dado um vetor aleatório  $(X, Y)$  com distribuição conjunta  $F$  e com marginais  $F_X$  e  $F_Y$ , isto é,  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$ . A cópula associada  $C_F$  é uma função definida em  $[0, 1]^2$  que satisfaz

$$C_F(F_X(x), F_Y(y)) = F(x, y).$$

Na Seção 4.1 apresentamos as propriedades básicas das cópulas. Mostraremos que convenientemente interpretadas essas propriedades são consequência imediata de resultados clássicos e bastante conhecidos de função de distribuição e da transformada integral de probabilidade. De fato, uma cópula nada mais é que uma distribuição conjunta cujas marginais são distribuições uniformes.

Na Seção 4.2 apresentamos resultados quanto a cópulas associadas a distribuições bivariadas Lévy estáveis com marginais Lévy estáveis, isto é, cópulas associadas a  $\mathcal{L}$  com  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  onde  $\mathcal{L}_\alpha = S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'} = S_{\alpha'}(\beta', \sigma', \mu')$ ,  $0 < \alpha, \alpha' < 2$ . O nosso Teorema 4.2.1 mostrará que se  $\mathcal{L} \in D_{\max}(\mathcal{G})$ , onde  $\mathcal{G}$  é distribuição bivariada extremal, então a cópula  $C_{\mathcal{L}}$  satisfaz

$$uv - \epsilon \leq C_{\mathcal{L}}(u, v) \leq \min\{u, v\} + \epsilon.$$

Fazendo-se uso dos resultados de Dorea e Sastrosoweningjo (1987) e de Dorea e Miasaki (1993), mostramos nos Teoremas 4.2.2 e 4.2.3 resultados quanto a independência assintótica.

Na Seção 4.3 usamos estes teoremas para propor o resultado que garante independência assintótica entre as componentes dos vetores aleatórios i.i.d.  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  com distribuição comum  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  se

$$\frac{n \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq a_n, Y_j \leq a'_n)}{(n-1)^2} \geq 1 \quad \text{para } n \text{ grande}$$

onde  $a_n$  e  $a'_n$  satisfazem  $\mathcal{L}_\alpha(a_n) = 1 - \frac{1}{n}$ , e  $\mathcal{L}_{\alpha'}(a'_n) = 1 - \frac{1}{n}$ . O outro resultado requer  $u_n \uparrow \infty$  e

$$\frac{n \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq u_n, Y_j \leq u_n)}{[\sum_{j=1}^n 1(X_j \leq u_n)][\sum_{j=1}^n 1(Y_j \leq u_n)]} \geq 1.$$

Na Seção 4.4 exploramos a relação entre distribuições estáveis e as cópulas Ar-

---

quimedeanas. Veremos que a família de cópulas de Gumbell- Hougaard

$$C(u, v) = \exp \left\{ - [(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha} \right\}$$

pode ser gerada através da transformada inversa de Laplace da distribuição  $\mathcal{L}_\alpha$ .

No Capítulo 5 faremos ilustrações numéricas de distribuições Lévy estáveis estimadas usando (0.2) e (0.3) para conjuntos de dados correspondentes a retornos de taxas de câmbio do Brasil, México, Sri Lanka e Suíça. Também, calculamos (0.5) e (0.7) para testar a independência entre os retornos das taxas de câmbio do Brasil com o México, do Brasil com o Sri Lanka, e do Sri Lanka com o México. Tais estimativas as mostraremos na Tabela 4 de onde concluímos que os retornos das taxas de câmbio entre tais países são dependentes.

---



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Introdução

Análises empíricas mostram que dados de retornos financeiros seguem distribuições de cauda pesada. O estudo de distribuições de cauda pesada desempenha um papel central na análise de dados financeiros.

De um modo geral, dizemos que uma variável aleatória (v.a.)  $X$  com função de distribuição (f.d.)  $F$ ,  $X \stackrel{d}{=} F$ , com  $F(0) = 0$  tem cauda pesada à direita, se para  $\bar{F} = 1 - F$ ,

$$\frac{1}{EX} \int_{b_{0.2}}^{\infty} \bar{F}(x) dx \geq 0.8,$$

onde

$$\bar{F}(b_{0.2}) = 0.2 \quad e \quad EX = \int_{\mathbb{R}} x dF(x).$$

O que significa que por exemplo na prática atuarial, num portfólio de seguros, 20% dos reclamos são responsáveis por mais de 80% do total de reclamos. Veja Asmusem (2000).

Formalmente, uma v.a.  $X$  ou sua f.d.  $F$  **tem cauda pesada à direita** (à

---

esquerda) se sua função geradora de momentos

$$Ee^{sX} = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} dF(x) = \infty \text{ para todo } s > 0 \text{ (} s < 0 \text{)}.$$

Existem várias classes de distribuições de cauda pesada, entre elas temos:

Cauda Longa

$$\mathfrak{L} = \left\{ \bar{F} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} = 1, \quad t \in \mathbb{R} \right\};$$

Subexponenciais

$$\mathfrak{S} = \left\{ \bar{F} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} = n \right\} \quad (* : \text{convolução});$$

Variação Dominada e Cauda Longa

$$\mathcal{D} \cap \mathfrak{L} = \left\{ \bar{F} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} = 1, \quad t > 0 \right\};$$

Variação Regular Estendida ( $0 \leq a \leq b$ )

$$\mathcal{ERV}(-a, -b) = \left\{ \bar{F} : t^{-b} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} \leq t^{-a}, \quad t > 0 \right\}, \quad e$$

Variação Regular

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-a) &= \left\{ \bar{F} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} = t^{-a}, \quad t > 0 \right\} \\ &= \left\{ \bar{F} : \bar{F}(x) \sim x^{-a} L(x) \text{ para } L \text{ tal que } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = 1, \quad t > 0 \right\} \end{aligned}$$

onde  $L$  é chamada de **Função Lentamente Variante**. Denotamos por  $f(x) \sim g(x)$  ao limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

Note que a cauda à direita de uma f.d. de variação regular tem o comportamento de uma função potência.

As classes de distribuições de cauda pesada acima estão relacionadas como segue:

$$\mathcal{D} \cap \mathfrak{L} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}, \quad \mathcal{R}(-a) \subset \mathfrak{S} \text{ e } \mathcal{R}(-a) \subset \mathcal{D} \text{ sendo que } \mathcal{D} \not\subset \mathfrak{S} \text{ and } \mathfrak{S} \not\subset \mathcal{D}.$$

---

Veja, por exemplo, em Tang e Tsitsiashvili (2003) ou em Embrechts, Mikosch e Kluppelberg (1997).

Neste Capítulo apresentamos duas famílias de distribuições univariadas que tem uma ou ambas as caudas pesadas: distribuições extremas e distribuições estáveis.

Na Seção 1.2, fazemos uma breve revisão de distribuições maximais que são distribuições de cauda pesada caracterizadas pelo seu índice caudal com distribuições de variação regular e que também podem ser caracterizadas pelo correspondente índice de momentos. Como referências básicas para esta teoria, podemos citar: Galambos(1978); Resnick(1987) e Embrechts, Mikosch e Kluppelberg (1997).

Na Seção 1.3, apresentamos as definições e propriedades já conhecidas de distribuições estáveis univariadas que podem ser encontradas em Feller (1971), em Zorolatev (1983) ou em Samorodnitski (1994).

---

## 1.2 Distribuições Extremas e Distribuições de Variação Regular

Nesta seção fazemos uma breve revisão das distribuições maximais caracterizadas por Gnedenko (1943) em três tipos de distribuições paramétricas ou na distribuição de valor extremal generalizada, apresentamos também as conhecidas relações com distribuições de variação regular caracterizadas pelo índice caudal. Outra característica das distribuições extremas é o índice de momentos.

**Definição 1.2.1** *Uma distribuição não degenerada  $\mathcal{G}$  é chamada de **distribuição maximal** se existir  $a_n > 0$  e  $b_n$  tais que*

$$P\left(\frac{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow \mathcal{G}(x), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

onde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são cópias independentes de uma v.a.  $X$ . Neste caso, dizemos que a distribuição de  $X$  ou  $X$  está no domínio de atração de  $\mathcal{G}$  e o denotamos por  $X \in D_{\max}(\mathcal{G})$ .

Em 1943, Gnedenko formulou a classificação das distribuições maximais em três tipos:

Fréchet

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \\ 0, & x < 0, \quad \alpha > 0; \end{cases}$$

Weibull

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x < 0 \\ 0, & x > 0, \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

e

Gumbel

$$\Lambda = \exp(-e^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$


---

Por outro lado, para uma v.a. maximal  $X > 0$ , temos as equivalências

$$X \stackrel{d}{=} \Phi_\alpha \iff -X^{-1} \stackrel{d}{=} \Psi_\alpha \iff \ln X^\alpha \stackrel{d}{=} \Lambda. \quad (1.2)$$

Veja, Embrechts, Mikosch e Kluppelberg (1997). Este fato sugere que os três tipos de distribuições acima podem ser agregadas numa única família de distribuições. Tal representação de Jenkinson-von Mises é chamada de distribuição de Valor Extremal Generalizada (GEV), e é dada por

$$\mathcal{G}_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\}, & \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\}, & \gamma = 0, \end{cases}$$

onde  $\gamma$  é denominado de **índice caudal da distribuição de  $X$** . Naturalmente o suporte de  $\mathcal{G}_\gamma$  é  $\{x : 1 + \gamma x > 0\}$ . Assim

$$x > -\gamma^{-1} \text{ para } \gamma > 0; \quad x < -\gamma^{-1} \text{ para } \gamma < 0 \quad e \quad x \in \mathcal{R} \text{ para } \gamma = 0.$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha^{-1} > 0 \quad e \quad \alpha > 0 &\Rightarrow \Phi_\alpha = \mathcal{G}_{1/\gamma}; \\ \gamma = -\alpha^{-1} < 0 \quad e \quad \alpha > 0 &\Rightarrow \Psi_\alpha = \mathcal{G}_{-1/\gamma}; \\ \gamma = 0 &\Rightarrow \Lambda = \mathcal{G}_0. \end{aligned}$$

Para  $\gamma \neq 0$  as distribuições que estão no  $D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  são de cauda pesada, pois conforme Embrechts, Mikosch e Kluppelberg (1997) ou Resnick (1987) estas distribuições são caracterizadas por distribuições de variação regular, como segue:

$$F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma), \quad \gamma > 0 \iff \bar{F} \in \mathcal{R}(-1/\gamma), \quad (1.3)$$

$$F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma), \quad \gamma < 0 \iff \bar{G} \in \mathcal{R}(1/\gamma), \quad (1.4)$$

onde

$$G(x) = F(x_F - x^{-1}) \text{ para } x_F = \sup\{x : F(x) < 1\} < \infty. \quad (1.5)$$

De (1.3) e (1.4) temos que **a cauda direita ou esquerda, respectivamente, de  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  tem o comportamento de uma distribuição de cauda pesada.**

---

**Definição 1.2.2** Dada a v.a.  $X$  com f.d.  $F$ . O índice de momentos à direita de  $X$  ou de  $F$  é definido por

$$k(X) = k(F) = \sup \{p : EX_+^p < \infty\}, \quad X_+ = \max\{X, 0\}. \quad (1.6)$$

Note que, se  $EX_+^p < \infty$ ,

$$EX_+^p = \int_{(X_+ > x)} X_+^p dP + \int_{(X_+ \leq x)} X_+^p dP,$$

$$x^p P(X_+ > x) \leq EX_+^p - \int_{(X_+ \leq x)} X_+^p dP$$

então

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= P(X > x) \\ &= P(X_+ > x) = o(x^{-p}), \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall p < k(F), \end{aligned}$$

o que indica uma característica importante da cauda direita de  $F$ , no sentido de que sua cauda decresce conforme uma função potência de  $x$ . Por outro lado, lembremos que a cauda direita de distribuições de variação regular tem o comportamento de uma função potência. Isto nos leva a analisar os momentos de distribuições de variação regular e em consequência seu índice de momentos, desta maneira podemos também analisar o índice de momentos de uma distribuição maximal.

Para distribuições com cauda direita de variação regular,  $\bar{F} \in R(-\alpha)$ , temos que para alguma função lentamente variante  $L$ ,

$$x^\alpha P(X > x) \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty$$

ou, dado qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $x_0$  tal que

$$P(X > x) < (\epsilon + L(x))x^{-\alpha} \quad \text{para } x > x_0.$$

Então

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1} P(X > x) dx < \epsilon \int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha} dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha} L(x) dx.$$


---

Como

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha} dx < \infty \text{ para } p < \alpha$$

e

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha} L(x) dx < \infty \text{ para } p < \alpha$$

( Proposição 1.5.10, Bingham, Goldie e Teugels (1987) ), segue que

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1} P(X > x) dx < \infty \text{ para } p < \alpha.$$

Conseqüentemente

$$EX_+^p = p \int_0^{\infty} x^{p-1} P(X > x) dx < \infty \text{ para } p < \alpha.$$

De onde concluímos que o índice de momentos de uma distribuição de variação regular de índice  $\alpha$  é o mesmo  $\alpha$ ;

$$\bar{F} \in R(-\alpha), \alpha > 0 \implies k(F) = \alpha.$$

Com isto e as relações (1.3), (1.4) temos que **o índice de momentos de distribuições maximais é o inverso do índice caudal**,

$$\begin{aligned} F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma), \gamma > 0 &\implies F \in \mathcal{R}(-1/\gamma) \implies k(F) = 1/\gamma; \\ F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma), \gamma < 0 &\implies G \in \mathcal{R}(1/\gamma) \implies k(G) = -1/\gamma, \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $G$  é dada por (1.5).

O seguinte resultado de distribuições de variação regular será usado no Capítulo 2 da tese.

**Proposição 1.2.1** ( Bingham, Goldie e Teugels (1987) ) *Se  $\bar{F} \in R(-\alpha)$  para  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq \alpha$ , então*

$$\frac{x^\beta \bar{F}(x)}{\int_0^x y^\beta dF(y)} \longrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

## 1.3 Distribuições Estáveis Univariadas

Nesta seção apresentamos definições e propriedades de distribuições estáveis, caracterizadas por Lévy (1924). Destacamos a Definição 1.3.3 conhecida como o Teorema do Limite Central Generalizado e a Definição 1.3.4 que caracteriza uma distribuição estável por sua função característica e permite obter propriedades importantes de distribuições estáveis.

### 1.3.1 Definições Equivalentes

A prova da equivalência das quatro definições seguintes pode ser encontrada em Feller (1971) ou Samorodnitski e Taqqu (1994).

**Definição 1.3.1** *Uma v.a.  $X$  ou sua f.d.  $F$  é estável se para quaisquer números positivos  $A$  e  $B$  existem números positivos  $C$  e  $D$  tais que*

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \quad (1.8)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são cópias independentes de  $X$ .

Uma v.a. estável  $X$  é **estritamente estável** se  $D = 0$  em (1.8), e é **simétrica estável** se  $X \stackrel{d}{=} -X$ .

Assim, se  $X$  é simétrica estável então  $X$  é estritamente estável.

**Definição 1.3.2** *Uma v.a.  $X$  é  $\alpha$ -estável se para todo  $n \geq 2$  existe  $\alpha \in (0, 2]$  e  $D_n > 0$  tais que*

$$S(n) = X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + D_n, \quad (1.9)$$

onde  $X_1, \dots, X_n$  são cópias independentes de  $X$ . Quando  $X$  é simétrica, basta que

$$S(n) \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X.$$


---



A seguinte definição também é conhecida como **Teorema do Limite Central Generalizado**, sua prova para  $X$  Gaussiana é atribuída a Gnedenko e Kolmogorov (1954).

**Definição 1.3.3** *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a.'s i.i.d. Uma v.a.  $X$  é estável se existem  $\{a_n\} > 0$  e  $\{b_n\}$  tais que*

$$\frac{S(n) - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} X,$$

onde  $S(n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  e  $\xrightarrow{d}$  denota convergência em distribuição.

Outra caracterização de distribuições estáveis, usando função característica, é dada pela representação de Lévy-Kintchine para v.a.'s estáveis como caso particular de v.a.'s infinitamente divisíveis, pois como podemos ver em (1.9), se  $X$  é estável então  $X$  é infinitamente divisível:

$$X \stackrel{d}{=} \left( \frac{X_1}{C_n} - \frac{D_n}{nC_n} \right) + \dots + \left( \frac{X_n}{C_n} - \frac{D_n}{nC_n} \right).$$

**Definição 1.3.4** *Uma v.a.  $X$  é estável se existem parâmetros  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma \geq 0$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que a função característica (f.c.),  $\varphi(t) = Ee^{itX}$ , de  $X$  tem a seguinte representação:*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp \{ i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\alpha \frac{\pi}{2})] \}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \exp \{ i\mu t - \sigma |t| [1 - i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) \ln(t)] \}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde  $\alpha$  é denominado de **índice de estabilidade**.

Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  de simetria,  $\sigma$  de escala e  $\mu$  de locação são únicos, exceto quando  $\alpha = 2$ .

Denotamos por  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  a uma distribuição estável com parâmetro de estabilidade  $\alpha$ , de simetria  $\beta$ , de escala  $\sigma$  e de locação  $\mu$ .

Chamamos de **distribuição Lévy estável** a

$$\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(\beta, \mu) = S_\alpha(\beta, \sigma, \mu), \quad \text{para } 0 < \alpha < 2.$$

**Observação 1.3.1**

(i) Uma v.a.  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  com  $\sigma = 1$  e  $\mu = 0$  é chamada de  $\alpha$ -estável padrão.

(ii) Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  determinam o tipo de distribuição estável, por exemplo, para as poucas distribuições estáveis cuja densidade tem fórmula fechada, temos que:

$\alpha = 2$  corresponde à distribuição Gaussiana;

$$X \stackrel{d}{=} N(\mu, 2\sigma^2) \iff X \stackrel{d}{=} S_2(0, \sigma, \mu).$$

$\alpha = 1$  corresponde à distribuição de Cauchy;

$$X \stackrel{d}{=} \text{Cauchy}(a, b) \iff X \stackrel{d}{=} S_1(0, a, b).$$

$\alpha = 1/2$  corresponde à distribuição de Lévy;

$$X \stackrel{d}{=} S_{1/2}(0, 1, 0),$$

onde

$$f_X(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{-3/2} \exp(-(2x)^{-1}), x \geq 0.$$

O parâmetro  $\beta$  determina se a distribuição estável é simétrica ou assimétrica, por exemplo, para uma distribuição estável padrão,  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, 1, 0)$ , temos que:

Se  $\beta = 0$  então  $X$  é **simétrica**  $\alpha$  - **estável** ( s  $\alpha$  e). Neste caso sua f.c. é

$$\varphi(t) = \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\}; \quad (1.11)$$

Se  $\beta = 1$  e  $\alpha < 1$  então a densidade de  $X$  é totalmente assimétrica à direita;

Se  $\beta = -1$  e  $\alpha < 1$  então a densidade de  $X$  é totalmente assimétrica à esquerda.

As Figuras abaixo mostram que os parâmetros de estabilidade, de inclinação e de escala, respectivamente, influenciam diretamente no comportamento de uma distribuição estável.

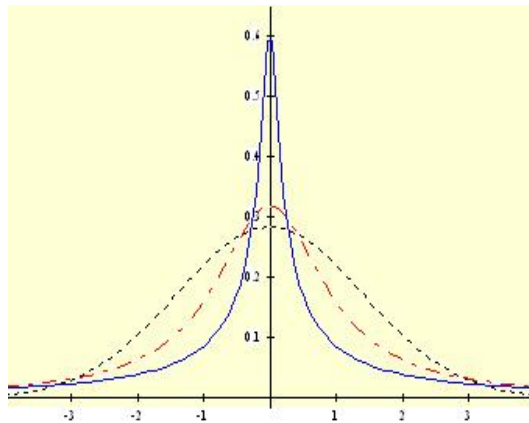


Figura 1.1:  $\beta = \mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  e  $\alpha = 0.5$  (contínua);  $\alpha = 1$  (tracejada);  $\alpha = 2$  (pontilhada).

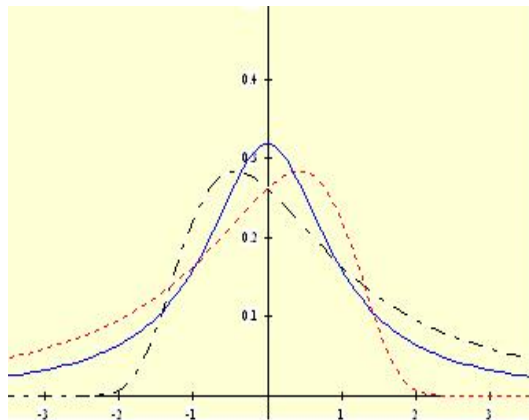


Figura 1.2: densidades estáveis para  $\alpha = 1$ ;  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0$  (contínua);  $\beta = 1$  (tracejada);  $\beta = -1$  (pontilhada) .

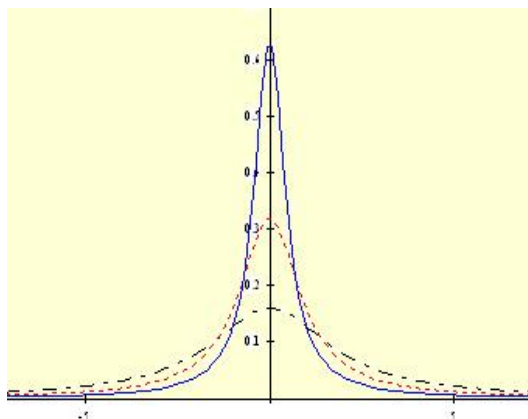


Figura 1.3: densidades estáveis para  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0$  e  $\sigma = 0.5$  (contínua);  $\sigma = 1$  (pontilhada);  $\sigma = 2$  (tracejada) .

### 1.3.2 Propriedades de distribuições estáveis

As propriedades de uma função característica e a representação (1.10) permitem provar facilmente as Propriedades 1.3.1 - 1.3.6. A prova da Propriedade 1.3.7 não é direta, mas pode ser encontrada em por exemplo, Feller ( 1971) ou Samorodnitsky (1994).

**Propriedade 1.3.1** *Sejam  $X_1 \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$  e  $X_2 \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$  independentes.*

*Então*

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu),$$

*onde*

$$\beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

**Propriedade 1.3.2** *Seja  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Então  $X + a \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu + a)$ .*

**Propriedade 1.3.3** *Seja  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  e  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Então*

$$aX \stackrel{d}{=} S_\alpha(\text{sign}(a)\beta, |a|\sigma, a\mu), \quad \alpha \neq 1$$

$$aX \stackrel{d}{=} S_\alpha(\text{sign}(a)\beta, |a|\sigma, a\mu - \frac{2}{\pi}a \ln |a|\sigma\beta), \quad \alpha = 1.$$

**Propriedade 1.3.4**  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  é simétrica se, e somente se,  $\beta = 0$  e  $\mu = 0$ .

**Propriedade 1.3.5**  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  é estritamente estável se

$$\mu = 0 \text{ para } \alpha \neq 1,$$

$$\beta = 0 \text{ para } \alpha = 1.$$

**Propriedade 1.3.6** Se  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  com  $1 < \alpha \leq 2$ , então  $\mu = EX$ .

A seguinte propriedade mostra que **uma ou ambas as caudas de uma distribuição de Lévy - estável,  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$ , são pesadas.**

**Propriedade 1.3.7** Se  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$  então existe uma constante  $C_\alpha \neq 0$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X > x) = C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X < -x) = C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha.$$

Como  $E|X|^r = \int_0^\infty P(|X|^r > s) ds$ , da Propriedade 1.3.7 temos

**Propriedade 1.3.8** Se  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$  então

$$E|X|^p < \infty \text{ para } 0 < p < \alpha;$$

$$E|X|^p = \infty \text{ para } p \geq \alpha.$$

**Observação 1.3.2** De (1.6) e da Propriedade 1.3.8, concluímos que o índice de momentos à direita de  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\beta, \mu)$  é igual a seu índice de estabilidade; isto é,

$$k(X) = \alpha.$$

# Capítulo 2

## Estimação dos Parâmetros da Distribuição Lévy Estável

### 2.1 Introdução

Dados com caudas pesadas ocorrem nos mais diversos campos de aplicação, e em especial em dados no campo de finanças. As caudas pesadas das distribuições que modelam estes dados sugerem o possível uso da distribuição estável.

Em Mantegna e Stanley (1994, 1995) foi modelada uma dinâmica de preços da Bolsa de Valores de Nova Iorque com passeios aleatórios de Lévy e mostrou um claro desvio no sentido que caudas experimentais eram menos pesadas que o esperado da distribuição estável estimada. Como uma tentativa de superar tal desvio apareceram outros modelos conhecidos como Vãos de Lévy.

Neste capítulo ao invés de modelar os dados por uma distribuição Lévy estável iremos assumir que a distribuição dos dados pertencem ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável.

Como referência básica deste capítulo ver Dorea, Guevara Otiniano, Matushita e Rathie (2005). Para entendimento dos estimadores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma$  de uma distribuição Lévy estável simétrica  $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma} = S_{\alpha}(0,\sigma,0)$ ,  $0 < \alpha < 2$ , considere as somas

---

parciais

$$S(n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

onde a seqüência  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  de v.a.'s i.i.d.  $F$  tem média zero e variância infinita. Então o comportamento assintótico normalizado de  $S(n)$  quando  $F$  é contínua e simétrica será de uma distribuição  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}$ ,

$$P\left(\frac{S(n)}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow{n} \mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(x); \quad F \in D(\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}),$$

de onde temos que, a cauda direita de  $F$  se comporta como a cauda direita de uma distribuição Pareto,

$$\bar{F}(x) \sim Cx^{-1/\gamma}, \quad \gamma > 0 \text{ e } C > 0,$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ . Então, dadas as estatísticas de ordem  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ , o estimador de máxima verossimilhança de  $\gamma$ , conhecido como estimador de Hill, é dado por

$$\hat{\gamma}_{n,k} = \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k)}}.$$

Daí, o estimador do índice de estabilidade  $\alpha$  é dado por

$$\hat{\alpha}_{n,k} = \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k)}} \right]^{-1}$$

com  $k = k(n) \rightarrow \infty$ , e  $\frac{k(n)}{n} \xrightarrow{n} 0$ .

O estimador do parâmetro de escala  $\sigma$  proposto neste trabalho é obtido considerando a densidade de probabilidade  $\ell_{\alpha, \sigma}$  na origem, por

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_n(0) \right]^{-1}, \quad \Gamma : \text{função Gamma}$$

onde  $\hat{\ell}_n(0)$  é o estimador de  $\ell_{\alpha, \sigma}(0)$ .

Na Seção 2.1 determinamos a relação entre o índice de estabilidade  $\alpha$  de  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}$  com o índice caudal  $\gamma$  de  $\mathcal{G}_\gamma$ . Em nossas Proposições 2.2.1 e 2.2.2 estabelecemos a relação entre os domínios de atração correspondentes.

---

Os estimadores do índice de estabilidade  $\alpha$  e do parâmetro de escala  $\sigma$ , para o caso simétrico serão detalhados na Seção 2.2. O Corolário 2.3.1 mostrará que

$$\hat{\alpha}_n \xrightarrow{p} \alpha \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma.$$

Na Seção 2.4, analisamos o caso em que a cauda direita e esquerda de uma distribuição Lévy estável tem comportamento distinto. Neste caso usando - se a técnica de superposição de distribuições estendemos o uso dos estimadores acima para situações assimétricas (Proposição 2.4.1 e Proposição 2.4.2).

---



## 2.2 Distribuições Estáveis Versus Distribuições Extremas.

Sejam  $X_1, X_2, \dots$  v.a.'s i.i.d. com distribuição comum  $F$  e  $S(n) = \sum_{j=1}^n X_j$ . Dizemos que  $X_1 \stackrel{d}{=} F$  pertence ao domínio de atração de  $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  ( $X_1 \in D(S_\alpha(\beta, \sigma, \mu))$  ou  $F \in D(S_\alpha(\beta, \sigma, \mu))$ ), se existem constantes  $\{a_n\} > 0$  e  $\{b_n\}$  que satisfazem a definição 1.3.3; isto é

$$P\left(\frac{S(n) - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow{n} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)(x). \quad (2.1)$$

Um dos resultados bem conhecidos sobre domínio de atração de distribuições Gaussianas  $S_2(0, \sigma, \mu)$  e sobre o domínio de atração de distribuições de Lévy-estáveis  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(\beta, \mu) = S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ ,  $0 < \alpha < 2$ , que será usado na prova de várias proposições, é o seguinte:

**Teorema 2.2.1** (*Embrechts, Mikosch e Kluppelberg (1987)*)

(i)  $F \in D(2) = D(S_2(0, \sigma, \mu))$ , se e somente se vale uma das seguintes condições:

$$EX^2 < \infty \text{ ou } EX^2 = \infty, \quad P(|X| > x) = o\left(x^{-2} \int_{|y| \leq x} y^2 dF(y)\right). \quad (2.2)$$

(ii)  $F \in D(\mathcal{L}_\alpha) = D(\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(\beta, \mu))$ , se e somente se

$$F(-x) \sim c_1 x^{-\alpha} L(x) \text{ e } \bar{F}(x) \sim c_2 x^{-\alpha} L(x) \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

onde  $L$  é uma função lentamente variante e  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$  são tais que  $c_1 + c_2 > 0$ .

**Proposição 2.2.1** *Seja  $X$  uma v.a. com f.d.  $F$  e  $\gamma \neq 0$ . Então*

(i)  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  para  $\gamma > 1/2 \implies F \in D(\mathcal{L}_{1/\gamma})$ .

(ii)  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  para  $0 < \gamma \leq 1/2 \implies F \in D(2)$ .

(iii)  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  para  $-1/2 \leq \gamma < 0 \implies G \in D(2)$ ,

onde  $G(x) := F(x_F - x^{-1})$  para  $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\} < \infty$ .

### Prova

(i) Suponha que  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  com  $\gamma > 1/2$ . De (1.3) temos que, se  $F \in D(\mathcal{G}_\gamma)$  então  $\bar{F} \in \mathcal{R}(-1/\gamma)$ , isto é,

$$\bar{F}(x) \sim x^{-1/\gamma} L(x), \quad 0 < 1/\gamma < 2,$$

onde  $L$  é lentamente variante, então  $F$  satisfaz (2.3) com  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 1$ . Portanto  $F \in D(\mathcal{L}_{1/\gamma})$ .

(ii) Para  $\gamma = 1/2$ . Quando  $EX^2 < \infty$  a prova é imediata por (2.2). O caso mais interessante é quando  $EX^2 = \infty$ .

Se  $F \in D(\mathcal{G}_{1/2})$  então  $\bar{F} \in \mathcal{R}(-2)$ , por (1.3). Agora, usando a Proposição 1.2.1 com  $\alpha = \beta = 2$ , temos que

$$\frac{x^2 \bar{F}(x)}{\int_0^x y^2 dF(y)} \longrightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

isto é

$$\bar{F}(x) = o(x^{-2} \int_0^x y^2 dF(y)), \quad x > -2,$$

o qual satisfaz (2.2) para a cauda à direita, então  $F \in D(2)$ .

Para  $0 < \gamma < 1/2$ . De (1.7) temos que o índice de momentos à direita de  $F$  é

$$k(F) = \frac{1}{\gamma} > 2$$

daí  $EX^2 < \infty$  e por (2.2) concluímos que  $F \in D(2)$ .

(iii) Para  $\gamma = -1/2$ . De (1.4) segue que, se  $F \in D(\mathcal{G}_{-1/2})$  então  $\bar{G} \in R(-2)$ .

Análogo à prova de (ii), usamos a Proposição 1.2.1 com  $\alpha = \beta = 2$  e temos que

$$\frac{x^2 \bar{G}(x)}{\int_0^x y^2 dG(y)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

isto é

$$\bar{G}(x) = o\left(x^{-2} \int_0^x y^2 dG(y)\right),$$

o qual satisfaz (2.2), então  $G \in D(2)$ .

Para  $-1/2 < \gamma < 0$ , novamente de (1.7) temos que o índice de momentos à direita de  $G$  é

$$k(G) = \frac{-1}{\gamma} > 2,$$

então  $EX^2 < \infty$  o que implica que  $G \in D(2)$ .

□

Os detalhes dos limites no seguinte exemplo podem encontrados em Rao(1984).

**Exemplo 2.2.1** *A v.a.  $X$  com função de densidade*

$$f_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{p}{2}|x|^{-1-p} & \text{se } |x| > 1, \quad p > 0 \end{cases}$$

*tem distribuição  $F_p$ ,  $F_p \in D(\mathcal{G}_{1/p})$ .*

*Para  $p > 2$ ,  $EX = 0$  e  $EX^2 = (p-2)^{-1}p < \infty$ , então pelo Teorema do Limite Central,  $F_p \in D(2)$ .*

*No caso  $0 < p < 2$  temos  $EX^2 = \infty$  e a f.c. de  $\frac{S(n)}{n^{1/\alpha}}$  converge para a f.c. de uma v.a. com distribuição  $\mathcal{L}_p$ ;*

$$\varphi_{\frac{S(n)}{n^{1/\alpha}}}(t) = \left[ p \int_0^\infty \frac{\cos(tx/n^{1/p})}{x^{1+p}} \right]^n \xrightarrow{n} e^{\frac{-C_p}{2^{p-1}}|t|^p}.$$

então  $F_p \in D(\mathcal{L}_p)$ .

Para  $p = 2$ ,  $\varphi_{\frac{s(n)}{(n \log n)^{1/2}}}(t) \xrightarrow{n} e^{-t^2/2}$  então  $F_p \in D(2)$ .

A seguinte proposição será usada na próxima seção para justificar a estimação do índice de estabilidade de uma distribuição de Lévy - estável pelo estimador de Hill.

**Proposição 2.2.2** *Seja  $\bar{F} = P(X > x) \sim cP(|X| > x)$  para algum  $c > 0$ . Então*

$$F \in D(\mathcal{L}_{\alpha, \sigma}) \iff F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma) \quad \gamma = 1/\alpha, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (2.4)$$

**Prova.** *Pela Proposição 2.2.1, basta provar que se  $F \in D(\mathcal{L}_\alpha)$  então  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$ . A prova segue diretamente de (2.3), pois*

$$\bar{F}(x) = F(-x) \sim Cx^{-\alpha}L(x)$$

para  $L$  lentamente variante com  $C > 0$ , pois  $P(X > x) \sim cP(|X| > x)$ . Então  $\bar{F}(x) \in R(-\alpha)$  e por (1.3) temos que

$$F \in D(\mathcal{G}_{1/\alpha}), \quad 1/\alpha = \gamma.$$

□

O índice de momentos de uma distribuição que pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável será usado na prova de alguns resultados no Capítulo 3.

**Observação 2.2.1** *Como o índice de momentos de uma distribuição  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  é  $k(F) = 1/\gamma$  então de (2.4) segue que o índice de momentos de uma distribuição  $F \in D(\mathcal{L}_\alpha)$  é*

$$k(F) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 2.$$

## 2.3 Estimação no caso Lévy Estável Simétrico

Alguns fatos bem conhecidos são garantidos na seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1** *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição comum  $F$ . Se  $F$  é simétrica e para alguma função lentamente variante  $L$ ,  $\bar{F}(x) = P(X > x) \sim x^{-\alpha}L(x)$ , então para algum  $\sigma > 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{1/\alpha}} \leq x\right) = \mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(x), \quad (2.5)$$

**Prova.** Como

$$P(X > x) = P(X \leq -x) \sim x^{-\alpha}L(x).$$

De (2.3) segue que  $F \in D(\mathcal{L}_{\alpha, \sigma})$  onde  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma} = \mathcal{L}_{\alpha, \sigma}(0, 0)$ . E pela simetria de  $F$  podemos tomar  $b_n = 0$  e  $a_n = n^{1/\alpha}$ .

□

**Observação 2.3.1** *Para  $F$  f.d. simétrica, da proposição 2.2.2, temos que  $F \in D(\mathcal{L}_\alpha)$  se, e somente se,  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  com  $\gamma = 1/\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ ;*

*isto é, se  $F \in D(\mathcal{L}_\alpha)$ , existem constantes  $c_n > 0$  e  $d_n$  tais que*

$$P\left(\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - d_n}{c_n} \leq x\right) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_\gamma(x),$$

*onde  $X_1, \dots, X_n$  são cópias independentes de  $X \stackrel{d}{=} F$  e  $\mathcal{G}_\gamma$  é a distribuição de valor extremal generalizada com índice caudal  $\gamma = 1/\alpha$ . Portanto, a estimação de  $\gamma$  leva estimar o índice de estabilidade  $\alpha$  e também sugere que estatísticas de ordem de  $X_1, \dots, X_n$  tem um papel a desempenhar. Assim, para estimar  $\alpha$  usamos o estimador de Hill, como segue.*

*Se  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  denotam as estatísticas de ordem de  $X_1, \dots, X_n$  então, para  $k = k_n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{k_n}{n} \xrightarrow{n} 0$ ,*

$$\hat{\alpha}_{n,k} = \frac{1}{\hat{\gamma}_{n,k}} = \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k)}} \right]^{-1}, \quad (2.6)$$

onde  $\hat{\gamma}_{n,k}$  é o estimador de Hill de  $\gamma$ .

Para estimar o parâmetro de escala  $\sigma$ , considere a densidade de probabilidade  $\ell_{\alpha,\sigma}$  de uma v.a. Lévy estável simétrica, dada pela transformada inversa da função característica de (1.11),

$$\ell_{\alpha,\sigma}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(x\theta) e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha} d\theta. \quad (2.7)$$

então

$$\ell_{\alpha,\sigma}(0) = \frac{1}{\pi\alpha\sigma} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \Gamma: \text{função Gamma.} \quad (2.8)$$

Tomando blocos de tamanho  $m$  das variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , defina as estatísticas

$$Y_j^{(n)} = \frac{X_{(j-1)m+1} + \dots + X_{jm}}{m^{1/\alpha}}. \quad (2.9)$$

Mostraremos que

$$\hat{\ell}_n(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} 1\left(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon\right)$$

é um estimador de  $\ell_{\alpha,\sigma}(0)$ , então por (2.8)

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[\hat{\ell}_n(0)\right]^{-1} \quad (2.10)$$

é um estimador do parâmetro  $\sigma$ .

**Corolário 2.3.1** Sob as hipóteses da proposição 2.3.1 assuma que  $F$  possui densidade contínua em uma vizinhança de 0. Então, para  $k = k_n \xrightarrow{n} \infty$  com  $\frac{k_n}{n} \rightarrow 0$ ,  $m = m_n \xrightarrow{n} \infty$  com  $r_n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon_n \downarrow 0$  com  $\varepsilon_n r_n \rightarrow \infty$  temos

$$\hat{\alpha}_{n,k} \xrightarrow{p} \alpha \quad \text{and} \quad \hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma. \quad (2.11)$$

**Prova.** Da Proposição 2.3.1 segue que  $F \in D(\mathcal{L}_{\alpha,\sigma})$  então por (2.6) temos que

$$\hat{\alpha}_{n,k} = \frac{1}{\hat{\gamma}_{n,k}} \xrightarrow{p} \alpha.$$

Seja  $Y_j^{(n)}$  como definido em (2.9). Para  $\varepsilon > 0$  and  $x_0 > \sqrt{\varepsilon}$ , da proposição 2.3.1 temos que existe  $m_n$  tal que

$$|P(Y_j^{(n)} \leq x) - \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(x)| \leq \varepsilon, \quad n \geq m_n, \quad |x| \leq x_0.$$

Em particular,

$$\left| \frac{P(Y_j^{(n)} \leq \sqrt{\varepsilon}) - P(Y_j^{(n)} \leq -\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\sqrt{\varepsilon}) - \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(-\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} \right| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Como toda distribuição estável tem densidade contínua e  $Y_j^{(n)}$  também tem densidade contínua em uma vizinhança de 0, para  $\varepsilon_n$ ,  $\sqrt{\varepsilon}$  e para algum  $\varepsilon' > 0$  temos que

$$\left| \frac{P(Y_j^{(n)} \leq \sqrt{\varepsilon}) - P(Y_j^{(n)} \leq -\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{P(Y_j^{(n)} \leq \varepsilon_n) - P(Y_j^{(n)} \leq -\varepsilon_n)}{2\varepsilon_n} \right| \leq \varepsilon',$$

e

$$\left| \frac{\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(\sqrt{\varepsilon}) - \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}(-\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} - \ell_{\alpha,\sigma}(0) \right| \leq \varepsilon'.$$

Isto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{2\varepsilon_n} = \ell_{\alpha,\sigma}(0) \quad \text{onde } p_n = P(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n). \quad (2.12)$$

Para  $n$  grande  $r_n = \left\lfloor \frac{n}{m_n} \right\rfloor \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon_n$  pode ser escolhido de tal forma que  $\varepsilon_n r_n \rightarrow \infty$ . Por (2.10) temos que  $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma$  se

$$\frac{1}{2\varepsilon_n r_n} \sum_{j=1}^{r_n} 1(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) \xrightarrow{p} \ell_{\alpha,\sigma}(0)$$

e por (2.12) basta provar que

$$\frac{1}{2\varepsilon_n r_n} \sum_{j=1}^{r_n} \left[ 1(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) - p_n \right] \xrightarrow{p} 0. \quad (2.13)$$

Isto segue verificando a hipótese de uma versão da lei fraca dos grandes números (Teorema 5.3.2, Chung (1974)). Como  $\varepsilon_n r_n \rightarrow \infty$  temos que

$$\sum_{j=1}^{r_n} P(1(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) \geq 2\varepsilon_n r_n) = o(1).$$

Usando (2.12) obtemos

$$\frac{1}{4\varepsilon_n^2 r_n^2} \sum_{j=1}^{r_n} \int_{(1(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) \leq 2\varepsilon_n r_n)} 1^2(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) dP = \frac{1}{2\varepsilon_n r_n} \frac{p_n}{2\varepsilon_n} = o(1)$$

o que implica (2.13), notando que

$$p_n = \int_{(1(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) \leq 2\varepsilon_n r_n)} 1(|Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon_n) dP.$$

□

## 2.4 Superposição de Distribuições Lévy Estáveis

Nesta seção discutimos a situação onde a cauda direita e esquerda de uma distribuição de caudas pesadas são assimétricas, no sentido que, para  $X_1, X_2, \dots$  v.a.'s i.i.d. com distribuição comum  $F$  onde para  $0 < \alpha^L, \alpha^R < 2$  e para alguma função lentamente variante  $L$ ,

$$F(-x) \sim x^{-\alpha^L} L(x) \quad \text{e} \quad \bar{F}(x) \sim x^{-\alpha^R} L(x). \quad (2.14)$$

A proposição 2.3.1 sugere uma possível existência de constantes  $\sigma^L > 0$ ,  $\sigma^R > 0$ ,  $a_n^L > 0$  e  $a_n^R > 0$  tal que

$$P\left(\frac{1}{a_n^L} \sum_{j=1}^n X_j 1(X_j < 0) \leq x\right) \rightarrow \mathcal{L}_{\alpha^L, \sigma^L}(x), \quad x < 0 \quad (2.15)$$

e

$$P\left(\frac{1}{a_n^R} \sum_{j=1}^n X_j 1(X_j > 0) \geq x\right) \rightarrow 1 - \mathcal{L}_{\alpha^R, \sigma^R}(x), \quad x > 0, \quad (2.16)$$

onde  $\mathcal{L}_{\alpha^L, \sigma^L}$  e  $\mathcal{L}_{\alpha^R, \sigma^R}$  são distribuições Lévy estáveis simétricas. Mostraremos que vale uma variação de (2.15) e (2.16).

Para tal, duas sub-amostras precisam ser geradas, uma com distribuição comum  $F^L \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\alpha^L, \sigma^L})$  e outra com  $F^R \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\alpha^R, \sigma^R})$  para algum  $\sigma^L > 0$  e  $\sigma^R > 0$ .

Defina as distribuições simétricas

$$F^L(x) = \begin{cases} F(x), & x < 0 \\ 1 - F(-x), & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad F^R(x) = \begin{cases} 1 - F(-x), & x < 0 \\ F(x), & x \geq 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

e sejam  $\xi_1, \xi_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d. com  $P(\xi_j = \pm 1) = \frac{1}{2}$  e assumamos que  $\{\xi_n\}$  é independente de  $\{X_n\}$ .

Da amostra  $X_1, \dots, X_n$  escolha os valores negativos  $X_{\tau_1^L}, X_{\tau_2^L}, \dots, X_{\tau_n^L}$  e os valores positivos  $X_{\tau_1^R}, X_{\tau_2^R}, \dots, X_{\tau_n^R}$  onde para  $\tau_0^L = \tau_0^R = 0$

$$n^L = \sum_{j=1}^n 1(X_j < 0) \quad \text{e} \quad n^R = \sum_{j=1}^n 1(X_j > 0).$$



Em seguida, defina

$$X_j^L = \xi_j X_{\tau_j^L}, \quad j = 1, \dots, n^L \quad \text{e} \quad X_j^R = \xi_j X_{\tau_j^R}, \quad j = 1, \dots, n^R.$$

**Proposição 2.4.1** *As variáveis aleatórias  $X_1^L, X_2^L, \dots$  (ou  $X_1^R, X_2^R, \dots$ ) são i.i.d. com distribuição comum  $F^L$  (ou  $F^R$ ).*

**Prova**

(i) Primeiro, provamos que  $X_{\tau_1^L, \tau_2^L}, \dots$  são i.i.d.

Seja  $x < 0$ ,

$$\begin{aligned} P(X_{\tau_j^L} \leq x) &= \sum_{k \geq 1} P(X_k \leq x, \tau_j = k) = \sum_{k \geq 1} P(X_1 \geq 0, \dots, X_{k-1} \geq 0, X_k \leq x) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} F(x) = 2F(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Seja  $x_1 < 0, \dots, x_j < 0$  então

$$\begin{aligned} &P(X_{\tau_1^L} \leq x_1, \dots, X_{\tau_j^L} \leq x_j) \\ &= \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j > k_{j-1}} P(X_{k_1} \leq x_1, \dots, X_{k_j} \leq x_j, \tau_1^L = k_1, \dots, \tau_j^L = k_j) \\ &= \sum_{k_1 \geq 1} \dots \sum_{k_j > k_{j-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1-1} F(x_1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2-k_1-1} \dots F(x_{j-1}) \left(\frac{1}{2}\right)^{k_j-k_{j-1}-1} F(x_j) \\ &= 2^j F(x_1) F(x_2) \dots F(x_j). \end{aligned}$$

(ii) Claramente,  $X_1^L, X_2^L, \dots$  é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. Usando o fato que  $X_{\tau_j^L} < 0$ , de (2.17) e (2.18) temos para  $x < 0$

$$\begin{aligned} P(X_j^L \leq x) &= P(\xi_j X_{\tau_j^L} \leq x) \\ &= P(X_{\tau_j^L} \leq x, \xi_j = 1) + P(-X_{\tau_j^L} \leq x, \xi_j = -1) \\ &= P(X_{\tau_j^L} \leq x, \xi_j = 1) = \frac{1}{2} 2F(x) = F^L(x). \end{aligned}$$


---

e, para  $x > 0$

$$\begin{aligned} P(\xi_j X_{\tau_j^L} \leq x) &= P(\xi_j = 1) + P(-X_{\tau_j} \leq x, \xi_j = -1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2F(-x)) = F^L(x). \end{aligned}$$

□

Por (2.14) e (2.4) podemos estimar os índices de estabilidade  $\alpha^L$  e  $\alpha^R$  usando a amostra  $X_1, \dots, X_n$  como em (2.6),

$$\hat{\alpha}_n^L = \left[ \frac{1}{k^L} \sum_{j=1}^{k^L} \log \frac{X(j)}{X(k^L)} \right]^{-1} \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}_n^R = \left[ \frac{1}{k^R} \sum_{j=n-k^R}^n \log \frac{X(j)}{X(n-k^R)} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

onde  $k^L = k_n^L \xrightarrow{n} \infty$ ,  $\frac{k^L}{n} \rightarrow 0$  e  $k^R = k_n^R \xrightarrow{n} \infty$ ,  $\frac{k^R}{n} \rightarrow 0$ .

Para o parâmetro de escala  $\sigma^L$  and  $\sigma^R$  usamos a continuidade da densidade  $\ell_{\alpha^L, \sigma^L}(\cdot)$  e procedemos como em (2.9) e (2.10).

Seja  $m^L = m_n^L \xrightarrow{n} \infty$  com  $r_n^L = \left[ \frac{n^L}{m^L} \right] \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon^L = \varepsilon_n^L \downarrow 0$  com  $\varepsilon^L r_n^L \rightarrow \infty$ . Defina

$$Y_j^{(n,L)} = \frac{x_{(j-1)m^L+1}^L + \dots + x_{jm^L}^L}{(m^L)^{1/\alpha^L}} \quad (2.20)$$

e

$$\hat{\sigma}_n^L = \frac{\Gamma(1/\alpha^L)}{\pi \alpha^L} \left[ \frac{1}{2\varepsilon^L} \frac{1}{r_n^L} \sum_{j=1}^{r_n^L} 1(|Y_j^{(n,L)}| \leq \varepsilon^L) \right]^{-1}. \quad (2.21)$$

Analogamente definimos  $m^R, \varepsilon^R, r_n^R$ ,

$$Y_j^{(n,R)} = \frac{x_{(j-1)m^R+1}^R + \dots + x_{jm^R}^R}{(m^R)^{1/\alpha^R}} \quad (2.22)$$

e

$$\hat{\sigma}_n^R = \frac{\Gamma(1/\alpha^R)}{\pi \alpha^R} \left[ \frac{1}{2\varepsilon^R} \frac{1}{r_n^R} \sum_{j=1}^{r_n^R} 1(|Y_j^{(n,R)}| \leq \varepsilon^R) \right]^{-1}. \quad (2.23)$$

Da Proposição 2.3.1, Corolário 2.3.1 e da Proposição 2.4.1, obtemos:

**Proposição 2.4.2** *Assuma que  $F(0) = \frac{1}{2}$  e que  $F(\cdot)$  possui densidade contínua em uma vizinhança de 0. Além disso, se para algum  $0 < \alpha^L, \alpha^R < 2$  temos (2.14) satisfeita. Então para algum  $\sigma^L > 0$  e  $\sigma^R > 0$  temos  $F^L \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\alpha^L, \sigma^L})$ ,  $F^R \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\alpha^R, \sigma^R})$  e as estimativas (2.19), (2.21) e (2.23) são consistentes,*

$$\hat{\alpha}_n^L \xrightarrow{p} \alpha^L, \hat{\alpha}_n^R \xrightarrow{p} \alpha^R, \hat{\sigma}_n^L \xrightarrow{p} \sigma^L \text{ e } \hat{\sigma}_n^R \xrightarrow{p} \sigma^R.$$

**Observação 2.4.1** *Das proposições acima temos que o comportamento das caudas de uma distribuição assimétrica  $F$ ,  $F$  distribuição de dados observados, pode ser determinado pelo comportamento da distribuição obtida por superposição das distribuições de Lévy simétricas  $\mathcal{L}_{\alpha^R, \sigma^R}$  e  $\mathcal{L}_{\alpha^L, \sigma^L}$  onde os índices de estabilidade e escala são estimados por (2.19), (2.21) e (2.23).*

# Capítulo 3

## Resultados sobre Independência para Distribuições de Lévy Estáveis

### 3.1 Introdução

Neste Capítulo, obtemos resultados quanto ao comportamento caudal de  $X + Y$ ,  $\max\{X, Y\}$ ,  $XY$  e do  $\min\{X, Y\}$ , onde  $X$  e  $Y$  são v.a.'s aleatórias com distribuição Lévy estável ou sua distribuição pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável. Usamos estes resultados e os estimadores  $\hat{\alpha}_{n,k}$  e  $\hat{\sigma}_n$  apresentados no Capítulo 2 para introduzir resultados sobre independência.

Na Seção 3.2, em nossas Proposições 3.2.1 e 3.2.2 provamos que se  $X$  e  $Y$  tem distribuição Lévy estável simétrica então as funções elementares  $X + Y$ ,  $\max\{X, Y\}$ ,  $XY$  e  $\min\{X, Y\}$  também tem distribuição Lévy estável simétrica, e em nossas Proposições 3.2.3, 3.2.4 e 3.2.5 provamos que se a distribuição de  $X$  e  $Y$  pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável simétrica então as funções elementares acima também pertencem ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável simétrica.

Para o caso assimétrico; isto é, quando a distribuição de  $X$  e  $Y$  pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável assimétrica, provamos que  $XY$  também pertence ao domínio de atração de uma distribuição Lévy estável assimétrica,

---

Proposição 3.2.6.

Na Seção 3.3, apresentamos resultados de independência para v.a.'s com distribuição Lévy estável simétrica. Usando resultados da Seção 3.2 e os estimadores  $\hat{\alpha}_{n,k}$  e  $\hat{\sigma}_n$ , mostramos que: dada uma seqüência de vetores aleatórios  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$ . Para  $\alpha = \alpha_X = \alpha_Y$ , se  $X$  e  $Y$  são independentes então

$$\frac{\hat{\sigma}_W^\alpha}{\hat{\sigma}_X^\alpha + \hat{\sigma}_Y^\alpha} \xrightarrow{p} 1.$$

De modo que, quando são dependentes a convergência não se verifica.

Para  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ , se  $X$  e  $Y$  são independentes

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}}{\hat{\alpha}_{XY}} \xrightarrow{p} 1.$$

ou

$$\frac{\hat{\alpha}_X + \hat{\alpha}_Y}{\hat{\alpha}_{\min X, Y}} \xrightarrow{p} 1.$$

Na seção 3.4, estendemos esses resultados quando a condição  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$  é substituída por  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$ . Para o caso em que as distribuições das v.a.'s  $X$  e  $Y$  são assimétricas e de caudas pesadas, apresentamos um resultado sobre independência baseado no produto  $XY$  e em estimadores como os de (2.19).

## 3.2 Comportamento Caudal de Funções Elementares de Variáveis Aleatórias Lévy Estáveis

Sejam  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X} = S_{\alpha_X}(0, \sigma_X, 0)$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y} = S_{\alpha_Y}(0, \sigma_Y, 0)$ , com  $0 < \alpha_X, \alpha_Y < 2$ . Como as distribuições são simétricas, da Propriedade 1.3.7, temos a existência de constantes  $C_X > 0$  e  $C_Y > 0$  tais que quando  $x \rightarrow \infty$

$$P(X > x) = P(X \leq -x) \sim C_X \frac{\sigma_X^{\alpha_X}}{2} x^{-\alpha_X} \quad (3.1)$$

e

$$P(Y > y) = P(Y \leq -y) \sim C_Y \frac{\sigma_Y^{\alpha_Y}}{2} y^{-\alpha_Y}. \quad (3.2)$$

Se as v.a.'s estáveis  $X$  e  $Y$  são independentes com o mesmo índice de estabilidade é simples mostrar que  $X + Y$  também tem distribuição estável, veja por exemplo, Samorodnitski e Taqqu (1994). Na seguinte proposição tratamos do  $\max\{X, Y\}$  e da  $X + Y$  para o caso em que  $X$  e  $Y$  são Lévy estáveis simétricas, não necessariamente independentes e os índices de estabilidade são distintos.

**Proposição 3.2.1** *Sejam  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$ ,  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$  com  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ . Então*

$$(i) \max\{X, Y\} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{\max\{X, Y\}}, \sigma_{\max\{X, Y\}}},$$

$$\text{com } \alpha_{\max\{X, Y\}} = \min\{\alpha_X, \alpha_Y\} \text{ e } \sigma_{\max\{X, Y\}} = \sigma_X.$$

$$(ii) \alpha_{X+Y} \geq \min\{\alpha_X, \alpha_Y\} \text{ se } X + Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{X+Y}, \sigma_{X+Y}}.$$

**Prova** Por simetria é suficiente analisar a cauda direita.

(i) Assuma que  $\alpha_X < \alpha_Y$ . De (3.1) e (3.2) temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C_Y \sigma_Y^{\alpha_Y}}{C_X \sigma_X^{\alpha_X}} x^{\alpha_X - \alpha_Y} = 0. \quad (3.3)$$


---

Agora, para  $x \geq 0$  e qualquer  $s$ ,  $0 < s < 1$ ,

$$\begin{aligned} P(\max\{X, Y\} > x) &= P(\max\{X, Y\} > x, Y > sx) + P(\max\{X, Y\} > x, Y \leq sx) \\ &\leq P(Y > sx) + P(X > x). \end{aligned}$$

Usando (3.3) segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max\{X, Y\} > x)}{P(X > x)} &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > sx)}{P(X > x)} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{P(X > x)} \\ &\leq 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} P(\max\{X, Y\} > x) &= 1 - P(\max\{X, Y\} \leq x) \\ &\geq 1 - P(X \leq x, Y \leq x) \\ &\geq 1 - P(X \leq x) \\ &= P(X > x), \end{aligned}$$

temos

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max\{X, Y\} > x)}{P(X > x)} \geq 1. \tag{3.5}$$

Portanto, de (3.4) e (3.5),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max\{X, Y\} > x)}{P(X > x)} = 1.$$

O que implica que

$$P(\max\{X, Y\} > x) \sim C_X \frac{\sigma_X^{\alpha_X}}{2} x^{-\alpha_X}$$

ou

$$\max\{X, Y\} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{\max\{X, Y\}}, \sigma_{\max\{X, Y\}}}, \quad \alpha_{\max\{X, Y\}} = \alpha_X.$$

(ii) Para  $x \geq 0$  e qualquer  $s$ ,  $0 < s < 1$  temos

$$\begin{aligned} P(X + Y > x) &= P(X + Y > x, Y > sx) + P(X + Y > x, Y \leq sx) \\ &= P(Y > x) + P(X > (1 - s)x) \end{aligned}$$


---

então

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > (1-s)x)}{P(X > x)}$$

ou

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > sx)}{P(Y > x)} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > (1-s)x)}{P(X > x)} \quad (3.6)$$

Assuma que  $\alpha_X < \alpha_Y$ . De (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq (1-s)^{-\alpha_X}.$$

Como  $s$  é arbitrário podemos tomar  $s \downarrow 0$ , então

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq 1.$$

O que implica que a cauda direita da distribuição de  $X$  é mais pesada que a cauda direita da distribuição de  $X+Y$ . Daí, se  $X+Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{X+Y}, \sigma_{X+Y}}$  então a relação entre os respectivos índices de estabilidade é

$$\min\{\alpha_X, \sigma_X\} = \alpha_X \leq \alpha_{X+Y}.$$

□

A seguinte proposição será usada na Seção 3.3 para introduzir resultados de independência.

**Proposição 3.2.2** *Sejam  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$  independentes.*

(i) *Se  $\alpha_X \neq \alpha_Y$  então  $XY \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{XY}, \sigma_{XY}}$ ,*

*com  $\alpha_{XY} = \min\{\alpha_X, \sigma_X\}$  e  $\sigma_{XY} = \sigma_X(E|Y|^{\alpha_X})^{1/\alpha_X}$ .*

(ii)  *$\min\{X, Y\} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{\min\{X, Y\}}, \sigma_{\min\{X, Y\}}}$  com*

*$\alpha_{\min\{X, Y\}} = \alpha_X + \alpha_Y$  e  $\sigma_{\min\{X, Y\}} = (\sigma_X^{\alpha_X} \sigma_Y^{\alpha_Y})^{1/\alpha_X + \alpha_Y}$ .*

---



**Prova**

(i) Defina

$$X = X_+ - X_- \quad \text{e} \quad Y = Y_+ - Y_-$$

onde

$$X_+ = \max \{0, X\}, \quad Y_+ = \max \{0, Y\}$$

e

$$X_- = \max \{0, -X\}, \quad Y_- = \max \{0, -Y\}$$

são parte positiva e parte negativa de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Com isto, para  $x \geq 0$ ,

$$P(X_+ > x) = P(X > x) \quad \text{e} \quad P(X_- > x) = P(X < -x).$$

Analogamente para  $Y$ , e

$$\begin{aligned} P(XY > x) &= P((X.Y)_+ > x) \\ &= P(X_+Y_+ > x) + P(X_-Y_- > x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por outro lado, pela independência de  $X_+ \stackrel{d}{=} F_{X_+}$  e  $Y_+ \stackrel{d}{=} F_{Y_+}$ , bem como de  $X_- \stackrel{d}{=} F_{X_-}$  e  $Y_- \stackrel{d}{=} F_{Y_-}$ , temos

$$\begin{aligned} P(X_+Y_+ > x) &= \int_0^\infty P(X_+Y_+ > x | Y_+ = y) dF_{Y_+}(y) \\ &= \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

e

$$P(X_-Y_- > x) = \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y) \quad (3.9)$$

de modo que (3.7) pode ser escrito como

$$P(XY > x) = \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y)$$

e por (3.1) e (3.2),

$$P(XY > x) \sim C_X \frac{\sigma_X^{\alpha_X}}{2} x^{-\alpha_X} \left( \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y) \right).$$


---

Assumindo que  $\alpha_X < \alpha_Y$  a Propriedade 1.3.8 garante que as integrais acima são finitas;

$$\int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y) = E|Y|^{\alpha_X} < \infty, \text{ para } \alpha_X < \alpha_Y.$$

Então,

$$P(XY > x) = P(XY < -x) \sim C_X \frac{\sigma_X^{\alpha_X}}{2} \left[ (E|Y|^{\alpha_X})^{1/\alpha_X} \right]^{\alpha_X} x^{-\alpha_X}$$

de onde concluímos que

$$XY \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, (E|Y|^{\alpha_X})^{1/\alpha_X}}.$$

(ii) Da independência de  $X$  e  $Y$  temos

$$P(\min \{X, Y\} > x) = P(X > x)P(Y > x) \tag{3.10}$$

então, por (3.1) e (3.2) o comportamento caudal do  $\min \{X, Y\}$  é dado por

$$P(\min \{X, Y\} > x) \sim \frac{C_X C_Y}{2} \frac{\sigma_X^{\alpha_X} \sigma_Y^{\alpha_Y}}{2} x^{-(\alpha_X + \alpha_Y)}$$

ou equivalentemente

$$x^{\alpha_X + \alpha_Y} P(\min \{X, Y\} > x) \sim \frac{C_X C_Y}{2} \left[ (\sigma_X^{\alpha_X} \sigma_Y^{\alpha_Y})^{1/\alpha_X + \alpha_Y} \right]^{\alpha_X + \alpha_Y}$$

onde  $\frac{C_X C_Y}{2} \neq 0$  e portanto

$$\min \{X, Y\} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X + \alpha_Y, (\sigma_X^{\alpha_X} \sigma_Y^{\alpha_Y})^{1/\alpha_X + \alpha_Y}}.$$

□

Quando a condição  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X} = S_{\alpha_X}(0, \sigma_X, 0)$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y} = S_{\alpha_Y}(0, \sigma_Y, 0)$  é substituída por  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$ , obtemos resultados semelhantes aos anteriores.

Como  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$  são simétricas por (2.3) temos a existência de constantes  $C_X > 0$  e  $C_Y > 0$  e de funções lentamente variantes  $L_X$  e  $L_Y$  tais

---

que

$$P(X > x) = P(X \leq -x) \sim C_X x^{-\alpha_X} L_X(x) \quad (3.11)$$

e

$$P(Y > y) = P(Y \leq -y) \sim C_Y y^{-\alpha_Y} L_Y(y) \quad (3.12)$$

quando  $x \rightarrow \infty$  e  $y \rightarrow \infty$ .

**Proposição 3.2.3** *Sejam  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$ ,  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$  com  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ . Então*

$$(i) \max\{X, Y\} \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{\max\{X, Y\}}, \sigma_{\max\{X, Y\}}}) \quad \text{com} \quad \alpha_{\max\{X, Y\}} = \min\{\alpha_X, \alpha_Y\}.$$

$$(ii) \alpha_{X+Y} \geq \min\{\alpha_X, \alpha_Y\} \quad \text{se} \quad X+Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{X+Y}, \sigma_{X+Y}}).$$

**Prova.** Por simetria é suficiente analisar a cauda direita.

(i) Como  $L_X$  e  $L_Y$  são lentamente variantes, existem constantes finitas  $d_X$  e  $d_Y$  tais que para  $x > 0$  e  $y > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_X(tx)}{L_X(t)} = d_X \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_Y(ty)}{L_Y(t)} = d_Y.$$

Segue que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_Y(t)}{L_X(t)} = d, \quad 0 < d < \infty.$$

Assuma que  $\alpha_X < \alpha_Y$ . De (3.11) e (3.12), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C_Y L_Y(x)}{C_X L_X(x)} x^{\alpha_X - \alpha_Y} = 0. \quad (3.13)$$

Usando (3.13) como na Proposição 3.2.1 obtemos (3.4),

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max\{X, Y\} > x)}{P(X > x)} \leq 1.$$


---

assim como (3.5),

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max\{X, Y\} > x)}{P(X > x)} \geq 1.$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max\{X, Y\} > x)}{P(X > x)} = 1.$$

O que implica que

$$\max\{X, Y\} \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}).$$

(ii) Novamente, como na Proposição 3.2.1, para  $x \geq 0$  e qualquer  $s$ ,  $0 < s < 1$  obtemos (3.6),

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > sx)}{P(Y > x)} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > (1-s)x)}{P(X > x)}$$

e para  $\alpha_X < \alpha_Y$ , de (3.11), (3.12) e (3.13), temos

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq (1-s)^{-\alpha_X}.$$

Tomando  $s \downarrow 0$ ,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(X > x)} \leq 1.$$

Então

$$\min\{\alpha_X, \sigma_X\} = \alpha_X \leq \alpha_{X+Y}.$$

□

A seguinte proposição nos permite introduzir os dois primeiros resultados de independência na Seção 3.4.

**Proposição 3.2.4** *Sejam  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$  independentes.*

(i) *Se  $\alpha_X \neq \alpha_Y$  então  $X.Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{XY}, \sigma_{XY}})$  com  $\alpha_{XY} = \min\{\alpha_X, \sigma_X\}$ .*

(ii)  *$\min\{X, Y\} \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{\min\{X, Y\}}, \sigma_{\min\{X, Y\}}})$  com  $\alpha_{\min\{X, Y\}} = \alpha_X + \alpha_Y$ .*

---

**Prova**

(i) Considere  $X = X_+ - X_-$  e  $Y = Y_+ - Y_-$  com  $X_+ \stackrel{d}{=} F_{X_+}$ ,  $Y_+ \stackrel{d}{=} F_{Y_+}$ ,  $X_- \stackrel{d}{=} F_{X_-}$  e  $Y_- \stackrel{d}{=} F_{Y_-}$ . De

$$P(XY > x) = P(X_+Y_+ > x) + P(X_-Y_- > x)$$

com

$$P(X_+Y_+ > x) = \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y)$$

e

$$P(X_-Y_- > x) = \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y)$$

segue

$$\begin{aligned} \frac{P(XY > x)}{P(X > x)} &= \int_0^\infty \frac{P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right)}{P(X > x)} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty \frac{P\left(X_- > \frac{x}{y}\right)}{P(X > x)} dF_{Y_-}(y) \\ &= \int_0^\infty \frac{P\left(X > \frac{x}{y}\right)}{P(X > x)} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty \frac{P\left(X > < \frac{-x}{y}\right)}{P(X > x)} dF_{Y_-}(y). \end{aligned}$$

Usando o teorema da convergência limitada com (3.11) e (3.12), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(XY > x)}{P(X > x)} = \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y). \quad (3.14)$$

Assuma que  $\alpha_X < \alpha_Y$ . A Propriedade 1.3.8 garante a finitude das integrais acima;

$$\int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y) = E|Y|^{\alpha_X} < \infty.$$

Então

$$P(XY > x) \sim C_X E|Y|^{\alpha_X} P(X > x).$$

Em consequência

$$XY \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \alpha_Y}).$$

(ii) Da independência de  $X$  e  $Y$  temos que para qualquer número real  $x$  vale (3.10),

$$P(\min\{X, Y\} > x) = P(X > x)P(Y > x).$$

Usando (3.11) e (3.12),

$$P(\min \{X, Y\} > x) \sim C_X C_Y x^{-(\alpha_X + \alpha_Y)} L_X(x) L_Y(x),$$

com  $L_X \cdot L_Y$  lentamente variante e  $C_X C_Y > 0$ . O que implica que

$$\min \{X, Y\} \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X + \alpha_Y, \sigma_{\min\{X, Y\}}}).$$

□

Quando  $X$  e  $Y$  não são necessariamente independentes, na Proposição 3.2.3 mostramos que  $\alpha_X \leq \alpha_{X+Y}$ , veremos que sob independência vale a igualdade.

**Proposição 3.2.5** *Se  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$  são independentes e  $\alpha_X \neq \alpha_Y$  então  $X + Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{X+Y}, \sigma_{X+Y}})$  com  $\alpha_{X+Y} = \min\{\alpha_X, \sigma_X\}$ .*

**Prova** Como  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y})$ , da Observação 2.2.1 do Capítulo 2,

$$k(X) = \sup\{p : EX_+^p < \infty\} = \alpha_X \quad \text{e} \quad k(Y) = \sup\{q : EY_+^q < \infty\} = \alpha_Y$$

são os índices de momentos á direita de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Então usando índice de momentos, é suficiente provar que o índice de momentos de  $X + Y$  é  $\alpha_X$ ;  $k(X + Y) = \alpha_X$ .

Do Lema 3.2 de Tang e Tsitsiashvili (2003):

se  $F_1 \in \mathcal{S}$ ,  $F_2 \in \mathcal{L}$  e  $\bar{F}_2(x) = O(\bar{F}_1(x))$  então  $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$  e  $\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)$ . temos que

$$P(X + Y > x) \sim P(X > x) + P(Y > x)$$

e usando (3.11),

$$P(X + Y > x) \sim x^{-\alpha_X} L_X(x) + x^{-\alpha_Y} L_Y(x)$$

ou equivalentemente, para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $x_0$  tal que

$$P(X + Y > x) < x^{-\alpha_X} L_X(x) + x^{-\alpha_Y} L_Y(x) + \epsilon x^{-(\alpha_X + \alpha_Y)}.$$


---

Então

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1} P(X + Y > x) dx < \int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha_X} L_X(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha_Y} L_Y(x) dx + \epsilon \int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha_X-\alpha_Y} dx.$$

Obviamente

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1-\alpha_X-\alpha_Y} dx < \infty \text{ para } p < \alpha_X + \alpha_Y$$

e usando a Proposição 1.5.10 de Binigham e Goldie (1987):

se  $L$  é lentamente variante e  $\beta < -1$  então  $\int_0^{\infty} x^{\beta} L(x) dx < \infty$ .

$$\int_0^{\infty} x^{p-1-\alpha_X} L_X(x) dx < \infty \text{ para } p < \alpha_X$$

Então

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{p-1} P(X + Y > x) dx < \infty \text{ para } p < \min\{\alpha_X, \alpha_Y\} = \alpha_X$$

e daí

$$E(X + Y)_+^p = \int_0^{\infty} x^{p-1} P(X + Y > x) dx < \infty \text{ para } p < \alpha_X$$

em consequência  $k(X + Y) = \alpha_X$  e  $X + Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X})$ .

□

Os resultados obtidos nas proposições anteriores foram para distribuições simétricas.

Para o caso de distribuições Lévy estáveis assimétricas  $\mathcal{L}_{\alpha_X} = \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}(\beta_X, \mu_X)$  e  $\mathcal{L}_{\alpha_Y} = \mathcal{S}_{\alpha_Y, \sigma_Y}(\beta_Y, \mu_Y)$  mostramos o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.6** *Sejam  $X \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X})$  e  $Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y})$  independentes com  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ .*

*Então*

$$X.Y \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{XY}}) \text{ com } \alpha_{XY} = \min\{\alpha_X, \sigma_X\}.$$

**Prova** De (2.3) temos a existência de constantes  $C_X^R \geq 0$ ,  $C_X^L \geq 0$ ,  $C_Y^R \geq 0$  e  $C_Y^L \geq 0$ , e de funções lentamente variantes  $L_X$  e  $L_Y$  tais que

$$P(X < -x) \sim C_X^L x^{-\alpha_X} L_X(x) \quad e \quad P(X > x) \sim C_X^R x^{-\alpha_X} L_X(x) \quad (3.15)$$

e

$$P(Y < -x) \sim C_Y^L x^{-\alpha_Y} L_Y(x) \quad e \quad P(Y > x) \sim C_Y^R x^{-\alpha_Y} L_Y(x) \quad (3.16)$$

com  $C_X^L + C_X^R > 0$  e  $C_Y^L + C_Y^R > 0$ .

Considere  $X = X_+ - X_-$  e  $Y = Y_+ - Y_-$  com  $X_+ \stackrel{d}{=} F_{X_+}$ ,  $Y_+ \stackrel{d}{=} F_{Y_+}$ ,  $X_- \stackrel{d}{=} F_{X_-}$  e  $Y_- \stackrel{d}{=} F_{Y_-}$ . Então

$$P(XY > x) = P((XY)_+ > x) = P(X_+Y_+ > x) + P(X_-Y_- > x)$$

e

$$P(XY < -x) = P((XY)_- > x) = P(X_-Y_+ > x) + P(X_+Y_- > x).$$

Por outro lado, pela independência de  $X$  e  $Y$ , temos

$$P(X_+Y_+ > x) = \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y);$$

$$P(X_-Y_- > x) = \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y);$$

$$P(X_+Y_- > x) = \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y)$$

e

$$P(X_-Y_+ > x) = \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y)$$

e com isto

$$P(XY > x) = \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y)$$

e

$$P(XY < -x) = \int_0^\infty P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_-}(y) + \int_0^\infty P\left(X_- > \frac{x}{y}\right) dF_{Y_+}(y).$$


---



Dividindo as equações por  $P(X > x)$  e  $P(X < -x)$ , respectivamente, temos

$$\frac{P(XY > x)}{P(X > x)} = \int_0^\infty \frac{P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right)}{P(X > x)} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty \frac{P\left(X < \frac{-x}{y}\right)}{P(X > x)} dF_{Y_-}(y)$$

e

$$\frac{P(XY < -x)}{P(X < -x)} = \int_0^\infty \frac{P\left(X_+ > \frac{x}{y}\right)}{P(X < -x)} dF_{Y_+}(y) + \int_0^\infty \frac{P\left(X < \frac{-x}{y}\right)}{P(X < -x)} dF_{Y_-}(y).$$

Agora, assumamos que  $\alpha_X < \alpha_Y$ . Usando (3.15) e (3.16) com o teorema da convergência limitada, segue

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(XY > x)}{P(X > x)} = \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \frac{C_X^L}{C_X^R} \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(XY < -x)}{P(X < -x)} = \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \frac{C_X^R}{C_X^L} \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y)$$

cujas integrais são finitas, pois  $\alpha_X < \alpha_Y$ . Denotando estes limites por

$$A = \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \frac{C_X^L}{C_X^R} \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y) \text{ e } B = \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_+}(y) + \frac{C_X^R}{C_X^L} \int_0^\infty y^{\alpha_X} dF_{Y_-}(y),$$

a prova segue de

$$P(XY > x) \sim AP(X > x) \sim AC_X^R x^{-\alpha_X} L_X(x)$$

e

$$P(XY < -x) \sim AP(X < -x) \sim BC_X^L x^{-\alpha_X} L_X(x).$$

□

### 3.3 Resultados sobre Independência

Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X} = S_{\alpha(0, \sigma_X, 0)}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y} = S_{\alpha(0, \sigma_Y, 0)}$ .

Quando  $X$  e  $Y$  são independentes e  $\alpha = \alpha_X = \alpha_Y$ , da Propriedade 1.3.1 temos que

$$W = X - Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha, \sigma_W} \quad \text{onde} \quad \sigma_W = (\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha)^{1/\alpha}. \quad (3.17)$$

Como as distribuições Lévy estáveis  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma_X}$ ,  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma_Y}$  e  $\mathcal{L}_{\alpha, \sigma_W}$  são simétricas, suas respectivas densidades de probabilidade  $\ell_{\alpha, \sigma_X}$ ,  $\ell_{\alpha, \sigma_Y}$  e  $\ell_{\alpha, \sigma_W}$  são as transformadas inversas da f.c. do tipo (1.11),

$$\ell_{\alpha, \sigma_X}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(xt) e^{-\sigma_X^\alpha |t|^\alpha} dt; \quad (3.18)$$

$$\ell_{\alpha, \sigma_Y}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(yt) e^{-\sigma_Y^\alpha |t|^\alpha} dt \quad (3.19)$$

e

$$\ell_{\alpha, \sigma_W}(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(wt) e^{-\sigma_X^\alpha - Y |t|^\alpha} dt. \quad (3.20)$$

A contrapositiva dos seguintes resultados podem ser usados para testar dependência de v.a.'s. Lévy estáveis.

**Teste 3.3.1** *Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha, \sigma_Y}$ . Se  $X$  e  $Y$  são independentes então*

$$\frac{\hat{\sigma}_W^\alpha}{\hat{\sigma}_X^\alpha + \hat{\sigma}_Y^\alpha} \xrightarrow{p} 1,$$

onde

$$\hat{\sigma}_X^\alpha = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_{\alpha, \sigma_X}(0) \right]^{-1};$$

$$\hat{\sigma}_Y^\alpha = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_{\alpha,\sigma_Y}(0) \right]^{-1};$$

e

$$\hat{\sigma}_W^\alpha = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_{\alpha,\sigma_W}(0) \right]^{-1}, \quad \Gamma: \text{função Gamma.}$$

**Prova** Considere as diferenças

$$W_j = X_j - Y_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$W_j = X_j - Y_j \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha,\sigma_W}$  então por (3.17),

$$\sigma_W^\alpha = \sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha.$$

Para provar o teste vamos determinar os estimadores dos parâmetros de escala  $\hat{\sigma}_X$ ,  $\hat{\sigma}_Y$  e  $\hat{\sigma}_W$  como em (2.10). Para isto, considere as densidades de (3.18), (3.19) e (3.20) no 0,

$$\ell_{\alpha,\sigma_X}(0) = \frac{1}{\pi\alpha\sigma_X} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

$$\ell_{\alpha,\sigma_Y}(0) = \frac{1}{\pi\alpha\sigma_Y} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

e

$$\ell_{\alpha,\sigma_W}(0) = \frac{1}{\pi\alpha\sigma_W} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Agora para determinar os estimadores  $\hat{\ell}_{\alpha,\sigma_X}(0)$ ,  $\hat{\ell}_{\alpha,\sigma_Y}(0)$  e  $\hat{\ell}_{\alpha,\sigma_W}(0)$  defina

$$Z_{X_j} = \frac{X_{(j-1)m+1} + \dots + X_{jm}}{m^{1/\alpha}}$$

para  $m_X \xrightarrow{n} \infty$  com  $\frac{m_X}{n} \xrightarrow{n} 0$ ;

$$Z_{Y_j} = \frac{Y_{(j-1)m+1} + \dots + Y_{jm}}{m^{1/\alpha}}$$

para  $m_Y \xrightarrow{n} \infty$  com  $\frac{m_Y}{n} \xrightarrow{n} 0$ , e

$$Z_{W_j} = \frac{W_{(j-1)m+1} + \dots + W_{jm}}{m^{1/\alpha}}$$

para  $m_Y \xrightarrow{n} \infty$  com  $\frac{m_Y}{n} \xrightarrow{n} 0$ . Então para  $\varepsilon_X$  fixo tal que  $\varepsilon_X \downarrow 0$  e  $r_X = \left\lfloor \frac{n}{m_X} \right\rfloor$ ;  $\varepsilon_Y$  fixo tal  $\varepsilon_Y \downarrow 0$  e  $r_Y = \left\lfloor \frac{n}{m_Y} \right\rfloor$ ;  $\varepsilon_W$  fixo tal  $\varepsilon_W \downarrow 0$  e  $r_W = \left\lfloor \frac{n}{m_W} \right\rfloor$  determine os estimadores

$$\hat{\ell}_{\alpha, \sigma_X}(0) = \frac{1}{2\varepsilon_X} \frac{1}{r_X} \sum_{j=1}^{r_X} 1(|Z_{X_j}| \leq \varepsilon_X);$$

$$\hat{\ell}_{\alpha, \sigma_Y}(0) = \frac{1}{2\varepsilon_Y} \frac{1}{r_Y} \sum_{j=1}^{r_Y} 1(|Z_{Y_j}| \leq \varepsilon_Y)$$

e

$$\hat{\ell}_{\alpha, \sigma_W}(0) = \frac{1}{2\varepsilon_W} \frac{1}{r_W} \sum_{j=1}^{r_W} 1(|Z_{W_j}| \leq \varepsilon_W).$$

E pelo Corolário 2.3.1, temos que

$$\hat{\sigma}_X^\alpha = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_{\alpha, \sigma_X}(0) \right]^{-1} \xrightarrow{p} \sigma_X;$$

$$\hat{\sigma}_Y^\alpha = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_{\alpha, \sigma_Y}(0) \right]^{-1} \xrightarrow{p} \sigma_Y$$

e

$$\hat{\sigma}_W^\alpha = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left[ \hat{\ell}_{\alpha, \sigma_W}(0) \right]^{-1} \xrightarrow{p} \sigma_W.$$

Assim

$$\frac{\hat{\sigma}_W^\alpha}{\hat{\sigma}_X^\alpha + \hat{\sigma}_Y^\alpha} \xrightarrow{p} 1.$$

□

Quando  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$  são independentes com  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ , da Proposição 3.2.2 temos que

$$T = XY \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{XY}, \sigma_{XY}} \quad \text{onde} \quad \alpha_{XY} = \min\{\alpha_X, \alpha_Y\} \quad (3.21)$$

e

$$V = \min\{X, Y\} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{\min\{X, Y\}}, \sigma_{\min\{X, Y\}}} \quad \text{onde} \quad \alpha_{\min\{X, Y\}} = \alpha_X + \alpha_Y. \quad (3.22)$$

**Teste 3.3.2** *Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$ . Se  $X$  e  $Y$  são independentes então*

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}}{\hat{\alpha}_{XY}} \xrightarrow{p} 1$$

onde

$$\hat{\alpha}_X = \left[ \frac{1}{k_X} \sum_{j=n-k_X+1}^n \log \left( \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k_X)}} \right) \right]^{-1}, \quad (3.23)$$

$$\hat{\alpha}_Y = \left[ \frac{1}{k_Y} \sum_{j=n-k_Y+1}^n \log \left( \frac{Y_{(j)}}{Y_{(n-k_Y)}} \right) \right]^{-1} \quad (3.24)$$

e

$$\hat{\alpha}_{XY} = \left[ \frac{1}{k_T} \sum_{j=n-k_T+1}^n \log \left( \frac{T_{(j)}}{T_{(n-k_T)}} \right) \right]^{-1}. \quad (3.25)$$

quando  $k_X \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_X}{n} \rightarrow 0$ ,  $k_Y \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_Y}{n} \rightarrow 0$  e  $k_T \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_T}{n} \rightarrow 0$ .

**Prova** Considere as v.a's

$$T_j = X_j Y_j \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{XY}, \sigma_{XY}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como  $\mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$ ,  $\mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$  e  $\mathcal{L}_{\alpha_{XY}, \sigma_{XY}}$  são Lévy estáveis simétricas, como em (2.6), obtemos os estimadores de índices de estabilidade  $\hat{\alpha}_X$ ,  $\hat{\alpha}_Y$  e  $\hat{\alpha}_{XY}$  pelo estimador de Hill. Então, quando  $k_X \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_X}{n} \rightarrow 0$ ,  $k_Y \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_Y}{n} \rightarrow 0$  e  $k_T \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_T}{n} \rightarrow 0$ ,

$$\hat{\alpha}_X \xrightarrow{p} \alpha_X, \quad \hat{\alpha}_Y \xrightarrow{p} \alpha_Y \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}_{XY} \xrightarrow{p} \alpha_{XY}.$$

Usando (3.21) segue imediatamente

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}}{\hat{\alpha}_{XY}} \xrightarrow{p} 1.$$

□

**Teste 3.3.3** *Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_X, \sigma_X}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_Y, \sigma_Y}$ . Se  $X$  e  $Y$  são independentes então*

$$\frac{\hat{\alpha}_X + \hat{\alpha}_Y}{\hat{\alpha}_{\min\{\alpha_X, \alpha_Y\}}} \xrightarrow{p} 1,$$

onde  $\hat{\alpha}_X$  e  $\hat{\alpha}_Y$  são dados em (3.23) e (3.24), e

$$\hat{\alpha}_{\min\{\alpha_X, \alpha_Y\}} = \left[ \frac{1}{k_V} \sum_{j=n-k_V+1}^n \log \left( \frac{V_{(j)}}{V_{(n-k_V)}} \right) \right]^{-1}. \quad (3.26)$$

quando  $k_V \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_V}{n} \rightarrow 0$ .

**Prova** A prova é análoga a do Teste 3.3.2 considerando as v.a.'s

$$V_j = \min\{X_j, Y_j\} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha_{\min\{X, Y\}}, \sigma_{\min\{X, Y\}}}, \quad j = 1, \dots, n$$

cujas estatísticas de ordem são  $V_{(1)} \leq \dots \leq V_{(n)}$ . Para  $k_V \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_V}{n} \rightarrow 0$ ,

$$\hat{\alpha}_{\min\{\alpha_X, \alpha_Y\}} = \left[ \frac{1}{k_V} \sum_{j=n-k_V+1}^n \log \left( \frac{V_{(j)}}{V_{(n-k_V)}} \right) \right]^{-1} \xrightarrow{p} \alpha_{\min\{X, Y\}}.$$

Com este estimador,  $\hat{\alpha}_X$  e  $\hat{\alpha}_Y$  obtidos por (3.23), (3.24), a prova segue de (3.22);

$$\frac{\hat{\alpha}_X + \hat{\alpha}_Y}{\hat{\alpha}_{\min\{\alpha_X, \alpha_Y\}}} \xrightarrow{p} 1.$$

□

### 3.4 Outros Resultados sobre Independência

Sejam  $X \in D(\mathcal{L}\alpha_X, \sigma_X)$  e  $Y \in D(\mathcal{L}\alpha_Y, \sigma_Y)$  independentes com  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ . Da Proposição 2.3.4 temos que

$$T' = XY \in D(\mathcal{L}\alpha_{XY}, \sigma_{XY}) \text{ com } \alpha_{XY} = \min\{\alpha_X, \alpha_Y\} \quad (3.27)$$

e

$$V' = \min\{X, Y\} \in D(\mathcal{L}\alpha_{\min\{X, Y\}}, \sigma_{\min\{X, Y\}}) \text{ com } \alpha_{\min\{X, Y\}} = \alpha_X + \alpha_Y. \quad (3.28)$$

Note que os índices de estabilidade de (3.21) e (3.27) são os mesmos, bem como de (3.22) e (3.28). Assim, podemos estender o uso dos testes 3.3.2 e 3.3.3 para v.a.'s que estão no domínio de atração de distribuições Lévy estáveis.

**Teste 3.4.1** *Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \in D(\mathcal{L}\alpha_X, \sigma_X)$  e  $Y \in D(\mathcal{L}\alpha_Y, \sigma_Y)$ . Se  $X$  e  $Y$  são independentes então*

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}}{\hat{\alpha}_{XY}} \xrightarrow{p} 1,$$

onde  $\hat{\alpha}_X$ ,  $\hat{\alpha}_Y$  e  $\hat{\alpha}_{XY}$  são dados por (3.23), (3.24) e (3.25).

**Teste 3.4.2** *Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \in D(\mathcal{L}\alpha_X, \sigma_X)$  e  $Y \in D(\mathcal{L}\alpha_Y, \sigma_Y)$ . Se  $X$  e  $Y$  são independentes então*

$$\frac{\hat{\alpha}_X + \hat{\alpha}_Y}{\hat{\alpha}_{\min\{\alpha_X, \alpha_Y\}}} \xrightarrow{p} 1,$$

onde  $\hat{\alpha}_X$ ,  $\hat{\alpha}_Y$  e  $\hat{\alpha}_{\min\{\alpha_X, \alpha_Y\}}$  são dados por (3.23), (3.24) e (3.26).

A prova destes testes é a mesma dos Testes 3.3.2. e 3.3.3, pois para v.a.'s que estão no domínio de atração de distribuições de Lévy estáveis simétricas os estimadores dos índices de estabilidade também podem ser obtidos pelo estimador de Hill, da mesma

forma.

Quando  $X$  e  $Y$  são independentes com distribuições assimétricas de caudas pesadas;  $X \in D(\mathcal{L}\alpha_X)$  e  $Y \in D(\mathcal{L}\alpha_Y)$ , da Proposição 3.2.5 temos que o produto

$$XY \in D(\mathcal{L}\alpha_{XY}) \text{ onde } \alpha_{XY} = \min\{\alpha_X, \alpha_Y\}, \quad (3.29)$$

porém a estimação de  $\hat{\alpha}_X$ ,  $\hat{\alpha}_Y$  e  $\hat{\alpha}_{XY}$  não pode ser feita como anteriormente. Neste caso usamos a técnica de superposição proposta no Capítulo 2, Proposição 2.4.1 e 2.4.2, onde para  $X \stackrel{d}{=} F_X$ ,  $Y \stackrel{d}{=} F_Y$  e  $XY \stackrel{d}{=} F_{XY}$  temos

$$F_X^L(x) = \begin{cases} F_X(x), & x < 0 \\ 1 - F_X(-x), & x \geq 0 \end{cases}, \quad F_X^R(x) = \begin{cases} 1 - F_X(-x), & x < 0 \\ F_X(x), & x \geq 0; \end{cases}$$

$$F_Y^L(x) = \begin{cases} F_Y(x), & x < 0 \\ 1 - F_Y(-x), & x \geq 0 \end{cases}, \quad F_Y^R(x) = \begin{cases} 1 - F_Y(-x), & x < 0 \\ F_Y(x), & x \geq 0; \end{cases}$$

e

$$F_{XY}^L(x) = \begin{cases} F_{XY}(x), & x < 0 \\ 1 - F_{XY}(-x), & x \geq 0 \end{cases}, \quad F_{XY}^R(x) = \begin{cases} 1 - F_{XY}(-x), & x < 0 \\ F_{XY}(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

com

$$F_X^L(x) \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X^L, \sigma_X^L}), \quad F_X^R(x) \in D(\mathcal{L}_{\alpha_X^R, \sigma_X^R}); \quad (3.30)$$

$$F_Y^L(x) \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y^L, \sigma_Y^L}), \quad F_Y^R(x) \in D(\mathcal{L}_{\alpha_Y^R, \sigma_Y^R}) \quad (3.31)$$

e

$$F_{XY}^L(x) \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{XY}^L, \sigma_{XY}^L}), \quad F_{XY}^R(x) \in D(\mathcal{L}_{\alpha_{XY}^R, \sigma_{XY}^R}) \quad (3.32)$$



**Teste 3.4.3** *Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com a mesma distribuição de  $(X, Y)$  tal que  $F_X^L, F_X^R, F_Y^L$  e  $F_Y^R$  satisfazem (3.30), (3.31) e (3.32). Se  $X$  e  $Y$  são independentes então*

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X^L, \hat{\alpha}_Y^L\}}{\hat{\alpha}_{XY}^L} \xrightarrow{p} 1,$$

e

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X^R, \hat{\alpha}_Y^R\}}{\hat{\alpha}_{XY}^R} \xrightarrow{p} 1,$$

onde  $\hat{\alpha}_X^R, \hat{\alpha}_Y^R$  e  $\hat{\alpha}_{XY}^R$  são dados por (3.23), (3.24) e (3.25), e

$$\hat{\alpha}_X^L = \left[ \frac{1}{k_X^L} \sum_{j=1}^{k_X^L} \log \left( \frac{X_{(j)}}{X_{(k_X^L)}} \right) \right]^{-1},$$

$$\hat{\alpha}_Y^L = \left[ \frac{1}{k_Y^L} \sum_{j=1}^{k_Y^L} \log \left( \frac{Y_{(j)}}{Y_{(k_Y^L)}} \right) \right]^{-1}$$

e

$$\hat{\alpha}_{XY}^L = \left[ \frac{1}{k_{T''}^L} \sum_{j=1}^{k_{T''}^L} \log \left( \frac{T''_{(j)}}{T''_{(k_{T''}^L)}} \right) \right]^{-1}. \quad (3.33)$$

**Prova** Considere as v.a.'s

$$T_j'' = X_j Y_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

cujas estatísticas de ordem são  $T''_{(1) \leq T''_{(2)} \leq \dots \leq T''_{(n)}}$ .

De (2.19) temos que  $\hat{\alpha}_X^R = \hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y^R = \hat{\alpha}_Y$  e  $\hat{\alpha}_{XY}^R = \hat{\alpha}_{XY}$ , daí estes estimadores são dados por (3.23), (3.24) e (3.25). Para  $k_X^L \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_X^L}{n} \rightarrow 0$ ;  $k_Y^L \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_Y^L}{n} \rightarrow 0$  e  $k_{T''}^L \rightarrow \infty$  com  $\frac{k_{T''}^L}{n} \rightarrow 0$  temos que

$$\hat{\alpha}_X^L \xrightarrow{p} \alpha_X^L, \quad \hat{\alpha}_Y^L \xrightarrow{p} \alpha_Y^L \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}_{T''}^L \xrightarrow{p} \alpha_{XY}^L.$$

Usando os estimadores  $\hat{\alpha}_X^L, \hat{\alpha}_Y^L, \hat{\alpha}_{T''}^L$  e (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) segue que

$$\frac{\min\{\hat{\alpha}_X^L, \hat{\alpha}_{XY}^L\}}{\hat{\alpha}_{XY}^L} \xrightarrow{p} 1, \quad \text{e} \quad \frac{\min\{\hat{\alpha}_X^R, \hat{\alpha}_{XY}^R\}}{\hat{\alpha}_{XY}^R} \xrightarrow{p} 1.$$

□

## Capítulo 4

# Cópulas Associadas a Distribuições Estáveis

Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório com distribuição conjunta  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$ , onde  $F_X$  e  $F_Y$  são as distribuições marginais. A cópula associada  $C_F$  é uma função definida em  $[0, 1]^2$  que satisfaz

$$C_F(F_X(x), F_Y(y)) = F(x, y). \quad (4.1)$$

Naturalmente  $C_F$  representa a estrutura de dependência das variáveis  $X$  e  $Y$ . No caso de independência temos

$$C_F(F_X(x), F_Y(y)) = F_X(x)F_Y(y).$$

Na Seção 4.1 apresentamos as propriedades básicas das cópulas (como referência básica podemos citar: Nelsen (1999); Embrechts, Lindskog e McNeil (2001)). Mostraremos que convenientemente interpretadas essas propriedades são consequência imediata de resultados clássicos e bastante conhecidos de função de distribuição e da transformada integral de probabilidade. De fato, uma cópula nada mais é que uma distribuição conjunta cujas marginais são distribuições uniformes.

---

Na Seção 4.2 apresentamos resultados quanto a cópulas associadas a distribuições bivariadas com marginais Lévy estáveis, isto é, cópulas associadas a  $\mathcal{L}$  com  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  onde  $\mathcal{L}_\alpha = S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'} = S_{\alpha'}(\beta', \sigma', \mu')$  com  $0 < \alpha, \alpha' < 2$ . O nosso Teorema 4.2.1 mostrará que se  $\mathcal{L} \in D_{\max}(\mathcal{G})$ , onde  $\mathcal{G}$  é distribuição bivariada extremal, então a cópula  $C_{\mathcal{L}}$  satisfaz

$$uv - \epsilon \leq C_{\mathcal{L}}(u, v) \leq \min\{u, v\} + \epsilon.$$

Neste caso, o limitante inferior é a cópula da independência e o limitante superior é a cópula superior de Fréchet (cf. (4.5)). Fazendo-se uso dos resultados de Dorea e Sastroewingnjo (1987) e de Dorea e Miasaki (1993), mostramos nos Teoremas 4.2.2 e 4.2.3 resultados quanto a independência assintótica.

Na Seção 4.3 usamos estes teoremas para propor resultados que garantem independência assintótica entre as componentes dos vetores aleatórios i.i.d.  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  com distribuição comum  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  se

$$\frac{n \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq a_n, Y_j \leq a'_n)}{(n-1)^2} \geq 1 \quad \text{para } n \text{ grande} \quad (4.2)$$

onde  $a_n$  e  $a'_n$  satisfazem  $\mathcal{L}_\alpha(a_n) = 1 - \frac{1}{n}$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'}(a'_n) = 1 - \frac{1}{n}$ . Já (4.17) requer  $u_n \uparrow \infty$  e

$$\frac{n \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq u_n, Y_j \leq u_n)}{[\sum_{j=1}^n 1(X_j \leq u_n)][\sum_{j=1}^n 1(Y_j \leq u_n)]} \geq 1 \quad \text{para } n \text{ grande.} \quad (4.3)$$

Para completude do texto, na Seção 4.4 exploramos a relação entre distribuições estáveis e as cópulas Arquimedeanas. Detalhamos resultados que podem ser encontrados em Nelsen (1999) e em Genest e Rivest (1993). Veremos que a família de cópulas de Gumbell- Hougaard pode ser gerada através da transformada inversa de Laplace da distribuição  $\mathcal{L}_\alpha$ .

## 4.1 Propriedades Básicas das Cópulas

Como referências para o estudo das cópulas podemos citar Nelsen (1999) e Sklar (1996). A fim de evitar notações pesadas nos restringiremos ao caso bivariado.

**Definição 4.1.1** *Uma função  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  é chamada de cópula se satisfaz:*

(i)  $C(u, 1) = C(1, u) = u, \quad 0 \leq u \leq 1;$

(ii)  $C(u, v) = 0$  se  $\min\{u, v\} = 0;$

(iii) *Dados  $u \leq u'$  e  $v \leq v'$  temos*

$$C(u', v') - C(u', v) - C(u, v') + C(u, v) \geq 0.$$

Note que, se  $v = v'$  temos  $C(u, v)$  é função crescente em  $u$  e do mesmo modo também é crescente em  $v$ . E por (i) temos  $C(1, 1) = 1$ . Assim, temos a definição alternativa de cópula.

**Definição 4.1.2** *Uma função  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  é chamada de cópula se  $C(u, v) = F(u, v)$  onde  $F$  é uma distribuição cujas marginais são uniformes, ou  $F \in \mathcal{M}(U, V)$ .*

No caso geral uma cópula  $C$  em  $[0, 1]^d$  corresponde a uma distribuição  $d$ -dimensional cujas marginais são uniformes.

**Teorema 4.1.1** (i) *Se  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$  então existe uma cópula  $C_F$  que satisfaz (4.1). E se  $F_X$  e  $F_Y$  são contínuas então  $C_F$  é única.*

(ii) *Se  $C_F$  é uma cópula e se  $F_X$  e  $F_Y$  são distribuições contínuas então  $F$  definida por (4.1) é tal que  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$ .*

Existem situações em que (4.1) não define completamente a função  $C_F$  em  $[0, 1]^2$ . Por exemplo,  $F_X$  ou  $F_Y$  são distribuições discretas. Neste caso podemos sempre considerar as inversas generalizadas

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\} \quad \text{e} \quad F_Y^{-1}(v) = \inf\{y : F_Y(y) \geq v\}$$

e definir para  $(u, v) \in [0, 1]^2$

$$C_F(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)). \quad (4.4)$$

E a relação (4.1) fica satisfeita

$$\begin{aligned} C_F(F_X(x), F_Y(y)) &= F(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y)) \\ &= F(x, y). \end{aligned}$$

Sabemos que, se  $F_X$  é contínua então  $F_X(F_X^{-1}(u)) = u$ . Usando este fato, se  $F_X$  e  $F_Y$  são contínuas temos  $C_F$  unicamente definida por (4.1)

$$\begin{aligned} C_F(u, v) &= C_F(F_X(F_X^{-1}(u)), F_Y(F_Y^{-1}(v))) \\ &= F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Analogamente, é fácil mostrar que (4.1) garante  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$ .

Os argumentos acima mostram o Teorema 4.1.1, que muitas vezes é citado como Teorema de Sklar, nada mais é que uma consequência direta da transformação integral de probabilidade.

Observando que para  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$ ,

$$C_F(F_X(x), F_Y(y)) = F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

e

$$P(X \leq x) + P(Y \leq y) - 1 \leq P(X \leq x, Y \leq y) \leq \min\{P(X \leq x), P(Y \leq y)\},$$

temos de imediato as cópulas inferior e superior de F chet dadas abaixo por (4.5). Note que se  $F_X$  e  $F_Y$  são contínuas então  $F_X^{-1}$  e  $F_Y^{-1}$  também são contínuas e crescentes. Assim, se  $u_n \rightarrow u$  e  $v_n \rightarrow v$  temos

$$C_F(u_n, v_n) = F(F_X^{-1}(u_n), F_Y^{-1}(v_n)) \rightarrow F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v))$$

e  $C_F$    uma fun o contínua. Também, se  $g$  e  $h$  s o fun es estritamente crescentes as distribui es  $G_{g(X)}$  e  $G_{h(Y)}$  de  $g(X)$  e  $h(Y)$  satisfazem

$$G_{g(X)}^{-1}(u) = g(F_X^{-1}(u)) \quad \text{e} \quad G_{h(Y)}^{-1}(v) = h(F_Y^{-1}(v)).$$

E se  $G$    a distribui o conjunta de  $g(X)$ ,  $h(Y)$  temos,

$$\begin{aligned} C_G(u, v) &= G(G_{g(X)}^{-1}(u), G_{h(Y)}^{-1}(v)) \\ &= P(g(X) \leq F_{g(X)}^{-1}(u), h(Y) \leq F_{h(Y)}^{-1}(v)) \\ &= P(g(X) \leq g(F_X^{-1}(u)), h(Y) \leq h(F_Y^{-1}(v))) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(v)) \\ &= C_F(u, v). \end{aligned}$$

Assim, cópulas são invariantes sob transforma es estritamente crescentes.

**Teorema 4.1.2** (i) *Toda cópula satisfaz*

$$\max\{0, x + y - 1\} \leq C(x, y) \leq \min\{x, y\}. \quad (4.5)$$

*Os limitantes são chamados respectivamente de cópula inferior e superior de Fréchet.*

(ii) *Se  $F \in \mathcal{M}(F_X, F_Y)$  e  $F_X$  e  $F_Y$  são distribui es contínuas então a cópula associada  $C_F$    uma fun o contínua. Mais ainda, se  $G$    a distribui o conjunta de  $(g(X), h(Y))$  onde  $g$  e  $h$  são fun es estritamente crescentes então  $C_G(u, v) = C_F(u, v)$ .*

## 4.2 Cópulas de Distribuições Estáveis

As distribuições extremais univariadas são bastante conhecidas e podem ser de apenas tres tipos,

$$\mathcal{G}_\gamma(x) = \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\}, \quad 1 + \gamma x > 0,$$

a depender do índice caudal  $\gamma$  associado: Fréchet se  $\gamma > 0$ ; Weibull se  $\gamma < 0$ ; e Gumbel se  $\gamma = 0$ . Já no caso bivariado elas não são explicitamente conhecidas. Sabemos que se  $\mathcal{G}$  é uma distribuição bivariada extremal então  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_{\gamma'})$ . Em Galambos (1978) o estudo das distribuições  $\mathcal{G}$  é feito através da análise da função de dependência definida por

$$d_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_\gamma(x), \mathcal{G}_{\gamma'}(y)) = \mathcal{G}(x, y), \quad \mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_{\gamma'}).$$

Comparando com (4.1) vemos que a função dependência é a própria cópula associada a  $\mathcal{G}$ . Sabemos que toda  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_{\gamma'})$  é uma distribuição bivariada extremal. Equivalentemente  $\mathcal{G}$  é uma distribuição bivariada extremal se existir distribuição bivariada  $F \in D_{\max}(\mathcal{G})$ , isto é, se existir  $a_n > 0$ ,  $a'_n > 0$ ,  $b_n$  e  $b'_n$  tais que

$$F^n(a_n x + b_n, a'_n y + b'_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}(x, y)$$

e  $\mathcal{G}$  não for degenerada. O Teorema 5.4.1 e o Lema 5.4.1 de Galambos (1978), podem ser sumarizados em:

**Lema 4.2.1** *Se  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_{\gamma'})$  é uma distribuição bivariada extremal então a sua função de dependência satisfaz,*

$$d_{\mathcal{G}}^s(x^{1/s}, y^{1/s}) = d_{\mathcal{G}}(x, y), \quad s > 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

e

$$\mathcal{G}_\gamma(x)\mathcal{G}_{\gamma'}(y) \leq \mathcal{G}(x, y) \leq \min\{\mathcal{G}_\gamma(x), \mathcal{G}_{\gamma'}(y)\}.$$

Vimos no Capítulo 1 que existe uma estreita relação entre distribuições extremas univariadas  $\mathcal{G}_\gamma$  e as distribuições Lévy estáveis  $\mathcal{L}_\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ . A Proposição 2.2.2 mostra que se  $G \in D(\mathcal{L}_\alpha)$  então  $G \in D_{\max}(\mathcal{G}_{1/\gamma})$ . Como  $\mathcal{L}_\alpha \in D(\mathcal{L}_\alpha)$  temos que  $\mathcal{L}_\alpha \in D_{\max}(\mathcal{G}_{1/\alpha})$ . Esta é a relação básica que nos permitirá fazer uso dos resultados acima para cópulas de distribuições de Lévy estáveis.

Seja  $\mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  a classe das distribuições com marginais Lévy estáveis  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  para algum  $0 < \alpha < 2$  e algum  $0 < \alpha' < 2$ .

**Teorema 4.2.1** *Seja  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  e assumamos que  $\mathcal{L} \in D_{\max}(\mathcal{G})$  onde  $\mathcal{G}$  é uma distribuição bivariada extremal, então existem  $a_n > 0$ ,  $a'_n > 0$ ,  $b_n$  e  $b'_n$  tais que para*

$$x_n = a_n x + b_n \quad e \quad y_n = a'_n y + b'_n \quad (4.6)$$

temos

$$|C_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_\alpha^n(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n)) - C_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{L}_\alpha(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n))| \xrightarrow{n} 0$$

onde  $C_{\mathcal{G}}$  e  $C_{\mathcal{L}}$  são respectivamente as cópulas de  $\mathcal{G}$  e de  $\mathcal{L}$ . Mais ainda, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0(\epsilon)$  tal que  $n \geq n_0(\epsilon)$

$$\mathcal{L}_\alpha^n(x_n) \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n) - \epsilon \leq C_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{L}_\alpha(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n)) \leq \min\{\mathcal{L}_\alpha^n(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n)\} + \epsilon. \quad (4.7)$$

**Prova** Pela Proposição 2.2.2 temos  $\mathcal{L}_\alpha \in D_{\max}(\mathcal{G}_\gamma)$  para  $\gamma = 1/\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'} \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma'})$  com  $\gamma' = 1/\alpha'$ . Assim,

$$\mathcal{L}_\alpha^n(x_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_{1/\gamma}(x) \quad e \quad \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_{1/\gamma'}(y). \quad (4.8)$$

Como  $\mathcal{L} \in D_{\max}(\mathcal{G})$  e  $\mathcal{G}$  é distribuição extremal temos necessariamente  $\mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{G}_{1/\gamma}, \mathcal{G}_{1/\gamma'})$  e por (4.1) e (4.6)

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{L}_\alpha(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n)) &= \mathcal{L}^n(a_n x + b_n, a'_n x + b'_n) \\ &\xrightarrow{n} \mathcal{G}(x, y). \end{aligned}$$



Pelo Teorema 4.1.2 e pela continuidade das distribuições  $\mathcal{G}_{1/\gamma}$  e  $\mathcal{G}_{1/\gamma'}$  temos que  $C_{\mathcal{G}}(\cdot, \cdot)$  é uma função contínua. Por (4.8) temos

$$C_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{\alpha}^n(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n)) \xrightarrow{n} C_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_{1/\gamma}(x), \mathcal{G}_{1/\gamma'}(y)) = \mathcal{G}(x, y).$$

como  $C_{\mathcal{G}} = d_{\mathcal{G}}$ , a função de dependência, temos também

$$C_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{\alpha}^n(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n)) = C_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{L}_{\alpha}(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n))$$

e

$$|C_{\mathcal{G}}^n(\mathcal{L}_{\alpha}(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n)) - C_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{L}_{\alpha}(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n))| \xrightarrow{n} 0.$$

A relação (4.7) é consequência imediata do Lema 4.2.1, pois

$$\mathcal{L}_{\alpha}^n(x_n)\mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n) \leq C_{\mathcal{G}}^n(\mathcal{L}_{\alpha}(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(y_n)) \leq \min\{\mathcal{L}_{\alpha}^n(x_n), \mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n)\}.$$

□

A seguir, se  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha'}$ , estabelecemos condições suficientes para independência assintótica de  $X$  e  $Y$ .

**Teorema 4.2.2** *Seja  $\mathcal{L}$  a distribuição de  $(X, Y)$  com  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha}$  e  $Y \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_{\alpha'}$ . Assuma que*

$$C_{\mathcal{L}}(u, v) \leq uv \tag{4.9}$$

*então  $X$  e  $Y$  são assintoticamente independentes no sentido que existem  $a_n > 0$ ,  $a'_n > 0$ ,  $b_n$  e  $b'_n$  tais que*

$$\frac{\mathcal{L}^n(x_n, y_n)}{\mathcal{L}_{\alpha}^n(x_n)\mathcal{L}_{\alpha'}^n(y_n)} \xrightarrow{n} 1. \tag{4.10}$$

*para  $x_n = a_n x + b_n$  e  $y_n = a'_n y + b'_n$ .*

**Prova** Como na prova do Teorema anterior usando a notação (4.6) temos

$$\mathcal{L}_{\alpha}^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_{1/\gamma}(x) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\alpha'}^n(a'_n y + b'_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_{1/\gamma'}(y) \tag{4.11}$$

Usamos agora o Teorema 3.1 de Dorea e Sastrosowignjo (1987):

se  $G \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma_1})$  e  $H \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma_2})$ ,  $S \in \mathcal{M}(G, H)$  e  $S \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma_1}, \mathcal{G}_{\gamma_2})$  então para toda distribuição  $F \in \mathcal{M}(G, H)$  com  $F \leq S$  temos que  $F \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma_1}, \mathcal{G}_{\gamma_2})$ .

Por (4.1) e (4.9) temos

$$\mathcal{L}(a_n x + b_n, a'_n y + b'_n) \leq \mathcal{L}_\alpha(a_n y + b_n) \mathcal{L}_{\alpha'}(a'_n x + b'_n).$$

Defina  $S(x, y) = \mathcal{L}_\alpha(x) \mathcal{L}_{\alpha'}(y)$ . Por (4.11) temos

$$S^n(a_n x + b_n, a'_n y + b'_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_{1/\gamma}(x) \mathcal{G}_{1/\gamma'}(y).$$

Segue que  $S \in D_{\max}(\mathcal{G}_{1/\gamma}, \mathcal{G}_{1/\gamma'})$  e portanto  $\mathcal{L} \in D_{\max}(\mathcal{G}_{1/\gamma}, \mathcal{G}_{1/\gamma'})$  e

$$\mathcal{L}^n(a_n x + b_n, a'_n y + b'_n) \xrightarrow{n} \mathcal{G}_{1/\gamma}(x) \mathcal{G}_{1/\gamma'}(y).$$

Sejam  $x$  e  $y$  tais que  $\mathcal{G}_{1/\gamma}(x) > 0$  e  $\mathcal{G}_{1/\gamma'}(y) > 0$ , por (4.11) derivamos (4.10).

□

**Lema 4.2.2** (Dorea e Miasaki (1993)) *Assuma que  $F \in \mathcal{M}(G, H)$  com  $G \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma_1})$  e  $H \in D_{\max}(\mathcal{G}_{\gamma_2})$  e que para algum  $(x_*, y_*)$  temos  $0 < \mathcal{G}_{\gamma_1}(x_*) \mathcal{G}_{\gamma_2}(y_*) < 1$  e que existem  $a_n > 0$ ,  $a'_n > 0$ ,  $b_n$  e  $b'_n$  tais que*

$$|F^n(a_n x_* + b_n, a'_n y_* + b'_n) - G^n(a_n x_* + b_n) H^n(a'_n y_* + b'_n)| \xrightarrow{n} 0. \quad (4.12)$$

Então (4.12) vale para todo  $(x, y)$ .

**Teorema 4.2.3** *Assuma que  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  então existem  $a_n > 0$ ,  $a'_n > 0$ ,  $b_n$  e  $b'_n$  tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\alpha^n(a_n x + b_n) \mathcal{L}_{\alpha'}^n(a'_n y + b'_n) = \mathcal{G}_{1/\alpha}(x) \mathcal{G}_{1/\alpha'}(y).$$

Seja  $(x_*, y_*)$  tal que  $0 < \mathcal{G}_{1/\alpha}(x_*) \mathcal{G}_{1/\alpha'}(y_*) < 1$  e assuma que

$$\mathcal{L}^n(a_n x_* + b_n, a'_n y_* + b'_n) - \mathcal{L}_\alpha^n(a_n x_* + b_n) \mathcal{L}_{\alpha'}^n(a'_n y_* + b'_n) \xrightarrow{n} 0 \quad (4.13)$$

então (4.13) vale para todo  $(x, y)$ .

**Prova** Segue imediatamente do Lema 4.2.2 e da Proposição 2.2.2.

□

### 4.3 Resultados sobre Independência Assintótica

Sejam  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  vetores aleatórios i.i.d. com distribuição comum  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  onde  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  são distribuições de Lévy estáveis. Como  $\mathcal{L}_\alpha \in D_{\max}(\mathcal{G}_{1/\alpha})$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'} \in D_{\max}(\mathcal{G}_{1/\alpha'})$  encontramos na literatura várias alternativas para se estimar as constantes estabilizantes  $a_n > 0$ ,  $a'_n > 0$ ,  $b_n$  e  $b'_n$  de (4.11). Ver por exemplo, Castro (2003).

No nosso caso, como  $\gamma = 1/\alpha > 0$  e  $\gamma' = 1/\alpha' > 0$  podemos tomar  $b_n = b'_n = 0$ . As constantes  $a_n$  e  $a'_n$  podem ser tomadas como os percentis superiores de  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  respectivamente

$$1 - \mathcal{L}_\alpha(a_n) = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad 1 - \mathcal{L}_{\alpha'}(a'_n) = \frac{1}{n}. \quad (4.14)$$

Como  $1 + \frac{1}{\alpha} > 0$  e  $1 + \frac{1}{\alpha'} > 0$  temos que  $\mathcal{G}_{1/\alpha}(1)\mathcal{G}_{1/\alpha'}(1) > 0$ . Usando (4.13) expressar (4.14) como

$$C_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{L}_\alpha(a_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(a'_n)) = C_{\mathcal{L}}^n\left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\mathcal{L}_\alpha^n(a_n)\mathcal{L}_{\alpha'}^n(a'_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Por outro lado,

$$C_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_\alpha(a_n), \mathcal{L}_{\alpha'}(a'_n)) = \mathcal{L}(a_n, a'_n)$$

e que pode ser estimada pela distribuição empírica

$$\hat{\mathcal{L}}(a_n, a'_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq a_n, Y_j \leq a'_n). \quad (4.15)$$

O Teorema 4.2.3 garante independência assintótica entre as componentes dos vetores aleatórios i.i.d.  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  com distribuição comum  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\alpha'})$  se

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}^n(a_n, a'_n)}{\mathcal{L}_\alpha^n(a_n)\mathcal{L}_{\alpha'}^n(a'_n)} \xrightarrow{n} 1$$

ou

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}^n(a_n, a'_n)}{\mathcal{L}_\alpha^n(a_n)\mathcal{L}_{\alpha'}^n(a'_n)} \geq 1 \text{ para } n \text{ grande.}$$

Equivalentemente, para  $n$  grande

$$\frac{n \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq a_n, Y_j \leq a'_n)}{(n-1)^2} \geq 1. \quad (4.16)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathcal{L}_\alpha(a_n x + b_n) \uparrow 1 \text{ e que } \inf\{x : \mathcal{L}(x) \leq 1 - \frac{1}{n}\} \xrightarrow{n} \infty.$$

Assim, se os percentis superiores  $a_n$  e  $a'_n$  não são disponíveis, podemos tomar  $u_n \uparrow \infty$  e usar os estimadores empíricos de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  para analisar indicativo de independência assintótica usamos

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}^n(u_n, u_n)}{\hat{\mathcal{L}}_\alpha^n(u_n)\hat{\mathcal{L}}_{\alpha'}^n(u_n)} \geq 1 \quad u_n \uparrow \infty \quad (4.17)$$

onde  $\hat{\mathcal{L}}$  é definido por (4.15) e

$$\hat{\mathcal{L}}_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq u_n) \text{ e } \hat{\mathcal{L}}_{\alpha'} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1(Y_j \leq u_n).$$

## 4.4 Cópulas Arquimedianas

Observe que se  $F \in \mathcal{M}(G, H)$  com  $X \stackrel{d}{=} G$  e  $Y \stackrel{d}{=} H$  independentes, temos  $F = GH$  e conseqüentemente a cópula da independência

$$C_F(x, y) = xy.$$

Tomando-se a função estritamente decrescente  $\psi(t) = -\ln t$  podemos expressar  $C_F$  como

$$C_F(x, y) = \psi^{-1}(\psi(x) + \psi(y))$$

de modo que propriedades de  $C_F$  podem ser analisadas estudando-se o comportamento da função  $\psi$ . Cópulas com representações similares são conhecidas como cópulas Arquimedianas.

**Definição 4.4.1** *Uma cópula  $C$  é dita Arquimediana se existir uma função  $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  convexa, estritamente decrescente com  $\psi(1) = 0$  e tal que*

$$C(x, y) = \psi^{[-1]}(\psi(x) + \psi(y)), \quad (4.18)$$

onde a função  $\psi$  é chamada de geradora e sua pseudo-inversa é definida por

$$\psi^{[-1]}(x) = \begin{cases} \psi^{-1}(x), & 0 \leq x \leq \psi(0) \\ 0, & \psi(0) \leq x. \end{cases}$$

A tabela abaixo ilustra algumas famílias de cópulas Arquimedianas (cf. Genest e Rivest (1993)).

Família	Geradora	Cópula $C(u, v)$
Independência	$-\ln t$	$xy$
Clayton (1978) Cook-Johnson(1981)	$t^{-\gamma} - 1, \gamma \geq 1$	$(x^{-\gamma} + y^{-\gamma} - 1)^{-1/\gamma}$
Gumbell (1960) Hougaard (1886)	$(-\ln t)^\gamma, \gamma \geq 1$	$\exp \left\{ -[(-\ln x)^\gamma + (-\ln y)^\gamma]^{1/\gamma} \right\}$
Frank (1979)	$\ln \left( \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^\gamma - 1} \right), \gamma \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\gamma} \ln \left( 1 + \frac{(e^{\gamma x} - 1)(e^{\gamma y} - 1)}{e^\gamma - 1} \right)$

Um procedimento para construir cópulas Arquimedianas é considerar como geradora a transformada inversa de Laplace de alguma distribuição apropriadamente selecionada. Suponha que  $X \stackrel{d}{=} Y \stackrel{d}{=} G$ , temos a transformada de Laplace

$$\phi_G(t) = E(e^{-tX}) = \int e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0.$$

Se  $\phi_G$  existir, ela será contínua e decrescente e sua transformada inversa também será contínua e decrescente. Por exemplo, se  $G$  é a massa de probabilidade 1 então  $\phi_G(t) = e^{-t}$  com  $\phi_G^{-1}(t) = -\ln t$  que é a função geradora da cópula da independência.

Considere  $G \stackrel{d}{=} S_\alpha(0, 1, 0)$ , isto é, uma distribuição estável simétrica com parâmetro de escala  $\sigma = 1$  e índice  $0 < \alpha \leq 2$ . Neste caso, de (1.11) temos a função característica

$$\varphi_G(t) = \exp\{-|t|^\alpha\}$$

e, por conseguinte

$$\phi_G(t) = \varphi_G(it) = \exp(-|t|^\alpha)$$

com

$$\phi_G^{-1}(t) = (-\ln t)^{1/\alpha}, \quad \gamma = 1/\alpha \geq 1$$

que é a geradora da cópula Gumbell - Hougaard.

Ao considerar a distribuição estável  $G \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, 0)$  com  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $\sigma > 0$  e  $0 < \alpha \leq 1$  temos que

$$\phi_G^{-1}(t) = \frac{1}{\sigma \beta^{1/\alpha}} (\cos \frac{\pi}{2} \alpha)^{1/\alpha} (-\ln t)^{1/\alpha}$$

também é geradora da cópula Gumbell - Hougaard.

Outro aspecto interessante das cópulas Arquimedianas é a dependência caudal superior (ou inferior), o que vem ilustrar a pertinência dos testes (4.16) e (4.17) propostas na seção anterior.

**Definição 4.4.2** Dizemos que a cópula  $C$  tem dependência caudal superior, se

$$\lambda_S = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} > 0 \quad (4.19)$$

existir.  $\lambda_S$  é chamado de coeficiente caudal superior e se  $\lambda_S = 0$  dizemos que  $C$  não tem dependência caudal superior.

Note que, se  $C = C_F$  com  $F \in \mathcal{M}(G, G)$  temos  $P(X > G^{-1}(u)) = 1 - G(G^{-1}(u)) = 1 - u$  e por (4.4)

$$\begin{aligned} P(X > G^{-1}(u), Y > G^{-1}(u)) &= 1 - P(X > G^{-1}(u)) - P(Y > G^{-1}(u)) \\ &+ P(X \leq G^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u)) \\ &= 1 - 2u + C_F(u, u) \end{aligned}$$

de modo que,

$$\lambda_S = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(u) | X > G^{-1}(u)).$$

No caso de cópulas Arquimedianas com geradora  $\psi$  satisfazendo  $(\psi^{-1})'(0) = -\infty$ , o coeficiente caudal superior toma uma forma simples

$$\lambda_S = 2 - 2 \lim_{s \downarrow 0} \left[ \frac{(\psi^{-1})'(2s)}{(\psi^{-1})'(s)} \right] > 0.$$

Veja, por exemplo, Nelsen (1999).

**Exemplo 4.4.1** Considere a cópula Gumbell-Hougaard com geradora  $\psi(t) = (-\ln t)^{1/\alpha}$ . Temos  $\psi^{-1}(t) = \exp\{-t^\alpha\}$  e  $(\psi^{-1})'(t) = -\alpha t^{\alpha-1} \exp\{-t^\alpha\}$  com  $(\psi^{-1})'(0) = -\infty$  para  $\alpha < 1$ , então

$$\lambda_S = 2 - 2^\alpha \lim_{s \downarrow 0} \frac{\exp\{-(2s)^\alpha\}}{\exp\{-s^\alpha\}} = 2 - 2^\alpha.$$

Assim, para  $\alpha < 1$  a cópula tem dependência caudal superior.

# Capítulo 5

## Ilustrações Numéricas

Procurando organizar melhor as ilustrações numéricas a serem apresentadas na Seção 5.2, na Seção 5.1 escrevemos quatro modelos a serem seguidos.

### 5.1 Modelos

Os Modelos 1 e 2 vem do Corolário 2.3.1 e da Proposição 2.4.2 respectivamente, sendo que o modelo 1 é um algoritmo para a estimação do índice de estabilidade e parâmetro de escala de uma distribuição Lévy estável simétrica e o modelo 2 é um algoritmo para a estimação do índice de estabilidade e parâmetro de escala de uma distribuição Lévy estável em situações assimétricas.

Os Modelos 3 e 4 obtidos dos Testes 3.4.1 e 3.4.3, respectivamente, são algoritmos para testar a dependência de dados modelados como anteriormente.

---



**Modelo 1: estimação de distribuições Lévy estáveis simétricas**

1. Para uma amostra de tamanho  $n$ ,  $X_1, \dots, X_n$ , escolha um inteiro  $k < n$  e calcule o estimador  $\hat{\alpha}_X$  dado por (2.6);

$$\hat{\alpha}_X = \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k)}} \right]^{-1}.$$

2. Escolha um inteiro  $M$  apropriado, algum  $\varepsilon > 0$  e calcule  $\hat{\sigma}_X$  por (2.10); primeiro determine as estatísticas

$$Y_j = \frac{1}{M^{1/\hat{\alpha}_n}} (X_{(j-1)M+1} + \dots + X_{Mj}) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, [n/M],$$

o estimador

$$\hat{\ell}(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} 1 \left( |Y_j^{(n)}| \leq \varepsilon \right)$$

e calcule

$$\hat{\sigma}_X = \frac{\Gamma(1/\hat{\alpha})}{\pi \hat{\alpha}} \left[ \hat{\ell}_n(0) \right]^{-1}.$$

3. Validar o modelo, comparando a densidade  $\ell_{\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_n}(\cdot)$  versus a densidade empírica da amostra.

**Modelo 2: estimação de distribuições de Lévy assimétricas**

1. Escolha apropriadamente  $k^L$  e  $k^R$ . Calcule os estimadores  $\hat{\alpha}_X^L$  e  $\hat{\alpha}_X^R$  dado por (2.19).
2. Da amostra  $X_1, \dots, X_n$  tome os valores negativos  $X_{\tau_1^L}, \dots, X_{\tau_n^L}$  e os valores positivos  $X_{\tau_1^R}, \dots, X_{\tau_n^R}$ . Mude aleatoriamente os sinais de  $X_{\tau_j^L}$ 's e  $X_{\tau_j^R}$ 's e defina  $X_j^L$ 's  $X_j^R$ 's. Escolha  $\varepsilon^L > 0$ ,  $\varepsilon^R > 0$ ,  $M^R$  e  $M^L$  e calcule as estimativas  $\hat{\sigma}_n^L$  e  $\hat{\sigma}_n^R$  dadas por (2.21) e (2.23).
3. Validar o modelo comparando a densidade

$$\ell(x) = \begin{cases} \ell_{\hat{\alpha}_n^L, \hat{\sigma}_n^L}(x) & , x < 0 \\ \ell_{\hat{\alpha}_n^R, \hat{\sigma}_n^R}(x) & , x > 0 \end{cases}$$

com a densidade empírica de  $X_1^{(n,L)}, \dots, X_{r_n^j}^{(n,L)}$  para  $x < 0$  e de  $X_1^{(n,R)}, \dots, X_{r_n^j}^{(n,R)}$  para  $x > 0$ .

**Modelo 3: teste de dependência para o caso simétrico**

1. Para as amostras  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  estime  $\hat{\alpha}_n^X$ ,  $\hat{\alpha}_n^Y$  como no Modelo 1.
2. Escolher um inteiro  $k$  apropriado e estimar  $\hat{\alpha}_{XY}$  por (3.25).
3. Se

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\min \{\hat{\alpha}_X, \hat{\alpha}_Y\}}{\hat{\alpha}_{XY}}$$

não se aproximar de 1 então as  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  são dependentes.

**Modelo 4: teste de dependência para o caso assimétrico**

1. Estimar  $\alpha_X^R$ ,  $\alpha_X^L$ ,  $\alpha_Y^R$ ,  $\alpha_Y^L$  seguindo o Modelo 2.
2. escolher inteiros não negativos  $k_X^L$ ,  $k_X^R$ ,  $k_Y^L$  e  $k_Y^R$  e estimar  $\hat{\alpha}_{XY}^R$  e  $\hat{\alpha}_{XY}^L$  por (3.25) e (3.33).
3. Se

$$\hat{\alpha}_n^L = \frac{\min \{\alpha_X^L, \alpha_Y^L\}}{\hat{\alpha}_{XY}^L}$$

e

$$\hat{\alpha}_n^R = \frac{\min \{\alpha_X^R, \alpha_Y^R\}}{\hat{\alpha}_{XY}^R}$$

não se aproximarem de 1, então as sequências de v.a.'s assimétricas  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  são dependentes.

**5.2 Simulações**

Ilustramos nossos modelos usando quatro conjuntos de dados provenientes de retornos diários  $X_n = S(n) - S(n-1)$  de taxas de câmbio  $S(n)$  no dia  $n$ , supondo que tais retornos são independentes. Estas taxas de câmbio são da Suíça (franco), do Brasil (real), do México (peso) e do Sri Lanka (rupee) versus o dólar US.

Os dados foram obtidos do website <http://www.federalreserve.gov/releases/H10/hist/>. A quantidade de dados com seus respectivos períodos de tempo dos quatro países são mostrados na Tabela 1.

**Tabela 1:**

País	Moeda	Período de tempo	Número de dados
Brasil	real	2Jan95-10Jun05	2624
México	peso	8Nov93-10Jun05	2910
Sri Lanka	rupee	2Jan73-10Jun05	7782
Suíça	franco	4Jan71-10Jun05	8642

O comportamento dos estimadores de estabilidade dos retornos diários de cada país calculados usando os modelos 1 e 2 é mostrado nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

A Figura 5.1 mostra que o estimador do índice de estabilidade  $\hat{\alpha}_X(k)$  dos **retornos diários da Suíça** apresenta menor variação a partir de aproximadamente  $k = 25$ , no qual assume valores superiores a dois, o que indica que a série de dados correspondente não se ajusta a uma distribuição estável. **Portanto, nossos modelos não se aplicam para esta série de dados.**

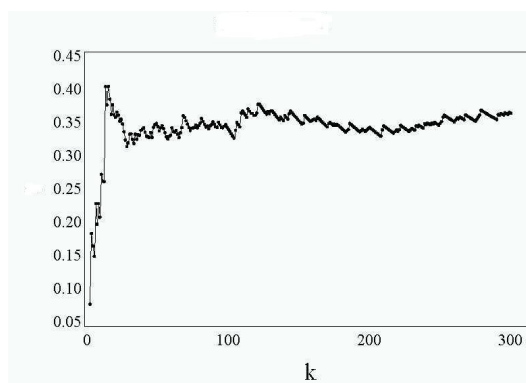


Figura 5.1:  $\hat{\gamma}_X(k) = \hat{\alpha}_X(k)^{-1}$  para a taxa de câmbio de Suíça, com vários valores de  $k$ .

A Figura 5.2 mostra que o estimador  $\hat{\alpha}_X(k)$  dos **retornos diários do Brasil** se estabiliza no intervalo  $110 \leq k \leq 200$ . Assim, para a simulação dos dados devemos escolher  $k$  em tais intervalos.

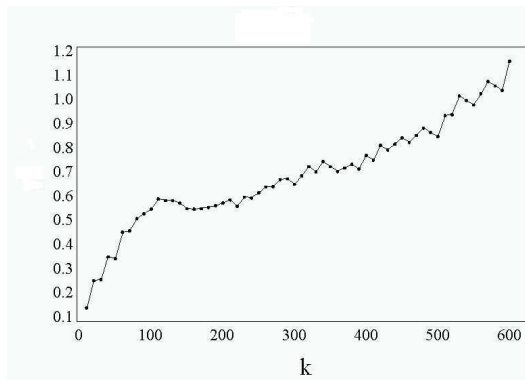


Figura 5.2:  $\hat{\gamma}_X(k) = \hat{\alpha}_X(k)^{-1}$  para as taxas de câmbio do Brasil, com vários valores de  $k$ .

O estimadores do índice de estabilidade  $\hat{\alpha}_X(k)$  dos **retornos diários do México e do Sri Lanka** variam conforme  $k$ . Para o México a menor variação dos estimadores ocorre quando  $30 \leq k \leq 40$ , e para o Sri Lanka ocorre quando  $50 \leq k \leq 95$ .

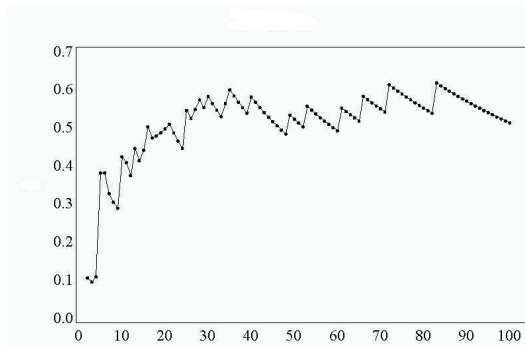


Figura 5.3:  $\hat{\gamma}_X(k) = \hat{\alpha}_X(k)^{-1}$  para as taxas de câmbio do México, com vários valores de  $k$ .

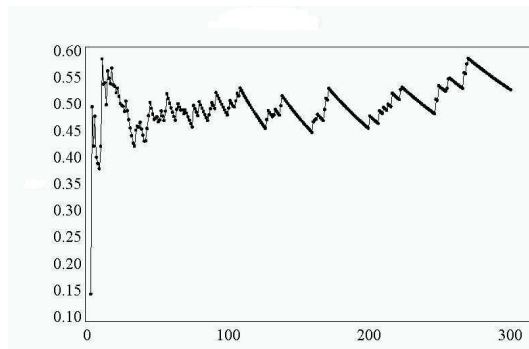


Figura 5.4:  $\hat{\gamma}_X(k) = \hat{\alpha}_X(k)^{-1}$  para as taxas de câmbio do Sri Lanka, com vários valores de  $k$ .

O comportamento dos estimadores dos parâmetros de escala para a série de dados do Brasil, México e Sri Lanka calculados usando o Modelo 1, é mostrado na Figura 5.5 para valores de  $2 \leq M \leq 30$ . A reta horizontal está na média dos valores assumidos.

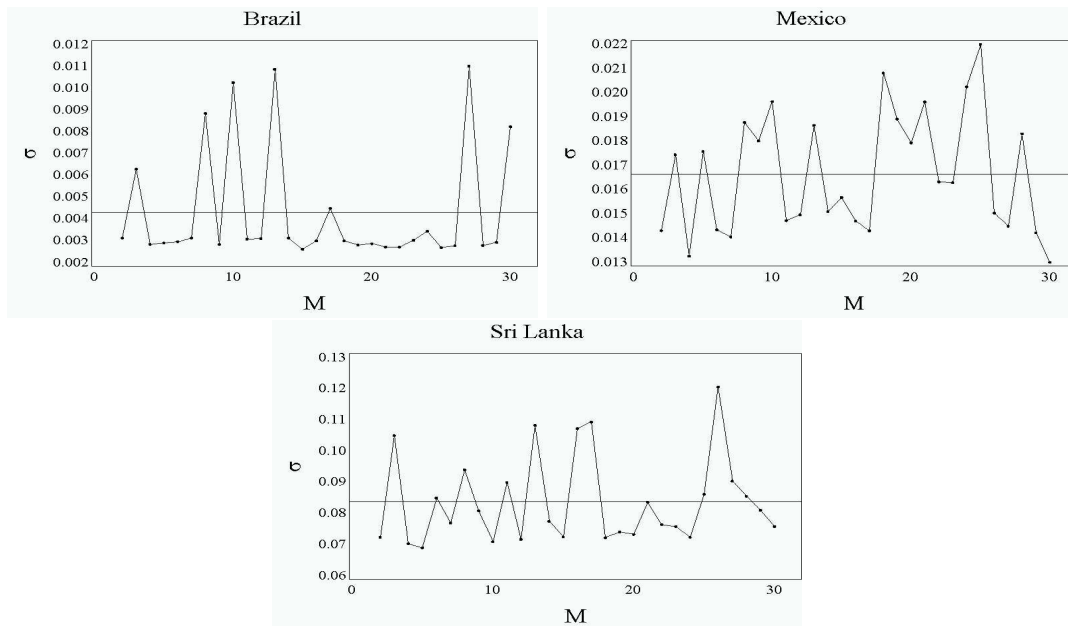


Figura 5.5:  $\hat{\sigma}_X^R(M)$  para a taxa de câmbio do Brasil, México e Sri Lanka.

Na Tabela 2 mostramos as estimativas do índice de estabilidade e parâmetro de escala para o caso simétrico e assimétrico, obtidos ao escolher valores de  $k$ ,  $M$  e  $\epsilon$  segundo o análise acima.

Tabela 2:

País	Tipo	$\alpha$	$\sigma$	$k$	$M$	$\epsilon$
Brasil	Simétrico	1.747813892	0.1006471166e-1	140	14	0.004
	Assimétrico (R)	1.747813892	0.4234285132e-2	140	12	0.005
	Assimétrico (L)	2.0	0.1247519144e-1	80	12	0.005
México	Simétrico	1.667046144	0.3156949612e-1	35	9	0.017
	Assimétrico(R)	1.667046144	0.1236089072e-1	35	11	0.005
	Assimétrico (L)	1.882505834	0.2825436173e-1	32	11	0.05
Sri Lanka	Simétrico	1.986768456	0.5509843319e-1	95	12	0.08
	Assimétrico (R)	1.986768456	0.5747401968e-1	95	16	0.023
	Assimétrico (L)	1.917152877	0.2259028102e-1	90	16	0.04
Suíça	Simétrico	2.886523658	—	—	—	—

Nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 comparamos com a densidade empírica e a densidade estimada correspondente a cada conjunto de retornos.

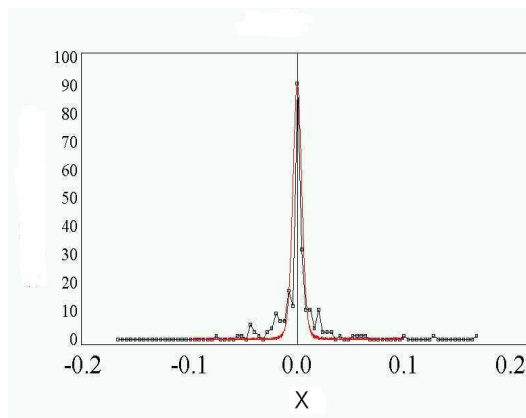


Figura 5.6: densidade empírica e densidade estimada -Brasil.

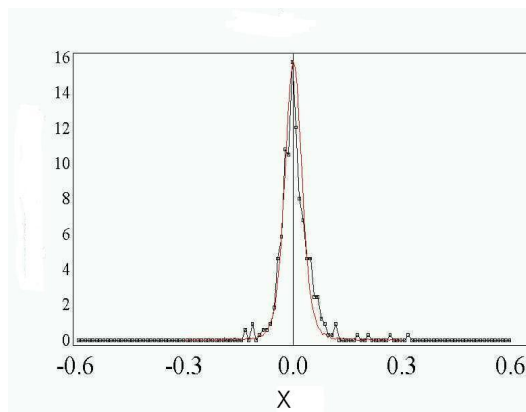


Figura 5.7: densidade empírica e densidade estimada - México.

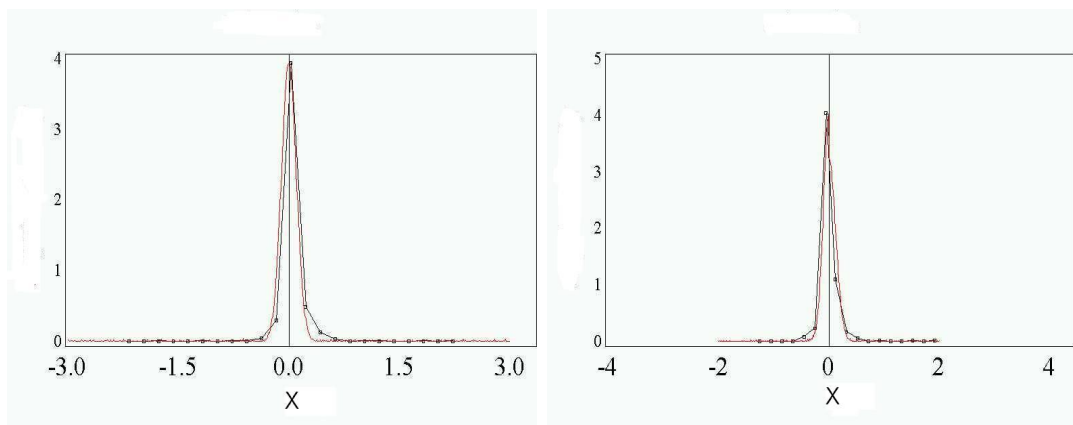


Figura 5.8: densidade empírica e densidade estimada - Sri Lanka, caso simétrico e assimétrico.

Considerando os retornos diários do Brasil e do México como sendo as v.a.'s  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  para os  $n$  ( $n = 1000$ ) últimos retornos, calculamos  $\hat{\alpha}_n(k)$ , seguindo o modelo 3.

O comportamento do estimador  $\hat{\alpha}_n(k)$  é mostrado na Figura 5.9, este estimador é mais estável no intervalo  $90 \leq k \leq 130$ . Então escolhimos  $k = 110$  e com isto obtivemos  $\hat{\alpha}_n(k) = 0.8077925539$ . Na verdade para qualquer valor de  $k$  nesse intervalo temos o mesmo valor até duas casas decimais. Daí, concluímos que **a séries de retornos do Brasil e do México são assintoticamente dependentes.**

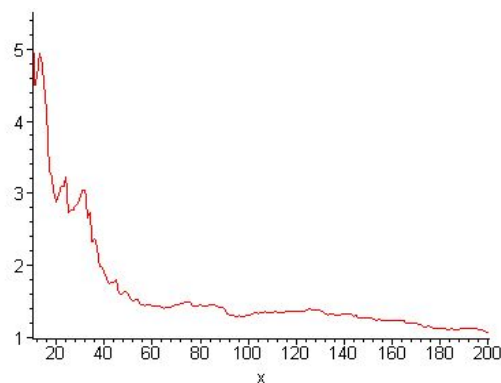


Figura 5.9:  $\hat{\alpha}_n(k)$  para varios valores de  $k$ .

Agora, considerando os retornos diários do Brasil e Sri Lanka calculamos os estimadores do modelo 4. O comportamento de  $\hat{\alpha}_n^R(k)$  e  $\hat{\alpha}_n^L(k)$  são mostrados na Figura 5.10 e aqui temos que eles se estabilizam nos intervalos  $90 \leq k \leq 120$  e  $60 \leq k \leq 75$ , respectivamente.

Analogamente, calculamos e mostramos na Figura 5.11 o comportamento dos estimadores  $\hat{\alpha}_n^R(k)$  e  $\hat{\alpha}_n^L(k)$  dos retornos diários do México e do Sri Lanka, aqui estes estimadores apresentam menor variação nos intervalos  $10 < k < 50$  e  $100 < k < 145$ .

A Tabela 4 mostra as estimativas  $\hat{\alpha}_n(k)$ ,  $\hat{\alpha}_n^R(k)$  e  $\hat{\alpha}_n^L(k)$  para  $k$  escolhido nos intervalos acima. Como as estimativas obtidas não são suficientemente próximos de 1, concluímos que **a série dos retornos do Brasil e do Sri Lanka são assintoticamente dependentes, bem como Sri Lanka e México.**

**Tabela 4:**

País	Tipo	Estimador	k
Brasil × Mexico	Simétrico	$\hat{\alpha}_n(k) = 0.8077925539$	110
Brasil × Sri Lanka	Assimétrico(R)	$\hat{\alpha}_n^R(k) = 0.7704638738$	110
	Assimétrico (L)	$\hat{\alpha}_n^L(k) = 0.7899986162$	70
Mexico × Sri Lanka	Assimétrico (R)	$\hat{\alpha}_n^R(k) = 1.204595619$	25
	Assimétrico (L)	$\hat{\alpha}_n^L(k) = 1.204595619$	135

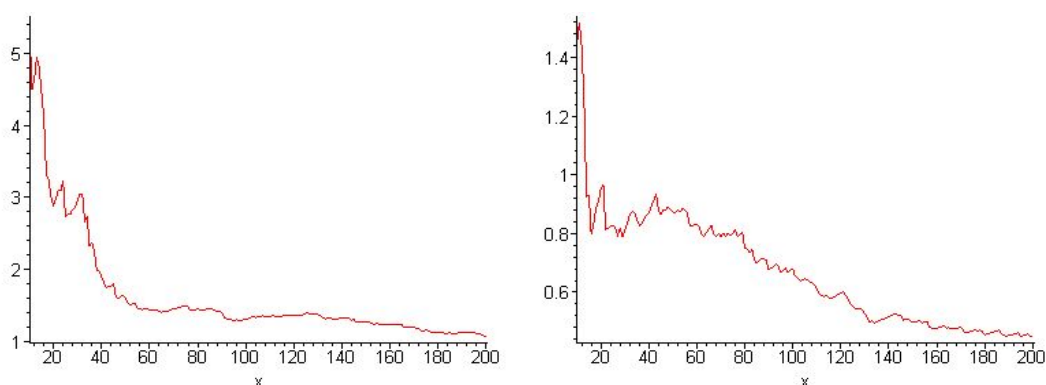


Figura 5.10:  $\hat{\alpha}_n^R(k)$  e  $\hat{\alpha}_n^L(k)$  correspondentes Brasil e Sri Lanka, para vários valores de  $k$ .



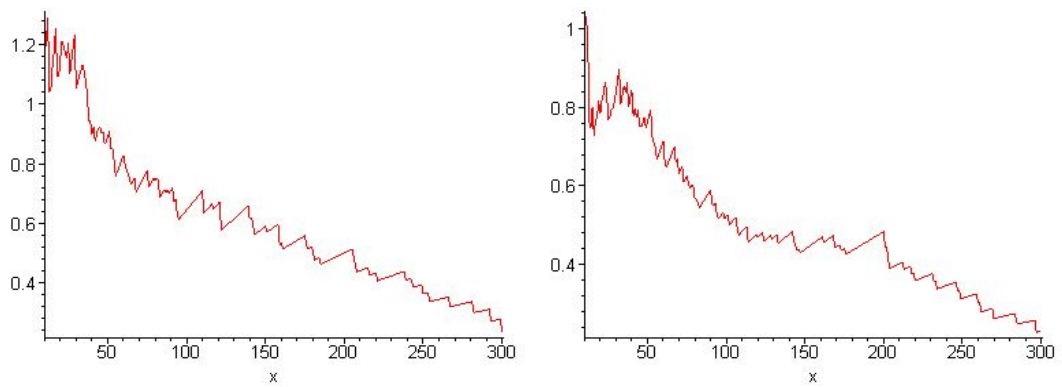


Figura 5.11:  $\hat{\alpha}_n^R(k)$  e  $\hat{\alpha}_n^L(k)$  correspondentes a México e Sri Lanka, para vários valores de  $k$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Araujo, A. e Giné, E. *The central Limit Theorem for real and Banach value random variables*. Wiley, New York, 1980.
  - [2] Asmussen, S. *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapura, 2000.
  - [3] Bingham, N.H., Goldie, C.M. e Teugels, J.L. *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1987.
  - [4] Bose, J.L., Dasgupta, A. e Rubin, H. *A Contemporary Review and Bibliography of Infinitely Divisible Distributions and Processes*. Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Vol.64, series A, Pt. 3, pp 763-819, 2002.
  - [5] Castro, C.R.M. *Intervalos de confiança e precisão de cobertura para o estimador caudal de Hill*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 2003.
  - [6] Cheng, B. e Rachev, S.T. *Multivariate stable commodities in the futures market*. Journal Mathematical Finance, 5, 133-159, 1995.
  - [7] Chung, K.L. *A Course in Probability Theory*, 2nd Ed., Academic Press, New York, U.S.A., 1974.
  - [8] Cline, D.B.H. *Convolution tails, product tails and domains of attraction*. Probability Theory Related Fields 72 (4), 529 -557.
  - [9] Gupta, H.M e Campanha, J.R. *The gradually truncated Lévy flight for systems with power-law distributions*. Physica A, vol.268, 231-239, 1999.
-

- 
- [10] Dorea, C.C.Y. e Miasaki, E.S. *Asymptotic test for independence of extreme values*. Acta Mathematica Hungaricae, vol. 62, 343- 347, 1993.
- [11] Dorea, C.C.Y., Guevara Otiniano, C.E., Matsushita, R. e Rathie, P.N. *Lévy Flight Approximations for Scaled Transformations of Random Walks*. Preprint (2005) (a aparecer).
- [12] Dorea, C.C.Y. e Sastrosoewignjo, S. *Bivariate CDF iterations and asymptotic independence*. Journal of Multivariate Analysis, vol 23, 276-289, 1987.
- [13] Daley, D. J. *The Moment Index of Minima*. J. Appl. Probab. 38A, 2001.
- [14] Embrechts, P.F., Mikosch, T. e Kluppelberg, C. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 1997.
- [15] Embrechts, P.F., Lindskog, F. e McNeil, A. *Modelling Dependence with Copulas and Application to Risk Management*, ETHZ Zurich, <http://www.math.ethz.ch/finance>, 2001.
- [16] Embrechts, P.F., McNeil, A. e Stratusman, D. *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls* , ETHZ Zurich, <http://www.math.ethz.ch/finance>,1999.
- [17] Fama, E. *The behavior of stock market prices*. Journal Business, 38, 34-105,1965.
- [18] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications II*. Wiley, New York, 1971.
- [19] Galambos, J. *The Asymptotic theory of Extremes Order Statistic*, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [20] Genest, C. e Rivest, L.P. *Statistical inference procedures for bivariate Arquimedean copulas*.Journal of the American Statistical Association, 88, 1034-1043, 1993.
- [21] Gnedenko, B.V. e Kolmogorov, A.N. *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables*. Addison- Wesley, Cambridge, Mass., 1954.
-

- 
- [22] Hill, B.M. *A simple general approach to inference about the tail of a distribution*, Annals of Statistics, vol.3, 1163-1174, 1975.
- [23] Ibragimov, I.A. e Linnik, Yu. V. *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*. Wolters- Noordhoff, Groningen, 1971.
- [24] Kuelbs, J. *A representatio theorem for symmetric stable processes and stable measures on  $H$* . Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 26, 259-271, 1973.
- [25] Klugman, S.A. e Parsa, R. *Fitting bivariate loss distribution with copulas*. Insurance: Matematics and Economics 24, 139-148,1999.
- [26] Lévy, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Bulletin de la Société de France, 52:49-85, 1924.
- [27] Mandelbrot, B. *The variation of certain speculative prices*, Journal Business 36, 394-419, 1963.
- [28] Mantegna, R.N. e Stanley, H.E. *Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: the truncated Lévy flight*, Physical Review Letters, vol.73, 2946-2949, 1994.
- [29] Mantegna, R.N. e Stanley, H.E. *Scaling behavior in the dynamics of an economic index*, Nature, vol.376, 46-49, 1995.
- [30] Matsushita, R., Rathie, P. N. e da Silva, S. *Exponentially damped Lévy flight*, Physica A, vol.326, 544-555, 2003.
- [31] Marshall, A. W. e Olkin, I. *Domain of Attraction of Multivariate Extreme Value Distributions*, The Annals of Probability, Vol1. 11, No 1., 168-177,1983.
- [32] Nakao, H. *Multi-scaling properties of truncated Lévy flight*, Physics Letters A, vol.266, 282-289, 2000.
- [33] Nelsen, R. *An Introdotion to Copulas*. Springer, New York, 1999.
-

- 
- [34] Nikias, C.L. e Shao, M. *Signal Processing whit Alpha-Stable Distributions and Applications*, Wiley, NY, NY, 1995.
- [35] Nolan, J.P. *Numerical computation of stable sensities and sistribution functions*.Comm. in Stat. -Stochastic Models, 13: 759-774, 1997.
- [36] Nolan, J.P., Panorsa, A.K. e McCulloch, J.H. *Estimation of stable spectral measures*. To appear in *Mathematical and Computer Modelling*,2001. Available from [http://www.cas.american.edu/jpnolan/.](http://www.cas.american.edu/jpnolan/),
- [37] Rachev, S. T. e Xin, H. *Test on associatios of randon variables in the domain of attraction of a multivariate stable law*. Prob. Math. Statist. 14, 125-141, 1993.
- [38] Rao, M. M. *Probability Theory with Applications*, Orlando: Academic Press, 1984.
- [39] Reiss, R. D. e Thomas, M. *Statistical Analysis of Extreme Values: which Applications to Insurance, Finance, Hydrology and other Fields*,2. ed. Basel; Boston; Berlin: Birkhauseer, 2001.
- [40] Resnick, S.I. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, London Paris Tokyo, 1987.
- [41] Samorodnitski, G. e Taquq, M. S. *Stable non-Gaussian Random Processes, Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall, London, UK. 1994.
- [42] Sklar, A. *Randon variables , distributions functions, and copulas-a personal look bacward and forward, in Distribution with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. by L. Ruschendorff, B. Schweizer, and M. Tayloy, pp. 1-14. Institute of mathematical Statistics, Hayward, CA., 1996.
- [43] Tang, Q. e Tsitsiashvili, G. *Precise estimates for Ruin Probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks*. Stocastic Processes and their Applications 108(299-325), 2003.
-

- [44] Zorolâtev, V. M. *One-dimensional Stable Distributions*, Amer. math. Soc. Transl. of Math. Monographs, vol. 65 Amer. math. Soc., Providence, RI. (Transl. of the original 1983 Russian).
-

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)